Obliczenia Naukowe

lista 4

Mateusz Tofil

27 listopada 2021

1 Zadanie 1

1.1 Opis zadania

Naszym celem jest wyliczenie ilorazu różnicowego. Na wejściu otrzymujemy wektor długości $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$ oraz wektor długości $n+1$ zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach $f(x_0), ..., f(x_n)$. Wynikiem ma być wektor długości $n+1$ zawierający obliczone ilorazy różnicowe.

1.2 Definicje

Iloram różnicowym N-tego rzedu funkcji $f : X \to Y$ w punktach $x_0, x_1, ..., x_n \in X$ nazywamy funkcję:

$$f[x_0, x_1, ..., x_N] = \sum_{i=0}^{N} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{N} (x_i - x_j)}$$

Poniższa zależności rekurencyjna, pozwala nam wyliczyć wynik bez używania tablicy dwu wymiarowej.

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i), & 0 \leq i \leq N \\ f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+m}] - f[x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m-1}]}{x_{k+m} - x_k}, & 0 \leq k \leq k+m \leq n \end{cases}$$

1.3 Pseudokod

2 Zadanie 2

2.1 Opis zadania

W zadaniu należało obliczyć wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcjie x = t za pomocą ugólnionego algorytmu Hornera, w czasie $\mathcal{O}(n)$. Na wejściu otrzymujemy wektor długośc $n+1$ zawierający węzły $x_0, ..., x_n$, wektor długośc $n+1$ zawierający ilorazy różnicowe oraz punkt t, w którym nalezy obliczyć wartośc wielomianu. Wyniki to wartość wielomianu w punkcie t.

2.2 Definicje

Postać Newtona wzoru interpolacyjnego wygląda następująco:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, ..., x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Korzystając ze wzorów zawartych na liście 4 w zadaniu 8, możemy wyliczyć $N_n(x)$ korzystając zze wzorów (uogólniony algorytm Hornera):

$$w_n(x) = f[x_0, ..., x_n]$$
$$w_k(x) = f[x_0, ..., x_n] + (x - x_k)w_{k+1}(x) \text{ dla k } = (n-1, ..., 0)$$
$$N_n(x) = w_0(x)$$

2.3 Pseudokod

3 Zadanie 3

3.1 Opis zadania

W zadaniu chodziło, aby na podstawie współczynników wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona, napisać funckję obliczająca, w czasie $\mathcal{O}(n^2)$, współczynniki jego postaci naturalnej $a_0, a_1, ..., a_n$

3.2 Metoda rozwiązania

Ta metoda zamienia współczynniki wielomianu interpolacyjnego z postaci Newtona na postać naturalną. Ponownie skorzystamy z uogólnionego algorytmu Hornera. Wiemy, że w wielomianie interpolacyjnym współczynnik c_n, przy największej potędze jest równy współczynnikowi a_n, przy największej potędze w jego postaci naturalnej. Iteracyjnie wyliczamy a_i, na podstawie wcześniej wyliczonych wartości stojących przy danej potędze.

3.3 Pseudokod

4 Zadanie 4

W zadaniu, należało napisać funckje, która zinterpoluje zadaną funckję $f(x)$ na przedziael $[a, b]$za pomocą wielomiannu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funckję.

