Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Prmer Orden

2.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son aquellas en las que la derivada de mayor orden es la primera derivada de la función incógnita. Estas ecuaciones aparecen en una gran variedad de aplicaciones en la física, biología, economía e ingeniería.

2.2 Ecuaciones de Variables Separables

Una ecuación diferencial de primer orden se dice separable si puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{2.1}$$

Reescribiéndola:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \tag{2.2}$$

Al integrar ambos lados:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \tag{2.3}$$

Metodo Variable Separable

Considere que para resolver este tipo de ejercicios, la E.D. de ser posible separarla en sus variables, para ello es necesario que este presente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \;\; (A)\; Estandar \\ \frac{dy}{dx} &= A(x) * B(y) \;\; o\; A(x)/B(y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} M(x,y)dx \;+\; N(x,y)dy &= 0 \;\; (B)\; Diferencial \\ A(x)dx \;+\; B(y)dy &= 0 \\ \int A(x)dx \;+\; \int B(y)dy &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.1 Ejercicio Resuelto 1: Resolución de una ecuación separable sencilla

Resolver $\frac{dy}{dx} = xy$. Separando variables:

$$\frac{dy}{y} = xdx \tag{2.6}$$

Integrando:

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \tag{2.7}$$

Despejando y:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}+C} = Ce^{x^2/2} \tag{2.8}$$

2.2.2 Ejercicio Resuelto 2

$$\frac{dy}{dx} = -6xy, \qquad y(0) = 7$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\, dy &= -\int 6xdx \\ ln(y) &= -6\frac{x^2}{2} \; + c \\ &Encontramos\ la\ solucion\ General \\ y &= e^{\left(-3x^2+c\right)} \\ x^{(a+b)} &= x^{(a)} \; * x^{(b)} \\ y &= e^{-3x^2}e^c \;\; \Longrightarrow \; A \; = e^c \\ y &= Ae^{-3x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Encontramos\ la\ solucion\ particular\ para\ y(0) = 7 \\ 7 &= Ae^{-3(0)^2} \\ A &= 7 \\ y &= 7e^{-3x^2} \end{aligned}$$

2.2.3 Ejercicio Resuelto 3:

$$
\begin{aligned}
(4-2x)dx - \left(3y^2-5\right)dy &= 0 \quad y(1)=3 \\
(4-2x)dx + \left(5-3y^2\right)dy &= 0 \\
\int (4-2x)dx + \int \left(5-3y^2\right)dy &= c \\
4x - 2\frac{x^2}{2} + 5y - 3\frac{y^3}{3} &= c \\
4x - x^2 + 5y - y^3 &= c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Encontramos la solucion particular con } \ y(1)=3 \\
4(1) - (1)^2 + 5(3) - (3)^3 &= c \\
c &= -9 \\
4x - x^2 + 5y - y^3 &= -9
\end{aligned}
$$

2.2.4 Ejercicios Adicionales Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\tan x \cdot \sin^2 y \ dx + \cos^2 x \cdot \cot y \ dy = 0$, **Solución:** $\cot^2 y = \tan^2 x + C$.
2. $xy' - y = y^3$, **Solución:** $x = \frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$.
3. $\sqrt{1+x^3}\frac{dy}{dx} = x^2y + x^2$, **Solución:** $2\sqrt{1+x^3} = 3\ln(y+1) + C$.
4. $e^{2x-y} \ dx + e^{-2x} \ dy = 0$, **Solución:** $e^{4x} + 2e^{2y} = C$.
5. $(x^2y - x^2 + y - 1) \ dx + (xy + 2x - 3y - 6) \ dy = 0$, **Solución:** $\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln(x-3)^{10}(y-1)^3 = C$.
6. $e^{x+y}\sin x \ dx + (2y+1)e^{-y^2} \ dy = 0$, **Solución:** $e^x(\sin x - \cos x) - 2e^{-y^2} = C$.
7. $3e^x \cdot \tan y \ dx + (1-e^x)\sec^2 y \ dy = 0$, **Solución:** $\tan y = C(1-e^x)^3$.
8. $e^y\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = 1$, **Solución:** $\ln(e^y - 1) = C - x$.
9. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$, **Solución:** $\arctan y - \frac{x^2}{2} = C$.
10. $y - xy' = a(1 + x^2y)$, **Solución:** $y = \frac{a+cx}{1+ax}$.

