Листок 3

Задача 1. Проверьте, что функции вида

$$u_k(x) = \begin{cases} x + 1 - \frac{i}{2^{k-1}}, & x \in \left[-1 + \frac{i}{2^{k-1}}, -1 + \frac{2i+1}{2^k}\right), \\ -x - 1 - \frac{i+1}{2^{k-1}}, & x \in \left[-1 + \frac{2i+1}{2^k}, -1 + \frac{i+1}{2^{k-1}}\right), \end{cases}$$

где $i = 0, 1, 2, \dots 2^k - 1$, липшицевы на $[-1, 1]$, почти всюду дифференцируемы и в точках дифференцируемости удовлетворяют уравнению $|u'(x)|^2 = 1$ и граничным условиям $u(-1) = u(1) = 0$.

Задача 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ решите задачу Дирихле

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + |u_\varepsilon'|^2 = 1, \quad u_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(1) = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Найдите предел $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$. Что измениться, если в уравнении слагаемое $-\varepsilon u_\varepsilon''$ заменить на $+\varepsilon u_\varepsilon''$?

Задача 3. Пусть H – гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, причем H и H_p ограничены на $\mathbb{R} \times [-R, R]$ для всякого $R > 0$,

$$\lim_{|p| \to \infty} \inf_x \Big(\tfrac{1}{2} H(x,p)^2 + H_x(x,p)p\Big) = +\infty.$$

Рассмотрим гладкие ограниченные (вместе с производными) решения u^ε задач Коши

$$u_t^\varepsilon + H(x, u_x^\varepsilon) = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(x, 0) = g(x).$$

Используя метод Бернштейна докажите, что

$$|u_t^\varepsilon(x,t)| + |u_x^\varepsilon(x,t)| \le C,$$

где C не зависит от t, x, ε. Выведите из этой оценки существование такой последовательности $\varepsilon_j \to 0$, что u^{ε_j} сходится равномерно на всяком множестве $[0, T] \times [-R, R]$ к некоторой функции u. Докажите, что u — вязкостное решение.

Задача 4. Пусть g — липшицева функция и

$$u(x,t) = \min_y \Big\{ \tfrac{|x-y|^2}{2t} + g(y) \Big\}.$$

Проверьте, что u является вязкостным решением уравнения $u_t + \frac{u_x^2}{2} = 0$.

Задача 5. Пусть $u(x) = x \sin(\ln |x|)$ при $x \neq 0$ и $u(0) = 0$. Докажите, что это липшицева функция, не существует такой функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, что $u - \varphi$ имеет в точке $x = 0$ локальный экстремум.

Задача 6.

(a) Докажите, что $u \in C((0,1))$ является вязкостным супер-решением $u' = 0$ тогда и только тогда, когда функция u неубывающая.

(b) Докажите, что $u \in C((0,1))$ является вязкостным субрешением $-u'' = 0$ тогда и только тогда, когда функция u выпукла. Всегда ли выпуклая функция является вязкостным супер-решением $u'' = 0$?

Задача 7. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что всякое вязкостное решение уравнения $\Delta u = 0$ в U является гармонической функцией.