Задача Найти матожидание числа бросков кубика до того момента, когда сумма выпавших очков станет ~~[illegible]~~ не меньше n.

Решение: а) Пусть f_n – число бросков, которое пришлось сделать для того, чтобы сумма очков стала не меньше n.

По формуле полной вер-ти: $Ef_n = 1+\frac{1}{6}(Ef_{n-1}+Ef_{n-2}+Ef_{n-3}+Ef_{n-4}+Ef_{n-5}+Ef_{n-6})$

обозн. $F_n := Ef_n$

$$\Rightarrow \boxed{F_n = 1+\frac{1}{6}(F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}+F_{n-4}+F_{n-5}+F_{n-6})};$$

очевидно, что $F_0=0$; $F_k=0$ при $k<0$, $F_1=1$.

Чтобы запустить эту рекуррентную ф-лу, надо положить $F_k=0$, $k\le 0$.

Теперь получим более простую ф-лу:

$$\begin{cases} F_n = 1+\frac{1}{6}(F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}+F_{n-4}+F_{n-5}+F_{n-6}) \\ F_{n-1} = 1+\frac{1}{6}(F_{n-2}+F_{n-3}+F_{n-4}+F_{n-5}+F_{n-6}+F_{n-7}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_n - F_{n-1} = \frac{1}{6}(F_{n-1}-F_{n-7}) \Rightarrow \boxed{F_n = \frac{7}{6}F_{n-1}-\frac{1}{6}F_{n-7}} \ (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{6F_n - 7F_{n-1}+F_{n-7}=0}$$; $F_0=0$; $F_1=1$; для $n\ge 2$ берём эту ф-лу

Это конечноразностное ур-е, его надо решать через хар. ур-е:

$F_n := \lambda^n$ ← ищем решение в таком виде.

$\Rightarrow 6\lambda^n - 7\lambda^{n-1}+\lambda^{n-7}=0.$

$6\lambda^7-7\lambda^6+1=0.$

б) $\lambda=1$ - корень кратности 2, ещё 5 корней $\lambda_2 \dots \lambda_6$ $\Rightarrow F_n = C_1 + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n + C_4\lambda_4^n + C_5\lambda_5^n + C_6\lambda_6^n$;

и шесть нач. условий: $F_1 \dots F_6$ мы знаем.

Вообще интуитивно F_n должно расти как арифм. прогрессия с разностью $\frac{2}{7}$ – т.к. МО числа очков $=3.5$ $\Rightarrow$ нужно в среднем 2 броска, чтобы увеличить число точек на семь $\Rightarrow$ $F_n \approx n\cdot\frac{2}{7}$

в) В питоне считаем по рекуррентной ф-ле (*)

пусть $F_n \sim C\cdot n^p$

$\ln F_n \sim \ln C + p\ln n \Rightarrow p = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ – нашли, пропорционально какой степени n растёт F_n.