Летний научный выезд Фонда "Институт "Вега"

Выживающие стратегии в модели рынка с континуальным числом агентов

Нина Бадулина Дмитрий Шатилович

Руководитель: Михаил Валентинович Житлухин

Фонд "Института "Вега"

July 18, 2023

Как нужно инвестировать?

Изображение создано нейросетью по запросу «Человек не знает, в какой из конкурирующих стартапов инвестировать».

Правила игры

- $M \geq 2$ агентов
- $N \geq 2$ "короткоживующих" активов

Рассмотрим 1-й раунд игры:

1. В начаде раунда каждый агент распределяет свой капитал среди активов.
2. Случайным образом выбирается лишь один актив, который произведет выплату на этом раунде. Пусть это актив n.
3. Агенты, которые вложили свои деньги в актив n, получают выплату: если деньги агента m составляют 30% от всех вложений на этом раунде в актив n, то он получает 30% от выплаты.

На следующих раундах процедура повторяется.

Модель рынка с конечным числом агентов (L. Blume, D. Easley)

Удобно ввести обозначение $\lambda_{t,n}^m$ – доля капитала, которую m-й агент вкладывает в актив n на раунде t.

Вектор $\lambda_t^m = (\lambda_{t,1}^m, \ldots, \lambda_{t,N}^m)$ показывает, как агент m распределяет свой капитал по активам. Этот вектор принято называть **стратегией** агента m.

Важные предположения:

1. $\lambda_{t,n}^m \geq 0, n = 1, \ldots N,$
2. $\sum_{n=1}^N \lambda_{t,n}^m = 1.$

$$\lambda_t^m \in \Delta^N := \{a \in \mathbb{R}_+^N : a_1 + \ldots + a_N = 1\}.$$

Капитал агентов

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство.

Введем W_t^m – капитал m-го агента после t раундов игры.

Начальный капитал:

1. W_0^m не случайный,
2. $W_0^m > 0$ для каждого m,
3. $\sum_{m=1}^M W_0^m = 1$.

Эволюция капитала:

$$W_{t+1}^m(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_{t,n}^m W_t^m(\omega)}{\sum_{l=1}^M \lambda_{t,n}^l W_t^l(\omega)} X_{t+1,n}(\omega), \quad t \geq 0,$$

где $X_{t,n} = 1$, если в раунде t произошел случайных исход n и $X_{t,n} = 0$ иначе.

Асимптотическое поведение капитала

Как будет вести себя капитал при $t \to \infty$?

Общий капитал агентов не меняется:

Предложение

$\sum_{m=1}^{M} W_t^m = 1$ *для всякого* $t \geq 0$.

Капитал конкретного агента зависит от выбранной им стратегии, а также стратегий других агентов.

"Правильные" стратегии:

- $\inf\limits_{t \geq 0} W_t^m > 0$ **(выживающая стратегия)**,
- $\lim\limits_{t \to \infty} W_t^m = 1$ **(доминирующая стратегия)**.

Основной результат для конечного числа агентов

Далее считаем, что $X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р.с.в.

Теорема (L. Blume, D. Easley, 1992)

Стратегия $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_N^*)$, *где*

$$\lambda_n^* = \mathbb{E}X_n \quad n = 1, \ldots, N,$$

является доминирующей.

Интерпретация: $\mathbb{E}X_n = \mathrm{P}(\text{выпал исход n})$.

Цель обобщения - ответить на вопрос:

Что делать, если агентов континуальное число?

Почему важно исследовать модель с континуальным числом агентов?

Если в игре присутствует лишь конечное число стратегий, то доминирующей среди них может не оказаться. В модели с континуальным числом агентов можно считать, что все стратегии участвуют в игре.

- Пусть в игре присутствует доминирующая стратегия. Тогда известно асимптотическое поведение капитала.
- Пусть распределение вектора $(X_1, \ldots X_N)$ неизвестно. Как его найти?
  1. Симулируем игру, в которой имеются все стратегии(в том числе и доминирующая).
  2. Спустя достаточно большое количество раундов капитал начнет собираться в окрестности доминирующей стратегии λ^*.
  3. Находим $P(X_i = 1) = \lambda_i^*$.
- Используя данный алгоритм, можно предсказывать разорение компании: рассматриваем игру, в которой агенты делают ставки на то, разорится компания или нет.

Идея построения новой модели

Важные замечания:

- Нет необходимости знать, какую стратегию выбрал себе каждый из агентов.
- Достаточно иметь информацию о том, какая часть общего капитала вложена в соответствующую стратегию.

Далее работаем лишь с множеством всех стратегий

$$\Delta^N = \{a \in \mathbb{R}_+^N : a_1 + \ldots + a_N = 1\}.$$

Модель с континуумом агентов

Важно: Теперь мы рассматриваем только стратегии, не зависящие от времени.

Распределением капитала на рынке в момент $t \geq 0$ будем называть случайную меру $\mu_t(\omega)$ на $(\Delta^N, \mathcal{B}(\Delta^N))$.

Интерпретация: $\mu_t(A)$, $A \in \mathcal{B}(\Delta^N)$, выражает капитал группы агентов, которые используют стратегии из множества A.

