

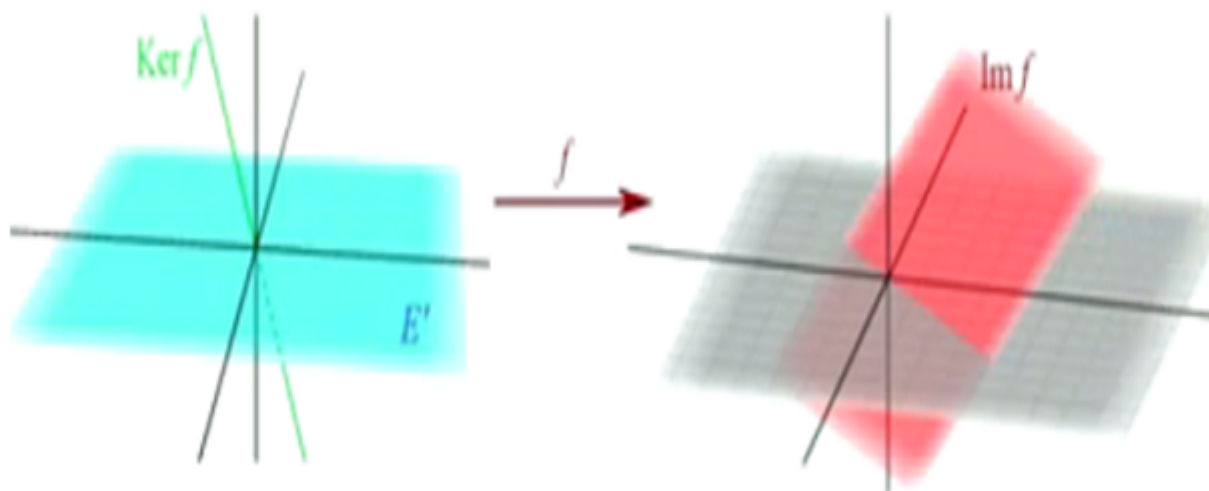


Université des Comores

Faculté des science & technique
Département de Mathématique

PROJET TUTEURÉ
POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE LICENCE DE MATHÉMATIQUES

THÉORÈME DU RANG ET SYSTÈME LINÉAIRE



Sanaou Mohoutare Mohamed(37731)
Toiwilou Hassane(36691)
Zaina Ibouroi Mbae(35809)

Encadré par :
Ali Mze Ibrahim

Membre du jury :

-
-
-

PROMOTION 2018-2019

Remerciement

La réalisation de ce projet a été possible grâce à la coopération de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toute nôtre gratitude.

Nous souhaitons avant tout remercier notre encadrant de projet, Mr Ali Mzè Ibrahim, pour le temps qu'il a consacré à nous apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche; pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion ainsi que son exigence qui nous a grandement stimulé.

L'enseignement de qualité dispensé par le parcours licence de l'université des Comores particulièrement à faculté des sciences et techniques a également su nourrir nos réflexions et a représenté une profonde satisfaction intellectuelle, merci donc aux enseignants-chercheurs, dédicace au chef de département des mathématiques Dr Abdoul-hafar Halassi Bacar pour sa majeure contribution qu'il nous a fourni au cours de notre recherche.

Nous adressons nos sincères remerciements à tous les professeurs intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos recherches.

Nous remercions également nos très chers parents, qui ont toujours été là pour nous.

Nous voudrions exprimer nos reconnaissances envers les frères, sœurs, amis et collègues qui nous ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de nos démarche.

À tous ces intervenants, nous présentons nos remerciements, nos respects et nos gratitude.

