ВВЕДЕНИЕ

1. Определения.

Пусть дано поле F. Множество V с операциями сложения и умножения на элементы поля называется *векторным (линейным) пространством над полем F,* если выполнены следующие свойства:

1 $\circ$ V - абелева группа по сложению.

2 $\circ$ Определено умножение скаляров из поля F на элементы V, результатом этого умножения является новый элемент V, причем:

- $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$;
- $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$;
- $\alpha(u+v)=\alpha u+\beta v$;

где $\alpha,\beta\in F; u,v\in V$

3 $\circ$ В поле есть единичный скаляр $1\bullet v=v$.

Опр. *Вектором* называется элемент векторного пространства.

2. Линейная зависимость.

Векторы $v_1,...,v_n$ называются *линейно зависимыми* тогда и только тогда, когда $\exists\lambda_1...\lambda_n\in F$ (не все равные 0), такие, что $\lambda_1 v_1+...+\lambda_n v_n=0$.

Следствие. $v_1,...,v_n$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда*
$\lambda_1 v_1+...+\lambda_n v_n=0 \Leftrightarrow \lambda_1=...=\lambda_n=0$

Набор векторов $v_1,...,v_n$ будем называть *базисом* V, если

1 $\circ$ $\forall x\in V\ \exists\lambda_1...\lambda_n\in F$ такие, что $x=\lambda_1 v_1+...+\lambda_n v_n$.

2 $\circ$ $v_1,...,v_n$ линейно независимы.

Предложение 1. *Пусть* $\{u_1...u_k\}$ *и* $\{v_1...v_n\}$ *- два базиса пространства. Тогда* $k=n$.

Разложим векторы первого базиса по второму базису $u_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}v_j\ \forall i\ 1\le i\le n$. Если строчки скаляров $\{\alpha_{i1},...,\alpha_{in}\}$ линейно зависимы, то зависимы и $\{u_1...u_k\}$ (так как можно взять их линейную комбинацию с теми же коэффициентами, что обнуляют строки вида $\{\alpha_{i1},...,\alpha_{in}\}$). Так как число линейно-независимых строчек не превосходит n, то $k\le n$. Аналогично
$n\le k\Rightarrow n=k$ □

Опр. *Размерностью* пространства V будем называть число векторов в любом базисе V.
Обозначается $\dim V$.

Предложение 2. *Базис – максимальная линейно независимая система векторов (максимальная – значит наибольшая по включению).*

Действительно, пусть есть вектор, который будучи добавленным к базису, образует вместе с ним по-прежнему линейно независимую систему. Но тогда этот вектор не выражается через вектора базиса! Обратно, если дана максимальная линейно независимая система, то она является базисом, так как любой другой вектор выражается через ее вектора (иначе можно было бы дополнить систему этим вектором). □

Предложение 3. $\dim V = \infty \Leftrightarrow \forall n \ \exists n$ *линейно независимых векторов.*

Будем дополнять систему векторов до базиса. Этот процесс будет продолжаться сколь угодно долго (т.к. иначе пространство имеет конечную размерность). А так как система будет всегда линейно независима, то имеем систем линейно-независимых векторов сколь угодно большой длины. □

4. Матрицы перехода от базиса к базису.

Пусть $\{e_1,...,e_n\},\{e_1',...,e_n'\}$ - два базиса V. Тогда существуют скаляры $a_{ij}\,(1 \le i,\, j \le n)$ такие, что $e_j' = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. Тогда матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $\{e_1,...,e_n\}$ к базису $\{e_1',...,e_n'\}$.

Свойства матрицы A:

1° i-тый столбец матрицы A - столбец координат вектора e_i' в старом базисе (нештрихованном).

2° $\det A \ne 0$.

Задача. Известны матрицы перехода от первого базиса ко второму A и от второго базиса к третьему ***B***. Доказать, что матрица перехода из первой системы в третью $C = AB$.

07.02.05

5. Координаты в различных базисах.

Пусть $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ и $\{e_1',e_2',...,e_n'\}$ - два базиса V, $w \in V, w = x_1e_1 + ... + x_ne_n = x_1'e_1' + ... + x_n'e_n'$.

Теорема.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}$$, *где A - матрица перехода от нештрихованной системы к штрихованной.*

$$\sum_i x_i e_i = w = \sum_j x_j' e_j' = \sum_j x_j' \sum_i a_{ij} e_i = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j' e_i \Rightarrow x_i = \sum_j a_{ij} x_j' \Rightarrow X = AX'.$$ □

6. Изоморфизм векторных пространств.

Отображение $V \to W$, где V и W - векторные пространства над одним и тем же полем F называется изоморфизмом, если для любых $\alpha, \beta \in F;\ x, y \in V$

1) $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

2) φ - биекция

Замечание. Ноль переходит в ноль (так как $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot a) = 0 \cdot \varphi(a) = 0$), и только он, так как преобразование биективно.

Теорема. *Конечномерные векторные пространства* V *и* W *изоморфны* $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

"$\Rightarrow$" Пусть $V \cong W$, $(v_1,...,v_n)$ - базис в V, тогда $w_1 = \varphi(v_1),..., w_n = \varphi(v_n)$ - базис в W. Действительно, пусть эти вектора линейно зависимы, т.е.

$\exists \alpha_1,...,\alpha_n : \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_1\varphi(v_1) + ... + \alpha_n\varphi(v_n) = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0 \Rightarrow$
$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

Значит, единственная нулевая линейная комбинация является тривиальной, то есть $w_1 = \varphi(v_1),..., w_n = \varphi(v_n)$ - действительно базис.

"$\Leftarrow$" $w \in W$. Пусть $w = \varphi(v) = \varphi(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1\varphi(v_1) + ... + \alpha_n\varphi(v_n) = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$. □

ПОДПРОСТРАНСТВО

1. Определение.

V - векторное пространство над F, $U \neq \emptyset$, $U \subseteq V$. U - *подпространство*, если $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x, y \in U$ выполнено $(\alpha x + \beta y) \in U$.

Замечание. U - подпространство относительно тех же операций, что и V.

2. Линейная оболочка.

Пусть $v_1,...,v_k \in V$, тогда *линейной оболочкой* этих векторов называется множество всех их линейных комбинаций. $< v_1,...,v_k >:= \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, \alpha_i \in F\}$.

Теорема. *Линейная оболочка* $v_1,...,v_k$ совпадает с наименьшим подпространством в V, *содержащим эти вектора.*

Действительно, из определения прямо следует, что $<v_1,\dots,v_k>$ - подпространство в V. С другой стороны, любое подпространство, которого содержит вектора $v_1,\dots,v_k$ будет содержать и всевозможные их комбинации, т.е. $<v_1,\dots,v_k>$. Значит $<v_1,\dots,v_k>$ - наименьшее подпространство, содержащее $v_1,\dots,v_k$. □

3. Сумма и пересечение двух подпространств.

Пусть A и B - подпространства в V. *Суммой* $A+B$ этих подпространств будем называть множество $\{a+b, a\in A, b\in B\}$.

Лемма. $A+B$ *и* $A\cap B$ *- подпространства.*

Проверить по определению все свойства. □

Теорема. *Пусть* A,B,C *- подпространства в* V*, тогда*

1. Если $A\cup B$ *- подпространство, то* $A \subseteq B$ *или* $B \subseteq A$

2. если $B \subseteq C$*, то* $(A+B)\cap C = A\cap C + B\cap C$.

Доказательство.

1. Пусть $A\not\subset B$ и $B\not\subset A$, т.е. $\exists a\in A, b\in B: a\notin B, b\notin A$. Но тогда $a+b$ не принадлежит ни B (иначе $(a+b)(\in B)-b(\in B)=a\Rightarrow a\in B$), ни A (иначе $(a+b)(\in A)-a(\in A)=b\Rightarrow b\in A$). Значит $A\cup B$ - не подпространство. Противоречие.

2. Дано, что $B \subseteq C$. Пусть $x\in(A+B)\cap C$. Тогда $x=a+b\ (a\in A, b\in B).\ x(\in C)-b(\in B\Rightarrow\in C)=a\in C.$

Но тогда $a\in A\cap C$ и $x=a+b\in A\cap C+B = A\cap C+B\cap C$ так как $B\subset C$. Обратное включение $(A\cap C+B\cap C)\subset(A+B)\cap C$ выполняется вообще $\forall A,B,C$. Действительно, пусть $x\in(A\cap C+B\cap C)$. Тогда $x=a+b, a\in A\cap C, b\in B\cap C\Rightarrow x\in C$. С другой стороны, $x\in A+B\Rightarrow x\in(A+B)\cap C.$ □

Размерность суммы и пересечения.

Пусть $U,V\subseteq W; \dim U, \dim V<\infty$.

Теорема. $\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$.

Пусть $(e_1,\dots,e_k)$ - базис $U\cap V$. Тогда существуют дополнения его до базисов U и V, т.е. $\exists u_1,\dots,u_m\in U:(u_1,\dots,u_m,e_1,\dots,e_k)$ - базис U и $\exists v_1,\dots,v_n\in U:(v_1,\dots,v_n,e_1,\dots,e_k)$ - базис V. Докажем, что набор $(u_1,\dots,u_k,e_1,\dots,e_k,v_1,\dots,v_n)$ - базис суммы $U+V$. Пусть $\underbrace{\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_ku_k}_{u\in U}+\underbrace{\beta_1e_1+\ldots\beta_ke_k}_{\in U\cap V}+\underbrace{\gamma_1v_1+\ldots+\gamma_nv_n}_{v\in V}=0$. Обозначим за *u* сумму $\sum_{i=1}^{k}\alpha_iu_i$. Тогда *u* – линейная комбинация векторов из U, и в то же время она лежит в V (так как выражается через базис $(v_1,...,v_n,e_1,...,e_k)$ подпространства V). То есть

$u \in U \cap V \Rightarrow \exists \lambda_1,...,\lambda_k : u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j = 0$, но ведь $(u_1,...,u_m,e_1,...,e_k)$ - линейно-независимая система! Значит $\alpha_i = \lambda_j = 0 \Rightarrow \beta_i = \gamma_j = 0 \ \forall i, j$. Линейная независимость доказана. Разложимость любого вектора $U+V$ по этому базису очевидна. $\dim(U+V)$ = число векторов в этом базисе = $\dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. □

4. Прямая сумма подпространств.

Пусть даны подпространства $V_1,...,V_n$ и $W = V_1 + ... + V_n$.

W называется *прямой суммой* этих подпространств (обозначается $W = V_1 \oplus ... \oplus V_n$), если $\forall x \in W \ \ \exists! y_1 \in V_1 ... \exists! y_n \in V_n : x = y_1 + ... + y_n$.

Теорема. *Сумма* $W = V_1 + ... + V_n$ *- прямая* $\Leftrightarrow$ $V_i \cap (V_1 + ... + V_{i-1} + V_{i+1} + ... + V_n) = \{0\}$.

"$\Rightarrow$" Пусть $v \in (V_i \cap (V_1 + ... + V_{i-1} + V_{i+1} + ... + V_n))$. Тогда $v = y_1 + ... + y_{i-1} + y_{i+1} + ... + y_n (y_i \in V_i)$. Но получается $0 + ... + 0 = 0 = y_1 + ... + y_{i-1} + y_{i+1} + ... + y_n - v$ - два разложения нуля! Значит $y_1 = ... = y_n = v = 0$.

"$\Leftarrow$" Пусть все пересечения тривиальны (т.е. это лишь 0). Пусть $v = x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_n$ и, например, $x_i \neq y_i$, то есть пусть разложение вектора не единственно.
Тогда $(y_i - x_i) = (x_1 - y_1) + ... + (x_n - y_n)$, противоречие (пересечение содержит ненулевой элемент). □

ЛИНЕЙНЫЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть V - векторное пространство над F и $f : V \to F$.

f - линейная функция, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in F, x, y \in V$.

Ядром функции f называется подмножество V , на каждом элементе которого функция равна 0: $\mathrm{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$. Ядро – подпространство в V . Также если f, g - линейные функции, то и их линейные комбинации $\alpha f + \beta g$ с коэффициентами из F также линейны.

Сопряженное (дуальное) пространство V^* - множество всех линейных форм (функций).

Теорема. *Пусть* V *- конечномерное векторное пространство. Тогда* $\dim V = \dim V^*$.

Выделим базис $(e_1,...,e_n)$ в V и рассмотрим $f_1,..., f_n \in V^*$: $f(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = \alpha_i$. Т.е. значение $f_i(e_j)$ равно *символу Кронекера* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$.

1) f_i - линейная функция.

2) $f_1,\ldots,f_n$ - линейно независимы. Пусть $\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n=0$ и $\lambda_i\neq 0$.
Но $(\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n)(e_i)=\lambda_i f_i(e_i)=\lambda_i\neq 0$. Противоречие.

3) $f_1,\ldots,f_n$ - базис. Действительно, рассмотрим произвольную функцию h и обозначим $\lambda_i=h(e_i)$
Тогда $(\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n-h)(e_i)=h(e_i)-h(e_i)=0$, т.е. $\lambda_1 f_1+\ldots+\lambda_n f_n=h$. □

12.02.05

1. Определение.

Базис $\{e^1,\ldots,e^n\}$ пространства V^*, такой, что $e^i(e_j)=\delta_{ij}$ называется *дуальным* (или *сопряжённым*) к базису $\{e_1,\ldots,e_n\}$ пространства V.

Обозначим за V^{**} пространство, сопряжённое $V^*:V^{**}=\left(V^*\right)^*$. Тогда, как мы уже знаем, $\dim V^{**}=\dim V^*$. Мы уже говорили, что два пространства изоморфны, если они имеют равные размерности, но в данном случае, кроме того, можно установить особое соответствие: канонический изоморфизм.

2. Определение.

Отображение $\varepsilon:V\to V^{**}$ называется *каноническим изоморфизмом* и задаётся следующим образом: если x - это вектор из $V:x\in V$, то $\varepsilon_x\in V^{**}$, $\varepsilon_x(f)=f(x)$. Это и есть определение ε_x

Проверим, что отображение $x\to\varepsilon_x$ --- изоморфизм между V и V^{**}. Для начала --- что линейная функция.

1) Проверим, что $\varepsilon_x\in\left(V^*\right)^*$, то есть линейная функция из V^* в $F:\varepsilon_x(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha\varepsilon_x(f)+\beta\varepsilon_x(g)$, то есть ε_x --- действительно линейное отображение из V^* в F, что означает, что это отображение задано корректно.

2) Проверим линейность отображения $\varepsilon:V\to V^{**}$ (сначала то, что сумма переходит в сумму). $\varepsilon_{(x+y)}(f)=f(x+y)=f(x)+f(y)=\varepsilon_x(f)+\varepsilon_y(f)$, то есть мы проверили, что $\varepsilon_{x+y}=\varepsilon_x+\varepsilon_y$. $\varepsilon_{\alpha x}(f)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha\varepsilon_x(f)$, то есть $\varepsilon_{\alpha x}=\alpha\varepsilon_x$. Наконец, нужно проверить, биективно ли отображения ε.

Инъективность. Пусть $x=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n\in V$, где $e_1,\ldots,e_n$ --- базис V (то есть мы взяли вектор x из V и разложили его по базису $e_1,\ldots,e_n$). Если $e^1,\ldots,e^n$ --- дуальный базис V^*, то $\varepsilon_x(e^k)=e^k(x)=\alpha_k$. Так как хотя бы один $\alpha_k\neq 0$, то и $\varepsilon_x\neq 0$. То есть $\varepsilon_x=0\Leftrightarrow x=0$. Следовательно, ε --- инъективное отображение (разные векторы имеют разные образы), потому что для линейного множества достаточно проводить проверку для «0», что мы уже только что проделали.

Сюръективность. Пусть $\varphi \in V^{**}$ и обозначим $\varphi(e^1)=\alpha_1,...,\varphi(e^n)=\alpha_n$. Возьмём $x=\alpha_1 e_1+...+\alpha_n e_n$. Тогда $\varepsilon_x(e^j)=e^j(x)=\alpha_j=\varphi(e^j)$, то есть $\varepsilon_x=\varphi$. Значит, ε сюръективно, а из этого следует, что ε - биекция. Таким образом, ε --- изоморфизм.

Теорема. *Векторы $a_1,...,a_m \in V$ линейно независимы тогда и только тогда, когда*

$\exists\ f_1,..,f_m \in V^*$, *такие что:* $\det\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \dots & f_1(a_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_m(a_1) & \dots & f_m(a_m) \end{vmatrix} \neq 0$. $\quad (*)$

1) Пусть $a_1,...,a_m$ линейно зависимы, то есть существуют коэффициенты $\lambda_1,...,\lambda_m$ (хотя бы один отличен от 0), такие что $\lambda_1 a_1+...+\lambda_m a_m=0$. Пусть $c_1,...,c_m$ --- столбцы матрицы (*). Тогда для любых $f_i \in V^*$ линейная комбинация столбцов $\lambda_1 c_1+...+\lambda_m c_m=0 \Rightarrow \det=0$.

2) Теперь пусть $a_1,...,a_m$ --- линейно независимы. Дополним до базиса V: $a_1,...,a_m,a_{m+1},...,a_n$ и возьмём дуальный базис $V^*: f_j=a^j,\quad j=1,...,n$.

Тогда $(f_i(a_j))=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det=1\neq 0$, что и требовалось доказать. □

Пусть $f_1,...,f_m=V^*$ и U --- множество векторов x из V, таких, что $f_1,...,f_m$

обращаются в 0: $U=\{x\in V \mid f_1(x)=...=f_m(x)=0\}$. То есть, $U=Ker\ f_1\cap...\cap Ker\ f_m$

является решением системы линейных уравнений $\begin{cases} f_1(x)=0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x)=0 \end{cases}$

Теорема. *1) Пусть* $\dim V=n$. *Тогда* $\dim U=n-r$, *где* $r=rank\{f_1,...,f_m\}$.

2) Любое подпространство $U\subseteq V$ является пространством решений некоторой системы

$\tilde{f}_1(x),...,\tilde{f}_k(x)=0\ \ (\tilde{f}_1,...,\tilde{f}_k \in V^*)$.

1) Пусть сначала $f_1,...,f_m$ --- линейно независимы. Тогда дополним до базиса $f_1,...,f_n$ в V^* и возьмём дуальный базис $e_1,...,e_n$ в $V\cong V^{**}$, тогда эти базисы связаны со следующим соотношением: $f_i(e_j)=\delta_{ij}$. Пусть $x=\alpha_1 e_1+...+\alpha_n e_n$. Тогда $f_i(x)=0 \Leftrightarrow \alpha_i=0$, то есть

$U=\{x\mid f_1(x)=...=f_m(x)=0\}=<e_{m+1},...,e_n>$ $\Rightarrow$ в этом случае $\dim U=n-m$, причём $rank\{f_1,...,f_m\}=m$. Если же $f_1,...,f_m$ линейно зависимы, то существует максимальная линейно независимая подсистема, например, $f_1,...,f_r$, такая что $<f_1,...,f_m>=<f_1,...,f_r>$. Но тогда если $f_1(x)=...=f_r(x)=0$, то $f_i(x)=0\quad \forall i=1,...,m$. То есть $U=\{x\mid f_1(x)=...=f_r(x)=0\}\Rightarrow$ (см. выше) отсюда мы уже доказали, что $\dim U=n-r$, $\quad r=rank\{f_1,...,f_m\}$, следовательно, 1) доказано.

2) Пусть $U\subseteq V$ --- любое подпространство. Выберем базис $e_1,...,e_n$ в V так, что $U=\{e_1,...,e_r\}$. Если $f_j=e^j$ $(1\le j\le n)$ --- дуальный базис V^*, то $U=\{x\mid f_{r+1}=...=f_n=0\}$ □

Следствие 1. *Множество решений однородной системы линейных уравнений* $\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ *является подпространством в арифметическом пространстве* R^n.

Следствие 2. *Любое подпространство в* R^n *является пространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений.*

Пусть $U\subseteq V=R^n$ – подпространство. По предыдущей теореме существуют $\exists\, f_1,...,f_m\in V^*$,

такие, что: $U=\{x\in R^n|f_1(x)=...=f_m(x)=0\}$.

Если $e_1,...,e_n$ --- базис V, $e^1,...,e^n$ --- базис V^* (дуальный), то

$\exists a_{ij}\in$ □ $: f_i=a_{i1}e^1+...+a_{in}e^n$. Если $x=x_1e_1+...+x_ne_n$, то $f_i(x)=0\Leftrightarrow a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n=0.$ □

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ОПЕРАТОРЫ

1. Линейные отображения.

Пусть V и W --- векторные пространства над F.

Опр. Функция $f:\ V\to W$ называется *линейным отображением*, если $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\quad (\alpha,\beta\in F,\quad x,y\in V)$.

Ядро: $Ker\ f=\{x\in V\mid f(x)=0\}$ --- подпространство в V.

Образ: $\operatorname{Im} f=\{y\in W\mid \exists x\in V,\ f(x)=y\}$ --- подпространство в W.

Опр. $L(V,W)$ - множество всех линейных отображений $V\to W$.

Если мы знаем значение отображения на базисе, мы можем найти значение отображения на любом элементе по линейности.

2. Задание линейных отображений матрицами.

$\{v_1,...,v_n\}$ --- базис V, $\{w_1,...,w_n\}$ --- базис W. $f \in L(V,W)$. Тогда $f(v_j) = a_{1j}w_1 + ... + a_{mj}w_m$.

Опр. $A_f = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$ --- *матрица отображения* f в базисах $\{v_1,...,v_n\}$, $\{w_1,...,w_n\}$.

Пусть $v = \sum\limits_j x_j v_j \in V$, $f(v) = \sum\limits_j x_j \sum a_{ij} w_i = \sum\limits_i (\sum\limits_j a_{ij} x_j) w_i = \sum\limits_i y_i w_i \Rightarrow$ (т.к. разложение по базису в пространстве W определено однозначно) $y_i = \sum\limits_j a_{ij} x_j$ или $Y = A_f X$ (столбцы).

Теорема. *При фиксированных базисах в* V и W *существует взаимо однозначное соответствие между линейными отображениями из этого множества* $L(V,W)$ *и матрицами* $m \times n$.

Введём обозначение $\varphi : L(V,W) \to \{m \times n$ матрицы$\}$, $\varphi(f) = A_f$.

1) Сюръективность φ: если взять матрицу $B = (b_{ij})_{mxn}$, то для неё можно подобрать соответствующее линейное отображение: $\exists f \in L(V,W) : \varphi(f) = B$. Зададим f на базисе $v_1,...,v_n$: $f(v_j) = l_{1j}w_1 + ... + l_{mj}w_m$, $1 \le j \le n$.

