

## Chapitre 3

# Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres<sup>1</sup>

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
3.1.1	Un premier tour d'horizon	76
3.1.2	Structure cohérente, POD et contrôle de la turbulence	76
<b>3.2</b>	<b>Méthode d'approximation</b>	<b>77</b>
<b>3.3</b>	<b>La Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)</b>	<b>79</b>
3.3.1	Définition	79
3.3.2	Interprétations géométriques de la SVD	79
3.3.3	Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres	81
3.3.4	Approximation de rang minimum de $A$	82
3.3.5	Liens entre POD et SVD	82
<b>3.4</b>	<b>La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)</b>	<b>83</b>
3.4.1	L'équation de Fredholm	84
3.4.2	Propriétés des fonctions de bases POD	86
3.4.3	Optimalité de la base POD	87
3.4.4	Discussion sur la réduction de modèle	87
<b>3.5</b>	<b>Les différentes approches</b>	<b>89</b>
3.5.1	Choix des réalisations	89
3.5.2	Choix du produit scalaire	90
3.5.3	Méthode classique	91
3.5.4	Méthodes des snapshots	92
3.5.5	Propriétés communes des deux approches POD	94
3.5.6	Méthode des snapshots ou POD classique?	94

### 3.1 Introduction

La **Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres** ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est une technique élégante et très efficace d'analyse de données, qui permet d'approximer un système de dimension élevée par un autre de dimension nettement plus faible (Antoulas et Sorensen, 2001). Essentiellement, cette

1. Pour l'essentiel, ce chapitre est fidèle à la présentation de la POD réalisée dans le cadre de cours donnés à l'Institut Von Kármán (Cordier et Bergmann, 2002a). Des compléments, en particulier sur l'application de la POD à la modélisation d'écoulements turbulents par système dynamique d'ordre faible, pourront être trouvés dans Berkooz *et al.* (1993); Cordier (1996); Holmes *et al.* (1996).

méthode est une procédure linéaire<sup>2</sup>, qui consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux représentatifs par définition (équation 3.12) des réalisations les plus probables. Ces modes propres sont obtenus par résolution d’une équation intégrale de Fredholm (équation 3.14) dont le noyau est construit à partir d’un ensemble de données provenant selon le cas de simulations numériques ou d’expériences. Enfin, on peut montrer que ces fonctions propres sont optimales au sens de la représentation énergétique (§ 3.4.3), ce qui nous permet d’espérer pouvoir les utiliser pour construire un modèle réduit de dynamique de l’écoulement (chapitre 4).

### 3.1.1 Un premier tour d’horizon

Historiquement, la POD a été **introduite en turbulence** par Lumley comme une méthode objective permettant d’identifier et d’extraire les structures cohérentes d’un écoulement (lire Adrian *et al.*, 1996, pour une discussion générale sur les structures cohérentes et une présentation des méthodes usuelles de détection). Intuitivement, la POD peut être vue comme une idée naturelle pour remplacer<sup>3</sup> la décomposition de Fourier lorsque les directions de l’écoulement ne peuvent plus être supposées homogènes ou périodiques. Ce problème étant assez général, cela explique que la décomposition orthogonale ait été redécouverte de manière régulière au siècle dernier. En effet, la POD est encore connue dans d’autres domaines scientifiques sous le nom de Décomposition de Karhunen-Loève (Karhunen, 1946; Loève, 1955) ou analyse d’Hotelling (Hotelling, 1933) et elle possède des liens très étroits avec l’Analyse en Composantes Principales (Jolliffe, 1986) et surtout, comme on le verra à la section 3.3, avec la Décomposition aux Valeurs Singulières (Golub et Van Loan, 1990) ou *Singular Value Decomposition*, (SVD). Au delà du domaine historique d’application lié à la turbulence, la POD couvre maintenant un vaste domaine d’utilisations regroupant toutes sortes de disciplines. On la retrouve par exemple dans des applications au traitement d’images pour la caractérisation de visages humains (Kirby et Sirovich, 1990) ou pour l’étude de l’activité neuronale (Sornborger *et al.*, 2003), en analyse de signal (Algazi et Sakrison, 1969), en compression de données (Andrews *et al.*, 1967) et beaucoup plus récemment en contrôle optimal (Ravindran, 2000a,b; Afanasiev et Hinze, 2001). Le point central de toutes ces applications est l’extraction des caractères dominants d’un ensemble de données, permettant d’accéder ainsi à une réduction de modèle.

### 3.1.2 Structure cohérente, POD et contrôle de la turbulence

Dans cette section, notre objectif n’est pas de réaliser une étude bibliographique exhaustive de toutes les applications de la POD à des écoulements turbulents car elle sont nombreuses et variées. Nous renvoyons le lecteur, intéressé par plus d’informations sur ce sujet, aux très bonnes revues bibliographiques que l’on peut trouver dans Holmes *et al.* (1996); Delville *et al.* (1999) et dans l’annexe de Gordeyev (1999). Plus modestement, l’objet de ce paragraphe est de sensibiliser le lecteur au rôle que peuvent jouer les structures cohérentes sur le contrôle d’écoulement turbulent et l’importance de leur prise en compte par des outils de modélisation adaptés.

L’importance des structures cohérentes **pour** la compréhension et la modélisation des écoulements turbulents est maintenant clairement reconnue (Bonnet et Delville, 2002, par exemple). En effet, d’un point de vue énergétique, la contribution des structures cohérentes à l’énergie totale de l’écoulement varie, selon les cas, de 10% (couche limite, jet lointain) à 25% (couche de mélange, sillage, jet en champ proche). Par ailleurs, d’un point de vue dynamique, les structures cohérentes jouent un rôle très important dans les processus de mélange, ainsi que pour la génération de bruit ou la création de traînée par exemple. Par conséquent, contrôler des écoulements turbulents en agissant sur les structures cohérentes a rapidement été considéré comme une direction de recherche prometteuse (Aubry *et al.*, 1988; Ukeiley *et al.*, 2001).

La proposition faite par Lumley en 1967 d’extraire les structures cohérentes d’un écoulement turbulent par POD est très attractive. En effet, comparée à d’autres techniques d’identification<sup>4</sup> utilisées jusqu’alors, la POD ne nécessite pas de connaissance *a priori* de l’écoulement. Par POD, les structures cohérentes sont

2. Pour s’en convaincre, il suffit de regarder l’équation (3.27). Cependant, ce n’est pas parce que le processus est linéaire que la POD est limitée aux systèmes linéaires (voir tableau 3.1).

3. On peut démontrer (Cordier et Bergmann, 2002a) que la POD est une généralisation de la décomposition de Fourier aux directions inhomogènes ou non périodiques d’un écoulement.

4. Grossièrement, les méthodes d’extraction de structures cohérentes appartiennent à trois catégories (Bonnet et

définies sans ambiguïtés et de manière unique comme la réalisation de l'écoulement qui possède la plus grande projection en moyenne sur l'ensemble des réalisations contenues dans la base de données (équation 3.12). Par ailleurs, les fonctions propres POD sont optimales au sens énergétique, dans le sens où aucune autre base n'est capable de capturer une aussi grande quantité d'énergie avec le même nombre de modes (section 3.4.3). A titre d'illustration, le lecteur trouvera dans Cordier et Bergmann (2002b) une application de la POD à l'extraction des structures cohérentes tridimensionnelles d'un écoulement de couche de mélange simulé par Simulation aux Grandes Echelles.

Jusqu'ici la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres a été présentée uniquement comme une technique particulière d'analyse de données. Cependant, la POD peut également être vue comme une **méthode efficace de construction d'un système dynamique d'ordre réduit**, pouvant décrire l'évolution temporelle des structures cohérentes. Le principe, qui sera détaillé au chapitre 4 où on trouvera une application au cylindre circulaire manipulé, consiste à projeter (projection de Galerkin) les équations d'état du système (généralement les équations de Navier-Stokes) sur le sous-espace engendré par les fonctions propres POD. Après quelques manipulations algébriques, on aboutit alors à un système d'équations différentielles ordinaires qui peut être facilement intégré en temps pour décrire la dynamique temporelle de l'écoulement. Finalement, les fonctions propres POD étant optimales au sens de l'énergie, seul un très petit nombre de modes POD est nécessaire pour décrire correctement l'évolution dynamique du système. Récemment, les modèles d'ordre réduit basés sur la POD ont reçu un regain d'intérêt (Graham *et al.*, 1999a,b; Fahl, 2000; Volkwein, 2001), notamment pour des applications liées au contrôle de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles d'ordre élevé et, en particulier, pour le contrôle d'écoulement. C'est précisément la démarche qui sera suivie dans le reste du mémoire. Cependant, il faudra apporter un soin tout particulier à la prise en compte de manière implicite (via les fonctions propres POD) et/ou explicite (via les conditions aux limites) de la loi de contrôle recherchée. En effet, jusqu'à une époque récente, le système réduit POD construit pour un écoulement non manipulé, était utilisé sans modifications pour développer des méthodologies de contrôle d'écoulement. Or, les fonctions propres POD, en tant que modes intrinsèques de l'écoulement, sont connues (Prabhu *et al.*, 2001) pour dépendre des conditions (géométrie, contrôle) utilisées pour assembler la base de données servant à la détermination des modes POD. Nous décrirons aux sections 4.3.2 et 5.4.2, respectivement pour la prise en compte explicite et implicite du contrôle dans le modèle réduit POD, la méthode utilisée dans le cas de l'écoulement de sillage manipulé.

