21.09.20. Дискр. матем. д/з от семинара 3. Токаева Александра 409.

① Вспомнить, как искать частное решение для неоднор. разностного ур-я.

Решение: Мы уже выяснили, что имеется глубокая аналогия между разностным ур-ем $a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \ldots + a_n y_{k+n} = f_k$

и обыкновенным дифф. ур-ем с постоянными коэф.

$\tilde{a}_0 y(x) + \tilde{a}_1 y'(x) + \ldots + \tilde{a}_n y^{(n)}(x) = \tilde{f}(x)$.

Как и в случае дифф. ур-й, частное решение разностного ур-я для правой части специального вида может быть найдено методом неопр. коэф.:

Пусть $f_k = \alpha^k (P_{m_1}(k) \cos\beta k + \tilde{P}_{m_2}(k) \sin\beta k)$, где $P_{m_1}(k)$, $\tilde{P}_{m_2}(k)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соотв.

Тогда частное решение может быть найдено в виде

$y_k^{(част)} = k^s \cdot \alpha^k (Q_n(k) \cos\beta k + \tilde{Q}_n(k) \sin\beta k)$, (*)

где $s = 0$, если $\alpha e^{\pm i\beta}$ не явл. корнями хар-ур-я,

и s = кратности корня, если являются.

$n = \max(m_1; m_2)$ – степень многочленов $Q_n(k)$ и $\tilde{Q}_n(k)$.

Чтобы найти коэф. многочленов $Q_n(k)$ и $\tilde{Q}_n(k)$, надо подставить выражение (*) в неоднор. ур-е и приравнять коэф. при подобных членах.

② $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$

Найти рекурренту для посл-ти $f_0 f_1 \ldots f_n \ldots$

Решение: Пусть $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$

$B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$.

Сразу скажем ответ: рекуррента берется из вида знаменателя:

$$\boxed{b_m f_{n+m} + b_{m-1} f_{n+m-1} + \ldots + b_0 \cdot f_n = 0.}$$

А многочлен $A(x)$ влияет только на значения $f_0 \ldots f_k$.

Почему так: ну раскроем скобки в выражении $A(x) = B(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ и приравняем коэф. при одинаковых степенях:

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k f^k = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$

Для $i = 0 \ldots k$: $a_i = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot f_{m-i}$ ← отсюда, зная $a_0 \ldots a_k$, найдём $f_0 \ldots f_k$.

Для $i \geq k+1$: $0 = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot f_{m-i}$ – вот обещанная рекуррента.

(3) $a_0 = 1.$

$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, a_k = 1.$

найти $a_n = ?$

Решение: пусть $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ – произв. ф-ция посл-ти a_n.

тогда вспомним, что $\varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) x^n$

$$\Rightarrow F(x) \cdot F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}}_{\overset{\parallel}{1 \text{ по усл}}} \Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow F^2 = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \cdot (-1)^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} (-1)^k x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \cdot \frac{2^k \cdot (2k-1)!!}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \cdot \frac{2^k k!\,(2k-1)!!}{k!\,k!} x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{(2k)!!\,(2k-1)!!}{k!\,k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{(2k)!}{k!\,k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} \cdot C_{2k}^{k} \cdot x^k.$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{C_{2n}^{n}}{4^n}}$$ ответ.

(4.) Выписать эксп. произв. ф-цию для $\left\{ {n \atop k} \right\}$ и $\left[{n \atop k} \right]$.

Решение: эксп. произв. ф-ция: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$

а) Для $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Мы знаем, что $\left\{ {n \atop k} \right\}$ = кол-во способов разбить n-элем. мн-во ровно на k непустых подмнв.
Заметим, что тогда кол-во сюръективных отображений n-элем. мн-ва в k-элемент-ное мн-во $= k! \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$ – (ну потому что подмн-ва неупорядоченные, а компоненты в отображении – упорядоченные). потому будем считать для отображений, а потом поделим результат на $k!$

Число наборов, в каждом из которых символ a_i входит n_i раз равно $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$

$\Rightarrow$ число сюръект. отобр. n-элем мн-ва на k-элем мн-во $= \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$

но суммы такого вида как раз появляются после раскрытия скобок в $(e^x-1)^k$:

$$(e^x-1)^k = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^t}{t!} + \dots \right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{x^{n_1+\dots+n_k}}{n_1! \dots n_k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \right) \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$\Rightarrow$ для числа сюръект отобр. произв. ф-ция $= (e^x-1)^k$,

а $\boxed{\text{для } \left\{ {n \atop k} \right\} \text{ произв. ф-ция} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}}$ $= \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!}$

б) Для $\left[{n \atop k} \right]$.

Мы знаем, что $\left[{n \atop k} \right]$ = числу элементов группы S_n, каждый из которых представляется в виде произведения ровно k непересек. циклов.
опять рассм. отображения (т.е упорядочим циклы), тогда каждый коэф. для отображений будет равен $k! \left[{n \atop k} \right]$. Но для отображений n-й коэф $= \frac{n!}{n_1 n_2 \dots n_k}$ – внизу нет факториалов, потому что в цикле порядок важен

$$\Rightarrow \underbrace{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^t}{t} + \dots \right)^k}_{\overset{\parallel}{(-\ln(1-x))^k = \left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{x^n}{n_1 \dots n_k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1 n_2 \dots n_k} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{для } \left[{n \atop k} \right] \text{: произв. ф} = \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^k}{k!}}$ $= \sum_{n=k}^{\infty} \left[{n \atop k} \right] \frac{x^n}{n!}$