2) Инъективность. Пусть $f, g \in L(V,W)$ и $A_f = A_g$. Тогда матрица разности отображений $A_{f-g} = 0 \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$ □

Опр. Если V и W конечномерны, то *ранг* f это размерность образа, $rank\ f = \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

Теорема. $rank\ f = rank\ A_f$

Пусть $v_1,...,v_n$ --- базис V. Тогда $\mathrm{Im}\, f = < f(v_1),..., f(v_n) >$ Столбцы $j_1,..., j_k$ матрицы A_f линейного отображения f линейно независимы, это означает, что $f(v_{j1}),..., f(v_{jk})$ линейно независимы в W. □

Теорема. $\dim Ker\ f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$

Опять же фиксируем базис: пусть $\{v_1,...,v_n\}$ --- базис V, $\{w_1,...,w_n\}$ --- базис W, A_f --- матрица f в этих базисах. $v = \sum x_j v_j$, $w = f(v) = \sum y_i w_i$, $Y = A_f X$. Через k обозначим $rank\ f = rank\ A_f$. Тогда (а) $v \in Ker\ f \Leftrightarrow X$ - решение системы линейных уравнений $A_f X = 0 \Rightarrow \dim Ker\ f = n-k$.

(б) $\dim \operatorname{Im} f = rank\ A_f$ (предыдущая теорема) = k. Следовательно,
$n = \dim V = (n-k)+k = \dim Ker\ f + \dim \operatorname{Im} f$ □

Следствие 1. *Следующие условия, наложенные на* f, эквивалентны:

1) f инъективно, 2) $Ker\ f = 0$, 3) $rank\ f = \dim V$.

Следствие 2. *Пусть* $\dim U = \dim V$, $f \in L(U,V)$. *Тогда* $Ker\ f = 0 \Leftrightarrow \exists f^{-1} \in L(V,U)$.

1) Если $\exists f^{-1} \in L(V,U)$, то $Ker\ f = 0$. ($x \in Ker\ f \Rightarrow x = (f^{-1}f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0) = 0$).

2) Пусть теперь ядро = 0. $Ker\ f = 0$. Тогда f инъективно (по предыдущему <u>следствию 1</u>) и образ = f, следовательно f - образ отображения $f^{-1}: V \to U$. □

<u>Замечание.</u> Линейность $f^{-1}: a,b \in V,\ a = f(x),\ b = f(y),\ x = f^{-1}(a),\ y = f^{-1}(b)$. Тогда
$f^{-1}(\alpha a + \beta b) = f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(y)) = \alpha x + \beta y = \alpha f^{-1}(a) + \beta f^{-1}(b) \Rightarrow f^{-1}$ линейна. □

14.02.05

3. Линейные операторы.

Пусть *V*=*W*. Тогда $L(V) = L(V,V)$ – множество линейных операторов на *V*

(т.е. линейных отображений $V \to V$)

Если A и B линейные операторы на *V*, α – скаляр, то

$$\left.\begin{array}{l} 1)\mathrm{A}+\mathrm{B} \\ 2)\alpha\mathrm{A} \\ 3)\textit{Произведение}(\textit{композиция}) \end{array}\right\} \textit{тоже линейные операторы}$$

То есть $L(V)$ – алгебра линейных операторов.

Линейная алгебра

(а) $L(V)$ - векторное пространство над F

(б) $L(V)$ - векторное кольцо (относительно сложения и умножения)

(в) $\alpha(\mathrm{AB}) = (\alpha\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\alpha\mathrm{B})$

Другое обозначение: $L(V) = Hom_F(V,V)$

Алгебра $L(V)$ изоморфна алгебре матриц $M_n(F)$, где $n = \dim V$.

4. Матрица линейного оператора.

Пусть $\{v_1 ... v_n\}$ – базис пространства *V*, и $\mathrm{A} \in L(V)$.

Опр. Если $\mathrm{A}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, то $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрица A в базисе $\{v_k\}$

(j-й столбец А – координаты вектора $\mathrm{A} v_j$ в базисе $\{v_1 ... v_n\}$)

5. Переход к другому базису.

Пусть $\{e_1 ... e_n\}$ и $\{e'_1 ... e'_n\}$ - два базиса *V*, $\mathrm{A} \in L(V)$, A – матрица A в базисе $\{e_i\}$, B – матрица A в базисе $\{e'_i\}$, Пусть C – матрица переход а от $\{e_i\}$ к $\{e'_i\}$, т.е. $e'_j = \sum_i c_{i\,j} e_i$

Теорема. $B = C^{-1} A C$

Посчитаем Ae'_j двумя способами:

1) $Ae'_j = A(\sum_i c_{ij} e_i) = \sum_i c_{ij} A e_i = \sum_i \sum_k c_{ij} a_{ki} e_k = \sum_k (\sum_i a_{ki} c_{ij}) e_k$

2) $Ae'_j = \sum_i c_{ki} e'_i = \sum_i \sum_k b_{ij} c_{ki} e_k = \sum_k (\sum_i c_{ki} b_{ij}) e_k$

Отсюда $\sum_i c_{ki} b_{ij} = \sum_i a_{ki} c_{ij}$, т.е. $(\mathrm{CB})_{kj} = (\mathrm{AC})_{kj}$, значит CB=AC, т.к. C – невырождена, то $B = C^{-1} A C$ □

6. Определитель и след линейного оператора.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Определитель:} & \det A = \det \mathrm{A} \\ \text{След:} & \mathrm{tr} A = \mathrm{tr} \mathrm{A} \end{array}\right| \text{где A - матрица } \mathrm{A} \text{ в некотором базисе}$$

Предложение. Определитель и след матрицы линейного оператора *не зависят от выбора базиса.*

$$|\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}| = |\mathrm{C}^{-1}||\mathrm{A}||\mathrm{C}| = |\mathrm{A}|$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ACC}^{-1}) = \mathrm{tr}\mathrm{A}$$ □

7. Определение.

Оператор A – *невырожденный*, если det $A \neq 0$.

Критерий невырожденности A – невырожденный $\Leftrightarrow$ Ker A = 0 $\Leftrightarrow$ Im A = V $\Leftrightarrow$ rank A = dim V

8. Инвариантные подпространства.

Пусть $\mathrm{A} \in L(V)$ – линейный оператор на V и $U \subseteq V$.

Опр. U называется инвариантным подпространством для A , если $\mathrm{A}(U) \subseteq U$ (т.е. $\mathrm{A}x \in U$ $\forall x \in U$)

Пусть $\{v_1 ... v_k\}$ – базис U, k≤n. Дополним его до базиса V $\{v_1 ... v_n\}$.

Тогда $\forall j = 1,...,k \quad Av_j = \sum_i a_{ij} v_i$, причем $a_{(k+1)\,j} = a_{(k+2)\,j} = \ldots = a_{n\,j} = 0$, т.е. матрица A имеет в базисе $\{v_i\}$ вид $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Если $V = U \oplus W$ и $A(U) \subseteq U$, $A(W) \subseteq W$, то существует базис V, в котором $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

9. Собственные векторы, собственные значения.

Опр. $v \neq 0$ – *собственный вектор* оператора $\mathrm{A} \in L(V)$, если существует скаляр $\lambda \in F$ такой, что $\mathrm{A}v = \lambda v$; тогда λ – *собственное значение*.

Свойство. V – собственный вектор $\Leftrightarrow$ $\langle v \rangle$ – инвариантное подпространство.

Теорема. *Число* λ *является собственным значением оператора* $A \in L(V)$ *тогда и только тогда, когда* $\det(A - \lambda E) = 0$ *, где E – тождественный оператор на V. (то есть для любого x*$\in V$ *E(x) = x)*

1) Пусть v – собственный вектор, $Av = \lambda v$. Зафиксируем базис $\{e_1 ... e_n\}$ в V. Если X – столбец координат v в этом базисе, то $Av = \lambda v \iff \mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ (где A – матрица A в $\{e_i\}$) $\Rightarrow$ $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0$, где E – единичная матрица. Следовательно, если собственное значение равно λ , то $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = \det(A - \lambda E) = 0$

   (Примечание: не стоит путать обозначения A и A (хотя они и очень похожи.). Курсивом обозначен оператор, а обычным шрифтом --- матрица. Также E --- это тождественный оператор, а E --- это единичная матрица.)

2) Пусть $\det(A - \lambda E) = 0$, тогда $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = 0$ (A, E – матрицы A , E в базисе $\{e_1 ... e_n\}$) $\Rightarrow$ система $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ имеет ненулевое решение $\{x_1 ... x_n\}$ $\Rightarrow$ вектор $\sum x_i e_i = v$ – собственный, $Av = \lambda v$ □

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН ОПЕРАТОРА

1. Определения

A – матрица оператора A в некотором базисе пр-ва *V*.

Опр. Многочлен от переменной t $\chi_A(t)=\det(t\mathrm{E}-\mathrm{A})$ называют многочленом оператора *A*.

$\chi_A(t)$ не зависит от выбора базиса: если B – матрица *A* в другом базисе, то $\mathrm{B}=\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC}$ и $\det(t\mathrm{E}-\mathrm{B})=\det(t\mathrm{E}-\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC})=\det(\mathrm{C}^{-1}(t\mathrm{E}-\mathrm{A})\mathrm{C})=\det(t\mathrm{E}-\mathrm{A})$.

Опр. *Характеристический корень оператора*: λ – характеристический корень, если $\chi_A(\lambda)=0$.

Замечание. λ – характеристический корень $\Leftrightarrow$ λ – собственное значение оператора.

2. Геометрическая и алгебраическая кратность.

Пусть *A* – линейный оператор на *V*.

Обозначим: $V^\lambda=\{x\in V\mid Ax=\lambda x\}$ – множество всех векторов из *V* с собственным значением λ, включая нулевой вектор.

Тогда V^λ – подпространство *V*.

Опр. $\dim V^\lambda$ – *геометрическая кратность* λ.

Опр. *Алгебраическая кратность* λ - кратность корня λ в многочлене $\chi_A(t)$.

Лемма. $\dim V^\lambda=n-r$, где $n=\dim V$, $r=\operatorname{rank}(A-\lambda E)$.

Пусть A – матрица *A* в каком-нибудь фиксированном базисе, а X – столбец координат вектора *v*. Тогда $v\in V^\lambda\Leftrightarrow(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})X=0$, т.е. V^λ – подпространство решений системы $(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})\mathrm{X}=0$

$$\Rightarrow\dim V^\lambda=n-\operatorname{rank}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=n-\operatorname{rank}(A-\lambda E)\ \square$$

Теорема. *Геометрическая кратность* λ *не превосходит алгебраической*.

Выберем базис $\{v_1...v_k\}$ в V^λ и дополним его до базиса $\{v_1...v_n\}$ всего *V*. Пусть A – матрица *A* в $\{v_i\}$, тогда

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda & \\ & 0 & & C \end{pmatrix} \Rightarrow |tE-A|=\begin{vmatrix} (t-\lambda)E_1 & B \\ 0 & tE_2-C \end{vmatrix}=(t-\lambda)^k g(t),\ ()$$

где $(t-\lambda)E_1$ имеет размер $k\times k$, а tE_2-C - $(n-k)\times(n-k)$ и $g(t)=\det(tE_2-C)$ □

19.02.05

3. Спектр оператора

Опр. *Спектром* оператора *A* называется множество всех его собственных значений.

Опр. $A \in L(V)$ – оператор с *простым спектром*, если $\chi_A(t)=(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ различны и принадлежат *F*.

Пример: операция поворота плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол φ.

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ \chi_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix} t-\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & t-\cos\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=(t-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi=t^2-2t\cos\varphi+1=(t-\cos\varphi+i\sin\varphi)(t-\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

Корни $e^{i\varphi},e^{-i\varphi} \Rightarrow$ A – оператор с простым спектром над $\mathbb{C}^2$, но не над $\mathbb{R}^2$.

4. Диагонализируемые операторы

Опр. *A – диагонализируемый* оператор, если существует базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора *A*, т.е. *A* имеет в некотором базисе матрицу диагонального вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Лемма. *Если* $v_1,\ldots,v_k$ *- собственные векторы оператора A с различными собственными значениями, то они линейно независимы.*

Индукция по k.

База индукции: k=1 – очевидно. Пусть k>1.

$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ - собственные значения $v_1,\ldots,v_k$ и $u=\alpha_1 v_1+\ldots\alpha_k v_k=0$. Тогда $Au=0$, т.е.

$\lambda_1\alpha_1 v_1+\ldots\lambda_1\alpha_k v_k=0$. Одно из чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ отлично от 0. Пусть $\lambda_k\neq 0$. Тогда

$\alpha_k v_k=-\frac{1}{\lambda_k}(\lambda_1\alpha_1 v_1+\ldots\lambda_1\alpha_{k-1}v_{k-1})$ и

$u=\ \alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k=\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)\ \alpha_1 v_1+\ \ldots+\ \left(1-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)\ \alpha_{k-1}v_{k-1}=0\ \Rightarrow$(по индукции)

все коэффициенты $\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\alpha_i=0\Rightarrow\alpha_i=0\ (1\leq i\leq k-1)$ □

Теорема. *Линейный оператор с простым спектром диагонализируем.*

$A:V\to V$, $\dim V=n$, с простым спектром.

$\chi_A(t)=(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ различны.

Каждому λ_i соответствует $v_i: Av_i=\lambda_i v_i\Rightarrow$ по лемме векторы $v_1,\ldots,v_n$ линейно независимы, т.е. $\{v_1,\ldots,v_n\}$ - базис V (а это и есть определение диагонализируемого оператора)

Обратное неверно (например, тождественный оператор является диагнолизируемым, но он не имеет простого спектра).

Теорема. *A диагонализируема* $\Leftrightarrow$

1. *все корни* $\chi_A(t)$ *принадлежат F*
2. *геометрическая кратность любого корня равна его алгебраической кратности*

1. $\Rightarrow$

Пусть *A* диагонализируема, $\lambda_1,...,\lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ его собственные значения, dim V = n,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$ - матрица A в некотором базисе из собственных векторов.

Перенумеруем (если необходимо) базис V:

$$\underbrace{u_1,..,u_{m1}}_{\lambda_1}, \underbrace{v_{1,}..,v_{m2}}_{\lambda_2}, ..., \underbrace{w_1,..,w_{mk}}_{\lambda_k} \Rightarrow V = V^{\lambda_1} \oplus .. \oplus V^{\lambda_k}$$

Вычислим $\chi_A(t)$: $\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} ... (t-\lambda_k)^{m_k}$

Все его корни $\lambda_1,...,\lambda_k$ лежат в F (т.к. $\chi_A(t)$ разложим на линейные множители)

Геометрическая кратность: $\dim V^{\lambda_i} = m_i$

Алгебраическая кратность: m_i

Значит, алгебраическая кратность равна геометрической.

2. $\Leftarrow$

Пусть $\chi_A(t)$ разлагается над F на линейные множители и алгебраическая кратность любого корня равна его геометрической кратности.

Тогда , $\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} ... (t-\lambda_k)^{m_k}$, $m_1 + .. + m_k = n$

Рассмотрим сумму подпространств $U = V^{\lambda_1} + ... + V^{\lambda_k}$. Если $v_1 + ... + v_k = 0$, $v_i \in V^{\lambda_i}$, то по предыдущей лемме $v_1,...,v_k = 0$, т.е. $U = V^{\lambda_1} \oplus ... \oplus V^{\lambda_k}$ - прямая сумма. Кроме того,

$$\dim U = \sum \dim V^{\lambda_i} = m_1 + ... + m_k = n = \dim V \Rightarrow U = V \ \square$$

5. Минимальный многочлен оператора

Пусть $A \in L(V)$, $f = f(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0 E$, где E - единичный оператор.

Опр. $f(t)$ - *аннулирующий многочлен* для оператора *A*, если $f(A) = 0$

Опр. $\mu_A(t)$ называется *минимальным многочленом A*, если

1. $\mu_A(t)$ - аннулирующий многочлен.
2. Любой другой аннулирующий многочлен делится на $\mu_A(t)$ без остатка.

Лемма. $\mu_A(t)$ *существует и определен однозначно (с точностью до скалярного множителя)*

(а) Существование аннулирующих многочленов.

Пусть A – матрица *A*. Тогда матрицы $\mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^N$ линейно зависимы, если N > n^2, где $\dim V = n \Rightarrow \exists a_1, \ldots, a_N \in F : a_1\mathrm{A} + \ldots + a_N\mathrm{A}^N = 0$, т.е. $f(\mathrm{A}) = 0$, где $f(t) = a_1 t + \ldots + a_N t^N \Rightarrow f$ - аннулирующий многочлен.

(б) Существование минимального аннулирующего многочлена.

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - два аннулирующих многочлена для *A* и $h = (f, g)$ - НОД.

Тогда $h(t) = u(t)f(t) + v(t)g(t) \Rightarrow h(\mathrm{A}) = u(\mathrm{A})f(\mathrm{A}) + v(\mathrm{A})g(\mathrm{A}) = 0 \Rightarrow h$ тоже аннулирующий многочлен $\Rightarrow \exists$ аннулирующий многочлен степени k

(в) Единственность минимального аннулирующего многочлена.

Пусть $f(t)$ - аннулирующий многочлен степени k, $g(t)$ - аннулирующий многочлен.

Тогда их НОД тоже аннулирующий многочлен степени k, делит $f(t)$, но это значит, что $f(t)$ = НОД(*f*,*g*), а значит $g(t)$ делится на $f(t) \Rightarrow f(t)$ минимальный аннулирующий многочлен, кроме того, мы так же доказали и его единственность□

6. Теорема Гамильтона-Кэли

Пусть $F = \mathbb{C},\ A \in \mathrm{A(V)},\ \dim \mathrm{V} < \infty$

Теорема. $\chi_A(A) = 0$ *(оператор A аннулируется своим характеристическим многочленом)*

Обозначим $f(t) = \chi_A(t)$, $\exists\ \lambda \in V: f(\lambda) = 0$

Тогда $\det(A - \lambda E) = 0$ и существует собственный вектор $0 \ne v \in V : Av = \lambda v$

Построим базис $v_1, \ldots, v_n$, где $v_1 = v$. Тогда матрица *A* в этом базисе имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$, где B – матрица (n-1)x(n-1)

Поэтому $f(t)=|tE-A|=(t-\lambda)\underbrace{|tE-B|}_{g(t)}=(t-\lambda)g(t)$

Положим $U=\langle v_2 \ldots v_n \rangle$ и обозначим через *B* линейный оператор с матрицей B в базисе $v_2 \ldots v_n$. Так как $\dim U = n-1 < n$ то можем применить индукцию по $\dim U$ (с базой n = 1). Итак, пусть $\chi_B(B)=0$. Тогда, так как $\chi_B(t)=g(t)$, то $g(B)=0$. Вычислим $g(A)$. Ясно, что $A^k=\begin{pmatrix} \lambda^k & \ldots \\ 0 & \\ \vdots & B^k \\ 0 & \end{pmatrix}$,

а следовательно $\forall h(t)$, $h(A)=\begin{pmatrix} h(\lambda) & \ldots \\ 0 & \\ \vdots & h(B) \\ 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow g(A)=\begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \\ & 0 & \end{pmatrix}=C$.

С другой стороны, $A-\lambda E=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}=D$. Очевидно, что

$DC=0 \Rightarrow f(A)=(A-\lambda E)g(A)=DC=0$ □

Подполя в □

Примеры: □ , □ , □ $_{[i]}=\{p+qi \mid p,q \in$ □ $\}$

□ $_{[\sqrt{n}]}=\{p+q\sqrt{n} \mid p,q \in$ □ $\}$

Следствие 1. *Пусть* V *- пространство над* $F \subseteq$ □ $, \dim V = n < \infty, A \in \mathrm{A}(V)$ *. Тогда* $\chi_A(A)=0$.

Пусть A --- матрица A в некотором базисе $\Rightarrow \chi_A(t)=\det(t\mathrm{E}-\mathrm{A})=f(t)$.Рассмотрим n-мерное пространство над □ и оператор *B* на этом пространстве с той же матрицей A. Тогда $\chi_B(t)=\det(t\mathrm{E}-\mathrm{A})=f(t)$. По теореме Гамильтона-Кэли: $f(B)=0$, т.е. $f(A)=0$, что и требовалось доказать. □

Следствие 2. $(F = \square)$

(1) Характеристический многочлен делится на минимальный

(2) Если λ - корень $\chi_A(t)$, то λ - корень $\mu_A(t)$

(1) следует из теоремы Гамильтона-Кэли и определения $\mu_A(t)$

(2) Пусть $\lambda_1,...,\lambda_k$ - все комплексные корни $g(t) = \mu_A(t)$. Пусть λ - корень $\chi_A(t)$. Тогда $\exists v : Av = \lambda v$. Так как $g(t) = (t - \lambda_1)^{k1}...(t - \lambda_m)^{km}$, то $g(A)v = (A - \lambda_1 E)^{k1}...(A - \lambda_m E)^{km} v$

Заметим, что $(A - \lambda_i E)v = (\lambda - \lambda_i)v$. Поэтому $g(A)v = (\lambda - \lambda_1)^{k1}...(\lambda - \lambda_m)^{km} v$

Но $g(A) = \mu_A(A) = 0$. Значит, $(\lambda - \lambda_1)^{k1}...(\lambda - \lambda_m)^{km} v = 0$, т.е. λ - один из λ_i □

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

В этом разделе будем считать, что $F = \mathbb{C}$, V – векторное пространство, над $\mathbb{C}$, $\dim V = n < \infty$. Эту теорию можно развивать над любым полем, но наиболее важные результаты получаются, когда поле замкнуто.

1. Корневое подпространство

Пусть $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(V)$, λ – собственное значение оператора A на V.

Рассмотрим $V(\lambda) = \{v \in V \mid \exists k > 1 : (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})^k v = 0\}$ (при $k = 1$ это определение собственного подпространства). Тогда выполняется:

1) $V^\lambda = \{v \in V | Av = \lambda v\} \subseteq V(\lambda)$ (собственное подпространство принадлежит $V(\lambda)$).

2) В частности, из 1) следует, что $V(\lambda) \neq 0$.

3) $V(\lambda)$ – подпространство в V. (доказательство очевидно: если $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})^k u = (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})^m v$, то $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})^{\max(k,m)}(\alpha u + \beta v) = 0$).

$V(\lambda)$ – *корневое подпространство*, отвечающее корню λ.

Лемма 1. *Пусть* λ, μ_1, … μ_k *– различные собственные значения* A. *Тогда* $V(\lambda) \bigcap (\sum_{i=1}^{k} V(\mu_i)) = 0$.

Пусть $u \in V(\lambda)$. Если $u \in \sum_{i=1}^{k} V(\mu_i)$, то $u = \sum_{i=1}^{k} v_i$, где $v_i \in V(\mu_i)$.

$\exists m, t_1, \ldots t_k \geq 1 : (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})^m u = 0, (\mathrm{A} - \mu_1 \mathrm{E})^{t_1} v_1 = 0, \ldots, (\mathrm{A} - \mu_k \mathrm{E})^{t_k} v_k = 0$.

Обозначим $f(x) = (x - \lambda)^m$, $f_i(x) = (x - \mu_i)^{t_i}, 1 \leq i \leq k$ и $h(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i$.

