20.09.21 Шапошников лекция 1

diensmatan@mail.ru

Хотим решить: $\begin{cases} F(x, u, \nabla u, D^2 u) = 0 \\ u = ? \end{cases}$

Среди примеров: $\Delta u = 0$ – ур-е теплопроводности

: $|\nabla u| = 1$ – пример нелинейного УЧП.

Что делать с $\Delta u = 0$?

Можно так: $\int u \cdot \Delta\varphi \, dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty$.

Т.е. через обобщенные ф-ции

Но как перебрасывать производную если стоит такое: $|\nabla u|^2$? $\int H(\nabla u) \varphi \, dx$

Ответ: 1) надо в основу "решения" положить принцип максимума

2) надо использовать метод исчезающей вязкости

он состоит в этом: было ур-е $H(x, \Delta u) = 0$.

а надо заменить его на такое: $\varepsilon \Delta u + H(x, Du) = 0$.

Например: когда стоит ввести это слагаемое вязкости. слагаемое отвечает за взаимодействие

Пусть частицы едут по прямой

$u(t, x)$ – скорость движения без взаимодействия

по закону Ньютона:

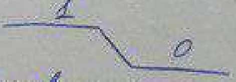
$\dot{x}(t) = u(t, x(t))$

$\ddot{x}(t) = u_t + u_x \cdot \dot{x} = u_t + u_x \cdot u$.

Но если взаимодействия нет, то $\ddot{x}(t) = 0$,

и получается ур-е Хопфа: $\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

Вот если такое u_0:



Поскольку задние скоро нагонят передних, то возникнет разрыв, т.е. $u(t, x)$ станет разрывным.

Почему так произошло?

Ну т.к. мы когда ур-е выводили – предполагали отсутствие взаимодействия, а тут оно – налицо (ну частицы столкнулись)

Что делать: написать так: $u_t^\varepsilon - \varepsilon \cdot u_{xx}^\varepsilon + \left(\frac{(u^\varepsilon)^2}{2}\right)_x = 0$

$\Leftrightarrow u_t^\varepsilon - \varepsilon \cdot u_{xx}^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot u_x^\varepsilon = 0$.

Тогда у нового ур-я будет непрер. решение.

А метод исчезающей вязкости: $u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u$, где $u = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon$

Рассм. ур-е в общем смысле (чтобы не требовать слишком много при переходе к пределу)

$$\boxed{\iint -u^\varepsilon \varphi_t + \varepsilon \cdot u^\varepsilon \cdot \varphi_{xx} - \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} \cdot \varphi_x \, dx dt = 0.}$$

– у этого есть ур-е в кн. Кружкова

тут мы имели возможность перебросить производную на тестовую ф-цию. А что делать, если это сделать не получается?

Программа: 1. ПМ = принцип максимума
2. Метод исчезающей вязкости
Ур-я 1 порядка
принцип динамич. программирования
! 3. ПДП и ур-я Гам.-Якоби-Беллмана
4. Вязкостные решения ур-я I порядка
5. Общая теория вязкостных решений.
↳ Принцип сравнения: обобщение принципа максимума
↳ Метод Перрона для построения решений.

2 кр: 1) конец октября
2) начало декабря > письменное домашнее
+ коллоквиум: начало ноября — устный по теор.
+ экзамен — устный — середина декабря / январь

Принцип Максимума

e.g. оператор Лапласа
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} \ ; \ x \in \mathbb{R}^d \quad \text{- это эллиптич. оператор}$$

Теорема: Пусть Ω — это огранич. область в $\mathbb{R}^d$,
$u \in C^2_{(\Omega)} \cap C(\bar{\Omega})$.
Если $\Delta u \geq 0$ в Ω и $u|_{\partial\Omega} \leq 0$, то $u \leq 0$ в Ω.

