付録 1.A　複素数を項とする無限級数

3 章以降では, 複素数を項とする無限級数が重要な役割りを演じるので, ここでそれについてまとめておこう．まず，級数の収束の判定に根幹をなす複素数の絶対値に関する性質を述べよう．すなわち

定理 1A.1

z と w を複素数とする．このとき，

（a）$|zw| = |z|\,|w|$.　（b）$|z+w| \le |z| + |w|$.　（c）$\big||z| - |w|\big| \le |z-w|$.

[証明]

（a）定理 1.1（a） の $|z|^2 = z\bar{z}$ より，$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$.

（b）一般に $\mathrm{Re}(z) \le |z|$ であるから

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$
$$= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \le |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

（c）（b）より，$|z| = |z - w + w| \le |z - w| + |w|$ であり，これから $|z| - |w| \le |z - w|$ がいえる．同様に $|w| = |w - z + z|$ から出発すると $|w| - |z| \le |w - z|$ を得る．ゆえに $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$．証明終わり．

上記をくりかえし用いれば，z_i，$i = 1$，2，$\cdots$，n，を複素数として，

$$\left|z_1 z_2 \cdots z_n\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right|\cdots\left|z_n\right|,$$

$$\left|z_1 + z_2 + \cdots + z_n\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right| + \cdots + \left|z_n\right|$$

を得る．したがって，たとえば z と a_0，$\cdots$，a_n を複素数として，

$$\left|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \le \left|a_0\right| + \left|a_1\right|\left|z\right| + \left|a_2\right|\left|z\right|^2 + \cdots + \left|a_n\right|\left|z\right|^n$$

などが成り立つ．

つぎに複素数の列 $\{z_n\} = z_1$，z_2，$\cdots$ の収束について説明しよう．複素数列 $\{z_n\}$ が複素数 w に**収束**するということは，

$$\lim_{n\to\infty}\left|z_n - w\right| = 0$$

として定義される．すなわち，n が大きくなるにしたがって，z_n と w の距離（絶対値）がいくらでも 0 に近づくことをいう．これは，$z_n - w$ の実部と虚部がそれぞれに $n \to \infty$ の極限で 0 に収束することを意味する．

定理 1A.1（c）より，$\big||z_n| - |w|\big| \le |z_n - w|$ であるから，$\lim_{n\to\infty} z_n = w$ ならば $\lim_{n\to\infty}|z_n| = w$ となる．すなわち，複素数列 $\{z_n\}$ が収束するならば，実数列 $\{|z_n|\}$ も収束して，$\lim_{n\to\infty}|z_n| = w = \left|\lim_{n\to\infty} z_n\right|$ となる．

さて，複素数を項とする無限級数を考えよう．無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

のその初項から第 n 項までの部分和 $w_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ がつくる複素数列 $\{w_n\} = w_1$，w_2，$\cdots$ が収束するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**収束**するといい，$w = \lim_{n\to\infty} w_n$ をこの無限級数の和とよんで

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$$

とかく．$\{w_n\}$ が収束しないとき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**発散**するという．

また，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対し，各項の絶対値をとった級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ を考える．いま，$\sigma_n = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ とおけば，$m < n$ のとき，

$$|w_n - w_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_n \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_n| = \sigma_n - \sigma_m$$

となる．よって，下に示すコーシーの収束判定法により，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ も収束する．このとき $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**絶対収束**するという．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束するとき，

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{m\to\infty} w_m \right| = \lim_{m\to\infty} |w_m| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

となる．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ は，収束するか $+\infty$ に発散するかのいずれかであるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

は $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ が絶対収束することを意味する．

定理 1A.2（コーシーの収束判定法）

複素数列 $\{z_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の正の実数 ε に対して 1 つの自然数 n_0 を定めて

$$n > n_0 \text{ かつ } m > n_0 \text{ ならば } |z_n - z_m| < \varepsilon$$

となるようにできることである．

この定理の証明はいわゆる実数の連続性に直結しており，複雑ではないが概念の把握がむずかしいのでここでは省略する．高木貞治「解析概論」岩波書店や，小平邦彦「解析入門」岩波書店などを参照してほしい．

