

سوال (۱)

بردار وزن هر نورون به صورت زیر است

$$w1 = [\sqrt{2}, 0], w2 = [0, \sqrt{2}],$$

فاصله اقلیدسی به صورت زیر تعریف میشود:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}$$

\mathbf{p}, \mathbf{q} = two points in Euclidean n-space

q_i, p_i = Euclidean vectors, starting from the origin of the space (initial point)

n = n-space

حال باید با فرمول زیر در گام دوم برای هر داده ورودی نورون برنده را انتخاب کنیم:

$$\text{The Euclidian distance: } i(x) = \arg \min ||X - W_j||$$

داده اول:

$$I1 = [1, 0]^T,$$

محاسبه فاصله اقلیدسی:

$$d_1 = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{2} - 1,$$

$$d_2 = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$

نورون یک فاصله کمتری دارد و به عنوان برنده انتخاب میشود.

تابع گاوسی هم با یک تابع پایتون پیاده سازی شده و توسط آن مقادیر لازم محاسبه میگردد.

```
def gaussian_distance(d, sigma=0.5):
    h = np.exp(- np.power(d,2) / (2 * np.power(sigma,2)))
    return h
```

و در نهایت با استفاده از رابطه زیر به بروز رسانی وزن ها میپردازیم:

$$\Delta w_j = \eta h_{j,i(x)} (x - w_j)$$

که مقدار نرخ یادگیری 0.2 گفته شده و باقی مقادیر هم قابل محاسبه است.

$$h_{1,1} = e^{-\frac{d_{1,1}^2}{2\sigma^2}} = e^0 = 1, \quad d_{1,1} = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (0 - 0)^2} = 0$$

$$w_{11}: w_{11} + \Delta w_{11} = \sqrt{2} + (0.2 * h_{1,1} * (1 - \sqrt{2})) = \sqrt{2} + 0.2 * 1 * (1 - \sqrt{2}) \simeq 1.331$$

$$h_{1,2} = e^{-\frac{d_{1,2}^2}{2\sigma^2}} = e^{-8} = 0.00033, \quad d_{1,2} = \sqrt{(0 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$w_{12}: w_{12} + \Delta w_{12} = 0 + (0.2 * h_{1,2} * (0 - 0)) = 0 + 0.2 * 0.00033 * (0 - 0) \simeq 0$$

داده دوم:

$$I_2 = [0, \quad 1]^T,$$

محاسبه فاصله اقلیدسی:

$$d_1 = \sqrt{(0 - 1.331)^2 + (1 - 0)^2} = 1.664,$$

$$d_2 = \sqrt{(0 - 0)^2 + (1 - \sqrt{2})^2} = 0.414,$$

نورون دو فاصله کمتری دارد و به عنوان برنده انتخاب میشود.

بروز رسانی وزن ها

$$h_{2,1} = e^{-\frac{d_{2,1}^2}{2\sigma^2}} = 0.00052, \quad d_{2,1} = \sqrt{(0 - 1.331)^2 + (\sqrt{2} - 0)^2} = 1.942$$

$$w_{21}: w_{21} + \Delta w_{21} = 0 + (0.2 * h_{2,1} * (0 - 0)) = 0 + 0.2 * 0.00052 * (0 - 0) \simeq 0$$

$$h_{2,2} = e^{-\frac{d_{2,2}^2}{2\sigma^2}} = e^0 = 1, \quad d_{2,2} = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (0 - 0)^2} = 0$$

$$w_{22}: w_{22} + \Delta w_{22} = \sqrt{2} + (0.2 * h_{2,1} * (1 - \sqrt{2})) = \sqrt{2} + 0.2 * 1 * (1 - \sqrt{2}) \simeq 1.331$$

داده سوم:

$$I_3 = [1, \quad 1]^T,$$

محاسبه فاصله اقلیدسی:

$$d_1 = \sqrt{(1 - 1.331)^2 + (1 - 0)^2} = 1.0533,$$

$$d_2 = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 1.331)^2} = 1.0534,$$

فاصله نوروں های برابر است حدودا یکی را به صورت رندم انتخاب میکنیم. که انتخاب ما نوروں ۲ است.

