

Задачи на ряды

4 сентября 2022 г.

Признаки сходимости

Признаки сходимости для рядов с положительными членами.

Интегральный признак Коши: Пусть функция $f(x)$ — монотонно невозрастающая на $[1, +\infty]$. Тогда:

1. Если $0 \leq p_n \leq f(n), \forall n$, и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ также сходится;

2. Если $p_n \geq f(n) \geq 0, \forall n$, и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ расходится.

Признак Даламбера: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D,$$

то:

1. При $D < 1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$.
2. При $D > 1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.
3. При $D = 1$ признак ответа не дает.

Признак Коши: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = D,$$

то:

1. При $D < 1$ ряд сходится.
2. При $D > 1$ ряд расходится.
3. При $D = 1$ признак ответа не дает.

Признак сравнения: Пусть $a_n \geq 0, b_n \geq 0$. Если $a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся или расходятся одновременно (легко получить из критерия Коши).

Общие признаки сходимости рядов.

По идее, все признаки ниже можно использовать, добавляя к условиям мантру 'начиная с некоторого номера n_0 '.

Признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^{n-1},$$

где $b_n \geq 0$, сходится, если

1. $b_n \geq b_{n+1}$,
2. $b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Признак Абеля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

сходится, если

1. $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ сходится,
2. b_n образует монотонную и ограниченную последовательность.

Признак Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

сходится, если

1. суммы $A_N = \sum_{i=1}^N a_i$ ограничены в совокупности,
2. b_n монотонно стремится к нулю.

SER-1

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1).$$

Решение. Покажем, что общий член ряда не стремится к нулю

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2 + o(1)) = \ln 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Ответ: ряд расходится.

SER-2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

Решение.

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)-1}{n}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ответ: ряд расходится.

SER-3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3} \right)^{n^2}$$

Решение. Рассмотрим член ряда и вспомним второй замечательный предел:

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3} \right)^{n^2} = \left(1 - \frac{2}{2n^2+3} \right)^{n^2} \sim \left(\left(1 - \frac{2}{2n^2+3} \right)^{2n^2+3} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow (e^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}$$

Член ряда не стремится к нулю.

Ответ: ряд расходится.

SER-4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}.$$

Решение. Рассмотрим член ряда:

$$a_n = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n} = e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n}) - n}.$$

Рассмотрим степень (т.е. $\ln a_n$):

$$\begin{aligned} \ln a_n &= n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - n = n \left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1 \right) = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = -\frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$a_n \rightarrow e^{-\frac{1}{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Необходимый признак сходимости ряда нарушен.

Ответ: ряд расходится.

SER-5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$$

Решение:

$$a_n = \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!} = (2n+1) \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n)}{(n+1) \cdot \dots \cdot (3n)} \leq \frac{2n+1}{1.5^{2n}}$$

Мажорирующий ряд сходится (например, по признаку Даламбера).

Ответ: сходится.

SER-6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}.$$

Решение. Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot 3^n}{(n+1)! \cdot 3^{n+1} \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n 3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{3} < 1.$$

По признаку Д'Аламбера ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

SER-7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - (-1)^n)^n}{n^2 4^n}$$

Решение. Заметим, что n -тый член ряда положителен для любого $n \geq 1$.
Рассмотрим подряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - (-1)^{2k-1})^{2k-1}}{(2k-1)^2 4^{2k-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{2k-1}}{(2k-1)^2 4^{2k-1}}.$$

Исследуем его на сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6^{2k+1}}{(2k+1)^2 4^{2k+1}} \cdot \frac{(2k-1)^2 4^{2k-1}}{6^{2k-1}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{36}{16} \cdot \frac{(2k-1)^2}{(2k+1)^2} = \frac{36}{16} > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ расходится, а следовательно, и исходный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

SER-8

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

Решение.

$$3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} = 3^n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n^2} \sim 3^n e^{-\frac{n^2}{n+1}} \geq \left(\frac{3}{e} \right)^n.$$

При этом, $\frac{3}{e} > 1$.

Ответ: ряд расходится.

SER-9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - e \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Решение.

Покажем, что $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - e \leq \frac{e}{n}$ для любого натурального n . Это будет означать, что исходный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n} \right)^{\frac{3}{2}}$, а значит, сходится.

Итак,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - e \leq \frac{e}{n} \iff \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \leq e \left(1 + \frac{1}{n} \right) \iff \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e.$$

Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$. Таким образом остается показать, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ монотонно возрастает. Покажем же.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \geq 1 \\ &\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} \geq 1. \end{aligned}$$

P.S. Можно было вместо этого посчитать производную или, наверное, вообще сказать, что это «хорошо известный факт»

Ответ: ряд сходится.

