08.04.21. ЧМ. КР2. Топаева Александра 409

① Для ур-я $y'(x)=f(x)$ построить разност. схему с наив. пор. аппрокс на решении:

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}$$

Решение: $\| L_h[y]_h - f_h \| = \max\limits_k \left| \frac{y(x_k) - y(x_k-2h)}{2h} - a_1 f(x_k) - a_0 f(x_k-h) - a_{-1} f(x_k-2h) \right| =$

$$= \max_k \Big| \frac{1}{2h}\Big(\cancel{y(x_k)} - \big(\cancel{y(x_k)} - 2h\cdot y'(x_k) + \frac{(2h)^2}{2} y''(x_k) - \frac{(2h)^3}{6}\cdot y'''(x_k) + \frac{(2h)^4}{24} y^{(4)}(x_k) - \frac{(2h)^5}{120} y^{(5)}(x_k) + O(h^6)\big)\Big)$$

$$- a_1 f(x_k)$$

$$- a_0 \Big(f(x_k) - h\cdot f'(x_k) + \frac{h^2}{2}\cdot f''(x_k) - \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_k) + O(h^5)\Big)$$

$$- a_{-1} \Big(f(x_k) - 2h\cdot f'(x_k) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x_k) - \frac{(2h)^3}{6} f'''(x_k) + \frac{(2h)^4}{24} f^{(4)}(x_k) + O(h^5)\Big) =$$

$y'(x_k)=f(x_k)$, т.к. это решение

$$= \max_k \Big| y'(x_k)(1 - a_1 - a_0 - a_{-1})$$
$$+ h\cdot y''(x_k)(-1 + a_0 + 2a_{-1})$$
$$+ h^2\cdot y'''(x_k)\left(\frac{4}{6} - \frac{a_0}{2} - 2a_{-1}\right)$$
$$+ h^3\cdot y^{(4)}(x_k)\left(-\frac{8}{24} + \frac{a_0}{6} + \frac{8}{6}a_{-1}\right)$$
$$+ h^4\cdot y^{(5)}(x_k)\left(\frac{16}{120} - \frac{a_0}{24} - \frac{16a_{-1}}{24}\right) \Big| = ?$$

+

Требуем:
$$\begin{cases} a_1 + a_0 + a_{-1} = 1 \\ a_0 + 2a_{-1} = 1 \\ \frac{a_0}{2} + 2a_{-1} = \frac{4}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = a_1 \\ a_0 + 2a_{-1} = 1 \\ 3a_0 + 12a_{-1} = 4 \end{cases} \Rightarrow 6a_{-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = a_1 = \frac{1}{6} \\ a_0 = 1 - 2a_{-1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

проверяем коэф. при h^3:

$$-\frac{8}{24} + \frac{a_0}{6} + \frac{8}{6}a_{-1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{8}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4+2-6}{18} = 0.$$

проверяем коэф. при h^4:

$$\frac{16}{120} - \frac{a_0}{24} - \frac{16}{24}a_{-1} = \frac{2}{15} - \frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3} - \frac{16}{24}\cdot\frac{1}{6} = \frac{48-10-40}{24\cdot 15} = -\frac{2}{24\cdot 15} \neq 0 \Rightarrow O(h^4)$$

Ответ: $a_{-1} = a_1 = \frac{1}{6}$

$a_0 = \frac{2}{3}$

порядок аппрокс: $O(h^4)$

② Исслед. устойчивость разност. схемы

$$\theta\cdot\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta)\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k; \quad \theta\in[0,1].$$

Решение: это ур-е 1 порядка

$\Rightarrow$ будем проверять α-устойчивость.

