12.11.20. Вар ОДУ. д/з от семинара 10.

① Для простейшей задачи вар исчисления

$$\mathcal{L}(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to extr\ ;\ x(t_0)=x_0;\ x(t_1)=x_1$$

док-ть, что: а) если $L=L(t,\dot{x})$ – не зав. от x, то $\hat{L}_{\dot{x}}(t)=const$ – интеграл импульса

б) если $L=L(x,\dot{x})$ – не зав. от t, то $\dot{\hat{x}}\hat{L}_{\dot{x}}(t)-\hat{L}(t)=const$.

Док-во: а) $\hat{x}$ – удовл. ур-ю Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0.$$

но $L=L(t,\dot{x})$ – не зав. от x

$\Rightarrow L_x=0$

$\Rightarrow -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}=0$

$\Rightarrow L_{\dot{x}}=const.$

б) $\hat{x}$-удовл. ур-ю Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0.$$

почему $\dot{\hat{x}}\hat{L}_{\dot{x}}(t)-\hat{L}(t)\overset{?}{=}const$?

ну возьмем $\frac{d}{dt}$ от обеих частей (при усл, что $L=L(x,\dot{x})$):

$$\cancel{\ddot{x}\cdot L_{\dot{x}}}+\dot{x}(L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}+L_{\dot{x}x}\dot{x})-L_x\dot{x}-\cancel{L_{\dot{x}}\ddot{x}}\overset{?}{=}0.$$

$$\Rightarrow \dot{x}(\underbrace{L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}+L_{\dot{x}x}\dot{x}-L_x}_{})\overset{?}{=}0.$$

да, это $=0$, т.к. это $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0.$

1.37 стр. 119

② а) $\int_{-1}^{1}(\dot{x}^2+x^2)dt\to extr\ ;\ x(-1)=x(1)=1.$

$L(x,\dot{x},t)=\dot{x}^2+x^2.$

$L_{\dot{x}}=2\dot{x}\Rightarrow\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}=2\ddot{x}$

$L_x=2x$

$\Rightarrow -2\ddot{x}+2x=0\Rightarrow\ddot{x}-x=0.$

$\lambda^2-1=0.\Rightarrow\lambda=\pm1.$

$\Rightarrow x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$

$x(1)=c_1e+c_2e^{-1}=1.$ $\Rightarrow c_1(e+\frac{1}{e})+c_2(e+\frac{1}{e})=2.$

$x(-1)=c_1e^{-1}+c_2e=1.$

$\Rightarrow c_1+c_2=\frac{2}{e+e^{-1}}$

$\Rightarrow c_2=\frac{2}{e+e^{-1}}-c_1$

$\Rightarrow c_1e^{-1}+\frac{2e}{e+e^{-1}}-c_1e=1.$

$\Rightarrow \frac{2e}{e+e^{-1}}-1=c_1(e-e^{-1})\Rightarrow\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}=c_1\cdot(e-e^{-1})\Rightarrow c_1=\frac{1}{e+e^{-1}}=\frac{e}{1+e^2}$

$\Rightarrow C_2 = \frac{2}{e+e^{-1}} - C_1 = \frac{2e}{1+e^2} - \frac{e}{1+e^2} = \frac{e}{1+e^2}$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} = \frac{e}{1+e^2}(e^t + e^{-t}) = \frac{e^t+e^{-t}}{e+e^{-1}} = \frac{ch\,t}{ch\,1}$

Проверим, является ли $\hat{x}(t) = \frac{ch\,t}{ch\,1}$ – локальным экстремумом

Возьмем h : $h(-1)=h(1)=0$.

$\Rightarrow \mathcal{J}(\hat{x}+h) - \mathcal{J}(\hat{x}) = \int_{-1}^{1}((\dot{\hat{x}}+\dot{h})^2 + (\hat{x}+h)^2)\,dt - \int_{-1}^{1}(\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}^2)\,dt = \int_{-1}^{1}(2\dot{\hat{x}}\dot{h} + \dot{h}^2 + 2\underbrace{\hat{x}}_{=\ddot{\hat{x}}\text{, ур-е Э-Л.}}h + h^2)\,dt =$

