付録 4.A　フーリエ級数の収束性

関数 $f : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$ と $f_i : [a,\ b] \to \boldsymbol{R}$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,$ を考える．関数の列 f_1，f_2，f_3，$\cdots$ がある関数に収束するとはどういう意味であろうか．つまり $\lim_{i\to\infty} f_i \to f$ とは何を意味するのか，これについて説明しよう．実は，関数の列の関数への収束にはいくつかの定義があり，それぞれ意味合いがだいぶことなる．まず，**各点収束**がある．それは，すべての $t \in [a,\ b]$ に対し，$f_1(t)$，$f_2(t)$，$f_3(t)$，$\cdots \to f(t)$，つまり

$$\forall t \in [a,\ b],\quad \lim_{i\to\infty} \left| f_i(t) - f(t) \right| \to 0$$

と定義される．この収束は，関数列が定義域中のどの点 t に対しても，その値の列がある特定の関数の値に収束することを意味している．

また，応用上よく用いられるものに**平均 2 乗収束**がある．それは

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^b \left\{ f_i(t) - f(t) \right\}^2 dt \to 0$$

と定義される．定義域の各点 t で収束するとはかぎらず差の 2 乗の積分が 0 になれば $f_i(t)$ は $f(t)$ に収束すると考えるのである．

このような関数列の収束の定義のもとで以下のフーリエ級数の収束定理が成り立つことが知られている．

フーリエ級数の収束定理.

（a）関数 $x(t)$ がなめらか（各点で導関数が存在し連続かつ有界）ならば，フーリエ級数は $x(t)$ に各点収束する．すなわち，すべての $t \in [a,\ b]$ に対し $\lim_{i\to\infty} x_i(t) = x(t)$ となる．

（b）関数 $x(t)$ が 2 乗可積分ならば，フーリエ級数は $x(t)$ に平均 2 乗収束する．すなわち，

$$\int_a^b \{x(t)\}^2 dx < 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \int_a^b \left\{ x_i(t) - x(t) \right\}^2 dx \to 0.$$

ただし，厳密にはここの積分はルベーグ積分といわれるものである．

例.　信号 $x(t)$ に対し，そのフーリエ係数 a_k，b_k で構成した関数列を $x_0(t)$，$x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$ とする．ただし，

$$x_i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{i} \Big(a_k \cos(k\Omega_0 t) + b_k \sin(k\Omega_0 t) \Big)$$

である．和の上限が i となっていることに注意してほしい．方形波に対する関数列の最初の 6 つが図 4.1 の (a) から (f) であり，のこぎり波に対するそれらが図 4.3 の (a) から (f) である．方形波やのこぎり波は連続ではないのでフーリエ級数は各点収束しない．つまりのこぎりの歯の「とがった」ところでは収束しない．しかし，のこぎり波は任意の有限区間で 2 乗積分が存在するので，そのフーリエ級数は平均 2 乗収束する．

なお，フーリエの収束定理（a）の各点での収束に関しては，関数 $x(t)$ の条件を弱めることができる．すなわち，のこぎり波や方形波のように不連続関数であっても，関数値が有限の値にとどまり，かつ不連続点が比較的「たちのよい」ものであるなら，連続点では $x(t)$ に収束し，不連続点では不連続の跳躍の $\frac{1}{2}$ の値に収束することが知られている．