1. (1) $\triangle$APQ と $\triangle$CPB は相似である。相似比は AP : CP $= t : \sqrt{t^2+1}$。面積比は $t^2 : t^2+1$。よって $S(t) = \frac{t^2}{t^2+1}\triangle\mathrm{CPB} = \frac{t^2}{t^2+1}\frac{1}{2}(2-t) = \frac{(2-t)t^2}{2(t^2+1)}$。

(2) $S'(t) = \frac{(4t-3t^2)(t^2+1)-(2t^2-t^3)2t}{2(t^2+1)^2} = \frac{4t^3+4t-3t^4-3t^2-4t^3+2t^4}{2(t^2+1)^2} = \frac{4t-t^4-3t^2}{2(t^2+1)^2} = \frac{t(4-3t-t^3)}{2(t^2+1)^2} = \frac{t(1-t)(4+t+t^2)}{2(t^2+1)^2}$
$t=1$ のとき，最大値 $S(1) = \frac{1}{4}$。

2. (1) 和が 9 である組は，$(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$。頂点を ABCD-EFGH とする。対角線は AG, BH, CE, DF。(1,8) を (A,G) に固定してよい。AG を軸として立方体を 120 °，240 °回転すると，$\{\mathrm{BH},\mathrm{DF},\mathrm{EC}\}$ は $\{\mathrm{DF},\mathrm{EC},\mathrm{BH}\}$，$\{\mathrm{EC},\mathrm{BH},\mathrm{DF}\}$ に移るから，$(2,7)$ を BH に配置してよい。$(3,6)$ と $(4,5)$ を CE と DF に配置する方法は 2 通り。その各々について，$(2,7)$ を入れ換える方法は 2 通り，$(3,6)$ を入れ換える方法は 2 通り，$(4,5)$ を入れ換える方法は 2 通りあるから，求める場合の数は，$2\times 2^3 = 16$ 通り。

(2) 和が 9 である組を 4 組から 2 組選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り。例えば $(1,8)$ と $(2,7)$ を選んだとする。残りの 3, 4, 5, 6 を，和が 9でないように対角線上の組にする方法は $(3,4),(5,6)$ または $(3,5)$, (4,6) の 2 通り。例えば (3,4), (5,6) の組を作ったとする。(1) と同様に，(1,8), (2,7), (3,4), (5,6) を 4 本の対角線上に置く方法は 16 通り。よって，求める場合の数は $6\times 2\times 16 = 192$ 通り。

3. 2 曲線の式から y を消去して，$x\log x + (1-x)\log(1-x) = kx(x-1)$ $(0 < x < 1)$，すなわち $k = \frac{x\log x+(1-x)\log(1-x)}{x(x-1)}$，すなわち $k = \frac{\log x}{x-1} - \frac{\log(1-x)}{x}$。$f(x) = \frac{\log x}{x-1} - \frac{\log(1-x)}{x}$ とおく。$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が共有点をもつような k の範囲を求める。$f(1-x) = f(x)$ であるから，$y = f(x)$ のグラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ 関して対称である。$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\log x}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{x-1}x-\log(1-x)}{x^2} = \frac{x(x-1)-x^2\log x-x(x-1)+(x-1)^2\log(1-x)}{x^2(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2\log(1-x)-x^2\log x}{x^2(1-x)^2}$。$f'(\frac{1}{2}) = 0$ である。$g(x) = (x-1)^2\log(1-x) - x^2\log x$ とおく。$g'(x) = 2(x-1)\log(1-x) + x - 1 \quad - \quad 2x\log x - x = 2\{(x-1)\log(1-x) - x\log x\} - 1$, $g''(x) = 2\{\log(1-x) + 1 - \log x - 1\} = 2\log\frac{1-x}{x}$, $0 < x < \frac{1}{2}$ のとき $g''(x) > 0$，$\frac{1}{2} < x < 1$ のとき $g''(x) < 0$, $g'(\frac{1}{2}) = 2\log 2 - 1 > 0$, $\lim_{x\to+0}g'(x) = -1 < 0$, $\lim_{x\to 1-0}g'(x) = -1 < 0$, $g'(x) = 0$ となる x が $(0,\frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2},1)$ に 1 つずつ存在する。それぞれ α, β とおく。$0 < x < \alpha$ のとき $g'(x) < 0$，$\alpha < x < \beta$ のとき $g'(x) > 0$，$\beta < x < 1$ のとき $g'(x) < 0$。$g(\frac{1}{2}) = 0$，$\lim_{x\to+0}g(x) = 0$，$\lim_{x\to 1-0}g(x) = 0$。$0 < x < \frac{1}{2}$ のとき $g(x) > 0$，$f'(x) > 0$，$\frac{1}{2} < x < 1$ のとき $g(x) < 0$，$f'(x) < 0$。$f(\frac{1}{2}) = 4\log 2$，$\lim_{x\to+0}f(x) = \infty$ (なぜなら，$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x-1} = \infty$, $\lim_{x\to+0}\frac{\log(1-x)}{x} = -\lim_{x\to+0}\log(1-x)^{-\frac{1}{x}} = -e$)。$\lim x \to 1-0 f(x) = \infty$。よって求める k の範囲は $k \geq 4\log 2$。

4. (1) $a_n = [\sqrt{2}n]$ より，$a_n < \sqrt{2}n < a_n + 1$ であるから，$\sqrt{2} - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \sqrt{2}$。$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2} - \frac{1}{n}) = \sqrt{2}$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \sqrt{2}$

(2) (1) より $\sqrt{2}n - 1 < a_n < \sqrt{2}n$。同様に，$\sqrt{2}(n+1) - 1 < a_{n+1} < \sqrt{2}(n+1)$。よって $\sqrt{2}(n+1) - 1 - \sqrt{2}n < a_{n+1} - a_n < \sqrt{2}(n+1) - (\sqrt{2}n - 1)$, すなわち $\sqrt{2} - 1 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{2} + 1$。$\sqrt{2} - 1 = 0.4\cdots$，$\sqrt{2} + 1 = 2.4\cdots$ であり，$a_{n+1} - a_n$ は自然数であるから，$a_{n+1} - a_n = 1$ または 2 である。

(3)(ii) $a_n < \sqrt{2}N$ を満たす a_n の個数は N である。$b_n < \sqrt{2}N$ を満たす b_n の個数は $[\sqrt{2}N] - N$ である。$b_n < \sqrt{2}N$ を満たす最大の b_n を b_k とおく。$k = [\sqrt{2}N] - N$ である。ただし N は十分大きい (例えば $N \geq 100$) とする。$\sqrt{2}N - 6 < b_k < \sqrt{2}N$ である。証明: $a_N - a_{N-3} = [\sqrt{2}N] - [\sqrt{2}(N-3)] > \sqrt{2}N - 1 - \sqrt{2}(N-3) = 3\sqrt{2} - 1 > 3$。すなわち $a_N - a_{N-3} \geq 4$。よって a_{N-3} と a_N の間に b_k が存在する (なぜなら a_{N-3}, a_{N-2}, a_{N-1}, a_N が連続整数であるとすると $a_{N-3} - a_N = 3$ となり，$a_{N-3} - a_N \geq 4$ と矛盾する) から $b_k > a_{N-3} = [\sqrt{2}(N-3)] > \sqrt{2}(N-3) - 1 = \sqrt{2}N - 3\sqrt{2} - 1 > \sqrt{2}N - 6$。$k = [\sqrt{2}N] - N$ より，$\sqrt{2}N - 1 - N < k < \sqrt{2}N - N$。よって $\frac{\sqrt{2}N-6}{\sqrt{2}N-N} < \frac{b_k}{k}\frac{\sqrt{2}N}{\sqrt{2}N-1-N}$ $k\to\infty$ のとき $N\to\infty$ である。このとき $\frac{\sqrt{2}N-6}{\sqrt{2}N-N} \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$，$\frac{\sqrt{2}N}{\sqrt{2}N-1-N} \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$。よって $\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{k} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$。

(3)(i) 上述の通り，a_n と a_{n+3} の間に b_n が存在する。n は任意であるから，b_n は無限個ある。

(3)(i) 別解 $\{b_n\}$ が有限数列であると仮定する。$n \geq N$ ならば $a_{n+1} - a_n = 1$ となるような自然数 N が存在する (具体的には，$\{b_n\}$ の最大値を M とおき，$\sqrt{2}n > M$ となる最小の n を N とおく)。$n > N$ のとき，$a_n = a_N + \sum_{k=N}^{n-1}(a_{n+1} - a_n) = a_N + \sum_{k=N}^{n-1}1 = a_N + n - N$。$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a_N-N}{n}) = 1$。これは $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \sqrt{2}$ と矛盾する。よって $\{b_n\}$ は無限数列である。

5. (1) $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathrm{C}(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ である。$\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$ とおく。$\mathrm{P}(c,s)$ と書く。直線 BC の方程式は $x=-\frac{1}{2}$ である。$\mathrm{Q}(p,q)$ とおくと，条件から $\frac{c+p}{2}=-\frac{1}{2}$ かつ $q=s$ だから $\mathrm{Q}(-1-c,s)$。$\alpha=c+is$, $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{c+is}=c-is$。$\beta=-1-c+is$, $\beta+\frac{1}{\alpha}=-1-c+is+c-is=-1$

(2) $\mathrm{R}(\gamma)$ とおく。$\triangle\mathrm{BAR}\equiv\triangle\mathrm{BAP}$ であるから，$\frac{\gamma-1}{\omega-1}=\overline{(\frac{\alpha-1}{\omega-1})}$, よって $\gamma=1+(\omega-1)\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\omega}-1}=1+(\omega-1)\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{\frac{1}{\omega}-1}=1+\omega(1-\frac{1}{\alpha})$。($|\omega|=1$ から $\bar{\omega}=\frac{1}{\omega}$，$|\alpha|=1$ から $\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ である)。(1) より $\beta=-1-\frac{1}{\alpha}$。$\gamma/\beta=-\frac{1+\omega(1-\frac{1}{\alpha})}{1+\frac{1}{\alpha}}=-\frac{\alpha+\omega(\alpha-1)}{\alpha+1}$。$\overline{\gamma/\beta}=-\frac{\bar{\alpha}+\bar{\omega}(\bar{\alpha}-1)}{\bar{\alpha}+1}=-\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\omega}(\frac{1}{\alpha}-1)}{\frac{1}{\alpha}+1}=-\frac{\omega+1-\alpha}{\omega(\alpha+1)}=-\frac{1+\omega^2(1-\alpha)}{\alpha+1}=-\frac{1-(\omega+1)(1-\alpha)}{\alpha+1}=-\frac{\alpha+\omega(\alpha-1)}{\alpha+1}=\gamma/\beta$。($\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$ を用いた)。すなわち $\gamma/\beta=\overline{\gamma/\beta}$ であるから γ/β は実数である。よって…

(2) 別解: 直線 AB の方程式は $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$。$\mathrm{R}(a,b)$ とおく。PR の中点が直線 AB 上にあるから，$\frac{b+s}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{a+c}{2}-1)$, $\sqrt{3}(b+s)=-a-c+2$, $a+\sqrt{3}b=-c-\sqrt{3}s+2$, $\mathrm{PR}\perp\mathrm{AB}$ であるから，$\frac{b-s}{a-c}=\sqrt{3}$, $\sqrt{3}a-b=\sqrt{3}c-s$, $a=\frac{1}{2}(c-\sqrt{3}s+1)$, $b=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}c-s+\sqrt{3})$, $\mathrm{R}(\gamma)$ とすると，$\gamma=a+bi=\frac{1}{2}(c-\sqrt{3}s+1)+\frac{1}{2}i(-\sqrt{3}c-s+\sqrt{3})$

γ/β が実数となることを示す。($\theta=\pi$ のとき $\beta=0$ であるが，このとき O と Q が一致するから，3 点 O, Q, R は一直線上にある。以下では $\theta\neq\pi$ とする)。$1/\beta=1/(-1-c+is)=-\frac{1+c+is}{(1+c)^2+s^2\theta}=-\frac{1+c+is}{2(1+c)}$

$-4(1+c)\gamma/\beta=\{c-\sqrt{3}s+1+i(-\sqrt{3}c-s+\sqrt{3})\}(1+c+is)$。これの虚部は $(1+c-\sqrt{3}s)s\{\sqrt{3}(1-c)-s\}(1+c)=(1+c)s-\sqrt{3}s+\sqrt{3}(1-c^2)-s(1+c)=-\sqrt{3}s^2+\sqrt{3}s^2=0$。よって γ/β は実数であるから，3 点 O, Q, R は一直線上にある。