$= \int_{-1}^{1}(\dot{h}^2 + h^2)\,dt + 2\int_{-1}^{1}\dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt + 2\int_{-1}^{1}\ddot{\hat{x}}h\,dt =$

$= \int_{-1}^{1}((\dot{h})^2 + h^2)\,dt + 2\cdot\dot{\hat{x}}h\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1}\ddot{\hat{x}}h\,dt + 2\int_{-1}^{1}\ddot{\hat{x}}h\,dt = \int_{-1}^{1}((\dot{h})^2 + h^2)\,dt \geq 0.$

$\Rightarrow \mathcal{J}(\hat{x}+h) \geq \mathcal{J}(\hat{x})$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = \frac{ch\,t}{ch\,1} \in locmin$

Причем $\mathcal{J}(\hat{x}+h) - \mathcal{J}(\hat{x}) \geq 0 \Rightarrow \hat{x}(t) \in absmin$

$S_{absmin} = \int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{sh\,t}{ch\,1}\right)^2 + \left(\frac{ch\,t}{ch\,1}\right)^2\right)dt = \int_{-1}^{1}\frac{ch(2t)}{ch^2 1}\,dt = \frac{sh(2t)}{(ch\,1)^2} = \frac{2\,sh\,1\cdot ch\,1}{(ch\,1)^2} = 2\,th\,1.$

$S_{absmax} = +\infty$,

т.к. берем $x_n(t) = \hat{x}(t) + nh$, где $h = \sin \pi t$.

$\Rightarrow \mathcal{J}(x_n) = \int_{-1}^{1}(\dot{x}_n^2 + x_n^2)\,dt = \overset{\mathcal{J}(\hat{x})+}{} \int_{-1}^{1}((n\pi\cos\pi t)^2 + n^2(\sin\pi t)^2)\,dt = \overset{\mathcal{J}(\hat{x})+}{} n^2\cdot\pi^2\cdot\int_{-1}^{1}(\cos\pi t)^2 dt + n^2\int_{-1}^{1}(\sin\pi t)\,dt =$

$= \overset{\mathcal{J}(\hat{x})}{} n^2\cdot\pi^2\cdot 1 + n^2\cdot 1 = \overset{\mathcal{J}(\hat{x})+}{} n^2(1+\pi^2) \underset{\text{при } n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Ответ: } \hat{x}(t) = \frac{ch\,t}{ch\,1} \in abs\,min \\ S_{absmin} = 2\,th\,1 \\ S_{absmax} = +\infty\end{array}}$$

1.18 стр. 116

б) $\int_{1}^{e}(t\dot{x}^2 + 2x)\,dt \longrightarrow extr$; $x(1)=1$; $x(e)=0$.

$L(x, \dot{x}, t) = t\dot{x}^2 + 2x$

$L_{\dot{x}} = 2t\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 2\dot{x} + 2t\ddot{x}$

$L_x = 2$

$\Rightarrow -2\dot{x} - 2t\ddot{x} + 2 = 0.$

$\Rightarrow \dot{x} + t\ddot{x} = 1.$

Замена: $\dot{x} = y$

$\Rightarrow y + t\dot{y} = 1.$

$\Rightarrow t\dot{y} = 1 - y$

$t\cdot\dfrac{dy}{dt} = 1 - y$

$\dfrac{dy}{1-y} = \dfrac{dt}{t}$

$\Rightarrow -\ln(y-1) = \ln t + \tilde{C}_1$

$y - 1 = \dfrac{1}{t}\cdot C_1$

Обратная замена: $\dot{x} = y$

$\Rightarrow \dot{x} - 1 = \dfrac{C_1}{t}$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \ell \ldots + t + C_2$

$x(1) = 1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 0.$

$x(e) = C_1 + e = 0 \Rightarrow C_1 = -e.$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = -e\ln t + t.$ — допустимая экстремаль.

Проверим, является ли $\hat{x}(t)$ экстремумом.

