Obliczenia Naukowe

lista 3

Mateusz Tofil

16 listopada 2021

1 Zadanie 1

1.1 Opis zadania

Zadanie opierało się na zaimplementowaniu funkcji rozwiązującą równanie

$$f(x) = 0$$

metodą bisekcji. Nasze dane początkowe to:

1. $f(x)$ - funkcja, której miejsce zerowe chcemy znaleźć
2. $[a, b]$ - końce przedziału początkowego
3. delta, epsilon - dokładności obliczeń

1.2 Metoda rozwiązania

Implementacja funkcji znajduję się w module w pliku `module.jl`. Aby móc skorzystać z tej metody funkcja musi spełniać poniższe założenia:

1. $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$
2. $f(x)$ zmienia znak, tj. $f(a)f(b) < 0$

Metoda ta polega, na ietracyjnym dzieleniu przedziału na pół oraz wybranie z tego w którym funckja zmiania znak. Kończy ona działanie gdy długość przedziału jest mniejsza od δ lub wartość w punkcjie jest mniejsza od ϵ. Poniżej znajduje się pseudokod znajdowania miejsc zerowych funckji wyznaczanych metodą bisekcji.

$u \leftarrow f(a); v \leftarrow f(b); e \leftarrow b - a;$
if sign(u) $==$ sign(v) **then**
    return $(0, 0, 0, 1)$;
end if
$it \leftarrow 1'$
while true **do**
    $e \leftarrow e/2; c \leftarrow c; w \leftarrow f(c);$
    if abs(e) $< \delta$ or |w| $< \epsilon$ **then**
        return (c, w, it, 0);
    end if
    if sign(w) != sign(u) **then**
        $b \leftarrow c; v \leftarrow w;$
    else
        $a \leftarrow c; u \leftarrow w;$
    end if
    $it++;$
end while

2 Zadanie 2

2.1 Opis zadania

Zadanie opierało się na zaimplementowaniu funkcji rozwiązującej równanie

$$f(x) = 0$$

metodą Newtona. Nasze dane początkowe to:

1. $f(x)$ - funkcja, której miejsce zerowe chcemy znaleźć
2. $pf(x)$ - pochodna funkcji $f(x)$
3. x_0 - punkt od którego zaczynamy poszukiwania
4. delta, epsilon - dokładności obliczeń
5. maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

2.2 Metoda rozwiązania

Implementacja funkji znajduję się w module w pliku `module.jl`. Założenia dla metody Newtona to:

1. $f(x) \in C^2[a, b]$
2. $f'(x) \neq 0$ (r jest pierwiastkiem jednokrotnym)

Dany mamy punkt początkowy x_0. Wyznaczamy pochodną funkcji w punkcie początkowym, a następnie wyznaczamy styczną do funkcji w tym punkcie. Miejsce przecięcia stycznej oraz osi X jest potencjalnym pierwiastkiem naszej funkcji. Jeśli wartość funkcji w naszym punkcie przecięcia nie jest bliskie zeru powtarzamy iterację, biorąc wyznaczone miejsce przecięcia jako punkt początkowy. Poniżej znajduje się pseudokod metody Newtona.

$v \leftarrow f(x_0)$
if abs(v) $< \epsilon$ **then**
    return $(x_0, v, 0, 0)$
end if
for $it = 1$ to $maxit$ **do**
    if $abs(f'(x_0)) < \epsilon$ **then**
        return $(0, 0, it, 2)$
    end if
    $x_1 \leftarrow x_0/f'(x_0); v \leftarrow f(x_1)$
    if $abs(x_1 - x_0) < \delta$ or $abs(v) < \epsilon$ **then**
        return $(x_1, v, it, 0)$
    end if
    $x_0 \leftarrow x_1$
end for
return $(0, 0, 0, 1)$

3 Zadanie 3

3.1 Opis zadania

Zadanie opierało się na zaimplementowaniu funkcji rozwiązującej równanie

$$f(x) = 0$$

metodą siecznych. Nasze dane początkowe to:

1. $f(x)$ - funkcja, której miejsce zerowe chcemy znaleźć
2. x_0, x_1 - przybliżenia początkowe
3. delta, epsilon - dokładność obliczeń
4. maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

3.2 Metoda rozwiązania

Impelmentacja funkcji znajduję się w module w pliku `module.jl`. Założennia dla metody siecznych to:

1. $f(x) \in C^2[a, b]$
2. $f'(x) \neq 0$ (r jest pierwiastkiem jednokrotnym)

Metoda ta, jest podobna do metody Newtona z tą różnicą, że zamaist obliczać pochodną funkcji aproksymujemy ją ilorazem różnicwoym, przez co dostajemy sieczną. Jako wartości początkowe potrzebujemy dwóch punktów, gdyż $x_n + 1$ jest zależne od x_n i x_{n-1}. Poniżej znajduje się pseudokod metody siecznych.

$a \leftarrow v_0; b \leftarrow x_1; fa \leftarrow f(a); fb \leftarrow f(b);$
for $it = 1$ to $maxit$ **do**
    if $abs(fa) > abs(fb)$ **then**
        $a, b \leftarrow b, a;$
        $fa, fb \leftarrow fb, fa;$
    end if
    $s \leftarrow (b - a)/(fb - fa);$
    $b \leftarrow a; fb \leftarrow fa;$
    $a \leftarrow a - fa * s;$
    $fa \leftarrow f(a);$
    if $abs(b - a) < \delta$ or $abs(fa) < \epsilon$ **then**
        return $(a, fa, it, 0);$
    end if
end for
return $(0, 0, 0, 1)$

4 Zadanie 4

4.1 Opis zadania

Zadanie polegało na wyznaczeniu pierwiastka równania

$$\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$$

wczesniej zaimplementowanymi metodami, dla danych wejściowych:

1. bisekcji z przedziałem początkwoym $[1.5, 2]$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
2. newtona z przubliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
3. siecznych z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1, x_1 = 2$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

4.2 Metoda rozwiązania

Korzystając ze wcześniej zaimplementwoancyh metod znajdujących się w pliku `module.jl` wywołując funkcje z parametrami opisanymi wyżej. Program reprezentujący działanie tego zadania znajduje się w pliku `zad4.jl`.

4.3 Otrzymane wyniki

Jak możemy zauważyć, wszystkie metody zwróciły mniej więcej ten sam poprawny wynik. Wartości w tych punktach nie są dokładni równe 0, niemniej jedak są bliskie 0. Metoda Newtona i metoda siecznych zrobiły to zdecydowanie w mniejszej liczbie iteracji niż metoda bisekcji (były szybciej zbieżne).

metoda	r	v	it	err
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Tablica 1: Porównanie wyników różnych metod dla funkcji z zadania 4.

4.4 Wnioski

Dla poprawnie dobrancyh paramentrów (spełniające założenia) każda z metod zwraca poprawny wynik z zadaną dokładnością, różniąca się za to liczbą iteracji potrzebnych do osiągnięcia go.

5 Zadanie 5

5.1 Opis zadania

Zadanie polegało na znalezieniu przecięcia się wykresów funkcji korzystając z metody bisekcji:

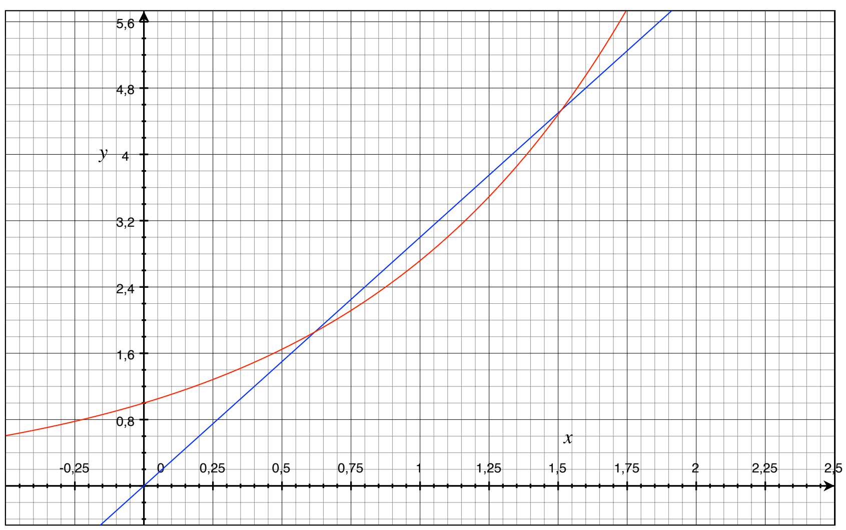
$$y = 3x$$
$$y = e^x$$

Funkcje przecinają się wtedy i tylko wtedy są sobie równe. Zatem nasz problem sprowadza się do obliczenia takiego równania:

$$e^x = 3x \Rightarrow e^x - 3x = 0$$

5.2 Metoda rozwiązania

Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku `zad5.jl` i polega na użyciu metody bisekcji to rozwiązania równania. Do wyboru odpowiednich parametrów startowych posłużyłem się wykresem przedstawiający obie funkcje:



Rysunek 1: Wykres funkcji: $y = 3x$ i $y = e^x$

Jak możemy zauważyć, na wykresie, istnieją dwa punkty przecięcia. Stąd parametry startowe ustaliłem w pierwszym wywołaniu funkcji na $[a, b] = [0.0, 1.0]$ oraz w drugim wywołaniu na $[a, b] = [1.0, 2.0]$.

5.3 Otrzymane wyniki

Dla wcześniej ustalonych paramentrów, otrzymałem następujące wyniki:

x	f(x)	iteracje
0.619140625	-9.066320343276146e-5	9
1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13

Tablica 2: Otrzymane wyniki dla zadania 5

5.4 Wnioski

Jak widać, z otrzymanych wyników, metoda bisejci pozwala na poprawne otrzymanie wyników przy odpowiednich dancyh wejściowcyh. Co ważne, funkcja $y = e^x - 3x$ zmienia znak na tych przedziałach, dlatego wraz z odpowiednimi dobranymi przedziałami poszukiwań, jesteśmy wstanie znaleźć przybliżone miejsca zerowe.

6 Zadanie 6

6.1 Opis zadania

W zadaniu należało, używając naszych wsześniej zaimplementowanych metod, wyznaczyć miejsca zerowe funkcji:

$$f_1(x) = e^{1-x} - 1$$

$$f_2(x) = xe^{-x}$$

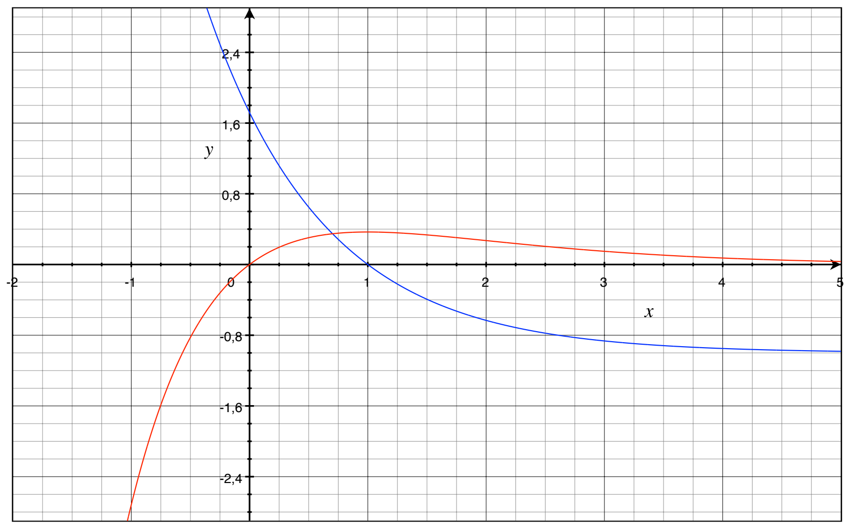
. Wymagana dokłądność to $\delta = 110^{-5}$ oraz $\epsilon = 10^{-5}$. Należało samemu dobrać przedziały i przybliżenia początkowe. Miejscemi zerowym funkcji są:

$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

6.2 Metoda rozwiązania

Implementacja zadania znajduje się w `zadanie6.jl`. Dobranie parametrów początkowych opiera się na analizie wykresów funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$.