بروز رسانی وزن ها

$$h_{2,1} = e^{-\frac{d_{2,1}^2}{2\sigma^2}} = 0.00083, \quad d_{2,1} = \sqrt{(0 - 1.331)^2 + (1.331 - 0)^2} = 1.882$$

$$w_{21}: w_{21} + \Delta w_{21} = 0 + (0.2 * h_{2,1} * (1 - 0)) = 0 + 0.2 * 0.00083 * (1 - 0) \simeq 0.00016$$

$$h_{2,2} = e^{-\frac{d_{2,2}^2}{2\sigma^2}} = e^0 = 1, \quad d_{2,2} = \sqrt{(1.331 - 1.331)^2 + (0 - 0)^2} = 0$$

$$w_{22}: w_{22} + \Delta w_{22} = 1.331 + (0.2 * h_{2,2} * (1 - 1.331)) = \sqrt{2} + 0.2 * 1 * (1 - 1.331) \\ \simeq 1.3480$$

پس از اتمام یک ایپاک وزنه‌های ما به شرح زیر است:

$$w_{11} = 1.331, w_{12} = 0, w_{21} = 0.00016, w_{22} = 1.3480$$

سوال ۲)

قسمت (a)

در کد تحویل داده شده است. (با اسم NN_HW3_Q2.ipynb)

قسمت (b)

حل این قسمت به دو صورت کتابخانه آماده و پیاده سازی دستی در کد موجود است. برای حالت استفاده از کتابخانه نقشه کوهونن ۳ در ۶ و برای حالت دستی ۴ در ۴ انتخاب شده است که پس از صحیح و خطا به این مقدار رسیده شده است.



بدیهی است نتیجه کلاس بندی کتابخانه به دلیل دارا بودن ویژگی های پیشرفته نظیر decay برای نرخ یادگیری و همچنین سیگما بهتر از حالت دستی است، هر چند برای حالت دستی هم decay از نوع ساده (ضرب در ۰.۹۵ کردن پس از هر ۱۰۰۰ ایپاک انجام شده است).

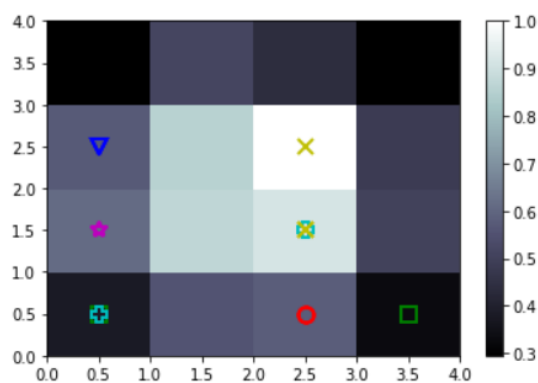
خروجی کلاس بندی به شکل زیر است:

(0, 0)	D
(3, 0)	D

(2, 0)	A
(2, 0)	A
(2, 0)	A
(3, 0)	B
(3, 0)	B
(0, 0)	B
(0, 2)	C
(0, 2)	C
(0, 2)	C
(0, 0)	E
(2, 1)	E
(2, 1)	E
(0, 1)	J
(0, 1)	J
(0, 1)	J
(2, 1)	K
(2, 1)	K
(2, 2)	K

شکل زیر هم حالت تصویری برای نقشه است که در آن  برای A،  برای B،  برای C، ،

برای E،  برای J و  برای K است.

