Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра теории вероятностей

Сингулярные интегральные уравнения

Работа студенток 509 группы

Акбар Екатерины
Кузнецовой Анастасии
Токаевой Александры

Преподаватель:
Е.А. Бадерко

Москва — 2022

Содержание

Аннотация

В этой главе мы рассмотрим одномерные сингулярные интегральные уравнения, включающие главные значения Коши, которые возникают из краевых задач для голоморфных функций. Исследования этих интегральных уравнений с ядрами Коши Гаховым, Мусхелишвили, Векуа и другими оказали большое влияние на дальнейшее развитие общей теории сингулярных интегральных уравнений. Для нашего введения в интегральные уравнения они обеспечат применение общей идеи регуляризации сингулярных операторов, как описано в главе 5. Мы предполагаем, что читатель знаком с базовым комплексным анализом.

1 Непрерывность по Гёльдеру

Для нашего исследования сингулярного интеграла нам сначала нужно ввести понятие непрерывности по Гёльдеру.

Определение 1 (7.1). *Вещественная или комплекснозначная функция φ, определенная на множестве $G \subset \mathbb{R}^m$, называется равномерно непрерывной по Гёльдеру с показателем $0 < \alpha \leq 1$, если существует постоянная C такая, что*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

для всех $x, y \in G$. Через $C^{0,\alpha}(G)$ мы обозначаем линейное пространство всех функций, определенных на G, которые ограничены и равномерно непрерывны по Гёльдеру с показателем α. Пространство $C^{0,\alpha}(G)$ называется пространством Гёльдера.

Заметим, что каждая равномерно непрерывная функция Гёльдера равномерно непрерывна, но обратное неверно. Мы проиллюстрируем на двух примерах, что равномерно непрерывные функции Гёльдера находятся между непрерывными и дифференцируемыми функциями. Функция $\varphi : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, заданная $\varphi(x) = \frac{1}{lnx}$ для

$x \in (0, \frac{1}{2}]$ и $\varphi(0) = 0$, является равномерно непрерывной, но не равномерно непрерывной по Гёльдеру. Функция $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, заданная $\psi(x) = \sqrt{x}$, равномерно непрерывна по Гёльдеру с показателем степени $\frac{1}{2}$, но не непрерывно дифференцируемым на $[0,1]$. В общем случае, согласно теореме о среднем значении, непрерывно дифференцируемая функция на выпуклом множестве с ограниченными производными равномерно непрерывна по Гёльдеру с показателем степени 1.

Теорема 1 (7.2)**.** *Пространство Гёльдера $C^{0,\alpha}(G)$ является банаховым пространством с нормой*

$$||\varphi||_\alpha := \sup_{x\in G}|\varphi(x)| + \sup_{x,y\in G,\, x\neq y} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha} = ||\varphi||_\infty + |\varphi|_\alpha.$$

Заметим, что произведение двух равномерно непрерывных функций Гёльдера φ и ψ снова равномерно непрерывно по Гёльдеру

$$||\varphi\psi||_\alpha \leq ||\varphi||_\infty ||\psi||_\infty + ||\varphi||_\infty |\psi|_\alpha + |\varphi|_\alpha ||\psi||_\infty \leq ||\varphi||_\alpha ||\psi||_\alpha.$$

Лемма 1 (7.3)**.** *Предположим, что функция φ удовлетворяет $|\varphi(x)| \leq M$ для всех $x \in G$ и*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

для всех $x, y \in G$ с $|x-y| \leq a$ и некоторыми константами a, C, M и $0 < \alpha \leq 1$. Тогда $\varphi \in C^{0,\alpha}(G)$ с

$$||\varphi||_\alpha \leq M + \max\left(C, \frac{2M}{a^\alpha}\right).$$

В частности, из леммы 1 мы видим, что для $\alpha < \beta$ любая функция $\varphi \in C^{0,\beta}(G)$ также содержится в $C^{0,\alpha}(G)$. Для этого вложения у нас есть следующее свойство компактности.

Теорема 2 (7.4)**.** *Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$ и пусть G компактно. Тогда операторы вложения*

$$I^\beta : C^{0,\beta}(G) \to C(G)$$

и

$$I^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \to C^{0,\alpha}(G)$$

компактны.