2.3 Ecuaciones Homogéneas

En este tipo de ecuaciones es practico buscar la forma de representar la E.D. de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y} + o \ \ ...\frac{y}{x}\right)$$

Tras buscar la forma de representar la .E.D en ese esquema, se puede hacer el cambio de una de las variables de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
y &= vx \quad v = \frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= v + x\frac{dv}{dx} \implies dy = vdx + xdv
\end{aligned}
$$

$$o$$

$$
\begin{aligned}
x &= uy \implies u = \frac{x}{y} \\
\frac{dx}{dy} &= u + y\frac{du}{dy} \implies dx = udy + ydu
\end{aligned}
$$

¿Cómo identificar que una E.D. es homogénea?

Dada una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Incorporamos el operador λ en la función:

$$\frac{dy}{dx} = f(\lambda x, \lambda y)$$

El objetivo es hacer desaparecer el operador λ y obtener la expresión original:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ahora, consideramos la ecuación diferencial en forma general:

$$M(\lambda x, \lambda y)dx + N(\lambda x, \lambda y)dy = 0$$

Factorizamos λ y verificamos que el grado sea el mismo:

$$\lambda^n M(x, y)dx + \lambda^n N(x, y)dy = 0$$

2.3.1 Ejercicio Resuelto 1 Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$$

Dividiendo entre $2xy$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$$

Verificamos si la ecuación es homogénea usando λ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(\lambda x)^2 + 3(\lambda y)^2}{2\lambda x\lambda y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 y^2}{2\lambda^2 xy}$$

$$e^{\ln(4+v^2)} = e^{\ln(cx)}$$

$$4 + v^2 = cx$$

Reemplazamos $v = \frac{y}{x}$:

$$4 + \frac{y^2}{x^2} = cx$$

2.3.2 Ejercicio Resuelto 2

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Expresamos en la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy}$$

Sustituyendo $y = vx$ con $v = \frac{y}{x}$:

$$\frac{dv}{dx}x + v = -\frac{x^2 + v^2x^2}{x^2 - xxv}$$

Factorizando:

$$\frac{dv}{dx}x + v = -\frac{x^2(1 + v^2)}{x^2(1 - v)}$$

$$\frac{dv}{dx}x = -\frac{1 + v^2}{1 - v} - v$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-(1 + v^2) - v(1 - v)}{1 - v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-1 - v^2 - v + v^2}{1 - v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = -\frac{1 + v}{1 - v}$$

Integramos ambos lados:

$$\int \frac{1 - v}{1 + v}dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

Utilizando fracciones parciales:

$$\int \left(\frac{1}{1 + v} - \frac{v}{1 + v}\right) dv = -\int \frac{1}{x}dx$$

2.3.3 Ejercicios Propuestos

Resuelve las siguientes ecuaciones homogéneas

1. $(4x^2 + xy - 3y^2)\,dx + (-5x^2 + 2xy + y^2)\,dy = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$

3. $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$

4. $\left(x \cos\left(\frac{y}{x}\right) - y\right) dx + x\ dy = 0$

5. $xy' = y + 2xe^{-y/x}$

6. $dy = \left(\frac{y}{x} - \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)\right) dx$

2.4 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es **exacta** si y solo si se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Método de Solución Para resolver ecuaciones diferenciales exactas, se sigue el siguiente procedimiento:

1. **Tomar** $dg(x, y) = Mdx$ o bien $dg(x, y) = Ndy$.

2. **Integrar** en x o en y.

3. **Derivar** con respecto a la variable opuesta.

4. **Igualar** el resultado con M o N según corresponda.

5. **Resolver** la integral resultante.

