**Bài tập chương 3 : QUAN HỆ HAI NGÔI**

***Quan hệ tương đương:***

* Phản xạ 🡪 a R a.
* Đối xứng 🡪 nếu có a R b thì cũng có b R a.
* Bắc cầu 🡪 nếu có a R b và b R c thì cũng có a R c.

*Ví dụ:* Trong lớp học CTRR 🡪 2 sinh viên a, b nếu có cùng họ thì có mối quan hệ với nhau

🡪 a R b (R = relation).

* a cùng họ với chính a 🡪 phản xạ.
* a cùng họ với b thì b cùng họ với a 🡪 đối xứng.
* a cùng họ với b và b cùng họ với c thì a, c cùng họ 🡪 bắc cầu.

Đây là quan hệ tương đương 🡪 dùng để phân chia một quan hệ gồm nhiều phần tử thành các nhóm nhỏ hơn có cùng đặc điểm.

***Lớp tương đương***

* Những phần tử nào có quan hệ tương đương với nhau thì xếp vào cùng lớp. Chẳng hạn ở ví dụ trên, những người cùng họ thì xếp vào cùng “lớp”: lớp họ “Nguyễn”, lớp họ “Trần”, ...
* Mỗi phần tử thì thuộc đúng một lớp, và số lượng phần tử của mỗi lớp không nhất thiết bằng nhau 🡪 phân hoạch (đối chiếu với phân chia, divide thông thường 🡪 partition).

**BÀI TẬP**

**1.** Cho R là quan hệ trên tập SV của lớp sao cho:

a) a R b ⬄ a, b sinh cùng tháng.

b) a R b ⬄ a, b trước đó có học chung ít nhất 2 môn (không tính môn này).

c) a R b ⬄ a, b có cùng ông (nội hoặc ngoại).

Kiểm tra các quan hệ trên có phải quan hệ tương đương không?

**2.** Trong các quan hệ sau trên tập {1, 2, 3, 4}, xác định xem nó có phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu hay không?  
a) {(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}  
b) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}  
c) {(2, 4), (4, 2)}  
d) {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}  
e) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}  
f) {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)}

3. Cho A=. Trên A xác định quan hệ như sau:

là số chẵn.

Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và tìm tập thương.

**4.** Kiểm tra các mối quan hệ sau đây có tương đương không? Nếu có, hãy tìm lớp tương đương và Phân hoạch tập nguồn thành các lớp tương đương.

1) R = {(a,b) | a <= b và a, b là các số thực}.

2) R = {(a,b) | a – b là số nguyên; trong đó a, b là các số thực}.

3) R = {(a,b) | ab là số nguyên; trong đó a, b là các số thực}.

4) R = {(a,b) | a – b chia hết cho 9; trong đó a, b là các số nguyên}.

**5. (*DHTH 17TT*)**

Cho quan hệ 2 ngôi **R** trên Z được định nghĩa như sau :

∀ x, y ∈ Z, x **R** y ⇔ 3 | (4y - x) ⇔ (4y - x) chia hết cho 3

1. Chứng minh **R**  là quan hệ tương đương.
2. Phân hoạch Z thành các lớp tương đương.

**6. (*DHTH 15 đại trà*)**

Xét quan hệ R trên tập Z được định nghĩa như sau :

∀x, y ∈ Z, x R y ⇔ x2 – y2 = k (x - y) với k ∈ Z+

1. (2 điểm) Chứng minh R là quan hệ tương đương
2. (1 điểm) Cho x ∈ Z, xác định lớp tương đương [x]R

**7. (*DHTH 15 TT*)**

Cho tập A = { -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 }, xét quan hệ 2 ngôi **R**  trên A được định nghĩa như sau: ∀x, y ∈ A, x **R** y ⇔ x2 + 2y = y2 + 2x

1. Chứng minh **R**  là quan hệ tương đương
2. Liệt kê các phần tử của tập quan hệ **R** và phân hoạch A thành các lớp tương đương.

**8. (*DHTH 13 đại trà*)**

Cho A ={ x= m + n| m , n∈ Z }. Quan hệ hai ngôi R xác định trên A như sau :

∀ x=(m + n ) , y=(p + q ) ∈ A, xRy ⇔m+p và n+q là số chẳn.

* 1. (3 điểm) Chứng minh rằng R là quan hệ quan hệ tương đương trên A.
  2. (1 điểm) Xác định các lớp tương đương của quan hệ R

***9.*** *(****DHTH 13 TT****)*

*A*= {1,2,3,4,5} × {1,2,3,4,5} và R là quan hệ trên *A*, sao cho:

(x, y) R (z, t) ⟺ x + y =z + t

a) Kiểm tra lại R là một quan hệ tương đương (3đ)

b) Xác định các lớp tương đương [(1,2)], [(2,4)] và [(1,1)] (1đ)

c) Chỉ ra phân hoạch của *A* thành các lớp tương đương (1đ)

**10.** *(****thầy Lữ đề nghị****)* Với  là số nguyên dương, gọi  là tập hợp tất cả các số nguyên dương không vượt quá  Xét quan hệ hai ngôi  trên  như sau: với mọi cặp số , ta có  khi và chỉ khi  là lũy thừa của  với số mũ nguyên. *Ví dụ:  vì  là lũy thừa của  với số mũ là *

a) Chứng minh rằng  là quan hệ tương đương trên 

b) Chứng minh rằng với mọi  nguyên dương tùy ý, số lớp tương đương của  luôn là 