Chương 5: CÂY (Tree)

Nội dung

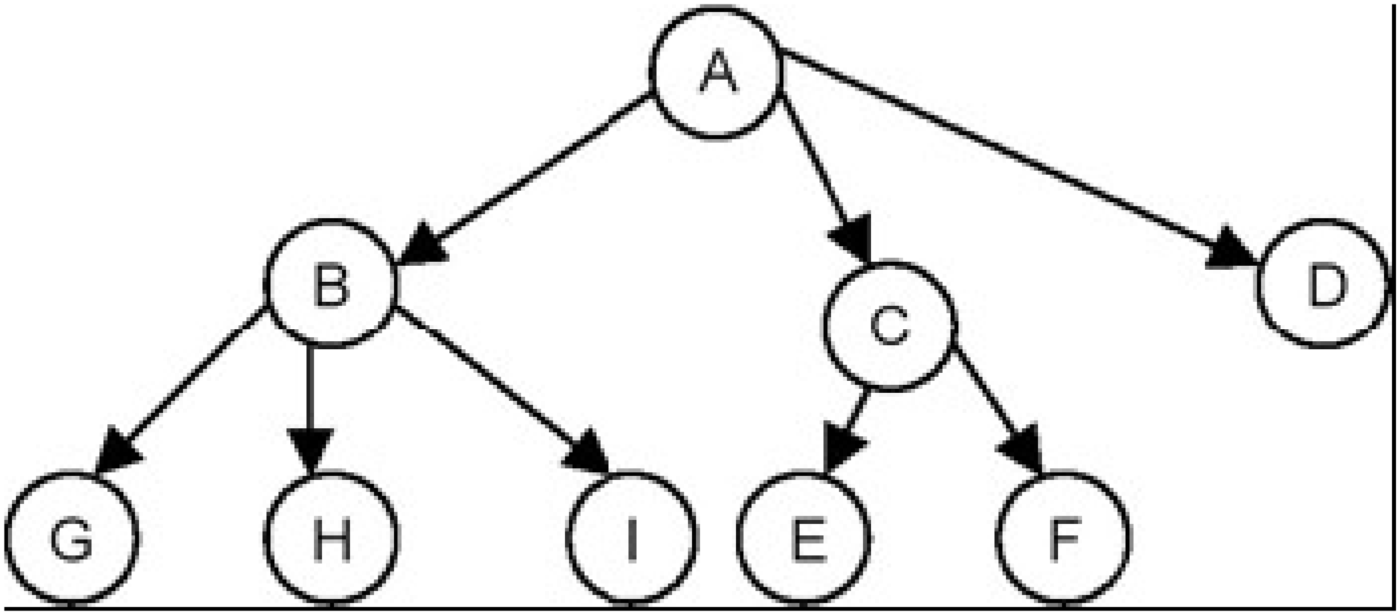
- Cấu trúc cây (Tree)
- Cấu trúc cây nhị phân (*Binary Tree*)
- Cấu trúc cây nhị phân tìm kiếm (*Binary Search Tree*)
- Cấu trúc cây nhị phân tìm kiếm cân bằng (AVL Tree)

Tree – Định nghĩa

- Cây là một tập hợp T các phần tử (gọi là nút của cây) trong đó có 1 nút đặc biệt được gọi là gốc, các nút còn lại được chia thành những tập rời nhau T_1, T_2 , ... , T_n theo quan hệ phân cấp trong đó T_i cũng là một cây

- A tree is a set of one or more nodes T such that:
  - i. there is a specially designated node called a root
  - ii. The remaining nodes are partitioned into *n disjointed* set of nodes T1, T2,…,T*n*, each of which is a tree

Tree – Ví dụ



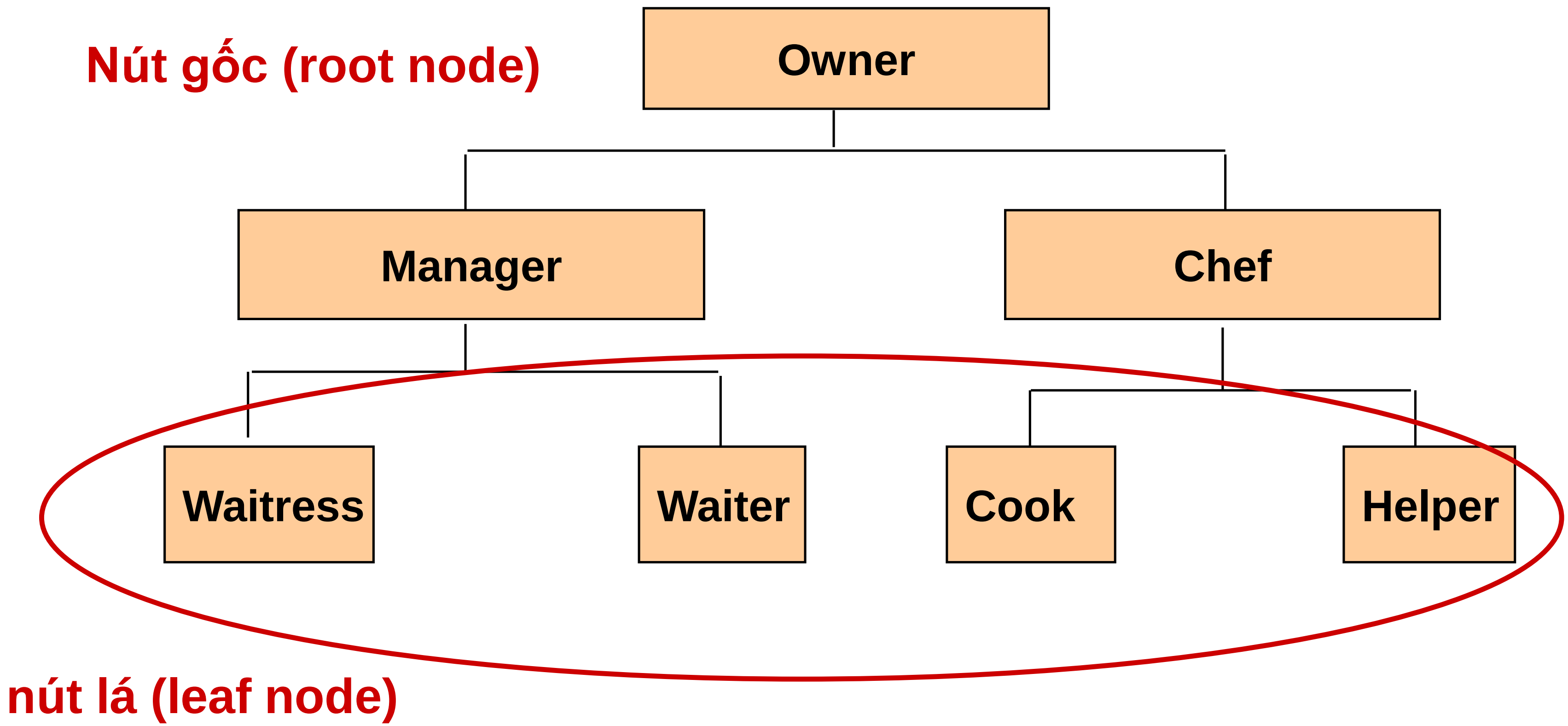
Tree - Một số khái niệm cơ bản

- Bậc của một nút (Degree of a Node of a Tree):
  - Là **số cây con** của nút đó. Nếu bậc của một nút bằng 0 thì nút đó gọi là nút lá (**leaf node**)
- Bậc của một cây (Degree of a Tree):
  - Là **bậc lớn nhất** của các nút trong cây. Cây có bậc n thì gọi là cây **n-phân**
- Nút gốc (Root node):
  - Là nút không có nút cha
- Nút lá (Leaf node):
  - Là nút có **bậc bằng 0**

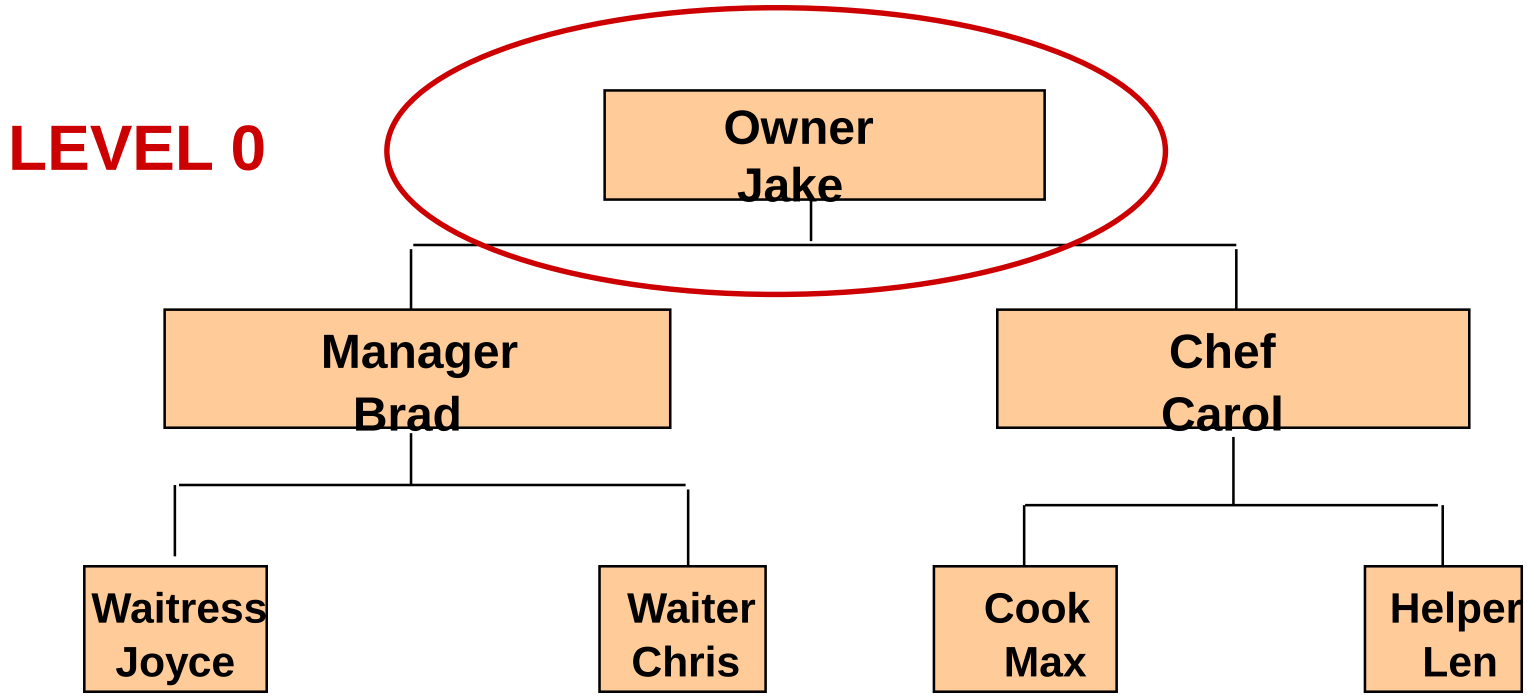
Tree - Một số khái niệm cơ bản

- Nút nhánh:
  - Là nút có bậc khác 0 và không phải là gốc
- Mức của một nút (Level of a Node):
  - Mức (gốc (T)) = 0
  - Gọi T_1, T_2, T_3, ... , T_n là các cây con của T_0 Mức(T_1) = Mức(T_2) = ... = Mức(T_n) = Mức(T_0) + 1
- **Chiều cao** (height) hay **chiều sâu** (depth) của một cây là số mức lớn nhất của nút có trên cây đó

Tree – Ví dụ


Nút gốc (root node)
Owner
Manager
Chef
Waitress
Waiter
Cook
Helper
nút lá (leaf node)

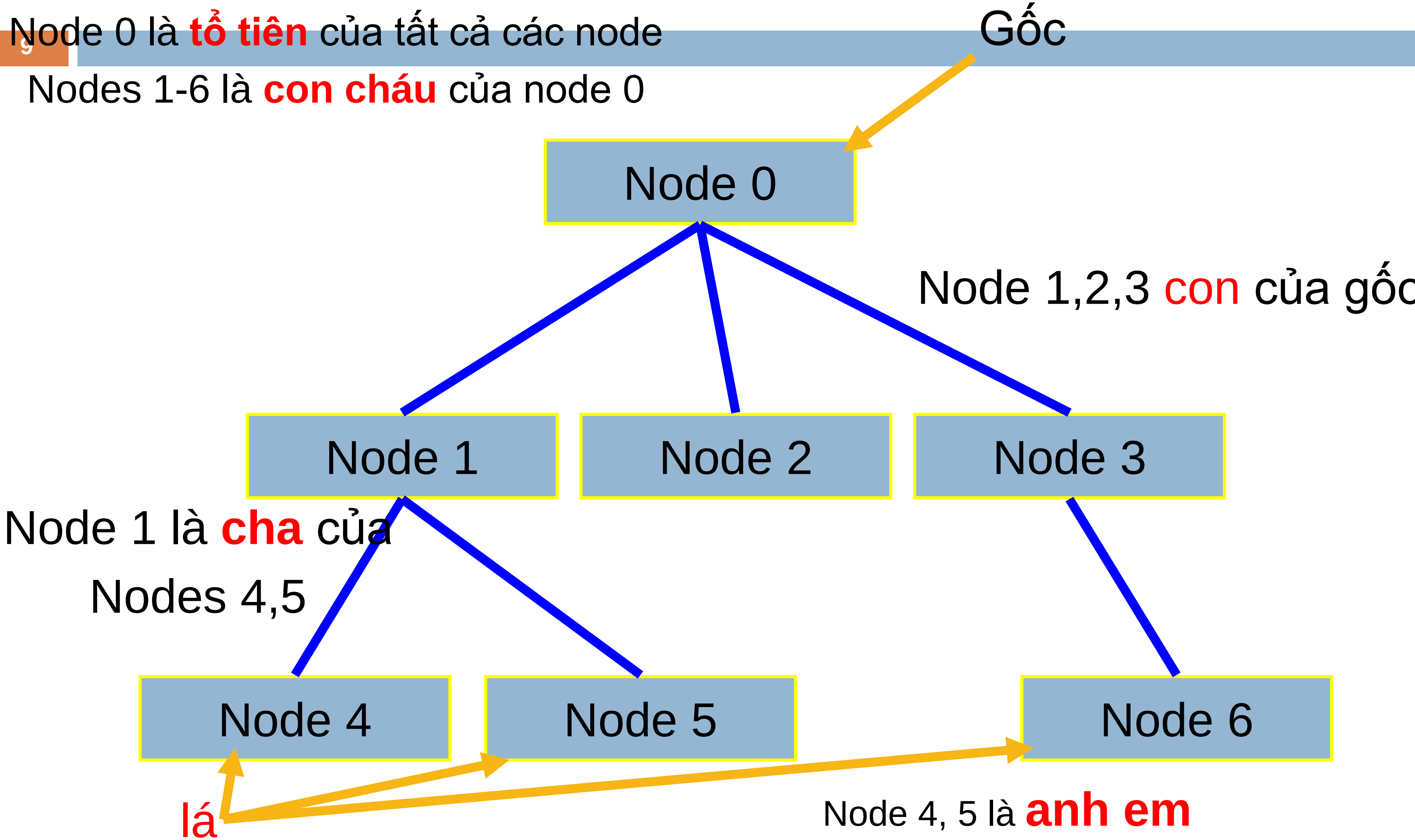
A Tree Has Levels



Định nghĩa

Node 0 là **tổ tiên** của tất cả các node

Nodes 1-6 là **con cháu** của node 0



Một số khái niệm cơ bản

- **Độ dài đường đi từ gốc đến nút x:**

  $P_x =$ **số nhánh** cần đi qua kể từ gốc đến x

- **Độ dài đường đi tổng của cây**: $$P_T = \sum_{X \in T} P_X$$

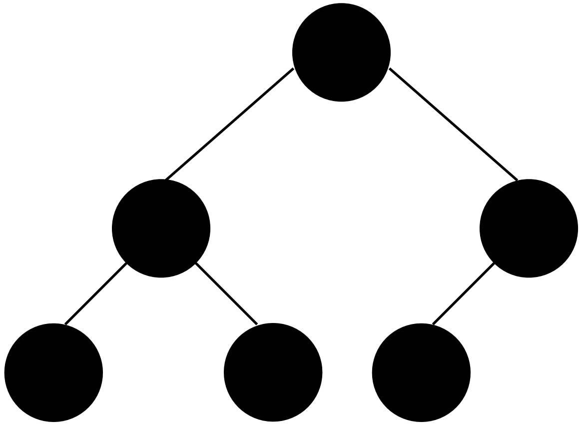
  trong đó P_x là độ dài đường đi từ gốc đến X

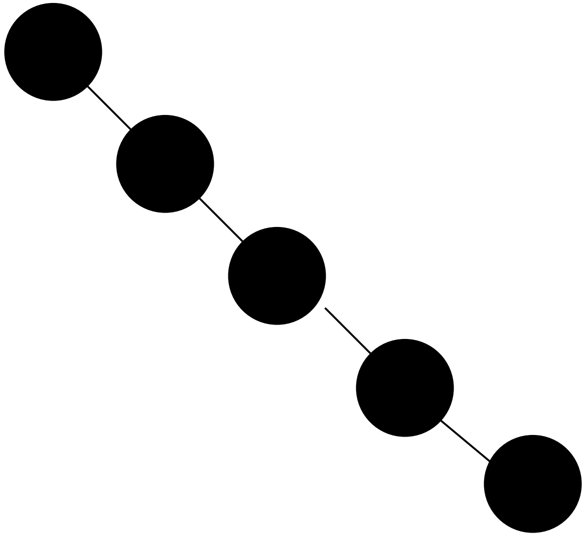
- **Độ dài đường đi trung bình**: $P_I = P_T/n$ (n là số nút trên cây T)

- **Rừng cây**: là tập hợp nhiều cây trong đó thứ tự các cây là quan trọng

Binary Tree – Định nghĩa

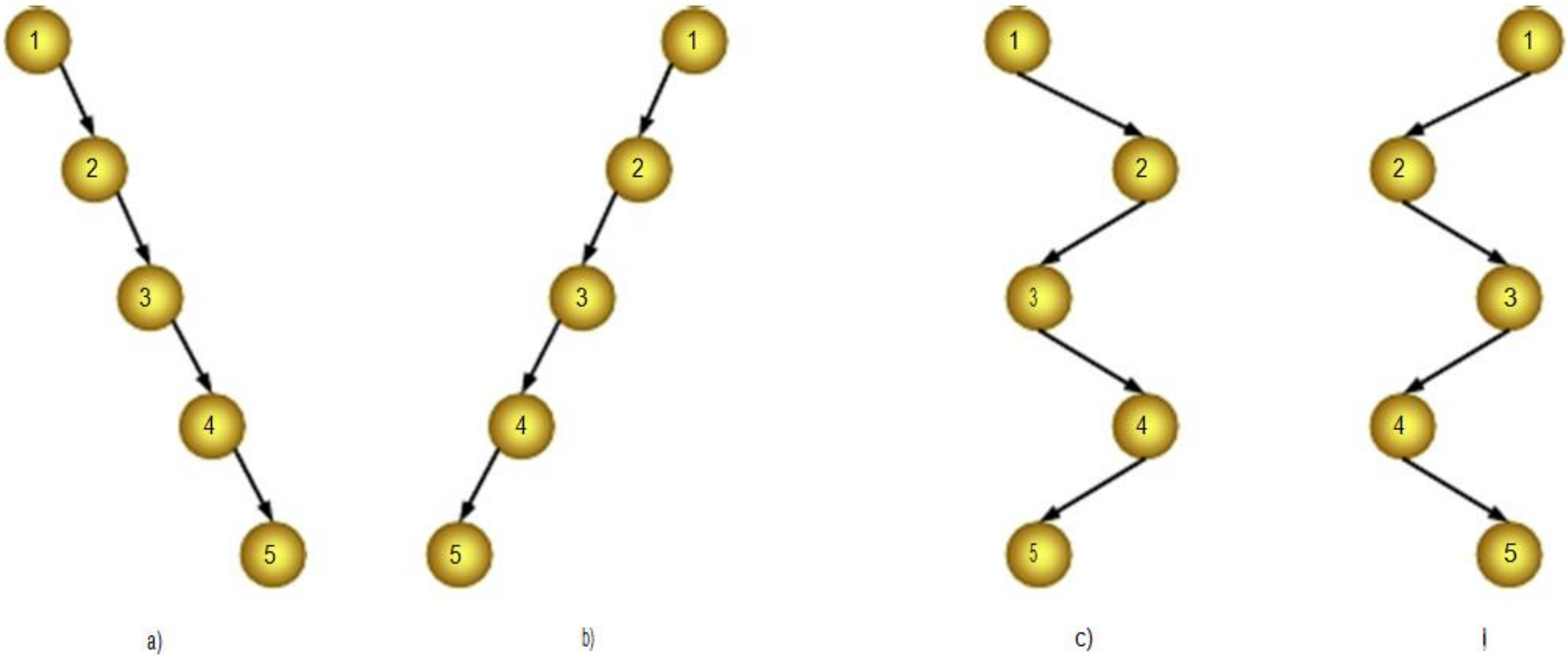
- Cây nhị phân là cây mà mỗi nút có tối đa 2 cây con





Binary Tree – Ví dụ

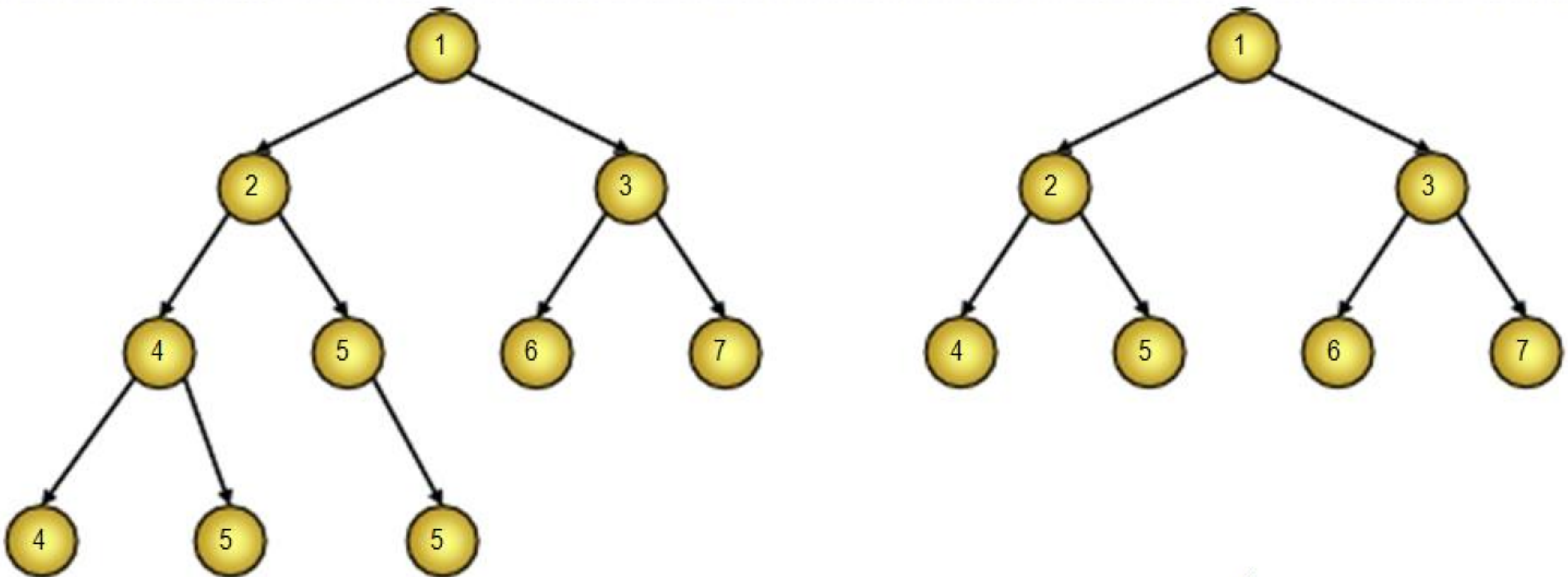
- Cây lệch trái, cây lệch phải, cây zíc-zắc



2. Cây nhị phân (Binary tree)

- **Cây nhị phân hoàn chỉnh** (complete binary tree) có chiều cao là h thì mọi nút có mức < h-1 đều có đúng 02 nút con.
- **Cây nhị phân đầy đủ** (full Binary tree)

