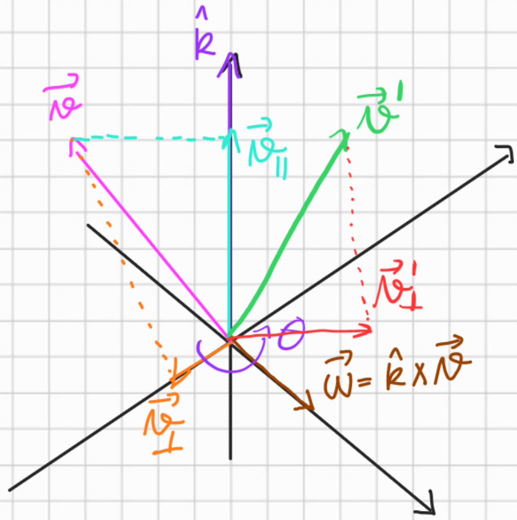
* Dado o plano $\mathbb{R}^3$ ao lado, sendo $\vec{v}$ um vetor qualquer e $\hat{k}$ um vetor unitário, pode-se decompor $\vec{v}$ em:



$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, onde:

$\vec{v}_{\parallel}$ é a projeção de $\vec{v}$ em $\hat{k}$:

$\vec{v}_{\parallel} = (\langle \vec{v}, \hat{k} \rangle)\hat{k}$, já que $\|\hat{k}\|_2 = 1$.

$\vec{v}_{\perp}$ pode ser reescrito como:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} \therefore \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - (\langle \vec{v}, \hat{k} \rangle)\hat{k} = \langle -\hat{k}, \vec{v} \rangle \hat{k} - \langle -\hat{k}, \hat{k} \rangle \vec{v}$$

Pela fórmula do produto interno triplo:

$$\vec{v}_{\perp} = -\hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{v})$$

* Ao rotacionar $\vec{v}$ de forma arbitrária, obtém-se $\vec{v}'$, que pode ser decomposto como feito em $\vec{v}$. Como $\hat{k}$ é um vetor perpendicular ao eixo de rotação, $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v}'_{\parallel}$.

Porém, a componente ortogonal a $\hat{k}$ terá sua posição alterada.

Considerando um sistema de coordenadas ortogonal em $\vec{v}_{\perp}$ e $\hat{k} \times \vec{v}_{\perp}$, pode-se escrever sua rotação de acordo com as coordenadas polares.

$$\vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\perp} \cos(\theta) + (\hat{k} \times \vec{v}_{\perp}) \sin(\theta)$$

* Retornando $\vec{v}'$:

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \cos(\theta) + (\hat{k} \times \vec{v}_{\perp}) \sin(\theta)$$

Como $\hat{k} \times \vec{v}_{\perp} = \hat{k} \times \vec{v}$: