第 10 章

システムの状態空間表現

これまでに，時間領域表現として，システムの入出力関係をインパルス応答を用いて表現し，さらに再帰方程式（差分方程式）による表現も解説した（第 3 章）．また，広い意味での周波数領域表現として，システムの入出力関係を伝達関数を用いて表現し，また周波数伝達関数表現もあたえ，零点・極・ゲインによる表現も解説した（第 6 章と第 7 章）．本章では，さらに時間領域の別の表現として状態空間表現を簡単に紹介する．詳しいあつかいや証明などは参考文献をみられたい．本書の目的は，必要な数学からときおこし，フィルタの設計の初歩を解説することにある．その意味で本章は本筋ではない．しかし，多次元のシステムや確率的なふるまいをするシステムなど，よりすすんだシステムの設計や信号処理において状態空間表現はかなめとなる．ここでは，離散時間システムと連続時間システムについて，それらの状態空間表現を対照的に記述してみよう．

10.1　離散時間 LTI システムの状態空間表現

本節では，離散時間のシステムをあつかう．これまではシステムへの入力信号を多くの場合に $x[n]$ と表わしてきた．以下では入力を $u[n]$ で表わし，$x[n]$ という記号はほかの意味で用いる．

さて，システムは，入力 $u[n]$ を出力 $y[n]$ に変換する写像である．その写像の実現のために，状態空間表現では，システムは，各時刻 n において実ベクトルとして表現される**内部状態** $\boldsymbol{x}[n]$ をもつとする．そして，現在の入力 $u[n]$ と状態 $\boldsymbol{x}[n]$ に応じてつぎの時刻の状態 $\boldsymbol{x}[n+1]$ がきまると考える．また，出力 $y[n]$ は，現在の入力 $u[n]$ と状態 $\boldsymbol{x}[n]$ によりきまると考える（図 10.1）．

この考えのもとで，1 入力で 1 出力の離散時間線形時不変システムの状態空間表現の一般形は以下の 2 つの式であたえられる．すなわち，

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b}u[n], \quad \text{初期条件（I.C.）} \boldsymbol{x}[0] = \boldsymbol{x}_0, \tag{10.1}$$

$$y[n] = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[n] + d \cdot u[n], \tag{10.2}$$

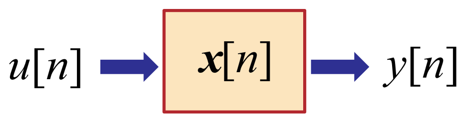

図 10.1: 離散時間システムの内部状態と入出力．

ここで，入力はスカラー $u[n]$ で，出力はスカラー $y[n]$ である．また，$\boldsymbol{x}[n]$ は m 次元**状態ベクトル**（state vector）とよばれ，システムの時刻 n における内部状態を表わす．$\boldsymbol{A}$ は $m \times m$ 行列で，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は m 次元ベクトル，d はスカラー，$^{\mathrm{T}}$ は行列の転置を表わす．m は伝達関数の次数に対応するものと考えてよい．式（10.1）はシステムの**状態方程式**とよばれ，式（10.2）は**出力方程式**とよばれる．状態方程式は，つぎの時刻の状態が，現在の状態と現在の入力できまることを表現している．また，出力方程式は，現在の出力が，現在の状態と現在の入力できまることを表わしている．行列 $\boldsymbol{A}$ やベクトル $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$，スカラー d は，一般には時刻 n ごとにことなった値をとってもよいが，システムが線形かつ時不変であるためにはそれら（の要素）は定数である．

状態方程式と出力方程式とをかきくだすと

$$\begin{pmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ \vdots \\ x_m[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_m[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} u[n],$$

$$y[n] = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_m[n] \end{pmatrix} + d \cdot u[n]$$

となる．

例．2 次元平面上で動くボールを考える．各時刻 n におけるこのボールの中心の x 座標と y 座標の和を出力するシステムを考えよう．時刻 n におけるボールの位置を座標 $(p_x[n],\ p_y[n])$ とし，速度を $(v_x[n],\ v_y[n])$ としよう．このシステムは，つぎの時刻 $n+1$ のボールの位置 $(p_x[n+1],\ p_y[n+1])$ を，現在の位置と速度から

$$\begin{pmatrix} p_x[n+1] \\ p_y[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x[n] \\ p_y[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x[n] \\ v_y[n] \end{pmatrix} \cdot \Delta t$$

