Методы вычислений

Лабораторная работа №2

Решение проблемы собственных значений. Численное решение нелинейных уравнений.

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

Требования к отчёту:

- Отчёт предоставляется в электронном виде
- Рекомендуемый язык – C++. Основное требование к программам – компактность и читаемость
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы (на основании полученных результатов).
- Каждая лабораторная работа будет оцениваться по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения и срока сдачи работы.

Работа должна быть сдана в срок. Работу позволяется сдавать только ОДИН раз.

1. Написать программу, которая находит максимальное по модулю собственное значение (пару максимальных по модулю собственных значений) и соответствующий ему (им) собственный вектор (собственные векторы) матрицы A с максимально возможной точностью (в пределах обычных double чисел). Применить программу к следующим ниже входным данным. В отчете подробно изложить способ определения случая и критерия остановки итераций. Проведите экспериментальное исследование скорости работы вашей программы в зависимости от размерности матрицы, используя для тестов матрицу со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Вычислите асимптотическую сложность реализованного вами алгоритма.

$$A=\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2\\
0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1\\
-2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 2\\
-2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1\\
-1 & -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 1 & -1 & 2\\
-2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1
\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}
-1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\\
-1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}.$$

2. Написать программу, реализующую QR-алгоритм нахождения всех собственных значений матрицы A с максимально возможной точностью. Применить программу к матрицам из первого задания. Проведите экспериментальное исследование скорости работы вашей программы в зависимости от размерности матрицы, используя для тестов матрицу со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Вычислите асимптотическую сложность реализованного вами алгоритма.

3. Дано нелинейное уравнение
$$\frac{(x^9+\pi)\cos(\ln(x^2+1))}{e^{x^2}} - \frac{x}{2022} = 0.$$
Отделить все его корни. Обосновать (не обязательно доказать строго) единственность каждого корня на отрезке, отсутствие других корней. Методом бисекции сузить отрезки отделенности корней до размера не более 10^{-4}. Методом Ньютона найти все корни с максимально возможной точностью. В отчет включить количество итераций обоих методов.