Guia Ecuaciones Diferenciales - MAT207

Ing. Luis Antonio Molina Yampa

25 de Febrero de 2025

Contents

Capítulo 1

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

1.1 Definición de una Ecuación Diferencial

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas. Su importancia radica en que modelan diversos fenómenos en física, biología, economía e ingeniería.

Ejemplo 1.1: Ecuación Diferencial Básica Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \tag{1.1}$$

Para resolverla, integramos ambos lados:

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + C \tag{1.2}$$

donde C es la constante de integración.

1.2 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según distintos criterios:

1.2.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) Cuando una ecuación involucra una función de una sola variable independiente y sus derivadas.

1.2.2 Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) Si la ecuación involucra derivadas parciales de una función con respecto a más de una variable independiente.

Ejemplo 1.2: EDO vs. EDP

- EDO: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$
- EDP: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Ecuación de Laplace)

1.3 Orden y Grado de una Ecuación Diferencial

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada más alta presente en la ecuación. El **grado** es el exponente de la derivada de orden más alto (si está escrita en forma polinómica).

Ejemplo 1.3: Determinación del Orden y Grado Dada la ecuación:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 4\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.3}$$

- **Orden**: 2 (porque la derivada más alta es $\frac{d^2y}{dx^2}$)
- **Grado**: 3 (porque la derivada de orden 2 está elevada al cubo)

1.4 Soluciones de una Ecuación Diferencial

Existen dos tipos principales de soluciones:

1.4.1 Solución General Contiene una familia de soluciones dependientes de constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.4 Resolver $\frac{dy}{dx} = 2x$:

$$y = \int 2x dx = x^2 + C \tag{1.4}$$

1.4.2 Solución Particular Se obtiene al asignar valores específicos a las constantes.

Si se da la condición inicial $y(1) = 5$:

$$5 = 1^2 + C \Rightarrow C = 4 \tag{1.5}$$

Entonces, la solución particular es $y = x^2 + 4$.

1.5 Ejercicios

Resuelve los siguientes ejercicios determinando el orden y grado de cada ecuación:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$
2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$
3. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + \frac{dy}{dx} = x^3$
5. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (Indica si es EDO o EDP)
6. $\frac{dy}{dx} = e^x$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$
8. $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
9. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 3\frac{dy}{dx} + y = x^2 + 1$
10. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + y = 0$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Prmer Orden

2.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son aquellas en las que la derivada de mayor orden es la primera derivada de la función incógnita. Estas ecuaciones aparecen en una gran variedad de aplicaciones en la física, biología, economía e ingeniería.

2.2 Ecuaciones de Variables Separables

Una ecuación diferencial de primer orden se dice separable si puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{2.1}$$

Reescribiéndola:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \tag{2.2}$$

Al integrar ambos lados:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \tag{2.3}$$

Metodo Variable Separable

Considere que para resolver este tipo de ejercicios, la E.D. de ser posible separarla en sus variables, para ello es necesario que este presente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \ \ (A)\ Estandar \\ \frac{dy}{dx} &= A(x) * B(y) \ \ o\ A(x)/B(y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} M(x,y)dx \ + \ N(x,y)dy &= 0 \ \ (B)\ Diferencial \\ A(x)dx \ + \ B(y)dy &= 0 \\ \int A(x)dx \ + \ \int B(y)dy &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ejemplo 1 : Resolución de una ecuación separable sencilla Resolver $\frac{dy}{dx} = xy$. Separando variables:

$$\frac{dy}{y} = xdx \tag{2.6}$$

Integrando:

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \tag{2.7}$$

Despejando y:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}+C} = Ce^{x^2/2} \tag{2.8}$$

Ejemplo 2

$$\frac{dy}{dx} = -6xy, \qquad y(0) = 7$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\, dy &= -\int 6xdx \\ ln(y) &= -6\frac{x^2}{2} + c \\ & Encontramos\ la\ solucion\ General \\ y &= e^{\left(-3x^2+c\right)} \\ x^{(a+b)} &= x^{(a)} * x^{(b)} \\ y &= e^{-3x^2}e^c \implies A = e^c \\ y &= Ae^{-3x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Encontramos\ la\ solucion\ particular\ para\ y(0) = 7 \\ 7 &= Ae^{-3(0)^2} \\ A &= 7 \\ y &= 7e^{-3x^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$
\begin{aligned}
(4-2x)dx - \left(3y^2-5\right)dy &= 0 \quad y(1)=3 \\
(4-2x)dx + \left(5-3y^2\right)dy &= 0 \\
\int (4-2x)dx + \int \left(5-3y^2\right)dy &= c \\
4x - 2\frac{x^2}{2} \ + \ 5y - 3\frac{y^3}{3} &= c \\
4x - x^2 + 5y - y^3 &= c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Encontramos la solucion particular con } \ y(1)=3 \\
4(1) - (1)^2 + 5(3) - (3)^3 &= c \\
c &= -9 \\
4x - x^2 + 5y - y^3 &= -9
\end{aligned}
$$

2.2.1 Ejercicios Adicionales

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\tan x \cdot \sin^2 y \ dx + \cos^2 x \cdot \cot y \ dy = 0$, **Solución:** $\cot^2 y = \tan^2 x + C$.

2. $xy' - y = y^3$, **Solución:** $x = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$.

3. $\sqrt{1+x^3}\frac{dy}{dx} = x^2 y + x^2$, **Solución:** $2\sqrt{1+x^3} = 3\ln(y+1) + C$.

4. $e^{2x-y} \ dx + e^{-2x} \ dy = 0$, **Solución:** $e^{4x} + 2e^{2y} = C$.

5. $(x^2y - x^2 + y - 1) \ dx + (xy + 2x - 3y - 6) \ dy = 0$, **Solución:** $\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln(x-3)^{10}(y-1)^3 = C$.

6. $e^{x+y}\sin x \ dx + (2y+1)e^{-y^2} \ dy = 0$, **Solución:** $e^x(\sin x - \cos x) - 2e^{-y^2} = C$.

7. $3e^x \cdot \tan y \ dx + (1-e^x)\sec^2 y \ dy = 0$, **Solución:** $\tan y = C(1-e^x)^3$.