Берем h: $h(1) = h(e) = 0.$

$$\mathcal{J}(\hat{x}+h) - \mathcal{J}(\hat{x}) = \int_1^e \left(t(\dot{x}+\dot{h})^2 + 2(x+h)\right)dt - \int_1^e \left(t\dot{x}^2 + 2x\right)dt =$$

$$= \int_1^e \left(t\cdot 2\dot{x}\dot{h} + t\cdot\dot{h}^2 + 2h\right)dt = \int_1^e \left(2t\dot{x}\dot{h} + 2h\right)dt + \int_1^e t\dot{h}^2\,dt =$$

$$= \cancel{2t\dot{x}h}\Big|_1^e{}^{0} + \int_1^e -2h\,d(t\dot{x}) + \int_1^e 2h\,dt + \int_{-1}^{1} t\dot{h}^2\,dt = \int_1^e 2h\,(\underbrace{-\dot{x} - t\ddot{x} + 1}_{=0,\ \text{см. ур-е Э-Л}})\,dt + \int_{-1}^{1} t\dot{h}^2\,dt \geqslant 0.$$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = -e\ln t + t \in \text{abs}\min$ (т.к. $\text{loc}\min$ + $\mathcal{J}(\hat{x}+h) - \mathcal{J}(\hat{x}) \geqslant 0$)

$$S_{\text{abs}\min} = \int_1^e \left(t\cdot\left(-\frac{e}{t}+1\right)^2 - 2e\ln t + 2t\right)dt = \int_1^e \left(\frac{e^2}{t} - 2e - 2e\ln t + 3t\right)dt =$$

$$= e^2\cdot\ln t\Big|_1^e - 2e\cdot(e-1) - 2e\cdot t(\ln t - 1)\Big|_1^e + 3\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_1^e =$$

$$= e^2 - 2e^2 + \cancel{2e} - \cancel{2e^2\cdot 0} + \cancel{2e\cdot(-1)} + \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} = \frac{e^2-3}{2}$$

$S_{\text{abs}\max} = +\infty$:

Берем $x_n = \hat{x} + n\cdot h$, где $h = (t-1)(t-e) = t^2 - t(e+1) + e.$

$$\to \mathcal{J}(x_n) = \mathcal{J}(\hat{x}) + \int_1^e t n^2 (2t-e-1)^2 + 2n(t^2 - t(e+1) + e)\,dt = \mathcal{J}(\hat{x}) + n^2\cdot\underbrace{\int_1^e t\cdot(2t-e-1)^2 + 2t^2 - 2t(e+1) + 2e)\,dt}_{=\frac{1}{6}\cdot(e-1)^4} \to +\infty$$

Ответ: $\hat{x}(t) = -e\ln t + t \in \text{abs}\min$

$S_{\text{abs}\min} = \dfrac{e^2-3}{2}$

$S_{\text{abs}\max} = +\infty$

в) $\int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2)\,dt \to extr;\ x_1(0)=0\ \ x_1(1)=\operatorname{sh}1$
$x_2(0)=0\ \ x_2(1)=-\operatorname{sh}1.$

N 1.67 стр. 122

$$L_{\dot{x}_1} = 2\dot{x}_1 \Rightarrow -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} = -2\ddot{x}_1$$
$$L_{x_1} = -2x_2 \quad \Big\} \Rightarrow -2\ddot{x}_1 - 2x_2 = 0.$$

$$L_{\dot{x}_2} = 2\dot{x}_2 \Rightarrow -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} = -2\ddot{x}_2$$
$$L_{x_2} = -2x_1 \quad \Big\} \Rightarrow -2\ddot{x}_2 - 2x_1 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\ddot{x}_1 \\ x_1 + \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 - \overset{....}{x_1} = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = \pm 1 \\ \lambda = \pm i\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t$$
$$\dot{x}_1 = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3\cos t - C_4\sin t$$
$$\ddot{x}_1 = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\sin t - C_4\cos t$$
$$\Rightarrow x_2(t) = -\ddot{x}_1 = -C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t.$$

$x_1(0)=0 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_4 = 0.$

$x_1(1) = \operatorname{sh}1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \Rightarrow C_1\cdot e + C_2e^{-1} + \cancel{C_3\sin 1} + \cancel{C_4\cos 1} = \frac{e - e^{-1}}{2}.$