Dans ce chapitre, nous allons réaliser une présentation aussi rigoureuse<sup>5</sup> que possible de la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres. La POD est d'abord introduite dans le contexte général des méthodes d'approximation (section 3.2). Puis, étant donné que la POD peut être considérée comme un cas particulier de décomposition aux valeurs singulières, nous définissons, dans un premier temps la SVD (§ 3.3), avant de préciser leurs liens à la section 3.3.5. Par la suite (§ 3.4), nous décrivons la décomposition orthogonale dans un contexte statistique approprié aux écoulements turbulents. Finalement à la section 3.5, nous discutons des différentes approches utilisées en pratique pour déterminer les fonctions propres POD. Nous insisterons tout particulièrement sur les différences existant entre la méthode classique (§ 3.5.3) et la méthode des snapshots (§ 3.5.4) qui sera utilisée tout au long de ce mémoire.

## 3.2 Méthode d'approximation

Une première manière d'introduire la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres, est de le faire en suivant le point de vue de Chatterjee (2000) et de considérer pour cela le cadre général des méthodes d'approximation (Rivlin, 1981).

---

Delville, 2002) :

1. les techniques de visualisation : PIV (*Particle Image Velocimetry*), PFV (*Pseudo Flow Visualisation*),
2. les méthodes conditionnelles qui reposent sur des critères donnés *a priori* supposés caractériser les structures cohérentes. Citons la méthode des quadrants, les techniques VITA/VISA, ...
3. les méthodes non conditionnelles : corrélations spatio-temporelle, analyse spectrale, POD.

La reconnaissance de formes (*Pattern Recognition Analysis*), l'estimation stochastique linéaire (*Linear Stochastic Estimation*) et les ondelettes sont considérées à la fois comme une méthode conditionnelle et une méthode non conditionnelle.

5. Encore une fois, on ne prétend cependant pas à toute la rigueur mathématique.

Le problème à résoudre peut s'énoncer de la manière suivante : comment approcher une fonction<sup>6</sup>  $u$ , dépendante des variables d'espace  $\mathbf{x}$  et de temps  $t$ , par une somme finie de termes s'écrivant comme un produit de fonctions à variables séparées du type :

$$u(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{k=1}^K a_k(t) \Phi_k(\mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Evidemment, on peut s'attendre à ce que cette approximation devienne exacte lorsque le nombre de termes  $K$  de la sommation devient infinie. Cependant, puisque cette représentation n'est certainement pas unique, il est logique de chercher à vouloir construire la meilleure<sup>7</sup> approximation possible pour une valeur de  $K$  donnée. Nous allons montrer qu'en choisissant une représentation au sens de la norme euclidienne  $\mathcal{L}_2$ , la solution du problème est donnée par la décomposition aux valeurs singulières.

Généralement, pour résoudre ce problème d'approximation, on considère que les fonctions de base  $\Phi_k$  qui interviennent dans le développement (3.1) sont des fonctions connues *a priori* comme les polynômes de Chebychev ou de Legendre, ou encore des fonctions trigonométriques. Une autre manière de résoudre ce problème est de considérer des fonctions  $\Phi_k$  intrinsèques par nature à la fonction  $u$  à approximer. Comme on va le voir, cette approche est celle qui conduit à la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres.

Une autre difficulté de ce problème d'approximation est qu'à chaque famille de fonctions de base  $\Phi_k$  est associé un ensemble de fonctions temporelles  $a_k(t)$ . Par conséquent, connaissant les fonctions de base  $\Phi_k$ , comment déterminer le plus simplement possible les coefficients de projection temporelle  $a_k(t)$ ? Supposons que nous avons choisi pour fonctions  $\Phi_k$  une base orthonormale pour le produit scalaire canonique, *i.e.*

$$\int_{\Omega} \Phi_{k_1}(\mathbf{x}) \Phi_{k_2}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{k_1 k_2} = \begin{cases} 0 & \text{for } k_1 \neq k_2, \\ 1 & \text{for } k_1 = k_2, \end{cases}$$

où  $\delta_{k_1 k_2}$  est le symbole de Kronecker.

Le produit scalaire de la relation (3.1) par une fonction de base  $\Phi_l$  quelconque donne alors immédiatement l'expression :

$$a_l(t) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) \Phi_l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (u(\mathbf{x}, t), \Phi_l(\mathbf{x})),$$

où la notation  $(\cdot, \cdot)$  représente le produit scalaire de deux fonctions.

Par conséquent, pour une famille de fonctions orthonormées, le coefficient  $a_k$  dépend seulement de la fonction  $\Phi$  d'ordre  $k$  et non des autres fonctions. En terme de simplification, imposer l'orthonormalité à la famille de fonctions  $\Phi_k$  paraît donc intéressant.

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, nous allons maintenant chercher à déterminer, une fois pour toutes, une famille de fonctions orthonormales  $\Phi_k$  telles que l'approximation (3.1), à un ordre  $K$  quelconque, soit aussi bon que possible au sens des moindres carrés. Pour cela, nous allons supposer que l'on connaît les valeurs de la fonction  $u$  en  $M$  localisations spatiales  $x_1, x_2, \dots, x_M$  (aux noeuds du maillage par exemple) et cela en  $N_t$  instants différents. Résoudre le problème d'approximation (3.1) est alors équivalent à déterminer la base orthonormée  $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^K$  avec  $K \leq N_t$  solution du problème :

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \|u(\mathbf{x}, t_i) - \sum_{k=1}^K (u(\mathbf{x}, t_i), \Phi_k(\mathbf{x})) \Phi_k(\mathbf{x})\|_2^2. \quad (3.2)$$

Pour faciliter la résolution de ce problème de minimisation, l'ensemble des réalisations  $\mathcal{U} = \{u(\mathbf{x}, t_1), \dots, u(\mathbf{x}, t_{N_t})\}$  de la fonction  $u$  est généralement rangé dans la matrice suivante, appelée encore **matrice des Snapshots**

$$A = \begin{pmatrix} u(x_1, t_1) & u(x_1, t_2) & \cdots & u(x_1, t_{N_t-1}) & u(x_1, t_{N_t}) \\ u(x_2, t_1) & u(x_2, t_2) & \cdots & u(x_2, t_{N_t-1}) & u(x_2, t_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u(x_M, t_1) & u(x_M, t_2) & \cdots & u(x_M, t_{N_t-1}) & u(x_M, t_{N_t}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N_t} \quad (3.3)$$

6. Cette fonction est éventuellement vectorielle. Par ailleurs, on considère que les variables d'espace et de temps sont telles que  $\mathbf{x} \in \Omega$   $t \in [0, T]$ .

7. Il faut naturellement convenir du sens à donner à cet adjectif.

On constate que chaque colonne  $i$  de la matrice  $A$  représente, à un instant donné  $t_i$ , une réalisation de  $\mathcal{U}$ . Par conséquent, si les données utilisées pour construire la matrice des Snapshots sont considérées<sup>8</sup> comme linéairement indépendants, alors le rang de la matrice  $A$  est maximal.

La solution du problème de minimisation (3.2) est donnée par la **Décomposition aux Valeurs Singulières Tronquée** (*Truncated Singular Value Decomposition*) à l'ordre  $K$  de la matrice des snapshots  $A$ . Par conséquent, dans la section suivante, nous allons introduire la Décomposition aux Valeurs Singulières, avant de faire le lien explicite entre SVD et Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres à la section (3.3.5).

### 3.3 La Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD)

Pour des raisons de simplicité, et parce que c'est le cas général en Mécanique des Fluides, nous allons définir la décomposition aux valeurs singulières d'une matrice  $A$  en se limitant au cas où  $A$  est à valeurs réelles. Une extension au cas où  $A$  serait à valeurs complexes est présentée dans Cordier et Bergmann (2002a).

#### 3.3.1 Définition

Soit  $A$  une matrice réelle de dimension  $M \times N_t$  alors la Décomposition aux Valeurs Singulières de  $A$  est la factorisation (Golub et Van Loan, 1990) :

$$A = U \Sigma V^T, \quad (3.4)$$

où  $U$  et  $V$  sont des matrices orthogonales<sup>9</sup>, respectivement de dimension  $M \times M$  et  $N_t \times N_t$  et où  $\Sigma$  est une matrice diagonale contenant les éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , appelées valeurs singulières de  $A$  (et de  $A^T$ ), telles que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$  où  $r = \min(M, N_t)$ . Le rang de la matrice  $A$  est égal au nombre de valeurs singulières non nulles que possède la matrice  $A$ .

Par ailleurs, les  $r$  premières colonnes respectivement de  $V = (v_1, v_2, \dots, v_{N_t})$  et de  $U = (u_1, u_2, \dots, u_M)$  sont dénommées vecteurs singuliers droit et gauche de  $A$ . Enfin, puisque les valeurs singulières de  $A$  sont rangées en ordre décroissant, l'index  $i$  correspondant est appelé numéro d'ordre de valeurs singulières.

Le calcul direct des valeurs singulières  $\sigma_i$  et vecteurs singuliers  $U$  et  $V$  associés est souvent fastidieux, et il est préférable de les déterminer par la résolution de problèmes aux valeurs propres équivalents (§ 3.3.3).