8. $e^y\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = 1$, **Solución:** $\ln(e^y - 1) = C - x$.

9. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$, **Solución:** $\arctan y - \frac{x^2}{2} = C$.

10. $y - xy' = a(1 + x^2 y)$, **Solución:** $y = \frac{a+cx}{1+ax}$.

2.3 Ecuaciones Homogéneas

En este tipo de ecuaciones es practico buscar la forma de representar la E.D. de la siguiente forma:

$$
\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y} + o \ \ ...\frac{y}{x}\right)
$$

Tras buscar la forma de representar la .E.D en ese esquema, se puede hacer el cambio de una de las variables de la siguiente forma

$$y = vx \quad v = \frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \implies dy = vdx + xdv$$

$$o$$

$$x = uy \implies u = \frac{x}{y}$$
$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy} \implies dx = udy + ydu$$

¿Cómo identificar que una E.D. es homogénea?

Dada una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Incorporamos el operador λ en la función:

$$\frac{dy}{dx} = f(\lambda x, \lambda y)$$

El objetivo es hacer desaparecer el operador λ y obtener la expresión original:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial en forma general:

$$M(\lambda x, \lambda y)dx + N(\lambda x, \lambda y)dy = 0$$

Factorizamos λ y verificamos que el grado sea el mismo:

$$\lambda^n M(x, y)dx + \lambda^n N(x, y)dy = 0$$

2.1 Ejercicio Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$$

Dividiendo entre $2xy$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$$

Verificamos si la ecuación es homogénea usando λ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(\lambda x)^2 + 3(\lambda y)^2}{2\lambda x \lambda y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 y^2}{2\lambda^2 xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad \text{E.D. Original}$$

Utilizamos el cambio de variable $y = vx$, donde $v = \frac{y}{x}$, y aplicamos la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{4x^2 + 3(vx)^2}{2xvx}$$

Alternativamente, reescribimos la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

Sustituyendo $y = vx$:

$$v + x\frac{dv}{dx} = 2\frac{1}{v} + \frac{3}{2}v$$

$$x\frac{dv}{dx} = 2\frac{1}{v} + \frac{3}{2}v - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{v} + \frac{v}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{4 + v^2}{2v} \quad \Rightarrow \quad \text{E.D. de Variables Separables}$$

$$\frac{2v}{4 + v^2}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{2v}{4 + v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

Asumiendo que $c = \ln(c)$, se obtiene:

$$\ln(4 + v^2) = \ln(x) + \ln(c)$$

Aplicamos propiedades logarítmicas:

$$\ln(4 + v^2) = \ln(cx)$$

Aplicamos la exponencial:

$$e^{\ln(4+v^2)} = e^{\ln(cx)}$$

$$4 + v^2 = cx$$

Reemplazamos $v = \frac{y}{x}$:

$$4 + \frac{y^2}{x^2} = cx$$

2.3.1 Ejercicio 2.3 Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Expresamos en la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy}$$

Sustituyendo $y = vx$ con $v = \frac{y}{x}$:

$$\frac{dv}{dx}x + v = -\frac{x^2 + v^2x^2}{x^2 - xxv}$$

Factorizando:

$$\frac{dv}{dx}x + v = -\frac{x^2(1 + v^2)}{x^2(1 - v)}$$

$$\frac{dv}{dx}x = -\frac{1 + v^2}{1 - v} - v$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-(1 + v^2) - v(1 - v)}{1 - v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-1 - v^2 - v + v^2}{1 - v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = -\frac{1 + v}{1 - v}$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1 - v}{1 + v}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

Utilizando fracciones parciales:

$$\int \left(\frac{1}{1 + v} - \frac{v}{1 + v}\right) dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

Ejercicios Propuestos Resuelve las siguientes ecuaciones homogéneas

1. $(4x^2 + xy - 3y^2)\,dx + (-5x^2 + 2xy + y^2)\,dy = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$

3. $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$

4. $\left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right) - y\right)dx + x\ dy = 0$

5. $xy' = y + 2xe^{-y/x}$

6. $dy = \left(\frac{y}{x} - \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx$

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es **exacta** si y solo si se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Método de Solución Para resolver ecuaciones diferenciales exactas, se sigue el siguiente procedimiento:

1. **Tomar** $dg(x,y) = Mdx$ o bien $dg(x,y) = Ndy$.

2. **Integrar** en x o en y.

3. **Derivar** con respecto a la variable opuesta.

4. **Igualar** el resultado con M o N según corresponda.

5. **Resolver** la integral resultante.

Ecuaciones No Exactas Cuando la ecuación diferencial no cumple con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

se debe encontrar un **factor integrante** $F(x,y)$ que convierta la ecuación en exacta, de tal manera que:

$$F(x,y)Mdx + F(x,y)Ndy = 0$$

Cálculo del Factor Integrante Dependiendo de si el factor integrante es función de x o de y, se calcula de la siguiente forma:

- **Si el factor es función de** x:

$$F(x) = e^{\int P(x)dx}, \quad \text{donde } P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

- **Si el factor es función de** y:

$$F(y) = e^{\int P(y)dy}, \quad \text{donde } P(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

- **Si el factor es función de ambas variables** x **y** y: Se debe determinar por tanteo o con métodos específicos.

Resolución con el Factor Integrante Una vez multiplicada la ecuación diferencial por el factor integrante, la ecuación resultante se puede resolver con el método de ecuaciones diferenciales exactas.

$$Fi(x,y)M(x,y)dx + Fi(x,y)N(x,y)dy = 0$$

Ejemplo 2.3: Resolviendo una ecuación exacta

$$(4x + 2y^2)dx + (4xy)dy = 0$$

Tomamos la ecuación en la forma:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Reemplazamos $N(x,y)$:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 4xy$$

Pasamos la derivada al otro lado como una integral:

$$g(x,y) = \int 4xy\, dy$$

Resolviendo la integral:

$$g(x,y) = 2xy^2 + c_1 + v(x)$$

donde $v(x)$ es una función desconocida.

