3) $\lambda_i \geq 0$, $i = 0 \dots m$

② Если $\hat{x}$ — допустимая точка (*), выполнены условия 1)–3), то $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$ (*)

③ (условие Слейтера)

Если $\hat{x}$ — допустимая точка (*), выполнены усл. 1)–3)

и $\exists\, x_0 \in A : f_i(x_0) < 0$; $i = 1 \dots m$, то $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$ (*).

<u>Пример</u> найти расстояние от точки $a = (a_1, a_2, a_3)$

до конуса $C = \{x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$

$$\begin{cases} f_0(x) = |\bar{x} - \bar{a}|^2 = \sum_{i=1}^{3} (x_i - a_i)^2 \to \min \\ f_1(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3 \leq 0. \end{cases}$$

f_0 — явно выпуклая, т.к. это сдвинутая норма в квадрате.

f_1 = сумма выпуклых $\Rightarrow$ выпуклая.

$$\Lambda(x) = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 + \lambda_1 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3\right)$$

1) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} \Lambda(x) = \Lambda(\hat{x})$

2) $\lambda_1 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3\right) = 0 \longrightarrow$ если $\lambda_1 = 0$, то $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} \underbrace{\lambda_0}_{\geq 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = \Lambda(\hat{x})$

3) $\lambda_0; \lambda_1 \geq 0$.

понятно, что $\hat{x} = (a_1 a_2 a_3)$

И теперь вопрос, является ли точка a — допустимой.

Если $a \in$ конусу $\Rightarrow \hat{x} = a. \Rightarrow S_{min} = 0$.

Если $a \notin$ конусу $\Rightarrow \hat{x} = a$ не доставляет min если $\sqrt{x_1^2+x_2^2}-x_3=0$,

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ \Lambda(x)=\lambda_0\left((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-a_3\right)^2\right) \text{ — выпуклая ф-ция.} \\ \min\limits_{x\in\mathbb{R}^2}\Lambda(x)=\Lambda(\hat{x}) \\ \lambda_0\geq 0. \end{cases}$$

получили задачу бу. огр. для ф-ции 2-х перем.

$$\Lambda'_{x_1}=\lambda_0\left(2(x_1-a_1)+2\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-a_3\right)\left(\frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)\right)=$$

$$=\lambda_0\left(2x_1-2a_1+2x_1-\frac{2a_3x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)=\lambda_0\left(4x_1-2a_1-\frac{2x_1a_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right):=0.$$

$$\Lambda'_{x_2}=\lambda_0\left(4x_2-2a_2-\frac{2x_2a_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)=0.$$

но $\lambda_0\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x_1-2a_1=\dfrac{2x_1a_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ 4x_2-2a_2=\dfrac{2x_2a_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2x_1-a_1}{2x_2-a_2}=\dfrac{x_1}{x_2}$

$$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2}-a_1x_2=\cancel{2x_1x_2}-a_2x_1$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{a_2}{a_1}x_1$$

но $2x_1-a_1=\dfrac{x_1a_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\dfrac{x_1a_3}{\sqrt{x_1^2+\frac{a_2^2}{a_1^2}x_1^2}}=\dfrac{x_1a_3}{\underbrace{|x_1|}_{\operatorname{sgn}x_1\cdot x_1}\sqrt{1+\frac{a_2^2}{a_1^2}}}=\dfrac{\operatorname{sgn}x_1\cdot|a_1|a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$

$$2x_1-a_1=\frac{x_1a_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

$$(x_1^2+x_2^2)(2x_1-a_1)^2=x_1^2a_3^2$$

$$\frac{a_2^2x_1^2}{a_1^2}$$

$$x_1^2(a_1^2+a_2^2)(2x_1-a_1)^2=x_1^2a_3^2a_1^2$$

$$(2x_1-a_1)^2=\frac{a_3^2a_1^2}{a_1^2+a_2^2}$$

$$\Rightarrow 2x-a_1=\pm\frac{a_3a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1\pm\dfrac{a_1a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right) \\ x_2=\dfrac{1}{2}\left(a_2\pm\dfrac{a_2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right) \\ x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(a_1^2\pm\dfrac{2a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\dfrac{a_1^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}+a_2^2\pm\dfrac{2a_2^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\dfrac{a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2\pm2a_3\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\pm a_3\right)^2}=\frac{1}{2}\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}\pm a_3\right|$$

Вопрос: у нас 2 точки, доставляющие min Λ(x).
Нам они обе подходят? Обе доставляют min расстояние?

$$\Lambda(x)-\lambda_0\left((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-a_3\right)^2\right)$$

$$\Lambda(x)=\left(-\frac{a_1}{2}\pm\frac{1}{2}\frac{a_1a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2+\left(-\frac{a_2}{2}\pm\frac{1}{2}\frac{a_1a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)^2+\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-a_3\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(a_1^2\mp\frac{2a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{a_1^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(a_2^2\mp\frac{2a_2^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(a_1^2\pm\frac{2a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{a_1^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}+a_2^2\pm\frac{2a_2^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)$$

$$= \frac{2a_3}{2}\sqrt{\underbrace{a_1^2+a_2^2 \pm 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,a_3 + a_3^2}_{a_3(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\pm a_3)^2}} + a_3^2$$

Стр 2

$\Rightarrow$ лучшесть точки зависит от $-a_3(\sqrt{a_1^2+a_2^2} \pm a_3)^2$.

