柱函数

贝塞尔方程

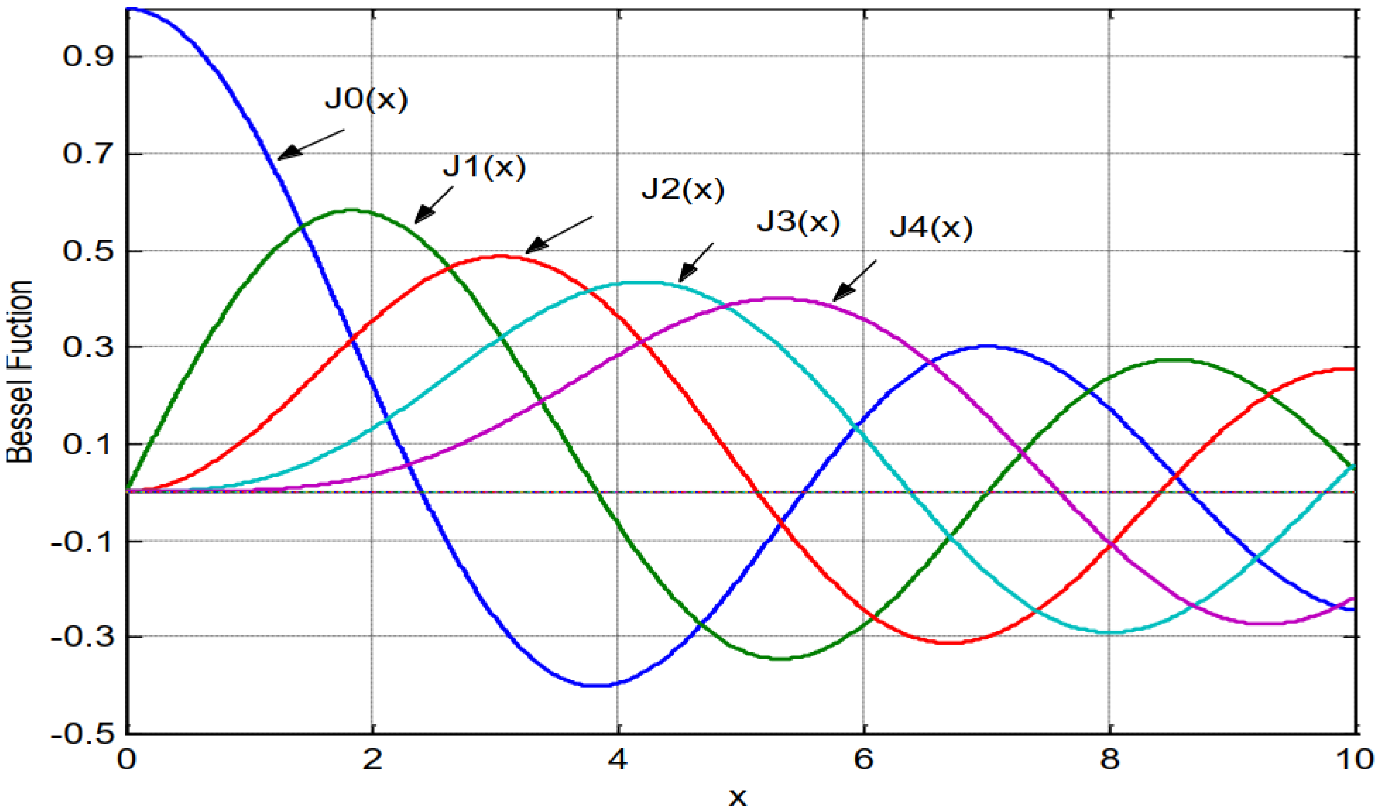
方程形式

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

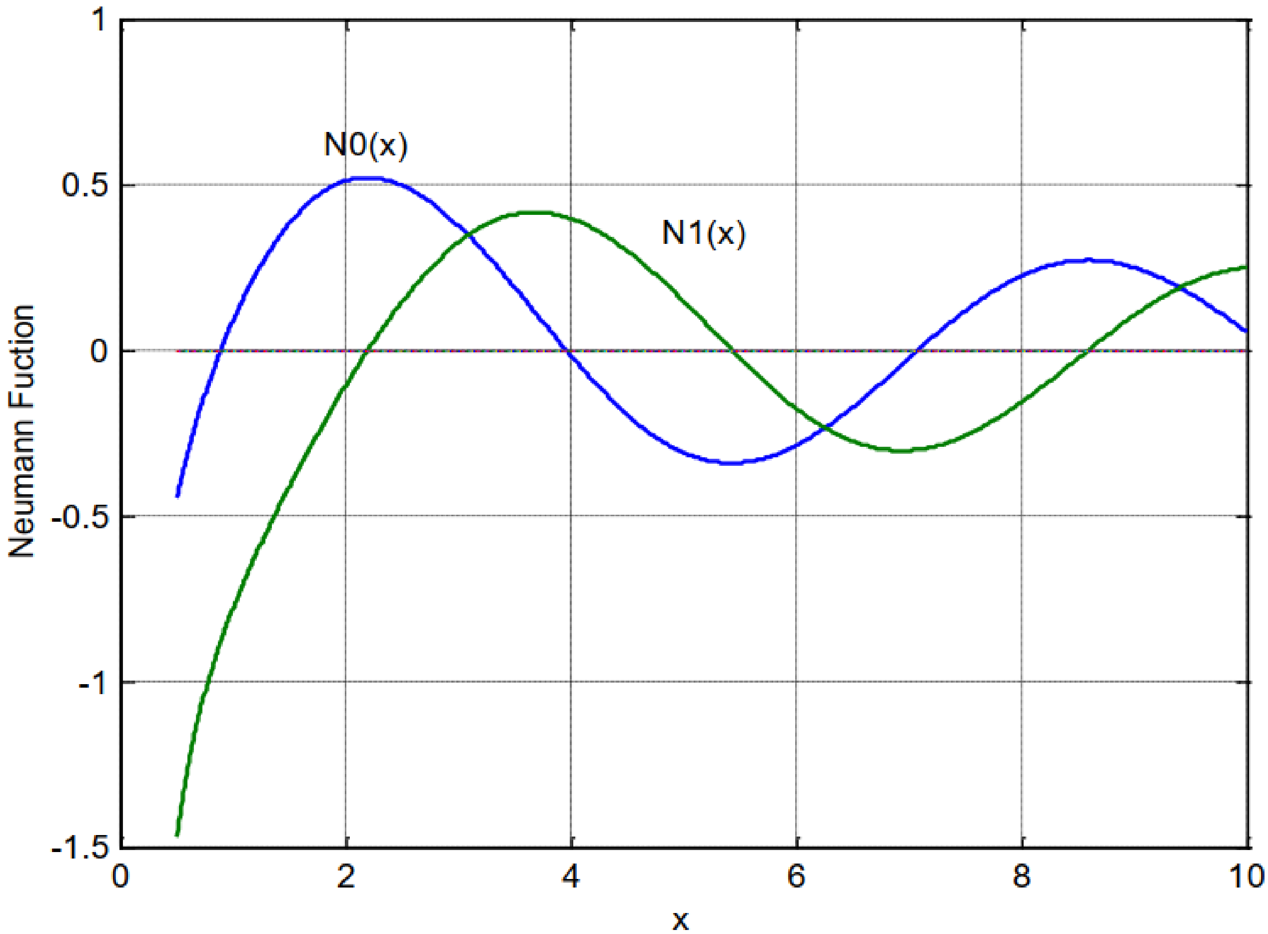
解的形式

m解贝塞尔函数与m解诺依曼函数的组合
$y = c_1J_m(x) + c_2N_m(x)$

$J_m(x)$的图像


J0(x)
J1(x)
J2(x)
J3(x)
J4(x)
Bessel Fuction
x
0.9
0.7
0.5
0.3
0.1
-0.1
-0.3
-0.5
0
2
4
6
8
10