Тогда: $(h, f) = 1 \Rightarrow af + bh = 1 \Rightarrow a(\mathrm{A}) f(\mathrm{A}) + b(\mathrm{A}) h(\mathrm{A}) = \mathrm{E}$

$$h(\mathrm{A}) v_i = (\prod_{i=1}^{k} f_i) v_i = f_1(\mathrm{A}) \ldots f_{i-1}(\mathrm{A}) f_{i+1}(\mathrm{A}) \ldots f_k(\mathrm{A}) \overbrace{f_i(\mathrm{A}) v_i}^{=0} = 0,$$

$h(\mathrm{A})u = h(\mathrm{A})(\sum_{i=1}^{k} v_i) = \sum_{i=1}^{k} h(\mathrm{A})v_i = 0 \quad f(\mathrm{A})u = (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})^m u = 0$.

$u = \mathrm{E}(u) = a(\mathrm{A}) f(\mathrm{A})u + b(\mathrm{A})h(\mathrm{A})u = 0$

Таким образом, если вектор u принадлежит $V(\lambda)$ и $\sum_{i=1}^{k} V(\mu_i)$, то он равен 0. □

3. **Нильпотентные операторы**

Определение. $\mathcal{B}$ - *нильпотентный оператор*, если $\exists m \geq 1$: $\mathcal{B}^m = 0$.

Утверждение. *Если* $\mathcal{B}$ *нильпотентен на* V *и* $\dim V = n$*, то* $\mathcal{B}=0$.

По теореме Гамильтона-Кэли $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = 0$, $\deg \chi_{\mathrm{B}}(t) = n$. Если $\chi_{\mathrm{B}}(t) = t^n$, то всё доказано. Пусть теперь $\chi_{\mathrm{B}}(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$. Подставим в многочлен B . Тогда существует выражение $\mathrm{B}^k = \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \mathrm{B}^i$ (наименьшая степень выражается через старшие) для некоторого $1 \leq k \prec n$. Так как B нильпотентен, существует m : $\mathrm{B}^m = 0$. Если $m \leq n$, то и подавно $\mathrm{B}^n = 0$, если $m > n$, то (домножая равенство двумя строками выше на B , пока слева не будет B^{m-1}) получим, что $\mathrm{B}^{m-1} = 0$. Провернув это доказательство для этой обнуляющей степени $(m-1)$ несколько раз получим $\mathrm{B}^{m-1} = 0 \Rightarrow \mathrm{B}^{m-2} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathrm{B}^n = 0$. □

Другое **[более нормальное, народ, пользуйтесь им]** доказательство того, что $\mathrm{B}^m = 0 \Rightarrow \mathrm{B}^n = 0$:

1) Если $\mathrm{B}^m = 0$, то минимальный многочлен $\mu_{\mathrm{B}}(t) = t^k$ ($k \leq m$) (так как он делит аннулирующий многочлен t^m).

2) По теореме Гамильтона-Кэли и определению минимального многочлена $\chi_{\mathrm{B}}(t)$ делится на $t^k \Rightarrow k \leq n \Rightarrow \mathrm{B}^n = 0$. □

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(V)$, λ *– собственное значение* A *. Тогда* $V(\lambda)$ *– инвариантное для* A *подпространство и* $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}$ *действует на* $V(\lambda)$ *нильпотентно.*

1) Инвариантность

Пусть $v \in V(\lambda)$. Докажем, что $u = \mathrm{A}v \in V(\lambda)$. $\exists k \geq 1: (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})^k v = 0$.

$(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})^k u = (\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})^k \mathrm{A}v = \underbrace{(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})^{k+1} v}_{=0} + \underbrace{(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})^k \lambda v}_{=0} = 0$. Итак $u \in V(\lambda)$.

2) Нильпотентность действия

Положим $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}$. Выберем базис $u_1, \dots u_k \in V(\lambda)$. Тогда

$\exists m_1, \dots m_k : \mathrm{B}^{m_1}(u_1) = \dots = \mathrm{B}^{m_k}(u_k) = 0$. Если $m = \max(m_1, \dots m_k)$, то

$\mathrm{B}^m(u_1) = \dots = \mathrm{B}^m(u_k) = 0 \Rightarrow \mathrm{B}^m(V(\lambda)) = 0$. □

3. Разложение в сумму корневых подпространств

Теорема. *Пусть* $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(V)$, $\chi_{\mathrm{A}}(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}$, *где* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$.

Тогда выполняется:

1) $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$

2) Все $V(\lambda_i)$ *инвариантны относительно действия* A.

3) Действие $\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{E}$ *на* $V(\lambda_i)$ *нильпотентно.*

4) $\dim V(\lambda_i) = n_i$

5) Единственным собственным значением A *на* $V(\lambda_i)$ *является* λ_i.

Доказательство.

1) Положим $f_i(t) = \dfrac{\chi_{\mathrm{A}}(t)}{(t - \lambda_i)^{n_i}}, 1 \leq i \leq k$. Тогда $(f_1, \dots f_k) = 1 \Rightarrow \exists h_1, \dots h_k : 1 = \sum_{i=1}^{k} h_i f_i$. Пусть v – произвольный вектор из V. $v_i = f_i(\mathrm{A}) h_i(\mathrm{A}) v$, $v = \mathrm{E} v = \sum_{i=1}^{k} f_i(\mathrm{A}) h_i(\mathrm{A}) v = \sum_{i=1}^{k} v_i \in \sum_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$, где

$$(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{E})^{n_i} v_i = \underbrace{(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{E})^{n_i} f_i(\mathrm{A})}_{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0} h_i(\mathrm{A}) v = 0 .$$

Таким образом $v_i \in V(\lambda_i)$. Следовательно, $V = \sum_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$. Эта сумма прямая по лемме 1.

2), 3) – лемма 2.

5) Пусть $u \in V(\lambda_i)$ и $\mathrm{A} u = \lambda u$. Тогда λ – это одно из чисел $\lambda_1, \dots \lambda_k$. Если $\lambda = \lambda_j \neq \lambda_i$, то $u \in V(\lambda_j) \bigcap V(\lambda_i) = 0 \Rightarrow u = 0$.

4) Выберем базисы во всех подпространствах $V(\lambda_i)$ и объединим их. Мы получим базис во всём пространстве V. В этом базисе A имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$, где A_i – квадратная матрица размера $m_i \times m_i$, $m_i = \dim V(\lambda_i)$. Обозначим через B_i ограничение A на $V(\lambda_i)$, т.е $\mathrm{B}_i \in \mathrm{L}(V(\lambda_i))$, $\mathrm{B}_i \mathbf{v} = \mathrm{A}v$. Тогда B_i имеет матрицу A_i и только одно собственное значение λ_i.

$$\chi_{\mathrm{B}_i}(t) = (t-\lambda_i)^{m_i} = \det(tE - A_i)\,.\ \chi_{\mathrm{A}}(t) = \det A = \prod_{i=1}^{k} \det(tE - A_i) = \prod_{i=1}^{k} (t-\lambda_i)^{m_i} \Rightarrow m_i = n_i\,.\ \square$$

4. Нормальный базис для нильпотентного оператора

Пусть оператор $\mathrm{B}: V \to V$: нильпотентный, U – подпространство в V.

U *– циклическое подпространство для оператора* B, если $\exists u \in U : U = \langle u, \mathrm{B}u, \mathrm{B}^2 u, \ldots \mathrm{B}^k u \rangle$, $\mathrm{B}^k u \neq 0$, $\mathrm{B}^{k+1} u = 0$.

Свойства циклического подпространства:

1) U – инвариантное подпространство для B (т.е. $\mathrm{B}(u) \subseteq U$) – по определению.

2) $\{u, \mathrm{B}u, \mathrm{B}^2 u, \ldots \mathrm{B}^k u\}$ – базис U

То, что любой вектор U выражается через этот базис – очевидно.

Докажем линейную независимость.

$$w = \alpha_0 u + \alpha_1 \mathrm{B}u + \ldots + \alpha_k \mathrm{B}^k u = 0$$

$$0 = \mathrm{B}^k w = \alpha_0 \mathrm{B}^k u \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$0 = \mathrm{B}^{k-1} w = \alpha_1 \mathrm{B}^k u \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \ \square$$

26.02.05

Теорема. Пусть B – нильпотентный оператор на V. Тогда V можно разложить в сумму циклических подпространств для B.

Доказательство.

Индукция по dim V. Если dim V = 1, то V = <v>, B v = 0.

Пусть dim V > 1. Обозначим U = B(V). Если U = 0, то V – прямая сумма одномерных циклических подпространств. Пусть U $\neq$ 0. Ясно, что B(U) $\subseteq$ U.

<u>Шаг 1</u>: Т.к. ker $\mathrm{B} \neq 0$, то dim U < dim V$\Rightarrow$ (по инд.) $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ – сумма циклических подпространств, где $U_1 = \langle u_1, \mathrm{B}u_1, \ldots\rangle$, … , $U_k = \langle u_k, \mathrm{B}u_k, \ldots\rangle$. Т.к. U = B(V), то $\exists v_1, \ldots, v_k \in V:$ $u_1 = \mathrm{B}v_1, \ldots, u_k = \mathrm{B}v_k$. Докажем, что векторы $v_1, \ldots, v_k$, $u_1, \ldots, u_k, \mathrm{B}u_1, \ldots, \mathrm{B}u_k \ldots$ (все ненулевые векторы вида $\mathrm{B}^m(v_j)$) линейно независимы. Пусть $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k + \ldots = 0$. Применим B: $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k + \beta_1 \mathrm{B}u_1 + \ldots + \beta_k \mathrm{B}u_k + \ldots = 0$. Т.к. это линейная комбинация базисных векторов пространства U, то все коэффициенты $\alpha_1, \ldots \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots$ равны нулю.

<u>Шаг 2</u>: Обозначим за $W_i = \langle v_i, u_i, \mathrm{B}u_i, \ldots\rangle$. Это циклическое подпространство для B, и, по доказанному в <u>Шаге 1,</u> их сумма – прямая, $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$. Теперь докажем, что B(W) = U. Включение B(W) $\subseteq$ U очевидно. Пусть $x \in U_i, x \neq 0.$ Тогда $x = \alpha_0 u_i + \alpha_1 \mathrm{B}u_i + \ldots + \alpha_m \mathrm{B}^m u_i$. Пусть $y = \alpha_0 v_i + \alpha_1 u_i + \ldots + \alpha_m \mathrm{B}^{m-1} u_i$. Тогда $\mathrm{B}y = x$. Если $x \in U, x = x_1 + \ldots + x_k$ $(x_i \in U_i),$ то $\exists y_1, \ldots y_k \in W.$ $\mathrm{B}y_i = x_i$ $\Rightarrow \mathrm{B}(y_1 + \ldots + y_k) = x \Rightarrow \mathrm{B}(W) = U$.

<u>Шаг 3</u>: Если W = V, то теорема доказана. Пусть W $\neq$ V. Тогда $\exists w_1, \ldots, w_m \in V$, линейно независимые, $\langle w_1, \ldots, w_m\rangle \bigcap W = 0$ и $V = \langle w_1, \ldots, w_m\rangle \oplus W$. Заменим $w_1, \ldots, w_m$ на $w_1', \ldots, w_m'$ следующим образом:

– если $\mathrm{B}w_j = 0$, $w_j' = w_j$

– если $\mathrm{B}w_j = x_j \neq 0$, то $\exists y_j \in W:$ $\mathrm{B}y_i = x_i$ (см. <u>Шаг 2</u>). В этом случае положим $w'_j = w_j - y_j$

<u>Шаг 4</u>: Векторы $w_1', \ldots, w_m'$ обладают следующими свойствами:

1) $\mathrm{B}\, w_j' = 0$

2) $\langle w_1', \ldots, w_m'\rangle \oplus W = V$

3) $w_1', \ldots, w_m'$ – линейно независимы

Докажем, например, 2). Если $\alpha_1 w_1' + \ldots + \alpha_m w_m' = w \in W$, то $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_m w_m = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m + w \in W \bigcap \langle w_1, \ldots, w_m\rangle = 0 \Rightarrow$ все $\alpha_i = 0$. (3) – аналогично). Из 1), 2), 3) следует, что $V = \langle w_1' \oplus \ldots \oplus w_m'\rangle \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ – разложение V в сумму циклических подгрупп для B. □

Следствие. Пусть B: V$\to$V – нильпотентный оператор на V. Тогда $\exists$ базис V, в котором матрица B имеет вид $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_m \end{pmatrix}$, где B_i – квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Разложим V в прямую сумму циклических подпространств для оператора B. В каждом циклическом подпространстве U = <u, Bu, …, B^tu> , $\mathrm{B}^{t+1}u = 0$ выберем базис $e_1 = \mathrm{B}^t u$, $e_2 = \mathrm{B}^{t-1}u$, …, $e_{t+1} = u$. Объединяя эти базисы, получаем наше утверждение.

□

5. Жордановы матрицы

Опр. Жорданова клетка $J_{m,\lambda}$ – матрица m x m вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Опр. Жорданова матрица – блочно-диагональные матрицы из жордановых клеток

$$\begin{pmatrix} J_{m_1,\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k,\lambda_k} \end{pmatrix}, \quad m_1 + \ldots + m_k = n,$$

Опр. Жорданова матрица A называется жордановой нормальной формой (ЖНФ) матрицы B, если $B = C^{-1}AC$, где C – некоторая невырожденная матрица.

Теорема 1. Любая комплексная матрица обладает ЖНФ.

(Уважаемый читатель, огромная просьба: не путать линейные операторы и их матрицы!)

Пусть *A* – матрица n x n. Рассмотрим пространство V над $\mathbb{C}$ размерности n (dim V = n), с базисом e_1, …, e_n. Пусть A: V$\to$V – линейный оператор с матрицей *A* в этом базисе. Для A существует корневое разложение $V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_q)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ – собственные числа A. Зафиксируем одно из подпространств: $U = V(x_i)$ и рассмотрим действие на U оператора $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}$. Тогда действие B на U нильпотентно (по доказанному ранее) и также по доказанной теореме $\exists$ разложение $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ циклических подпространств. По предыдущему следствию в U есть базис, в котором B имеет блочно диагональную матрицу $B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix}$, а каждая B_j – жорданова клетка с $\lambda = 0$. Поскольку $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \lambda_i\mathrm{E}$, то $\mathrm{A}(U_j) \subseteq U_j$ и в том же базисе U оператор A имеет матрицу $A = B + \lambda_i E = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$, где все $J_1, \ldots, J_r$ – жордановы клетки вида J_{S,λ_i}. Рассмотрев отдельно все $V(\lambda_1), \ldots, V(\lambda_q)$, мы построим базис $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ пространства V, в котором матрица A является жордановой матрицей T. Если C – матрица перехода $\{e_i\} \to \{e_i'\}$, то $T = C^{-1}AC$.

□

Следствие. Для любого линейного оператора на конечномерном комплексном пространстве можно выбрать базис, в котором матрица оператора является жордановой матрицей.

6. Единственность ЖНФ

Теорема 2. ЖНФ матрицы *A* единственна с точностью до перестановки клеток.

Пусть *A* – жорданова матрица n x n. $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$, где $A_1, \ldots, A_k$ - жордановы клетки.

Обозначим: $N(m, \lambda)$ - число клеток $J_{m,\lambda}$ среди $A_1, \ldots, A_k$. Сначала выведем формулу для $N(m, \lambda)$. Пусть A: V→V – линейный оператор на n-мерном пространстве с матрицей *A*.

Обозначим: $r_t = rank(A - \lambda E)^t$. Тогда $r_t = rank(A - \lambda E)^t = rank(A_1 - \lambda E_1)^t + \ldots + rank(A_k - \lambda E_k)^t$. Здесь $E_1, \ldots, E_k$ - единичные матрицы соответствующих размеров.

1) Если $A_j = J_{S,\mu}$ и $\mu \neq \lambda$, то

$$(A_j - \lambda E_j)^t = \begin{pmatrix} (\mu - \lambda)^t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\mu - \lambda)^t \end{pmatrix} \Rightarrow rank(A_j - \lambda E_j)^t = s = \text{размер } (A_j).$$

2) Если $A_j = J_{s,\lambda}$, то $(A_j - \lambda E_j)$ - матрица нильпотентного оператора $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}\,|_U$ на циклическом (для B) подпространстве U. Вычислим $rank(A_j - \lambda E_j)^t = rank(B^t)$. Пусть v, Bv**, …,**

$B^{s-1}v$ – циклический базис для B в U. Тогда $B^t(U)$ = < $B^t v$, ..., $B^{s-1}v$> (или 0, если $t \geq s$). Отсюда $rank(B^t) = \dim \operatorname{Im} B^t = s - t$, если t < s и u = 0 если $t \geq s$.

3) Найдем разность $r_t - r_{t+1}$ для A. Пусть $m_1 \leq m_2 \leq ... \leq m_q$ - размеры всех клеток среди $A_1, ..., A_k$ с собственным числом λ. Тогда для клеток A_j с числом $\mu \neq \lambda$ имеем $rank(A_j - \lambda E_j)^{t+1} = rank(A_j - \lambda E_j)^t = rank\ A_j \Rightarrow$ разность $r_t - r_{t+1}$ можно считать только по клеткам с $\mu = \lambda$. Поэтому $r_t - r_{t+1} = \sum\limits_{m_i > t}(m_i - t) - \sum\limits_{m_i > t+1}(m_i - (t+1)) =$

$= \sum\limits_{m_i > t}(m_i - t) - \sum\limits_{m_i > t+1}(m_i - t) + \sum\limits_{m_i > t+1} 1 = \sum\limits_{m_i = t+1}(m_i - t) + \sum\limits_{m_i > t+1} 1 = \sum\limits_{m_i = t+1} 1 + \sum\limits_{m_i > t+1} 1 =$

$N(t+1, \lambda) + N(t+2, \lambda) + ...$ Т.е. $r_t - r_{t+1}$ - число клеток $J_{m,\lambda}$ среди $A_1, ..., A_k$, у которых $m \geq t+1$.
Отсюда $(r_t - r_{t+1})$ - ($r_{t+1} - r_{t+2}$) $= r_t - 2r_{t+1} + r_{t+2}$ - число клеток $J_{k+1,\lambda} \Rightarrow$ формула

$\boxed{N(m, \lambda) = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1}}$ (*) , где $r_t = rank(A - \lambda E)^t$.

Пусть A и D матрицы двух жордановых нормальных форм одного оператора с матрицей B. Тогда: $A = C^{-1}BC$ (C - некоторая матрица), $D = T^{-1}BT \Rightarrow D = (T^{-1}C)A(C^{-1}T) = F^{-1}AF$. Поэтому $r_t(D) = rank(D - \lambda E)^t = rank(F^{-1}AF - \lambda E)^t =$

$= rank(F^{-1}(A - \lambda E)F)^t = rank(F^{-1}(A - \lambda E)^t F) = rank(A - \lambda E)^t = r_t(A)$ (т.к. F является невырожденной). Преобразование мы использовали следующее:
$(F^{-1}QF)(F^{-1}QF) = (F^{-1}Q(FF^{-1})QF) = (F^{-1}Q^2F)$. Таким образом, $N(m, \lambda)(D) = N(m, \lambda)(A)$.
Это и есть единственность. □

28.02.05

БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

1. Определение.

F – поле, *V* – векторное пространство над эти полем.

Опр. Функция $f(x,y): V\times V \to F$ называется *билинейной формой*, если она линейна по каждому аргументу. То есть :

1) $f(\alpha x+\alpha' x', y)=\alpha f(x,y)+\alpha' f(x',y)$

2) $f(x,\beta y+\beta' y')=\beta f(x,y)+\beta' f(x,y')$

2. Матрица билинейной формы.

Пусть $e_1,e_2,....,e_n$ - базис *V*. Обозначим $f_{ij} = f(e_i,e_j)$.

Опр. $F=(f_{ij})$ называют *матрицей билинейной формы f* в базисе $e_1,e_2,....,e_n$.

Координатная запись. $u=\sum_i x_i e_i$, $v=\sum_j y_j e_j$. Тогда :

$$f(u,v)=f(\sum x_i e_i,\sum y_j e_j)=\sum_{i,j} x_i y_j f(e_i,e_j)=\sum_{i,j} x_i f_{ij} y_j = X^t F Y$$, где

$$F=(f_{ij}),\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$ а $X^t=(x_1\ldots x_n)$.

3. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса.

Пусть $\{e_1,\ldots,e_n\}$ и $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ - два базиса пространства V. Пусть C – матрица перехода от базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ к базису $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$. Пусть

$$u=\sum x_i e_i=\sum x'_i e'_i$$

$$v=\sum y_j e_j=\sum y'_j e'_j$$

Тогда:

$X=CX'$, $Y=CY'$. Отсюда

$f(u,v)=X^t FY=(CX')^t F(CY')=X'^t(C^t FC)Y'$, где F - матрица f в базисе $\{e_1,\ldots,e_n\}$. С другой стороны $f(u,v)=X'^t F'Y'$, где F' - матрица f в базисе $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$.

Замечание. Если для любых столбцов X',Y' выполняется равенство $X'^t AY'=X'^t BY'$, то матрицы B и A равны.

Пусть $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i$, $Y' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - j$

(в смысле, что единица стоит на i-ом и j-ом месте соответственно; ни в коем случае не подразумевается вычитание)$\Rightarrow$ $X''^t AY = a_{ij} = b_{ij} = X''^t BY$.

Учитывая замечание, получаем : $F' = C^t FC$.

4. Симметрические и кососимметрические билинейные формы.

Опр. f называется *симметрической* билинейной формой, если $f(x, y) = f(y, x) \forall x, y$.

Опр. f называется *кососимметрической* билинейной формой, если $f(x, y) = -f(y, x) \forall x, y$.

Если $char(P) \neq 2$ (напоминаем читателю, что это обозначение означает, что характеристика поля не равна двум), то функции не может быть одновременно симметрической и кососимметрической.

Пусть f симметрическая билинейная форма, тогда $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) \forall i, j \Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$, то есть, матрица f симметрическая. $F^t = F$.

Аналогично, если f - кососимметрическая билинейная форма, то $F^t = -F$.

Эти свойства не зависят от замены базиса.

Опр. *Ядром* симметрической (кососимметрической) билинейной формы называют:

$Ker(f) := \{x \in V \mid f(x, v) = 0, \forall v \in V\}$.

$Ker(f) = V^{\perp}$ (множество векторов, ортогональных V).

Можно рассматривать понятие ядра для произвольной билинейной формы, но в таком случае левое и правое ядра могут не совпадать.

Опр. *Рангом* билинейной формы называют ранг её матрицы. $rank(f) = rank(F)$.

Определение ранга билинейной формы не зависит от выбора базиса, т.к. при переходе к новому базису её матрица домножается слева и справа на невырожденные матрицы, и её ранг не изменяется.

Опр. f называется *невырожденной*, если $rank(f) = \dim V$, т.е. $\det(F) \neq 0$.

5. Канонический базис для симметрической билинейной формы.