#### 3.3.2 Interprétations géométriques de la SVD

##### Structure géométrique d'une matrice

A toute matrice  $A$  de dimension  $M \times N_t$ , il est possible d'associer une application linéaire qui envoie tout vecteur de  $\mathcal{E}_{N_t}$ , espace vectoriel de dimension  $N_t$ , dans  $\mathcal{E}_M$ , espace vectoriel de dimension  $M$ . Soit la sphère unité dans  $\mathcal{E}_{N_t}$  i.e. l'ensemble des vecteurs de longueur unité, multiplier ces vecteurs par la matrice  $A$  donne de nouveaux vecteurs qui définissent une ellipsoïde de dimension  $r$  dans l'espace  $\mathcal{E}_M$ , où  $r$  est le nombre de valeurs non singulières de  $A$ . Les valeurs singulières  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  correspondent aux longueurs respectives des axes principaux de cet ellipsoïde (figure 3.1). Intuitivement donc, les valeurs singulières caractérisent le facteur de déformation que va subir chacun des vecteurs initiaux par action de  $A$ . Par ailleurs, puisque la matrice  $V$  est orthogonale, l'équation (3.4) s'écrit encore  **$AV = U\Sigma$** . Les directions de ces axes principaux sont donc données par les colonnes de  $U$  et les antécédents de ces mêmes axes par les colonnes de  $V$ . Une seconde interprétation géométrique est donnée à la section suivante.

En raison de l'interprétation de la matrice  $A$  en terme d'algèbre linéaire, il est maintenant évident que la norme 2 de la matrice  $A$  est égale à  $\sigma_1$ :

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 = \sigma_1. \quad (3.5)$$

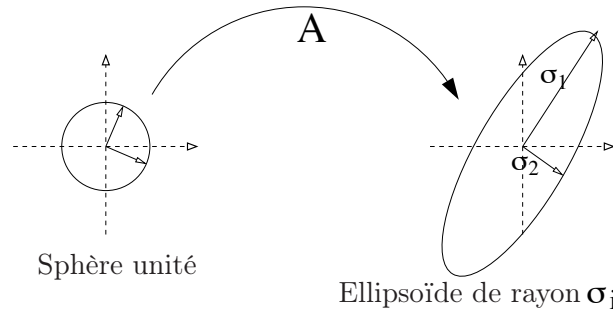


FIGURE 3.1 – *Interprétation géométrique de la SVD d'une matrice  $A$  : image par  $A$  de la sphère unité.*

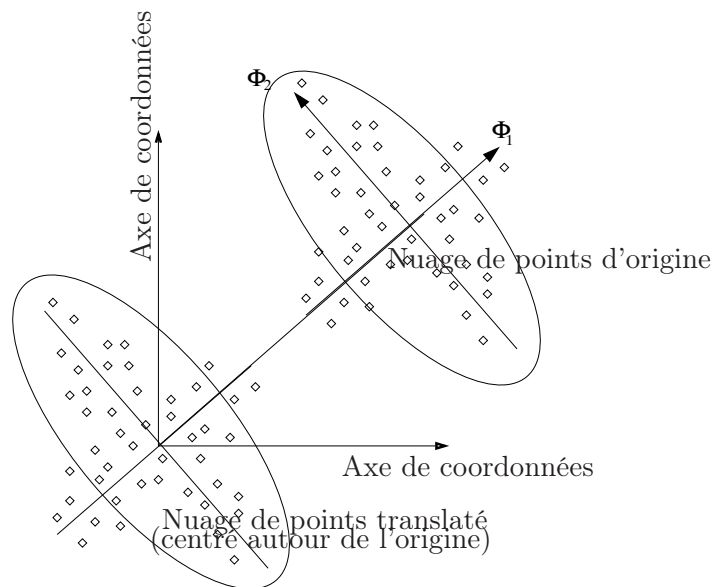


FIGURE 3.2 – *Interprétation géométrique de la SVD d'une matrice  $A$  : rotation de l'espace des phases.*

### Rotation dans l'espace des phases

Une seconde interprétation géométrique peut être donnée à la SVD. Pour cela, nous considérons la matrice  $A$  de dimension  $M \times N_t$  comme la liste des coordonnées de  $M$  points notés  $P_1, P_2, \dots, P_M$  dans un espace vectoriel de dimension  $N_t$ . Chaque point  $P$  est représentée sur la figure 3.2 à l'aide d'un petit losange. Quel que soit  $k \leq N_t$ , nous cherchons un sous-espace de dimension  $k$  tel que la distance quadratique moyenne de l'ensemble de ces points à ce sous-espace soit minimisée, en d'autres termes nous cherchons le vecteur  $\Phi_1$  tel que  $\sum_{i=1}^M |\mathbf{H}_i \mathbf{P}_i|^2$  soit minimisée où les points  $H_i$  correspondent aux projections orthogonales des points  $P_i$  sur la droite de vecteur directeur  $\Phi_1$ . Cette procédure mathématique peut être géométriquement interprétée comme une rotation de l'espace des phases, du système de coordonnées initiales à un nouveau système de coordonnées dont les axes orthogonaux coïncident avec les axes d'inertie des données. Cette formulation de la SVD correspond précisément à la manière utilisée généralement dans la littérature pour introduire l'Analyse en Composantes Principales (Joliffe, 1986).

Quand la Décomposition aux Valeurs Singulières est utilisée pour l'analyse de données, l'algorithme SVD est généralement appliquée à une matrice, obtenue à partir de la matrice  $A$ , par soustraction à chacune des colonnes de sa moyenne. Cette translation de moyenne assure ainsi que le nuage des  $M$  points est centré autour de l'origine du système de coordonnées (voir figure 3.2).

#### 3.3.3 Liens entre SVD et problèmes aux valeurs propres

Dans cette section, nous allons proposer une méthode de calcul des valeurs singulières et des vecteurs singuliers gauche et droit d'une matrice rectangulaire  $A$  quelconque. Cette méthode est basée sur la résolution de problèmes aux valeurs propres associés à des matrices carrées  $A^T A$  et  $A A^T$ . Ces matrices peuvent s'interpréter comme une représentation discrète du tenseur des corrélations spatio-temporelles en deux points qui sera introduit à la section 3.4.1.

Soit  $A$ , une matrice rectangulaire de dimension  $M \times N_t$ , sa décomposition aux valeurs singulières s'écrit (§ 3.3.1) :

$$A = U \Sigma V^T.$$

Par conséquent, en multipliant les deux membres de cette équation par  $A^T$  à gauche, on obtient une matrice de dimension  $N_t \times N_t$  donnée par :

$$\begin{aligned} A^T A &= V \Sigma U^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^2 V^T. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Or, puisque  $A^T A$  est une matrice hermitienne<sup>10</sup>, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et, par conséquent, sa décomposition sur la base propre s'écrit

$$A^T A = W \Lambda W^{-1} = W \Lambda W^T \quad (3.7)$$

où  $W$  est une matrice orthogonale de dimension  $N_t \times N_t$ . Par comparaison des deux expressions (3.6) et (3.7) de  $A^T A$ , on trouve que  $\Sigma^2 = \Lambda$  et  $W = V$ . En d'autres termes,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  et  $(V, \Lambda)$  représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice  $A^T A$ .

En appliquant une démarche similaire à la matrice  $A A^T$ , on trouve successivement  $A A^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T = W \Lambda W^T$  ce qui nous permet de conclure que  $(U, \Lambda)$  représente la décomposition aux valeurs propres de la matrice  $A A^T$ .

A ce stade, on constate que lorsque  $N_t \ll M$ , la résolution du problème aux valeurs propres lié à la matrice  $A^T A$  est bien moins coûteux numériquement que la résolution du problème équivalent pour la matrice  $A A^T$ . Cette remarque explique qu'il existe en pratique deux approches différentes pour la POD. On montrera plus tard que la matrice  $A^T A$  est liée à la *méthode des snapshots* (§ 3.5.4) alors que la matrice  $A A^T$  est liée à la *méthode classique* (§ 3.5.3). Cela explique que la méthode classique est utilisée de préférence lorsque  $N_t \gg M$ .

8. Ce sera, en particulier le cas à la section 3.5.4 pour la méthode des snapshots.

9. On rappelle que pour une matrice orthogonale quelconque  $A$ , on vérifie  $A^{-1} = A^T$ .

10. Ici symétrique car la matrice  $A$  est considérée à valeurs réelles.



On voit que dans le cas où  $N_t \ll M$ , cette méthode de calcul est bien plus légère que le calcul direct de la SVD de  $A$ . L'application de cette méthode dans le contexte de la POD est appelée *méthode des snapshots* (§3.5.4).

### 3.3.4 Approximation de rang minimum de $A$

Soit  $A \in \mathbb{R}^{M \times N_t}$  une matrice, déterminer une matrice  $X$  de même taille que  $A$  mais de rang  $k$  inférieur et qui soit telle qu'une certaine norme de l'erreur  $A - X$  soit minimale, est un problème classique. Ce problème peut être résolu explicitement pour toute norme unitaire invariante. Pour la norme de Frobenius<sup>11</sup> par exemple<sup>12</sup>, la solution de ce problème est donnée par le théorème d'Eckart-Young (Higham, 1989), soit :

$$\min_{\text{rang}(X) \leq k} \|A - X\|_F = \|A - A_k\|_F = \left( \sum_{j=k+1}^r \sigma_j^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

où

$$A_k = U \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \dots + \sigma_k u_k v_k^T$$

avec  $\Sigma_k$ , matrice obtenue à partir de  $\Sigma$ , en considérant que  $\sigma_{k+1} = \sigma_{k+2} = \dots = \sigma_r = 0$ .

Ce théorème établit une relation entre le rang  $k$  de l'approximation  $X$  de  $A$  et la valeur singulière de numéro d'ordre  $(k+1)$  de  $A$ . Par conséquent, si les valeurs singulières décroissent suffisamment rapidement alors nous pouvons espérer déterminer une approximation de  $A$  possédant un rang très faible. Le lecteur trouvera une application de ce résultat à la compression d'images dans Cordier et Bergmann (2002a).