SER-10

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

Решение.

Докажем, что ряд, начиная с $n=3$, расходится. Из этого будет следовать, что и исходный ряд тоже расходится.

¹По неравенству Бернулли

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^{\ln \ln x}}$. Заметим, что если $x_1 > x_2 > e$, то

$$\begin{aligned}(\ln \ln x_1)^2 &> (\ln \ln x_2)^2 \\(\ln x_1)^{\ln \ln x_1} &> (\ln x_2)^{\ln \ln x_2} \\ \frac{1}{(\ln x_1)^{\ln \ln x_1}} &< \frac{1}{(\ln x_2)^{\ln \ln x_2}}.\end{aligned}$$

Следовательно, $f(x)$ монотонно убывает на $[3, \infty]$. Кроме того,

$$p_n := \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = f(n) \geq 0, \forall n \geq 3.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int_3^\infty f(x) dx &= \int_3^\infty \frac{dx}{(\ln x)^{\ln \ln x}} = \int_3^\infty \frac{x d(\ln x)}{(\ln x)^{\ln \ln x}} = \int_{\ln 3}^\infty \frac{e^u du}{u^{\ln u}} = \int_{\ln 3}^\infty \frac{e^u du}{e^{\ln^2 u}} = \\&= \int_{\ln 3}^\infty e^{(u - \ln^2 u)} du > [u - \ln^2 u > \frac{u}{2} \quad \forall u > \alpha] > \int_\alpha^\infty e^{\frac{u}{2}} du = \\&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta e^{\frac{u}{2}} du = \lim_{\beta \rightarrow \infty} 2e^{\frac{u}{2}} \Big|_\alpha^\beta = \infty,\end{aligned}$$

то есть интеграл расходится. Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=3}^{+\infty} p_n$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

Решение покороче: Покажем, что $\frac{1}{\ln^{\ln \ln n}} > \frac{1}{n}$, тогда ряд будет расходиться.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln^{\ln \ln n}} > \frac{1}{n} &\Leftrightarrow n > \ln^{\ln \ln n} \\ \ln n &> (\ln \ln n)^2 \\ \sqrt{\ln n} &> \ln(\ln n) \\ \sqrt{x} &> \ln x, \text{ что верно при } x \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Ответ: расходится.

SER-11

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}$. Заметим, что если $x_1 > x_2 > 1$, то

$$\ln x_1 \ln \ln x_1 > \ln x_2 \ln \ln x_2$$

$$(\ln x_1)^{\ln x_1} > (\ln x_2)^{\ln x_2}$$

$$\frac{1}{(\ln x_1)^{\ln x_1}} < \frac{1}{(\ln x_2)^{\ln x_2}}.$$

Следовательно, $f(x)$ монотонно убывает на $[2, \infty]$. Кроме того,

$$p_n := \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = f(n) \geq 0, \forall n \geq 2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_2^\infty f(x) dx &= \int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}} = [u = \ln x] = \int_{\ln 2}^\infty \frac{e^u d(u)}{u^u} = \\ &= \int_{\ln 2}^{e^2} \frac{e^u d(u)}{u^u} + \int_{e^2}^\infty \frac{e^u d(u)}{u^u} < const + \int_{e^2}^\infty \frac{e^u d(u)}{e^{2u}}, \end{aligned}$$

поскольку при $u > e^2$ имеем:

$$u > e^2$$

$$u \ln u > 2u$$

$$u^u > e^{2u}.$$

Тогда

$$\int_2^\infty f(x) dx < const + \int_{e^2}^\infty \frac{d(u)}{e^u} = const - \frac{1}{e^u} \Big|_{e^2}^\infty = const,$$

т.е. интеграл сходится. Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} p_n = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

сходится.

Ответ: ряд сходится.

Решение покороче: Покажем, что $\frac{1}{\ln n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$, тогда ряд будет сходиться.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2} &\Leftrightarrow n^2 < (\ln n)^{\ln n} \\ 2 \ln n &< (\ln n)^2, \text{ успех} \end{aligned}$$

Ответ: сходится.

SER-12

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Она, очевидно, монотонно убывает на $[2, \infty]$. Кроме того, $p_n := \frac{1}{n \ln^2 n} = f(n) \geq 0, \forall n \geq 2$. Далее,

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

т.е. интеграл сходится.

Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится.

Ответ: ряд сходится.

