$= \sum_{m_i > t} (m_i - t) - \sum_{m_i > t+1} (m_i - t) + \sum_{m_i > t+1} 1 =$

$= \sum_{m_i = t+1} \underbrace{(m_i - t)}_{1} + \sum_{m_i > t+1} 1 = \sum_{m_i = t+1} 1 + \sum_{m_i > t+1} 1 = N(t+1;\lambda) + N(t+2;\lambda) + \dots$

т.е. $(r_t - r_{t+1})$ – число клеток $J_{m,\lambda}$, у которых $m \geq t+1$.

Отсюда $(r_t - r_{t+1}) - (r_{t+1} - r_{t+2}) = r_t - 2r_{t+1} + r_{t+2}$ – число клеток $J_{t+1,\lambda}$ – т.е. размера именно $t+1$.

Формула для числа клеток $J_{m,\lambda}$ у жордановой матрицы A:

$\boxed{N(m,\lambda) = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1}}$ (*), где $r_t = \operatorname{rank}(A - \lambda E)^t$

Теперь с помощью формулы (*) докажем ~~единствен~~ единственность ЖНФ для матрицы B.

Пусть A и D – две ЖНФ для некоторой матрицы B.

Тогда $A = C^{-1}BC$; $D = T^{-1}BT \Rightarrow \begin{cases} B = CAC^{-1} \\ B = TDT^{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow CAC^{-1} = TDT^{-1} \Rightarrow D = (T^{-1}C)A(C^{-1}T) = F^{-1}AF$

поэтому $r_t(D) = \operatorname{rank}(D - \lambda E)^t = \operatorname{rank}(F^{-1}AF - \lambda F^{-1}F)^t =$
$= \operatorname{rank}(F^{-1}(A - \lambda E)F)^t = \operatorname{rank} F^{-1}(A - \lambda E)^t F = \operatorname{rank}(A - \lambda E)^t = r_t(A)$

(т.к. ранг при умножении на невырожденную матрицу не меняется).

Следовательно, $N(m,\lambda)$ у D такое же, как у A.

Это и есть единственность ЖНФ с точностью до перестановки клеток. ЧТД.

Следствие число жордановых клеток размера m с числом λ равно $N(m,\lambda)$ из (*) для любой матрицы A.

Док-во: $\varphi(A) = C^{-1}AC$

при сопряжении $\operatorname{rank}(A - \lambda E) \overset{?}{=} \operatorname{rank}(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) =$
$= \operatorname{rank}(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \operatorname{rank}(A - \lambda E)$.

$\Rightarrow$ числа $r_{m-1}; r_m$ и r_{m+1} такие же. ЧТД.

Это что, значит, что у матриц сразу есть нужные клетки?

Билинейные и квадратичные формы

① F – поле; V – вект. пр-во над F.

Опр. Функция от двух переменных $f(x;y)$ из $V \times V$ в F называется **билинейной формой** (БФ), если:

$\left.\begin{array}{l} f(\alpha x + \alpha' x'; y) = \alpha f(x;y) + \alpha' f(x';y) \\ f(x; \beta y + \beta' y') = \beta f(x;y) + \beta' f(x;y') \end{array}\right\}$ линейность по каждому из аргументов.

$\forall \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in F$; $\forall x, y, x', y' \in V$

② Матрица БФ

Пусть $e_1 \dots e_n$ — базис V.

Обозначим $f_{ij} = f(e_i; e_j)$

Опр. $F = (f_{ij}) = \begin{pmatrix} f_{11} \dots f_{1n} \\ f_{n1} \dots f_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица БФ в базисе $\{e_1 \dots e_n\}$.

Координатная запись:

Пусть $u = \sum x_i e_i$; $v = \sum y_j e_j$

Тогда $f(u, v) = f(\sum x_i e_i; \sum y_j e_j) = \sum\limits_{ij} x_i y_j f_{ij} = X^T F Y$,

где $F = (f_{ij})$ — матрица f в этом базисе,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = (x_1 \dots x_n)$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

③ Изменение матрицы БФ при замене базиса пр-ва

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ и $\{e_1' \dots e_n'\}$ — два базиса V и C — матрица перехода $\{e_i\} \Rightarrow \{e_i'\}$.

Если $u = \sum x_i e_i = \sum x_i' e_i'$; $v = \sum y_j e_j = \sum y_j' e_j'$,

то $X = CX'$; $Y = CY'$;

Отсюда $f(u, v) = X^T F Y = (X'^T C^T) F (CY') = X'^T (C^T F C) Y'$,

где F — матрица f в базисе $\{e_1 \dots e_n\}$.

С другой стороны, $f(u, v) = X'^T F' Y'$, где F' — матрица f в $\{e_i'\}$.

Лемма

Если $\forall$ столбцов $X'; Y'$ выполняется равенство $X'^T A Y' = X'^T B Y'$, то матрицы A и B равны.