6. (1) ${}_{p^2}\mathrm{C}_p=\frac{p^2(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(p-1))}{p!}=\frac{p(p^2-1)\cdots(p^2-(p-1))}{(p-1)!}$, よって $(p-1)!{}_{p^2}\mathrm{C}_p=p(p^2-1)\cdots(p^2-(p-1))$。右辺は p で割り切れるから p は $(p-1)!{}_{p^2}\mathrm{C}_p$ を割り切る。p は素数だから p は $(p-1)!$ を割り切らない。よって p は ${}_{p^2}\mathrm{C}_p$ を割り切る。(素数 p が ab を割り切るならば，p は a または b を割り切る)。(2) (1) より ${}_{p^2}\mathrm{C}_p=kp$ とおく (k は自然数)。k を p^2 で割った余りがを 1 であることを示す。商を q, 余りを r とおくと $k=p^2q+r$。$(0\leq r<p^2)$。$\frac{p(p^2-1)\cdots(p^2-(p-1))}{(p-1)!}=(p^2q+r)p$, $(p^2-1)\cdots(p^2-(p-1))=(p^2q+r)(p-1)!$, 左辺を p^2 で割った余りは $(-1)(-2)\cdots(-(p-1))=(-1)^{p-1}(p-1)!=(p-1)!$ (なぜなら p は奇数) であるから左辺を $p^2A+(p-1)!$ とおく (A は自然数)。$p^2A+(p-1)!=(p^2q+r)(p-1)!$, $p^2(A-q(p-1)!)=(r-1)(p-1)!$。左辺は p^2 で割り切れるから p^2 は $(r-1)(p-1)!$ を割り切る。p は素数だから p^2 と $(p-1)!$ は互いに素である。よって p^2 は $r-1$ を割り切る。(p が ab を割り切り，p と a が互いに素ならば，p は b を割り切る)。$|r-1|<p^2-1$ だから $r-1=0$ すなわち $r=1$ である。よって ${}_{p^2}\mathrm{C}_p=(p^2q+1)p=p^3q+p$。よって ${}_{p^2}\mathrm{C}_p$ を p^3 で割った余りは p である。

(3) $\frac{(p-1)!}{a}$ を p で割った余りと，$\frac{(p-1)!}{b}$ を p で割った余りが等しいと仮定する。ただし a, b は $a\neq b$ かつ $1\leq a<p$ かつ $1\leq b<p$ をみたす自然数とする ($p\geq 3$)。$\frac{(p-1)!}{a}-\frac{(p-1)!}{b}$ は p で割り切れる。すなわち p は $\frac{(p-1)!}{ab}(b-a)$ は p を割り切る。p は 3 以上だから $\frac{(p-1)!}{ab}$ は整数であり，p は素数だから，p は $\frac{(p-1)!}{ab}$ 割り切らない。よって p は $b-a$ を割り切る。$|b-a|<p$ だから，$b-a=0$ である。これは $a\neq b$ と矛盾する。よって，$a\neq b$ ならば $\frac{(p-1)!}{a}$ を p で割った余りと $\frac{(p-1)!}{b}$ を p で割った余りは異なる。

(2) より ${}_{p^2}\mathrm{C}_p=p^3q+p$。$\frac{p(p^2-1)\cdots(p^2-(p-1))}{(p-1)!}=p^3q+p$。$(p^2-1)\cdots(p^2-(p-1))=\{p^2q+1\}(p-1)!$。左辺を展開すると，$p^2$ についての多項式となる。定数項は $(p-1)!$ である。1 次の項の係数は $-\frac{(p-1)!}{1}-\frac{(p-1)!}{2}-\frac{(p-1)!}{3}-\cdots-\frac{(p-1)!}{p-1}$ である。これを p で割った余りは，$-1-2-3-\cdots-(p-1)=-\frac{1}{2}p(p-1)$ を p で割った余りに等しい。$\frac{1}{2}(p-1)$ は整数だから，1 次の項の係数は p で割り切れる。商を u とおくと $(p^2)^{p-1}+\cdots+up\cdot p^2+(p-1)!=\{p^2q+1\}(p-1)!$。$(p^2)^{p-1}+\cdots+up^3=p^2q(p-1)!$。$(p^2)^{p-2}+\cdots+up=q(p-1)!$。左辺は p で割り切れるから p は $(pt+s)(p-1)!$ を割り切る。p は素数だから p は $(p-1)!$ を割り切らない。よって p は q を割り切る。$q=vp$ とおく (v は自然数)。${}_{p^2}\mathrm{C}_p=p^4v+p$。よって ${}_{p^2}\mathrm{C}_p$ を p^4 で割った余りは p である。

7. (1) 点 B の x 座標は $f(x)=2$ の解である。$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=2$, $(e^x)^2-4e^x+1=0$, $x>0$ だから $e^x=2+\sqrt{3}$, $x=\log(2+\sqrt{3})=\alpha$ とおく。$\mathrm{B}(\alpha,2)$。(i) より，円の中心 D は，B における曲線の法線上にある。$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$。$f'(\alpha)=(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}})/2=(2+\sqrt{-}(2-\sqrt{3}))/2=\sqrt{3}$。法線の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$。(ii) より，D は

B の右下にある。B から x 軸へ垂線 BF をひき，D から BF へ垂線 DH をひく。(iii) より FH$=r$ だから BH$=2-r$ $(r<2)$。$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{DH}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ だから BD : BH : DH $=2:1:\sqrt{3}$。BD$=r$ だから，$r:2-r=2:1$。よって $r=4-2r$ すなわち $r=\frac{4}{3}$。

(2) $S_1=\int_0^\alpha f(x)dx$, $S_2=$ 台形 BDEF の面積, $S_3=$ 扇形 BDE の面積とすると，$S=S_1+S_2-S_3$。$S_1=[\frac{e^x-e^{-x}}{2}]_0^\alpha=(2+\sqrt{3}-\frac{1}{2+\sqrt{3}})/2=\sqrt{3}$, $S_2=\frac{1}{2}(\mathrm{BF}+\mathrm{DE})\mathrm{EF}$, EF=DH$=\sqrt{3}BH=\sqrt{3}(2-\frac{4}{3})=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $S_2=\frac{1}{2}(2+\frac{4}{3})\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{10\sqrt{3}}{9}$, $\angle\mathrm{BDH}=\frac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{BDE}=\frac{2}{3}\pi$, $S_3=\frac{1}{2}(\frac{4}{3})^2\frac{2}{3}\pi=\frac{16}{27}\pi$, $S=\sqrt{3}+\frac{10\sqrt{3}}{9}-\frac{16}{27}\pi=\frac{19\sqrt{3}}{9}-\frac{16}{27}\pi$

8. (1) A に a リットル，B に b リットル入っている状態を (a,b) と書く。3 回目に初めて $(1,2)$ となるのは，$(0,0)\to(1,0)\to(1,1)\to(1,2)$ となる場合と，$(0,0)\to(0,1)\to(1,1)\to(1,2)$ となる場合と，$(0,0)\to(0,1)\to(0,2)\to(1,2)$ となる場合があるから $p_3=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$。

(2) n 回目に初めて $(1,2)$ となるのは，[1] $n-1$ 回目に $(0,2)$ である場合と，[2] $n-1$ 回目に $(1,1)$ である場合がある。[1] の場合，$(0,0)\to(0,1)\to(0,2)\to\cdots\to(0,2)\to(1,2)$ となる確率は $\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})^{n-2}\times\frac{2}{3}=(\frac{1}{3})^{n-1}$。[2] の場合，$n-1$ 回目までにちょうど 1 回だけ B を選ぶ。k 回目 $(1\le k\le n-1)$ に B を選ぶとする。(i) $k=1$ の場合，$(0,0)\to(0,1)\to(1,1)\to(1,1)\to\cdots(1,1)\to(1,2)$ となる確率は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-2}$。(ii) $2\le k\le n-1$ の場合，$(0,0)\to(1,0)\to(1,0)\to\cdots\to(1,0)\to(1,1)\to(1,1)\to\cdots(1,1)\to(1,2)$ となる確率は $\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})^{k-2}\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-1-k}\times12=(\frac{1}{3})^{k-1}(\frac{1}{2})^{n-k}$。$k$ について和をとる。$\sum_{k=2}^{n-1}(\frac{1}{3})^{k-1}(\frac{1}{2})^{n-k}=(\frac{1}{2})^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}(\frac{2}{3})^{k-1}=(\frac{1}{2})^{n-1}\frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{2}{3})^{n-2}}{1-\frac{2}{3}}=(\frac{1}{2})^{n-2}\{1-(\frac{2}{3})^{n-2}\}=(\frac{1}{2})^{n-2}-(\frac{1}{3})^{n-2}$。以上より，$p_n=(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-2}+(\frac{1}{2})^{n-2}-(\frac{1}{3})^{n-2}=\frac{2}{3}\{(\frac{1}{2})^{n-3}-(\frac{1}{3})^{n-2}\}$

(別解) n 回行った後の状態が $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする $(n\ge2)$。$p_n=b_{n-1}\times\frac{1}{2}+c_{n-1}\times\frac{2}{3}$ である。$a_{n+1}=a_n\times\frac{1}{3}$, $b_{n+1}=a_n\times\frac{2}{3}+b_n\times\frac{1}{2}$, $c_{n+1}=c_n\times\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $b_2=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\times2=\frac{2}{3}$, $c_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $a_n=a_2(\frac{1}{3})^{n-2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}$, $c_n=c_2(\frac{1}{3})^{n-2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}$, $b_{n+1}=(\frac{1}{3})^n+\frac{1}{2}b_n$, $b_{n+1}+6(\frac{1}{3})^{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+6(\frac{1}{3})^n)$, $b_n+6(\frac{1}{3})^n=(b_2+\frac{2}{3})(\frac{1}{2})^{n-2}$, $b_n=\frac{4}{3}(\frac{1}{2})^{n-2}-6(\frac{1}{3})^n$, $p_n=\frac{1}{2}\{\frac{4}{3}(\frac{1}{2})^{n-3}-6(\frac{1}{3})^{n-1}\}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-2}=\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{n-3}-(\frac{1}{3})^{n-2}+(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{2}{3}\{(\frac{1}{2})^{n-3}-(\frac{1}{3})^{n-2}\}$

9. (1) $f'(x)=ke^{kx}\sin x+e^{kx}\cos x=e^{kx}(k\sin x+\cos x)$, $f''(x)=ke^{kx}(k\sin x+\cos x)+e^{kx}(k\cos x-\sin x)=e^{kx}\{(k^2-1)\sin x+2k\cos x\}$。$f'(\alpha)=0$ だから $k\sin\alpha+\cos\alpha=0$, $\tan\alpha=-\frac{1}{k}$。これを満たす α $(0<\alpha<\pi)$ はただ 1 つ存在し，$0<x<\alpha$ のとき $f'(x)>0$，$\alpha<x<\pi$ のとき $f'(x)<0$ だから $x=\alpha$ で $f(x)$ は極大値をとる。$k\to\infty$ のとき $\tan\alpha\to-0$ だから $\alpha\to\pi$。$f''(\beta)=0$ だから $(k^2-1)\sin\beta+2k\cos\beta=0$, $\tan\beta=-\frac{2k}{k^2-1}$。$k\to\infty$ のとき $\tan\beta\to-0$ だから $\beta\to\pi$。

(2) $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\frac{e^{k\beta}\sin\beta}{e^{k\alpha}\sin\alpha}=e^{k(\beta-\alpha)}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$。$k\to\infty$ のとき $\beta-\alpha\to0$ である。$k(\beta-\alpha)=k\tan(\beta-\alpha)\frac{\beta-\alpha}{\tan(\beta-\alpha)}$。$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ であるから，$k\to\infty$ のとき $\frac{\beta-\alpha}{\tan(\beta-\alpha)}\to1$ である。$k\tan(\beta-\alpha)=k\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{2k^2}{k^2-1}+1}{1+\frac{2}{k^2-1}}$, $k\to\infty$ のとき $k\tan(\beta-\alpha)\to\frac{-2+1}{1+0}=-1$, $k(\beta-\alpha)\to-1$, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\tan\beta\cos\beta}{\tan\alpha\cos\alpha}=\frac{-\frac{2k}{k^2-1}\cos\beta}{-\frac{1}{k}\cos\alpha}$。$k\to\infty$ のとき $\cos\alpha\to-1$, $\cos\alpha\to-1$ だから，$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\to2$。以上より，$\lim_{k\to\infty}\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\frac{2}{e}$

