13 | 魔数 0x5f3759df

2017-11-14 陈皓

下列代码是在《雷神之锤III竞技场》源代码中的一个函数（已经剥离了C语言预处理器的指令）。其实，最早在2002年（或2003年）时，这段平方根倒数速算法的代码就已经出现在Usenet与其他论坛上了，并且也在程序员圈子里引起了热烈的讨论。

我先把这段代码贴出来，具体如下：

```
float Q_rsqrt( float number )
{
    long i;
    float x2, y;
    const float threehalfs = 1.5F;

    x2 = number * 0.5F;
    y  = number;
    i  = * ( long * ) &y; // evil floating point bit level hacking
    i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );  // what the fuck?
    y  = * ( float * ) &i;
    y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );  // 1st iteration
    // 2nd iteration, this can be removed
    // y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );

    return y;
}
```

这段代码初读起来，我是完全不知所云，尤其是那个魔数0x5f3759df，根本不知道它是什么意思，所以，注释里也是 What the fuck。今天的这篇文章里，我主要就是想带你来了解一下这个函数中的代码究竟是怎样出来的。

其实，这个函数的作用是求平方根倒数，即$x^{-1/2}$，也就是下面这个算式：

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

当然，它算的是近似值。只不过这个近似值的精度很高，而且计算成本比传统的浮点数运算平方根的算法低太多。在以前那个计算资源还不充分的年代，在一些3D游戏场景的计算机图形学中，要求取照明和投影的光照与反射效果，就经常需要计算平方根倒数，而且是大量的

计算——对一个曲面上很多的点做平方根倒数的计算。也就是需要用到下面的这个算式，其中的x,y,z是3D坐标上的一个点的三个坐标值。

$$\frac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}$$

基本上来说，在一个3D游戏中，我们每秒钟都需要做上百万次平方根倒数运算。而在计算硬件还不成熟的时代，这些计算都需要软件来完成，计算速度非常慢。

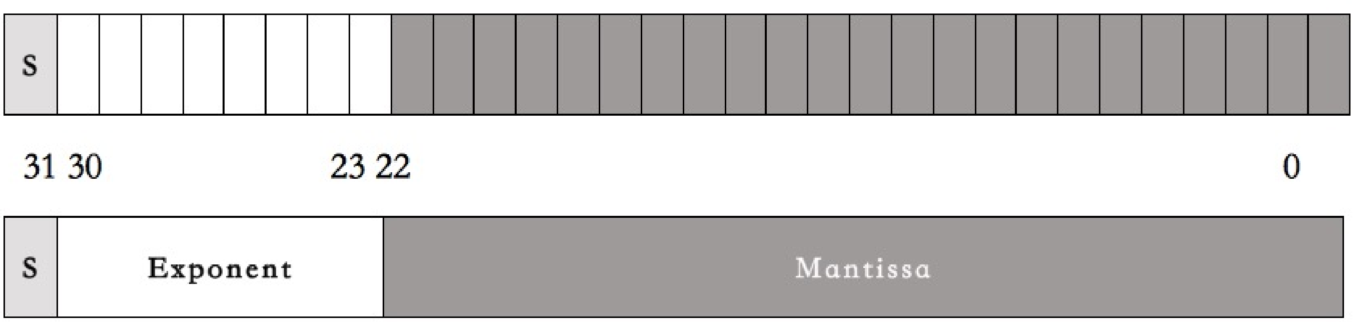
我们要知道，在上世纪90年代，多数浮点数操作的速度更是远远滞后于整数操作。所以，这段代码所带来的作用是非常大的。

计算机的浮点数表示

为了讲清楚这段代码，我们需要先了解一下计算机的浮点数表示法。在C语言中，计算机的浮点数表示用的是IEEE 754 标准，这个标准的表现形式其实就是把一个32bits分成三段。

- 第一段占1bit，表示符号位。代称为S（sign）。
- 第二段占8bits，表示指数。代称为E（Exponent）。
- 第三段占23bits，表示尾数。代称为M（Mantissa）。

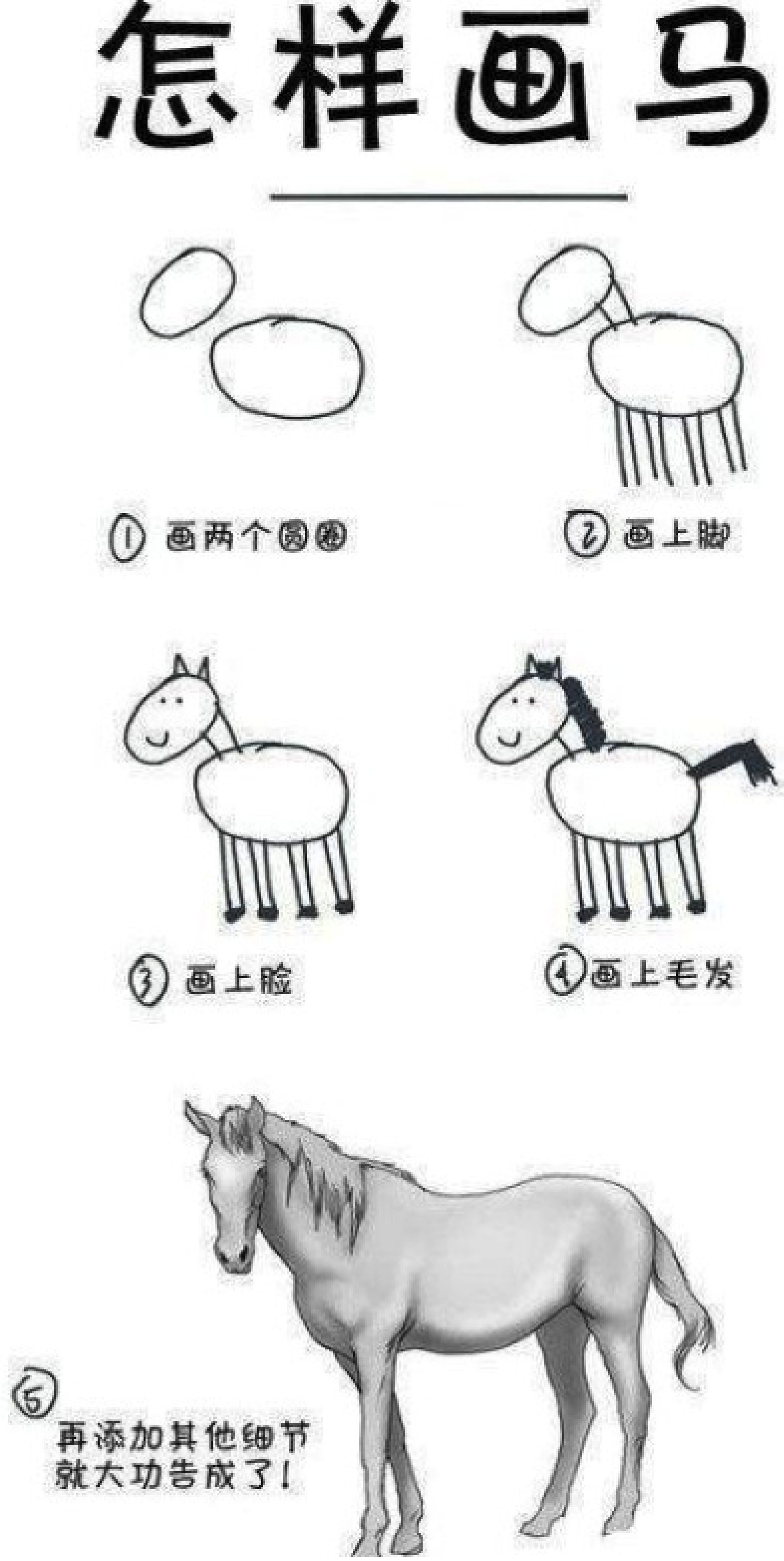
如下图所示：



然后呢，一个小数的计算方式是下面这个算式：

$$(-1)^{S}\ast(1+\frac{M}{2^{23}})\ast 2^{(E-127)}$$

但是，这个算式基本上来说，完全就是让人一头雾水，摸不着门路。对于浮点数的解释基本上就是下面这张漫画里表现的样子。



下面，让我来试着解释一下浮点数的那三段表示什么意思。

第一段符号位。对于这一段，我相信应该没有人不能理解。

第二段指数位。什么叫指数？也就是说，对于任何数x，其都可以找到一个n，使得2^{n}<=x<=2^{n+1}。比如：对于3来说，因为 2 < 3 < 4，所以 n=1。而浮点数的这个指数为了要表示0.00x的小数，所以需要有负数，这8个bits本来可以表示0-255。为了表示负的，取值要放在 [-127,128] 这个区间中。这就是为什么我们在上面的公式中看到的$2^{(E-127)}$这一项了。也就是说，$n = E-127$，如果$n=1$，那么E就是128了。

第三段尾数位。也就是小数位，但是这里叫偏移量可能好一些。这里的取值是从[0 - 2^{23}]中。你可以认为，我们把一条线分成2^{23}个线段，也就是8388608个线段。也就是说，把2^{n}到2^{n+1}分成了8388608个线段。而存储的M值，就是从2^n到 x 要经过多少个段。这要计算一下，2^{n}到x的长度占2^{n}到2^{n+1}长度的比例是多少。

我估计你对第三段还是有点不懂，那么我们来举一个例子。比如说，对3.14这个小数。

是正数。所以，S = 0

2^1 < 3.14 <2^2。所以，n=1， n+127 = 128。所以，E=128。

(3.14 - 2) / (4 - 2) = 0.57， 而$0.57*2^{23} = 4781506.56$，四舍五入，得到M = 4781507。因为有四舍五入，所以，产生了浮点数据的精度问题。

把S、E、M转成二进制，得到 3.14的二进制表示。

0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1

我们再用IEEE 754的那个算式来算一下：

$${(-1)}^0*({1+\frac{4781507}{2^{23}}})*2^{(128-127)}$$

$$1*(1+0.570000052452087)*2$$
$$=3.1400001049041748046875$$

你看，浮点数的精度问题出现了。

我们再来看一个示例，小数 0.015。

是正数。所以，S = 0。

$2^{-7}< 0.015 < 2^{-6}$ 。所以，n=-7， n+127 = 120。所以，E=120。

$ (0.015 - 2^{-7}) / (2^{-6} - 2^{-7}) $ = $0.0071875/0.0078125=0.92$。而$0.92 * 2^{23} = 7717519.36$，四舍五入，得到 M = 7717519。

于是，我们得到0.015的二进制编码：

0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1

其中：

120 的二进制是01111000

7717519的二进制是11101011100001010001111

返回过来算一下：

$$(-1)^{0}\ast (1+\frac{7717519}{2^{23}})\ast 2^{(120-127)}$$

$$(1+0.919999957084656)*0.0078125$$
$$=0.014999999664724$$

你看，浮点数的精度问题又出现了。

我们来用C语言验证一下：

```
int main() {
    float x = 3.14;
    float y = 0.015;
    return 0;
}
```

在我的Mac上用lldb 工具 Debug 一下。

```
(lldb) frame variable
(float) x = 3.1400001
(float) y = 0.0149999997

(lldb) frame variable -f b
```

```
(float) x = 0b01000000010010001111010111000011
(float) y = 0b00111100011101011100001010001111
```

从结果上，完全验证了我们的方法。

好了，不知道你看懂了没有？我相信你应该看懂了。

简化浮点数公式

因为那个浮点数表示的公式有点复杂，我们简化一下：

$$(-1)^{S}\ast (1+\frac{M}{2^{23}})\ast 2^{(E-127)}$$

我们令，$m = (\frac{M}{2^{23}})$，$e = (E-127)$。因为符号位在$y= x^{-\frac{1}{2}}$的两端都是0（正数），也就可以去掉，所以浮点数的算式简化为：

$$(1+m)\ast2^{e}$$

上面这个算式是从一个32bits二进制计算出一个浮点数。这个32bits的整型算式是：

$$M+E\ast2^{23}$$

比如，0.015的32bits的二进制是：00111100011101011100001010001111，也就是整型的：

$$7717519+120\ast 2^{23}$$
$$= 1014350479$$
$$= 0X3C75C28F$$

平方根倒数公式推导

下面，你会看到好多数学公式，但是请你不要怕，因为这些数学公式只需要高中数学就能看懂的。

我们来看一下，平方根数据公式：

$$y=\frac{1}{\sqrt[2]{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

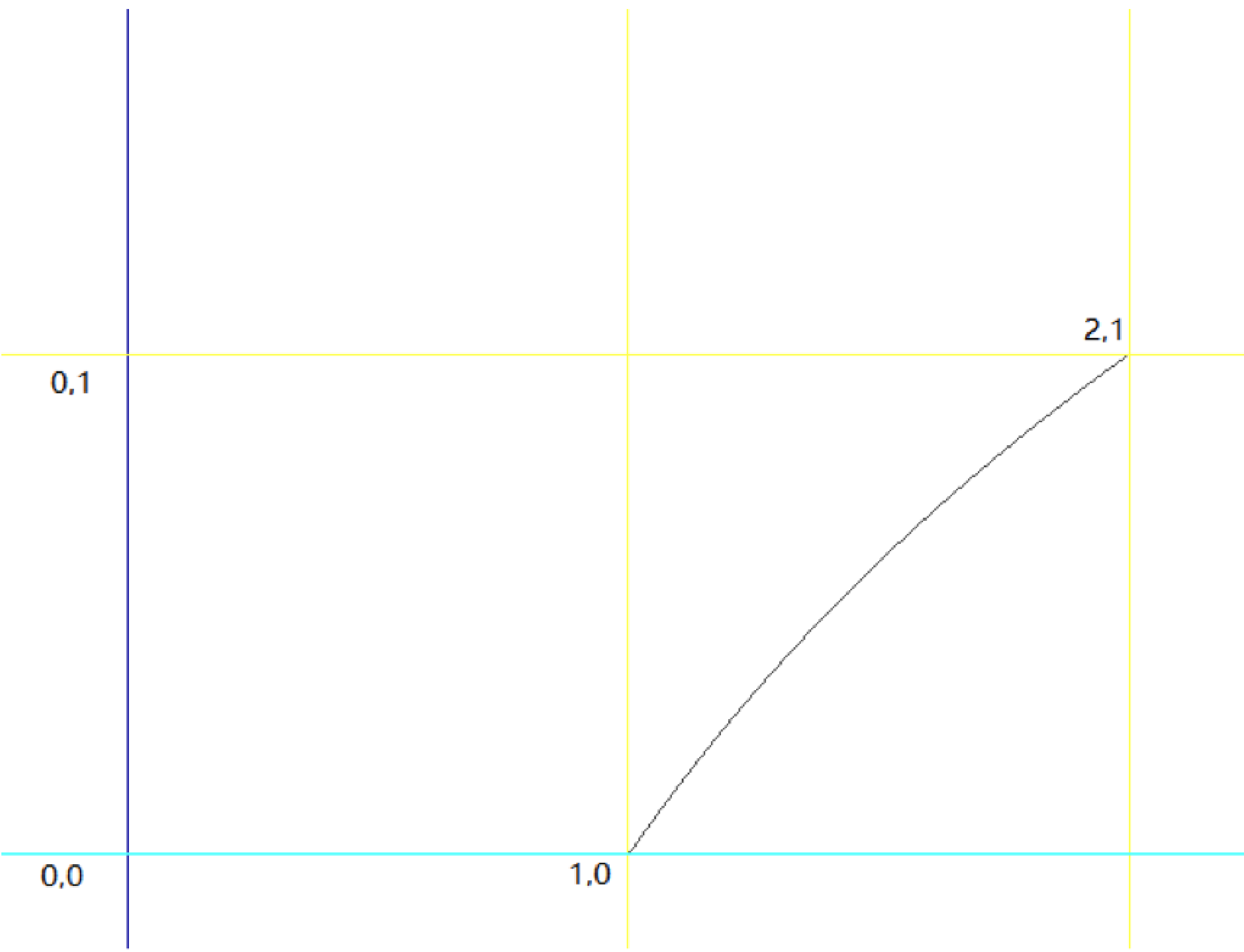
等式两边取以2为基数的对数，就有了：

$$\log_2(y) =-\frac{1}{2}\log_2(x)$$

因为我们实际上在算浮点数，所以将公式中的 x 和 y 分别用浮点数的那个浮点数的简化算式$(1+ m)*2^e$替换掉。代入$\log()$公式中，我们也就有了下面的公式：

$$\log_{2} (1+m_y)+e_y$$
$$=-\frac{1}{2}(\log_2(1+m_x)+e_x)$$

因为有对数，这公式看着就很麻烦，似乎不能再简化了。但是，我们知道，所谓的m_x或是m_y，其实是个在0和1区间内的小数。在这种情况下，$\log_2 (1.x)$接近一条直线。



那么我们就可以使用一个直线方程来代替，也就是：

$$\log_{2}(1+m)\approx m+\sigma $$

于是，我们的公式就简化成了：

$$m_y+\sigma+e_y\approx-\frac{1}{2}(m_x+\sigma+e_x)$$

因为$m = (\frac{M}{2^{23}})$，$e = (E-127)$，代入公式，得到：

$$\frac{M_y}{2^{23}}+\sigma+E_y-127$$
$$\approx-\frac{1}{2}(\frac{M_x}{2^{23}}+\sigma+E_x-127)$$

移项整理一下，把 σ 和127 从左边，移到右边：

$$\frac{M_y}{2^{23}}+E_y\approx-\frac{1}{2}(\frac{M_x}{2^{23}}+E_x)-\frac{3}{2}(\sigma-127)$$

再把整个表达式乘以2^{23}，得到：

$${M_y}+E_y{2^{23}}$$
$$\approx-\frac{1}{2}(M_x+E_x{2^{23}})-\frac{3}{2}(\sigma-127){2^{23}}$$

可以看到一个常数：$-\frac{3}{2}(\sigma-127){2^{23}}$，把负号放进括号里，变成$\frac{3}{2}(127-\sigma){2^{23}}$，并可以用一个常量代数R来取代，于是得到公式：

$${M_y}+E_y{2^{23}}\approx R-\frac{1}{2}(M_x+E_x{2^{23}})$$

还记得我们前面那个“浮点数32bits二进制整型算式” $M+E* 2^{23}$吗？假设，浮点数x的32bits的整型公式是：$I_x= M_x+ E_x 2^{23}$，那么上面的公式就可以写成：

$$I_y\approx R-\frac{1}{2}I_x$$

代码分析

让我们回到文章的主题，那个平方根函数的代码。

首先是：

```
i  = * ( long * ) &y; // evil floating point bit level hacking
```

这行代码就是把一个浮点数的32bits的二进制转成整型。也就是，前面我们例子里说过的，3.14的32bits的二进制是：01000000010010001111010111000011，整型是：1078523331。即y = 3.14，i = 1078523331。

然后是：

```
i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );  // what the fuck?
```

这就是：

```
i  = 0x5f3759df - ( i / 2 );
```

也就是我们上面推导出来的那个公式：

$$I_y\approx R-\frac{1}{2}I_x$$

代码里的 R = 0x5f3759df。

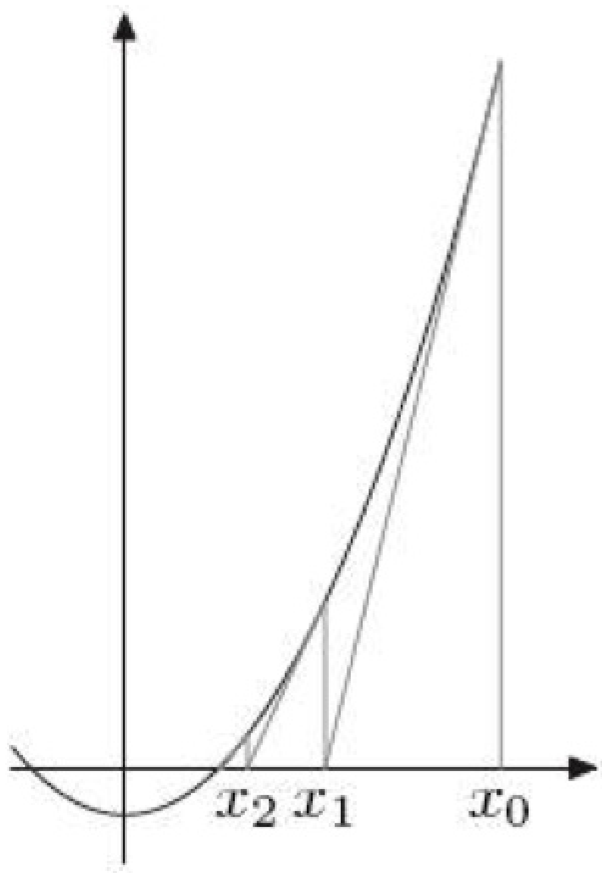
我们又知道，R = $\frac{3}{2}(127-\sigma){2^{23}}$，把代码中的那个魔数代入，就可以计算出来：σ= 0.0450465 。这个数是个神奇的数字，这个数是怎么算出来的，现在还没人知道。不过，我们先往下看后面的代码：

```
x2 = number * 0.5F;
y  = * ( float * ) &i;
y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );  // 1st iteration
// 2nd iteration, this can be removed
// y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );
```

这段代码相当于下面这个公式：

$$I_{y'} = I_y(1.5-0.5 \times I_y^2)$$

这个其实是“牛顿求根法”，这是一个为了找到一个 f(x)= 0 的根而用一种不断逼近的计算方式。请看下图：



首先，初始值为X0，然后找到X0所对应的Y0（把X0代入公式得到Y0 = f(X0)），然后在（X0,Y0）这个点上做一个切线，得到与X轴交汇的X1。再用X1做一次上述的迭代，得到X2，就这样一直迭代下去，一直找到，y = 0时，x的值。

牛顿法的通用公式是：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

于是，对于$y= \frac{1}{\sqrt{x}}$来说，对固定的x（常数），我们求y使得$\frac{1}{y^2}-x=0$，$f(y)= \frac{1}{y^2} -x$，$f'(y)=\frac{-2}{y^3}$ 。 注意：$f'(y)$是$f(y)$关于y的导数。

代入上述的牛顿法的通用公式后得到：

$$y_{n+1}=y_n-\frac{\frac{1}{y_n^2}-x}{\frac{-2}{y_n^3}}$$
$$=\frac{y_n(3-xy_n^2)}{2}=y_n(1.5-0.5xy_n^2)$$

正好就是我们上面的代码。

整个代码是，之前生成的整数操作产生首次近似值后，将首次近似值作为参数送入函数最后两句进行精化处理。代码中的两次迭代正是为了进一步提高结果的精度。但由于《雷神之锤III》的图形计算中并不需要太高的精度，所以代码中只进行了一次迭代，二次迭代的代码则被注释了。

相关历史

根据Wikipedia上的描述，《雷神之锤III》的代码直到QuakeCon 2005才正式放出，但早在2002年（或2003年）时，平方根倒数速算法的代码就已经出现在Usenet和其他论坛上了。最初人们猜测是《雷神之锤》的创始人John Carmack写下了这段代码，但他在回复询问他的邮件时否定了这个观点，并猜测可能是先前曾帮id Software优化《雷神之锤》的资深汇编程序员Terje Mathisen写下了这段代码。

而Mathisen的邮件里表示，在1990年代初，他只曾做过类似的实现，确切来说这段代码亦非他所作。现在所知的最早实现是由Gary Tarolli在SGI Indigo中实现的，但他亦坦承他仅对常数R的取值做了一定的改进，实际上他也不是作者。

在向以发明MATLAB而闻名的Cleve Moler查证后，Rys Sommefeldt则认为原始的算法是Ardent Computer公司的Greg Walsh所发明的，但他也没有任何确定性的证据能证明这一点。

不仅该算法的原作者不明，人们也仍无法确定当初选择这个“魔术数字”的方法。Chris Lomont曾做了个研究：他推算出了一个函数以讨论此速算法的误差，并找出了使误差最小的最佳R值0x5f37642f（与代码中使用的0x5f3759df相当接近）。但以之代入算法计算并进行一次牛顿迭代后，所得近似值之精度仍略低于代入0x5f3759df的结果。

因此，Lomont将目标改为查找在进行1-2次牛顿迭代后能得到最大精度的R值，在暴力搜索后得出最优R值为0x5f375a86，以此值代入算法并进行牛顿迭代，所得的结果都比代入原始值（0x5f3759df）更精确。于是他说，“如果可能我想询问原作者，此速算法是以数学推导还是以反复试错的方式求出来的？”

Lomont亦指出，64位的IEEE754浮点数（即双精度类型）所对应的魔术数字是0x5fe6ec85e7de30da。但后来的研究表明，代入0x5fe6eb50c7aa19f9的结果精确度更高（McEniry得出的结果则是0x5fe6eb50c7b537aa，精度介于两者之间）。

后来Charles McEniry使用了一种类似Lomont但更复杂的方法来优化R值。他最开始使用穷举搜索，所得结果与Lomont相同。而后他尝试用带权二分法寻找最优值，所得结果恰是代码中所使用的魔术数字0x5f3759df。因此，McEniry认为，这一常数最初或许便是以“在可容忍误差范围内使用二分法”的方式求得。

这可能是编程世界里最经典的魔数的故事，希望你能够从这篇文章中收获一些数学的基础知识。数学真是需要努力学习好的一门功课，尤其在人工智能火热的今天。

精选留言 38

casey
1510729192
曾经在知乎的一个100行内有哪些给力代码回答中引用了这段程序，但是远没有今天看完这篇文章理解更深刻，谢谢皓哥

w2

1522232813

耗子为啥这么牛逼

作者回复 不牛不牛

coderliang

1510801950

非常好。当初读 CSAPP 那本书时，读到第二章浮点数部分着实花了好久没没完全get到书中的逻辑......

有咸鱼的梦想

1526256014

没有理解为什么浮点数3.14那里，小数部分需要进行这个处理(3.14-2)/(4-2)=0.57，希望皓叔能讲解一下

作者回复 文中已讲了，你再仔细看看□

Smallfly

1561997295

不知道耗子叔还看不看留言，关于浮点数的公式，我有一个疑问，其中 M/2^23 的部分是一个浮点数，我们在定义浮点数公式的时候，用了浮点数，这个公式都还没定义，这个浮点数是怎么表示的呢，会不会有一种鸡生蛋，蛋生鸡问题......

imuyang

1525755880

脑子太笨了，愣是看了两遍才弄清楚

作者回复 那很不错了

Greybunny
1510854766

那个常数感觉和欧拉常数的计算原理类似

newming
1511783766

非常好的文章，烧脑哈哈

yao
1559052665

http://www.sandaoge.com/info/new_id/30.html?author=1
这篇文章也有相关内容，是谁抄袭谁？

胡红伟
1558959517

由x求得x的整形i(x)，再由i(y)=R-0.5i(x)求得y的整形i(y)，再由i(y)反求y，再把y代入y(1.5-0.5xy²)表达式求得更精确的y。

fpjoy
1555049315

log2(1+m) 约等于 m + δ 这样简化的精度是多少呢，会不会有较大误差啊

Chn.K
1552557893

自己能推导一遍那才叫真看懂了，好长时间没这么推导公式了，瞬间回到大学时代。

可达鸭
1542034647

what the fuck!
哈哈，莫名想笑!
算法牛逼，耗哥解读，也很细致入微

飘过雪域的风

1535542712

看了《深入理解计算机原理》里面对浮点数二进制表示的描述，感觉不是很理解，看这里的解释秒懂啊

壹雁🍁

1534077178

几年前看过魔数，觉得很神奇，不明觉厉。今天看后半部分推导出魔数的逻辑，还看得不是很明白，还得看多几遍

---

ll

1567399567

读这篇文章让我想起了电影黑客帝国中，在造物主给尼奥说明他是怎么来的，根本原理就是这个吧

郭登鹏

1562227220

IEEE 754 应该还有非规格化数的定义 第一部分讲 这个的时候 好像没太多涉及

卫宣安

1562080619

@smallfly 浮点数在没有计算机之前就已经有了，比如半个，半个的半个！当有了计算机之后，并且发展到32甚至到64位精度时，才有了那种二进制表示方式。所以当然是浮点数先有啦！

Eben

1562059661

看了两遍，终于看懂了，就是利用那个魔数先求一个近似值，然后利用牛顿求根法再去逼近真实值

洪林413

1559642248

看了一下午，第一遍蒙逼，第二遍除了导数有点不懂，其他的算法都看懂了。写的很经典！

傲娇的小宝
1557705303

看完发现自己没咋看懂，数学太烂的孩子伤不起，底子太差，需要补补，人生啊，欠的债都是要一笔笔还的啊。

刘儒勇
1557401385

对一个很难的问题找到更简单的近似解，太厉害了

汪玉斌
1556426823

$(-1)S*(1+M223)*2(E-127)$

终于了解了浮点数的表示 :), 谢谢皓哥!

莫佳骏
1553799800

分析的牛逼，非常透彻

DSloth
1546092400

数学真的是必需品

扬扬
1545534440

这篇文章看了两个小时才明白😄😄数学知识都快还给老师了。

---

jz
1544686993

3.14表示的那个 中间1的二进制应该是00000001吧

蜗牛

1541120223

数学是硬伤

土拨鼠

1539828976

厉害的

月天

1537248933

文章中，0.015 的 32bits 的二进制是001111000111010111000010100011这个地方的上下的推断，看了半天。
感觉是否是需要M+E*2^23次方然后才能推导出来的？我看下来的直观感受是通过这个二进制能直接得到7717519+120∗2^23。反过来推出这个是否更容易理解。

艾尔欧唯伊

1537007022

。。。现在去找老师要回数学课本还来得及么

---

lei

1533774247

慢慢读看懂了，其实在前面就用到了泰勒展开，当 sigma 越小，R是越接近于 0x5f3759df，可以验证当 sigma 等于 0.00000000001的时候。

---

coolcc

1531704709

没读懂，再来一次......

---

u

1531670454

除了导数概念忘了之外了，其他的全都看懂了，理解这种东西，得有耐心！□□□

---

yao

1530800837

费老鼻子劲终于看明白了😄

飞灰湮儿灭

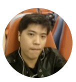
1530437390

看了两遍了，还是似懂非懂。

北风一叶

1530011409

第一遍 完全懵逼，不知道第二遍能看懂不



海怪哥哥

1527643440

耗子哥较真的劲让人佩服