PHẦN 1. LÝ THUYẾT TỔ HỢP

I. Nghiệm của công thức truy hồi: Hãy tìm nghiệm của công thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây:

a) $a_n = 3a_{n-1}$ với $a_0 = 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} \\
&= 3.(3.a_{n-2}) &&= 3^2 .a_{n-2} \\
&= 3^2.(3.a_{n-3}) &&= 3^2 .a_{n-3} \\
&= \ldots \\
&= 3^{n-2}.(3.a_1) &&= 3^{n-1} .a_1 \\
&= 3^{n-1}.(3.a_0) &&= 3^n .a_0 \\
&= 3^n. a_0 &&= 2.3^n
\end{aligned}$$

b) $a_n = a_{n-1} + 2$ với $a_0 = 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2 \\
&= (a_{n-2} + 2) + 2 = a_{n-2} + 2.2 \\
&= (a_{n-3} + 2) + 2 + 2 = a_{n-2} + 3.2 \\
&= \ldots\ldots\ldots \\
&= (a_0 + 2) + 2 + 2 = a_1 + n.2 \\
&= \mathbf{3 + 2n.}
\end{aligned}$$

c) $a_n = a_{n-1} + n$ với $a_0 = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + n \\
&= a_{n-2} + n-1 + n \\
&= a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= a_0 + 1 + 2 + .. + n-2 + n-1 + n \\
&= 1 + n(n-1)/2
\end{aligned}$$

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$ với $a_0 = 4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + (2n + 3) \\
&= a_{n-2} + (2.(n-1) + 3)\ ) + (2n + 3) = 2.(\ 2n + 3) -2 \\
&= a_{n-3} + (\ 2.\ (n-2) + 3) + 2(\ 2n + 3) -2 = 3.(2n+3) - 2 -2.2 \\
&= \ldots\ldots \\
&= a_0 + n.(2n+3) - 2\ (1 + 2 + \ldots + n-1) \\
&= 4 + 2n^2 + 3n - 2\ .\ ((n-1).n)/2 \\
&= 4 + 2n^2 + 3n - n^2 + n \\
&= n^2 + 4n + 4
\end{aligned}$$

e) $a_n = a_{n-1} + 2^n$ với $a_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2^n \\
&= a_{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&= a_{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n \\
&= \ldots\ldots \\
&= 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

f) $a_n = a_{n-1} - 2n - 3$ với $a_0 = 4$.

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} - (2n + 3) \\
&= a_{n-2} - (2. (n-1) + 3) - (2n + 3) = - 2.(2n + 3) + 2 \\
&= a_{n-3} - (2. (n-2) + 3)) - 2(2n + 3) + 2 = 3.(2n+3) + 2 + 2.2 \\
&= . . . . . \\
&= a_0 - n.(2n+3) + 2 (1 + 2 + ...+n-1) \\
&= 4 - 2n^2 - 3n + 2 . ((n-1).n)/2 \\
&= 4 - 2n^2 - 3n + n^2 - n \\
&= -n^2 - 4n +4
\end{aligned}
$$

II. Xây dựng công thức truy hồi

1. Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp?

Lời giải:

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liên tiếp. Khi đó:

- Với n =1 ta có $a_1 = 2$ vì chỉ có hai xâu "0" và "1".
- Với n=2 ta có $a_2 = 3$ vì có 3 xâu 01, 10, 11 là hợp lệ.

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không có hai số 0 liên tiếp(n≥3). Khi đó a_n chính là *số các xâu nhị phân không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 1* cộng với *số các xâu nhị phân không chứa hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 0*. Trong đó :

- Số các xâu nhị phân không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 1 chính là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-1 và thêm vào số 1. Như vậy, số các xâu loại này chính là a_{n-1}.
- Số các xâu nhị phân không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 0 thì bít thứ n-1 phải là số 1. Nói cách khác, số các xâu nhị phân không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 0 chính là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-2 sau đó thêm 10 vào cuối. Do vậy, số các xâu loại này là a_{n-2}.

Từ đây theo qui tắc cộng ta có số các xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liên tiếp thỏa mãn hệ thức truy hồi :

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $a_1=2$, $a_2 =3$;

2. Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 1 liên tiếp ?

Lời giải:

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 1 liên tiếp. Khi đó:

- Với n =1 ta có $a_1 = 2$ vì chỉ có hai xâu 0 và 1.
- Với n=2 ta có $a_2 = 3$ vì có 3 xâu 00, 01, 10 là hợp lệ.