と単純に定めるとする．ただし Δt は定数である．また，このボールの $n+1$ 時刻の速度には，現在の速度に信号 $(u[n],\ u[n])$ がくわえられるものとしよう．それに応じてこのシステムも $n+1$ 時刻のボールの速度を

$$\begin{pmatrix} v_x[n+1] \\ v_y[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x[n] \\ v_y[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u[n] \\ u[n] \end{pmatrix}$$

と定める．このシステムの状態を，ボールの位置と速度の値を用いて

$$\boldsymbol{x}[n] = \begin{pmatrix} p_x[n] \\ p_y[n] \\ v_x[n] \\ v_y[n] \end{pmatrix}$$

としよう．このもとでは，システムの状態方程式は

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b}u[n],$$

ただし

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．また，このシステムの出力は $p_x[n] + p_y[n]$ なので出力方程式は

$$y[n] = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}[n],$$

ただし，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ である．

システムの状態空間表現の特徴を述べよう．

（a）状態変数とよばれる変数 $\boldsymbol{x}[n]$ を介して，入力 $u[n]$ と出力 $y[n]$ が関係づけられている．
（b）状態空間表現は多入力多出力システム（マルチチャンネルシステム）に容易に拡張できる．
（c）1 つのシステムに対して，状態空間表現は状態変数の選び方に応じた数だけの表現法が存在する．それに対し，伝達関数などの外部記述は一意的に表現が定まる．
（d）システムの回路実現との関係が明解である．
（e）非線形システムや時変システム，さらには確率的なふるまいをするシステムへの自然な拡張が行なえる．

上記にあげた特徴をいくつか具体的にみてみよう．まず，（b）の多入力多出力システムの状態空間表現であるが，l 入力，k 出力の多変数システムは，次式のように状態空間表現できる．

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n],$$

$$\boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n],$$

ここで，$\boldsymbol{u}[n]$ は l 次元ベクトル，$\boldsymbol{y}[n]$ は k 次元ベクトルであり，$\boldsymbol{A}$ は $m \times m$ 行列，$\boldsymbol{B}$ は $m \times l$ 行列，$\boldsymbol{C}$ は $k \times m$ 行列，$\boldsymbol{D}$ は $k \times l$ 行列である．このようにすくなくともみかけは，1 入力 1 出力の状態空間表現とそれほどかわらず，簡単に多入力多出力の線形システムへと拡張ができる．それに対し，たとえば，伝達関数表現などでは，多入力多出力への拡張は困難である．

つぎに特徴の（c）である等価な状態空間表現について述べよう．$m \times m$ 正則行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて，状態変数を座標変換しよう．すなわち以下の関係で記述される新しい状態変数 $\boldsymbol{\xi}$ を導入する．

$$\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}[n].$$

このとき，この新しい状態変数 $\boldsymbol{\xi}$ に対して，つぎの状態空間表現が得られる．

$$\boldsymbol{\xi}[n+1] = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\xi}[n] + \bar{\boldsymbol{b}}u[n],$$

$$y[n] = \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}[n] + \bar{d} \cdot u[n],$$

ただし，$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{b}$，$\bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$，$\bar{d} = d$ である．

この座標変換を状態変数の**正則変換**という．正則変換では，システムの入出力には変化はない．このようにことなる正則行列ごとに状態変数の正則変換が存在し，変換ごとにことなる状態方程式と出力方

程式が得られる．しかし，入出力は同一であり，これらの「ことなる」表現はおなじシステムを記述している．それゆえ，変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}$ で結ばれた 2 つのシステムは**等価**（equivalent）とよび，それらを**等価システム**（equivalent system）とよぶ．このように，状態空間表現における状態変数の選択には自由度があり，システムの解析や設計に応じて適切なものを選ぶことができる．