### 3.3.5 Liens entre POD et SVD

Dans cette section, nous discutons des liens existants entre la POD et la SVD. Notre présentation suit le point de vue de Fahl (2000), mais un traitement similaire pourra être également trouvé dans Atwell et King (1999). Enfin, le lecteur pourra se reporter à Volkwein (1999) pour les démonstrations mathématiques.

On considère ici que les réalisations  $u$ , éléments de l'ensemble  $\mathcal{U}$  introduit à la section 3.2, sont obtenues à l'aide d'une simulation numérique par éléments finis. Par conséquent, toute fonction  $u$  peut se décomposer sur la base éléments finis  $\{\varphi^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^n$  d'ordre  $n$ , sous la forme :

$$u(\mathbf{x}, t_i) = u^n(\mathbf{x}, t_i) = \sum_{j=1}^n u^{(j)}(t_i) \varphi^{(j)}(\mathbf{x}),$$

où la notation  $u^n$  correspond à une solution discrétisée par éléments finis.

Le produit scalaire de deux fonctions  $u$  et  $v$  peut alors être évalué de manière discrète par la relation :

$$(u, v)_{\mathcal{M}} = \mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{v} \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de masse éléments finis et où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , éléments de  $\mathbb{R}^n$ , sont les vecteurs constitués par les coefficients de  $u$  et  $v$ , écrits dans la base éléments finis, pour  $t = t_i$ . À l'aide d'une factorisation de Cholesky  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T$ , la norme associée au produit scalaire discret, défini par l'équation (3.9), peut se réécrire sous la forme d'une norme associée au produit scalaire canonique sur  $\mathcal{L}_2$ , soit :

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = (u, u)_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} = \|(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T \mathbf{u}\|_2.$$

11. La norme de Frobenius d'une matrice notée  $\|\cdot\|_F$  est définie comme la racine carrée de la somme des éléments élevés au carré.

12. Par exemple, la norme 2 définie par l'équation (3.5) peut être utilisée. Dans ce cas, le théorème d'Eckart-Young (3.8) s'écrit (Hubert *et al.*, 2000) :

$$\min_{\text{rank}(X) \leq k} \|A - X\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}(A) .$$



Le problème de minimisation (3.2) peut alors être reformulé en terme de la norme discrète construite sur le produit scalaire (3.9). On obtient pour nouveau problème de minimisation :

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \|u^n(\mathbf{x}, t_i) - \sum_{k=1}^K (u^n(\mathbf{x}, t_i), \Phi_k(\mathbf{x}))_{\mathcal{M}} \Phi_k(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (3.10)$$

où la base de fonctions propres POD  $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^K$  est supposée appartenir à l'espace vectoriel engendré par les fonctions de base éléments finis  $\{\varphi^{(j)}(\mathbf{x})\}_{j=1}^n$ , *i.e.* :

$$\Phi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \Phi_k^j \varphi^{(j)}(\mathbf{x}).$$

Afin de reformuler le problème d'approximation (3.10) dans le contexte d'un problème d'approximation matricielle<sup>13</sup>, nous collectons dans une matrice réelle  $\Psi$  de dimension  $n \times K$ , les coefficients des fonctions propres POD inconnues  $\{\Phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^K$  écrites sur la base éléments finis. Puisque<sup>14</sup> pour toute matrice  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times N_t}$ ,  $\sum_{i=1}^{N_t} \|\hat{A}_{:,i}\|_2^2 = \|\hat{A}\|_F$ , où  $\|\cdot\|_F$  représente la norme de Frobenius définie à la section 3.3.4, le problème de minimisation (3.10) est équivalent au problème de minimisation contraint suivant :

$$\min_{Z \in \mathbb{R}^{n \times K}} \|\hat{A} - ZZ^T \hat{A}\|_F^2 \quad \text{sous les contraintes} \quad Z^T Z = I_K \quad (3.11)$$

avec  $\hat{A} = (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T A$  et  $Z = (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T \Psi$ , éléments de  $\mathbb{R}^{n \times K}$ .

L'équation (3.11) indique que l'on cherche un sous-espace de dimension  $K$  tel que  $X = ZZ^T \hat{A}$  soit la meilleure approximation de  $\hat{A}$  de tous les sous-espaces de dimension  $K$ . D'après le théorème d'Eckart-Young énoncé à la section 3.3.4, la solution du problème d'approximation (3.11) est donnée par une décomposition en valeurs singulières de  $\hat{A}$  tronquée à l'ordre  $K$  :

$$\hat{A}_K = U_K \Sigma_K V_K^T$$

où  $U_K$  et  $V_K$  correspondent respectivement aux  $K$  premières colonnes de  $U$  et de  $V$ .

Finalement, en comparant l'expression de  $\hat{A}_K$  et la forme de  $X$ , nous trouvons que la matrice  $\Phi$  est solution du système linéaire suivant :

$$(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^T \Phi = U_K \in \mathbb{R}^{n \times K}.$$

Dans cette expression, les vecteurs singuliers gauche  $U$  de  $\hat{A} = U \Sigma V^T$  peuvent être obtenus directement comme les vecteurs propres de la matrice  $\hat{A} \hat{A}^T$  (§ 3.3.3). Cependant, comme on l'a déjà fait remarquer précédemment, il est préférable, lorsque la valeur de  $N_t$  est beaucoup plus petite que celle de  $n$ , d'évaluer les vecteurs propres de la matrice  $\hat{A}^T \hat{A}$ . Dans ce cas, les vecteurs singuliers droit  $V$  sont d'abord déterminés, puis on en déduit les vecteurs singuliers gauche  $U$  à l'aide de la relation  $U = \Sigma^{-1} \hat{A} V$ .

A titre de remarque, on peut mentionner que ces problèmes aux valeurs propres peuvent être résolus à l'aide de la librairie LAPACK<sup>15</sup> ou en utilisant des algorithmes dédiés qui reposent essentiellement sur les méthodes itératives de Lanczos (lire Fahl, 2000, pour un exemple d'algorithme).

## 3.4 La Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

Dans cette section, la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres est introduite dans l'esprit de Holmes *et al.* (1996) comme une méthode permettant d'accéder à une meilleure compréhension des écoulements turbulents. Jusqu'ici la POD a été présentée uniquement comme une technique performante de post-traitement, permettant d'extraire les structures cohérentes de données provenant de simulations numériques ou d'expériences. Par la suite, nous allons considérer que la POD permet également de fournir des fonctions de base

13. et de pouvoir ainsi utiliser le théorème d'Eckart-Young (§ 3.3.4)

14.  $A_{:,i}$  représente ici la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ .

15. <http://www.netlib.org/lapack/>

qui peuvent être utilisées pour définir un sous-espace de faible dimension sur lequel on pourra projeter les équations d'état. Cette idée a été pour la première fois appliquée par Aubry *et al.* (1988) pour modéliser la zone de proche paroi d'une couche limite et plus récemment par Ukeiley *et al.* (2001) pour étudier la dynamique des structures cohérentes dans une couche de mélange plane.

### 3.4.1 L'équation de Fredholm

Soit  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, t_n)$  une variable spatio-temporelle, considérons  $\{\mathbf{u}(\mathbf{X})\}$  un ensemble d'observations, encore appelées snapshots, obtenus en  $N_t$  instants différents  $t_n$  sur un domaine spatial noté  $\Omega$ . Par la suite, pour simplifier les notations, on considérera que  $\mathbf{X} \in \mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}^+$ . Selon le cas, ces observations seront des données expérimentales ou numériques correspondant à des champs de vitesse, de vorticité, de température, ... Par ailleurs, rien n'oblige *a priori* que les caractéristiques physiques du système ou les paramètres de contrôle (nombre de Reynolds, par exemple) soient les mêmes pour toutes les observations de la base de données (Christensen *et al.*, 1998). Le problème à résoudre consiste donc à extraire de ces champs considérés comme aléatoires, un mode dominant ou encore structure cohérente. D'après Lumley (1967), une structure cohérente correspond à la fonction déterministe la mieux corrélée en moyenne aux réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ . En d'autres mots, nous recherchons une fonction  $\Phi$  qui possède, au sens des moindres carrés, la plus grande projection sur les observations *i.e.* qui maximise la quantité  $|\langle \mathbf{u}, \psi \rangle|^2$ . Or, puisque nous cherchons uniquement à tester le parallélisme des fonctions  $\Phi$  avec les observations, la dépendance de l'amplitude de  $\Phi$  doit être supprimée. Une manière de le faire est de normaliser à 1, l'amplitude des fonctions  $\Phi$ . Par conséquent, il est naturel de s'intéresser à un espace de fonctions  $\Phi$  pour lequel le produit scalaire existe. Un choix naturel est donc d'imposer à  $\Phi$  d'appartenir à l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathcal{D}$ , soit  $\mathcal{L}_2(\mathcal{D})$ . Finalement, dans le but d'introduire les statistiques relatives à l'ensemble des observations, nous allons chercher à maximiser l'expression :

$$\frac{\langle |\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle|^2 \rangle}{\|\Phi\|^2}$$

sous une certaine moyenne (temporelle, spatiale, moyenne de phase, ...) notée ici  $\langle \cdot \rangle$  et que l'on précisera au cas par cas. Le choix de l'opérateur de moyenne est au cœur des différentes approches de la POD. Ce point sera discuté de manière détaillée à la section 3.5.