Với n≥3, a_n được chia thành hai tập : tập các xâu nhị phân không có hai số 1 liên tiếp kết thúc bởi số 0 và tập các xâu nhị phân không có hai số 1 liên tiếp kết thúc bởi số 1. Bây giờ ta tính toán trực tiếp cho từng tập:

- *Tập các xâu nhị phân không có hai số 1 liên tiếp kết thúc bởi số 0* : tập này được xây dựng bằng cách lấy bất kỳ xâu nhị phân nào có độ dài n-1 sau đó thêm số 0 vào sau đều thỏa mãn. Do vậy, số lượng tập các xâu nhị phân không chứa hai số 1 liên tiếp kết thúc bởi số 0 chính là a_{n-1}.

- Tập các xâu nhị phân không có hai số 1 liên tiếp kết thúc bởi số 1 thì bít thứ n-1 phải là số 0. Nói cách khác, số các xâu nhị phân không có hai số 1 liên tiếp kết thúc bởi số 1 chính là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-2 sau đó thêm 01 vào cuối. Do vậy, số các xâu loại này là a_{n-2}.

Từ đây theo qui tắc cộng ta có số các xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 1 liên tiếp thỏa mãn hệ thức truy hồi :

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;

3. Một hệ thống máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Ví dụ 1230407869 là hợp lệ, 120987045608 là không hợp lệ. Giả sử a_n là số các từ mã độ dài n. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho a_n?

Lời giải:

Với n =1 ta có 9 xâu thỏa mãn điều kiện vì có 10 xâu nhưng xâu có một số 0 là không hợp lệ. Bây giờ ta xem xét cách biểu diễn các xâu hợp lệ độ dài n thông qua các xâu độ dài n-1. Xâu hợp lệ có thể được xây dựng bằng hai cách:

- Cách thứ nhất: từ một xâu hợp lệ độ dài n-1 ta thêm bất kỳ một số khác 0 nào cũng trở thành một xâu hợp lệ độ dài n. Số lượng các xâu loại này là $9a_{n-1}$.
- Cách thứ hai: từ một xâu không hợp lệ độ dài n-1 ta thêm số 0 vào cuối cũng trở thành một xâu hợp lệ độ dài n. Số các xâu không hợp lệ độ dài n-1 chính là $10^{n-1} - a_{n-1}$.

Theo qui tắc tổng, an thỏa mãn hệ thức truy hồi

$a_n = 9.a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$, với $n \ge 2$ và $a_1 = 9$

4. Một hệ thống máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số lẻ chữ số 0. Ví dụ 1230407869 là không hợp lệ, 120987045608 là hợp lệ. Giả sử a_n là số các từ mã độ dài n. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho a_n?

Lời giải:

Với n =1 ta có 10 xâu thỏa mãn điều kiện. Bây giờ ta xem xét cách biểu diễn các xâu hợp lệ độ dài n thông qua các xâu độ dài n-1. Xâu hợp lệ có thể được xây dựng bằng hai cách:

- Cách thứ nhất: từ một xâu hợp lệ độ dài n-1 ta thêm bất kỳ một số khác 0 nào cũng trở thành một xâu hợp lệ độ dài n. Số lượng các xâu loại này là $9a_{n-1}$.
- Cách thứ hai: từ một xâu không hợp lệ độ dài n-1 ta thêm số 0 vào cuối cũng trở thành một xâu hợp lệ độ dài n. Số các xâu không hợp lệ độ dài n-1 chính là $10^{n} - a_{n-1}$.

Theo qui tắc tổng, an thỏa mãn hệ thức truy hồi

$a_n = 9.a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-2} = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$. Với $a_1 = 10$

5.

a) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có ba số 0 liên tiếp?

b) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có bốn số 0 liên tiếp?

c) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có 5 số 0 liên tiếp?

d) Chứng minh rằng số các xâu nhị phân có độ dài N không chứa K số 0 liên tiếp (N, $K \ge 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} +..+ a_{n-k}$ với $a_i = 2^i$, $(1 \le i < K)$, $a_k = 2^k - 1$.

Lời giải:

a) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có ba số 0 liên tiếp?

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa ba số 0 liên tiếp. Khi đó:

- Với n =1 ta có $a_1 = 2$ vì có hai xâu “0” và “1” đều là những xâu hợp lệ.