最後の例として，特徴（e）のうち，時系列の確率的なふるまいを記述する自己回帰（AR）モデルの状態空間表現をあたえよう．次数 m の AR モデルは

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_m y[n-m] + \varepsilon[n]$$

であたえられる．ただし，a_1，$\cdots$，a_m は定数で，$\varepsilon[n]$ は平均が 0 で分散が σ_n^2 のガウス分布にしたがう確率変数で，$\varepsilon[n]$ と $\varepsilon[m]$，$n \neq m$，は独立である．このモデルは，時刻 n における信号の値 $y[n]$ がそれ以前の m 個の時点の値の線形和と，ガウス分布から生成されるノイズとの和で表わされることを意味する．さて，状態ベクトルを $\boldsymbol{x}[n] = \begin{pmatrix} y[n] & y[n-1] & \cdots & y_{n-m+1}[n] \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ と定義すると，

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\varepsilon[n]$$

という状態方程式が成り立つ．ただし

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & \cdots & & & a_m \\ 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．状態ベクトル $\boldsymbol{x}[n]$ の第 1 成分が $y[n]$ であるから，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ とおけば $y[n] = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[n]$ となり，観測方程式が得られる．

状態空間表現から伝達関数へ

状態空間表現で記述された線形時不変システムの伝達関数を求めてみよう．状態空間表現

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}[n+1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b} \cdot u[n], \\ y[n] &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[n] + d \cdot u[n] \end{aligned}$$

をもつシステムについて，両辺を z 変換すると，

$$\begin{aligned} z\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{b} \cdot U(z), \\ Y(z) &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(z) + d \cdot U(z) \end{aligned}$$

が得られる．ただし，$\boldsymbol{X}(z) = \mathcal{Z}\{\boldsymbol{x}[n]\}$ で，$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$，$U(z) = \mathcal{Z}\{u[n]\}$ であり，ベクトルの z 変換は，その要素ごとの z 変換を要素とするベクトルである．よって，システムの伝達関数は，

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = d + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{I} \text{ は単位行列}$$

である．とくに，$d = 0$ のシステムを**真にプロパー**とよび，そのときには伝達関数は，

$$H(z) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる．

伝達関数から状態空間表現へ

逆に，伝達関数で表現された線形時不変システムの状態空間表現を求めよう．システムは真にプロパーであると仮定し，その伝達関数は有理型で

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

とする．ただし，$D(z)$ と $N(z)$ は既約とする．

ある信号 $x_1[n]$ とその z 変換 $X_1(z) = \mathcal{Z}\left\{x_1[n]\right\}$ を導入して

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \frac{X_1(z)}{U(z)} \cdot \frac{Y(z)}{X_1(z)}$$

とする．このとき，$X_1(z)/U(z) = 1/D(z)$ とし，$Y(z)/X_1(z) = N(z)$ と対応させると，$D(z)X_1(z) = U(z)$, $Y(z) = N(z)X_1(z)$ である．この z 領域での表現を時間領域にもどすことを考える．z 変換の性質 2（時間シフト）より，z は時間領域では時間シフトオペレータ q に対応することがわかる．よって，第 3 章で導入したシフトオペレータ q に z を対応させて

$$\begin{cases} D(q)x_1[n] = u[n], & (10.3) \\ y[n] = N(q)x_1[n] & (10.4) \end{cases}$$

を得る．$D(q)$ は q に関して m 次であるから順次 $x_2[n]$, $x_3[n]$, $\cdots$, $x_m[n]$ を

$$\begin{cases} x_2[n] = qx_1[n] = x_1[n+1], \\ x_3[n] = qx_2[n] = x_2[n+1] = q^2 x_1[n], \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_m[n] = qx_{m-1}[n] = x_{m-1}[n+1] = q^{m-1}x_1[n] \end{cases} \tag{10.5}$$