$$\theta\cdot(\mu^2 - \mu) + (1-\theta)(\mu - 1) = 0.$$

$$\theta\cdot\mu^2 - \theta\cdot\mu + \mu - 1 - \theta\cdot\mu + \theta = 0.$$

$\theta \cdot \mu^2 + \mu(1-2\theta) + (\theta-1) = 0.$

пусть $\theta \neq 0 \Rightarrow$ это ур-е ~~...~~ квадратное

$\Rightarrow D = (1-2\theta)^2 - 4\theta(\theta-1) = 1 - \cancel{4\theta} + \cancel{4\theta^2} - \cancel{4\theta^2} + \cancel{4\theta} = 1.$

$\Rightarrow \mu_{1;2} = \dfrac{2\theta - 1 \pm 1}{2\theta}$

$\mu_1 = \dfrac{2\theta-2}{2\theta} = 1 - \dfrac{1}{\theta} \overset{?}{\in} [-1;1]$ – да, если $1 - \dfrac{1}{\theta} \geq -1.$

$\mu_2 = \dfrac{2\theta}{2\theta} = 1 \in [-1;1]$. – всегда

$\Downarrow \dfrac{1}{\theta} \leq 2$

$\Downarrow \theta \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta \in [\frac{1}{2};1].$

Если $\theta = 0$: ур-е стало $\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h} = f_k$

$\Rightarrow \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1$ – подх.

+

Если $\theta = 1$: ур-е стало $\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k$

$\Rightarrow \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1$ – подх.

$\boxed{\text{Ответ: } \theta = \{0\} \cup [\frac{1}{2};1]}$

3) Для задачи $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ рассм. схему

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1}-y_k}{h} = \dfrac{y_{k+1}+y_k}{2}; \; k \geq 0. \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \dots$ найти c_1 для $x_N = 1$.

Решение: 1) $y' = y$

$\dfrac{dy}{dx} = y$

$\dfrac{dy}{y} = dx$

$\Rightarrow \ln y = x + \tilde{c} \Rightarrow y = c \cdot e^x$

$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \quad \Rightarrow y = e^x$

2) $\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h} = \dfrac{y_{k+1}+y_k}{2}$

$2y_{k+1} - 2y_k = h \cdot y_{k+1} + h \cdot y_k$

$y_{k+1}(2-h) = y_k(2+h)$

$\Rightarrow y_{k+1} = y_k \cdot \dfrac{2+h}{2-h} = y_{k-1} \cdot \left(\dfrac{2+h}{2-h}\right)^2 = \dots = \underset{1}{y_0} \cdot \left(\dfrac{2+h}{2-h}\right)^{k+1}$

$\Rightarrow y_N = \left(\dfrac{2+h}{2-h}\right)^{N = 1/h}$

$$\Rightarrow y(x_N) - y_N = e^1 - \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e - e^{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right)} = ⓢ$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

$$f(x) = f(0) + h\cdot f'(0) + \frac{h^2}{2}\cdot f''(0) + \frac{h^3}{6}\cdot f'''(0) + \ldots$$

$$f(0) = \ln(1) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{1\cdot(2-x) - (-1)\cdot(2+x)}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2+x)(2-x)} = \frac{4}{4-x^2} \Rightarrow f'(0) = 1.$$

$$f''(x) = \left(\frac{4}{4-x^2}\right)' = 4\cdot\left(-\frac{1}{(4-x^2)^2}\right)\cdot(-2x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0.$$

$$f'''(x) = \frac{8\cdot(4-x^2)^2 - 2(4-x^2)(-2x)\cdot 8x}{(4-x^2)^4} = \frac{8(4-x^2)\left((4-x^2)+4x^2\right)}{(4-x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = \frac{8\cdot 4}{4^3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right) = h + \frac{h^3}{6}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right) = 1 + \frac{h^2}{12} + \ldots$$

$$\Rightarrow ⓢ = e - e^{1+\frac{h^2}{12}+\ldots} = e - e\cdot e^{\frac{h^2}{12}+\ldots} = e\left(1 - e^{\frac{h^2}{12}+\ldots}\right) = e\left(1 - \left(1 + \frac{h^2}{12} + \ldots\right)\right) = e\cdot\frac{h^2}{12} + \ldots$$

$\Rightarrow$ сходится при $h = 0$.