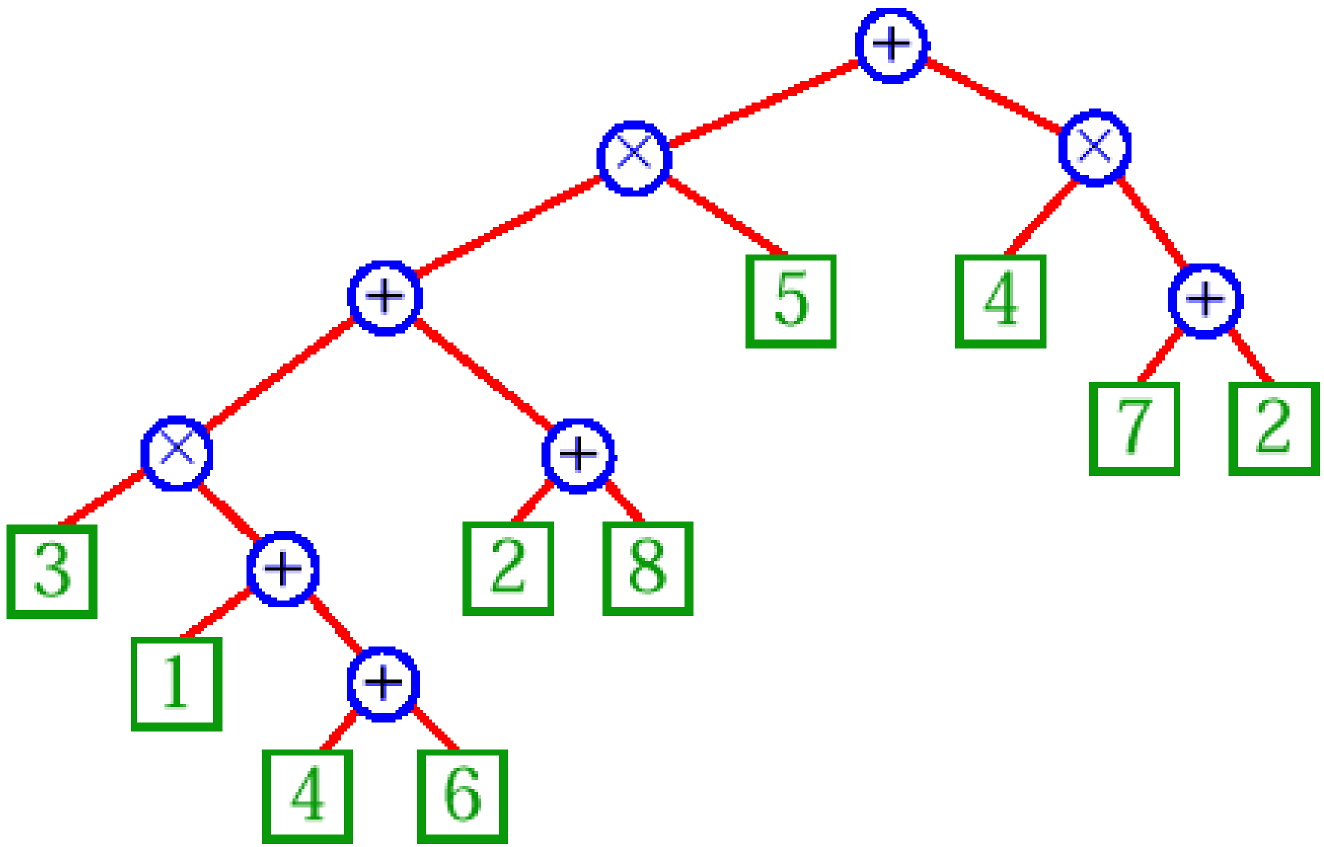
có chiều cao h thì mọi nút có mức <=h-1 đều có đúng 02 nút con



e) f)

Binary Tree – Ví dụ

- Cây nhị phân dùng để biểu diễn một biểu thức toán học:

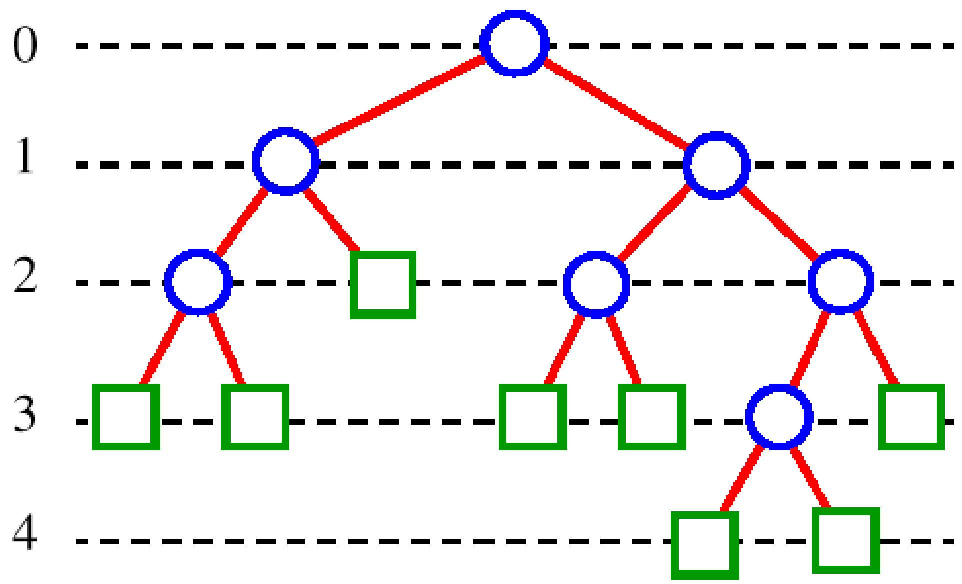


$((((3 \times (1 + (4 + 6))) + (2 + 8)) \times 5) + (4 \times (7 + 2)))$

Binary Tree – Một số tính chất

- Số nút nằm ở mức i $\leq 2^{i}$
- Số nút lá $\leq 2^{h-1}$, với h là chiều cao của cây
- Chiều cao của cây $h \geq \log_2 N$, với N là số nút trong cây
- Số nút trong cây $\leq 2^{h-1}$, với h là chiều cao của cây

Xem them gtrinh trang 142



2. Cây nhị phân (Binary tree)

b) Một số các tính chất:

- Nếu số lượng nút là như nhau thì cây nhị phân suy biến có chiều cao lớn nhất, cây nhị phân đầy đủ có chiều cao nhỏ nhất.
- Số lượng tối đa các nút trên mức i là 2i-1 và tối thiểu là 1 (i>=1)
- Số lượng tối đa các nút trên cây nhị phân có chiều cao h là 2^h-1 và tối thiểu là h (h>=1)
- Cây nhị phân hoàn chỉnh có n nút thì chiều cao của nó là

$$h=[\lg_2(n)]+1$$

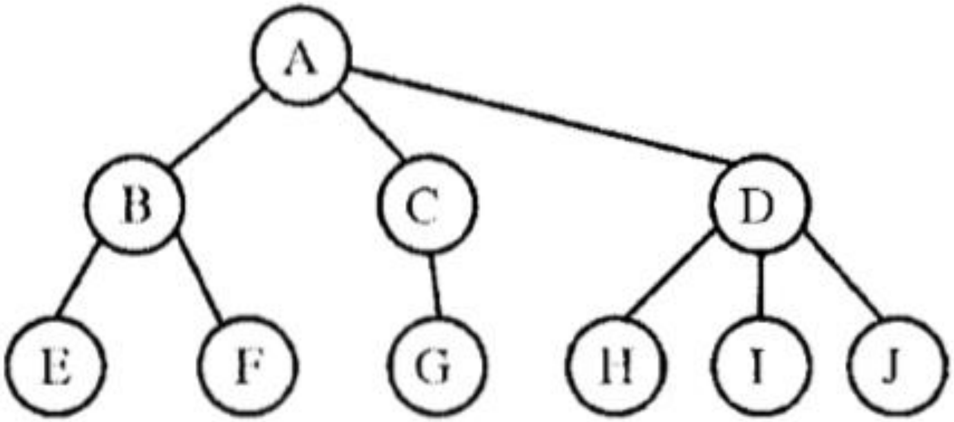
2. Cây nhị phân tương dương (Binary tree)-119

- Biểu diễn cây tổng quát bằng cây nhị phân tương đương:
- Mỗi node có cấu trúc
  - Node con trái là node con cực trái (CHILD) của node đó
  - Node con phải là node em kế cận phải (SIBLING) của node đó

Địa chỉ con cực trái	**Data**	**Địa chỉ em kế cận phải**

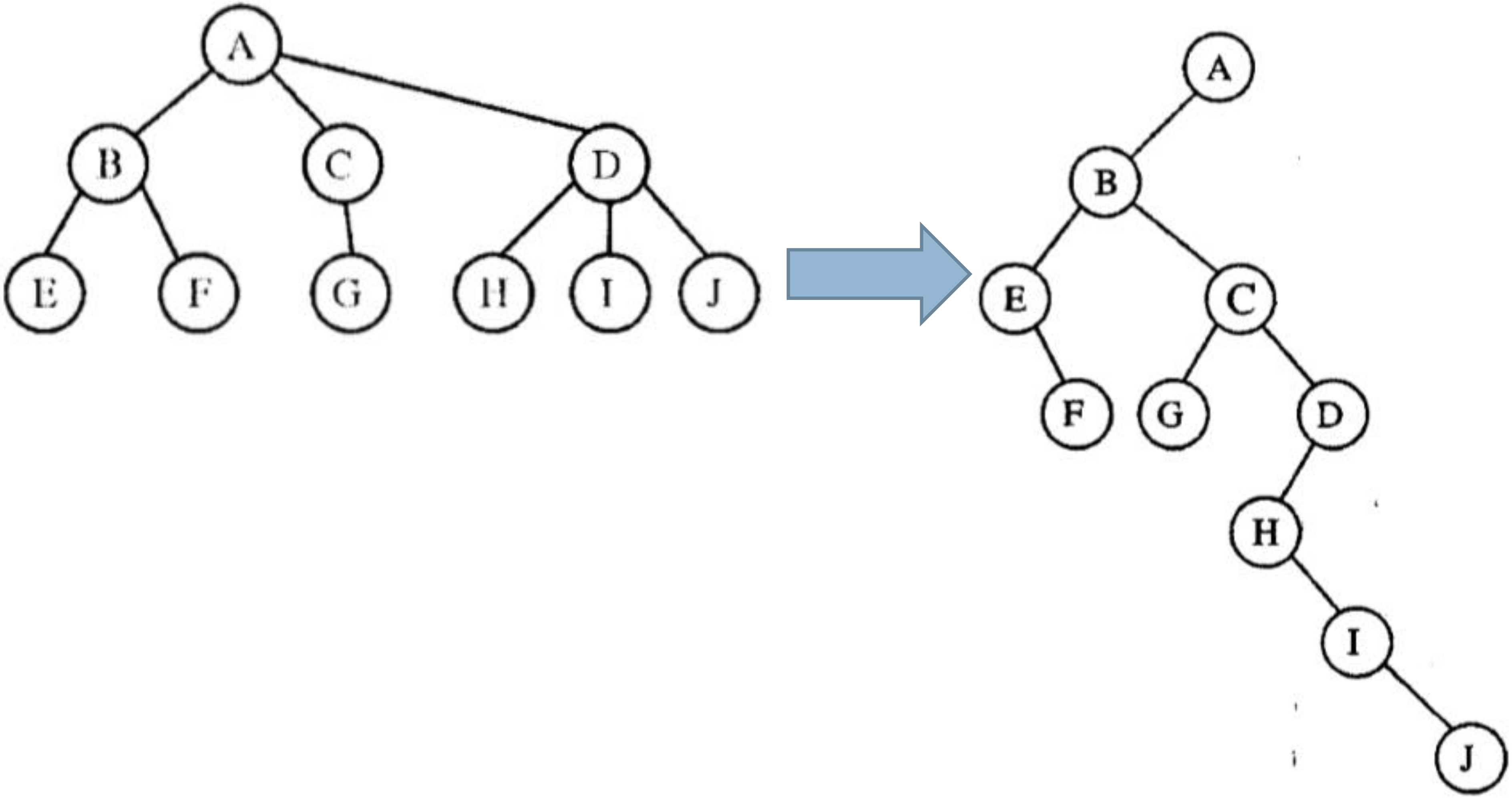
2. Cây nhị phân tương dương (Binary tree)-119

CHILD: node cực trái
SIBLING : node em kế cận phải



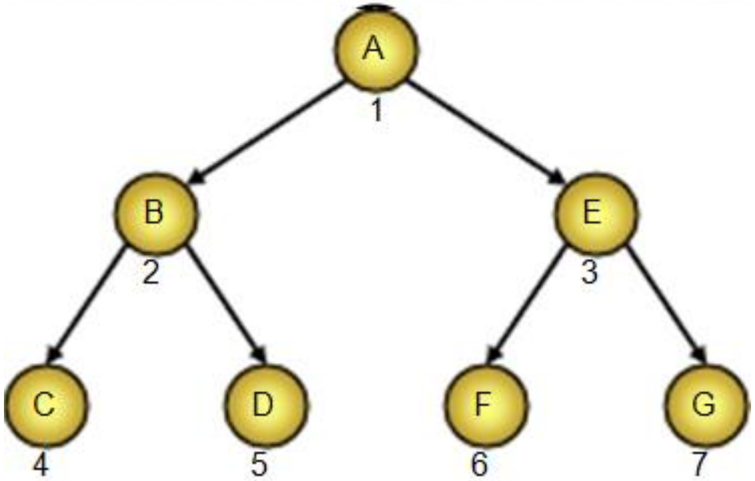
Node	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
CHILD	B	E	G	H						
SIBLING		C	D		F			I	J	

2. Cây nhị phân tương dương (Binary tree)-119

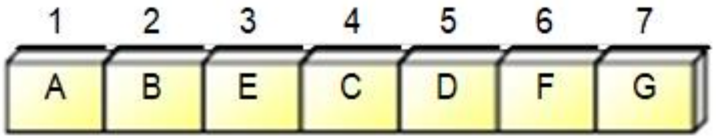


Binary Tree - Biểu diễn bằng mảng

- Một cây nhị phân đầy đủ, ta có thể dễ dàng đánh số các nút: theo thứ tự lần lượt từ mức 0 trở đi, từ trái sang phải đối với các nút ở mỗi mức.
  - Nút thứ i:
    - Con trái: 2i
    - Con phải: 2i + 1
  - Nút thứ j:
    - Nút cha : j div 2

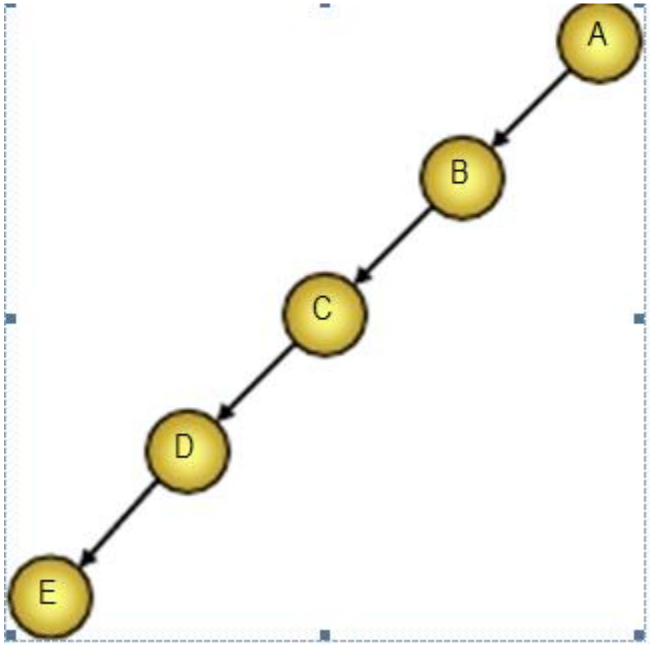


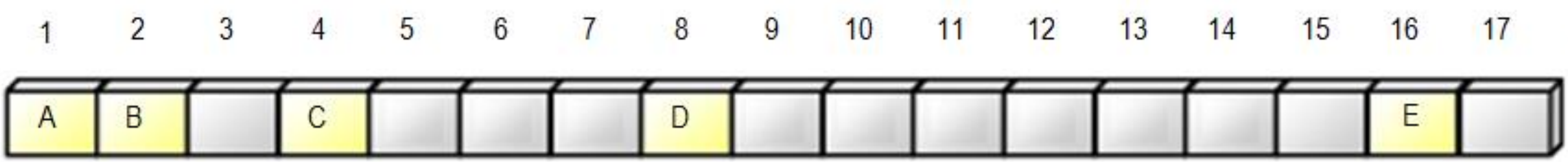
- Sử dụng một mảng T để lưu trữ các thông tin của một nút:
  - **Nút thứ i của cây được lưu trữ bằng phần tử T[i]**



Binary Tree - Biểu diễn bằng mảng

- Cây nhị phân không đầy đủ, ta có thể thêm vào một số nút giả để được cây nhị phân đầy đủ
- Gán những giá trị đặc biệt cho những phần tử trong mảng T tương ứng nút giả
- Hoặc, dùng thêm một mảng phụ để đánh dấu những nút nào là nút giả được thêm vào
- => sự lãng phí bộ nhớ

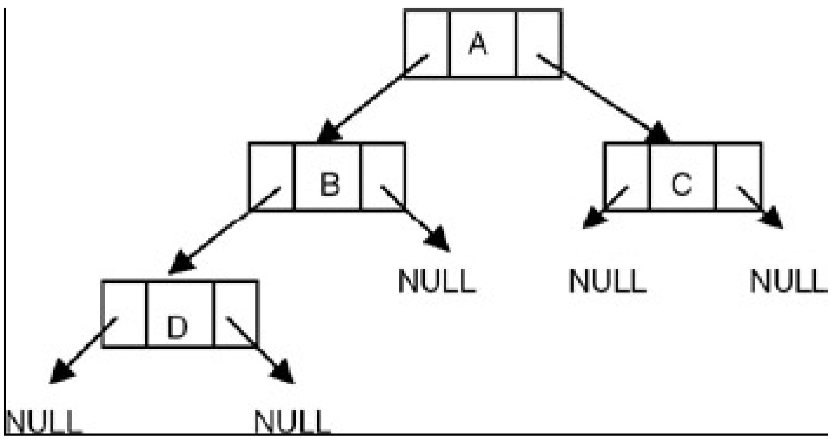




Binary Tree - Biểu diễn bằng cấu trúc liên kết

- Sử dụng một biến động để lưu trữ các thông tin của một nút:
  - Thông tin lưu trữ tại nút
  - Địa chỉ nút gốc của cây con trái trong bộ nhớ
  - Địa chỉ nút gốc của cây con phải trong bộ nhớ
- Khai báo cấu trúc cây nhị phân:

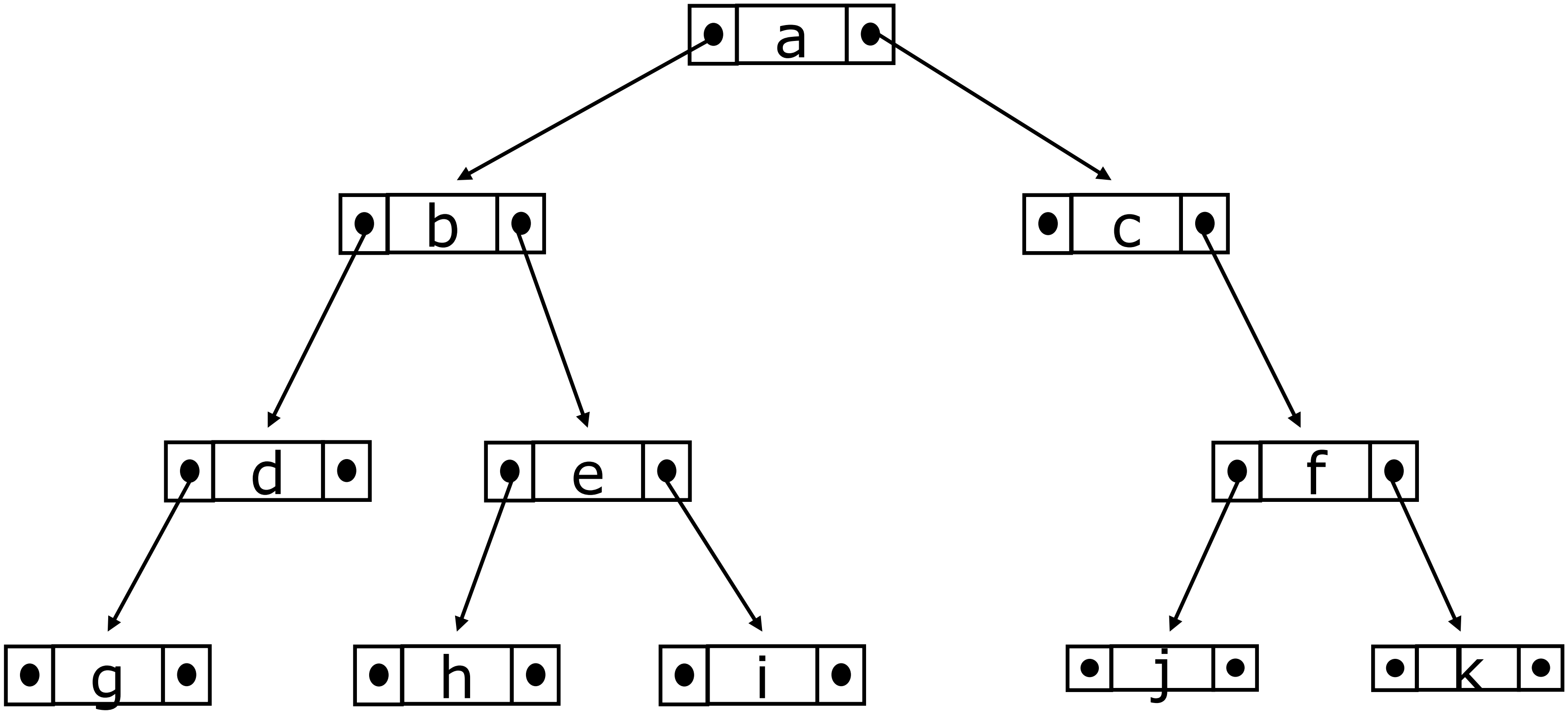
```
struct TNode
{
        DataType data;
        TNode   *pLeft, *pRight;
};
typedef Tnode  *Tree;
```



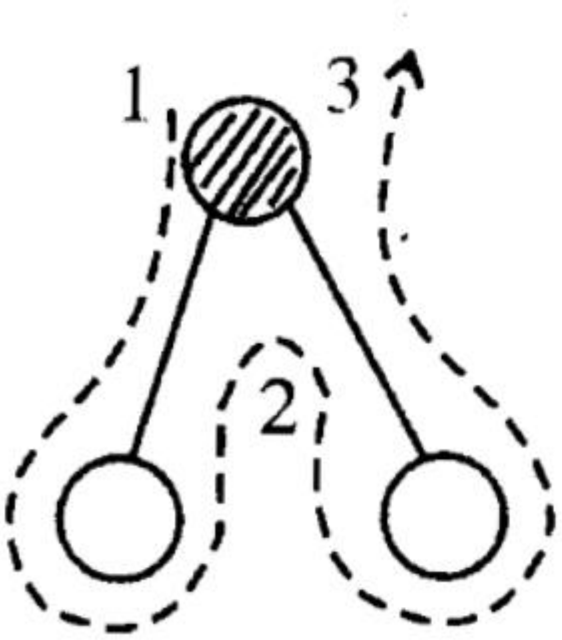
- Để quản lý cây nhị phân chỉ cần quản lý địa chỉ nút gốc:

Tree root;