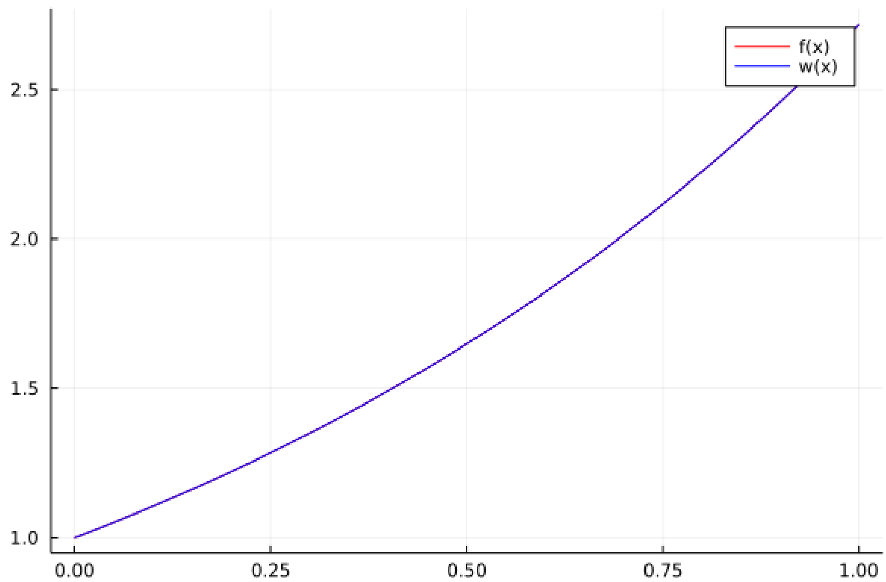
4.1 Metoda rozwiązania

Na początku tworzymy wektor $n + 1$ równoległych węzłów oraz drugi wektor wartości funkcji w tych węzłach. Na ich podstawie wyliczamy ilorazy różnicowe korzystając z napisanej przez nas wcześniej metody. Następnie generujemy dwa wektory wartości funckji oraz wartości wielomianu interpolacyjnego (korzystając z wcześniej napisanej funckji `warNewton()`. Na podstawie tych dwóch wektrorów rysujemy wykres korzystając z pakietu `Plots`.

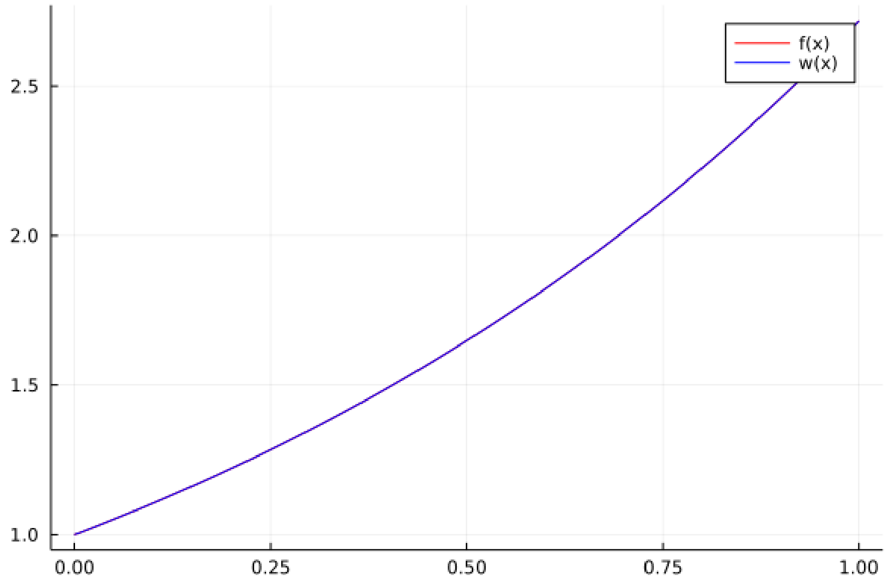
5 Zadanie 5

W zadaniu należało przetestować wcześniej napisaną funkcję z zadania 4 do rysowania wykresów. Działanie funckji przetestować na przykładach:

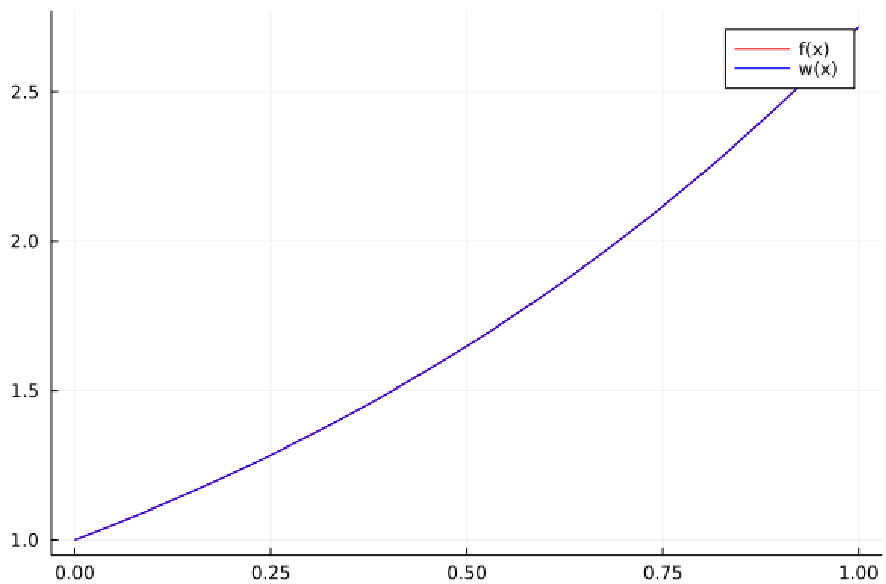
1. $f(x) = e^x$, dla przedziału $[0, 1]$ oraz dla $n = 5, 10, 15$
2. $g(x) = x^2 \sin(x)$, dla przedziału $[-1, 1]$ oraz dla $n = 5, 10, 15$



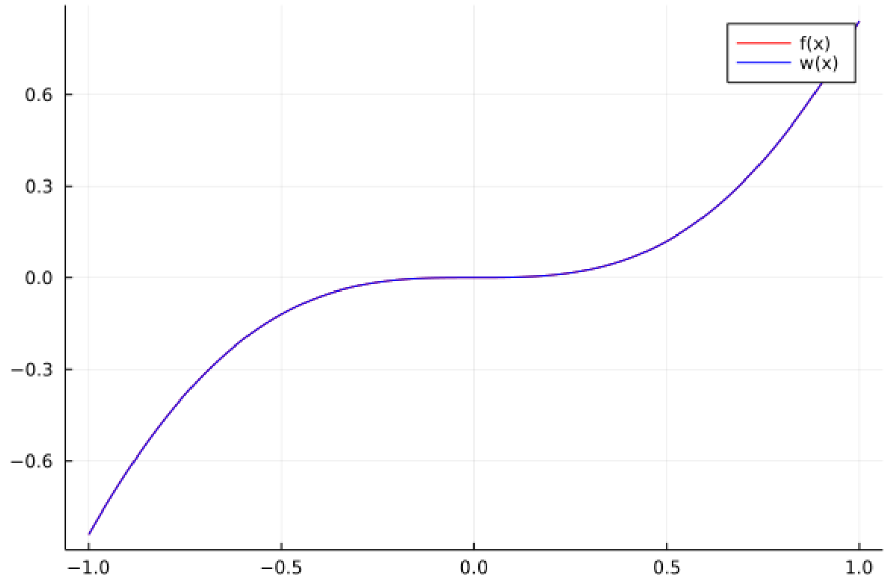
Rysunek 1: Wykres funkcji: $f(x) = e^x$, na przedziale $[0, 1], n = 5$



