No. 3

Date 2023 . 05 . 09

Бесконечное число активов

Хотим доказать, что $S_*^n = EX_t^n$ - оптимальная стратегия

① Обозначения

$U_\varepsilon(s) = \{x \in \Delta^N : |x-s| \le \varepsilon\}$

$\overline{U}_\varepsilon(s) = \{x \in \Delta^N : |x-s| \ge \varepsilon\}$

② Д-во

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_t(U_\varepsilon(S_*)) \to 1$ Дост. рассматривать только $\varepsilon \in (0,1)$

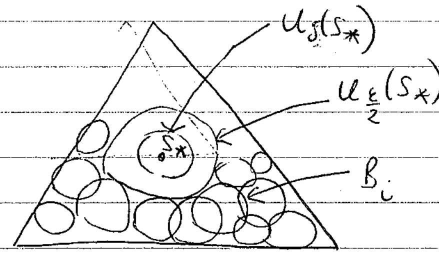
эквивалентно $\mu_t(\overline{U}_\varepsilon(S_*)) \to 0$

Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{4} \min\limits_n S_*^n$ (считаем $S_*^n > 0 \ \forall n$), $A = U_\delta(S_*)$

Т.к. $\overline{U}_\varepsilon(S_*)$ компактно, то $\exists$ его конечное покрытие мн-вами $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(s)$, $s \in \overline{U}_\varepsilon(S_*)$

Выберем конечное подпокрытие $B_i = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(S_i)$, $i = 1, \dots, m$

Достаточно д-ть $\forall i \quad \mu_t(B_i) \to 0$



Имеем: если $s \in B_i$, то $|S_* - s| \ge \frac{\varepsilon}{2}$

Покажем $\frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)} \to \infty$, откуда будет следовать $\mu_t(B_i) \to 0$

Из предыдущих записей: достаточно показать, что $E_t D_{t+1} \ge \varepsilon' > 0$

Из неравенств Пинскера

$$E_t D_{t+1} \ge \frac{1}{2}|S_* - G|^2 - \frac{|S_* - F|^2}{2\min\limits_n F_n} \quad \text{где } G \in B_i,\ F \in A$$

$$\ge \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\delta^2}{\min\limits_n S_*^n} = \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{16}\min\limits_n S_*^n$$

$$\ge \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{16} = \frac{\varepsilon^2}{16}$$

$\min\limits_n F_n \ge \min\limits_n S_*^n - \delta$

$\ge \frac{1}{2}\min S_*^n$

т.к. $\delta \le \frac{\min S_*^n}{2}$