10. $3n-4$ と $3n-5$ は互いに素である (なぜなら，最大公約数を g として $3n-4=ag$, $3n-5=bg$ とおくと，$(a-b)g=1$ だから g は 1 を割り切る)。よって $3n-5$ は $5n+4$ を割り切る。$5n+4=k(3n-5)$ とおく (k は整数)。$3nk-5k-5n=4$, $nk-\frac{5}{3}k-\frac{5}{3}n=\frac{4}{3}$, $(n-\frac{5}{3})(k-\frac{5}{3})=\frac{4}{3}+\frac{25}{9}$, $(3n-5)(3k-5)=12+25=37$, $3n-5$ は 37 の約数である。$3n-5\ge-2$ だから $3n-5=1$, -1, 37。$3n-5=1$ のとき $n=2$, $3n-5=-1$ のとき $n=\frac{4}{3}$, $3n-5=37$ のとき $n=14$ 逆に $n=2$ のとき与式$=\frac{2\cdot14}{7}=4$，$n=14$ のとき与式$=\frac{38\cdot74}{37\cdot19}=4$ 以上より $n=2$, 14

(別解) $3n-5$ は $(3n-4)(5n+4)$ を割り切る。$(3n-4)(5n+4)=(3n-5)\cdot(5n+\frac{17}{3})-\frac{37}{3}$, $3\frac{(3n-4)(5n+4)}{3n-5}=15n+17-\frac{37}{3n-5}$, $3n-5$ は 37 を割り切る。以下同様。

(別解) 与式を $f(n)$ とおく。$\lim_{n\to\infty}f(n)=5$。$f(n)-5=\frac{-58n+109}{(3n-5)(n+5)}$。よって $n\ge2$ のとき $f(n)<5$。$n=1$ のとき $f(1)=\frac{3}{4}$ は整数でない。$n\ge2$ のとき $3n-4>3n-5>0$, $5n+4>n+5>0$ だから $f(n)>1$ である。すなわち $n\ge2$ のとき $1<f(n)<5$, $f(n)=2$, 3, 4 である。$f(n)=2$ とすると

$15n^2-8n-16=2(3n^2+10n-25$, $9n^2-28n+34=0$, n は自然数とならない。$f(n)=3$ とすると $15n^2-8n-16=3(3n^2+10n-25$, $6n^2-38n+59=0$, n は自然数とならない。$f(n)=4$ とすると $15n^2-8n-16=4(3n^2+10n-25$, $3n^2-48n+84=0$, $n^2-16n+28=0$, $(n-2)(n-14)=0$, $n=2,\ 14$

11. (1) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく $(0<\theta<\frac{\pi}{3})$。$z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$。$z^6=\cos 6\theta+i\sin 6\theta$。$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ より $0<\theta<2\theta<6\theta<2\pi$。3 点 A, B, C は円 $|z|=1$ 上にこの順に並ぶ。D(α), E(β), F(γ) とする。$\arg\alpha=\frac{2\theta+6\theta}{2}=4\theta$。$\alpha=\cos 4\theta+i\sin 4\theta=z^4$。$\arg\beta=\frac{6\theta+2\pi}{2}=3\theta+\pi$。$\beta=\cos(3\theta+\pi)+i\sin(3\theta+\pi)=-\cos 3\theta-i\sin 3\theta=-z^3$。$\arg\gamma=\frac{0+2\theta}{2}=\theta$。$\gamma=\cos\theta+i\sin\theta=z$

(2) BD $=$ CD より $\angle$BAD $=\angle$CAD。AD は $\angle$A の二等分線である。P は AD 上にある。同様に BE は $\angle$B の二等分線である。P は BE 上にある。CF は $\angle$C の二等分線である。P は CF 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ だから $\frac{w-1}{z^4-1}$ は実数である。$\frac{w-1}{z^4-1}=\overline{(\frac{w-1}{z^4-1})}$, $\frac{w-1}{z^4-1}=\frac{\bar{w}-1}{\bar{z}^4-1}$, $|z|=1$ より $\bar{z}=\frac{1}{z}$, $\frac{w-1}{z^4-1}=\frac{\bar{w}-1}{\frac{1}{z^4}-1}$, $\frac{w-1}{z^4-1}=\frac{z^4(\bar{w}-1)}{1-z^4}$, $w-1=-z^4(\bar{w}-1$, $w+z^4\bar{w}=1+z^4\cdots(1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ だから $\frac{w-z^2}{-z^3-z^2}$ は実数である。$\frac{w-z^2}{-z^3-z^2}=\overline{(\frac{w-z^2}{-z^3-z^2})}$, $\frac{w-z^2}{z^3+z^2}=\frac{\bar{w}-\bar{z}^2}{\bar{z}^3+\bar{z}^2}$, $\frac{w-z^2}{z^3+z^2}=\frac{\bar{w}-\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}}$, $\frac{w-z^2}{z^2(z+1)}=\frac{z^3\bar{w}-z}{1+z}$, $w-z^2=z^5\bar{w}-z^3$, $w-z^5\bar{w}=z^2-z^3\cdots(2)$, $(1)\times z+(2)$, $(z+1)w=z(1+z^4)+z^2-z^3$, $(z+1)w=z(1+z^4+z-z^2)$, $(z+1)w=z(z+1)(z^3-z^2+1)$, $w=z(z^3-z^2+1)$

12. AC に関して B と対称な点を F とする。AF と CD の交点を E とする。CE$=x$ とおく。E は C と D の間にある。(なぜなら AB>BC より $\angle$ACB $>\angle$BAC, $angle$CAD $>\angle$CAE) CE$=x$ とおくと，DE$=2-x$ である。AE$=x$ である (なぜなら $\angle$EAC $=\angle$BAC $=\angle$ECA)。$\angle$DAE $=\theta$ とおくと，余弦定理より $\cos\theta=\frac{1^2+x^2-(2-x)^2}{2\cdot 1\cdot x}=\frac{4x-3}{2x}$。$0<\theta<\pi$ だから $\sin\theta>0$, $\sin\theta=\sqrt{1-(\frac{4x-3}{2x})^2}=\frac{\sqrt{(6x-3)(3-2x)}}{2x}$。$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\cdot\frac{(6x-3)(3-2x)}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{(2x-1)(3-2x)}$ $(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$。相加平均と相乗平均の不等式から $\sqrt{(2x-1)(3-2x)}\leq\frac{1}{2}((2x-1)+(3-2x))=1$ だから，$S\leq\frac{\sqrt{3}}{4}$。等号成立は $2x-1=3-2x$ のとき，すなわち $x=1$ のとき，S の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{4}$。

(別解) AE $+$ ED $=$ CE $+$ ED $=$ CE $=2$ だから，点 E は 2 点 A, D を焦点とする楕円を描く。AD $=1$ より A$(\frac{1}{2},0)$, D$(-\frac{1}{2},0)$ となるような座標をとる。楕円の式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とすると $2a=2$ から $a=1$, $b=\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $S=\triangle$ADE が最大となるのは，E が y 軸上にあるときである。このとき $S=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{OE}=\frac{1}{2}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$。

(別解) A$(0,0)$, D$(\cos\theta,\sin\theta)$, C$(c+\sqrt{4-s^2},0)$, B$(\sqrt{4-s^2},-s)$ とする $(0<\theta<\pi)$。AC に関して B と対称な点を F$(\sqrt{4-s^2},s)$ とする。直線 AF の方程式は $y=\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}x$。直線 CD の方程式は $y=-\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}(x-c)+s$。AF と CD の交点を E$(x,y)$ とする。$\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}x=-\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}(x-c)+s$, $2x-c=\sqrt{4-s^2}$, $x=\frac{1}{2}(c+\sqrt{4-s^2})$, $S=\frac{1}{2}|xs-cy|=\frac{1}{2}|xs-c\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}x|=\frac{1}{2}|xs(1-\frac{c}{\sqrt{4-s^2}})|=\frac{1}{4}|s(c+\sqrt{4-s^2})\frac{\sqrt{4-s^2}-c}{\sqrt{4-s^2}}|=\frac{1}{4}\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}|4-s^2-c^2|=\frac{3}{4}\frac{s}{\sqrt{4-s^2}}$ $(0<s\leq 1)$, $S'=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{4-s^2}-\frac{-s^2}{\sqrt{4-s^2}}}{4-s^2}=\frac{3}{(4-s^2)\sqrt{4-s^2}}>0$, $s=1$ のとき，すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき S は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

13. (1) $x+y=t$ のとき，$f(x,y)=e^{-t}(\log x+\log(t-x)+1)=e^{-t}(\log x(t-x)+1)=e^{-t}(\log\{\frac{t^2}{4}-(x-\frac{t}{2})^2\}+1)$。$(0<x<t)$。$x=\frac{t}{2}$ のとき，$f(x,y)$ の最大値は $e^{-t}(\log\frac{t^2}{4}+1)=e^{-t}(2\log\frac{t}{2}+1)$。

(2) $g(t)=e^{-t}(2\log\frac{t}{2}+1)$ とおく $(t>0)$。$g'(t)=-e^{-t}(2\log\frac{t}{2}+1)+e^{-t}\frac{2}{t}=-e^{-t}(2\log\frac{t}{2}-\frac{2}{t}+1)$ $h(t)=2\log\frac{t}{2}-\frac{2}{t}+1$ とおく $(t>0)$。$h'(t)=\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}>0$。$h(2)=0$ であるから，$0<t<2$ のとき $h(t)<0$, $g'(t)>0$，$t>2$ のとき $h(t)>0$，$g'(t)<0$。$t=2$ で $g(t)$ は最大値 $g(2)=e^{-2}$ をとる。すなわち $f(x,y)$ の最大値は e^{-2}。

14. k 回目の移動距離を Y_k とすると，$x_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$ である。$P(Y_k=(\frac{1}{2})^{k-1})=\frac{1}{3}$, $P(Y_k=(\frac{1}{2})^k)=\frac{1}{3}$, $P(Y_k=0)=\frac{1}{3}$。$(\frac{1}{2})^{k-1}>(\frac{1}{2})^k>0$ に注意する。

(1) $Y_1=0$ のとき，x_n が最大となるのは，$Y_k=(\frac{1}{2})^{k-1}$ $(k=2,3,\cdots,n)$ のときである $(n\geq 2)$。よって $Y_1=0$ のとき，$x_n\leq\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2})^{k-1}=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^{n-1}<1$ ($n=1$ のときも成り立つ)。

(2) (1) より，$x_n\geq 1$ ならば $Y_1\neq 0$ である。$Y_1=1$ または $\frac{1}{2}$ である。[1] $Y_1=1$ のとき，$x_n\geq 1$ となる。[2] $Y_1=\frac{1}{2}$ のとき，$x_n\geq 1\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}Y_k\geq 1\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{n}Y_k\geq\frac{1}{2}$ $(n\geq 2)$。$\Leftrightarrow\sum_{k=2}^{n}2Y_k\geq 1$ $2Y_k=Y_{k-1}$

だから，$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} Y_{k-1} \ge 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \ge 1 \Leftrightarrow x_{n-1} \ge 1$, [1][2] から，$P(x_n \ge 1) = P(Y_1 = 1) + P(Y_1 = \frac{1}{2}) \times P(x_{n-1} \ge 1)$, $P(x_n \ge 1) = p_n$ とおくと，$p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_{n-1}$ $(n \ge 2)$, $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(p_{n-1} - \frac{1}{2})$, $\{p_n - \frac{1}{2}\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列，初項は $p_1 - \frac{1}{2} = P(x_1 \ge 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, $p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^{n-1}$, $p_n = \frac{1}{2}\{1 - (\frac{1}{3})^n\}$ $(n = 1$ のときも成り立つ)。