Док-во: 1) Пусть сначала $\Delta u > 0$ в Ω.
У нас ф-ция гладкая в огр. области
$\Rightarrow$ достигает максимума
Если максимум на границе — то всё доказано. — т.к. $u|_{\partial\Omega} \leq 0$ всюду
$\Rightarrow$ Пусть $x_0 \in \Omega$ — точка максимума и не $\bar{\Omega}$.
$\Rightarrow$ раз это так, то $\underbrace{D^2 u(x_0)}_{\text{гессиан}} \leq 0$.
Но $\Delta u(x_0) = tr(D^2 u(x_0)) \leq 0$. (Матрица $A \leq 0 \Leftrightarrow \langle A\xi, \xi \rangle \leq 0 \ \forall \xi$)
Но раз матрица ≤ 0, то и след её ≤ 0. (привели к диаг. виду, на диаг. знач ≤ 0 т.к. матрица ≤ 0.)
Но мы предположили, что $\Delta u > 0$ — противоречие с $\Delta u(x_0) \leq 0$. ~~максимум на ... $\Delta u \leq 0$~~
$\Rightarrow$ максимума ~~на границе~~ внутри быть не может
$\Rightarrow$ он на границе — а для этого всё доказано.

2) Пусть $\Delta u \geq 0$ (т.е. не верно, что $\Delta u > 0$)

рассм. $v(x) = u(x) + \varepsilon (x_1^2 - c)$, где $c = \max\limits_{\bar{\Omega}} x_1^2$.
$\Rightarrow$ 1) $v|_{\partial\Omega} \leq 0$
2) $\Delta v = \Delta u + 2\varepsilon > 0$.
$\Rightarrow$ по 1-му пункту: $v \leq 0$ в Ω, т.е. $u(x) \leq \varepsilon (c - x_1^2)$
$\Rightarrow$ устремляя $\varepsilon \to 0$: $u \leq 0$. чтд

Следствие 1 (принцип сравнения)

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$

$\Delta u \geq 0$; $\Delta v \leq 0$ в Ω

$u \leq v$ на $\partial\Omega$.

Тогда $u \leq v$ на Ω.

Док-во $\begin{cases} \Delta(u-v) = \Delta u - \Delta v \geq 0 \\ u - v \leq 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases}$ $\Rightarrow$ по принципу макс: $u - v \geq 0$ в Ω.

Опр. Если $\Delta u \geq 0$ – то u наз. субгармоническое (или суб-решение)

$\Delta u \leq 0$ – супергарм. – "над решением"

для $d = 1$: $u'' = 0 \Rightarrow u(x) = kx + b$.

$u'' \geq 0 \Rightarrow u$ – выпуклая. т.е

$u'' \leq 0 \Rightarrow u$ – вогнутая – т.е кривая НАД прямой

Следствие 2 (поточечные оценки)

1) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$

$\Delta u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\bar\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} u \\ \min\limits_{\bar\Omega} u = \min\limits_{\partial\Omega} u \end{cases}$

для всякой гармонич. $v := \{\Delta v = 0\}$ если субгарм. на границе была не выше, то и в области не выше.

$u := \{\Delta u = 0\}$ – если она на границе была не ниже, то и в области не ниже.

2) $\Delta u = f$, f – огр. функц. на Ω

$\Rightarrow \sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + C(d, \Omega) \cdot \sup\limits_{\Omega} |f^-|$

В частности, $\sup\limits_{\Omega} |u| \leq \sup\limits_{\partial\Omega} |u| + C(d, \Omega) \sup\limits_{\Omega} |f|$

Док-во. 1) $\begin{cases} \Delta\left(u - \max\limits_{\partial\Omega} u\right) = 0 \\ \left(u - \max\limits_{\partial\Omega} u\right)\Big|_{\partial\Omega} \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow u - \max\limits_{\partial\Omega} u \leq 0 \Rightarrow \max\limits_{\bar\Omega} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u$ – а меньше он быть не может $\Rightarrow$ они равны

(теперь меняем $u \rightsquigarrow -u$ – получаем для минимума)