Par conséquent, d'un point de vue mathématique, la fonction  $\Phi$  correspond à la solution du problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\max_{\psi \in L^2(\mathcal{D})} \frac{\langle |\langle \mathbf{u}, \psi \rangle|^2 \rangle}{\|\psi\|^2} = \frac{\langle |\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle|^2 \rangle}{\|\Phi\|^2} \quad (3.12)$$

avec

$$(\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 1,$$

où<sup>16</sup>  $(\cdot, \cdot)$  et  $\|\cdot\|$  représentent respectivement le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{L}_2$  et la norme associée.

Nous allons montrer maintenant que le problème de maximisation (3.12) peut se reformuler sous la forme d'un problème aux valeurs propres. Pour cela, nous introduisons l'opérateur  $\mathcal{R} : L^2(\mathcal{D}) \rightarrow L^2(\mathcal{D})$  défini par :

$$\mathcal{R}\Phi(\mathbf{X}) = \int_{\mathcal{D}} R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}'$$

où  $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \rangle$  est le tenseur<sup>17</sup> des corrélations spatio-temporelles en deux points.

A condition de supposer que l'on peut permuter les opérations de moyenne et d'intégration, on obtient

16. En Mécanique des Fluides, on choisit généralement la norme sur  $\mathcal{L}_2$  car elle correspond à des écoulements d'énergie cinétique finie. Cependant, on verra à la section 3.5.2 que d'autres normes peuvent être utilisées.

17. Ici, nous nous plaçons délibérément dans le cas général où  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  est éventuellement à valeurs complexes. Par conséquent,  $\mathbf{u}^*$  correspond ici au conjugué du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ .

de manière évidente :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\Phi, \Phi) &= \left( \int_{\mathcal{D}} \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \rangle \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}', \Phi(\mathbf{X}) \right) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \langle \mathbf{u}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \rangle \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' \cdot \Phi^*(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \\
&= \left\langle \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{X}) \cdot \Phi^*(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}^*(\mathbf{X}') \cdot \Phi(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' \right\rangle \\
&= \langle |\langle \mathbf{u}, \Phi \rangle|^2 \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

En pratiquant de la même manière, on peut montrer également que

$$(\mathcal{R}\Phi, \Psi) = (\Phi, \mathcal{R}\Psi) \text{ quelles que soient } (\Phi, \Psi) \in [\mathcal{L}_2(\mathcal{D})]^2.$$

On en déduit alors que  $\mathcal{R}$  est un opérateur linéaire, auto-adjoint<sup>18</sup> et positif<sup>19</sup> sur  $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})$ . Par conséquent, la théorie spectrale s'applique (Riesz et Nagy, 1955; Courant et Hilbert, 1953) et garantit que le problème de maximisation (3.12) admet une solution égale à la plus grande valeur propre du problème

$$\mathcal{R}\Phi = \lambda\Phi \quad (3.13)$$

que l'on peut reformuler comme une équation intégrale de Fredholm, soit :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda \Phi_i(\mathbf{X}), \quad (3.14)$$

où  $n_c$  est le nombre de composantes de  $\mathbf{u}$ .

Les propriétés des fonctions propres  $\Phi_i(\mathbf{X})$  obtenues comme solutions de l'équation de Fredholm (3.14) seront discutées à la section 3.4.2. Ici, nous allons nous contenter de faire quelques remarques qui vont éclairer les contraintes liées à la POD.

Dans l'équation (3.14), l'intégrale  $\int_{\mathcal{D}} \cdot d\mathbf{X}'$  est définie sur tout le domaine  $\mathcal{D}$  considéré. Par conséquent, le tenseur des corrélations en deux points  $R_{ij}$  devra être connu sur tout le domaine  $\mathcal{D}$ . Le volume de données correspondant peut alors devenir rapidement très conséquent (plusieurs giga octets ne sont pas rares) et il est alors nécessaire de faire appel à une procédure de compression de données pour réduire la taille du stockage (Cordier et Bergmann, 2002b, par exemple). Cela explique en grande partie qu'il a fallu attendre les développements importants des méthodes numériques et expérimentales qui se sont produits au début des années 90 pour voir un renouveau de l'utilisation de la POD.

A titre de remarque, on peut constater que le problème de maximisation (3.12) revient encore à maximiser le quotient de Rayleigh défini par  $r(\Phi) = \frac{(\mathcal{R}\Phi, \Phi)}{\|\Phi\|^2}$  sous la contrainte que  $\|\Phi\|^2 = 1$ . Une condition nécessaire pour la solution est que le gradient du quotient de Rayleigh soit nul. Or, le gradient du quotient de Rayleigh se calcule de la manière suivante :

$$\nabla r(\Phi) = \frac{2}{\Phi^T \Phi} [\mathcal{R}\Phi - r(\Phi)\Phi],$$

et annuler celui-ci revient à imposer la condition :

$$\mathcal{R}\Phi = r(\Phi)\Phi.$$

Le quotient de Rayleigh  $r(\Phi)$  correspond donc à la valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{R}$  associée au vecteur propre  $\Phi$ . On retrouve ainsi le problème aux valeurs propres (3.13).

---

18. i.e.  $\mathcal{R}^\dagger = \mathcal{R}$  où l'adjoint de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}^\dagger$  est défini par la relation :

$$(\mathcal{R}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{R}^\dagger \mathbf{v}) \text{ quelles que soient } \mathbf{u} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{D}) \text{ et } \mathbf{v} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{D}).$$

19. i.e.  $(\mathcal{R}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  quelle que soit  $\mathbf{u} \in L^2(\mathcal{D})$ .

### 3.4.2 Propriétés des fonctions de bases POD

A l'exception de l'optimalité de la POD qui est discutée à la section 3.4.3, les propriétés principales des fonctions propres POD sont successivement présentées ici.

1. Dans un domaine d'intégration borné, la théorie de Hilbert-Schmidt (Riesz et Nagy, 1955) s'applique et assure l'existence d'une infinité dénombrable de solutions au problème (3.14). L'équation de Fredholm possède donc un ensemble discret de solutions satisfaisant

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \Phi_n^j(\mathbf{X}') d\mathbf{X}' = \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{X}) \quad (3.15)$$

où  $\lambda_n$  et  $\Phi_n^i$  représentent respectivement les valeurs propres et les fonctions propres POD d'ordre  $n = 1, 2, 3, \dots, +\infty$ . Chaque nouvelle fonction propre est déterminée comme solution du problème de maximisation (3.12) en imposant comme contrainte supplémentaire d'être orthogonale à toutes les fonctions propres trouvées précédemment. Ainsi, par construction, les fonctions propres sont orthogonales mais, pour des raisons pratiques, elles sont généralement choisies comme orthonormales (voir propriété 4).

2. L'opérateur  $\mathcal{R}$  étant auto-adjoint et positif, toutes ses valeurs propres sont réelles et positives. Quitte à les renuméroter, on peut toujours les indexer par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{+\infty} \geq 0.$$

Par ailleurs, ces valeurs propres forment une série convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty.$$

3. Les fonctions propres POD formant une base complète, toute réalisation  $\mathbf{u}$  pourra être reconstruite sur cette base :

$$u_i(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Phi_n^i(\mathbf{X}).$$

4. Par construction, les fonctions propres POD  $\Phi_n$  sont orthogonales deux à deux. Toutefois, il est toujours possible de leur imposer d'être orthonormales<sup>20</sup> et de vérifier :

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} \Phi_m^i(\mathbf{X}) \Phi_n^{i*}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \delta_{mn} \quad (3.17)$$

5. Les coefficients de projection de  $\mathbf{u}$  sur  $\Phi$ ,  $a_n$ , peuvent alors être évalués en utilisant l'orthonormalité des fonctions propres  $\Phi$ .

$$a_n = (\mathbf{u}, \Phi) = \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} u_i(\mathbf{X}) \Phi_n^{i*}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}.$$

6. La matrice des corrélations spatio-temporelle en deux points  $R_{ij}$  peut se décomposer en une série convergente et uniforme (Courant et Hilbert, 1953) :

$$R_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{X}) \Phi_n^{j*}(\mathbf{X}').$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Mercer.

---

20. Les fonctions propres POD étant déterminées à une constante multiplicative prêt, il est équivalent d'imposer

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} \Phi_m^i(\mathbf{X}) \Phi_n^{i*}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \lambda_m \delta_{mn} \quad (3.16)$$

pour les fonctions propres  $\Phi_m^i(\mathbf{X})$  et la condition  $\langle a_n a_m^* \rangle = \delta_{mn}$  pour les coefficients de projection  $a_n$  ou d'imposer pour les fonctions propres la condition d'orthonormalité (3.17) et la condition d'orthogonalité (3.18) pour les coefficients de projection. Pour des raisons numériques, il est plus simple d'imposer la condition (3.17) pour la POD classique, et la condition (3.16) pour la méthode des snapshots (Rempfer et Fasel, 1994, par exemple).

7. Le théorème de Mercer, combiné avec la représentation de  $\mathbf{u}$  sur la base POD  $\Phi$ , et en tenant compte de l'orthonormalité des fonctions propres POD permet de montrer que les coefficients de projection  $a_n$  sont non corrélés entre eux et que leur moyenne quadratique est égale aux valeurs propres de la POD.

$$\langle a_n a_m^* \rangle = \delta_{mn} \lambda_n. \quad (3.18)$$

La démonstration de cette relation peut être trouvée dans Cordier et Bergmann (2002a, page 22).

8. Finalement, le théorème de Mercer et l'orthonormalité des fonctions propres POD conduisent à :

$$\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\mathcal{D}} R_{ii}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) d\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = E \quad (3.19)$$

Si les réalisations  $\mathbf{u}$  représentent des champs de vitesse alors  $E$  correspond à l'énergie cinétique turbulente intégrée sur tout le domaine  $\mathcal{D}$ . Chaque structure d'ordre ( $n$ ) contribue donc de manière indépendante à l'énergie cinétique turbulente. L'amplitude des valeurs propres  $\lambda_n$  mesure l'importance relative des différents modes POD pour la représentation de l'écoulement.

