# 付録 5.B　フーリエ変換の反転公式

本文中でふれたフーリエ変換の反転公式が成り立つため補足条件を述べよう．それは Dini の条件とよばれ以下であたえられる．すなわち，

**Dini の条件**

関数 $f(x)$ は積分可能とする．$x$ を固定したとき，積分

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} dt$$

が任意の $\delta > 0$ に対して存在する．

微分可能な関数や，不連続関数であっても，不連続点が比較的「たちのよい」ものである区分的に微分可能な関数などは Dini の条件を満たす．この Dini の条件を用いると，フーリエ変換の反転公式はつぎのようになる．

**フーリエ変換の反転公式**

関数 $f(x)$ が全数直線上で絶対積分可能，すなわち，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right| dx < \infty$ であり，かつ点 $x$ において Dini の条件を満たすとする．このとき

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\lambda x} dx \tag{5B.1}$$

とおけば

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{j\lambda x} d\lambda. \tag{5B.2}$$

なお，この最後の式（5B.2）の定積分は主値といわれるもので，第 5.1 節のはじめに定義したいわゆる広義積分とはことなる．すなわち，ここでの積分は $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(a,\, b)$ としたとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \mathcal{F}(-a,\, a)$ として定義される．広義積分は，定積分の上端 $b$ と下端 $a$ がそれぞれ独立に $\infty$ と $-\infty$ に近づくときの極限であるのに対し，主値は，下端を $-a$ とし上端を $a$ とした $a \to \infty$ の極限である．