2) $\Delta u = f$

Рассм. $v(x) = u(x) - \underset{\partial\Omega}{\overset{\text{сдвиг}}{\sup}}\, u^+ + C\left(x_1^2 - \max\limits_{\Omega} x_1^2\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = \Delta u + 2C = f + 2C \overset{?}{\geq} 0 \Rightarrow \text{возьмем } C := \frac{1}{2} \sup\limits_{\Omega} |f^-| \\ v \leq 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases}$

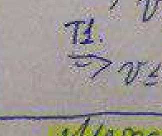
отсюда $\sup |f^-|$? будет еще тело $C\left(x_1^2 - \max\limits_{\Omega} x_1^2\right)$

Т1.

$\Rightarrow v \leq 0$ на $\Omega \Rightarrow u(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + \tilde C(\Omega) \sup\limits_{\Omega} |f^-|$ ч.т.д.

Метод Бернштейна (как оценивать производные!)

Рассм. $\Delta u = 0$. (Упр. повторить для $\Delta u = f$)



Имеет место оценка.

$$\boxed{\max_{\bar B_r} |u^{(k)}| \leq C(k, r, R) \max_{\bar B_R} |u|}$$

– т.е если мы контролируем максимум, то мы контролируем все производные.

Возьмем ψ:  на границе уже ноль.

Рассм. $\boxed{v(x) = \psi^2 \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{d} |u_{x_k}|^2}_{=|Du|^2}\Big) + \lambda u^2}$; $\lambda > 0$ — будет выбрана позже.

$\Rightarrow v_{x_j} = 2\psi\, \psi_{x_j} |Du|^2 + 2\psi^2 \sum_k u_{x_k} u_{x_k x_j} + 2\lambda u u_{x_j}$

КБ: $\langle D\psi, Du\rangle \le |D\psi|\cdot|Du|$ от 1-го слаг.

$v_{x_j x_j} = \left(2\psi_{x_j}^2 |Du|^2 + 2\psi\psi_{x_j x_j}|Du|^2 + 4\psi\psi_{x_j} \sum_k u_{x_k} u_{x_k x_j}\right) +$

$+\left(4\psi\psi_{x_j}\sum_k u_{x_k}u_{x_k x_j} + 2\psi^2 \sum_k u_{x_k x_j}^2 + 2\psi^2 \sum_k u_{x_k} u_{x_k x_j x_j}\right) +$ т.к. $(\Delta u)_{x_k} = 0$

$+ 2\lambda u_{x_j}^2 + 2\lambda \underbrace{u u_{x_j x_j}}_{=0}$ (т.к. $\Delta u = 0$)

$\Rightarrow \Delta v \ge 2|D\psi|^2|Du|^2 - 2\psi|\Delta\psi||Du|^2 - 4\psi|D\psi||Du||D^2u|$, $|D^2u| = \sqrt{\sum u_{x_k x_j}^2}$

$a \ge -|a|$

$- 4\psi|D\psi||Du||D^2u| + 2\psi^2|D^2u|^2 + 2\lambda|Du|^2 =$

$= (2|D\psi|^2 - 2\psi|\Delta\psi| + 2\lambda)|Du|^2 + \underbrace{2\psi^2|D^2u|^2}_{\ge 0} - 8\psi|D\psi||Du||D^2u| \ge$

исп., что $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$a = 8|D\psi||Du|$

$b = \psi|D^2u|$

$\ge \left(-\frac{8^2|D\psi|^2}{2} + 2|D\psi|^2 - 2\psi|\Delta\psi| + 2\lambda\right)|Du|^2 + \frac{3}{2}\psi^2|D^2u|^2$

выберем λ так, чтобы это ≥ 0 в B_R ($\lambda = \lambda(\psi)$)

$\Rightarrow$ получим $\Delta v \ge 0$ — с таким λ.

Причем $v(x)\big|_{\partial B_R} = 0$ (т.к. $\psi = 0$ на ∂B_R) $+ \lambda u^2 = \lambda u^2$.

