15.10.20. ВарОпу. ДЗ от семинара 6.

Вычисления субдифф. в произв. точке $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$?

1. а) $f(x_1 \dots x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|\bar{x}\|$

Если $\bar{x} \neq \bar{0}$, то $\partial f(\hat{x}) = \dfrac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}$

Если $\bar{x} = \bar{0}$, то $\partial f(\bar{0}) = \{\bar{x}^*: \|\bar{x}^*\| \le 1\}$ – единичный шар.

т.к. $\partial f(\hat{x}) = \{x^* \in X^*: \langle x^*, x - \hat{x}\rangle \le f(x) - f(\hat{x}),\ \forall x \in X\}$.

в $\hat{x} = \bar{0}$: $\langle x^*, x\rangle \le \underbrace{f(x)}_{\|x\|} - 0,\ \forall x \in X$.

но $|\langle x^*, x\rangle| \le \|x^*\| \cdot \|x\| \le \|x\|$, если $\|x^*\| \le 1$.

б) $f(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

по т. Моро – Рокафеллара: $\partial\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n} \partial(|x_i|)(\hat{x}) \quad \forall x \in X$

но $\partial(|x_i|)(\hat{x}) = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \\ [-1;1], & x_i = 0 \\ -1, & x_i < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Если никакие $x_i \neq 0$, то $\partial f(\hat{x}) = (\operatorname{sgn} x_1; \operatorname{sgn} x_2 \dots \operatorname{sgn} x_n)$

А если какое-то $x_i = 0$, то i-я коорд. $\in [-1;1]$.

в) $f(x_1 \dots x_n) = \max_{i=1\dots n} |x_i|$

Если никакие $|\hat{x}_i| \neq |\hat{x}_j|$, то $\partial f(\hat{x}) = (0, 0 \dots \operatorname{sgn} x_{i_0}, 0 \dots 0)$, где i_0 – та коорд., где достиг. max.

Если какие-то $|\hat{x}_{i_1}| = \dots = |\hat{x}_{i_s}| \neq 0$ и они все доставляют max, то по т. Дубовицкого – Милютина

$\partial \max_{i=1\dots n}\{|x_i|\}(\hat{x}) = \operatorname{conv}\{\underbrace{\partial_{|x_{i_1}|}(\hat{x})}_{(0 \dots \operatorname{sgn} x_{i_1} \dots 0)} \cup \dots \cup \underbrace{\partial_{|x_{i_s}|}(\hat{x})}_{(0 \dots \operatorname{sgn} x_{i_s} \dots 0)}\}$ = симплекс

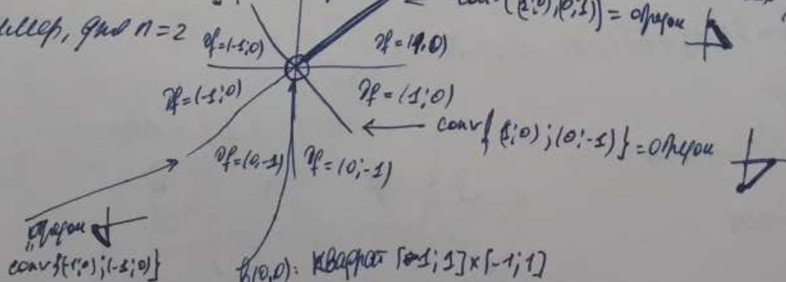
i-дост. max

Если доставляющие максимум $|\hat{x}_{i_1}| = \dots = |\hat{x}_{i_s}| = 0$,

то по т. Дубовицкого – Милютина $\partial \max_{i=1\dots n}\{|x_i|\}(\hat{x}) = \operatorname{conv}\{\underbrace{\partial_{|x_{i_1}|}(\hat{x})}_{(0 \dots [-1;1] \dots 0)} \cup \underbrace{\partial_{|x_{i_s}|}(\hat{x})}_{(0 \dots [-1;1] \dots 0)}\}$ = параллелепипед.

i: доставл. max; N_{i_1}; N_{i_s}.

