Введение в теорию мартингалов.
Спецкурс, мехмат, осень 2019 г.

1. Условное мат. ожидание (напоминание)

16.09.2019

1. Определение

§ II.7.1

Опр. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

1. $X \geq 0$. Тогда $E(X|\mathcal{G})$ - такая с.в. $Z \in [0, \infty]$, что
   a) Z - $\mathcal{G}$-изм.
   б) $\forall A \in \mathcal{G}$ $\quad E(Z I_A) = E(X I_A)$
2. X - произв. Тогда $E(X|\mathcal{G}) = E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G})$

Т-ма $\forall X \geq 0 \quad \exists! \, E(X|\mathcal{G})$

Д-во (∃) $Q(A) = E(X I_A)$ - σ-кон. мера
$\Rightarrow$ (по т. Радона-Никодима) $\exists$ $\mathcal{G}$-изм. Z $\quad Q(A) = \int Z \, dP = E(Z I_A) \quad \left(Z = \frac{dQ}{dP}\right)$
искомая
(!) упражн.

□

2. Простые св-ва

§ II.7.4

Т-ма Выполнены св-ва:

Все св-ва при условии, что п.н. корректно опр. правая или левая часть рав-в ($\Rightarrow$ опр. и другая)

1. $E(aX + bY|\mathcal{G}) = a E(X|\mathcal{G}) + b E(Y|\mathcal{G})$
2. X - $\mathcal{G}$-изм $\Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = X$

2'. — " — $\Rightarrow \forall Y \quad E(XY|\mathcal{G}) = X E(Y|\mathcal{G})$

3. $E(E(X|\mathcal{G})) = EX$

3' (телескопические св-ва) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \Rightarrow$
$E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)) = E(X|\mathcal{G}_1)$

4. $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G} \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = EX$
5. (нер-во Йенсена) f - вып. вниз, $E(|X||\mathcal{G}) < \infty$ п.н.

§ II.7.12 задача 5

$\Rightarrow E(f(X)|\mathcal{G})$ опр-но, и
$f(E(X|\mathcal{G})) \leq E(f(X)|\mathcal{G})$

Д-во 5 (ост. св-ва см. в Ширяеве)
$\exists$ изм $\ell(y) \quad \forall x, y \quad f(x) \geq f(y) + \ell(y)(y - x)$
Возьмем $Y = E(X|\mathcal{G}) \Rightarrow f(X) \geq f(Y) + \ell(Y)(Y - X)$
$\Rightarrow \underbrace{E(f(X)|\mathcal{G})}_{\text{опр-но т.к.}} \geq E(f(Y)|\mathcal{G}) + \ell(Y) \cdot 0 = f(Y)$
$E(f(X)^-|\mathcal{G}) < \infty$

□

3. Сходимость под ожиданием

§ II.7.4 т-ма 2

Т-ма
a) $|X_n| \leq Y$, $E|Y| < \infty$, $X_n \to X$ п.н. $\quad \Rightarrow E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G})$ п.н.
б) $X_n \geq Y$, $EY^- < \infty$, $X_n \uparrow X$ п.н. $\quad \Rightarrow$ — " — " — " —
c) $X_n \geq Y$, $EY^- < \infty$ $\quad \Rightarrow E(\underline{\lim} X_n|\mathcal{G}) \leq \underline{\lim} E(X_n|\mathcal{G})$