Опр. Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем называть *каноническим базисом* симметрической билинейной функции f, если $f(e_i, e_j) = 0, \forall (i \neq j)$.

Теорема. ($char(P) \neq 2$) *У любой симметрической билинейной функции существует канонический базис.*

Доказательство проведём индукцией по $n = \dim V$.

Базис индукции: $\dim V = 1$ - очевидно.

Пусть $n > 1$. Предположим существование базиса для $\dim V < n$. Пусть $f(x, x) = 0, \forall x \in V$. Тогда:

$0 = f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) = 2f(x,y), \forall x, y \in V$, т.е. $f \equiv 0$, и любой базис является каноническим.

Пусть теперь $\exists v \neq 0 : f(v,v) \neq 0$. Рассмотрим $U = \{x \in V \mid f(x,v) = 0\}$. Понятно, что U является подпространством V, причём $\dim U < \dim V$. Но $f(x,v) = 0$ - линейное уравнение ($X^t FV = 0$ - линейное уравнение), а значит $\dim U = \dim V - 1$. По индукции существует базис $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ в U такой, что $f(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$. $e_n = v \notin U \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ - канонический базис для симметрической билинейной формы f. □

05.03.05

6. Квадратичные формы

Опр. $q : V \to F$ - *квадратичная форма*, если $\exists$ симметричная билинейная форма $f : V \times V \to F$, такая, что $q(x) = f(x,x)$. В этом случае говорят, что $f(x,y)$ - *полярная билинейная форма* для *q*.

Предложение. *Полярная БФ определена однозначно, если* $\text{char}\, F \neq 2$.

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + 2f(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$$

□

Опр. *Матрица квадратичной формы q* в базисе $e_1, \dots, e_n$ - матрица ее полярной БФ.

$F = (f_{ij}), \quad f_{ij} = f(e_i, e_j)$

Пример. Пусть $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ для $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Тогда $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Опр. *Ранг* квадратичной формы – ранг полярной БФ.

Опр. $q(x)$ - *невырожденная* квадратичная форма, если $\operatorname{rank} q = \dim V$ (т.е. $\det F \neq 0$)

Опр. *Канонический вид* квадратичной формы $q(x) = \sum \lambda_i x_i^2$

Опр. *Нормальный вид* квадратичной формы $q(x) = \sum \lambda_i x_i^2$, и все $\lambda_i = 0, \pm 1.$

7. Алгоритм Лагранжа (приведения к каноническому виду).

Пусть $q(x) = a_{11}x_1^2 + \ldots a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$. Метод заключается в выделении полных квадратов.

□ (1) Пусть $a_{ii} \neq 0$, например, $a_{11} \neq 0$. Тогда $q(x) = \dfrac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + p(x)$, где

$p(x) = \sum_{i,j \geq 2} b_{ij}x_{ij},$ т.е. $p(x)$ не зависит от x_1. Положим $z_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$, $z_2 = x_2, \ldots, z_n = x_n$.

Тогда $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ . \\ z_n \end{pmatrix} = CX$, где $\det C \neq 0.$ Следовательно, $X = C^{-1}Z,$ и можно считать, что C^{-1} - матрица перехода к некоторому новому базису, в котором вектор $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ имеет вид $z_1e_1' + \ldots + z_ne_n'$.

По индукции $\exists$ невырожденная замена переменных $\{z_1, \ldots z_n\} \to \{y_1, \ldots y_n\}$, такая, что $p(y) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i y_i^2$. Положим $y_1 = z_1$. Тогда $q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_1 = \dfrac{1}{a_{11}}$, и $(y_1, \ldots y_n)$ - координаты в некотором базисе, т.к. $Y = DX$, и $\det D \neq 0$.

(2) Предположим, что $a_{ii} = 0$. Пусть $a_{12} \neq 0$. Сделаем замену

$x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_j = y_j \ (j \geq 3)$. Тогда $X = CY, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$, $\det C = -2 \neq 0$ и

$q(y) = 2a_{12}(y_i^2 - y_2^2) + q'(y)$, где в $q'(y)$ нет $y_1^2 \Rightarrow$ Далее как в п. (1).

(3) Все $a_{ij} = 0 \Rightarrow q \equiv 0.$

□

8. Вещественные квадратичные формы

Пусть *V* – пространство над $\mathbb{R}, \dim V = n,\ q = q(x)$- квадратичная форма на *V*. Тогда в *V* существует базис, в котором *q*(*x*) имеет нормальный вид $q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2$, где $r = rank\, q$ - не зависит от выбора базиса.

Теорема. (закон инерции) *Число положительных и отрицательных коэффициентов в нормальном виде квадратичной формы не зависит от выбора базиса (т.е. s и r-s всегда одни и те же).*

Пусть $q = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 =$ (в базисе $\{e_i\}$) $= (x_1')^2 + \ldots + (x_t')^2 - (x_{t+1}')^2 - \ldots - (x_r')^2$ (в базисе $\{e_i'\}$). Предположим, что *t* < *s*. Обозначим $U = < e_1, \ldots, e_s >, W < e_{t+1}', \ldots, e_n' >$. Тогда $\dim U + \dim W = s + (n-t) > n = \dim V \Rightarrow W \bigcap U \neq 0.$ Пусть $a \in W \bigcap U, a \neq 0.$ Т.к. $a \in U,$ то $q(a) = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_s^2 > 0,$ где $a = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i e_i$. Аналогично, *q*(*a*) ≤ 0 т.к. $a \in W.$ Противоречие.

Следовательно, *t* не может быть меньше *s* и наоборот.

□

Опр. Если $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2,$ то *s* – *положительный индекс инерции*, а число (*r* – *s*) – *отрицательный индекс инерции q*.

Опр. Квадратичные формы *p*(*x*) и *q*(*x*) *эквивалентны*, если существует невырожденная матрица *A*, такая, что $Q = A^t P A$, где *P* и *Q* – матрицы *p* и *q*.

Следствие. *Формы p(x) и q(x) эквивалентны* $\Leftrightarrow rank\ p = rank\ q,$ *положительные и отрицательные индексы инерции совпадают.*

□ 1) $\Leftarrow$ Приведем к нормальному виду.

$$C^t Q C = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & . &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& . &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& . & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} = D^t P D \Rightarrow Q = (DC^{-1})^t P (DC^{-1})$$

2) $\Rightarrow$ аналогично.

□

9. Теорема Якоби.

Пусть $F=\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы *f*. Главные миноры

$$\Delta_k=\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kk} \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Ядро невырожденной симметрической БФ равно нулю.*

□ Пусть весь вектор $\sum y_i e_i \in \operatorname{Ker} f$, $F-$матрица f в $\{e_i\}$. Тогда $X^t F Y = 0 \quad \forall X=\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, где

$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$. Но если *Z* – вектор-столбец, для которого $X^t Z = 0 \quad \forall X$, то *Z* = 0. Следовательно,

$FY=0.$ Но $\det F \neq 0 \Rightarrow Y=0.$

□

Теорема (Якоби). *Пусть q – вещественная квадратичная форма с матрицей F, и* $\Delta_1,\ldots,\Delta_n \neq 0.$ *Тогда* $\exists$ *базис V, в котором q имеет вид* $q(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n^2$, *где* $\Delta_0=1.$

Индукция по *n*.

1) $n=1 \Rightarrow q(e)=f(e,e)=\Delta_1$. Положим $e'=\frac{1}{\Delta_1}e$. Тогда

$$q(e)=f(e,e),\ q(e')=f(e',e')=\frac{1}{\Delta_1^2}q(e)=\frac{1}{\Delta_1}=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\Rightarrow q(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1^2$$

2) *n* > 1. Обозначим $U=<e_1,\ldots,e_{n-1}>$. Пусть *f* на *U* имеет матрицу $\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & t_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1,1} & \cdots & f_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$. По предположению индукции $\exists$ базис $e_1',\ldots,e_{n-1}' \in U$, в котором $f(e_i',e_j')=\begin{cases} 0, i\neq j \\ \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, i=1,\ldots n-1 \end{cases}$

Рассмотрим базис $e_1',\ldots,e_{n-1}',e_n$ пространства *V*. Пусть $x=x_1e_1'+\ldots+x_{n-1}e_{n-1}'$. Тогда $0=f(x,e_1')=\ldots=f(x,e_{n-1}')$ - система из (*n*-1) линейных уравнений с *n* неизвестными $\Rightarrow \exists$ ненулевое решение $u=x_1e_1'+\ldots+x_{n-1}e_{n-1}'+x_ne_n$. Если $x_n=0,$ то $u\in U$. Но $\overline{f}$ - ограничение *f* на *U*

– невырожденная БФ, а $\overline{q} = \overline{f}(x,x)$ - невырожденная квадратичная форма $\Rightarrow$ (по лемме) $\ker \overline{f} = 0$ на *U*. Условие *u* – решение системы означает, что $u \in \ker \overline{f}$, -противоречие. Следовательно, $x_n \neq 0.$ Это значит, что $u \notin U \Rightarrow e_1',...,e_{n-1}',u$ -базис *V*, в котором *f* имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix},$$ причем $b_i = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \quad \forall i = 1,...,n-1.$

Пусть *C* – матрица перехода $\{e_i\} \to \{e_1',...,e_{n-1}',u\}$, тогда $|B| = b_1 \cdot ... \cdot b_n = |C^t F C| = \Delta_n d^2$, где $d = |C| = |C^t|$. Отсюда $b_n = \dfrac{\Delta_n d^2}{b_1 \cdot ... \cdot b_{n-1}}$. Но $b_1 \cdot ... \cdot b_{n-1} = \dfrac{1}{\Delta_{n-1}} \Rightarrow b_n = \Delta_n \Delta_{n-1} d^2 = \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(\Delta_n d)^2$.

Положим $\lambda = \Delta_n d, \quad e_n' = \lambda^{-1} u$. Тогда $f(e_i', e_j') = 0 \ \forall i \neq j$ и $f(e_n', e_n') = q(e_n') = \lambda^{-2} b_n = \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$.

□

10. Положительно определенные квадратичные формы.

Опр. *q – положительно определена* на *V*, если $q(u) > 0 \ \forall 0 \neq u \in V$.

Канонический вид: $q(x) = \sum \alpha_i x_i^2 : \alpha_1,...\alpha_n > 0$

Нормальный вид: $q(x) = x_1^2 + ... + x_n^2$

Теорема (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма q с матрицей F положительно определена* $\Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n > 0$.

Предположим, что $\exists k : \Delta_k = 0.$ Тогда ограничение *f* – полярная БФ на $< e_1,...,e_k >$ имеет нетривиальное ядро (доказать!). Но тогда $q(x) = 0$ для некоторого $x \in U, \, x \neq 0 \Rightarrow q$ - не положительно определенная. Следовательно, все $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n \neq 0$. Теперь все следует из теоремы Якоби. □

Опр. Симметричная БФ $f(x,y)$ называется *положительно определенной*, если $q(x) = f(x,x)$ - положительно определенная квадратичная форма.

11. Канонический вид кососимметричной БФ

Пусть $f(x,y)$ - кососимметричная БФ на *V* и $V_0 = \operatorname{Ker} f = \{ x \in V \mid f(x,a) = 0 \ \forall a \in V \}$.

Замечание. Кососимметричная (или симметричная) БФ *f* невырождена $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0$ (для фиксированного X : $\quad X^t F X = 0 \Leftrightarrow \det F = 0$).

Лемма. *Пусть* $V_0 = \mathrm{Ker}\, f$. *Тогда для любого подпространства* $V_1 \subset V$, *такого, что* $V = V_0 \oplus V_1$, *ограничение* f *на* V_1 *невырождено.*

Если $f(x,a) = 0\ \forall a \in V_1$ для некоторого $x \in V_1$, то $f(x,z) = 0\ \forall z \in V$ (т.к. $z = b + a$, где $b \in V_0, a \in V_1 \Rightarrow f(x,z) = f(x,b) + f(x,a) = 0 \quad (f(x,b) = 0,\ f(x,a) = 0) \quad (b \in \mathrm{Ker}\, f))$.

Т.к. $x \in V_0 \bigcap V_1 = 0 \Rightarrow x = 0$

□

05.03.05

Теорема. *Пусть V – векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой f (билинейной). Тогда $\dim V = 2m$ и существует разложение $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ где $\forall i \dim W_i = 2$, $\forall x \in W_i, \forall y \in W_j$, $f(x, y) = 0$ при $i \neq j$. Кроме того, ограничение f на W_i имеет в некотором базисе W_i матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Проведем индукцию по $n = \dim V$. $n = 1 \Rightarrow f \equiv 0$ - это противоречит невырожденности. Пусть $n = 2$.

Берем произвольный $e_1 \neq 0$ из V. Тогда $f(e_1, e_1) = 0$ и т.к. $\ker f = 0$ то $\exists e_2$ такой что $f(e_1, e_2) \neq 0$. При этом e_1 и e_2 линейно независимы. Можно выбрать e_2 так, что $f(e_1, e_2) = 1 \Rightarrow f(e_2, e_1) = -1$ и для $n = 2$ все доказано.

Пусть теперь $n > 2$. Выберем любой $e_1 \neq 0$ из V. Т.к. $\ker f = 0$ то $\exists e_2$ такой что $f(e_1, e_2) = 1$ и e_1, e_2 линейно независимы.

Обозначим $W_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Дополним до базиса V: $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим $U = W_1^{\perp} = \{x \in V \mid f(e_1, x) = f(e_2, x) = 0\}$. Тогда U – подпространство, более того U – пространство решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} f(e_1, x) = f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + \ldots + f_{1n}x_n = 0 \\ f(e_2, x) = f_{21}x_1 + f_{23}x_3 + \ldots + f_{2n}x_n = 0 \end{cases}$$

Где $F = (f_{ij})$ – матрица f в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$

Т.к. f невырождена, то строки F линейно независимы $\Rightarrow$ ранг системы равен 2. Поэтому $\dim U = n - r = n - 2$ и $V = W_1 \oplus U$. Если ограничение на пространство имеет ненулевое ядро A, то $A \subseteq \ker f$, что противоречит невырожденности, а это значит, что ограничение f на U – невырожденная кососимметричная билинейная функция ($f|_U$)

По индукции $U = W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ и все W_j имеют требуемые базисы □

Следствие. *Для любой кососимметрической билинейной формы на пространстве V существует базис, в котором она имеет матрицу*

$$F = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Где количество блоков $\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}$ *равно половине ранга* f *.*

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

1. Пусть V - векторное пространство над □

   Опр. Симметрическая билинейная функция f *- скалярное произведение*, если она положительно определена. Т.е. если вести обозначение $f(x,y)=(x\,|\,y)$:

   1. $(x\,|\,y)=(y\,|\,x)$
   2. $(\alpha x+\beta x'\,|\,y)=\alpha(x\,|\,y)+\beta(x'\,|\,y)$
   3. $(x\,|\,x)>0\ \ \forall x\neq 0$

2. Опр. *Евклидово пространство* - векторное пространство над $\mathbb{R}$ с заданным на нем скалярным произведением $(x\,|\,y)$

   Опр. *Матрица Грамма* – на *ij*-том месте стоит $(e_i\,|\,e_j)$, где e_i, e_j - вектора базиса Евклидова пространства.

   Опр. *Длина (норма)* вектора: $\|v\|=\sqrt{(v\,|\,v)}$

   Свойства: $\|v\|=0\Leftrightarrow v=0;\ \|\alpha v\|=|\alpha|\|v\|$

   Теорема. (неравенство Коши - Буняковского) $|(x\,|\,y)|\leq\|x\|\|y\|$

   $(\lambda x-y\,|\,\lambda x-y)=\lambda^2\|x\|^2-2\lambda(x\,|\,y)+\|y\|^2\geq 0$ при всех $\lambda\in$□ $\Rightarrow$дискриминант D уравнения $\lambda^2 a+\lambda b+c=0$ отрицателен или равен нулю, где $a=\|x\|^2, b=-2(x\,|\,y), c=\|y\|^2$. Но $D=b^2-4ac=4(x\,|\,y)^2-4\|x\|^2\|y\|^2\Rightarrow(x\,|\,y)^2\leq\|x\|^2\|y\|^2$ $\square$

   Следствие 1. (неравенство треугольника) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

   $$\|x+y\|^2=(x+y\,|\,x+y)=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x\,|\,y)\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2 \quad \square$$

   Следствие 2. $-1\leq\dfrac{(x\,|\,y)}{\|x\|\|y\|}\leq 1$

3. Угол между векторами

Существует единственный угол $\varphi\in[0,\pi]$ такой, что $\cos\varphi=\dfrac{(x\,|\,y)}{\|x\|\|y\|}$

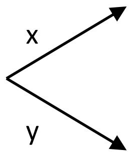
Это *угол* между x и y. $(x \mid y) = \|x\|\|y\|\cos\varphi$

4. Ортогональные векторы

Опр. w и v *ортогональны*, $u \perp v$, если $(u \mid v) = 0$

Следствие 1. (теорема Пифагора) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Следствие 2. *Диагонали ромба перпендикулярны*



$\|x\| = \|y\|$

$d_1 = x + y \;\; d_2 = x - y$

$(d_1 \mid d_2) = (x + y \mid x - y) = \|x\| - \|y\| = 0$ $\square$

Опр. $e_1, \ldots, e_n$ - *ортогональный базис* V, если $e_i \perp e_j \forall i \neq j$. $e_1, \ldots, e_n$ - *ортонормированный*, если он ортогональный и $\|e_i\| = 1$

Теорема. *В любом конечномерном евклидовом пространстве V существует ортонормированный базис.*

Пусть $q(x) = (x \mid x)$ - квадратичная форма на V. Она невырождена и положительно определена, следовательно, существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, т.е. матрица q (и соответствующая ей матрица скалярного произведения) равна $E \Rightarrow (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$

$\square$

5. Изоморфизм евклидовых пространств

Пусть U и V - два евклидовых пространства

Опр. $\varphi : U \to V$ - *изоморфизм евклидовых пространств*, если:

1) φ - изоморфизм векторных пространств
2) $(\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y)$

Теорема. *Конечномерные евклидовы пространства U и V изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim U = \dim V$

Пусть $\dim U = \dim V$. Рассмотрим ортонормированные базисы $u_1, \ldots, u_n \in U, v_1, \ldots, v_n \in V$. Если $x, y \in U, x = \sum x_i u_i, y = \sum y_i u_i$, то $(x \mid y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Задаем отображение

$\varphi : U \to V : \varphi(\sum x_i u_i) = \sum x_i v_i$. Тогда φ - изоморфизм векторных пространств, и $(\varphi(x) \mid \varphi(y)) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = (x_n \mid y_n)$ □

Обозначение. E^n - n-мерное евклидово пространство.

6. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

Теорема. *Пусть* $e_1, \ldots, e_m$ *- линейно независимые вектора* E^n *. Тогда существует ортонормированная система* $e'_1, \ldots, e'_m$ *такая, что* $\langle e'_1, \ldots, e'_i \rangle = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ *для любого* $i = 1 \ldots m$

Будем действовать пошагово. $m = 1$: $e'_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Пусть $e'_1, \ldots, e'_k$ уже построен. Тогда $e'_1, \ldots, e'_i \in \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ для любого *i*. Положим $e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e'_j$, где $\lambda_j = (e_j' \mid e_{k+1})$. Тогда $\langle e'_1, \ldots, e'_{k+1} \rangle = \langle e_1, \ldots, e_{k+1} \rangle$, $(e'_i \mid e'_j) = 0 \ \forall 1 \le i \ne j \le k+1$. Если $\|e_{k+1}\| \ne 1$, то нормируем его. □

Следствие. *Любую ортонормированную систему векторов в* E^n *можно дополнить до ортонормированного базиса.*

6. Ортогональные дополнения

Опр. $U^{\perp} = \{x \in V : (x \mid u) = 0, \forall u \in U\}$

Свойство 1: $U^{\perp}$ - подпространство

Свойство 2: $U \subseteq U^{\perp\perp}$

Теорема. *Пусть* V *- конечномерное евклидово пространство. Тогда для любого подпространства* U *выполнено равенство:* $V = U \oplus U^{\perp}$

Если $y \in U \cap U^{\perp}$, то $(y \mid y) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow U$ и $U^{\perp}$ не пересекаются $\Rightarrow U + U^{\perp} = U \oplus U^{\perp}$.
Пусть $e_1, \ldots, e_m$ - ортонормированный базис U и $v \in V$. Положим $\lambda_i = (v \mid e_i)$, $i = 1 \ldots m$ и $w = v - \sum \lambda_i e_i$. Тогда $(w \mid e_j) = (v \mid e_j) - \lambda_j (e_j \mid e_j) = \lambda_j - \lambda_j = 0 \ \ \forall i \le j \le m$, т.е. $w \in U^{\perp}$ и $v = w + \sum \lambda_i e_i \in U^{\perp} + U \ \ \Rightarrow V = U \oplus U^{\perp}$

Следствие. $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$. Если $U = V$, то $U^{\perp} = 0$

8. Сопряжённые операторы

Пусть V — евклидово пространство, $A, B \in \mathrm{L}(V)$.

Опр. B *сопряжён* к A (обозначается $B = A^*$), если $(Ax|y) = (x|By) \quad \forall x, y \in V$.

Таким образом, по определению $(Ax|y) = (x|A^* y)$. Существование для любого оператора сопряжённого, докажем чуть позже.

Предложение. (1) $A^{**} = A$ *и* (2) $(AB)^* = B^* A^*$

(1). $(Ax|y) = (x|A^* y) = (A^* y|x) = (y|A^{**} x) = (A^{**} x|y) \Rightarrow ((A^{**} - A)x|y) = 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow$ $(A^{**} - A)x \in V^{\perp}$ а значит, по предыдущей теореме $(A^{**} - A) = 0$.

□

(2). $((AB)^* x|y) = (x|ABy) = (A^* x|By) = (B^* A^* x|y) \quad \forall x, y \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$.

□

Теорема. *Пусть* A *— матрица оператора* A *в ортонормированном базисе* $\{e_1 \ldots e_n\}$. *Тогда* A^* *имеет в этом базисе матрицу* A^t.

Обозначим $\mathrm{B} = \mathrm{A}^*$. Пусть B — матрица B в базисе $\{e_1 \ldots e_n\}$. Тогда:

$Ae_j = \sum_i a_{ij} e_i$, $Be_k = \sum_i b_{ik} e_i$. Непосредственно из определения и ортонормированности базиса следует, что $a_{kj} = (\sum_i a_{ij} e_i | e_k) = (Ae_j | e_k) = (e_j | Be_k) = (e_j \Big| \sum_i b_{ik} e_i) = b_{jk}$. Итак, доказано, что $b_{jk} = a_{kj} \Rightarrow B = A^t$ □.

Замечание. Мы ещё не доказали существование сопряжённого оператора для любого, но это очевидно (достаточно положить $\mathrm{A}^* = A^t$ и провести аналогичное доказательство).

9. Самосопряжённые операторы

Опр. Оператор A *самосопряжён* в евклидовом пространстве V, если $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}$.