Ecuaciones No Exactas Cuando la ecuación diferencial no cumple con la condición de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

se debe encontrar un **factor integrante** $F(x, y)$ que convierta la ecuación en exacta, de tal manera que:

$$F(x, y)Mdx + F(x, y)Ndy = 0$$

Cálculo del Factor Integrante Dependiendo de si el factor integrante es función de x o de y, se calcula de la siguiente forma:

- **Si el factor es función de** x:

$$F(x) = e^{\int P(x)dx}, \quad \text{donde } P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

- **Si el factor es función de** y:

$$F(y) = e^{\int P(y)dy}, \quad \text{donde } P(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

- **Si el factor es función de ambas variables** x **y** y: Se debe determinar por tanteo o con métodos específicos.

Resolución con el Factor Integrante Una vez multiplicada la ecuación diferencial por el factor integrante, la ecuación resultante se puede resolver con el método de ecuaciones diferenciales exactas.

$$Fi(x,y)M(x,y)dx + Fi(x,y)N(x,y)dy = 0$$

2.4.1 Ejerciicio Resuelto 1

$$(4x + 2y^2)dx + (4xy)dy = 0$$

Tomamos la ecuación en la forma:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Reemplazamos $N(x,y)$:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 4xy$$

Pasamos la derivada al otro lado como una integral:

$$g(x,y) = \int 4xy\,dy$$

Resolviendo la integral:

$$g(x,y) = 2xy^2 + c_1 + v(x)$$

donde $v(x)$ es una función desconocida.

Complementamos con la ecuación:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

Derivamos $g(x,y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2 + c_1 + v(x)\right) = 2y^2 + v'(x)$$

Igualamos con $M(x,y)$:

$$2y^2 + v'(x) = 4x + 2y^2$$

Despejamos $v'(x)$:

$$v'(x) = 4x$$

Para encontrar $v(x)$, integramos:

$$v(x) = \int 4x dx$$

$$v(x) = 2x^2 + c_2$$

Reemplazamos en la ecuación inicial de $g(x, y)$:

$$g(x, y) = 2xy^2 + c_1 + v(x)$$

$$g(x, y) = 2xy^2 + c_1 + 2x^2 + c_2$$

Por teoría, sabemos que:

$$g(x, y) = C$$

Entonces:

$$2xy^2 + c_1 + 2x^2 + c_2 = C$$

Unificando constantes:

$$K = C - c_1 - c_2$$

$$2xy^2 + 2x^2 = K$$

Finalmente, despejamos y:

$$y = \sqrt{\frac{K - 2x^2}{2x}}$$

2.4.2 Ejerciicio Resuelto 2 - Ecuaciones No Exactas

$$xydx + \left(2x^2 + 3y^2 - 20\right) dy = 0$$

Verificamos si es exacta aplicando la condición:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (xy)}{\partial y} = x,$$
$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2 + 3y^2 - 20)}{\partial x} = 4x.$$

Como $x \neq 4x$, la ecuación no es exacta. Utilizamos las fórmulas para encontrar factores de integración.

Primero intentamos con la opción (A):

$$\frac{1}{2x^2 + 3y^2 - 20}(x - 4x) = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}.$$

Como el resultado no es una función exclusiva de x, descartamos esta opción.

Probamos con la opción (B):

$$\frac{1}{xy}(x-4x) = -\frac{3}{y}.$$

Como depende exclusivamente de y, podemos aplicar el siguiente factor integrante:

$$I(x,y) = e^{-\int h(y)dy} = e^{-\int -\frac{3}{y}dy} = e^{3\ln(y)}.$$

Aplicando propiedades logarítmicas:

$$I(x,y) = e^{\ln(y^3)} = y^3.$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:

$$y^3(xydx + (2x^2+3y^2-20)dy) = 0.$$

Ahora verificamos si es exacta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= xy^4, \\ g(x,y) &= \int xy^4 dx = \frac{y^4x^2}{2} + h(y). \end{aligned}$$

Aplicamos la segunda condición:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^4x^2}{2} + h(y)\right) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3, \\ 2x^2y^3 + h'(y) &= 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3, \\ h'(y) &= 3y^5 - 20y^3. \end{aligned}$$

Integrando $h'(y)$:

$$h(y) = \int (3y^5 - 20y^3)dy = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + c_1.$$

