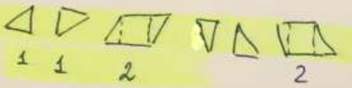
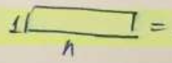
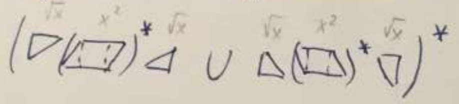
27.09.20. Дискр. матем. д/з от семинара 4 Токаева Александра 409

①


Число способов замощения


= ?

Ре у


Вес = площадь фигурки

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{1-\frac{2x}{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{1-x^2-2x} = 1-\frac{2x}{x^2+2x-1} = 1+\frac{A}{x-(-1+\sqrt{2})}+\frac{B}{x-(-1-\sqrt{2})}$$

$$D = 4+4 = 8$$
$$x_{1;2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

Найдём коэф. A и B:

$$\frac{-2x}{x^2+2x-1} = \frac{A}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+1+\sqrt{2}} = \frac{A(x+1+\sqrt{2})+B(x+1-\sqrt{2})}{x^2+2x-1} = \frac{x\overbrace{(A+B)}^{=-2}+\overbrace{A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2})}^{=0}}{x^2+2x-1.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=-2 \\ A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2})=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-2-A \\ A(1+\sqrt{2})-A(1-\sqrt{2})-2(1-\sqrt{2})=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-2-A \\ 2A\sqrt{2}=2(1-\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ B=-2-A=\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1-x^2}{1-x^2-2x} = 1-\frac{2x}{x^2+2x-1} = 1+\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x+1-\sqrt{2}}+\frac{(-1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x+1+\sqrt{2}} =$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\frac{x}{1-\sqrt{2}}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(-1)}{\frac{x}{1+\sqrt{2}}+1} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1-\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(-1)}{1+\frac{x}{1+\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \underset{n\geq1}{\overset{a_0=1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\left(\frac{-1}{1-\sqrt{2}}\right)^n+(-1)\cdot\left(\frac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^n\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(1-\sqrt{2})^n}-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}\right) = \frac{\cancel{(-1)^n}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{(1-2)^n}\right)$$

Ответ: $a_0 = 1$

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}};\ n\geq1.$$

② Кол-во n-разрядных десятичных чисел без фрагмента 25 = ?

Регул. выражение: (вес = длина посл-ти)

$$\left(1\sqcup\left((2^*\setminus\lambda)(0\sqcup1\sqcup3\sqcup4\sqcup6\sqcup7\sqcup8\sqcup9)\right)\sqcup3\sqcup4\sqcup5\sqcup6\sqcup7\sqcup8\sqcup9\right)\cdot\left(0\sqcup1\sqcup\right.$$

$$\left.\sqcup\left((2^*\setminus\lambda)(0\sqcup1\sqcup3\sqcup4\sqcup6\sqcup7\sqcup8\sqcup9)\right)\sqcup3\sqcup4\sqcup5\sqcup6\sqcup7\sqcup8\sqcup9\right)^*\cdot2^*\sqcup2^*$$

$$\Rightarrow F(x) = \left(\cancel{x}+\left(\frac{1}{1-x}-1\right)8x+7x\right)\cdot\frac{1}{1-\left(2x+\left(\frac{1}{1-x}-1\right)8x+7x\right)}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{8x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\left(9x+8x\cdot\frac{x}{1-x}\right)}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x} = \frac{8x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{9x-x^2}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x} = \frac{8x}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1-10x+x^2}+\frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{8x}{(1-x)(1-10x+x^2)} + \frac{1}{1-x} = \frac{8x+1-10x+x^2}{(1-x)(1-10x+x^2)} = \frac{1-2x+x^2}{(1-x)(1-10x+x^2)} = \frac{1-x}{1-10x+x^2}$$

$$\frac{1-x}{1-10x+x^2} = \frac{A}{x-(5+2\sqrt{6})} + \frac{B}{x-(5-2\sqrt{6})} = \frac{A(x-5+2\sqrt{6})+B(x-5-2\sqrt{6})}{x^2-10x+1.}$$

