1. $\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1$ をみたす三角形 ABC の辺 AB (両端を除く) 上に点 P をとる。三角形 ABC の外接円と直線 CP の交点のうち，C でない方を Q とおく。$\mathrm{AP}=t$ $(0<t<2)$ のとき，三角形 APQ の面積を $S(t)$ とおく。

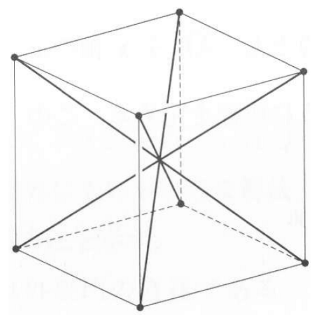
(1) $S(t)$ を t を用いて表せ。

(2) t が $0<t<2$ の範囲を変化するとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

2. 1 つの立方体の 8 個の各頂点に，1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の 8 個の数字を 1 個ずつ配置する。ただし，同じ数字を 2 個以上の頂点に配置しない。このとき，立方体の対角線に関する次の (条件) を考える。

(条件)　対角線の両端の頂点に配置された 2 つの数字の和が 9 となる。

ここで，立方体の対角線とは，立方体の 2 つの頂点を結ぶ線分のうち立方体の中心を通るものを指し，1 つの立方体に対角線は 4 本ある。
以下の (1)，(2) のような 8 個の数字の配置の仕方は何通りあるか，それぞれ答えよ。ただし，立方体を回転させることで 8 個の数字の配置が一致するものは同じ配置とみなす。



(1) 立方体の 4 本すべての対角線が (条件) をみたす。

(2) 立方体の 4 本の対角線のうち，ちょうど 2 本の対角線が (条件) をみたす。

3. k を実数の定数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=x\log x+(1-x)\log(1-x)$，$C_2 : y=kx(x-1)$ を考える。C_1 と C_2 が $0<x<1$ で共有点をもつための k の値の範囲を求めよ。必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を用いてよい。

4. 実数 x に対して，x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を $a_n=[\sqrt{2}n]$ で定め，$\{a_n\}$ の項に現れない正の整数を，小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とする。例えば，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$2\sqrt{2}=2.828\cdots$，$3\sqrt{2}=4.242\cdots$，$4\sqrt{2}=5.656\cdots$，$5\sqrt{2}=7.071\cdots$ であるから，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=5$，$a_5=7$ となり，また，$b_1=3$，$b_2=6$ となる。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

(2) $a_{n+1}-a_n$ の値は 1 または 2 であることを示せ。

(3) 次の (i), (ii) に答えよ。ただし，(ii) を先に答えてもよい。

(i) $\{a_n\}$ の項に現れない正の整数は無数に存在すること，すなわち，$\{b_n\}$ は無限に多くの項からなる数列であることを示せ。

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}$ を求めよ。

5. O を原点とする複素数平面上に，3 点 A(1)，B(ω)，C(ω^2) を頂点とする正三角形 ABC がある。ただし，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (i は虚数単位) である。また，正三角形 ABC の外接円，すなわち O を中心とする半径 1 の円を K とする。K 上に 3 頂点 A, B, C とは異なる点 P(α) をとり，直線 BC に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 AB に関して点 P と対称な点を R とする。

(1) 点 Q を表す複素数を β とする。$\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ の値を求めよ。

(2) 3 点 O, Q, R は同一直線上にあることを示せ。

6. p を 3 以上の素数とする。二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}$ について次の問に答えよ。

(1) ${}_{p^2}\mathrm{C}_p$ は p の倍数であることを示せ。

(2) ${}_{p^2}\mathrm{C}_p$ を p^3 で割った余りは p であることを示せ。

(3) $(p-1)$ 個の整数 $\dfrac{(p-1)!}{1}$，$\dfrac{(p-1)!}{2}$，$\dfrac{(p-1)!}{3}$，$\cdots$，$\dfrac{(p-1)!}{p-1}$ を p で割った余りはすべて異なることを示せ。また，${}_{p^2}\mathrm{C}_p$ を p^4 で割った余りを p で表せ。

答

1. (1) $\frac{2t^2-t^3}{2(1+t^2)}$ (2) $\frac{1}{4}$

2. (1) 16 (2) 192

3. $k \geqq 4\log 2$

4. (1) $\sqrt{2}$ (3)(ii) $2+\sqrt{2}$

5. (1) -1

6. (3) p

7. O を原点とする xy 平面に曲線 $C: y = 1 - x^2\ (x > 0)$ がある。C 上に点 $\mathrm{P}(t, 1-t^2)\ (t > 0)$ をとり，P における C の法線を l とする。O を出発した光線が P において反射して y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0, Y)$ まで進むとする。ただし，反射は P における C の接線に対して入射角と反射角が等しくなるように，すなわち，(直線 OP と法線 l のなす角) = (直線 PQ と法線 l のなす角) となるように行われるものとする。