Un grand merci

Table des matières

Introduction	7
1 Théorème du rang	9
1.1 Rang d'une famille de vecteurs	9
1.1.1 Généralité	9
1.1.2 Définition	9
1.2 Rang d'une matrice	10
1.2.1 Méthode de Gauss	10
1.3 Rang d'une application linéaire	11
1.4 Théorème du rang	11
2 Système linéaire	13
2.1 Définition	13
2.2 Méthode exacte(Méthode de Gauss)	13
2.2.1 Nombre de solution	14
2.3 Méthode numérique	16
2.3.1 Méthode de Richaudson	16
2.3.2 Méthode de Jacobi	18
2.3.3 Méthode de Gauss Seidel	19
2.3.4 Méthode de Relaxation	20
Conclusion	23
Bibliographie	25

Introduction

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure.

De même dans les mathématiques d'aujourd'hui un certain nombre de théories puissantes sont au premier plan ainsi que l'apprentissage des outils modernes d'analyses numériques et leur mise en œuvre sur Ordinateur en utilisant des langages de programmations et logiciels spécifiques comme Matlab, Octave, Scilab etc ...

Vue de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts tels que la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept de l'espace, l'analyse, science de l'infinité et du continu ainsi de suite.

En ce sens, notre thème se base sur l'entendement de quelques théories d'algèbre linéaire et d'analyse numérique.

En effet, quels sont les outils utilisés pour déterminer le rang?

Quelles sont les procédés appliqués pour la résolution des systèmes linéaires?

Pour pouvoir bien répondre à ses problématiques nous focaliserons notre travail en deux grandes parties.

Premièrement nous allons parler du théorème du Rang.

Sur ce nous mettons en exergue quatre sous parties qui vont nous permettre de bien fixer ce fameux théorème avant de l'énoncer.

Ainsi, ces dernières sont :

- Rang d'une famille de vecteurs
- Rang d'une matrice
- Rang d'une application linéaire
- Quelques préliminaires sur le théorème du rang

Et enfin nous allons finir dans cette sous partie par énoncer ce théorème.

Deuxièmement nous allons réaliser ses applications tout en se basant à la résolution du système linéaire en utilisant dans un premier temps une méthode exacte plus précisément la méthode de Gauss auquel le nombre de solution est distingué suivant deux cas :

- Premier cas : $A \in M_{m,n}$ avec $m = n$
- Deuxième cas : $A \in M_{m,n}$ avec $m \neq n$

Puis dans un deuxième temps nous allons nous inspirer des méthodes numériques plus particulièrement des méthodes itératives telles que *la méthode de points fixe, Jacobi, Gauss-Seidel et Sur-relaxation*

Chapitre 1

Théorème du rang

1.1 Rang d'une famille de vecteurs

1.1.1 Généralité

D'une manière générale le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel contenant tous ces vecteurs.

1.1.2 Définition

Soit E un K -espace vectoriel et soit (v_1, \dots, v_p) une famille finie de vecteurs de E . Le rang de la famille (v_1, \dots, v_p) est la dimension du sous-espace vectoriel $Vect(v_1, \dots, v_p)$ engendré par les vecteurs (v_1, \dots, v_p) .

Autrement dit :

$$rg(v_1, \dots, v_p) = \dim Vect(v_1, \dots, v_p).$$

① Proposition

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et (v_1, \dots, v_p) une famille de p vecteurs de E , alors :

1. $0 \leq rg(v_1, \dots, v_p) \leq p$: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.
2. Si E est de dimension finie alors $rg(v_1, \dots, v_p) \leq \dim E$: le rang est inférieur ou égal à la dimension de l'espace ambiant E .
3. Si $\dim E = n$ est finie alors $rg(v_1, \dots, v_p) = \min(p, n)$

Remarque

1. Le rang d'une famille vaut 0 si et seulement si tous les vecteurs sont nuls.
2. Le rang d'une famille (v_1, \dots, v_p) vaut p si et seulement si la famille (v_1, \dots, v_p) est libre.

① Démonstration

- 1.(a) Soit $F = vect(v_1, \dots, v_p)$.

