

付録 1.C オイラーの公式を用いた三角関数の公式の導出

オイラーの公式から出発して，定理 1.3 の指数法則を認めれば三角関数に関する 3 倍角の公式などが導ける．この付録では，そのいくつかの例を示そう．

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y).\end{aligned}$$

これより，最左辺と最右辺の実部と虚部をみくらべて，三角関数の加法定理

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{cases}$$

が導かれる．さらに，たとえば，

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x &= e^{i3x} = (e^{ix})^3 \\ &= (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x)\end{aligned}$$

より

$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x, \\ \sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x. \end{cases}$$

すなわち，3 倍角の公式が導かれる．