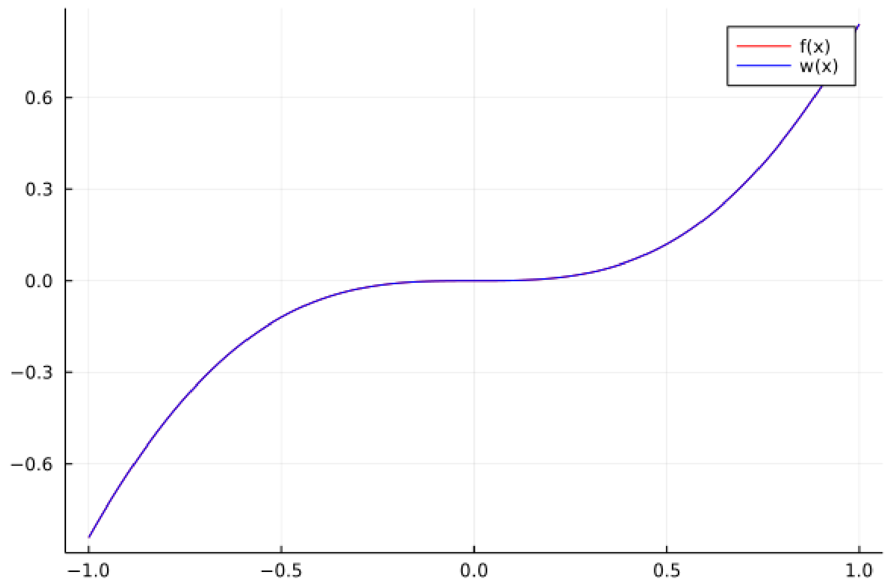
Rysunek 2: Wykres funkcji: $f(x) = e^x$, na przedziale $[0, 1], n = 10$



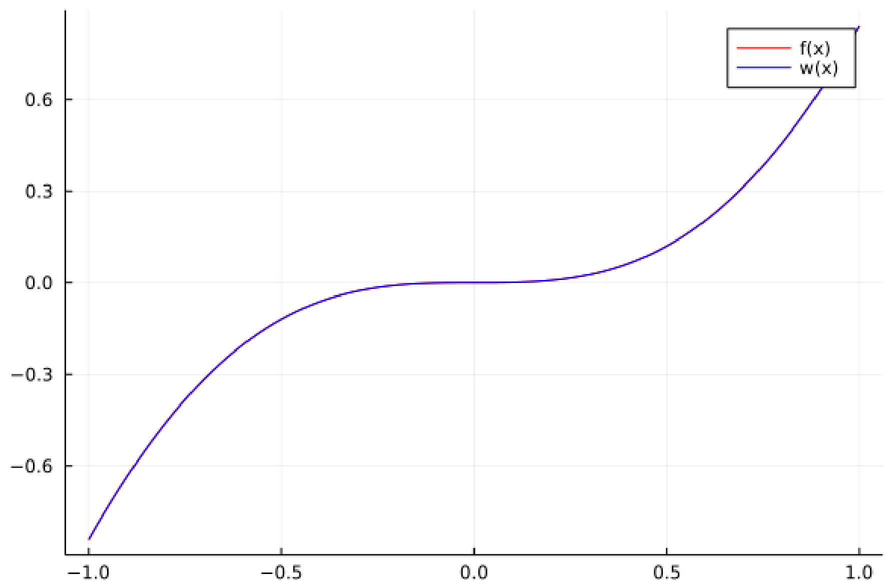
Rysunek 3: Wykres funkcji: $f(x) = e^x$, na przedziale $[0, 1], n = 15$



Rysunek 4: Wykres funkcji: $g(x) = x^2 \sin(x^2)$, na przedziale $[-1, 1], n = 5$



Rysunek 5: Wykres funkcji: $g(x) = x^2 \sin(x^2)$, na przedziale $[-1, 1], n = 10$



Rysunek 6: Wykres funkcji: $g(x) = x^2 \sin(x^2),$ na przedziale $[-1, 1], n = 15$

