## 18.09.18. Мат. анализ. Лекция 4.

**Зам.** $a_n \geq 0$; $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Тогда признак Коши <u>не</u> даёт ответа на вопрос о том, сходится ряд или расходится.

Например, $\boxed{a_n = \frac{1}{n \ln^{\alpha} n};\ n \geq 2 \ <\begin{matrix}\text{сходится, если } \alpha > 1 \\ \text{расходится, если } \alpha \leq 1.\end{matrix}}$

При этом $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{n \cdot \ln^{\alpha} n}\right)^{1/n} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n \cdot \ln^{\alpha} n)} \xrightarrow{(*)} e^{0} = 1$ — при любом $\alpha$.

(*) Докажем, что $\frac{1}{n}\ln(n \cdot \ln^{\alpha} n) \to 0$.

Действительно: $c_1 n \leq n \ln^{\alpha} n \leq c_2 \cdot n^2$ при $\alpha > 0$ (а при $\alpha \leq 0$ ряд $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\alpha} n}$ сразу расходится, т.к. $\frac{1}{n \ln^{\alpha} n} > \frac{1}{n}$, и мы до сюда не доходим)

$\Rightarrow \ln(c_1 n) \leq \ln(n \ln^{\alpha} n) \leq \ln(c_2 n^2)$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}\ln(c_1 n)}_{\to 0} \leq \frac{1}{n}\ln(n \ln^{\alpha} n) \leq \underbrace{\frac{1}{n}\ln(c_2 n^2)}_{\to 0}$

$\Rightarrow$ по принципу двух милиционеров $\frac{1}{n}\ln(n \ln^{\alpha} n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, мы выяснили, что $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ может быть выполнено как для сходящегося ряда, так и для расходящегося. Ответа не даёт в этом случае ~~критерий~~ признак Коши. Надо применять Гаусса.

**Пример 1** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}}$ — сходится.

$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n} = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)}$ **!** нельзя дальше писать, что это $\sim e^{-1}$, т.к. только в произведении можно заменять на эквивалентную, а в сложной функции — нельзя.

Надо так: $n \ln\left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \sim n\left(-\frac{1}{n+3}\right) \to -1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$ — мы сделали такой вывод по <u>непрерывности экспоненты</u>.

Итак, $a_n^{1/n} \to e^{-1} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Коши.

**Формула Стирлинга**: $\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n}}$

**Зам.** $\alpha_n; \beta_n \geq 0$; $\alpha_n \sim \beta_n$ при $n \to \infty$, т.е. если $\beta_n \neq 0$, то $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$.

Тогда: 1) $\alpha_n^{1/2} \sim \beta_n^{1/2}$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\alpha_n}{\beta_n}} = \sqrt{1} = 1$.

2) $\alpha_n^{1/n} \sim \beta_n^{1/n}$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln \frac{\alpha_n}{\beta_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln 1} = e^{0} = 1$.

**Пример 2** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}}$ — расходится

Имеем: $a_n^{1/n} = \frac{(n!)^{1/n}}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \overset{\text{ф-ла Стирлинга}}{\sim} \frac{\frac{n}{e}\underbrace{(2\pi n)^{1/2n}}_{\to 1}}{\underbrace{n^{1/\sqrt{n}}}_{\to 1}} \sim \frac{n}{e} \to +\infty \Rightarrow \sum a_n$ расх. по признаку Коши.

### Пункт 5. Интегральный признак Коши

**Напоминание** (аналог теоремы Вейерштрасса для функций)

**Теорема** Пусть $f: [1; +\infty) \to \mathbb{R}$; $f \uparrow$ (т.е. $f$ монотонно возрастает).

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \iff f$ ограничена сверху (снизу она и так ограничена, т.к. она монотонно возрастает).

**Теорема** (интегральный признак Коши)

Пусть $f: [1;+\infty) \to \mathbb{R}$, причём:
- $f \in C[1;+\infty)$
- $f \geq 0$ на $[1;+\infty)$
- $f \downarrow$ на $[1;+\infty)$.

Обозн. $a_n := f(n)$; $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится $\iff \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

▶ ① Докажем н-ва:

$$\boxed{a_2 + \ldots + a_n \leq \int\limits_1^n f(x)dx \leq a_1 + \ldots + a_{n-1} \quad (1).}$$

Действительно:

Пусть $x \geq 1$. Тогда $\exists p \in \mathbb{N} \,/\, p \leq x \leq p+1$.

Но $f\downarrow \Rightarrow \underset{a_{p+1}}{\underset{\parallel}{f(p+1)}} \leq f(x) \leq \underset{a_p}{\underset{\parallel}{f(p)}} \Rightarrow a_{p+1} \leq f(x) \leq a_p \quad (2)$

Имеем: $\sum\limits_{p=1}^{n-1} \int\limits_p^{p+1} a_{p+1}\,dx \overset{\text{см.}(2)}{\leq} \int\limits_1^n f(x)dx = \left(\int\limits_1^2 + \ldots + \int\limits_{n-1}^n\right) f(x)dx = \sum\limits_{p=1}^{n-1} \int\limits_p^{p+1} f(x)dx \overset{\text{см.}(2)}{\leq} \sum\limits_{p=1}^{n-1} \int\limits_p^{p+1} a_p\,dx$

Т.е. $\sum\limits_{p=1}^{n-1} a_{p+1}\underbrace{(p+1-p)}_{=1} \leq \int\limits_1^n f(x)dx \leq \sum\limits_{p=1}^{n-1} a_p \underbrace{(p+1-p)}_{=1} \Rightarrow$ (1) доказано.

② ($\Rightarrow$) Пусть $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится $\overset{(\kappa S)}{\Rightarrow}$ посл-ть $\overbrace{\{S_n; n\in\mathbb{N}\}}^{\text{част. сумм}}$ ограничена по критерию сходимости знакоположительных рядов, а именно: $S_n \leq S := \sum\limits_1^\infty a_n$

Надо док-ть, что $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x f(y)dy \in \mathbb{R}$.

Пусть $F(x) := \int\limits_1^x f(y)dy$.

Тогда:
- $F: [1;+\infty) \to \mathbb{R}$ (так корректно писать, т.к. она определена на $[1;+\infty)$, хотя непонятно, сходится ли интеграл, ведь $\forall x \geq 1$ $f$ непрерывна, определена, поэтому обеспечивает интеграл Римана (н.у. с переменным верхним пределом)).
- $F\uparrow$ (т.к. $f \geq 0$, и интегральная сумма увеличивается, т.к. подынтегральная функция $\geq 0$)

Докажем, что $F$ ограничена сверху.

Имеем: $0 \leq F(x) \leq \int\limits_1^n f(y)dy$, если $x \leq n$.

Но мы доказали, что $\int\limits_1^n f(y)dy \leq \sum\limits_{p=1}^{n-1} a_p = a_1 + \ldots + a_{n-1}$

$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \sum\limits_{p=1}^{n-1} a_p = a_1 + \ldots + a_{n-1} = S_{n-1} \leq S$, $\forall x \geq 1$.

Итак, F-ограничена (сверху), причём $F\uparrow$ $\Rightarrow$ по теореме-напоминанию $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(y)dy$ сходится по опр.

③ $\Leftarrow$ Пусть $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. $\overset{\text{по опр.}}{\Rightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\in\mathbb{R}$.

Но $F\uparrow$ $\Rightarrow$ по теореме-напоминанию F ограничена сверху

$\Rightarrow$ посл-ть $(F(n);n\in\mathbb{N})$ ограничена. (т.е. $\exists \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} F(n) =: M$)

$\Rightarrow S_n = a_1+\ldots+a_n = a_1+(a_2+\ldots+a_n) \le a_1+\int_1^n f(y)dy = a_1+F(n) \le$

$\le a_1+\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} F(n) =: M \ \forall n$.

$\Rightarrow$ посл-ть $(S_n;n\in\mathbb{N})$ ограничена (числом M) $\overset{\text{критерий сходимости знакоположительных рядов}}{\Longrightarrow}$ $\sum_1^\infty a_n$ сходится.

Зам. Достаточно рассматривать $f:[A;+\infty)$; $A\ge 1$. (ведь ряд можно начать складывать с A, а не с единицы, т.к. конечное число членов ряда не влияют на факт сходимости/расходимости).

Следствия ① В условиях теоремы об интегральном признаке Коши ряд $\sum_1^\infty a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся/расходятся одновременно.

Про сходимость утверждает сама теорема.
Про расходимость: пусть $\sum_1^\infty a_n$ расх $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ расх, т.к. если бы он сходился, то по теореме $\sum_1^\infty a_n$ тоже бы сходился. И наоборот: пусть $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ расходится, т.к. если бы он сходился, то по теореме $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ тоже бы сходился.

② „Модельный ряд" $\boxed{\sum_1^\infty \frac{1}{n^p};\ p\in\mathbb{R}}$ — сход. при $p>1$, расход. при $p\le 1$.

а) $p\le 0 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ — расх, т.к. не выполнен необх. признак.

б) $p>0$. Рассмотрим функцию $f(x) := \frac{1}{x^p}$; $x\ge 1$.

Тогда:
- $f:[1;+\infty)\to\mathbb{R}$
- $f\in C[1;+\infty)$
- $f\ge 0$ на $[1;+\infty)$
- $f\downarrow$

$\Rightarrow$ все условия теоремы об интегральном признаке Коши выполнены.
Рассмотрим несобств. интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.
Про него мы уже доказали (прямым интегрированием), что он $\begin{cases}\text{сход. при } p>1\\ \text{расход. при } p\le 1\end{cases}$ $\overset{\text{по теореме об интегр. признаке Коши}}{\Longrightarrow}$ $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}\text{сход. при } p>1\\ \text{расход. при } p\le 1.\end{cases}$

Пример. $\boxed{\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln^\alpha n}}$ — сход. при $\alpha>1$, расход при $\alpha\le 1$.

(мы рассматриваем только $\alpha>0$, т.к. если $\alpha\le 0$, то $\frac{1}{n\ln^\alpha n}\ge\frac{1}{n}$, и ряд $\sum\frac{1}{n\ln^\alpha n}$ сразу расходится)

Пример. Рассмотрим $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$ (проверив, что выполнены условия теорем об интегральном признаке Коши).

Хочется написать так: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, но нехорошо делать замену в том, что неизвестно, существует ли.

Надо так написать: $\int_2^A \frac{dx}{x\ln^\alpha x} = \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dy}{y^\alpha} =: F(A)$

замена: $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$

$\exists \lim\limits_{A\to\infty} F(A) \Leftrightarrow \alpha > 1$. $\Rightarrow \sum\limits_2^\infty \frac{1}{n\ln^\alpha n}$ сход. при $\alpha > 1$, расход. при $\alpha \le 1$.

