$\boxed{ЛНН-1}$ Найти канон. вид ортог. опер-ра

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda E) = 0 \iff$

$$\begin{vmatrix} 2-3\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-3\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$\iff (2-3\lambda)(-2+9\lambda^2+3\lambda-6\lambda-4)+2(-2-4+6\lambda)-4+1+3\lambda =$

$= (2-3\lambda)(9\lambda^2-3\lambda-6)-12+12\lambda-3+3\lambda =$

$= \underline{18\lambda^2}-\underline{6\lambda}-12\underline{-27\lambda^3}\underline{+9\lambda^2}\underline{+18\lambda}\underline{+15\lambda}-15 =$

$= -27\lambda^3+27\lambda^2+27\lambda-27 = 0 \iff$

$\iff 3\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+3 = 0$

$3(\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0$

$3(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ЛИН-2}}$ Найти канон. вид ортог. опер-ра

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$\exists$ ортог. базис, в кот. матр. ортог. опер. имеет вид:

$$\begin{pmatrix} J_{\varphi_1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{\varphi_n} & & \\ & & & \pm 1 & \\ 0 & & & & \ddots \ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 6-7\lambda & -2 & 3 \\ 2 & -3-7\lambda & -6 \\ 3 & 6 & -2-7\lambda \end{vmatrix} =$$

$6+14\lambda+21\lambda+49\lambda^2$

$$= \frac{1}{7}\Big((6-7\lambda)\big((3+7\lambda)(2+7\lambda)+36\big) + \frac{2}{7}(-4-14\lambda+18) + \frac{3}{7}(12+9+21\lambda) =$$

$$= \frac{1}{7}\Big((6-7\lambda)(49\lambda^2+35\lambda+42) - 28\lambda + 28 + 36 + 27 + 63\lambda\Big) = \frac{1}{7}\Big(6\cdot 49\lambda^2 + 6\cdot 35\lambda + 6\cdot 42 - 7\cdot 49\lambda^3 - 7\cdot 35\lambda^2 - 7\cdot 42\lambda + 35\lambda + 91\Big) =$$

$$= 42\lambda^2 + 30\lambda + 36 - 49\lambda^3 - 35\lambda^2 - 42\lambda + 5\lambda + 13 =$$

$$= \frac{1}{49}\left(-49\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda + 49\right) = -\lambda^3 + \frac{1}{7}\lambda^2 - \frac{1}{7}\lambda + 1$$

$\lambda = 1$

$$7\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 7 = 0$$

$$(\lambda-1)(7\lambda^2+6\lambda+7) = 0$$

$$D = 36 - 4\cdot 49 = -160 \Rightarrow \sqrt{D} = 4i\sqrt{10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 4i\sqrt{10}}{14} = \frac{-3 \pm 2i\sqrt{10}}{7} = \cos\varphi_1 \pm i\cdot\sin\varphi$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3/7 & -\frac{2\sqrt{10}}{7} & 0 \\ \frac{2\sqrt{10}}{7} & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ЛИН-3}}$ $\exists$? лин. преобр., перевод f в g

$$f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

$$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$$

Приведём квадр. формы к норм. виду.

1) $$f = \underbrace{2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3} + 9x_2^2 + 3x_3^2 - 10x_2x_3 =$$

$$(2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3) - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 =$$

$$5x_2^2 - 2x_2x_3 + \frac{1}{5}x_3^2 - \frac{1}{5}x_3^2 = \left(\sqrt{5}x_2 - \frac{x_3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}x_3^2$$

$$= 2(x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + \left(\sqrt{5}x_2 - \frac{x_3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{4}{5}x_3^2$$

Лин. невырожд. замена коорд.:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = (x_1 + 2x_2 - x_3)\sqrt{2} \\ \tilde{x}_2 = \sqrt{5}x_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x_3 \\ \tilde{x}_3 = \sqrt{\frac{4}{5}}x_3 \end{cases} \Rightarrow f = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2$$

2) $$g = 5y_1^2 + 12y_1y_2 + \frac{36}{5}y_2^2 - \frac{6}{5}y_2^2 = \left(\sqrt{5}y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}}y_2\right)^2 - \frac{6}{5}y_2^2$$

Лин. невыр. замена коорд.:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = \sqrt{5}y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}}y_2 \\ \tilde{y}_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}y_2 \end{cases} \Rightarrow g = \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2$$

3) Норм. вид квадрат. формы единств. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists$ лин. преобр., перевод f в g, т.к.