$\boxed{\text{Ответ: } e_1 = 0}$

4. Для задачи $\begin{cases} y' + 5y = \underbrace{\sin 2x}_{= f(x)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ построить двухточечную разн. схему 2 пор. сходимости.

Решение: подойдет такая:

нужно $f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\,\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = f_k := \frac{\sin(2h(k+1)) + \sin(2hk)}{2} \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

$$f_k = \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}$$

Сходимость = апрокс + устойчивость.

- Апрокс (на решении):

краевое усл: $\|l_h[y]_h - \varphi_h\| = \underset{=2}{y(0)} - 2 = 0$ — точно апроксимируется.

$$\|L_h[y]_h - f_h\| = \max_k \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + 5\cdot\frac{y(x_k+h)+y(x_k)}{2} - \frac{\sin(2x_k+2h) + \sin(2x_k)}{2} \right| =$$

$$= \cancel{\max_k \Big(y'(x_k) + \frac{h}{2}\cdot y''(x_k) + \frac{h^2}{6}\cdot y'''(x_k) + \ldots} \cancel{- \frac{1}{2}\cdot 2\sin(2x_k+h)\cdot \sin h}$$

$$\cancel{+ \frac{5}{2}\Big(2y(x_k) + h\cdot y'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \ldots}$$

$$= \max_k \left| \frac{1}{h}\left(y(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3 \cdot y'''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^4 \cdot y^{(4)}(x_k+\tfrac{h}{2}) + \ldots\right)\right.$$

$$- \frac{1}{h}\left(y(x_k+\tfrac{h}{2}) - \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''(x_k+\tfrac{h}{2}) - \frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \cdot y'''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{24}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \cdot y^{(4)}(x_k+\tfrac{h}{2}) + \ldots\right)$$

$$+ \frac{5}{2}\cdot\left(y(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h^2}{8} y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \ldots \right.$$
$$\left. + y(x_k+\tfrac{h}{2}) - \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h^2}{8} y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \ldots\right)$$

$$- \frac{f(x_k+\frac{h}{2}) + f'(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{h}{2} + f''(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{h^2}{8} + \ldots + f(x_k+\frac{h}{2}) - f'(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{h}{2} + f''(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{h^2}{8} + \ldots}{2} \Bigg| =$$

$$= \max_k \left| \begin{array}{l} y'(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{8}\cdot y'''(x_k+\frac{h}{2}) + \ldots \\ + 5y(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{5}{2}\cdot\frac{h^2}{8}\cdot y''(x_k+\frac{h}{2}) + \ldots \\ - f(x_k+\frac{h}{2}) - \frac{h^2}{8}\cdot f''(x_k+\frac{h}{2}) + \ldots \end{array} \right| = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ верно, что 2-й порядок аппрокс.

$\| 0$, т.к. решение

- Устойчивость: это ур-е 1 порядка $\Rightarrow$ проверяем α-усл.

$\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \alpha$-усл.

$\Rightarrow$ есть сходимость 2 порядка. чтд.

(5.) Построить аппрокс. на решении 2 порядка по $x_0 = 0$ и $x_1 = h$ краевого усл. $u'(0) - u(0) = 0$ для ур-я $u'' - 2u = \sin x - 1$.

Решение:

$$u(h) = u(0) + u'(0)\cdot h + u''(0)\cdot\frac{h^2}{2} + u'''(0)\cdot\frac{h^3}{6} + \ldots$$

$$\Rightarrow u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \underbrace{u''(0)}_{2u(0)+\sin 0 - 1}\cdot\frac{h}{2} - u'''(0)\cdot\frac{h^2}{6} + \ldots$$

т.к. решение, $\sin 0 = 0$

$$\Rightarrow u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0) - 1) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow u'(0) - u(0) = 0 \xrightarrow{\text{аппрокс. как}} \boxed{\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}(2u_0 - 1) - u_0 = 0}$$ ← ответ:

⑥ Для задачи $\begin{cases} -u''(x)+p\cdot u(x)=f(x) \\ u(0)=a \\ u'(1)=b \end{cases}$; $p=const>0$.