Пример. $\boxed{\sum\limits_2^\infty \frac{1}{n^p \cdot \ln^\alpha n}}$
- $p > 1 \Rightarrow$ сход. (т.к. $n$ забьёт логарифм)
- $p < 1 \Rightarrow$ расход (т.к. $n$ будет в числителе)
- $p = 1 \Rightarrow$ сход. при $\alpha > 1$, расход. при $\alpha \le 1$ — выяснили сейчас

## Параграф 3. Знакопеременные ряды.

### Пункт 1. Абсолютная и условная сходимость.

В этом параграфе рассматриваем знакопеременные (не обязательно знакочередующиеся, а просто не знакопостоянные) ряды $\sum a_n$, где знак $a_n$ зависит (вообще говоря) от $n$, а также комплексные ряды $a_n \in \mathbb{C}$.

**Зам.** Для рядов $\sum a_n$ общего вида (знакопеременных или $a_n \in \mathbb{C}$) справедливы необходимое условие сходимости ряда и критерий Коши.

**Опр.** 1) Ряд $\sum a_n$ **сходится абсолютно** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum |a_n|$ сходится

2) Ряд $\sum a_n$ **сходится условно** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum a_n$ сходится и $\sum |a_n|$ расходится

**Зам.** Если $\sum |a_n|$ сходится, то $\sum a_n$ сходится. Обратно — неверно.

Пример ② $\boxed{\sum_1^\infty \frac{\ln^\alpha n}{n^p};\ p>1;\ \alpha>0}$ — исследовать на сходимость.

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится по интегральному признаку (т.к. $p>1$)

А $\ln^\alpha n$ можно загасить, отщипнув $n^\varepsilon$:
пусть $\varepsilon>0$ такое, что $p-\varepsilon>1$. Тогда $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}$ всё равно сходится.

Имеем: $0<\frac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon}\leq M,\ \forall n\geq 2$ (т.к. лог < степ < показ)

В самом деле, посл-ть $\left(\frac{\ln^\alpha n}{n^\varepsilon};\ n\geq 2\right)$ — сходящаяся посл-ть.
А сходящаяся посл-ть — ограничена (каким-то числом $M$)

В итоге: $a_n=\frac{\ln^\alpha n}{n^p}\leq\frac{M}{n^{p-\varepsilon}}$, но $\sum_1^\infty\frac{M}{n^{p-\varepsilon}}$ — сходится
$\Rightarrow$ по мажорантному признаку $\sum_1^\infty\frac{\ln^\alpha n}{n^p}$ — тоже сходится.

**Теорема 2 (предельный признак сравнения)**

$a_n; b_n>0;\ n\in\mathbb{N};\ a_n\sim b_n$ при $n\to\infty$.
Тогда ряды $\sum_1^\infty a_n$ и $\sum_1^\infty b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

▶ Предварительно заметим, что ряды $\sum a_n$ и $\sum M\cdot a_n$, где $M\neq 0$, $M\in\mathbb{R}$ сходятся или расходятся одновременно (по теореме, что если $\sum a_n$ сходится, то $\sum \lambda a_n$ сходится).

Ещё вспомним: $a_n\sim b_n$, при $n\to\infty\Rightarrow a_n=h_n\cdot b_n$, где $h_n\xrightarrow[\text{при } n\to\infty]{}1$

У нас по усл. $b_n\neq 0$, то. $\frac{a_n}{b_n}\to 1$, при $n\to\infty$.

Т.е $\frac{a_n}{b_n}$ — сходящаяся посл-ть, $\Rightarrow$ она ограничена.

$\Rightarrow\exists M>0 /\ 0<\frac{a_n}{b_n}\leq M.\ \Leftrightarrow a_n\leq M b_n$

а) $\sum b_n$ сходится $\overset{\text{по теореме 1}}{\Rightarrow}\sum a_n$ сходится
(если у нас $\sum a_n$ сходится, а мы хотим про $\sum b_n$,
то $a_n\sim b_n\Rightarrow b_n\sim a_n\Rightarrow\frac{b_n}{a_n}\to 1\Rightarrow\frac{b_n}{a_n}\leq M\Rightarrow b_n\leq M\cdot a_n$).

б) $\sum a_n$ расходится $\overset{\text{по теореме 1}}{\Rightarrow}\sum b_n$ расходится
(если $\sum b_n$ расходится, а мы хотим про $\sum a_n$, то
$a_n\sim b_n\Rightarrow b_n\sim a_n\Rightarrow\frac{b_n}{a_n}\to 1\Rightarrow\frac{b_n}{a_n}\leq M\Rightarrow b_n\leq M\cdot a_n$)

**Примеры** ① $\boxed{\sum_1^\infty\frac{1}{2^n+n^{10}+\sqrt{n}}}$ — сходится

$a_n\sim\left(\frac{1}{2}\right)^n$; но $\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится (т.к. геом. прогрессия, и $\frac{1}{2}<1$)
$\Rightarrow$ по предельному признаку сравнения $\sum a_n$ сходится.

② $\boxed{\sum_{n=1}^\infty\frac{n^2+n}{\sqrt{9n^6+n^5+n}}}$ — расходится.

$a_n\sim\frac{n^2}{3n^3}=\frac{1}{3n}$. но $\sum_1^\infty\frac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow\sum a_n$ — тоже расходится.

(3.) $\boxed{\sum_1^\infty \frac{e^n+n^{100}+1}{3^n+\ln n}}$ — сходится.

$a_n \sim \left(\frac{e}{3}\right)^n$; но $\left(\frac{e}{3}\right)<1 \Rightarrow \sum_1^\infty \left(\frac{e}{3}\right)^n$ сходится $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ тоже сходится.

