Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

IA903 – Introdução à Robótica Móvel 17 de setembro de 2024

Docente: Eric Rohmer

Discente:

- Gabriel Toffanetto França da Rocha – 289320

Exercise 1: Kinematics of a single robot leg

Sumário

1

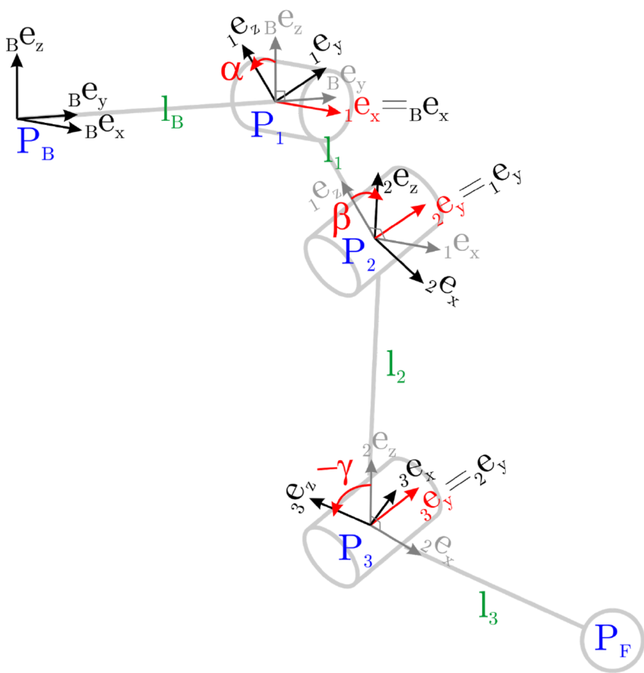

Figura 1: Sistemas de coordenadas da perna robótica.

Uma vez dados os sistemas de coordenadas da perna robótica, exibidos na Figura 1, é possível observar que o *frame* $\{P_1\}$ apresenta rotação em torno do eixo x, o *frame* $\{P_2\}$ em torno do eixo y, assim como o *frame* $\{P_3\}$. Considerando o vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{q} = [\alpha\ \beta\ \gamma]^T$, sendo α, β e γ respectivamente os ângulos de rotação dos sistemas de coordenadas $\{P_1\}$, $\{P_2\}$ e $\{P_3\}$.

Com isso, têm-se que a rotação entre os sistemas de coordenadas da base e da junta 1 é dado pela matriz (1), a rotação entre o *frame* $\{P_1\}$ e o *frame* $\{P_2\}$ é dada por (2) e a rotação entre o sistema de coordenadas da junta 2 e o sistema da junta 3 é dado pela matriz (3).

$$\mathbf{R}_{B1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{R}_{23} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \tag{3}$$

2

Os sistemas de coordenadas $\{P_B\}$, $\{P_1\}$, $\{P_2\}$, $\{P_3\}$ e $\{P_F\}$ da perna robótica estão posicionados entre eles em distâncias l_B, l_1, l_2, l_3 e l_F, respectivamente. Considerando todas essas distâncias iguais e unitárias, obtêm-se os vetores de translação entre os referenciais mostrados em (4), (5), (6) e (7).

$$ {}_B\mathbf{r}_{B1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T; \tag{4} $$

$$ {}_1\mathbf{r}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T; \tag{5} $$

$$ {}_2\mathbf{r}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T; \tag{6} $$

$$ {}_3\mathbf{r}_{3F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T; \tag{7} $$

Permitindo a transformação entre os sistemas de coordenada, incluindo rotação e translação em uma só operação, a utilização de transformações homogêneas se faz interessante, sendo a mesma enunciada em (8).

$$ \mathbf{H} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R}_{[3\times3]} & & \mathbf{r}_{[3\times1]} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{[4\times4]} \tag{8} $$

Dessa forma, a transformação homogênea entre o *frame* $\{P_B\}$ e $\{P_1\}$ é dada por (9), entre $\{P_1\}$ e $\{P_2\}$ é dada por (10), entre $\{P_2\}$ e $\{P_3\}$ é dada por (11) e entre $\{P_3\}$ e $\{P_F\}$ é dada por (12),

$$ {}_B\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9} $$

$$ {}_1\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10} $$

$$ {}_2\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11} $$

$$
{}_3\mathbf{H}_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}
$$

Para se obter a transformação homogênea entre *frames* de um conjunto consecutivo de transformações de referencial, basta multiplicar as matrizes de transformação homogênea, como feito em (13), obtendo assim a transformação da base para a terceira junta da perna robótica.