Complementamos con la ecuación:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

Derivamos $g(x,y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(2xy^2 + c_1 + v(x)\Big) = 2y^2 + v'(x)$$

Igualamos con $M(x,y)$:

$$2y^2 + v'(x) = 4x + 2y^2$$

Despejamos $v'(x)$:

$$v'(x) = 4x$$

Para encontrar $v(x)$, integramos:

$$v(x) = \int 4x dx$$

$$v(x) = 2x^2 + c_2$$

Reemplazamos en la ecuación inicial de $g(x, y)$:

$$g(x, y) = 2xy^2 + c_1 + v(x)$$

$$g(x, y) = 2xy^2 + c_1 + 2x^2 + c_2$$

Por teoría, sabemos que:

$$g(x, y) = C$$

Entonces:

$$2xy^2 + c_1 + 2x^2 + c_2 = C$$

Unificando constantes:

$$K = C - c_1 - c_2$$

$$2xy^2 + 2x^2 = K$$

Finalmente, despejamos y:

$$y = \sqrt{\frac{K - 2x^2}{2x}}$$

2.3.2 Ejemplo de Resolución de Ecuaciones No Exactas

$$xydx + \left(2x^2 + 3y^2 - 20\right) dy = 0$$

Verificamos si es exacta aplicando la condición:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x,$$
$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2 + 3y^2 - 20)}{\partial x} = 4x.$$

Como $x \neq 4x$, la ecuación no es exacta. Utilizamos las fórmulas para encontrar factores de integración.

Primero intentamos con la opción (A):

$$\frac{1}{2x^2 + 3y^2 - 20}(x - 4x) = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}.$$

Como el resultado no es una función exclusiva de x, descartamos esta opción.

Probamos con la opción (B):

$$\frac{1}{xy}(x - 4x) = -\frac{3}{y}.$$

Como depende exclusivamente de y, podemos aplicar el siguiente factor integrante:

$$I(x, y) = e^{-\int h(y)dy} = e^{-\int -\frac{3}{y}dy} = e^{3\ln(y)}.$$

Aplicando propiedades logarítmicas:

$$I(x, y) = e^{\ln(y^3)} = y^3.$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:

$$y^3(xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy) = 0.$$

Ahora verificamos si es exacta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} &= xy^4, \\ g(x, y) &= \int xy^4dx = \frac{y^4x^2}{2} + h(y). \end{aligned}$$

Aplicamos la segunda condición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^4x^2}{2} + h(y)\right) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3, \\ 2x^2y^3 + h'(y) &= 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3, \\ h'(y) &= 3y^5 - 20y^3. \end{aligned}$$

Integrando $h'(y)$:

$$h(y) = \int(3y^5 - 20y^3)dy = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + c_1.$$

Sustituyendo en $g(x, y)$:

$$g(x, y) = \frac{y^4x^2}{2} + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + c_1 = K.$$

Definiendo la constante $c = K - c_1$:

$$\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c.$$

2.3.3 Ejemplo de Resolución de Ecuaciones No Exactas

Dada la ecuación:

$$ydx - xdy = 0.$$

Verificamos si es exacta:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -1.$$

Aplicamos el factor integrante:

$$\frac{1}{N}(1+1) = -\frac{2}{x},$$
$$\frac{1}{M}(1+1) = \frac{2}{y}.$$

Aplicando el factor integrante:

$$I(x,y) = e^{\int g(x)dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = x^{-2}.$$

Multiplicamos por $I(x,y)$:

$$(ydx - xdy)x^{-2} = 0.$$

Como ahora la ecuación es exacta, resolvemos:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = yx^{-2},$$
$$g(x,y) = \int yx^{-2}dx + h(x),$$
$$g(x,y) = -\frac{y}{x} + h(x).$$

Aplicamos la segunda condición:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial(-\frac{y}{x} + h(x))}{\partial y} = -x^{-1}.$$

Resolviendo:

$$-\frac{1}{x} + h'(x) = -\frac{1}{x},$$
$$h'(x) = 0,$$
$$h(x) = c_1.$$

Finalmente:

$$g(x,y) = -\frac{y}{x} + c_1 = K.$$

Multiplicamos por -1:

$$y = Ax.$$

2.4 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en caso de ser exactas:

1. $(2xy - \tan y)dx + (x^2 - x\sec^2 y)dy = 0$

   Respuesta: $x^2y - x\tan y = K$

2. $(\sin x \sin y - xe^y)dy = (e^y + \cos x \cos y)dx$

   Respuesta: $xe^y + \cos y \sin x = K$

3. $(y + y\cos xy)dx + (x + x\cos xy)dy = 0$
   Respuesta: $xy + \sin xy = K$
4. $\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0$
   Respuesta: $y\ln x + 3x^2 - 2y = K$
5. $(\cos 2y - 3x^2y^2)dx + (\cos 2y - 2x\sin 2y - 2x^3y)dy = 0$
   Respuesta: $\frac{\sin 2y}{2} + x\cos 2y - x^3y^2 = c$
6. $e^x(x^2e^x + e^x + xy + y)dx + (xe^x + y)dy = 0$
   Respuesta: $xye^x + \frac{y^2}{2} + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 3)x = c$
7. $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dx = 0$
   Respuesta: $2x + y^2(1 + x)^2 = c$
8. $(3x^2\tan y - \frac{2y^3}{x^3})dx + (x^3\sec^2 y + 4y^3 - \frac{3y^2}{x^2})dy = 0$
   Respuesta: $x^3\tan y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = c$
9. $(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y})dx = \left(\frac{x^2+y^2}{xy^2}\right)dy$
   Respuesta: $x^3y + x^2 - y^2 = cxy$
10. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$
    Respuesta: $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2} = c$
11. $\left(-\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0$
    Respuesta: $y\sqrt{1+x^2} + x^2y - y\ln x = c$

2.5 Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Dada una ecuación diferencial lineal de primer orden en su forma estándar:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

El objetivo inicial es llevarla a su forma simple. Para ello, se puede dividir la expresión entre $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Para contextualizar el método, se realiza un pequeño cambio de variables:

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}, \quad Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Logrando así la siguiente representación deseada:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Considerando que ahora la ecuación diferencial es lineal, según el método, se procede a aplicar el procedimiento adecuado para su resolución.

