1. 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，$-\infty<t<+\infty$，其中 A 是服从瑞利分布的随机变量，其概率密度为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}e^{-a^2/(2\sigma^2)}, & a>0,\\ 0, & a\leqslant 0,\end{cases}$$

Θ 是在 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布且与 A 相互独立的随机变量，ω 是一常数，问 $X(t)$ 是不是平稳过程？

1.解: $X(t)X(t+\tau)=A^2\cos(wt+\Theta)\cdot\cos[w(t+\tau)+\Theta]$

$E(A^2)=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}\cdot e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx$

$=2\sigma^2\Gamma(2)=2\sigma^2$

$E[\cos(wt+\Theta)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(wt+\theta)d\theta=0$

$E\{\cos(wt+\Theta)\cos[w(t+\tau)+\Theta]\}=\frac{1}{2}\cos w\tau$

由于A、Θ相互独立，故：

$\mu_X(t)=E[X(t)]=E(A)\,E[\cos(wt+\Theta)]=0$

$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)\cdot X(t+\tau)]$

$=2\sigma^2\times\frac{1}{2}\cos w\tau=\sigma^2\cos w\tau$

X(t)的均值为常数，而自相关函数仅与τ有关，故X(t)为平稳过程

3. 设 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是平稳过程，$R_X(\tau)$ 是其自相关函数，a 是常数，试问随机过程

$$Y(t)=X(t+a)-X(t)$$

是不是平稳过程？为什么？

3.解: $E[Y(t)]=E[X(t+a)-X(t)]$

$=E[X(t+a)]-E[X(t)]=0$

$R_Y(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$=E[X(t+a)\cdot X(t+\tau+a)]$

$-E[X(t+a)\cdot X(t+\tau)]$

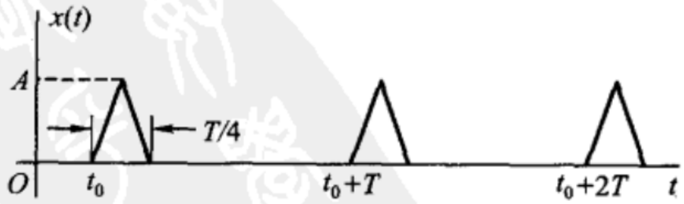
$-E[X(t)\cdot X(t+\tau+a)]+E[X(t)X(t+\tau)]$

$=2R_X(\tau)-R_X(\tau-a)-R_X(\tau+a)$

Y(t)的均值为常数，自相关函数仅与τ有关，故Y(t)为平稳过程.

8. 设 $X(t)$是随机相位周期过程，下图表示它的一个样本函数 $x(t)$，其中周期 T 和波幅 A 都是常数，而相位 t_0 是在$(0,T)$上服从均匀分布的随机变量.

(1) 求 μ_X，Ψ_X^2. (2) 求 $\overline{X(t)}$和 $\overline{X^2(t)}$.



题 8 图

8.解: $X(t) = S(t+t_0)$

$$S(t) = \begin{cases} 8At/T, & 0 \le t \le T/8 \\ -8A(t-\frac{T}{4})/T, & T/8 \le t \le T/4 \\ 0, & \frac{T}{4} < t \le T \end{cases}$$

$S(t+T) = S(t)$

(1) $\mu_X = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt = A/8$

$\Psi^2 = \frac{1}{T}\int_0^T S^2(t)\,dt = A^2/12$

(2) $\langle X(t)\rangle = E[X(t)] = \mu_X = A/8$

$\langle X^2(t)\rangle = E[X^2(t)] = \Psi^2 = A^2/12$

15. 已知平稳过程 $X(t)$的谱密度为

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20\left(1 - \frac{|\omega|}{10}\right), & |\omega| < 10, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $X(t)$的自相关函数.

15.解: X(t)的谱密度为:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20(1-\frac{|\omega|}{10}) & |\omega| < 10 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-10}^{10}[8\delta(\omega)+20(1-\frac{|\omega|}{10})]e^{i\omega\tau}d\omega$

$= \frac{4}{\pi}\int_{-10}^{10}\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega + \frac{10}{\pi}\int_{-10}^{10}(1-\frac{|\omega|}{10})e^{i\omega\tau}d\omega$

$= \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sin^2 5\tau/\tau^2$

故 $R_X(\tau) = \frac{4}{\pi}(1 + \sin^2 5\tau/\tau^2)$.