Лемма 1. *Пусть* A *— линейный оператор на* V *над* $\mathbf{R}$ *и* $\dim V < \infty$. *Тогда существует ненулевое инвариантное подпространство* $U \subseteq V$ *размерности меньше 2 (т.е.* $\mathrm{A}(U) \subseteq U$ *и* $\dim U \leq 2$*).*

Если A имеет собственный вектор x, то $\langle x \rangle$ — это инвариантное подпространство размерности 1, и всё доказано. Так что будем считать, что собственных векторов у A нет. Рассмотрим минимальный многочлен A **:** $\mu_{\mathsf{A}}(t) = f(t)$**.** В его разложении на множители над $\mathbf{R}$ будут множители степени 2 и только они (если есть множитель степени 1, то есть и собственный вектор, противоречие). Выделим один из них. Таким образом $f(t) = g(t)h(t)$ и $\deg g = 2$. Рассмотрим оператор $\mathsf{B} = h(\mathsf{A})$. Так как $\deg h < \deg f$, то многочлен h не минимальный и, значит, $\mathsf{B} \neq 0$. Пусть $W = \operatorname{Im}\mathsf{B} = \mathsf{B}(V)$, а $w \in W$ и $w \neq 0$. Пусть $U = \langle w, \mathsf{A}(w) \rangle$. Тогда $\dim U \leq 2$. Осталось доказать лишь, что $\mathsf{A}(U) \subseteq U$, то есть, что $\mathsf{A}^2 w \in U$. Пусть $g = t^2 + \lambda t + \mu$. Тогда $0 = f(\mathsf{A}) = g(\mathsf{A})h(\mathsf{A}) = (\mathsf{A}^2 + \lambda\mathsf{A} + \mu)\mathsf{B}$. Однако, из определения W, $\exists v \in V : w = \mathsf{B}\,v$. Отсюда

$$0 = 0v = (\mathsf{A}^2 + \lambda\mathsf{A} + \mu)\mathsf{B}\,v = \mathsf{A}^2 w + \lambda\mathsf{A}w + \mu w \Rightarrow \mathsf{A}^2 w = -\lambda\mathsf{A}w - \mu w \in U.\ \square$$

Лемма 2. *Пусть A — самосопряжённый оператор на евклидовом пространстве E^n, V — инвариантное подпространство для A. Тогда и $V^\perp$ также инвариантно для A.*

$\mathsf{A}V \subseteq V$, $x \in V^\perp \Rightarrow \forall v \in V : (v|\mathsf{A}x) = (\mathsf{A}v|x) = (v'|x) = 0$. Итак $(\mathsf{A}x|v) = 0 \ \ \forall v \Rightarrow \mathsf{A}x \in V^\perp$

$\square$

Теорема. *Пусть A — самосопряжённый оператор на евклидовом пространстве $V = \mathrm{E}^n$. Тогда в V существует ортонормированный базис из собственных векторов A.*

Индукция по $n = \dim V$. $n = 1$ — очевидно.

Пусть $n = 2$ (именно этот случай мы будем использовать в шаге), $\{e_1, e_2\}$ — ортонормированный базис *V*, A — матрица оператора A в этом базисе. Из самосопряжённости A, следует, что:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$\chi_A = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$.

$D = (a+d)^2 + 4(b^2 - ad) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0 \Rightarrow$ у χ_A есть хоть один действительный корень $\Rightarrow$ у A есть собственный вектор v. Но $V = \langle v \rangle \oplus \langle v^\perp \rangle$, а $\langle v^\perp \rangle$ также инвариантно по лемме 2. Отсюда базис $\{v, v^\perp\}$ — искомый базис.

Пусть $n > 2$. По лемме 1 существует $U \subseteq V : \dim U \leq 2$, $\mathsf{A}(U) \subseteq U$. Тогда $\mathsf{A}(U^\perp) \subseteq U^\perp$, а значит $V = U \oplus U^\perp$, где $\dim U^\perp \leq n-1$.

$\square$

Опр. Матрица A называется *ортогональной*, если $A^t = A^{-1}$, то есть $AA^t = E$.

Лемма 3. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса в E^n к другому ортогональна.*

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ и $\{e'_1 \dots e'_n\}$ — два ортонормированных базиса. Пусть C — матрица перехода от первого ко второму базису. Тогда $e'_j = \sum_i c_{ij} e_i$. Из ортонормированности следует, что

$(e'_i | e'_j) = \delta_{ij} = (e_i | e_j)$. С другой стороны, $(e'_i | e'_j) = (\sum_k c_{ki} e_k \Big| \sum_t c_{tj} e_t) = \sum_{k,t} c_{ki} c_{tj} (e_k | e_t) = \sum_k c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij}$,

что и означает, что $CC^t = E$. □

10. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Пусть $q = q(x)$ — квадратичная форма в E^n.

Теорема. *В* E^n *найдётся ортонормированный базис* $\{u_1 \dots u_n\}$, *в котором* q *имеет вид* $q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2$.

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ — произвольный ортонормированный базис в пространстве E^n, и $F = \left(f_{ij} \right)$ — матрица q в этом базисе. Тогда $F = F^t$, и, значит, существует линейный самосопряжённый оператор $\mathrm{A} : \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}^n$ с матрицей F . По предыдущей теореме существует ортонормированный базис $\{e'_1 \dots e'_n\}$ из собственных векторов A , в котором A имеет диагональную матрицу F'. Значит $F' = \mathrm{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} = C^{-1} F C$. По лемме 3 $C^{-1} = C^t$, поэтому $F' = C^t F C$ — диагональна. Но $C^t F C$ — матрица $q(x)$ в $\{e'_1 \dots e'_n\}$. □

Опр. *Приведением квадратичной формы к главным осям* называют переход к ортогональному базису в E^n, где она имеет нормальный вид.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Основные понятия

Пусть A — линейный оператор в евклидовом пространстве E^n.

Опр. Оператор A *ортогонален*, если он сохраняет скалярное произведение, то есть $(\mathrm{A}x | \mathrm{A}y) = (x | y)$.

Лемма 4. A *ортогонален* $\Leftrightarrow$ A *имеет ортогональную матрицу в ортонормированном базисе.*

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ — ортонормированный базис E^n, $C = \left(c_{ij} \right)$ — матрица A в этом базисе,

$\mathrm{A}e_i = \sum_k c_{ki} e_k$, $\mathrm{A}e_j = \sum_t c_{tj} e_t$. Тогда $(\mathrm{A}e_i | \mathrm{A}e_j) = (\sum_k c_{ki} e_k \Big| \sum_t c_{tj} e_t) = \sum_{k,t} c_{ki} c_{tj} (e_k | e_t) = \sum_k c_{ki} c_{kj}$.

Поэтому A ортогонален $\Leftrightarrow$ $C^t C = E$.

□

Лемма 5. *Пусть A — ортогональный оператор на евклидовом пространстве V, $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство для A. Тогда и $U^{\perp}$ также инвариантно для A.*

По лемме 4 оператор A — не вырожден. Тогда $\dim \mathrm{A}(U) = \dim U$, и значит $\mathrm{A}(U) = U$. Поэтому $\forall x \in U\ \exists y \in U : x = \mathrm{A}y$. Пусть $z \in U^{\perp}$ — любой вектор, $x \in U$. Тогда $\exists y \in U : x = \mathrm{A}y$ и

$(x|\mathrm{A}z) = (\mathrm{A}y|\mathrm{A}z) = (y|z) = 0$, то есть $\mathrm{A}z \in U^{\perp}$.

□

12 марта 2005

2. Канонический базис для ортогонального оператора.

Теорема. *Пусть A — ортогональный оператор в E^n. Тогда существует ортонормированный базис, в котором матрица A имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|cc|} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \\ \hline \end{array} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix}} & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

(1) По лемме 1 (см. самосопряжённые операторы) у A есть инвариантное подпространство $U \subseteq E^n, \dim U \le 2$. По лемме 5: $A(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$. Следовательно, $E^n = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ — инвариантные подпространства, $\dim U_i = 1$ или 2. Кроме того, U_i не содержат инвариантных подпространств $\neq 0$ и U_j. При этом $U_j \perp (U_1 \oplus \ldots \oplus U_{j-1} \oplus U_{j+1} \oplus \ldots \oplus U_m)$.

(2) Пусть $U = U_j, \dim U_j = 1$. Тогда $\mathrm{A}x = \lambda x$ и $(x|x) = (Ax, Ax) = \lambda^2 (x|x)$, $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$.

(3) $\dim U = 2$, e_1, e_2 — ортонормированный базис U, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица A в этом базисе, $A^t = A^{-1}$ по лемме 4. Тогда $|A| = |A^t| = |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \Rightarrow |A| = \pm 1$.

(a) Предположим, что $|A| = -1$. Вычислим $\chi_{\mathrm{A}}(t)$:

$$\chi_{\mathrm{A}}(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t-a_{22} \end{vmatrix} = (t-a_{11})(t-a_{22}) - a_{12}a_{21} = t^2 - (a_{11}+a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = t^2 - bt - 1$$

. Отсюда $\mathrm{D} = b^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ корни $\chi_{\mathrm{A}}(t)$ на U — вещественные, следовательно, существует собственный вектор в $U \Rightarrow$ в U есть 1-мерное A — инвариантное подпространство. Противоречие.

(б) остался случай $|A| = 1,\ A^t = A^{-1} \Rightarrow \begin{cases} {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \varphi:\ \cos\varphi = a_{11},\ \sin\varphi = a_{21}$. Тогда

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, поэтому $\begin{cases} a_{22}\cos\varphi - a_{12}\sin\varphi = 1 \\ a_{12}\cos\varphi - a_{22}\sin\varphi = 0 \end{cases}$ $\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \neq 0$. Значит, система имеет единственное решение. Подходит $a_{22} = \cos\varphi, a_{12} = \sin\varphi \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

. □

3. Полярное разложение.

Теорема. *Пусть* A *— невырожденный линейный оператор на евклидовом пространстве* V *. Тогда существуют ортогональный оператор* U *и самосопряжённый оператор* C *с положительными собственными значениями, такие, что* $\mathrm{A} = UC$ *.*

1) Положим, что $\mathrm{D} = \mathrm{A}^*\mathrm{A}$, где A^* - сопряжённый к A . Тогда $\mathrm{D}^* = \left(\mathrm{A}^*\mathrm{A}\right)^* = \mathrm{A}^*\mathrm{A}^{**} = \mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{D}$. То есть D самосопряжён.

2) Существует ортонормированный базис, в котором D имеет матрицу $diag\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$. Пусть $\lambda = \lambda_i$ — одно из собственных чисел D , и x — собственный вектор. Тогда $\lambda(x|x) = (\lambda x|x) = (\mathrm{D}x|x) = (\mathrm{A}^*\mathrm{A}x|x) = (\mathrm{A}x|\mathrm{A}x) > 0$. Отсюда и $\lambda = \dfrac{(\mathrm{A}x|\mathrm{A}x)}{(x|x)} > 0$, то есть все λ_i — положительны.

3) Существует самосопряжённый оператор C с матрицей $diag\{\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}\}$ в том же базисе. Ясно, что $C^2 = \mathrm{D}$ и C — невырожденный.

4) Положим $U = \mathrm{A}C^{-1}$. Тогда

$$(Ux|Uy) = (\mathrm{A}C^{-1}x|\mathrm{A}C^{-1}y) = \left(\left(\mathrm{A}C^{-1}\right)^*\mathrm{A}C^{-1}x|y\right) = \left(\left(C^{-1}\right)^*\mathrm{A}^*\mathrm{A}C^{-1}x|y\right) = \left(\left(C^{-1}\right)^*C^2C^{-1}x|y\right) = (x|y)$$

так как $\left(C^{-1}\right)^* = \left(C^*\right)^{-1} = C^{-1}$. То есть U ортогонален.

Тем самым мы доказали существование полярного разложения. □

УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Эрмитовы (полуторалинейные) формы.

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение. $f(x,y)$ — *эрмитова форма* на V, если $f\colon V\times V \to \mathbb{C}$, причём:

1) $f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z)$; $f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y)$,

2) $f(x,y)=\overline{f(y,x)}$ (комплексное сопряжение).

Следствие 1. $f(x,\lambda y)=\overline{\lambda} f(x,y)$.

Следствие 2. $f(x,y+z)=f(x,y)+f(x,z)$.

Следствие 3. $f(x,x)\subseteq\mathbb{R}$.

Следствие 4. $f(\lambda x,\lambda x)=|\lambda|^2 f(x,x)$.

2. (Эрмитово) скалярное произведение.

Пусть V — комплексное пространство.

Определение. Скалярное произведение на V — эрмитова положительно определённая форма. Обозначение: $f(x,y)=(x\,|\,y)$. *Положительная определённость:* $(x\,|\,x)>0 \quad \forall x\neq 0$ из V.

3. Ортогональность.

Пусть U — *унитарное пространство*, то есть комплексное пространство со скалярным произведением.

Определение. x и y *ортогональны*, если $(x\,|\,y)=0$.

Теорема. *В конечномерном унитарном пространстве можно выбрать ортонормированный базис, т.е.* $U=<e_1,\ldots,e_n>$, $(e_i\,|\,e_j)=\delta_{ij}$.

Пусть $v_1,\ldots,v_n$ — произвольный базис U. Возьмём любой $0\neq e\in U$. Умножая на (вещественный) скаляр, можно считать $\|e\|=\sqrt{(e\,|\,e)}=1$. Пусть теперь $x=x_1v_1+\ldots+x_nv_n$. Тогда $(e\,|\,x)=0$ — уравнения с n неизвестными $x_1,\ldots,x_n$. Так как $(e\,|\,e)\neq 0$, то $V=\{x\in U\,\big|\,(e\,|\,x)=0\}$ — подпространство в U, $\dim V=n-1$. По индукции ($\dim V<\dim U$) в V есть ортонормированный базис $e_2,\ldots,e_n$. Положив, $e_1=e$, получаем ортонормированный базис $e_1,\ldots,e_n$ в U. □

4. Унитарные и эрмитовы матрицы.

Пусть A — комплексная матрица $n\times n$.

Обозначим: $A^*=\overline{A}^t$ ($\overline{}$ — комплексное сопряжение).

Определение. Матрица A — *эрмитова*, если $A^*=A$.

Матрица A — *унитарная*, если $A^* = A^{-1}$.

Теорема. *Пусть C — матрица перехода от одного ортогонального базиса к другому ортогональному базису. Тогда C унитарна.*

Пусть $C = (c_{ij})$ — матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Если $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_j e_j$, то $(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$. Если $c_{1i}, \ldots, c_{ni}$ — элементы i-ого столбца C, то $\overline{c_{1i}}, \ldots, \overline{c_{ni}}$ — элементы i-ой строки у матрицы C^*.

Произведение i-ой строки C^* на j-ый столбец C равно $\overline{c_{1i}}\, c_{1j} + \ldots + \overline{c_{ni}}\, c_{nj} = (c_{1i}\overline{c_{1j}} + \ldots + c_{ni}\overline{c_{nj}}) = a_{ij}$. Но это есть (e'_i, e'_j), так как $e'_i = c_{1i}e_1 + \ldots + c_{ni}e_n$. Поэтому $a_{ij} = \delta_{ij}$, так как базис $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ортонормирован. Следовательно, $C^* C = E$ и C — унитарная матрица. □

6. Сопряжённый оператор.

Пусть V — унитарное пространство, $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(V)$.

Определение. $B = \mathrm{A}^*$ — *сопряжённый* к A, если $(Ax \mid y) = (x \mid By)\ \forall\, x, y \in V$.

Как и в вещёственном случае: $(A^*)^* = A$ и $(AB)^* = B^* A^*$.

Теорема. *Пусть $B = \mathrm{A}^*$ и A, B — матрицы A и B в ортонормированном базисе. Тогда $B = A^*$.*

$$(\mathrm{A}e_i \mid e_j) = \Big(\sum_k a_{ki} e_k \mid e_j\Big) = (a_{ji} e_j \mid e_j) = a_{ji} = (e_i \mid \mathrm{B} e_j) = \Big(e_i \mid \sum_k b_{kj} e_k\Big) = (e_i \mid b_{ij} e_i) = \overline{b_{ij}}\,. \ \square$$

14.03.05

6. Эрмитовы операторы.

Опр. $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(V)$ - *эрмитов оператор* в унитарном пространстве *V*, если $A = A^*$ (т.е. $(Ax \mid y) = (x \mid Ay)$).

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис *V*. A - эрмитов оператор $\Leftrightarrow$ его матрица в в этом базисе эрмитова (этот факт был на самом деле доказан на предыдущей лекции).

Теорема. *1) Все собственные числа эрмитова оператора – вещественные.*

2) Для эрмитова оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов.

1) $(Ax \mid x) = (\lambda x \mid x) = \lambda(x \mid x)$, где *x* – собственный вектор. Но, с другой стороны, $(x \mid Ax) = (x \mid \lambda x) = \overline{\lambda}(x \mid x)$, откуда и следует $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

2) Проведем индукцию по *n*. Для *n=1* утверждение теоремы очевидно.

Шаг. Если $\mathrm{A} \equiv 0$, то доказывать нечего. Иначе $\exists x \neq 0$ - собственный вектор с собственным числом λ (вещественным по пред. пункту). Можно считать $\|x\| = 1$. Идея доказательства такая же, как и в вещественном случае. Обозначим через $W = \langle x \rangle^{\perp} = \{y \in V \mid (x \mid y) = 0\}$. Тогда *W* – подпространство, $\dim W = n-1$. (полное повторение вещественного случая, $\dim W = n-1$ т.к. пространство решений одного уравнения). Покажем, что $\mathrm{A}(W) \subseteq W$. Действительно, $\forall y \in V$ ($z = \mathrm{A}(y)$) $(x \mid z) = (x \mid Ay) = (Ax \mid y) = (\lambda x \mid y) = 0$. Это и означает, что $z = \mathrm{A}y \in W$. По индукции в W есть ортонормированный базис из собственных векторов $\mathrm{A} - (e_2, \ldots, e_n)$. Добавив к этой системе первым вектором *x* получим требуемый базис. □.

Следствие. *Для любой эрмитовой матрицы A существует унитарная матрица* C *такая, что* $C^{-1}AC = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, *где все* $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

7. Унитарные операторы.

Пусть *V* – унитарное пространство, A - линейный оператор на нем.

Опр. A - *унитарный* оператор, если $(\mathrm{A}x \mid \mathrm{A}y) = (x \mid y)\ \ \forall x, y \in V$.

Предложение. A - *унитарный оператор* $\Leftrightarrow$ *имеет унитарную матрицу в ортонормированном базисе.*

Т.к. $(\mathrm{A}x \mid \mathrm{A}y) = (x \mid \mathrm{A}^*\mathrm{A}y) = (x \mid y) \Leftrightarrow \mathrm{A}^*\mathrm{A} = \varepsilon \Leftrightarrow \mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{-1}$. □

Теорема. *Для любого унитарного оператора* A *в конечномерном векторном унитарном пространстве существует ортонормированный базис, в котором он имеет матрицу вида*

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$$

В частности, все собственные числа равны по норме единице.

(1) Пусть *x* - собственный вектор с собственным числом λ. Тогда $(x \mid x) = (\mathrm{A}x \mid \mathrm{A}x) = (\lambda x \mid \lambda x) = \|\lambda\|^2 (x \mid x) \Rightarrow \|\lambda\| = \pm 1, \lambda = e^{i\varphi}$.

(2) Рассмотрим собственный вектор v, λ - его собственное значение. $W = \langle v \rangle^{\perp} = \{x \in V \mid (v \mid x) = 0\}$. Тогда выполнено $(v \mid \mathrm{A}x) = \lambda^{-1}(\mathrm{A}v \mid \mathrm{A}x) = \lambda^{-1}(v \mid x) = 0 \Rightarrow W$ инвариантно. Так как $v \notin W$, то $\dim W = n-1 < \dim V = n$. По индукции взяв искомый базис в W и добавив v и получим искомый базис всего пространства. □

АФФИННЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Основное поле - К.

Опр. Пара (A, V), где V - векторное пространство называется *аффинным пространством*, если задано отображение $f : A \times V \to A$ такое, что выполнено (под «+» подразумевается f):

1) $p + \overline{0} = p \quad \forall p \in A$

2) $(p + \overline{u}) + \overline{v} = p + (\overline{u} + \overline{v}) \quad \forall p \in A, \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$

3) $\forall p, q \in A \quad \exists! v \in V : p + \overline{v} = q$

В последнем свойстве иногда пишут $\overline{v} = \overrightarrow{pq}$ или $\overline{v} = p - q$. Элементы *A* называют *точками аффинного пространства*. Само аффинное пространство называют ассоциированным с V. Кроме того, говорят, что у аффинного пространства есть размерность:

Опр. Размерность *A*: $\dim A := \dim V$

2. Изоморфизм

Пусть A, A' - два аффинных пространства, ассоциированные с одним и тем же векторным пространством V.

Опр. Биективное отображение $f : A \to A'$ называется *изоморфизмом*, если $f(p + \overline{v}) = f(p) + \overline{v}, \overline{v} \in V$. Это частный случай *аффинно-линейного отображения* , а именно:

Опр. Отображение $f : A \to A'$ (где A ассоциировано с V, а A' - с V') называется *аффинно-линейным*, если существует линейное отображение $Df : V \to V'$ такое, что $f(p + \overline{v}) = f(p) + Df(\overline{v})$. Иногда *Df* называют *линейной частью*, или *дифференциалом* для *f*.

Утверждение. *f – биективно* $\Leftrightarrow$ *Df биективно.*

Теорема. *Аффинные пространства одинаковой размерности изоморфны.*

Пусть (A,V) и (A',V) - два аффинных пространства одинаковой размерности. Построим изоморфизм $f:A\to A'$. Зафиксируем $0\in A, 0'\in A'$. Положим для $p=0+\bar{v}$ $f(p)=0'+\bar{v}$. Проверим определение. Пусть $p\in A$ - произвольная точка, $\bar{u}\in V$ - произвольный вектор. $\exists\bar{v}\in V: p=0+\bar{v}$. Поэтому $f(p+\bar{u})=f(0+(\bar{v}+\bar{u}))=f(0)+(\bar{u}+\bar{v})=0'+\bar{u}+\bar{v}=f(p)+\bar{u}$. Итак *f* – искомый изоморфизм. □

3. Координаты в аффинном пространстве.

Опр. *Системой координат* в аффинном пространстве (A,V) называют набор $\{o,e_1,...,e_n\}$, в котором о – точка из *A,* а $e_1,...,e_n$ - базис V. о – *начало координат*. Т.к. $\forall p,q\in A \ \ \exists! v\in V: p+\bar{v}=q$, то можно определить координаты точки *p* в фиксированной системе координат, как набор $(x_1,...,x_n)$, где *x* – координаты в разложении вектора $\overrightarrow{op}$ по базису. Систему координат также можно задать $(n+1)$ точкой в A $(n=\dim A)$. При этом $\{p_1,...,p_n,p_{n+1}\}$ - система координат с началом в p_{n+1} и базисными векторами $p_1p_{n+1},...,p_np_{n+1}$.