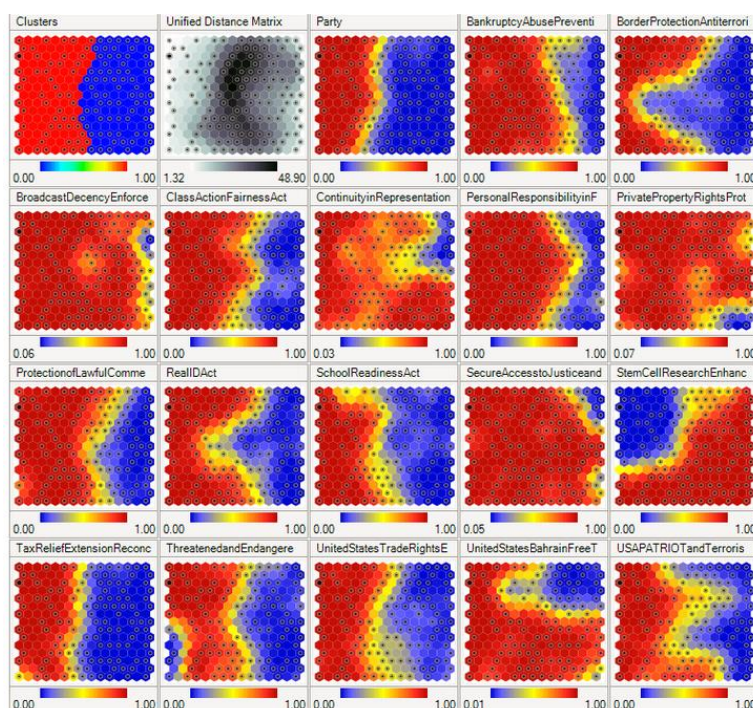


حال به تحلیل خواسته‌ی سوال میپردازیم. برای دو مورد D مکان های 0,0 و 3,0 را پیشنهاد داده است. که به دلایلی که گفته شد و همچنین شباهت الگو های سوال به خوبی قابل تفکیک نبودند. الگوی اول D را در مکان

0,0 پیش بینی کرده است که از نظر الگوریتم شبیه E و B است و الگوی دوم D را در مکان 3,0 پیش بینی کرده است که از نظر الگوریتم شبیه B است.

سوال (۳)

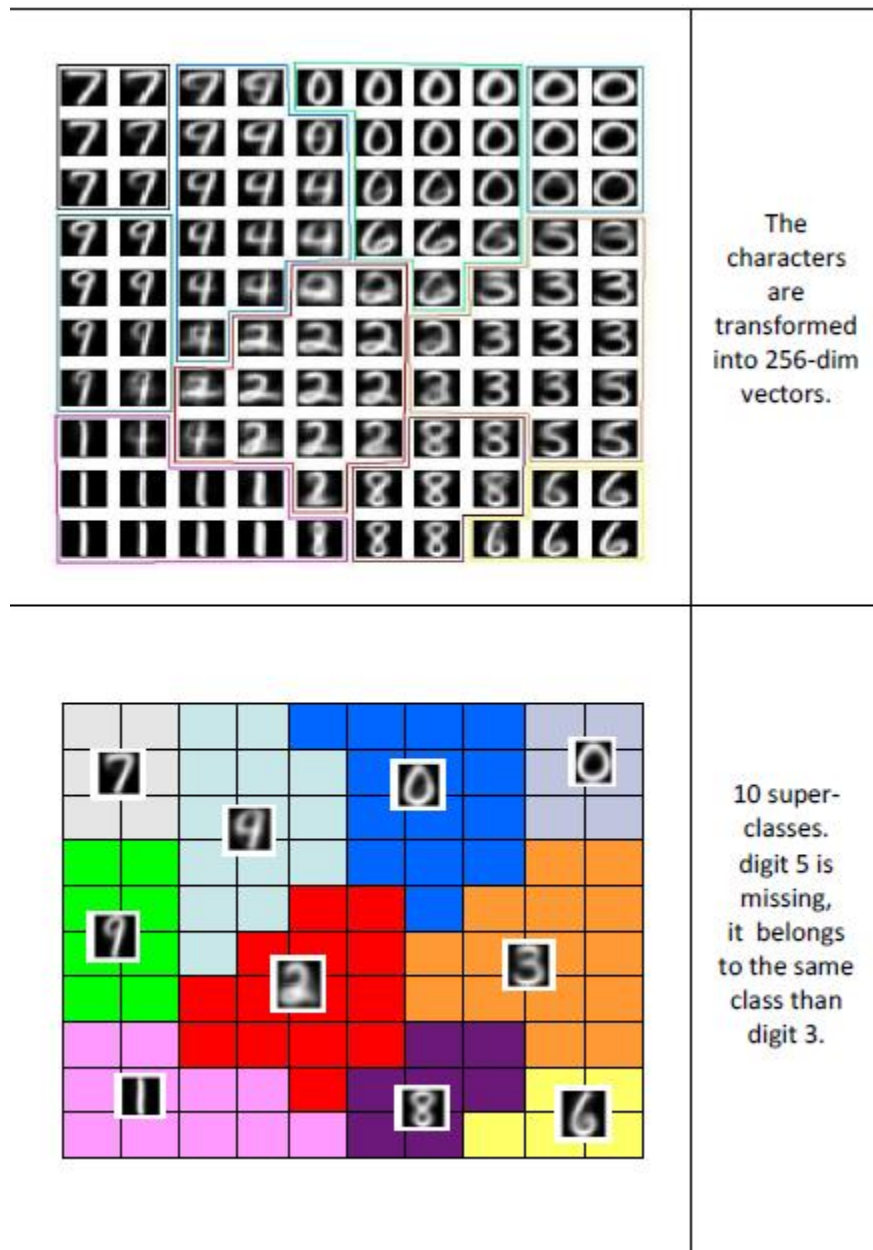
شبکه های خود سامان دهنده در موارد مختلفی کاربرد دارد. به عنوان نمونه میتوان تسک های خوشه بندی را مثال زد که عملکرد خوبی در این زمینه دارد. زمانی که میخواهیم پیچیدگی محاسباتی را کاهش دهیم و داده با ابعاد بالا داریم و نیاز به قوانین با ناظر را از بین ببریم میتوانیم از این شبکه ها استفاده کنیم. به عنوان یک کاربرد مهم میتوان به Anomaly detection اشاره کرد. هر نوع آنومالی میتواند مد نظر باشد. از تشخیص کلاهبرداری بانکی گرفته تا آنومالی در داده کاوی و زمینه های مختلف. یک کاربرد در زمینه داده کاوی میتواند کلاس بندی کشور ها بر اساس قدرتشان در زمینه های مختلف نرخ بی سواد ی - نرخ مرگ و میر - رشد جمعیت - سرانه درآمد - نرخ تورم و سایر زمینه ها، باشد. شکل زیر یک کاربرد از SOM برای الگو های رای دهی در کنگره ایالات متحده را نشان میدهد. که در آن ورودی ما یک جدول با یک سطر برای هر شخص میباشد که رای های او را به صورت بله/خیر نشان میدهد و در شکل با استفاده از SOM به خوشه بندی و مشابهت افراد با یکدیگر و چند نوع تحلیل دیگر پرداخته شده است.