SER-13

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Лейбница. Для этого нам надо понять, что (с какого-то момента) последовательность $\frac{\ln^{2020} n}{n}$ монотонно убывают к нулю. То, что убывает к нулю – это ясно, а посчитав производную функции $y = \frac{\ln^{2020} x}{x}$,

$$y' = \frac{2020 \ln^{2019} x - \ln^{2020} x}{x^2},$$

мы находим, что последовательность будет убывать при $n > e^{2020}$.

Ответ: сходится.

SER-14

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n}.$$

Решение.

Заметим, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{i=0}^n \cos 2n$ ограничена. Для этого выведем более общую формулу для $\sum_{i=0}^n \cos k\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 2\pi t$. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N e^{in\alpha} &= \frac{1 - e^{i(N+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\frac{(N+1)\alpha}{2}} e^{-i\frac{(N+1)\alpha}{2}} - e^{i\frac{(N+1)\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \\ e^{i\frac{N\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{(N+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} &= \left(\cos \frac{N\alpha}{2} + i \sin \frac{N\alpha}{2} \right) \frac{\sin \frac{(N+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Осталось взять вещественную часть.

$$\sum_{n=0}^N \cos n\alpha = \cos \frac{N\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(N+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

что показывает, что суммы S_n ограничены.

В то же время, $a_n = \frac{1}{\ln \ln n}$ монотонно сходится к нулю, поэтому можно применить признак Дирихле.

Ответ: сходится.

SER-15

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Лейбница. Для этого исследуем функцию

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}, \quad x > 0.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \ln x - e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{\ln^2 x} \left(\frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} \ln x - \frac{1}{x} \right) = \\ \underbrace{\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x \ln^2 x}}_{>0} &\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Т.к. $\ln^\alpha x = o(x)$, $x \rightarrow +\infty$ для $\forall \alpha > 0$, то для какого-то x_0 :

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \geq x_0.$$

Следовательно, для $n > [x_0] + 1$ верны условия признака Лейбница.

Ответ: сходится.

SER-16

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

Решение.

Напишем разложение Тейлора для общего члена ряда:

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + r_n,$$

где $r_n = o(n^{\frac{3}{2}})$ при $n \rightarrow \infty$.

Ряды $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}$ сходятся по признаку Лейбница.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} r_n$ сходится, поскольку $r_n = o(n^{\frac{3}{2}})$ при $n \rightarrow \infty$ и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{3}{2}}$ сходится.

А вот ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n} \right)$ расходится. Таким образом, исходный ряд, будучи суммой сходящегося и расходящегося рядов, расходится.

Ответ: ряд расходится.

SER-17

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}.$$

Решение.

Воспользуемся критерием Коши и рассмотрим отрезок ряда.

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=2n}^{4n+1} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k}{k} \right| &= \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{3}{2k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1} \right| = \\
 \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1} \right| &= \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k(2k+1)} \right| \geq \\
 \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \right| - \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k(2k+1)} \right| &\geq \frac{1}{2} - \left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k(2k+1)} \right|.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} < \infty,$$

значит, по критерию Коши, можно подобрать N : $\forall n \geq N$:

$$\left| \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k(2k+1)} \right| < \varepsilon.$$

Для таких n получаем в (1)

$$\left| \sum_{k=2n}^{4n+1} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k}{k} \right| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Критерий Коши не выполняется.

P.S. Можно просто написать равенство

$$\sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k+1)}.$$

Отсюда сразу видно, что ряд расходится, как 'сумма' расходящегося и сходящегося ряда.

Ответ: ряд расходится.

SER-18

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2} (-1)^{n+1}}{n!}.$$

Решение. Рассмотрим члены ряда a_n с номерами $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{2^{n_k^2}}{n_k!} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{(2^{n_k})^{n_k}}{n_k!} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{2^{n_k} \cdot 2^{n_k} \cdot \dots \cdot 2^{n_k}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n_k} = \infty.$$

Поэтому необходимый признак сходимости уже точно не выполняется.

Ответ: ряд расходится.

SER-19

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}.$$

Решение. Пусть

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \cos \frac{\pi}{n}.$$

Тогда ряд $\sum_{i=1}^n a_n$ сходится (по признаку Лейбница), а b_n монотонно возрастает (начиная с $n = 2$) и ограничена.

Осталось применить признак Абеля.

Ответ: ряд сходится.

SER-20

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}$$

Решение. Функция косинуса монотонна на интервале $(0, 1)$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = 1$,

поэтому последовательность $\sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}$ монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Т.к. ряд является знакочередующимся, то получаем, что он сходится по признаку Лейбница.

Покажем, что ряд абсолютно расходится. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Таким образом, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}$ равносильна сходимости гармонического ряда, но тот расходится.

Ответ: ряд сходится условно.