(1) l が y 軸の正の部分と交わるような t の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，点 Q の y 座標 Y のとりうる値の範囲を求めよ。

8. n は 4 以上の整数，p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする。A と B の 2 人を含む n 人が，次の (ルール) に従って 2 人ずつ合計 $(n-1)$ 回の試合を行う。ただし，どの試合においても，勝者と敗者は 1 人ずつであり引き分けはない。

(ルール) 袋の中に 1 番のカード，2 番のカード，$\cdots$，n 番のカードが 1 枚ずつ合計 n 枚入っており，まず，n 人が袋の中から 1 枚ずつカードを無作為に取り出す。ただし，取り出したカードは袋には戻さない。次に，1 番のカードを取り出した人と 2 番のカードを取り出した人が 1 回目の試合を行う。さらに，1 回目の試合の勝者と 3 番のカードを取り出した人が 2 回目の試合を行う。以下同様に，k 回目の試合 $(1 \leqq k \leqq n-2)$ の勝者と $(k+2)$ 番のカードを取り出した人が $(k+1)$ 回目の試合を行う。

また，1 回目から $(n-1)$ 回目までの各試合において，勝敗の確率は次のようになるものとする。

- A と B が試合を行う場合，一方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ であり，他方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ である。
- A と B のいずれでもない 2 人が試合を行う場合，一方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ であり，他方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ である。
- A または B のいずれか一方と，A と B のいずれでもない 1 人が試合を行う場合，前者が勝つ確率は p であり，後者が勝つ確率は $1-p$ である。

(1) 1 回目の試合で A と B が試合を行う確率 q_1，および，2 回目の試合で A と B が試合を行う確率 q_2 を求めよ。

(2) $(n-1)$ 回の試合のいずれかにおいて，A と B が試合を行う確率 P を求めよ。

9. m は正の整数，p は 10^m+1 を割り切る素数とする。したがって，$p \neq 2$，$p \neq 5$ であるから，$\dfrac{1}{p}$ を 10 進法で小数展開したものは有限小数にならない。そこで，$\dfrac{1}{p} = 0.a_1a_2a_3\cdots$ とする。ここで，$a_k\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ は小数第 k 位の数で，0 以上 9 以下の整数である。例えば $m = 3$ のとき，$10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$ であるから，$p = 7$，$p = 11$，$p = 13$ は上の条件を満たし，$\dfrac{1}{p}$ の小数展開は，$\dfrac{1}{7} = 0.142857142857\cdots$，$\dfrac{1}{11} = 0.090909\cdots$，$\dfrac{1}{13} = 0.076923076923\cdots$ となる。

(1) $\dfrac{1}{p}$ の小数展開は，循環節が小数第 1 位から始まる循環小数であり，長さ $2m$ の循環節をもつこと (注: $2m$ は最小の循環節の長さでなくてもよい)，すなわち，$a_{2m+k} = a_k\ (k = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}$ の長さ $2m$ の循環節において，前半の m 個の数字 a_1，a_2，$\cdots$，a_m と後半の m 個の数字 a_{m+1}，a_{m+2}，$\cdots$，a_{2m} の間には，関係式 $a_k + a_{m+k} = 9\ (k = 1, 2, 3, \cdots, m)$ が成り立つことを示せ。

10. 複素数平面上に，相異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ があり，次の条件を満たしている。

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1,\quad \alpha + \beta + \gamma = \omega$$

ただし，$\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ (i は虚数単位)，すなわち，ω は 1 の 3 乗根の 1 つとする。

(1) $\dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$ を ω で表せ。 (2) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ の値を求めよ。

(3) 三角形 ABC はどのような三角形か。

11. xyz 空間に，原点 O を中心とする半径 1 の球体 (球の表面および内部) U と，次の条件 (i), (ii) を満たす平面 L がある。

(i) L は点 $\mathrm{A}(1,0,0)$ を通り，y 軸に平行である。
(ii) L は z 軸の正の部分と交わり，L と xy 平面のなす角を θ とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ である。

L による球体 U の断面 (円板になる) を D として，D を z 軸のまわりに 1 回転してできる立体 W の体積を V とする。

(1) V を θ を用いて表せ。
(2) θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で変化させるとき，V の最大値を求めよ。

12. 関数 $f(x)$ に関する条件 $(*)$ を次のように定める。

$(*)$ $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ をもち，$f(0)=0$，$f(1)=1$ である。

$(*)$ を満たす関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)^2+f'(x)^2\}\,dx$ の値が定まるので，その値を $I[f]$ と書く。すなわち，$I[f]=\displaystyle\int_0^1 \{f(x)^2+f'(x)^2\}\,dx$ である。