とおき，状態ベクトルを $\boldsymbol{x}[n] = \begin{pmatrix} x_1[n] & \cdots & x_m[n] \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ と定義すれば，式（10.3）より

$$(q^m + a_{m-1}q^{m-1} + \cdots + a_1 q + a_0)x_1[n] = u[n]$$

となる．よって

$$q^m x_1[n] = qx_m[n] = -a_0 x_1[n] - a_1 x_2[n] - \cdots - a_{m-1}x_m[n] + u[n] \tag{10.6}$$

となるから，式（10.5）と（10.6）をまとめることにより状態方程式

$$\begin{pmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ \vdots \\ \\ x_m[n+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \\ \vdots \\ x_m[n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u[n]$$

を得る．また出力方程式は，式（10.4）と（10.5）・（10.6）から

$$
\begin{aligned}
y[n] &= b_{m-1}q^{m-1}x_1[n] + b_{m-2}q^{m-2}x_1[n] + \cdots + b_1 q x_1[n] + b_0 x_1[n] \\
&= b_{m-1}x_m[n] + b_{m-2}x_{m-1}[n] + \cdots + b_1 x_2[n] + b_0 x_1[n] \\
&= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_m[n] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．上の形の状態方程式と出力方程式は**可制御正準形**とよばれる．可制御正準形における状態ベクトルの次元は伝達関数 $\boldsymbol{H}(z)$ の分母の多項式の次数 m と等しく，$\boldsymbol{H}(z)$ の分母の多項式の係数が行列 $\boldsymbol{A}$ の一番下の行にあらわれている．また，$\boldsymbol{H}(z)$ の分子多項式の係数 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ に対応する行ベクトルにあらわれている．

たとえば伝達関数が

$$
H(z) = \frac{2z}{4z^2 - 3z - 1} = \frac{\frac{1}{2}z}{z^2 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}}
$$

であるシステムに対しては，$a_0 = -\dfrac{1}{4}$，$a_1 = -\dfrac{3}{4}$，$b_0 = 0$，$b_1 = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ d = 0
$$

となる．

本節の最後に，状態空間表現されたシステムの安定性判定条件をあげる．

定理 10.1.

離散時間 LTI システムが

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}[n+1] &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b}u[n], \\
y[n] &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}[n] + d \cdot u[n]
\end{aligned}
$$

と状態空間表現されているとき，このシステムが安定であるための必要十分条件は，行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の絶対値が 1 未満であることである．

例題 10.1.

次式のように状態空間表現される離散時間 LTI システムの安定性を調べよ．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}[n+1] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.9 & -2 & -0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}[n] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u[n], \\
y[n] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}[n].
\end{aligned}
$$

[解答例]

行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は 0.3846, $-0.4423 \pm j1.4644$ である．このうち $-0.4423 \pm j1.4644$ の絶対値は 1 より大きい．それゆえこのシステムは不安定である．

演習 10.1.
つぎの伝達関数をもつシステムについて以下の問いに答えよ．

$$H(z) = \frac{2z}{4z^2 - 3z - 1}.$$

（1）第 6 章定理 6.1 を用いて，このシステムが安定であるかどうか調べよ．
（2）定理 10.1 を用いて，このシステムが安定であるかどうか調べよ．

[解答例]

（1）伝達関数の分母は $4z^2 - 3z - 1$ だから，このシステムの安定性は $4z^2 - 3z - 1 = 0$ の根を調べればよい．$4z^2 - 3z - 1 = (4z + 1)(z - 1) = 0$ より根は $z = -\dfrac{1}{4}$ と $z = 1$ である．よって本文第 6 章定理 6.1 よりこのシステムは不安定である．
（2）本文中であたえたようにこのシステムの状態方程式は

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}[n] + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u[n]$$

である．本文第 10 章定理 10.1 を適用するため，行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ の固有値を求める．$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 0$ を解くと $\lambda = -\dfrac{3}{4}$, 1．よって本文第 10 章定理 10.1 よりこのシステムは不安定であることがわかる．

10.2　連続時間 LTI システムの状態空間表現

連続時間 LTI システムの状態空間表現は，離散時間とおなじく**状態ベクトル** $\boldsymbol{x}(t)$ を用いることにより以下の（10.7）と（10.8）で表わされる．