Resolución de una Ecuación Diferencial Lineal Demostracion Para resolver una ecuación diferencial lineal, se sigue el siguiente procedimiento:

Identificar un **factor de integración** $u(x)$ que nos permita multiplicar la ecuación diferencial:

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)q(x)$$

El objetivo de multiplicar por $u(x)$ es lograr que la ecuación tenga la forma de una derivada de un producto:

$$(uy)' = uy' + u'y$$

Comparando términos, se obtiene:

$$u' = u(x)p(x)$$

$$u' = up$$

$$\frac{u'}{u} = p$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{u'}{u} dx = \int p dx$$

$$\ln u = \int p dx$$

$$u = e^{\int p dx}$$

Así, el factor de integración es:

$$u(x) = e^{\int p(x) dx}$$

Multiplicamos la ecuación por $u(x)$, lo que nos permite escribirla como una derivada exacta:

$$(uy)' = u(x)q(x)$$

Integrando en ambos lados:

$$uy = \int u(x)q(x)dx$$

Finalmente, despejamos $y(x)$:

$$y(x) = u(x)^{-1} \left(\int u(x)q(x)dx + C \right)$$

Ejercicio 1 Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4$$

Identificamos los coeficientes:

$$p(t) = 2, \quad q(t) = 4$$

Calculamos el factor de integración:

$$u(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

Aplicamos el método:

$$y(t) = u(t)^{-1} \left(\int u(t)q(t)dt + C \right)$$

$$y(t) = e^{-2t} \left(\int 4e^{2t}dt + C \right)$$

$$y(t) = e^{-2t} \left(4\frac{e^{2t}}{2} + C \right)$$

$$y(t) = 2 + Ce^{-2t}$$

—

Ejercicio 2 Resolver la ecuación diferencial con la condición inicial $y(1) = 4$:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

Reescribimos la ecuación en su forma estándar:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Identificamos los coeficientes:

$$p(x) = 2, \quad q(x) = 4x^2$$

Para que la ecuación esté correctamente formulada, dividimos entre x:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{1}{x}y = 4x, \quad y(1) = 4$$

Ahora:

$$p(x) = 2\frac{1}{x}, \quad q(x) = 4x$$

Calculamos el factor de integración:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{2\int \frac{1}{x}dx}$$

$$u(x) = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)}$$

$$u(x) = x^2$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por $u(x)$:

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$$

$$(u(x)\cdot y)' = 4x^3$$

Integrando:

$$x^2y = 4\int x^3dx$$

$$x^2y = 4\frac{x^4}{4} + C$$

$$y = x^2 + Cx^{-2}$$

Usamos la condición inicial $y(1) = 4$ para encontrar C:

$$4 = 1 + C$$

$$C = 3$$

$$y = x^2 + 3x^{-2}$$

2.5.1 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $x\tan^2 y\, dy + x\, dy = (2x^2 + \tan y)dx$, **Respuesta:** $\tan y = x(2\sin x + c)$.
2. $\frac{dy}{dx} - e^x y = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} - e^x\cos\frac{1}{x}$, **Respuesta:** $y = \cos\frac{1}{x} + Ce^{-x}$.
3. $x\sin\theta\, d\theta + (x^3 - 2x^2\cos\theta + \cos\theta)dx = 0$, **Respuesta:** $\cos\theta = \frac{-x}{2} + Cxe^{-x^2}$.
4. $x^2dy + xydx = 8x^2\cos^2 xdx$, **Respuesta:** $xy = 2x^2 + 2x\sin 2x + \cos 2x + c$.
5. $(x^5 + 3y)dx - xdy = 0$, **Respuesta:** $y = x^3\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$.
6. $dy = x^{-5}(4x^4y + 3x^4y^{-1} + 256y^7 + 768y^5 + 864y^3 + 432y + 81y^{-1})dx$.
7. $\frac{dy}{dx} - y\cot x = \frac{\sin(2x)}{2}$, **Respuesta:** $y = K\sin x + \sin^2 x$.
8. $\cos y\, dx = (x\sin y + \tan y)dy$, **Respuesta:** $x = K\sec y - \sec y\ln\cos y$.

2.6 Ecuación Diferencial de Bernoulli

Las ecuaciones de Bernoulli tienen la siguiente representación. A diferencia de una ecuación diferencial lineal, estas cuentan con un término y^n multiplicando a $q(x)$:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

donde n es un número real diferente de 0 y 1.

El objetivo es buscar una forma de convertir la ecuación diferencial en una ecuación lineal.

Para eliminar y^n en el miembro derecho, dividimos entre y^n:

$$y^{-n}y' + p(x)yy^{-n} = q(x)$$

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Para lograr el formato estándar de una ecuación lineal, realizamos el cambio de variable:

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad \text{(A)}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$y^{-n}y' + p(x)z = q(x)$$

Buscamos una forma de expresar $y^{-n}y'$ en términos de z', es decir, $\frac{dz}{dx}$.
Derivamos la ecuación (A):

$$\frac{dz}{dy} = (1-n)y^{-n}$$

Aplicamos la regla de la cadena para incorporar dx:

$$\frac{dz}{dy} = (1-n)y^{-n}\frac{dx}{dx}$$

Esto permite separar las variables:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Para aplicar este cambio en la ecuación original, multiplicamos por $(1-n)$:

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal en términos de z, que puede resolverse con el método estándar.

Ejercicios 1.2 Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$$

Reordenamos:

$$2xy\frac{dy}{dx} - 4x^2 = 3y^2$$

Dividimos entre $2xy$:

$$\frac{dy}{dx} - 2x\frac{1}{y} = \frac{3}{2x}y$$

Forma de Bernoulli:

$$y' - \frac{3}{2x}y = 2xy^{-1}, \quad n = -1$$

Realizamos el cambio de variable:

$$z = y^{1-n} = y^2$$

Derivamos:

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Multiplicamos por $(1-n) = 2$:

$$2yy' - \frac{3}{x}y^2 = 4x$$

$$z' - \frac{3}{x}z = 4x$$

Factor de integración:

$$u(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$$

Resolviendo:

$$z(x) = x^3\left(\int 4x^{-2}dx + C\right)$$

$$z(x) = x^3\left(-4x^{-1} + C\right)$$

Reemplazamos $z = y^2$:

$$y^2 = x^3\left(-4x^{-1} + C\right)$$

$$y^2 = Cx^3 - 4x^2$$

—

Ejercicios 1.3 Resolver la ecuación diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

