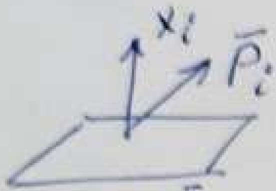
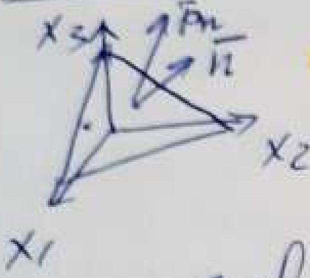
На прошлом занятии введено понятие тензора напряжения.

$\lim\limits_{\Delta S\to 0} \dfrac{\Delta \bar f}{\Delta S} = \bar P_n$ — вектор напряжения



$\bar P_i$ — в-ры напряжения на коорд-х площадках, $\perp$ оси Ox_i



(1) $\bar P_n = \sum\limits_{i=1}^{3} \bar P_i \cdot n_i$ $\quad (\bar n = n_i \bar e_i)$

(2) $\bar P_i = \sigma_{ij} \cdot \bar e_j$

Def $\hat\sigma \sim (\sigma_{ij})$ — т-р напряжения

(1), (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\bar P_n = \sigma_{ij} \cdot n_i \bar e_j \equiv \hat\sigma \cdot \bar n}$ (3)

Из усл-я отсутствия распределенных внутр-х мом-в $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$ (4)

№1 На любой площадке с норм-ю $\bar n$ в-р напр-я направлен вдоль нормали. Как в этом случае выглядит тензор $\hat\sigma$ — ?

Полная система ур-й МСС

1. Закон сохранения массы

(1) t_0 $d\xi^i \overset{\circ}{\partial}_i$ $d\overset{\circ}{V}$

$$d\overset{\circ}{V} = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = |(\overset{\circ}{\partial}_1 \otimes \overset{\circ}{\partial}_2)\overset{\circ}{\partial}_3| = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \sqrt{\overset{\circ}{g}} \quad (5)$$

$$\overset{\circ}{g} = \det(\overset{\circ}{g}_{ij})$$

t $d\xi^i \hat{\partial}_i$ $d\hat{V}$

$$(6)\quad d\hat{V} = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \sqrt{\hat{g}}, \quad \hat{g} = \det(g_{ij})$$

З-н сохр. масс: $d\overset{\circ}{m} = d\hat{m} \Rightarrow$

$$\rho_0 d\overset{\circ}{V} = \rho\, d\hat{V} \Rightarrow \rho_0 = \rho \frac{d\hat{V}}{d\overset{\circ}{V}} = \rho\frac{\sqrt{\hat{g}}}{\sqrt{\overset{\circ}{g}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0 \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \rho\sqrt{\hat{g}}} \quad (7)$$

(2) Рассмотрим подвижный объем сплошной среды (состоящий всё время из одних и тех же точек)

$$(8)\quad m = \int_{V(t)} \rho(\bar{x}, t)\, dV \text{ — масса спл. среды в объеме } V(t)$$

$V(t)$

$$(9)\quad \frac{dm}{dt} = 0$$

Ф-ла диф-я $\int$-ла, взятого по подвижн. объему:

$$(10)\quad \boxed{\frac{d}{dt}\int_V f(\bar{x}, t)\, dV = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v^i)\right] dV}$$ [Седов, т I, гл II, §8]

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v})\right] dV = 0 \text{ для } \forall \text{ объема } V \Rightarrow$$

$$(11)\quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\bar{v} = 0}$$

$$\frac{d\rho(\bar{x},t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \Rightarrow$$

$$\frac{d\rho}{dt} - v^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i} + v^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0 \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\bar{v} = 0} \quad (11')$$

Def Среда несжимаема, если плотность любой индивидуальной ч-цы спл. ср. не меняется:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt}=0 \Rightarrow \operatorname{div}\bar{v}=0} \quad (12)$$

② Уравнение движения спл ср.

Рассм. произвольную часть спл среды, заключенную в объеме V в мом t. Согласно пр-пу Даламбера она находится в равновесии под действием всех приложенных сил, включая силы инерции. $\bar{f}_{ин}=-\rho\bar{a}$

$$(13)\quad \int_V \rho(\bar{f}-\bar{a})dV + \int_\Sigma \bar{P}_n d\Sigma = 0$$

$$\bar{P}_n=\bar{P}_i n_i \Rightarrow \int_\Sigma \bar{P}_n d\Sigma = \int_\Sigma \bar{P}_i n_i d\Sigma \overset{\Gamma\text{-}O}{=} \int_V \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x^i} d\Sigma$$

$$(13)\Rightarrow \int_V \left(\rho\bar{f}+\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x^i}-\rho\bar{a}\right)dV=0 \quad \text{для } \forall\, \bar{V} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x^i}+\rho\bar{f}=\rho\bar{a} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}+\rho f_j=\rho a_j} \quad (14)$$