(1) 関数 $g(x)=ae^x+be^{-x}$ (a, b は実数の定数，e は自然対数の底) が $(*)$ を満たす (すなわち，$g(0)=0$, $g(1)=1$ を満たす) とき，a, b の値を求めよ。また，そのときの $I[g]$ の値を求めよ。
(2) 関数 $f(x)$ は $(*)$ を満たすものとし，$g(x)$ は (1) で求めた関数とする。
 (i) $F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，等式 $\displaystyle\int_0^1 \{F'(x)\,g'(x)+F(x)\,g(x)\}\,dx=0$ が成り立つことを示せ。
 (ii) 不等式 $I[f]\geqq I[g]$ が成り立つことを示せ。

答

7. (1) $0<t<\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $0<Y<\frac{2}{3}$

8. (1) $q_1=\frac{2}{n(n-1)}$, $q_2=\frac{4p}{n(n-1)}$ (2) $\frac{2p}{n(1-p)}+\frac{2(1-2p)(1-p^{n-1})}{n(n-1)(1-p)^2}$

9. (1) ω^2 (2) 0 (3) 単位円の直径を斜辺とし，点 ω を直角の頂点とする直角三角形

10. (1) $V=\frac{4}{3}\pi\sin\theta\cos^3\theta$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

11. (1) $a=\frac{1}{e-e^{-1}}$, $b=\frac{-1}{e-e^{-1}}$, $I[g]=\frac{e^2+1}{e^2-1}$

13. e を自然対数の底とし，$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とおく。O を原点とする xy 平面上で，曲線 $y=f(x)$ $(x\geqq 0)$ を C_1 とし，C_1 上の点 $(0,1)$ を A，C_1 上で y 座標が 2 の点を B とおく。また，次の 3 つの条件 (i), (ii), (iii) をすべてみたす円を C_2 とする。

(i) C_1 と C_2 は点 B で接する。
(ii) C_2 の中心 D の y 座標は B の y 座標より小さい。
(iii) C_2 は x 軸と接する。

なお，2 曲線が点 P で接するとは，2 曲線が P を共有し，P における 2 曲線の接線が一致することである。

(1) C_2 の半径 r を求めよ。

(2) C_2 と x 軸の接点を E とおく。線分 OA，C_1 の弧 AB，C_2 の短い方の弧 BE，線分 EO の 4 つで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

14. 2 つの容器 A, B がある。A の容量は 1 リットル，B の容量は 2 リットルである。この 2 つの容器 A, B に対して，次の (操作) を繰り返し行う。

(操作) 以下の (i) と (ii) の規則に従って一方の容器のみを選び，1 リットルの水を入れる。
(i) A と B の 2 つの容器の水量が等しい場合は，いずれか一方の容器を等確率で選ぶ。
(ii) A と B の 2 つの容器の水量が異なる場合は，水量の少ない方の容器を選ぶ確率は $\dfrac{2}{3}$ であり，
水量の多い方の容器を選ぶ確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

ただし，既に容量いっぱいの水で満たされた容器を選んだ場合は，水を入れてもあふれ出てしまい，容器に入った水の量は変化しないものとする。

はじめ，容器 A, B に水は入っていない。上の (操作) を n 回 $(n=3,4,5,\cdots)$ 繰り返したときに初めて A, B 両方の容器が容量いっぱいの水で満たされる確率を p_n とする。

(1) p_3 を求めよ。

(2) p_n $(n=3,4,5,\cdots)$ を求めよ。

15. k を $k>1$ をみたす実数とする。$0<x<\pi$ で定義された関数 $f(x)=e^{kx}\sin x$ の極大値を与える x の値を α とし，曲線 $y=f(x)$ $(0<x<\pi)$ の変曲点の x 座標を β とする。

(1) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\alpha$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\beta$ をそれぞれ求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ を求めよ。

16. $\dfrac{(3n-4)(5n+4)}{(3n-5)(n+5)}$ が整数となるような 1 以上の整数 n をすべて求めよ。

17. z を $|z|=1$，$0<\arg(z)<\dfrac{\pi}{3}$ をみたす複素数とする。複素数平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円 (単位円) を K とし，K 上にある 3 点 A(1)，B(z^2)，C(z^6) を頂点とする三角形 ABC の内心を P(w) とする。

(1) 円 K 上を B から C まで反時計回りに進むときの円弧 BC を考え，その中点を D とする。同様に，K 上を C から A まで反時計回りに進むときの円弧 CA の中点を E，K 上を A から B まで反時計回りに進むときの円弧 AB の中点を F とする。D, E, F を表す複素数を定数係数の z の多項式で表せ。ただし，多項式は単項式も含むものとする。