Dividimos entre x:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$$

Dividimos entre $y^{4/3}$, con $n = 4/3$:

$$y^{-4/3}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y^{-1/3} = 3$$

Cambio de variable:

$$z = y^{1-n} = y^{-1/3}$$

Derivamos y aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-4/3}\frac{dy}{dx}$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{3}$:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -1$$

Ecuación diferencial lineal con:

$$p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = -1$$

Factor de integración:

$$u(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = x^{-2}$$

Resolviendo para $z(x)$:

$$z(x) = x^2\left(-\int x^{-2}dx + C\right)$$

$$z(x) = x^2\left(x^{-1} + C\right)$$

Reemplazamos $z = y^{-1/3}$:

$$y^{-1/3} = x^2 \left(x^{-1} + C\right)$$

—

Ejercicios 1.4 - Casos especiales Resolver la ecuación diferencial:

$$2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y}$$

Intentamos separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 + e^{2y}}{2xe^{2y}}$$

No es posible separar, verificamos homogeneidad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\lambda^4 x^4 + e^{2y\lambda}}{2x\lambda e^{2y\lambda}}$$

Forma diferencial:

$$(3x^4 + e^{2y})dx - 2xe^{2y}dy = 0$$

No es exacta. Intentamos el cambio:

$$z = e^{2y}$$

Derivamos:

$$\frac{dz}{dx} = 2e^{2y}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x\frac{dz}{dx} = 3x^4 + z$$

Dividimos entre x:

$$\frac{dz}{dx} = 3x^3 + \frac{1}{x}z$$

La ecuación se vuelve lineal:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 3x^3$$

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 3x^3$$

—

Ejercicios 1.5

$$xe^y \frac{dy}{dx} = 2(e^y + x^3 e^{2x})$$

Solución:

$$y = \ln\left(Cx^2 + x^2 e^{2x}\right)$$

2.6.1 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$, **Respuesta:** $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = K$.
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$, **Respuesta:** $\frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$.
3. $(x^2 + 1)y' = xy + x^2y^2$, **Respuesta:** $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-\frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{1+x^2}| - x\sqrt{1+x^2} + c\right)$.
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin^2 y}{x^5 + x\tan y}$, **Respuesta:** $x^4(K - \ln\tan y) = \tan y$.
5. $(x^2 + y^2 + (y + 2x)x^{-1})dy = (2(x^2 + y^2) + (y + 2x)x^{-2}y)dx$, **Respuesta:** $(y - 2x)^2 = -\frac{2y}{x} + 10\arctan\frac{y}{x}$, **Sugerencia:** $y = ux$.
6. $(xy^2)' = (xy)^3(x^2 + 1)$, **Respuesta:** $y = \frac{45}{45\sqrt{x} - 5x^5 - 9x^3}$.
7. $dy - y\sin x\, dx = y\ln(ye^{\cos x})dx$, **Respuesta:** $y = -e^{x - \cos x}$.
8. $(x + y^3) + 6xy^2y' = 0$, **Respuesta:** $y^3 = -\frac{x}{3} + C\frac{1}{2}$.

Capítulo 3

Aplicaciones de Modelado para Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

3.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales de primer orden aparecen en una gran variedad de problemas del mundo real. Se utilizan para modelar fenómenos en la física, biología, economía, ingeniería y otras disciplinas. En este capítulo, se explorarán diversas aplicaciones del modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden.

3.2 Crecimiento Poblacional: Modelo Logístico

El crecimiento poblacional puede modelarse mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{3.1}$$

donde $P(t)$ es la población en el tiempo t, r es la tasa de crecimiento y K es la capacidad de carga del entorno.

Ejemplo 3.1: Modelado del Crecimiento Poblacional Supongamos que una población de conejos sigue el modelo logístico con $r = 0.1$ y $K = 500$. Si inicialmente hay 50 conejos, determinar la ecuación de crecimiento.

Ejercicios

1. Resolver el modelo logístico para $r = 0.2$, $K = 1000$ con una población inicial de 100.

3.3 Caída Libre con Resistencia del Aire

La ecuación de movimiento de un objeto en caída libre con resistencia del aire es:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{3.2}$$

donde v es la velocidad, m la masa, g la gravedad y k el coeficiente de resistencia.

Ejemplo 3.2: Cálculo de Velocidad con Resistencia del Aire Determinar la velocidad terminal de un paracaidista de 80 kg con un coeficiente de resistencia $k = 10$.

Ejercicios

1. Resolver la ecuación de caída libre para $k = 5$ y $m = 60$.

3.4 Enfriamiento de Newton

El modelo de enfriamiento de Newton se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \tag{3.3}$$

donde T es la temperatura del objeto, T_a la temperatura ambiente y k la constante de enfriamiento.

Ejemplo 3.3: Enfriamiento de un Café Un café a 90°C se enfría en una habitación a 20°C. Si $k = 0.02$, encontrar la temperatura en 10 minutos.

Ejercicios

1. Resolver para un objeto que comienza a 100°C en un ambiente de 30°C con $k = 0.015$.

3.5 Crecimiento y Desintegración Radiactiva

La desintegración radiactiva se modela como:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{3.4}$$

donde N es la cantidad de sustancia y λ la constante de desintegración.

Ejemplo 3.4: Desintegración del Carbono-14 El carbono-14 tiene una vida media de 5730 años. Encontrar la ecuación de desintegración.

Ejercicios

1. Determinar la cantidad restante de una muestra de 100 mg de uranio-238 después de 1000 años.

3.6 Dinámica de Enfermedades Infecciosas

El modelo SIR para la propagación de enfermedades es:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \tag{3.5}$$

donde S es la población susceptible, I la infectada, β la tasa de transmisión y γ la tasa de recuperación.

Ejemplo 3.5: Propagación de un Virus Simular una epidemia con $\beta = 0.3$ y $\gamma = 0.1$ en una población de 1000 personas.

Ejercicios

1. Resolver el modelo SIR con $\beta = 0.2$ y $\gamma = 0.05$.

3.7 Modelos de Interés Compuesto

El modelo de interés compuesto se describe como:

$$\frac{dA}{dt} = rA \tag{3.6}$$

donde A es la cantidad de dinero e r la tasa de interés.