Rysunek 2: Wykres funkcji: $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ i $f_2(x) = xe^{-x}$

Dobranie warunków początkowych dla metody bisekcji, wystraczyło dobrać taki przedział, w którym funkcja zmienia znak. Przedziały dobierałem w taki sposób, aby wyniki nie wychodziły w pierwszej iteracji.

Dla metody Newtona, pochodne dwóch funckji $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$ nie zmieniają się w badanym przedziale, zatem możeby przyjać punkty początkowe po prostu w okolicach miejsc zerowych widocznych na wykresie.

Metoda siecznych może użyć dwóch punktów, równym granicą przedziału podanych dla metody bisekcji.

Podsumowując parametry początkowe, czyli przedziały lub punkty startowe, zebrałem w tabeli poniżej.

metoda	funkcja	parametry
bisekcji	$f_1(x)$	$a = 0.5, b = 2.0$
bisekcji	$f_2(x)$	$a = -1.5, b = 0.5$
newton	$f_1(x)$	$x_0 = 0.0$
newton	$f_2(x)$	$x_0 = -1.0$
siecznych	$f_1(x)$	$x_0 = 0.5, x_1 = 2.0$
siecznych	$f_2(x)$	$x_0 = -1.5, x_1 = 0.5$

Tablica 3: Parametry dla każdej z metod dla zadania 6

6.3 Otrzymane wyniki

Dla wcześniej opisanych parametrów początkowych otrzymałem następujące wyniki, które zaprezentowałem w poniżej tabeli:

metoda	x	f(x)	iteracje
bisekcji	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16
newtona	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4
siecznych	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6

Tablica 4: Miejsca zerowe dla funkcji $f_1(x)$ dla każdej z metod.

metoda	x	f(x)	iteracje
bisekcji	0.0	0.0	2
newtona	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
siecznych	1.7791419742860986e-8	1.779141942632637e-8	8

Tablica 5: Miejsca zerowe dla funkcji $f_2(x)$ dla każdej z metod.

Jak możemy zauważyć, przy dobrze dobranych parametrach początkowych, metoda bisekcji znajduje miesjca zerowe w bardzo szybki sposób. W przypadku kiedy wybierzemy przedział, którego środkiem jest nasze miejsce zerowe otrzymujemy od razu dokładny wyniki. Gdy przesuniemy nieco przedział otrzymujemy już nie dokladny wynik.

Eksperymentując z wartościami początkowymi dla metody Newtona i funckji $f_1(x)$ możemy zaobserwować, że wybierając wartości z przedziału $(1, \infty)$, możemy otrzymać komunikat o błedzie, że pochodna jest bliska zeru. Dla drugiej funkcji $f_2(x)$, gdy wybierzemy $x_0 = 1.0$ otrzymamy błąd o pochodnej zbyt bliskiej zeru ($f_2'(1) = 0$) więc równoległa do osi OX. Z kolei dla dużych x otrzymamy niepoprawny wynik, gdyż $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$, więc wybierając dostatecznie duzy x otrzymamy go jako miejsce zerowe ze względu na bliskośc do zera, mimo, że funkcja nie ma miejsce zerowych na dodatniej cześci osi.

6.4 Wnioski

W celu poprawnego wyliczenia miejsc zerowych funkcji metodami bisekjci, Newtona i siecznych, musimy posiadać wiedzę na temat przebiegu funkjci. Nieumiejętne dobranie paramentrów początkowych może skutkować nieprawidłowymi wynikami. Nieodpowiednie dobranie przedziału dla metody bisekcji spowoduje, że algorytm potrzebować będzie więcej iteracji. Wartośc początkowe dla metody Newtona i siecznych mogą spowodować zwrócenie niepoprawnych wyników.