2 Интегральный оператор Коши

Пусть D– ограниченная и односвязная область в комплексной плоскости. Мы обозначим его границу через $\Gamma := \partial D$ и предположим, что он относится к классу C^2. Вектор нормали ν направлен вовне D. Для комплексного интегрирования по контуру Γ мы предполагаем, что направление интегрирования против часовой стрелки.

Интеграл Коши

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$$

с плотностью $\varphi \in C(\Gamma)$ определяет функцию, голоморфную в $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$ и в D. Очевидно, что для z, изменяющегося в открытой области, не пересекающейся с Γ, подынтегральное выражение непрерывно относительно ζ и непрерывно дифференцируемо относительно z. Следовательно, мы можем дифференцировать, чтобы проверить уравнения Коши-Римана для f. Иногда мы будем называть функцию, которая голоморфна в $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$ и в D, *кусочно-голоморфной.*

В оставшейся части этой главы мы всегда будем предполагать, что $\alpha \in (0, 1)$ для показателя Гёльдера, несмотря на то, что часть наших результатов остается действительной для $\alpha = 1$.

Теорема 3 (7.5)**.** *Для плотности $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$ интеграл Коши существует как главное значение Коши*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma\backslash\Gamma(z;\rho)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

для всех $z \in \Gamma$. Здесь $\Gamma(z;\rho) := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \le \rho\}$.

Теорема 4 (Сохоцкий–Племель, 7.6)**.** *Для плотности $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ голоморфная функция f, определяемая интегралом Коши*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma, \tag{1}$$

можно продолжить равномерно непрерывно по Гёльдеру из D в $\bar{D}$ и из $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$ в $\mathbb{C}\backslash D$ с предельным значением

$$f_{\pm}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \mp \frac{1}{2}\varphi(z),\ z\in\Gamma, \tag{2}$$

где $f_{\pm}(z) = \lim\limits_{h\to+0} f(z \pm h\nu(z))$*. Кроме того, выполняются неравенства*

$$||f||_{\alpha,D} \leq C||\varphi||_{\alpha},\ ||f||_{\alpha,\mathbb{C}\backslash D} \leq C||\varphi||_{\alpha}$$

для некоторой константы C, зависящей от α и Γ.

Следствие 1 (7.7)**.** *Интегральный оператор Коши $A : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\Gamma)$, определенный следующим образом*

$$(A\varphi)(z) := \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ z\in\Gamma,$$

ограничен.

В качестве первого применения теоремы Сохоцкого-Племеля4 мы решаем задачу нахождения кусочно-голоморфной функции с заданным разрывом вдоль контура Γ.

Теорема 5 (7.8)**.** *Пусть $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$. Тогда существует единственная функция f, голоморфная в D и $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$, которую можно продолжить непрерывно из D в $\bar{D}$ и из $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$ в $\mathbb{C}\backslash D$, удовлетворяющая граничному условию*

$$f_{-} - f_{+} = \varphi \ \text{ на } \Gamma,$$

и для которой $f(z)\to 0,\ z\to\infty$, равномерно для всех направлений. Эта функция задается формулой (1)

В качестве второго применения теоремы4 мы сформулируем необходимые и достаточные условия существования голоморфной функции в D или в $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$ с заданными граничными значениями.

Теорема 6 (7.9). *Для заданной функции $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, существует функция f, голоморфная в D и непрерывная в $\bar{D}$ с граничными значениями $f = \varphi$ на Γ тогда и только тогда, когда φ является решением однородного интегрального уравнения второго рода*

$$\varphi - A\varphi = 0.$$

Решение задается формулой (1).

Теорема 7 (7.10). *Интегральный оператор Коши A удовлетворяет*

$$A^2 = I.$$

Заметим, что теорема 7 является еще одним указанием на то, что интегральный оператор Коши A не может быть компактным.

Напомним (см. стр. 40), что два нормированных пространства X и Y с невырожденной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ называются **двойственной системой** и обозначаются $\langle X, Y \rangle$.

