Кононенко Александр, ГЭК-4

CA-19 Найти рациональную функцию, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, простой полюс в -1 с вычетом -1, не имеющую других полюсов и равную 0 в 0.

Ищем рац. функцию f в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

Т.к полюсы простые, то $\exists \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)$

$\exists \lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z)$, $\overset{\text{и других в } \mathbb{C} \text{ нет, то}}{\Longrightarrow}$ $\psi(z) = (z-1)(z+1) = z^2-1$

$\psi'(z) = (z^2-1)' = 2z \Rightarrow \psi'(1) = 2 \neq 0$ и

$\Rightarrow \psi'(-1) = -2 \neq 0$

можем вычислять вычеты по формулам:

$1 = \operatorname{res}\limits_{z=1} f(z) = \operatorname{res}\limits_{z=1} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = \frac{\varphi(1)}{2}$

$-1 = \operatorname{res}\limits_{z=-1} f(z) = \operatorname{res}\limits_{z=-1} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(-1)}{\psi'(-1)} = \frac{\varphi(-1)}{-2}$

Отсюда получаем, что $\varphi(1) = 2\cdot 1 = 2$

$\varphi(-1) = (-2)\cdot(-1) = 2$

Т.к. $\deg \psi = 2$, то чтобы в ∞ не было особенности, то $\deg \varphi \leq 2$ (чтобы $\exists \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi}{\psi} = C < \infty$).

Через $(0,0)$; $(1;2)$ и $(-1;2)$ проходит единств. такой мн-н:

$\varphi(z) = 2z^2$. Тогда $f(\infty) = f\left(\frac{1}{s}\right)\Big|_{s=0} = \frac{2\left(\frac{1}{s}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 - 1}\Big|_{s=0} =$

$= \frac{2}{s^2 \frac{1-s^2}{s^2}}\Big|_{s=0} = \frac{2}{1-s^2}\Big|_{s=0} = 2$ и особенности в ∞ действительно нет.

Ответ: $f(z) = \frac{2z^2}{z^2-1}$

(СА-3) Найти радиус сходимости ряда Тейлора в точке 0 функции $\frac{1}{e^z+1}$.

У ф-ии особенность в точке $z = i\pi$, т.к. $e^{i\pi}+1 = -1+1=0$.

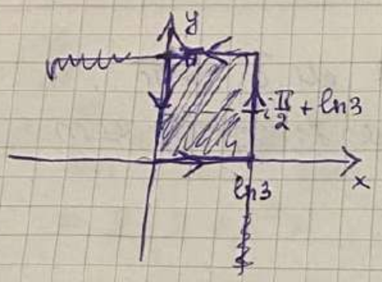
$\Rightarrow$ радиус сходимости не м.б. $> \pi$.

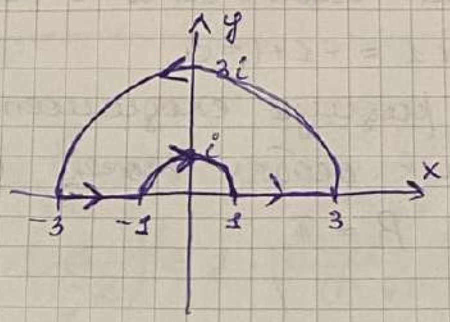
Других особых точек в круге $\{z : |z|<\pi\}$ нет

$\Rightarrow$ $R = \pi$.

(CA-4) Найти площадь образа области

$\{z = x + iy : x \in [0, \ln 3],\ y \in [0, \pi]\}$ под действием ф-ии e^z.





e^{3+iy}, $y \in [0, \pi]$

$e^{\ln 3 + i\pi} = e^{\ln 3} \cdot e^{i\pi} = -e^{\ln 3} = -3$

$e^{\ln 3 + i\frac{\pi}{2}} = e^{\ln 3} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$e^{i\pi} = -1$

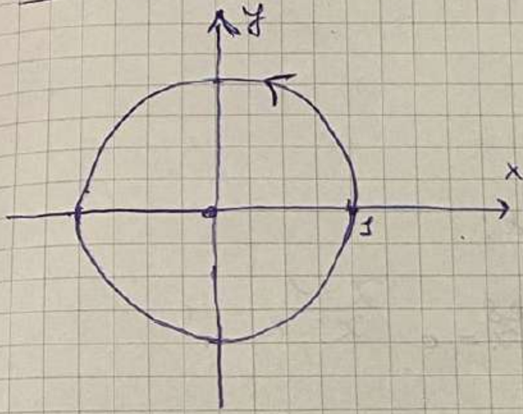
$e^{1+i\pi} = e \cdot e^{i\pi} = -e$

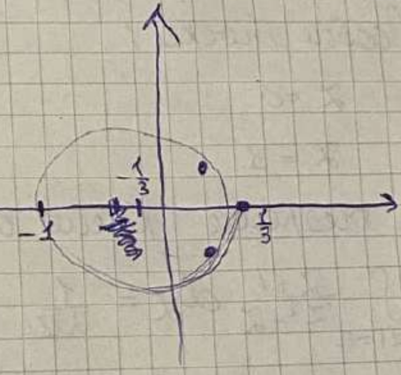
$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$S_{кр} = \pi R^2$