Sustituyendo en $g(x,y)$:

$$g(x,y) = \frac{y^4x^2}{2} + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + c_1 = K.$$

Definiendo la constante $c = K - c_1$:

$$\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c.$$

2.4.3 Ejerciicio Resuelto 3 - No Exactas

Dada la ecuación:

$$ydx - xdy = 0.$$

Verificamos si es exacta:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -1.$$

Aplicamos el factor integrante:

$$\frac{1}{N}(1+1) = -\frac{2}{x},$$
$$\frac{1}{M}(1+1) = \frac{2}{y}.$$

Aplicando el factor integrante:

$$I(x,y) = e^{\int g(x)dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = x^{-2}.$$

Multiplicamos por $I(x,y)$:

$$(ydx - xdy)x^{-2} = 0.$$

Como ahora la ecuación es exacta, resolvemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) = yx^{-2},\\ g(x,y) &= \int yx^{-2}dx + h(x),\\ g(x,y) &= -\frac{y}{x} + h(x).\end{aligned}$$

Aplicamos la segunda condición:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial(-\frac{y}{x} + h(x))}{\partial y} = -x^{-1}.$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x} + h'(x) &= -\frac{1}{x},\\ h'(x) &= 0,\\ h(x) &= c_1.\end{aligned}$$

Finalmente:

$$g(x,y) = -\frac{y}{x} + c_1 = K.$$

Multiplicamos por -1:

$$y = Ax.$$

2.4.4 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en caso de ser exactas:

1. $(2xy - \tan y)dx + (x^2 - x\sec^2 y)dy = 0$

   Respuesta: $x^2y - x\tan y = K$

2. $(\sin x \sin y - xe^y)dy = (e^y + \cos x\cos y)dx$

   Respuesta: $xe^y + \cos y \sin x = K$

3. $(y + y\cos xy)dx + (x + x\cos xy)dy = 0$

   Respuesta: $xy + \sin xy = K$

4. $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x-2)dy=0$

   Respuesta: $y\ln x+3x^2-2y=K$

5. $(\cos 2y-3x^2y^2)dx+(\cos 2y-2x\sin 2y-2x^3y)dy=0$

   Respuesta: $\frac{\sin 2y}{2}+x\cos 2y-x^3y^2=c$

6. $e^x(x^2e^x+e^x+xy+y)dx+(xe^x+y)dy=0$

   Respuesta: $xye^x+\frac{y^2}{2}+\frac{e^{2x}}{4}(2x^2-2x+3)x=c$

7. $(1+y^2+xy^2)dx+(x^2y+y+2xy)dx=0$

   Respuesta: $2x+y^2(1+x)^2=c$

8. $(3x^2\tan y-\frac{2y^3}{x^3})dx+(x^3\sec^2 y+4y^3-\frac{3y^2}{x^2})dy=0$

   Respuesta: $x^3\tan y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=c$

9. $(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y})dx=\left(\frac{x^2+y^2}{xy^2}\right)dy$

   Respuesta: $x^3y+x^2-y^2=cxy$

10. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$

    Respuesta: $\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=c$

11. $\left(-\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$

    Respuesta: $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=c$

2.5 Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Dada una ecuación diferencial lineal de primer orden en su forma estándar:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

El objetivo inicial es llevarla a su forma simple. Para ello, se puede dividir la expresión entre $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Para contextualizar el método, se realiza un pequeño cambio de variables:

$$P(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)},\quad Q(x)=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Logrando así la siguiente representación deseada:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

Considerando que ahora la ecuación diferencial es lineal, según el método, se procede a aplicar el procedimiento adecuado para su resolución.