Binary Tree - Biểu diễn

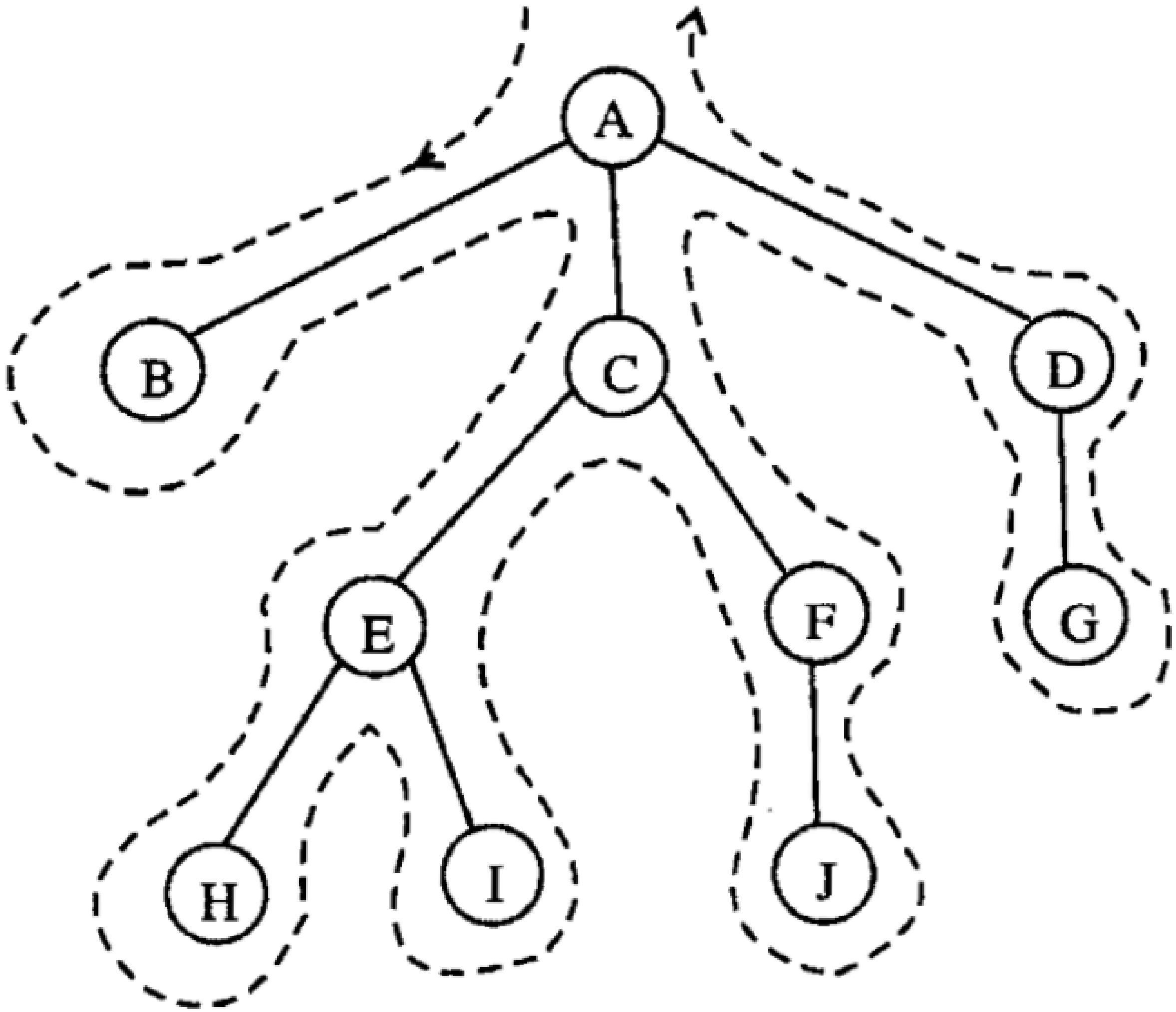


Cây nhị phân – Binary tree



- Một nút với 2 con
- Khi đi qua nút ấy và các con nó theo đường mũi tên, ta sẽ gặp nút ấy tới ba lần

Duyệt cây



Binary Tree - Duyệt cây nhị phân

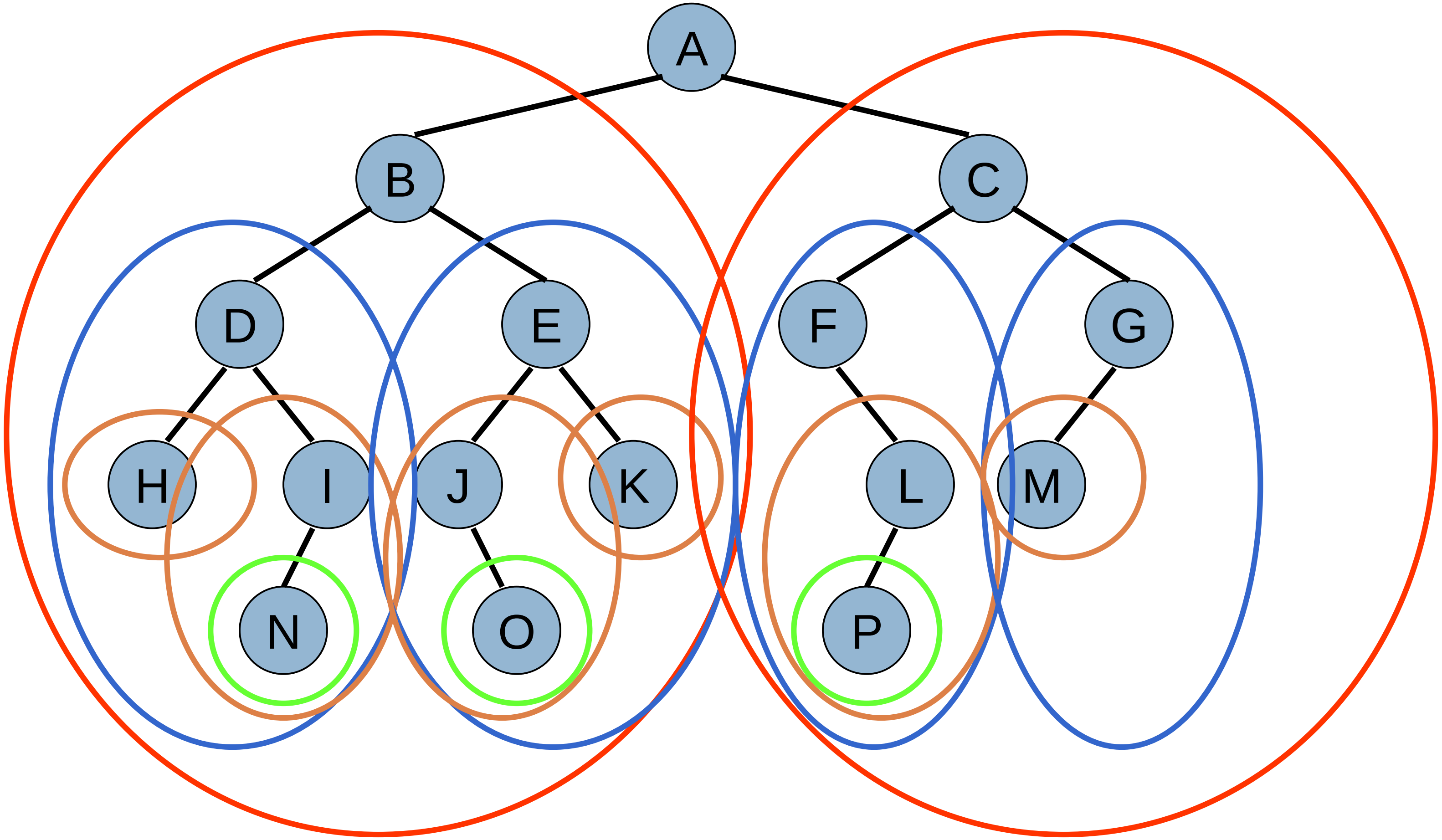
- Có 3 kiểu duyệt chính có thể áp dụng trên cây nhị phân:
  - Duyệt theo thứ tự trước -**preorder** (Node-Left-Right: NLR)
  - Duyệt theo thứ tự giữa - **inorder** (Left-Node-Right: LNR)
  - Duyệt theo thứ tự sau - **postorder** (Left-Right-Node: LRN)
- Tên của 3 kiểu duyệt này được đặt dựa trên trình tự của việc thăm nút gốc so với việc thăm 2 cây con

Binary Tree - Duyệt cây nhị phân

- Duyệt theo thứ tự trước NLR (Node-Left-Right)
  - Kiểu duyệt này trước tiên thăm nút gốc sau đó thăm các nút của cây con trái rồi đến cây con phải
  - Thủ tục duyệt có thể trình bày đơn giản như sau:

```
void  NLR (Tree t)
{
      if (t != NULL)
      {
            // Xử lý t tương ứng theo nhu cầu
            NLR(t->pLeft);
            NLR(t->pRight);
      }
}
```

Binary Tree - Duyệt cây nhị phân NLR



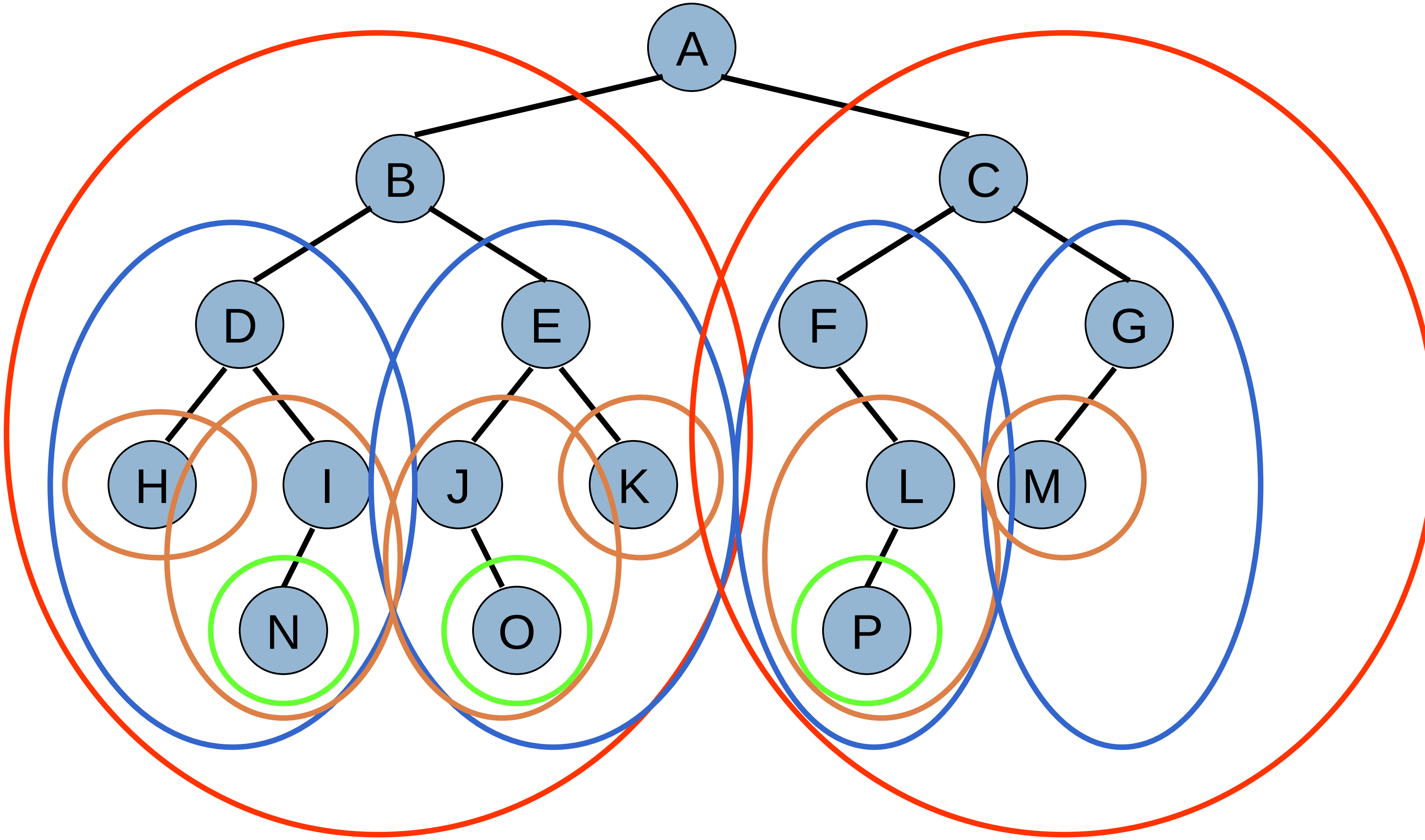
Kết quả: A B D H I N E J O K C F L P G M

Binary Tree - Duyệt cây nhị phân

- Duyệt theo thứ tự giữa LNR (Left-Node-Right)
  - Kiểu duyệt này trước tiên thăm các nút của cây con trái sau đó thăm nút gốc rồi đến cây con phải
  - Thủ tục duyệt có thể trình bày đơn giản như sau:

```
void LNR(Tree t)
{
    if (t != NULL)
    {
        LNR(t->pLeft);
        Tham Node(t)//Xử lý nút t theo nhu cầu
        LNR(t->pRight);
    }
}
```

Binary Tree - Duyệt cây nhị phân LNR



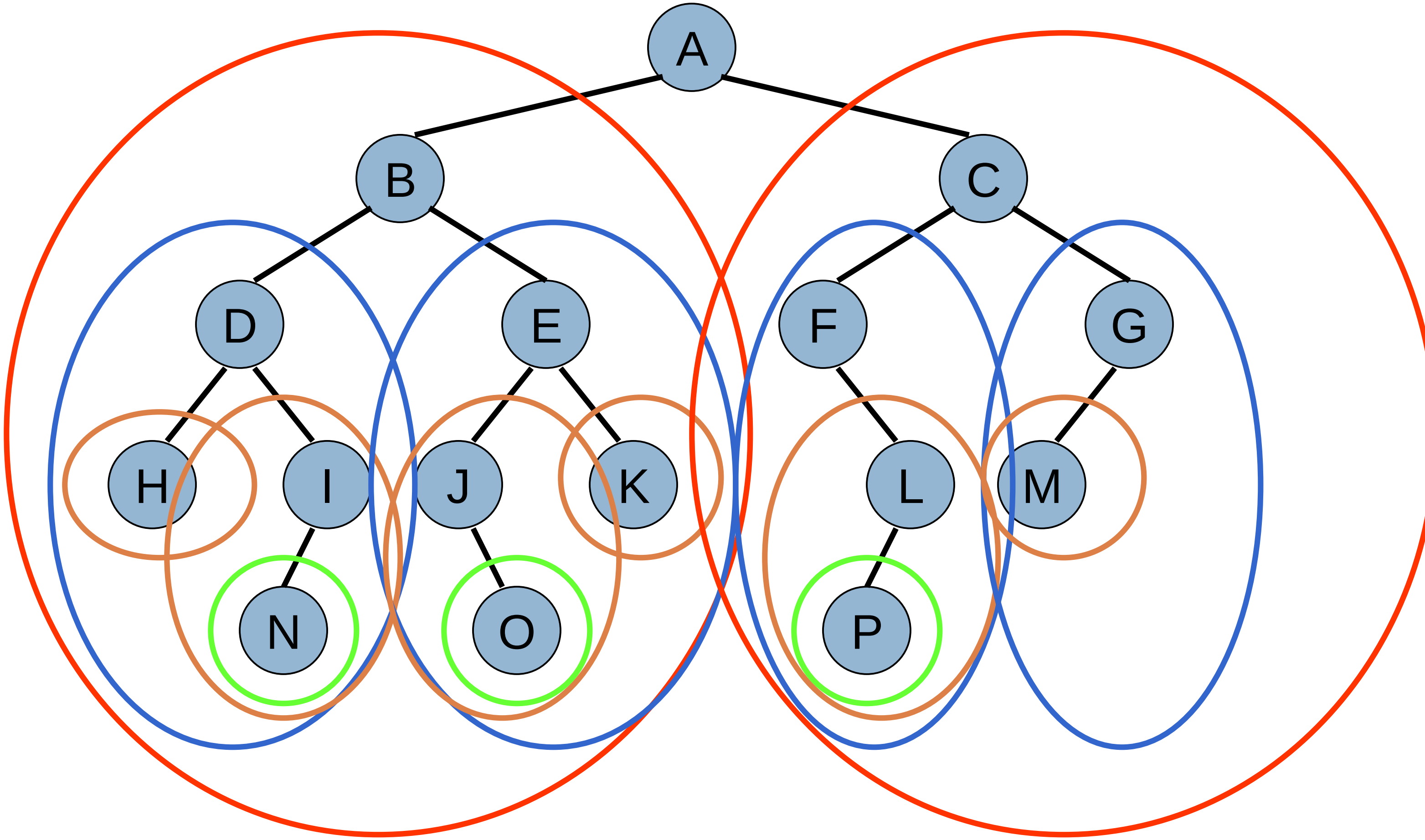
Kết quả: H D N I B J O E K A F P L C M G

Binary Tree - Duyệt cây nhị phân

- Duyệt theo thứ tự sau LRN (Left-Right-Node)
  - Kiểu duyệt này trước tiên thăm các nút của cây con trái sau đó thăm đến cây con phải rồi cuối cùng mới thăm nút gốc
  - Thủ tục duyệt có thể trình bày đơn giản như sau:

```
void  LRN(Tree t)
{
      if (t != NULL)
      {
            LRN(t->pLeft);
            LRN(t->pRight);
            Tham Node(t)// Xử lý tương ứng t theo nhu cầu
      }
}
```

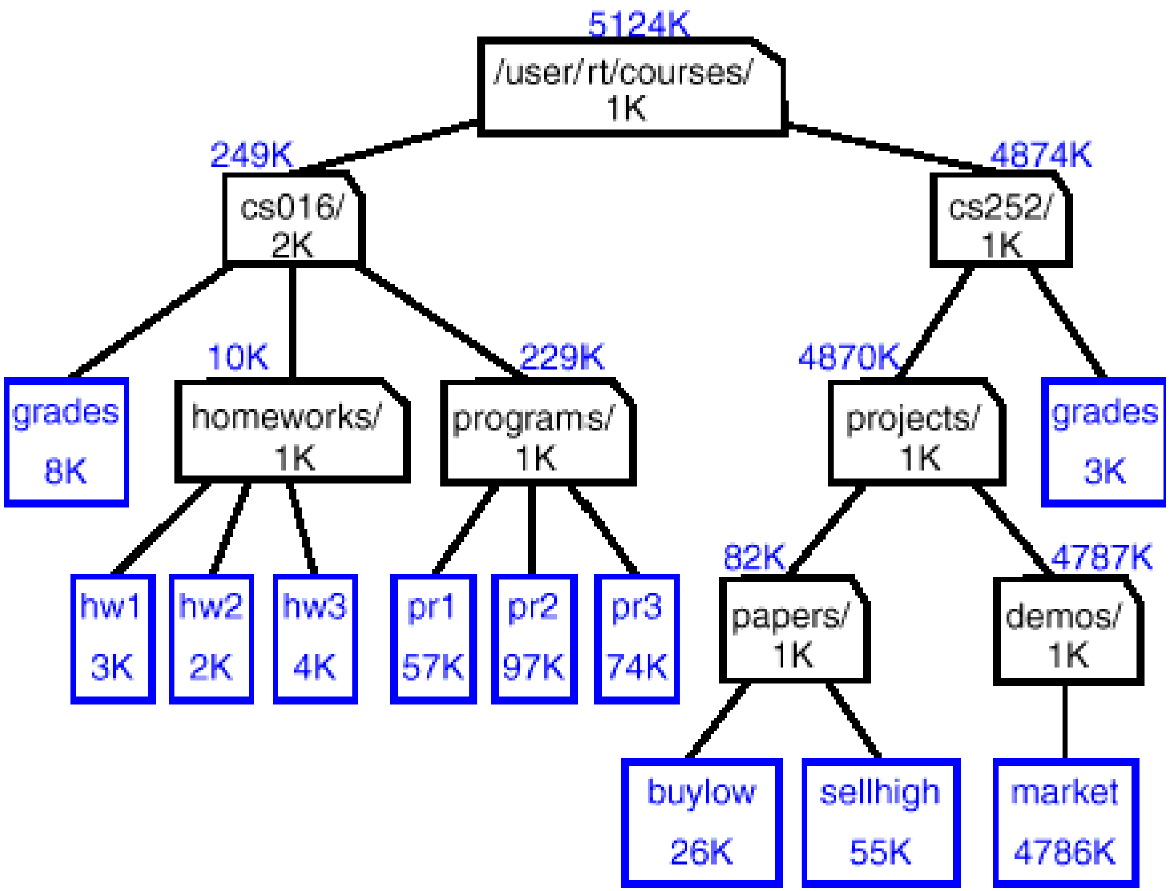
Binary Tree - Duyệt cây nhị phân LRN



Kết quả: H N I D O J K E B P L F M G C A

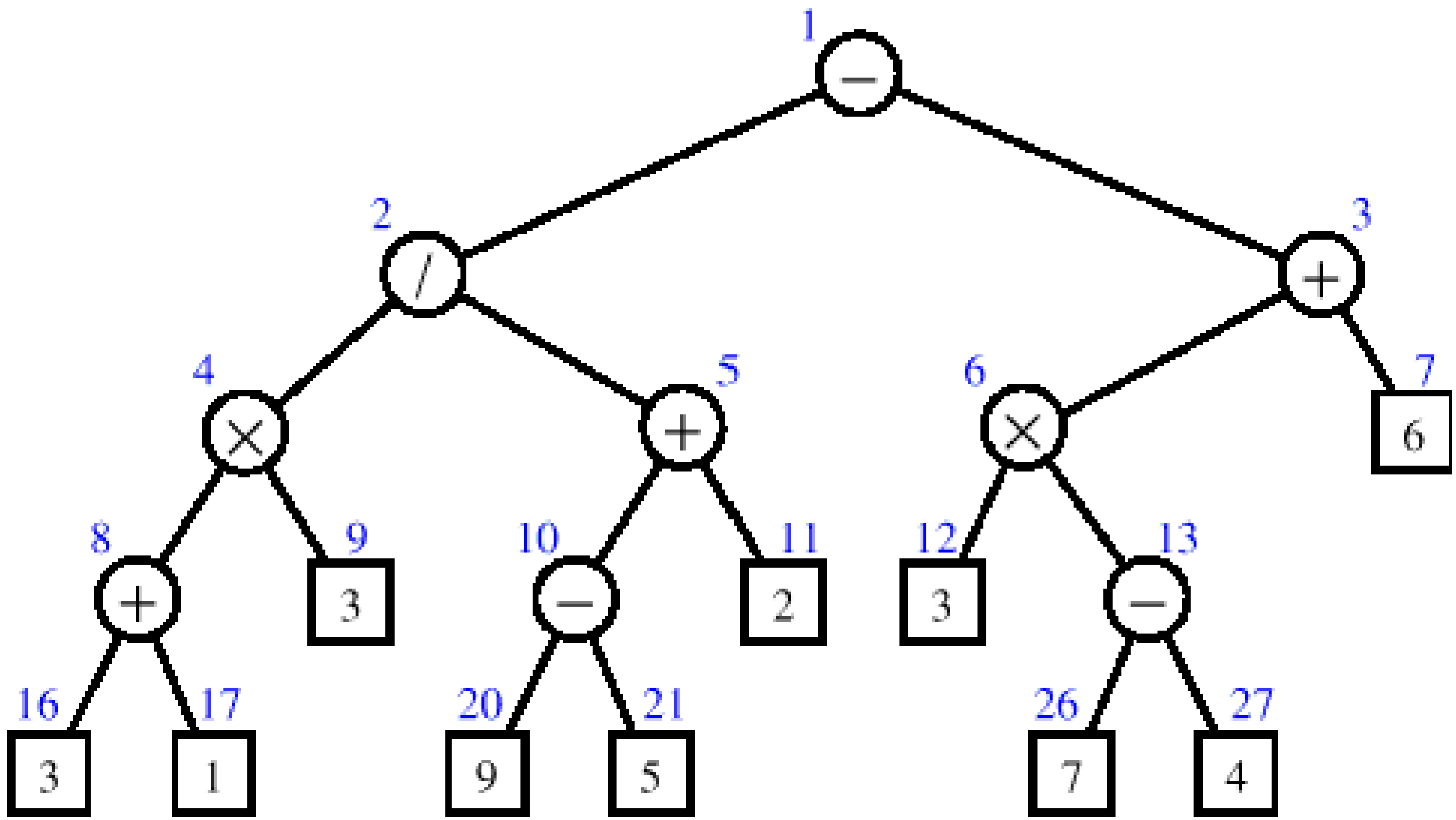
Binary Tree - Duyệt cây nhị phân LRN

- Một ví dụ quen thuộc trong tin học về ứng dụng của duyệt theo thứ tự sau là việc xác định tổng kích thước của một thư mục trên đĩa