норм. вид КФ разный.

$\boxed{ЛНН-4}$ $\left\{1, \frac{1}{1+x}, \ldots \frac{1}{(1+x)^n}\right\}$ — л/н на $[0, \infty)$?

Предп., сист. л/з, т.е. $\exists a_0, a_1 \ldots a_n$ $(a_0^2 + \ldots + a_n^2)$:

$$a_0 + \frac{a_1}{1+x} + \ldots + \frac{a_n}{(1+x)^n} = 0$$

Р-во выполнено в кажд. точке => выполнено в т. $\{0, 1, \ldots n\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0 \\ a_0 + a_1 \frac{1}{2} + \ldots + a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 \frac{1}{n+1} + \ldots + a_n \left(\frac{1}{1+n}\right)^n = 0 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \ldots & \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \frac{1}{1+n} & \ldots & \left(\frac{1}{1+n}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

У сист. $\exists$ нетрив. реш., если опред. $= 0$, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \ldots & \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{1+n} & \ldots & \left(\frac{1}{1+n}\right)^n \end{pmatrix} = 0 \qquad = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

т.к. опред. Вандермонда

Но в этом случае $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$ => $\det \neq 0$

Противоречие.

<u>Отв.</u>: л/н.

$\{1, \ln x, \ln 2x \ldots \ln(nx)\}$ — л/н ?

$\ln(nx) = \ln n + \ln x$ => $\forall n > 1$ последняя из ф-ций линейно выражается через 1 и $\ln x$

=> $\exists$ л/з подсистема => вся система л/з

При $n = 1$ сист. л/н.

ЛНН-4 $\left\{1, \frac{1}{1+x}, \dots \frac{1}{(1+x)^n}\right\}$ — л/н на $[0, \infty)$?

Оператор Вандермонд

Предп., $\exists a_0, a_1 \dots a_n$, $a_0^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$:

$$a_0 + \frac{a_1}{1+x} + \dots + \frac{a_n}{(1+x)^n} = 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$$

$$\Leftrightarrow a_0(1+x)^n + a_1(1+x)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$$

Замена: $u = 1+x$

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \forall u \in [1, \infty)$$

$\Rightarrow$ у ур-ния не более n различных корней (т. Безу)

$\Rightarrow$ тождество выполнено $\forall u \in [1, \infty)$ только при $a_0 = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow$ л/н

ЛНН-5 $\{1, \cos x, \dots \cos Nx\}$ — л/н на $[-\pi, \pi]$?

Предп., $\exists a_0 \dots a_N$: $a_0^2 + \dots + a_N^2 \neq 0$

$$a_0 + a_1 \cdot \cos x + \dots + a_N \cdot \cos Nx = 0$$

Домножим скалярно на $\cos kx$, $k = 0 \dots N$ (ортонормир. система)

$k = 0$: $a_0^2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$k = 1$: ~~$a_1 \dots$~~ $a_1 \underbrace{(\cos x, \cos x)}_{=\pi} = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$

$\dots$

$k = N$: $a_N(\cos Nx, \cos Nx) = 0$ $\Leftrightarrow a_N = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

Т.е. $a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_N \cdot \cos Nx = 0$

$\Leftrightarrow a_0 = \dots = a_N = 0 \Rightarrow$ л/н

$\boxed{\text{ЛНН-6}}$ Оператор в $\mathbb{R}^5[x]$ сопост. мн-ну его ост. от дел. на (x^3+1)