- Với n=2 ta có $a_2 = 4$ vì có 4 xâu 00, 01, 10, 11 đều là những xâu hợp lệ.
- Với n=3 ta có $a_3 = 7$ vì có 7 xâu 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 là những xâu hợp lệ. Xâu 000 là không hợp lệ.

Gọi a_n là số các xâu nhị phân có độ dài n ($n \geq 4$). Khi đó a_n chính là *số các xâu nhị phân không có ba số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 1* cộng với *số các xâu nhị phân không chứa ba số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 0*. Trong đó :

- *Số các xâu nhị phân không có ba số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 1* chính là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-1 và thêm vào số 1. Như vậy, số các xâu loại này chính là a_{n-1}.
- *Số các xâu nhị phân không có ba số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 0* được chia thành hai loại : Loại 1 là *số các xâu nhị phân như thế kết thúc bởi 00,* Loại 2 là *số các xâu nhị phân như thế kết thúc bởi 10*. Loại 1 chính là số các xâu nhị phân như thế có độ dài n-3 sau đó ta thêm 00 vào cuối (vì bít thứ $a_{n-3}=1$). Số các xâu nhị phân loại 1 chính là a_{n-3}. Loại 2 chính là a_{n-2}.

Từ đây theo qui tắc cộng ta có số các xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liên tiếp thỏa mãn hệ thức truy hồi :

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ với $a_1=2$, $a_2=4$, $a_2=7$;

n=?		
n=4	13	
n=5	24	
n=6	44	
n=7	81	
n=8	149	
n=9	274	
n=10	504	

6.

a) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n có hai số 0 liên tiếp?

b) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n có ba số 0 liên tiếp?

c) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n có bốn số 0 liên tiếp?

d) Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n có năm số 0 liên tiếp?

e) Chứng minh rằng số các xâu nhị phân có độ dài N có dãy K số 0 liên tiếp ($N, K \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi $A_n = (A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3} + .. + A_{n-k}) + 2^{n-k}$, với $n \geq k$ và $A_i=0$, ($0 \leq i < K$).

Lời giải (a): Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n có dãy hai số 0 liên tiếp?

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n có hai số 0 liên tiếp. Ta có:

Điều kiện đầu:

- Với n = 0 ta có $A_0 = 0$.
- Với n =1 ta có $A_1 = 0$.

Biểu diễn An thông qua các số hạng đi trước:

Với $n \geq 2$, khi đó, a_n chính là *số các xâu nhị phân độ dài n có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 1* cộng với *số các xâu nhị phân độ dài n có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi số 0*. Trong đó :

- *Số các xâu nhị phân độ dài n có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi 1: chính là xâu nhị phân như thế độ dài n-1 sau đó ta nối thêm số 1 vào cuối. Như vậy, số các xâu nhị phân độ dài n có 2 số 0 liên tiếp kết thúc bởi 1 chính là A_{n-1}* (01, 11)
- *Số các xâu nhị phân độ dài n có hai số 0 liên tiếp kết thúc bởi 0* được chia thành hai loại. **Loai 1** là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-1 kết thúc bởi 1 sau đó ta nối số 0 vào cuối. **Loại 2** là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-1 kết thúc bởi 0 sau đó ta nối số 0 vào cuối. Bây giờ ta tính toán trực tiếp số các xâu nhị phân Loại 1 và Loại 2.
    - **Loại 1** là số các xâu nhị phân có hai số 0 liên tiếp độ dài n-1 kết thúc bởi 1 chính bằng số các xâu nhị phân như thế độ dài n-2 sau đó ta thêm 10 vào cuối ta sẽ nhận được xâu hợp lệ độ dài n. Như vậy, số các xâu nhị phân Loại 1 là A_{n-2} (10).
    - **Loại 2** là số các xâu nhị phân có hai số 0 liên tiếp độ dài n-1 kết thúc bởi 0. Vì bít thứ n, n-1 đều là 0, do vậy ta lấy bất kỳ một xâu nhị phân có độ dài n-2 nào sau đó nối thêm với 00 ta sẽ nhận được một xâu hợp lệ. Do vậy số các xâu nhị phân Loại 2 là 2^{n-2} (00).

  Từ đây theo qui tắc tổng ta nhận được công thức truy hồi tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy hai số 0 liên tiếp là :

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 2^{n-2}, \text{ với } A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0.$$

Lời giải (e): Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n có dãy k số 0 liên tiếp?

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài *n* có *k* số *0* liên tiếp. Ta có:

Điều kiện đầu:

- Với n = 0 ta có $A_0 = 0$.
- Với n =1 ta có $A_1 = 0$.
- . . . .
- Với n =k-1 ta có $A_{k-1} = 0$.