$x_2(0)=0 \Rightarrow -C_1 - C_2 + C_4 = 0.$ $\Rightarrow C_4 = 0.$

$x_2(1) = -\operatorname{sh}1 \Rightarrow -C_1\cdot e - C_2\cdot e^{-1} + \cancel{C_3\sin 1} + \cancel{C_4\cos 1} = -\frac{e - e^{-1}}{2}.$

$$\Rightarrow C_3\cdot\sin 1 = 0$$

$\Rightarrow C_3 = C_4 = 0.$

$\Rightarrow C_2 = -C_1.$

$C_1\cdot e + C_2\cdot e^{-1} = \frac{e - e^{-1}}{2}$

$C_1(e - e^{-1}) = \frac{e - e^{-1}}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = -C_1 = \frac{-1}{2}.$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh}t \\ x_2(t) = -\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = -\operatorname{sh}t \end{array}$$ — допустимая экстремаль.

проверим, является ли это лок. экстремумом: $h: h_1(0)=h_1(1)=h_2(0)=h_2(1)=0.$

$$\mathcal{J}(\hat{x}+\bar{h}) - \mathcal{J}(\hat{x}) = \int_0^1 \left((\dot{x}_1+\dot{h}_1)^2 + (\dot{x}_2+\dot{h}_2)^2 - 2(x_1+h_1)(x_2+h_2) - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2\dot{x}_1\dot{h}_1 + 2\dot{x}_2\dot{h}_2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 - 2x_1h_2 - 2x_2h_1 - 2h_1h_2\right)dt =$$

$$= \cancel{2\dot{x}_1 h_1\Big|_0^1} - 2\int_0^1 \ddot{x}_1 h_1\,dt + \cancel{2\dot{x}_2 h_2\Big|_0^1} - \boxed{2\int_0^1 \ddot{x}_2 h_2\,dt} + \int_0^1 (\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2)\,dt - \boxed{2\int_0^1 \underbrace{x_1}_{=-\ddot{x}_2} h_2\,dt} - 2\int_0^1 \underbrace{x_2}_{=-\ddot{x}_1} h_1\,dt -$$

$$-2\int_0^1 h_1 h_2\,dt = \int_0^1 (\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 - 2h_1h_2)\,dt \geqslant \int_0^1 (h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2)\,dt = \int_0^1 (h_1 - h_2)^2\,dt \geqslant 0.$$

$$\int_0^1 h^2(t)\,dt \leq \int_0^1 \dot{h}^2(t)\,dt$$

т.к. $\int_0^1 h^2(t)\,dt = \int_0^1 \left(\int_0^t \dot{h}(\tau)\,d\tau\right)^2 dt \leq \int_0^1 \left(\int_0^t \dot{h}^2(\tau)\,d\tau\right)dt \leq \int_0^1 \dot{h}^2(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\operatorname{sh} t; -\operatorname{sh} t) \in \text{absmin}$

$S_{\text{absmin}} = \int_0^1 \left((\operatorname{ch} t)^2 + (\operatorname{ch} t)^2 + 2\operatorname{sh}^2 t\right)dt = 2\int_0^1 (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t)\,dt = 2\int_0^1 \operatorname{ch}(2t)\,dt = \operatorname{sh}(2)$

$S_{\text{absmax}} = +\infty$:

берем $\bar{x}_n = \hat{x} + n\bar{h}$, где $h_1 = h_2 = (t-0)(t-1) = t^2 - t$; $\dot{h}_i = 2t - 1$.

$\Rightarrow J(x_n) = J(\hat{x}) + J(n\bar{h}) = J(\hat{x}) + n\int_0^1 2\cdot(2t-1)^2 - 2t^2(t-1)^2\,dt = J(\hat{x}) + n\cdot\frac{3}{5} \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Ответ: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\operatorname{sh} t; -\operatorname{sh} t) \in \text{absmin}$

$S_{\text{absmin}} = \operatorname{sh}(2)$

$S_{\text{absmax}} = +\infty$

③ Решить задачи Больца:

№2.2 стр 128

а) $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 2x)\,dt + x^2(0) \to \text{extr}$.

$L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$

$L_x = 2$ $\Rightarrow$ $-2\ddot{x} + 2 = 0$.

$\ddot{x} = 1$.

$\dot{x} = t + C_1$

$x = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$.

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = \ell_{x(0)} = 2x(0) \\ L_{\dot{x}}(1) = -\ell_{x(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2}\dot{x}(0) = \cancel{2}x(0) \\ 2\dot{x}(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_2 \\ 1 + C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = -1.$$

$\to \hat{x}(t) = \frac{t^2}{2} - t - 1$ — допустимая экстремаль.