Si (v_1, \dots, v_p) est linéairement indépendant alors v_1, \dots, v_p est une base de F

alors $\dim F = p$.

- (b) Si (v_1, \dots, v_p) ne sont pas linéairement indépendant donc il existe au moins un vecteur qui est combinaison linéaire des autres. Alors une base de F va contenir moins de vecteur. Donc $\dim F < p$.

D'après (a) et (b) on a $\dim F < p$

2. $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_p)$ est un sous-espace de E et comme E est finie $\dim F \leq \dim E$.

1.2 Rang d'une matrice

Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ comme une juxtaposition de vecteurs colonnes $(v_1, \dots, v_p) \in K^n$ et défini $rg(A) = \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Considérons maintenant que A est aussi une superposition de vecteurs lignes $(w_1, \dots, w_n) \in K^n$.

1.2.1 Méthode de Gauss

L'une des méthodes les plus adaptés pour déterminer le rang d'une matrice est "**la méthode de Gauss**" tout en l'appliquant sur les colonnes de la matrice A .

$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une colonne par un scalaire non nul.

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j .

$C_i \leftrightarrow C_j$: on peut échanger deux colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice A ayant les colonnes $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$. Ainsi on utilise ces opérations pour transformer cette matrice en une matrice échelonnée par rapport aux colonnes. Le rang est le nombre de vecteurs non nuls.

② Proposition

Soit $A \in M_{n,p}(K)$ comme une juxtaposition de vecteurs colonnes (v_1, \dots, v_p) et défini $rg(A) = \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Considérons maintenant que A est aussi une superposition de vecteurs lignes (w_1, \dots, w_n) et donc $rg(A) = rg(A^t)$.

② Démonstration

$$\begin{aligned} \text{On a } rg(A) &= \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) \\ &= \dim \text{Vect}(w_1, \dots, w_p) \\ &= rg(A^t) \end{aligned}$$

d'où $rg(A) = rg(A^t)$.

NB :

les dimensions $\dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $\dim \text{Vect}(w_1, \dots, w_p)$ sont égales, mais les espaces vectoriels $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $\text{Vect}(v_1, \dots, w_n)$ ne sont pas les mêmes.

1.3 Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On rappelle que l'on note $f(E)$ par Imf , c'est-à-dire $Imf = \{f(x) / x \in E\}$. Imf est un sous espace vectoriel de F

③ Proposition

1. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $Imf = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$. La dimension de cet espace vectoriel Imf est appelée rang de f :

$$\begin{aligned} rg(f) &= \dim Imf \\ &= \dim Vect(f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

2. On rappelle que l'on note $f(E)$ par Imf .
 $Imf = f(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

➤ Théorème (Matrice inversible et rang)

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n (le rang est maximale).

➤ Démonstration

Soit A une matrice carrée de taille n .

A inversible $\iff f$ est bijective.

$\iff f$ est surjective.

$\iff rg(f) = \dim K^n = n$.

Or $rg(A) = rg(f)$

Donc A est inversible $\iff rg(A) = n$

1.4 Théorème du rang

Le théorème du rang est un résultat fondamental dans la théorie des applications linéaires en dimension finie. On se place toujours dans la même situation :

1. $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire entre deux K -espaces vectoriels,
2. E est un espace vectoriel de dimension finie,
3. le noyau de f est $Ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$; c'est un sous-espace vectoriel de E , donc $Ker f$ est de dimension finie,
4. l'image de f est $Imf = f(E) = \{f(x) / x \in E\}$; c'est un sous-espace vectoriel de F et est de dimension finie. Le théorème du rang donne une relation entre la dimension du noyau et la dimension de l'image de f .

➤ Théorème (Théorème du rang :)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux K -espaces vectoriels, alors $\dim E = \dim Ker f + \dim Imf$

Autrement dit :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f.$$

Dans la pratique, cette formule sert à déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.