Теорема 8 (7.11). *Операторы A и $-A$ сопряжены относительно двойственная системы $\langle C^{0,\alpha}(\Gamma), C^{0,\alpha}(\Gamma) \rangle$ с невырожденной билинейной формой*

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_\Gamma \varphi(z)\psi(z)dz,\ \varphi, \psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma).$$

Пример 1 (7.12). *Пусть Γ– единичная окружность. Затем, подставляя $z = e^{it}$, $\zeta = e^{i\tau}$, находим*

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\tau - t}{2} + i\right)d\tau,$$

т. е. оператор A может быть выражен в виде

$$(A\varphi)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left\{\cot\frac{\tau - t}{2} + i\right\}\varphi(e^{i\tau})d\tau,\ t \in [0, 2\pi],$$

с интегралом, который следует понимать как главное значение Коши. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\tau - t}{2}\widetilde{\varphi}(\tau)d\tau = \widetilde{\psi}(t),\ t \in [0, 2\pi], \tag{3}$$

в пространстве $C^{0,\alpha}[0,2\pi]$. *С*

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{t}{2}dt = 0,$$

интегрируя (3) *относительно* t *и меняя порядок интегрирования (используем теорему 8 для* $\psi(z) = 1/z$ *и преобразуем интегралы), мы находим, что*

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{\psi}(t)dt = 0, \tag{4}$$

является необходимым условием разрешимости (3). *Этого также достаточно, потому что, используя* $A^2 = I$, *мы видим, что при выполнении* (3) *общее решение* (3) *задается*

$$\widetilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cot\frac{\tau - t}{2}\widetilde{\psi}(\tau)d\tau + c,\ t \in [0,2\pi], \tag{5}$$

где $c-$ *произвольная константа.* □

3 Задача Римана

Задача Римана Найти функцию, голоморфную в D и в $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$, которая может быть продолжена равномерно непрерывно по Гельдеру из D в $\bar{D}$ и из $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$ в $\mathbb{C}\backslash D$ так, чтобы удовлетворять граничному условию

$$f_- = gf_+ + h \text{ на } \Gamma \tag{7.17}$$

и

$$f(z) \to 0, z \to \infty \tag{7.18}$$

равномерно по всем направлениям. Здесь g и h — заданные равномерно непрерывные по Гельдеру функции на Г.
Напомним, что $f_\pm(z) = \lim\limits_{h\to+0} f(z \pm h\nu)$, ν — внешняя нормаль.

Перед тем, как дать решение задачи Римана в случае, когда g нигде не обращается в ноль на Г, мы покажем связь этой задачи с интегральными уравнениями.

Теорема 7.13 Пусть $a, b, h \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$. Тогда ингеграл Коши (7.11)

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$$

отображает решения $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ интегрального уравнения

$$a\varphi + bA\varphi = h \tag{7.19}$$

линейно и биективно в решения f задачи Римана с граничными условиями

$$(a+b)f_- = (a-b)f_+ + h \text{ на } \Gamma \tag{7.20}$$

Определение 7.14 Пусть g — комплекснозначная и нигде не обращающаяся в ноль функция, определенная на контуре Γ. Индексом функции g называется целое число $ind\ g$, равное приращению аргумента функции вдоль контура при движении против часовой стрелки, деленому на 2π:

$$ind\ g := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d \arg g.$$

Также индекс кривой g можно выразить через логарифм g по формуле:

$$ind\ g := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln g.$$

Теперь с помощью теооремы Сохоцкого-Племеля мы найдем явное решение однородной задачи Римана.

Теорема 7.15 Пусть $g \in C^{0,\alpha}$ — нигде не обращающаяся в ноль функция с $ind\ g = \kappa$. Тогда существует единственная кусочноголоморфная функция f_0, удовлетворяющая однородному граничному условию

$$f_{0-} = g f_{0+} \text{ на } \Gamma$$

и

$$\lim_{z \to \infty} z^\kappa f_0(z) = 1$$

равномерно по всем направлениям. Она называется каноническим решением однородной задачи Римана, обладает свойством $f_0(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$, и равномерно непрерывна по Гёльдеру вплоть до границы.

