12.02.2023. Rough Path. ДЗ 1.

Листок 1. Задача 2

Пусть $g \in C[a,b]$ – ф-ция огр. вариации. Докажите, что:

а) $\underset{[a,c]}{\mathrm{Var}}\, g + \underset{[c,b]}{\mathrm{Var}}\, g = \underset{[a,b]}{\mathrm{Var}}\, g$ при $a<c<b$

в) ф-ция $x \longmapsto \underset{[a,x]}{\mathrm{Var}}\, g$ непрер.

Док-во: а) ($\geq$) Заметим, что при добавлении новой точки (а именно, точки c, если её нет в разбиении $[a,b]$) в разбиение $[a,b]$ соответствующая сумма абс. величин ф-ции не уменьшается

$$\Rightarrow \sup \sum_{i=1}^{n} |g(t_{i+1})-g(t_i)| \leq \sup \Big[\sum_{i=1}^{k} |g(t_{i+1})-g(t_i)| + \sum_{i=k+1}^{n} |g(t_{i+1})-g(t_i)| \Big] \leq$$

$\sup(f(x)+g(x)) \leq \sup f(x) + \sup g(x)$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{k} |g(t_{i+1})-g(t_i)| + \sup \sum_{i=k+1}^{n} |g(t_{i+1})-g(t_i)|$$

$$\Rightarrow \underset{[a,b]}{\mathrm{Var}}\, g \leq \underset{[a,c]}{\mathrm{Var}}\, g + \underset{[c,b]}{\mathrm{Var}}\, g$$

($\leq$) поскольку $\underset{[a,c]}{\mathrm{Var}}\, g$ и $\underset{[c,b]}{\mathrm{Var}}\, g$ – это супремумы, то $\forall \varepsilon>0\ \exists$ разбиения Π_1 $\{t_1 \dots t_{k+1}\}$ отрезка $[a,c]$ и Π_2 $\{t_{k+2} \dots t_{n+1}\}$ отрезка $[c,b]$, что

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} |g(t_{i+1})-g(t_i)| > \underset{[a,c]}{\mathrm{Var}}\, g - \varepsilon \\ \sum_{i=k+2}^{n} |g(t_{i+1})-g(t_i)| > \underset{[b,c]}{\mathrm{Var}} - \varepsilon \end{cases}$$

Объединяя эти разбиения, получим разбиение для $[a,b]$, причём

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_{i+1})-g(t_i)| > \underset{[a,c]}{\mathrm{Var}}\, g + \underset{[b,c]}{\mathrm{Var}} - 2\varepsilon$$

переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\underset{[a,b]}{\mathrm{Var}}\, g \geq \underset{[a,c]}{\mathrm{Var}}\, g + \underset{[c,b]}{\mathrm{Var}}\, g$

б) Пусть $\varepsilon>0$.

g-непрер $\Rightarrow \exists\, \delta_0>0: |f(x+h)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ для $|h| \leq \delta_0$.

Опять, из-за того, что $\underset{[a,x]}{\mathrm{Var}}\, g$ и $\underset{[x,b]}{\mathrm{Var}}\, g$ – это супремумы, то $\exists$ такие разбиения $\{a=t_1<\dots<t_{n+1}=x\}$ и $\{x=s_1<\dots<s_{n+1}=b\}$, что

$$\Big|\underset{[a,x]}{\mathrm{Var}}\, g - \sum_{i=1}^{n} |g(t_{i+1})-g(t_i)|\Big| + \Big|\underset{[x,b]}{\mathrm{Var}}\, g - \sum_{i=1}^{n} |g(s_{i+1})-g(s_i)|\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $|h| < \delta := \min(\delta_0; x-t_n; s_2-x)$. (пусть $h>0$ (аналогично для $h<0$)

$\Rightarrow$ пользуясь пунктом а), получаем:

$$\underset{[a,x+h]}{\mathrm{Var}}\, g - \underset{[a,x]}{\mathrm{Var}}\, g = \underset{[x,x+h]}{\mathrm{Var}}\, g = \underset{[x,b]}{\mathrm{Var}}\, g - \underset{[x+h;b]}{\mathrm{Var}}\, g \leq \sum_{i=1}^{n} |g(s_{i+1})-g(s_i)| + \frac{\varepsilon}{2} - \underset{[x+h;b]}{\mathrm{Var}}\, g \leq |g(x)-g(x+h)| +$$

$$+ \underbrace{|g(x+h)-g(s_2)| + \sum_{i=2}^{n} |g(s_{i+1})-g(s_i)|}_{\leq \underset{[x+h;b]}{\mathrm{Var}}\, g} + \frac{\varepsilon}{2} - \underset{[x+h;b]}{\mathrm{Var}}\, g \leq \underbrace{|g(x)-g(x+h)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \text{. чтд.}$$