Проверим, является ли это экстремумом.

Берем $h \in C^1$; $h(0)$ и $h(1)$ — любое.

$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \int_0^1 \left((\dot{x}+\dot{h})^2 + 2(x+h) - \dot{x}^2 - 2x\right)dt + (x(0)+h(0))^2 - (x(0))^2 =$

$= \int_0^1 (2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2 + 2h)\,dt + 2x(0)h(0) + h(0))^2 =$

$$= 2\dot{x}h\Big|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{x}h\,dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt + \int_0^1 2h\,dt + 2x(0)h(0) + (h(0))^2 =$$

$$= 2\dot{x}(1)h(1) - 2\dot{x}(0)h(0) + 2\underbrace{\int_0^1 (-\ddot{x}+1)h\,dt}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{т.к. ур. Э-Л}}} + \int_0^1 \dot{h}^2 dt + 2x(0)h(0) + (h(0))^2 =$$

$x(t) = \frac{t^2}{2} - t - 1$

$\dot{x}(t) = t - 1$

$$= \cancel{2\cdot 0} - \cancel{2\cdot 1\cdot h(0)} + \int_0^1 \dot{h}^2 dt + \cancel{2\cdot 1\cdot h(0)} + (h(0))^2 = \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq 0.$$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = \frac{t^2}{2} - t - 1 \in absmin$

$$S_{absmin} = \int_0^1 \left((t-1)^2 + 2\left(\frac{t^2}{2} - t - 1\right)\right)dt + 1 = \int_0^1 (t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t - 2)\,dt + 1 =$$

$$2\int_0^1 (t^2 - 2t)\,dt = 2\cdot\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 - t^2\Big|_0^1\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{4}{3}$$

$S_{absmax} = +\infty$, т.к.

Берём $x_n(t) = n$.

$\Rightarrow J(x_n) = \int_0^1 (\dot{x}_n^2 + 2x_n)\,dt + x_n^2(0) = 2n + n^2 \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Ответ: $\hat{x}(t) = \frac{t^2}{2} - t - 1 \in absmin$

$S_{absmin} = -\frac{4}{3}$

$S_{absmax} = +\infty$

№ 2.10 стр 129

б) $\int_0^\pi (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t)\,dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$

$L_{\dot{x}} = 2\dot{x}$

$L_x = 2x - 4\sin t$

$\Rightarrow -2\ddot{x} + 2x - 4\sin t = 0.$

$\ddot{x} - x = -2\sin t$

x общее однор.: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

x частн. неоднор.: $x(t) = a\sin t + b\cos t$

$\ddot{x}(t) = -a\sin t - b\cos t$

$-2a\sin t - 2b\cos t = -2\sin t \Rightarrow a = 1.$

$\Rightarrow x(t) = \sin t$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \sin t$ – допустимая экстремаль

$\dot{x}(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + \cos t$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(\pi) = -l_{x(\pi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\dot{x}(0) = 4x(0) \\ 2\dot{x}(\pi) = -2 + 2x(\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 + 1 = 2\cdot(c_1 + c_2) \\ \cancel{c_1 e^\pi} - c_2\cdot e^{-\pi} - 1 = -1 + \cancel{c_1 e^\pi} + c_2\cdot e^{-\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 1 \\ 2c_2\cdot e^{-\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 - 3c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(t) = e^t + \sin t$$

Проверим, является ли $\hat{x}(t) = e^t + \sin t$ — экстремалью: (стр. 4)

