02.11.20. Дискр. матем. д/з от семинара 9

1. G - произв (т.е не обязательно рег) 2-дольный граф.

Док-ть, что $\chi'(G) = \Delta G$

Решение: по задаче 3 из семинара 9 мы знаем, что если $G=(V_1, V_2, E)$ - регулярный (т.е степени всех вершин $=\Delta(G)$) 2-дольный граф, то $\chi'(G)=\Delta(G)$.

Возьмём наш исходный граф G и дополним степени всех его вершин до $\Delta(G)$. Получим граф $\tilde{G}$, причём $\Delta(\tilde{G})=\Delta(G)$. - по постр.

$\Rightarrow$ по задаче 3: $\chi'(\tilde{G})=\Delta(\tilde{G})=\Delta(G)$.

$\Rightarrow \chi'(G) \le \chi'(\tilde{G})=\Delta(G)$.

но $\chi'(G) \not< \Delta(G)$, т.к в G $\exists$ вершина степени $\Delta(G)$, и чтобы покрасить все исходящие из неё рёбра в разные цвета, нам придётся использовать $\Delta(G)$ цветов. $\Rightarrow \chi'(G)=\Delta(G)$.

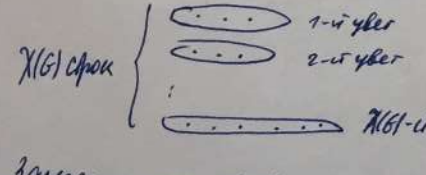
2. $G=(V,E)$; $|V|=n$.

Док-ть: а) $2\sqrt{n} \le \chi(G)+\chi(\bar{G}) \le n+1$

б) $n \le \chi(G)\cdot\chi(\bar{G}) \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Решение: а) пусть при раскраске G в $\chi(G)$ цветов мы получили s_1 вершин цвета 1 ... $s_{\chi(G)}$ вершин цвета $\chi(G)$.

Расположим вершины i-го цвета в i-й строке.



Заметим, что в графе G ни одного ребра между вершинами из одной и той же строчки не было (т.к раскраска правильная)

$\Rightarrow$ в $\bar{G}$ все рёбра между вершинами из одной и той же строчки - есть.

Поэтому никакие 2 вершины из одной строки нельзя покрасить в один и тот же цвет в $\bar{G}$. $\Rightarrow \chi(\bar{G}) \ge \max$(длина строки)

$\Rightarrow \chi(G)+\chi(\bar{G}) \ge$ периметра этой таблички $= \chi(G) + \max$(длина строки).

Причём внутри таблички точно есть n точек

$\Rightarrow$ имеем оптимизационную задачу (пусть x и y - стороны таблички):

$$\begin{cases} x+y \to \min \\ xy \ge n. \end{cases}$$

$\Rightarrow \Lambda(x,y) = \lambda_0(x+y) + \lambda_1(xy-n)$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = \lambda_0 + \lambda_1 y :=0 \\ \Lambda'_y = \lambda_0 + \lambda_1 x :=0 \\ \lambda_0; \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_1(xy-n) = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то либо $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = (\lambda_0; \lambda_1) = 0$ - так нельзя

либо $x = y = 0 \Rightarrow$ неверно будет, что $xy \geq n \Rightarrow$ так тоже не бывает

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1$ - т.к ищем min.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda_1 y = 0 \\ 1+\lambda_1 x = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_1(xy-n) = 0 \end{cases}$$

Видим, что $\lambda_1 \neq 0$ - т.к иначе $1=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = -\frac{1}{\lambda_1} \\ \lambda_1 \geq 0 \\ xy = n \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{n}. \quad \Rightarrow x+y = 2\sqrt{n}.$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h^T \Gamma h = (h_1\ h_2)\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_2\lambda_1;\ h_1\lambda_1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1h_2 \cdot \lambda_1 = -2h_1^2 \cdot \lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{n}} h_1^2 \geq 0. \Rightarrow$ это минимум.