Например, для $n=2$



г) $f(x_1 \dots x_n) = \max_{i=1\dots n} x_i$

Если доставляющее max i_0 – единственно, то $\partial f(\hat{x}) = (0 \dots \underset{N_{i_0}}{1} \dots 0)$

Если максимум доставляется на $x_{i_1} = \dots = x_{i_s} \neq 0$, то $\partial f(\hat{x}) = \operatorname{conv}\{(0 \dots \underset{N_{i_1}}{1}\, 0 \dots 0); (0; \dots \underset{N_{i_s}}{1}\, 0 \dots 0)\}$ = симплекс

i-доставл. макс

Если максимум на $x_i = x_j = 0$, то всё равно это же.

(2.) Решить выпуклые задачи без. ограничений:

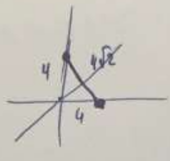
а) $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{f_1} + \underbrace{4\max\{x,y\}}_{f_2} \to \min$

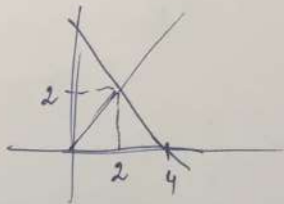
f - выпукла как сумма выпуклых

$\hat{x} \in \text{globmin} \iff 0 \in \partial f(\hat{x})$.

по т. Моро-Рокафеллара: $\partial f(\vec{x}) = \partial f_1(\vec{x}) + \partial f_2(\vec{x})$.

$\partial f_1(\vec{x}) = (2\hat{x}, 2\hat{y}), \ \forall(\hat{x},\hat{y})$





$\partial f_2(\vec{x}) = \begin{cases} (4,0), \text{ если } \hat{x}>\hat{y} \\ (0,4), \text{ если } \hat{x}<\hat{y} \\ \text{conv}((4,0);(0,4)) = \text{, если } \hat{x}=\hat{y} \end{cases}$

$\Rightarrow \partial f(\vec{x}) = \partial f_1(\vec{x}) + \partial f_2(\vec{x}) = \begin{cases} (2\hat{x}+4, 2\hat{y}), \text{ если } \hat{x}>\hat{y} \\ (2\hat{x}, 2\hat{y}+4), \text{ если } \hat{x}<\hat{y} \\ \text{conv}((2\hat{x}+4, 2\hat{y}); (2\hat{x}; 2\hat{y}+4)) = \text{отрезок.} \end{cases}$

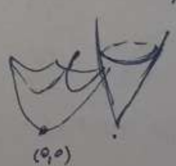
$\begin{cases} (2\hat{x}+4, 2\hat{y}) = (0,0) \\ \hat{x}>\hat{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{x}=-2 \\ \hat{y}=0 \\ \hat{x}>\hat{y} \end{cases}$ – не подх

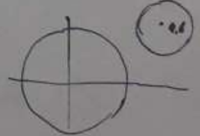
или $\begin{cases} (2\hat{x}, 2\hat{y}+4) = (0,0) \\ \hat{x}<\hat{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{x}=0 \\ \hat{y}=-2 \\ \hat{x}<\hat{y} \end{cases}$ – не подх.

или $\begin{cases} 2(\hat{x},\hat{y}) = (2,2) + t(1,-1); \ t\in[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}] \\ \hat{x}=\hat{y} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\hat{x},\hat{y}) = (1,1) + t(1;-1), \ t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}] \\ \hat{x}=\hat{y} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ (\hat{x},\hat{y}) = (1,1) \in \text{absmin.} \end{cases}$

б) $f(x,y) = \underbrace{\overbrace{x^2+y^2}^{\text{параболоид}}}_{f_1} + \underbrace{2\overbrace{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}^{\text{конус}}}_{f_2 = 2\|\vec{x}-(a,b)\|} \to \min$



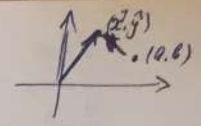


$\partial f(\vec{x}) = \partial f_1(\vec{x}) + \partial f_2(\vec{x})$.