## Пункт 3. Признак Даламбера

**Лемма** $a_n; b_n>0; n\in N$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}; n\in N$ (1)

Тогда: $\begin{cases} \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \sum a_n \text{ сходится} \\ \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum b_n \text{ расходится.} \end{cases}$

◄ (1) $\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \ge \frac{b_n}{b_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \ge \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}; n\in N \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ – монотонно убывающая посл-ть.

$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \le \frac{a_1}{b_1} =: M; M\ne 0$ (т.к. $a_1$ и $b_1>0$)

$\Rightarrow a_n \le M\cdot b_n \ \forall n\in N \overset{\text{по теореме 1}}{\Rightarrow} \begin{cases} \sum b_n \text{ сходится} \Rightarrow \sum a_n \text{ сходится} \\ \sum a_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum b_n \text{ расходится.} \end{cases}$ ►

**Теорема 1 (признак Даламбера)**

$a_n>0, n\in N$ (или хотя бы с некот. номера, т.к. конечное число членов ряда не влияет на сходимость/расходимость)

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $0\le q\le\infty$ (2)

Тогда: $\begin{cases} \sum_1^\infty a_n \text{ сходится, если } q<1 \\ \sum_1^\infty a_n \text{ расходится, если } q>1 \\ \text{если } q=1, \text{ то } \sum_1^\infty a_n \text{ может как сходиться, так и расходиться.} \end{cases}$

◄ а) $0\le q<1$. Пусть $r\in(q;1)$ – фиксируем такое $r$.

Тогда $\sum_1^\infty r^n$ сходится (т.к. геом. прогрессия, и $r<1$.)

Но $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} q<r \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r, n\ge n_0$ (т.к. в 1 семестре выясняли, что второе н-во повторит члены посл-ти)

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}, \forall n\ge n_0$.

Но $\sum_1^\infty r^n$ сходится $\overset{\text{по лемме}}{\Rightarrow} \sum_{n_0}^\infty a_n$ сходится $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ сходится.

б) $q>1$. Имеем: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \overset{\text{по св-ву посл-ти}}{\Rightarrow} \frac{a_{n+1}}{a_n}>1, \forall n\ge n_0$. (т.к. конечное число членов не влияют на сход/расход).

Или так только для $\ge$? Нет только для $>$!

$\Rightarrow a_{n+1}>a_n; \forall n\ge n_0 \Rightarrow$ посл-ть $a_n \uparrow, \forall n\ge n_0$.

$\Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ нарушен необходимый признак сходимости.

$\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ – расходится. ►

**Пример.** $(2n)!! := 2\cdot4\cdot\ldots\cdot 2n$

$(2n+1)!! := 3\cdot5\cdot\ldots\cdot 2n+1$

**Пример.** 1. $\boxed{\sum_1^\infty \frac{n!}{(2n+1)!!}}$ — сходится.

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1)+1)!!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(2n+3)!!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(2n+1)!!\cdot(2n+3)}$$

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(2n+1)!!\cdot(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)!!}{n!} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сходится по Даламберу.}$$

**Зам.** ! Если в признаке Даламбера $q=1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Например, а) $\boxed{\sum_1^\infty \frac{1}{n} \text{ — расходится}}$

но $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$.

б) $\boxed{\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} \text{ — сходится}}$ (по т.к. $a_n \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ по интегр. признаку)

Или так: т.к. $\sum_1 \frac{1}{n(n+1)} = \sum_1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots = 1-\frac{1}{k+1} \to 1.$

$\Rightarrow \boxed{\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \text{ сходится}}$ (т.к. $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ при $n\to\infty$)

При этом $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$.

**Напоминание:** $\alpha_n = \underline{O}(\beta_n)$, при $n\to\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha_n = h_n\cdot\beta_n$, где $h_n$ — огранич. посл-ть.

Если $\beta_n \neq 0$, то $\alpha_n = \underline{O}(\beta_n) \Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ — огранич. посл-ть,

т.е. $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| \le M$, $\forall n$, для некоторой константы $M$.

**Теорема 2 (признак Гаусса)**

$$\begin{cases} a_n > 0 \\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \underline{O}\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \end{cases}$$
, где $\varepsilon>0$; $n\in\mathbb{N}$ (или хотя бы для дост. больших $n$)

Тогда: а) $\begin{cases} \sum a_n \text{ сходится, если } \lambda>1 \\ \sum a_n \text{ расходится, если } \lambda<1. \end{cases}$

б) $\underline{\lambda=1}$, $\begin{cases} \sum a_n \text{ сходится, если } \mu>1 \\ \sum a_n \text{ расходится, если } \mu\le 1. \end{cases}$ (без доказательства)

**Зам.** Гаусса не всегда можно применять.

Например: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n\cdot\ln^{100} n}\right)$ — $\underline{\text{нельзя}}$ Гаусса применять!

Т.к. $\frac{1}{\ln^{100} n}$ не тянет на $\bar{o}\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$, наоборот, $\frac{1}{n^\varepsilon} = \bar{o}\left(\frac{1}{\ln^{100} n}\right)$ при $n\to\infty$.

**Пример** $\boxed{\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p}$ — сходится при $p>2$

$$a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$$

$$a_{n+1} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p \overset{\text{по Тейлору}}{=} 1+\frac{p}{2n+1} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{p}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

т.к. $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right)}_{\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Или так: $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1} = \frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow \lambda = 1;\ \mu = \frac{p}{2} \Rightarrow$ по Гауссу сходится при $\frac{p}{2} > 1 \Leftrightarrow p > 2.$

## Пункт 4. Признак Коши

**Теорема 1 (признак Коши)**

$a_n \geq 0;\ \lim \sqrt[n]{a_n} = q;\ 0 \leq q \leq \infty \quad (1)$

Тогда: $\begin{cases} \sum a_n \text{ сходится, если } 0 \leq q < 1 \\ \sum a_n \text{ расходится, если } q > 1. \end{cases}$

если $q = 1$, то $\sum a_n$ может как сходиться, так и расходиться.