(2) w を定数係数の z の多項式で表せ。

18. 平行四辺形の折り紙 ABCD があり，AB $=2$，BC $=1$ である。この折り紙を対角線 AC を折り目として折り曲げて，三角形 ACB と三角形 ACD が重なるようにする。このとき，線分 AB と線分 CD の交点を E とし，三角形 ADE の面積を S とする。AB $=2$，BC $=1$ をみたすあらゆる平行四辺形の折り紙を考えるとき，S の最大値を求めよ。

答

13. (1) $\frac{4}{3}$　(2) $\frac{19}{9}\sqrt{3}-\frac{16}{27}\pi$

14. (1) $\frac{4}{9}$　(2) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-4}-2(\frac{1}{3})^{n-1}$

15. (1) π, π　(2) $\frac{2}{e}$

16. 2, 14

17. (1) $\mathrm{D}(z^4)$, $\mathrm{E}(-z^3)$, $\mathrm{F}(z)$　(2) $w=z^4-z^3+z$

18. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

19. $0<a<1$ をみたす実数 a に対し，xy 平面上の曲線 $y=\log(x^2+a^2)$ と x 軸とで囲まれた領域の面積を $S(a)$ とする。ただし，対数は自然対数を表す。

(1) $A=\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ。

(2) $B=\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{S(a)-A}{a}$ を求めよ。ただし，A は (1) で求めた値である。

20. 1 枚につき 1 つの数字が書かれたカードが何枚か入った袋に対して，次の操作 (T) を考える。

(T)：袋の中から無作為にカードを 1 枚選び，選んだカードに書かれた数より大きい数の書かれたカードすべてと，選んだカード自身を袋の中から取り除く。

n を 1 以上の整数とする。袋の中に数字 $1, 2, \cdots, n$ が書かれたカードが各 1 枚ずつ合計 n 枚入っている。この状態から，(T) を袋の中のカードがすべて無くなるまで繰り返す。袋の中のカードがすべて無くなるまでに行った (T) の回数を X_n とする。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$X_n=n-1$ となる確率を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，1 回の (T) で 3 枚以上のカードが取り除かれることなく $X_n=n-2$ となる確率を求めよ。

21. 4 桁 (すなわち，1000 以上 9999 以下) の整数 n に対して，

$f(n)=(n\text{ の下 2 桁の数 })^2-(n\text{ の上 2 桁の数 })^2$ と定める。

例えば，$f(1234)=34^2-12^2=1012$，$f(1200)=0^2-12^2=-144$ である。

$f(n)=n$ をみたす 4 桁の整数 n をすべて求めよ。

22. a を実数とする。複素数 z についての 3 次方程式 $z^3-3z^2+4z-a=0$ の解が表す複素数平面上の点のうち，領域 $|z|<2$ に含まれるものの個数を a の値で分類して求めよ。

23. 実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ は，微分可能であり，$f'(x)>0$ をみたすものとする。この $f(x)$ に対して，関数 $F(x)$ を $F(x)=x\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\,dt-\left(\int_0^x e^t\,dt\right)\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$ と定める。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 次の (i) と (ii) を示せ。

(i) $x>0$ において，不等式 $xf(x)>\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ が成り立つ。

(ii) $F(x)$ は $x \geqq 0$ において単調増加である。

(2) n を $n \geqq 2$ をみたす整数とする。$f(x)$ として適当な関数をとることによって，$x>0$ において次の不等式を示せ。$\displaystyle\int_0^x e^{nt}dt>\frac{e^x-1}{x}\int_0^x e^{(n-1)t}dt$

(3) n を $n \geqq 2$ をみたす整数とするとき，$x>0$ において，不等式 $\dfrac{e^{nx}-1}{nx}>\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^n$ を示せ。

24. O を原点とする xyz 空間において，次の条件 (i), (ii), (iii) をみたす三角形 ABC (周と内部) を T とする。ただし，(iii) のときは，$\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}$ なので，T は 1 点 A を表すものとする。

(i) 2 点 A, B は円 $x^2+y^2=1$，$z=0$ の周上にある。

(ii) A と B が異なるときは，点 C の z 座標は 0 以上であり，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ である。

(iii) $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ のときは，$\mathrm{C}=\mathrm{A}$ である。

条件 (i), (ii), (iii) をみたすように 3 点 A, B, C を可能な限り動かすとき，T が通過してできる立体 K の体積を求めよ。

答

19. (1) 4　(2) -2π

20. (1) $\frac{1}{2\cdot(n-2)!}$　(2) $\frac{1}{8\cdot(n-4)!}$

21. 3468

22. $a \leqq -28$ のとき 0 個，$-28 < a \leqq 0$ のとき 1 個，$0 < a < 4$ のとき 3 個，$4 \leqq a < 12$ のとき 2 個，$12 \leqq a$ のとき 0 個

