30.11.20. Спецкурс. д/з от лекции 11.

(1.) Найти наилучшее приближение X_{t+1} с помощью $X_1 \dots X_t$. (неоднородной)

Решение: В теореме об оптим. прогнозе мы доказали, что $\hat{X}^*_{t+1} = E(X_{t+1}/X_1 \dots X_t)$.

В задаче 3 этого д/з мы доказали, что $E(X_{t+1}/X_1 \dots X_t) = E(\mu(\theta)/X_1 \dots X_t)$.

А в теореме Бюльмана мы выяснили, что $E(\mu(\theta)/X_1 = x_1 \dots X_t = x_t) = \widehat{\mu(\theta)}^* = (1-\varsigma_t)m + \varsigma_t \overline{X_t}$, где $\overline{X_t} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i$

$$\varsigma_t = \frac{at}{s^2+at} = \frac{cov(X_1;X_2)}{D(\overline{X_t})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{X}^*_{t+1} = (1-\varsigma_t)m + \varsigma_t \overline{X_t}}$$

Зам. можно явно: $z = \hat{X}_{t+1} = \sum_{i=0}^{t} c_i X_i$

$E(X_{t+1} - z)\cdot X_i = 0;\ i = 0 \dots t$, $X_0 = 1$;

$i=0$: $m = c_0 + \sum_{j=1}^{t} c_j \cdot m \Rightarrow X_{t+1} - z$ - центрир, и $c_0 = m(1 - \sum_{j=1}^{t} c_j)$

$i \geq 1$: $cov(X_{t+1} - z; X_i) = \underbrace{E(X_{t+1}-z)X_i}_{=0} - \underbrace{E(X_{t+1}-z)EX_i}_{=0} = 0.$

$\Rightarrow \underbrace{cov(X_{t+1}; X_i)}_{=a} = \sum_{j=0}^{t} c_j \cdot \underbrace{cov(X_j; X_i)}_{=\delta_{ij} s^2 + a}$ — по лемме

$\Rightarrow a = a\sum c_j + c_i \cdot s^2$

$\Rightarrow c_i = \frac{a(1-\sum c_i)}{s^2} \Rightarrow c_i$ - все одинаковые

$\Rightarrow s^2 c = a - atc$

$\Rightarrow c = \frac{a}{at+s^2}$ ч.т.д.

(2.) Найти наилучшее приближение $\mu(\theta)$ с помощью лин. однородной комб.

Решение:

$z = \sum_{i=1}^{t} c_i X_i$

$z \perp$ плоскости $(X_1 \dots X_t) \Rightarrow E(\mu(\theta) - z)X_i = 0;\ i = 1 \dots t$ (*)

(т.к. это проекция)

Запишем $cov(\mu(\theta) - z; X_i)$ двумя способами:

- $cov(\mu(\theta) - z; X_i) = \underbrace{E(\mu(\theta) - z)X_i}_{=0\ (\text{см. } *)} - E(\mu(\theta) - z)\cdot EX_i = 0 - (E\mu(\theta) - Ez)\cdot EX_i = -(m - \sum_{i=1}^{t} c_i \cdot m)m = -m^2(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i)$

- $cov(\mu(\theta) - z; X_i) = cov(\mu(\theta); X_i) - cov(z; X_i) = a - cov(\sum_{j=1}^{t} c_j X_j; X_i) = a - \sum_{j=1}^{t} c_j \underbrace{cov(X_j; X_i)}_{=\delta_{ij} s^2 + a} =$

(см. лемму на стр. 31.)

$= a - \sum_{i=1}^{t} c_i \cdot a - c_i \cdot s^2 = a(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i) - c_i s^2$

$\Rightarrow -m^2 \cdot (1 - \sum_{i=1}^{t} c_i) = a(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i) - c_i s^2$

$\Rightarrow c_i = \frac{(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i)(a + m^2)}{s^2}$

$\Rightarrow$ все c_i - одинаковые и равны c

Найдем их:

$s^2 \cdot c = (1 - t \cdot c)(a + m^2)$

$\frac{s^2 c}{m^2 + a} = 1 - t \cdot c$

$c(t + \frac{s^2}{m^2+a}) = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{t + \frac{s^2}{m^2+a}} = \frac{m^2+a}{s^2 + t(m^2+a)}$

$\Rightarrow z = (\sum_{i=1}^{t} X_i)\cdot c = \boxed{\overline{X_t} \cdot \frac{t(m^2+a)}{s^2+t(m^2+a)}}$ ← ответ

③ Пользуясь условной (при заданном θ) независимостью X_{t+1} и $X_1 \dots X_t$, док-ть, что $E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) = E(\mu(\theta)|X_1 \dots X_t)$

<u>Решение:</u> Рассм. $E(\mu(\theta) - f(X_1 \dots X_t))^2 =$

$$= E\big(\mu(\theta) - E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) + E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) - f(X_1 \dots X_t)\big)^2 =$$

$$= E\big(\mu(\theta) - E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)\big)^2 + 2E\big(\mu(\theta) - E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)\big)\big(E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) - f(X_1 \dots X_t)\big) +$$

$$+ E\big(E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) - f(X_1 \dots X_t)\big)^2$$

причем

$$E\big(\mu(\theta) - E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)\big)\big(E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) - f(X_1 \dots X_t)\big) = E\Big[E\big((\dots\dots)|X_1 \dots X_t\big)\Big] =$$

$E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)$ и $f(X_1 \dots X_t)$ – измеримы относ. $\sigma(X_1 \dots X_t)$

$$= E\Big[\{E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t) - f(X_1 \dots X_t)\} \cdot \underbrace{E\big(\mu(\theta) - E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)\,|\,X_1 \dots X_t\big)}_{= E(\mu(\theta)|X_1 \dots X_t) - E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)}\Big]$$

$\Rightarrow \inf\limits_f E(\mu(\theta) - f(X_1 \dots X_t))^2$ – достигает минимума при $f(X_1 \dots X_t) = E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)$ – т.к. 1-е слагаемое не зависит от f, а 2-е и 3-е будут $= 0$ при таком выборе f.

$\Rightarrow \hat{\mu}(\theta) = E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t)$ – ~~[illegible]~~ оптим. оценка из ф-ций $\in \langle X_1 \dots X_t \rangle$.

Но мы-то знаем, что $\hat{\mu}(\theta) = E(\mu(\theta)|X_1 \dots X_t)$ – для любой ф-ции её оптим. оценка из ф-ций $\in \langle X_1 \dots X_t \rangle$ есть УМО относ. этой σ-алгебры.

$$\Rightarrow \quad E(\mu(\theta)|X_1 \dots X_t) = E(X_{t+1}|X_1 \dots X_t). \text{ чтд.}$$