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v \ge 0 \text{ в } B_R \\ v\big|_{\partial B_R} = \lambda u^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ из принципа макс.: $v(x) \le \max_{\partial B_R} \lambda u^2 \le \lambda(\max_{B_R}|u|)^2$

$\Rightarrow v(x) = \psi^2 \sum_{k=1}^{d} |u_{x_k}|^2 + \lambda u^2 = \psi^2|Du|^2 + \lambda u^2 \le \lambda(\max_{B_R}|u|)^2$.

Причем $\psi \equiv 1$ на B_r

$\Rightarrow \boxed{|Du| \le \sqrt{\lambda}\, \max_{B_R}|u|}$ чтд.

Э-ся, или, если пр-во полно, то из [illegible]

Следствие 1. Ω — область в $\mathbb{R}^d$, $M > 0$.

$G := \{u \in C^2(\Omega) : \Delta u = 0$ в Ω и $|u| \le M$ в $\Omega\}$

Тогда сужение G на всякий замкн. шар $\bar{B} \subset \Omega$ явл. вполне ог. мн-вом в $C(\bar{B})$

вспомним т. Арцела-Асколи

Док-во. (т. Арцела-Асколи: в прост-ве $C(K)$, K-компакт, $C(K)$ - непрер. ф-ции (критерий предкомпактности)

тогда $F \subset C(K)$ - вполне ограничено (т.е. предкомпактно)
(F - подмн-во ф-ций)

$\Leftrightarrow$ F - ограничено и равностеп. непрер.

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall f \in F \ \forall x, y \in K \ \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ← равном. непрер-ть для всех f сразу

В данном случае,
т.е. из любой пос-ти ~~непр~~ гарм. ф-ций ф-ций на шаре
можно выбрать равном. сход. подпосл-ть.

почему?

- из ограниченности есть-ти $|u| \le M$.
- равностеп. непрер.: мы выше доказали, что:

$$\max_{\overline{B}} |\nabla u| \le C \cdot \max_{\overline{B'}} |u| \le C \cdot M.$$

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \le CM \|x - y\| \text{ — поскольку по формуле конечных приращений}$$

$$\left(\text{т.к. } u(x) - u(y) = \sum_{k} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_k}(y + t(x - y))\, dt \cdot (x_k - y_k)\right)$$

$\Rightarrow$ по т. Арцела-Асколи мы доказали вполне ограниченность гарм. ф-ций на шаре. чтд

Следствие 2 $\begin{cases} \Delta u = P \text{ в } B \\ u|_{\partial B} = G \end{cases}$ - задача Дирихле

B - шар $\{x : |x| < 1\}$

P, G - многочлены.

Тогда эта задача Дирихле имеет единств. решение.

Док-во. $P_n[x]$ - это многочлены степени не более n,
это линейное пр-во.

Пока решаем задачу такую: $\begin{cases} \Delta u = P \text{ в } B \\ u|_{\partial B} = 0 \end{cases}$ (как из неё получить исх - к ну прибавить многочлен, Лаплас от многочлена - многочлен)

Расм. оператор $A : P_n \to P_n$

$Au = \Delta\left((1 - |x|^2) u(x)\right)$ - опять многочлен степени $\le n$.

$\ker A = \{u : Au = 0\} = \{u : \Delta\left((1 - |x|^2) u(x)\right) = 0$

↑ это - гарм. ф-ция, равная нулю на границе.
но для гарм - макс и мин - достигается на границе

$\Rightarrow (1 - |x|^2) u(x) \equiv 0$.

$\Rightarrow u(x) \equiv 0$

а иам же надо $\Delta u = P$, а не $Au = P$?

$\Rightarrow$ оператор отображает конечномерное пр-во в другое конечномерное, и ядро нулевое $\Rightarrow$ этот оператор обратим.

$\Rightarrow Au = P$ - обратимо $\Rightarrow$ найдется u, причем $u|_{\text{граница}} = 0$, чтд.