$\lambda_1 = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$

Усл. стац. напр: $f_1: x+y \Rightarrow df_1 = (1;1) \Rightarrow h_1 + h_2 = 0. \Rightarrow h_2 = -h_1$

$f_2: xy - n$

$\Rightarrow df_2 = (y; x) \Rightarrow \underset{\sqrt{n}}{y} \cdot h_1 + \underset{\sqrt{n}}{x} \cdot h_2 = 0$

$\Rightarrow h_2 = -h_1$

$\Rightarrow \chi(G) + \chi(\tilde{G}) \geq 2\sqrt{n}.$

почему $\chi(G) + \chi(\tilde{G}) \leq n+1$?

пусть $\chi(G)$ покрашен в k цветов,

хотим $\chi(\tilde{G})$ покрасить в $n+1-k$ цветов

Сделаем так: покрасим все вершины в свой цвет, но при этом какие-то k вершин придётся покрасить в один и тот же цвет. Будем эти k вершин искать среди таких, i-я вершина в G была покрашена в i-й цвет.

Вопрос: почему такие k вершин найдутся? т.е k разноцветных в G вершин, между никакими двумя из которых не было в G ребро (чтобы в $\tilde{G}$ ребра не было)?

Ну если бы это было не так, то есть в G в любом наборе из k разноцветных вершин отсутствует хотя бы одно ребро — то тогда $\chi(G) \leq k-1$ - т.к когда появляется k-й цвет? - когда мог берём текущую вершину и набор из $k-1$-й уже раскрашенной в разные цвета вершины, и из текущей вершины есть все рёбра в каждую (т.е там уже полный K_{k-1} граф)

из этих $k-1$ вершин $\Rightarrow$ приходится вводить k-й цвет. Доказали.

б) $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$n \leq \chi(G) \cdot \chi(\bar{G})$ – т.к $\chi(G) =$ кол-во строк в таблице

$\chi(\bar{G}) \geq$ кол-ва столбцов в таблице.

А площадь $\geq n$ – т.к все n вершин в таблице лежат

$\Rightarrow \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq$ площади $\geq n$.

Почему $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)$?

ну т.к из 2а: $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n+1$ – и получаем оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} xy \to max \\ x+y \leq n+1 \end{cases}$$

$$\Lambda(x,y) = \lambda_0(xy) + \lambda_1(x+y-n-1)$$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = \lambda_0 y + \lambda_1 := 0 \\ \Lambda'_y = \lambda_0 x + \lambda_1 := 0 \\ \lambda_0; \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_1(x+y-n-1) = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = (\lambda_0; \lambda_1) = \bar{0}$ – так нельзя

$\Rightarrow \lambda_0 := -1$ – т.к ищем max

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 \\ x = \lambda_1 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_1(x+y-n-1) = 0 \end{cases}$$

$\to$ если $\lambda_1 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ –

$\to$ если $x+y = n+1 \Rightarrow x = y = \frac{n+1}{2} \Rightarrow xy = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h^T \Gamma h = h_1 h_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-h_2; -h_1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -2h_1 h_2 = 2 \cdot h_1^2 \geq 0. \Rightarrow \text{это максимум.}$$

конус: $f_1 : xy \Rightarrow df_1 = (y; x)$
$f_2 : x+y-n-1 \quad df_2 = (1; 1)$
$\Rightarrow \begin{matrix} h_1 \cdot y + h_2 \cdot x = 0 \\ h_1 + h_2 = 0. \end{matrix} \Rightarrow h_2 = -h_1$

$\Rightarrow \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

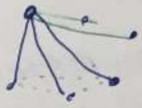
3. $R(m,n)$ – min число, при котором в $K_{R(m,n)}$ $\exists$ $\begin{cases} \text{либо } K_m \text{ – покр. в 1 цвет (т.е чёрный)} \\ \text{либо } K_n \text{ – покр. во 2 цвет. (т.е белый)} \end{cases}$

Док-во: $R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1)$.