$\partial f_1(\vec{x}) = (2\hat{x}, 2\hat{y}), \ \forall(\hat{x},\hat{y})$

$\partial f_2(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{2(\hat{x}-a; \hat{y}-b)}{\sqrt{(\hat{x}-a)^2+(\hat{y}-b)^2}}, \text{ если } (\hat{x},\hat{y}) \neq (a,b) \\ \text{шар радиуса 2 в } \sim\!\!\sim \text{ с центром нуле, если } (\hat{x},\hat{y}) = (a,b) \end{cases}$

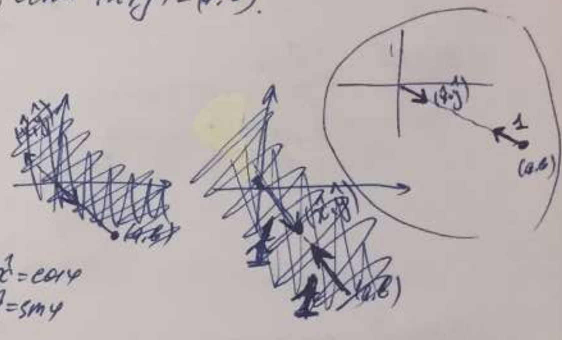
(стр 2)



$\Rightarrow \partial f(\hat{x}) = \partial f_{1+f_2}(\hat{x}) = \begin{cases} 2\left((\hat{x},\hat{y}) + \dfrac{(\hat{x}-a, \hat{y}-b)}{\|(\hat{x}-a;\hat{y}-b)\|}\right), & \text{если } (\hat{x},\hat{y}) \neq (a,b) \\ 2\big((a,b) + \text{единичный шар в нуле}\big), & \text{если } (\hat{x},\hat{y}) = (a,b). \end{cases}$

Когда $0 \in \partial f(\hat{x})$?

<u>1-й случай</u> - это точка. $\Rightarrow (\hat{x},\hat{y}) + \dfrac{(\hat{x}-a, \hat{y}-b)}{\|(\hat{x}-a;\hat{y}-b)\|} = (0,0)$



это будет, если $\begin{cases} \|(\hat{x},\hat{y})\| = 1 \Rightarrow \hat{x} = \cos\varphi,\ \hat{y} = \sin\varphi \\ (\hat{x},\hat{y}) + \dfrac{(\hat{x}-a, \hat{y}-b)}{\|(\hat{x}-a, \hat{y}-b)\|} = (0,0) \end{cases}$

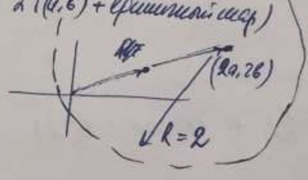
Из картинки видно, что $(\hat{x},\hat{y}) = \dfrac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$

Если $(\hat{x},\hat{y}) = 0$, и вектора $(\hat{x},\hat{y})$ нету, то подх. только $(a,b) = 0$ — но это см. случай 2.

<u>2 случай</u> Если $(\hat{x},\hat{y}) = (a,b)$, то $\partial f(\hat{x},\hat{y}) = 2\big((a,b) + \text{единичный шар}\big)$

$0 \in \partial f(a,b)$, если $2\sqrt{a^2+b^2} \leq 2$

т.е. $\sqrt{a^2+b^2} \leq 1$.



<u>Ответ</u>: Если $\sqrt{a^2+b^2} \leq 1$, то $\text{absmin} \in \left\{(a,b);\ \dfrac{(a,b)}{\|(a,b)\|}\right\}$

Если $\sqrt{a^2+b^2} > 1$, то $\text{absmin} = \dfrac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$

Иначе - нет даже locmin.