$\frac{S}{2} = \frac{\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2}{2} = \frac{9\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi.$

(CA-5) Найти радиус окружности, являющейся образом окружности $\{z : |z| = 1\}$ при отображении $z \to \frac{z}{z-2}$.





1) точка $1+0i \to \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{1} = -1$

2) $0+i \to \frac{i}{i-2} = \frac{i(i+2)}{i^2-2^2} = \frac{i^2+2i}{-1-4} = \frac{-1+2i}{-5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

3) $-1 \to \frac{-1}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

4) $-i \to \frac{-i}{-i-2} = \frac{i}{i+2} = \frac{i(i-2)}{(i+2)(i-2)} = \frac{i^2-2i}{i^2-2^2} =$

$= \frac{-1-2i}{-1-4} = \frac{-1-2i}{-5} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

$\frac{-1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$

$R = \frac{2}{3}$

(CA-6) Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2-z}\,dz$

$\frac{z+1}{z^2-z}=\frac{z+1}{z(z-1)}$

Особые точки:

$z=0$

$z=1$

По теореме Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2-z}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=0}\frac{z+1}{z^2-z}+\right.$$

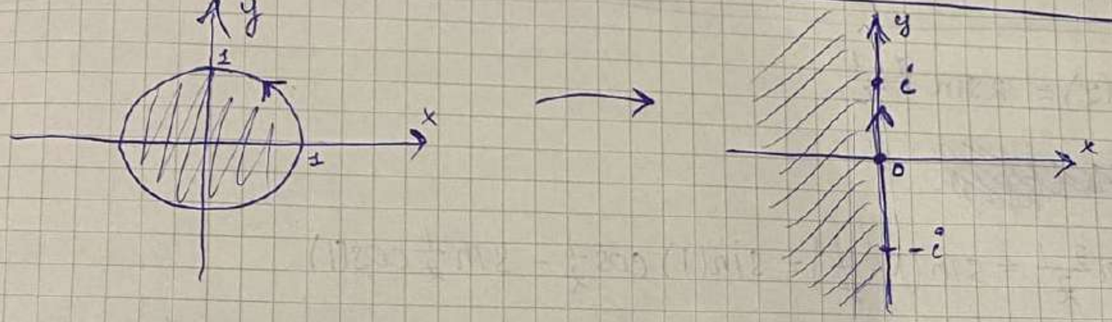
$$\left.+\operatorname{Res}_{z=1}\frac{z+1}{z^2-z}\right)=-1+2=1.$$

$$\operatorname{Res}_{z=0}\frac{z+1}{z^2-z}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\operatorname{Res}_{z=1}=\frac{2}{1}=2$$

(СА-7) Найти образ круга $\{z : |z| < 1\}$ при отображении

$$z \to \frac{z-i}{z+i}.$$



1) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1^2-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$

2) $\frac{i-i}{i+i} = 0$

3) $\frac{-1-i}{-1+i} = \frac{-1-i}{i-1} = \frac{-(1+i)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = -\frac{(i+1)^2}{i^2-1^2} =$

$= \frac{-(-1+2i+1)}{-1-1} = \frac{-2i}{-2} = i$

4) $\frac{-i-i}{-i+i} = \frac{-2i}{0} = -i\infty$

ДЛО переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность. ~~[illegible]~~.
Направление обхода сохраняется. Берем область слева от обхода $\Rightarrow$ $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$.

СА-8 Найти коэффициент при z^{-2} ряда Лорана функции $2\sin\frac{z-1}{z}$ в кольце $0<|z|<\infty$.

$f(z) = 2\sin\frac{z-1}{z}$

$\sin\frac{z-1}{z} = \sin\left(1-\frac{1}{z}\right) = \sin(1)\cos\frac{1}{z} - \sin\frac{1}{z}\cos(1)$

$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \ldots$ - здесь коэф. перед z^{-2} равен $-\frac{1}{2}$

$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \ldots$ - здесь z^{-2} нет

У $\sin\frac{z-1}{z}$ коэф. перед z^{-2} равен $-\frac{\sin(1)}{2}$

У $f(z)$ коэф. перед z^{-2} равен $-\sin(1)$

(СА-9) Найти ближайшие к 0 корни уравнения $\sin z = 2$.