### 3.4.3 Optimalité de la base POD

Soient  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  une fonction telle que  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{D})$  et  $\mathbf{u}^a$  une approximation de  $\mathbf{u}$ , nous pouvons écrire sur une base orthonormale quelconque  $\Psi_n(\mathbf{X}), n = 1, 2, \dots, +\infty$  :

$$u_i^a(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \Psi_n^i(\mathbf{X}).$$

Par ailleurs, soient  $\{\Phi_1(\mathbf{X}), \Phi_2(\mathbf{X}), \dots, \Phi_\infty(\mathbf{X})\}$ , un ensemble de fonctions propres POD orthonormales et  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\infty\}$  les valeurs propres associées, nous pouvons également considérer l'approximation  $u_i^P(\mathbf{X})$  de  $\mathbf{u}$  sur la base POD :

$$u_i^P(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Phi_n^i(\mathbf{X}).$$

Les équations (3.19) et (3.18) indiquent clairement que si les vecteurs de la base  $\Psi_n^i(\mathbf{X})$  sont non dimensionnés alors l'expression  $\langle b_n b_n^* \rangle$  représente l'énergie cinétique moyenne comprise dans le  $n^{\text{ième}}$  mode. Le lemme suivant, dont on peut trouver la preuve à la page 23 de Cordier et Bergmann (2002b), établit alors l'optimalité de l'approche POD.

**Lemme** Quelle que soit la valeur de  $N$ , nous avons le résultat suivant :

$$\sum_{n=1}^N \langle a_n a_n^* \rangle = \sum_{n=1}^N \lambda_n \geq \sum_{n=1}^N \langle b_n b_n^* \rangle.$$

Par conséquent, parmi toutes les décompositions linéaires, la POD est la plus efficace dans le sens où, pour un nombre donné de modes POD  $N$ , la projection sur le sous-espace engendré par les  $N$  premières fonctions propres POD contient en moyenne la plus grande quantité d'énergie cinétique possible.

### 3.4.4 Discussion sur la réduction de modèle

La base POD étant optimale d'un point de vue énergétique, cela suggère qu'un petit nombre de modes noté  $N_{gal}$  peut être suffisant pour obtenir une *bonne* représentation de n'importe quelle réalisation  $\mathbf{u}$ . Il reste alors à définir un critère mathématique permettant de qualifier quantitativement la notion qualitative évoquée plus haut.

Soit  $N_{POD}$ , le nombre de modes POD obtenus par résolution de l'équation de Fredholm (3.14), l'erreur de troncature, commise en ne retenant que les  $N_{gal}$  premiers modes POD pour représenter une réalisation  $\mathbf{u}$ ,

est donnée par :

$$\begin{aligned}\epsilon(N_{gal}) &= \left\| \mathbf{u}(\mathbf{X}) - \sum_{n=1}^{N_{gal}} (\mathbf{u}(\mathbf{X}), \Phi_n(\mathbf{X})) \Phi_n(\mathbf{X}) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=N_{gal}+1}^{N_{POD}} (\mathbf{u}(\mathbf{X}), \Phi_n(\mathbf{X})) \Phi_n(\mathbf{X}) \right\|^2.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Pour déterminer la valeur de  $N_{gal}$ , un critère possible est de minimiser l'erreur (3.20). Cependant, en pratique, ce critère n'est jamais utilisé et la détermination de  $N_{gal}$  est plutôt basée sur des considérations heuristiques. En effet, l'équation (3.19) indique que  $\sum_{n=1}^{N_{gal}} \lambda_n$  correspond à l'énergie moyenne contenue dans les  $N_{gal}$  premiers modes de la POD. Par conséquent, pour capturer la majorité de l'énergie contenue dans les  $N_{POD}$  modes de la POD, il suffit de choisir  $N_{gal}$  tel que  $\sum_{n=1}^{N_{gal}} \lambda_n \simeq \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n$ . Par définition, le rapport  $\sum_{n=1}^{N_{gal}} \lambda_n / \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n$  est le pourcentage de l'énergie cinétique totale représentée par les  $N_{POD}$  modes POD à être contenu dans les  $N_{gal}$  premiers modes de la POD. Pour un pourcentage d'énergie prédéfini  $P_\epsilon$ , la dimension  $N_{gal}$  du sous-espace engendré par les  $N_{gal}$  premières fonctions propres POD peut être déterminée telle que la condition

$$\frac{\sum_{n=1}^{N_{gal}} \lambda_n}{\sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n} = \frac{E(N_{gal})}{E(N_{POD})} \geq P_\epsilon\tag{3.21}$$

soit vérifiée (Ravindran, 2000b; Fahl, 2000; Cordier et Bergmann, 2002b). Finalement, le sous-espace POD contenant un pourcentage d'énergie cinétique turbulente supérieur à  $P_\epsilon\%$  de l'énergie du système initial correspond à  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{N_{gal}}\}$ .

Jusqu'ici, seul l'aspect réduction de modèle associé à l'approximation d'une réalisation quelconque par les fonctions propres POD a été évoqué. Or, l'optimalité énergétique de la POD suggère également qu'un tout petit nombre de modes POD devrait suffire pour décrire la dynamique du système. Par conséquent, il semble raisonnable d'espérer construire, à partir d'une base de données issue de simulations numériques ou d'expériences, un système dynamique d'ordre faible par projection de Galerkin des équations d'état sur les modes POD. Bien qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de preuve de l'optimalité de la base POD en terme de modélisation de la dynamique, cette approche a d'ores et déjà été utilisée avec succès, que ce soit en turbulence (Aubry *et al.*, 1988; Ukeiley *et al.*, 2001) ou pour des applications du contrôle optimal au contrôle d'écoulement (Ravindran, 1999, 2000a,b; Afanasiev et Hinze, 2001). Cette dernière application constituant le point central de ce mémoire, elle sera discutée plus longuement au chapitre 5.

Finalement, Antoulas et Sorensen (2001) ont récemment réalisé un état de l'art sur les méthodes de réduction de modèle susceptibles d'être appliquées aux systèmes dynamiques. Ces auteurs distinguent trois grandes classes de méthodes d'approximation (voir tableau 3.1) :

1. celles basées sur la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD),
2. celles basées sur une méthode de Krylov,
3. enfin, des méthodes itératives combinant certains aspects provenant d'une méthode de Décomposition en Valeurs Singulières et d'autres provenant d'une méthode de Krylov.

Ces méthodes possédant toutes des forces et des faiblesses différentes, il serait certainement intéressant de les tester dans le contexte d'un problème de contrôle d'écoulement : une méthode basée sur les sous-espaces de Krylov a par exemple été mise en œuvre avec succès par Allan (2000) afin de contrôler en boucle fermée l'écoulement dans une cavité entraînée.

méthodes basées sur la SVD		méthodes de Krylov
<i>Systèmes non-linéaires</i>	<i>Systèmes linéaires</i>	
Méthodes POD	"Balanced truncation"	Lanczos
Grammiens empiriques	Approximation d'Hankel	Arnoldi
		Interpolation
méthodes SVD-Krylov		

TABLE 3.1 – Classification des méthodes de réduction de modèles d'après Antoulas et Sorensen (2001).

### 3.5 Les différentes approches

A la section 3.4, la POD a été introduite dans un contexte très général. En effet, seul le produit scalaire avait été précisé<sup>21</sup> et des questions aussi fondamentales pour la POD que le choix :

- ▷ de la base de données,
- ▷ du produit scalaire,
- ▷ de l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$  : moyenne spatiale ou temporelle,
- ▷ de la variable  $\mathbf{X}$  : spatiale  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  ou temporelle  $t$ ,

n'avaient pas été discutées. L'objet de cette section est de mettre en évidence que différents types de décomposition orthogonale peuvent être obtenus en fonction, par exemple, du choix qui va être réalisé pour l'opérateur de moyenne  $\langle \cdot \rangle$ , utilisé pour évaluer le noyau de l'équation de Fredholm (3.14). Dans ce qui suit, seules les deux méthodes les plus utilisées en pratique *i.e.* la *méthode classique* (§ 3.5.3) et la *méthode des snapshots* (§ 3.5.4) seront décrites. Le lecteur pourra se reporter à Aubry *et al.* (1991) pour une présentation de la généralisation de ces deux méthodes : la *décomposition biorthogonale*.

#### 3.5.1 Choix des réalisations

Une première discussion sur le choix des réalisations à utiliser pour résoudre la POD a été menée au chapitre . Essentiellement, la POD est une méthode de compression d'information. En tant que telle, une base POD est incapable de représenter une information qui n'était pas contenue initialement dans la base de données utilisée pour la déterminer. Le choix des réalisations est donc cruciale, car c'est le seul moyen existant, pour introduire toute l'information qui sera nécessaire pour des applications futures de la base réduite POD (procédure d'optimisation par exemple). Or, jusqu'aux travaux récents<sup>22</sup> de Gunzburger (2004) sur la "meilleure" manière de retenir les réalisations de la base de données POD, la génération des réalisations constituaient plus un art qu'une vraie science. En particulier, nous sommes incapables d'affirmer que l'excitation ad-hoc utilisée à la section 5.4.2 pour générer des fonctions POD généralisées est la meilleure que l'on ait pu choisir. Seule une justification *a posteriori*, en fonction des résultats obtenus en utilisant ce système réduit dans la boucle d'optimisation, peut être donnée.

