(18) Дифференциальные уравнения 1-ого порядка. Теорема о $\exists$ и ! -ти.

Опр. Диффер. уравнением 1-ого порядка назыв. ур-ие вида: $\dot{x} = v(x, t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $v: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

Опр. Решением дифф. ур-ия назыв. ф-ция $\varphi(t)$, $\varphi(t): (a, b) \to \mathbb{R}^n$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ / $\forall t \in (a, b)$: $\frac{d\varphi}{dt}\Big|_t = v(\varphi(t), t)$

Опр. Ф-ция v удовл. условию Липшица в обл. D по x, если $\exists$ $C = const \geq 0$ / для $\forall$-ых $(t, x_1), (t, x_2) \in D$: $|v(t, x_1) - v(t, x_2)| < C|x_1 - x_2|$

Опр. $\begin{cases} \dot{x} = v(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ – отыскание решения этой $\{$-мы называется Задачей Коши, где $(t_0, x_0) \in D$

Теорема ($\exists$!): Для ур-ия $\dot{x} = v(t, x)$, $v \in C^0(D)$, $v \in Lip_x(D)$ решение ЗК с $(t_0, x_0) \in D$ лок. вблизи т. (t_0, x_0) $\exists$-ет и !-но. Более того $\forall$-ые два решения этой задачи совпадают на пересечении их промежутков определения.

a) $\exists$ $x = x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ – решение, т.е. $\dot{x}(t) = v(t, x(t))$ где $(t, x(t)) \in D$, $t \in (\alpha, \beta)$

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} v(\tau, x(\tau))d\tau \Rightarrow x(t) = \overbrace{x(t_0)}^{=x_0} + \int_{t_0}^{t} v(\tau, x(\tau))d\tau$$

интегральное уравнение

т.е. решение ЗК является решением интегр. ур-ия

б) Если ~~непр.~~ непрер. $x(t)$ на $t \in (\alpha, \beta)$ – решение интегр. уравнения, то в силу $v \in C^0(D) \Rightarrow$

у правой части $\int$-ного ур-я есть производная
Эта производная $= v(t, x(t)) \Rightarrow x = x(t)$ - диффер. ф-ция
$\dot{x} = v(t, x(t)) \Rightarrow x = x(t)$ - решение $\int$ ого ур-я является решением ДУ и при $t = t_0$: $x(t_0) = x_0 \Rightarrow$ решение ЗК

в) Возьмём $B_r = \{(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 \leq r^2, r > 0\} / B_r \subset D$
и $\exists m := \max_{B_r} |v(t,x)|$ (B_r - $\exists$-ет, т.к. D - откр. область и $|\dot{x}| \leq m$)

Покажем, что решение нашей ЗК $\exists$-ет на $[t_0 - d, t_0 + d]$
Положим: $x_0(t) \equiv x_0$,
$x_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} v(u, x_0(u))du$
$\vdots$
$x_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} v(u, x_{k-1}(u))du$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

На $I = [t_0 - d, t_0 + d]$ графики этих ф-ций находятся в B_r, т.к. $|x_k(t) - x_0| \leq m|t - t_0| \leq md$

Р-им $S_{n+1} = x_{n+1}(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + \ldots$ $(*)$
если ряд S_{n+1} сходится, то ряд $\{x_{n+1}\}$ тоже сходится

$\exists L > 0$ - const для $v \in Lip_x(D) \Rightarrow$

1) $|x_1(t) - x_0(t)| = |\int_{t_0}^{t} \underbrace{v(u, x_0(u))}_{\leq m} du| \leq m|t - t_0|$

2) $|x_2(t) - x_1(t)| = |\int_{t_0}^{t} \underbrace{(v(u, x_1(u)) - v(u, x_0(u)))}_{\leq L|x_1(u) - x_0(u)|} du| \leq \int_{t_0}^{t} Lm|u - t_0|du \leq \frac{mL|t-t_0|^2}{2!}$

3) По индукции:
$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{mL^n |t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ - ряд абс. сходится из таких величин

$\Rightarrow x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + \ldots$ - ряд сход. абс. (по мажор. признаку) и р/м-о на I
(т.к. $\frac{mL^n}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1} \leq \frac{mL^n}{(n+1)!} d^{n+1}$ - сходится ряд)

$\Rightarrow (*)$ сумма функц. ряда непрерывна на I, т.е.
$x_{n+1}(t) \underset{n \to \infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} x(t)$ и $x_0 + \int_{t_0}^{t} v(u, x_n(u))du \underset{n \to \infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} \int_{t_0}^{t} v(u, x(u))du$ $\rightarrow$

(т.к. $x_n \to x$, v - непр. и $\int_{t_0}^{t}$ - определ.)

$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(u, x(u))du$

$\left(\left| \int_{t_0}^{t} v(u, x_n(u))du - v(u, x(u))du \right| \leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|\ldots|}_{\leq \mathcal{L}|x_n(u) - x(u)|} du \leq \right.$

док-ли р/м-ую сходимость

$\leq \mathcal{L}|t - t_0| \max_{I} |x(u) - x_n(u)|$

$\Rightarrow$ Решение есть на этом промежутке

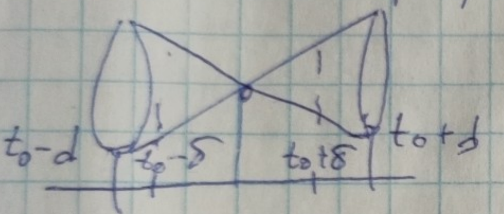
Промежуток $\exists$-ия решения оценим через

ρ - расстояние от т. (t_0, x_0) до ∂D и $m = \max_{D} |v|$

$\Rightarrow d^2 + m^2 d^2 = \rho^2 \Rightarrow d = \frac{\rho}{\sqrt{m^2+1}}$

г) $\triangleleft$-им графики лежащие в конусе

и посл-ть $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(u, x_n(u))du$



$\rho(x_{n+1}(t), x(t)) = \max_{I} |x_{n+1}(t) - x(t)|$,

т.е. $\rho(x_{n+1}(t), x_n(t)) = \max_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] =: I} \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{|v(u, x_n(u)) - v(u, x_{n-1}(u))|}_{\leq \mathcal{L}|x_n(u) - x_{n-1}(u)| \leq \mathcal{L}\rho(x_n(u), x_{n-1}(u))} du \right| \leq$

$\leq \mathcal{L} \underbrace{|t - t_0|}_{\leq d} \rho(x_n(t), x_{n-1}(t)) \leq d\mathcal{L}\rho(x_n(t), x_{n-1}(t))$

при $\mathcal{L}d < 1$ отобр. $f: x_n \to x_{n+1}$ - сжимающее

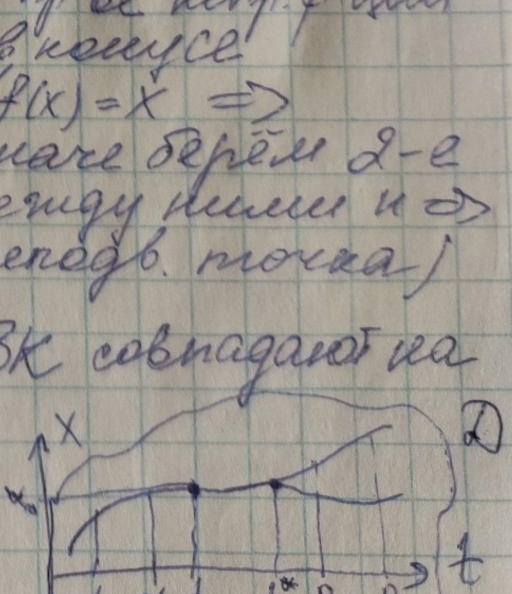
т.е. $\rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) < \mathcal{L}d\rho(f^{n-1}(x), f^n(x))$

полное пр-во

$\hookrightarrow$ посл-ть $(f^n(x_0))$ - фундаментальна в пр-ве непр. ф-ций с графиком в конусе

$\Rightarrow$ У этого отобр. !-кая неподв. т. $x \,/\, f(x) = x$ $\Rightarrow$ решение на I единственно (иначе берём 2-е неподв. точки и возьмём ρ между ними и $\Rightarrow$ ρ уменьшилось $\Rightarrow \underset{x}{\overset{o}{}}$ $\Rightarrow$ 1-а неподв. точка)

д) Осталось док-ть, что $\forall$ реш. ЗК совпадают на непр. области определения.



От противного: б.о.о. разошлись справа

т.е. $\exists\, t^* / t_0 < t^* < \min\{\beta_1, \beta_2\}$, $(t^*, x(t^*)) \subset D$ и в t^* - совпадают

слева до t^* - решения совпадают, после t^* разошлись

$\Rightarrow t_0 = t^*$, т.к. начал. усл. ЗК совпадают $\Rightarrow$ решение ЗК с $(t^*, x(t^*))$ $\exists!$ вблизи t^* $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ♀ с выбором t^* $\triangle$