Контрольная работа 2

Задача 1. Пусть $u(x) = 0$ при $x \le 0$ и $u(x) = ax + x^2$. Найдите $J^{2,+}u(0)$ для всех a.

Задача 2. Докажите, что u является вязкостным решением уравнения $|Du(x)| = f(x)$ тогда и только тогда, когда $v = -e^{-u}$ является вязкостным решением уравнения

$$|Dv(x)| + v(x)f(x) = 0.$$

Задача 3. Покажите, что для каждого $t \in [0,1]$ функция $u_t(x) = 1 - x^2$ при $-1 \le x < -t$, $u_t(x) = x^2 - 1 + 2(1 - t^2)$ при $|x| < t$ и $u_t(x) = 1 - x^2$ при $t < x \le 1$ является вязкостным решением уравнения $|u'(x)| - 2|x| = 0$ на $(-1, 1)$ с граничными условиями $u(-1) = u(1) = 0$.

Задача 4. Пусть $A(x)$ – матрица $n \times n$ и $|A(x) - A(y)| \le L|x - y|$. Пусть f — липшицева функция. Докажите, что на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задача Дирихле для уравнения

$$u + \big|A(x)Du(x)\big|^2 - f(x) = 0$$

имеет не более одного вязкостного решения $u \in C(\overline{\Omega})$.

Задача 5. Пусть Ω — ограниченная область, $f \in C(\overline{\Omega})$, $f > 0$. Покажите, что метод Перрона применим к задаче Дирихле $|Du| = f$ на Ω и $u = 0$ на $\partial\Omega$. Сравните результат с примером из задачи 3.

Задача 6. Выполняется ли структурное условие (втрое условие в теореме о принципе сравнения) для операторов

$$\Delta_\infty u = \frac{1}{|Du|^2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} u_{x_i} u_{x_j}$$

и

$$\Delta_p u = -|Du|^{p-2}\big(\Delta u + (p-2)\langle D^2 u \tfrac{Du}{|Du|}, \tfrac{Du}{|Du|}\rangle\big), \quad p > 2.$$

Задача 7. Предположим, что

$$|H(x,p) - H(y,p)| \le C_1|x - y|(1 + |p|), \quad |H(x,p) - H(x,q)| \le C_2|p - q|.$$

Докажите, что для ограниченных вязкостных субрешения u и суперрешения v уравнения

$$u + H(x, Du) = 0$$

на $\mathbb{R}^n$ верно неравенство $u \le v$.

Надо решить любые три задачи и прислать решения до 11 декабря!