Ejemplo 3.6: Crecimiento de una Inversión Calcular el crecimiento de una inversión inicial de \$1000 con $r = 5\%$ anual.

Ejercicios

1. Resolver para $r = 3\%$ con una inversión de \$5000.

3.8 Regulación de la Glucosa en la Sangre

El modelo de control de insulina se expresa como:

$$\frac{dG}{dt} = -kG + I \tag{3.7}$$

donde G es el nivel de glucosa y I la insulina inyectada.

Ejemplo 3.7: Control de Glucosa Modelar la respuesta del cuerpo a una inyección de insulina con $k = 0.1$.

Ejercicios

1. Resolver para $k = 0.05$ con una dosis de insulina de 10 unidades.

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superor

4.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son fundamentales en el estudio de la dinámica de sistemas físicos, eléctricos y mecánicos. En este capítulo exploraremos métodos analíticos para resolverlas, así como sus aplicaciones.

4.2 Definiciones y Propiedades Fundamentales

Una ecuación diferencial de orden n se expresa como:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x) \tag{4.1}$$

Si $g(x) = 0$, la ecuación es homogénea; si $g(x) \neq 0$, es no homogénea.

4.3 Solución de la Ecuación Homogénea

Para resolver:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{4.2}$$

asumimos $y = e^{rx}$, lo que nos lleva a la ecuación característica:

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{4.3}$$

Los valores de r determinan la solución.

Caso 1: Raíces Reales y Distintas Si r_1 y r_2 son distintas, la solución general es:

$$y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \tag{4.4}$$

Caso 2: Raíces Reales e Iguales Si $r_1 = r_2 = r$, la solución es:

$$y_h = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \tag{4.5}$$

Caso 3: Raíces Complejas Si $r = \alpha \pm i\beta$, la solución es:

$$y_h = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \right) \tag{4.6}$$

4.4 El Método de Coeficientes Indeterminados

Se usa cuando $g(x)$ es una combinación de polinomios, exponenciales y senoidales. La solución particular y_p se asume con una forma similar a $g(x)$, con coeficientes por determinar.

Ejemplo 1: Solución para $g(x) = e^{2x}$ Resolver:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \tag{4.7}$$

Paso 1: Resolver la homogénea La ecuación característica es:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \tag{4.8}$$

Factorizando:

$$(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r = 1, 2 \tag{4.9}$$

Solución homogénea:

$$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} \tag{4.10}$$

Paso 2: Proponer una solución particular Como $g(x) = e^{2x}$, proponemos:

$$y_p = Axe^{2x} \tag{4.11}$$

Derivando:

$$y_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \tag{4.12}$$

$$y_p'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} \tag{4.13}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 3(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 2Axe^{2x} = e^{2x} \tag{4.14}$$

Resolviendo para A, obtenemos $A = \frac{1}{4}$. Por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{4} x e^{2x} \tag{4.15}$$

Solución general:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} x e^{2x} \tag{4.16}$$

4.5 Método de Variación de Parámetros

Se usa cuando $g(x)$ no permite usar coeficientes indeterminados. Se asume:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \tag{4.17}$$

donde y_1 y y_2 son soluciones de la homogénea.

Ejemplo 2: Resolver $y'' + y = \tan x$ Paso 1: Resolver la homogénea

$$y'' + y = 0 \tag{4.18}$$

Raíces características: $r = \pm i$, por lo que:

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{4.19}$$

Paso 2: Aplicar variación de parámetros Buscamos:

$$y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x \tag{4.20}$$

Derivadas:

$$y_p' = u_1' \cos x + u_2' \sin x + u_1(-\sin x) + u_2 \cos x \tag{4.21}$$

$$y_p'' = u_1'(-\sin x) + u_2' \cos x + u_1'(-\cos x) + u_2'(-\sin x) + u_1(-\cos x) + u_2(-\sin x) \tag{4.22}$$

Imponiendo $u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0$ y resolviendo:

$$u_1 = \int -\tan x \sin x dx, \quad u_2 = \int \tan x \cos x dx \tag{4.23}$$

Tras integración, encontramos:

$$y_p = -\ln|\cos x| \cos x + \ln|\cos x| \sin x \tag{4.24}$$

Solución general:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln|\cos x| \cos x + \ln|\cos x| \sin x \tag{4.25}$$

4.6 Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $y'' + 4y = e^x$
2. $y'' - 2y' + y = x^2$
3. $y'' + y = \cos 2x$

Capítulo 5

Aplicaciones de Modelado para Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

5.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales de orden superior tienen aplicaciones fundamentales en la modelización de sistemas físicos, biológicos, económicos y de ingeniería. Este capítulo explora diversas aplicaciones prácticas en las que se emplean ecuaciones diferenciales de segundo y mayor orden para describir fenómenos del mundo real.

Cada problema abordado incluirá una descripción detallada, la formulación matemática del modelo, su resolución y una interpretación gráfica de los resultados.

5.2 Oscilaciones Mecánicas: Masa-Resorte-Amortiguador

Un modelo clásico en la mecánica es el sistema masa-resorte-amortiguador, que describe el movimiento de una masa sujeta a un resorte y sometida a una fuerza de amortiguamiento.

Ejemplo 1: Movimiento de un Oscilador Amortiguado Se tiene un bloque de masa $m = 5$ kg unido a un resorte con constante $k = 100$ N/m y sometido a una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad con coeficiente $c = 10$ Ns/m. Se suelta desde una posición de 0.2 m con velocidad inicial cero. Encontrar su movimiento y graficar la solución.

Ecuación de Movimiento:

$$my'' + cy' + ky = 0 \tag{5.1}$$

Sustituyendo los valores:

$$5y'' + 10y' + 100y = 0 \tag{5.2}$$

La ecuación característica es:

$$5r^2 + 10r + 100 = 0 \tag{5.3}$$

Resolviendo para r, obtenemos raíces complejas $r = -1 \pm i\sqrt{19}$, lo que nos da la solución:

$$y(t) = e^{-t}\left(C_1 \cos(\sqrt{19}t) + C_2 \sin(\sqrt{19}t)\right) \tag{5.4}$$

Usando las condiciones iniciales, determinamos C_1 y C_2. Finalmente, la solución se grafica para visualizar la oscilación amortiguada.

