ステップ応答によるパラメータ同定

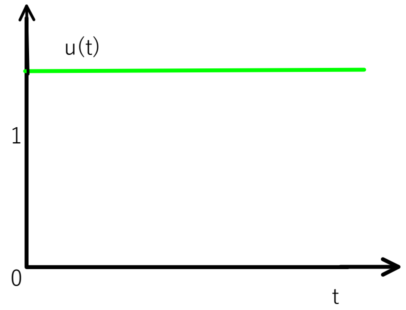
2017年7月9日　　10:39

駆動用DCモータへの員過電圧$v(s = v_a(s)$からタコメーターの出力電圧y(s) = $v_t(s)$
までの伝達関数を次のように定義し、これを制御対象とします。

$$y(s) = \frac{K}{T_s + 1} u(s)$$

上式は1次遅れのシステムとなることがわかります。未知定数である**Kをゲイン**、**Tは時定数**と呼ばれ実機からのこのようなパラメータの値を求める作業を**パラメータ同定**といいます。

1次遅れシステムのゲインと時定数を認める最も基本的な手法は、ステップ応答法です。この方法はシステムにステップ入力を加え、出力応答から時定数TとゲインKを直接読み取ります。そのためには上式のシステムにステップ入力を加えた場合、応答がどのようになるかを知る必要があります。



上図のように、大きさが1のステップ入力を単位ステップ入力といい、次式で表現できます。

$$u(t) = \begin{cases} 0, (t < 0) \\ 1, (t \geq 0) \end{cases}$$

そして、そのラプラス変換は

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

となります。したがって

$y(s) = \frac{K}{T_s + 1} u(s)$に単位ステップ入力を加えた時の出力のラプラス変換は

$$Y_{(s)} = \frac{K}{T(s) + 1} U_{(s)}$$

$$= \frac{K}{T(s)+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right)$$

これを逆ラプラス変換することで、次式のようにして$y_{(t)}$が得られます。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) \right]$$

ｔ関数において１のラプラス変換は$\frac{1}{s}$、e^{-at}のラプラス変換は$\frac{1}{s+a}$なので、$a = \frac{1}{T}$とすると$\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$の逆ラプラス変換は

$e^{-\frac{1}{T} \cdot t} = e^{-\frac{t}{T}}$となる。すなわち

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

【定常値と定常特性について】

時間変数tを t →∞としたときの動的システムの出力$y(t)$はある一定の値に収束する。この値を定常値と言い、次のように極限として表される。

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y(\infty)$$

t→∞においてシステムの応答$y(t)$がある一定の値に収束するか、しないか、収束するとなるとどのような値に収束するかはシステムの特性により決定される。このような特性を定常特性という。

時間が充分たつと、$e^{-t/T}$は０になるので$y_{(t)}$の定常値y(∞) は次のようになります。

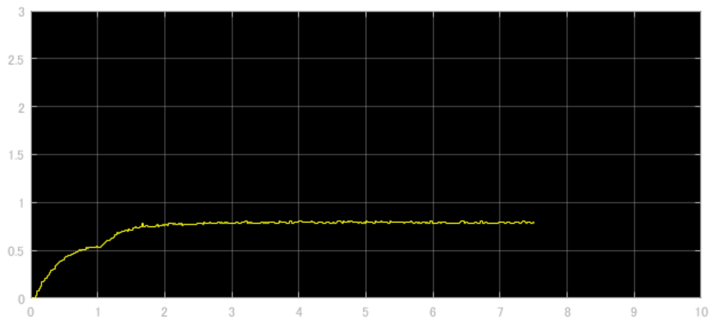
$$Y(\infty) = K \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

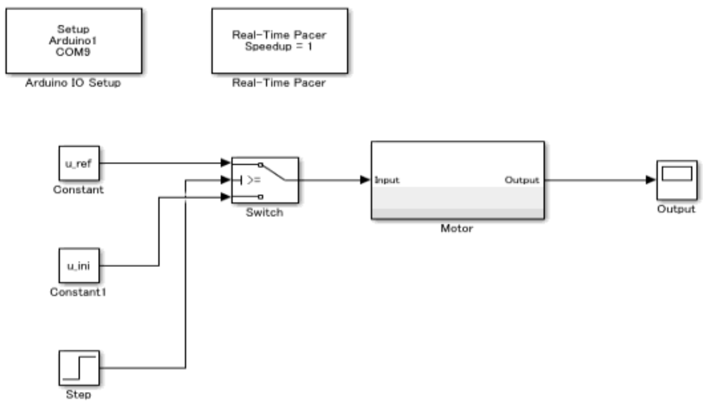
また、$t = K$となったときの$y_{(t)}$は

$$y(T) = K\left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = K\left(1 - e^{-1}\right) \cong 0.632K \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

（eはネイピア数：$e^{-1} = 0.368$）

となります。また、（１）式から、ステップ応答における$y_{(t)}$の定常値を読みとればKが求まります。また、（２）式から定常値の63.2%になるまでの時間を読み取れば、時定数Tが求まります。これらの結果を実験装置による実験によってグラフ化すると下図のようになります。





K

0.632K

$$\mathbf{y(t)} = \boldsymbol{K}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{-\frac{t}{T}}\right)$$

T