$$
{}_B\mathbf{H}_3 \;=\; {}_B\mathbf{H}_1\;{}_1\mathbf{H}_2\;{}_2\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}
$$

$$
{}_B\mathbf{H}_3 \;=\; {}_B\mathbf{H}_1\;{}_1\mathbf{H}_2\;{}_2\mathbf{H}_3\;{}_3\mathbf{H}_F = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}
$$

Por meio da transformação de referencial entre o *frame* da base e da ferramenta, (14), é possível expressar o vetor da base para a ferramentam, pré-multiplicando o vetor da origem da base (${}_B\mathbf{r}_{BB} = [0\ 0\ 0]_B^T$) pela transformação homogênea em questão.

$$
{}_B\mathbf{r}_{BF} = \;{}_B\mathbf{H}_F\;{}_B\mathbf{r}_{BB} = \begin{bmatrix} -\sin(\beta+\gamma) - \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)[\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta) + 1] + 1 \\ -\cos(\alpha)[\cos(\beta+\gamma) + cos(\beta) + 1] \end{bmatrix} \tag{15}
$$

3

$$
{}_B\mathbf{J}_{BF} = \frac{\partial_B\mathbf{r}_{BF}}{\partial\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_B\mathbf{r}_{BF}}{\partial q_1} & \frac{\partial_B\mathbf{r}_{BF}}{\partial q_2} & \frac{\partial_B\mathbf{r}_{BF}}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_B r_{xBF}}{\partial q_1} & \frac{\partial_B r_{xBF}}{\partial q_2} & \frac{\partial_B r_{xBF}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial_B r_{yBF}}{\partial q_1} & \frac{\partial_B r_{yBF}}{\partial q_2} & \frac{\partial_B r_{yBF}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial_B r_{zBF}}{\partial q_1} & \frac{\partial_B r_{zBF}}{\partial q_2} & \frac{\partial_B r_{zBF}}{\partial q_3} \end{bmatrix} \tag{16}
$$

$$
{}_B\mathbf{J}_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{c}(\beta+\gamma) - \mathrm{c}(\beta) & -\mathrm{c}(\beta+\gamma) \\ \mathrm{c}(\alpha)[\mathrm{c}(\beta+\gamma) + \mathrm{c}(\beta) + 1] & \mathrm{s}(\alpha)[-\mathrm{s}(\beta+\gamma) - \mathrm{s}(\beta)] & -\mathrm{s}(\alpha)\mathrm{s}(\beta+\gamma) \\ \mathrm{s}(\alpha)[\mathrm{c}(\beta+\gamma) + \mathrm{c}(\beta) + 1] & \mathrm{c}(\alpha)[\mathrm{s}(\beta+\gamma) + \mathrm{s}(\beta)] & \mathrm{c}(\alpha)\mathrm{s}(\beta+\gamma) \end{bmatrix} \tag{17}
$$

Onde $\mathrm{s}(\cdot) = \sin(\cdot)$ e $\mathrm{c}(\cdot) = \cos(\cdot)$.

Considerando uma posição inicial para a perna robótica, (18), e uma velocidade para a ferramenta (19), obtém-se um jacobiano instantâneo igual a (20).

$$
\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} 0^\circ & 60^\circ & -120^\circ \end{bmatrix}^T \tag{18}
$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \text{(m/s)} \tag{19}$$

$$\mathbf{J}_{BF} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,866 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Com isso, uma vez que o jacobiano relaciona a velocidade no espaço cartesiano com a velocidade no espaço das juntas, $\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$, pode-se obter a velocidade instantânea das das juntas da perna robótica, $\mathrm{d}\mathbf{q}$, por meio de (21), para a velocidade desejada do efetuador e a posição inicial das juntas.

$$\mathrm{d}\mathbf{q} = \mathbf{J}_{BF}^{+}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5774 \\ 1,1547 \end{bmatrix} \tag{21}$$

4

content...

5

Anexos