In the name of God

استاد : دکتر تیموری

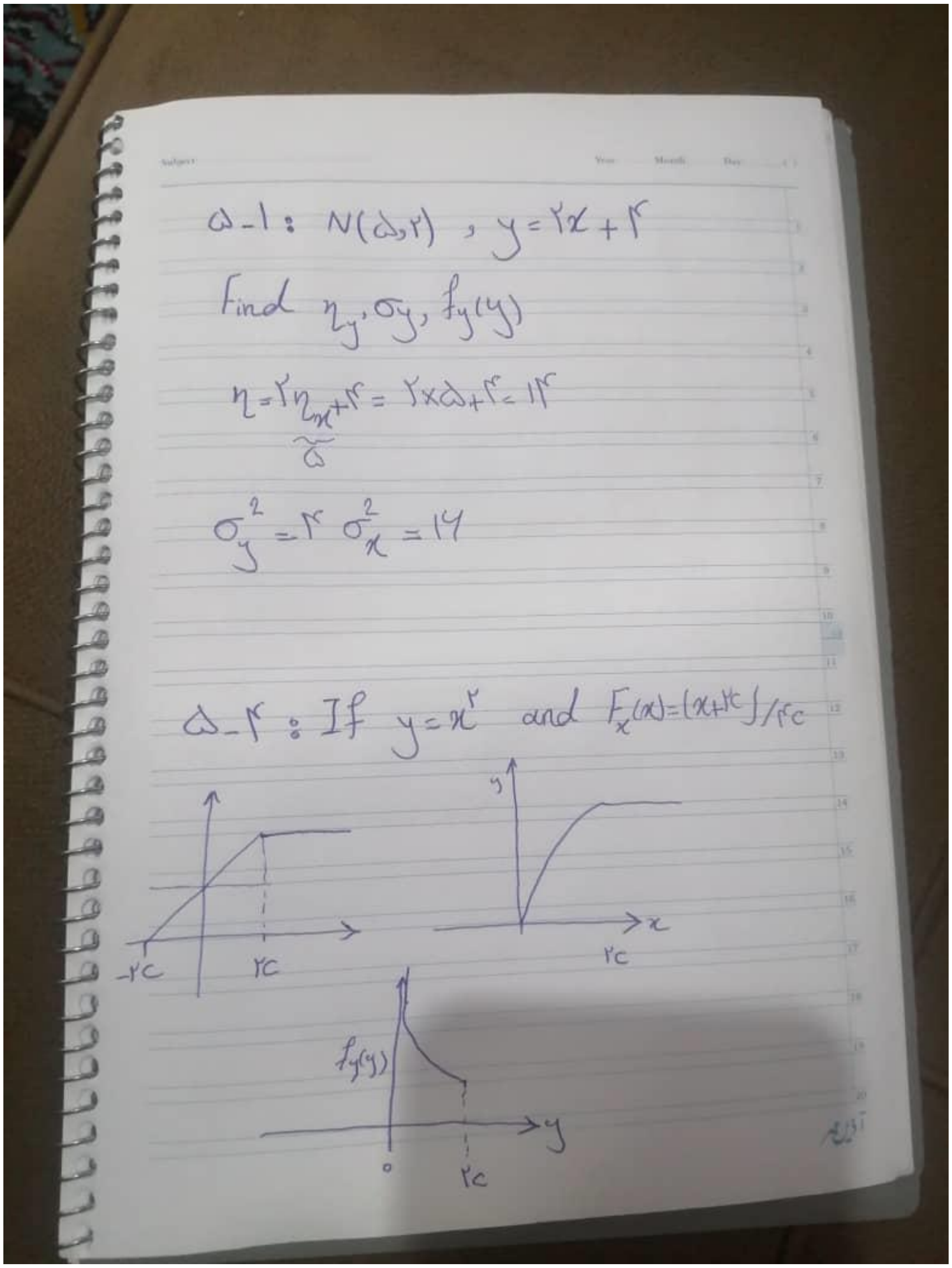
دانشجو : توحید حقیقی سیس

شماره دانشجویی : 830598021

موضوع : تمرین سوم

تمرین اول :

5-1 The random variable **x** is $N(5, 2)$ and $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} + 4$. Find η_y, σ_y, and $f_y(y)$.