26.03.05

Теорема. *Пусть* $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ *– система координат в* (A,V) *и* $\overline{e_1} = \overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overline{e_n} = \overrightarrow{p_0 p_n}$. *Если* $p, q \in A$ *имеют координаты* $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ *соответственно в* $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$*, то* $\overrightarrow{pq} = (y_1 - x_1)\overline{e_1} + \dots + (y_n - x_n)\overline{e_n}$. *Если* $r \in A$ *и* $r = p + \overline{w}$*, где* $\overline{w} = z_1\overline{e_1} + \dots + z_n\overline{e_n}$*, то r имеет координаты* $(x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n)$.

(1) Пусть $q = p + \overline{v}$, $\overline{v} = \sum \alpha_i \overline{e_i}$. Тогда $q = (p_0 + \sum x_i \overline{e_i}) + \sum \alpha_i \overline{e_i} = p_0 + \sum (x_i + \alpha_i)\overline{e_i}$, но $q = p_0 + \sum y_i \overline{e_i} \Rightarrow$

$\alpha_i = y_i - x_i$.

(2) $r = p + \overline{w} = (p_0 + \sum x_i \overline{e_i}) + \sum z_i \overline{e_i} = p_0 + \sum (x_i + z_i)\overline{e_i}$ □

Переход к новой системе координат.

Пусть $\{o, \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ и $\{o', \overline{e_1}', \dots, \overline{e_n}'\}$ – две системы координат в (A,V). Обозначим через $(b_1, \dots, b_n)$ координаты точки в o' $\{o, \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$, а через $C = (c_{ij})$ матрицу перехода от $\{\overline{e_i}\}$ к $\{\overline{e_i'}\}$ в *V*. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x_1', \dots, x_n')$ - координаты одной и той же точки *p* в разных системах координат. Тогда

$$\sum x_i \overline{e_i} = \overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p} = \sum b_i \overline{e_i} + \sum x_j' \overline{e_j'} = \sum b_i \overline{e_i} + \sum_j x_j' \sum_i c_{ij} \overline{e_j} = \sum_i \left(\sum_j c_{ij} x_j + b_i \right) \overline{e_i} \Rightarrow$$

$x_i = b_i + \sum_j c_{ij} x_j'$ или $X = CX' + B$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ или $X' = C^{-1}X + B'$, где $B' = -C^{-1}B$.

4. Подпространства.

Пусть $p \in A$, *U* – подпространство в *V*.

Опр. Множество точек $P = \{p + \overline{u} \mid \overline{u} \in U\} = p + U$ называют *аффинным подпространством* (или *плоскостью* в *A*) размерностью $\dim P = \dim U$. Говорят, что *U* – *направляющее подпространство* для *P*.

Предложение. *Подпространство P является аффинным подпространством, ассоциированным с U.*

Пусть $p \in P$, $\overline{u}, \overline{v} \in U$. Тогда $\left(\overline{u}+\overline{v}\right) \in U$ и $\left(p+\overline{u}\right)+\overline{v} = p+\left(\overline{u}+\overline{v}\right)$. Далее, пусть $q \in P$. Тогда $\exists! \overline{u} \in U:\ q = p+\overline{u}$. Пусть также $r \in P$, $r = p+\overline{v}$, $\overline{v} \in U$. Тогда $p = r-\overline{v}$ и $q = p+\overline{u} = r+\left(\overline{u}-\overline{v}\right)$, т.е. $\forall q, r \in P\ \ \exists \overline{w} \in U:\ q = r+\overline{w}$. Единственность очевидна. □

Направляющее пространство *U* однозначно определяется по *P*.

Опр. *Прямая* – подпространство размерности 1.

Прямая, проходящая через $p, q \in A$: $\{p + \lambda \overrightarrow{pq} \mid \lambda \in K\}$

Теорема. *Подмножество* $P \subseteq A$ *является подпространством* $\Leftrightarrow$ *P содержит прямую, проходящую через любые 2 точки* $a, b \in P$.

(1) Пусть сначала *P* – плоскость, $P = p+U, U \subseteq V$.

Пусть $a, b \in P$, $a = p+\overline{x}$, $b = p+\overline{y}$. Тогда $\overrightarrow{ab} = \overline{y}-\overline{x}$ и $a+\lambda\overrightarrow{ab} = a+\lambda(\overline{y}-\overline{x}) = p+\lambda\overline{y}+(1-\lambda)\overline{x} = p+\overline{w},\ \overline{w} \in U \Rightarrow a+\lambda\overrightarrow{ab} = p+\overline{w} \in P$.

(2) Обратно, пусть *P* содержит все прямые.

Возьмем любую точку $p \in P$. Обозначим $U = \left\{\overrightarrow{pq} \mid q \in P\right\}$. Докажем, что *U* – подпространство в *V*.

Пусть $a, b \in P$. Тогда $c = a+\frac{1}{2}\overrightarrow{ab} \in P$. Но $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ap}+\overrightarrow{pb} = -\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{pb}$, поэтому $c = a+\frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = a+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{pb}-\overrightarrow{pa}\right) = p+\frac{1}{2}\overrightarrow{pa}+\frac{1}{2}\overrightarrow{pb}$, т.е. $\frac{1}{2}\left(\overline{u}+\overline{v}\right) \in U$ для $\forall \overline{u}, \overline{v} \in U$. Достаточно теперь доказать, что $\lambda\overline{w} \in U$ для любых $\overline{w} \in U, \lambda \in K$. Но это следует из того, что *P* содержит прямую *pq* для любой точки *p*: если $q = p-\overline{w}$, то $p+\lambda\overrightarrow{pq} = p+\lambda\overline{w} \in P$, т.е. $\exists q' \in P$: $q' = p+\lambda\overline{w}$ и $\lambda\overline{w} \in U$ □

Следствие. *Если* P' *и* P'' *- плоскости в A, то их пересечение* $P = P' \cap P''$ *либо пусто, либо является плоскостью с направляющим подпространством* $U' \cap U''$, *где* U', U'' *– направляющие подпространства для* P' *и* P''.

Если *P* содержит ровно одну точку, то это 0-мерное подпространство с $U = \left\{\overline{0}\right\}$. Если $\exists a \neq b \in P$, то, по теореме, *P* содержит прямую *ab* $\Rightarrow$ *P* – подпространство.

Зафиксируем точку $p \in P = P' \cap P''$. Тогда, если $q \in P$, то $q' = p+\overline{u}' = p+\overline{u}''$, т.е. $\overline{u}' = \overline{u}'' \in P' \cap P''$. Поэтому $U = \left\{\overrightarrow{pq} \mid q \in P\right\} \subseteq U' \cap U''$. Обратное включение очевидно. □

Опр. Плоскости P *и* P' называются *параллельными*, если они имеют одно и тоже направляющее подпространство *U*, т.е. $P = p+U, P' = p'+U$.

Обобщение. $P = p + U, Q = q + W$, *P* параллельно *Q*, если $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.

Опр. Плоскости *P* и *Q* называются *скрещивающимися*, если они не параллельны, но $P \cap Q = \varnothing$.

Опр. Точки $p_1, \ldots, p_r$ называются точками *общего положения*, если они не лежат ни в одной плоскости размерности *r-2*.

Само К можно рассматривать как 1-мерное аффинное пространство. Поэтому можно рассматривать аффинно-линейное отображение $f: A \to K$, т.е. $f\left(p+\bar{v}\right) = f\left(p\right) + Df\left(\bar{v}\right)$, где $Df: V \to K$, т.е. $Df \in V^*$.

Если $\{o, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ – система координат в (A, V) и $(x_1, \ldots, x_n)$ – координаты точки *P*, то обозначив $f(0) = \alpha_0$, $Df(\bar{e}_i) = \alpha_i$ $(1 \le i \le n)$, получим:

$f(p) = f(0) + Df\left(\sum x_i \bar{e}_i\right) = \alpha_0 + \sum \alpha_i x_i$, т.е. любое линейное уравнение $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$ можно рассматривать как уравнение $f(p) = 0$ в аффинном пространстве *A* размерности *n*, где f – аффинно-линейная функция.

Теорема. *Множество точек аффинного пространства, удовлетворяющих совместной системе линейных уравнений ранга r, образуют (n-r)-мерную плоскость* $P \subseteq A$. *Любая плоскость может быть получена.*

(1) Сопоставим системе $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ n аффинно-линейных функций.

Зафиксируем систему координат $\{o, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ в (A, V) и положим $f_i(p) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$, где

$p = 0 + \sum x_j \bar{e}_j$, тогда $f_i(0) = -b_i$ и $Df\left(\sum_j x_j \bar{e}_j\right) = \sum_j a_{ij} x_j$. Пусть совместна и $x_1^0, \ldots, x_n^0$ – ее решение. Возьмем точку p_0 с координатами $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Будем говорить, что точка p с координатами $x_1, \ldots, x_n$ решение нашей системы, если $f_1(p) = \ldots = f_m(p) = 0$. Тогда p_0 – решение, а вектор $y = \overrightarrow{p_0 p}$ – решение однородной системы $Df_1\left(\bar{y}\right) = \ldots Df_m\left(\bar{y}\right) = 0$ (*).

Т.к. совокупность решений (*) – подпространство $U \subseteq V$, а любое решение неоднородной системы получается из $x_1^0, \ldots, x_n^0$ прибавлением решений однородной системы, то множество точек *p*, для которых $f_1(p) = \ldots = f_m(p) = 0$ равно $p_0 + U$, т.е. это плоскость и $\dim U = n - 2$.

(2) Пусть теперь *P* – плоскость в *A*, $P = p_o + U, U \subseteq V$. $\exists$ система уравнений $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$, задающая *U*, где $x_1, \ldots, x_n$ – координаты вектора в некотором базисе $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ пространства V $(p_0 \in P)$.

Рассмотрим систему координат $\left\{p_0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right),\overline{e_1},...,\overline{e_n}\right\}$ в (A,V). Тогда $p_0\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0 p}\in U$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_j-x_j^0\right)=0$, $i=1,...,m$, где $x_1,...,x_n$ – координаты *p* в выбранной системе координат.

Обозначим $b_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0$ получим необходимую совместную систему линейных уравнений.

28.03.05

ЕВКЛИДОВЫ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Евклидова метрика.

Опр. Аффинное пространство (E,V) называется *евклидовым точечным пространством*, если V - евклидово векторное пространство.

Опр. *Расстояние* между точками: $\rho(p,q)=\left\|\overrightarrow{pq}\right\|=\sqrt{\left(\overrightarrow{pq}\mid\overrightarrow{pq}\right)}$

Свойства метрики ρ:

i) $\rho(p,q)=\rho(q,p)$

ii) $\rho(p,q)=0\Leftrightarrow p=q$

iii) $\rho(p,q)+\rho(q,r)\geq\rho(p,r)$ - неравенство треугольника

Опр. Система координат $\{o,e_1,\ldots,e_n\}$ называется *прямоугольной*, если $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - ортонормированный базис V.

Опр. Отображение $f:E\to E'$ называют *изоморфизмом евклидовых пространств* (E,V,ρ) и (E',V',ρ'), если f - изоморфизм аффинных пространств и $\rho(p,q)=\rho'(f(p),f(q))$

Теорема. *Любые два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны.*

Пусть $\{o,e_1,\ldots,e_n\}$ и $\{o',e_1',\ldots,e_n'\}$ прямоугольные системы координат в E и E'.

Зададим $f:E\to E'$. $f(o)=o'$, $Df(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=x_1'e_1'+\ldots+x_n'e_n'$. Тогда f изоморфизм аффинных пространств, а Df сохраняет длины векторов, т.е. f - изоморфизм евклидовых точечных пространств.

2. Расстояние от точки до плоскости.

Пусть E - евклидово пространство, $\dim E = n$, p и q - точки из E. Прямую, проходящую через p и q будем обозначать как $\Pi_{p,q}$. Пусть Π - плоскость размерности m в E, $q \in \Pi$ и $p \notin \Pi$.

Опр. Прямая $\Pi_{p,q}$ *перпендикулярна* плоскости Π, если $pq \perp rs, \forall r, s \in \Pi$, т.е. $(pq \mid rs) = 0$.

Предложение. *Если* $p \notin \Pi$, $q \in \Pi$, $q \neq r \in \Pi$ *и* $pq \perp \Pi$, *то* $\rho(p,r) > \rho(p,q)$

$pr = pq + qr$. Из $pq \perp \Pi$ следует $(pq \mid qr) = 0$.
$\rho^2(p,r) = (pr \mid pr) = (pq + qr \mid pq + qr) = \rho^2(p,q) + \rho^2(q,r) > \rho^2(p,q)$. □

Пусть теперь $\Pi = 0 + U$, U -подпространство в V, $p \notin \Pi$, $\{e_1, \dots, e_m\}$ - базис U,

$\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1} + \dots + e_n\}$ - базис V.

Теорема. *Из точки* p *можно опустить перпендикуляр* pq *к* Π, $q \in \Pi$. *Его длина* $|pq|$ *есть кратчайшее расстояние от* p *до* Π. *Точка* $q \in \Pi$ *находится из условия* $\overrightarrow{qp} = \overrightarrow{op} - \vec{x}$,

(*) где $q \in \Pi$ $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m \in U$, *а*
$$x_i = \frac{1}{G(e_1, \dots, e_m)} \times \begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_1, v) & \dots & (e_1, e_m) \\ (e_2, e_1) & \dots & (e_2, v) & \dots & (e_2, e_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_m, e_1) & \dots & (e_m, v) & \dots & (e_m, e_m) \end{vmatrix}$$

где $v = \overrightarrow{op}$, *а* $G(e_1, \dots, e_m)$ *- определитель Грама.*

$V = U \oplus U^{\perp}$ Тогда $op = x + y, x \in U, y \in U^{\perp}$. Положим $q = o + \vec{x} \in \Pi$, $op = oq + qp, qp = y$.
Поскольку $qr \in U, \forall r \in \Pi$, то $pq \perp qr$,т.е. $pq \perp \Pi$.

Вычислим координаты x в базисе $\{e_1, \dots, e_m\}$ $\sum_1^m x_i e_i = x, \overrightarrow{op} = \vec{v}$.

Тогда $v = x + y, y \in U^{\perp}$ Отсюда $(v \mid e_i) = (x \mid e_i), \forall i = 1, \dots, m$

Получаем систему уравнений $1 \le i \le m$

$(e_1 \mid e_i) x_1 + (e_2 \mid e_i) x_2 + \dots + (e_m \mid e_i) x_m = (v \mid e_i)$ Ее определитель, это $G(e_1, \dots, e_m)$ - определитель Грама. Не равен нулю, т.к. вектора линейно независимы. По правилу Крамера система имеет единственное решение задаваемое (*). □

3. Расстояние между плоскостями.

Пусть Π и Π' - две плоскости в евклидовом пространстве (E, V, ρ) $\rho \in \Pi, \rho' \in \Pi'$

Опр. Отрезок pp' - *общий перпендикуляр* к Π и Π', если $pp' \perp \Pi$, и $pp' \perp \Pi'$.

Лемма 1. *Любые две плоскости имеют общий перпендикуляр.*

Пусть $\Pi = q + U$, $\Pi' = q' + U'$. Будем искать точки $p = q - u, p' = q' - u', u \in U, u' \in U'$,

такие что $pp' \perp \Pi,$ и $pp' \perp \Pi'$. Т.к. $u = pq, u' = p'q'$, то $pp' = pq + qq' + q'p' = u - u' + qq'$. Разложим V в сумму $V = (U + U') + (U + U')^{\perp}$. Тогда $qq' = b + c, b \in U + U', c \in (U + U')^{\perp}$. Тогда b и c определены однозначно, причем $b = v + v', v \in U, v' \in U'$. Отсюда $pp' = -u' + v' + v + u + c$. Если взять $u' = v', u = -v$, то $pp' = c$. Т.е. $pp' \perp (U + U'),$ поэтому pp' - общий перпендикуляр к Π и Π'. □

Лемма 2. *Если отрезок pp' - общий перпендикуляр к Π и Π', то* $\rho(p, p') \le \rho(q, q'), \forall q \in \Pi, q' \in \Pi'$.

Пусть $q = p + u$, $q' = p' + u'$, $u \in U, u' \in U'$. Тогда $p' = p + pp'$, $q' = p + pp' + u'$. Отсюда $qq' = pp' + u' - u$. $u' = p'q', u = pq$. Т.к. pp' - общий перпендикуляр к Π и Π', то $pp' \perp u, pp' \perp u'$. Следовательно $\|qq'\|^2 = (pp' + u' - u \mid pp' + u' - u) = \ldots = \|pp'\|^2 + \|u' - u\|^2 \ge \|pp'\|^2$ □

Теорема. *Для любых двух плоскостей Π и Π' в (E, V, ρ) найдутся такие точки $\rho \in \Pi, \rho' \in \Pi'$, что выполнено $\rho(p, p') \le \rho(q, q'), \forall q \in \Pi, q' \in \Pi'$ и отр. pp' - общий перпендикуляр к Π и Π', он определен однозначно $\Leftrightarrow U \bigcap U' = 0$. ($U$ и U' - направляющие плоскости Π и Π').*

Существование доказано в Лемме 1 и Лемме 2. Пусть pp' и qq' - два перпендикуляра.

Тогда $\exists u \in U, u' \in U'$, так что $q = p + u$, $q' = p' + u'$. Как и в Лемме2 $qq' = pp' + u' - u$ (*). Поскольку pp' и qq' два перпендикуляра, то $\rho(p, p') = \rho(q, q')$. Следовательно $u = u' \in U \bigcap U'$. Таким образом при $U \bigcap U' = 0$ общий перпендикуляр только один. Если же $U \bigcap U' \ne 0$, то $u = u' \ne o$, то и qq' - общий перпендикуляр. □

2.04.05

Определитель Грама и объем параллелепипеда.

Пусть *E* – евклидово аффинное пространство,

V – ассоциированное с ним векторное евклидово пространство

$O, P_1, ..., P_m \in E,$ *где* $m = \dim E$, $\overline{e_1} = \overline{OP_1}, ..., \overline{e_m} = \overline{OP_m}$, $f_1, ..., f_m \in U$ - ортонормированный базис

$$e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Опр. *Параллелепипед* в ***E***, заданный точками

$$O, P_1, ..., P_m : P(OP_1, ..., OP_m) = \{O + t_1\overline{OP_1} + ... + t_m\overline{OP_m} \mid 0 \le t_i \le 1, 1 \le i \le m\}$$

Объем зададим так: $v_m = vol^m(P(OP_1, ..., OP_m)) = |\det(a_{ij})|$

Теорема. $v_m^2 = G(\overline{e_1},...,\overline{e_m})$

$$v_m^2 = (\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix})^2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

где $b_{ij} = \sum_k a_{ki} a_{kj}$

Заметим, что $\overline{e_i} = \sum_k a_{ki} f_k$, $\overline{e_j} = \sum_t a_{tj} f_t$; $(e_i \mid e_j) = (\sum_k a_{ki} f_k \mid \sum_t a_{tj} f_t) = \sum_k a_{ki} a_{kj} = b_{ij}$

Итак, $b_{ij} = (\overline{e_i} \mid \overline{e_j}) = g_{ij} \Rightarrow v_m^2 = G(\overline{e_1},...,\overline{e_m})$. □

Аффинная группа

Пусть *(A,V)* – *n*-мерное аффинное пространство, и $f : A \to A$-биективное аффинно-линейное отображение, то есть $f(p+\overline{v}) = f(p) + Df(\overline{v})$. Обозначим $F = Df$. Так как ***f***-биективное, то $\exists f^{-1}$.

Покажем, что f^{-1} - тоже аффинное-линейное. Для этого покажем, что $Df^{-1} = F^{-1}$

Так как $f : p+\overline{v} \mapsto f(p) + F(\overline{v}) = a + \overline{u}$, то $f^{-1} : a+\overline{u} \mapsto p+\overline{v}$. Но $a = f(p),\ \overline{u} = f(\overline{v})$, $p = f^{-1}(a), \overline{v} = f^{-1}(\overline{u})$. То есть f^{-1} - аффинно-линейное.

Есть тождественное отображение $e : A \to A$. Оно аффинно-линейное, его дифференциал $De = \varepsilon;\ V \to V;\ \varepsilon\overline{x} = \overline{x}$

Так как умножение ассоциативно, то можно взять все биективные аффинно-линейные отображения ***A*** в себя (операция композиции), получим группу.

Осталось проверить только, что композиция задана корректно.

Теорема. *Совокупность* $\mathbb{A}_n$ *всех аффинных биективных преобразований (т.е. аффинно-линейное отображение* $f : A \to A$*) образует группу.*

Не доказано только, что если *f* и *g* – аффинно-линейные, то и *fg* - тоже аффинно-линейное.

Пусть $Df = F, Dg = G, h = fg$. Тогда $h(p+\overline{v}) = f(g(p+\overline{v})) = f(g(p) + G\overline{v}) = f(g(p)) + FG(\overline{v}) = h(p) = FG(\overline{v})$, то есть *fg* - аффинно-линейное с дифференциалом $Dh = FG$. □

Самые простые преобразования – параллельные переносы и сдвиг.

Опр. Отображение $t_{\overline{v}} : A \to A$, $t_{\overline{v}}(q) = q + \overline{v}$ называют *сдвигом* на $\overline{v}$ в *A*, где $\overline{v} \in V$.

Если $a, p \in A, a = p + \overline{u}, mo\_t_{\overline{v}}(p + \overline{u}) = p + \overline{u} + \overline{v} = p + \overline{v} + \overline{u} = t_{\overline{v}}(p) + \overline{u}$, то есть $t_{\overline{v}}$ -аффинно-линейное отображение $Dt_{\overline{v}} = \varepsilon$. Оно биективно, значит $t_{\overline{v}}$ - аффинное преобразование.

Ясно, что $t_{\overline{v}} t_{\overline{w}} = t_{\overline{v}+\overline{w}}$. $T = \{t_{\overline{v}} \mid \overline{v} \in V\}$ - абелева подгруппа в A_n . *G*- группа, *f*- ее подгруппа.

Опр. $H \triangleleft G$ (H - *нормальная подгруппа* в G), если она выдержанно сопряжена любым групповым элементам, т.е. $g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G (\ni f : gH = Hg)$.

$GL_n(K)$-группа всех невырожденных матриц над полем *K*.

Теорема (о структуре аффинной группы).

*1) Подгруппа сдвигов **T** – нормальная в A_n , и равна ядру гомоморфизма $D: A_n \to GL_n(K)$, где $D: f \mapsto Df$.*

2) Аффинное преобразование, оставляющее неподвижной некоторую точку $O \in A$, образующую подгруппу, изоморфную $GL_n(K)$.

Доказательство.