2.5.1 Ejercicio Resuelto 1

Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 4$$

Identificamos los coeficientes:

$$p(t) = 2, \quad q(t) = 4$$

Calculamos el factor de integración:

$$u(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

Aplicamos el método:

$$y(t) = u(t)^{-1} \left(\int u(t)q(t)dt + C \right)$$

$$y(t) = e^{-2t} \left(\int 4e^{2t}dt + C \right)$$

$$y(t) = e^{-2t} \left(4\frac{e^{2t}}{2} + C \right)$$

$$y(t) = 2 + Ce^{-2t}$$

2.5.2 Ejercicio Resuelto 2

Resolver la ecuación diferencial con la condición inicial $y(1) = 4$:

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

Reescribimos la ecuación en su forma estándar:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Identificamos los coeficientes:

$$p(x) = 2, \quad q(x) = 4x^2$$

Para que la ecuación esté correctamente formulada, dividimos entre x:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{1}{x}y = 4x, \quad y(1) = 4$$

Ahora:

$$p(x) = 2\frac{1}{x}, \quad q(x) = 4x$$

Calculamos el factor de integración:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{2\int \frac{1}{x}dx}$$

$$u(x) = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)}$$

$$u(x) = x^2$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por $u(x)$:

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$$

$$(u(x) \cdot y)' = 4x^3$$

Integrando:

$$x^2y = 4\int x^3dx$$

$$x^2y = 4\frac{x^4}{4} + C$$

$$y = x^2 + Cx^{-2}$$

Usamos la condición inicial $y(1) = 4$ para encontrar C:

$$4 = 1 + C$$

$$C = 3$$

$$y = x^2 + 3x^{-2}$$

2.5.3 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $x\tan^2 y\,dy + x\,dy = (2x^2 + \tan y)dx$, **Respuesta:** $\tan y = x(2\sin x + c)$.
2. $\frac{dy}{dx} - e^x y = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} - e^x\cos\frac{1}{x}$, **Respuesta:** $y = \cos\frac{1}{x} + Ce^{-x}$.
3. $x\sin\theta\,d\theta + (x^3 - 2x^2\cos\theta + \cos\theta)dx = 0$, **Respuesta:** $\cos\theta = \frac{-x}{2} + Cxe^{-x^2}$.
4. $x^2dy + xydx = 8x^2\cos^2 xdx$, **Respuesta:** $xy = 2x^2 + 2x\sin 2x + \cos 2x + c$.
5. $(x^5 + 3y)dx - xdy = 0$, **Respuesta:** $y = x^3\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$.
6. $dy = x^{-5}(4x^4y + 3x^4y^{-1} + 256y^7 + 768y^5 + 864y^3 + 432y + 81y^{-1})dx$.
7. $\frac{dy}{dx} - y\cot x = \frac{\sin(2x)}{2}$, **Respuesta:** $y = K\sin x + \sin^2 x$.
8. $\cos y\,dx = (x\sin y + \tan y)dy$, **Respuesta:** $x = K\sec y - \sec y\ln\cos y$.

2.6 Ecuación Diferencial de Bernoulli

Las ecuaciones de Bernoulli tienen la siguiente representación. A diferencia de una ecuación diferencial lineal, estas cuentan con un término y^n multiplicando a $q(x)$:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

donde n es un número real diferente de 0 y 1.

El objetivo es buscar una forma de convertir la ecuación diferencial en una ecuación lineal.

Para eliminar y^n en el miembro derecho, dividimos entre y^n:

$$y^{-n}y' + p(x)yy^{-n} = q(x)$$

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Para lograr el formato estándar de una ecuación lineal, realizamos el cambio de variable:

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad \text{(A)}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$y^{-n}y' + p(x)z = q(x)$$

Buscamos una forma de expresar $y^{-n}y'$ en términos de z', es decir, $\frac{dz}{dx}$.
Derivamos la ecuación (A):

$$\frac{dz}{dy} = (1-n)y^{-n}$$

Aplicamos la regla de la cadena para incorporar dx:

$$\frac{dz}{dy} = (1-n)y^{-n}\frac{dx}{dx}$$

Esto permite separar las variables:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Para aplicar este cambio en la ecuación original, multiplicamos por $(1-n)$:

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal en términos de z, que puede resolverse con el método estándar.