Решение: $R(2,2) = 2$ – и вообще $R(2,n)=n$ – т.к либо все рёбра белые, => K_n – белый
либо есть хотя бы одно черное => K_2 – черный
$R(3,1) = 1$ – и вообще $R(1,n)=1$.

$R(3,2)=3$ – т.к либо все ~~...~~ рёбра черные, либо есть хотя бы одно белое.

=> $\underset{\shortparallel\, 3}{R(3,2)} \overset{?}{\le} \underset{\shortparallel\, 2}{R(2,2)} + \underset{\shortparallel\, 1}{R(3,1)}$ – верно.



=> база проверена. Сделаем шаг.
Он делается почти так же, как доказывается, что $R(3,3) \le 6$, т.е среди любых 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.
Она решается так: берём любую вершину. из неё выходит 5 рёбер
=> есть либо 3 белых, либо 3 черных.
Если 3 черных, то рассм. подграф из тех 3-х вершин, куда ведут эти черные ребра.
Если ~~среди них есть~~ между этими вершинами есть хотя бы 1 черное ребро => мы нашли черный Δ. Если все 3 ребра белые => вот белый Δ. Аналогично, если 3 белых ребра уходило.

В нашем случае: пусть для $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ – уже доказано.
Хотим для $R(m,n)$. Рассм. полный граф, полученный объединением $R(m,n-1)$ и $R(m-1,n)$ (где новые рёбра покрашены непонятно как, а старые – как в объединяемых графах)
из любой его вершины выходит ровно $R(m-1,n)+R(m,n-1)+1$ вершина => либо $\ge R(m-1,n)$ черных, либо $\ge R(m,n-1)$ белых
(т.к если черных $\le R(m-1,n)-1+\underset{\ge 0}{t}$, то $\ge (R(m-1,n)+R(m,n-1)+1)-(R(m-1,n)-1+t) = R(m,n-1)+\underset{\ge 0}{t} \ge R(m,n-1)$.
Если у нас $R(m-1,n)$ черных рёбер, то идём в полный подграф $K_{R(m-1,n)}$, образованный вершинами, куда идут эти черные ребра.
по предп. индукции там либо $\exists$ K_n – белый => всё доказано
либо $\exists$ K_{m-1} – чёрный – и мы добавим ещё исх. вершину с $R_{(m-1,n)}$ черным ребром, ведущим в каждую из этих $m-1$ – вершин
=> вот K_m – черный
Если у нас $R(m,n-1)$ белых рёбер, то идём в полный подграф $K_{R(m,n-1)}$, образованный вершинами, куда идут эти белые ребра
по предп. индукции: там либо $\exists$ K_m – черный => всё доказано
либо $\exists$ K_{n-1} – белый + мы ещё добавим исх. вершину с $R(m,n-1)$ белым ребром. ч.т.д.

4. Док-во: $R(m,n) \le C^{n-1}_{m+n-2}$.
База: $m=n=2$: $2 = R(2,2) \le C^1_2 = 2$ – верно.
Шаг: $C^a_b = C^a_{b-1} + C^{a-1}_{b-1}$
но $R(m,n) \le \underbrace{R(m-1,n)}_{\le C^{n-1}_{m+n-3}} + \underbrace{R(m,n-1)}_{\le C^{n-2}_{m+n-3}} \Rightarrow R(m,n) \le C^{n-1}_{m+n-3} + C^{n-2}_{m+n-3} = C^{n-1}_{m+n-2}$. ч.т.д.

5. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N}$: при покраске рёбер K_n в s цветов $\exists$ одноцветный подграф K_m.
Ну для $m=1$: $n = R(m,m)$ – по задаче 3
$m=2$: $n = R(m, R(m,m))$ – т.к либо $\exists K_{R_m}$ 1-го цвета, либо $K_{R(m,m)}$ покрашенный во 2 и 3 цвета
$m=3$: $n = R(m, R(m, R(m,m)))$ – т.е либо $\exists K_{R_m}$ 1-го цвета, либо 1 цвет убрался
и т.д. $\boxed{n(M) = R(M, n(M-1))}$