Из доказательства мы замечаем, что произвольная кусочно-голоморфная функция, удовлетворяющая граничному условию $f_- = gf_+$ на Γ получается из канонической функции f_0 умножением на произвольную целую функцию.

Теорема 7.16 В условиях теоремы 7.15, однородная задача Римана допускает $max(\kappa, 0)$ линейно независимых решений.

4 Интегральные уравнения с ядром Коши

Для $0 < \alpha, \beta \leq 1$ за $C^{0,\beta,\alpha}$ обозначим множество всех функций k, определенных на $\Gamma \times \Gamma$, удовлетворяющих условию

$$|k(z_1, \zeta_1) - k(z_2, \zeta_2)| \leq M(|z_1 - z_2|^\beta + |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha) \tag{7.21}$$

для всех точек $z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma$ и некоторой константы M, зависящей от функции k.

Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$ и предположим, что $a \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ и $k \in C^{0,\beta,\alpha}(\Gamma \times \Gamma)$. Тогда оператор $K : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\Gamma)$, определенный по формуле

$$(K\varphi)(z) := a(z)\varphi(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{k(z,\zeta)}{\zeta - z} \varphi(\zeta) d\zeta, \ z \in \Gamma$$

называется **сингулярным интегральным оператором с ядром Коши**.

Оператор $K^0 : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\Gamma)$, определенный по формуле

$$(K^0\varphi)(z) := a(z)\varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in \Gamma,$$

где $b(z) := k(z, z), \ z \in \Gamma$, называется **доминантной частью оператора** K. Относительно коэффицентов a и b доминантной части мы будем предполагать, что $a^2 - b^2$ не обращается в ноль нигде на Г. Доминантная часть может быть записана в короткой форме $K^0 = aI + bA$, и она ограничена по предложению 7.7. Разбиение оператора K на доминантную часть K^0 и остаток $K - K^0$ справедливо по следующей теореме.

Теорема 7.17 Сингулярный интегральный оператор K ограничен, а разность $K - K^0$ — компактный оператор из $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ в $C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Теорема 7.18 Операторы $K^0 = aI + bA$ и $K^{0'} := aI - Ab$ сопряжены относительно двойственной системы $\langle C^{0,\alpha}(\Gamma), C^{0,\alpha}(\Gamma)\rangle$ с билинейной формой $\langle\varphi,\psi\rangle := \int_\Gamma \varphi(z)\psi(z)dz$ $\varphi,\psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$. Они оба имеют конечномерные ядра, и индекс оператора K^0 дается формулой

$$ind\ K^0 = ind\ \frac{a-b}{a+b}.$$

Начиная с этого момента, для симметрии будем считать, что $k \in C^{0,\beta,\beta}(\Gamma \times \Gamma)$ с $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Сингулярные операторы с ядрами Коши

$$(K\varphi)(z) := a(z)\varphi(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(z,\zeta)}{\zeta - z}\varphi(\zeta)d\zeta,\ z \in \Gamma$$

и

$$(K^{'}\varphi)(z) := a(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(z,\zeta)}{\zeta - z}\varphi(\zeta)d\zeta,\ z \in \Gamma$$

являются сопряженными.

Напомним (см. стр. 55), что если X_1, X_2 – нормированные пространства, а $K : X_1 \to X_2$ — ограниченный линейный оператор, то ограниченный линейный оператор $R : X_2 \to X_1$ называется **регуляризатором** K, если $RK = I - A_l$ и $KR = I - A_r$, где $A_l : X_1 \to X_2$ и $A_r : X_2 \to X_1$ – компактные.

Теорема 7.19 Оператор $(a^2 - b^2)^{-1}K^{'}$ является регуляризатором K.

Теперь мы готовы вывести классические теоремы Нётер.

Теорема 7.20 (Первая теорема Нётер) Сингулярный интегральный оператор с ядром Коши имеет конечномерное ядро.

Теорема 7.21 (Вторая теорема Нётер) Индекс сингулярного интегрального оператора K с ядром Коши дается формулой

$$ind\ K = ind\ \frac{a-b}{a+b}.$$

Теорема 7.22 (Третья теорема Нётер) Неоднородное сингулярное интегральное уравнение

$$K\varphi = h$$

имеет решение тогда и только тогда, когда условие

$$\langle h, \psi \rangle = 0$$

выполнятеся для всех $\psi \in N(K^{'})$.

