(11) Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.

Напоминание! (формулировка формулы Грина)

$D \subset \mathbb{R}^2$, D - огран., $\partial D = \bigcup\limits_{i=1} \Gamma_i$,

где Γ_i - кус.-гладкие

$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$, $i \neq j$

Пусть $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\overline{D}) \Rightarrow$

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

∂D^+ ← при обходе область должна оставаться слева

Формула Стокса

Пусть Φ - простая пов-ть, т.е. $\Phi = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \overline{D}$

$x, y, z \in C(\overline{D})$

причём 1) D - огр. область

∂D - простой кус-гладкий контур

← без самопересеч., искл. замкнутый контур ← 1 самоп.

2) $x, y, z \in C^1(\overline{D})$

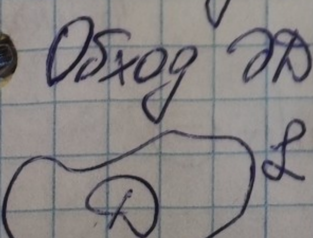
3) отобр. $F: (u,v) \in D \to F(u,v) = (x,y,z)$ - биекция без особых точек: $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2$ (т.е. $r'_u \nparallel r'_v$)

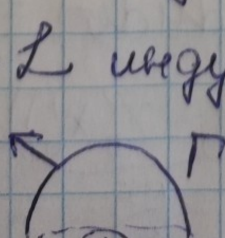
Пусть с краем усл. 3 выполнено в $\overline{D}$, а в D

Тогда (край Φ) $:= \{\vec{r} = \vec{r}(u,v) \mid u, v \in \partial D\}$

∂D - кусочно-гладкая $\Rightarrow$ (край Φ) $=: \Gamma$ - кус-гладкий

Обход $\partial D =: L$ индуцирует соответств. обход Γ





Ориентация края Γ назыв. согласованной с ориент. Φ (сторона пов-ти → нормаль) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ (∂D индуцирует соотв. обход Γ) $\wedge$ (выбирается $\vec{n} = +\frac{r_u' \times r_v'}{|r_u' \times r_v'|}$) $\leftarrow$ правило штопора (правой руки)

Теорема 1 (формула Стокса):

$\forall$ задана простая пов-ть $\Phi \subset G$ без особых точек, с краем для Φ выполнено 1), 2) и 3) - в $\overline{D}$, G-область ∂D - гладкая, $x, y, z \in C^2(\overline{D})$; $P, Q, R \in C^1(G)$ в $\mathbb{R}^3$

Тогда если ориентация Γ согласована с ориент. Φ то верна ф-ла:

$$\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_\Phi \left((Q_x' - P_y')\cos\gamma + (P_z' - R_x')\cos\beta + (R_y' - Q_z')\cos\alpha \right) d\sigma$$

или $\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_\Phi (\mathrm{rot}\, a, n) ds$

где $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\mathrm{rot}\, a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$\blacktriangleright$ Дост. док-ть $\int_\Gamma P dx = \iint_\Phi (P_z' \cos\beta - P_y' \cos\gamma) d\sigma$

Кривая $L = \partial D = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ $t_0 \leq t \leq T \Rightarrow \Gamma = \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$

Имеем: $\int_\Gamma P dx = \int_{t_0}^T P x_t' dt = \int_{t_0}^T P(x_u' \cdot u_t' + x_v' \cdot v_t') dt =$

$= \int_L P x_u' du + P x_v' dv \overset{\text{ф-ла Грина}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}(P x_v') - \frac{\partial}{\partial v}(P x_u') \right) du dv =$

$= \iint_D \Big((\cancel{P_x' x_u'} + P_y' y_u' + P_z' z_u') x_v' + \underbrace{P x_{vu}'' - P x_{uv}''}_{\text{т.к. } C^2 \Rightarrow \text{смешанные производные равны (т. Шварца)}} -$

$- (\cancel{P_x' x_v'} + P_y' y_v' + P_z' z_v') x_u' \Big) du dv =$

$= \iint_D \Big(P_y' \underbrace{(y_u' x_v' - y_v' x_u')}_{= -C} + P_z' \underbrace{(z_u' x_v' - z_v' x_u')}_{= B} \Big) du dv \,=$

$\stackrel{①}{=} \iint\limits_{D} \left(-P'_y C/|r'_u \times r'_v| + P'_z B/|r'_u \times r'_v|\right) \underbrace{|r'_u \times r'_v| \, du \, dv}_{= d\sigma} =$

$= \iint\limits_{\Phi} (-P'_y \cos\gamma + P'_z \cos\beta) d\sigma$

пояснение: $r'_u \times r'_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \overset{\text{обозначение}}{=:} (A, B, C) =$