(3) (1) より，$x_n \ge \frac{5}{4}$ ならば $Y_1 \ne 0$ である。$Y_1 = 1$ または $\frac{1}{2}$ である。[1] $Y_1 = 1$ のとき，$x_n \ge \frac{5}{4}$ $\Leftrightarrow 1 + \sum_{k=2}^{n} Y_k \ge \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} Y_k \ge \frac{1}{4} \cdots$ (a) $(n \ge 2)$。$P(Y_2 = \frac{1}{2}) = P(Y_2 = \frac{1}{4}) = P(Y_2 = 0) = \frac{1}{3}$。(i) $Y_2 = \frac{1}{2}$ のとき，(a) は成り立つ。(ii) $Y_2 = \frac{1}{4}$ のとき，(a) は成り立つ。(iii) $Y_2 = 0$ のとき，(a)$\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n} Y_k \ge \frac{1}{4}$ $(n \ge 3) \Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n} 4Y_k \ge 1$, $\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n} Y_{k-2} \ge 1$, $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-2} Y_k \ge 1$, $\Leftrightarrow x_{n-2} \ge 1$, [2] $Y_1 = \frac{1}{2}$ のとき，$x_n \ge \frac{5}{4}$ $\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} Y_k \ge \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} Y_k \ge \frac{3}{4} \cdots$ (b) $(n \ge 2)$。(i) $Y_2 = \frac{1}{2}$ のとき，(b) $\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n} Y_k \ge \frac{1}{4}$ $(n \ge 3)$, $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-2} Y_k \ge 1$, $\Leftrightarrow x_{n-2} \ge 1$, (ii) $Y_2 = \frac{1}{4}$ のとき，(b) $\Leftrightarrow \sum_{k=3}^{n} Y_k \ge \frac{1}{2}$, $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-2} Y_k \ge 2$, $\Leftrightarrow x_{n-2} \ge 2$, しかし $x_{n-2} \le \sum_{k=1}^{n-2} (\frac{1}{2})^{k-1} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n-2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-3} < 2$ だから (b) は成り立たない。(iii) $Y_2 = 0$ のときも同様に (b) は成り立たない。以上より，$P(x_n \ge \frac{5}{4}) = P(Y_1 = 1) \times \{P(Y_2 = 1) + P(Y_2 = \frac{1}{2}) + P(Y_2 = 0) \times P(x_{n-2} \ge 1)\} + P(Y_1 = \frac{1}{2}) \times P(Y_2 = \frac{1}{2}) \times P(x_{n-2} \ge 1) = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_{n-2}) + \frac{1}{3}\frac{1}{3}p_{n-2} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}p_{n-2} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\frac{1}{2}\{1 - (\frac{1}{3})^{n-2}\} = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^n$ $(n = 2$ のときも成り立つ)。

15. (1) $\triangle\mathrm{NOP} \sim \triangle\mathrm{NP'O}$ だから $\mathrm{NO} : \mathrm{NP} = \mathrm{NP'} : \mathrm{NO}$, $\mathrm{NP} \cdot \mathrm{NP'} = \mathrm{NO}^2 = 1$

(2) (1) より，$\mathrm{NP'} : \mathrm{NQ'} = 1/\mathrm{NP} : 1/\mathrm{NQ} = \mathrm{NQ} : \mathrm{NP}$, また，$\angle\mathrm{PNQ} = \angle\mathrm{Q'NP'}$, よって $\triangle\mathrm{PNQ} \sim \triangle\mathrm{Q'NP'}$, よって $\mathrm{NP} : \mathrm{PQ} = \mathrm{NQ'} : \mathrm{P'Q'}$, よって $\mathrm{P'Q'} = \frac{\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{NQ'}}{\mathrm{NP}}$, $\mathrm{OP} = a$, $\mathrm{OQ} = b$ とする。$k = \mathrm{PQ} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\mathrm{NP} = \sqrt{a^2 + 1}$, $\mathrm{NQ} = \sqrt{b^2 + 1}$, $\mathrm{NQ'} = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$, $\mathrm{P'Q'} = \frac{k}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} = \frac{k}{\sqrt{(a^2+1)(k^2+1-a^2)}}$, $0 < a < k$ より $0 < a^2 < k^2$, 図より $k^2 + 1 < (a^2 + 1)(k^2 + 1 - a^2) \le (\frac{k^2}{2} + 1)^2$, $\frac{k}{\frac{k^2}{2}+1} \le \mathrm{P'Q'} < \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

(別解) O を原点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の向きにそれぞれ x, y, z 軸をとる。$\mathrm{P}(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $\mathrm{N}(0, 0, 1)$ とする $(a > 0,\ b > 0)$。$k = \mathrm{PQ} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\mathrm{NP} = \sqrt{a^2 + 1}$, (1) より $\mathrm{NP'} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\mathrm{OP'} = \sqrt{\mathrm{ON}^2 - \mathrm{NP'}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\angle\mathrm{POP'} = \angle\mathrm{ONP} = \theta$ とおくと，$\cos\theta = \frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{NP}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\sin\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{NP}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = (\mathrm{OP'}\cos\theta, 0, \mathrm{OP'}\sin\theta) = (\frac{a}{a^2+1}, 0, \frac{a^2}{a^2+1})$, 同様に $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = (0, \frac{b}{b^2+1} \frac{b^2}{b^2+1})$, $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} = (-\frac{a}{a^2+1}, \frac{b}{b^2+1}, \frac{b^2}{b^2+1} - \frac{a^2}{a^2+1})$, $|\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|^2 = (-\frac{a}{a^2+1})^2 + (\frac{b}{b^2+1})^2 + (\frac{a^2}{a^2+1} - \frac{b^2}{b^2+1})^2 = (\cdots)^2 + (\cdots)^2 + (\frac{a^2-b^2}{(a^2+1)(b^2+1)})^2 = \frac{a^2(b^2+1)^2 + b^2(a^2+1)^2 + (a^2-b^2)^2}{(a^2+1)^2(b^2+1)^2} = \frac{a^2b^2(a^2+b^2) + a^2 + b^2 + (a^2+b^2)^2}{(a^2+1)^2(b^2+1)^2} = \frac{(a^2+b^2)(a^2b^2+a^2+b^2+1)}{(a^2+1)^2(b^2+1)^2} = \frac{(a^2+b^2)(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)^2(b^2+1)^2} = \frac{a^2+b^2}{(a^2+1)(b^2+1)} = \frac{k^2}{(a^2+1)(k^2+1-a^2)}$, $\mathrm{P'Q'} = \frac{k}{\sqrt{(a^2+1)(k^2+1-a^2)}}$, $0 < a < k$ より $0 < a^2 < k^2$, $k^2 + 1 < (a^2 + 1)(k^2 + 1 - a^2) \le (\frac{k^2}{2} + 1)^2$, $\frac{k}{\frac{k^2}{2}+1} \le \mathrm{P'Q'} < \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

16. $f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1$, $f'(-1) = 2n + 1 - 1 = 2n$, 直線 l の方程式は $y = 2n(x+1)$, $g(x) = f(x) - 2n(x+1) = x^{2n+1} - x - 2n(x+1)$ とおく。$g'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 - 2n = (2n+1)(x^{2n} - 1)$, $x \le -1$, $x \ge 1$ のとき $g'(x) \ge 0$, $-1 \le x \le 1$ のとき $g'(x) \le 0$, $g(-1) = 0$, $g(1) = -4n < 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, 増減表から，$g(x) = 0$ となる x が $x = -1$ 以外にただ 1 つ存在する。よって直線 l と曲線 $y = f(x)$ は A 以外にただ 1 つの共有点をもつ。$g(1 + \sqrt{2/n}) = (1 + \sqrt{2/n})^{2n+1} - (2n+1)(1 + \sqrt{2/n}) - 2n = \sum_{k=0}^{2n+1} {}_{2n+1}\mathrm{C}_k(\sqrt{2/n})^k - (2n+1)\sqrt{2/n} - 4n - 1 = 1 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1\sqrt{2/n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2(\sqrt{2/n})^2 + \sum_{k=3}^{2n+1} {}_{2n+1}\mathrm{C}_k(\sqrt{2/n})^k - (2n+1)\sqrt{2/n} - 4n - 1 = 1 + (2n+1)\sqrt{2/n} + \frac{1}{2}(2n+1)2n2/n + \sum_{k=3}^{2n+1}(\sqrt{2/n})^k - (2n+1)\sqrt{2/n} - 4n - 1 = 2 + \sum_{k=3}^{2n+1}(\sqrt{2/n})^k > 0$。一方 $g(1) < 0$。よって $g(x) = 0$ の $x = -1$ 以外の解 t_n は $1 < t_n < 1 + \sqrt{2/n}$ を満たす。

(2) $S_n = \int_{-1}^{t_n}\{2n(x+1) - (x^{2n+1} - x)\}dx = [2nx + \frac{2n+1}{2}x^2 - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}]_{-1}^{t_n} = 2n(t_n + 1) + \frac{2n+1}{2}({t_n}^2 - 1) - \frac{1}{2n+2}({t_n}^{2n+2} - 1)$, $\frac{S_n}{n} = 2(t_n + 1) + \frac{2n+1}{2n}({t_n}^2 - 1) - \frac{{t_n}^{2n+2}-1}{2n(n+1)}$, (1) より，$n \to \infty$ のとき $t_n \to 1$, t_n は $g(x) = 0$ の解であるから，${t_n}^{2n+1} - t_n = 2n(t_n + 1)$, よって ${t_n}^{2n+2} = t_n \cdot \{t_n + 2n(t_n + 1)\}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\{2(t_n + 1) + (1 + \frac{1}{2n})({t_n}^2 - 1) - \frac{t_n(t_n/n + 2(t_n+1))}{2(n+1)}\} = 2(1 + 1) + (1 + 0)(1 - 1) - \frac{1(0+2(1+1))}{\infty} = 4$

17. (1) $S(N) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n)(1 + p)(1 + q) = (2^{n+1} - 1)(1 + p)(1 + q)$, $\frac{S(N)}{N} = \frac{(2^{n+1}-1)(1+p)(1+q)}{2^n pq} = (2 - \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{p})(1 + \frac{1}{q})$, $p \ge 3$, $q \ge 5$ だから $1 + \frac{1}{p} \le \frac{4}{3}$, $1 + \frac{1}{q} \le \frac{6}{5}$, また，$2 - \frac{1}{2^n} < 2$, よって $\frac{S(N)}{N} < 2\frac{4}{3}\frac{6}{5} = \frac{16}{5} < 4$

(2) $S(N) = 2N$ と仮定すると $(2^{n+1} - 1)(1 + p)(1 + q) = 2 \cdot 2^n pq$, $(2^{n+1} - 1)(1 + p)(1 + q) = (2^{n+1} - 1)pq + pq$, $(2^{n+1} - 1)(p + q + 1) = pq$, p, q は素数で，$2^{n+1} - 1 > 1$, $p + q + 1 > 1$ だから，$(2^{n+1} - 1, p + q + 1) = (p, q)$

または (q,p) である。しかし，$p+q+1=q$, $p+q+1=p$ はいずれも成り立たない。よって仮定は誤りである。$S(N)\neq 2N$

(3) $S(N)>N$ だから $k\geq 2$ である。(1) より $k<4$，(2) より $k\neq 2$ だから，$k=3$ である。$S(N)=3N$ とすると $(2^{n+1}-1)(1+p)(1+q)=3\cdot 2^npq\cdots$(a), $2^{n+1}-1<2^{n+1}$ であるから，$2^{n+1}(1+p)(1+q)>3\cdot 2^npq$, $\Leftrightarrow 2(1+p)(1+q)>3pq \Leftrightarrow pq-2p-2q<2 \Leftrightarrow (p-2)(q-2)<6$ p, q は素数で $2<p<q$ だから $(p,q)=(3,5)$, $(3,7)$, [1] $(p,q)=(3,5)$ のとき，(a) より，$(2^{n+1}-1)24=45\cdot 2^n \Leftrightarrow \cdot 2^n=8 \Leftrightarrow n=3$, $N=2^3\cdot 3\cdot 5=120$, [2] $(p,q)=(3,7)$ のとき，(a) より，$(2^{n+1}-1)32=63\cdot 2^n \Leftrightarrow 2^n=32 \Leftrightarrow n=5$, $N=2^5\cdot 3\cdot 7=672$, 以上より，$(k,N)=(3,120), (3,672)$

