PHẦN 2. LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

CÂY KHUNG CỦA ĐỒ THỊ

a) Thuật toán BFS (u):

<u>Thuật toán TREE-BFS (u):</u>

```
Bước 1 (Khởi tạo):
    Queue= ∅; Push(Queue,u);
    T = ∅; Chuaxet[u] = FALSE;
Bước 2 (Lặp):
    while (Queue ≠ ∅ ) {
            s = Pop(Queue);
            for  each t ∈ Ke(s) do {
                    if ( Chuaxet[t] ) {
                        Push( Queue, t);
                        T = T∪(s,t) ;
                        Chuaxet[t] = False;
                    }
            }
    }
Bước 3 (Trả lại kết quả) :
    Return (T) ;
```

b) Thuat toan TREE-DFS(u):

```
Bước 1 (Khởi tạo):
    Stack= ∅; Push(Stack,u); Chuaxet[u] = FALSE;
Bước 2 (Lặp):
    while (Stack ≠ ∅ ) {
            s = Pop(Queue);
            for  each t ∈ Ke(s) do {
                    if ( Chuaxet[t] ) {
                            Push( Stack, s); Push( Stack, t);
                            T = T∪(s,t); Chuaxet[t] = False; break ;
                    }
            }
    }
Bước 3 (Trả lại kết quả) :
    Return (T) ;
```

c) Ví dụ sử dụng BFS xây dựng cây khung của đồ thị tại u=3 (u = 1, 2, .., 13).

Bước	Trạng thái hàng đợi	Tập cạnh cây khung
1	3	∅
2	4, 7, 11	T= T∪ { (3,4), (3, 7), (3,11) }.
3	7, 11, 5, 8	T= T∪ { (4, 5), (4, 8).
4	11, 5, 8	T= T∪ ∅.
5	5, 8, 12	T= T∪ { (11,12)}.
6	8, 12, 1, 2, 6	T= T∪ {(5,1), (5,2), (5,6)}.
7	12, 1, 2, 6	T= T∪ ∅.
8	1, 2, 6, 9, 10, 13	T= T∪ {(12,9), (12,10), (12,13)}.
9	2, 6, 9, 10, 13	T= T∪ ∅.
10	6, 9, 10, 13	T= T∪ ∅.
11	9, 10, 13	T= T∪ ∅.
12	10, 13	T= T∪ ∅.
13	13	T= T∪ ∅.
14	∅	
T = {(3,4), (3,7), (3,11), (4, 5), (4,8), (11,12), (5,1), (5, 2), (5,6), (12,9), (12,10), (12,13) }		

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

ĐỊNH CHIỀU ĐỒ THỊ

1. Một đồ thị vô hướng liên thông G =<V,E> được gọi là định chiều được nếu thay thế mỗi cạnh của G bằng một cung định hướng để được một đồ thị có hướng G'=<V,E> liên thông mạnh. Cho đồ thị vô hướng liên thông G = <V,E> gồm 13 đỉnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như dưới đây:

List (1) = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }.
List (2) = { 1, 8, 9 }.
List(3) = { 1, 6, 9}.
List(4) = { 1, 6, 7}.
List(5) = { 1, 7, 8}.
List(6) = { 1, 3, 4, 11}.
List(7) = { 1, 4, 5, 12}.
List(8) = { 1, 2, 5, 13}.
List(9) = { 1, 2, 3, 10}.
List(10) = { 9, 11, 13}.
List(11) = { 6, 10, 12}.
List(12) = {7, 11, 13}.
List(13) = { 8, 10, 12}.

a. **Chứng minh.** Sử dụng định lý: Một đồ thị vô hướng liên thông định chiều được khi và chỉ khi tất cả các cạnh của nó không phải là cầu. Chứng minh mọi cạnh không là cầu:

Để loại bỏ cạnh (u,v) trong danh sách kề ta chỉ cần thực hiện:

List(u) = List(u)\{v} và List(v) = List(v) \{u}.

Cạnh (u,v) loại bỏ	BFS(1) Trên đồ thị đã loại cạnh (u,v)	Tính liên thông
(1,2)	BFS(1) = 1, 3,4,5,6,7,8,9,11,12,2,13,10	Yes
(1,3)	BFS(1) = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9,3, 11, 12, 13, 10	Yes
(1,4)	BFS(1) =	Yes
(1,5)	BFS(1) =	Yes
(1,6)	BFS(1) =	Yes
(1,7)	BFS(1) =	Yes
(1,8)	BFS(1) =	Yes
(1,9)	BFS(1) =	Yes
(2,8)	BFS(1) =	Yes
(2,9)	BFS(1) =	Yes
(3,6)	BFS(1) =	Yes
(3,9)	BFS(1) =	Yes
(4,6)	BFS(1) =	Yes
(4,7)	BFS(1) =	Yes
(5,7)	BFS(1) =	Yes
(5,8)	BFS(1) =	Yes
(6,11)	BFS(1) =	Yes
(7,12)	BFS(1) =	Yes
(8,13)	BFS(1) =	Yes
(9,10)	BFS(1) =	Yes
(10,11)	BFS(1) =	Yes
(10,13)	BFS(1) =	Yes
(11,12)	BFS(1) =	Yes
(12,13)	BFS(1) =	Yes
	BFS(1) =	

b. Định chiều đồ thị

- Xác định tập cung thuận:

Tính toán DFS(1) = 1→ 2→ 8→ 5→ 7→ 4→ 6→ 3→ 9→ 10→ 11→ 12→ 13.

Tập cung thuận là:	Tập cung nghịch (chính là các cạnh chưa bôi đỏ và đảo chiều)
1 → 2	8 → 1
2 → 8	5 → 1
8 → 5	7 → 1
5 → 7	4 → 1
7 → 4	6 → 1
4 → 6	3 → 1
6 → 3	9 → 1
3 →9	9 → 2
9 →10	11→6
10 →11	12 →7
11 →12	13 →8
12 →13	13→10

2. Xác định đỉnh trụ, cạnh cầu:

Cho đồ thị vô hướng G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Hãy thực hiện:

a) Sử dụng thuật toán duyệt theo chiều rộng tìm tất cả các đỉnh trụ của đồ thị, chỉ rõ kết quả thực hiện theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

b) Tìm tất cả các cạnh cầu của đồ thị, chỉ rõ kết quả thực hiện theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

- Đỉnh 4, 5, 11, 12 là trụ vì:

Đỉnh v∈V	BFS(u) = V\{v}? với u≠v	solt>1?
1	BFS(2)= 2,5,6,4,3,7,8,11,12,9,10,13	No
2	BFS(1)= 1,5,6, 4,3,7,8,11,12,9,10,13	No
3	BFS(1)= 1,2, 5,6, 4, 7,8,11,12,9,10,13	No
4	BFS(1)= 1,2, 5,6	*Yes*
5	BFS(1)= 1,2, 6	*Yes*
6	BFS(1)= 1,2, 5, 4,3,7,8,11,12,9,10,13	No
7	BFS(1)= 1,2,5,6, 4,3, 8,11,12,9,10,13	No

8	BFS(1)= 1,2, 5, 6, 4,3,7, 11,12,9,10,13	No
9	BFS(1)= 1,2, 5, 6, 4,3,7, 8,11,12, 10,13	No
10	BFS(1)= 1,2, 5, 6, 4,3,7, 8,11,12, 9,13	No
11	BFS(1)= 1,2, 5, 6, 4,3,7, 8	*Yes*
12	BFS(1)= 1,2, 5, 6, 4,3,7, 8,11	*Yes*
13	BFS(1)= 1,2, 5, 6, 4,3,7, 8,11,12, 9,10	No

b) cạnh 4-5, 11-12 là cầu vì

Cạnh loại bỏ	BFS(1) =?	solt>1?	Cạnh cầu?
1-2	BFS(1) = 1,5,6,2,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
1-5	BFS(1) = 1,2,6,5,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
1-6	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
2-5	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
2-6	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
3-4	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 7,8,11,3,12,9,10,13	No	No
3-7	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 7,8,11,3,12,9,10,13	No	No
3-11	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 7,8,11,3,12,9,10,13	No	No
4-5	BFS(1) = 1,2,5,6,	Yes	Yes
4-7	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,8,11,7,12,9,10,13	No	No
4-8	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,11,8,12,9,10,13	No	No
4-11	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7, 8,11,12,9,10,13	No	No
5-6	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
7-8	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
8-11	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
9-10	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
9-12	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,10,13,9	No	No
9-13	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
10-12	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
10-13	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No
11-12	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11	Yes	Yes
12-13	BFS(1) = 1,2,5,6,4, 3,7,8,11,12,9,10,13	No	No

3. Đường đi Euler trên đồ thị có hướng

Cho đồ thị *có hướng* G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Hãy thực hiện:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

a) Chứng minh rằng G là đồ thị nửa Euler?

b) Trình bày thuật toán tìm một đường đi Euler của đồ thị?

c) Áp dụng thuật toán, tìm tìm một đường đi Euler của đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo từng bước thực hiện của thuật toán?

a) chứng minh G là nửa Euler? (*0.5 điểm*)

+ Vì BFS(1) = { 1, 2, 5, 3, 6, 4, 11, 7, 10, 8, 12, 13, 9} = V. Do vậy, G liên thông yếu.
+ Ta lại có:

$deg^+(2) = deg^-(2) = deg^+(3) = deg^-(3) = 2$
$deg^+(6) = deg^-(6) = deg^+(7) = deg^-(7) = 2$
$deg^+(8) = deg^-(8) = deg^+(9) = deg^-(9) = 2$
$deg^+(11) = deg^-(11) = deg^+(12) = deg^-(12) = 2$
$deg^+(5) = deg^-(5) = deg^+(4) = deg^-(4) = deg^+(10) = deg^-(10) = 3$
$deg^+(1) - deg^-(1) = deg^-(13) - deg^+(13) = 1$