De manière générale, l'état d'un système physique complexe, que l'on cherche à modéliser ou à optimiser, dépend de paramètres comme sa géométrie, ses paramètres de contrôle, ses conditions initiale ou aux limites, des coefficients caractéristiques du milieu, ... Supposons maintenant que ces paramètres optimaux, en terme de génération des réalisations de la base POD, soient connus. Généralement, ces réalisations proviennent de simulations numériques ou d'expériences et, par conséquent, elles s'accompagnent d'un certain niveau d'incertitude lié aux bruits de mesure par exemple. Il est donc important d'étudier les effets de ces erreurs, assimilables à des perturbations infinitésimales sur les résultats obtenus par modèle réduit. Cette question fondamentale a récemment été abordée de manière théorique par Rathinam et Petzold (2003). Ces auteurs ont introduit le concept de facteur de sensibilité POD, qui mesure la sensibilité du résultat de la projection sur le sous-espace POD, en fonction des perturbations initiales des données. Malheureusement, ces travaux

21. Pour mémoire, nous avons alors choisi le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{L}_2$ . Nous allons justifier ce choix dans la suite de l'exposé.

22. La méthode proposée par Gunzburger (2004) se nomme *CVOD* pour CVT + POD. Elle sera rediscutée au niveau des perspectives de ce mémoire car elle constitue à l'heure actuelle, à notre connaissance, la seule approche systématique et rationnelle, permettant de générer de manière "intelligente" les réalisations à utiliser pour construire les modes POD.



ont montré que ce facteur de sensibilité était pertinent à prendre en compte dans certaines applications et qu'il ne l'était pas dans d'autres, sans pouvoir réellement conclure.

Une dernière difficulté, liée au choix des réalisations, se traduit par l'instabilité structurelle possible du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les modes POD. En effet, il est maintenant clairement reconnu (Rempfer, 2000; Noack *et al.*, 2003) qu'il est possible de construire des contre exemples analytiques tels que le système réduit construit par POD ne possède plus les propriétés de stabilité du modèle précis dont il est issu. L'opération de projection dans le sous-espace linéaire POD associée à la projection de Galerkin n'est donc pas transparente en terme de stabilité. Ce phénomène est encore mal compris et de nouveaux travaux s'attachant de manière spécifique à ce problème seraient bénéfiques. Dans cet ordre d'idée, citons Prajna (2003) qui a récemment proposé une condition suffisante pour que le modèle réduit de dynamique POD conserve les propriétés du modèle précis de départ. Cependant, à ce jour, aucune utilisation de ce critère à un problème de Mécanique des Fluides ou de Turbulence n'a été réalisée.

### 3.5.2 Choix du produit scalaire

Pour l'instant, la Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres a été décrite dans le contexte du produit scalaire canonique sur  $\mathcal{L}_2$ . Ce choix a été fait pour des raisons de simplicité, mais aussi, parce que c'est le cas général pour les applications en Mécanique des Fluides. Toutefois, comme on va le voir par la suite, il peut être intéressant (pour des propriétés de convergence, en particulier<sup>23</sup>) d'utiliser d'autres types de normes. Ainsi, il sera possible de définir d'autres notions d'optimalité que la vision énergétique considérée jusqu'ici.

#### Produit scalaire sur $\mathcal{L}^2$

Soit  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes dans  $\Omega$ . Pour des fonctions vectorielles  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , représentatives par exemple de champs de vitesse, le produit scalaire sur  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  est défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (u_1 v_1^* + u_2 v_2^* + u_3 v_3^*) d\mathbf{x}, \quad (3.22)$$

où  $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$  est la norme associée.

L'énergie cinétique associée à l'écoulement est proportionnelle à  $\|\mathbf{u}\|^2$ . Par conséquent,  $\mathcal{L}_2$  semble un espace naturel pour les applications à la Mécanique des Fluides car il correspond aux écoulements d'énergie cinétique finie. Pour cette raison, la norme  $\mathcal{L}_2$  est la plus utilisée en pratique pour définir la POD.

#### Produit scalaire sur $H^1$

L'intérêt d'introduire un produit scalaire sur l'espace de Sobolev<sup>24</sup>  $H^1(\Omega)$  a été mis en évidence par Iollo (1997), qui a montré qu'un modèle réduit de dynamique construit par projection des équations d'Euler sur une base POD pouvait être instable, lorsque le produit scalaire classique sur  $\mathcal{L}^2$  avait été utilisé. Iollo *et al.* (1998) proposèrent alors une manière d'améliorer la stabilité numérique des modèles réduits construits par POD, en redéfinissant la norme utilisée pour introduire la POD comme

$$(u, v)_{\epsilon} = \int_{\Omega} u v d\mathbf{x} + \epsilon \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) d\mathbf{x} \quad (3.23)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre numérique introduit pour tenir compte de différentes métriques. Des expériences numériques ont conclu qu'une formulation en norme  $H^1$  de la POD améliorerait de manière importante le comportement d'un modèle réduit. Bien que l'utilisation de cette norme semble bénéfique pour améliorer la robustesse du modèle réduit de dynamique construit par POD, cette approche a reçu bien peu d'attention dans la littérature.

23. Mentionnons comme autre circonstance, le cas des écoulements compressibles étudiés par Rowley (2002) où il est nécessaire d'introduire un produit scalaire particulier pour tenir compte du fait qu'en écoulement compressible, les variables de vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  et les variables thermodynamiques (densité, pression, enthalpie) sont dynamiquement couplées.

24. L'espace  $H^1(\Omega)$  est constitué des fonctions qui appartiennent à  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  ainsi que leurs dérivées premières.

### 3.5.3 Méthode classique

Cette approche correspond à celle introduite par Lumley (1967). Dans ce cas, la moyenne  $\langle \cdot \rangle$  est temporelle :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_T \cdot dt$$

et elle est évaluée à l'aide d'une moyenne d'ensemble en invoquant des hypothèses de stationnarité et d'ergodicité. La variable  $\mathbf{X}$ , quant à elle, est assimilée à la variable spatiale  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  définie sur tout le domaine  $\Omega$ .

La figure 3.3 décrit de manière schématique le principe de la POD classique.

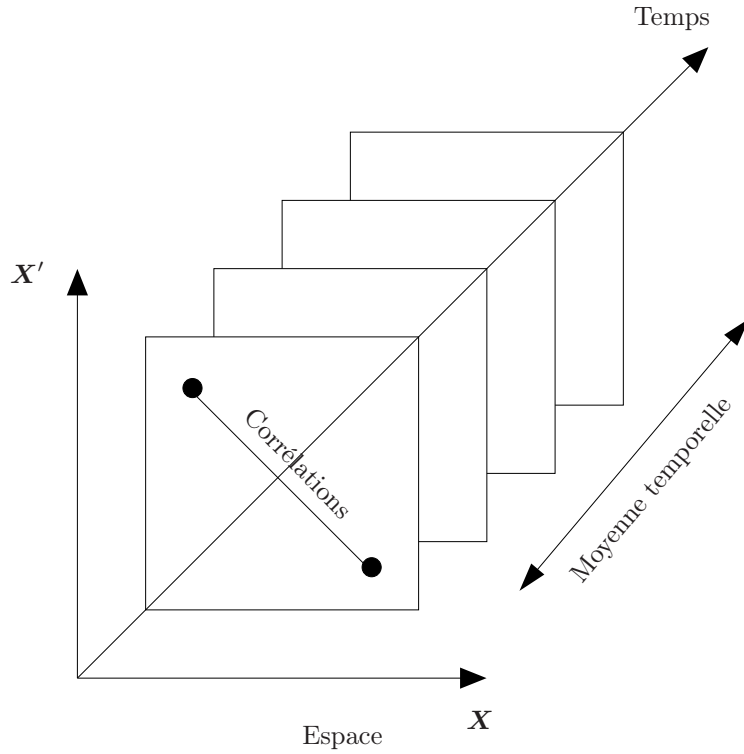


FIGURE 3.3 – Représentation schématique de POD classique.

Le problème aux valeurs propres correspondant se déduit facilement de l'équation (3.15) en remplaçant le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  par  $\Omega$  et la variable  $\mathbf{X}$  par  $\mathbf{x}$ . L'équation intégrale de Fredholm à résoudre est donc :

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_{\Omega} R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi_n^j(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

où  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  est le tenseur des corrélations spatiales en deux points défini par :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{T} \int_T u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t) dt = \sum_{n=1}^{N_{POD}} \lambda_n \Phi_n^i(\mathbf{x}) \Phi_n^{j*}(\mathbf{x}')$$

où  $T$  est une période de temps suffisamment longue sur laquelle les réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sont connues. Dans cette approche, les fonctions propres sont purement spatiales.

**Discussion sur la taille du problème aux valeurs propres.** Soit  $M$  le nombre de points de l'espace où sont connues les réalisations utilisées pour déterminer la base POD et  $n_c$  le nombre de composantes vectorielles de  $\mathbf{u}$  alors  $N_{POD} = M \times n_c$ . Si l'on considère que les réalisations contenues dans la base

de données utilisée pour résoudre la POD ont été déterminées à partir d'une simulation numérique détaillée d'un écoulement ou mesurée par Vélocimétrie à Images de Particules (*Particle Image Velocimetry* ou PIV) alors ce nombre de points de grille  $M$  peut rapidement devenir très important<sup>25</sup>. La taille du problème POD à résoudre numériquement est alors telle que les algorithmes classiques de calcul des valeurs propres ne sont plus assez performants pour assurer une bonne précision numérique aux résultats. Dans ces conditions, il est parfois nécessaire d'utiliser des bibliothèques numériques dédiées aux problèmes de grande taille comme la bibliothèque ARPACK<sup>26</sup>.