➤ **Démonstration**

Soit E, F deux K espace vectoriel et $\dim(E)$ finie, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et (e_1, e_2, \dots, e_p) une base de $\text{Ker}(f)$.

On peut la compléter à une base $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)) \\ &= \text{vect}(f(e_{p+1}), f(e_n)) \end{aligned}$$

Donc $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Montrons que la famille $f((e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est libre.

$$\lambda_{p+1}f(e_{p+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = \vec{0}$$

$$f(\lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n) = \vec{0}$$

$$\lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \text{Ker } f$$

or $\text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires

$$\text{Donc } \lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0 \text{ car } (e_{p+1}, \dots, e_n) \text{ est libre}$$

Ainsi $(f(e_{p+1}), \dots, f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$ est une base de $\text{Im}(f)$

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent } \dim(\text{Im}(f)) &= \text{card}(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)) \\ &= n - p \end{aligned}$$

D'où le théorème : $\dim(\text{Im } f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } f)$

Chapitre 2

Système linéaire

2.1 Définition

Un système de m équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n s'écrit sous forme matricielle : $AX = B$ où $A \in M_{m,n}$, $X \in M_{n,1}$ dont les composantes sont les x_i et $B \in M_{m,1}$, le second membre. Le vecteur X est appelé solution du système.

Exemple N° 1

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases} \quad s'écrit \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice a 4 lignes et 3 colonnes, le second membre a 4 composantes et le vecteur solution a 3 composantes qui sont les 3 inconnues du système. Dans ce cas, $m \neq n$.

2.2 Méthode exacte (Méthode de Gauss)

Quelles que soient les valeurs m et n du système, on peut déterminer ses solutions par la méthode d'élimination de Gauss. Le principe en est le suivant : par des combinaisons linéaires successives, on transforme le système initial, que l'on prend tel quel sans changer l'ordre des équations, en un système triangulaire supérieur, système ensuite résolu en commençant par la dernière des équations transformées. On rappelle qu'un système est dit triangulaire supérieur si la matrice associée est triangulaire supérieure. Mise en œuvre de la méthode sur le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9L_1 \\ x_1 + x_3 = 3L_2 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6L_3 \end{cases}$$

1. Dans la première étape de la méthode, on élimine l'inconnue x_1 dans les équations L_2 et L_3 en les combinant chacune à L_1 , celle-ci, servant de ligne

pivot, reste inchangée. Cela n'est possible que parce que x_1 apparaît dans L_1 . Si ce n'est pas le cas, il faut permuter L_1 avec la première des équations suivantes qui contient x_1 . La méthode de Gauss remplace l'équation L_2 par $L_2 - \frac{1}{2}L_1$, mais pas L_2 par $2L_2 - L_1$, qui éliminerait aussi x_1 mais ce qui n'est plus Gauss. De même, L_3 est remplacée par $L_3 - \frac{6}{2}L_1$. Après cette première étape, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9L_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 - x_3 = \frac{3}{2}L'_2 \\ x_2 - 10x_3 = -21L'_3 \end{cases}$$

2. Dans la deuxième étape, c'est la deuxième ligne qui joue le rôle de ligne pivot si x_2 est présent (sinon on permute L'_2 avec L'_3 et, pour éliminer x_2 dans la troisième ligne, on remplace celle-ci par $L'_3 - \frac{1}{-1}L'_2$ soit $L'_3 + 2L'_2$. On obtient alors le système équivalent, triangulaire supérieur, suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9L_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 - x_3 = \frac{3}{2}L'_2 \\ -10x_3 = -24L''_3 \end{cases}$$

3. On résout le système par "remontée" en commençant par la dernière équation. L''_3 donne $x_3 = 2$,

$$L'_2 \text{ donne } -\frac{1}{2}x_2 = -\frac{3}{2} + x_3 = \frac{1}{2} \text{ soit } x_2 = -1$$

$$L_1 \text{ donne } 2x_1 = 9 - x_2 - 4x_3 = 9 + 1 - \frac{4}{2} = 2 \text{ d'où } x_1 = 1 \text{ et la solution unique}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ Par la suite, les systèmes seront résolus par cette méthode. Pour } n \text{ équations, il y aura } n - 1 \text{ étapes.}$$

2.2.1 Nombre de solution

Un système possède zéro ou une infinité de solutions.