▶ а) $\underline{0 \leq q < 1}$. Пусть $r \in (q; 1)$ — фиксируем такое $r$.

Усл. (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = q < r$

$\overset{\text{св-ва посл-тей}}{\Rightarrow} (a_n)^{1/n} < r,\ n \geq n_0 \Rightarrow a_n < r^n,\ n \geq n_0.$

Но $\sum\limits_1^\infty r^n$ сходится, т.к. $q < 1 \overset{\text{по признаку сравнения}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n_0}^\infty a_n$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_n$ сходится.

б) $\underline{q > 1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} > 1 \Rightarrow (a_n)^{1/n} > 1,\ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_n > 1,\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ нарушен необх. признак сходимости ряда $\Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_n$ — расходится. ◀

11.09.18. Мат. анализ. Лекция 2.

**Обозн.** $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится и его сумма $= S \in \mathbb{R} \overset{\text{обозн.}}{\Leftrightarrow} \sum\limits_1^\infty a_n = S \in \mathbb{R}$.

**Опр.2.** Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$; $\sum\limits_1^\infty a_n$ – ряд. Тогда ряд $\sum\limits_1^\infty \lambda a_n$ называется произведением ряда $\sum\limits_1^\infty a_n$ на число $\lambda$.

**Теорема 2** $\boxed{\sum\limits_1^\infty a_n = S \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum\limits_1^\infty \lambda a_n = \lambda S}$ (т.е $\sum\limits_1^\infty \lambda a_n$ сходится и его сумма $= \lambda S$)

▶ $\sum\limits_1^\infty a_n = S \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S \in \mathbb{R} \overset{\text{по св-вам посл-тей}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{k\to\infty} \lambda S_k = \lambda S$ (*)

Но $\lambda S_k = \sum\limits_{n=1}^k \lambda a_n$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_1^\infty \lambda a_n \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{k\to\infty} (\sum\limits_{n=1}^k \lambda a_n) = \lambda S$. ◀

**Вопрос**: $\boxed{\text{если } \lambda \in \mathbb{R} \text{ и } \sum\limits_1^\infty \lambda a_n \text{ сход.} \overset{\text{в.2}}{\not\Rightarrow} \sum\limits_1^\infty a_n \text{ сходится.}}$

Например, $\lambda = 0$, а $\sum\limits_1^\infty a_n$ – любой расходящийся ряд, например, $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$.

**Опр.3.** Суммой рядов $\sum\limits_1^\infty a_n$ и $\sum\limits_1^\infty b_n$ называется ряд $\sum\limits_1^\infty (a_n + b_n)$

**Теорема 3** $\boxed{\sum\limits_{n=1}^\infty a_n = A \in \mathbb{R}; \sum\limits_{n=1}^\infty b_n = B \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^\infty (a_n + b_n) = A + B}$

▶ $\left.\begin{array}{l} \exists \sum\limits_{n=1}^\infty a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \in \mathbb{R} \\ \exists \sum\limits_{n=1}^\infty b_n = B \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} B_k = B \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \overset{\text{по св-ву посл-тей}}{} \exists \lim\limits_{k\to\infty} (A_k + B_k) = A + B$ (**)

Но $A_k + B_k = \sum\limits_{n=1}^k a_n + \sum\limits_{n=1}^k b_n = \sum\limits_{n=1}^k (a_n + b_n)$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n + b_n$

(**) $\Rightarrow \exists \sum\limits_{n=1}^\infty (a_n + b_n) = A + B$. ◀

**Зам.** $\boxed{\sum\limits_1^\infty (a_n + b_n) \text{ сходится} \overset{\text{в.2}}{\not\Rightarrow} (\sum a_n) \text{ сходится и } (\sum b_n) \text{ сходится.}}$

Например, $a_n = n$; $b_n = -n$; или так: $a_n = 1$; $b_n = -1$; или так: $a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = -\frac{1}{n}$.

**Следствие** $\boxed{\sum\limits_1^\infty a_n \text{ сходится, } \sum\limits_1^\infty b_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum\limits_1^\infty (a_n + b_n) \text{ расходится.}}$

▶ От противного: пусть $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_n + b_n)$ сходится

$\Rightarrow \sum\limits_1^\infty b_n = \sum\limits_1^\infty [(a_n + b_n) + (-a_n)] = \underbrace{\sum\limits_1^\infty (a_n + b_n)}_{\text{сход. по предполож.}} + \underbrace{\sum\limits_1^\infty (-a_n)}_{\text{сход, т.к } \sum\limits_1 a_n \text{ сход.}} = \text{сход.} + \text{сход} = \text{сход.}$

Но $\sum\limits_1^\infty b_n$ расх. по усл. $\Rightarrow$ противоречие. ◀

**Зам.** $\boxed{\sum\limits_1^\infty a_n \text{ расходится; } \sum\limits_1^\infty b_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum\limits_1^\infty (a_n + b_n) \text{ может как сходиться, так и расходиться.}}$

Например: 1) $a_n = n$; $b_n = -n \Rightarrow a_n + b_n$ сходится

2) $a_n = 1$; $b_n = 1 \Rightarrow a_n + b_n$ расходится.

❗ (это теорему доказ!)