Biểu diễn A_n thông qua các số hạng đi trước:

Với n≥k, khi đó, A_n chính là *số các xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp kết thúc bởi 1* cộng với *số các xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp kết thúc bởi 0*. Trong đó :

- *Số các xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp kết thúc bởi 1: chính là xâu nhị phân như thế độ dài n-1 sau đó ta nối thêm số 1 vào cuối. Như vậy, số các xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp kết thúc bởi 1 chính là A_{n-1} .*
- *Số các xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp kết thúc bởi 0* được chia thành hai loại. **Loai 1** là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-1 kết thúc bởi 1 sau đó ta nối số 0 vào cuối. **Loại 2** là số các xâu nhị phân như thế độ dài n-1 kết thúc bởi 0 sau đó ta nối số 0 vào cuối. **Loại 1** là số các xâu nhị phân có k số 0 liên tiếp độ dài n-1 kết thúc bởi 1 chính bằng số các xâu nhị phân như thế độ dài n-2 sau đó ta thêm 10 vào cuối ta sẽ nhận được xâu hợp lệ độ dài n. Như vậy, số các xâu nhị phân Loại 1 là A_{n-2}. Tiếp tục phân chia các xâu nhị phân loại hai như trên ta sẽ được số xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp có bít n-k-1 kết thúc bởi 1 và số xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp có bít n-k-1 kết thúc bởi 0. Số xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp có bít n-k-1 kết thúc bởi 1 là A^{n-k}. số xâu nhị phân độ dài n có k số 0 liên tiếp có bít n-k-1 kết thúc bởi 0 là 2^{n-k}.

  Từ đây theo qui tắc tổng ta nhận được công thức truy hồi tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có dãy k số 0 liên tiếp là :

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + .. + A_{n-k} + 2^{n-k}, \text{ với } A_i = 0 \ (0 \le i < k).$$

III-. Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây:

1) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = 6$.
2) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 2$ và $a_1 = 1$.
3) $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = 15$.
4) $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = 35$.
5) $a_n = -13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = 15$.
6) $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = 35$.
7) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
8) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 9$ và $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.
9) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 7$ và $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.
10) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 6$ và $a_1 = 8$.
11) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 0$ và $a_1 = 1$.
12) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 4$ và $a_1 = 1$.
13) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$ và $a_1 = -3$.

MỘT SỐ LỜI GIẢI MẪU

1. Giải các hệ trức truy hồi cùng các điều kiện đầu dưới đây:

a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ *với* $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.

b) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ *với* $n \geq 3$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.

a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ *với* $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3,\ r_2 = -2.$$

- Xây dựng công thức cho a_n

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 (-2)^n$$

- Tìm các hằng số α_1, α_2 thông qua các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} a_0 = 3 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 (-2)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = 6 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 (-2)^1 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{12}{5} \\ \alpha_2 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

- Xây dựng công thức tổng quát cho a_n

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 (-2)^n = \frac{12}{5} 3^n + \frac{3}{5} (-2)^n$$

2. Giải các hệ trức truy hồi cùng các điều kiện đầu dưới đây:

a) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *với* $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ *với* $n \geq 3$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

a) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ *với* $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = -2.$$

- Xây dựng công thức cho a_n

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2.n.r_2^n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2.n.(-2)^n$$

- Tìm các hằng số α_1, α_2 thông qua các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} a_0 = 0 = \alpha_1(-2)^0 + \alpha_2.0.(-2)^0 = \alpha_1 \\ a_1 = 1 = \alpha_1(2)^1 + \alpha_2.1.(-2)^1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Xây dựng công thức tổng quát cho a_n

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2.n.(-2)^n = -\frac{1}{2}n.(-2)^n$$

b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ *với* $n \geq 3$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = -1.$

- Xây dựng công thức cho a_n

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(1)^n + \alpha_3(-1)^n$$

- Tìm các hằng số α_1, α_2, α_3, thông qua các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} a_0 = 3 = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 1^0 + \alpha_3(-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 = 6 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 1^1 + \alpha_3(-1)^1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ a_2 = 0 = \alpha_1 2^2 + \alpha_2 1^2 + \alpha_3(-1)^2 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 6 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

- Xây dựng công thức tổng quát cho a_n

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 1^n + \alpha_3(-1)^n = (-1)2^n + 6.1^n - 2(-1)^n$$

c) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 9$ và $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$r^3 - 7r - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow r_1 = -1, r_2 = -2, r_3 = 3.$