24. $\frac{4}{3}\pi$

25. $x>0$，$y>0$ に対して定義された関数 $f(x,y)=e^{-x-y}(\log x+\log y+1)$ について，次の問に答えよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数であり，e は自然対数の底である。

(1) t を正の定数とする。x, y が $x>0$，$y>0$，$x+y=t$ を満たしながら変化するとき，$f(x,y)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2) x, y が $x>0$，$y>0$ を満たしながら変化するとき，$f(x,y)$ の最大値を求めよ。

26. どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを繰り返し投げて，次の規則に従って点 P を数直線上で移動させる。$k=1, 2, 3, \cdots$ に対して，

- k 回目に出たさいころの目が 1 または 2 のとき，点 P を $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ だけ正の向きに移動させる
- k 回目に出たさいころの目が 3 または 4 のとき，点 P を $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$ だけ正の向きに移動させる
- k 回目に出たさいころの目が 5 または 6 のとき，点 P は移動させない

最初，点 P は原点にあり，さいころを n 回投げたときの点 P の座標を x_n $(n=1,2,3,\cdots)$ とする。

(1) 1 回目に出たさいころの目が 5 または 6 のとき，$x_n \geqq 1$ とはならないことを示せ。

(2) $x_n \geqq 1$ となる確率を求めよ。

(3) $n \geqq 2$ を満たす n に対して，$x_n \geqq \dfrac{5}{4}$ となる確率を求めよ。

27. 長さが 1 である線分 ON を直径とする球面を S とし，S と点 O で接する平面を α とする。また，α 上に O と異なる 2 点 P, Q をとる。直線 NP と S の交点のうち N と異なるものを P$'$ とし，直線 NQ と S の交点のうち N と異なるものを Q$'$ とする。

(1) 線分 NP と線分 NP$'$ の長さの積 $\mathrm{NP}\cdot\mathrm{NP}'$ を求めよ。

(2) k を正の定数とする。P, Q が，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ かつ $\mathrm{PQ}=k$ を満たしながら動くとき，線分 P$'$Q$'$ の長さのとり得る値の範囲を k を用いて表せ。

28. n を正の整数とし，$f(x)=x^{2n+1}-x$ とする。曲線 $y=f(x)$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{A}(-1,0)$ における C の接線を l とする。

(1) C と l は点 A 以外にただ 1 つの共有点をもつことを示せ。また，その共有点の x 座標を t_n とおくとき，不等式 $t_n < 1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$ が成り立つことを示せ。

(2) C と l とで囲まれる部分の面積を S_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ。

29. 正の整数 N に対し，N の正の約数 (1 と N も含む) の総和を $S(N)$ で表す。例えば $S(6)=1+2+3+6=12$ である。N が正の整数 n と $2<p<q$ を満たす素数 p, q を用いて $N=2^n pq$ と表されるとき，以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{S(N)}{N}<4$ が成り立つことを示せ。

(2) $S(N)=2N$ となるような n, p, q は存在しないことを示せ。

(3) $S(N)=kN$ (k は正の整数) となるような k と N の組をすべて求めよ。

30. i を虚数単位とし，α を 2, -2, $2i$, $-2i$ のいずれでもない複素数とする。z の 2 次方程式 $z^2-\alpha z+1=0$ の 2 解を z_1, z_2 とし，$z^2-i\alpha z+1=0$ の 2 解を z_3, z_4 とする。また，z_1, z_2, z_3, z_4 が表す複素数平面上の点を順に A, B, C, D とする。

(1) $(z_2-z_1)^2$, $(z_4-z_3)^2$ をそれぞれ α を用いて表せ。

(2) 直線 AB と直線 CD のなす角が 45° であるように α が変化するとき，複素数平面上で点 $\mathrm{P}(\alpha)$ が描く図形を求め，図示せよ。

答

25. (1) $e^{-t}(2\log t - 2\log 2 + 1)$ (2) $\frac{1}{e^2}$

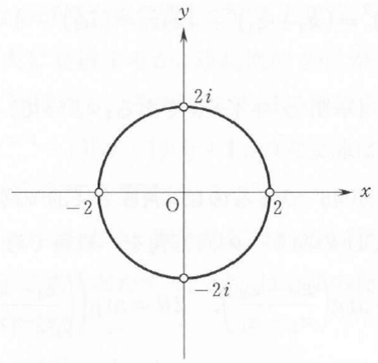
26. (2) $\frac{1}{2}\{1-(\frac{1}{3})^n\}$ (3) $\frac{1}{3}-(\frac{1}{3})^n$

27. (1) 1 (2) $\frac{2k}{k^2+2} \leqq \mathrm{P'Q'} < \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

28. (2) 4

29. (3) $(k, N) = (3, 120), (3, 672)$

30. (1) $(z_2 - z_1)^2 = \alpha^2 - 4$, $(z_4 - z_3)^2 = -\alpha^2 - 4$
(2) 原点を中心とする半径 2 の円から，4 点 ± 2, $\pm 2i$ を除いたもの



