付録 7.B　連続時間 LTI システムの微分方程式による表現

線形定係数微分方程式で表現されるシステムに関して，まず例からはじめる．入力と出力とが方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{7B.1}$$

で関係しているシステムを考えよう．システムの出力を入力の関数として表わすためにはこの微分方程式をとかなければならない．ここではこの例の方程式を特殊な入力信号

$$x(t) = A(\cos\omega_0 t)u(t) \tag{7B.2}$$

に関して考える．ただし，A は実定数で，$u(t)$ は連続時間単位ステップ信号である．

式（7B.1）の完全解は，**特殊解** $y_p(t)$ と**一般解** $y_h(t)$ との和である．

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{7B.3}$$

ここで特殊解 $y_p(t)$ は式（7B.1）を満たし，一般解 $y_h(t)$ は同次微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \tag{7B.4}$$

の解である．いまの場合，特殊解 $y_p(t)$ は

$$y_p(t) = \frac{A}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t - \theta), \quad t > 0 \tag{7B.5}$$

であたえられる．ここで

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

である．

また，式（7B.4）の一般解 $y_h(t)$ は，任意の B に対して Be^{-2t} である．これと式（7B.3）と式（7B.5）から，$t > 0$ に対する微分方程式のつぎの解を得る．

$$y(t) = Be^{-2t} + \frac{A}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t - \theta), \quad t > 0. \tag{7B.6}$$

出力を入力の関数として完全に記述するためには，微分方程式に関して初期条件を必要とする．この例では，ある瞬間 t における $y(t)$ の値を定める必要がある．これによって B が定まり，あらゆる時刻 t に対しても $y(t)$ が定まることになる．たとえば

$$y(0) = y_0 \tag{7B.7}$$

とすれば式（7B.6）より

$$B = y_0 - \frac{A\cos\theta}{\sqrt{4+\omega_0^2}} \tag{7B.8}$$

を得る．したがって $t > 0$ に対して次式が得られる．

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{A}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\Big(\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta\Big), \quad t > 0.$$

$t < 0$ に対しては $x(t) = 0$ である．したがって $y(t)$ は同次微分方程式（7B.4）を満たす．すでにわかっているように，この方程式の解は Ce^{-2t} という形である．式（7B.7）の初期条件を用いて次式を得る．

$$y(t) = y_0 e^{-2t}, \quad t < 0.$$

$t > 0$ と $t < 0$ の解をあわせ

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{A}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\Big(\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta\Big)u(t) \tag{7B.9}$$

を得る．

ただし $y_0 \neq 0$ であれば，このシステムは**線形ではない**．逆に初期条件 y_0 が 0 であれば**線形になる**．

またこのシステムが時不変であるためには，**初期休止条件**「ある t_0 が存在して，$t \leq t_0$ で入力 $x(t) = 0$ であるならば，$t \leq t_0$ で $y(t)$ もまた 0 でなければならない」が必要である．このことを理解するために，式（7B.1）で記述され，初期に休止しているシステムを考えよう．$t \leq t_0$ で 0 である入力 $x_1(t)$ に対する応答を $y_1(t)$ とする．すなわち

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t), \tag{7B.10}$$

$$y_1(t_0) = 0. \tag{7B.11}$$

つぎに入力

$$x_2(t) = x_1(t-T)$$

を考える．時間 $t \leq t_0 + T$ において $x_2(t)$ は 0 である．したがってこの入力に対する応答 $y_2(t)$ は，微分方程式

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t) \tag{7B.12}$$

と，初期条件

$$y_2(t_0 + T) = 0 \tag{7B.13}$$

を満たさなければならない．式（7B.10）と式（7B.11）を用いれば $y_1(t-T)$ が式（7B.12）と式（7B.13）を満たすことはただちにわかる．したがって

$$y_2(t) = y_1(t-T)$$

である．

さて，n 階の線形定係数微分方程式は一般につぎの式であたえられる．

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \tag{7B.14}$$

この方程式の解 $y(t)$ は 2 つの部分，すなわち一般解と特殊解とからなる．また，微分方程式（7B.14）では一般に，ある時刻において

$$y(t),\ \frac{dy(t)}{dt},\ \cdots,\ \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

の値に対応する初期条件が必要になる．さらに，式（7B.14）とこれらの初期条件で規定されるシステムは，これらの初期条件が**すべて** 0 であるときにかぎり線形になる．また，システムが線形かつ時不変であるためには，初期休止を仮定しなければならない．すなわち，「ある t_0 が存在して，$t \leq t_0$ で $x(t) = 0$ ならば，$t \leq t_0$ で $y(t) = 0$」を仮定する．したがって，$t > t_0$ における応答は，初期条件

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

のもとで微分方程式（7B.14）をといて得られる．この場合，システムは線形で時不変である．