G liên thông yếu và tồn tại hai đỉnh u=1, v=13 có bán đỉnh bậc ra trừ bán đỉnh bậc vào của u bằng bán đỉnh bậc vào trừ bán đỉnh bậc ra và bằng 1 nên G là nửa Euler.

b) Xây dựng thuật toán: (*0.5 điểm*)

Thuật toán tìm đường đi Euler:

Bước 1 (Khởi tạo):

```
u=< đỉnh có deg+(1)-deg-(1) =1 >; stack = ϕ; CE = ϕ;
   u => Stack; // Đưa u vào stack;
```

Bước 2 (Lặp):

```
while (stack ≠ϕ) {
    v = <đỉnh đầu stack>;
    if (Ke(v) ≠ ϕ )  {
        t =<đỉnh đầu trong danh sách Ke(v)>;
        t => Stack; // đưa t vào stack;
        E = E \(v,t); //loại bỏ cạnh (v,t) đã đi qua;
    }
    else { // nếu Ke(v) = ϕ
        v = Pop(Stack); v=>CE; //Lấy v ra khỏi Stack và đưa vào CE
    }
}
```

Bước 3 (Trả lại kết quả) Lật ngược các đỉnh đã được lưu trong CE ta nhận được đường đi Euler.

c) Kiểm nghiệm thuật toán

Bước 1. Chọn u = 1 là đỉnh bậc lẻ có $deg^+(1)-deg^-(1) = 1$ **đưa vào stack**

Bước	Trạng thái Stack	Giá trị CE
1	1	ϕ
2	1, 2	
3	1, 2, 3	
4	1, 2, 3, 4	
5	1, 2, 3, 4,7	
6	1, 2, 3, 4,7,5	
7	1, 2, 3, 4,7,5,3	
8	1, 2, 3, 4,7,5,3,11	
9	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10	
10	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8	
11	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4	
12	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10	
13	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12	
14	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9	
15	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8	
16	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7	
17	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6	
18	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1	
19	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5	
20	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4	
21	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11	
22	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12	
23	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13	
24	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9	
25	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9,10	
26	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9,10,13	
27	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9,10	13,
28	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13,9	13,10
29	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12,13	13,10,9
30	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11,12	13,10,9,13
31	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4,11	13,10,9,13,12
32	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,4	13,10,9,13,12,11
33	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5	13,10,9,13,12,11,4
34	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,6	13,10,9,13,12,11,4
35	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,6,2	13,10,9,13,12,11,4
36	1, 2, 3, 4,7,5,3,11,10,8,4,10,12,9,8,7,6,1,5,6,2,5	13,10,9,13,12,11,4
Đưa lần lượt các đỉnh trong Stack sang CE		
37 ...	CE = 13,10,9,13,12,11,4, 5, 2, 6, 5, 1, 6, 7, 8, 9, 12, 10, 4, 8, 10, 11, 3, 5, 7, 4, 3, 2, 1	
Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được đường đi Euler		
1- 2- 3- 4- 7- 5- 3- 11- 10- 8 -4- 10- 12- 9- 8- 7- 6- 1-5- 6- 2- 5- 4-11- 12- 13-9-10-13		

4. Chu trình Euler trên đồ thị có hướng

Cho đồ thị *có hướng* G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Hãy thực hiện:

a) Chứng minh rằng G là đồ thị Euler?

b) Trình bày thuật toán tìm một chu trình Euler của đồ thị?

c) Áp dụng thuật toán, tìm tìm một chu trình Euler bắt đầu tại đỉnh u=1 của đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo từng bước thực hiện của thuật toán?

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

a) chứng minh G là Euler: chứng minh bán đỉnh bậc ra bằng bán đỉnh bậc vào

+ Vì BFS(1) = { 1, 2, 3, 5, 4, 11, 6, 7, 10, 12, 8, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông yếu.
+ Ta lại có:

$deg^+(2) = deg^-(2) = deg^+(3) = deg^-(3) =2$
$deg^+(4) = deg^-(4) = deg^+(5) = deg^-(5) =2$
$deg^+(6) = deg^-(6) = deg^+(7) = deg^-(7) =2$
$deg^+(8) = deg^-(8) = deg^+(9) = deg^-(9) =2$
$deg^+(10) = deg^-(10) = deg^+(11) = deg^-(11) =2$
$deg^+(12) = deg^-(12) =2$
$deg^+(1) = deg^-(1) = deg^-(13) = deg^+(13) =1$

G liên thông yếu và có bán đỉnh bậc ra bằng bán đỉnh bậc vào nên G là đồ thị Euler.

b) Xây dựng thuật toán:

Thuật toán tìm chu trình Euler:

<u>Bước 1</u> (Khởi tạo):

```
    u=< đỉnh bất kỳ >; stack = ϕ; CE = ϕ;
      u => Stack; // Đưa u vào stack;
```

<u>Bước 2</u> (Lặp):

```
    while (stack ≠ϕ) {
        v = <đỉnh đầu stack>;
        if (Ke(v) ≠ ϕ )  {
            t =<đỉnh đầu trong danh sách Ke(v)>;
            t => Stack; // đưa t vào stack;
            E = E \(v,t); //loại bỏ cạnh (v,t) đã đi qua;
        }
        else { // nếu Ke(v) = ϕ
            v = Pop(Stack); v=>CE; //Lấy v ra khỏi Stack và đưa vào CE
        }
    }
```

<u>Bước 3</u> (Trả lại kết quả): Lật ngược các đỉnh đã được lưu trong CE ta nhận được đường đi Euler.

c) Kiểm nghiệm thuật toán:

<table>
<tr><th>Bước</th><th>Trạng thái Stack</th><th>Giá trị CE</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1,2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1,2,3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,2,3,4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>1,2,3,4,7</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>1,2,3,4,7,5</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>1,2,3,4,7,5,3</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8</td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7</td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6,1</td><td></td></tr>
<tr><td>19</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6,2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>21</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6,2,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>22</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6,2,5,6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>23</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6,2,5</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td>24</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6,2</td><td>1,6,5</td></tr>
<tr><td>25</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7,6</td><td>1,6,5,2</td></tr>
<tr><td>26</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8,7</td><td>1,6,5,2,6</td></tr>
<tr><td>27</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,8</td><td>1,6,5,2,6,7</td></tr>
<tr><td>28</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9</td><td>1,6,5,2,6,7,8</td></tr>
<tr><td>29</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,10</td><td>1,6,5,2,6,7,8</td></tr>
<tr><td>30</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,10,12</td><td>1,6,5,2,6,7,8</td></tr>
<tr><td>31</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,10,12,13</td><td>1,6,5,2,6,7,8</td></tr>
<tr><td>32</td><td>1,2,3,4,7,5,3,11,10,8,4,11,12,9,10,12,13,9</td><td>1,6,5,2,6,7,8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Đưa lần lượt các đỉnh trong Stack sang CE</td></tr>
<tr><td>33 ...</td><td colspan="2">CE = 1,6,5,2,6,7,8,9,13,12,10,9,12,11,4,8,10,11,4,8,10,11,3,5,7,4,3,2,1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được đường đi Euler</td></tr>
<tr><td colspan="3">1- 2- 3- 4-7- 5- 3- 11- 10- 8 -4- 11- 10- 8- 4- 11- 12- 9-10- 12- 13- 9- 8-7-6- 2-5-6-1</td></tr>
</table>

5. Chu trình Euler trên đồ thị vô hướng:

Cho đồ thị *vô hướng* G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Hãy thực hiện:

a) Chứng minh rằng G là đồ thị Euler?

b) Trình bày thuật toán tìm một chu trình Euler của đồ thị?

c) Áp dụng thuật toán, tìm tìm một chu trình Euler tại đỉnh u = 1 của đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo từng bước thực hiện của thuật toán?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) chứng minh G là Euler?

+ Vì BFS(1) = { 1, 2, 6, 3, 5, 7, 4, 11, 8, 10, 12, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông.
+ Ta lại có:

deg(1) = deg(13) = 2
deg (2) = deg(3) = deg(4) = deg(5) = 4
deg(6) = deg(7) = deg(8) = deg(9) = 4
deg(10) = deg(11) = deg(12) = 4

Vì G liên thông và có tất cả các đỉnh bậc chẵn nên G là Euler.

b) Xây dựng thuật toán:

Thuật toán tìm chu trình Euler:

<u>Bước 1</u> (Khởi tạo):

```
u=< đỉnh xuất phát bất kỳ >; stack = ϕ; CE = ϕ;
    u => Stack; // Đưa u vào stack;
```

<u>Bước 2</u> (Lặp):

```
while (stack ≠ϕ) {
    v = <đỉnh đầu stack>;
    if (Ke(v) ≠ ϕ )  {
        t =<đỉnh đầu trong danh sách Ke(v)>;
        t => Stack; // đưa t vào stack;
        E = E \(v,t); //loại bỏ cạnh (v,t) đã đi qua;
    }
    else { // nếu Ke(v) = ϕ
        v = Pop(Stack); v=>CE; //Lấy v ra khỏi Stack và đưa vào CE
    }
}
```

<u>Bước 3</u> (Trả lại kết quả)

Lật ngược các đỉnh đã được lưu trong CE ta nhận được chu trình Euler.

c) **Kiểm nghiệm thuật toán:**

Bước 1. Chọn u = 1 là đỉnh xuất phát đưa vào stack

<table>
<tr><th>Bước</th><th>Trạng thái Stack</th><th>Giá trị CE</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1, 2</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1, 2, 3</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1, 2, 3, 4</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1, 2, 3, 4,7</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1, 2, 3, 4,7,5</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,1</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>15</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>17</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7,6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,7</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8</td><td>1,6,7</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9</td><td>1,6,7</td></tr>
<tr><td>21</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10</td><td>1,6,7</td></tr>
<tr><td>22</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,8</td><td>1,6,7</td></tr>
<tr><td>23</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td>24</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td>25</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td>26</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td>27</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td>28</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td>29</td><td>1, 2, 3, 4,7,5,2,6,5,3,11,4,8,9,10,11,12,9,13,12,10</td><td>1,6,7,8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Đưa lần lượt các đỉnh trong Stack sang CE</td></tr>
<tr><td>30 -..</td><td colspan="2">CE = 1, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 9, 12, 11, 10, 9, 8, 4, 11, 3, 5, 6, 2, 5, 7, 4, 3, 2, 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được chu trình Euler</td></tr>
<tr><td colspan="3">1- 2- 3- 4- 7-5-2-6-5-3-11-4-8-9-10-11-12-9-13-12-10-8-7-6-1</td></tr>
</table>

6. Đường đi Euler trên đồ thị vô hướng

Cho đồ thị *vô hướng* G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Hãy thực hiện:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

a) Chứng minh rằng G là đồ thị nửa Euler?

b) Trình bày thuật toán tìm một đường đi Euler của đồ thị?

c) Áp dụng thuật toán, tìm tìm một đường đi Euler của đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo từng bước thực hiện của thuật toán?

a) chứng minh G là nửa Euler?