(別解) $(2^{n+1}-1)(1+p)(1+q)=3\cdot 2^npq$, $(2^{n+1}-1)(1+p)(1+q)=2^{n+1}pq+2^npq$, $(2^{n+1}-1)(1+p)(1+q)=(2^{n+1}-1)pq+(2^n+1)pq$, $(2^{n+1}-1)(p+q+1)=(2^n+1)pq\cdots$(a), $2^{n+1}-1$ と 2^n+1 の最大公約数 g は $g=1$ または 3 である (なぜなら $2^{n+1}-1=2(2^n+1)-3$ より g は 3 の約数である)。n が偶数のとき $g=1$，n が奇数のとき $g=3$ である。

[1] n が偶数のとき，2^n+1 と $2^{n+1}-1$ は互いに素である。2^n+1 は $p+q+1$ を割り切る。$p+q+1=(2^n+1)m\cdots$(b) とおく (m は自然数)。$(2^{n+1}-1)m=pq\cdots$(c), (i) $m=1$ のとき，$p+q=2^n$, $2^{n+1}=pq+1$, $pq+1=2p+2q$, $(p-2)(q-2)=3$, $p<q$ より $(p,q)=(3,5)$, $2^n=8$, $n=3$, 不適。(ii) $m\neq 1$ のとき，(c) より $(2^{n+1}-1,m)=(p,q)$ または (q,p), $(2^n+1)m=\frac{p+3}{2}q$ または $\frac{q+3}{2}p$, (b) より $p+q+1=\frac{p+3}{2}q$ または $\frac{q+3}{2}p$, $2p+2q+2=pq+3q$ または $pq+3p$, $pq-2p+q=2$ または $pq+p-2q=2$ $(p+1)(q-2)=0$ または $(p-2)(q+1)=0$, 不適

[2] n が奇数のとき，$\frac{2^n+1}{3}$ と $\frac{2^{n+1}-1}{3}$ は互いに素である。$\frac{2^n+1}{3}$ は $p+q+1$ を割り切る。$p+q+1=\frac{2^n+1}{3}m\cdots$(b) とおく ($m$ は自然数)。(a) より $\frac{2^{n+1}-1}{3}m=pq\cdots$(c), (i) $m=1$ のとき，$p+q+1=\frac{2^n+1}{3}$, $\frac{2^{n+1}-1}{3}=pq$, $3(p+q+1)-1=\frac{3pq+1}{2}$, $pq=2p+2q+1$, $(p-2)(q-2)=5$, $p<q$ より $(p,q)=(3,7)$, $2^n=32$, $n=5$, $N=32\cdot 3\cdot 7=672$, (ii) $m\neq 1$ のとき，(c) より $(\frac{2^{n+1}-1}{3},m)=(p,q)$ または (q,p), $\frac{2^n+1}{3}m=\frac{p+1}{2}q$ または $\frac{q+1}{2}p$, (b) より $p+q+1=\frac{p+1}{2}q$ または $\frac{q+1}{2}p$ $2p+2q+2=pq+q$ または $pq+p$, $pq-2p-q=2$ または $pq-p-2q=2$, $(p-1)(q-2)=4$ または $(p-2)(q-1)=4$, $p<q$ より $(p,q)=(3,5)$, $m=3$, $2^n=8$, $n=3$, $N=8\cdot 3\cdot 5=120$

18. (1)$(z_2-z_1)^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2$, 解と係数の関係から $z_1+z_2=\alpha$, $z_1z_2=1$, $(z_2-z_1)^2=\alpha^2-4$, 同様に $(z_4-z_3)^2=(i\alpha)^2-4=-\alpha^2-4$

(2) $\alpha\neq\pm 2$ だから $z_1\neq z_2$, $\alpha\neq\pm 2i$ だから $z_3\neq z_4$, 条件から $\arg\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}=\pm 45^\circ$ または $\pm 135^\circ$，よって $\arg(\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1})^2=\pm 90^\circ$, (1) から $\arg\frac{-\alpha^2-4}{\alpha^2-4}=\pm 90^\circ$, すなわち $\frac{\alpha^2+4}{\alpha^2-4}$ が純虚数である。$\overline{(\frac{\alpha^2+4}{\alpha^2-4})}=-\frac{\alpha^2+4}{\alpha^2-4}$, $\frac{\bar{\alpha}^2+4}{\bar{\alpha}^2-4}=-\frac{\alpha^2+4}{\alpha^2-4}$, $(\bar{\alpha}^2+4)(\alpha^2-4)=-(\bar{\alpha}^2-4)(\alpha^2+4)$, $|\alpha|^4-4\bar{\alpha}^2+4\alpha^2-16=-|\alpha|^4-4\bar{\alpha}^2+4\alpha^2+16$, $|\alpha|^4=16$, $|\alpha|=2$, よって α は中心が原点で半径が 2 の円を描く。ただし $\alpha\neq\pm 2$, $\alpha\neq\pm 2i$ だから，4 点 2, -2, $2i$, $-2i$ を除く。

19. $x^a+y^a=1$, 両辺を x で微分して，$ax^{a-1}+ay^{a-1}y'=0$, $y'=-(x/y)^{a-1}$, P の x 座標を t とおく $(0<t<1)$, y 座標は，$t^a+y^a=1$ から $y=(1-t^a)^{1/a}$, 接線の傾きは $y'=-(t/(1-t^a)^{1/a})^{a-1}=-(1-t^a)^{(1-a)/a}/t^{1-a}$, 接線の方程式は $y=-\{(1-t^a)^{(1-a)/a}/t^{1-a}\}(x-t)+(1-t^a)^{1/a}=-\{(1-t^a)^{(1-a)/a}/t^{1-a}\}x+(1-t^a)^{(1-a)/a}t^a+(1-t^a)^{1/a}=-\{(1-t^a)^{(1-a)/a}/t^{1-a}\}x+(1-t^a)^{(1-a)/a}$, 接線の x 切片は，$0=-\{(1-t^a)^{(1-a)/a}/t^{1-a}\}x+(1-t^a)^{(1-a)/a}$ から $x=t^{1-a}$, y 切片は $(1-t^a)^{(1-a)/a}$, 円錐の体積は $V=\frac{1}{3}\pi y^2x=\frac{1}{3}\pi(1-t^a)^{2(1-a)/a}t^{1-a}$, $V'/V=\frac{2(1-a)}{a}\frac{-at^{a-1}}{1-t^a}+\frac{1-a}{t}=\frac{1-a}{t(1-t^a)}(1-3t^a)$, $V'=0$ とすると $t=(\frac{1}{3})^{1/a}$, $t=(\frac{1}{3})^{1/a}$ のとき，V の最大値は $\frac{1}{3}\pi(1-\frac{1}{3})^{2(1-a)/a}(\frac{1}{3})^{(1-a)/a}=\frac{1}{3}\pi(\frac{4}{27})^{(1-a)/a}$, $\mathrm{P}((\frac{1}{3})^{1/a},(\frac{2}{3})^{1/a})$

(別解) $t^a=u$ とおくと $V=\frac{1}{3}\pi(1-u)^{2(1-a)/a}u^{(1-a)/a}=\frac{1}{3}\pi\{(1-u)^2u\}^{(1-a)/a}=\frac{1}{3}\pi f(u)^{(1-a)/a}$ とおく。$f'(u)=1-4u+3u^2=(u-1)(3u-1)$, $u=\frac{1}{3}$ のとき，すなわち $t=(\frac{1}{3})^{1/a}$ のとき，$f(u)$ の最大値は $f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$,

20. (1) 4 枚のカードは 1,1,2,2 である。4 枚から同じ数字のカード 2 枚を取り出す確率は $\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$。これが起こった後，残り 2 枚のカードは同じ数字になる。よって，求める確率 p_n は，$n-2$ 回目まで異なる数字のカード 2 枚を取り出し，$n-1$ 回目に同じ数字のカード 2 枚を取り出す確率である $(n\geq 2)$。$p_n=(1-\frac{1}{3})^{n-2}(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-2}$

(2) 6 枚のカードは 1,1,2,2,3,3 である。6 枚から同じ数字のカード 2 枚を取り出す確率は $\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$。これが起こった後，残り 4 枚のカードがなくなるまでに m 回操作する確率は，(1) から p_m である。k 回目に初めて同じ数字のカード 2 枚を取り出し $(1\leq k\leq n-2)$，n 回目にすべてのカードがなくなるとすると，$m=n-k$ である。よって求める確率 q_n は，$q_n=\sum_{k=1}^{n-2}(1-\frac{1}{5})^{k-1}\frac{1}{5}p_{n-k}=\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{n-2}(\frac{4}{5})^{k-1}(\frac{2}{3})^{n-k-2}=\frac{1}{10}(\frac{2}{3})^{n-2}\sum_{k=1}^{n-2}(\frac{6}{5})^{k-1}=\frac{1}{10}(\frac{2}{3})^{n-2}\frac{(\frac{6}{5})^{n-2}-1}{\frac{6}{5}-1}=\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^{n-2}-(\frac{2}{3})^{n-2})$

(別解) 1 回目に同じ数字のカード 2 枚を取り出す場合と，異なる数字のカード 2 枚を取り出す場合に分けて考えて，$q_n=\frac{4}{5}q_{n-1}+\frac{1}{5}p_{n-1}$ が成り立つ。$q_n=\frac{4}{5}q_{n-1}+\frac{1}{15}(\frac{2}{3})^{n-3}$ $(n\geq 3, q_2=0)$，$(\frac{3}{2})^n q_n=\frac{6}{5}(\frac{3}{2})^{n-1}q_{n-1}+\frac{9}{40}$，$(\frac{3}{2})^n q_n+\frac{9}{8}=\frac{6}{5}\{(\frac{3}{2})^{n-1}q_{n-1}+\frac{3}{4}\}$，$(\frac{3}{2})^n q_n+\frac{9}{8}=(\frac{3}{2}q_2+\frac{9}{8})(\frac{6}{5})^{n-2}$，$q_n=(\frac{2}{3})^n\frac{9}{8}\{(\frac{6}{5})^{n-2}-1\}=\frac{1}{2}\{(\frac{4}{5})^{n-2}-(\frac{2}{3})^{n-2}\}$

21. $\alpha z=w$ とおく。$z=w/\alpha$ $(\alpha\neq 0)$ を与式に代入して $|w/\alpha-i|\leq 1$，$|w-i\alpha|\leq|\alpha|$，w は中心が $i\alpha$，半径が $|\alpha|$ の円の内部と周上を動く ($\alpha=0$ のときも成り立つ)。条件から，この円が領域 $-1\leq x\leq 1$ に含まれるから，$-1+$ (半径) $\leq$ 中心のx座標 $\leq 1-$ (半径)，$\alpha=x+iy$ (x, y は実数) とおくと，$i\alpha=-y+ix$，$|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2}$，$-1+\sqrt{x^2+y^2}\leq -y\leq 1-\sqrt{x^2+y^2}$，$\sqrt{x^2+y^2}\leq 1-y$ かつ $\sqrt{x^2+y^2}\leq 1+y$，$1-y\geq 0$ かつ $x^2+y^2\leq(1-y)^2$ かつ $1+y\geq 0$ かつ $x^2+y^2\leq(1+y)^2$，$-1\leq y\leq 1$ かつ $x^2-1\leq 2y\leq 1-x^2$，$\frac{x^2-1}{2}\leq y\leq\frac{1-x^2}{2}$

22. H の第 4 象限の部分は $y=-\sqrt{x^2+1}$ である。$y'=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，P における法線の傾きは $\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$，法線の方程式は $y=\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}(x-s)-\sqrt{s^2+1}=\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}x-2\sqrt{s^2+1}$，これが Q$(t,kt)$ を通るから $kt=\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}t-2\sqrt{s^2+1}$，$(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}-k)t=2\sqrt{s^2+1}$，$t=\frac{2s\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}-ks}$，$t>0$, $s>0$ であるから，$\sqrt{s^2+1}-ks>0$，$ks<\sqrt{s^2+1}$，$ks>0$ だから，両辺を 2 乗して $k^2s^2<s^2+1$，$(k^2-1)s^2<1$，[1] $k^2-1>0$ のとき，すなわち $k>1$ のとき，$s^2<\frac{1}{k^2-1}$，$0<s<\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$，[2] $k^2-1\leq 0$ のとき，すなわち $0<k\leq 1$ のとき，s はすべての正の実数をとり得る。