Группировка членов ряда (без изменения порядка членов ряда) не изменяет факт сходимости ряда! Т.е $\boxed{\sum a_n \text{ сход} \Rightarrow \sum A_n \text{ сход.}}$

(а про расходимость такого сказать нельзя, вообще говоря, т.е ряд мог расходиться, мы члены сгруппировали, и ряд стал сходиться). т.е $\boxed{\sum a_n \text{ расходится } \overset{в.2}{\not\Rightarrow} \sum A_n \text{ расходится.}}$

например, $a_n = (-1)^n$. $\Rightarrow \sum a_n = 1-1+1-1\ldots$ — расх, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
но сгруппировав члены попарно, получим сумму нулей - такой ряд сходится.

**Теорема 4** (о группировке) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ и задана посл-ть $(m_n \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N})$ со свойствами: $m_1 = 1$; $m_n \uparrow\uparrow$ (по $n$) ← т.е члены ряда $\sum a_n$ не перемешиваем, просто берём куски, не нарушая порядок членов.
Тогда $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n = A$, где $b_n := \sum\limits_{i=m_n}^{m_{n+1}-1} a_i$; $n \in \mathbb{N}$

▶ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n = A \Rightarrow A_k := \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \xrightarrow[k\to\infty]{} A$

Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum b_n$, а именно:

$$B_k = \sum_{n=1}^{k} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{m_2-1} a_i}_{b_1} + \underbrace{\sum_{i=m_2}^{m_3-1} a_i}_{b_2} + \ldots + \underbrace{\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} a_i}_{b_k} = \sum_{i=1}^{m_{k+1}-1} a_i = A_{m_{k+1}-1}.$$

т.е посл-ть частичных сумм $B_k$ - это подпосл-ть посл-ти частичных сумм $A_k$. Но подпосл-ть сходится туда же, куда и посл-ть, если сама посл-ть сходится. А наша сходится к $A$. $\Rightarrow$ и $B_k \to A$.
Или по-бадерновски: $B_k = A_{m_{k+1}-1}$; $t = m_{k+1} - 1 \to \infty$ при $k \to \infty$.
$\Rightarrow B_k = A_t \to A$ при $t \to \infty$, т.е $B_k \to A$ при $k \to \infty$ ◀

**Зам.** Группировка членов ряда может изменить факт расходимости ряда (т.е ряд расходится, сгруппировали, получили сходящийся ряд.)
т.е $\boxed{\text{сгруппированный ряд сход. } \overset{в.2}{\not\Rightarrow} \text{ исходный ряд сход.}}$
например, ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots$ — сходится.
но исходный ряд $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ — расходится.

## Пункт 5. Критерий Коши.

**Теорема** $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \left|\sum\limits_{n=k+1}^{k+m} a_n\right| < \varepsilon,\ \forall k \geq N,\ \forall m \in \mathbb{N}$ (1)

▶ Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть его частичных сумм $(S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n;\ k \in \mathbb{N})$ сходится $\overset{\text{критерий Коши для посл-тей}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid |S_{k+m} - S_k| < \varepsilon,\ \forall k \geq N,\ \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\sum_{n=1}^{k+m} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n\right| < \varepsilon,\ \forall k \geq N,\ \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \left|\sum_{n=k+1}^{k+m} a_n\right| < \varepsilon \Rightarrow (1)$$ ◀

Критерий Коши особенно удобен для док-ва расходимости.

**Следствие** $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ — расходится $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N}\ \exists k \geq N,\ \exists \underset{m(k)}{\overset{}{m}} \in \mathbb{N} \text{ с усл. } \left|\sum_{n=k+1}^{k+m} a_n\right| \geq \varepsilon.$$

**Пример** Гармонический ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n}$ расходится!

▶ Имеем: $\sum\limits_{n=k+1}^{k+k \text{ (т.е } m:=k)} a_n = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geqslant k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} =: \varepsilon$

В итоге: $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N} \ \exists k(N) = N \ \exists m(k) = k$ такие, что выполняется $\left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_n$ расходится ◀

**!** Поведение членов ряда важно только начиная с некоторого номера, т.е конечное число членов не влияют на факт сходимости/расходимости (правда, влияют на сумму).

## Параграф 2. Знакоположительные ряды.

### Пункт 1. Введение

В этом параграфе всюду рассматриваем ряды $\sum\limits_1^\infty a_n$ с условием $a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$

**Зам.** ① Ряды $\sum\limits_1^\infty a_n$ с $a_n \leq 0$ исследуются рассмотрением знакоположительных рядов $\sum\limits_1^\infty |a_n|$.

② На самом деле, всюду дальше можно рассматривать ряды $\sum\limits_1^\infty a_n$ с условием: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0$, т.е начиная с некоторого номера это выполнено (см. лекция 1; следствие 2 из последней теоремы), т.е добавление/отбрасывание конечного числа членов не меняет факт сходимости/расходимости ряда (а сумма меняется, но мы ею не часто интересуемся)

**Напоминание:**

**Теорема Вейерштрасса:** пусть дана посл-ть $(S_n; n \in \mathbb{N})$ с условием $S_n \uparrow$ (монотонно возрастает). Тогда $(S_n)$ сходится $\Leftrightarrow$ $(S_n)$ ограничена сверху (надо только сверху требовать, т.к. снизу она ограничена $S_1$).

**Теорема** (критерий сходимости знакоположительных рядов)

Пусть $a_n \geqslant 0; n \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть его частичных сумм $(S_k; k \in \mathbb{N})$ ограничена сверху.