+ Vì BFS(1) = { 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 11, 8, 10, 12, 9, 13} = V. Do vậy, G liên thông.
+ Ta lại có:

deg(1) = deg(13) = 3
deg (2) = deg(3) = deg(11) = 4
deg(12) = deg(6) = deg(7) = deg(8) = deg(9) = 4
deg(5) = deg(4) = deg(10) = 6

⇨ G liên thông và có đúng hai đỉnh bậc lẻ nên G là nửa Euler.

b) Xây dựng thuật toán

Thuật toán tìm đường đi Euler:

<u>Bước 1</u> (Khởi tạo):

u=< đỉnh bậc lẻ đầu tiên>; stack = ϕ; CE = ϕ;
u => Stack; // Đưa u vào stack;

<u>Bước 2</u> (Lặp):

```
while (stack ≠ϕ) {
    v = <đỉnh đầu stack>;
    if (Ke(v) ≠ ϕ )  {
        t =<đỉnh đầu trong danh sách Ke(v)>;
        t => Stack; // đưa t vào stack;
        E = E \(v,t); //loại bỏ cạnh (v,t) đã đi qua;
    }
    else { // nếu Ke(v) = ϕ
        v = Pop(Stack); v=>CE; //Lấy v ra khỏi Stack và đưa vào CE
    }
}
```

<u>Bước 3</u> (Trả lại kết quả)

Lật ngược các đỉnh đã được lưu trong CE ta nhận được đường đi Euler.

c) Kiểm nghiệm thuật toán

Bước 1. Chọn u = 1 là đỉnh bậc lẻ đầu tiên đưa vào stack

Bước	Trạng thái Stack	Giá trị CE
1	1	ϕ
2	1, 2	
3	1, 2, 3	
4	1, 2, 3, 4	
5	1, 2, 3, 4,5	
6	1, 2, 3, 4,5,1	
7	1, 2, 3, 4,5,1,6	
8	1, 2, 3, 4,5,1,6,2	
9	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5	
10	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3	
11	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11	
12	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4	
13	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7	
14	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5	
15	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6	
16	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7	
17	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8	
18	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4	
19	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10	
20	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8	
21	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9	
22	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10	
23	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11	
24	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11,12	
25	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11,12,9	
26	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11,12,9,13	
27	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11,12,9,13,10	
28	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11,12,9,13,10,12	
29	1, 2, 3, 4,5,1,6,2,5,3,11, 4,7,5,6,7,8,4,10,8,9,10,11,12,9,13,10,12,13	
Đưa lần lượt các đỉnh trong Stack sang CE		
30 -59	CE = 13,12,10,13,9,12,11,10,9,8,10,4,8,7,6,5,7,4,11,3,5,2,6,1,5,4,3,2,1	
Lật ngược lại các đỉnh trong CE ta được đường đi Euler		
1- 2- 3- 4- 5- 1- 6- 2- 5- 3-11- 4- 7- 5- 6- 7- 8- 4-10- 8- 9- 10- 11-12- 9- 13-10-12-13		

7. Thuật toán Dijkstra

THUẬT TOÁN DIJKSTRA(s):

Đầu vào:

- Ma trận trọng số A[i, j]biểu diễn đồ thị G =<V,E>;
- s∈V là đỉnh xuất phát.

Đầu ra :

- Độ dài đường đi ngắn nhất từ s đến t; t∈V.
- Truoc[t] ghi nhận đường đi ngắn nhất từ s đến t.

Các bước thực hiện :

Bước 1 (Khởi tạo) :

```
D[s] =0 ; T = V\{s} ; //Cố định nhãn của D[s] là 0.
for v∈T do { //Dùng s gán nhãn cho tất cả các đỉnh còn lại
    d[v] = A[s,v]; truoc[v] =s;
}
```

Bước 2(Lặp):

```
    While(T≠∅){
        < Tìm u∈T thỏa mãn D[u] = Min {D[z] với z ∈T }>; // Tìm u là đỉnh có d[u] nhỏ nhất;
        T = T \ {u} ; // <Cố định nhãn của đỉnh u>;
        for v ∈ T do { // Dùng đỉnh u gán nhãn cho các đỉnh còn lại
            if (d[v]> d[u] +A[u,v]) {
                d[v] = d[u] +A[u,v];
                truoc[v] = u;
            }
        }
}
```

Bước 3 (Trả lại kết quả):

```
Return(D[v], Truoc[v]);
```

∞	4	9	∞	∞	3	∞	∞	2	∞	∞	5	∞
∞	∞	2	∞	4	1	5	∞	∞	3	∞	∞	1
∞	∞	∞	5	∞	6	∞	4	∞	∞	7	∞	∞
1	2	∞	∞	∞	7	∞	∞	4	∞	5	∞	∞
2	∞	∞	1	∞	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞	4
∞	∞	∞	∞	3	∞	∞	1	1	5	∞	∞	∞
∞	∞	3	∞	∞	3	∞	4	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	∞	1	3
∞	∞	5	∞	∞	∞	2	∞	∞	4	6	∞	∞
6	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	∞	2	∞
∞	1	∞	3	∞	∞	4	∞	5	∞	∞	∞	3
∞	5	∞	4	∞	7	∞	3	∞	∞	∞	5	∞

b) Kiểm nghiệm thuật toán

Bước	Đỉnh													Đỉnh cố định nhãn
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	<0,1>	<4,1>	<9,1>	<∞,1>	<∞,1>	<3,1>	<∞,1>	<∞,1>	<2,1>	<∞,1>	<∞,1>	<5,1>	<∞,1>	1
2	-	<4,1>	<7,9>	<∞,1>	<∞,1>	<3,1>	<4,9>	<∞,1>	*<2,1>	<6,9>	<8,9>	<5,1>	<∞,1>	9
3	-	<4,1>	<7,9>	<∞,1>	<6,6>	*<3,1>	<4,9>	<5,6>	-	<6,9>	<8,9>	<5,1>	<∞,1>	6
4	-	*<4,1>	<6,2>	<∞,1>	<6,6>	-	<4,9>	<5,6>	-	<6,9>	<8,9>	<5,1>	<5,2>	2
5	-	-	<6,2>	<∞,1>	<6,6>	-	*<4,9>	<5,6>	-	<6,9>	<8,9>	<5,1>	<5,2>	7
6	-	-	<6,2>	<∞,1>	<6,6>	-	-	*<5,6>	-	<6,9>	<8,9>	<5,1>	<5,2>	8
7	-	-	<6,2>	<8,12>	<6,6>	-	-	-	-	<6,9>	<8,9>	*<5,1>	<5,2>	12
8	-	-	<6,2>	<8,12>	<6,6>	-	-	-	-	<6,9>	<8,9>	-	*<5,2>	13
9	-	-	*<6,2>	<8,12>	<6,6>	-	-	-	-	<6,9>	<8,9>	-	-	3
10	-	-	-	<7,5>	*<6,6>	-	-	-	-	<6,9>	<8,9>	-	-	5
11	-	-	-	<7,5>	-	-	-	-	-	<6,9>	<8,9>	-	-	10
12	-	-	-	*<7,5>	-	-	-	-	-	-	<8,9>	-	-	4
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*<8,9>	-	-	11

8. Thuật toán Bellman-Ford

   a. Trình bày thuật toán

Thuật toán Bellman-Ford

Input :

- Đồ thị G = <V, E> không có chu trình âm
- A =(a_{ij}) là ma trận trọng số;
- s∈V là đỉnh xuất phát tùy ý.

Output:

- D[v]; v∈V: Khoảng cách từ s đến tất cả các đỉnh còn lại.
- Truoc[v] : Ghi nhận đỉnh trước v trong đường đi ngắn nhất.