Если $\sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3 \le 0 \Rightarrow \bar a \in$ конусу $\Rightarrow$ в нём минимум.

Если $\sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3 \geq 0$, т.е $\bar a$ – вне конуса.

$\Rightarrow -a_3\cdot(\sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3) \ \cup \ -a_3(\sqrt{a_1^2+a_2^2} + a_3)$

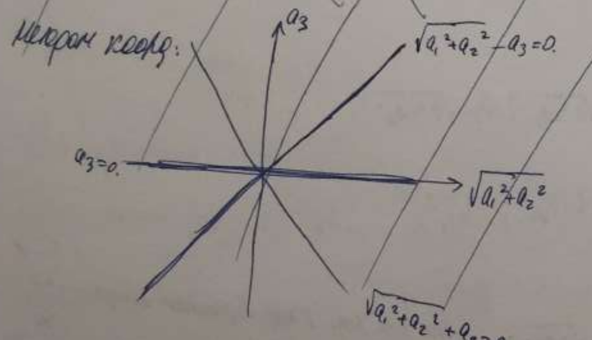
Если $\sqrt{a_1^2+a_2^2} + a_3 \le 0 \Rightarrow a_3 \le -\sqrt{a_1^2+a_2^2} \le 0$. $\Rightarrow -2a_3\cdot(+\frac{1}{2})(\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3) \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3 \geq 0$. $-2a_3\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3) \geq 0$.

$a_3(a_3 - \sqrt{\ldots}) < a_3(a_3 + \sqrt{\ldots})$

$a_3 - \sqrt{\ldots} < a_3 + \sqrt{\ldots}$

Нелоран коорд:

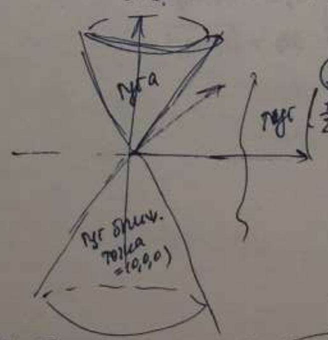


$$-a_3(\sqrt{a_1^2+a_2^2} + a_3)^2 \ \vee \ -a_3(\sqrt{a_1^2+a_2^2} - a_3)^2$$

Если $a_3 > 0$, то $<$

Если $a_3 < 0$, то $<$

$\Rightarrow$ оба раза ~~[illegible]~~ минимум доставляет точка с $-a_3(\sqrt{a_1^2+a_2^2} + a_3)^2$.



тут A $\left(\frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a_1 a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right); \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{a_2 a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right); \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2} + a_3\right)^2\right)$

Она автом. допуст, т.к $\sqrt{x_1^2+x_2} = x_3$.

~~Если мы ниже перевёрнутого конуса, то эта точка не будет допустимой, т.е. $\sqrt{x_1^2+x_2} \neq x_3$.~~

~~Если точка не допустима – то где искать минимум?~~

но ещё мы в точке, где $N(x)$ не дифф – это $(0,0,0)$.
есть подозр. точка –

И выбираем из A и $(0,0,0)$. И если мы внутри перевёрнутого, то точка $(0,0,0)$ ближе, чем A.

ответ: в конусе $\Rightarrow a$; ~~вне~~ иначе – точка A; в перевёрнутом конусе $\Rightarrow (0,0,0)$

Сравним $\Delta(A)$ и $\Delta(0)$:

$$\Delta(x) = \underset{=1}{\lambda_0}\left((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2\right)+\underset{=1}{\lambda_1}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}-a_3\right)^2$$

$$\Delta(0) = \underset{=1}{\lambda_0}\left(a_1^2+a_2^2\right)+a_3^2$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{a_1a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right);\ \frac{1}{2}\left(a_2+\frac{a_2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right);\ \frac{1}{2}\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right|\right)$$

$$\Lambda(A) = \frac{1}{4}\left(a_1^2 \cancel{\pm\frac{2a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}}+\frac{a_1^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(a_2^2\cancel{-\frac{2a_2^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}}+\frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)+\frac{1}{4}\left(a_1^2\cancel{+\frac{2a_1^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}}+\frac{a_1^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}+a_2^2\cancel{\pm\frac{2a_2^2a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}}+\frac{a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)$$

$$-2a_3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right)^2}+a_3^2=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2a_3^2+a_2^2a_3^2}{a_1^2+a_2^2}\right)-a_3\cdot\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right|+a_3^2=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)+\frac{1}{2}a_3^2-a_3\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right|+a_3^2=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)-a_3\cdot\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right|+\frac{3}{2}a_3^2$$

Когда $\Delta(0)<\Lambda(A)$?

