$$\vec{v}' = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}\cos(\theta) + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta), \quad \text{como } \vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - \vec{v}_{\perp}:$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\perp}\cos(\theta) + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta)$$

$$= \vec{v} - (1-\cos(\theta))\vec{v}_{\perp} + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta)$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + (1-\cos(\theta))\,\hat{k}\times(\hat{k}\times\vec{v}) + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta)$$

* O produto vetorial de $\hat{k}\times\vec{v}$ pode ser reescrito de forma matricial, onde:

$$\hat{k}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(k_2 v_3 - k_3 v_2) + \hat{\jmath}(k_3 v_1 - k_1 v_3) + \hat{k}(k_1 v_2 - k_2 v_1)$$

$$\hat{k}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} k_2 v_3 - k_3 v_2 \\ k_3 v_1 - k_1 v_3 \\ k_1 v_2 - k_2 v_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

$$\hat{k}\times = K = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}$$ é a matriz produto vetorial de $\hat{k}$.

Como $\hat{k}\times\vec{v} = K\vec{v}$

$$\hat{k}\times(\hat{k}\times\vec{v}) = \hat{k}\times K\vec{v} = K^2\vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + (1-\cos(\theta))\,\underline{K^2\vec{v} + \sin(\theta)K\vec{v}}$$

Se $R = I + \sin(\theta)K + (1-\cos(\theta))K^2$, pode-se dizer que:

$\vec{v}' = R\vec{v}$, onde R é a matriz de rotação de $\vec{v}$ para $\vec{v}'$.