Or, puisque la POD est une généralisation de l'analyse de Fourier aux directions inhomogènes (Cordier et Bergmann, 2002a, §6), une manière d'éviter d'être face à un problème aux valeurs propres de grande taille, consiste à décomposer les directions de l'écoulement en directions homogènes (pour lesquelles, on appliquera Fourier) et en directions inhomogènes (pour lesquelles, on appliquera la POD). Cette approche est généralement utilisée dans les études expérimentales (Delville *et al.*, 1999; Ukeiley *et al.*, 2001, par exemple) afin de simplifier la résolution numérique du problème POD.

Enfin, considérons que le nombre de réalisations nécessaire pour décrire l'écoulement est égal à  $N_t$  où  $N_t \ll M$ . Dans ces conditions, même si le problème aux valeurs propres peut être résolu de manière précise, beaucoup de temps de calcul peut être économisé en cherchant à résoudre uniquement un problème de taille  $N_t$ . Cette remarque est au cœur de la méthode des snapshots présentée à la section suivante.

### 3.5.4 Méthodes des snapshots

La méthode des snapshots, imaginé par Sirovich (1987a,b,c), est l'exacte symétrique de la POD classique. L'opérateur de moyenne correspond alors à une moyenne spatiale évaluée sur tout le domaine  $\Omega$  :

$$\langle \cdot \rangle = \int_{\Omega} \cdot d\mathbf{x}$$

et la variable  $\mathbf{X}$  est assimilée à  $t$ .

La méthode des snapshots est représentée de manière schématique sur la figure 3.4.

---

25. On rappelle que dans le cas de la simulation numérique par DNS utilisée par Bewley *et al.* (2001) pour contrôler par contrôle optimal un écoulement de canal, ce nombre de points de grille était égal à  $10^7$ .

26. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>

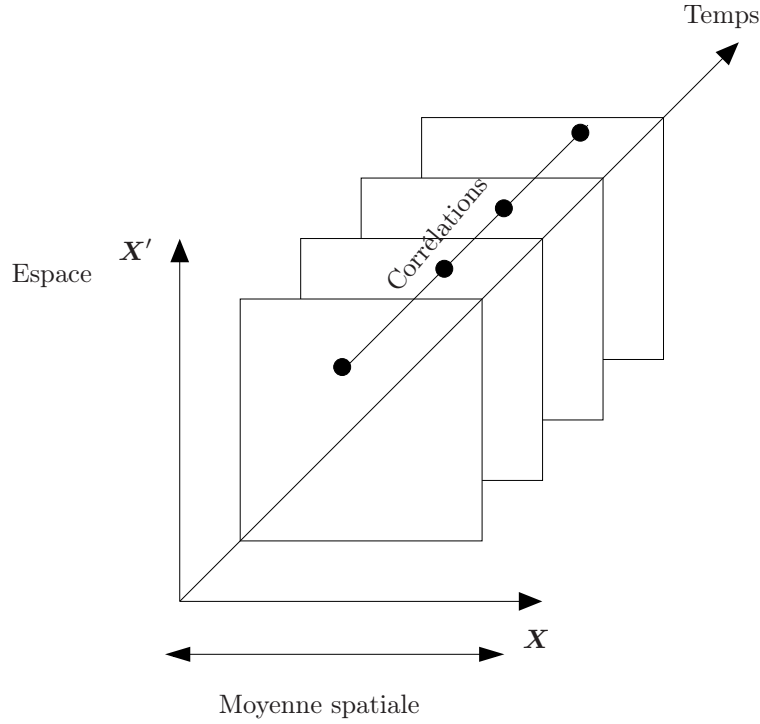


FIGURE 3.4 – Représentation schématique de la méthode des snapshots.

L'idée, à la base de la méthode, est de considérer que les fonctions propres spatiales  $\Phi(\mathbf{x})$  peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k)$  contenues dans la base de données, soit :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_t} a(t_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k). \quad (3.25)$$

On recherche alors les coefficients  $a(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, N_t$  tels que les fonctions propres  $\Phi$  soient solutions de l'équation (3.24). Après quelques développements détaillés dans Cordier et Bergmann (2002a), on trouve que, dans ce cas, le problème aux valeurs propres à résoudre est donné par :

$$\int_T C(t, t') a_n(t') dt' = \lambda_n a_n(t) \quad (3.26)$$

où  $C(t, t')$  est le tenseur des corrélations temporelles défini<sup>27</sup> comme :

$$C(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) a_n^*(t').$$

Les **caractéristiques principales de la méthode des snapshots** sont les suivantes :

1. Les fonctions propres ne dépendent que du temps.
2. Les corrélations croisées n'apparaissent pas dans le noyau du problème.
3. Il n'est pas nécessaire de faire appel à une hypothèse d'homogénéité pour éventuellement diminuer la taille du problème aux valeurs propres.
4. Les réalisations sont supposées linéairement indépendantes.
5. La taille du problème aux valeurs propres (3.26) est égale à  $N_{POD} = N_t$ . Par conséquent, comme cela a déjà été mentionné à la section 3.5.3, la méthode des snapshots permet de réduire de manière considérable le coût numérique associé à la résolution du problème POD, lorsque  $M$ , le nombre de points en espace est bien plus grand que  $N_t$ , le nombre d'échantillons temporels. Pour cette raison, à chaque fois que cette condition sera vérifiée, la méthode des snapshots sera préférée.

27. Dans cette définition, la sommation sur l'indice  $i$  est implicite.

### 3.5.5 Propriétés communes des deux approches POD

#### Propriétés générales

Quelle que soit la méthode particulière utilisée pour déterminer les fonctions propres POD spatiales et temporelles, celles-ci vérifient les propriétés suivantes :

1. Toute réalisation  $u_i(\mathbf{x}, t)$  peut se décomposer sur la base des fonctions orthogonales  $\Phi_n^i(\mathbf{x})$  comme

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a_n(t) \Phi_n^i(\mathbf{x})$$

avec des coefficients temporels  $a_n(t)$  non corrélés entre eux.

2. On impose<sup>28</sup> aux fonctions propres spatiales  $\Phi_n(\mathbf{x})$  de former une famille orthonormale :

$$\int_{\Omega} \Phi_n(\mathbf{x}) \cdot \Phi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{nm}$$

et par voie de conséquences,

3. les modes propres temporels  $a_n(t)$  forment une famille orthogonale :

$$\frac{1}{T} \int_T a_n(t) a_m^*(t) dt = \lambda_n \delta_{nm}.$$

#### Incompressibilité et conditions aux limites

Les fonctions propres spatiales  $\Phi_n^i(\mathbf{x})$  peuvent être calculées à partir des réalisations  $u_i(\mathbf{x}, t)$  et des coefficients de projection  $a_n(t)$  par la relation (Sirovich, 1987a) :

$$\Phi_n^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{T \lambda_n} \int_T u_i(\mathbf{x}, t) a_n^*(t) dt. \quad (3.27)$$

Les fonctions propres spatiales s'écrivent donc comme combinaison linéaire de champs de vitesse instantanée. Par conséquent, toutes les propriétés pouvant s'écrire en fonction des réalisations  $\mathbf{u}$  comme des équations linéaires et homogènes passeront directement aux fonctions propres spatiales. Par exemple, si les réalisations  $\mathbf{u}$  correspondent à un écoulement incompressible alors les fonctions propres POD vérifieront elles-mêmes la condition d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \nabla \cdot \Phi_n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N_{POD}.$$

De même, si les réalisations  $\mathbf{u}$  vérifient des conditions aux limites de Dirichlet homogènes alors les fonctions propres POD vérifieront le même type de conditions.

### 3.5.6 Méthode des snapshots ou POD classique?

Puisque deux approches POD différentes existent, il est légitime de se demander comment choisir au cas par cas la méthode la plus performante? Comme on va le voir par la suite, la réponse dépend essentiellement du type de données accessibles pour évaluer le noyau du problème POD.

D'un côté, les données issues de simulations numériques qu'elles soient directes ou aux grandes échelles, sont souvent très bien résolues en espace et en temps. Cependant, en raison du coût de calcul souvent important, seul un petit échantillon temporel est disponible. De même, si une bonne résolution spatiale est obtenue par vélocimétrie par images de particules, la résolution temporelle est souvent faible. Ces deux configurations, caractérisées par une histoire temporelle limitée et par une résolution spatiale élevée, correspondent à des situations pour lesquelles le tenseur des corrélations temporelles  $C(t, t')$  est statistiquement bien convergé.

---

<sup>28</sup>. On rappelle que le choix de faire porter l'orthonormalité sur les fonctions propres spatiales ou sur les fonctions propres temporelles est plutôt arbitraire (§ 3.4.2, point 4).

De l'autre côté, les techniques anémométriques fils chauds ou Laser Doppler fournissent une description temporelle bien résolue et des échantillons temporels très longs mais s'accompagnent d'une description spatiale très limitée. Dans ces conditions, c'est le tenseur des corrélations spatiales en deux points  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  qui est alors bien convergé statistiquement.

En conclusion, les données issues d'approches expérimentales seront généralement<sup>29</sup> traitées par la méthode classique et les données provenant d'approches numériques par la méthode des snapshots.

Dans cette étude, seules des données issues de simulations numériques seront utilisées, ce qui fait que la méthode des snapshots sera retenue.

---

29. Cependant, une exception correspond au cas de données obtenues par vélocimétrie par images de particules.

