In the name of God

استاد : دکتر تیموری

دانشجو : توحید حقیقی سیس

شماره دانشجویی : 830598021

موضوع : تمرین دوم

تمرین اول :

4. Let E, F, G be three events. Find expressions for the events that of E, F, G
   (a) only F occurs,
   (b) both E and F but not G occur,
   (c) at least one event occurs,
   (d) at least two events occur,
   (e) all three events occur,
   (f) none occurs,
   (g) at most one occurs,
   (h) at most two occur.

سوال ۱:

۱-۴ : let E, F, G be three events. Find expressions for the events that of E, F, G:

(a) only F occurs. $\Rightarrow P(F \cap \bar{E} \cap \bar{G})$

(b) both E and F but not G occur. $\Rightarrow P(E \cap F \cap \bar{G})$

(c) at least one event occurs. $\Rightarrow 1 - P(\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{G})$

(d) at least two events occurs. $\Rightarrow$

$P(E \cap F) + P(F \cap G) + P(E \cap G) - ۲ P(E \cap F \cap G)$

(f) non occured

$P(\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{g})$

(g) at most one occurs

$P(\overline{(E \cap F)} \cap \overline{(F \cap G)} \cap \overline{(E \cap G)})$

(h) at most two occur.

$1 - P(E \cap F \cap G) = P(\overline{E \cap F \cap G})$

8. If $P(E) = 0.9$ and $P(F) = 0.8$, show that $P(EF) \geqslant 0.7$. In general, show that

$$P(EF) \geqslant P(E) + P(F) - 1$$

This is known as Bonferroni's inequality.

١-٨

If $P(E) = ٠,٩$ and $P(F) = ٠,٨$, show that $P(EF) \geqslant ٠,٧$. In General show that $P(EF) \geqslant P(E) + P(F) - 1$

This is known as Bon ferroni's inequality.

$E \cup F \subseteq S \Rightarrow P(E \cup F) \leqslant P(S)$

$P(E \cup F) \leqslant 1$

$\Rightarrow P(E) + P(F) - P(E \cap F) \leqslant 1$

$\Rightarrow P(E \cap F) \geqslant P(E) + P(F) - 1$ $\boxed{\checkmark}$

$\Rightarrow P(E \cap F) \geqslant \underbrace{٠,٨ + ٠,٩ - 1}_{٠,٧}$

10. Show that

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

This is known as Boole's inequality.

Hint: Either use Equation (1.2) and mathematical induction, or else show that $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, where $F_1 = E_1$, $F_i = E_i \bigcap_{j=1}^{i-1} E_j^c$, and use property (iii) of a probability.

Show that

۱۰-۱:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P(E_1) + P(\bar{E}_1 \cap E_2) + P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) + \cdots$$

$E_x \cap E_n \subseteq E_x$ بطور مثال

$$\Longrightarrow P(E_x \cap E_n) \leqslant P(E_x) \leqslant P(E_1) + P(E_2) + \cdots$$

$$\Rightarrow \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

11. If two fair dice are tossed, what is the probability that the sum is i, $i = 2, 3, \ldots, 12$?

$i=1$

If two fair dice are tossed, what is the probability that the sum is $i = 2, 3, \ldots, 12$? 8 ۱-۱۱

$P(i==2) = \frac{۱}{۳۶}$

$P(i==3) = \frac{۲}{۳۶}$

$P(i==4) = \frac{۳}{۳۶}$

$P(i==5) = \cdots$

$\vdots$

$P(i==12) = \frac{۱}{۳۶}$

$$P(i) = \begin{cases} \frac{i-۱}{۳۶} & i = ۲, ۳, ۴, \ldots, ۷ \\ \frac{۱۲-i}{۳۶} & i = ۸, ۹, \ldots, ۱۲ \end{cases}$$

22. A and B play until one has 2 more points than the other. Assuming that each point is independently won by A with probability p, what is the probability they will play a total of $2n$ points? What is the probability that A will win?

A and B play until one has 2 more points than the others. ۱_۲۲

- What is a probability they will play a total of 2n point?
- What is the probability A will win?

احتمال اینکه هر بازیکن در یک آزمایش ببرد $\longrightarrow$ آزمایش n ام

$$2p(p-1) \longrightarrow P(\text{تا } 2n \text{ لازم باشد}) = (2p(1-p))^{n-1} \times ((1-p)^2 + p^2)$$

$$A \text{ در آزمایش } n \text{ ام ببرد} \longrightarrow p^2((1-p)\times 2p)^{n-1}$$

$$\longrightarrow P(\underset{A}{\text{بردن}}) = p^2 \times \sum_{i=1}^{n} (2p(1-p))^{n-1}$$

$$= \frac{p^2}{1-2p(1-p)}$$

تمرین دوم : پیاده سازی

در این سوال تابعی با حلقه بینهایت تا زمانی که شرط اعلام شده در مسئله برقرار شود را داریم.