Ainsi pour avoir une idée sur le nombre de solution on distingue deux cas :

2.2.1.1 Cas si $A \in M_{m,n}(K)$ avec $m = n$

1. **Système homogène** Un système est dit homogène si le second membre est nul. Soit $A \in Mat_{(f)(b,c*)}$ et $\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^n / AX = 0\}$

$$= \ker f$$

Le noyau contient toujours le vecteur nul, mais il peut contenir en plus des vecteurs non nuls (et aussi leurs combinaisons linéaires). Ce type de système a donc au moins une solution, la solution nulle.

- (a) Si A est inversible (le déterminant de A est différent de 0), le système a la solution unique : $X = 0$, le vecteur nul. Le noyau est réduit à $\{0\}$ et $\text{rang}(A) = n$.

Formellement, $X = A^{-1}0 = 0$.

- (b) Si A n'est pas inversible (le déterminant de A est égal à 0), le système a une infinité de solutions (en plus de la solution nulle). Dans ce cas, le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et si la dimension du noyau vaut k , alors $\text{rang}(A) = n - k$.

Exemple N° 2 :

Le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a la solution unique $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exemple N° 3 : Le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a une infinité de solutions.

$X = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ où x_3 est l'inconnue auxiliaire qui peut prendre une

valeur arbitraire. L'ensemble de ces solutions constitue un espace vectoriel

de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. **Système non homogène : $AX = B$, $B \neq 0$.**

- (a) Si A est inversible, le système a la solution unique : $X = A^{-1}B$ (écriture formelle). On a $X \neq 0$.

- (b) Si A est non inversible, $AX = B$, $\Gamma = \ker A + X_0 = X_0 + \ker A$
 $[A, B] = (A_1, \dots, A_n, B)$ tel que

$$AX = B \tag{2.1}$$

avec $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $A = (A_1, \dots, A_n)$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

$$(2.1) \iff x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B$$

$$(2.1) \text{ admet une solution } \iff B \in \text{vect}(A_1, \dots, A_n) = \text{Im} f \iff \text{rang}(A_1, \dots, A_n, B) = \text{rang}(f)$$

2.2.1.2 Deuxième cas $A \in M_{m,n}(K)$ avec $m \neq n$

— $m > n$: il y a plus d'équations que d'inconnues.

Le système est dit sur-déterminé. En général, le système n'aura pas de solutions. Pour le vérifier, soit on met en œuvre la méthode de Gauss, ce qui précisera les impossibilités, soit on détermine le rang de AB et on compare à celui de A . Le déterminant de la matrice vaut 0, le rang de la matrice est 2.

— $m < n$: il y a moins d'équations que d'inconnues. Le système est dit sous-déterminé. Il y aura une infinité de solutions que l'on pourra expliciter en fonctions d'inconnues arbitraires à choisir.

Conclusion :

Quelles que soient les dimensions d'un système $AX = B$,

- si $B \notin \text{Im}(A)$ (image de l'application associée à la matrice A), le système a 0 solution.
- si $B \in \text{Im}(A)$, et si le noyau est réduit à 0, le système a une solution unique.
- si $B \in \text{Im}(A)$, et si le noyau n'est pas réduit à 0, le système a une infinité de solutions.

2.3 Méthode numérique

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution d'un système linéaire

$$Ax = b \tag{2.2}$$

où $A \in M_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par le biais des méthodes numériques en utilisant plus particulièrement des méthodes itératives notamment la méthode de Richardson, la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel et la méthode de sur-relaxation. Il s'agit ici de vérifier l'efficacité de cette approche en l'implémentant dans Octave.