Э $\quad \bar{a}=\dfrac{d\bar{v}(\bar{x},t)}{dt}=\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x^i}v_i$

Л $\quad \bar{a}=\dfrac{d^2\bar{u}(\bar{x},t)}{dt^2}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i=\rho\frac{d^2u_i}{dt^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i=\rho\frac{dv_i}{dt}$$

③ Геометрич. соотн-я

(15) $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}\right)$$

(15') $$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)$$

① $\rho, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}, \bar{u}$
⑤ $\rho\ \hat{v}, \hat{\sigma}, \bar{v}$ } (16 неизв-х); ур-я: з-н сохр. мас., ур. дв-я, геом. соотн. ⇓ (10 ур-й)

④ Определяющие соотн-я

1) Идеальн. ж-ть:

$$\boxed{\bar{p}_n = -p\bar{n} \Rightarrow \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}}$$ (16)

Новая неизвестная p.
Для замыкания м. исп-ть соотн-я:
а) усл-е несж-ти: $\operatorname{div}\bar{v} = 0$
б) усл-е баротр-ти $p = p(\rho)$
в) соверш. газ: $p = \rho RT$ (при $T = const$)
или + ур-е теплопр-ти: $\Lambda\Delta T = \rho_0 c\frac{\partial T}{\partial t}$ (c — коэф. теплоемк-ти)

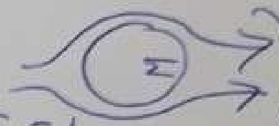
Д/З Получить ур-е движ-я идеальн. ж-ти (ур-е Эйлера)

г) упругое тело при малых деф-х (идеально упругое тело)

(17) $$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}}, \quad \theta = I_{1\varepsilon} = \operatorname{div}\bar{u}$$

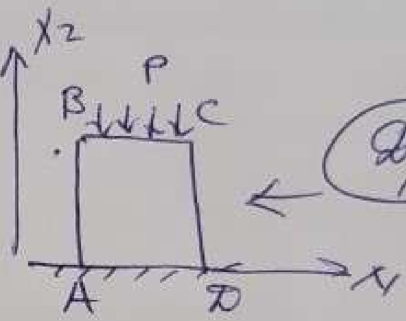
$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E}\sigma\delta_{ij}$, $3\sigma = I_{1\sigma}$, E — модуль Юнга, ν — коэф-т Пуассона

7.5.

+ гр. условия (непротекание: 

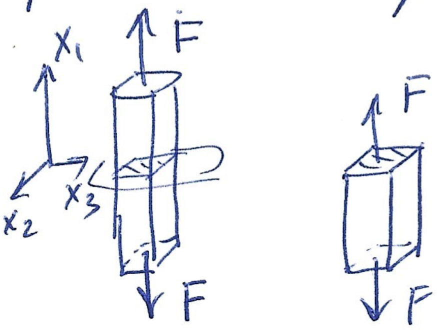
$\vec{v}\cdot\vec{n}\big|_{\Sigma} = 0$)

+ нач. усл-я.

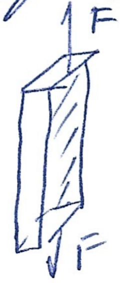


Д/З Записать гр. усл-я

Прим: ① Рассмотрим одноосное растяжение стержня



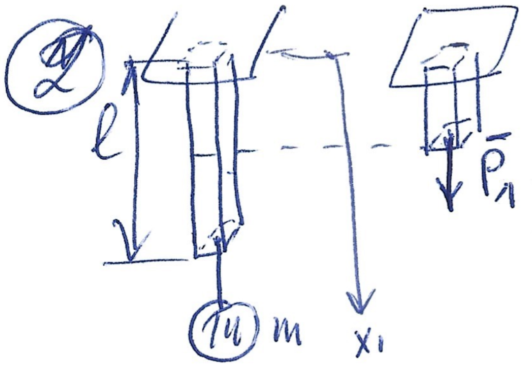
$\bar{P}_1 = \frac{F\cdot\bar{e}_1}{S}$



$\bar{P}_2 = \bar{P}_3 = 0$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

②



$$\bar{P}_1 = \frac{\rho g(l-x_1)\cdot S + mg}{S}\bar{e}_1 = \rho g(l-x_1)\bar{e}_1 + \frac{mg}{S}\bar{e}_1$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \rho g(l-x_1) + \frac{mg}{S}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$$

$$\max \sigma_{11} = \sigma_{11}\Big|_{x_1=0} = \rho g l + \frac{mg}{S}$$

$\sigma_в$ – предел прочности при растяжении $\Rightarrow$

$$\max \sigma_{11} \le \sigma_в \Rightarrow \rho g l + \frac{mg}{S} \le \sigma_в$$