در این سوال نیز تابعی داریم که بازی را تا جایی انجام می دهد که قدر مطلق اختلاف امتیاز ها به 2 برسد سپس بازی تمام شده و برنده و تعداد راند های برده هر کدام و تعداد راند های انجام شده تا اتمام بازی را معین می کند. همچنین در ابتدا از کاربر احتمال دریافت و تعداد دفعات که می خواهیم بازی انجام شود دریافت می شود.

```python
import math
import pandas
import numpy
import random

#گرفتن احتمال از ورودی
propbability=float(input("Vared kardan Ehtemal P : "))
#گرفتن تعداد کل بازی ها از بازی
TotalPlay=int(input("Total Play n :"))
```

این بازی را تا جایی ادامه میدهیم که تفاوت امتیاز های دو بازیکن از 2 کمتر شود و در هر بار بازی یک عدد رندوم انتخاب میکنیم اگر این عدد از احتمال بیشتر بود برد اولی وگر نه برد دومی و در هر چرخش اختلاف ان دو مقدار را نیز محاسبه میکنیم تا بتوانیم شرط پایان ان را اعلام کنیم .

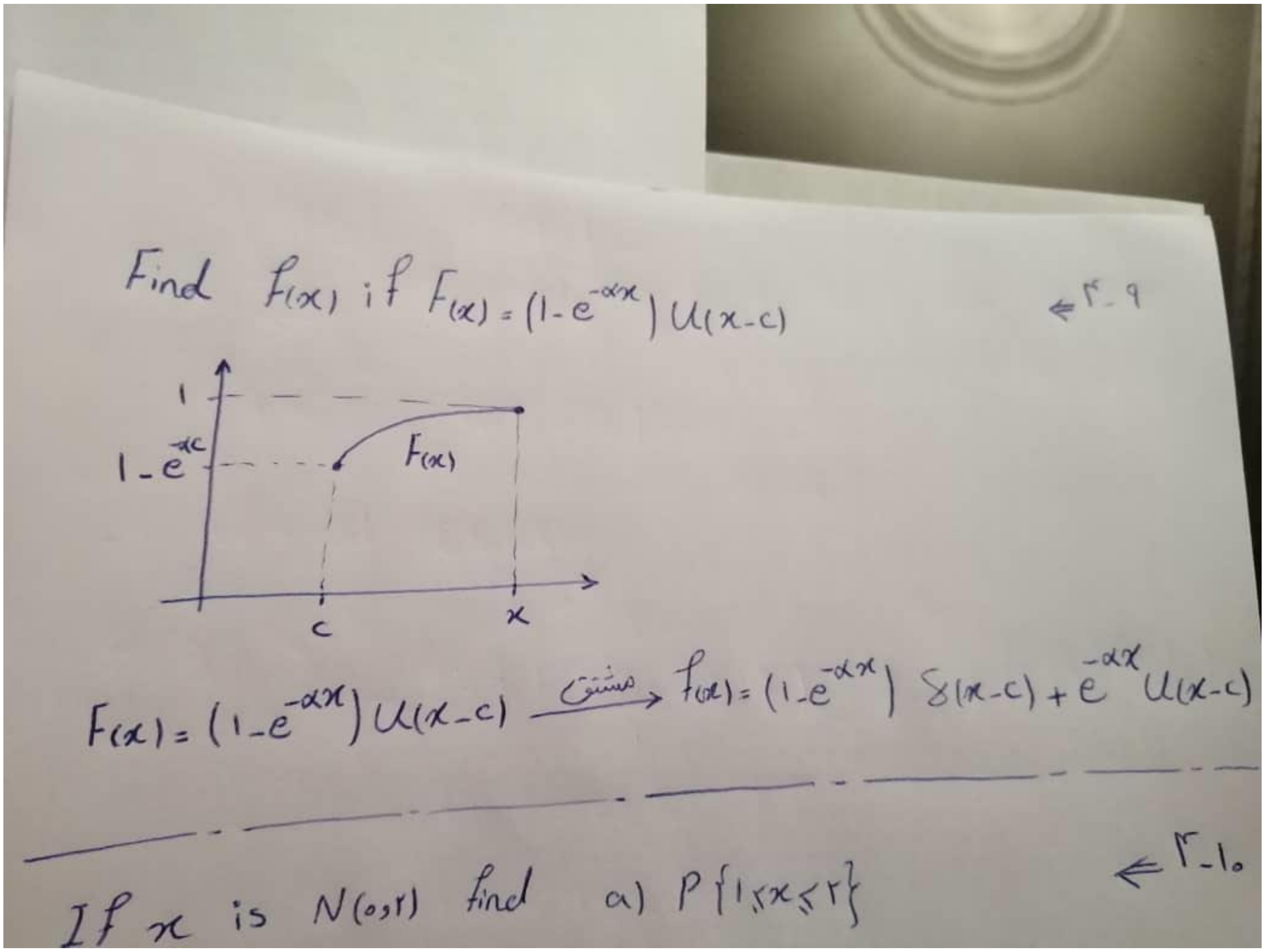
```python
def playonetime(p):
    #برد اولی
    wina = 0
    #برد دومی
    winb = 0
    #تفاوت اولی از دومی در تعداد برد
    dif = 0
    #تعداد کل بازی ها
    points = 0
    while abs(dif) < 2:
        dif = wina - winb
        # print(dif)
        if(random.random() > p):
            wina +=1
        else:
            winb +=1
        points += 1
        if dif == 2:
            return 1,points,wina
        elif dif == -2:
            return 0,points,winb
```

```python
p=propbability
twina=0
twinb=0
temp=0

for i in range(TotalPlay):
    whowin,pointc,c = playonetime(p)
    temp += (p ** 2) * ((2 * (1 - p) * p) ** (int(c / 2) - 1))
    if(whowin == 1):
        twina += 1
    else:
        twinb += 1

print("probability of winning A in all rounds:" ,' ',twina/TotalPlay)
print("probability of winning B in all rounds:" ,' ',twinb/TotalPlay)
print("average of Estimated probability of winning A in each round based on played points:", temp/TotalPlay)
```