Binary Tree - Duyệt cây nhị phân LRN

- Tính toán giá trị của biểu thức dựa trên cây biểu thức



(3 + 1)×3/(9 – 5 + 2) – (3×(7 – 4) + 6) = –13

Một cách biểu diễn cây nhị phân khác

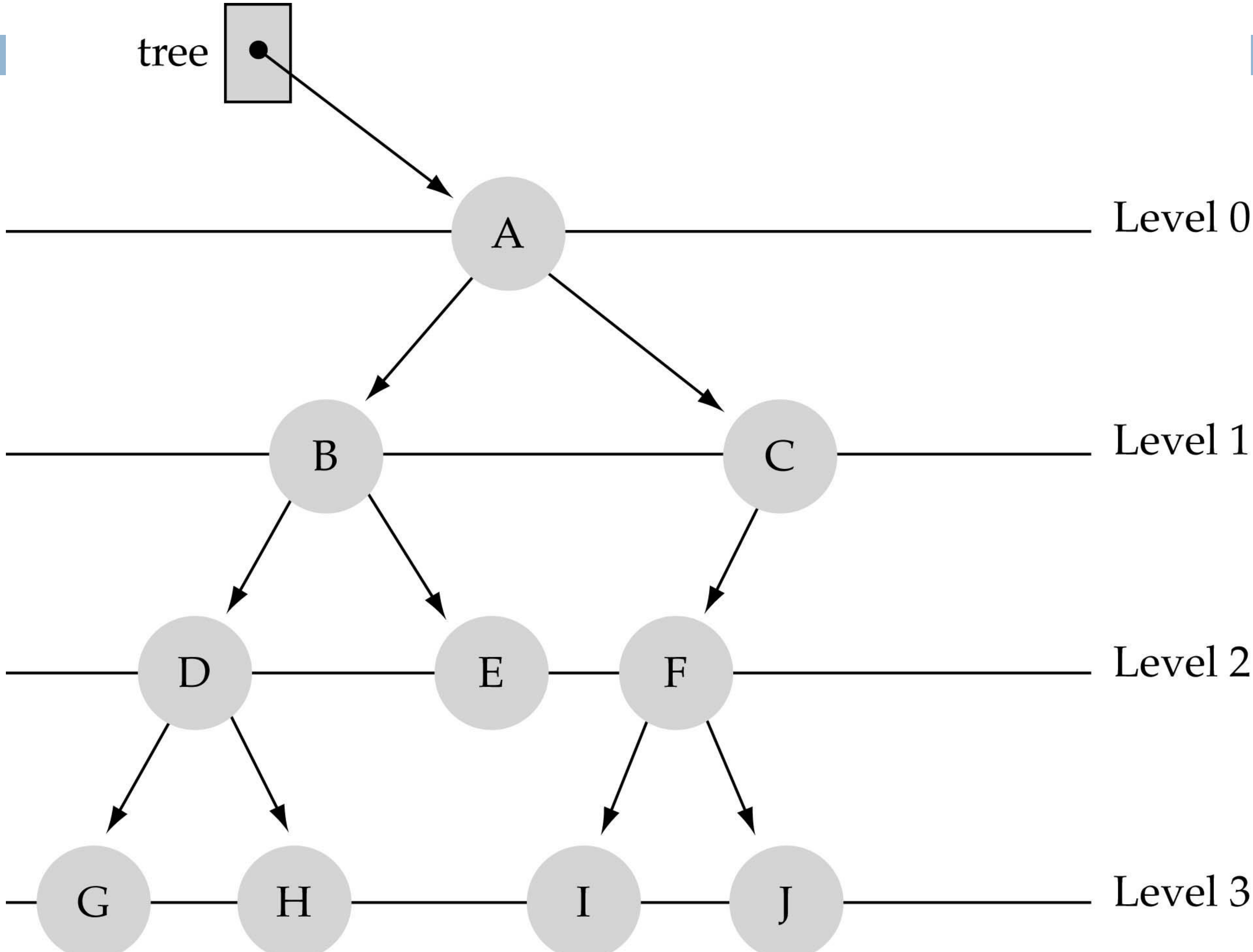
- Đôi khi, khi định nghĩa cây nhị phân, người ta quan tâm đến cả quan hệ 2 chiều cha con chứ không chỉ một chiều như định nghĩa ở phần trên.
- Lúc đó, cấu trúc cây nhị phân có thể định nghĩa lại như sau:

```
typedef struct tagTNode
{
  DataType            Key;
  struct tagTNode*    pParent;
  struct tagTNode*    pLeft;
  struct tagTNode*    pRight;
}TNODE;
typedef TNODE  *TREE;
```

Một số thao tác trên cây

- Đếm số node
- Đếm số node lá
- Tính chiều cao

Đếm số node



Đếm số node

- Số node (EmptyTree) = 0
- Số node (Tree) = 1 + Số node (Tree.Left)

  + Số node (Tree.Right)

Đếm số node lá

Số nút lá (EmptyTree) = 0

Số nút lá(RootOnly) = 1

Số nút lá(Tree) = *Số nút lá* (Tree.Left) +
Số nút lá (Tree.Right)

Tính chiều cao

$$\mathit{Height}(\text{Tree}) = 1 + \text{maximum}(\mathit{Height}(\text{Tree.Left}), \mathit{Height}(\text{Tree.Right}))$$

$$\mathit{Depth}(\text{EmptyTree}) = -1$$

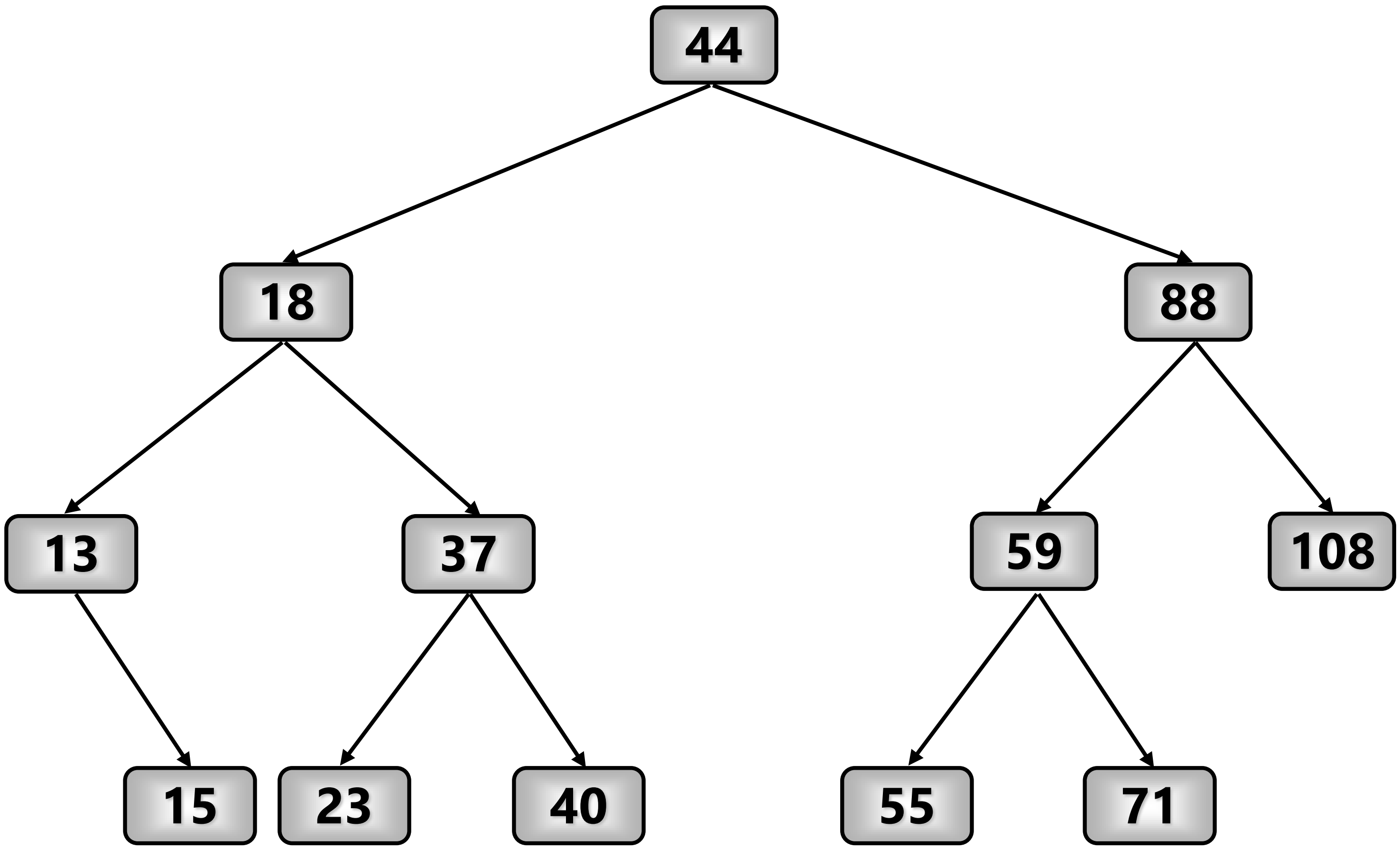
Binary Search Tree

- Trong chương 6, chúng ta đã làm quen với một số cấu trúc dữ liệu động. Các cấu trúc này có sự mềm dẻo nhưng lại bị hạn chế trong việc tìm kiếm thông tin trên chúng (chỉ có thể tìm kiếm tuần tự)
- Nhu cầu tìm kiếm là rất quan trọng. Vì lý do này, người ta đã đưa ra cấu trúc cây để thỏa mãn nhu cầu trên
- Tuy nhiên, nếu chỉ với cấu trúc cây nhị phân đã định nghĩa ở trên, việc tìm kiếm còn rất mơ hồ
- Cần có thêm một số ràng buộc để cấu trúc cây trở nên chặt chẽ, dễ dùng hơn
- Một cấu trúc như vậy chính là **cây nhị phân tìm kiếm**

Binary Search Tree - Định nghĩa

- Cây nhị phân tìm kiếm (CNPTK) là cây nhị phân trong đó **tại mỗi nút**, khóa của nút đang xét lớn hơn khóa của tất cả các nút thuộc cây con trái và nhỏ hơn khóa của tất cả các nút thuộc cây con phải
- Nhờ ràng buộc về khóa trên CNPTK, việc tìm kiếm trở nên có định hướng
- Nếu số nút trên cây là N thì chi phí tìm kiếm trung bình chỉ khoảng $\log_2 N$
- Trong thực tế, khi xét đến cây nhị phân chủ yếu người ta xét CNPTK

Binary Search Tree – Ví dụ

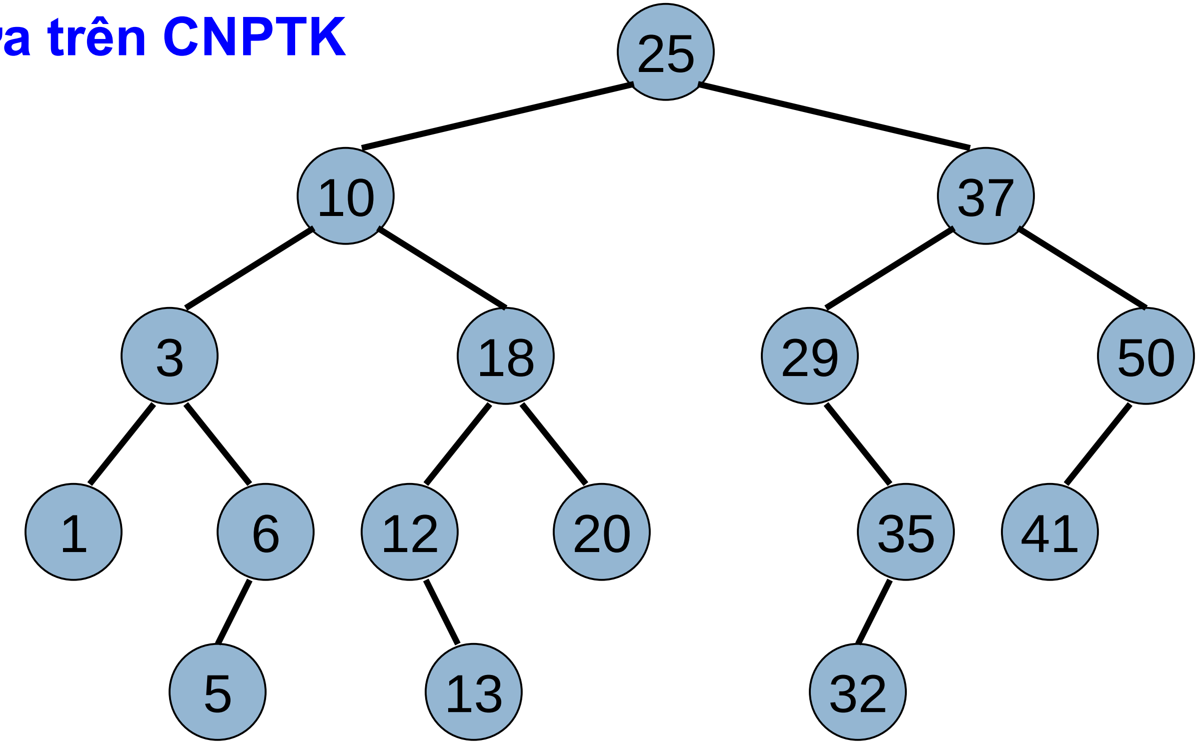


Binary Search Tree – Biểu diễn

- Cấu trúc dữ liệu của CNPTK là cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây nhị phân nói chung (???)
- Thao tác duyệt cây trên CNPTK hoàn toàn giống như trên cây nhị phân (???)
  - Chú ý: khi duyệt theo thứ tự giữa, trình tự các nút duyệt qua sẽ cho ta một dãy các nút theo thứ tự tăng dần của khóa

Binary Search Tree – Duyệt cây

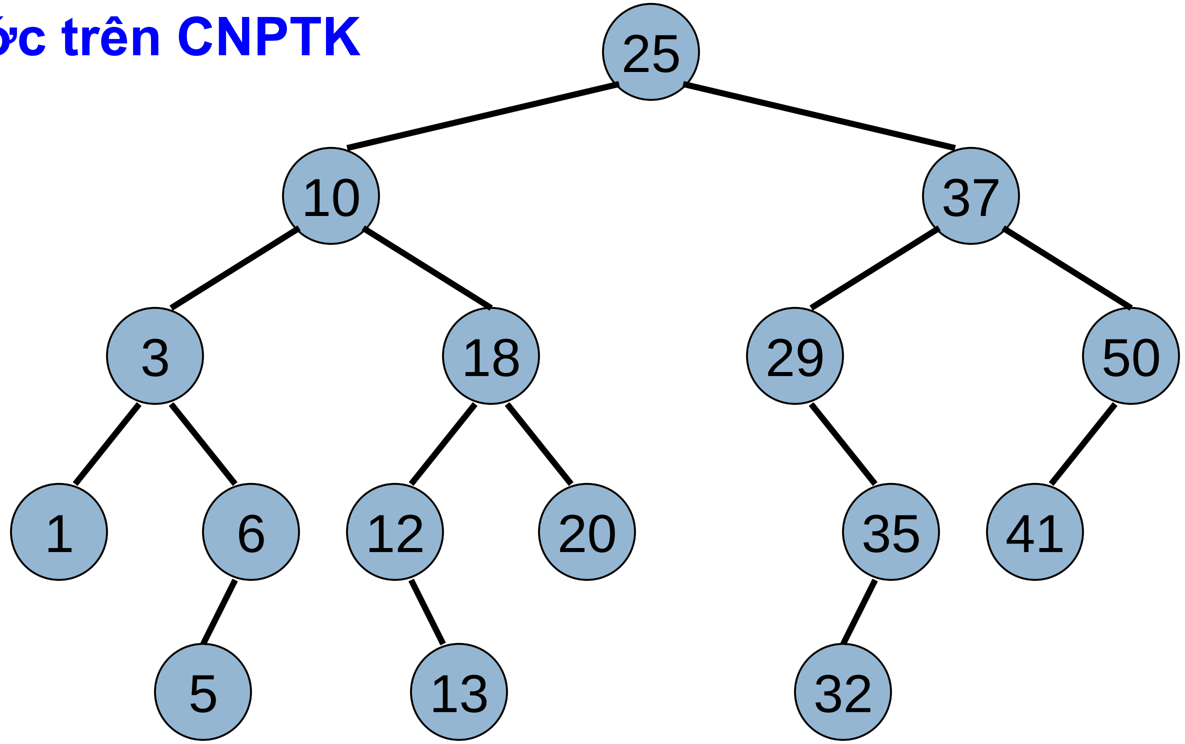
Duyệt giữa trên CNPTK



Duyệt inorder: 1 3 5 6 10 12 13 18 20 25 29 32 35 37 41 50

Binary Search Tree – Duyệt cây

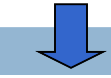
Duyệt trước trên CNPTK



Duyệt preorder:

Binary Search Tree – Tìm kiếm

Tìm kiếm trên CNPTK



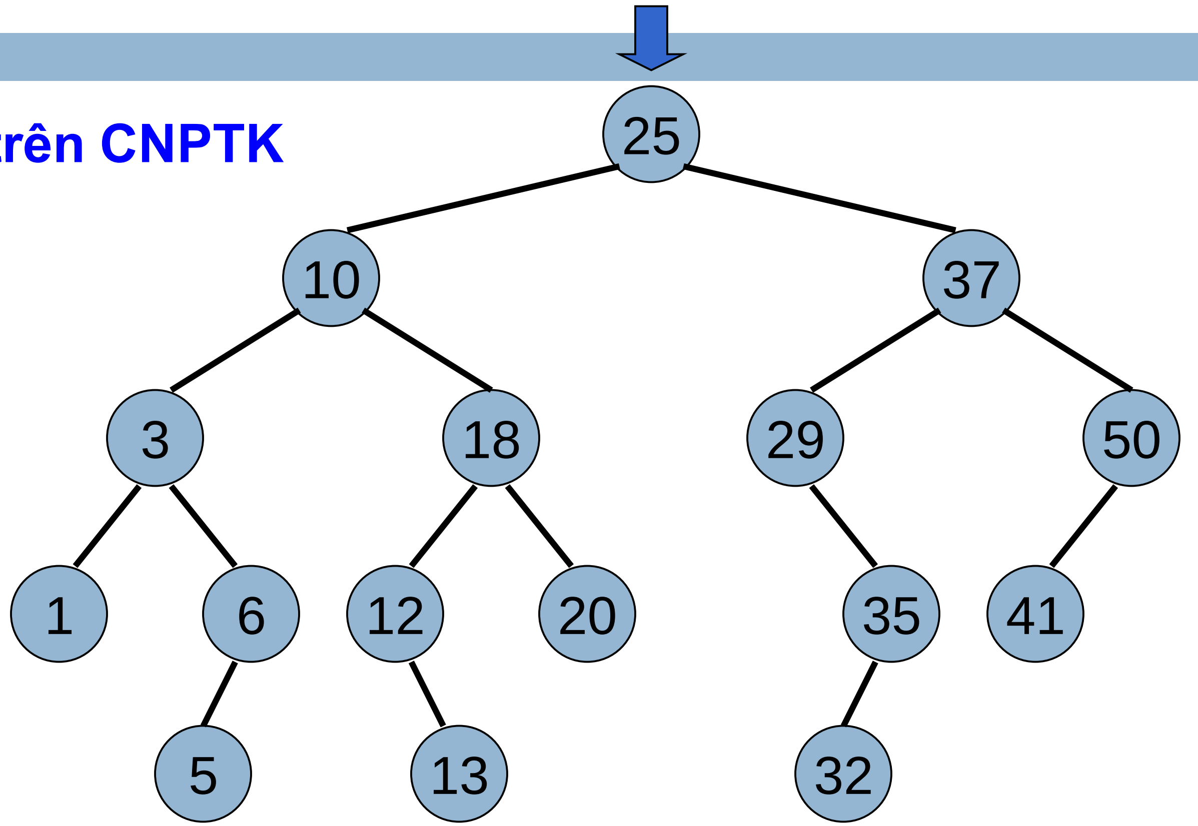
Tìm kiếm 13

Tìm thấy

Số node duyệt: 5
Số lần so sánh: 9

Binary Search Tree – Tìm kiếm

Tìm kiếm trên CNPTK



Khác nhau
Node gốc nhỏ hơn
Node gốc lớn hơn

Tìm kiếm 14

Không tìm thấy

Số node duyệt: 5
Số lần so sánh: 10

Binary Search Tree – Tìm kiếm

- Tìm một phần tử x trong CNPTK (dùng đệ quy):

```
TNode* searchNode(Tree T, DataType X)
{
    if (T)
    {
            if(T->Key == X)
                    return T;
            if(T->Key > X)
                    return searchNode(T->pLeft, X);
            return searchNode(T->pRight, X);
    }
    return NULL;
}
```

Binary Search Tree – Tìm kiếm

- Tìm một phần tử x trong CNPTK (dùng vòng lặp):

```
TNode * searchNode(Tree T,  DataType x)
{
    TNode *p = T;
    while (p != NULL)
    {
          if(x == p->Key)    return p;
          else
                if(x < p->Key) p = p->pLeft;
                else  p = p->pRight;
    }
    return NULL;
}
```

Binary Search Tree – Tìm kiếm

- Nhận xét:
  - Số lần so sánh tối đa phải thực hiện để tìm phần tử X là h, với h là chiều cao của cây
  - Như vậy thao tác tìm kiếm trên CNPTK có n nút tốn chi phí trung bình khoảng $O(\log_2 n)$

Binary Search Tree – Thêm

- Việc thêm một phần tử X vào cây phải bảo đảm điều kiện ràng buộc của CNPTK
- Ta có thể thêm vào nhiều chỗ khác nhau trên cây, nhưng nếu thêm vào một nút ngoài sẽ là tiện lợi nhất do ta có thể thực hiện quá trình tương tự thao tác tìm kiếm
- Khi chấm dứt quá trình tìm kiếm cũng chính là lúc tìm được chỗ cần thêm
- Hàm insert trả về giá trị:

–1	khi không đủ bộ nhớ
0	khi gặp nút cũ
1	khi thêm thành công

Binary Search Tree – Thêm

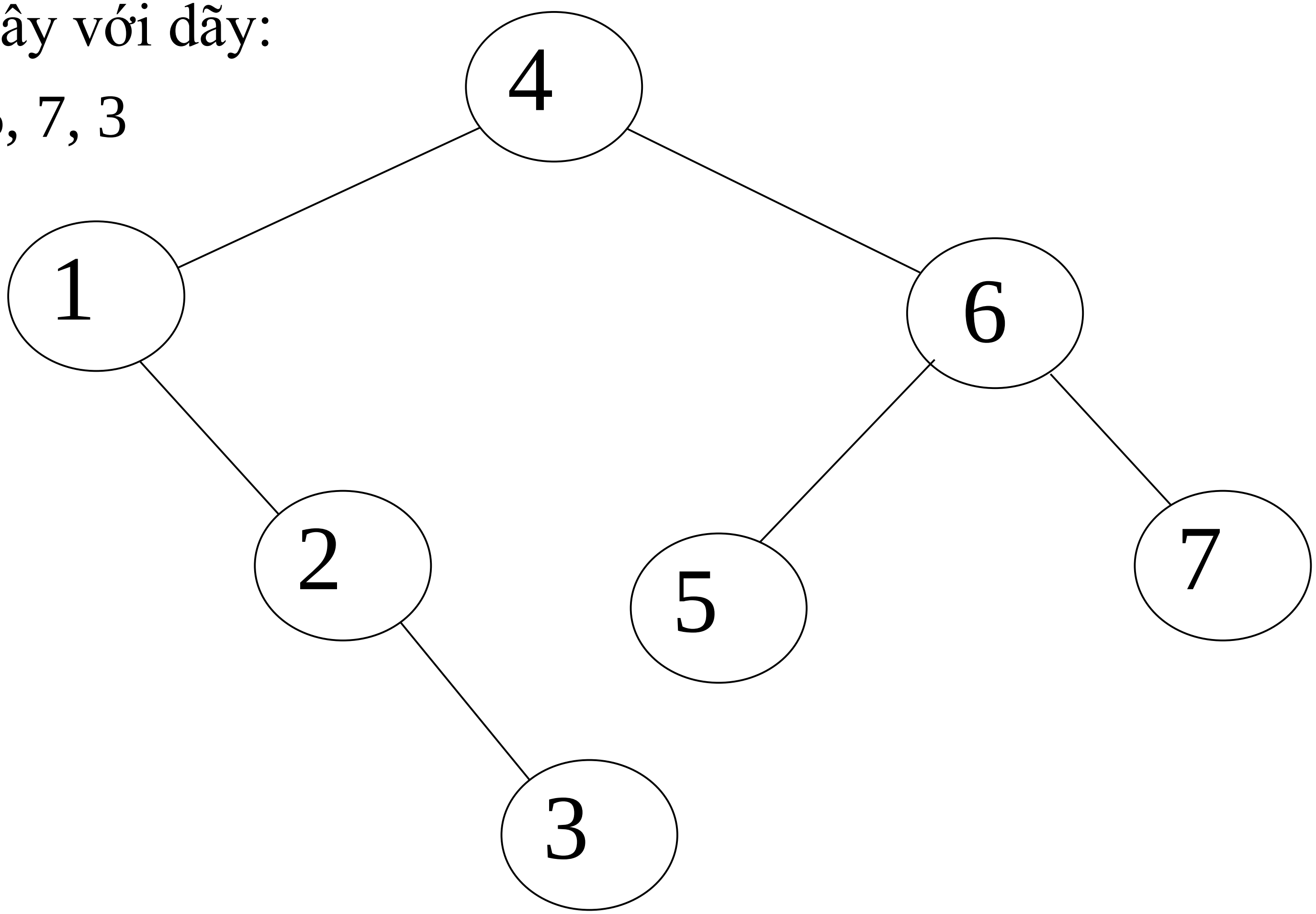
- Thêm một phần tử vào cây

```
int insertNode (Tree &T,  DataType  X)
{     if (T) {
              if(T->data == X) return 0;
              if(T->data >  X)
                     return insertNode(T->pLeft, X);
              else
                     return insertNode(T->pRight, X);
      }
      T = new TNode;
      if (T == NULL) return -1;
      T->data = X;
      T->pLeft = T->pRight = NULL;
      return 1;
}
```

Binary Search Tree – Thêm

- Ví dụ tạo cây với dãy:

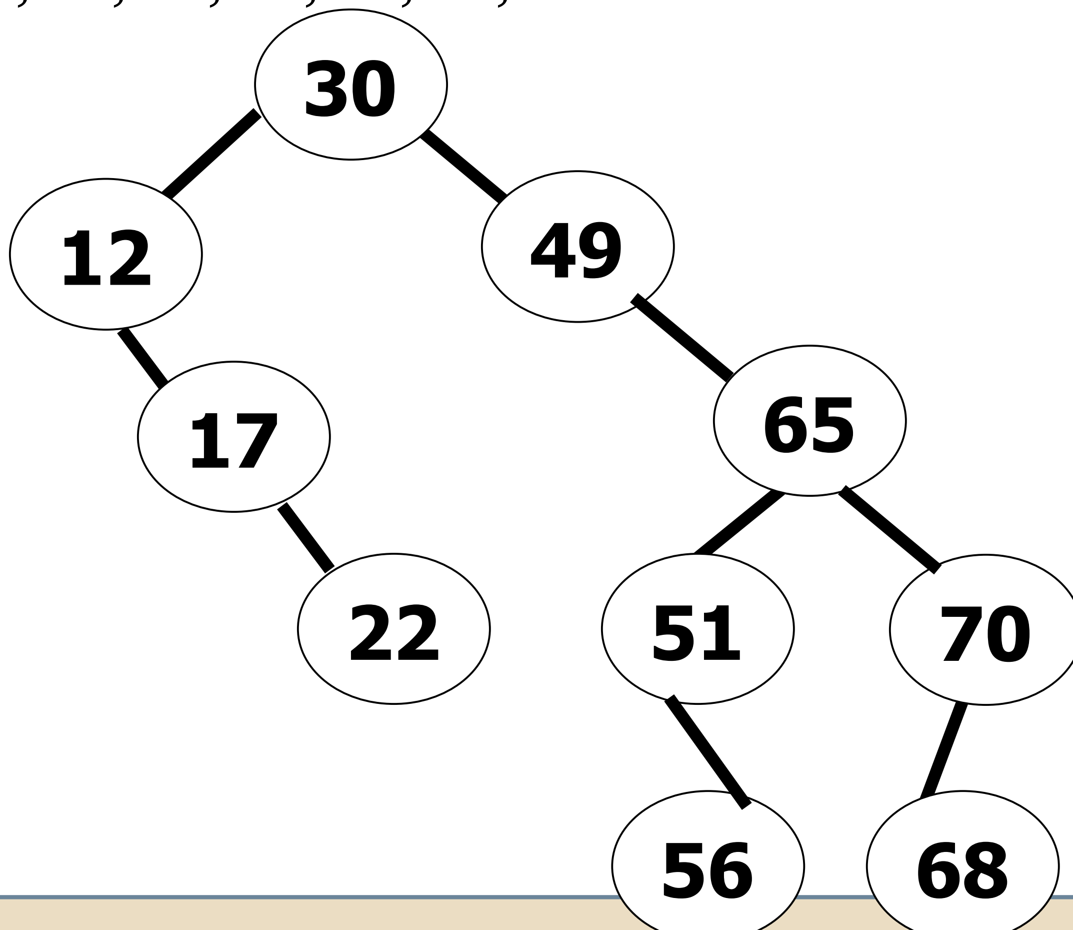
  4, 6, 1, 2, 5, 7, 3



Binary Search Tree – Thêm

- Ví dụ tạo cây với dãy:

  30, 12, 17, 49, 22, 65, 51, 56, 70, 68



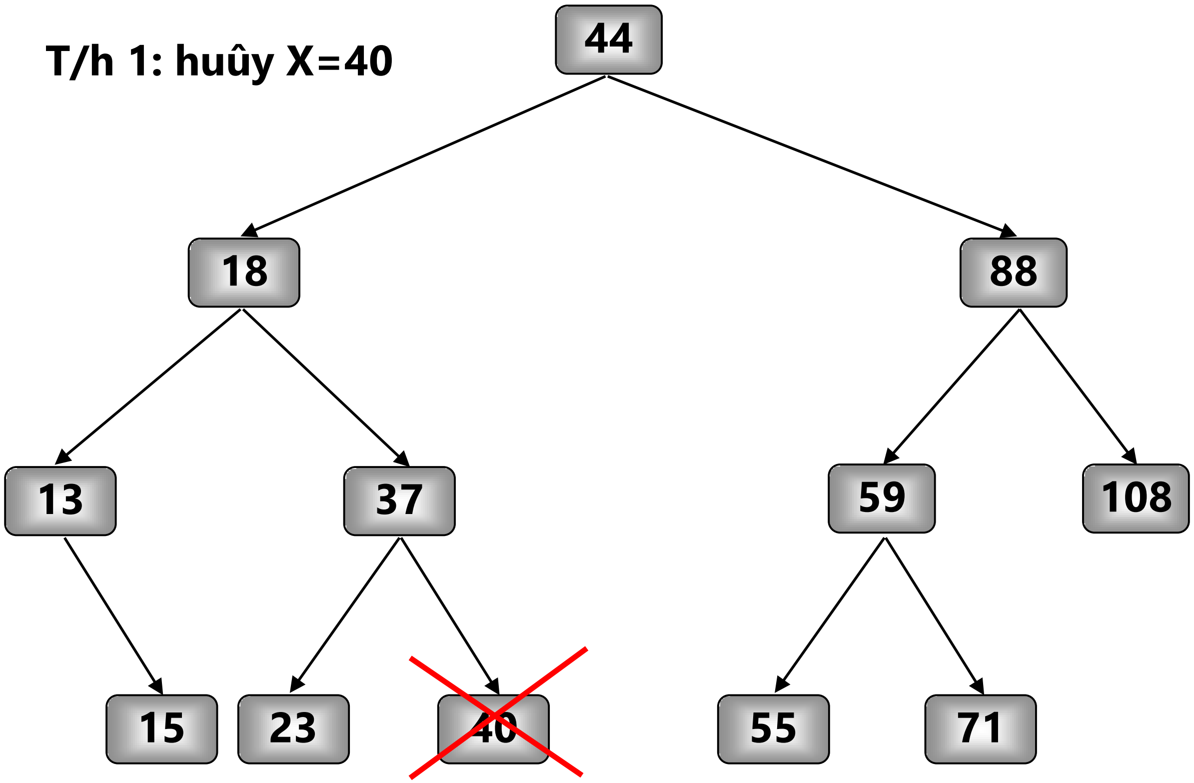
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Việc hủy một phần tử X ra khỏi cây phải bảo đảm điều kiện ràng buộc của CNPTK
- Có 3 trường hợp khi hủy nút X có thể xảy ra:
  - X là nút lá
  - X chỉ có 1 con (trái hoặc phải)
  - X có đủ cả 2 con

Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

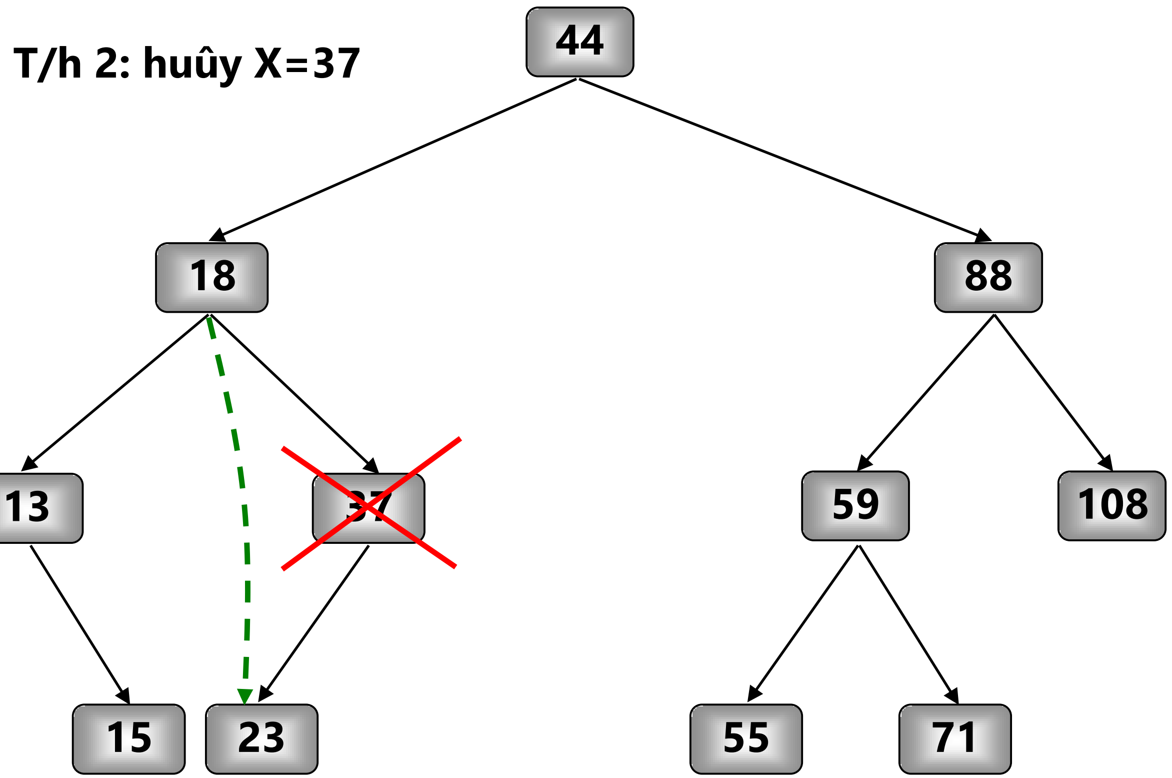
- Trường hợp 1: X là nút lá
  - Chỉ đơn giản hủy X vì nó không móc nối đến phần tử nào khác

T/h 1: huûy X=40



Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- <u>Trường hợp 2:</u> X chỉ có 1 con (trái hoặc phải)
  - Trước khi hủy X ta móc nối cha của X với con duy nhất của nó



Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

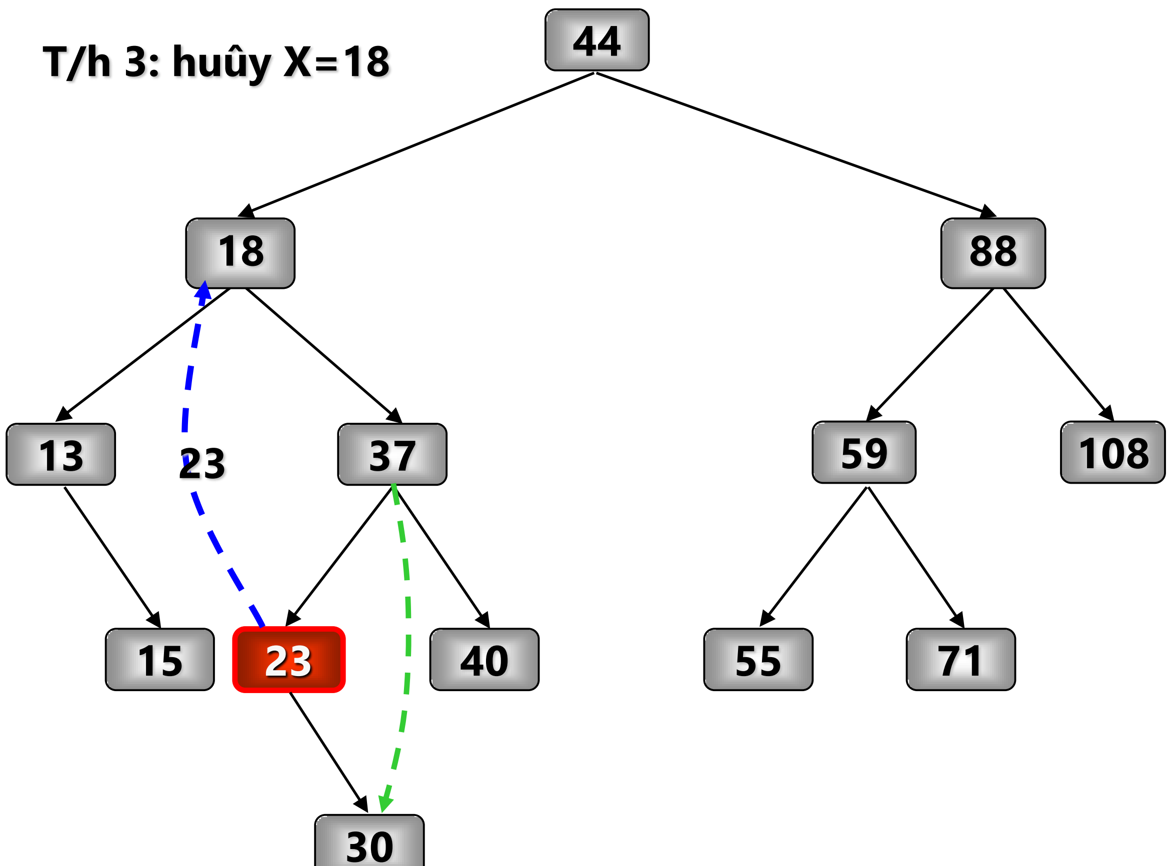
- <u>Trường hợp 3:</u> X có đủ 2 con:
  - Không thể hủy trực tiếp do X có đủ 2 con
  - Hủy gián tiếp:
    - Thay vì hủy X, ta sẽ tìm một phần tử thế mạng Y. Phần tử này có tối đa một con
    - Thông tin lưu tại Y sẽ được chuyển lên lưu tại X
    - Sau đó, nút bị hủy thật sự sẽ là Y giống như 2 trường hợp đầu
  - Vấn đề: chọn Y sao cho khi lưu Y vào vị trí của X, cây vẫn là CNPTK

Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Trường hợp 3: X có đủ 2 con:
  - Có 2 phần tử thỏa mãn yêu cầu:
    - Phần tử trái nhất trên cây con phải
    - Phần tử phải nhất trên cây con trái
  - Việc chọn lựa phần tử nào là phần tử thế mạng hoàn toàn phụ thuộc vào ý thích của người lập trình
  - Ở đây, ta sẽ chọn phần tử phải nhất trên cây con trái làm phân tử thế mạng

Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Trường hợp 3: X có đủ 2 con:
  - Khi hủy phần tử X=18 ra khỏi cây, phần tử 23 là phần tử thế mạng:



Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- <u>Trường hợp 3:</u> X có đủ 2 con:
  - Hàm ***delNode*** trả về giá trị 1, 0 khi hủy thành công hoặc không có X trong cây:

    int delNode(Tree &T, DataType X)
  - Hàm ***searchStandFor*** tìm phần tử thế mạng cho nút p

    void searchStandFor(Tree &p, Tree &q)

Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X


```
int delNode(Tree &T, DataType  X)
{
        if (T == NULL)      return 0;
        if (T->data > X)    return delNode(T->pLeft, X);
        if (T->data < X)    return delNode(T->pRight, X);
        TNode* p = T;
        if (T->pLeft == NULL)
                T = T->pRight;
        else
                if (T->pRight == NULL)      T = T->pLeft;
                else // T có đủ 2 con
                    { TNode*      q = T->pRight;
                    searchStandFor(p, q);
                    }
        delete p;
}
```

Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Tìm phần tử thế mạng

```
void  searchStandFor(Tree &p, Tree &q)
{
        if (q->pLeft)
                searchStandFor(p, q->pLeft);
        else
        {
                p->data = q->data;
                p  = q;
                q  = q->pRight;
        }
}
```

Xóa node (Ko đệ qui)


```
procedure BSTDelete(X: TKey)
var
p, q, Node_xoa, Child: NODE;
begin
p := Root; q := NULL; {Về sau, khi p trỏ sang nút khác,
ta luôn giữ cho q^ luôn là cha của p^}
while p ≠ NULL do {Tìm xem trong cây có khoá X không?}
begin
if p->data= X then Break; {Tìm thấy}
q := p;
if X < p->data then p := p->pLeft
else p := p->pRight;
end;
```

Xóa node (Ko đệ qui)

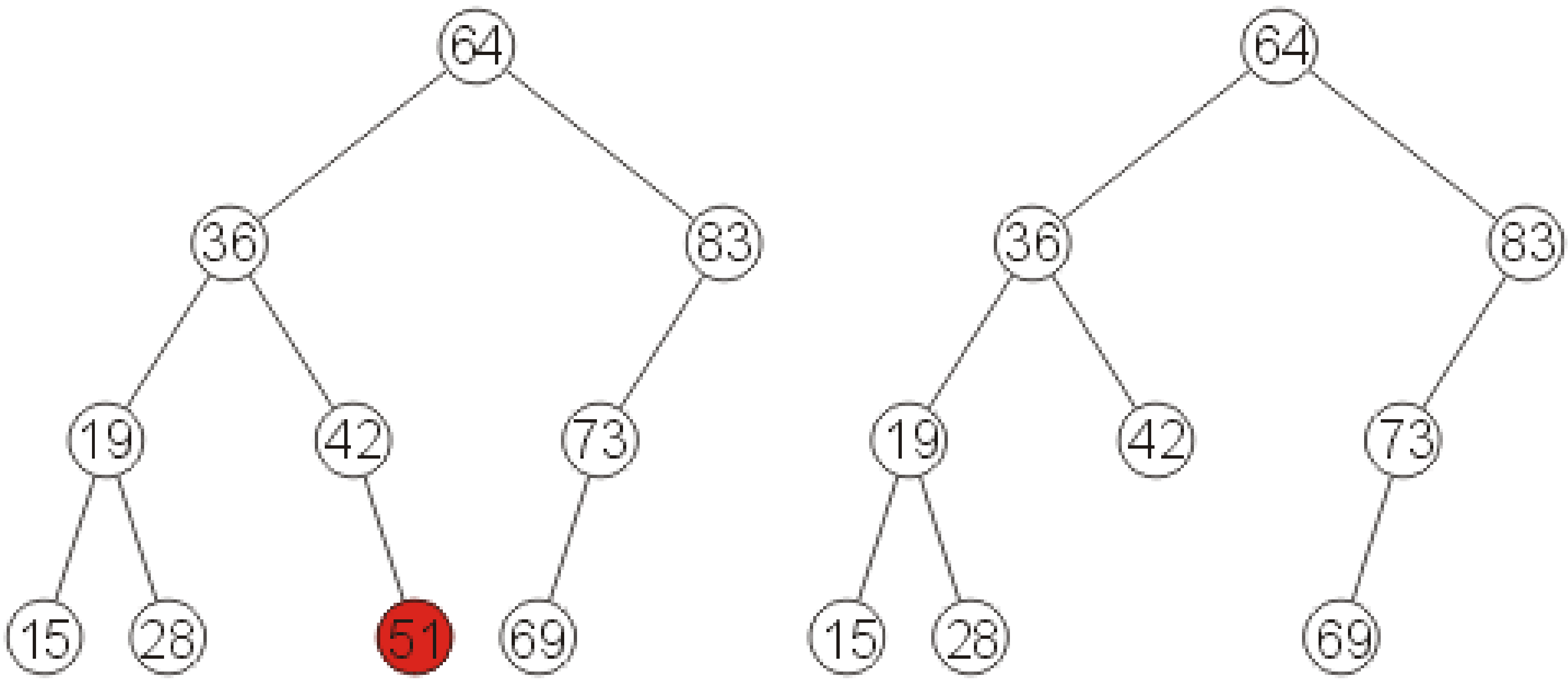

```
if p = NULL then Exit; {X không tồn tại trong BST nên không xoá được}
if (p->pLeft ≠ NULL) and (p->Right ≠ NULL) then {p^ có cả con trái và con phải}
begin
Node_xoa := p; {Giữ lại nút chứa khoá X}
q := p; p := p->pLeft; {Chuyển sang nhánh con trái để tìm nút cực phải}
while p->pRight ≠ NULL do
begin
      q := p; p := p-> pRight;
end;
Node_xoa-> data := p-> data; {Chuyển giá trị từ nút cực phải trong nhánh con trái lên Node^}
```

Xóa node (Ko đệ qui)


```
{Nút bị xoá giờ đây là nút p^, nó chỉ có nhiều nhất một con}
{Nếu p^ có một nút con thì đem Child trỏ tới nút con đó, nếu không có thì Child = nil}
if p->pLeft ≠ NULL then Child := p->pLeft
else Child := p->pRight;
if p = Root then Root := Child; {Nút p^ bị xoá là gốc cây}
else {Nút bị xoá p^ không phải gốc cây thì lấy mối nối từ cha của nó là q^ nối thẳng tới Child}
if q->pLeft = p then q->pLeft := Child
else q->pRight := Child;
Delete(p);
end;
```

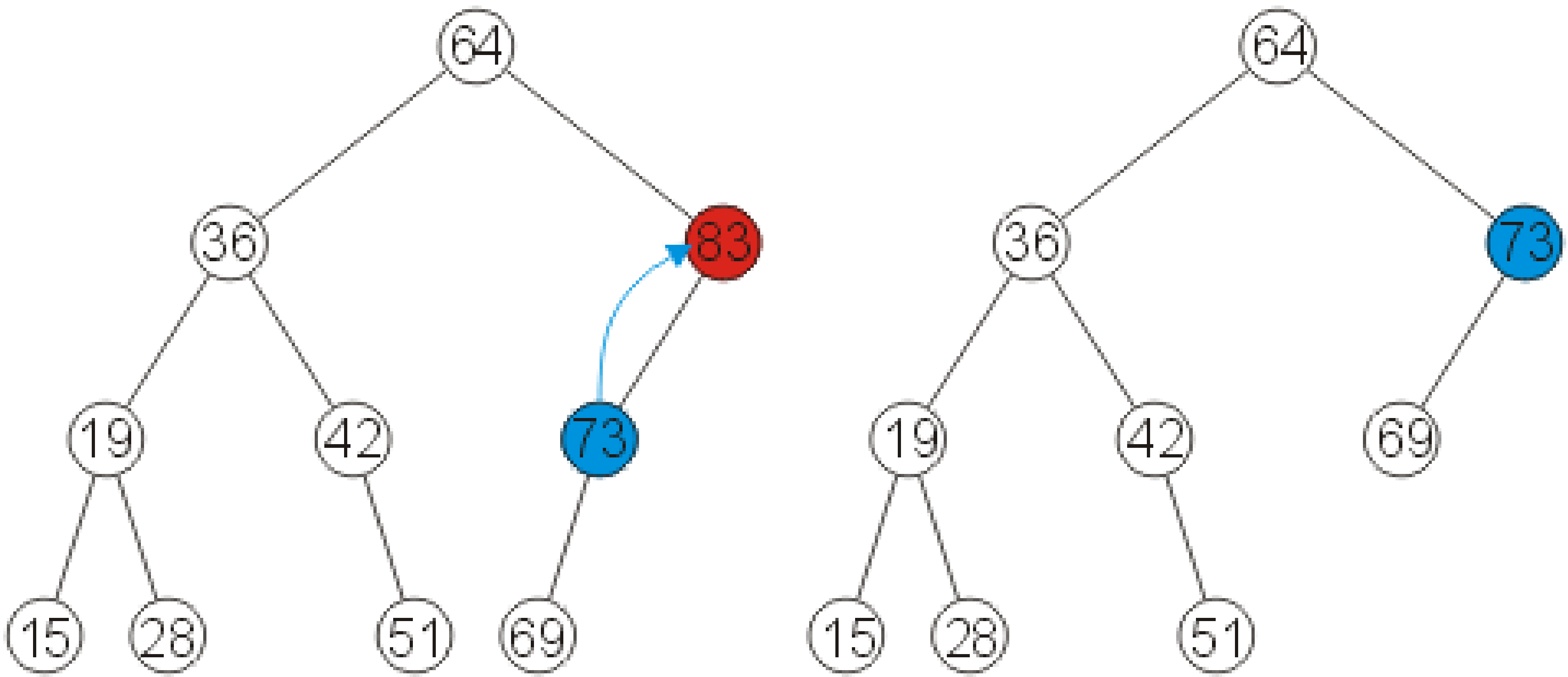
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Ví dụ xóa 51:



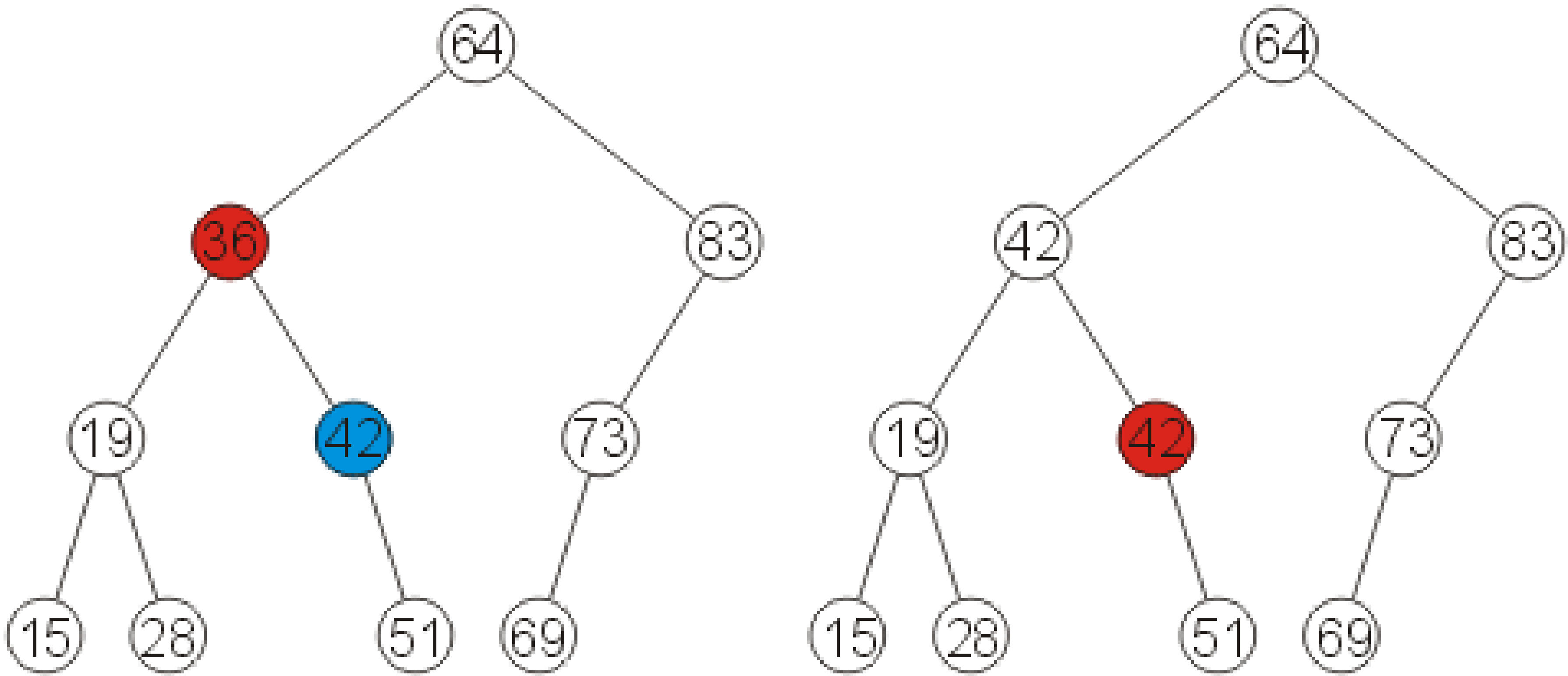
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Ví dụ xóa 83:



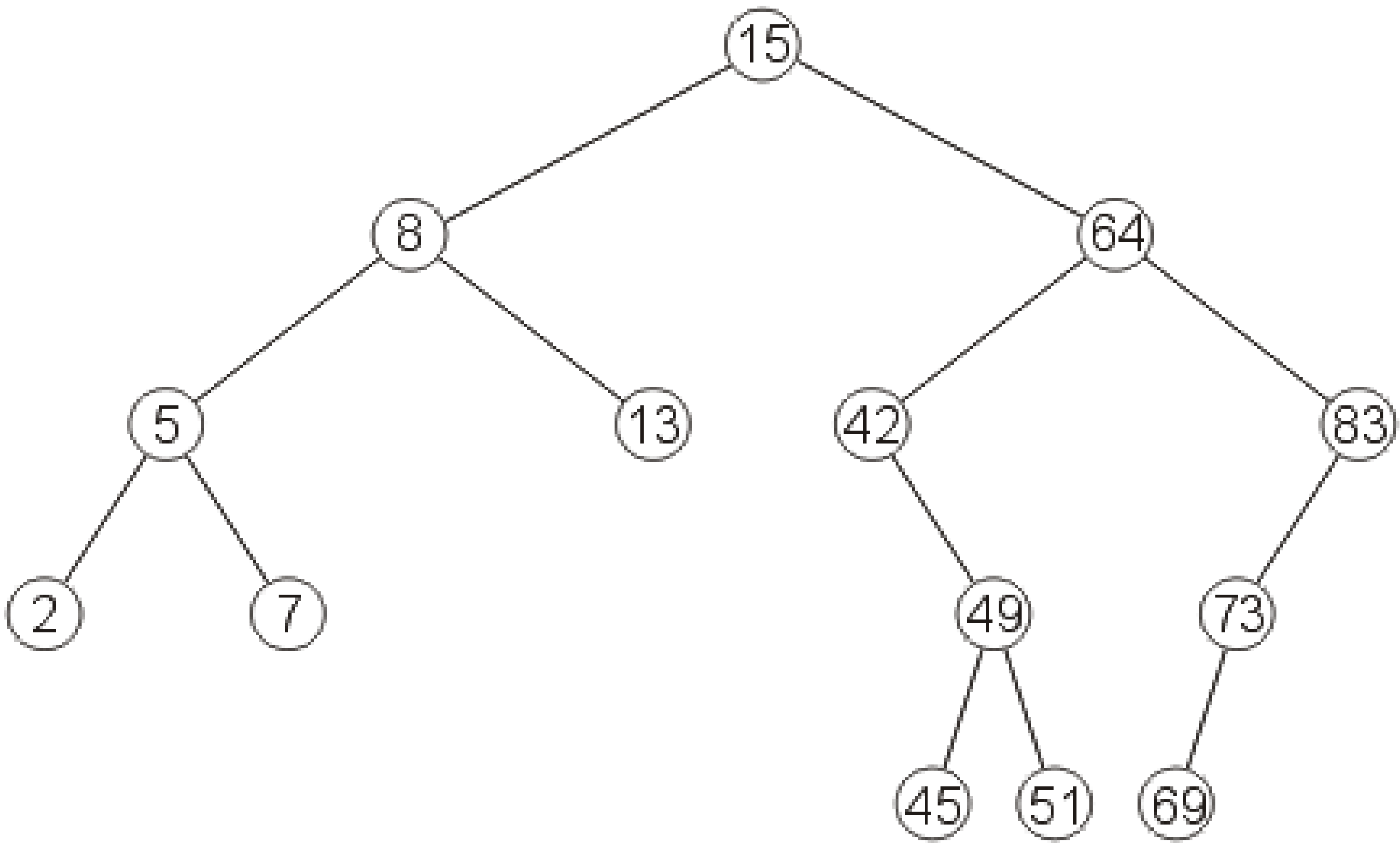
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Ví dụ xóa 36:



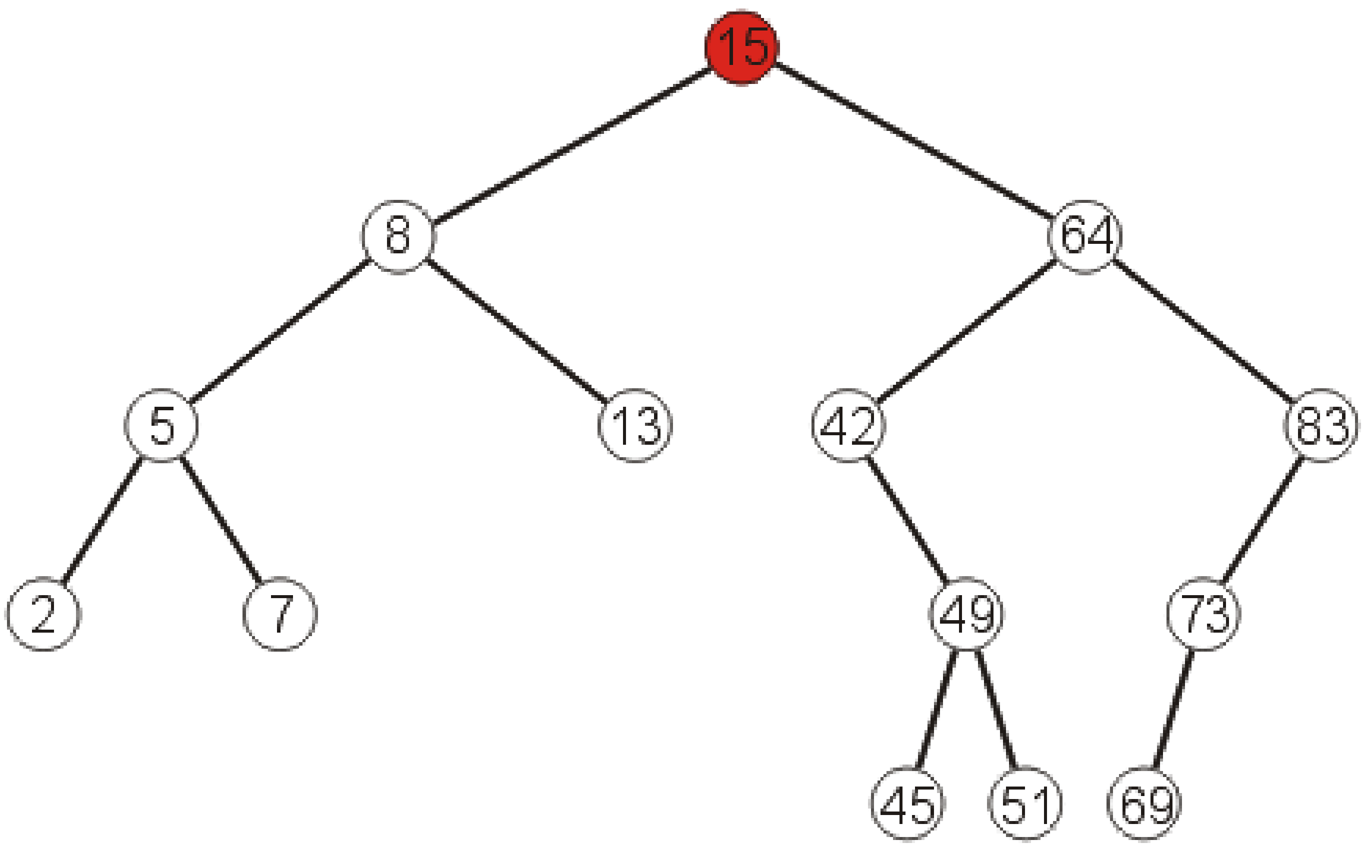
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Xóa nút gốc (2 lần):



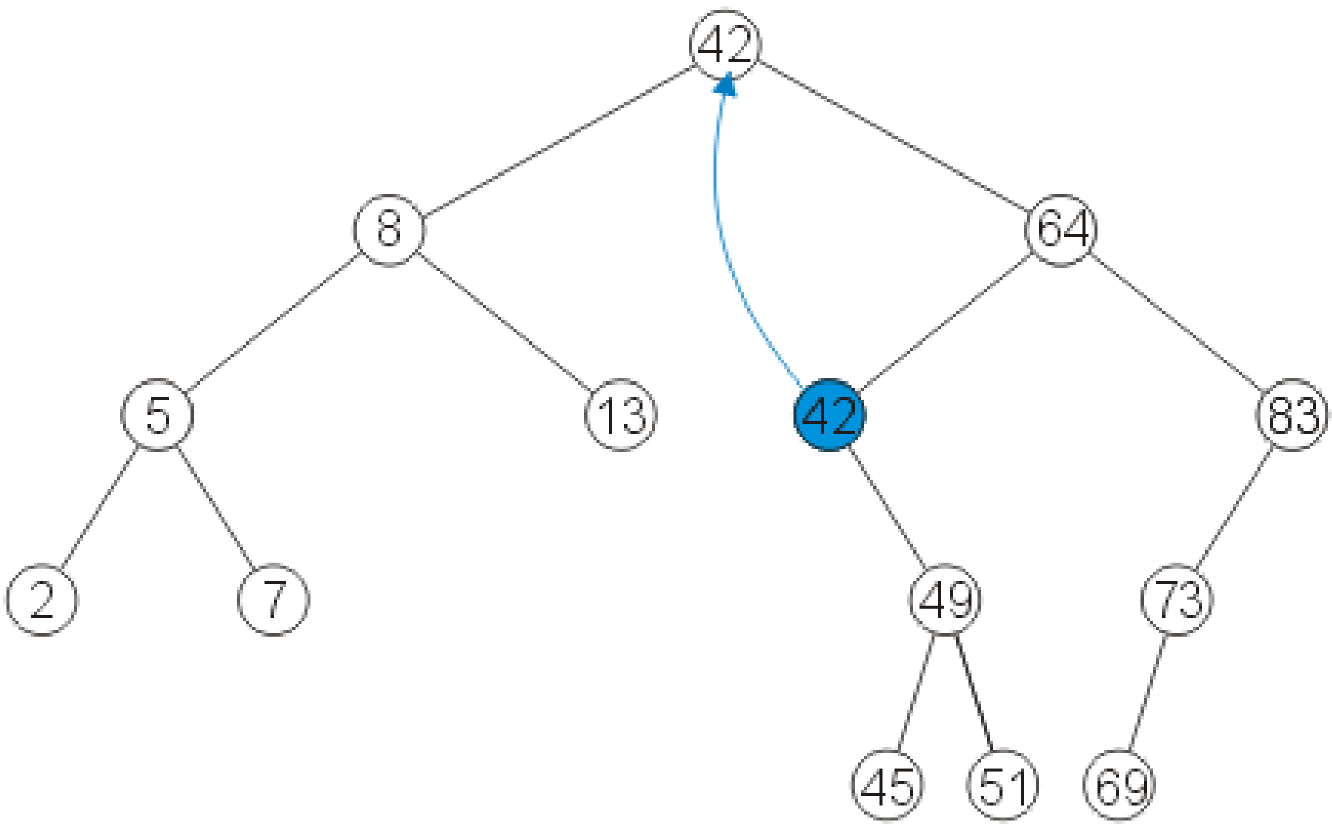
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Ví dụ xóa 15:

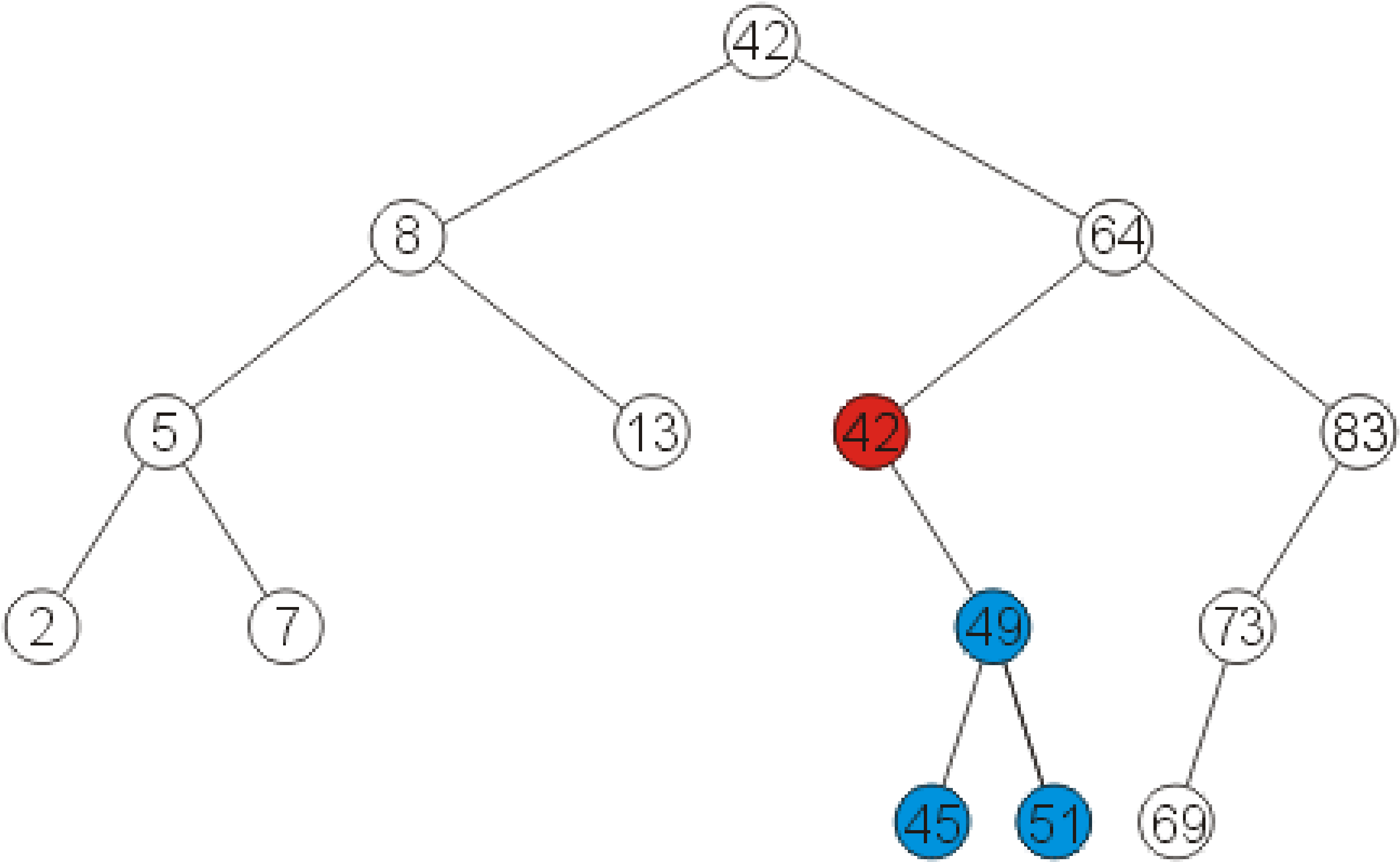


Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- 42 là thế mạng

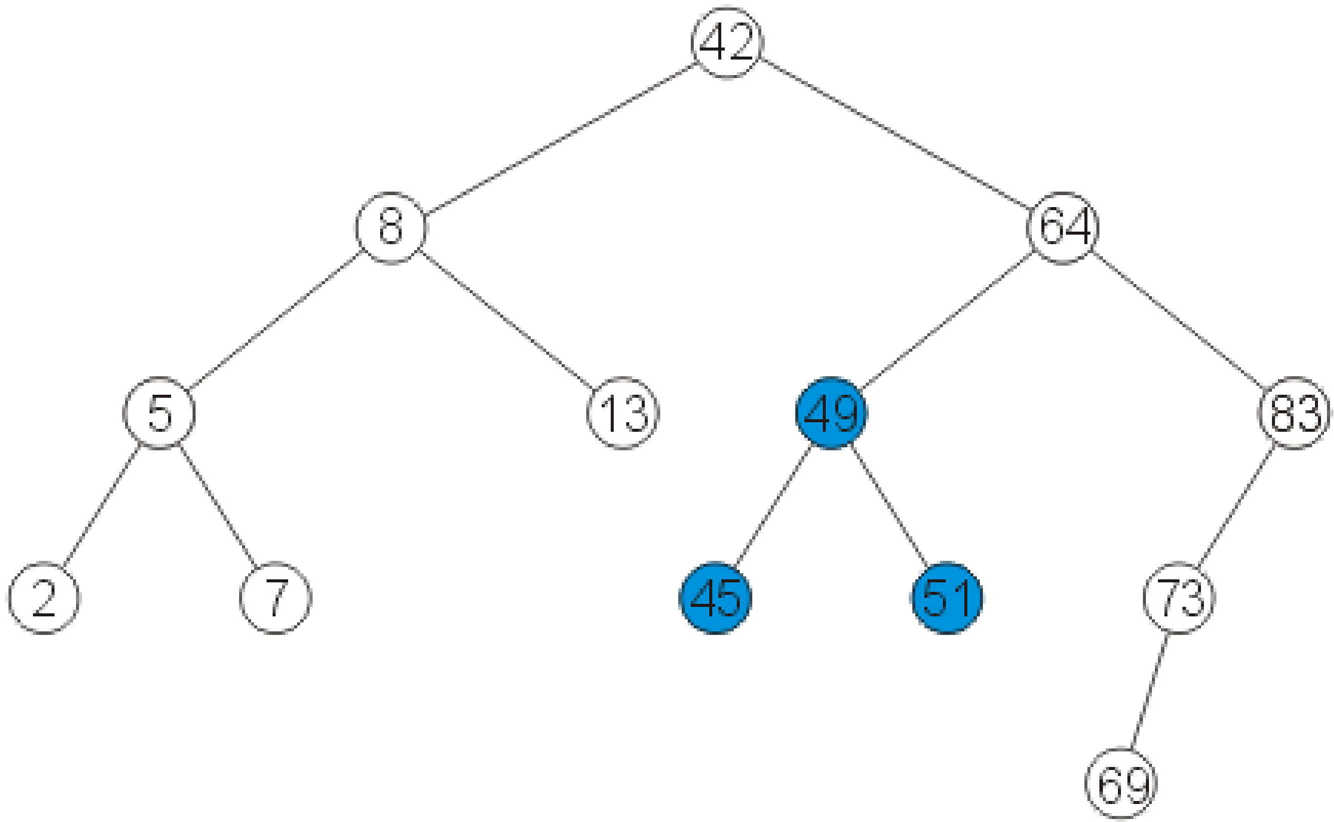


Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X



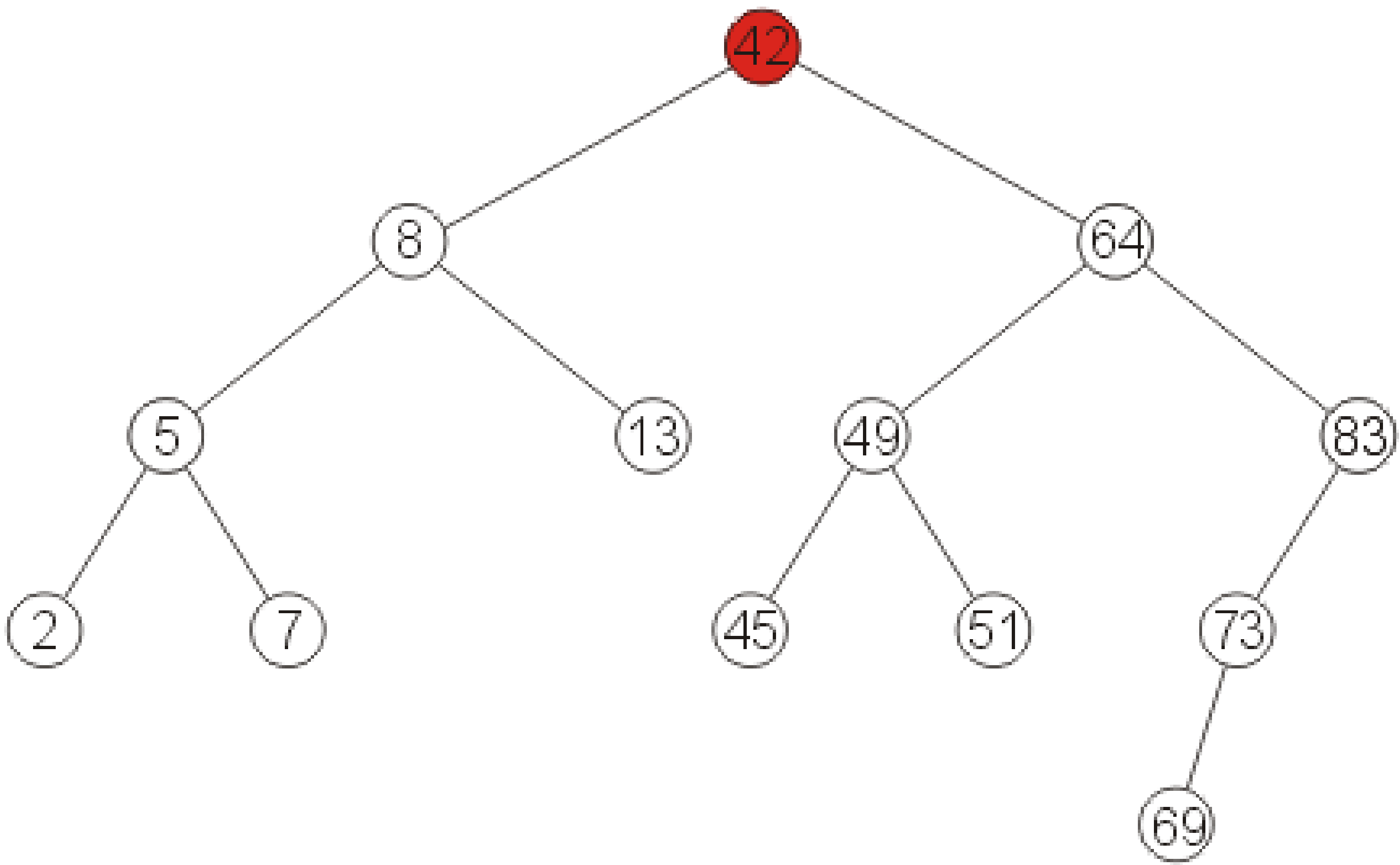
Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Kết quả xoá lần 1:

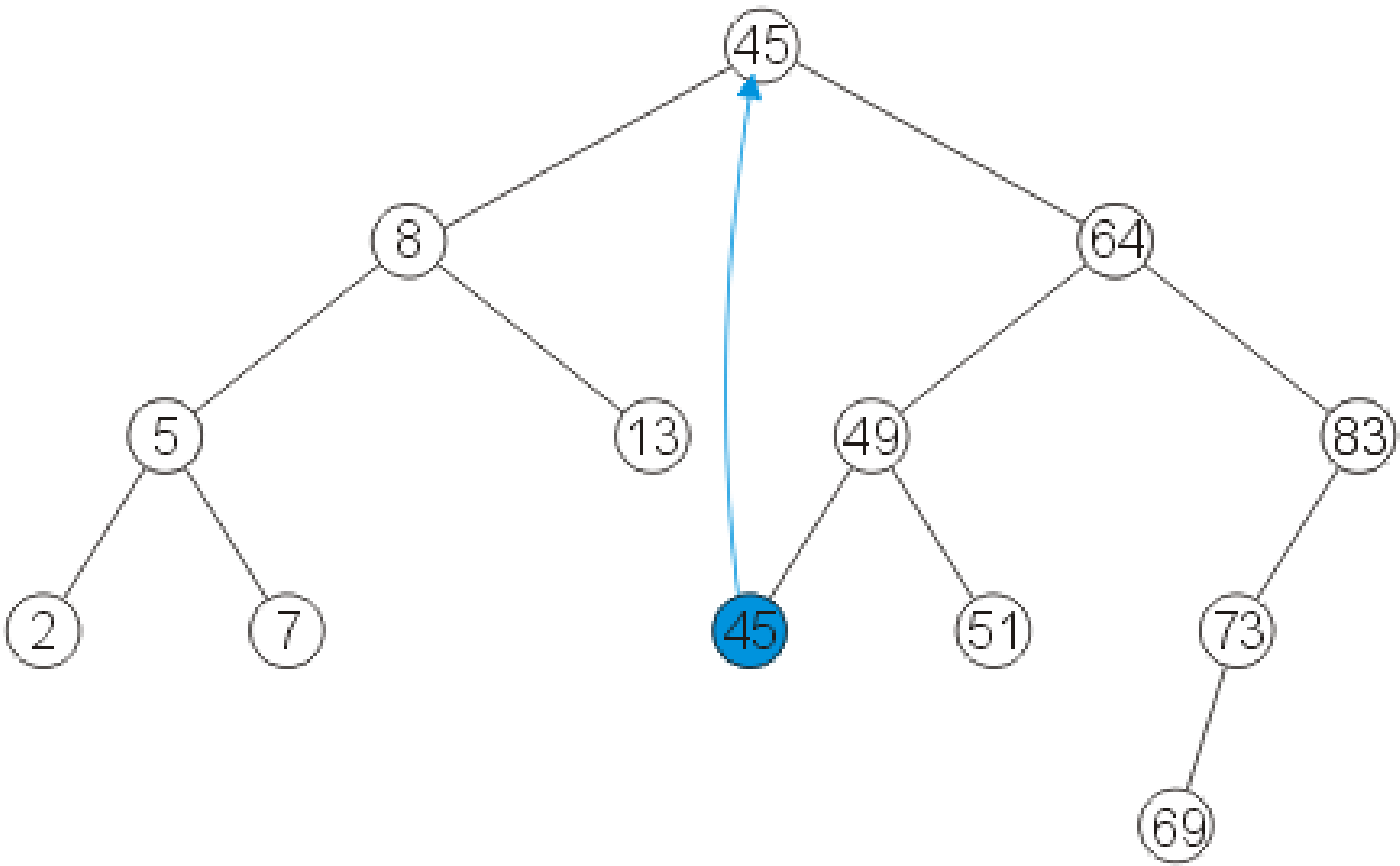


Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

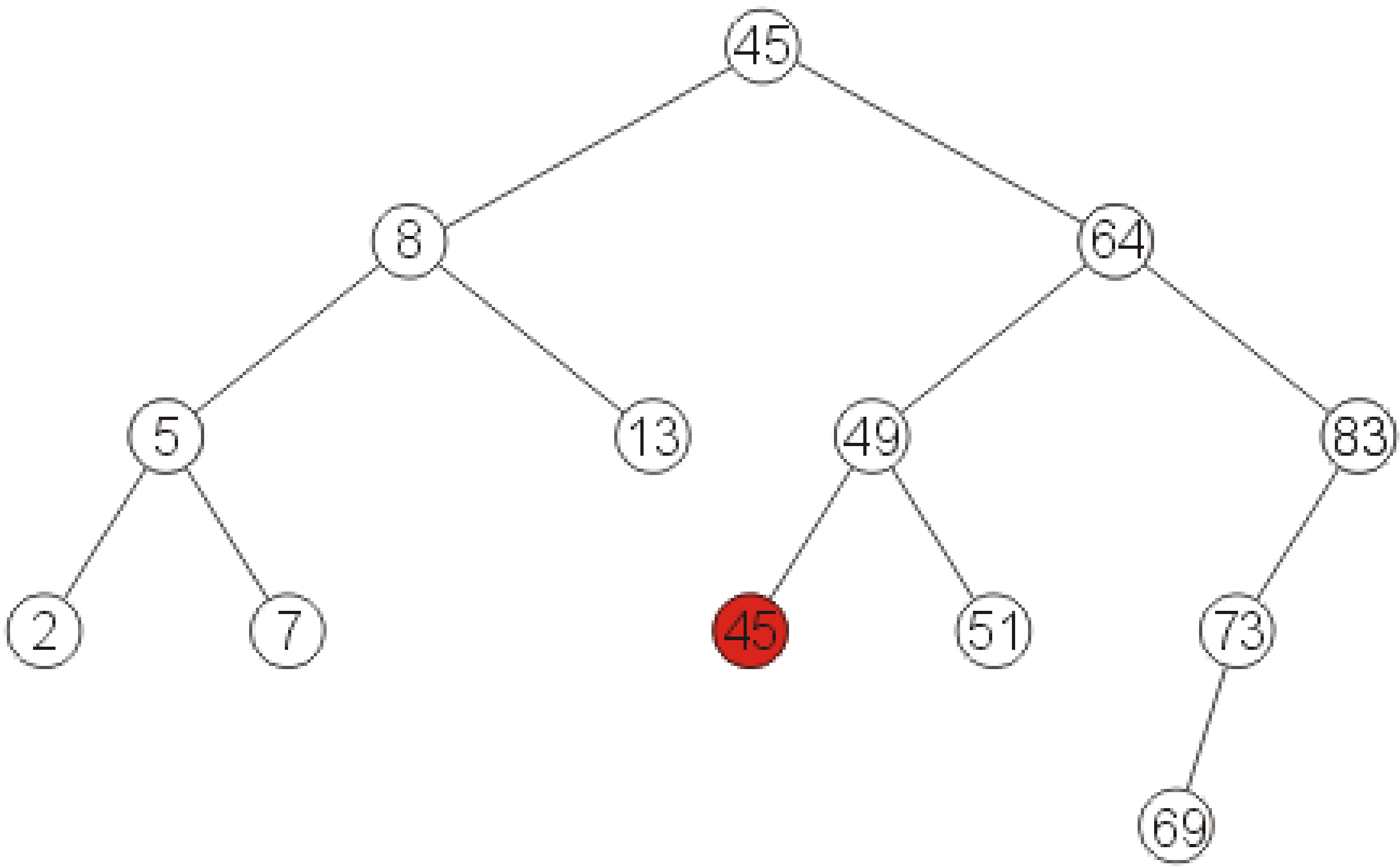
- Ví dụ xóa 42



Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

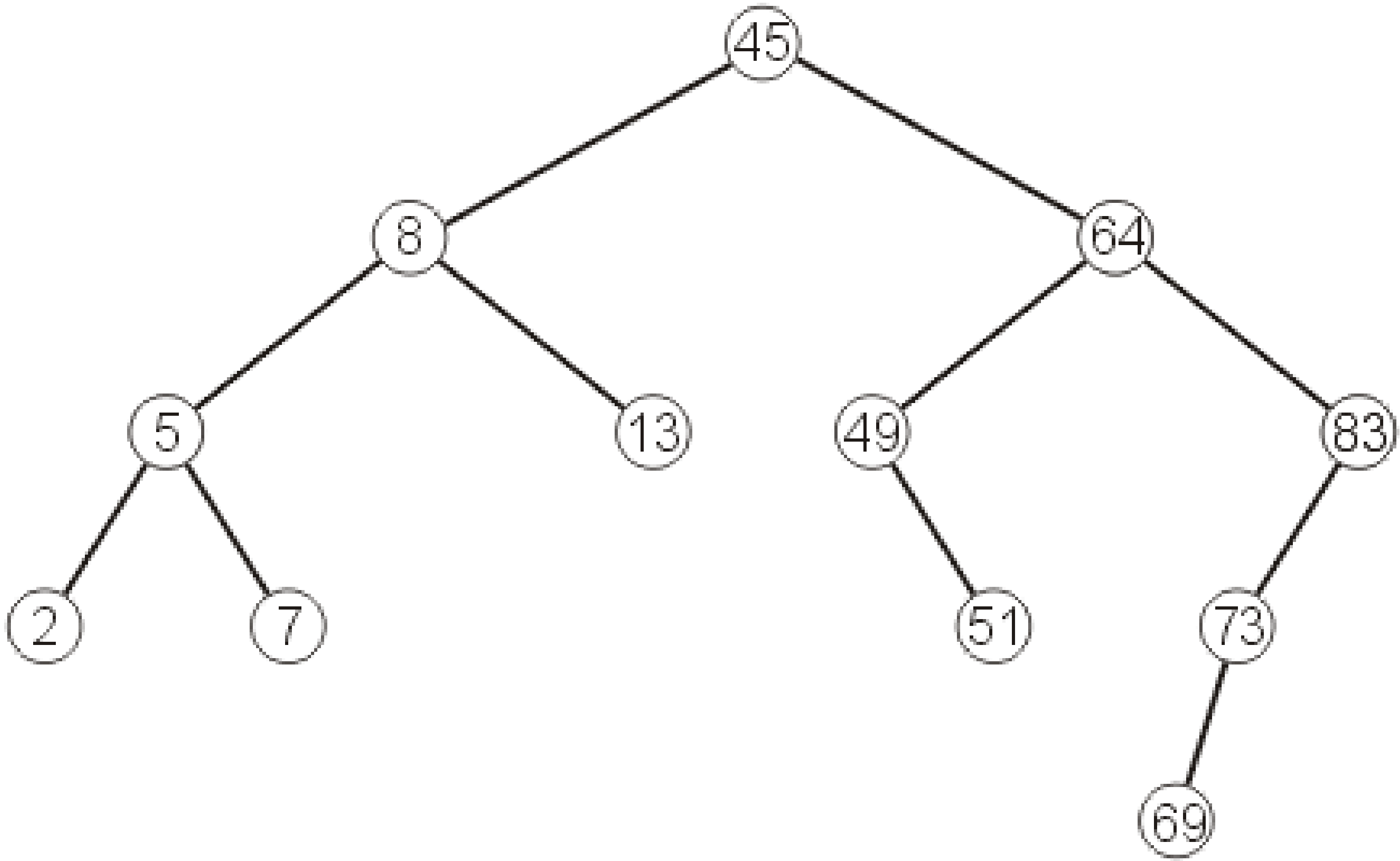


Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X



Binary Search Tree – Hủy một phần tử có khóa X

- Xóa 15, sau đó 42:



Binary Search Tree – Hủy toàn bộ cây

- Việc hủy toàn bộ cây có thể được thực hiện thông qua thao tác duyệt cây theo thứ tự sau. Nghĩa là ta sẽ hủy cây con trái, cây con phải rồi mới hủy nút gốc

```
void  removeTree(Tree &T)
{
    if(T)
    {
            removeTree(T->pLeft);
            removeTree(T->pRight);
            delete(T);
    }
}
```

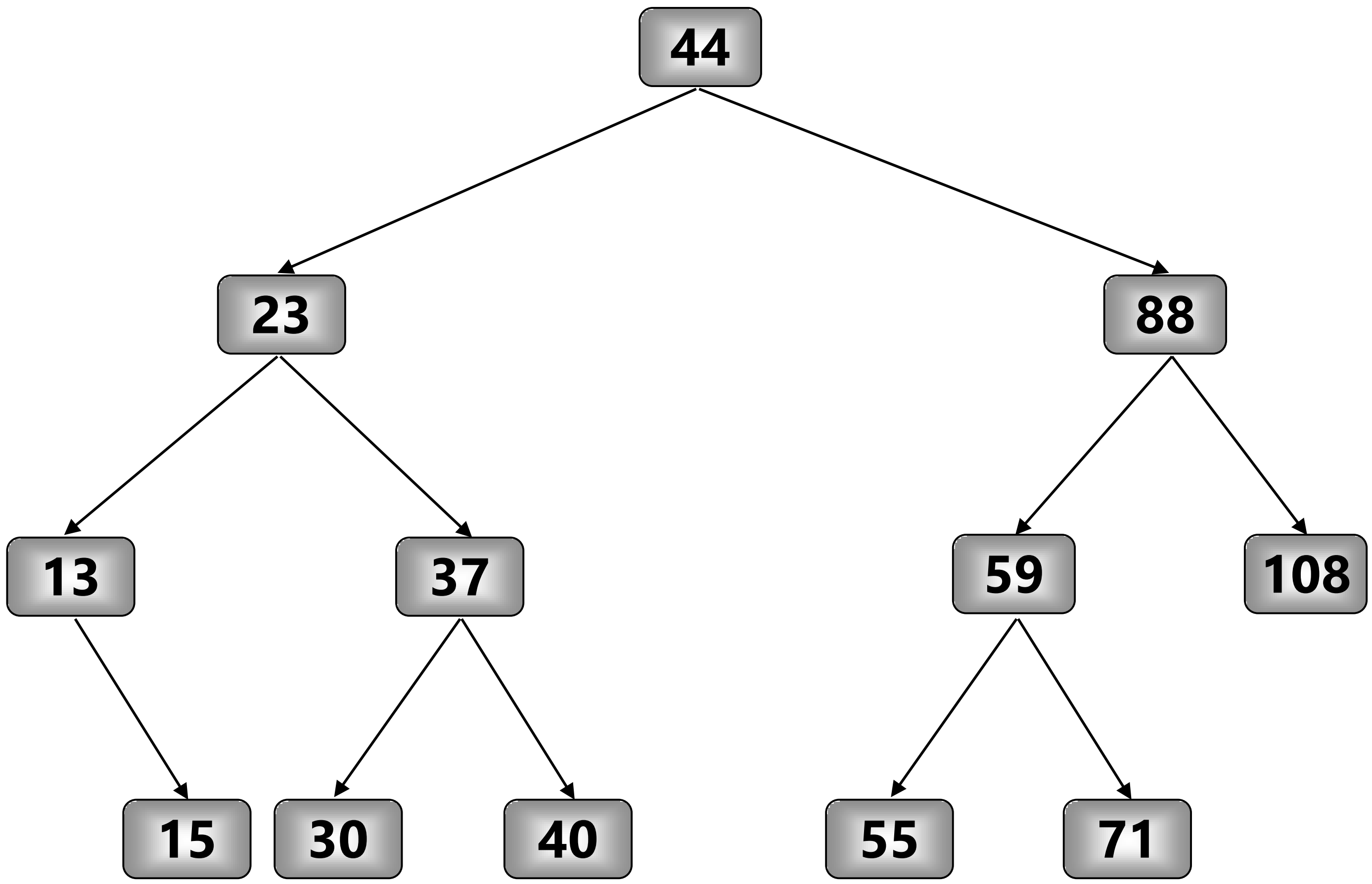
Binary Search Tree

- Nhận xét:
  - Tất cả các thao tác searchNode, insertNode, delNode đều có độ phức tạp trung bình O(h), với h là chiều cao của cây
  - Trong trong trường hợp tốt nhất, CNPTK có n nút sẽ có độ cao **$h = \log_2(n)$.** Chi phí tìm kiếm khi đó sẽ tương đương tìm kiếm nhị phân trên mảng có thứ tự
  - Trong trường hợp xấu nhất, cây có thể bị suy biến thành 1 danh sách liên kết (khi mà mỗi nút đều chỉ có 1 con trừ nút lá). Lúc đó các thao tác trên sẽ có độ phức tạp **O(n)**
  - Vì vậy cần có cải tiến cấu trúc của CNPTK để đạt được chi phí cho các thao tác là **$\log_2(n)$**

AVL Tree - Định nghĩa

- Cây nhị phân tìm kiếm cân bằng là cây mà tại mỗi nút của nó độ cao của cây con trái và của cây con phải chênh lệch không quá một.

AVL Tree – Ví dụ



AVL Tree

- Lịch sử cây cân bằng (AVL Tree):
  - AVL là tên viết tắt của các tác giả người Nga đã đưa ra định nghĩa của cây cân bằng Adelson-Velskii và Landis (1962)
  - Từ cây AVL, người ta đã phát triển thêm nhiều loại CTDL hữu dụng khác như cây đỏ-đen (Red-Black Tree), B-Tree, …

- Cây AVL có chiều cao **log2(n)**

AVL Tree

- Chỉ số cân bằng của một nút:
  - Định nghĩa: Chỉ số cân bằng của một nút p. Viết tắt:CSCB(p)

    CSCB(p) = Độ cao cây phải (p) - Độ cao cây trái (p)
  - Đối với một cây cân bằng, chỉ số cân bằng của mỗi nút chỉ có thể mang một trong ba giá trị sau đây:
    - **CSCB**(p) = 0 ⇔ Độ cao cây trái (p) = Độ cao cây phải (p)
    - **CSCB**(p) = 1 ⇔ Độ cao cây trái (p) < Độ cao cây phải (p)
    - **CSCB**(p) = -1 ⇔ Độ cao cây trái (p) > Độ cao cây phải (p)
- Để tiện trong trình bày, chúng ta sẽ ký hiệu như sau:

  p->balFactor = CSCB(p);
- Độ cao cây trái (p) ký hiệu là **hL**
- Độ cao cây phải(p) ký hiệu là **hR**

AVL Tree – Biểu diễn


```
#define LH   -1    /* Cây con trái cao hơn    */
#define EH    0    /* Hai cây con bằng nhau */
#define RH    1    /* Cây con phải cao hơn   */

struct AVLNode{
  char       balFactor;  // Chỉ số cân bằng
  DataType   data;
  AVLNode*   pLeft;
  AVLNode*   pRight;
};
typedef AVLNode*  AVLTree;
```

AVL Tree – Biểu diễn

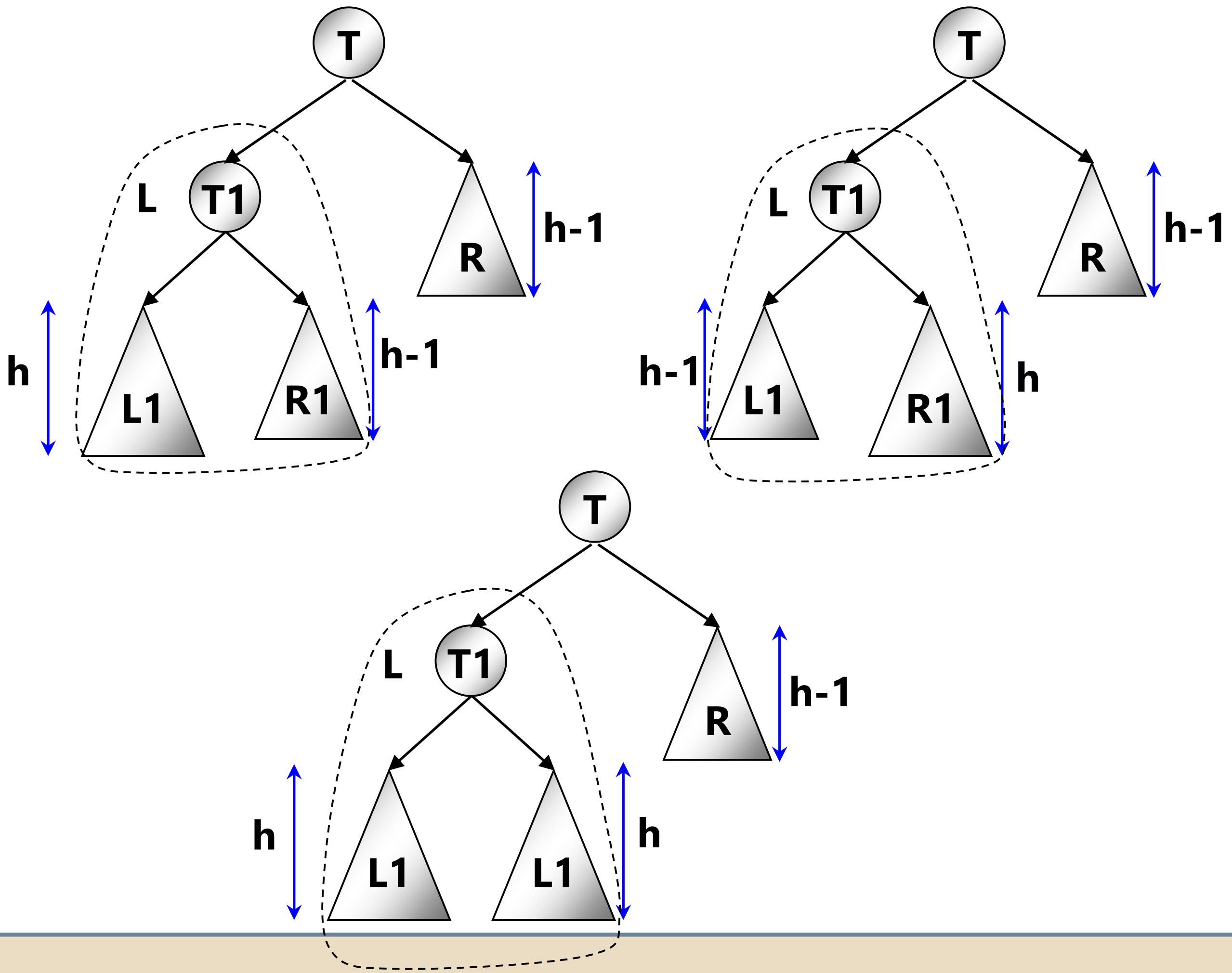
- Trường hợp thêm hay hủy một phần tử trên cây có thể làm cây tăng hay giảm chiều cao, khi đó phải cân bằng lại cây
- Việc cân bằng lại một cây sẽ phải thực hiện sao cho chỉ ảnh hưởng tối thiểu đến cây nhằm giảm thiểu chi phí cân bằng
- Các thao tác đặc trưng của cây AVL:
  - Thêm một phần tử vào cây AVL
  - Hủy một phần tử trên cây AVL
  - Cân bằng lại một cây vừa bị mất cân bằng

AVL Tree

- Các trường hợp mất cân bằng:
  - Ta sẽ không khảo sát tính cân bằng của 1 cây nhị phân bất kỳ mà chỉ quan tâm đến các khả năng mất cân bằng xảy ra khi thêm hoặc hủy một nút trên cây AVL
  - Như vậy, khi mất cân bằng, độ lệch chiều cao giữa 2 cây con sẽ là 2
  - Có 6 khả năng sau:
    - Trường hợp 1 - Cây T lệch về bên trái : 3 khả năng
    - Trường hợp 2 - Cây T lệch về bên phải: 3 khả năng