2.3.1 Méthode de Richardson

L'intérêt des méthodes de types point fixe est qu'elles peuvent aussi s'appliquer à des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

De plus certain d'entre elles telle que la méthode de Newton convergent rapidement ce qui permet d'atteindre une grande précision à moindre coût.

Généralité

On se donne une matrice inversible A et un système linéaire

$$Ax = b$$

On désire transformer (2.2) en un système équivalent sous la forme d'un problème d'un point fixe de la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = P^{-1}Nx + P^{-1}b$$

sous les hypothèses $A = P - N$ où N est une matrice quelconque et P est une matrice facilement inversibles.

Les points fixes de la fonction Φ sont les solutions de l'équation $\Phi(x) = x$.

On a alors : $\Phi(x) = x \Rightarrow P^{-1}Nx + P^{-1}b = x$

$$\Rightarrow P^{-1}Nx - x = -P^{-1}b$$

$$\Rightarrow Nx + b = Px$$

$$\Rightarrow (N - P)x = -b$$

$$\Rightarrow (P - N)x = b$$

$$\Rightarrow Ax = b$$

Remarques :

Les points fixes des Φ sont les solutions du systèmes linéaires $Ax = b$.

Donc connaissant une solution initiale x^0 , on peut donc considérer une méthode itérative du point fixe de la forme $x^{k+1} = \Phi(x^k)$.

En posant $B = P^{-1}N$ et $f = P^{-1}b$, les méthodes itératives du pont fixe consistent à considérer des méthodes de la forme $x^{k+1} = Bx^k + f$ ou B est appelée la matrice d'itération et f est un vecteur obtenu à partir du second membre d'où l'algorithme :

$$\begin{cases} x^0 \text{ donnée} \\ x^{k+1} = Bx^k + f \end{cases}$$

Pour étudier la convergence de cet algorithme, il suffit de considérer la suite des erreurs $e^k = x^k - x$ avec $e^0 = x^0 - x$.

En effet $e^k = x^k - x$

$$= (Bx^{k-1} + f) - (Bx + f)$$

$$= B(x^{k-1} - x)$$

$$= B(B(x^{k-2} + f) - (Bx + f))$$

$$= B(B(x^{k-2} - x))$$

$$= B^2 e^{k-2}$$

$$e^k = B^k e^0$$

La méthode du point fixe converge si est seulement si la norme $\|B^k\| < 1 \Rightarrow e^B < 1$

On a les résultats suivants comme critère fondamental de convergence.

► **Théorème :**

Les énonces suivantes sont équivalents

1. La méthode itérative (2.2) converge pour tous les $x^0 \in \mathbb{R}_n$.
2. Le rayon spectral de B est inférieur à un.
3. Pour au moins une norme matricielle subordonnée, on a que $\|B\| < 1$.

Lemme (Condition nécessaire suffisante pour la convergence de (2.2))

La méthode (2.2) converge vers l'unique solution du système $Ax = b$ si et seulement si, $\|P^{-1}N\| < 1$.

Lemme (Condition suffisante pour la convergence de la méthode)

Soit $A \in \mathbb{C}$, une matrice hermitienne définie positive. On considère une décomposition régulière de la forme (2.2) avec $P \neq A$ et $P^H + N$ définie positive. Alors, la méthode (2.2) converge vers la solution du système $Ax = b$.