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束に関してはつぎのアーベルの定理が基本である．

定理 1A.3（アーベルの定理）

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するならば，$|z| < |z_0|$ なるすべての z で絶対収束する．

[証明]

仮定により，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ は収束するから $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$．ゆえに，$M$ を任意の正数とするとき，十分大きい M に関して $|a_n z_0^n| < M$ となる．いま，$0 < \theta < 1$ なる θ を考えると，$|z| \leq \theta |z_0|$ ならば

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \theta^n \leq M\theta^n$$

であるから

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k z^k| \leq \frac{M(1-\theta^n)}{1-\theta}.$$

この右辺は $n \to \infty$ で $M/(1-\theta)$ になる．よって，べき級数は閉領域 $|z| \leq \theta |z_0|$ で絶対収束する．証明終わり．

アーベルの定理の対偶により，べき級数がある z に対して発散すれば，絶対値が $|z|$ より大きい z' に対しても発散する．よってべき級数が収束する z の絶対値 $|z|$ の値に上限[*1]がある．それを r とすれば，べき級数は，原点を中心とする半径 r の円内（$|z| < r$）にある z に対して収束し，その外（$|z| > r$）にある z に対して発散する．なお半径 r の円周上の点については，収束することもあり，発散することもある．たとえば，収束半径が 1 の $1 + z + z^2 + \cdots$ は $|z| = 1$ の各点で発散し，$1 + \dfrac{z}{1} + \dfrac{z^2}{2} + \cdots$ はやはり収束半径が 1 で $z = 1$ のほかは収束，$1 + \dfrac{z}{1^2} + \dfrac{z^2}{2^2} + \cdots$ は収束半径はおなじ 1 であるが $|z| = 1$ のすべての点で収束する．

本節の最後に等比数列の和についてまとめよう．初項 a，公比 z の等比数列 $\{a, az, az^2, \cdots\}$ の和はつぎのようになる．ただし a，z は複素数であり，N は 1 以上の整数である．

a）第 N 項までの和：

$$\sum_{n=0}^{N-1} az^n = \frac{a(1-z^N)}{1-z}, \quad z \neq 1.$$

b）無限等比級数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

例題 1A.1.

$$2 + 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ を求めよ．}$$

[解答例]

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{1-\dfrac{1}{3}} = \frac{2}{\dfrac{3-1}{3}} = 3$$

演習 1A.1.

（1）$\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} ar^n = \frac{a(1-r^N)}{1-r}, \quad r \neq 1$ を証明せよ．　（2）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1$ を証明せよ．

（3）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ を計算せよ．

[解答例]

（1）$S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} ar^n$ とおく．$S_N - rS_N = a - ar^N$．よって $S_N = a\dfrac{(1-r^n)}{1-r}$．

（2）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} a\frac{1-r^N}{1-r} = \frac{a}{1-r}$．

（3）（2）の結果に $a = 1$，$r = \dfrac{1}{2}$ を代入して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$．

[*1] 実数 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 A に属する数がすべて 1 つの数 M よりも大きくないとき A は上に**有界**であるという．上に有界な集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ の**上限**とはつぎの（1）と（2）を満たす数である．

（1）A に属するすべての数 x に関して $x \leq a$．

（2）$a' < a$ とすれば，$a' < x$ なるある数 x が A に存在する．

有界な集合 A の上限はかならず存在する（ワイエルシュトラウスの定理）．その証明も実数の連続性が直接関与する．なお，A の上限は存在しても最大値はないときがある．たとえば，開区間 $I = (0, 1)$ を考えると，その上限は 1 であるが，1 は $(0, 1)$ には属さないので I の最大値ではない．なお，集合 $A \subset \boldsymbol{R}$ の要素すべてが 1 つの数 L よりも小さくないとき A は下に有界であるという．下に有界な集合 A の**下限**は，上限の定義（1）と（2）における不等号を反対にしたもので定義される．