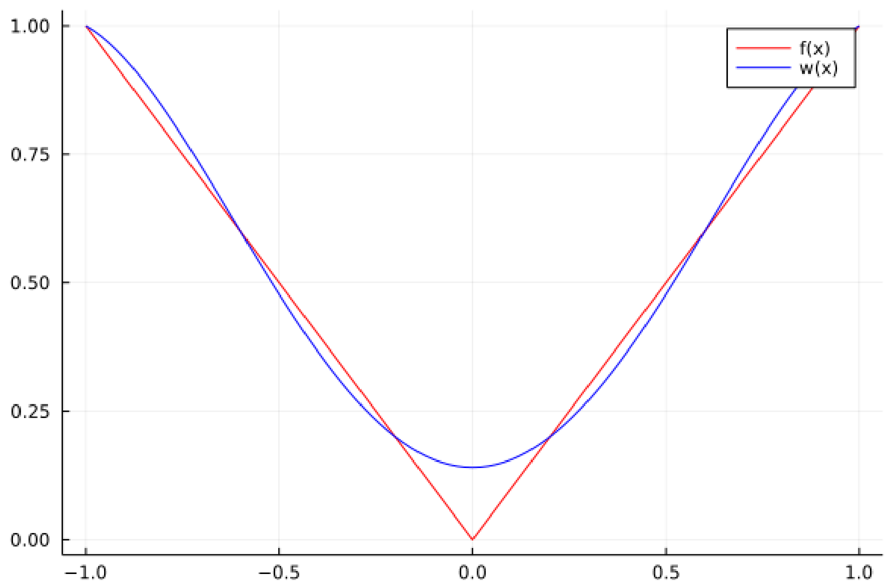
5.1 Wnioski

Możemy zauważyć, że nasze interpolacje funkcji pokrywają się z interpolowaną funkcją dla obu przykładów i dla każdego n. Jest to spowodowane, że interpolowanie funkcji w zakresach, w których ich wartość zmieniają się niewiele, a ich pochodna nie zmienia znaku, prowadzą do uzyskania bardzo dokładnych wielomianów interpolacyjnych.

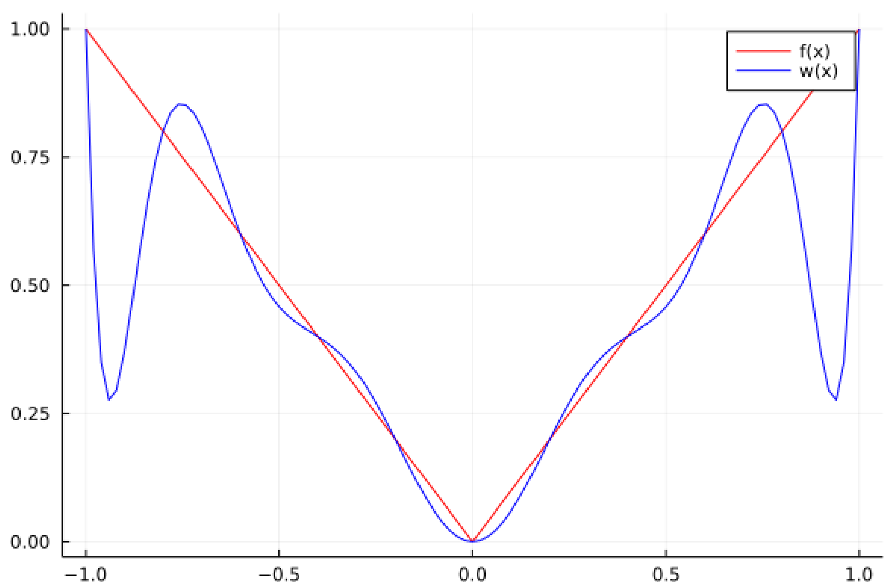
6 Zadanie 6

Zadanie podobne do poprzedniego, tylko z różniącymi się funkcjam ido przetestowania.