в) $f(x,y) = x^2+y^2+2\alpha|x+y-1| \to \min,\ \alpha > 0$

$\partial f(\hat{x}) = \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x})$

$\partial f_1(\hat{x}) = (2\hat{x}, 2\hat{y}),\ \forall (\hat{x},\hat{y})$

$\partial f_2(\hat{x}) = \begin{cases} 2\alpha(1,1), & \text{если } x+y-1>0 \\ 2\alpha(-1;-1), & \text{если } x+y-1<0 \\ 2\alpha\,\text{conv}\big((1;1);(-1;-1)\big), & \text{если } x+y-1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \partial f(\hat{x}) = \begin{cases} 2(\hat{x}+\alpha;\hat{y}+\alpha), & \text{если } \hat{x}+\hat{y}-1>0 \\ 2(\hat{x}-\alpha;\hat{y}-\alpha), & \text{если } \hat{x}+\hat{y}-1<0 \\ 2(\hat{x}+\hat{y}) + \text{conv}\big((\alpha,\alpha);(-\alpha;-\alpha)\big), & \text{если } x+y-1=0. \end{cases}$

1 случай $\begin{cases} \hat{x} = -\alpha \\ \hat{y} = -\alpha \\ \hat{x}+\hat{y}-1>0 \end{cases} \iff -2\alpha-1>0.$

$\alpha < -\frac{1}{2}$ но $\alpha > 0$ => не подх

2 случай $\begin{cases} \hat{x} = \alpha \\ \hat{y} = \alpha \\ \hat{x}+\hat{y}-1<0 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha-1<0.$

$\begin{cases} \alpha < \frac{1}{2} \\ \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow$ если $\alpha \in (0;\frac{1}{2})$, то $(\hat{x},\hat{y}) = (\alpha;\alpha)$

3 случай мы должны сдвинуть отрезок вдоль себя не более, чем на половину длины.

$$\begin{cases} \frac{\hat{x}}{1} = \frac{\hat{y}}{1} \\ \sqrt{\hat{x}^2+\hat{y}^2} \le \alpha\sqrt{2} \\ \hat{x}+\hat{y}-1=0. \end{cases} \Rightarrow \hat{x}=\hat{y}=\frac{1}{2} \qquad \hat{x}^2+\hat{y}^2 \le 2\alpha^2$$

$$2\cdot\frac{1}{4} \le 2\cdot\alpha^2$$

$$\frac{1}{4} \le \alpha^2 \Rightarrow \alpha \in (-\infty;-\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2};+\infty)$$

Ответ: Если $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$, то решение $(\alpha;\alpha)$
Если $\alpha \in [\frac{1}{2};+\infty)$, то решение $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

(3) Среди многочленов вида ~~[illegible]~~ $t^2+tx_1+x_2$ найти многочлен с наим. нормой в $C([-1;1])$

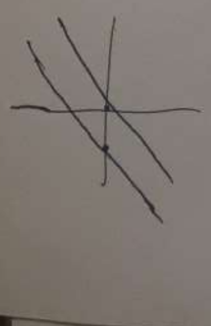
Хотим: $f(x_1;x_2) = \max\limits_{t\in[-1;1]} |t^2+tx_1+x_2| \longrightarrow \min\limits_{x_1;x_2}$

но $\max\limits_{t\in[-1;1]} |t^2+tx_1+x_2| = \max\limits_{t=1,-1 \text{ и вершина}} |t^2+tx_1+x_2|$

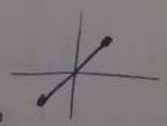
$\frac{-b}{2a} = -\frac{x_1}{2} \longleftarrow \left|\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + y\right| = \left|-\frac{x^2}{4}+y\right|$

$\Rightarrow f(x;y) = \max\left\{ |1+x+y|; |1-x+y|; \left|-\frac{x^2}{4}+y\right| \right\}$

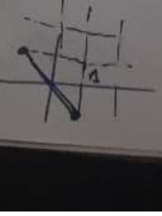
$\partial f(\hat{x}) = \text{conv}\{\partial f_1(\hat{x}); \partial f_2(\hat{x}), \partial f_3(\hat{x})\}.$