- Xây dựng công thức cho a_n

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 3^n$$

- Tìm các hằng số α_1, α_2, α_3, thông qua các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} a_0 = 9 = \alpha_1(-1)^0 + \alpha_2(-2)^0 + \alpha_3(3)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 = 10 = \alpha_1(-1)^1 + \alpha_2(-2)^1 + \alpha_3(3)^1 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ a_2 = 32 = \alpha_1(-1)^2 + \alpha_2(-2)^2 + \alpha_3(3)^2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

- Xây dựng công thức tổng quát cho a_n

$$a_n = 8.(-1)^n - 3.(-2)^n + 4(3)^n$$

d) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$ và $a_0 = 7$ và $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

- Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = 3, r_3 = -2.$

- Xây dựng công thức cho a_n

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n = \alpha_1(1)^n + \alpha_2(3)^n + \alpha_3(-2)^n$$

- Tìm các hằng số α_1, α_2, α_3, thông qua các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = \alpha_1(1)^0 + \alpha_2(3)^0 + \alpha_3(-2)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 = -4 = \alpha_1(1)^1 + \alpha_2(3)^1 + \alpha_3(-2)^1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ a_2 = 8 = \alpha_1(1)^2 + \alpha_2(3)^2 + \alpha_3(-2)^2 = \alpha_1 + 9\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

- Xây dựng công thức tổng quát cho a_n

$$a_n = 5.(1)^n - (3)^n + 3(-2)^n$$

IV. TÌM SỐ NGHIỆM NGUYÊN KHÔNG ÂM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho

a) $x_i \geq 2$ *với i=1, 2, 3, 4, 5, 6?*

b) $1 \leq x_1 \leq 5$ *và* $x_3 \geq 8$*?*

c) $1 \leq x_1 \leq 5$ *và* $3 \leq x_2 \leq 7$*?*

d) $1 \leq x_1 \leq 5$ *và* $3 \leq x_2 \leq 7$ *và* $x_3 \geq 8$*?*

a) $x_i \geq 2$ **với i=1, 2, 3, 4, 5, 6?**

Mỗi nghiệm của phương trình tương ứng với một cách chọn 24 phần tử trong đó có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2, x_3 phần tử loại 3, x_4 phần tử loại 4, x_5 phần tử loại 5, x_6 phần tử loại 6 trong đó mỗi loại có ít nhất hai phần tử. Như vậy, ta chọn 2 phần tử cho mỗi loại sau đó chọn thêm 12 phần tử nữa. Theo định lý ta có số nguyện nguyên không âm N của phương trình là:

N = C(6 +12-1,12) = C(17,12) = 6188

b) ***$1 \leq x_1 \leq 5$ và $x_3 \geq 8$?***

Gọi N1 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \geq 1, x_3 \geq 8; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N1 = C(6+15-1,15)=C(20,15)=15504

Gọi N2 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \geq 6, x_3 \geq 8; \end{cases}$$

Theo (a) => N2 = C(6+10-1,10)=C(15,10)= 3003

Như vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ 1 \leq x_1 \leq 5, x_3 \geq 8; \end{cases}$$

là N = N1 – N2 = 15504-3003=12501.

c) $1 \leq x_1 \leq 5$ và $3 \leq x_2 \leq 7$?

Gọi N1 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Theo câu (a) => N1 = C(6+20-1,20)=C(25,20)=53130

Gọi N2 là số các nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \geq 6, x_2 \geq 3; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N2 = C(6+15-1,15)=C(20,15)=15504

Gọi N3 là số các nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 8; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N3 = C(6+15-1,15)=C(20,15)=15504

Gọi N4 là số các nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \geq 6, x_2 \geq 8; \end{cases}$$

Theo câu (a)=> N4 = C(6+10-1,10)=C(15,10)=3003

Như vậy, số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ 1 \le x_1 \le 5, 3 \le x_2 \le 7; \end{cases}$$

là N = N1-N2-N3+N4 = 53130-15504-15504 + 3003 = 25125

(Vì số nghiệm N4 bị trừ hai lần: một lần trong N2 và một lần trong N3).

d) $1 \le x_1 \le 5$ và $3 \le x_2 \le 7$ và x3 ≥ 8?