$= (y'_u z'_v - y'_v z'_u, \; z'_u x'_v - z'_v x'_u, \; x'_u y'_v - x'_v y'_u)$. ◀

Зам.: 1. Ф-ла Стокса верна для $x, y, z \in C^1(\overline{D})$

▷ X ◀

2. Верно для кусочно-гладких пов-тей

3. Ф-ла Стокса м.б. переписана в виде: $\exists F = (P, Q, R)$

$\underbrace{\oint\limits_{\Gamma} (F, d\vec{r})}_{\text{циркуляция вектора } \vec{F} \text{ по контуру } \Gamma} = \underbrace{\iint\limits_{\Phi} (\text{rot}\, F, \vec{n}) d\sigma}_{\text{поток вихря поля } F}$

Формула Гаусса - Остроградского

Опр. Область G простая относительно $Oz \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$G = \{\varphi_1(x,y) < z < \varphi_2(x,y), \; (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \; \varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)\}$

Опр. $\exists G \subset \mathbb{R}^3$. G - допустима $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 1) G м.б. разрезана на конечное число обл. G_z^k, $k = \overline{1, N_z}$ / простые отн-но Oz

2) — // — Ox и 3) — // — Oy

Разрезана?: D м.б. разрезана на кон. число простых обл. D_m, $1 \le m \le M$:

1) $\bigcup\limits_1^M D_m \subset D$; 2) $\bigcup\limits_1^M \overline{D}_m = D$; 3) $D_m \cap D_k \overset{m \ne k}{=} \varnothing$;

4) $\partial D_m \cap \partial D_k \cap \partial D = \varnothing$ или точка или промежуток

Теорема 2 (формула Гаусса–Остроградского):

Пусть $G\subset\mathbb{R}^3$, G – допустима. $P,Q,R\in C^1(\overline{G})$ ← на границе предел по ∀-ому направл.

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Phi=\partial G}(P\underbrace{\cos\alpha}+Q\underbrace{\cos\beta}_{\text{направл. косинусы } \vec n}+R\underbrace{\cos\gamma})\,d\sigma=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

где $\vec n$ – внешняя отн-но G

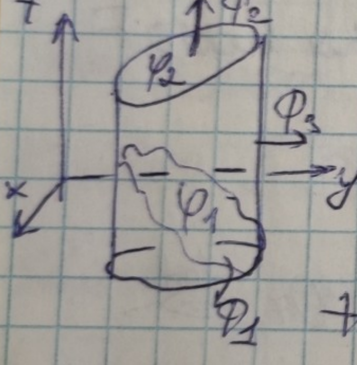
□ Достаточно док-ть ф-лу $\iint\limits_{\partial G}R\cos\gamma\,d\sigma=\iiint\limits_G\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$

G – простая отн Oz

Имеем: 1. $\iiint\limits_G\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\overset{\text{Фубини для цилиндра}}{=}\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz=$

$=\iint\limits_D\big(R(x,y,\varphi_2(x,y))-R(x,y,\varphi_1(x,y))\big)\,dx\,dy$

2. $\iint\limits_{\partial G}R\cos\gamma\,d\sigma=\left|\begin{array}{l} r=(x,y,z)\\ r_x=(1,0,z'_x)\\ r_y=(0,1,z'_y)\\ r'_x\times r'_y=(-z'_x,-z'_y,1)\end{array}\right|=\iint\limits_{\Phi_1\cup\Phi_2\cup\Phi_3}\dots=$



$=\iint\limits_{\Phi_1\to D\ni(x,y)}R(x,y,\varphi_1(x,y))\cdot\frac{-1}{|r'_x\times r'_y|}\underbrace{|\dots|\,dx\,dy}_{d\sigma}+$

внешняя нормаль

$+\iint\limits_{\Phi_2}R(x,y,\varphi_2(x,y))\cdot\frac{1}{|\dots|}|\times\dots|\,dx\,dy+\iint\limits_{\Phi_3}R\underbrace{\cos\gamma}_{=0}\,d\sigma=$

$=\iint\limits_D\big(R(x,y,\varphi_2(x,y))-R(x,y,\varphi_1(x,y))\big)\,dx\,dy$ т.к. $\vec n$ к $\Phi_3\perp Oz$

Зам: 1) Ф-ла Г-О верна для огр. обл G с кус-гл. ∂G

2) Ф-ла Г-О м.б. записана в виде: Пусть $F=(P,Q,R)$

$$\iint\limits_{\Phi=\partial G}(F,\vec n)\,d\sigma=\iiint\limits_G \operatorname{div}F\,dx\,dy\,dz$$

внешняя нормаль к G

поток в-ра F через площадку Φ по направлению $\vec n$