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t),\ \text{初期条件（I.C.）}\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{10.7}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) + d \cdot u(t) \tag{10.8}$$

ただし，入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ はスカラー値関数で，$\boldsymbol{x}$ は m 次元ベクトル，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は m 次元定数ベクトル，d はスカラー定数である．また，ベクトルの時間微分は，ベクトルの各要素の時間微分を要素とするベクトルである．式（10.7）は**状態方程式**と，式（10.8）は**出力方程式**とよばれる．離散時間システムでは，状態方程式の左辺はつぎの時刻の状態であったが，連続時間システムでは，それは現時刻での状態の変化率であることに注意してほしい．

例．2 次元平面上を動くボールの中心の x 座標と y 座標の和を出力するシステムを考える．時刻 t におけるボールの位置座標を $(p_x(t),\ p_y(t))$ とする．ボールの速度は $\left(\dfrac{dp_x(t)}{dt},\ \dfrac{dp_y(t)}{dt}\right)$ である．このシステムには入力 $(u(t),\ u(t))$ がくわえられ，この入力と速度の $-k$ 倍，$\left(-k\dfrac{dp_x(t)}{dt},\ -k\dfrac{dp_y(t)}{dt}\right)$，との和がボールの加速度 $\left(\dfrac{d^2p_x(t)}{dt^2},\ \dfrac{d^2p_y(t)}{dt^2}\right)$ に等しくなるとする．このとき状態ベクトルとして

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ \dfrac{dp_x(t)}{dt} \\ \dfrac{dp_y(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

をとろう．すると，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dp_x(t)}{dt} \\ \dfrac{dp_y(t)}{dt} \\ \dfrac{d^2p_x(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^2p_y(t)}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ \dfrac{dp_x(t)}{dt} \\ \dfrac{dp_y(t)}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

すなわち，

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}\cdot u(t),$$

ただし，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．また出力は，$p_x(t) + p_y(t)$ だから

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

である．なお，物理的にいえば，この例における状態方程式は，単位質量をもつボールが速度に比例する空気抵抗をうけながら外力 $u(t)$ のもとで運動していることを表わしている．

連続時間 LTI システムの状態空間表現においても離散時間システムのそれと同様に，状態の選び方は対象とするシステムについて一意ではなく，その解析や設計目的に便利なように選ぶことができる．いま，正則行列 T を用いてたがいに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T\xi}$ で結ばれている 2 つの状態変数 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\xi}$ に対し，伝達関数はどうなっているかを調べよう．システム S を

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \tag{10.9}$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + d\cdot u \tag{10.10}$$

とし，さらに変換

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}(t) \tag{10.11}$$

で $\boldsymbol{x}$ と結ばれている状態 $\boldsymbol{\xi}$ を用いたシステムの記述 $\bar{S}$ を

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\xi} + \bar{\boldsymbol{b}}u, \tag{10.12}$$

$$y = \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} + \bar{d}\cdot u \tag{10.13}$$

としよう．式（10.11）を式（10.9）と式（10.10）に代入すれば

$$\boldsymbol{T}\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}\cdot u.$$

よって

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u, \tag{10.14}$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi} + d\cdot u \tag{10.15}$$

となり，式（10.12）と（10.13），それと式（10.14）と（10.15）の比較から，それぞれの係数行列間には

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, & \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}, \\ \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}, & \bar{d} = d \end{cases} \tag{10.16}$$

の関係があることがわかる．このように，変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}$ によって結ばれたシステム S と $\bar{S}$ はたがいに等価（equivalent）であるとよばれ，それらを**等価システム**（equivalent systems）とよぶ．

さて，つぎに等価なシステムの外部記述を求めてみよう．S の伝達関数 $\bar{H}(s)$ に式（10.16）を適用すれば

$$\begin{aligned}\bar{H}(s) &= \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{A}})^{-1}\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{d} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} + d \\ &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} + d = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d \\ &= H(s)\end{aligned}$$

となり，等価なシステムの伝達関数は一致することがわかる．したがって，1 つのシステムに対して，状態の選び方をかえても，それらがたがいに変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}$ で結ばれているかぎり，それらはおなじ伝達関数 $H(s)$ をあたえる．