Семинар 1

Итак, с помощью принципа максимума мы научились решать

$$\begin{cases} \Delta u = P \\ u|_{\partial B} = G \end{cases}$$ на B; P, G — многочл.

И в ответе тоже будут многочлены —

т.к. $Au = \Delta((1-|x|^2)u)$: $P_n \to P_n$ ← многочлены

$Au = P$

$\Rightarrow A^{-1}(P) = u$ — многочлен

$\Rightarrow (1-|x|^2)u(x)$ — многочлен — это решение!

А что делать, если P, G — не многочлены?

Теорема $\forall g \in C(\partial B)$ $\exists!$ решение:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } B \\ u|_{\partial B} = g \end{cases}$$ — т.е теперь g — не многочлен!

(и g на ∂B)

Док-во: применим т. Вейерштрасса: любую непр ф-цию можно равном приблизить посл-тью многочл.

т.е $\underbrace{G_n}_{\text{многочл.}} \rightrightarrows g$ на ∂B.

(Нуж т. Стоуна-Вейерштрасса: надо найти подалгебру $A \subset C(K)$ ⇒ $\overline{A} = C(K)$ + чтобы она содержала константы и чтобы элементы этой подалгебры разделяли точки — ну искомый многочлен — это координата — т.к если 2 точки различны, то у них хотя бы одна координата отличается — её и берем.

Для этих G_n — можем построить решения

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 \\ u_n|_{\partial B} = G \end{cases}$$

И почему теперь u_n — сходится куда-то?

Ну исп. принцип макс.

$\max\limits_{\overline{B}} |u_n - u_m| = \max\limits_{\partial B} |G_n - G_m|$ — т.к u_n, u_m — гарм.

$\Rightarrow u_n \rightrightarrows u$ — т.к u_n — фунд. (почему?) относ. равном сход ⇒ $\exists$ предел.

причем эта $u \in C(\overline{B})$ — т.к равном. предел непр — непр.

При этом $\max |u_n - u_m|$ контролирует max производной на любом внутреннем шаре

$B' \subset B$; $\max\limits_{B'} |u_n^{(k)} - u_m^{(k)}| \le C \cdot \max\limits_{\overline{B}} |u_n - u_m|$

⇒ сход равном не только u, но и её производные.

по т. из анализа: $u_n^{(k)} \rightrightarrows u^{(k)}$ — т.е u оказалась $\in C^\infty(B)$.

⇒ раз лаплас был 0, то и останется 0

$\Rightarrow \Delta u = 0$. чтд

Следствие $\begin{cases}\Delta u = f \text{ в } B \\ u|_{\partial B} = g\end{cases}$ разрешима при любых $g \in C(\partial B)$, $f \in C^1(\bar B)$ ср 4

Док-во: будем считать, что f — продолжена на $\mathbb{R}^d$ до ф-ции класса C^2 с компактным носителем.

Рассм. $v(x) := \int G(x,y) f(y)\,dy$, где G — фунд. решение оператора Лапласа.

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|, & d=2 \\ \frac{-c_d}{|x-y|^{d-2}}, & d>2 \end{cases}$$

Упр. Проверить, что $\Delta v = f$.

Теперь берем $u - v \Rightarrow \begin{cases} \Delta(u-v) = 0 \\ (u-v)|_{\partial B} = (g-v)|_{\partial B} \end{cases}$ — а такое мы уже умеем решать.

Мораль: мы доказали разрешимость ~~задачи~~ задачи Дирихле на шаре — только с помощью принципа максимума. Но оказывается, что это решение можно распространить на почти любую область — это метод Перрона.

Чтобы метод Перрона запустить, нужно немного обобщить понятия суб- и супер-гарм. решений.

Класс. субгарм. ф-ция на Ω: $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u \geq 0$.

Обобщение: $u \in C(\bar\Omega)$ явл. субгарм., если $\forall$ шара $\bar B \subset \Omega$, $\forall$ гарм. ф-ции v на B: из н-ва $u \leq v$ на ∂B следует, что $u \leq v$ на всем B.