Actions:

```
  Bước 1 (Khởi tạo):
      for v∈V do {
          D[v] = A[s][v];
          Truoc[v] = s;
      }
  Bước 2 (Lặp) :
      D[s] = 0; K=1;
      while (K<=N-2 ) {
          for v∈V\{s} do {
              for u∈V do {
                  if (D[v] > D[u] + A[u][v] ) {
                      D[v]=    D[u] + A[u][v];
                      Truoc[v] = u;
                  }
              }
          }
      }
  Bước 3 (Trả lại kết quả):
      Return( D[v], Truoc[v]: v∈U);
```

EndActions.

b. Kiểm nghiệm thuật toán: u=1

$$A = \begin{vmatrix} \infty & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 3 & 3 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty \end{vmatrix}$$

K=?	D[1], Truoc[1]	D[2], Truoc[2]	D[3], Truoc[3]	D[4], Truoc[4]	D[5], Truoc[5]
	<0,1>	<1,1>	<∞,1>	<∞,1>	<3,1>
1	<0,1>	<1,1>	<4,2>	<4,2>	<-1,3>
2	<0,1>	<1,1>	<4,2>	<3,5>	<-1,3>
3	<0,1>	<1,1>	<4,2>	<3,5>	<-1,3>

Vòng lặp K=1:

v=2; D[2] = 1
- D[1] + A[1, 2] = 0+1 (Không nhỏ hơn 1)
- D[2] + A[2, 2] = 1 + ∞>1
- D[3] + A[3, 2] = ∞ + ∞>1
- D[4] + A[4, 2] = ∞ + ∞>1
- D[5] + A[5, 2] = ∞ + ∞>1

v=3; D[3] = ∞
- D[1] + A[1,3] = 0+∞
- D[2] + A[2, 3] = 1 + 3 = 4<∞ (Thay D[3] = 4, Truoc[3] = 2)
- D[3] + A[3, 3] = 4 + ∞>4
- D[4] + A[4, 3] = ∞ + 2>4
- D[5] + A[5, 3] = ∞ + ∞>4

v=4; D[4] = ∞
- D[1] + A[1,4] = 0+∞
- D[2] + A[2, 4] = 1 + 3 = 4<∞ (Thay D[4] = 4, Truoc[4] = 2)
- D[3] + A[3, 4] = 4 + 1=5>4
- D[4] + A[4, 4] = 4 + ∞ >4
- D[5] + A[5, 4] = ∞ + 4>4

v=5; D[5] = 3
- D[1] + A[1,5] = 0+3 (Không nhỏ hơn 3)
- D[2] + A[2, 5] = 1 + 8 = 9>3
- D[3] + A[3, 5] = 4 -5=-1<3 (Thay D[5] = -1, Truoc[5] =3)
- D[4] + A[4, 5] = 4 + ∞ >-1
- D[5] + A[5, 5] = -1 + ∞>-1

Vòng lặp K=2:

v=2; D[2] = 1

D[1] + A[1, 2] = 0+1 (Không nhỏ hơn 1)

D[2] + A[2, 2] = 1 + ∞>1

D[3] + A[3, 2] = 4 + ∞>1

D[4] + A[4, 2] = 4 + ∞>1

D[5] + A[5, 2] = -1 + ∞>1

v=3; D[3] = 4

D[1] + A[1, 3] = 0+∞>4

D[2] + A[2, 3] = 1 + 3 =4 (Không nhỏ hơn 4)

D[3] + A[3, 3] = 4 + ∞>4

D[4] + A[4, 3] = 4 + 2>4

D[5] + A[5, 3] = -1 + ∞>4

v=4; D[4] = 4

D[1] + A[1, 4] = 0+∞>4

D[2] + A[2, 4] = 1 + 3 =4 (Không nhỏ hơn 4)

D[3] + A[3, 4] = 4 + 1>4

D[4] + A[4, 4] = 4 + ∞>4

D[5] + A[5, 4] = -1 + 4=3< 4 (Thay D[4] = 5, Truoc[4] = 5

v=5; D[5] = -1

D[1] + A[1, 5] = 0+∞>-1

D[2] + A[2, 5] = 1 + 3 =-1

D[3] + A[3, 5] = 4 + 1>-1

D[4] + A[4, 5] = 3 + ∞>-1

D[5] + A[5, 5] = -1 + ∞>-1

Vòng lặp K=3:

v=2; D[2] = 1

D[1] + A[1, 2] = 0+1 (Không nhỏ hơn 1)

D[2] + A[2, 2] = 1 + ∞>1

D[3] + A[3, 2] = 4 + ∞>1

D[4] + A[4, 2] = 3 + ∞>1

D[5] + A[5, 2] = -1 + ∞>1

v=3; D[3] = 4

D[1] + A[1, 3] = 0+∞>4

D[2] + A[2, 3] = 1 + 3 =4 (Không nhỏ hơn 4)

D[3] + A[3, 3] = 4 + ∞>4

D[4] + A[4, 3] = 3 + 2>4

D[5] + A[5, 3] = -1 + ∞>4

v=4; D[4] = 3

D[1] + A[1, 4] = 0+∞>3

D[2] + A[2, 4] = 1 + 3 =3

D[3] + A[3, 4] = 4 + 1>3

D[4] + A[4, 4] = 3 + ∞>3

D[5] + A[5, 4] = -1 + 4=3(Không nhỏ hơn 3)

v=5; D[5] = -1

D[1] + A[1, 5] = 0+∞>-1

D[2] + A[2, 5] = 1 + 3 =-1

D[3] + A[3, 5] = 4 + 1>-1

D[4] + A[4, 5] = 3 + ∞>-1

D[5] + A[5, 5] = -1 + ∞>-1

c) Bài tập: tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh u =1, 2, ..,9

$$\begin{vmatrix}
\infty & 7 & \infty & 9 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 3 & \infty & -4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & -8 & \infty & -3 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -4 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 2 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -2 & \infty & \infty & -3 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty
\end{vmatrix}$$

9. Thuật toán PRIM

Cho đồ thị vô hướng có trọng số G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận trọng số như hình bên phải. Hãy thực hiện:

a) Trình bày thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất trên đồ thị vô hướng có trọng số?

b) Áp dụng thuật toán, tìm cây khung nhỏ nhất tại đỉnh số 1 của đồ thị G, chỉ rõ kết quả theo từng bước thực hiện của thuật toán?

$$\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & 2 & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & \infty & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 5 & 5 & 6 & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 7 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 8 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty
\end{vmatrix}$$

a) Trình bày thuật toán:

Thuật toán Prim:

Bước 1 (Khởi tạo):

T = ϕ; D(T) = 0; V_T = ϕ; u =<Đỉnh xuất phát bất kỳ>;

V = V\u; $V_T = V_T \cup$ u;

Bước 2 (Lặp):

while (V$\neq\phi$) {

<Chọn e = (v, t) là cạnh có trọng số nhỏ nhất sao cho v$\in$V, t$\in V_T$ >;

if (d(e) = ∞) { <đồ thị không liên thông>; return (∞);}

T = T$\cup${e}; D(T) = D(T) + d(e);

V = V \ v; $V_T = V_T \cup$v;

}

Bước 3 (Trả lại kết quả):

Return(T, D(T));

b) Kiểm nghiệm thuật toán với đỉnh xuất phát u=1.

Bước khởi tạo: T =ϕ; D(T)=0; V = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13; V_T =1

e=(v,t)| v∈V, t∈V_T có độ dài nhỏ nhất	V \v = ?	V_T ∪v=?	T, D(T)
(1,3)	2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13	1,3	T = T∪(1,3) D(T) = 0 +1
(1,2)	4,5,6,7,8,9,10,11,12,13	1,2,3	T = T∪(1,2) D(T) = 1+2=3
(1,4)	5,6,7,8,9,10,11,12,13	1,2,3,4	T = T∪(1,4) D(T) = 3+3=6
(2,6)	5, 7,8,9,10,11,12,13	1,2,3,4,6	T = T∪(2,6) D(T) = 6+5=11
(2,7)	5, 8,9,10,11,12,13	1,2,3,4,6,7	T = T∪(2,7) D(T) = 11+5=16
(4,5)	8,9,10,11,12,13	1,2,3,4,5, 6,7	T = T∪(4,5) D(T) = 16+5=21
(5,10)	8,9,11,12,13	1,2,3,4,5, 6,7,10	T = T∪(5,10) D(T) = 21+6=27
(6,8)	9,11,12,13	1,2,3,4,5, 6,7,8,10	T = T∪(6,8) D(T) = 27+6=33
(6,9)	11,12,13	1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10	T = T∪(6,9) D(T) = 33+6=39
(8,12)	11,13	1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10,12	T = T∪(8,12) D(T) = 39+7=46
(8,13)	11	1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10,12,13	T = T∪(8,13) D(T) = 46+7=53
(9,11)	ϕ	1,2,3,4,5, 6,7,8,9,10,12,13,11	T = T∪(9,11) D(T) = 53+7=60
V = ϕ : kết thúc bước lặp			

Kết quả: T = { (1,3), (1,2), (1,4), (2,6), 2,7), (4,5), (5,10), (6,8),(6,9), (8,12), (8,13), (9,11) }
D(T) = 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 +7 = 60

10. Thuật toán Kruskal

Cho đồ thị vô hướng có trọng số G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận trọng số như hình bên phải. Hãy thực hiện:

a) Trình bày thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất trên đồ thị vô hướng có trọng số.

b) Áp dụng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất trên đồ thị G, chỉ rõ kết quả theo từng bước thực hiện của thuật toán.

$$
\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & 2 & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & \infty & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 5 & 5 & 6 & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 7 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 8 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty
\end{vmatrix}
$$

a) Trình bày thuật toán Kruskal

```
Thuật toán Kruskal;
Bước 1 (Khởi tạo):
  T = φ; D(T) =0;
Bước 2 (Sắp xếp):
  <Sắp xếp các cạnh theo thứ tự tăng dần của trọng số>
Bước 3 (Lặp)
  while (|T| <N-1 && E≠φ) {
      e = <Cạnh có trọng số nhỏ nhất>; E = E\ {e};
      if (T∪{e} – Không tạo nên chu trình){
          T = T∪{e}; D(T) = D(T) + d(e);
      }
  }
  if ( |T| <N-1) { <Đồ thị không liên thông>; exit;}
Bước 4 (Trả lại cây khung nhỏ nhất)
  return(T, D(T));
```

b) Kiểm nghiệm thuật toán

Bước 1: T = ϕ; D(T) = 0;

Bước 2. Sắp xếp các cạnh theo thứ tự tăng dần của trọng số

Đầu	Cuối	Tr.Số
1	2	2
1	3	1
1	4	3
2	3	2
2	6	5
2	7	5
3	4	4
3	6	5
4	5	5
4	6	5
5	6	6
5	10	6
6	7	6
6	8	6
6	9	6
6	10	6
7	8	6
8	9	7
8	12	7
8	13	7
9	10	7
9	11	7
10	11	7
10	12	7
11	12	8
12	13	8