Теорема 7.23 Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $a \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, и $k \in C^{0,\beta,\beta}(\Gamma \times \Gamma)$, и предположим, что $a^2 - b^2$ не обращается в ноль нигде на Γ, где $b(z) := k(z,z),\ z \in \Gamma$.
Тогда, в Гёльдеровом пространстве $C^{0,\alpha}(\Gamma)$, число линейно независимых решений однородного сингулярного интегрального уравнения

$$a(z)\varphi(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(z,\zeta)}{\zeta - z}\varphi(\zeta)d\zeta = 0,\ z \in \Gamma$$

и его сопряженного уравнения

$$a(z)\varphi(z) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(z,\zeta)}{\zeta - z}\varphi(\zeta)d\zeta = 0,\ z \in \Gamma$$

оба конечны, и их разность равна индексу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln\frac{a-b}{a+b}.$$

Неоднородное сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)\varphi(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(z,\zeta)}{\zeta - z}\varphi(\zeta)d\zeta = h(z),\ z \in \Gamma$$

имеет решение тогда и только тогда, когда условие

$$\int_\Gamma h(z)\psi(z)dz = 0$$

выполнено для всех решений ψ однородного сопряженного уравнения.

Для уравнений первого типа, то есть для уравнений с $a = 0$, выполнено следующее предложение.

Предложение 7.24 Сингулярные интегральные операторы первого типа с ядром Коши имеют индекс ноль.

С помощью примера 7.12, выбирая в качестве $\Gamma-$ единичную окружность, мы получаем следующее предложение, которое содержит равенства, ради которых Фриц Нетер доказывал названные в честь него теоремы.

Предложение 7.25 Пусть a и k — действительнозначные и 2π-периодические функции, и пусть $a^2 + b^2$ строго положительно, где $b(t) := k(t,t)$ для $t \in [0, 2\pi]$. Тогда для сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта

$$a(t)\varphi(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(t,\tau)\cot\frac{\tau - t}{2}\varphi(\tau)d\tau = h(t),\ t \in [0, 2\pi]$$

и для его сопряженного уравнения

$$a(t)\psi(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(t,\tau)\cot\frac{\tau - t}{2}\psi(\tau)d\tau = g(t),\ t \in [0, 2\pi]$$

три теоремы Нётер верны, то есть количества линейно независимых решений однородного уравнения и однородного сопряженного уравнения оба конечны, и их разность равна индексу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\arctan\frac{a}{b}.$$

Неоднородное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда условие

$$\int_0^{2\pi} h(t)\psi(t)dt = 0$$

выполнено для всех решений ψ однородного сопряженного уравнения.

Теорема 7.26 Интегральный оператор Коши A является ограниченным оператором из $L^2(\Gamma)$ в $L^2(\Gamma)$.

В частности, как следствие теоремы 7.26, свойство $A^2 = I$ из теоремы 7.10 остается верным в $L^2(\Gamma)$ и может быть использовано для построения регуляризаторов, как в теореме 7.19.

5 Интеграл Коши и логарифмический потенциал

В интеграл Коши для фиксированного $z \in \mathbb{C}$ подставим $\zeta - z = re^{i\vartheta}$, где $r = |\zeta - z|$ и $\vartheta = arg(\zeta - z)$. Тогда

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_\Gamma d\ln(\zeta - z) = \int_\Gamma d(\ln r + i\vartheta) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial \ln r}{\partial s} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right) ds.$$

Из условий Коши-Римана, примененным к $\ln(\zeta - z) = \ln r + i\theta$, мы имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial \nu(\zeta)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta) - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial s(\zeta)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta). \tag{7.35}$$

Эта формула показывает, что для вещественных плотностей действительная часть интеграла Коши совпадает с логарифмическим потенциалом двойного слоя

$$v(z) := \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial \nu(\zeta)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

Следовательно, из теоремы 7.6 и формулы Сохоцкого-Племеля (7.12) можно вывести следующую теорему.