Т.е. мы уже не C^2 хотим, а просто C, но со св-вом где в качестве хорда-гармоника.

Аналогично определяется супер-гарм. ф-ция.

Утв. Если $u \in C(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$, то старое и новое опр-я эквив.

Док-во: 1) пусть знаем, что $\Delta u \geq 0$.

Хотим: B: $\begin{cases}\Delta v = 0 \\ v \geq u \text{ на } \partial B\end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} v \geq u$ на B

да, это принцип сравнения.

2) пусть мы знаем, что для каждого шара,

$\left\{ \forall B\ \forall v\ \Delta v = 0,\ v \geq u \text{ на } \partial B \Rightarrow v \geq u \text{ на } B \right\} \overset{?}{\Rightarrow} \Delta u \geq 0$.

[illegible]

От противного: пусть найдется шар B, на котором $\Delta u < 0$ на B.

Берем гарм v: $\begin{cases}\Delta v = 0 \\ v|_{\partial B} = u\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(v-u)|_{\partial B} = 0 \\ \Delta(v-u) = -\Delta u > 0\end{cases} \Rightarrow v - u \leq 0 \Rightarrow v \leq u$

но по усл.: $v \geq u$.

$\Rightarrow v = u \Rightarrow \Delta u = 0$ — против., т.к. по предп. $\Delta u < 0$. ч.т.д.

Вопрос: а зачем нам такое вое/ое определение?

Метод Перрона задачи $g \in C(\partial\Omega)$, Ω - какое-то.

Хотим решить задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Идея метода Перрона:

расси. $S_g := \{u \in C(\bar\Omega) :$ 1) u субгарм. на Ω ; 2) $u \le g$ на $\partial\Omega \}$

в новом смысле

такие g-чии есть: $\leftarrow g$ любая константа, меньшая min g - горячая

И тогда $\boxed{u(x) = \sup_{S_g} v(x)}$ - искомое решение задачи Дирихле

(Требуется только принцип максимума, чтобы это проверить)

Задача 2

$$Lu = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = tr(A D^2 u) + \langle b, Du \rangle + cu.$$

можно считать, что $A = A^T$

$\boxed{\begin{matrix} A \geqslant 0 \\ C \le 0 \end{matrix}}$ т.е. $\langle A\xi, \xi \rangle \geqslant 0$; $A(x) = (a^{ij}(x))_{i \le r,\ j \le d}$

а) Если x_0 - точка лок. неотриц. макс. u - то $(Lu)\big|_{x_0} \le 0$. $u(x_0) \geqslant 0$.

Ну это точка лок макс $\Rightarrow Du(x_0) = 0$.

$C \le 0 \Rightarrow$ это тоже ничего не портит.

$\Rightarrow$ осталось проверить: $tr(A(x_0) D^2 u(x_0)) \le 0$? - приведём к диаг. виду.

Ну $D^2 u \le 0$ - т.к. точка макс.

$\Downarrow$

$u_{x_i x_i} = \langle D^2 u\, e_i, e_i \rangle \le 0$.

$A\ \lambda_n \geqslant 0$ - т.к. A была неотриц. опр.

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1(x_0)}_{\geqslant 0} \cdot \underbrace{u_{x_1 x_1}(x_0)}_{\le 0} + \ldots + \underbrace{\lambda_n(x_0)}_{\geqslant 0} \underbrace{u_{x_n x_n}(x_0)}_{\le 0} \le 0. \text{ ч.т.д.}$$

Строгое!

$$\begin{cases} Lu > 0 \\ u\big|_{\partial\Omega} \le 0 \end{cases} \Rightarrow u \le 0 \text{ в } \Omega.$$

- т.к. мы это доказывали сегодня для Лапласа, и мы там исп., что в точке max - Лаплас ≤ 0. Но нам же нужен max $\geqslant 0$?