Đầu	Cuối	Tr.Số
1	3	1
1	2	2
2	3	2
1	4	3
3	4	4
2	6	5
2	7	5
3	6	5
4	5	5
4	6	5
5	6	6
5	10	6
6	7	6
6	8	6
6	9	6
6	10	6
7	8	6
8	9	7
8	12	7
8	13	7
9	10	7
9	11	7
10	11	7
10	12	7
11	12	8
12	13	8

Bước 3 (lặp) :

STT	Cạnh được xét	T $\cup$e
1	E \(1,3)	T = T$\cup$(1,3); D(T) = 1
2	E = E\(1,2)	T = T$\cup$(1,2) ; D(T) = 1+2 =3
3	E = E\(2,3)	*Tạo nên chu trình*
4	E = E\(1,4)	T = T$\cup$(1,4); D(T) = 3 +3 =6
5	E = E\(3,4)	*Tạo nên chu trình*
6	E = E\(2,6)	T = T$\cup$(2,6); D(T) = 6+5=11
7	E = E\(2,7)	T = T$\cup$(2,7); D(T) = 11+5 =16
8	E = E\(3,6)	*Tạo nên chu trình*
9	E = E\(4,5)	T = T$\cup$ (4,5); D(T) = 16+5 =21
10	E = E\(4,6)	*Tạo nên chu trình*
11	E = E\(5,6)	*Tạo nên chu trình*
12	E = E\(5,10)	T = T$\cup$(5,10); D(T) = 21+6 =27
13	E = E\(6,7)	*Tạo nên chu trình*
14	E = E\(6,8)	T = T$\cup$(6,8); D(T) = 27+6 =33
15	E = E\(6,9)	T = T$\cup$(6,9); D(T) = 33+6 =39
16	E = E\(6,10)	*Tạo nên chu trình*
17	E = E\(7,8)	*Tạo nên chu trình*
18	E = E\(8,9)	*Tạo nên chu trình*
19	E = E\(8,12)	T = T$\cup$(8,12); D(T) = 39+7 =46
20	E = E\(8,13)	T = T$\cup$(8,13); D(T) = 46+7 =53
21	E = E\(9,10)	*Tạo nên chu trình*
22	E = E\(9,11)	T = T$\cup$(9,11); D(T) = 53+7 =60
Bước lặp kết thúc vì |T|> N-1 =12		

Kết quả:

T = { (1,3), (1,2), (1,4), (2,6), 2,7), (4,5), (5,10), (6,8),(6,9), (8,12), (8,13), (9,11) }
D(T) = 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 +7 = 60

1. Cho một mạng gồm *N* máy tính. Biết giữa hai máy tính bất kỳ đều có đường cable nối trực tiếp hoặc gián tiếp thông qua một số máy tính trung gian. Để tiết kiệm đường cable, người ta nghĩ cách loại bỏ đi một số đường cable nối bắt đầu tại máy tính thứ *u* sao cho ta vẫn nhận được một mạng máy tính liên thông. Biết chi phí cable nối giữa máy tính thứ *i* và máy tính *j* là một số nguyên dương $C_{ij} = C_{ji}$ (*i, j = 1, 2, .., N*), Trong đó, $C_{ii}=\infty$, $C_{ij}=\infty$ được hiểu là không có đường cable nối giữa máy tính thứ *i* và máy tính thứ *j*. Hãy thực hiện:

a) Trình bày giải pháp loại bỏ các đường cable nối sao cho tổng chi phí các đường cable được loại bỏ là ít nhất có thể?
b) Xây dựng thuật toán giải quyết bài toán giải quyết bài toán theo phương án lựa chọn?
c) Kiểm nghiệm thuật toán đã được xây dựng ở trên tại máy tính u=1 cho mạng gồm 13 máy tính được cho bởi ma trận chi phí như hình bên phải? Chỉ rõ các kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán và tập cạnh được loại bỏ có tổng chi phí ít nhất?

Lời giải.

a) Phương pháp giải quyết bài toán

Biểu diễn mạng máy tính như một đồ thị vô hướng có trọng số G=<V,E>. Trong đó V là tập đỉnh gồm N máy tính (V =1, 2, .., N); E là tập cạnh là tập các đường cable nối trực tiếp giữa máy tính *i* và máy tính *j* . Khi đó, ma trận chi phí C =(C_{ij}) trở thành ma trận trọng số biểu diễn đồ thị G.

Cho biểu diễn đồ thị G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận trọng số ở trên. Rõ ràng, một mạng máy tính liên thông nhỏ nhất là một phương án xây dựng cây khung trên đồ thị trọng số G =<V,E> bắt đầu tại máy tính thứ $u\in V$. Gọi H =<V, T> là một cây khung của đồ thị G =<V,E> (T$\subseteq$E). Gọi D(G) là tổng chi phí của toàn bộ mạng được xác định theo công thức (1), gọi D(H) là tổng chi phí của mạng tối thiểu. Khi đó, tổng chi phí các cạnh được loại bỏ xác định theo công thức (3).

$$D(G) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij} \qquad (1)$$

$$D(H) = \sum_{(i,j)\in T} C_{ij} \qquad (2)$$

$$D(G) - D(H) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij} - \sum_{(i,j)\in T} C_{ij} \qquad (3)$$

Khi đó, bài toán được phát biểu lại là trong số các cây khung của G=<V,E> bắt đầu tại đỉnh thứ *u*, hãy tìm cây khung H =<V, T> sao cho D(G) - D(H) đạt giá trị nhỏ nhất.

$$D(G) - D(H) = \left(\sum_{(i,j)\in E} C_{ij} - \sum_{(i,j)\in T} C_{ij} \right) \rightarrow Min \qquad (4)$$

Vì tổng chi phí của G =<V,E> là $D(G) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}$ là hằng số, nên (4) đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $D(H) = \sum_{(i,j)\in T} C_{ij}$ đạt giá trị lớn nhất. Vì yêu cầu bài toán bắt buộc phải thực hiện tại máy tính số $u\in V$ nên ta sửa đổi lại thuật toán PRIM bắt đầu tại đỉnh u∈V bằng cách thay việc tìm cây khung nhỏ nhất bằng tìm cây khung lớn nhất.

b) **Thuật toán PRIM mở rộng xác định cây khung lớn nhất có tổng trọng số các cạnh loại bỏ nhiều nhất bắt đầu tại đỉnh u∈V**.

Thuật toán PRIM (u):

Bước 1 (Khởi tạo):

$D(G) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}$; D(H) = 0; T=∅; V = V\{u}; V^T = {u};

Bước 2 (Lặp):

while (V≠∅) {

e =<s, t> là cạnh có độ dài lớn nhất, sao cho s∈V, t∈V^T;

if (d(e) =∞) { <đồ thị không liên thông>; return(∞);}

D(H) = D(H) + d(e);//d(e) = C[s, t] là độ dài cạnh e =(s,t);

T = T∪{e}; //Bổ sung cạnh e =(s,t) vào tập cạnh cây khung

V = V\ {s}; V^T = V^T∪{s};

Bước 3(Trả lại kết quả):

Return(D(G)-D(H), E\T);

c) **Kiểm nghiệm thuật toán tại u=1**

Bước khởi tạo:

D(G) = 2 + 1 + 3 +2 + 5 + 5 + 4 +5 + 5+ 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 +7+7 +8 + 8 = 144

D(H) =0; T =∅. V = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}, V^T = {1};

Bước lặp:

e=(s,t)∈E|s∈V, t∈V^T	V	V^T	D(H)=?, T=?
(4,1)	2,3,5,6,7,8,9,10,11, 12, 13	1, 4	D(H)=3; T=T∪(4,1)
(5,4)	2,3,6,7,8,9,10,11, 12, 13	1, 4, 5	D(H)=8; T=T∪(5,4)
(6,5)	2,3,7,8,9,10,11, 12, 13	1, 4, 5, 6	D(H)=14; T=T∪(6,5)
(10,5)	2,3,7,8,9,11, 12, 13	1, 4, 5, 6,10	D(H)=20; T=T∪(10,5)
(9,10)	2,3,7,8,11, 12, 13	1, 4, 5, 6,10,9	D(H)=27; T=T∪(9,10)
(8,9)	2,3,7,11, 12, 13	1, 4, 5, 6,10,9,8	D(H)=34; T=T∪(8,9)
(12,8)	2,3,7,11, 13	1, 4, 5, 6,10,9,8,12	D(H)=41; T=T∪(12,8)
(11,12)	2,3,7, 13	1, 4, 5, 6,10,9,8,12,11	D(H)=49; T=T∪(11,12)
(13,12)	2,3,7	1, 4, 5, 6,10,9,8,12,11,13	D(H)=57; T=T∪(13,12)

(7,6)	2,3	1, 4, 5, 6,10,9,8,12,11,13,7	D(H)=63; T=T∪(7,6)
(2,6)	3	1,4,5,6,10,9,8,12,11,13,7,2	D(H)=68; T=T∪(2,6)
(3,6)	∅	1,4,5,6,10,9,8,12,11,13,7,2,3	D(H)=73; T=T∪(3,6)

Như vậy :

Tổng chi phí các đường cable được loại bỏ là: D(G)-D(H) = 144 - 73 = 71.