Gọi N1 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 3, x_3 \ge 8; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N1 = C(6+12-1,12)=C(17,12)=6188

Gọi N2 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 3, x_3 \ge 8; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N2 = C(6+7-1,7)=C(12,7)=792

Gọi N3 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 8, x_3 \ge 8; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N3 = C(6+7-1,5)=C(12,5)=792

Gọi N4 là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 8, x_3 \ge 8; \end{cases}$$

Theo câu (a) => N4 = C(6+2-1,2)=C(7,2)=21

Như vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ 1 \le x_1 \le 5, 3 \le x_2 \le 7, x_3 \ge 8; x_i \ge 0 : i = 4,5,6,7 \end{cases}$$

là N = N1-N2-N3+N4 = 4625

2. Số điện thoại di động của một hãng viễn thông là một số có 10 chữ số dạng 09.M.N.XXX.XXX. Miền xác định của các chữ số M, N. X được xác định như sau:

- M là số có giá trị từ 1 đến 7.
- N là số có giá trị từ 2 đến 9.
- X là số có giá trị từ 0 đến 9.

Hãy cho biết hãng viễn thông có thể phát hành được bao nhiêu số điện thoại thuộc mỗi loại a, b,c,d dưới đây?

a. Số các số di động có sáu số cuối cùng XXX.XXX tạo thành một số thuận nghịch sáu chữ số? Ví dụ số: 0913. 103301 có sáu số cuối cùng là 103301 là số thuận nghịch.

b. Số các số di động có sáu số cuối cùng XXX.XXX tạo thành một số thuận nghịch sáu chữ số và không chứa bất kỳ số 0 nào? Ví dụ số: 0913. 123321 có sáu số cuối cùng là 123321 là số thuận nghịch và không chứa số 0 nào.

c. Số các số di động có sáu số cuối cùng XXX.XXX là một số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số cuối cùng là 20? Ví dụ số: 0913.577775.

d. Số các số di động có sáu số cuối cùng XXX.XXX là một số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số cuối cùng là một số chia hết cho 10?

Lời giải:
a.Gọi P là số các số thuận nghịch có 6 chữ số. Vì M có 7 lựa chọn, N có 8 lựa chọn nên theo nguyên lý nhân ta có số các số di động có thể tạo nên là:

$$K = 7\times 8\times P \quad (1)$$

Vì số có sáu chữ số $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ là một số thuận nghịch có sáu chữ số nên $x_1=x_6 \geq 1$, $x_2=x_5$ và $x_3 = x_4$. Như vậy ta chỉ cần xét x_1, x_2, x_3 sau đó viết tiếp x_3, x_2, x_1 ta nhận được ba số còn lại. Vì

$1\leq x1\leq 9$ nên x1 có 9 lựa chọn, $0\leq x2$, $x3\leq 9$ nên mỗi số có 10 lựa chọn. Theo nguyên lý nhân ta có:

$$P = 9.10.10 = 900 \quad (2)$$

Thay P vào (1) ta có **K = 7×8×900 = 50.400** .

b.Gọi P là số các số thuận nghịch có 6 chữ số. Vì M có 7 lựa chọn, N có 8 lựa chọn nên theo nguyên lý nhân ta có số các số di động có thể tạo nên là:

$$K = 7\times 8\times P \quad (1)$$

Vì số có sáu chữ số $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ là một số thuận nghịch có sáu chữ số và các chữ số đều khác 0 nên $1\leq x_i\leq 9$ (i=1,2,3). Theo nguyên lý nhân ta có:

$$P = 9.9.9 = 729 \quad (2)$$

Thay P vào (1) ta có **K = 7×8×729 = 40824**.

c. Lập luận tương tự phần a ta có:

$$K = 7\times 8\times P \quad (1)$$

Trong đó P là số các số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng các chữ số này là 20. Vì Vì số có sáu chữ số $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ là một số thuận nghịch có sáu chữ số nên P chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & 1 \leq x_1 \leq 9; 0 \leq x_2 \leq 9; 0 \leq x_3 \leq 9; \end{aligned} \quad (2)$$

Số nghiệm của (2) là P = C (3+9-1,9) – 1 = C(11,9)-1 = 54.

Thay P vào (1) ta nhận được **K = 7×8×54 = 3024**

d. Gọi P là số các số thuận nghịch có sáu chữ số $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ có tổng là một số chia hết cho 10. Khi đó số các số di động có thể phát hành là K được xác định như phương trình (1).