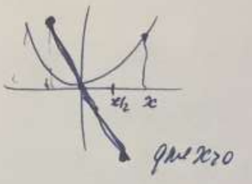
$\partial f_1(\hat{x}) = \begin{cases} (1,1), \text{ если } 1+x+y>0 \\ (-1;-1), \text{ если } 1+x+y<0 \\ \text{conv}\{(1;1)\cup(-1;-1)\}, \text{ если } 1+x+y=0. \end{cases}$

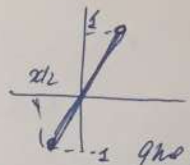


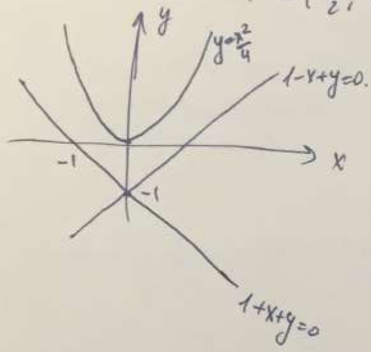
$\partial f_2(\hat{x}) = \begin{cases} (-1,1), \text{ если } 1-x+y>0 \\ (1;-1), \text{ если } 1-x+y<0 \\ \text{conv}\{(-1;1)\cup(1;-1)\}, \text{ если } 1-x+y=0. \end{cases}$



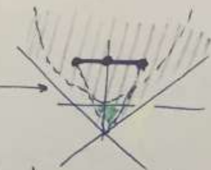
$$\partial f_3(\hat{x}) = \begin{cases} \left(-\frac{\hat{x}}{2}; 1\right), \text{ если } -\frac{\hat{x}^2}{4} + y > 0 \\ \left(\frac{\hat{x}}{2}; -1\right), \text{ если } -\frac{\hat{x}^2}{2} + y < 0 \\ \operatorname{conv}\left(\left(-\frac{\hat{x}}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{\hat{x}}{2}; -1\right)\right), \text{ если } \hat{y} = \frac{\hat{x}^2}{4} \end{cases}$$



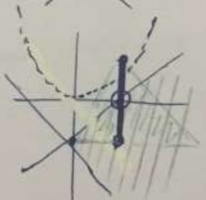




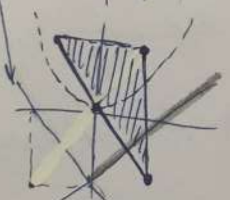
1) $\partial f(\hat{x}) = (1, 1)$



нет
$y \in (-1, 0)$; $x=0$
да ; $y = \frac{x^2}{4}$

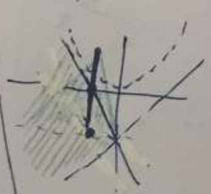


нет
нет
~~нет~~ нет

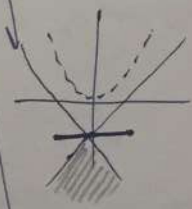


нет
да, $\begin{cases} 1+x+y>0 \\ 1-x+y=0. \end{cases}$ — уже и так содержится.
нет

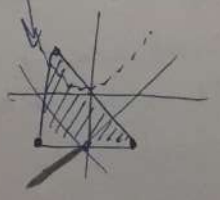
2) $\partial f_1(\hat{x}) = (-1; 1)$



нет
~~нет~~ нет
нет

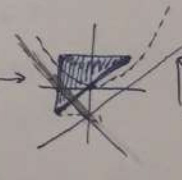


нет
нет
нет

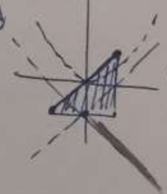


нет
да $\begin{cases} 1+x+y<0 \\ 1-x+y=0. \end{cases}$
нет

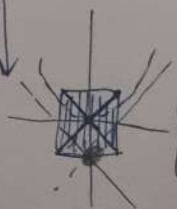
3) $\partial f_1(\hat{x}) = \operatorname{conv}\{(1;1) \cup (-1;1)\}$