Các đường cable được loại bỏ bao gồm: các cạnh E\T

(1, 2), (1,3), (2, 3), (2,7), (3,4), (4,6), (6,8), (6,9), (6,10), (7,8), (8,13), (9,11),(10,11), (10,12)

2 + 1 + 2 + 5 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6+ +6 +6+7 + 7+ 7+7 = = 71

$$
\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & 2 & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & \infty & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 5 & 5 & 6 & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 7 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 8 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty
\end{vmatrix}
$$

2. Cho một mạng gồm *N* máy tính. Biết giữa hai máy tính bất kỳ đều có đường cable nối trực tiếp hoặc gián tiếp thông qua một số máy tính trung gian. Để tiết kiệm đường cable, người ta nghĩ cách loại bỏ đi một số đường cable nối bắt đầu tại máy tính thứ *u* sao cho ta vẫn nhận được một mạng máy tính liên thông. Biết chi phí cable nối giữa máy tính thứ *i* và máy tính *j* là một số nguyên dương $C_{ij} = C_{ji}$ (*i, j = 1, 2, .., N*), Trong đó, $C_{ii}=\infty$, $C_{ij}=\infty$ được hiểu là không có đường cable nối giữa máy tính thứ *i* và máy tính thứ *j*. Hãy thực hiện:

a) Trình bày giải pháp loại bỏ các đường cable nối sao cho tổng chi phí các đường cable được loại bỏ là *nhiều nhất* có thể?
b) Xây dựng thuật toán giải quyết bài toán giải quyết bài toán theo phương án lựa chọn?
c) Kiểm nghiệm thuật toán đã được xây dựng ở trên tại máy tính u=1 cho mạng gồm 13 máy tính được cho bởi ma trận chi phí như hình bên phải? Chỉ rõ các kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán và tập cạnh được loại bỏ có tổng chi phí nhiều nhất?

Lời giải.

a) Phương pháp giải quyết bài toán

Biểu diễn mạng máy tính như một đồ thị vô hướng có trọng số G=<V,E>. Trong đó V là tập đỉnh gồm N máy tính (V =1, 2, .., N); E là tập cạnh là tập các đường cable nối trực tiếp giữa máy tính *i* và máy tính *j* . Khi đó, ma trận chi phí C =(C_{ij}) trở thành ma trận trọng số biểu diễn đồ thị G.

Cho biểu diễn đồ thị G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng ma trận trọng số ở trên. Rõ ràng, một mạng máy tính liên thông nhỏ nhất là một phương án xây dựng cây khung trên đồ thị trọng số G =<V,E> bắt đầu tại máy tính thứ $u \in V$. Gọi H =<V, T> là một cây khung của đồ thị G =<V,E> ($T \subseteq E$). Gọi D(G) là tổng chi phí của toàn bộ mạng được xác định theo công thức (1), gọi D(H) là tổng chi phí của mạng tối thiểu. Khi đó, tổng chi phí các cạnh được loại bỏ xác định theo công thức (3).

$$D(G) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij} \qquad (1)$$

$$D(H) = \sum_{(i,j)\in T} C_{ij} \qquad (2)$$

$$D(G) - D(H) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij} - \sum_{(i,j)\in T} C_{ij} \qquad (3)$$

Khi đó, bài toán được phát biểu lại là trong số các cây khung của G=<V,E> bắt đầu tại đỉnh thứ *u*, hãy tìm cây khung H =<V, T> sao cho D(G) - D(H) đạt giá trị lớn nhất.

$$D(G) - D(H) = \left(\sum_{(i,j)\in E} C_{ij} - \sum_{(i,j)\in T} C_{ij} \right) \to Max \qquad (4)$$

Vì tổng chi phí của G =<V,E> là $D(G) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}$ là hằng số, nên (4) đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $D(H) = \sum_{(i,j)\in T} C_{ij}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Vì yêu cầu bài toán bắt buộc phải thực hiện tại máy tính số $u \in V$ nên chỉ cần thực hiện thuật toán PRIM bắt đầu tại đỉnh $u \in V$.

b) **Thuật toán PRIM xác định cây khung nhỏ nhất**.

Thuật toán PRIM (u):

Bước 1 (Khởi tạo):

$D(G) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}$; D(H) = 0; T=∅; V = V\{u}; V^T = {u};

Bước 2 (Lặp):

while (V≠∅) {

e =<s, t> là cạnh có độ dài nhỏ nhất, sao cho s∈V, t∈V^T;

if (d(e) =∞) { <đồ thị không liên thông>; return(∞);}

D(H) = D(H) + d(e);//d(e) = C[s, t] là độ dài cạnh e =(s,t);

T = T∪{e}; //Bổ sung cạnh e =(s,t) vào tập cạnh cây khung

V = V\ {s}; V^T = V^T∪{s};

Bước 3(Trả lại kết quả):

Return(D(G)-D(H), E\T);

c) **Kiểm nghiệm thuật toán tại u=1**

Bước khởi tạo:

D(G) = 2 + 1 + 3 +2 + 5 + 5 + 4 +5 + 5+ 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 +7+7 +8 + 8 = 144

D(H) =0; T =∅. V = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}, V^T = {1};

Bước lặp:

e=(s,t)∈E|s∈V, t∈V^T	V=?	V^T	D(H)=?, T=?
(3,1)	2,4,5,6,7,8,9,10,11, 12, 13	1, 3	D(H)=1; T=T∪(3,1)
(2,1)	4,5,6,7,8,9,10,11, 12, 13	1,3, 2	D(H)=3; T=T∪(2,1)
(4,1)	5,6,7,8,9,10,11, 12, 13	1,3,2,4	D(H)=6; T=T∪(4,1)
(6,2)	5,7,8,9,10,11, 12, 13	1,3,2,4,6	D(H)=11; T=T∪(6,2)
(7,2)	5,8,9,10,11, 12, 13	1,3,2,4,6,7	D(H)=16; T=T∪(7,2)
(7,2)	5,8,9,10,11, 12, 13	1,3,2,4,6,7	D(H)=16; T=T∪(7,2)
(5,4)	8,9,10,11, 12, 13	1,3,2,4,6,7,5	D(H)=21; T=T∪(5,4)
(10,5)	8,9,11, 12, 13	1,3,2,4,6,7,5,10	D(H)=27; T=T∪(10,5)
(8,6)	9,11, 12, 13	1,3,2,4,6,7,5,10,8	D(H)=33; T=T∪(8,6)
(9,6)	11, 12, 13	1,3,2,4,6,7,5,10,8,9	D(H)=39; T=T∪(9,6)
(12,8)	11, 13	1,3,2,4,6,7,5,10,8,9,12	D(H)=46;

			T=T∪(12,8)
(13,8)	11	1,3,2,4,6,7,5,10,8,9,12,13	D(H)=53; T=T∪(13,8)
(11,9)	∅	1,3,2,4,6,7,5,10,8,9,12,13,11	D(H)=60; T=T∪(11,9)

Như vậy :

Tổng chi phí các đường cable được loại bỏ là: D(G)-D(H) = 144 - 60 = 84.

Các đường cable được loại bỏ bao gồm: các cạnh E\T

(2, 3), (3,4), (3, 6), (4,6), (5,6), (6,7), (6,10), (7,8), (8,9), (9,10), (10,11), (10,12),(11,12), (12,13)

$$\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
2 & \infty & 2 & \infty & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & 2 & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
3 & \infty & 4 & \infty & 5 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & 5 & 5 & 6 & \infty & 6 & 6 & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 7 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 7 & \infty & 8 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & 7 & 8 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty
\end{vmatrix}$$

3. Cho đồ thị *vô hướng liên thông G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều sâu (*DFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

4. Cho đồ thị *có hướng liên thông mạnh G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều sâu (*DFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

5. Cho đồ thị *vô hướng liên thông G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều sâu (*DFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

6. Cho đồ thị *có hướng liên thông mạnh G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều sâu (*DFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

7. Cho đồ thị *vô hướng liên thông G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều rộng (*BFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt s∈V của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

8. Cho đồ thị *có hướng liên thông mạnh G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng ma trận kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều rộng (*BFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

9. Cho đồ thị *vô hướng liên thông G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều rộng (*BFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

10. Cho đồ thị *có hướng liên thông mạnh G =<V, E>*, được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như hình bên phải. Ta gọi đỉnh $s \in V$ là đỉnh "*thắt*" của cặp đỉnh $u, v \in V$ nếu mọi đường đi từ *u* đến *v* đều phải qua *s*. Dựa vào thuật toán duyệt theo chiều rộng (*BFS*), hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm tất cả các đỉnh *thắt* $s \in V$ của cặp đỉnh $u, v \in V$?

b) Tìm tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh u=1, v=8 trên đồ thị đã cho, chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh u =1, v =13 trên đồ thị đã cho chỉ rõ kết quả theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

1. Sử dụng thuật toán *DFS* xác định tập đỉnh thắt $s \in V$ của cặp đỉnh *u, v*:

Rõ ràng, với mọi $u, v \in V$ nếu $v \in DFS(u)$ thì ta rút ra kết luận có đường đi từ đỉnh u đến v. Vì vậy, nếu ta loại bỏ đỉnh $s \in V$ ($s \neq u$, $s \neq v$) cùng với các cạnh nối với *s* ra khỏi đồ thị mà $v \in DFS(u)$ thì ta có kết luận vẫn còn ít nhất một đường đi khác không qua *s* nối giữa *u* và *v*. Trong trường hợp này ta có kết luận *s* không phải là đỉnh thắt của cặp đỉnh *u, v*. Nếu ta loại bỏ đỉnh $s \in V$ ($s \neq u$, $s \neq v$) cùng với các cạnh nối với *s* ra khỏi đồ thị mà $v \notin DFS(u)$ thì ta khẳng định mọi đường đi từ u đến v bắt buộc phải qua *s*. Trong trường hợp này ta có kết luận *s* là đỉnh thắt của cặp đỉnh *u, v*. Thuật toán được mô tả như sau:

a) Thuật toán:

```
Thuật toán Duyệt-Đỉnh-Thắt( u, v) {
  for each s ∈ V\{u, v} do {
      chuaxet[s] = False;//Loại bỏ đỉnh s cùng các cạnh nối với s
      if (v∈DFS(u) ) <s không là đỉnh thắt của u, v>;
      else < s là đỉnh thắt của u, v>;
      ReInit();
  }
```

}

Trong đó, thủ tục DFS(u) và ReInit() được mô tả như dưới đây.