От противного: пусть есть точка max, где $Lu > 0$. они внутри. Ну если есть точка, где $u > 0$ - то $Lu\big|_{x_0} \le 0$

это противоречие, т.к. по предп. $Lu > 0$.

т.е. если $\exists x_0$: $Lu > 0$, то есть точка полож. максимума. Иначе граница $u = 0$.

$\Rightarrow$ эта точка внутри $\Rightarrow Lu \le 0$ - по задаче 2 $\Rightarrow$ нет точек, где $Lu > 0$. ч.т.д.

$\Rightarrow \begin{cases} Lu > 0 \\ Lu \le 0 \end{cases}$ - против.

Задача 5.

Мы про Lu выяснили в задаче 2, что в точке неотриц. максимума u: $Lu(x_0)\le 0$

Берём $L: C^{\infty}(\Omega) \to F(\Omega)$: 1) L – линеен

2) вып. св-во: если x_0 – точка лок. max u, и $u(x_0)\ge 0$ – то $Lu(x_0)\le 0$.

Тогда Lu обязан иметь вид: $Lu = tr(A D^2 u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu$.

(именно так устроены производ. операторы для случ. процессов)

Решение: Чтобы понять что-то про наш функционал, надо узнать что-то про ядро.

Хотим такую функц., что $Lu(x_0)=0$.

Т.е. мы хотим, например, такую:

$\left.\begin{array}{l} u(x_0)=0 \\ Du(x_0)=0 \\ D^2u(x_0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow u(x) = \bar{o}(|x-x_0|^2)$ при $x\to x_0$.

Возьмём такую функцию.

Рассм. $v(x) = u(x) - \varepsilon|x-x_0|^2$ – в т. x_0 лок. max (тут мы используем, что u – это $\bar{o}$-малое)

$\Rightarrow (Lv)(x_0)\le 0$ – по усл.

Т.е. $Lu(x_0) - \varepsilon(L|x-x_0|^2)(x_0)\le 0$.

А теперь $\varepsilon\to 0$: получим $Lu(x_0)\le 0$.

А если рассм. $v(x) = -u(x) - \varepsilon|x-x_0|^2$ – то получим $-(Lu)(x_0)\le 0$ $\Rightarrow Lu(x_0)=0$.

Т.е. ядро нашли

но пот. из функц. анализа: $\ker \ell \oplus \langle v\rangle = X$

$\Rightarrow \ell(x-\lambda v)=0 \Rightarrow \ell(x) = \lambda\cdot\ell(v)$

А чем произв. функция отличается от $\bar{o}(|x-x_0|^2)$ – ну нужно тейлоровского разложения.

$u(x) - u(x_0) - \langle Du(x_0); x-x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)x-x_0; x-x_0\rangle = \bar{o}(|x-x_0|^2)$

$\Rightarrow L(u - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), x-x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)x-x_0, x-x_0\rangle) = 0$

$\Rightarrow Lu = u(x_0)\underbrace{L(1)(x_0)}_{c(x_0)} + \langle \underbrace{L(x-x_0)(x_0)}_{b(x_0)}; Du(x_0)\rangle + \frac{1}{2}tr(A D^2u(x_0))$, где $a^{ij} = L((x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j))$

- Почему $c\le 0$? – т.к. $c = L(1)\le 0$ – т.к. лок. макс.
- $A = A^T$ – т.к. 2-е произв. симм.
- Почему $A\ge 0$? $\langle A\xi, \xi\rangle = L\langle x-x_0; \xi\rangle^2 \ge 0$ – т.к. у минус этого в точке x_0 – лок. максимум.

(т.к. $-\langle x-x_0; \xi\rangle^2$ – в т. x_0 – макс и $u(x_0)=0\ge 0$; $\Rightarrow L(-\langle x-x_0, \xi\rangle^2)\le 0$)

Класс. опр.: $\Delta u\ge 0$; $u\in C^2(\Omega)$

Обобщ. опр.: $\Delta v = 0$.

B $v|_{\partial B}\ge u|_{\partial B} \Rightarrow v\ge u$ в B.