Donc, le problème du point fixe devient

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= P_{-1}Nx^{(k)} + p_{-1}b \\&= (I_n)x^k + b \\&= x^k - Ax^k + b \\&= x^k + r_k \text{ avec } r_k = b - Ax^k \text{ est appelé le résidu à l'instant } k.\end{aligned}$$

Pour une bonne définition de la méthode, on fixe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ et on modifie la méthode par $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r_k$

$$\begin{aligned}&(I_n\alpha A)x^k + \alpha b \\x^{(k+1)} &= (I_n\alpha A)x^k + \alpha b.\end{aligned}$$

Théorème :

La méthode de Richardson converge si et seulement si $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$ avec $\lambda_n = \max|\lambda_i|$ et $\lambda_i \in \sigma(A)$

Démonstration

$$e^{(In-\alpha A)} < 1$$

soit $\lambda_i \in \text{Spec}(A)$, alors $1 - \alpha\lambda_i \in \text{Spec}(In - \alpha A)$

$$\begin{aligned}e^{(In-\alpha A)} < 1 &\iff |1 - \alpha\lambda_i| < 1 \\&\iff -1 < 1 - \alpha\lambda_i < 1 \\&\iff -2 < \alpha\lambda_i < 0 \\&\iff 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_i} \\&\iff 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}}\end{aligned}$$

2.3.2 Méthode de Jacobi

Nous introduisons la décomposition DEL en prenant $A = D - E - L$ pour obtenir la méthode de Jacobi, où D est une matrice diagonale composée des éléments

diagonaux de A , E sa portion strictement triangulaire supérieure et L sa portion strictement triangulaire inférieure

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi est une méthode de point fixe d

Donc, $x^{k+1} = P^{-1}Nx^k + P^{-1}b$, $P = D$, $N = E + L \Rightarrow x^{k+1} = D^{-1}(N + L)x^k + D^{-1}b$.
Ainsi la matrice de Jacobi est $B_j = D^{-1}b$.

D'où l'algorithme de Jacobi est :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + L)x^{(k)} + D^{-1}b(\text{l'itération})$$

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) & (\text{la } i^{\text{ème}} \text{ iteration}) \end{cases}$$

code numerique pour la méthode de Jacobi

```

1 function x=Jacobi (A,b,x0,tol)
2     n=length(A);
3     xk=zeros(n,1);
4     x=x0;
5     while max(abs(x-xk))>tol
6         xk=x;
7         for i=1:n
8             som=0;
9             for j=1:n
10                if j~=i
11                    som=som+A(i,j)*xk(j);
12                end
13            end
14            x(i)=(1/A(i,i))*(b(i)-som);
15        end
16    end

```

2.3.3 Méthode de Gauss Seidel

On fait la même hypothèse que pour la méthode de Jacobi c'est-à-dire qu'on l'obtient en faisant la décomposition DEL et en prenant $P = D - L$ et $N = E$ et donc on trouve que $x^{(k+1)} = (P - L)^{-1}Ex^{(k)} + (D - L)b$.

Donc la matrice de Gauss Seidel est $B_{GS} = (D - L)^{-1}E$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x^{k+1} &= (P - L)^{-1}Ex^{(k)} + (D - L)^{-1}b \iff (D - L)x^{k+1} = Ex^k + b \\ &\implies Dx^{k+1} - Lx^{k+1} - Ex^{(k)} + b \end{aligned}$$

A la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$a_{ii} = x^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i.$$

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{cases}$$

code numerique pour la méthode de Gauss-Seidel

```

1 function x=Gauss_Seidel(A,b,x0,tol)
2     n=length(A);
3     xk=zeros(n,1);
4     x=x0;
5     while max(abs(x-xk))>tol
6         xk=x;
7         for i=1:n
8             som=0;
9             for j=1:i-1
10                som=som+A(i,j)*x(j);
11            end
12
13            for j=i+1:n
14                somm=somm+A(i,j)*xk(j);
15            end
16            x(i)=(1/A(i,i))*(b(i)-som-somm);
17        end
18    end

```

2.3.4 Méthode de Relaxation

Pour cette méthode, on utilise également, les même hypothèses que pour les autres méthodes et on introduit un paramètre réel w non nul.

Ainsi d'après les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, on peut définir $x^{(k+1)}$ comme une moyenne pondéré de $x^{(k)}$ et $x^{(k+1)}$ plus précisément pour w donnée .