Thuật toán DFS(u) {

for each v $\in$ Ke(u) do {

if (chuaxet[v]) DFS(v);

}

}

Thủ tục ReInit() {

for i =1 to n do

chuaxet[i] = True;

}

2. Kiểm nghiệm thuật toán:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

a) u =1,v =12:

Loại bỏ đỉnh s≠1,s≠12	**DFS(1)=?**	**12∈ DFS(1)?**
s = 2	DFS(1) =1, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 3	DFS(1) =1, 2, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 4	DFS(1) =1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 5	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 6	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 7	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 8	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 9	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 11, 13	Yes
s = 10	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8	Yes
s =11	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 13	Yes
s =13	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11	Yes

Từ đây ta có kết luận cặp đỉnh u=1, v=12 không có đỉnh thắt.

c) u =1,v =13:

Loại bỏ đỉnh s≠1,s≠13	DFS(1)=?	13∈ DFS(1)?
s = 2	DFS(1) =1, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 3	DFS(1) =1, 2, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 4	DFS(1) =1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 5	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 6	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 7	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 8	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 10, 9, 11, 13	Yes
s = 9	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 11, 13	Yes
s = 10	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8	No
s =11	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 12, 8, 10, 9, 13	Yes
s =12	DFS(1) =1, 2, 3, 4, 7, 5, 6, 8	No

Từ đây ta kết luận đỉnh s=10, s =12 là đỉnh thắt của cặp đỉnh u=1, v=12.

2. Sử dụng thuật toán *BFS* xác định tập đỉnh thắt *s∈V* của cặp đỉnh *u, v*:

Rõ ràng, với mọi *u, v∈ V* nếu *v∈ BFS*(*u*) thì ta rút ra kết luận có đường đi từ đỉnh u đến v. Vì vậy, nếu ta loại bỏ đỉnh *s∈V* (*s≠u, s≠v*) cùng với các cạnh nối với *s* ra khỏi đồ thị mà v∈BFS(u) thì ta có kết luận vẫn còn ít nhất một đường đi khác không qua *s* nối giữa *u* và *v*. Trong trường hợp này ta có kết luận *s* không phải là đỉnh thắt của cặp đỉnh *u, v*. Nếu ta loại bỏ đỉnh *s∈V* (*s≠u, s≠v*) cùng với các cạnh nối với *s* ra khỏi đồ thị mà *v∉* BFS(u) thì ta khẳng định mọi đường đi từ u đến v bắt buộc phải qua *s*. Trong trường hợp này ta có kết luận *s* là đỉnh thắt của cặp đỉnh *u, v*. Thuật toán được mô tả như sau:

a) Thuật toán:

Thuật toán Duyệt-Đỉnh-Thắt(u, v) {
for each s∈ V\{u, v} do {
chuaxet[s] = False;//Loại bỏ đỉnh s cùng các cạnh nối với s
if (v∈BFS(u)) <s không là đỉnh thắt của u, v>;
else < s là đỉnh thắt của u, v>;
ReInit();//Khởi tạo lại mảng chưaxet[]
}
}

Trong đó, thủ tục BFS(u) và ReInit() được mô tả như dưới đây.

Thuật toán BFS(u) {
Bước 1(Khởi tạo):
Queue = ∅; Push(Queue, u); chuaxet[u] = False;
Bước 2 (Lặp):
while (Queue≠∅) {
s = Pop(Queue);
for each t ∈ Ke(s) do {
if (chuaxet[t]) {
Push(Queue,t);Chuxet[t]=False;

}
}
}
Bước 3(Trả lại kết quả) :
Return(<Tập đỉnh được duyệt>) ;

}

Thủ tục ReInit() {
for i =1 to n do
chuaxet[i] = True;
}

b) Kiểm nghiệm thuật toán

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

+ Cặp đỉnh thắt của u=1, v=13

Loại bỏ đỉnh $s\neq 1, s\neq 13$	**BFS(1)=?**	**$13\in$ BFS(1)?**
s = 2	BFS(1) =1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 3	BFS(1) =1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 4	BFS(1) =1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 5	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 6	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 7	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 8	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 9	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 11, 12	Yes
s = 10	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13	Yes
s =11	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 12	Yes
s =12	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11	Yes

Như vậy cặp đỉnh u=1, v=13 không có đỉnh thắt.

+ Cặp đỉnh thắt của u=1, v=12

Loại bỏ đỉnh $s\neq1, s\neq12$	**BFS(1)=?**	**12$\in$ BFS(1)?**
s = 2	BFS(1) =1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 3	BFS(1) =1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 4	BFS(1) =1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 5	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 6	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 7	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 8	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 10, 9, 11, 12	Yes
s = 9	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 11, 12	Yes
s = 10	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13	No
s =11	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 10, 9, 12	Yes
s =13	BFS(1) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	No

Như vậy cặp đỉnh u=1, v=12 có đỉnh thắt là s=10 và s = 13.

1. Cho đồ thị vô hướng G =<V, E>, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề (ma trận kề). Ta nói, đồ thị G có thành phần Euler nếu tồn tại một thành phần liên thông của G là Euler; đồ thị G có thành phần nửa Euler nếu tồn tại một thành phần liên thông của G là nửa Euler. Dựa vào thuật toán DFS, hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm các thành phần liên thông của đồ thị G?

b) Kiểm nghiệm thuật toán đã được xây dựng ở Mục a trên đồ thị G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như dưới đây? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm thành phần Euler (nếu có) và thành phần nửa Euler (nếu có) của G?

Ke(1) = { 2, 3, 4}.	Ke(5) = { 3, 4, 6, 7}.	Ke(9) = { 8, 10}.
Ke(2) = { 1, 3, 4, 7}.	Ke(6) = { 3, 5, 7}.	Ke(10) = { 8, 9, 11, 12}.
Ke(3) = { 1, 2, 4, 5, 6, 7}.	Ke(7) = { 2, 3, 5, 6}.	Ke(11) = { 8,10, 12,13}.
Ke(4) = { 1, 2, 3, 5}.	Ke(8) = { 9, 10, 11, 12}.	Ke(12) = { 8,10, 11,13}.
		Ke(13) = { 11, 12}.

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}$$

---

2. Cho đồ thị vô hướng G =<V, E>, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh được biểu diễn dưới dạng danh sách kề (ma trận kề). Ta gọi thành phần Euler của đồ thị G là một thành phần liên thông của G và thành phần liên thông này tạo nên một đồ thị Euler. Thành phần nửa Euler của đồ thị G là một thành phần liên thông của G và thành phần liên thông này tạo nên một đồ thị nửa Euler. Dựa vào thuật toán DFS, hãy thực hiện:

a) Xây dựng thuật toán tìm các thành phần liên thông của đồ thị G?

b) Kiểm nghiệm thuật toán đã được xây dựng ở Mục a trên đồ thị G =<V,E> được biểu diễn dưới dạng danh sách kề như dưới đây? Chỉ rõ kết quả trung gian theo mỗi bước thực hiện của thuật toán?

c) Tìm thành phần Euler (nếu có), thành phần nửa Euler (nếu có) của G?

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Lời giải.

a) Thuật toán DFS(u) tìm tất cả thành phần liên thông của G=<V, E>.

Thuật toán Duyet_TPLT:

Input :

- Đồ thị G = <V, E> gồm n đỉnh;
- Solt =0; // Biến toàn cục ghi nhận số liên thông của đồ thị
- Chuaxet[]; //Mảng toàn cục ghi nhận các đỉnh đã duyệt
- TPLT[]; // Mảng toàn cục ghi nhận các đỉnh thuộc mỗi TPLT

Output:

- Trả lại tập đỉnh của mỗi thành phần liên thông;

Các bước thực hiện:

Bước 1 (*Khởi tạo*):
```
for (u =1; u≤ n; u++ ) {
        chuaxet[i] = TRUE ;
        TPLT[u] = 0;
}
```
Bước 2 (*Lặp*):
```
for ( u=1; u≤ n; u++ ) {
    if (chuaxet[u] ) {
        solt++; DFS(u);//BFS(u);
    }
}
```
Bước 3 (*Trả lại kết quả*):
```
Result(); //Đưa ra tập đỉnh của mỗi thành phần liên thông
```

Trong đó, thuật toán DFS(u), BFS(u) Result() ghi nhận tập đỉnh của mỗi thành phần liên thông được thực hiện như sau:

```
Thuật toán   DFS(u) {
    chuaxet[u] = FALSE; //Ghi nhận đỉnh đã duyệt
    TPLT[u] = solt; // Ghi nhận thành phần liên thông của đỉnh u.
    for ( v =1; v≤ n; v++) {
        if (chuaxet[v]) DFS(v);
    }
}
```

Thuật toán BFS(u):

```
    Bước 1 (khởi tạo):
      Queue = ∅; Push(queue, u); chuaxet[u]=FALSE;
    Bước 2 (lặp):
      while (Queue≠∅ ) {
          s = Pop(Queue); //Lấy s ra khỏi hàng đợi
                TPLT[s] = solt; //Ghi nhận TPLT của s
                for each t∈ke(s) do {
                if (chuaxet[t] ) {
                      Push(Queue, t); // Đưa t vào hàng đợi.
                            chuaxet[t] =False;//Bật trạng thái của t.
                }
          }
      }
  Bước 3 (Trả lại kết quả) :
      <Trả về tập đỉnh liên thông với u> ;
}
Procedure Result( ) {
  for ( i =1; i≤solt) {
      for ( int u =1; u≤n ; j++ ){
          if (TPLT[u] = = i ){
              <Ghi nhận u thuộc thành phần liên thông i>;
          }
      }
  }
}
```

b) Kiểm nghiệm thuật toán theo DFS:

Bước	Đỉnh u∈V được duyệt	Thành phần liên thông của đỉnh. TPLT[u] =solt
1	1	TPLT[1]=1
2	3	TPLT[3]=1
3	5	TPLT[5]=1
4	7	TPLT[7]=1
5	9	TPLT[9]=1
6	11	TPLT[11]=1
7	13	TPLT[13]=1
8	2	TPLT[2]=2
9	4	TPLT[4]=2
10	6	TPLT[6]=2
11	8	TPLT[8]=2
12	10	TPLT[10]=2
13	12	TPLT[12]=2
14	Tập đỉnh thộc thành phần liên thông 1: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13} Tập đỉnh thộc thành phần liên thông 2: {2, 4, 6, 8, 10, 12}	

c) Kiểm nghiệm thuật toán theo BFS:

Bước	Đỉnh u∈V được duyệt	Thành phần liên thông của đỉnh. TPLT[u] =solt
1	1	TPLT[1]=1
2	3	TPLT[3]=1
3	5	TPLT[5]=1
4	7	TPLT[7]=1
5	11	TPLT[11]=1
6	9	TPLT[9]=1
7	13	TPLT[13]=1
8	2	TPLT[2]=2
9	4	TPLT[4]=2
10	6	TPLT[6]=2
11	8	TPLT[8]=2
12	10	TPLT[10]=2
13	12	TPLT[12]=2
14	Tập đỉnh thộc thành phần liên thông 1: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13} Tập đỉnh thộc thành phần liên thông 2: {2, 4, 6, 8, 10, 12}	

d) Tìm tập đỉnh và tập cạnh của thành phần Euler của G

Thành phần liên thông có tập đỉnh V1 = { 2, 4, 6, 8, 10, 12 } là thành phần Euler vì:

deg (2) = deg(12) = 2 (chẵn).

deg(4) = deg(6) = deg(8) = deg(10) = 4 (chẵn).

Tập cạnh của thành phần Euler bao gồm:

{ (2, 4), (2, 6), (4, 6), (4, 8), (4, 10), (6, 8), (6,10), (8,10), (8,12), (10,12) }

e) Tìm tập đỉnh và tập cạnh của thành phần nửa Euler của G

Thành phần liên thông có tập đỉnh V2 = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 } là thành phần nửa Euler vì:

deg (1) = deg(13) = 3 (lẻ): có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

deg(3) = deg(5) = deg(7) = deg(9) = deg (11) = 4 (chẵn).

Tập cạnh của thành phần Euler bao gồm:

{ (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (3, 11), (5,7), (5,9), (5,11), (5,13), (7, 9), (9,11), (9,13), (11,13) }

2. Cho đồ thị có hướng, có trọng số không âm được biểu diễn dưới dạng ma trận trọng số. Hãy thực hiện:
   a) Trình bày thuật toán tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $s \in V$ đến đỉnh $t \in V$ trên đồ thị có trọng số không âm?
   b) Sử dụng thuật toán đã được trình bày tại mục a, xây dựng thuật toán tìm đường đi từ s đến *t* đi qua đỉnh *u* sao cho đường đi từ *s* đến *u* có độ dài nhỏ nhất và đường đi từ *u* đến *t* có độ dài nhỏ nhất?
   c) Kiểm nghiệm thuật toán xây dựng tại Mục b trên đồ thị trọng số ở hình bên phải, tìm đường đi từ đỉnh 1 đến đỉnh 13 đi qua đỉnh 6 sao cho đường đi từ đỉnh 1 đến 6 có độ dài nhỏ nhất và đường đi từ đỉnh 6 đến 13 có độ dài nhỏ nhất?

$$
\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 8 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 1 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 9 & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 7 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty
\end{vmatrix}
$$

Lời giải. *Thực hiện hai lần thuật toán Dijkstra (s, u) và Dijkstra (u, t).*

a) **Trình bày thuật toán** (đây chính là thuật toán Dijkstra khi nhãn của đỉnh t được cố định).

Thuật toán Dijkstra (s∈V là đỉnh xuất phát, t∈V là đỉnh đích) :

Input :
- A[i, j] (i, j =1, 2, .., N) là biểu diễn trọng số không âm của đồ thị G =<V, E>;

Output :
- D[t] là độ dài đường đi ngắn nhất từ s đến t;
- Truoc[t], t∈V là biến toàn cục ghi nhận đường đi từ s đến t.

Các bước tiến hành:

Begin:

Bước 1 (*Khởi tạo*): Sử dụng s để gán nhãn cho tất cả các đỉnh v.

```
D[s] = 0; T = V\{s};// T là tập các đỉnh có nhãn tạm thời
for each v∈V do {
      D[v] = D[s] + A[s, v]; Truoc[v] = s;
}
```

Bước 2 (*Lặp*). Sử dụng đỉnh có nhãn nhỏ nhất để gán nhãn cho các đỉnh còn lại.

```
while (T≠∅ ) do {
      < Tìm đỉnh u∈T thỏa mãn D[u] = Min( D[z] | z∈T>;
      T = T\ {u}; //Cố định nhãn của đỉnh u
      if ( u = = t ) // Nếu u đã là đỉnh đích
                  Return (D[u], Truoc[u]); // Trả lại kết quả
      for each v∈T do { // sử dụng u gán nhãn lại cho các đỉnh còn lại
            if (D[v] > D[u] + A[u, v]) {
                  D[v] = D[u] + A[u,v]; //Thay đổi nhãn của v
                  Truoc[v] = u; //Ghi nhận đỉnh gán nhãn cho v.
            }
      }
```

Bước 3 (Trả lại kết quả):

```
if (D[t] = ∞ ) <Không có đường đi từ s đến t>
else < Đưa ra D[t] và Truoc[t]>;
```

end.

b) Thuật toán tìm đường đi từ s đến t qua u có d(s,u) và d(u, t) nhỏ nhất: Ta chỉ cần gọi liên tiếp hai lần thủ tục Dijkstra(s,u) và Dijkstra(u,t).

Thuật toán Min(s∈V, u∈V, t∈V) :

Input : A[i, j] (i, j =1, 2, .., N) là biểu diễn trọng số không âm của đồ thị G =<V, E>;

Output : D[t] = D[s, u] + D[u, t] ;

Thực hiện :

```
Begin :
        Dijkstra (s, u) ;// Tìm đường đi ngắn nhất từ s đến u là Truoc[u] ;
        if (D[u] <∞ ) { //Tồn tại đường đi ngắn nhất từ s đến u là D[u]
                <Ghi nhận đường đi ngắn nhất từ s đến u> ;
                Dijkstra (u, t) ;// Tìm đường đi ngắn nhất từ u đến t
                if (D[t]< ∞ ) {//Tồn tại đường đi ngắn nhất từ u đến t là D[t]
                        <Ghi nhận đường đi ngắn nhất từ u đến t là truoc[t]> ;
                        D[t] = D[t] + D[u] ; //
                        Return (D[t], Truoc[u], Truoc[t]) ;//Trả lại nghiệm bài toán
                }
        }
        Return(∞) ; //Không tồn tại đường đi từ s - u - t thỏa mãn yêu cầu bài toán ;
  End.
```

c) Kiểm nghiệm thuật toán với s =1, t = 13, u = 6

$$\begin{vmatrix}
\infty & 2 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 8 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 1 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 9 & 8 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 7 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty
\end{vmatrix}$$

Thực hiện Dijkstra(1, 6) :

Bước	Nhãn và đỉnh gán nhãn <D[u], Truoc[u]>												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	**<0,1>**	<2,1>	<8,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>
2	-	**<2,1>**	<4,2>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<11,7>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>
3	-	-	**<4,2>**	<10,3>	<∞,1>	<12,3>	<5,3>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>
4	-	-	-	<10,3>	<∞,1>	<7,7>	**<5,3>**	<7,7>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>
5	-	-	-	-		**<7,7>**	-						
6	Ghi nhận D[u], Truoc[u] : D[6] = 7 ; Đường đi ngắn nhất từ 1 đến 6 : 1->2->3->7->6												

Thực hiện Dijkstra(6, 13) :

Bước	Nhãn và đỉnh gán nhãn <D[u], Truoc[u]>												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<∞,1>	<1,6>	**<0,6>**	<∞,6>	<9,6>	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>
2	<∞,1>	<∞,1>	<2,5>	<8,5 >	**<1,6>**	-	<∞,6>	<9,6>	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>
3	<∞,1>	<∞,1>	**<2,5>**	<8,5 >	-	-	<3,3>	<9,6>	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>
4	<∞,1>	<∞,1>	-	<8,5 >	-	-	**<3,3>**	<5,7>	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>	<∞,6>
5	<∞,1>	<∞,1>	-	<8,5 >	-	-	-	**<5,7>**	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	<7,8>	<∞,6>
6	<∞,1>	<∞,1>	-	<8,5 >	-	-	-	-	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	**<7,8>**	<9,12>
7	<15,4>	<∞,1>	-	**<8,5 >**	-	-	-	-	<8,6>	<∞,6>	<∞,6>	-	<9,12>
8	<15,4>	<∞,1>	-	-	-	-	-	-	**<8,6>**	<14,9>	<∞,6>	-	<9,12>
9													**<9,12>**
	Ghi nhận D[t], Truoc[t] : D[13] =9 ; Đường đi ngắn nhất từ 6 đến 13 : 6->5->3->7->8->12->13												

Kết quả đường đi từ 1 đến 13 qua đỉnh 6 thỏa mãn yêu cầu bài toán có độ dài nhỏ nhất là :

D[13] = 9 + 7 = 16

Dường đi : 1->2->3->7->6->5->3->7->8->12->13

(*Chú ý đường đi có thể bị lặp vì bài toán không bắt ta phải tìm đường đi đơn*).