در نهایت احتمال های معین شده توسط سوال محاسبه و در خروجی چاپ می شود.

تمرین سوم :

4-9 Find $f(x)$ if $F(x) = (1 - e^{-\alpha x})U(x - c)$.

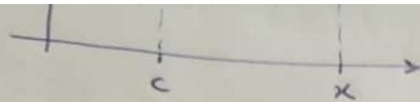


Find $f(x)$ if $F(x) = (1-e^{-\alpha x})\,U(x-c)$ ⇐ ۴-۹

$$F(x) = (1-e^{-\alpha x})\,U(x-c) \xrightarrow{\text{مشتق}} f(x) = (1-e^{-\alpha x})\,\delta(x-c) + e^{-\alpha x}\,U(x-c)$$

If x is N(۰,۲) find a) P{۱≤x≤۲} ⇐ ۴-۱۰

4-10 If $\mathbf{x}$ is $N(0, 2)$ find (a) $P\{1 \le \mathbf{x} \le 2\}$ and (b) $P\{1 \le \mathbf{x} \le 2 \mid \mathbf{x} \ge 1\}$.



$$F(x) = (1 - e^{-\alpha x})\, U(x-c) \xrightarrow{\text{مشتق}} f(x) = (1 - e^{-\alpha x})\, \delta(x-c) + e^{-\alpha x}\, U(x-c)$$

If x is $N(0,\text{۲})$ find a) $P\{1 \leq x \leq \text{۲}\}$ ⇐ ۳-۱۰

$$\Rightarrow G(\text{۲}/\text{۲}) - G(\text{۱}/\text{۲}) = \text{۰,۱۴۹}$$

b) $P\{1 \leq x \leq \text{۲} \mid x \geq 1\}$

$$\rightarrow \frac{G(\text{۲}/\text{۲}) - G(\text{۱}/\text{۲})}{1 - G(\text{۱}/\text{۲})} = \frac{\text{۰,۱۴}}{\text{۰,۳}} = \text{۰,۴۶}$$

⇐ ۴-۱۹

$$F_x(x \mid A) = \frac{P(A \mid x \leq x)\, F_x(x)}{P(A)}$$

4-19 Show that

$$F_x(x \mid A) = \frac{P(A \mid \mathbf{x} \leq x) F_x(x)}{P(A)}$$

b) $P\{\text{۱} \leq x \leq \text{۲} \mid x \geq \text{۱}\} \rightarrow G(\text{۲}/\text{۲}) - G(\text{۱}/\text{۲}) = \text{۰,۱۴۹}$

$$\rightarrow \frac{G(\text{۲}/\text{۲}) - G(\text{۱}/\text{۲})}{\text{۱} - G(\text{۱}/\text{۲})} = \frac{\text{۰,۱۴}}{\text{۰,۳}} = \text{۰,۴۶}$$

$\Leftarrow$ ۴-۱۹

$$F_x(x \mid A) = \frac{P(A \mid x \leq x)\, F_x(x)}{P(A)}$$

$$\rightarrow f(x \mid y) = \frac{P(x, y)}{P(A)}$$

$$\rightarrow P(A \mid B < x) = \frac{P(A, B < x)}{P(B < x)}$$

4-21 The probability of *heads* of a random coin is a random variable **p** uniform in the interval (0, 1). (*a*) Find $P\{0.3 \le \mathbf{p} \le 0.7\}$. (*b*) The coin is tossed 10 times and *heads* shows 6 times. Find the a posteriori probability that **p** is between 0.3 and 0.7.

⇐ ۴-۲۱

a) Find $P\{۰٫۳ \leq p \leq ۰٫۷\}$

$$\int_{۰٫۳}^{۰٫۷} dp = x\Big|_{۰٫۳}^{۰٫۷} = \boxed{۰٫۴}$$

b) The coin is tossed 10 times and heads shows 6 times. Find the a posteriori probability that p is between ۰٫۳ and ۰٫۷,

$$f(p/x) = \frac{p^{۶}(1-p)^{۴}}{\int_{۰}^{۱} p^{۶}(1-p)^{۴}\,dp}$$