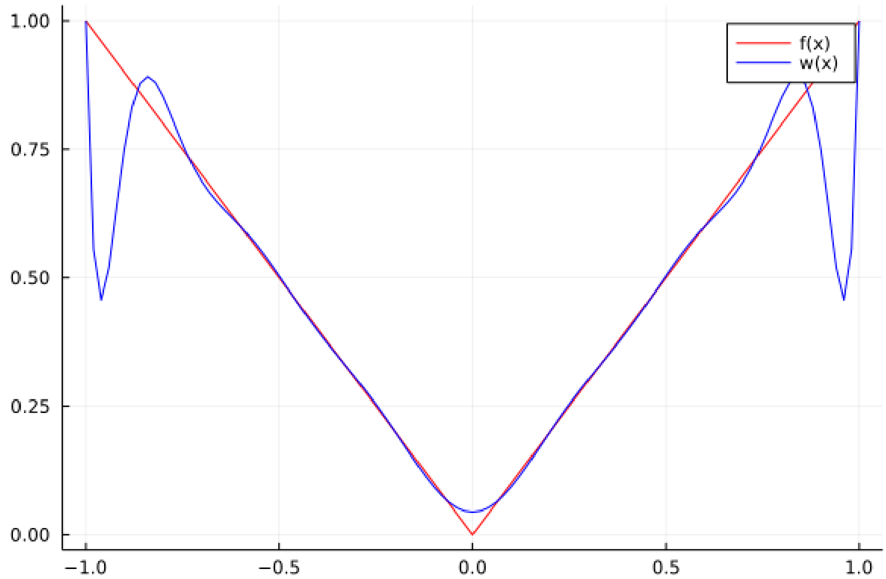
1. $f(x) = |x|,$ dla przedziału $[-1, 1], n = 5, 10, 15$
2. $g(x) = \frac{1}{1+x^2},$ dla przedziału $[-5, 5], n = 5, 10, 15$



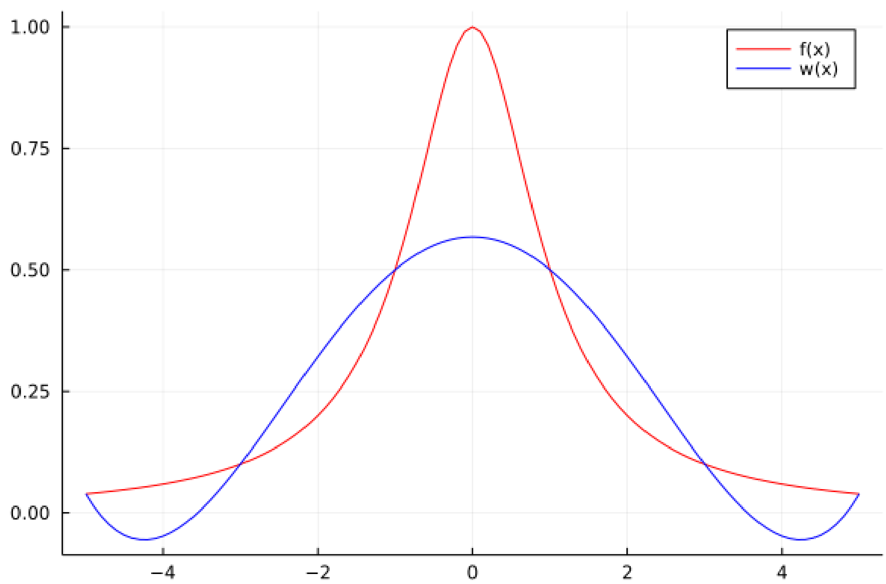
Rysunek 7: Wykres funkcji: $f(x) = |x|$, na przedziale $[-1, 1], n = 5$