Ejercicio para Resolver Un oscilador con $m = 3$ kg, $k = 50$ N/m y $c = 8$ Ns/m se desplaza desde una posición inicial de 0.1 m con velocidad de 0.2 m/s. Determine la ecuación de su movimiento y grafique su comportamiento.

5.3 Vibraciones en Circuitos Eléctricos

Un circuito RLC en serie se modela con la ecuación:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{5.5}$$

Ejemplo 2: Descarga de un Circuito RLC Se tiene un circuito con $L = 2$ H, $R = 4\ \Omega$ y $C = 0.5$ F. La carga inicial es de 10 C y la corriente inicial es 0. Determinar la ecuación de descarga.

La ecuación característica es:

$$2r^2 + 4r + 2 = 0 \tag{5.6}$$

Resolviendo para r, obtenemos raíces reales e iguales, por lo que la solución es:

$$q(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} \tag{5.7}$$

Ejercicio para Resolver Un circuito RLC tiene $L = 1.5$ H, $R = 3\ \Omega$ y $C = 0.4$ F. La carga inicial es 5 C y la corriente inicial es 0. Determine la ecuación de descarga y grafique la variación de la carga con el tiempo.

5.4 Flexión de Vigas en Ingeniería

La ecuación de flexión de una viga bajo carga se modela mediante:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x) \tag{5.8}$$

Ejemplo 3: Deflexión de una Viga bajo Carga Uniforme Una viga simplemente apoyada de longitud $L = 10$ m soporta una carga uniforme de 500 N/m. Si $EI = 2\times10^6$ Nm^2, determinar la deflexión.

Resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones de frontera:

$$y(x) = \frac{w}{24EI}x^4 - \frac{wL}{12EI}x^3 + C_1x + C_2 \tag{5.9}$$

La deflexión máxima ocurre en el centro de la viga.

oscillator.png

Figure 5.1: Movimiento amortiguado de la masa.

circuit_rlc.png

Figure 5.2: Disminución de la carga en el circuito RLC.

beam_deflection.png

Figure 5.3: Curvatura de la viga bajo carga uniforme.

Ejercicio para Resolver Una viga de 8 m de largo soporta una carga distribuida de 300 N/m y tiene $EI = 1.5 \times 10^6$ Nm^2. Encuentre la ecuación de la deflexión y grafique la forma de la viga.

5.5 Conclusión

Las ecuaciones diferenciales de orden superior proporcionan herramientas esenciales para modelar sistemas dinámicos en ingeniería y ciencias aplicadas. La interpretación gráfica de las soluciones nos permite analizar el comportamiento de los sistemas y predecir su evolución en el tiempo.

Capítulo 6

Series de Potencia

6.1 Introducción

Las series de potencia son herramientas fundamentales en el análisis matemático y la resolución de ecuaciones diferenciales. Permiten representar funciones como sumas infinitas y son especialmente útiles cuando la solución en términos elementales no es posible.

En este capítulo se explorarán las propiedades básicas de las series de potencia, su radio de convergencia, el desarrollo de funciones y su aplicación en la solución de ecuaciones diferenciales.

6.2 Definición y Propiedades de una Serie de Potencia

Una serie de potencia es una serie infinita de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{6.1}$$

donde c_n son coeficientes constantes y x_0 es el centro de la expansión.

6.2.1 Radio de Convergencia El radio de convergencia R de una serie de potencia se determina mediante:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}} \tag{6.2}$$

Ejemplo 1: Determinar el radio de convergencia Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \tag{6.3}$$

Aplicamos la fórmula:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n^2)^{1/n}} = 1 \tag{6.4}$$

lo que indica convergencia para $|x| < 1$.

6.3 Desarrollo de Funciones en Series de Potencia

Se puede expresar funciones comunes en términos de series de potencia mediante sus desarrollos de Taylor y Maclaurin.

Ejemplo 2: Expansión de e^x La función exponencial puede representarse como:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{6.5}$$

Expandiendo los primeros términos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{6.6}$$

Ejemplo 3: Serie de Potencia igualada a x Supongamos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \tag{6.7}$$

Para encontrar su radio de convergencia aplicamos:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)^{1/n}} = 1 \tag{6.8}$$

lo que indica convergencia para $|x| < 1$.

6.4 Solución de Ecuaciones Diferenciales mediante Series de Potencia

Para resolver ecuaciones diferenciales en series de potencia, asumimos soluciones de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6.9}$$

Derivamos término a término y sustituimos en la ecuación dada.

Ejemplo 4: Resolver $y'' - y = 0$ usando series de potencia Suponemos:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{6.10}$$

Derivamos dos veces:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \tag{6.11}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \tag{6.12}$$

Reescribimos los índices para hacerlos coincidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - c_n\right] x^n = 0 \tag{6.13}$$

Para que esta ecuación sea válida para todos los valores de x, los coeficientes deben cumplir:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - c_n = 0 \tag{6.14}$$

Paso 1: Encontrar la relación de recurrencia

$$c_{n+2} = \frac{c_n}{(n+2)(n+1)} \tag{6.15}$$

Paso 2: Determinar los coeficientes

Tomamos valores iniciales $c_0 = A$ y $c_1 = B$:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{c_0}{2(1)} = \frac{A}{2} \\ c_3 &= \frac{c_1}{3(2)} = \frac{B}{6} \\ c_4 &= \frac{c_2}{4(3)} = \frac{A}{24} \\ c_5 &= \frac{c_3}{5(4)} = \frac{B}{120} \end{aligned}$$

Reconocemos la serie de Maclaurin para e^x y e^{-x}, por lo que la solución es:

$$y = A\cosh x + B\sinh x \tag{6.16}$$

6.5 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1: Determinar el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ Paso 1: Aplicar la fórmula del radio de convergencia

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n^2)^{1/n}} \tag{6.17}$$

Tomando el límite:

$$R = 1 \tag{6.18}$$

Ejercicio 2: Expandir $\sin x$ **en una serie de Taylor centrada en** $x = 0$ **Paso 1: Aplicar la expansión de Taylor**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6.19}$$

Expandiendo los primeros términos:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \tag{6.20}$$

6.6 Conclusión

Las series de potencia permiten representar funciones y resolver ecuaciones diferenciales de forma analítica. Son herramientas esenciales en el análisis matemático y la física.