۵-۱ : $N(۵,۲)$, $y = ۲x + ۴$

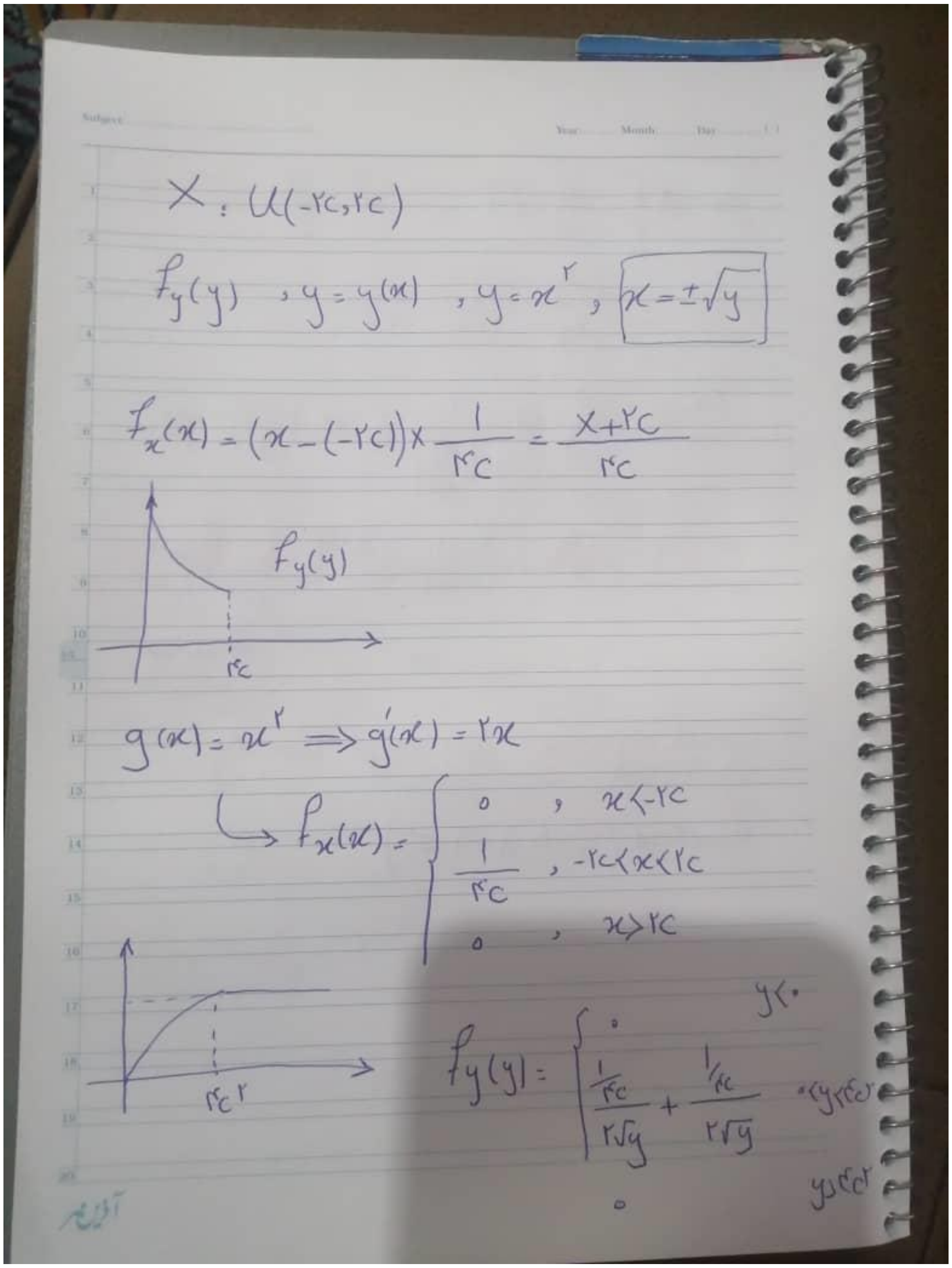
Find $\eta_y, \sigma_y, f_y(y)$

$\eta = ۲\underbrace{\eta_x}_{۵} + ۴ = ۲ \times ۵ + ۴ = ۱۴$

$\sigma_y^2 = ۴\,\sigma_x^2 = ۱۶$

۵-۲ : If $y = x^۲$ and $F_x(x) = (x+۲c)/۴c$

5-4 The random variable $\mathbf{x}$ is uniform in the interval $(-2c, 2c)$. Find and sketch $f_y(y)$ and $F_y(y)$ if $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ and $g(x)$ is the function in Fig. 5-3.



$X : U(-2c, 2c)$

$f_y(y)$, $y = g(x)$, $y = x^2$, $\boxed{x = \pm\sqrt{y}}$

$f_x(x) = (x - (-2c)) \times \frac{1}{4c} = \frac{X + 2c}{4c}$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & , x < -2c \\ \frac{1}{4c} & , -2c < x < 2c \\ 0 & , x > 2c \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\frac{1}{4c}}{2\sqrt{y}} + \frac{1/4c}{2\sqrt{y}} & 0 < y < 4c^2 \\ 0 & y > 4c^2 \end{cases}$$

5-8 If $\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}}$, and $\mathbf{x}$ is an exponential random variable, show that $\mathbf{y}$ represents a Rayleigh random variable.