کاربردهای دیگری هم در زمینه شناسایی گفتار میتوان مثال زد. مثلاً یک phonetic typewriter میتواند با کمک SOM ساخت که حروف یک زبان به دکمه های کیبور نگاشت شود و با استفاده از آن تبدیل گفتار به نوشتار انجام شود.

در زمینه تشخیص چهره هم از SOM میتوان بهره برد. که یک تصویر ورودی را به تعدادی prototype از پیش موجود نگاشت کند.

کاربرد های دیگری هم در زمینه تشخیص پزشکی میتوان نام برد نظیر تشخیص سرطان و دیگر بیماری ها. در زمینه تشخیص و شناسایی الگو هم میتوان از SOM استفاده کرد. به عنوان یک مثال ساده به تشخیص اعداد اشاره کرد که در تصویر زیر دیده میشود:



به طور کلی میتوان گفت در تمامی این زمینه ها و تسک هایی که به طور خاص تر به این موارد مربوط اند میتوان از SOM استفاده کرد. SOM میتواند یک نقشه یا نگاشت بصری خوب در این زمینه ها هم برای ما داشته باشد. مشابه مثال اسلاید و مثال هایی که ذکر شد.

کاربردهای مذکور به دلیل متناسب بودن ابعاد ورودی و پیچیدگی محاسباتی مساله با قدرت پردازشی موجود و همچنین داشتن ذات خوشه بندی و کلاس بندی با این شبکه قابل حل شدن هستند. تعداد داده های آموزشی هم بدون شک در این قضیه موثر است و در مسائل و کاربرد های مذکور با ویژگی های الگوریتم متناسب است.

منابع:

<https://www.analyticsvidhya.com/blog/2021/09/beginners-guide-to-anomaly-detection-using-self-organizing-maps/>

<https://www.cs.bham.ac.uk/~jxb/NN/117.pdf>

<https://www.youtube.com/watch?v=iXAuKTT5rPw>