(2) $f(s)=\frac{2s\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}-ks}=\frac{2s}{1-ks(s^2+1)^{-1/2}}$，$f'(s)=\frac{2(1-ks(s^2+1)^{-1/2})-2s(-k(s^2+1)^{-1/2}+ks^2(s^2+1)^{-3/2})}{(1-ks(s^2+1)^{-1/2})^2}=\frac{2(1-ks(s^2+1)^{-1/2})+2ks(s^2+1}{(1-ks(s^2+1)^{-}}$ $\frac{2(1-ks(s^2+1)^{-1/2})+2ks(s^2+1)^{-3/2}}{(1-ks(s^2+1)^{-1/2})^2}=\frac{2-2ks(s^2+1)^{-1/2}(1-(s^2+1)^{-1}}{(1-ks(s^2+1)^{-1/2})^2}=\frac{2(1-ks^3(s^2+1)^{-3/2})}{(1-ks(s^2+1)^{-1/2})^2}$，[1] $0<k\leq 1$ のとき，すべての正の実数 s に対して $\sqrt{s^2+1}>s$，$(s^2+1)^{3/2}>s^3$，$s^3(s^2+1)^{-3/2}<1$，$ks^3(s^2+1)^{-3/2}<1$，$1-ks^3(s^2+1)^{-3/2}>0$，よって $f'(s)>0$，[2] $k>1$ のとき，(1) より，$ks<\sqrt{s^2+1}$，$s(s^2+1)^{-1/2}<\frac{1}{k}$，$s^3(s^2+1)^{-3/2}<\frac{1}{k^3}$，$1-ks^3(s^2+1)^{-3/2}>1-\frac{1}{k^2}>0$，よって $f'(s)>0$,

(3) $L(t)^2=(t-s)^2+(kt+\sqrt{s^2+1})^2$，$(L(t)/t)^2=(1-\frac{s}{t})^2+(k+\sqrt{(\frac{s}{t})^2+(\frac{1}{t})^2})^2$，よって $\lim_{t\to\infty}\frac{s}{t}$ を求めればよい。$t\to\infty$ のとき s の極限を調べる。$f'(s)>0$ より，$t=f(s)$ は単調に増加する。[1] $0<k\leq 1$ のとき，$t=f(s)=\frac{2s}{1-ks(s^2+1)^{-1/2}}$ において，$s\to\infty$ のとき $t\to\infty$ となるから，$t\to\infty$ のとき $s\to\infty$ である。よって $dlim_{t\to\infty}s/t=\lim_{s\to\infty}\frac{1-ks(s^2+1)^{-1/2}}{2}=\frac{1-k}{2}$，よって $\lim_{t\to\infty}L(t)/t=\sqrt{(1-\frac{1-k}{2})^2+(k+\sqrt{(\frac{1-k}{2})^2+0})^2}=\sqrt{(\frac{1+k}{2})^2+(\frac{1+k}{2})^2}=\frac{1+k}{\sqrt{2}}$，[2] $k>1$ のとき，$t=f(s)=\frac{2s}{1-ks(s^2+1)^{-1/2}}$ において，$s\to(k^2-1)^{-1/2}-0$ のとき，分母 $\to+0$，$t\to\infty$ となるから，$t\to\infty$ のとき $s\to(k^2-1)^{-1/2}-0$ である。よって $\lim_{t\to\infty}s/t=\lim_{s\to(k^2-1)^{-1/2}-0}\frac{1-ks(s^2+1)^{-1/2}}{2}=0$，よって $\lim_{t\to\infty}L(t)/t=\sqrt{(1-0)^2+(k+0)^2}=\sqrt{1+k^2}$

23. (1) P(x,y) とする。P の移動前後における $x+y$ の変化量は f_1, f_2 のとき 8，f_3, g_4 のとき -2，f_4, g_3 のとき 2，g_1, g_2 のとき -8，いずれの場合も，$x+y$ の偶奇は移動前後で変化しない。P$(0,0)$ のとき $x+y=0+0$ は偶数だから，$x+y$ が奇数である点は到達不可能である。よって $(1,0)$ は到達不可能点である。

(2) f_i, g_i $(i=1,2,3,4)$ をそれぞれ m_i 回，n_i 回行った後の点 P の座標を (x,y) とすると $x=m_1a+m_2b-m_3b-m_4a-n_1a-n_2b+n_3b+n_4a=(m_1-m_4-n_1+n_4)a+(m_2-m_3-n_2+n_3)b\cdots$(a)，$y=m_1b+m_2a+m_3a+m_4b-n_1b-n_2a-n_3a-n_4b=(m_2+m_3-n_2-n_3)a+(m_1+m_4-n_1-n_4)b\cdots$(b)，任意の (x,y) に対して，(a)(b) を満たす 0 以上の整数 m_i, n_i $(i=1,2,3,4)$ が存在することを示す。a, b は互いに素だから，$ax_0+by_0=1$ を満たす整数 (x_0,y_0) が存在する。これの両辺に x または y をかけて，$x_0x=s$，$y_0x=t$, $x_0y=u$, $y_0y=v$ とおくと $as+bt=x$，$au+bv=y$ である。よって，$s=m_1-m_4-n_1+n_4$，$t=m_2-m_3-n_2+n_3$，$u=m_2+m_3-n_2-n_3$，$v=m_1+m_4-n_1-n_4$ を満たす 0 以上の整数 m_i,

n_i $(i=1,2,3,4)$ が存在することを示せばよい。$s+v=2(m_1-n_1)\cdots$(c)，$v-s=2(m_4-n_4)\cdots$(d)，$t+u=2(m_2-n_2)\cdots$(e)，$u-t=2(m_3-n_3)\cdots$(f)，ここで s と v の偶奇は等しいとしてよい。なぜなら，s と v の偶奇が異なる場合，$a(s-b)+b(t+a)=x$，$a(u-b)+b(v+a)=y$ において，a と b の偶奇が異なるから，$s-b$ と $v+a$ の偶奇は等しい。$s-b,\ t+a,\ u-b,\ v+a$ を新たにそれぞれ $s,\ t,\ u,\ v$ とおくと，$as+bt=x,\ au+bv=y$ かつ s と v の偶奇は等しくなる。t と u の偶奇も等しいとしてよい。なぜなら，$s+t+u+v=(x+y)(x_0+y_0)$ において，[1] x_0 と y_0 の偶奇が等しければ $s+t+u+v$ は偶数だから t と u の偶奇も等しい。[2] x_0 と y_0 の偶奇が異なるならば，$a(x_0-b)+b(y_0+a)=1$ において，a と b は偶奇が異なるから，x_0-b と y_0+a の偶奇は等しい。$x_0-b,\ y_0+a$ を新たにそれぞれ $x_0,\ y_0$ とおくと $ax_0+by_0=1$ かつ x_0 と y_0 の偶奇が等しいから，[1] の場合と同じになる。以上より，$s+v,\ v-s,\ t+u,\ u-t$ はすべて偶数である。$s+v\geq 0$ のとき $(m_1,n_1)=(\frac{s+v}{2},0)$ は (c) を満たす。$s+v<0$ のとき $(m_1,n_1)=(0,-\frac{s+v}{2})$ は (c) を満たす。$v-s\geq 0$ のとき $(m_4,n_4)=(\frac{v-s}{2},0)$ は (d) を満たす。$v-s<0$ のとき $(m_4,n_4)=(0,-\frac{v-s}{2})$ は (d) を満たす。$t+u\geq 0$ のとき $(m_2,n_2)=(\frac{t+u}{2},0)$ は (e) を満たす。$t+u<0$ のとき $(m_2,n_2)=(0,-\frac{t+u}{2})$ は (e) を満たす。$u-t\geq 0$ のとき $(m_3,n_3)=(\frac{u-t}{2},0)$ は (f) を満たす。$u-t<0$ のとき $(m_3,n_3)=(0,-\frac{u-t}{2})$ は (f) を満たす。以上より，任意の点 (x,y) は到達可能である。

24. 球の中心を $\mathrm{C}(0,0,b)$，半径を r とする $(0\leq b\leq a)$。r が最大のとき，球は平面 $z=a$ に接するから $r=a-b\cdots$(a)。K を平面 $z=t$ $(0\leq t\leq a)$ で切った断面を D とする。D の境界は曲線 $|xy|=t$ である (4 本の双曲線 $xy=\pm t$ からなる)。曲線上の z 軸に最も近い点は 4 点 $(\pm\sqrt{t},\pm\sqrt{t},t)$ である。この 4 点が xz 平面または yz 平面上にくるように，K を z 軸の周りに 45° 回転すると，双曲線の式は $x^2-y^2=\pm 2t$ となる。回転後の K を平面 $y=0$ で切った断面を E とする。E の境界線は放物線 $x^2=2z$ である。r が最大のとき，球は放物線 $z=\frac{x^2}{2}$ に接する。接点を $\mathrm{T}(x,0,\frac{x^2}{2})$ とおく。$\mathrm{CT}^2=x^2+(\frac{x^2}{2}-b)^2=\frac{1}{4}x^4-(b-1)x^2+b^2=\frac{1}{4}(x^2-2(b-1))^2+2b-1=f(x)$ とおく。T が接点のとき $f(x)$ は最小となる。[1] $b<1$ のとき，$f(x)$ は $x=0$ で最小値 b^2 をとる。このとき $r=b$。これと (a) から $r=a-r$ すなわち $r=\frac{a}{2}$。$r<1$ から $a<2$。[2] $b\geq 1$ のとき，$f(x)$ は $x^2=2(b-1)$ で最小値 $2b-1$ をとる。このとき $r=\sqrt{2b-1}$。これと (a) から $r=a-\frac{r^2+1}{2}$ すなわち $(r+1)^2=2a$，$r=\sqrt{2a}-1$。$r\geq 1$ から $a\geq 2$。以上より，$0<a<2$ のとき $r=\frac{a}{2}$，$a\geq 2$ のとき $r=\sqrt{2a}-1$。

25. (1) $y=1-x^2$，$y'=-2x$，法線 l の方程式は $y=\frac{1}{2t}(x-t)+1-t^2=\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}-t^2$，$l$ と y 軸の交点は $(0,\frac{1}{2}-t^2)$，条件から $\frac{1}{2}-t^2>0$ よって $0<t<\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) l と OP のなす角を θ とする。l と x 軸の正の向きとのなす角を α とする。OP と x 軸の正の向きとのなす角を β とする。$\theta=\beta-\alpha$ である。$\tan\alpha=\frac{1}{2t}$，$\tan\beta=\frac{1-t^2}{t}$，$\tan\theta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1-t^2}{t}-\frac{1}{2t}}{1+\frac{1}{2t}\frac{1-t^2}{t}}=\frac{\frac{1}{2t}-t}{\frac{1}{2}(\frac{1}{t^2}+1)}=\frac{t(1-2t^2)}{1+t^2}$，PQ と x 軸の正の向きのなす角は $\alpha-\theta$ であるから，PQ の傾きは $\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\frac{\frac{1}{2t}-\frac{t(1-2t^2)}{1+t^2}}{1+\frac{1}{2t}\frac{t(1-2t^2)}{1+t^2}}=\frac{1+t^2-2t^2(1-2t^2)}{2t(1+t^2)+t(1-2t^2)}=\frac{1-t^2+4t^4}{3t}$，PQ の方程式は $y=\frac{1-t^2+4t^4}{3t}(x-t)+1-t^2$，$x=0$ のとき $y=Y$ だから $Y=-\frac{1-t^2+4t^4}{3}+1-t^2=\frac{2-2t^2-4t^4}{3}=\frac{2}{3}(1+t^2)(1-2t^2)$，(1) より $0<t^2<\frac{1}{2}$，この範囲で Y は単調に減少する。$t^2\to+0$ のとき $Y\to\frac{2}{3}$，$t^2\to\frac{1}{2}$ のとき $Y\to+0$，よって $0<Y<\frac{2}{3}$