K = 7×8×P. (1)

Vì mỗi số đều nhỏ hơn 9 nên tổng của sáu số này là một số chia hết cho 10 chỉ có thể là 10, 20, 30, 40, 50. Theo nguyên lý cộng ta có:

P = P1 + P2+P3 + P4 + P5 (2)

Trong đó :

- P1 là số các số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số này là 10. P1 chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 1 \le x_1 \le 9; 0 \le x_2 \le 9; 0 \le x_3 \le 9. \end{cases}$$ => P1 = C(3+4-1,4) = C(6,4) = 15

- P2 là số các số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số này là 20. P2 chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 1 \le x_1 \le 9; 0 \le x_2 \le 9; 0 \le x_3 \le 9. \end{cases}$$ => P2 = C(11,9)-1 = 54

- P3 là số các số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số này là 30. P3 chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 1 \le x_1 \le 9; 0 \le x_2 \le 9; 0 \le x_3 \le 9 \end{cases}$$

  P3 = C(16,14)-C(7,5)-C(6,4)-C(6,4) = 120-21-15-15=69.

- P4 là số các số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số này là 40. P4 chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

  $$y\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 1 \le x_1 \le 9; 0 \le x_2 \le 9; 0 \le x_3 \le 9 \end{cases}$$

  P4 = C(21,19) – C(12,10) + 2C(2,2)- 2C(11,9) = 210-66 + 2 - 110 = 36

- P5 là số các số thuận nghịch có sáu chữ số và tổng sáu chữ số này là 50. P5 chính là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

  $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 25 \\ 1 \le x_1 \le 9; 0 \le x_2 \le 9; 0 \le x_3 \le 9 \end{cases}$$

  P5 = 6

Như vậy: P = P1 + P2 + P3 + P4 + P5 = 15 + 54 + 69 +36 + 6 = 180

Vậy số di động K = 7×8×180 = 10080

3. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số thỏa mãn:

a) Số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch;

b) Số có 7 chữ số tạo thành một số thuận nghịch và có tất cả các chữ số đều khác 0;

c) Số có 7 chữ số có tổng các chữ số là 18;

d) Số có 7 chữ số có tổng các chữ số là 17;

Lời giải:

Gọi số X =$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ là một số tự nhiên có 7 chữ số. Khi đó, $x_1 \geq 1$, x_i =0,1,2,..,9; i=2,..,7.

a) Vì X =$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ tạo thành một số đối xứng, nên x1 = x7, x2=x6, x3=x7. Do vậy, số các số thuận nghịch có 7 chữ số là số các số có 4 chữ số sau đó lấy đối xứng sang bên phải. Từ đó ta có:

N = 9000 số.

b) Số các số thuận nghịch có tất cả các chữ số khác 0

N = 9×9×9×9

c) Số các số thuận nghịch có tổng các chữ số là 18:

Gọi N là số các số thuận nghịch có tổng là 18. Khi đó, N chính là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Vì X =$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ là số thuận nghịch nên x_1=x_7, x_2 = x_6, x_3 = x_5;

Do vậy, N cũng là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 18$; với x1≥1. (2)

Vì $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$ là những số chẵn nên x_4 cũng phải là một số chẵn. Do đó x_4 chỉ có thể nhận các giá trị 0, 2, 4, 6, 8. Gọi N1 là số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =0, N2 là số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =2, N3 là số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =4, N4 là số số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =6, N5 là số số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =8. Khi đó theo nguyên lý cộng ta có:

N = N1 + N2 + N3 + N4 + N5 (3)

Bây giờ ta tính N1, N2, N3, N4, N5 ứng với mỗi giá trị của x_2.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (5);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Áp dụng định lý ta có :

N1 = C(3 + 8 -1, 8) = C(10,8) = (9×10):2 = 45

N2 = C(3 + 7 -1, 7) = C(9,7) = (8×9):2 = 36

N3 = C(3 + 6 -1,6) = C(8,6) = (7×8):2 = 28

N4 = C(3 + 5 -1,5) = C(7,5) = (6×7):2 = 21

N5 = C(3 + 4 -1,4) = C(6,4) = (5×6):2 = 15

Từ đó ta có N = 45 + 36 + 28 + 21 + 15 = 145

d) Số các số thuận nghịch có tổng các chữ số là 17:
Gọi N là số các số thuận nghịch có tổng là 18. Khi đó, N chính là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 17 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Vì X =$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ là số thuận nghịch nên x_1=x_7, $x_2 = x_6$, $x_3 = x_5$;
Do vậy, N cũng là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 17$; với x1≥1.