Док-во: Возьмём $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — $\mathcal{N}$ i ; $Y' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — $\mathcal{N}$ j

$\Rightarrow X'^T A Y' = a_{ij} = b_{ij} = X'^T B Y' \Rightarrow A = B$.

$\Rightarrow$ из леммы $\boxed{F' = C^T F C}$ Знать!

12.03.18. Лин. алгебра. Лекция 10.

④ Симметрическая и кососимметрическая форма.

Опр. f - симметрическая БФ, если $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall x,y \in V$

Опр. f - кососимметрическая БФ, если $f(x,y) = -f(y,x)$ $\forall x,y \in V$

! $\operatorname{char} P \neq 2$, иначе "+" и "−" сливаются.

Свойства:

1) f симм. $\Leftrightarrow$ её матрица симм, т.е. $F^T = F$.

2) f кососим. $\Leftrightarrow$ её матрица кососим, т.е. $F^T = -F$

Опр. Ядро симм. БФ (кососимм):

$\ker f = \{x \in V \mid f(x,v) = 0 \ \forall v \in V\}$.

Ранг БФ: $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} F$ (её матрица)

Мы знаем, что при замене базиса $F' = C^T F C$.

$\Rightarrow \operatorname{rank} f$ не зависит от базиса.

Опр. БФ невырождена, если $\operatorname{rk} f = \dim V$ (т.е. $\det F \neq 0$)

⑤ Канонический базис для симм. БФ

Опр. Базис $e_1 \dots e_n$ пр-ва V - канонический для симм. БФ f, если $f(e_i; e_j) = 0$ $\forall i \neq j$ (т.е. она диагональная)

Теорема $\forall$ ($\operatorname{char} P \neq 2$) любой симм. БФ существует (хотя бы один) канонический базис.

Док-во: Индукция по $n = \dim V$.

$n = 1$ - очевидно, т.к. это скалярный оператор, его матрица - число. Она диагональная.

Пусть для всех размерностей $< n$ базис удалось найти.

Пусть $f(e_n; e_n) = b \neq 0$.

Положим $e_i' = e_i - \frac{a_i e_n}{b}$, где $a_i = f(e_i; e_n)$; $i = 1 \dots n-1$.

Тогда $e_1' \dots e_{n-1}' e_n$ - тоже базис V, причём $f(e_i'; e_n) = 0$,

т.к. $f(e_i'; e_n) = f(e_i - \frac{a_i e_n}{b}; e_n) = f(e_i; e_n) - \frac{a_i}{b} \underbrace{f(e_n, e_n)}_{=b} =$

$= f(e_i; e_n) - a_i = f(e_i; e_n) - f(e_i; e_n) = 0$.

По предп. индукции в $U = \langle e_1' \dots e_{n-1}' \rangle$ существует канонический базис $e_1'' \dots e_{n-1}''$ для формы f,

т.е. $f(e_i''; e_j'') = 0$ $\forall i = 1 \dots n-1$.

Теперь обозначим $e_n'' = e_n$.

Тогда $e_1'' \dots e_n''$ - канонический базис.

(т.е. e_i'' - это лин. комб. каких-то из $e_1' \dots e_{n-1}'$ $\Rightarrow f(e_i''; e_n) = 0$, т.к. $f(e_i'; e_n) = 0$ и f – билинейная $\Rightarrow f(e_i''; e_n) = \sum f(e_i'; n) = \sum 0 = 0.$)

$\Rightarrow$ если $\exists\, x$ такое, что $f(x,x) \neq 0$, то всё доказано.

Если же $f(x,x) = 0 \ \forall x \in V$, то

$$0 = f(x+y; x+y) = \underbrace{f(x,x)}_{0} + \underbrace{f(y,y)}_{0} + f(y;x) + f(x;y) = 2f(x;y)$$

$\Rightarrow f \equiv 0$. Для неё любой базис канонический ◄

Следствие Для любой симм. матрицы F существует невырожденная C такая что $C^{-1}FC$ будет диагональной.

(6) Квадратичные формы

Опр. $q: V \to F$ (основное поле) называется **квадратичной формой** если $\exists$ симметричная БФ f такая, что $q(x) = f(x;x)$.
В этом случае говорят, что f **полярная БФ** для q.

Предложение (char $F \neq 2$) Полярная БФ определена однозначно.

Док-во: $f(x+y; x+y) = f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + f(y,x)$

$\Rightarrow f(x,y) = \dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$, т.е. по q восстанавливается ◄

Опр. матрица квадратичной формы – это матрица её полярной БФ: $F = (f_{ij})$, где $f_{ij} = f(e_i; e_j)$

Пример пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. найти F.