5-8) $y = \sqrt{x} \longrightarrow x = y^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$$

Thus $f_y(y) = \dfrac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} f_x(x) = 2y\, f_x(y^2)$

$$\frac{2y}{\lambda} e^{-y^2/\lambda} = \begin{cases} \dfrac{y}{\sigma^2} \times e^{-y^2/2\sigma^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

which represents Rayleigh Density function (with $\lambda = 2\sigma^2$)

5-12 The random variable $\mathbf{x}$ is uniform in the interval $(-2\pi, 2\pi)$. Find $f_y(y)$ if (a) $\mathbf{y} = \mathbf{x}^3$, (b) $\mathbf{y} = \mathbf{x}^4$, and (c) $\mathbf{y} = 2\sin(3\mathbf{x} + 40^\circ)$.

a-12) a) If $y = x^3$ then $x = \sqrt[3]{y}$ for any y

$$f_y(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \times f_x(\sqrt[3]{y}) = \frac{1}{12\pi\sqrt[3]{y^2}}$$

for $|y| < 8\pi^3$ and zero otherwise

b) If $y = x^4$ and $y > 0$, then $x_1 = \sqrt[4]{y}$

$$f_y(y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}\left[f_x(\sqrt[4]{y}) + f_x(-\sqrt[4]{y})\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi\sqrt[4]{y^3}}$$

for $0 < y < 16\pi^4$ and zero otherwise

5-35 (*Chernoff bound*) (*a*) Show that for any $\alpha > 0$ and for any real s,

$$P\{e^{s\mathbf{x}} \geq \alpha\} \leq \frac{\mathbf{\Phi}(s)}{\alpha} \quad \text{where } \mathbf{\Phi}(s) = E\{e^{s\mathbf{x}}\} \tag{i}$$

Hint: Apply (5-89) to the random variable $\mathbf{y} = e^{s\mathbf{x}}$. (*b*) For any A,

$$P\{\mathbf{x} \geq A\} \leq e^{-sA}\mathbf{\Phi}(s) \quad s > 0$$

$$P\{\mathbf{x} \leq A\} \leq e^{-sA}\mathbf{\Phi}(s) \quad s < 0$$

(*Hint:* Set $\alpha = e^{sA}$ in (i).)

c) If $y=۲\sin(۳x+۳۰)$ and $|y|<۴$

then $x=x_1$ as shown.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{۶\sqrt{1-y^۲/۴}}$$

In the interval $(-۲\pi,۲\pi)$ there are 12 x_i's

$$f_y(y)=\frac{1}{۳\sqrt{۴-y^۲}}\sum f_x(x_i)=\frac{۱۲}{۱۲\pi\sqrt{۴-y^۲}}$$

for $|y|<۲$ and zero

۳d) b) $e^{sx}\geq e^{sA}$ if $x\geq A$ for $s>۰$

and $x\leq A$ for $a\ngtr ۰$

5-50 A biased coin is tossed and the first outcome is noted. The tossing is continued until the outcome is the complement of the first outcome, thus completing the first run. Let **x** denote the length of the first run. Find the p.m.f of **x**, and show that

$$E\{\mathbf{x}\} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$$

۵.) $P(X=k) = P(TT\ldots TH \cup HH\ldots HT)$

$= P(TT\ldots TH) + P(HT\ldots HH) = q^k p + p^k q$

$k = 1, 2, \ldots$

Also

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k q^k p + \sum_{k=1}^{\infty} k p^k q = pq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} \right\}$$

$$= pq \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right\} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$$

تمرین دوم : پیاده سازی

پیاده سازی به این صورت خواهد بود که از ورودی یک احتمال دریافت میکنیم و انقدر سکه را می اندازیم تا از ان احتمال که با تابع Random انتخاب میکنیم از احتمالی که گرفتیم کمتر شود در آن صورت t می آید نتیجه و تعداد دفعات تکرار را بر میگرداند .

در این مسئله از تابع Random استفاده شده و داخل While انقدر تکرار شده تا به کمتر از احتمال برسد .

```
import random
import math

p = float(input("enter p:"))

# انقدر این عملیات را تکرار میکنیم که از احتمال ورودی رو اعمال میکنیم
# تا زمانی که رو بیاید
def playonetime(p):
    winner = 'none'
    wina = 0
    winb = 0
    dif = 0
    x =[]
    points = 0
    firsttime =  random.random()
    if (firsttime > p):
        x.append('h')
        f=0
        while f != 1:
            if random.random() > p:
                f = 0
                x.append('h')
            else:
                f = 1
                x.append('t')
                winner = 't'
            points += 1
```

```python
    elif(firsttime < p):
        x.append('t')
        f = 0
        while f != 1:
            if random.random() < p:
                f = 0
                x.append('t')
            else:
                f = 1
                x.append('h')
                winner = 'h'
            points += 1

    return x,points+1,winner

print(playonetime(p))
```

خروجی برنامه به صورت زیر خواهد بود :

```
PS D:\پایان نامه ها\تئوری\تمرین سوم> & c:/users/tohid-pc/appdata/local/programs/python/python38-32/python.exe "d:/????? ???? ??/??????/????? ???/main.py"
enter p:0.01
(['h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 'h', 't'], 22, 't')
PS D:\پایان نامه ها\تئوری\تمرین سوم>
```