Теорема 7.27 Логарифмический потенциал двойного слоя v с непрерывной по Гёльдеру плотностью φ может быть продолжен равномерно непрерывно по Гельдеру из D в $\overline{D}$ и из $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$ в $\mathbb{R}^2 \backslash D$ с предельными значениями

$$v_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu(\zeta)} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta) \pm \frac{1}{2} \varphi(z), \qquad z \in \Gamma. \qquad (7.36)$$

Градиент логарифмического потенциала простого слоя

$$u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$$

равен

$$\nabla u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|^2} ds(\zeta), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma.$$

Можно видеть, что градиент потенциала простого слоя u соответствует комплексному сопряжению голоморфной функции f, заданной интегралом Коши. Тогда снова пользуясь теоремой 7.6, можно доказать следующую теорему.

Теорема 7.28 Первые производные логарифмического потенциала простого слоя u с непрерывной по Гёльдеру плотностью могут быть продолжены равномерно непрерывно по Гёльдеру из D в $\overline{D}$ и из $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{D}$ в $\mathbb{R}^2 \backslash D$ с предельными значениями

$$\nabla u_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \nabla \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta) \mp \frac{1}{2} \nu(z) \varphi(z), \qquad z \in \Gamma. \ (7.39)$$

Определим логарифмический интегральный оператор простого слоя S :

$$(S\varphi)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta), \ z \in \Gamma,$$

из $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ в $C^{1,\alpha}(\Gamma)$. Через $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ мы обозначаем нормированное пространство всех функций, определенных на Γ и имеющих равномерно непрерывную по Гёльдеру первую производную, снабженное нормой

$$||\varphi||_{1,\alpha} := ||\varphi||_\infty + ||\varphi'||_{0,\alpha},$$

где простое число указывает дифференцирование по длине дуги.

Из Теоремы 7.28 можно получить следующий результат.

Теорема 7.29 Первые производные логарифмического потенциала двойного слоя v с плотностью $\varphi \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ могут быть продолжены равномерно непрерывно по Гёльдеру из D в $\overline{D}$ и из $\mathbb{R}^2\backslash\overline{D}$ в $\mathbb{R}^2\backslash D$. При этом нормальная производная задается через

$$\frac{\partial v_\pm}{\partial \nu}(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{ds(z)}\int_\Gamma \frac{d\varphi}{ds}(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta),\ z \in \Gamma,\ (7.41)$$

а тангенциальная производная через

$$\frac{\partial v_\pm}{\partial s}(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{d\varphi}{ds}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu(z)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta) \pm \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}(z),\ z \in \Gamma\ (7.42)$$

Это означает, что оператор T, определяемый нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

$$(T\varphi)(z) := \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu(z)}\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu(\zeta)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta),\ z \in \Gamma,\ (7.43)$$

может быть выражен через интегральный оператор простого слоя в виде

$$T\varphi = \frac{d}{ds}S\frac{d\varphi}{ds}. \qquad (7.44)$$

Теперь продемонстрируем, как двумерные задачи Дирихле и Неймана для гармонических функций могут быть решены с помощью интегральных уравнений первого рода. Для краткости обозначения введем оператор $M : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\Gamma)$, так что

$$M\psi := \psi - \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \psi ds.$$

Потенциал простого слоя

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (M\psi)(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \psi ds,\ z \in \mathbb{R}^2\backslash\Gamma,\ (7.45)$$

решает внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле с граничным условием $u = f$ на Γ при условии, что плотность $\psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ решает интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (M\psi)(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta) + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \psi ds = f(z),\ z \in \Gamma \ (7.46)$$

Сократим (7.46) до формы $S_0\psi = f$, где

$$S_0\psi := SM\psi + \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \psi ds \ (7.47)$$

Поскольку S отображает $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ в $C^{1,\alpha}(\Gamma)$, уравнение (7.46) может быть решено только для $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$.