31. 座標平面上の 3 点 O$(0,0)$，A$(3,3)$，B$(3,-1)$ を頂点とする三角形 OAB がある。三角形 OAB の内部 (三角形 OAB の周上は含まない) に点 P をとり，点 P から直線 OA, AB, OB にそれぞれ垂線 PD, PE, PF を下ろす。このとき，次の問に答えよ。

(1) 点 P の座標を (a,b) とおくとき，D, F の座標を a, b を用いて表せ。

(2) 点 P が三角形 OAB の内部を動くとき，三角形 DEF の面積の最大値を求めよ。

32. n を 2 以上の整数とする。2 つの袋 A, B があり，A, B どちらの袋にも数字 1, 2, 3, $\cdots$, n が書かれたカードが各 1 枚ずつ合計 n 枚入っている。初めに A から無作為に 1 枚のカードを取り出し，次に A から取り出したカードに書かれた数と同じ枚数のカードを B から無作為に取り出す。このとき，B から取り出したカードに書かれた数の最大値を M とする。

(1) $M = n-1$ となる確率を求めよ。

(2) $M \geqq n-1$ となる確率を p_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

33. p, q, r を素数とする。x の 3 次方程式 $x^3 - px^2 + qx - r^2 = 0$ のすべての解が整数になるような p, q, r の組 (p,q,r) をすべて求めよ。

34. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，不等式 $e^{-\frac{x^2}{2}} > \cos x$ が成り立つことを示せ。

35. α を虚数 (実数ではない複素数) とし，複素数平面上の 3 点 A(α)，B$(-\alpha)$，C(α^2) を通る円を考える。α がどのような虚数であっても，この円が通過する定点がただ 1 つあることを示し，その点を求めよ。

36. 点 O を原点とする xy 平面上に半径 1 の円板 C がある。C の中心を P とし，C の周上の 1 点を Q とする。

P が点 $(0,1)$，Q が原点 O の位置にある状態から始めて，C を x 軸に沿って滑ることなく x 軸の正の向きに転がす。C と x 軸との接点を T，$\angle\text{QPT} = \theta$ として，線分 PQ が初めて x 軸に平行になったとき，すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ になったときに転がすことをやめる。

(1) k を $0 < k < 1$ をみたす定数とし，$k = \sin^2\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。直線 $y = k$ と線分 PQ が共有点をもつように θ を変化させるとき，その共有点を R(X,k) とする。このとき，X のとりうる値の範囲を α を用いて表せ。

(2) θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する領域の面積を求めよ。

答

31. (1) $\mathrm{D}(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, $\mathrm{F}(\frac{9a-3b}{10}, \frac{-3a+b}{10})$ (2) $\frac{3}{2}$

32. (1) $\frac{n+1}{6n}$ (2) $\frac{2}{3}$

33. $(11, 19, 3)$

35. 点 1

36. (1) $0 \leqq X \leqq \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ (2) $\frac{\pi}{8}$

37. a を $0<a<1$ を満たす定数とし，座標平面内の曲線 $x^a+y^a=1$ $(x>0,\ y>0)$ を C とする。C 上の点 P に対して，P における C の接線と x 軸および y 軸によって囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐の体積を V とする。P が C 上を動くとき，V の最大値，および最大値を与える P の座標を a で表せ。

38. m を正の整数とする。袋の中に 1 から m までの整数が書かれたカードが 2 枚ずつ，合計 $2m$ 枚入っている。この袋とカードに対し，次の操作を繰り返し行う。

操作：袋の中から無作為かつ同時に 2 枚のカードを取り出す。このとき取り出したカードに書かれた数が同じならばこれらのカードを袋から取り除き，異なるならばこれらのカードを袋に戻す。

(1) $m=2$ のとき，袋の中にあるカードが，すべてなくなるまでに行った操作の回数が n である確率を p_n とする。p_n を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。

(2) $m=3$ のとき，袋の中にあるカードが，すべてなくなるまでに行った操作の回数が n である確率を q_n とする。q_n を求めよ。ただし $n \geqq 3$ とする。

39. 次の (条件) を満たす複素数 α 全体の集合を求めて，複素数平面上に図示せよ。ただし，i は虚数単位である。

(条件) $|z-i| \leqq 1$ を満たすすべての複素数 z に対して，αz の実部は -1 以上 1 以下である。

40. k を正の定数とする。座標平面において，双曲線 $H: x^2-y^2=-1$ の第 4 象限の部分に点 $\mathrm{P}(s, -\sqrt{s^2+1})$ $(s>0)$，直線 $l: y=kx$ の第 1 象限の部分に点 $\mathrm{Q}(t, kt)$ $(t>0$ をとり，P における H の法線が Q を通るようにする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，点 Q に対して点 P がただ 1 つに定まることを証明なしに用いてよい。