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2\overset{?}{<}\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)-a_3\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right|+\frac{3}{2}a_3^2$$

$$\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)\overset{?}{<}-a_3\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right)^2}+\frac{a_3^2}{2}$$

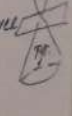
$$2a_3\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right)^2}<a_3^2-(a_1^2+a_2^2)=\left(a_3+\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)\left(a_3-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)$$

$$\cancel{4a_3^2\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3\right)^2}$$

$$4a_3^2\cdot\left(\cancel{\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3}\right)^2<\left(\cancel{\sqrt{a_1^2+a_2^2}+a_3}\right)^2\cdot\left(a_3-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2$$

$$4a_3^2<\left(a_3-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2$$

$$\left[\begin{array}{l}2a_3<a_3-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\\-2a_3<a_3-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a_3<-\sqrt{a_1^2+a_2^2}\\3a_3>\sqrt{a_1^2+a_2^2}\end{array}\right.$$

— это как раз в перевёрнутом конусе 

А с этим что делать?

22.10.20. Вар ОЛУ. д/з от семинара 7.

② Найти расстояние от точки $a=(a_1 \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$, лежащей вне эллипсоида $\frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}=1$, до этого эллипсоида.

$$\begin{cases} f_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2 \longrightarrow \min \\ f_1(x) = \frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots \frac{x_n^2}{b_n^2}-1 \le 0. \end{cases}$$

Видно, что f_0 и f_1 — обе выпуклые.

$$\Lambda(x) = \lambda_0 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2 + \lambda_1 \cdot \left(\frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}-1\right)$$

1) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \Lambda(x) = \Lambda(\hat{x})$

2) $\lambda_1\left(\frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}-1\right)=0 \longrightarrow$ если $\lambda_1=0$, то $\min \sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2 = \Lambda(\hat{x})$

3) $\lambda_0;\lambda_1 \ge 0.$

$\Rightarrow \hat{x} = (a_1 \dots a_n)$ — не подх, т.к $(a_1 \dots a_n)$ — не явл. допустимой, т.к допустимые — внутри эллипсоида, а $(a_1\dots a_n)$ по усл - вне эллипсоида.

если $\frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}-1=0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}=1 \\ \Lambda(x) = \underset{1\text{ - т.к расстояние явл}\ge 0.}{\lambda_0}\left((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\dots+(x_n-a_n)^2\right) \rightarrow \min \end{cases}$$

получили задачу на min с 1 усл. типа равенства.

$$\tilde{\Lambda}(x) = \lambda_0\left((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\dots+(x_n-a_n)^2\right)+\lambda_1\left(\frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}-1\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda}'_{x_1} = \lambda_0 \cdot 2(x_1-a_1) + \lambda_1 \cdot \frac{2x_1}{b_1^2} = 0. \\ \vdots \\ \tilde{\Lambda}'_{x_n} = \lambda_0 \cdot 2(x_n-a_n) + \lambda_1 \cdot \frac{2x_n}{b_n^2} = 0. \\ \frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}=1. \end{cases}$$

Если $\lambda_0=0$, то либо $\lambda_1=0 \Rightarrow \bar{\lambda}=(\lambda_0;\lambda_1)=0 \Rightarrow$ против.

либо все $x_i=0 \Rightarrow$ не удовл. ур-ю $\frac{x_1^2}{b_1^2}+\dots+\frac{x_n^2}{b_n^2}=1.$

$\Rightarrow \lambda_0 \ne 0 \Rightarrow$ положим $\lambda_0=1$ — т.к ищем min.

$\Rightarrow (x_i-a_i)+\frac{\lambda_1 x_i}{b_i^2}=0. \Rightarrow b_i^2 x_i - a_i b_i^2 + \lambda_1 x_i = 0.$

$x_i(b_i^2+\lambda_1) = a_i b_i^2$

$$\Rightarrow x_i = \frac{a_i b_i^2}{b_i^2+\lambda_1} \Rightarrow \frac{a_1^2 b_1^4}{b_1^2(b_1^2+\lambda_1)^2}+\dots+\frac{a_n^2 \cdot b_n^4}{b_n^2(b_n^2+\lambda_1)^2}=1.$$