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \frac{1}{2}\cdot J''(h) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi (2\dot{h}^2 + 2h^2)dt + \frac{1}{2}\cdot(2\cdot 2\cdot (h(0))^2 - 2(h(\pi))^2)\right) =$$

$$= \int_0^\pi (\dot{h}^2 + h^2)\,dt + 2(h(0))^2 - (h(\pi))^2 = \int_0^\pi (\dot{h}^2 - 2h\dot{h} + h^2)dt + h^2(0) = \int_0^\pi (\dot{h} - h)^2 dt + h^2(0) \geq 0.$$

$$h^2(0) - h^2(\pi) = -\int_0^\pi dh^2 = -2\int_0^\pi 2\dot{h}h\,dt$$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = e^t + \sin t \in \mathrm{absmin}$

$$S_{\mathrm{absmin}} = J(\hat{x}) = \int_0^\pi (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x}^2 - 4\hat{x}\sin t)\,dt + 2\hat{x}^2(0) + 2\hat{x}(\pi) - \hat{x}^2(\pi) =$$

$$= \int_0^\pi \left((e^t + \cos t)^2 + (e^t + \sin t)^2 - 4(e^t + \sin t)\sin t\right)dt + 2 + 2e^\pi - e^{2\pi} =$$

$$= \int_0^\pi (2e^{2t} + 2e^t\cos t + \underline{2e^t\sin t} + 1 - \underline{4e^t\sin t} - 4\sin^2 t)\,dt + 2 + 2e^\pi - e^{2\pi} = -1 - \pi.$$

$S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$: возьмём $x_n(t) = n$.

$$\Rightarrow J(x_n) = \int_0^\pi (n^2 - 4n\sin t)\,dt + 2n^2 + 2n - n^2 = \pi\cdot n^2 + \underbrace{4n\cos t\Big|_0^\pi}_{=-8\pi n} + n^2 + 2n = n^2(1+\pi) + 2n(1-4\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Ответ: $\hat{x}(t) = e^t + \sin t \in \mathrm{absmin}$
$S_{\mathrm{absmin}} = -1 - \pi$
$S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$

в) $\int_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1 x_2)\,dt + x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to \mathrm{extr}$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}_1} = \dot{x}_2 \\ L_{x_1} = x_2 \end{cases} \Rightarrow -\ddot{x}_2 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}_2} = \dot{x}_1 \\ L_{x_2} = x_1 \end{cases} \Rightarrow -\ddot{x}_1 + x_1 = 0 \Rightarrow x_1(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}$$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)} \\ L_{\dot{x}_1}(1) = -l_{x_1(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(0) = x_2(1) \\ \dot{x}_2(1) = -x_2(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 - C_2 = C_1 e + C_2 e^{-1} \\ C_1 e - C_2 e^{-1} = -C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2C_2 = 2C_1 e \Rightarrow C_2 = -C_1 e \\ C_1 + C_1 e = C_1 e - C_1 \end{cases}$$

Аналогично для x_2.

$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$

$\Rightarrow \hat{x}_1, \hat{x}_2(t) = (0, 0)$ — допустимая экстремаль.

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \frac{1}{2}J''(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (\dot{h}_1\dot{h}_2 + h_1h_2)dt + h_1(0)h_2(1) + h_1(1)h_2(0)\right).$$ Может и $\geq J(\hat{x})$ и $\leq J(\hat{x})$

$J(\hat{x}) = 0.$

покажем, что $(0,0) \notin loc\,extr$.

$x_1 = x_2 = \overset{0+}{\lambda}(t^2-t) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} (0,0)$ (т.е. $h_1 = h_2 = h = \lambda(t^2-t)$)

но $\mathcal{J}(x_1, x_2) = \int_0^1 (h'^2 + h^2)dt \geq 0. = \mathcal{J}(\hat{x})$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -x_2 = \lambda(t^2-t) \\ \Rightarrow \mathcal{J}(x_1; x_2) = \int_0^1 (-h'^2 - h^2)dt \leq 0 = \mathcal{J}(\hat{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \notin loc\,extr$$

$S_{absmin} = -\infty$:

$x_n^1 = -x_n^2 = n(t^2-t)$

$\Rightarrow \mathcal{J}(x_n^1; x_n^2) = -n^2 \cdot \left(\int_0^1 (2t-1)^2 + (t^2-t)^2\right)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$S_{absmax} = +\infty$:

$x_n^1 = x_n^2 = n(t^2-t)$

$\Rightarrow \mathcal{J}(x_n^1; x_n^2) = n^2 \cdot \int_0^1 ((2t-1)^2 + (t^2-t)^2)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

<u>Ответ:</u> $(\hat{x}_1; \hat{x}_2) = (0,0) \notin loc\,extr$

$S_{absmin} = -\infty$

$S_{absmax} = +\infty$.