Теорема 7.30 Модифицированный оператор простого слоя $S_0 : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{1,\alpha}(\Gamma)$ является биективным с ограниченным обратным $S_0^{-1} : C^{1,\alpha}(\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Обратимся теперь к задаче Неймана. Потенциал двойного слоя

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu(\zeta)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta),\ z \in \mathbb{R}^2\backslash\Gamma,\ (7.51)$$

решает внутреннюю и внешнюю задачу Неймана с граничным условием $\partial u/\partial\nu = g$ на Γ при условии, что плотность $\varphi \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ решает интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu(z)}\int_\Gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial\nu(\zeta)}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}ds(\zeta) = g(z),\ z \in \Gamma. \ (7.52)$$

Теорема 7.31 Для любого $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, удовлетворяющего условию разрешимости

$$\int_\Gamma g ds = 0 \ (7.53)$$

внутренней и внешней двумерной задачи Неймана, существует решение $\varphi \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ интегрального уравнения первого рода (7.52). Два различных решения могут отличаться друг от друга только константой.

6 Логарифмический потенциал простого слоя на дуге

В заключительном разделе этой главы мы хотели бы показать, как модификации интегральных уравнений первого рода из раздела 5, возникающих из задачи Дирихле или Неймана для внешней стороны дуги, могут быть сведены к случаю замкнутого граничного контура с помощью косинусной подстановки, предложенной Мультхоппом. Для краткости ограничимся случаем потенциала простого слоя для задачи Дирихле.

Предположим, что $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ является дугой из класса C^3, т.е.

$$\Gamma = \{x(s) : s \in [-1, 1]\},$$

где $x : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ является инъективной и трижды непрерывной функцией с $x'(s) \neq 0$ для всех $s \in [-1, 1]$.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа во внешней части дуги Γ: При заданной функции $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ найти ограниченное решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$ уравнения Лапласа

$$\triangle u = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma, \quad (7.54)$$

удовлетворяющее граничному условию Дирихле

$$u = f \text{ на } \Gamma. \ (7.55)$$

Отметим, что помимо непрерывности мы явно не предполагаем никаких условий для поведения решения в двух конечных точках $z_1 := x(1)$ и $z_{-1} := x(-1)$ дуги Γ.

Теорема 7.32 Задача Дирихле для внешней части дуги имеет не более одного решения.

Можно показать, что потенциал простого слоя

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma (M\psi)(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \psi ds, \ z \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma, \ (7.56)$$

решает задачу Дирихле (7.54)-(7.55) при условии, что плотность удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma (M\psi)(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \psi ds = f(z), \ z \in \Gamma. \ (7.58)$$

Предполагается, что плотность ψ имеет вид

$$\psi(z) = \frac{\overline{\psi}(z)}{\sqrt{|z - z_1||z - z_{-1}|}}, \ z \in \Gamma\backslash\{z_1, z_{-1}\}, \ (7.57)$$

где $\overline{\psi} \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Сделаем подстановку $s = \cos t$ в параметризацию $\Gamma = \{x(s) : s \in [-1, 1]\}$, чтобы преобразовать интегральное уравнение (7.58) к виду

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \{-\ln(4[\cos t - \cos\tau]^2) + p(t,\tau)\}\varphi(\tau)d\tau = g(t), \ t \in [0, \pi]. \ (7.59)$$

Здесь

$$\varphi(t) := |\sin t x'(\cos t)|\psi(x(\cos t)), \qquad g(t) := f(x(\cos t)), \ t \in [0, \pi],$$

а ядро p задается через

$$p(t,\tau) := \ln\frac{4[\cos t - \cos\tau]^2}{|x(\cos t - x(\cos\tau))|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} -$$
$$-\frac{1}{|\Gamma|}\int_0^\pi \ln\frac{1}{|x(\cos t - x(\cos\sigma))|^2}|x'(\cos(\sigma))|\sin\sigma d\sigma$$

для $t \neq \tau$. Решение интегрального уравнения (7.58) для функции на ψ на Γ эквивалентно решению интегрального уравнения (7.59) для четной 2π-периодической функции φ.

Теорема 7.33 Для каждого $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ интегральное уравнение простого слоя (7.58) имеет единственное решение ψ вида (7.57) с $\overline{\psi} \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Теорема 7.34 Задача Дирихле (7.54)-(7.55) для внешней части дуги однозначно разрешима.

Список литературы

[1] R.Kress, *Linear Integral Equations*, pp 94-124