1) Мы уже доказали, что $f, g \in A_n \quad h = fg \Rightarrow h \in A_n, Dh = DfDg$

Это и означает, что $D: f \mapsto Df$ гомоморфизм групп $A_n \to GL_n(K)$, $t_{\overline{v}} = Ker(D), \forall \overline{v} \in V$

Гомоморфизм сюръективен.

Пусть теперь $f \in Ker(D)$. Тогда $f(p + \overline{v}) = f(p) + \overline{v}$.

Докажем, что этим свойством обладает только сдвиг.

Заметим, сначала, что если $a, b \in A$, $a' = a + \overline{v}, b' = b + \overline{v}$, то $\overline{aa'} = \overline{bb'} = \overline{v}$, $\overline{a'a} = -\overline{v}$.

Поэтому $\overline{a'b'} = \overline{a'a} + \overline{ab} + \overline{bb'} = -\overline{v} + \overline{ab} + \overline{v} = \overline{ab}$.

Вектор $\overline{gf(g)}$ не зависит от $\overline{g}$, так как если $g = p + \overline{v}$, то $\overline{gf(g)} = \overline{(p + \overline{v})(f(p) + \overline{v})} = \overline{pf(p)}$.

Обозначим $\overline{u} = \overline{gf(g)}$. Тогда $f(q) = q + \overline{qf(q)} = q + \overline{u}$, то есть $f = t_{\overline{u}} \Rightarrow Ker(D) = T$. В ядре, кроме сдвигов, ничего нет.

2) Очевидно, что $A_n(\square)_O = \{f \in A_n \mid f(O) = O\}$-подгруппа в A_n. Так как

$H = A_n(\square_O)$ не содержит сдвигов, то ограничение D на H инъективный гомоморфизм $H \to GL_n(\square)$. Покажем теперь его сюръективность. Построим нужное аффинное преобразование. Пусть $f: A \to A, f(O + \overline{v}) = O + F\overline{v}$, где F произвольный невырожденный оператор на V.

Тогда если $p = O + \overline{w}$, то
$f(p+\overline{v}) = f(O+\overline{w}+\overline{v}) = O + F(\overline{w}+\overline{v}) = O + F(\overline{w}) + F(\overline{v}) = h(p) + F(\overline{v})$, то есть ***f***-аффинное преобразование, причем $f \in A_n(\mathbb{R})_O$ и $Df = F$.

Следовательно, $D : H \to GL_n(\mathbb{R})$ -изоморфизм групп. $\square$

Теорема. *Любое аффинное преобразование* $f : A \to A$ *можно представить в виде композиции* $f = t_{\overline{a}} g$ *, где* $\overline{a} \in \overline{of(o)}, o \in A, g(o) = o$ *.*

Возьмем $o \in A$, положим $\overline{a} = \overline{of(o)}, g = t_{\overline{a}} f$. Тогда ***g***-аффинно-линейное преобразование. $g(o) = (t_{-\overline{a}} f)(o) = t_{-\overline{a}}(o + \overline{a}) = o + \overline{a} - \overline{a} = o$. Очевидно, $f = t_{\overline{a}} g$. $\square$

Координатная запись аффинных преобразований

Пусть $\{o, \overline{e_1}, ..., \overline{e_n}\}$ система координат в аффинном пространстве (A, V) и $f \in A_n$ –аффинное преобразование с линейной частью $Df : V \to V$.

Пусть *F* – матрица Df в базисе $\overline{e_1}, ..., \overline{e_n}$, а $(b_1, ..., b_n)$ – координаты точки $f(o)$ в той же системе координат, то есть $\overline{of(o)} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overline{e_i}$. *p* - точка с координатами $(x_1, ..., x_n)$.

Тогда $f(p) = f(o) + Df(\overline{x}),$ *где* $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e_i}$. Если $z_1, ..., z_n$ - координаты вектора $Df(\overline{x})$, то

$$z_1 \overline{e_1} + ... + z_n \overline{e_n} = Df(\overline{x}) = Df(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e_i}) = \sum_j x_j Df(\overline{e_j}) = \sum_j x_j \sum_i f_{ij} \overline{e_i} = \sum_i (\sum_j f_{ij} x_j) \overline{e_i} .$$

То есть $z_i = \sum_j f_{ij} x_j$. Отсюда $f(p) = o + \overline{of(o)} + Df(\overline{x})$ и если $y_1, ..., y_n$ – координаты $f(p)$,то

$y_i = b_i + \sum_j f_{ij} x_j$ или $Y = FX + B$, где $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$

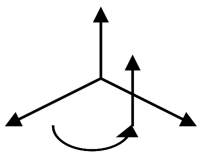
4 апреля 2005

n=3 Примеры движений

Собственное

Векторное движение – поворот вокруг некоторой прямой и сдвиг на вектор, параллельный оси вращения, т.е.

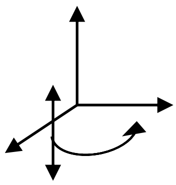
$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\cos\varphi + y\cos\varphi$$
$$z' = z + a$$



Частные случаи – сдвиг или вращение

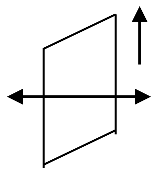
Несобственное

1) вращение с отражением



$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\cos\varphi + y\cos\varphi$$
$$z' = -z$$

2) скользящая симметрия (отражение относительно некоторой плоскости π и сдвиг на вектор, параллельный π)



$$x' = x$$
$$y' = -y$$
$$z' = z + a$$

Теорема. *Любое собственное движение* $(\det Df = +1)$ *трёхмерного евклидового пространства является винтовым движением. Любое несобственное движение* $(\det Df = -1)$ *является либо вращением с отражением, либо скользящей симметрией.*

Пусть (E, V, ρ) - евклидово пространство, $\dim V = 3$, f - движение. В V существует ортонормированный базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, канонический для Df. Зафиксируем начало координат – точку O. Тогда

1) $\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \\ z' &= z + c \end{aligned}$ или 2) $\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a \\ y' &= x\cos\varphi + y\cos\varphi + b \\ z' &= z + c \end{aligned}$ или 3) $\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \\ z' &= -z + c \end{aligned}$ или 4)

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a \\ y' &= x\cos\varphi + y\cos\varphi + b \\ z' &= -z + c \end{aligned}$$

Случай 1

$f = t_{\bar{u}}$, $\bar{u} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

Случай 2

Как и при n=2 находим x_0, y_0, такие, что

$$\begin{cases} x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi + a = x_0 \\ x_0\cos\varphi + y_0\cos\varphi + b = y_0 \end{cases}$$

Тогда после переноса начала координат в точку $O' = (x_0, y_0, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ \eta' &= \xi\cos\varphi + \eta\cos\varphi \\ \mu' &= \mu + c \end{aligned}$$

в новых координатах. Т.е. f - винтовое движение.

Случай 3

Вводим новые координаты: $\xi = x$, $\eta = y$, $\mu = z - \dfrac{c}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + a \\ \eta' &= \eta + b \\ \mu' &= -\mu \end{aligned}$$

т.е. это сдвиг на вектор $\bar{u} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2$ и отражение относительно плоскости $\mu = 0$.

Случай 4

Ищем точку x_0, y_0, z_0 как решение системы

$$\begin{cases} x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi + a = x_0 \\ x_0\cos\varphi + y_0\cos\varphi + b = y_0 \\ -z_0 + c = z_0 \end{cases}$$

Это возможно, т.к. матрица $F - E$ невырождена $(F = Df)$.

Переносим начало координат в точку $o' = (x_0, y_0, z_0)$, получаем

$$\xi' = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi$$
$$\eta' = \xi\cos\varphi + \eta\cos\varphi$$
$$\mu' = -\mu$$

В новых координатах это поворот в плоскости $O'\xi\eta$ с отражением относительно этой плоскости.

□

КВАДРИКИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Квадратичные функции в аффинном пространстве

Отображение $Q: A \to K$ называют *квадратичной функцией*, если $Q(O+\overline{x}) = q(\overline{x}) + 2l(\overline{x}) + \varphi_0$, (1)

где q - квадратичная форма на V, а $l \in V^*$.

Задача Показать, что если Q задана формулой (1) с фиксированной точкой o, для любой другой точки o' выполняется соотношение $Q(O'+\overline{y}) = q(\overline{y}) + 2l'(\overline{y}) + \varphi_0'$.

Опр. *Ранг* квадратичной функции Q: $\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} q$.

2. Координатная запись

Пусть $\{O, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ - система координат в A и $p = O + \overline{x}$, $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_n\overline{e}_n$.

Тогда $Q(o+\overline{x}) = \sum\limits_{ij} a_{ij}x_i y_j + 2\sum\limits_i b_i x_i + \varphi_0$ (2)

3. Центральная точка

Пусть $p, r \in A$, $p = O + \overline{x}$, $r = p + \overline{y}$. Пусть также $f(\overline{x}, \overline{y})$ - полярная к q билинейная симметрическая форма на V. Тогда

$$Q(r) = Q(p+\overline{y}) = Q(O+\overline{x}+\overline{y}) = q(\overline{x}+\overline{y}) + 2l(\overline{x}+\overline{y}) + \varphi_0 = f(\overline{x}+\overline{y}, \overline{x}+\overline{y}) + 2l(\overline{x}) + 2l(\overline{y}) + \varphi_0 =$$

$$\underbrace{f(\overline{x},\overline{x}) + 2l(\overline{x}) + \varphi_0}_{Q(p)} + f(\overline{y},\overline{y}) + 2\{f(\overline{x},\overline{y}) + f(\overline{y})\},$$

т.е. $Q(r) = Q(p+\overline{y}) = Q(p) + q(\overline{y}) + 2\{f(\overline{x},\overline{y}) + f(\overline{y})\}$.

Опр. Точку $p \in A$ называют *центром* (или *центральной точкой*) Q, если
$Q(p+\overline{y}) = Q(p) + q(\overline{y}) \quad \forall \overline{y} \in V$

Другими словами $f(\overline{x},\overline{y})+l(\overline{y})=0 \ \ \forall\overline{y}\in V$ (3), где $\overline{x}=\overrightarrow{op}$ (т.е. $p=O+\overline{x}$).

В координатной записи центральной точки p это означает, что если начало координат является центральной точкой квадрики, то линейная часть $\sum\limits_i b_i x_i$ в формуле (2) отсутствует.

Опр. $C(Q)$ - множество всех центральных точек Q .

4. Нахождение центра

Пусть $p=O+\overline{x}$, $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+\ldots+x_n\overline{e}_n$. Тогда

$p\in C(Q)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow f(\overline{e}_i,\overline{x})+l(\overline{e}_i)=0 \ \forall i=1,2,\ldots,n\Leftrightarrow\sum\limits_j a_{ij}x_j=-b_i,\ i=1,2,\ldots,n$ (4)

Т.е. (4) – критерий центральной точки $p=O+\sum\limits_i x_i\overline{e}_i$.

Теорема. *Множество $C(Q)$ центральных точек квадратичной функции Q , заданной формулой (2) в системе координат $\{O,\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n\}$, состоит из точек $p=O+\overline{x}$, где $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+\ldots+x_n\overline{e}_n$ - решение системы*

уравнений (4). Если $O'=O+\overline{x}$ - одна из центральных точек Q , то $C(Q)=O'+U$, где $U=Ker\ q$- гиперплоскость в V . В частности $C(Q)$ - аффинное подпространство в A .

Уже, показано, что $C(Q)$ задаётся С.Л.У.(4). Если она совместна, то множество её решений – аффинная плоскость в A с направляющим пространством U , заданным системой $\sum\limits_i a_{ij}x_j=0$, $i=1,\ldots,n$. Но это система уравнений $f(\overline{e}_1,\overline{x})=\ldots=f(\overline{e}_n,\overline{x})$, т.е. $U=\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Ker}\ q$. □

5. Приведение квадратичной функции к каноническому виду.

Теорема. *Пусть Q - квадратичная функция ранга r на n -мерном аффинном пространстве A над K. Если $C(Q)=\varnothing$, то $r<n$ и в некоторой системе координат $\{O,\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n\}$ Q приводится к виду*

$Q(O+\overline{x})=\lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_rx_r^2+2x_{r+1}$, *(5) где* $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\neq0$.

Если Q имеет непустой $C(Q)$, то существует система координат $\{O,\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n\}$ с началом в центральной точке O , в которой Q приводится к виду:

$Q(O+\overline{x})=\lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_rx_r^2+\varphi_0$ *(6)*

При этом $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\neq0$ и значение Q в любой центральной точке равно φ_0 .

Выберем в V канонический базис $\left\{\overline{e}_1',...,\overline{e}_n'\right\}$ для q. Для произвольной точки $O' \in A$ в системе координат $\left\{O',\overline{e}_1',...,\overline{e}_n'\right\}$ функция Q имеет вид (для $\overline{x} = \sum_i x_i'\overline{e}_i'$):

$Q(O+\overline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_r x_r^2 + 2\mu_1' x_1' + ... + 2\mu_n' x_n' + \gamma'$, причём $\lambda_1,...,\lambda_r \neq 0$, т.к. $r = rankq$.

Замена координат вида $x_i'' = x_i' + \beta_i/\alpha_i$, $i = 1,...,r$; $x_i'' = x_i$ $i = r+1,...,n$, т.е. перенос начала координат в соответствующую точку O'' к виду

$Q(O''+\overline{x}) = \lambda_1 x_1''^2 + ... + \lambda_r x_r''^2 + 2\beta_{r+1}'' x_{r+1}'' + ... + 2\beta_n'' x_n'' + \gamma''$.

Если все $\beta_j'' = 0$ $j = r+1,...,n$, то Q имеет вид (6)

Пусть $\exists \beta_j'' \neq 0$. Возьмём $\min k : \beta_{r+k}'' \neq 0$ и положим

$x_1 = x_1'',...,x_r = x_r''$, $x_{r+1} = \beta_{r+1}'' x_{r+1}'' + ... + \beta_n'' x_n'' + \dfrac{\gamma''}{2}$,
$x_{r+2} = x_{r+1}'',..., x_{r+k} = x_{r+k-1}''$, $x_{r+k+1} = x_{r+k+1}'',..., x_n = x_n''$.

Тогда в новых координатах Q будет иметь вид (5). $\square$

11.04.05

ТЕНЗОРЫ

1. Основные понятия.

Пусть K - произвольное поле, V - векторное пространство над K, $\dim V = n$. Обозначим через V^* дуальное пространство, т.е. пространство линейных функций $V \to K$. p,q - неотрицательные целые числа. Для каждой такой пары определим следующее понятие:

Определение: *Тензором* на V типа (p,q) называют любое полилинейное отображение

$$f : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... V^*}_{q} \to K.$$

Т.е. f - функция от $p+q$ аргументов, первые p из которых из пространства V, следующие q - из пространства V^*, линейная по каждому из аргументов со значениями в поле K.

Определение: Число $p+q$ называют *валентностью* (реже *рангом*) f. Сам f называют смешанным тензором p раз *ковариантным*, q раз *контрвариантным*.

2. Интерпретация тензоров малых рангов.

Тензор типа $(0,0)$ - это любой скаляр λ из поля K.

Тензор типа $(1,0)$ - это линейная форма, т.е. любой элемент из V^*.

Тензор типа $(0,1)$ - это линейный функционал $f: V^* \to K$. Т.е. любой элемент из V^{**}. Отождествляя канонически V и V^{**}, мы говорим, что контрвариантный тензор типа $(0,1)$ есть вектор из V. Если $x \in V, \varphi \in V^*$, то $(x(\varphi)) = \varphi(x)$. Мы будем использовать запись (φ, x) и для значения x на φ, и для значения φ на x.

Смешанный тензор типа $(1,1)$.

Пусть x - фиксированный вектор из пространства V. Тогда $f(x,u)$ - линейный функционал на V^*, т.е. элемент V^{**}. Т.е. $f(x,u)$ - вектор из V. Обозначим этот вектор $F(x)$. Тогда выполняется соотношение $f(x,u) = (u, F(x)), \forall u \in V^*$ (1) где $F: V \to V$ - некоторое отображение.

Т.к. $f(\alpha x + \beta y, u) = \alpha f(u,x) + \beta f(y,u)$, то
$(u, F(\alpha x + \beta y)) = \alpha(u, F(x)) + \beta(u, F(y)) = (u, \alpha F(x) + \beta F(y))$.

Поскольку u - любой элемент V^*, то это равенство влечёт:

$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y), \forall \alpha, \beta \in K$. Т.е. $F \in L(V)$.

Обратно: если $F \in L(V)$ - произвольный оператор, формула (1) сопоставляет ему тензор типа $(1,1)$.

Таким образом, мы построили биекцию между тензорами типа $(1,1)$ и линейными операторами из $L(V)$.

3. Произведение тензоров.

Пусть сначала $f: V_1 \times V_2 ... \times V_r \to K$, $g: W_1 \times W_2 ... \times W_s \to K$ - два произвольных полилинейных отображения, где $V_1, V_2, ..., V_r, W_1, W_2, ..., W_s$ - различные векторные пространства (не обязательно совпадают) над K.

Определение: Тензорное произведение f и g $f \otimes g: V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \times W_1 \times W_2 \times ... \times W_s \to K$, где $f \otimes g(v_1, v_2, ..., v_r, w_1, w_2, ..., w_s) = f(v_1, v_2, ..., v_r) \cdot g(w_1, w_2, ..., w_s)$.

Ясно, что $f \otimes g$ - полилинейная функция по каждому аргументу. Если f, g, h - три полилинейных функции, то $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$, т.е. тензорное произведение ассоциативно. Но, вообще говоря, оно не является коммутативным, т.е. $f \otimes g \neq g \otimes f$ для произвольных функций (об этом даже не всегда корректно говорить).

Пусть теперь f - тензор типа (p,q), g - тензор типа (r,s). Тогда
$f \otimes g: \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p+r} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q+s} \to K$ - тензор типа $(p+r, q+s)$, определённый формулой:

$f \otimes g(v_1, v_2, ..., v_{p+r}, u_1, u_2, ..., u_{q+s}) = f(v_1, v_2, ..., v_p, u_1, u_2, ..., u_q) \cdot g(v_{p+1}, v_{p+2}, ..., v_{p+r}, u_{q+1}, u_{q+2}, ..., u_{q+s})$
(2)

Определение: Тензор, заданный формулой (2) называется *тензорным произведением* тензоров f, g.

4. Координаты тензоров.

Пусть $(e_1, e_2, ..., e_n)$ - базис V. Рассмотрим в сопряжённом пространстве V^* дуальный базис $(e^1, e^2, ..., e^n)$. Т.е. $e^i(e_j) = (e^i, e_j) = e_j(e^i) = \delta^i_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$.

Обозначим через $T^q_p = T^q_p(V)$ пространство тензоров типа (p, q) на V. Тогда любое произведение

$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes ... \otimes e_{j_q}, 1 \le i_1, i_2, ..., i_p, j_1, j_2, ..., j_q \le n$ (3)

является тензором типа (p, q), т.е. полилинейной функцией: $\underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... V^*}_{q} \to K$.

Эти тензоры линейно независимы по следующей причине:
$e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes ... \otimes e_{j_q} (e_{i'_1}, e_{i'_2}, ..., e_{i'_p}, e^{j'_1}, e^{j'_2}, ..., e^{j'_q}) = \delta^{i_1}_{i'_1} \delta^{i_2}_{i'_2} ... \delta^{i_p}_{i'_p} \delta^{j'_1}_{j_1} \delta^{j'_2}_{j_2} ... \delta^{j'_q}_{j_q}$ (4)

Теорема. *Тензоры вида (3) образуют базис векторного пространства* $T^q_p(V)$.

То, что $T^q_p(V)$ - пространство – очевидно, если определить сложение обычным образом:

$(f+g)(v_1, v_2, ..., v_p, u_1, u_2, ..., u_q) = f(v_1, v_2, ..., v_p, u_1, u_2, ..., u_q) + g(v_1, v_2, ..., v_p, u_1, u_2, ..., u_q)$.
Умножение на скаляр – тоже обычное. Линейная независимость (3) уже показана. Осталось проверить, что любой тензор линейно выражается через систему (3). Пусть $T \in T^q_p(V)$. Обозначим $T^{j_1, j_2, ..., j_q}_{i_1, i_2, ..., i_p} = T(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}, e^{j_1}, e^{j_2}, ..., e^{j_q})$ (5). Тогда из формулы (4) следует, что если взять тензор $T_1 = \sum\limits_{\substack{i_1, i_2, ..., i_p \\ j_1, j_2, ..., j_q}} T^{j_1, j_2, ..., j_q}_{i_1, i_2, ..., i_p} (e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes ... \otimes e_{j_q})$, то

$T_1(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}, e^{j_1}, e^{j_2}, ..., e^{j_q}) = T^{j_1, j_2, ..., j_q}_{i_1, i_2, ..., i_p}$, т.е. значения T и T_1 на всех возможных наборах базисных векторов совпадают. Т.к. T и T_1 - полилинейные функции, то $T = T_1$, и (3) – базис пространства $T^q_p(V)$. □

Определение: Принято говорить, что $T^{j_1, j_2, ..., j_q}_{i_1, i_2, ..., i_p}$ из формулы (5) – *координаты* тензора T в базисе $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Следствие: $\dim(T^q_p(V)) = n^{p+q}$.

18 апреля 2005

5. Изменение координат тензора при замене базиса

Пусть $(e_1,...e_n)$ и $(e'_1,...e'_n)$ - два базиса в пространстве V. Обозначим через A матрицу перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$. Элементы матрицы A индексируем так: $A=(a^i_j)$, где a^i_j - элемент i-ой строки и j-ого столбца. Тогда имеем:

$$A=\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \text{ и } e'_j=\sum_{i=1}^n a^i_j e_i \quad (1\le j\le n).$$

Это стандартное обозначение: чтобы суммирование велось по индексу, встречающемуся сверху и снизу. В некоторых книгах знак суммы опускают и пишут: $e'_j=a^i_j e_i$. Но мы так делать не будем: все суммы будем прописывать полностью.

Пусть теперь $(e^1,...,e^n)$ - дуальный базис к базису $(e_1,...e_n)$, а $(e'^1,...,e'^n)$ - дуальный к базису $(e'_1,...e'_n)$ в пространстве V^*. Обозначим через $R=(r^i_j)$ матрицу перехода от базиса $\{e^i\}$ к базису $\{e'^i\}$ в пространстве V^*. Тогда $e'^k=\sum\limits_{i=1}^n r^i_k e^i$. Чтобы следовать правилу “разных уровней” (т.е. чтобы индекс суммирования появился сверху и снизу), обозначим через $B=(b^i_j)=R^T$ - транспонированная матрица R. Тогда $e'^k=\sum\limits_{i=1}^n b^k_i e^i$. Эту формулу мы запишем следующим образом. Поскольку $(e'^1\cdots e'^n)=(e^1\cdots e^n)R$, то $\begin{pmatrix} e'^1\\ \vdots \\ e'^n\end{pmatrix}=(e'^1\cdots e'^n)^T=[(e^1\cdots e^n)R]^T=R^T\begin{pmatrix} e^1\\ \vdots \\ e^n\end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} e'^1\\ \vdots \\ e'^n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} e^1\\ \vdots \\ e^n\end{pmatrix}$. Введём вспомогательную матрицу $C=(c^i_j)=B^{-1}$. Тогда $C\begin{pmatrix} e'^1\\ \vdots \\ e'^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^1\\ \vdots \\ e^n\end{pmatrix}$, т.е. $e^k=\sum\limits_{i=1}^n c^k_i e'^i$. Т.к. базисы дуальны $c^k_j=(\sum\limits_{i=1}^n c^k_i e'^i\mid e'_j)=(e^k\mid e'_j)=(e^k\mid\sum\limits_{i=1}^n a^i_j e^i)=a^k_j$. Т.е. $c^k_j=a^k_j$ и $C=A$. Отсюда $B^{-1}=A$.