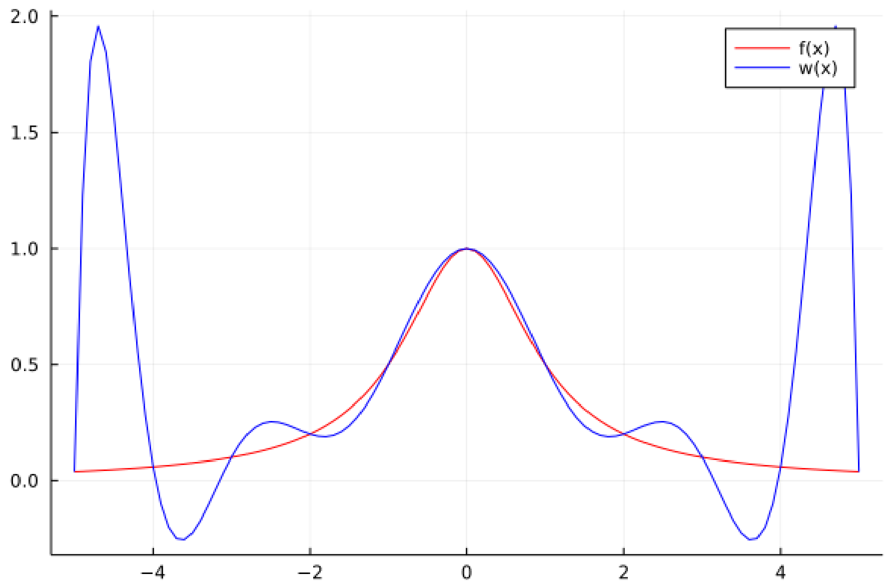
Rysunek 8: Wykres funkcji: $f(x) = |x|$, na przedziale $[-1, 1], n = 10$



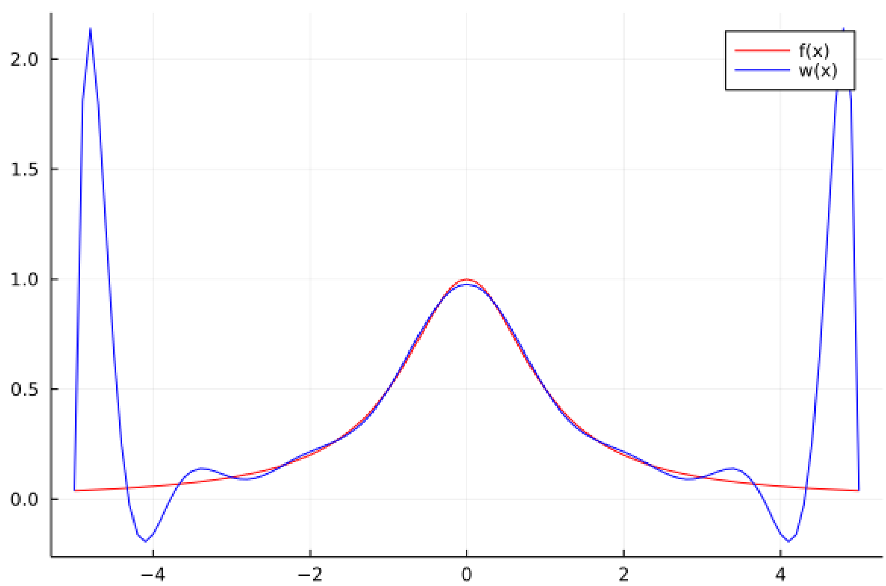
Rysunek 9: Wykres funkcji: $f(x) = |x|,$ na przedziale $[-1, 1], n = 15$



Rysunek 10: Wykres funkcji: $g(x) = \frac{1}{1+x^2},$ na przedziale $[-5, 5], n = 5$



Rysunek 11: Wykres funkcji: $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, na przedziale $[-5, 5], n = 10$



Rysunek 12: Wykres funkcji: $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, na przedziale $[-5, 5], n = 15$

6.1 Wnioski

Odnoście funckji $f(x) = |x|$, wartości wielomianu interpolacyjnego nie pokrywają się z wartościami funkcji. Powodem tego jest to, że funckja $|x|$ nie jest różniczkowalna. Dla drugiej funkcji $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, widzimy, że pomimmo zwiększania n, wartości na krańcach przedziału coraz bardziej się rozbiegają. Zjawisko to nazywa się efektem Rungego. Zjawisoko typowe dla interpolacji przy pomocy wielomianów o wysokich stopniach przy zastosowaniu równoległych węzłów.