$$\Rightarrow l_{max} = \frac{\sigma_в - \frac{mg}{S}}{\rho g}$$

N28.27

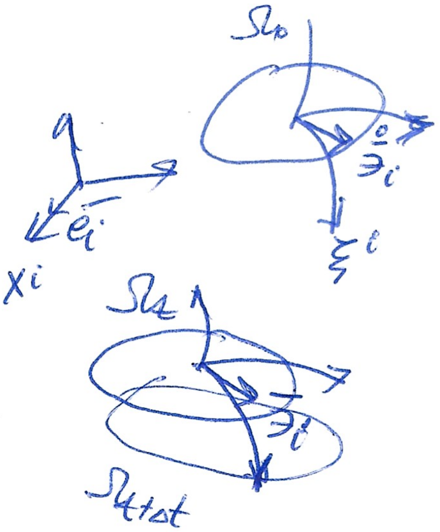
$$\sigma_в = 3500\,\frac{кГ}{см^2} = 3500\cdot 10^5\,\frac{Н}{м^2} = 3{,}5\cdot 10^8\,\frac{Н}{м^2}$$

$$\left.\begin{aligned} mg &= 100\,кГ = 10^3\,Н \\ S &= \pi R^2 = \pi\cdot 10^{-6}\,м^2 \end{aligned}\right\}\ \frac{mg}{S} = 3{,}18\cdot 10^8\,\frac{Н}{м^2}$$

$$l_{max} = \frac{0{,}32\cdot 10^8}{7.8\cdot 10^4}\,м \approx 400\,м.$$

Д/з 28.27

коммент к з-че 7.30 (Э)



$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \cdot \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^j$$

$$v_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t}, \text{ но в б-се } \bar{Э}^i \otimes \bar{Э}^j$$

$$\hat{V} = v_{ij} \cdot \bar{Э}^i \otimes \bar{Э}^j$$

$$\begin{cases} x_1 = \overset{\circ}{x}_1 + a\overset{\circ}{x}_2 \\ x_2 = \overset{\circ}{x}_2 \\ x_3 = \overset{\circ}{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \hat{\varepsilon}_{ДСК} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{a} & 0 \\ \dot{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ в б-се Л.С.К, т.ч. } \bar{Э}^i = \bar{e}_i$$

$$2\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{a} & 0 \\ \dot{a} & 2a\dot{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ в б-се Л.С.К, т.ч. } \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^i = \bar{e}_i$$

$$2\hat{V} = \dot{a}\,\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \dot{a}\,\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 =$$

$$\left\langle \bar{Э}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Э}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Э}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{e}_1 = \bar{Э}^1 + a\bar{Э}^2 \\ \bar{e}_2 = \bar{Э}^2, \quad \bar{e}_3 = \bar{Э}^3 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \dot{a}\,(\bar{Э}^1 + a\bar{Э}^2) \otimes \bar{Э}^2 + \dot{a}\,\bar{Э}^2 \otimes (\bar{Э}^1 + a\bar{Э}^2) = \dot{a}\,\bar{Э}^1 \otimes \bar{Э}^2 + \dot{a}\,\bar{Э}^2 \otimes \bar{Э}^1 + 2a\dot{a}\,\bar{Э}^2 \otimes \bar{Э}^2$$

$$\left.\begin{matrix} \bar{Э}_i = \hat{A}\overset{\circ}{\bar{Э}}_i & \overset{\circ}{\bar{Э}}_i = \hat{A}^{-1}\bar{Э}_i \\ \bar{Э}^i = \hat{A}^{-1T}\overset{\circ}{\bar{Э}}{}^i & \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^i = \hat{A}^T \bar{Э}^i \end{matrix}\right\} \text{ (3.9) [Бровко, Осн МСС, ч I]}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} \hat{V} &= \dot{\varepsilon}_{ij}\,\bar{Э}^i \otimes \bar{Э}^j = \dot{\varepsilon}_{ij}\,\hat{A}^{-1T}\overset{\circ}{\bar{Э}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^j \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1T}\dot{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{\bar{Э}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^j \hat{A}^{-1} = \\ &= \hat{A}^{-1T}\,\dot{\hat{\varepsilon}}\,\hat{A}^{-1} \quad \text{(3.83) [Бровко, осн. МСС, ч I]} \end{aligned} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{A} = \bar{Э}_k \otimes \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^k & \hat{A}^{-1} = \overset{\circ}{\bar{Э}}_k \otimes \bar{Э}^k \\ \hat{A}^{-1T} = \bar{Э}^k \otimes \overset{\circ}{\bar{Э}}_k & \hat{A}^T = \overset{\circ}{\bar{Э}}{}^k \otimes \bar{Э}_k \end{matrix}\right\} \text{(3.10)}$$