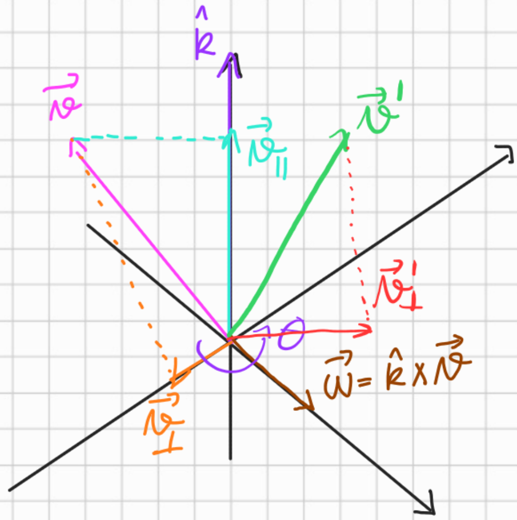
* Dado o plano $\mathbb{R}^3$ ao lado, sendo $\vec{v}$ um vetor qualquer e $\hat{k}$ um vetor unitário, pode-se decompor $\vec{v}$ em:



$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, onde:

$\vec{v}_{\parallel}$ é a projeção de $\vec{v}$ em $\hat{k}$:

$\vec{v}_{\parallel} = \left(\langle \vec{v}, \hat{k} \rangle\right) \hat{k}$, já que $\|\hat{k}\|_2 = 1$.

$\vec{v}_{\perp}$ pode ser reescrito como:

$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} \therefore \vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - \left(\langle \vec{v}, \hat{k} \rangle\right) \hat{k} = \langle -\hat{k}, \vec{v} \rangle \hat{k} - \langle -\hat{k}, \hat{k} \rangle \vec{v}$

Pela fórmula do produto interno triplo:

$\vec{v}_{\perp} = -\hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{v})$

* Ao rotacionar $\vec{v}$ de forma arbitrária, obtém-se $\vec{v}'$, que pode ser decomposto como feito em $\vec{v}$. Como $\hat{k}$ é um vetor perpendicular ao eixo de rotação, $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v}'_{\parallel}$.

Porém, a componente ortogonal à $\hat{k}$ terá sua posição alterada.

Considerando um sistema de coordenadas ortogonal em $\vec{v}_{\perp}$ e $\hat{k} \times \vec{v}_{\perp}$, pode-se escrever sua rotação de acordo com as coordenadas polares.

$\vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\perp} \cos(\theta) + (\hat{k} \times \vec{v}_{\perp}) \sin(\theta)$

* Retomando $\vec{v}'$:

$\vec{v}' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \cos(\theta) + (\hat{k} \times \vec{v}_{\perp}) \sin(\theta)$

Como $\hat{k} \times \vec{v}_{\perp} = \hat{k} \times \vec{v}$:

$$\vec{v}' = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}\cos(\theta) + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta)$$, como $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v} - \vec{v}_{\perp}$:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\perp}\cos(\theta) + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta)$$
$$= \vec{v} - (1-\cos(\theta))\vec{v}_{\perp} + (\hat{k}+\vec{v})\sin(\theta)$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + (1-\cos(\theta))\hat{k}\times(\hat{k}\times\vec{v}) + (\hat{k}\times\vec{v})\sin(\theta)$$

* O produto vetorial de $\hat{k}\times\vec{v}$ pode ser reescrito de forma matricial, onde:

$$\hat{k}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(k_2v_3 - k_3v_2) + \hat{j}(k_3v_1 - k_1v_3) + \hat{k}(k_1v_2 - k_2v_1)$$

$$\hat{k}\times\hat{v} = \begin{bmatrix} k_2v_3 - k_3v_2 \\ k_3v_1 - k_1v_3 \\ k_1v_2 - k_2v_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

$$\hat{k}\times = K = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}$$ é a matriz produto vetorial de $\hat{k}$.

Como $\hat{k}\times\vec{v} = K\vec{v}$
$$\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{v}) = \hat{k}\times K\vec{v} = K^2\vec{v}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + (1-\cos(\theta))K^2\vec{v} + \sin(\theta)K\vec{v}$$

Se $R = I + \sin(\theta)K + (1-\cos(\theta))K^2$, pode-se dizer que:

$$\vec{v}' = R\vec{v}$$, onde R é a matriz de rotação de $\vec{v}$ para $\vec{v}'$.