Какой должна быть последовательность μ_t?

Конечное число агентов

1. W_0^m не случайный,
2. $\sum_{m=1}^{M} W_t^m = 1$,
3. $W_{t+1}^m =$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_{t,n}^m W_t^m}{\sum_{l=1}^{M} \lambda_{t,n}^l W_t^l} X_{t+1,n}.$$

Континуум агентов

1. μ_0 не случайная,
2. $\mu_t(\Delta^N) = 1$,
3. $\mu_{t+1}(A) =$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\int_A \lambda_n \mu_t(d\lambda)}{\int_{\Delta^N} \lambda_n \mu_t(d\lambda)} X_{t+1,n}.$$

Основной результат

Стратегия λ^* называется *доминирующей*, если для любого начального распределения капитала μ_0 такого, что $\lambda^* \in \operatorname{supp}\mu_0$ выполнено

$$\mu_t \to \delta_{\lambda^*} \text{ слабо п.н. при } t \to \infty,$$

где δ_{λ^*} является мерой Дирака с носителем в точке λ^*.

Основной результат работы:

Теорема

Стратегия $\lambda^* = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$ является доминирующей в модели с континуумом агентов.

Доминирующая стратегия как экстремальное значение

В процессе доказательства был получен следующий результат:

Предложение

Стратегия λ^* *является доминирующей* $\iff \lambda^*$ *– точка максимума функции* $\varphi(\lambda) = \lambda_1^{\mathbb{E}X_1} \dots \lambda_N^{\mathbb{E}X_N}$ *на множестве* Δ^N.

Отсюда возникает вопрос: Всякая ли "правильная" стратегия обладает экстремальным свойством?

Результаты работы

- Построено обобщение модели Blume - Easley на континуальное число агентов.
- Доказана теорема о доминирующей стратегии для конечного числа агентов.
- В процессе доказательства получен новый метод поиска доминирующих стратегий, который опирается на исследование экстремальных значений.

Литература

[1] L. Blume and D. Easley, *Evolution and market behavior.*, Journal of Economic Theory, 58(1):9–40, 1992.
[2] R. Amir, I.V. Evstigneev, K.R. Schenk-Hoppé. *Asset market games of survival: a synthesis of evolutionry and dynamic games.*, Annals of Finance, 2013.
[3] I. Sason, *On reverse Pinsker inequalities.*, arXiv:1503.07118, 2015.
[4] R. Amir, I.V. Evstigneev, K.R. Schenk-Hoppé, *Local stability analysis of a stochastic evolutionary financial market model with a risk-free asset*, Math Finan Econ., (2011)5:185–202.
[5] Martial Agueh, Guillaume Carlier, *Barycenters in the Wasserstein space*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2011, 43 (2), 904–924.

План доказательства

1. Определение доминирующей стратегии эквивалентно следующему: если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu_0(B_\varepsilon(\lambda^*)) > 0$, то почти наверное для любого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_t(B_\varepsilon(\lambda^*)) = 1$.
2. Можно выбрать конечный набор $\lambda_i \in \Delta^N \setminus B_\varepsilon(\lambda^*)$ таких, что $\Delta^N \setminus B_\varepsilon(\lambda^*) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon/2}(\lambda_i)$.
3. Достаточно доказать, что при некотором выборе δ выполнено $\frac{\mu_t(B_\delta(\lambda^*))}{\mu_t(B_{\varepsilon/2}(\lambda_i))} \to \infty$.
4. Обозначим $Z_t = \ln \frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)}$. При достаточно малом δ имеет место оценка $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{Z_t}{t} > \frac{\varepsilon^2}{16}$.

Доказательство пункта 4

1. $Z_t = Z_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(Z_{u+1} - Z_u) = Z_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(\mathbb{E}_u Z_{u+1} - Z_u) + \sum_{u=1}^{t-1}(Z_{u+1} - \mathbb{E}_u Z_{u+1})$.
2. Имеется асимптотическое равенство $\mu_t(A) \approx \dfrac{\int_A \left[s_1^{\mathbb{E}X_1} \dots s_N^{\mathbb{E}X_N}\right]^t \mu_0(ds)}{\int \left[s_1^{\mathbb{E}X_1} \dots s_N^{\mathbb{E}X_N}\right]^t \mu_0(ds)}$
3. Пусть $\partial_\gamma \Delta^N$ - точки симплекса, отстающие от границы на не более чем γ. Тогда найдется достаточно маленькое число γ, для которого $\mu_t(\partial_\gamma \Delta^N) \to 0$ при $t \to \infty$.
4. $\sum_{u=1}^{t-1}\left[Z_{u+1} - \mathbb{E}_u Z_{u+1}\right]$ является квадратично интегрируемым мартингалом.
5. В силу УЗБЧ для мартингалов $\frac{1}{t}\sum_{u=1}^{t-1}(Z_{u+1} - \mathbb{E}_u Z_{u+1}) \to 0$.
6. Положим $D_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$. Тогда при достаточно малом δ имеем $\mathbb{E}_t D_{t+1} > \frac{\varepsilon^2}{16}$.