построить на равном. сетке схему и порядок сход.

Док-ть аппрокс, уст. по правой части, сформ. т. Филиппова (указав норму)

С/р3

__Решение:__

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+pu_i=f_i:=f(x_i) \quad ; x_i=ih; \\ u_0=a \\ \dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(pu_N-\underbrace{f_N}_{f(x_N)})=b. \end{cases}$$

Для $u'(1)=b$: $\dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}=u'(1)+\underline{O}(h)$ – не подх, т.к $\underline{O}(h)$

$$u(1-h)=u(1)-h\cdot u'(1)+\frac{h^2}{2}\cdot \underset{pu(1)-f(1)}{\underbrace{u''(1)}}+\ldots$$

$$\Rightarrow u'(1)=\frac{u(1)-u(1-h)}{h}+\frac{h}{2}\cdot(pu(1)-f(1))+\ldots$$

$\Rightarrow u'(1)=b$ – стало: $\boxed{\dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(pu_N-f_N)=b.}$

• __Апрокс__: 1-е краевое усл – точно

2-е краевое усл: $O(h^2)$

Оператор: $\|L_h[y]_h-f_h\|=\max\limits_k\left|-\left(u''(x_k)+\frac{h^2}{12}\cdot u^{(4)}(x_k)+\ldots\right)+pu(x_k)-f(x_k)\right|=\underline{O}(h^2)$

$\overset{\shortparallel}{0}$, т.к решение

• __Сходимость__: найдем λ_{min} и покажем, что $\lambda_{min}\geq const>0$.

тогда $\|A^{-1}\|$ – ограничена $\Rightarrow$ есть уст. по правой части

т.к у нас $y=A^{-1}f \Rightarrow \|y\|_* \leq \underbrace{\|A^{-1}\|_*}_{\leq const.}\cdot\|f\|_*$

норма $\|\cdot\|_*=\|\cdot\|_{2,h}$,

т.е $\|u\|_{2,h}=\sqrt{\sum_i u_i^2\cdot h}$ – она согласована с непрер. нормой.

Итак, ищем собств. числа и собств. значения.

Заметим, что член $p\cdot u_i$ – можно убрать, т.к

если мы найдем $\lambda^{(n)}_{\text{будущего}}$ – то $\lambda^{(n)}_{\text{сист}}=\lambda^{(n)}_{\text{будущего}}+p$.

$\Rightarrow$ ищем собств. числа и собств. ф-ции задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}=\lambda y_k; \\ y_0=0 \\ \dfrac{2}{h^2}(y_N-y_{N-1})=\lambda y_N \end{cases}$$

$\leftarrow$ ну было $\dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(\overset{=\lambda u_N}{pu_N}-\overset{0}{f_N})=0. \Rightarrow \dfrac{2}{h^2}(u_N-u_{N-1})=\lambda u_N$

Хар. ур-е: $\mu^2 - 2\left(1-\frac{\lambda h^2}{2}\right)\mu + 1 = 0.$

$\Rightarrow$ по т. Виета: $\frac{\mu_1+\mu_2}{2} = 1 - \frac{\lambda h^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{\lambda h^2}{2} = 1 - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$

$\lambda h^2 = 2 - (\mu_1+\mu_2)$

$\lambda = \frac{2}{h^2} - \frac{(\mu_1+\mu_2)}{h^2}$

1) Если $\mu_1=\mu_2$, то $y_k = (C_1+C_2 k)\mu^k$

• $y_0=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow y_k = C_2 k\cdot\mu^k$

• $\frac{2}{h^2}(y_N - y_{N-1}) = \lambda y_N$

$\Rightarrow \frac{2}{h^2}\left(C_2 N\mu^N - C_2(N-1)\mu^{N-1}\right) = \lambda\cdot C_2\cdot N\cdot\mu^N$

$\Rightarrow 2\cancel{C_2}\left(N\cdot\mu - (N-1)\right) = \lambda\cdot\cancel{C_2}\cdot h^2\cdot N\cdot\mu$

$\Rightarrow 2N\mu - 2(N-1) = \lambda N\mu$

$\Rightarrow N\mu(2-\lambda) = 2(N-1) \Rightarrow \mu = \frac{2(N-1)}{N(2-\lambda)}$ - не удовл. усл $\mu^2=1$.