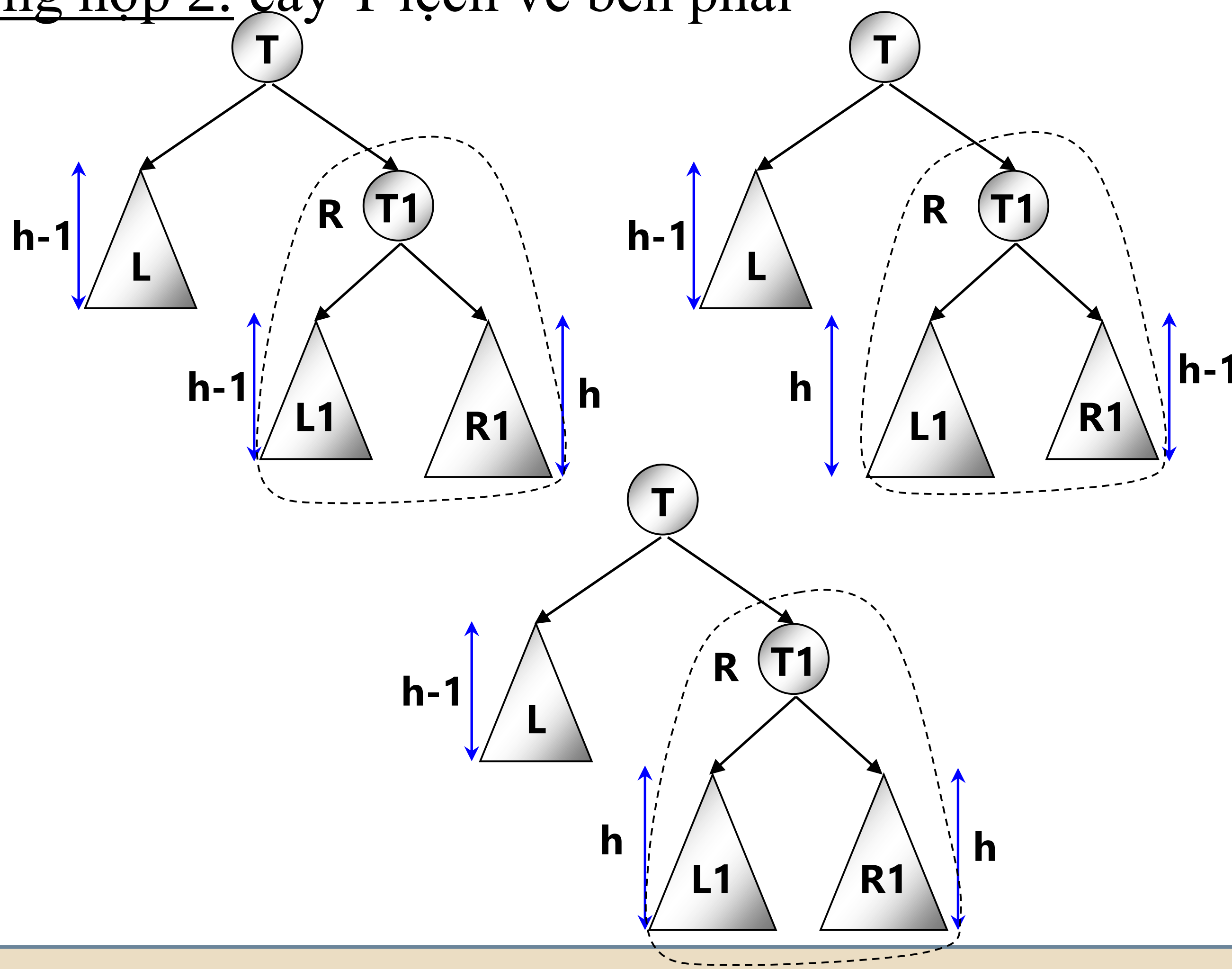
AVL Tree

- <u>Trường hợp 1:</u> cây T lệch về bên trái



AVL Tree

- <u>Trường hợp 2:</u> cây T lệch về bên phải

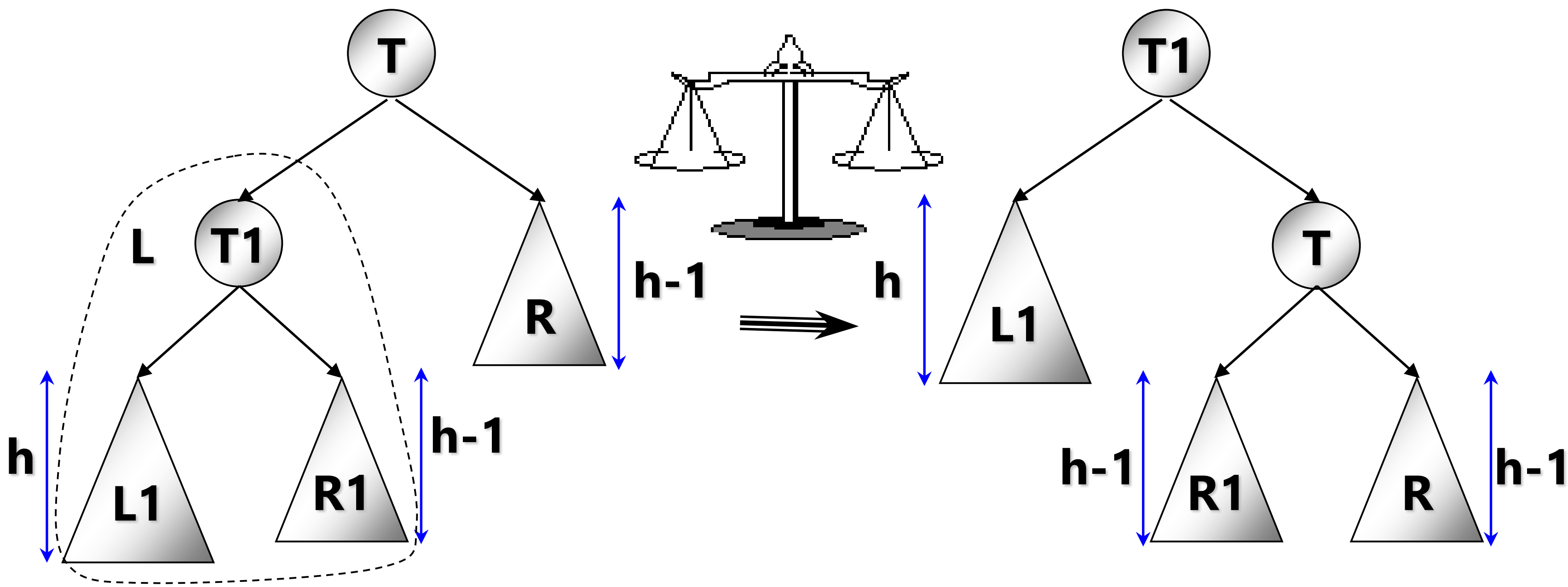


AVL Tree

- Các trường hợp mất cân bằng:
  - Các trường hợp lệch về bên phải hoàn toàn đối xứng với các trường hợp lệch về bên trái.
  - Vì vậy, chỉ cần khảo sát trường hợp lệch về bên trái.
  - Trong 3 trường hợp lệch về bên trái, trường hợp T1 lệch phải là phức tạp nhất. Các trường hợp còn lại giải quyết rất đơn giản.

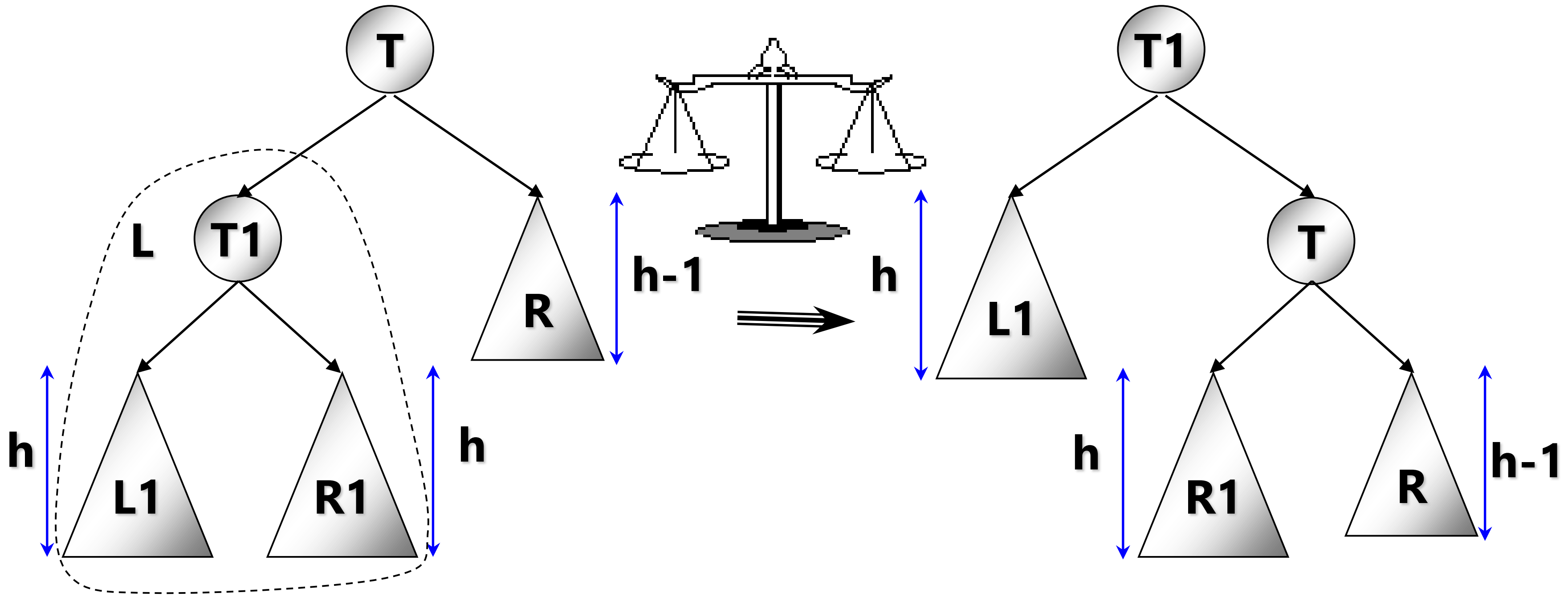
AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- <u>T/h 1.1:</u> cây T1 lệch Left-Left



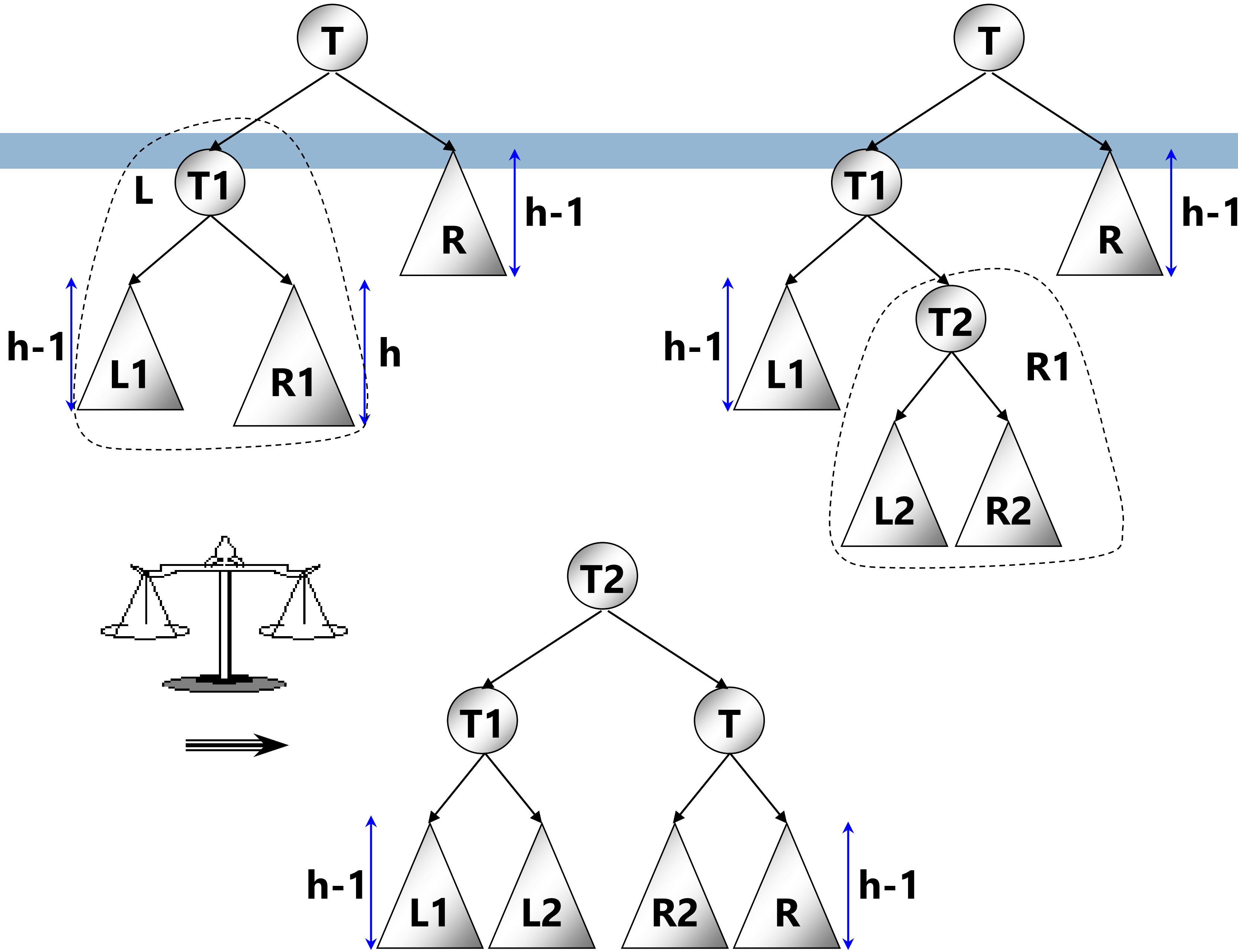
AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- <u>T/h 1.2:</u> cây T1 không lệch. Ta thực hiện phép quay đơn Left-Left



AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right
- Do T1 lệch về bên phải ta không thể áp dụng phép quay đơn đã áp dụng trong 2 trường hợp trên vì khi đó cây T sẽ chuyển từ trạng thái mất cân bằng do lệch trái thành mất cân bằng do lệch phải ? cần áp dụng cách khác

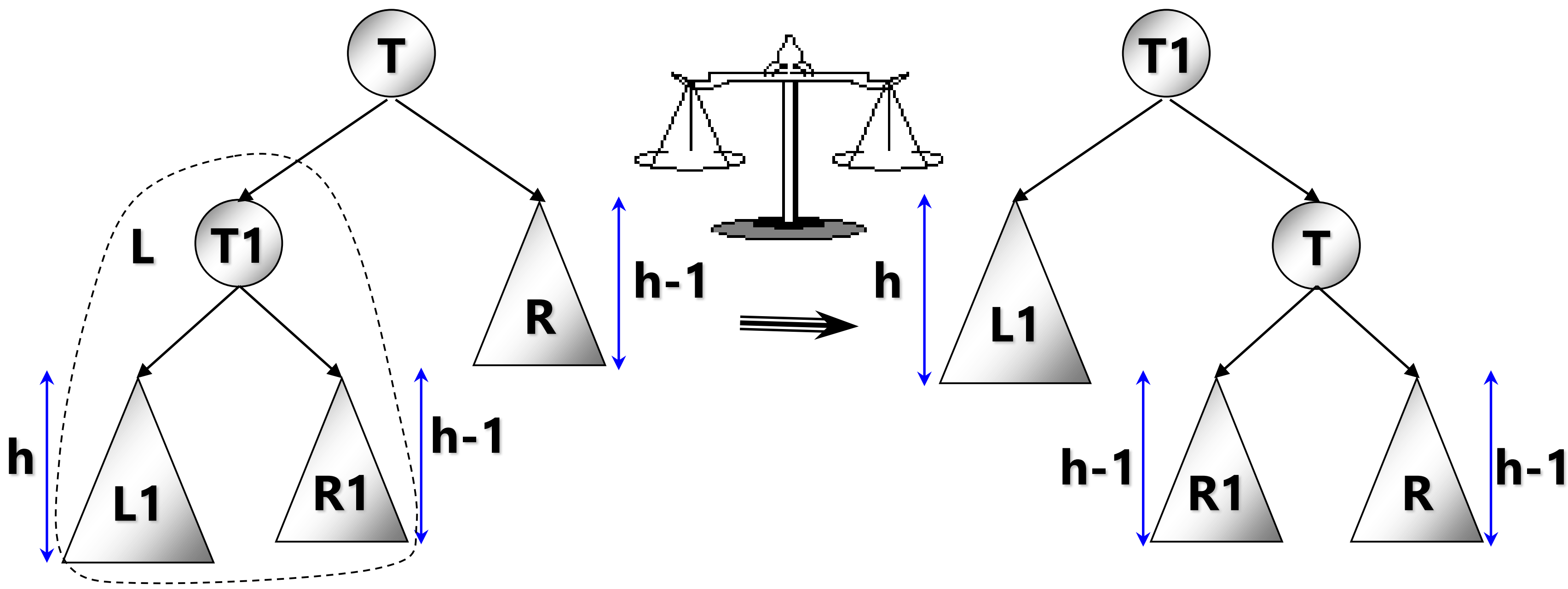

T
T1
L
R
h-1
h-1
L1
R1
h
T
T1
R
h-1
T2
h-1
L1
R1
L2
R2
T2
T1
T
h-1
L1
L2
R2
R
h-1

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- Lưu ý:
  - Trước khi cân bằng cây T có chiều cao h+2 trong cả 3 trường hợp 1.1, 1.2 và 1.3
  - Sau khi cân bằng:
    - Trường hợp 1.1 và 1.3 cây có chiều cao h+1
    - Trường hợp 1.2 cây vẫn có chiều cao h+2. Đây là trường hợp duy nhất sau khi cân bằng nút T cũ có chỉ số cân bằng ≠ 0
    - Thao tác cân bằng lại trong tất cả các trường hợp đều có độ phức tạp O(1)

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- T/h 1.1: cây T1 lệch về bên trái. Ta thực hiện phép quay đơn Left-Left



AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL


```
void rotateLL(AVLTree &T) //quay đơn Left-Left
{
      AVLNode*  T1 = T->pLeft;
      T->pLeft             = T1->pRight;
      T1->pRight        = T;
      switch(T1->balFactor) {
      case LH: T->balFactor  = EH;
                     T1->balFactor = EH;
                     break;
      case EH: T->balFactor  = LH;
                    T1->balFactor = RH;
                    break;
      }
      T            = T1;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- Quay đơn Right-Right:

```
void rotateRR (AVLTree &T) //quay đơn Right-Right
{
    AVLNode*        T1 = T->pRight;
    T->pRight       = T1->pLeft;
    T1->pLeft       = T;
    switch(T1->balFactor)   {
    case RH: T->balFactor = EH;
                    T1->balFactor= EH;
                    break;
    case EH: T->balFactor = RH;
                    T1->balFactor= LH;
                    break;
    }
    T = T1;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- Quay kép Left-Right:

```
void rotateLR(AVLTree &T)//quay kép Left-Right
{	AVLNode*	T1 = T->pLeft;
	AVLNode*	T2 = T1->pRight;
	T->pLeft	= T2->pRight;
	T2->pRight	= T;
	T1->pRight	= T2->pLeft;
	T2->pLeft	= T1;
	switch(T2->balFactor)	{
	  case LH: T->balFactor  = RH; T1->balFactor = EH; break;
	  case EH: T->balFactor  = EH; T1->balFactor = EH; break;
	  case RH: T->balFactor  = EH; T1->balFactor = LH; break;
	}
	T2->balFactor = EH;
	T = T2;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- Quay kép Right-Left

```
void rotateRL(AVLTree &T)        //quay kép Right-Left
{           AVLNode*        T1 = T->pRight;
            AVLNode*        T2 = T1->pLeft;
            T->pRight       = T2->pLeft;
            T2->pLeft       = T;
            T1->pLeft       = T2->pRight;
            T2->pRight      = T1;
            switch(T2->balFactor)   {
              case RH: T->balFactor = LH; T1->balFactor = EH; break;
              case EH: T->balFactor = EH; T1->balFactor = EH; break;
              case LH: T->balFactor = EH; T1->balFactor = RH; break;
            }
            T2->balFactor = EH;
            T = T2;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- Cân bằng khi cây bị lệch về bên trái:

```
int balanceLeft(AVLTree &T)
//Cân bằng khi cây bị lệch về bên trái
{
	AVLNode*	T1 = T->pLeft;

	switch(T1->balFactor)		{
	case LH:	rotateLL(T); return 2;
	case EH:	rotateLL(T); return 1;
	case RH:	rotateLR(T); return 2;
	}
	return 0;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

- Cân bằng khi cây bị lệch về bên phải

```
int balanceRight(AVLTree &T )
//Cân bằng khi cây bị lệch về bên phải
{
        AVLNode*        T1 = T->pRight;

        switch(T1->balFactor)           {
        case LH:        rotateRL(T); return 2;
        case EH:        rotateRR(T); return 1;
        case RH:        rotateRR(T); return 2;
        }
        return 0;
}
```

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

- Việc thêm một phần tử vào cây AVL diễn ra tương tự như trên CNPTK
- Sau khi thêm xong, nếu chiều cao của cây thay đổi, từ vị trí thêm vào, ta phải lần ngược lên gốc để kiểm tra xem có nút nào bị mất cân bằng không. Nếu có, ta phải cân bằng lại ở nút này
- Việc cân bằng lại chỉ cần thực hiện 1 lần tại nơi mất cân bằng
- Hàm *insertNode* trả về giá trị –1, 0, 1 khi không đủ bộ nhớ, gặp nút cũ hay thành công. Nếu sau khi thêm, chiều cao cây bị tăng, giá trị 2 sẽ được trả về

int insertNode(AVLTree &T, DataType X)

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL


```
int insertNode(AVLTree &T, DataType X)
{  int  res;
   if (T)
   {    if (T->key == X) return 0; //đã có
        if (T->key > X)
        {    res       = insertNode(T->pLeft, X);
             if(res < 2) return res;
             switch(T->balFactor)
             {  case RH: T->balFactor = EH;  return 1;
                case EH: T->balFactor = LH;  return 2;
                case LH: balanceLeft(T);     return 1;
             }
        }
.....................................................
}
```

insertNode2

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL


```
int insertNode(AVLTree &T, DataType X)
{
.......................................................
      else // T->key < X
      {   res      = insertNode(T-> pRight, X);
          if(res < 2) return res;
          switch(T->balFactor)
          { case LH: T->balFactor    = EH; return 1;
            case EH: T->balFactor    = RH; return 2;
            case RH: balanceRight(T);     return 1;
            }
      }
.......................................................
}
```

insertNode3

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL


```
int insertNode(AVLTree &T, DataType X)
{
.................................
    ...........
    T   = new TNode;
    if(T == NULL) return -1; //thiếu bộ nhớ
    T->key = X;
    T->balFactor = EH;
    T->pLeft = T->pRight = NULL;
    return 2; // thành công, chiều cao tăng
}
```

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

- Cũng giống như thao tác thêm một nút, việc hủy một phần tử X ra khỏi cây AVL thực hiện giống như trên CNPTK
- Sau khi hủy, nếu tính cân bằng của cây bị vi phạm ta sẽ thực hiện việc cân bằng lại
- Tuy nhiên việc cân bằng lại trong thao tác hủy sẽ phức tạp hơn nhiều do có thể xảy ra phản ứng dây chuyền
- Hàm *delNode* trả về giá trị 1, 0 khi hủy thành công hoặc không có X trong cây. Nếu sau khi hủy, chiều cao cây bị giảm, giá trị 2 sẽ được trả về:

int delNode(AVLTree &T, DataType X)

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL


```
int delNode(AVLTree &T, DataType X)
{  int res;
   if(T==NULL)       return 0;
   if(T->key > X)
   {   res = delNode (T->pLeft, X);
       if(res < 2)   return res;
       switch(T->balFactor)
       {   case LH: T->balFactor = EH; return 2;
           case EH: T->balFactor = RH; return 1;
           case RH: return balanceRight(T);
       }
   } // if(T->key > X)
.....................................................
}
```

delNode2

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL


```
int delNode(AVLTree &T, DataType X)
{
.............................................
   if(T->key < X)
   {   res      = delNode (T->pRight, X);
       if(res < 2)    return res;
       switch(T->balFactor)
       {   case RH: T->balFactor = EH; return 2;
           case EH: T->balFactor = LH; return 1;
           case LH: return balanceLeft(T);
       }
   } // if(T->key < X)
.............................................
}
```

delNode3

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL


```
int delNode(AVLTree &T, DataType X)
{.....................................................
   else  //T->key == X
   {  AVLNode*   p = T;
      if(T->pLeft == NULL)        {  T = T->pRight; res = 2; }
      else if(T->pRight == NULL) {  T = T->pLeft;  res = 2; }
           else //T có đủ cả 2 con
           {  res = searchStandFor(p,T->pRight);
              if(res < 2) return res;
              switch(T->balFactor)
              {  case RH: T->balFactor = EH; return 2;
                 case EH: T->balFactor = LH; return 1;
                 case LH: return balanceLeft(T);
              }
           }
      delete p;  return res;
   }
}
```

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL


```
int searchStandFor(AVLTree &p, AVLTree &q)
//Tìm phần tử thế mạng
{  int  res;
   if(q->pLeft)
   {   res      = searchStandFor(p, q->pLeft);
       if(res < 2)     return res;
       switch(q->balFactor)
       {   case LH: q->balFactor = EH; return 2;
           case EH: q->balFactor = RH; return 1;
           case RH: return balanceRight(T);
       }
   }   else
   {   p->key = q->key; p = q; q = q->pRight; return 2;
   }
}
```

AVL Tree

- Nhận xét:
  - Thao tác thêm một nút có độ phức tạp O(1)
  - Thao tác hủy một nút có độ phức tạp O(h)
  - Với cây cân bằng trung bình 2 lần thêm vào cây thì cần một lần cân bằng lại; 5 lần hủy thì cần một lần cân bằng lại

AVL Tree

- Nhận xét:
  - Việc hủy 1 nút có thể phải cân bằng dây chuyền các nút từ gốc cho đến phần tử bị hủy trong khi thêm vào chỉ cần 1 lần cân bằng cục bộ
  - Độ dài đường tìm kiếm trung bình trong cây cân bằng gần bằng cây cân bằng hoàn toàn $\log_2 n$, nhưng việc cân bằng lại đơn giản hơn nhiều
  - Một cây cân bằng không bao giờ cao hơn 45% cây cân bằng hoàn toàn tương ứng dù số nút trên cây là bao nhiêu