$q(x) = f(x,x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3; x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1^2 f(e_1;e_1) +$
$+ x_2^2 f(e_2;e_2) + x_3^2 f(e_3;e_3) + x_1x_2 f(e_1;e_2) + x_1x_2 f(e_2;e_1) + x_1x_3 f(e_1;e_3) +$
$+ x_1x_3 f(e_3;e_1) + x_2x_3 f(e_2;e_3) + x_2x_3 f(e_3;e_2) = x_1^2 f(e_1;e_1) + x_2^2 f(e_2;e_2) +$
$+ x_3^2 f(e_3;e_3) + 2x_1x_2 f(e_1;e_2) + 2x_1x_3 f(e_1;e_3) + 2x_2x_3 f(e_2;e_3)$

И это $= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$

$\Rightarrow f_{11} = 1; f_{22} = 1; f_{33} = 1; f(e_1,e_2) = 1; f(e_1;e_3) = 2; f(e_2;e_3) = 0 \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Опр. Ранг квадр. формы – это ранг полярной БФ.

Опр. q – **невырожденная квадр. форма**, если rank q = dim V, (т.е. det $q \neq 0$; т.е. det полярной БФ $\neq 0$).

Следствие (теорема о каноническом базисе)
Если rank $q = r$, то $\exists$ базис V, в котором $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$

Опр. **канонический вид** квадр. формы: $q(x) = \sum \lambda_i x_i^2$

Опр. **нормальный вид** квадр. формы: $q(x) = \sum \lambda_j x_j^2$, где все $\lambda_j = \pm 1$ или 0.

(7) Алгоритм Лагранжа приведения к каноническому виду

Пусть $q(x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$

Метод заключается в выделении полных квадратов.

(1) пусть один из $a_{ii} \neq 0$. например, $a_{11} \neq 0$.

Тогда $q(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + p(x)$,

где $p(x) = \sum_{i,j \geq 2} b_{ij}x_i x_j$ – т.е $p(x)$ не зависит от x_1.

Положим $z_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$; $z_2 = x_2 \dots z_n = x_n$.

Тогда $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = CX$, где $\det C \neq 0$; $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & - & - & 0 \; 1 \end{pmatrix}$

C невырожденная $\Rightarrow \exists C^{-1}$.

$\Rightarrow X = C^{-1}Z$, поэтому C^{-1} можно считать матрицей перехода к новому базису $e_1' \dots e_n'$, в котором вектор $x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ имеет вид $z_1e_1' + \dots + z_ne_n'$ (действительно, старые координаты x выразились через новые коорд. z).

по предп. индукции $\exists$ невырожденная замена переменных $\{z_2 \dots z_n\} \to \{y_2 \dots y_n\}$ такая что $p(y) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i y_i^2$

Тогда положим $y_1 = z_1$

$\Rightarrow q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_1 = \frac{1}{a_{11}}$ и $(y_1 \dots y_n)$ – коорд. в некотором базисе, т.к. $Y = DX$ и $\det D \neq 0$.

(2) предположим, что все $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$. пусть $a_{12} \neq 0$ (не все $x_e = 0$)

Сделаем замену: $x_1 = y_1 + y_2$; $x_2 = y_1 - y_2$; $x_j = y_j$; $\forall j \geq 3$.

Тогда $X = CY$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ и $\det C = -2 \neq 0$.

$\Rightarrow \exists$ новый базис, в котором среди новых коорд. появится ненулевой коэф. a_{ii}.

$q(y) = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + q'(y)$, где в $q'(y)$ нет y_1^2

$\Rightarrow$ далее как в пункте (1).

(3) Все $a_{ij} = 0 \Rightarrow q$ нулевая. чтд.

(8) Вещественная квадратичная форма

$q = q(x)$ – квадр. форма на V, $\dim V = n$ над $\mathbb{R}$.

из алгоритма Лагранжа следует, что $\exists$ базис V, в котором $q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2$, где $r = \operatorname{rank} q$

(т.к. все $a_{ii} = \pm 1$ или 0)

Теорема (закон инерции)
число полож. и отриц. коэф. в нормальном виде вещест. квадр. формы не зависит от выбора базиса.

Док-во: пусть $q = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = (x_1')^2 + \ldots + (x_t')^2 - (x_{t+1}')^2 - \ldots - (x_r')^2$ в базисах e_i и e_i'

предположим, что $t < s$.
обозначим $U = \langle e_1 \ldots e_s \rangle$; $W = \langle e_{t+1}' \ldots e_n' \rangle$.
Тогда $\dim U + \dim W = s + (n-t) > n$.
$\Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$.
Но тогда $\forall\, a \neq 0 \in U \cap W$ имеем:

$$a = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i e_i = \sum_{j=t+1}^{n} \beta_j e_j'$$

$$\Rightarrow q(a) = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_s^2 > 0$$

$$\text{и } q(a) = -\beta_{t+1}^2 - \ldots - \beta_r^2 \leq 0$$

противоречие. $\Rightarrow t = s$. чтд.