2) Если $\mu_1\ne\mu_2$, то $y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$

• $y_0=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \Rightarrow C_2=-C_1 \Rightarrow y_k = C_1(\mu_1^k - \mu_2^k)$

• $\frac{2}{h^2}(y_N-y_{N-1}) = \lambda y_N$

$\Rightarrow \frac{2}{h^2}\cancel{C_1}\left(\mu_1^N-\mu_2^N-(\mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1})\right) = \lambda\cdot\cancel{C_1}\cdot(\mu_1^N-\mu_2^N)$

$\frac{2}{h^2}\left(\mu_1^N-\mu_2^N-(\mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1})\right) = \left(\frac{2}{h^2} - \frac{\mu_1+\mu_2}{h^2}\right)(\mu_1^N-\mu_2^N)$

$\Rightarrow \cancel{\frac{2}{h^2}(\mu_1^N-\mu_2^N)} - \frac{2}{h^2}(\mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1}) = \cancel{\frac{2}{h^2}(\mu_1^N-\mu_2^N)} - \frac{1}{h^2}(\mu_1+\mu_2)(\mu_1^N-\mu_2^N)$

$\Rightarrow 2(\mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1}) = (\mu_1+\mu_2)(\mu_1^N-\mu_2^N)$

$2(\mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1}) = \mu_1^{N+1} - \mu_1\mu_2^N + \mu_2\mu_1^N - \mu_2^{N+1}$

$2(\mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1}) = \mu_1^{N+1} - \mu_2^{N-1} + \mu_1^{N-1} - \mu_2^{N+1}$

$\Rightarrow \mu_1^{N-1}-\mu_2^{N-1} = \mu_1^{N+1}-\mu_2^{N+1}$

$\Rightarrow \mu_1^{N-1}(1-\mu_1^2) = \mu_2^{N-1}(1-\mu_2^2)$

$$\Rightarrow \frac{\mu_1^{N-1}}{\mu_2^{N-1}} = \frac{1-\mu_2^2}{1-\mu_1^2} = \frac{\mu_2(\cancel{\mu_1-\mu_2})}{\mu_1(\cancel{\mu_2-\mu_1})} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \mu_1^N = -\mu_2^N$$

$$\Rightarrow \mu_1^{2N} = -1 = e^{-\pi i + 2\pi i n}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = e^{\frac{2\pi i(n-0.5)}{2N}} = e^{\frac{\pi i(n-0.5)}{N}}$$

$$\mu_2 = \bar{\mu}_1 = e^{-\frac{\pi i(n-0.5)}{N}}$$

$$\Rightarrow y_k = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k) = \tilde{c}_1 \cdot \sin \underbrace{\frac{\pi(n-0.5)k}{N}}_{= x_k} = \tilde{c}_1 \cdot \sin \pi(n-0.5)x_k$$

Ищем $\lambda^{(n)}_{безр}$:

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 2\sin \pi(n-0.5)x_k \cos \pi(n-0.5)h - 2\sin\pi(n-0.5)x_k = 2\sin \pi(n-0.5)x_k \cdot \left(-2\sin^2 \frac{\pi(n-0.5)h}{2}\right) =$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}_{безр} = \frac{4}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi(n-0.5)h}{2}$$

+

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}_{ср} = \lambda^{(n)}_{безр} + p = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi(n-0.5)h}{2} + p.$$

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{4} + p \geq \frac{4}{h^2} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi h}{4}\right)^2 + p = 1 + p \geq const > 0$$ т.к $p = const > 0$.