Пусть теперь $T\in T^q_p(V)$ и $T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p}$ - его координаты в $(e_1,...e_n)$, а $T'^{j'_1,...,j'_q}_{i'_1,...,i'_p}$ - координаты в базисе $(e'_1,...e'_n)$. Тогда

$$\overline{T}=\sum_{k=1}^n f(e_k,e^k)=\sum_{i=j} f(e_i,e^j)=\sum_{i=1}^n f(e_i,e^i),\ T=\sum_{\substack{i_1,...,i_p\\ j_1,...,j_q}} T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p}(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}).$$

$$T = \sum_{\substack{i'_1,\dots,i'_p \\ j'_1,\dots,j'_q}} T'^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p} (e'^{i'_1} \otimes \cdots \otimes e'^{i'_p} \otimes e'_{j'_1} \otimes \cdots \otimes e'_{j'_q}) \text{ (6)}$$

Выразим $e'^{i'_1} = \sum_{i_1=1}^{n} b^{i'_1}_{i_1} e^{i_1}$ (аналогично выражаем $e'^{i'_2} \cdots e'^{i'_p}$) и подставим в формулу (6). Получим

$T = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_p \\ j_1 \cdots j_q}} [\sum_{\substack{i'_1 \cdots i'_p \\ j'_1 \cdots j'_q}} (b^{i'_1}_{i_1} \cdots b^{i'_p}_{i_p}) T'^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p} (a^{j_1}_{j'_1} \cdots a^{j_q}_{j'_q})] \cdot (e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q})$. Здесь мы использовали, что $e'_{j_1} = \sum_{j_1=1}^{n} a^{j_1}_{j'_1} e_{j_1}$ и аналогичные выражения для $e'_{j_2} \cdots e'_{j_q}$. Т.к. элементы $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots e_{j_q}$ образуют базис пространства $T^q_p(V)$, то нами доказана следующая

Теорема. *При переходе от базиса $(e_1, \dots e_n)$ к базису $(e'_1, \dots e'_n)$ в V координаты тензора T типа (p,q) изменяются по правилу: $T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} = \sum_{\substack{i'_1 \cdots i'_p \\ j'_1 \cdots j'_q}} (b^{i'_1}_{i_1} \cdots b^{i'_p}_{i_p}) T'^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p} (a^{j_1}_{j'_1} \cdots a^{j_q}_{j'_q})$, где $A = (a^i_j)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$ пространства V, а $B = (b^i_j) = A^{-1}$.*

6. Свёртки тензоров.

Пусть T - тензор типа (p,q). Зафиксируем числа $1 \le r \le p$ и $1 \le s \le q$, и определим свёртку по r-ому ковариантному индексу и s-ому контрвариантному индексу следующим образом. Т.к. $T = T(x_1, \dots, x_p, u_1, \dots, u_q) = T(\dots, x_r, \dots\dots, u_s, \dots)$, где $x_1, \dots, x_p \in V$, а $u_1, \dots, u_q \in V^*$, то можно определить сумму $\overline{T} = \sum_{k=1}^{n} T(\dots, \underset{r}{e_k}, \dots\dots, \underset{s}{e^k}, \dots)$, где $(e_1, \dots e_n)$ - базис V, а $(e^1, \dots, e^n)$ - дуальный базис V^*.

Определение. $\overline{T}$ называется *свёрткой* тензора T по r-ому ковариантному индексу и s-ому контрвариантному индексу.

Ясно, что $\overline{T}$ - полилинейная функция от оставшихся аргументов, т.е. $\overline{T} \in T^{q-1}_{p-1}(V)$. Докажем, что $\overline{T}$ не зависит от выбора базиса пространства V.

Доказательство: пусть $(e'_1, \dots e'_n)$ - другой базис пространства V, а $A = (a^i_j)$ - матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_i\}$. Тогда $e'_k = \sum_{i=1}^{n} a^i_k e_i$. Напомним, что для дуальных базисов имеем:

$e'^k = \sum_{j=1}^{n} b^k_j e^j$, где $B = (b^i_j) = A^{-1}$ (смотри доказательство предыдущей теоремы). Зафиксируем для удобства все остальные переменные у T кроме x_r и u_s, обозначим

$f(x_r, u_s) = T(\ldots, x_r, \ldots\ldots, u_s, \ldots)$. Тогда $\overline{T} = \sum_{i=1}^{n} f(e_i, e^i)$. Получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} f(e'_k, e'^k) = \sum_{k=1}^{n} f(\sum_{i=1}^{n} a_k^i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j^k e^j) = \sum_{i,j,k} a_k^i b_j^k f(e_i, e^j) = \sum_{i,j} (\sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k) f(e_i, e^j).$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k$ - произведение i-ой строки матрицы A на j-ый столбей матрицы B. Т.к. $B = A^{-1}$ эта сумма равна $\begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$, $\overline{T} = \sum_{k=1}^{n} f(e_k, e^k) = \sum_{i=j} f(e_i, e^j) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i, e^i)$. □

23.04.2005

Связь координат тензора *T* и его свертки $\overline{T}$.

Теорема. *Свертка по s-тому ковариантному и r-тому контравариантному индексам тензора T типа (p,q) является тензором типа (p-1,q-1) с координатами*

$$\overline{T}_{i_1\ldots i_{r-1} i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_{s-1} j_{s+1}\ldots j_q} = \sum_{k=1}^{n} T_{i_1\ldots i_{r-1}\,k\,i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_{s-1}\,k\,j_{s+1}\ldots j_q}$$

То, что свертка – тензор типа $(p-1, q-1)$ - проверено. Пусть $T = \sum_{i,j} T_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}$, где $i = (i_1, \ldots, i_p),\ j = (j_1, \ldots, j_q)$. Как и раньше, обозначим через $f(x_r, u_s) = T(\ldots x_r \ldots u_s \ldots)$. Обозначим $f_{i,j}(x_r, u_s) = (e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q})(\ldots x_r \ldots u_s \ldots)$.

Тогда $\overline{T} := \sum_{k=1}^{n} f(e_k, e^k) = \sum_{i,j} \sum_k T_i^j f_{ij}(e_k, e^k) =$

$$= \sum_{i,j} \sum_k T_i^j \delta_k^{i_r} \delta_{j_s}^k e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_{r-1}} \otimes e^{i_{r+1}} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_{s-1}} \otimes e_{j_{s+1}} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} = \sum_{\substack{i_1 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p \\ j_1 \ldots \hat{j}_s \ldots j_q}} \sum_k (T_{i_1\ldots i_{r-1}\,k\,i_{r+1}\ldots i_p}^{j_1\ldots j_{s-1}\,k\,j_{s+1}\ldots j_q})$$

$$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \hat{e}^{i_r} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes \hat{e}_{j_s} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \quad (1).$$

Знак «домик» означает пропуск соотв. индекса (т.е. $\ldots \otimes \hat{e}^{i_r} \otimes \ldots = \ldots \otimes e^{i_{r-1}} \otimes e^{i_{r+1}} \otimes \ldots$).
Соотношение (1) и есть утверждение теоремы. □

Пример. Тензор типа (1,1) $\sum_{i,j=1}^{n} a_j^i e^j \otimes e_i$ - это матрица $A = (a_j^i)$. Его свертка равна $a_1^1 + \ldots + a_n^n = \mathrm{tr} A$ - след матрицы *A*.

Действие симметрической группы на тензорах.

Пусть *T* – тензор типа $(p,0)$, т.е. $T: V\times\ldots\times V\to K$, и S_p - группа подстановок множества $\{1\ldots p\}$. Для любой $\pi\in S_p$ определим отображение

$f_\pi : T_p^0(V)\to T_p^0(V) : (f_\pi T)(x_1,\ldots,x_p)=T(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(p)})$. Ясно, что $f_\pi T$ - тензор типа $(p,0)$. Аналогично можно определить действие S_q на $T_0^q(V)$.

Опр. Тензор *T* типа $(p,0)$ называется *симметричным*, если $\forall\pi\in S_p\ \ T=f_\pi T$.

Ясно, что f_π - линейный оператор на T_p^0.

Опр. *Симметризацией* тензоров из T_p^0 называется отображение $S=\frac{1}{p!}\sum\limits_{\pi\in S_p} f_\pi$.

Пример. $p=3, T=e^1\otimes e^2\otimes e^3.$ Возьмем подстановку $\sigma=(123)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$. Тогда

$(f_\sigma T)(x_1,x_2,x_3)=$

$=T(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})=e^1(x_2)e^2(x_3)e^3(x_1)=e^3\otimes e^1\otimes e^2(x_1,x_2,x_3)$. $f_\sigma T=e^{\sigma^{-1}(1)}\otimes e^{\sigma^{-1}(2)}\otimes e^{\sigma^{-1}(3)}$.

Обозначим через T_p^+ подпространство всех симметричных тензоров из T_p^0.

Теорема. *Действие симметризации на* T_p^0 *обладает следующими свойствами:*

1) $S^2=S$ *и 2)* $\operatorname{Im} S=T_p^+$.

(а) Если *T* – симметричный тензор, то $S(T)=\frac{1}{p!}\sum\limits_{\pi\in S_p} f_\pi T=\frac{1}{p!}\sum\limits_{\pi\in S_p} T=T$.

(б) Покажем, что симметризация любого тензора симметрична.

$f_\pi(ST)=f_\pi(\frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p} f_\sigma T)=\frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p} f_\pi f_\sigma T$. Из формулы

$(f_\pi(f_\sigma T))(x_1,\ldots,x_p)=f_\sigma T(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(p)})=T(x_{\sigma\pi(1)},\ldots,x_{\sigma\pi(p)})$ получаем

$f_\pi(ST)=\frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p} f_{\sigma\pi}T=\frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p} f_\sigma T=ST$ (т.к. $\sigma_1\pi=\sigma_2\pi\Leftrightarrow\sigma_1=\sigma_2$). Пункт (б) означает, что

$\operatorname{Im} S\subseteq T_p^+$. Теперь из (а) следует, что $\operatorname{Im} S=T_p^+$ и из (б) и (а) следует 1). □

КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРЫ

Опр. Тензор $T \in T_p^0(V)$ называют *кососимметричным*, если $f_\pi T = \mathrm{sign}(\pi)T$, где $\mathrm{sign}(\pi)$ - знак подстановки. Эквивалентно, $T(x_1,...,x_k,...,x_l,...,x_p) = -T(x_1,...,x_l,...,x_k,...,x_p)$.
Кососимметричные тензоры образуют подпространство в $T_p^0(V)$, которое принято обозначать $\Lambda^p(V^*)$.

Опр. Элементы $\Lambda^p(V^*)$ (т.е. *p* раз контравариантные кососимметричные тензоры) называют *внешними p-формами* или *внешними формами степени p на V.*

Аналогично вводятся множество кососимметричных контравариантных тензоров на $T_0^q(V)$ $\Lambda^q(V)$ (название – *q-вектора*).

25.04.05

Опр. Отображение $A = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon_\sigma f_\sigma$ на пространстве $T_p^0(V)$ (или $T_0^q(V)$) называют *альтернированием.*

Теорема. *Отображение A является линейным оператором на* $T_p^0(V)$ *со следующими свойствами:*

1) $A^2 = A$ *2)* $\mathrm{Im}\,A = \Lambda^p(V)$ *3)* $A(f_\sigma T) = \varepsilon_\sigma A(T)$

1) Поскольку $A = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon_\sigma \pi_\sigma$, то $A^2 = (\frac{1}{p!})^2 \sum_{\sigma,\tau\in S_p} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau f_\sigma f_\tau = (\frac{1}{p!})^2\sum_{\sigma\in S_p}(\sum_{\tau\in S_p}\varepsilon_{\tau\sigma} f_{\tau\sigma})$, учитывая, что $\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau = \varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_{\tau\sigma}$ и $f_\sigma f_\tau = f_{\tau\sigma}$. При фиксированном σ и при τ, пробегающем все подстановки из S_p произведение $\tau\sigma$ также пробегает S_p. Поэтому $\sum_{\tau\in S_p}\varepsilon_{\tau\sigma} f_{\tau\sigma} = \sum_{\pi\in S_p}\varepsilon_\pi f_\pi$ и не зависит от σ.
Следовательно $A^2 = (\frac{1}{p!})^2\sum_{\sigma\in S_p}(\sum_{\tau\in S_p}\varepsilon_{\tau\sigma} f_{\tau\sigma}) = (\frac{1}{p!})^2 \sum_{\sigma\in S_p}(p!A) = A$.

2) Пусть $T \in T_p^0(V)$. Тогда
$f_\delta(AT) = f_\delta(\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\varepsilon_\pi f_\pi(T)) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}\varepsilon_\delta\varepsilon_{\pi\delta} f_{\pi\delta}(T) = \varepsilon_\delta \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon_\sigma f_\sigma(T) = \varepsilon_\delta A$, а значит (по определению) T - кососимметричный тензор, откуда и следует $\mathrm{Im}\,A \subseteq \Lambda^p(V)$. Обратное включение следует из того, что для всякого кососимметричного тензора T
$A(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon_\sigma f_\sigma(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon_\sigma\varepsilon_\sigma T = T$.

3) Равенство $Af_\sigma = \varepsilon_\sigma A$ доказывается так же, как и равенство $f_\sigma A = \varepsilon_\sigma A$ (см. пред. пункт). □

Замечание. Отличие теоремы для $T_0^q(V)$ только в том, что $\mathrm{Im}\,A = \Lambda^q(V)$.

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Опр. *A* - *алгебра* над полем *F*, если

1) *A* – ассоциативное кольцо с операциями $(+,\cdot)$

2) *A* – векторное пространство над *F.*

3) $\alpha(a\cdot b)=(\alpha\cdot a)b=a(\alpha\cdot b)\ \ \forall a,b\in A,\alpha\in F$

Рассмотрим бесконечную прямую сумму $T(V)=K\oplus T_0^1(V)\oplus...\oplus T_0^n(V)\oplus...$, где *K* - поле, *V* – векторное поле над ним.

Опр. Пространство $T(V)$ с умножением $(\sum_{i=0}^{s} f_i)(\sum_{i=0}^{t} g_j)=\sum_{i+j=0}^{s+t} f_i\otimes f_j$, где $f_i\in T_0^i(V), g_j\in T_0^i(V)$ называется *тензорной алгеброй* пространства *V*. Она ассоциативна.

Рассмотрим в $T(V)$ подпространство $\Lambda(V)=K\oplus\Lambda^1(V)\oplus...\oplus\Lambda^n(V)\oplus...$. Позже мы покажем, что эта сумма на самом деле конечна (т.е. все слагаемые начиная с некоторого равны нулю). Это подпространство, однако оно не замкнуто относительно тензорного умножения, т.е. не является подалгеброй $T(V)$, поэтому на нем мы введем новое умножение.

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

(АЛГЕБРА ГРАССМАНА)

1. Внешнее умножение.

Опр. Если $Q\in\Lambda^p(V), R\in\Lambda^r(V)$, то $Q\wedge R=A(Q\otimes R)$ - *внешнее умножение*. Если $p=0$, то $\Lambda^0=K$ и считаем, что $\alpha\wedge R=\alpha R$. Также верна дистрибутивность $Q\wedge(\alpha R+\beta T)=\alpha Q\wedge R+\beta Q\wedge T$.

Опр. Пространство $\Lambda(V)$ с операцией внешнего умножения называется *внешней алгеброй* (*алгеброй Грассмана*) пространства *V.*

2. Ассоциативность внешнего произведения.

Лемма. *Пусть* $Q\in T_0^q(V), R\in T_0^r(V)$. *Тогда* $A(A(Q)\otimes R)=A(Q\otimes A(R))=A(Q\otimes R)$.

Так как A - линейное отображение и $A(Q)=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}\varepsilon_\sigma f_\sigma(Q)$, то

$A(A(Q)\otimes R)=\frac{1}{q!}\sum_{\pi\in S_q}\varepsilon_\pi A(f_\pi(Q)\otimes R)$. Сопоставим подстановке $\pi\in S_q$ подстановку $\overline{\pi}\in S_{q+r}$ по следующему правилу:

$$\overline{\pi}(j)=\begin{cases}\pi(j), j\le q\\ j, j>q\end{cases}$$

Это отображение S_q в S_{q+r}. Знак π и $\overline{\pi}$ совпадает. Итак,

$A(f_\pi(Q)\otimes R)=A(f_{\overline{\pi}}(Q\otimes R))=(Af_{\overline{\pi}})(Q\otimes R)=$

$=\varepsilon_{\overline{\pi}}A(Q\otimes R)$. Поэтому $A(A(Q)\otimes R)=\frac{1}{q!}\sum\limits_{\pi\in S_q}\varepsilon_\pi A(f_\pi(Q)\otimes R)=\frac{1}{q!}\sum\limits_{\pi\in S_q}\varepsilon_\pi\varepsilon_{\overline{\pi}}A(Q\otimes R)=A(Q\otimes R)$.

Аналогично, $A(Q\otimes A(R))=A(Q\otimes R)$. □

Теорема. *Внешняя алгебра* $\Lambda(V)$ *ассоциативна.*

Нужно доказать равенство $(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$ (1) $\forall P,Q,R\in\Lambda(V)$. Так как внешнее умножение линейно, то левая и правая часть формулы (1) линейны по P,Q,R. Поэтому доказать (1) для частного случая $P\in\Lambda^p, Q\in\Lambda^q, R\in\Lambda^r$.

$(P\wedge Q)\wedge R=A(A(P\otimes Q)\otimes R)=(\textit{по лемме})=A((P\otimes Q)\otimes R)=A(P\otimes(Q\otimes R))$

$=A(P\otimes A(Q\otimes R))=P\wedge(Q\wedge R)$. □

3. Базис внешней алгебры.

Пусть $x,y\in V$. Тогда $A(x\otimes y)=\frac{1}{2}(x\otimes y-y\otimes x)$. Тогда $x\wedge y=-y\wedge x, x\wedge x=0$ $\forall x,y\in V$.

Следствие. $x_1\wedge\ldots\wedge x_p=A(x_1\otimes\ldots\otimes x_p)$ $\forall p\ge 2$

Для $p=2$ проверено. Далее по индукции:

$x_1\wedge\ldots\wedge x_p=(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p-1})\wedge x_p=A((x_1\wedge\ldots\wedge x_{p-1})\otimes x_p)=$

$=A(A(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p-1})\otimes x_p)=A(x_1\otimes\ldots\otimes x_p)$ □

30.04.05

4. Связь с определителями

Теорема. *Пусть* V *- векторное пространство над полем* F *и* $x_1,\ldots,x_p\in V$. *Тогда векторы* $x_1,\ldots,x_p$ *линейно независимы в том и только в том случае, если* $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p\ne 0$.

Пусть сначала $x_1,\ldots,x_p$ линейно зависимы. Обозначим через $U=\langle x_1,\ldots,x_p\rangle$ их линейную оболочку. Тогда $\dim U=k<p$. Из следствия (см. предыдущую лекцию) получаем что $\Lambda^p(U)=0$, а с другой стороны $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p\in\Lambda^p(U)$. Следовательно $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p=0$.

Пусть теперь $x_1,\ldots,x_p$ линейно независимы. Тогда в V существует базис $e_1,\ldots,e_n$, такой, что $e_1=x_1,\ldots,e_p=x_p$. В этом случае $x_1\wedge\ldots\wedge x_p=e_1\wedge\ldots\wedge e_p$ - один из базисных элементов (см. теорему из предыдущей лекции) алгебры $\Lambda(V)$. Поэтому $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p\ne 0$. □

Замечание. $x \wedge x = 0 \ \ \forall x \in V$. Если y - произвольный элемент $\Lambda(V)$, то не всегда $y \wedge y = 0$.

Пусть теперь $\dim V = n$, $e_1,...,e_n$ - базис V, $p \le n$ и $x_1,...,x_p \in V$. Их внешнее произведение можно явно выразить через произведения e_j. Пусть $(x_j^1,...,x_j^n)$ - координаты вектора x_j в базисе $(e_1,...,e_n)$, т.е. $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i e_i$. Введём обозначение:

$$\Delta_{i_1...i_p}(x_1,...,x_p) = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} .... x_p^{i_1} \\ .... \\ x_1^{i_p} .... x_p^{i_p} \end{vmatrix}$$

В матрице, столбцы которой – координаты векторов $x_1,...,x_p$, вычеркнуты все строки, кроме $i_1,...,i_p$.

Теорема. *Пусть* $(e_1,...,e_n)$ *- базис* V, *и* $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i e_i$, $j = 1,..., p$ *- любые* $p \le n$ *векторов в* V. *Тогда* $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_p \le n} \Delta_{i_1...i_p}(x_1,...,x_p) e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p = \sum_{i_1,...,i_p} x_1^{i_1} ... x_p^{i_p} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} = \sum_{i_1,...,i_p - \text{различны}} x_1^{i_1} ... x_p^{i_p} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} .$$

Рассмотрим в этой сумме ту часть слагаемых, у которых множество $\{i_1,...,i_p\}$ одно и то же. Слагаемые этой суммы отличаются только порядком следования этих индексов, т.е. эта часть суммы равна $\sum_{\pi \in S_p} x_1^{i_{\pi(1)}} ... x_p^{i_{\pi(p)}} e_{i_{\pi(1)}} \wedge ... \wedge e_{i_{\pi(p)}}$. При этом произведение $e_{i_{\pi(1)}} \wedge ... \wedge e_{i_{\pi(p)}}$ равно $\varepsilon_\pi e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$, где ε_π знак подстановки π, а сами $i_1,...,i_p$ можно считать упорядоченными: $i_1 < ... < i_p$. Поэтому $x_1 \wedge ... \wedge x_p = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_p \le n} (\sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi x_1^{i_{\pi(1)}} ... x_p^{i_{\pi(p)}}) e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$.

Вспомним формулу для определителя $\det A = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)}^1 ... a_{\sigma(p)}^p$. Отсюда следует, что $\det A^t = |A| = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon_\sigma a_1^{\sigma(1)} ... a_p^{\sigma(p)}$. Это означает, что множитель перед $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$ равен $\Delta_{i_1...i_p}(x_1,...,x_p)$. □

7 мая 2005