Найти матр. в базисе $\{1, x \dots x^5\}$

Разложим образы базисных векторов по $1+x^3$

Пусть A — искомая матрица

$A \cdot 1 = 1$

$A \cdot x = x$

$A \cdot x^2 = x^2$

$Ax^3 = A\left((x^3+1)-1\right) = -1$

$Ax^4 = A\left(x(x^3+1)-x\right) = -x$

$Ax^5 = A\left(x^2(x^3+1)-x^2\right) = -x^2$

$$\Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора — образы базисных векторов, записанные по столбцам

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ -1 \\ -x \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ЛИН-7}}$ Найти базис, в кот. матр. Грама:

$$G=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=$$

$$=2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz=$$

$$=\left(2x^2+2xy+2xz+yz+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2\right)+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}z^2+yz=$$

$$=\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z\right)^2+\frac{4}{3}z^2$$

Замена:

$$\begin{cases}x'=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z\\ y'=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z\\ z'=\frac{2}{\sqrt{3}}z\end{cases}\qquad C=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}e_1&\quad e_2&\quad e_3\end{array}\end{array}$$

$$G=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&5&4\\2&4&6\end{pmatrix}$$

$$F(x,y,z)=2x^2+5y^2+6z^2+4xy+4xz+8yz=$$

$$=2(x^2+2xy+2xz+2yz+y^2+z^2)+3y^2+4z^2+4yz=$$

$$=2(x+y+z)^2+\left(\sqrt{3}y+\frac{2}{\sqrt{3}}z\right)^2+\frac{8}{3}z^2$$

$$\begin{cases}x'=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}z\\ y'=0\cdot x+\sqrt{3}y+\frac{2}{\sqrt{3}}z\\ z'=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\end{cases}\qquad C=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}v_1&\quad v_2&\quad v_3\end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

искомый базис, записанный по столбцам

$\boxed{\text{ЛИН-8}}$ Найти базис, в кот. матр. Грама

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(G-\lambda E)=0 \iff \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (2-\lambda)(4+\lambda^2-4\lambda-1)+(1-2+\lambda)+(1-2+\lambda)=$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)+2\lambda-2 = \underline{2\lambda^2}-\underline{8\lambda}+6\,\underline{-\lambda^3}+\underline{4\lambda^2}-$$

$$\underline{-3\lambda}+\underline{2\lambda}-2 = -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4=0$$

$$\cancel{-\lambda(\lambda^2-6\lambda+9)+4=0} \iff (\lambda-4)(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2}=1 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (ортог. ~~по~~ Г.-Ш.)

$$\lambda=4: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$D = C^T G C = C^T V^T V C = (VC)^T VC = (VC)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{D}\,C^{-1} = \sqrt{D}\,C^T$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \end{array}$$

$\boxed{\text{ЛИН-9}}$ Найти расст. от $v = (1, 1, 3, 1)$ до лин. подпр-ва $L = \langle (1,0,1,-2), (1,1,1,3) \rangle$

Ищем орт. проекцию v на L:

$$\left.\begin{aligned} v_{пр.} &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ e_1 &= (1, 0, 1, -2) \\ e_2 &= (1, 1, 1, 3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{пр.} = (\lambda + \mu,\ \mu,\ \lambda + \mu,\ -2\lambda + 3\mu)$$

Ортогональная сост. v по отн. к L:

$$v^\perp = v - v_{пр.} = (1 - \lambda - \mu,\ 1 - \mu,\ 3 - \lambda - \mu,\ 1 + 2\lambda - 3\mu)$$

Условие ортогональности:

$$(v^\perp, e_1) = 1 - \lambda - \mu + 3 - \lambda - \mu - 2 - 4\lambda + 6\mu =$$
$$= 2 - 6\lambda + 4\mu = 0$$

$$(v^\perp, e_2) = 1 - \lambda - \mu + 1 - \mu + 3 - \lambda - \mu + 3 + 6\lambda - 9\mu =$$
$$= 8 + 4\lambda - 12\mu = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 6\lambda + 4\mu = 0 \\ 8 + 4\lambda - 12\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28\lambda - 28\mu = 0 \\ 2 - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 1$$

$$\Rightarrow v^\perp = (-1, 0, 1, 0) \Rightarrow |v^\perp| = \sqrt{2}$$