▶ $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится $\overset{\text{по опр.}}{\Longleftrightarrow}$ сходится посл-ть $(S_k; k \in \mathbb{N})$

Имеем: $S_k \uparrow$ (по $k$), т.к. $a_n \geqslant 0$, а $S_k = S_{k-1} + \underbrace{a_k}_{\geqslant 0} \geqslant S_{k-1}$.

Поэтому по теореме Вейерштрасса для посл-тей $(S_k)$ сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть $(S_k)$ ограничена сверху ◀

**!** А для незнакоопределённых рядов это неверно:

$\sum\limits_1^\infty \sin nx$ расходится (т.к. $a_n \not\to 0$), но $S_k$ – ограничены в совокупности.

**Обозн.** $a_n \geq 0$; Тогда $\begin{cases} \sum a_n \text{ сходится } \overset{\text{обозн.}}{\Leftrightarrow} \sum a_n < \infty \\ \sum a_n \text{ расходится } \overset{\text{обозн.}}{\Leftrightarrow} \sum a_n = +\infty, \text{ но пишем } \sum a_n = \infty, \text{ т.к. } a_n \geq 0. \end{cases}$

Но! Такая запись годится только для знакоположительных рядов.

## Признаки сравнения

**Теорема 1** (признак сравнения)

Пусть $b_n \geq a_n \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$ (1)

Тогда: а) $\sum_1^\infty b_n$ сходится $\Rightarrow \sum_1^\infty a_n$ сходится

б) $\sum_1^\infty a_n$ расходится $\Rightarrow \sum_1^\infty b_n$ расходится.

▲ а) пусть $\sum_1^\infty b_n$ сходится $\underset{\text{критерий сходимости знакоопр. рядов}}{\Rightarrow}$ посл-ть $\left(B_k := \sum_{n=1}^{k} b_n;\ k \in \mathbb{N}\right)$ - ограничена

$\Rightarrow \exists M > 0 \ / \ 0 \leq B_k \leq M, \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 \leq A_k := \sum_{n=1}^{k} a_n \underset{\text{см.(1)}}{\leq} \sum_{n=1}^{k} b_n = B_k \leq M$, т.е. $0 \leq A_k \leq M, \ \forall k \in \mathbb{N}$

критерий сходимости знакоопр. рядов в обр. сторону $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ сходится.

б) пусть $\sum_1^\infty a_n$ расходится.

От противного. пусть $\sum_1^\infty b_n$ сходится $\overset{\text{п.а)}}{\Rightarrow} \sum_1^\infty a_n$ сходится $\Rightarrow$ противоречие. ◄

**Примеры** ① Ряд $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}}$ расходится

▲ Имеем: $\ln n \leq n$; $n \geq 1$ (*)

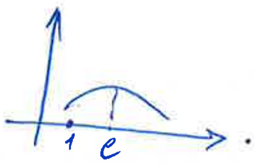
(*) Действительно: 1 способ $\ln n \overset{?}{\leq} n$

$e^{\ln n} \overset{?}{\leq} e^n$

$n \overset{?}{\leq} e^n$

это верно, проще разложить в ряд по Тейлору

2 способ



$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$ (по Лопиталю предел посчитав)

$\Rightarrow \exists M > 0 \ / \ 0 < \frac{\ln x}{x} < M$, где $M = \max\{M; M_1 \dots M_N\}$ (где $M_1 \dots M_N$ - (для $x \geq 1$)

значения $\frac{\ln x}{x}$ для тех членов, для которых ещё не выполнено $\left|\frac{\ln x}{x}\right| < M$,

т.к. это выполнено только $\forall n \geq N$ вып. $\left|\frac{\ln x}{x}\right| < M$)

$\Rightarrow \ln x \leq Mx$; $x \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{n}$ (для $n \geq 2$) $\Rightarrow$ расходится.

Аналогично, расходится $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln \sqrt{n}}$

04.09.18. Мат. анализ. Лекция 1

# Часть 4. Ряды и несобственные интегралы, зависящие от параметра.

## Глава 1. Числовые ряды

### Параграф 1. Числовые ряды и их основные свойства.

#### Пункт 1.1 Понятие числового ряда.

$a_n \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ или $n \in \mathbb{N}^* := \{0\} \cup \mathbb{N}$

**Опр 1.** ① Формальная сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (1) называется (числовым) $\boxed{\text{рядом}}$; $a_n$ называется $\boxed{\text{общим членом}}$ ряда (1).

② Сумма $S_k := \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ называется $\boxed{\text{частичной суммой}}$ ряда (1).

③ Ряд (1) $\boxed{\text{сходится}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k \in \mathbb{R}$ (т.е вместо ряда мы смотрим на предел последовательности, где $n$-ый член - это $n$-я частичная сумма); при этом $S := \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ называется $\boxed{\text{суммой}}$ ряда (1).

④ Ряд $\boxed{\text{расходится}} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ряд не сходится (т.е $\nexists$ конечного $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$)

**Зам 1.** В ряде (1) нумерация $n$ начинается с $n=1$. На самом деле, иногда удобно писать $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Вообще, $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ тоже называется рядом.

**Пример** $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n;\ q \in \mathbb{R}}$

1) $|q| \neq 1$. $S_k = \sum\limits_{n=0}^{k} q^n = \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q|<1, \text{ и ряд сходится} \\ \infty_{\text{без знака}}, & |q|>1, \text{ и ряд расходится} \end{cases}$

($\infty$ без знака - это значит, что модуль посл-ти сходится к $+\infty$) например, при $q<-1$ посл-ть вообще будет прыгать из $+\infty$ в $-\infty$.