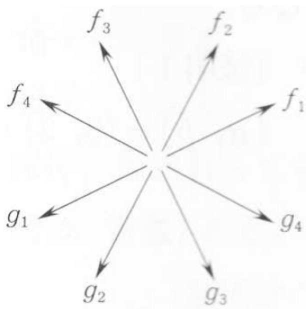
(1) t を s を用いて表せ。また，s が変化しうる範囲を求めよ。

(2) (1) で求めた s の範囲において，t を s の関数とみなして $t=f(s)$ とする。このとき，$f(s)$ の導関数 $f'(s)$ を求め，$f'(s)>0$ を示せ。

(3) 線分 PQ の長さを $L(t)$ とおくとき，極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t}$ を求めよ。

41. 座標平面において，点 (x,y) を点 $(x+\alpha,\ y+\beta)$ に移す操作を $\langle \alpha, \beta \rangle$ で表す。a, b を正の整数として，8 通りの操作

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \langle a, b \rangle, & g_1 &= \langle -a, -b \rangle \\
f_2 &= \langle b, a \rangle, & g_2 &= \langle -b, -a \rangle \\
f_3 &= \langle -b, a \rangle, & g_3 &= \langle b, -a \rangle \\
f_4 &= \langle -a, b \rangle, & g_4 &= \langle a, -b \rangle
\end{aligned}
$$



を考える。(図は $(a,b)=(2,1)$ のときの例である。)

動点 P は原点 O を出発点として，これら $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3, g_4$ の 8 通りの操作をそれぞれ有限回行うことで，座標平面上の格子点 (x, y 座標がともに整数である点のこと) を移動していく。ただし，同じ操作を何回行ってもよく，また，1 回も行わない操作があってもよいとする。例えば，f_1, g_4, g_2, g_4 の順に操作を 4 回行うと，P は，$(0,0) \mapsto (a,b) \mapsto (2a,0) \mapsto (2a-b,-a) \mapsto (3a-b,-a-b)$ の順に移動して，点 $(3a-b,-a-b)$ にたどり着く。このような操作によって P がたどり着ける格子点を「到達可能点」といい，P がたどり着けない点を「到達不可能点」と呼ぶことにする。

(1) $(a,b)=(3,5)$ のとき，点 $(1,0)$ は到達不可能点であることを示せ。

(2) a と b は互いに素で偶奇が異なるとする。このとき，すべての格子点は到達可能点であることを示せ。ただし，a, b が互いに素のとき，$ax_0+by_0=1$ を満たす整数 x_0, y_0 が存在することを用いてよい。

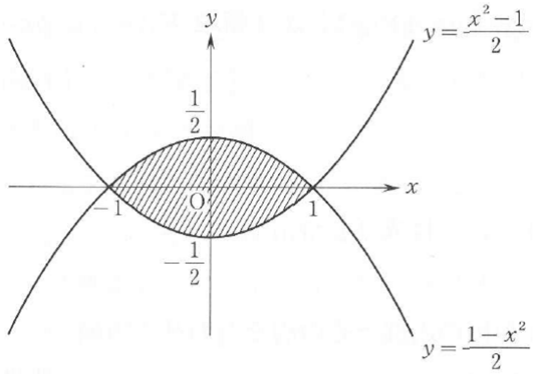
42. a を正の定数とする。xyz 空間において不等式 $|xy| \leqq z \leqq a$ を満たす点 (x,y,z) 全体からなる領域を K とする。K に含まれ，z 軸上に中心をもつ球面 S の半径の最大値を a を用いて表せ。

答

37. $\frac{\pi}{3}(\frac{4}{27})^{\frac{1-a}{a}}$，P$((\frac{1}{3})^{\frac{1}{a}}, (\frac{2}{3})^{\frac{1}{a}})$

38. (1) $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-2}$　(2) $\frac{1}{2}\{(\frac{4}{5})^{n-2} - (\frac{2}{3})^{n-2}\}$

39. $\frac{x^2-1}{2} \leqq y \leqq \frac{1-x^2}{2}$ (ただし x, y はそれぞれ α の実部，虚部)



40. (1) $0 < k \leqq 1$ のとき $s > 0$，$k > 1$ のとき $0 < s < \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$，$t = \frac{2s\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}-ks}$
(2) $f'(s) = \frac{2\{(s^2+1)\sqrt{s^2+1}-ks^3\}}{\sqrt{s^2+1}(\sqrt{s^2+1}-ks)^2}$　(3) $0 < k \leqq 1$ のとき $\frac{k+1}{\sqrt{2}}$，$k > 1$ のとき $\sqrt{k^2+1}$