$N_m(x)$的图像



可见如果在0处函数值有限，则要舍去诺依曼函数

虚宗量贝塞尔方程

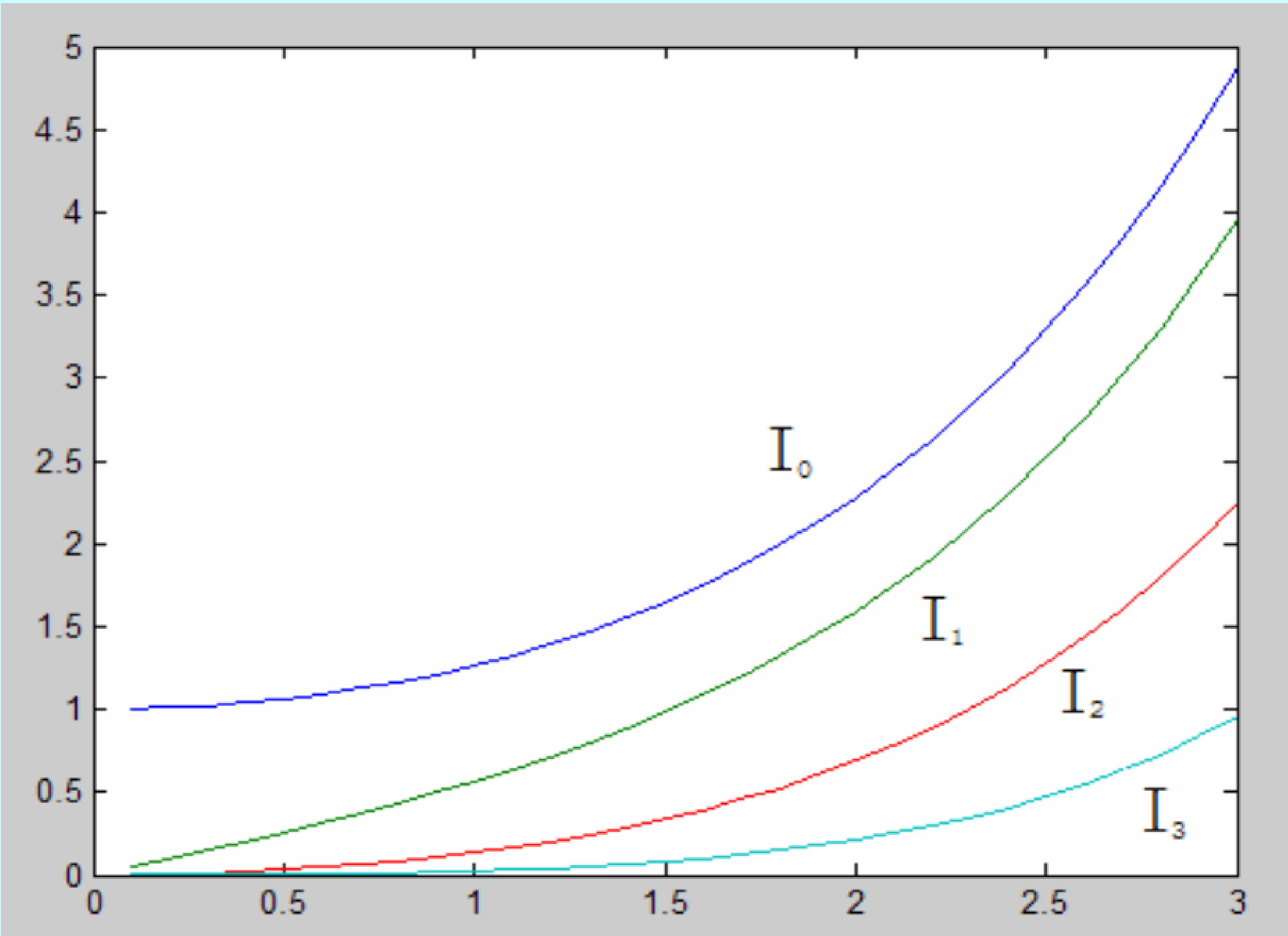
方程形式

$x^2y'' + xy' - (x^2 + m^2)y = 0$

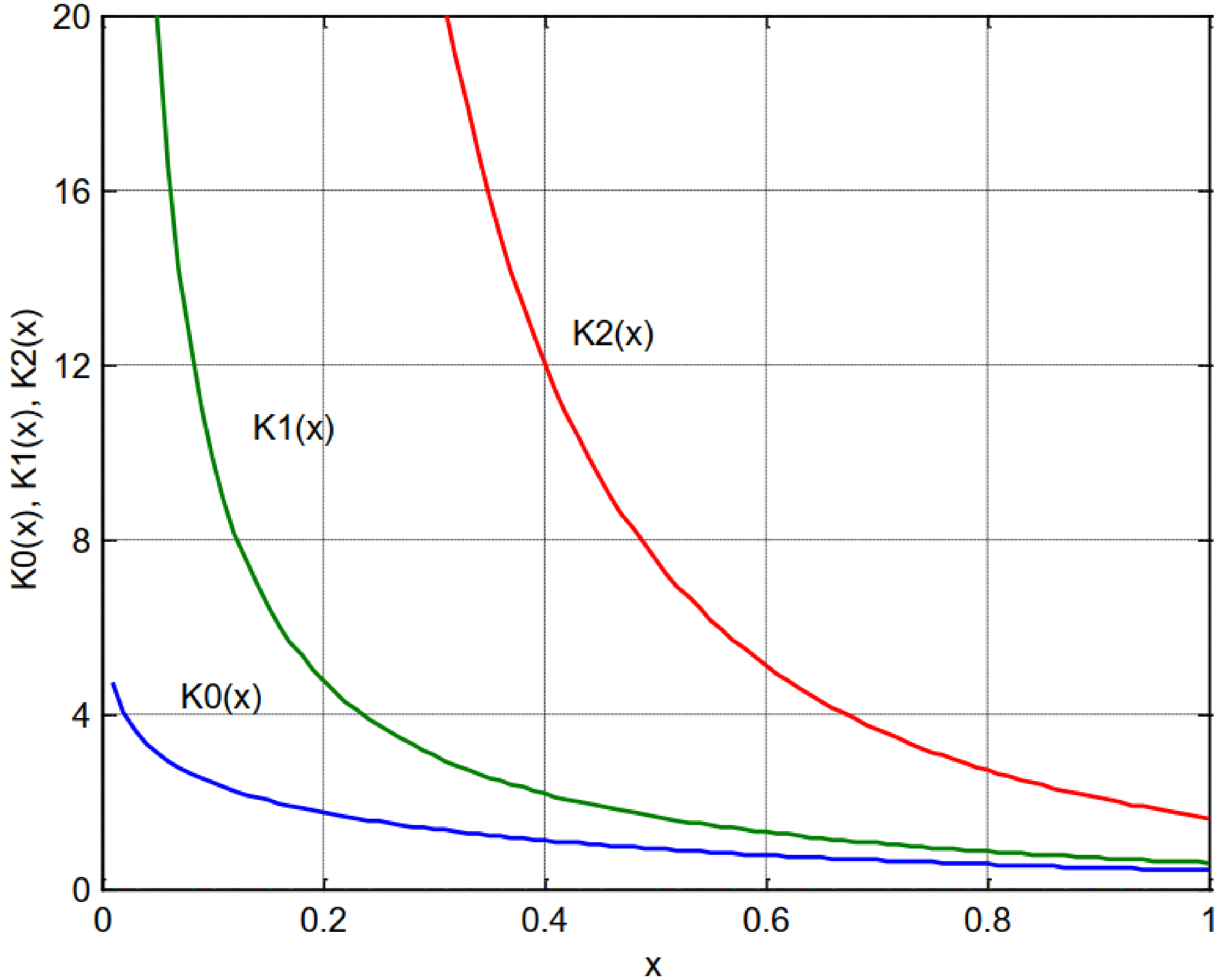
解的形式

m阶虚宗量贝塞尔方程与m解虚宗量汉克尔方程的组合
$y = c_1 I_m(x) + c_2 K_m(x)$

$I_m(x)$的图像



$K_m(x)$的图像



可见，如果在0处有限，则应当舍去虚宗量汉克尔函数

傅里叶-贝塞尔级数

$$\begin{cases} f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho) \\ f_n = \frac{1}{[N_n^{(m)}]^2} \int_0^{\rho_0} f(\rho) J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho d\rho \end{cases}$$

其中，对于球轴对称的柱函数

第一类边界条件：$[N_n^{(0)}]^2 = \frac{1}{2}\rho_0^2 J_1(\sqrt{\mu_n^{(0)}}\rho)$

第二类边界条件：$[N_n^{(0)}]^2 = \frac{1}{2}\rho_0^2 J_0(\sqrt{\mu_n^{(0)}}\rho)$

第三类边界条件：$[N_n^{(0)}]^2 = \frac{1}{2}(\rho_0^2 + \frac{\rho_0^2}{\mu_m^{(0)} H}) J_0(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$

柱函数的递推公式

$\frac{d}{dx}[x^v Z_v(x)] = x^v Z_{v-1}(x)$

$$\frac{d}{dx}[x^{-v}Z_v(x)] = -x^{-v}Z_{v+1}(x)$$

$$Z_{v+1}(x) - Z_{v-1}(x) = \frac{2vZ_v(x)}{x}$$

$$Z_{v+1}(x) + Z_{v-1}(x) = -2Z_v'(x)$$