En se basant de la méthode de Jacobi, on pose $x^{(k+1)} = (1 - w)x^{(k)} + w[D^{-1}(E + L)x^k + D^{-1}b]$.

Alors on a : $x^{(k+1)} = (1 - w)x^{(k)} + wD^{-1}(E + L)x^{(k)} + wD^{-1}b$
 $= [(1 - w)I_n + w[D^{-1}(E + L)]]x^{(k)} + D^{-1}b]$

avec $B_J = D^{-1}(E + L)x^{(k)} + D^{-1}b$ la matrice de Jacobi

La matrice d'itération correspondante est :

$B_{JOR} = (1 - w)I_n + wB_J$ et

$$x^{(k+1)} = (1 - w)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)}).$$

D'une façon analogue pour la matrice de de Gauss Seidel on a :

$$x^{(k+1)} = (1 - w)x^{(k)} + w[(D - L)^{-1}Ex^{(k)} + (D - L)^{-1}b].$$

Alors la matrice d'itération correspondante est

$$B_{SOR} = (1 - w)I_n + w \text{ avec } B_{GS} = (D - L)^{-1}Ex^{(k)} + (D - L)^{-1}b.$$

Donc l'algorithme de sur-relaxation est :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_i^{(k+1)} = (1 - w)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \end{cases}$$

```

function x=Relaxation(A,b,x0,w,tol)
    n=length(A);
    xk=zeros(size(b));
    x=x0;
    while max(abs(x-xk))>tol
        xk=x;
        for i=1:n
            som=0; somm=0;
            for j=1:i-1
                som=som+A(i,j)*x(j);
            end
            for j=i:n
                somm=(somm+A(i,j)*xk(j));
            end
            x(i)=(w/A(i,i))*(b(i)-som-somm)+xk(i);
        end
    end
end

```


Conclusion

Par une lecture profonde de plusieurs documents vis à vis de notre travail, on peut constater dans un premier temps qu'à part le théorème du rang, il a plusieurs outils utilisés pour déterminer le rang théoriquement.

Dans un deuxième temps nous avons pu déduire que les systèmes linéaires interviennent dans de nombreux contextes applications car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie.

C'est pourquoi dans notre présent travail, nous avons commencé le deuxième chapitre qui est le système linéaire avec une étude des équations linéaires et leur résolution par la méthode de Gauss.

De ce fait, on a pu tirer que l'application de la méthode exacte comme celle de Gauss est coûteuse à partir de certains ordre.

Cependant des méthodes numériques telles que la méthode de Richaudson, Jacobi, Gauss-Seidel, Sur-relaxation ont mis en pratique faciliter le travail à moins que certaines d'entre elles accumulent beaucoup d'erreurs dûs par l'approximation de l'ordinateur.

Pour cela, On choisit la méthode auquel l'erreur est négligeable comme celle de Gauss- Seidel qui converge est un peu plus vite que les autres.

En somme, plus la méthode possède moins d'erreur plus elle est efficace.

Bibliographie

- [1] <http://info-llg.fr>
- [2] Algèbre *P.Caldero*
- [3] Cours de *MRUMI* réécrit par *J.KULCSAR ESCPI-CNAM* Février 2005
- [4] ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE PC-PSI-PT De *Jean-Marie Monier*
- [5] ALGÈBRE LINÉAIRE POUR TOUS par *Bruno Vallette*
- [6] Systèmes linéaires *Bernard Ycart*
- [7] EXO7 Université Lille1
- [8] Université Paris Diderot (Paris 7) - IREM
- [9] Préparation à agrégation Interne 23 janvier 2017, Algèbre générale et Algèbre linéaire *Georges Skandalis*
- [10] Tuteuré de *Gilles Bailly Maitre*, Théorème du rang
- [11] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr> Université de Montpellier 2-2013