28.10.21. Виноградов ДЗ от семинара 7

Задача: док-ть, что если $\boxed{m_1 = \int_0^{+\infty} u\,dA(u) < \infty}$, то для функции восстановления имеет место н-во $\boxed{H(t) \geq \frac{t}{m_1} - 1}$

Решение: $H(t)$ – является решением ур-я $\boxed{H(t) = \int_0^t H(t-u)\,dA(u) + A(t)}$

напомним, что $H(t) = E\,\nu(t)$ – это ф-ция восстановления

$\nu(t)$ – число точек процесса восстановления на отрезке $[0,t]$

$A(t) = P(\xi_k < t)$ – ф.р. ξ_k. (ξ_k – времена жизней лампочек)

$A(+0) = 0$.

$m_1 = E\xi_k$

Теперь используем лемму, которую мы доказали на семинаре.

Лемма Если ф-ции $K(u)$ и $f(u)$ непрерывны и ограничены, $\lambda > 0$, $K(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq x$ и если для $0 \leq u \leq x$ выполнено н-во $\boxed{\underline{\varphi}(u) \leq \lambda \int_0^u K(u-y)\,\underline{\varphi}(y)\,dy + f(u)}$, то для $0 \leq u \leq x$ справедливо н-во $\varphi(u) \geq \underline{\varphi}(u)$

То есть если мы хотим получить $\boxed{H(t) \geq \frac{t}{m_1} - 1}$, то нам достаточно док-ть, что

$$\boxed{\frac{t}{m_1} - 1 \leq \int_0^t \left(\frac{t-u}{m_1} - 1\right) dA(u) + A(t)}$$

Преобразуем его:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{m_1} - 1 \leq \frac{1}{m_1} \int_0^t (t-u)\,dA(u)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{m_1} - 1 \leq \frac{1}{m_1}\left(tA(t) - \int_0^t u\,dA(u)\right)$$

Положим $\bar{A}(t) = 1 - A(t)$. и перенесём $\frac{tA(t)}{m_1}$ налево.

тогда последнее н-во $\Leftrightarrow$ $\frac{t\bar{A}(t)}{m_1} - 1 \leq 1 - \frac{1}{m_1}\int_0^t u\,dA(u)$

но $1 - \frac{1}{m_1}\int_0^t u\,dA(u) = \frac{1}{m_1}\int_0^{\overset{m_1 = E\xi_k}{\infty}} u\,dA(u) - \frac{1}{m_1}\int_0^t u\,dA(u) = \frac{1}{m_1}\int_t^{+\infty} u\,dA(u)$

т.е. мы хотим: $\frac{t\bar{A}(t)}{m_1} \leq \frac{1}{m_1}\int_t^{+\infty} u\,dA(u)$

$\Leftrightarrow \quad t\bar{A}(t) \leq \int_t^{+\infty} u\,dA(u)$.

но это – очевидно, т.к. $t \cdot \bar{A}(t) = t \cdot \int_t^{+\infty} dA(u) \leq \int_t^{+\infty} u\,dA(u)$. $\Rightarrow$ усл. леммы выполнено $\Rightarrow$ чтд!