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 \leq const$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_{2,h} \leq const$$ $\Rightarrow$ есть уст. по правой части.

Т. Филиппова: (в норме $\|\cdot\|_{2,h}$):

1) Задачи (1),2) и (3,4) — линейны — да
2) $\exists!$ решение задачи (1,2) для произв. правых частей — да, мы умеем решение находить.
3) Разн. схема аппрокс. исх. задачу на решении с порядком 2:

$$\|L_h[y]_h - f_h\|_C \leq c \cdot h^2$$

! не страшно, что тут C, а не $\|\cdot\|_{2,h}$ — т.к если в C-норме $\leq c \cdot h^2$, то и в $L_{2,h}$-норме $\leq c \cdot h^2$ —
т.к $\left(\sum v_i^2 \cdot h\right)^{1/2} \leq c \cdot h^2 \cdot \underbrace{\left(\sum 1 \cdot h\right)^{1/2}}_{\to 1} \leq \tilde{c} \cdot h^2$.

4) Разностная схема устойчива — да, в норме $\|\cdot\|_{2,h}$: (а нормы $L_{2,h}$ и $\|\cdot\|_{2,h}$ — эквив)
$\|A^{-1}\|_{2,h} \leq const$ — проверили.

$\Rightarrow$ по т. Филиппова <u>есть</u> <u>сход</u>. порядка $\underline{O(h^2)}$ в $\|\cdot\|_{2,h}$.! ЧТД.

(7) Исслед. методом априорных оценок устойчивость:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p_iu_i=f_i \\ u_0=0 \\ u_N=u_{N-1} \quad ; \quad (N-\frac{1}{2})h=1. \end{cases}$$

Решение:
$$-\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1}-y_k-y_k+y_{k-1})+\sum_{k=1}^{N-1}p_ky_k^2=\sum_{k=1}^{N-1}f_ky_k.$$

1)
$$\| \quad -\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-1}(y_{k+1}-y_k)y_k+\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k-y_{k-1})y_k$$

$u_0=0$, $u_N=u_{N-1}$

$$=-\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}(y_{k+1}-y_k)y_k+\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{k=1}^{N}(y_k-y_{k-1})y_k$$

$$\overset{j=i+1}{=}-\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{j=1}^{N}(y_j-y_{j-1})y_{j-1}+\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{k=1}^{N}(y_k-y_{k-1})y_k=$$

$$=\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(-y_{i-1}(y_i-y_{i-1})+y_i(y_i-y_{i-1})\right)$$

$$\| \quad \frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(-2y_iy_{i-1}+(y_{i-1})^2+(y_i)^2\right)$$

$$\| \quad \frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}(y_i-u_{i-1})^2$$

(*)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i-y_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{N-1}p_iy_i^2=\sum_{i=1}^{N-1}f_iy_i}$$
— интегр. тожд.
(аналог $\int_0^1(u')^2dx+\int_0^1pu^2dx=\int_0^1fudx$

2) Докажем ~~...~~ сеточный аналог про $\int_0^1u^2dx\le\int_0^1(u')^2dx$

Для этого: $u_k=\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})$

$$\Rightarrow \forall 1\le k\le N-1:\ u_k^2=\left(\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})\right)^2\le\sum_{i=1}^{k}1^2\cdot\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})^2\le N\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2$$

Суммируя по k:

$$\sum_{k=1}^{N-1}u_k^2\le N^2\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2\le\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{N-1}p_iu_i^2\overset{(*)}{=}$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}f_iu_i\le\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N-1}f_i^2+\sum_{i=1}^{N-1}u_i^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1}u_i^2\le\sum_{i=1}^{N-1}f_i^2$$

$\Rightarrow$ вот априорная оценка в норме $\|u_h\|_h^2:=h\cdot(u_h,u_h)$: $\|u_h\|_h\le\|f_h\|_h$.

$\Rightarrow$ схема устойчива. чтд.

(+)

Зачёт.