2) $|q|=1$ а) $q=1$; $S_k = k+1 \longrightarrow +\infty$; и ряд расходится

б) $q=-1$ $S_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k=2m \\ 0, & \text{если } k=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{k\to\infty} S_k \Rightarrow$ ряд расходится.

**Зам 2.** Очевидна связь между сходимостью/расходимостью ряда и некоторой последовательности.

А именно: а) $\sum a_n$ сход. $\Longleftrightarrow$ сход. посл-ть $(S_k)$

б) Рассмотрим посл-ть $(a_n)$ и определим ряд так:

$a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots$,

чтобы $S_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n$.

тогда посл-ть $(a_n)$ сход. $\Leftrightarrow$ сход. ряд $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$

**Основные вопросы**

① Сходится или нет ряд (1)?

② Если сходится, то $S = ?$

## Пункт 1.2. Комплексные числовые ряды.

Пусть $c_n = a_n + i b_n$; где $a_n$ и $b_n \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

**Опр 2.** ① Рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется формальная сумма $c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$ (1)

② $C_k := \sum_{n=1}^{k} c_n$ – частичная сумма

③ Ряд (1) **сходится** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists \lim A_k := a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim B_k := b \in \mathbb{R}$,

где $A_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$; $B_k := \sum_{n=1}^{k} b_n$.

**Следствие** Ряд (1) сходится $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{сходится } \sum a_n \\ \text{сходится } \sum b_n \end{cases}$

поэтому достаточно рассматривать в дальнейшем только вещественные ряды.

## Пункт 1.3 Необходимое условие сходимости ряда.

**Теорема** (необходимое условие сходимости ряда)

$\sum_{1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Док-во: пусть $\sum_{1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} S_k =: S \in \mathbb{R}$

Имеем: (при $n \geq 2$) $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$

! Необходимое условие не является достаточным.

**Зам.** $\boxed{a_n \to 0 \overset{\text{в.2}}{\not\Rightarrow} \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ сходится}}$

Например, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ расходится}}$

В самом деле, $S_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{\text{оценка снизу}}{\geq} k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} \to +\infty$.

Аналогично доказывается расходимость ряда $\boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ расходится: для } 0 < p < 1}$ :

$S_k = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{k^p} \geq k \cdot \frac{1}{k^p} = k^{(1-p) > 0} \to +\infty$

**Примеры** ① $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}}$ расходится, т.к. $a_n \to \frac{2}{3} \neq 0$.

$\Rightarrow$ нарушена необх. признак сходимости $\Rightarrow$ расходится.

② „Модельный" ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}}$ – сходится только при $p > 1$.

Действительно:

а) $p \le 0$ : $a_n \not\to 0$ $\Rightarrow$ расходится (нарушено необх. усл.)

б) $0 < p < 1$ : расходится — см. ранее, где $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

в) $p = 1$ : $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический ряд — расходится (докажем позже)

г) $p > 1$ : сходится по интегральному признаку Коши (докажем позже).

## Пункт 1.4 Свойства сходящихся рядов.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ (1)

**Опр 1.** Ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n =: r_k$ называется $\boxed{\text{остатком}}$ ряда (1)

(возможно, формально, т.к. он может и не сходиться)

**Теорема 1** 1) Ряд (1) сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ сходится $\forall k$, причём $\boxed{S = S_k + r_k}$

2) $\exists k_0 \mid \sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow$ ряд (1) сходится

▶ ① пусть ряд (1) сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k =: S \in \mathbb{R}$

пусть $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ произвольно.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Его частичная сумма (ещё называемая „отрезком" ряда (1)):

$$S_{k,m} := \sum_{n=k+1}^{m} a_n = S_m - \underbrace{S_k}_{\text{фикс}} \xrightarrow[m\to\infty]{} \underbrace{S}_{\text{число}} - \underbrace{S_k}_{\text{фикс}} \in \mathbb{R}$$

$k$ — откуда начинаем, фикс.; $m$ — до куда суммируем, $m \to \infty$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ сходится, причём $r_k = S - S_k$.

② пусть $\exists k_0 \mid \sum\limits_{n=k_0+1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} \Big( \underbrace{\sum\limits_{n=k_0+1}^{m} a_n}_{S_{k_0,m}} \Big) =: r_{k_0} \in \mathbb{R}$

$$S_m = \underbrace{S_{k_0}}_{\text{фикс. число}} + \underbrace{S_{k_0,m}}_{\to r_{k_0}} \longrightarrow \underset{S_{k_0}+r_{k_0}}{\overset{}{\text{числу}}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \blacktriangleleft$$

**Следствия** ① ряд (1) сходится $\Rightarrow r_k \to 0$ при $k \to \infty$

▶ Мы выяснили, что $S = S_k + r_k$

$\Rightarrow r_k = S - S_k \longrightarrow S - S = 0$ ◀

② Сходимость/расходимость ряда (1) **не меняется**, если изменить значения первых $k$ членов (для некоторого $k \in \mathbb{R}$)

▶ а) пусть ряд (1) сходится. После выбрасывания $t$ членов (от первого из выбранных до последнего, включая, возможно, стоящие между выбранными невыбранные (т.е. не входящие в

$k$ выбрасываемых штук: $\overbrace{\underset{1}{\odot} \cdot \underset{2}{\odot} \cdot \cdot \underset{k}{\odot}}^{k \text{ штук.}}$ Останется ряд $r_k$.
по первой части теоремы $r_k$ сходится, т.к. ряд (1) сходится.
б) пусть ряд (1) расходится. От противного. пусть $r_k$ сходится.
тогда по второй части теоремы ряд (1) сходится. Но мы же предположили, что он расходится. Противоречие. ◁