(2)

Vì $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$ là những số chẵn nên x_4 cũng phải là một số lẻ. Do đó x_4 chỉ có thể nhận các giá trị 1, 3, 5, 7, 9. Gọi N1 là số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =1, N2 là số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =3, N3 là số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =5, N4 là số số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =7, N5 là số số nghiệm nguyên không âm ứng với x_4 =9. Khi đó theo nguyên lý cộng ta có:

N = N1 + N2 + N3 + N4 + N5 (3)

Bây giờ ta tính N1, N2, N3, N4, N5 ứng với mỗi giá trị của x_2.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 17 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (5);$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 17 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5 = 17 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7 = 17 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 9 = 17 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

Áp dụng định lý ta có :
N1 = C(3 + 7 -1,7) = C(9,7) = (9×8):2 = 36
N2 = C(3 + 6 -1,6) = C(8,6) = (8×7):2 = 28
N3 = C(3 + 5 -1,5) = C(7,5) = (7×6):2 = 21
N4 = C(3 + 4 -1,4) = C(6,4) = (6×5):2 = 15
N5 = C(3 + 3 -1,3) = C(5,3) = (5×4):2 = 10

Từ đó ta có N = 36 + 28 + 21 + 15 + 10 = 110

V. BÀI TOÁN TỐI ƯU

3. Hãy tìm phương án tối ưu *Xopt*=$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ và giá trị tối ưu *Fopt = F(Xopt)* của hàm mục tiêu $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))$ được xác định như dưới đây:

$$F(X) = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 \to \max,$$
$$9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 21,$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3,4,5.$$

Giải : Mỗi phương án của bài toán là một vector nhị phân X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) thỏa mãn điều kiện:

$9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 21$

Để tìm FOPT = F(X)->Max ta thực hiện như bảng sau:

X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)	X$\in$D = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : \sum_{i=1}^{5} a_i x_i \le 21$	F(X)= $\sum_{i=1}^{5} c_i x_i = ?$
0, 0, 0, 0, 0	0≤21: X∈D	0
0, 0, 0, 0, 1	2≤21: X∈D	2
0, 0, 0, 1, 0	3≤21: X∈D	5
0, 0, 0, 1, 1	5≤21: X∈D	7
0, 0, 1, 0, 0	5≤21: X∈D	3
0, 0, 1, 0, 1	7≤21: X∈D	5
0, 0, 1, 1, 0	8≤21: X∈D	8
0, 0, 1, 1, 1	10≤21: X∈D	10
0, 1, 0, 0, 0	8≤21: X∈D	6
0, 1, 0, 0, 1	10≤21: X∈D	8
0, 1, 0, 1, 0	11≤21: X∈D	11
0, 1, 0, 1, 1	13≤21: X∈D	13
0, 1, 1, 0, 0	13≤21: X∈D	9
0, 1, 1, 0, 1	15≤21: X∈D	11
0, 1, 1, 1, 0	16≤21: X∈D	14
0, 1, 1, 1, 1	***18≤21: X∈D***	***16***
1, 0, 0, 0, 0	9≤21: X∈D	4
1, 0, 0, 0, 1	11≤21: X∈D	6
1, 0, 0, 1, 0	12≤21: X∈D	9
1, 0, 0, 1, 1	14≤21: X∈D	9
1, 0, 1, 0, 0	14≤21: X∈D	10
1, 0, 1, 0, 1	16≤21: X∈D	9
1, 0, 1, 1, 0	*16≤21: X∈D*	*12*
1, 0, 1, 1, 1	19>21: X∈D	14
1, 1, 0, 0, 0	17≤21: X∈D	10
1, 1, 0, 0, 1	19≤21: X∈D	12
1, 1, 0, 1, 0	20≤21: X∈D	15
1, 1, 0, 1, 1	22>21: X∉D	∞
1, 1, 1, 0, 0	22>21: X∉D	∞
1, 1, 1, 0, 1	24>21: X∉D	∞
1, 1, 1, 1, 0	25>21: X∉D	∞
1, 1, 1, 1, 1	27>21: X∉D	∞
XOPT=(0,1,1,1,1); FOPT = 16		

4. Hãy tìm phương án tối ưu *Xopt*=$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ và giá trị tối ưu *Fopt = F(Xopt)* của hàm mục tiêu $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))$ được xác định như dưới đây:

$$F(X) = 10x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 7x_5 \to \max,$$
$$9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 21,$$
$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,2,3,4,5.$$