2.6.1 Ejercicio Resuelto 1

Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$$

Reordenamos:

$$2xy\frac{dy}{dx} - 4x^2 = 3y^2$$

Dividimos entre $2xy$:

$$\frac{dy}{dx} - 2x\frac{1}{y} = \frac{3}{2x}y$$

Forma de Bernoulli:

$$y' - \frac{3}{2x}y = 2xy^{-1}, \quad n = -1$$

Realizamos el cambio de variable:

$$z = y^{1-n} = y^2$$

Derivamos:

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Multiplicamos por $(1-n) = 2$:

$$2yy' - \frac{3}{x}y^2 = 4x$$

$$z' - \frac{3}{x}z = 4x$$

Factor de integración:

$$u(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$$

Resolviendo:

$$z(x) = x^3\left(\int 4x^{-2}dx + C\right)$$

$$z(x) = x^3\left(-4x^{-1} + C\right)$$

Reemplazamos $z = y^2$:

$$y^2 = x^3\left(-4x^{-1} + C\right)$$

$$y^2 = Cx^3 - 4x^2$$

—

2.6.2 Ejercicio Resuelto 2

Resolver la ecuación diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

Dividimos entre x:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$$

Dividimos entre $y^{4/3}$, con $n = 4/3$:

$$y^{-4/3}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y^{-1/3} = 3$$

Cambio de variable:

$$z = y^{1-n} = y^{-1/3}$$

Derivamos y aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}y^{-4/3}\frac{dy}{dx}$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{3}$:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -1$$

Ecuación diferencial lineal con:

$$p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = -1$$

Factor de integración:

$$u(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = x^{-2}$$

Resolviendo para $z(x)$:

$$z(x) = x^2\left(-\int x^{-2}dx + C\right)$$

$$z(x) = x^2\left(x^{-1} + C\right)$$

Reemplazamos $z = y^{-1/3}$:

$$y^{-1/3} = x^2\left(x^{-1} + C\right)$$

—

2.6.3 Ejercicio Resuelto 3 - Casos especiales

Resolver la ecuación diferencial:

$$2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y}$$

Intentamos separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 + e^{2y}}{2xe^{2y}}$$

No es posible separar, verificamos homogeneidad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\lambda^4 x^4 + e^{2y\lambda}}{2x\lambda e^{2y\lambda}}$$

Forma diferencial:

$$(3x^4 + e^{2y})dx - 2xe^{2y}dy = 0$$

No es exacta. Intentamos el cambio:

$$z = e^{2y}$$

Derivamos:

$$\frac{dz}{dx} = 2e^{2y}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x\frac{dz}{dx} = 3x^4 + z$$

Dividimos entre x:

$$\frac{dz}{dx} = 3x^3 + \frac{1}{x}z$$

La ecuación se vuelve lineal:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 3x^3$$

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = 3x^3$$

—

2.6.4 Ejercicio 4 - Caso 2

$$xe^y \frac{dy}{dx} = 2(e^y + x^3 e^{2x})$$

Solución:

$$y = \ln\left(Cx^2 + x^2 e^{2x}\right)$$

2.6.5 Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$, **Respuesta:** $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = K$.
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^2$, **Respuesta:** $\frac{1}{y^2} = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$.
3. $(x^2 + 1)y' = xy + x^2y^2$, **Respuesta:** $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-\frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{1+x^2}| - x\sqrt{1+x^2} + c\right)$.
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin^2 y}{x^5 + x\tan y}$, **Respuesta:** $x^4(K - \ln\tan y) = \tan y$.
5. $(x^2 + y^2 + (y + 2x)x^{-1})dy = (2(x^2 + y^2) + (y + 2x)x^{-2}y)dx$, **Respuesta:** $(y - 2x)^2 = -\frac{2y}{x} + 10\arctan\frac{y}{x}$, **Sugerencia:** $y = ux$.
6. $(xy^2)' = (xy)^3(x^2 + 1)$, **Respuesta:** $y = \frac{45}{45\sqrt{x} - 5x^5 - 9x^3}$.
7. $dy - y\sin x\, dx = y\ln(ye^{\cos x})dx$, **Respuesta:** $y = -e^{x - \cos x}$.
8. $(x + y^3) + 6xy^2y' = 0$, **Respuesta:** $y^3 = -\frac{x}{3} + C\frac{1}{2}$.