42. $0 < a \leqq 2$ のとき $\frac{a}{2}$，$a > 2$ のとき $\sqrt{2a} - 1$

43. 座標平面上の円 $x^2+y^2=1$ を C とする。C の第 1 象限 (つまり $x>0$ かつ $y>0$) の部分にある点 P に対して，P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を H とし，線分 PH を直径とする円を D とする。さらに，C と D の交点のうち P でない方を Q とする。P が C の第 1 象限の部分を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

44. 1 つのさいころを繰り返し投げ，1 回目から k 回目までに出た目の数すべての積を X_k $(k=1,2,3,\cdots)$ とする。n を 3 以上の整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) X_k が $k=n$ で初めて 3 の倍数となる確率 p_n を求めよ。

(2) X_k が $k=n$ で初めて 6 の倍数となる確率 q_n を求めよ。

(3) X_k が $k=n$ で初めて 6 の倍数となったとき，X_n が 12 の倍数である条件付き確率 r_n を求めよ。

45. α を虚数とする。O を原点とする複素数平面において，3 点 A(α)，B(α^2)，C(1) を頂点とする三角形 ABC の外心を P(z) とする。

(1) z を α とその共役複素数 $\overline{\alpha}$ の式で表せ。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OP}$ を満たすように α が動くとき，点 A の軌跡を求めて複素数平面上に図示せよ。

(3) $\mathrm{OA}=\mathrm{OP}$ を満たすように α が動くとき，点 P の軌跡を求めて複素数平面上に図示せよ。

46. a を正の定数とする。次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とし，$\lim\limits_{x\to+0} x\log x=0$ であることは用いてよい。

(1) 関数 $f(t)=t\log t-(a-t)\log(a-t)$ $(0<t<a)$ が極値をもつ a の値の範囲を求めよ。

(2) 連立方程式 $x+y=a$，$x^x=y^y$，$x>0$，$y>0$ を満たす x, y の組 (x,y) の個数を求めよ。

47. 正の整数 n, a と正の奇数 b で $n=\dfrac{2}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{2}$ を満たすものを考える。

(1) a は 4 の倍数であることを示せ。

(2) $a=4c$ (c は正の整数) とおくとき，$b=c^2$ であることを示せ。

(3) 組 (a,b,n) をすべて求めよ。

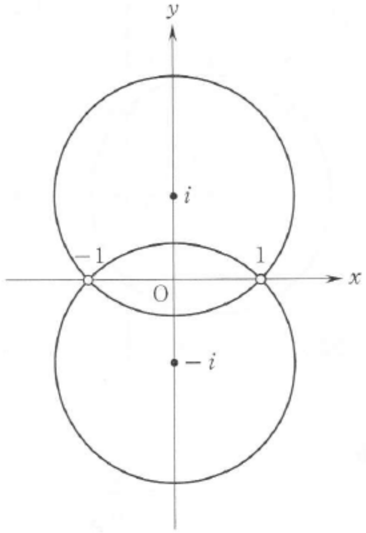
48. xyz 空間において，点 A$(1,0,0)$ を通り z 軸に平行な直線を z 軸のまわりに 1 回転してできる円柱 C がある。また，厚さが無視でき，曲げることができる直径 π の平らな円形のシールがあり，その中心を A に一致させてシール全体を C の側面に貼り付ける。貼り付けたシールを y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 K の体積を求めよ。

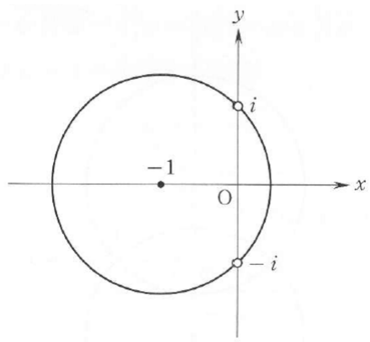
答

43. $\frac{2}{3}$

44. (1) $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ (2) $\frac{2\cdot 4^{n-1}+3^n-2^{n+1}}{6^n}$ (3) $\frac{2\cdot 4^{n-1}+3^{n-1}-(n+5)2^{n-2}}{2\cdot 4^{n-1}+3^n-2^{n+1}}$

45. (1) $\frac{\alpha(1-\alpha\overline{\alpha})}{\alpha-\overline{\alpha}}$
(2) 点 i と点 $-i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の 2 円から点 1 と点 -1 を除いた部分
(3) 点 -1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から虚軸上の点 i と点 $-i$ を除いた部分





46. (1) $a > \frac{2}{e}$ (2) $0 < a \leqq \frac{2}{e}$, $a \geqq 1$ のとき 1 個, $\frac{2}{e} < a < 1$ のとき 3 個

47. (3) $(4,1,5)$, $(12,9,6)$, $(36,81,41)$

48. 4π