(別解) 直線 OP の方程式は $y=\frac{1-t^2}{t}x$，$(1-t^2)x-ty=0$，直線 PQ の方程式は $y=1-t^2-Ytx+Y$ $(1-t^2-Y)x-ty+tY=0$，l 上の点を $\mathrm{R}(0,\frac{1}{2}-t^2)$ とする。R と直線 OP の距離と R と直線 PQ の距離が等しいから，$\frac{|-t(\frac{1}{2}-t^2)|}{\sqrt{(1-t^2)^2+(-t)^2}}=\frac{|-t(\frac{1}{2}-t^2)+tY|}{\sqrt{(1-t^2-Y)^2+(-t)^2}}$，両辺を 2 乗して $t^2(\frac{1}{2}-t^2)^2\{(1-t^2-Y)^2+t^2\}=t^2(\frac{1}{2}-t^2-Y)^2\{(1-t^2)^2+t^2\}$，$t>0$ だから $(\frac{1}{2}-t^2)^2\{(1-t^2)^2-2Y(1-t^2)+Y^2+t^2\}=\{(\frac{1}{2}-t^2)^2-2Y(\frac{1}{2}-t^2)+Y^2\}\{(1-t^2)^2+t^2\}$ $\{Y^2-2Y(1-t^2)\}(\frac{1}{2}-t^2)^2=\{Y^2-2Y(\frac{1}{2}-t^2)\}\{(1-t^2)^2+t^2\}$，P と Q は l に関して反対側にあるから $Y>0$ である。$\{Y-2(1-t^2)\}(\frac{1}{2}-t^2)^2=\{Y-2(\frac{1}{2}-t^2)\}\{(1-t^2)^2+t^2\}$，$Y\{(1-t^2)^2+t^2-(\frac{1}{2}-t^2)^2\}=2(\frac{1}{2}-t^2)\{(1-t^2)^2+t^2\}-2(1-t^2)(\frac{1}{2}-t^2)^2$，$Y\{1-2t^2+t^4+t^2-\frac{1}{4}+t^2-t^4\}=2t^2(\frac{1}{2}-t^2)+2(\frac{1}{2}-t^2)(1-t^2)\{(1-t^2)-(\frac{1}{2}-t^2)\}$，$\frac{3}{4}Y=2t^2(\frac{1}{2}-t^2)+(\frac{1}{2}-t^2)(1-t^2)$，$Y=\frac{4}{3}(\frac{1}{2}-t^2)(1+t^2)$，

26. (1) q_1 について，[1] A が 1 番，B が 2 番のカードを取る場合と，[2] B が 1 番，C が 2 番のカードを取る場合がある。A が 1 番のカードを取る確率は $\frac{1}{n}$，A が 1 番のカードを取ったとき，B が 2 番のカードを取る確率は $\frac{1}{n-1}$，よって [1] の確率は $\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}$，同様に [2] の確率も $\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}$，$q_1=\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{+}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{2}{n(n-1)}$，

q_2 について，[1] A が 1 または 2 番，B が 3 番のカードを取り，A が 1 試合目で勝つ場合と，[2] B が 1 または 2 番，A が 3 番のカードを取り，B が 1 試合目で勝つ場合がある。$q_2 = \frac{2}{n} \times \frac{1}{n-1} \times p + \frac{1}{n} \times \frac{2}{n-2} \times p = \frac{4p}{n(n-1)}$。

(2) k 試合目に A と B が試合を行う確率を q_k とすると，$P = \sum_{k=1}^{n-1} q_k$ である。q_k について，[1] A が $k+1$ 番のカードを取り，B が $k-1$ 試合目で勝つ場合と，[2] B が $k+1$ 番のカードを取り，A が $k-1$ 試合目で勝つ場合がある $(k \geq 2)$。[1] と [2] の確率は等しい。A が $k+1$ 番のカードを取ったとき，B が $k-1$ 試合目に出場する確率を x_{k-1} とする。$q_k = \frac{1}{n} x_{k-1} \times p \times 2 = \frac{2p}{n} x_{k-1}$，$x_{k-1}$ について，(i) B が k 番のカードを引く場合と，(ii) B が $k-2$ 試合目に出場して勝つ場合がある $(k \geq 3)$。$x_{k-1} = \frac{1}{n-1} + x_{k-2} \times p$，$x_{k-1} - \frac{1}{(n-1)(1-p)} = p\{x_{k-2} - \frac{1}{(1-p)n}\}$，$x_{k-1} - \frac{1}{(n-1)(1-p)} = \{x_1 - \frac{1}{(n-1)(1-p)}\}p^{k-2}$，$x_1$ は，A が $k+1$ 番のカードを取ったとき，B が 1 番または 2 番のカードを取る確率であるから，$x_1 = \frac{2}{n-2}$，$x_{k-1} = \frac{1}{(n-1)(1-p)} + \{\frac{2}{n-1} - \frac{1}{(n-1)(1-p)}\}p^{k-2} = \frac{1}{(n-1)(1-p)} + \frac{1-2p}{(n-1)(1-p)} p^{k-2}$ ($k=2$ のときも成り立つ)，$q_k = \frac{2p}{n(n-1)(1-p)} + \frac{2(1-2p)}{n(n-1)(1-p)} p^{k-1}$ ($k=1$ のときも成り立つ)，$P = \sum_{k=1}^{n-1} q_k = \frac{2p}{n(1-p)} + \frac{2(1-2p)}{n(n-1)(1-p)} \frac{1-p^{n-1}}{1-p} = \frac{2p}{n(1-p)} + \frac{2(1-2p)(1-p^{n-1})}{n(n-1)(1-p)^2}$，

27. (1) $\frac{1}{p} = 0.a_1a_2\cdots$ の両辺を 10^{2m} 倍して，$\frac{10^{2m}}{p} = a_1a_2\cdots a_{2m}.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots$，辺々を引いて，$\frac{10^{2m}-1}{p} = a_1a_2\cdots a_{2m} + 0.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots - 0.a_1a_2\cdots$ (a)，ここで $10^{2m}-1 = (10^m+1)(10^m-1)$ は p で割り切れるから，(a) 左辺は整数である。(a) で $a_1a_2\cdots a_{2m}$ は整数だから，$0.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots - 0.a_1a_2\cdots$ は整数である。$0 \leq 0.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots \leq 1$，$0 < 0.a_1a_2\cdots < 1$ である (なぜなら $\frac{1}{p}$ は整数でない) から，$-1 < 0.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots 0.a_1a_2\cdots < 1$，よって $0.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots - 0.a_1a_2\cdots = 0$，すなわち $0.a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots = 0.a_1a_2\cdots$，これの両辺はともに無限小数であるから，すべての自然数 k について $a_{2m+k} = a_k$ である。

(2) 両辺を 10^m 倍して，$\frac{10^m}{p} = a_1a_2\cdots a_m.a_{m+1}a_{m+2}\cdots$，辺々を足して，$\frac{10^m+1}{p} = a_1a_2\cdots a_m + 0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots + 0.a_1a_2\cdots$ (b)，10^m+1 は p で割り切れるから，(b) 左辺は整数である。(b) で $a_1a_2\cdots a_m$ は整数だから，$0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots + 0.a_1a_2\cdots$ は整数である。$0 \leq 0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots \leq 1$，$0 < 0.a_1a_2\cdots < 1$ である (なぜなら $\frac{1}{p}$ は整数でない) から，$0 < 0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots + 0.a_1a_2\cdots < 2$，よって $0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots + 0.a_1a_2\cdots = 1$，すなわち $0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots + 0.a_1a_2\cdots = 0.99999\cdots$，$0.a_{m+1}a_{m+2}\cdots$ と $0.a_1a_2\cdots$ はともに無限小数であるから，すべての自然数 k について $a_{m+k} + a_k = 9$ である。

28. (1) 与式 $= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$，$|\alpha| = 1$ より，$\alpha\bar{\alpha} = 1$，すなわち $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$，同様に $\frac{1}{\beta} = \bar{\beta}$，$\frac{1}{\gamma} = \bar{\gamma}$，よって与式 $= \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = \bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$，

(2) 与式 $= (\omega-\gamma)(\omega-\alpha)(\omega-\alpha) = \omega^3 - (\alpha+\beta+\gamma)\omega^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\omega - \alpha\beta\gamma = \omega^3 - \omega\omega^2 + \alpha\beta\gamma\bar{\omega}\omega - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma(|\omega|^2 - 1) = 0$，

(3) A, B, C はいずれも単位円 $|z| = 1$ 上にある。(2) より，[1] $\alpha + \beta = 0$ または [2] $\beta + \gamma = 0$ または [3] $\gamma + \alpha = 0$ である。[1] のとき，$\gamma = \omega$ であり，AB の中点は O(0) である。すなわち，AB は単位円の直径であるから，$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ である。同様に，[2] のとき $\alpha = \omega$，$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$，[3] のとき $\beta = \omega$，$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$，いずれの場合も，単位円の直径を斜辺とし，$\omega$ を直角の頂点する直角三角形である。

29. (1) 平面 L の方程式は，$z = -\tan\theta(x-1)\cdots$(a)，平面 $z = t$ で立体 W を切った断面を W′，円盤 D を切ってできる線分を D′ とする。W′ は D′ を z 軸の周りに 1 回転させてできる円環である。D′ は，平面 L と平面 $z = t$ の交線 l 上にある。(a) と $z = t$ を連立して，l を表す式は，$x = 1 - \frac{t}{\tan\theta}$，$z$ 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,t)$ から l に引いた垂線の足を Q，l と球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ の交点を R とすると，W′ の面積 S は，$S = \pi(\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PQ}^2) = \pi\mathrm{QR}^2$，$l$ の式と球面の式を連立して，$(1 - \frac{t}{\tan\theta})^2 + y^2 + t^2 = 1$，$y^2 = 1 - t^2 - (1 - \frac{t}{\tan\theta})^2$，すなわち $\mathrm{QR}^2 = \frac{t(\sin 2\theta - t)}{\sin^2\theta}$，$\mathrm{QR}^2 \geq 0$ だから $0 \leq t \leq \sin 2\theta$，よって $S = \pi\frac{t(\sin 2\theta - t)}{\sin^2\theta}$，$V = \int_0^{\sin 2\theta} S\,dt = \frac{\pi}{\sin^2\theta}\int_0^{\sin 2\theta} t(\sin 2\theta - t)dt = \frac{\pi}{\sin^2\theta}\frac{1}{6}(\sin 2t - 0)^3 = \frac{\pi}{6}\frac{(2\sin\theta\cos\theta)^3}{\sin^2\theta} = \frac{4}{3}\pi\sin\theta\cos^3\theta$

(2) $\frac{dV}{d\theta} = \frac{4}{3}\pi(\cos^4\theta - 3\sin^2\theta\cos^2\theta) = \frac{4}{3}\pi\cos^4\theta(1 - 3\tan^2\theta)$，$\frac{dV}{d\theta} = 0$ とすると $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\theta = \frac{\pi}{6}$，このとき V の最大値は $\frac{4}{3}\pi\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

30. (1) $g(0) = 0$ から $a + b = 0$，$g(1) = 1$ から $ae + \frac{b}{e} = 1$，これらを解いて $a = \frac{1}{e-e^{-1}}$，$b = -\frac{1}{e-e^{-1}}$，$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e-e^{-1}}$，$g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e-e^{-1}}$，$I[g] = \int_0^1\{(\frac{e^x - e^{-x}}{e-e^{-1}})^2 + (\frac{e^x + e^{-x}}{e-e^{-1}})^2\}dx = \frac{2}{(e-e^{-1})^2}\int_0^1(e^{2x} + e^{-2x})dx = \frac{1}{(e-e^{-1})^2}[e^{2x} - e^{-2x}]_0^1 = \frac{e^2 - e^{-2}}{(e-e^{-1})^2} = \frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}$

(2)(i) 部分積分して与式左辺$=[F(x)g'(x)]_0^1-\int_0^1 F(x)g''(x)dx+\int_0^1 F(x)g(x)dx$，$F(0)=f(0)-g(0)=0$，$F(1)=f(1)-g(1)=1-1=0$，$g''(x)=g(x)$ に注意して，与式左辺$=0-\int_0^1 F(x)g(x)dx+\int_0^1 F(x)g(x)dx=0$

(2)(ii) $f(x)=g(x)+F(x)$ であるから，$I[f]=\int_0^1\{(g(x)+F(x))^2+(g'(x)+F'(x))^2\}dx=\int_0^1\{g(x)^2+g'(x)^2\}dx+2\int_0^1\{g(x)F(x)+g'(x)F'(x))dx+\int_0^1\{F(x)^2+F'(x)^2\}dx=I[g]+I[F]$，$F(x)^2+F'(x)^2\geq 0$ であるから，$I[F]\geq 0$，よって $I[f]\ geqI[g]$，等号成立は恒に $F(x)^2+F'(x)^2=0$ であるとき，すなわち恒に $F(x)=F'(x)=0$ であるとき，すなわち $f(x)$ と $g(x)$ が同じ関数であるとき。

