⑧ $dX_t = (\mu_t - \rho X_t)dt + \sigma X_t dW_t$

$$E\left(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt\right) \to \max$$

пусть $w(t,x) = \sup\limits_{\substack{X_t = x \\ \pi \in A(x,t)}} E\left(\gamma X_T - \int_t^T e^{-cs} u_s ds\right)$

$\pi \in A(x,t)$ – допустимые стратегии (ну начало в момент t, $X_t = x$)

Пусть $\begin{cases} f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}_+) \\ f(T,x) = \gamma x \end{cases}$

Рассм. $Y_t = f(t, X_t) - \int_0^t e^{-cs} u_s ds$,

и пусть $X_0 = x$.

Если для всех стратегий это супермартингал, то

$$EY_T = E\left(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt\right) \le f(0,x) = EY_0$$

Если для какой-то стратегии это мартингал, то для нее:

$$E\left(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt\right) = f(0,x) \Rightarrow w(0,x) = f(0,x)$$

Используем ф-лу Ито:

$$dY_t = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 X_t^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(u_t - \rho X_t) - e^{-ct} u_t\right)}_{= L^{u_t} f(t, X_t)} dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma X_t dW_t$$

Отсюда ур-е Беллмана:

$$\boxed{\sup_u \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(u - \rho x) - e^{-ct} u\right) = 0}$$

Ответ.