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$
$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

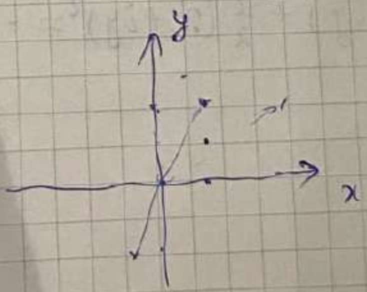
$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$
$$e^{2iz} - 1 = 4i\,e^{iz}$$
$$w = e^{iz}$$
$$w^2 - 4iw - 1 = 0$$
$$D = (4i)^2 + 4 = -16 + 4 = -12$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{-12} = 2i\sqrt{3}$$
$$w = \frac{4i \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 2i \pm i\sqrt{3} = i(2 \pm \sqrt{3})$$

$$e^{iz} = i(2 \pm \sqrt{3})$$
$$\cancel{iz = \ln(i(2\pm\sqrt{3})) + 2\pi k}$$
$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}\cdot e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$
$$e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x = i(2 \pm \sqrt{3})$$

$$\begin{cases} 1)\ e^{-y}\cos x = 0 \\ 2)\ e^{-y}\sin x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} e^{-y} = \pm(2 \pm \sqrt{3}) \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. } e^{-y} > 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \text{ – нечет. не подходит.}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow -y = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$



$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)^2 + \ln^2(2 \pm \sqrt{3})}$$

$|z|$ – наим. при $k = 0$

$$z = \frac{\pi}{2} - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

СА-10 Найти такую голоморфную ф-цию f комплексного переменного $z = x+iy$, что $\operatorname{Re} f(x,y) = y - xy$ и $f(0)=0$.

$$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\operatorname{Re} f(x,y) = u(x,y) = y - xy$$

$$f(0,0) = 0 \Rightarrow u(0,0) + i v(0,0) = 0$$

$$u(0,0) = 0 \Rightarrow v(0,0) = 0$$

f - голоморф. $\Rightarrow$ усл. Коши - Римана $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$\begin{cases} v_y(x,y) = -y \\ v_x(x,y) = -(1-x) = x-1 \end{cases}$$

$$\int v_y\, dy = \int -y\, dy \Rightarrow v(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + C_1(x) \ {}^{+C_2} \Rightarrow v_x = C_1'(x) = x-1$$

$$\cancel{\int v_x dx = \int x-1\, dx \Rightarrow v(x,y) = \frac{x^2}{2} - x + C(y)} \qquad \int C_1'(x)\,dx = \int x-1\, dx$$

$$\cancel{\Rightarrow v(x,y) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{y^2}{2} + C_3} \qquad \Rightarrow C_1(x) = \frac{x^2}{2} - x + C_3$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{y^2}{2} + C$$

$$v(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(x,y) = y - xy + i\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{y^2}{2}\right) = y - xy + i\frac{x^2}{2} - ix - i\frac{y^2}{2} =$$

$$= y - ix + \frac{1}{2}(ix^2 - 2xy - iy^2) = \cancel{y} - i(x+iy) + \frac{i}{2}(x^2 + 2ixy - y^2)$$

$$= -i(x+iy) + \frac{i}{2}(x+iy)^2 = -iz + \frac{i}{2}z^2$$

СА-16 Найти ближайший к 1 полюс функции

$$\frac{1}{e^{iz}-1}+\frac{i}{z}$$

Изолированные особые точки однознач. характера имеют вид $z=2\pi k$ (т. к. $e^{i2\pi k}=1$), $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^{iz}-1}+\frac{i}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1+iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3)-1}+\frac{i}{z}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3)}+\frac{i}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+i(iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3))}{z(iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3))}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\frac{iz^2}{2}+\frac{z^3}{6}+i\cdot\bar{o}(z^3)}{iz^2-\frac{z^3}{2}-\frac{iz^4}{6}+\bar{o}(z^4)}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\frac{i}{2}+\frac{z}{6}+i\bar{o}(z)}{i-\frac{z}{2}-\frac{iz^2}{6}+\bar{o}(z^2)}\right)=$$

$$=\frac{-\frac{i}{2}}{i}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 0 \text{ - не полюс}$$

$\Rightarrow$ ближ. полюс к 1 – 2π

Каплан

СА-1 Найти коэфф-т при x^6 ряда Тейлора функции $\cos^2 x$ (разложение в точке 0).

