7.A.2　ラプラス変換の性質

性質 1.　（線形性）

$$x_1(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) \quad R_1\text{と示される ROC をもち}$$

しかも

$$x_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s) \quad R_2\text{と示される ROC をもつ}$$

ならば

$$ax_1(t) + bx_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} aX_1(s) + bX_2(s) \quad R_1 \cap R_2\text{を含む ROC をもつ.}$$

性質 2.　（時間のシフト）

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R$$

ならば

$$x(t - t_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{st_0} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R.$$

性質 3.　（s 領域におけるシフト）

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R$$

ならば

$$e^{s_0 t} x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s - s_0), \quad \mathrm{ROC}\, R_1 = R + \mathrm{Re}(s_0).$$

性質 4.　（時間の拡大・縮小）

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R$$

ならば

$$x(at) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \mathrm{ROC}\, R_1 = \frac{R}{a}.$$

性質 5.　（たたみこみ）

$$x_1(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s), \quad \mathrm{ROC} = R_1$$

$$x_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s), \quad \mathrm{ROC} = R_2$$

ならば

$$x_1(t) * x_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) X_2(s), \quad R_1 \cap R_2\text{を含む ROC.}$$

性質 6.　（時間領域における微分）

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R$$

ならば

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s), \quad R \text{ を含む ROC}.$$

性質 7. （s 領域における微分）
　ラプラス変換の両辺を微分すれば

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt,$$
$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t)e^{-st}dt$$

である．よってつぎの公式を得る．

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}, \quad \mathrm{ROC} = R.$$

性質 8. （時間領域における積分）

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \mathrm{ROC} = R$$

ならば

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s), \quad \mathrm{ROC} \text{ は } R \cap \left\{\mathrm{Re}(s) > 0\right\} \text{ を含む}.$$