31. $\log(x^2+a^2)=0$ とすると $x^2+a^2=1$，$x=\pm\sqrt{1-a^2}=\pm\alpha$ とおく，$S(a)=2\int_0^\alpha\{-\log(x^2+a^2)\}dx=-2\int_0^\alpha(x)'\log(x^2+a^2)dx=-2[x\log(x^2+a^2)]_0^\alpha+2\int_0^\alpha x\frac{2x}{x^2+a^2}dx=-2(\alpha\log 1-0)+4\int_0^\alpha(1-\frac{a^2}{x^2+a^2})dx=4[x]_0^\alpha-4\int_0^\alpha\frac{a^2}{x^2+a^2}dx$，$x=a\tan\theta$ とおく。$dx=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$，$\frac{a^2}{x^2+a^2}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$，$a\tan\theta=\alpha$ をみたす θ を β $(0<\beta\frac{\pi}{4})$ とおく。$\tan\beta=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ である。$S(a)=4\alpha-4\int_0^\beta\cos^2\theta\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta=4\alpha-4a\int_0^\beta d\theta=4\alpha-4a[\theta]_0^\beta=4\alpha-4a\beta$，$a\to+0$ のとき $\alpha\to 1$，$\tan\beta\to\infty$，$\beta\to\frac{\pi}{2}$ であるから，$A=4-4\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2}=4$

(2) $B=\lim_{a\to+0}\frac{4\alpha-4a\beta-4}{a}=\lim_{a\to+0}\{4\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}-4\beta\}=\lim_{a\to+0}4\frac{1-a^2-1}{a(\sqrt{1-a^2}+1)}-4\frac{\pi}{2}=\lim_{a\to+0}4\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}+1}-2\pi=0-2\pi=-2\pi$

32. (1) 求める確率を p_n とおく。$n-1$ 回の T のうち，2 枚取り除く回が 1 回だけあり，1 枚だけ取り除く回が $n-2$ 回ある $(n\geq 2)$。[1] 1 回目に 1 枚だけ取り除く場合，1 回目は n を取り出す。残りの $n-1$ 枚のカードがなくなるまで，$n-2$ 回の T を行う確率は p_{n-1}，[2] 1 回目に 2 枚取り除く場合，1 回目は $n-1$ を取り出す。残り $n-2$ 枚のカードがなくなるまで，$n-2$ 回の T を行う確率は $\frac{1}{n-2}\times\frac{1}{n-3}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{(n-2)!}$，以上から $p_n=\frac{1}{n}p_{n-1}+\frac{1}{n}\frac{1}{(n-2)!}$ が成り立つ。$n!p_n=(n-1)!p_{n-1}+(n-1)$，$n$ を $n+1$ に代えて $(n+1)!p_{n+1}-n!p_n=n$，p_2 は，2 枚のカード 1,2 から 1 を取り出す確率だから $p_2=\frac{1}{2}$，$p_1=0$ とすると $n=1$ のときも成り立つ。$n!p_n=1!p_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$，$p_n=\frac{n(n-1)}{2n!}=\frac{1}{2(n-2)!}$

(2) 求める確率を q_n とおく。$n-2$ 回の T のうち，2 枚取り除く回が 2 回あり，1 枚だけ取り除く回が $n-4$ 回ある $(n\geq 4)$。[1] 1 回目に 1 枚だけ取り除く場合，1 回目は n を取り出す。残り $n-1$ 枚のカードがなくなるまで，$n-3$ 回の T を行う確率は q_{n-1}，[2] 1 回目に 2 枚取り除く場合，1 回目は $n-1$ を取り出す。残り $n-2$ 枚のカードがなくなるまで，$n-3$ 回の T を行う確率は p_{n-2}，以上から $q_n=\frac{1}{n}q_{n-1}+\frac{1}{n}p_{n-2}$ が成り立つ。$q_n=\frac{1}{n}q_{n-1}+\frac{1}{2n(n-4)!}$，$n!q_n=(n-1)!q_{n-1}+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3)$，$n$ を $n+1$ に代えて $(n+1)!q_{n+1}-n!q_n=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$，$q_4$ は，1,2,3,4 から 3 を取り出し，かつ，1,2 から 1 を取り出す確率だから $q_4=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，$q_3=0$ とすると，$n=3$ のときも成り立つ。$n!q_n=3!q_3+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{2}k(k-1)(k-2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-3}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}(n-3)(n-2)(n-1)n$，$q_n=\frac{1}{8(n-4)!}$

33. n の上 2 桁の数を a，下 2 桁の数を b とおく。$10\leq a\leq 99, 0\leq b\leq 99\cdots$(a)，$n=100a+b$，$f(n)=b^2-a^2$，$f(n)=n$ とすると $b^2-a^2=100a+b$，$(b-a)(a+b)=100a+b$，$(b-a)(a+b)=101a+b-a$，$(b-a)(a+b-1)=101a\cdots$(b)，101 は $(b-a)(a+b-1)$ を割り切る。101 は素数だから，101 は $b-a$ または $a+b-1$ を割り切る。(a) より $-99\leq b-a\leq 89$，101 が $b-a$ を割り切るとすると $b-a=0$，このとき (b) より $a=b=0$ となり，(a) に反する。よって 101 は $a+b-1$ を割り切る。(a) より $9\leq a+b-1\leq 197$，よって $a+b-1=101$，(b) より $b-a=a$ すなわち $b=2a$，よって $a=34$，$b=68$，すなわち $n=3468$

34. 与式から $a=z^3-3z^2+4z$，$f(x)=x^3-3x^2+4x$ とおく。$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$，実数 x に対して $f(x)$ は単調に増加するから，$f(z)=a$ はただ 1 つの実数解 $z=\alpha$ をもつ。$f(z)$ の係数は実数であるから，$f(z)=a$ は互いに共役な 2 つの虚数解 $z=\beta,\bar{\beta}$ をもつ。$f(2)=4$，$f(-2)=-28$ であるから，$-28<a<4$ のとき $|\alpha|<2$ である。解と係数の関係から $\alpha+\beta+\bar{\beta}=3\cdots\cdots$(a)，$\alpha\beta+\beta\bar{\beta}+\bar{\beta}\alpha=4\cdots\cdots$(b)，$\alpha\beta\bar{\beta}=a\cdots$(c)，$f(\alpha)=a$ から $a=\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha$，これと (c) から $\alpha|\beta|^2=\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha$，[1] $\alpha\neq 0$ のとき，$|\beta|^2=\alpha^2-3\alpha+4$，$|\beta|<2$ とすると，$|\beta|^2<4$ から $\alpha^2-3\alpha+4<4$，$\alpha(\alpha-3)<0$，$0<\alpha<3$ $(\alpha^2-3\alpha+4>0$ はつねに成り立つ)。$f(0)=0$，$f(3)=12$ だから $0<a<12$ のとき $|\beta|<2$ である。[2] $\alpha=0$ のとき，(b) から $|\beta|^2=4$，$|\beta|=2$，以上から，$|z|<2$ みたす解の個数は，$a\leq -28$ のとき 0 個，$-28<a\leq 0$ のとき 1 個 $(z=\alpha)$，$0<a<4$ のとき 3 個 $(z=\alpha,\beta,\bar{\beta})$，$4\leq a<12$ のとき 2 個 $(z=\beta,\bar{\beta}$，$12\leq a$ のとき 0 個

35. (1)(i) $g(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$ とおく。$g'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x)$，$f'(x)>0$ だから，$x>0$ のとき $g'(x)>0$，$x\geq 0$ で $g(x)$ は増加する。$x>0$ のとき $g(x)>g(0)=0$，$x>0$ のとき $xf(x)>\int_0^x f(t)dt$

(1)(ii) $F(x)=x\int_0^x e^t f(t)dt-(e^x-1)\int_0^x f(t)dt$，$F'(x)=\int_0^x e^t f(t)dt+xe^x f(x)-e^x\int_0^x f(t)dt-(e^x-1)f(x)=e^x g(x)+\int_0^x e^t f(t)dt-(e^x-1)f(x)$，$F''(x)=e^x g(x)+e^x xf'(x)+e^x f(x)-e^x f(x)-(e^x-1)f'(x)=e^x g(x)+\{(x-1)e^x+1\}f'(x)$，$h(x)=(x-1)e^x+1$ とおく。$h'(x)=xe^x$，$x>0$ のとき $h'(x)>0$，$x\geq 0$ で $h(x)$ は単調に増加する。$x>0$ のとき $h(x)>h(0)=0$，$x>0$ のとき $F''(x)>0$ (なぜなら (1) より $x>0$ のとき $g(x)>0$，$f'(x)>0$)，$x\geq 0$ で $F'(x)$ は増加する。$x>0$ のとき $F'(x)>F'(0)=g(0)=0$，$x\geq 0$ で $F(x)$ は増加する。

(2) (1)(ii) より，$x>0$ のとき $F(x)>F(0)=0$，$x>0$ のとき $x\int_0^x e^t f(t)dt>(e^x-1)\int_0^x f(t)dt\cdots$(a)，$f(x)=e^{(n-1)x}$ とすると，$f'(x)=(n-1)e^{(n-1)x}$，$n\geq 2$ だから $f'(x)>0$ である。(a) に代入して，$x>0$ のとき $x\int_0^x e^{nt}dt>(e^x-1)\int_0^x e^{(n-1)t}dt$，$x>0$ のとき $\int_0^x e^{nt}dt>\frac{e^x-1}{x}\int_0^x e^{(n-1)t}dt$

(3) (2) を繰り返し用いる。$x>0$ のとき，$\frac{e^x-1}{x}>0$ に注意して，$\int_0^x e^{nt}dt>\frac{e^x-1}{x}\int_0^x e^{(n-1)t}dt>(\frac{e^x-1}{x})^2\int_0^x e^{(n-2)t}dt>(\frac{e^x-1}{x})^3\int_0^x e^{(n-3)t}dt\cdots>(\frac{e^x-1}{x})^{n-1}\int_0^x e^t dt$，すなわち $\int_0^x e^{nt}dt>(\frac{e^x-1}{x})^{n-1}\int_0^x e^t dt$，すなわち $\frac{e^{nx}-1}{n}>(\frac{e^x-1}{x})^{n-1}(e^x-1)$，両辺を $x>0$ で割る。$x>0$ かつ $n\geq 2$ のとき，$\frac{e^{nx}-1}{nx}>(\frac{e^x-1}{x})^n$

36. A と B を固定して C を動かすとき，条件 (ii) から，C は AB を直径とする半球 S 上にある ($z\geq 0$)。T は半球 S の内部と表面を通過する。S の中心 M は AB の中点である。OM $=r$ とおく ($0\leq r\leq 1$)，S の半径は AM$=\sqrt{1-r^2}$ である。$\angle x\mathrm{OM}=\theta$ とする ($0\leq\theta<2\pi$)。r を固定して θ を動かすとき，S はドーナツ型の立体 D を通過する。(ただし AM $\geq$ OM のとき，すなわち $0\leq r\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，ドーナツの穴はふさがっている)，r を $0\leq r\leq 1$ の範囲で動かすとき，D が通過してできる立体が K である。K を平面 $z=t$ ($0\leq t\leq 1$) で切った断面は，中心が $(0,0,t)$ の円であり，その半径は，D を $z=t$ で切ってできる円環の外半径 R の最大値である (r を動かすときの最大値である)。D を xz 平面で切った断面は，中心 $(r,0,0)$，半径 $\sqrt{1-r^2}$ の円 E である。E を表す式は $(x-r)^2+z^2=1-r^2$，よって $(R-r)^2+t^2=1-r^2$，$R>r$ だから $R=r+\sqrt{1-r^2-t^2}$ ($0\leq r\leq\sqrt{1-t^2}$)，$\frac{dR}{dr}=1-\frac{r}{\sqrt{1-r^2-t^2}}$，$\frac{dR}{dr}=0$ とすると $\sqrt{1-r^2-t^2}=r$，$r=\sqrt{(1-t^2)/2}$，このとき R の最大値は $\sqrt{(1-t^2)/2}+\sqrt{(1-t^2)/2}=\sqrt{2(1-t^2}$，よって K を $z=t$ で切った断面積は $\pi(\sqrt{2(1-t^2)})^2=2\pi(1-t^2)$，$K$ の体積は $\int_0^1 2\pi(1-t^2)dt=2\pi[t-\frac{1}{3}t^3]_0^1=2\pi(1-\frac{1}{3})=\frac{4}{3}\pi$