* Porém, como se relaciona a rotação de Rodrigues com a rotação nos ângulos de Euler (ψ, θ, φ)?

Como $\vec{v}' = R\vec{v}$, $R = R(\theta)$ é a matriz da rotação de Rodrigues de um ângulo θ em torno de um vetor unitário $\hat{n}$.

A matriz R é descrita como:

$$R = \begin{bmatrix} -\cos(\theta)(-n_2^2 - n_3^2) - n_2^2 - n_3^2 + 1 & -\cos(\theta) n_1 n_2 + n_1 n_2 - \sin(\theta) n_3 & -\cos(\theta) n_1 n_3 + n_1 n_3 + \sin(\theta) n_2 \\ -\cos(\theta) n_1 n_2 + n_1 n_2 + \sin(\theta) n_3 & -\cos(\theta)(-n_1^2 - n_3^2) - n_1^2 - n_3^2 + 1 & -\cos(\theta) n_2 n_3 + n_2 n_3 + \sin(\theta) n_1 \\ -\cos(\theta) n_1 n_3 + n_1 n_3 - \sin(\theta) n_2 & -\cos(\theta) n_2 n_3 + n_2 n_3 + \sin(\theta) n_1 & -\cos(\theta)(-n_1^2 - n_2^2) - n_1^2 - n_2^2 + 1 \end{bmatrix}$$

As rotações em x, y e z podem ser expressas em $R(\theta)$, onde:

$$R_x = R(\theta) \therefore \hat{n} = [1\ 0\ 0]^T$$

$$R_y = R(\theta) \therefore \hat{n} = [0\ 1\ 0]^T$$

$$R_z = R(\theta) \therefore \hat{n}\ [0\ 0\ 1]^T$$

Logo: $R_{z,x,y} = R_z R_y R_x = R(\theta) \therefore \hat{n} = n_1 [1\ 0\ 0]^T + n_2 [0\ 1\ 0]^T + n_3 [0\ 0\ 1]^T$

$$\forall\ n_1, n_2, n_3 \in \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3} = 1$$

Porém, a generalização da rotação de Rodrigues e a rotação nos eixos x, y e z é feita por meio dos Parâmetros de Euler, que estão diretamente aos Quatérnios.

Os Parâmetros de Euler, $\{a, b, c, d\}$, são dados em função de $\hat{n}$ e θ, como segue:

$$a = \frac{\cos(\theta)}{2}$$

$$b = n_1 \frac{\sin(\theta)}{2}$$

$$c = n_2 \frac{\sin(\theta)}{2}$$

$$d = n_3 \frac{\sin(\theta)}{2}$$

* Sendo $\hat{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$

Em termos de Quatérnio, um Quatérnio q é dado como:

$q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, sendo $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ números imaginários

A relação entre as rotações em x, y e z e os Parâmetros de Euler é dada por:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) - \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) - \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) \end{bmatrix}$$

O inverso pode ser obtido por:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{atan2}(2(a.b + c.d),\ 1 - 2(b^2 + c^2)) \\ -\pi/2 + 2\operatorname{atan2}\left(\sqrt{1 + 2(a.c - b.d)},\ \sqrt{1 - 2(a.c - bd)}\right) \\ \operatorname{atan2}(2(ad + bc),\ 1 - 2(c^2 + d^2)) \end{bmatrix}$$

Onde atan2(x, y) é a arctan$\left(\frac{x}{y}\right)$, conservando os sinais de x e y.

/ /

/ /

$\vec{v}_\perp$ e $\hat{k}\times\vec{v}$ compõem plano de rotação, logo, Θ rotaciona nesse plano.
Com isso, pode-se converter as coordenadas e recuperar os ângulos de x, y e z
Esse plano é definido pelos cossenos diretores de $\hat{k}$.
$\hat{k}$ pode gerar um sistema $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ que é rotacionado em $\hat{k}$ e recuperado dos $R(\Theta)$.