Capítulo 7

La Transformada de LaPLace

7.1 Introducción

La transformada de Laplace es una herramienta matemática fundamental en la solución de ecuaciones diferenciales. Permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, facilitando su resolución en aplicaciones de ingeniería, física y sistemas de control.

7.2 Definición de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad \text{para } s > 0. \tag{7.1}$$

Ejemplo 1: Transformada de $f(t) = e^{at}$ Aplicamos la definición:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt. \tag{7.2}$$

Resolviendo la integral:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } s > a. \tag{7.3}$$

7.3 Transformadas Inversas y Transformadas de Derivadas

7.3.1 Transformadas Inversas La transformada inversa de Laplace se define como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}. \tag{7.4}$$

Se obtiene mediante descomposición en fracciones parciales o utilizando tablas de transformadas.

Ejemplo 2: Transformada inversa de $F(s) = \frac{1}{s+3}$ De la tabla de transformadas sabemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}. \tag{7.5}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}. \tag{7.6}$$

7.3.2 Transformadas de Derivadas Para una función $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{7.7}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{7.8}$$

Ejemplo 3: Transformada de $y'' + 3y' + 2y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ Aplicamos la transformada de Laplace:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 0. \tag{7.9}$$

Sustituyendo valores iniciales:

$$s^2Y(s) - s + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = 0. \tag{7.10}$$

Resolviendo para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}. \tag{7.11}$$

7.4 Propiedades Operacionales I

7.4.1 Traslación en el Eje s Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a). \tag{7.12}$$

7.4.2 Traslación en el Eje t Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s). \tag{7.13}$$

7.5 Propiedades Operacionales II

7.5.1 Derivadas de una Transformada Si $F(s)$ es la transformada de $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s). \tag{7.14}$$

7.5.2 Transformadas de Integrales

Si $F(s)$ es la transformada de $f(t)$:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s). \tag{7.15}$$

7.5.3 Transformada de una Función Periódica

Si $f(t)$ es periódica con período T, su transformada es:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt. \tag{7.16}$$

7.6 La Función Delta de Dirac

La función delta de Dirac $\delta(t)$ satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0). \tag{7.17}$$

Su transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}. \tag{7.18}$$

7.7 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Se pueden resolver aplicando la transformada de Laplace a cada ecuación y usando álgebra matricial.

Ejemplo 4: Resolver $x' = 3x + 4y$, $y' = -x + y$ con $x(0) = 1, y(0) = 0$ Aplicamos la transformada de Laplace:

$$sX(s) - 1 = 3X(s) + 4Y(s), \tag{7.19}$$

$$sY(s) = -X(s) + Y(s). \tag{7.20}$$

Resolviendo el sistema en el dominio de Laplace y aplicando la transformada inversa, obtenemos:

$$x(t) = e^{2t}(\cos 3t + \sin 3t), \quad y(t) = e^{2t}\sin 3t. \tag{7.21}$$

7.8 Ejercicios

1. Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \cosh t$.
2. Determinar la transformada inversa de $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$.
3. Resolver $y'' + 4y = 0$ con $y(0) = 0, y'(0) = 1$ usando transformadas de Laplace.
4. Resolver el sistema $x' = 2x + 3y$, $y' = -x + y$ usando Laplace.

Capítulo 8

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

8.1 Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales aparecen en numerosos problemas físicos, biológicos y de ingeniería. En este capítulo se estudian los métodos analíticos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos y no homogéneos.

8.2 Teoría Preliminar: Sistemas Lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se expresa como:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{8.1}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector columna de funciones desconocidas, A es una matriz de coeficientes y $\mathbf{g}(t)$ representa términos no homogéneos.

8.3 Sistemas Lineales Homogéneos

Si $\mathbf{g}(t) = 0$, el sistema es homogéneo:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \tag{8.2}$$

La solución se basa en los valores propios (*eigenvalores*) de A.

8.3.1 Eigenvalores Reales Distintos Si A tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, la solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n. \tag{8.3}$$

Ejemplo 1: Sistema con eigenvalores distintos Resolver:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

Calculamos los valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{8.5}$$

Resolviendo:

$$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0. \tag{8.6}$$

Raíces: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$. Hallamos los vectores propios y construimos la solución general.

8.3.2 Eigenvalores Repetidos Si A tiene valores propios repetidos, se buscan soluciones adicionales del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}(C_1\mathbf{v} + C_2(t\mathbf{v} + \mathbf{w})). \tag{8.7}$$

Ejemplo 2: Sistema con eigenvalores repetidos Resolver:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{8.8}$$

8.3.3 Eigenvalores Complejos Si A tiene valores propios complejos $\lambda = \alpha \pm i\beta$, la solución es:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t). \tag{8.9}$$

8.4 Sistemas Lineales No Homogéneos

Si $\mathbf{g}(t) \neq 0$, la solución se encuentra como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{8.10}$$

donde $\mathbf{x}_h(t)$ es la solución homogénea y $\mathbf{x}_p(t)$ es una solución particular.

8.4.1 Coeficientes Indeterminados Si $\mathbf{g}(t)$ es un polinomio, exponencial o seno/coseno, se asume una solución de la misma forma con coeficientes a determinar.

Ejemplo 3: Método de coeficientes indeterminados Resolver:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.11}$$

8.4.2 Variación de Parámetros Si $\mathbf{g}(t)$ es más compleja, se usa:

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t)\mathbf{g}(t)dt. \tag{8.12}$$

Ejemplo 4: Método de variación de parámetros Resolver:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8.13}$$

8.5 Matriz Exponencial

Para cualquier matriz A, la solución general del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ se puede escribir en términos de la matriz exponencial:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0), \tag{8.14}$$

donde:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots. \tag{8.15}$$

Ejemplo 5: Cálculo de e^{At} Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, se obtiene:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \tag{8.16}$$

8.6 Ejercicios

1. Resolver el sistema $x' = 3x + 4y$, $y' = -x + y$.
2. Resolver $x' = 2x + y + e^t$, $y' = -x + 3y$ usando coeficientes indeterminados.
3. Determinar e^{At} para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.