状態空間表現から伝達関数へ

式（10.7）と（10.8）の状態空間表現で表わされる LTI システムの伝達関数表現を求めてみよう．各変数がラプラス変換可能であるとして，$\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}(t)\} = \boldsymbol{X}(s)$，$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$，$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ とおいて状態方程式をラプラス変換すれば

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{b}U(s).$$

ただし，ベクトルのラプラス変換は，その要素ごとのラプラス変換を要素とするベクトルである．よって

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s).$$

伝達関数は初期条件を 0 とおいて定義され，$\boldsymbol{x}(0) = 0$ とおけば

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s) \tag{10.17}$$

を得る．一方，出力方程式をラプラス変換すれば

$$Y(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(s) + d \cdot U(s)$$

であるから，この式に式（10.17）を代入すれば

$$Y(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}U(s) + d \cdot U(s)$$

となり，これよりこの線形時不変システムの伝達関数として

$$H(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d$$

を得る．多くの場合 $d = 0$ であり（このときシステムは**真にプロパー**といわれる），出力方程式は $y(t) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(t)$ となり，また伝達関数は

$$H(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる．

伝達関数から状態空間表現へ

最後に，伝達関数から状態方程式と出力方程式を求める 1 つの方法を記そう．

いま，システムを真にプロパーと仮定し，その伝達関数を

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

とする．ただし $D(s)$ と $N(s)$ は既約とする．

実関数 $x_1(t)$ のラプラス変換 $X_1(s) = \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}$ を導入して

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{X_1(s)}$$

と考え，$X_1(s)/U(s) = 1/D(s)$，$Y(s)/X_1(s) = N(s)$ と対応させる．すなわち，$D(s)X_1(s) = U(s)$，$Y(s) = N(s)X_1(s)$ である．この表現を時間領域にもどそう．ラプラス変換の性質 6（時間領域における微分）より，s は時間領域では微分作用素[*1]に対応することがわかる．それゆえ，s を微分作用素 $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ に対応させて

$$\begin{cases} D(p)x_1(t) = u(t), \\ y(t) = N(p)x_1(t) \end{cases} \tag{10.18}$$

[*1] 微分作用素 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ とは，微分可能な関数の集合から関数の集合への写像であり，t の関数 $x(t)$ に対して，その導関数 $\dfrac{dx(t)}{dt}$ を対応させる．

を得る．$D(p)$ は p に関して m 次であるから順次 $x_2(t)$, $x_3(t)$, $\cdots$, $x_m(t)$ を

$$\begin{cases} x_2(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = px_1(t), \\ x_3(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = p^2x_1(t), \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_m(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_{m-1}(t) = p^{m-1}x_1(t) \end{cases} \tag{10.19}$$

とおいて，状態ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_m(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ と定義すれば，式（10.18）より

$$(p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0)x_1(t) = u(t).$$

よって

$$\frac{\mathrm{d}^m x_1(t)}{\mathrm{d}t^m} = p^m x_1(t) = px_m(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{m-1}x_m(t) + u(t) \tag{10.20}$$

とかけるから，式（10.19）と（10.20）をまとめれば，状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & & -a_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

を得る．また，出力方程式は式（10.18）と（10.19),（10.20）より

$$\begin{aligned} y(t) &= b_{m-1}p^{m-1}x_1(t) + b_{m-2}p^{m-2}x_1(t) + \cdots + b_1px_1(t) + b_0x_1(t) \\ &= b_{m-1}x_m(t) + b_{m-2}x_{m-1}(t) + \cdots + b_1x_2(t) + b_0x_1(t) \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．上であたえた形の状態方程式と出力方程式は**可制御正準形**とよばれるもので，状態ベクトルの次元は $H(s)$ の分母の多項式の次数 m に等しく，また，$H(s)$ の分母の多項式の係数が $\boldsymbol{A}$ に対応する行列の一番下の行に，また，分子多項式の係数が $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ に対応する行ベクトルにあらわれていて，ほかの要素はすべて 0 と 1 からなっていることに注意してほしい．