07.04.2022. Теория игр ДЗ 6.

(16) Док-ть, что если $V_{n-1} \le 1$, то $V_n = \frac{V_{n-1}+1}{3-V_{n-1}}$.

Отсюда $V_n = \frac{N-1}{N+1}$.

Решение: Пишем матрицу 1-го игрока (охранника), или вора.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & V_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$V_n = \mathrm{val}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & V_{n-1} \end{pmatrix}$$

Пусть стратегия $R = (p; 1-p)$, стратегия шпиона $= (q; 1-q)$

$\Rightarrow \Pi_R(p;1-p;q;1-q) = -pq + p(1-q) + q(1-p) + (1-p)(1-q)V_{n-1} =$

$= p(1-2q) + (1-p)(q + (1-q)V_{n-1})$

Максимизируем это по p, а затем то, что получится — минимизируем по q:

1) Если $1-2q > q + (1-q)V_{n-1}$,

т.е. $q(3-V_{n-1}) < 1 - V_{n-1}$,

т.е. $q < \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}$, то $p = 1$, выигрыш $\Pi_R = 1-2q$.

теперь $1-2q \longrightarrow \min\limits_{q:\, q < \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}}$

$\Rightarrow$ ~~выигрыш~~ цена игры $= 1-2q \Big|_{q = \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}} = 1 - \frac{2(1-V_{n-1})}{3-V_{n-1}} = \frac{3-V_{n-1}-2+2V_{n-1}}{3-V_{n-1}} = \frac{1+V_{n-1}}{3-V_{n-1}}$

2) Если $1-2q < q + (1-q)V_{n-1}$,

т.е. $q(3-V_{n-1}) > 1 - V_{n-1}$,

т.е. $q > \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}$, то $p = 0$, выигрыш $\Pi_R = q(1-V_{n-1}) + V_{n-1}$

теперь $q(1-V_{n-1}) + V_{n-1} \longrightarrow \min\limits_{q:\, q > \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}}$

$\Rightarrow$ цена игры $= q(1-V_{n-1}) + V_{n-1} \Big|_{q = \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}} = \frac{(1-V_{n-1})^2}{3-V_{n-1}} + V_{n-1} = \frac{1-2V_{n-1}+\cancel{(V_{n-1})^2}+3V_{n-1}-\cancel{(V_{n-1})^2}}{3-V_{n-1}} = \frac{1+V_{n+1}}{3-V_{n-1}}$

3) Если $1-2q = q + (1-q)V_{n-1}$,

т.е. $q(3-V_{n-1}) = 1 - V_{n-1}$

т.е. $q = \frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}$, то p — любое, выигрыш $= 1 - 2\left(\frac{1-V_{n-1}}{3-V_{n-1}}\right) = \frac{3-V_{n-1}-2+2V_{n-1}}{3-V_{n-1}} = \frac{1+V_{n-1}}{3-V_{n-1}}$

Итак, мы доказали, что $V_n = \frac{1+V_{n-1}}{3-V_{n-1}}$

Докажем, что $V_n = \frac{N-1}{N+1}$

База - очев.

По индукции: пусть $V_{n-1} = \frac{N-2}{N}$ - доказано.

$$\Rightarrow V_n = \frac{1+V_{n-1}}{3-V_{n-1}} = \frac{1+\frac{N-2}{N}}{3-\frac{N-2}{N}} = \frac{N+N-2}{3N+N+2} = \frac{2N-2}{4N+2} = \frac{N-1}{N+1}.\ \text{ч.т.д.}$$

(17) Док-ть: цена игры с началом в x равна $B^n f(x)$, где B^n – n-я степень оператора B.

Док-во: Ну если $n=1$, то цена игры $= Bf(x)$ – очев.

Пусть для $k=n-1$ уже верно, что $V_k = B^k f(x)$.

Докажем для $k=n$.

По принципу динамич. программирования:

$$V_n = \min_{s_R\in S_R}\max_{s_C\in S_C}\left[f(B^{n-1}f(F(x,s_R,s_C)) + \Pi(x,s_R,s_C)\right] = B^n f(x).\ \text{ч.т.д.}$$

(18) Док-ть, что если δ – это вер-ть окончания игры, то среднее кол-во шагов $= \frac{1}{1-\delta}$.

Док-во: $P(\text{кол-во игр} = k) = \underbrace{(1-\delta)^{k-1}}_{\text{т.е. }(k-1)\text{ первых раз игра не закончилась}} \cdot \delta$ ← на k-й раз игра закончилась

$$\Rightarrow E(\text{число игр}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-\delta)^{k-1}\cdot\delta = \cancel{k\delta\sum_{n=0}^{\infty}(1-\delta)^n = \frac{k\delta}{1-(1-\delta)}}\ \delta\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\gamma^{k-1}\right) = \frac{\delta}{\delta^2} = \boxed{\frac{1}{\delta}}$$

т.к. $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k = \frac{\gamma}{1-\gamma}$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\right)'_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\gamma^{k-1} = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)'_\gamma = \frac{1\cdot(1-\gamma)-(-1)\gamma}{(1-\gamma)^2} = \frac{1}{(1-\gamma)^2} = \frac{1}{\delta^2}$$