Семинар 2 (09.09.2021)

План семинара:

1) Группы Ли и Алгебры Ли
2) Пространство Минковского
3) Преобразования Лоренца для скорости и ускорения
4) 4-вектора скорости и ускорения

Группы Ли:

(учебник: К.В. Степаньянц „Классическая теория поля")
475

Примеры:

1) невырожденные ($\det \omega \neq 1$) матрицы $n \times n$

$GL(n, C)$; $GL(n, R)$

а) проверка „умножения": $\det(\omega_2 \omega_1) = \det \omega_1 \det \omega_2 \neq 0$

б) проверка „$\exists$ един. матр.": $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) проверка „$\exists$ обр. матр": $\det \omega^{-1} = \dfrac{1}{\det \omega} \neq 0$

2) Ортогональные матрицы: $\omega \omega^T = 1$ размера $n \times n$

$O(n, C)$; $O(n, R)$

3) Ортогональность + $\det \omega = 1$:

$SO(n, C)$ (группа вращений) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ — поворот на угол φ в 2мерном пространстве.

4) унитарность + $\det \omega = 1$: $(\omega^+ = \omega^{-1})$

$SU(n)$

5) Псевдоортогональные: $\omega^T \eta \omega = \eta \longrightarrow O(p, q)$

Пусть $\eta = diag(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{q})$

Группа Лоренца: $O(1,3)$ (следует из $s^2 = inv$)

Связность:

1) Рассмотрим группу $O(n, C)$:

$\omega\omega^T = 1 \Rightarrow (\det \omega)^2 = 1 \Rightarrow \det \omega = \pm 1$ ~~существует связности.~~ а) $\det\omega = 1$

группа распадается на две части (т.н. 2 компоненты связности): б) $\det\omega = -1$

два элемента с $\begin{smallmatrix}\det\omega=1\\ \det\omega=-1\end{smallmatrix}$ нельзя соединить гладким путём, чтобы $\omega \in G$

2) Для группы $O(p, q)$:

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} p\times p & p\times q \\ \hline q\times p & q\times q \end{array}\right)$$

на диаг. невырожденные матрицы $\Rightarrow$

$\Rightarrow (++)\ (+-)\ (-+)\ (--)$

Алгебры Ли

Определение стр. 487.

Введём базис: $-it_a$;

t_a – генераторы группы.

утв. стр. 489.

$$\omega = \exp(\alpha) = \exp\left(\sum_a \alpha_a \cdot (-it_a)\right)$$

Почему: $\omega_1 \cdot \omega_2 = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} = \exp\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{[\alpha_1, \alpha_2]}{2} + \dots\right)$

+ таблица стр. 492.

Пространство Минковского

Ур. Максвелла $\longrightarrow$ Преобразования Лоренца:

1) t – меняется, будто координата

2) $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = inv$ — выбран

$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = inv$ — $\otimes$

Вводится пространство Минковского:

1) Имеет размерность 4 (t – ~~четвертая~~ „нулевая" координата)

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{NB} r_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ — ковариантный вектор

(строгое опр-ние см. в уч. Борисова)

NB

$\mu = 0;1;2;3$

$r^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ — контрвариантный вектор

2) s^2 – расстояние между 2мя точками:

$|\vec{r}^2| = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2 = \sum_i r_i r_i$ — скалярн. произведение

$s^2 = \eta_{\mu\nu} r^\mu r^\nu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ — скалярн. пр. в метр. Минк.

$\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор

($g_{\mu\nu}$ — метр. тензор в искривлённом пр-ве)

индексы можно поднимать и опускать

$r^\mu = g^{\mu\nu} r_\nu$
$r_\mu = g_{\mu\nu} r^\nu$
] тогда можно писать: $s^2 = \eta_{\mu\nu} r^\mu r^\nu = r_\nu r^\nu$

Все скаляры — inv. Напр.:

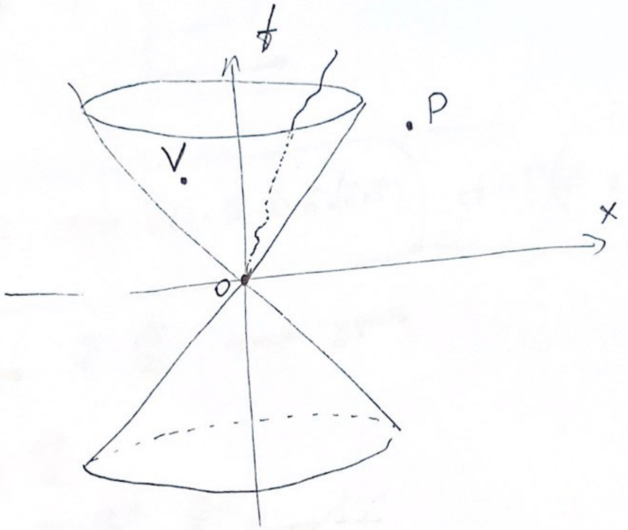
$s^2 = r_\nu r^\nu$

$a_\mu a^\mu$

$\partial_\mu j^\mu$

и т.д.

$$S^2 = \tau_\mu \tau^\mu - \left[\begin{array}{l} > 0 - \text{врятяподобний интервал.} \\ < 0 - \text{пространственноподобний интервал (причинно несвязаны)} \end{array}\right.$$



собств. время:

$$\begin{cases} ds^2 = c\,dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = c\,dt^2 - v^2 dt^2 = c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)dt^2 \\ ds'^2 = c^2 dt'^2 \text{ (система покоя)} \end{cases}$$

$ds^2 = inv \Rightarrow ds'^2 = ds^2 \Rightarrow$

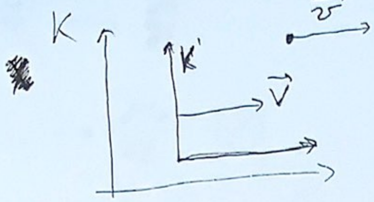
① $dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$] dt' – собственное время.

② $dt' = \frac{ds'^2}{c^2} = inv$

Лоренц преобразование скорости

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\vec{b})$$

$$\vec{n}\times(\vec{r}\times\vec{n}) = \vec{r}\cdot|\vec{n}|^2 - \underbrace{\vec{n}\,(\vec{r}\cdot\vec{n})}_{r_{\parallel}}$$



$$\boxed{\vec{r}\,' = \Gamma(\vec{r} - \vec{V}t) + (\Gamma - 1)\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{r})} \qquad \boxed{ct' = \Gamma\left(ct - \frac{1}{c}\vec{V}\cdot\vec{r}\right)}$$

Есть $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, хотим узнать

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}:$$

$$\cancel{\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\cdot\frac{1}{dt}}$$

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}\,' = \frac{\vec{v} - \vec{V} + \vec{n}(V - \vec{v}\vec{n})(1-\Gamma)}{\Gamma(1 - \vec{v}\vec{V}/c^2)}} \longrightarrow \vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \ldots\ldots \quad \text{(задачи 3 вторая часть)}$$

$\downarrow$

$$|\vec{v}\,'|^2 = \frac{\sqrt{(\vec{v}-\vec{V})^2 - [\vec{v}\times\vec{V}]^2/c^2}}{1 - \frac{\vec{v}\vec{V}}{c^2}}$$

$\downarrow$

подставляя быстроты

$\downarrow$

закон косинусов в пр-ве Лобачевского (задача 2, часть 2)

4 вектор скорости:

$$\vec{r} \longrightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

$$r_\mu \longrightarrow \frac{\partial r_\mu}{\partial t} \quad \otimes$$

хотим, чтобы $v_\mu = \frac{\partial r_\mu}{\partial t}$ — вектор, т.е. преобразов. по з-ну Лоренца.

Но r_μ – вектор;
t — тоже преобразуется, т.е.

$$v_\mu \longrightarrow „\vec{v}_\mu' = \frac{\Lambda \cdot \partial r_\mu}{\Lambda \cdot \partial t}" \text{ — не вектор, т.к. должно быть}$$

$$v_\mu \longrightarrow „\vec{v}_\mu' = \Lambda v_\mu"$$

Другими словами ∂t — должен быть а) аналогом времени б) инвариантом.

Будет использовать собственное время dt' $\left(\frac{d\tau}{c}\right)$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

$$v_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt} \cdot \Gamma(\vec{v})$$

$$v^\mu = \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \Gamma(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \Gamma(\vec{v})$$

$$a_\mu = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{dv_\mu}{d\tau} = \frac{dv_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dv_\mu}{dt} \cdot \Gamma(\vec{v})$$

задача 3.

$a_\mu a^\mu < 0$ – задач 3.

задача 2:

$$v^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \Gamma(\vec{v}) \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu \cdot v^\nu \text{ – задача 2.}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} ch\psi & -sh\psi & 0 & 0 \\ -sh\psi & ch\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$