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f(x) = \cos^2 x$$

При x^6: $\frac{f^{(6)}(0)}{6!}$

$$f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$$

$$f''(x) = -2\cos 2x$$

$$f'''(x) = -2 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = 4\sin 2x$$

$$f^{(IV)}(x) = 4 \cdot \cos 2x \cdot 2 = 8\cos 2x$$

$$f^{(V)}(x) = 8(-\sin 2x) \cdot 2 = -16\sin 2x$$

$$f^{(VI)}(x) = -16\cos 2x \cdot 2 = -32\cos 2x$$

$$f^{(VI)}(0) = -32$$

$$\frac{-32}{6!} = \frac{-32}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{-8}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{-4}{3 \cdot 5 \cdot 6} =$$

$$= \frac{-2}{3 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{2}{45}$$

(CA-2) Найти $f(i)$, где f - рациональная ф-ия, в окрестности нуля задаваемая рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)' = z\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' =$$
$$= z\left(z+z^2+\ldots\right)' = z\cdot\left(\frac{z}{1-z}\right)' = z\cdot\left(\frac{(1-z)+z}{(1-z)^2}\right) =$$
$$= \frac{z}{(1-z)^2} = f(z)$$

сумма геом. прог. $(b_1=z,\ q=z)$

$$f(i)=\frac{i}{(1-i)^2}=\frac{i}{1-1-2i}=-\frac{1}{2}$$

Махмутова Полина Викторовна ГЭК 4

СА-13. В каких т. комплексной плоскости функция $f(z) = \bar{z}^2 + 2i\bar{z}$ имеет производную по z?

Решение. $z = x + iy$

$f(z) = (x-iy)^2 + 2i(x-iy) = (x^2-y^2+2y) - 2ixy + 2ix =$

$= \underbrace{(x^2-y^2+2y)}_{u(x,y)} + \underbrace{(2x-2xy)}_{v(x,y)} i$

Исп. условие Коши-Римана: f - диф. в т. ($\mathbb{C}$-диф.) $a \iff \begin{cases} \frac{\partial u(a)}{\partial x} = \frac{\partial v(a)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(a)}{\partial y} = -\frac{\partial v(a)}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -2x \\ -2y+2 = -2+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\text{функция дифференцируема (только) в т. } z = i}$

$z = 0 + 1 \cdot i = i$

CA-16 Найти ближайший к 1 полюс функции

$\frac{1}{e^{iz}-1}+\frac{i}{z}$

Изолированные особые точки однознач. характера имеют вид $z=2\pi k$ (т.к. $e^{i2\pi k}=1$), $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^{iz}-1}+\frac{i}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1+iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3)-1}+\frac{i}{z}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3)}+\frac{i}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+i(iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3))}{z(iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar{o}(z^3))}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\frac{iz^2}{2}+\frac{z^3}{6}+i\cdot\bar{o}(z^3)}{iz^2-\frac{z^3}{2}-\frac{iz^4}{6}+\bar{o}(z^4)}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\frac{i}{2}+\frac{z}{6}+i\bar{o}(z)}{i-\frac{z}{2}-\frac{iz^2}{6}+\bar{o}(z^2)}\right)=$$

$$=\frac{-\frac{i}{2}}{i}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 0 \text{ - не полюс}$$

$\Rightarrow$ ближ. полюс к 1 – 2π

СА-15. Найти такую голоморфную функцию f комплексного переменного $z = x+iy$, что

$$\mathrm{Re}\, f(x,y) = y - xy \quad \text{и} \quad f(0)=0.$$

ГЭК 3
Воробьев Станислав Константинович
611 группа

Введем обозначения:

$$\mathrm{Re}\, f(x,y) = u(x,y), \quad \mathrm{Im}\, f(x,y) = v(x,y)$$

$$f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

Знаем, что f голоморфна если и только если выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_y = -v'_x \\ u'_x = v'_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -v'_x = 1-x \\ v'_y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{x^2}{2} - x + \varphi(y) \\ v = -\frac{y^2}{2} + G(x) \end{cases}$$

Отсюда

$$v = \frac{x^2}{2} - x - \frac{y^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Найдем $C \in \mathbb{R}$ подстановкой $z=0$:

$$f(0) = (y-xy) + i\left(\frac{x^2-y^2}{2} - x + C\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = iC\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Отсюда:

$$f = (y-xy) + i\left(\frac{x^2-y^2}{2} - x\right)$$

Ответ:

$$f(x+iy) = (y-xy) + i\left(\frac{x^2-y^2}{2} - x\right)$$