нет
да $\begin{cases} 1+x+y=0 \\ 1-x+y>0 \end{cases}$
нет

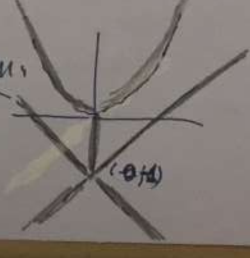


нет
да $\begin{cases} 1+x+y=0 \\ 1-x+y<0 \end{cases}$
нет



нет
да $\begin{cases} 1+x+y=0 \\ 1-x+y=0. \end{cases}$
нет

Ответ:



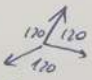
(4) а) Найти точку, чтобы $\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}+\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}+\sqrt{(\cancel{x}-c_1)^2+(y-c_2)^2}\to\min$.

Имеем: $f(x,y)=\|\bar{x}-\bar{a}\|+\|\bar{x}-\bar{b}\|+\|\bar{x}-\bar{c}\|$.

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – вершины $\triangle$.

Если $\hat{x}\neq\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, то $\partial f(\hat{x})=\frac{\bar{x}-\bar{a}}{\|x-a\|}+\frac{\bar{x}-b}{\|x-b\|}+\frac{\bar{x}-c}{\|x-\bar{c}\|}$ = сумма 3-х единичных векторов, направленных из вершин в $\hat{x}$

А сумма 3-х единичных векторов $=\bar{0}$ $\Leftrightarrow$



$\Rightarrow$ Если внутри $\triangle$ есть точка (Ферма), из которой каждая вершина видна под 120° – то $\hat{x}$ = эта точка

Если же $\hat{x}$ = вершине (например $\bar{a}$),

то $\partial f(\hat{x})$ = единичный шар с центром внутри $+\ \frac{x-b}{\|x-b\|}+\frac{x-c}{\|x-c\|}$.

Когда $\bar{0}\in$ этому? когда сумма этих $\uparrow$ по модулю ≤ 1.

(когда сумма этих единичных векторов не выводит шарик из нуля.

А когда их сумма по модулю ≤ 1 – когда угол $\geq 120^\circ$.)

$\Rightarrow$ [Если $\exists$ вершина с углом $\geq 120^\circ$, то $(\hat{x},\hat{y})$ = эта вершина

[Если все углы $< 120^\circ$, то $\hat{x}$:= точка, из которой все вершины видна под 120°.

б) Теперь для 4 точек.

Если $\hat{x}\neq\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$, то мы имеем сумму 4-х единичных векторов, направленных из вершин в точку $\hat{x}$.

Их сумма $=\bar{0}$ $\Leftrightarrow$ они попарно противоположны,

т.е. $\hat{x}$ – точка пересечения диагоналей.
(см. т. Фаньяно)

Но так работает, только если 4-угольник выпуклый.

А если если он не выпуклый, то 1 точка лежит внутри $\triangle$, образованного остальными точками.

Тогда рассм. случай, когда $\hat{x}$ = вершина. – т.к. случай $\hat{x}\neq\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ не дает 0, т.к. всегда 2 вектора направлены в 1 полупл.

тогда $\partial f(\hat{x})$ = единичный шар с центром внутри + 3 единичных вектора.

когда Σ 3-х единичных векторов не выбьет этот шар из нуля?

из ~~когда~~ внутри $\triangle$ – всегда, т.к. 2 вектора напр. в одну полуплоскость, а ещё один – в другую

$\Rightarrow$ { внутри $\triangle$, $\hat{x}\in$ вершине $\Rightarrow$ $\hat{x}$ = та вершина, которая внутри $\triangle$.

Ответ: Если ~~...~~ 4-угольник выпуклый – то $(\hat{x},\hat{y})$ = точка пересечения диаг.

Если невыпуклый – то та точка, которая лежит внутри $\triangle$, образованного 3-мя другими точками.