$x^2-10x+1=0$

$D = 100-4 = 96 = 16\cdot 6$

$x_{1;2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A(-5+2\sqrt{6})+B(-5-2\sqrt{6})=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1-A$$

$$\Rightarrow A(-5+2\sqrt{6}) - A(-5-2\sqrt{6}) - 1(-5-2\sqrt{6}) = 1.$$

$$A(\cancel{-5}+2\sqrt{6}+\cancel{5}+2\sqrt{6}) = 1-(5+2\sqrt{6}) = -4-2\sqrt{6}$$

$$A\cdot 4\sqrt{6} = -2(2+\sqrt{6})$$

$$\Rightarrow A = -\frac{(2+\sqrt{6})}{2\sqrt{6}} \Rightarrow B = -1-A = \frac{-2\sqrt{6}+2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}.}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1-x}{1-10x+x^2} = \frac{-1}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2+\sqrt{6}}{x-(5+2\sqrt{6})} + \frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{x-(5-2\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2+\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{6})-x} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2-\sqrt{6}}{(5-2\sqrt{6})-x} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot(5+2\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5+2\sqrt{6}}} - \frac{(2-\sqrt{6})}{2\sqrt{6}\cdot(5-2\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5-2\sqrt{6}}}$$

$\backslash 5-2\sqrt{6}$ $\quad \backslash (5-2\sqrt{6})^n$ $\quad \backslash 5+2\sqrt{6}$ $\quad \backslash (5+2\sqrt{6})^n$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}(5+2\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{(5+2\sqrt{6})^n} - \frac{(2-\sqrt{6})}{2\sqrt{6}(5-2\sqrt{6})} \cdot \frac{1}{(5-2\sqrt{6})^n} =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})^n - (2-\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})\cdot(5+2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}\cdot(25-24)\cdot(25-24)^n} =$$

$$= \frac{(10-4\sqrt{6}+5\sqrt{6}-12)(5-2\sqrt{6})^n - (10+4\sqrt{6}-5\sqrt{6}-12)(5+2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}} =$$

$$= \boxed{\frac{(\sqrt{6}-2)(5-2\sqrt{6})^n + (\sqrt{6}+2)(5+2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}}}$$

<u>проверка</u>:

$n=0$: $a_0 = \frac{(\sqrt{6}-2)+(\sqrt{6}+2)}{2\sqrt{6}} = 1$ - верно

$n=1$: $a_1 = \frac{(\sqrt{6}-2)(5-2\sqrt{6})+(\sqrt{6}+2)(5+2\sqrt{6})}{2\sqrt{6}} =$

$= \frac{5\sqrt{6}-\cancel{12}-\cancel{10}+4\sqrt{6}+5\sqrt{6}+\cancel{12}+\cancel{10}+4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = 9$ - верно.

③ Найти асимптотику числа решений ур-я $x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = n$ в $\mathbb{Z}_+$ (k – фикс; n – растёт)

Обозн. $F(t), F_1(t), F_2(t), F_3(t) \ldots$ – произв. ф-ции посл-тей $\{a_n\}, \{a_n^1\}, \{a_n^2\}, \{a_n^3\} \ldots$,

где a_n – число решений ур-я $x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = n$

a_n^1 – число решений ур-я $x_1 = n$

a_n^2 – число решений ур-я $2x_2 = n$

a_n^3 – число решений ур-я $3x_3 = n$.

…

a_n^k – число решений ур-я $kx_k = n$.

Видим, что $a_n = \sum\limits_{n_1 + \ldots + n_k = n} a_{n_1}^1 a_{n_2}^2 \ldots a_{n_k}^k$

$\Rightarrow F(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \ldots \cdot F_k(t)$

$F_1(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$

$F_2(t) = \sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \vdots 2}}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t^2}$

⋮

$F_k(t) = \sum\limits_{\substack{n=0 \\ n \vdots k}}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t^k}$

$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^k)}$

Корни знаменателя: $t=1$ – кратности k, и ещё много разных корней из единицы разной степени (может, и кратные), но у них кратность меньше, чем у $t=1$.

$\Rightarrow \varphi(t) = \ldots + \frac{c_1}{1-t} + \frac{c_2}{(1-t)^2} + \ldots + \frac{c_k}{(1-t)^k}$

Заметим, что $a_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(F(t)^{(n)}\right)\Big|_{t=0}$.

Посмотрим, чему равно значение n-й производной в нуле для дробей такого вида.

Для $\frac{c}{a-t}$: $\frac{1}{n!}\left(\frac{c}{a-t}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{c}{n!} \cdot \left((a-t)^{-1}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{c}{(a-t)^{n+1}}\Big|_{t=0} = \frac{c}{a^{n+1}}$

Для $\frac{c}{(a-t)^2}$: $\frac{1}{n!}\left(\frac{c}{(a-t)^2}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{c}{n!}\left((a-t)^{-2}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{c \cdot (-2)(-3)\ldots(-n-1)(-1)^n}{n! \quad (a-t)^{n+2}}\Big|_{t=0} = \frac{c(n+1)}{(a-t)^{n+2}}\Big|_{t=0} = \frac{c(n+1)}{a^{n+2}}$

Для $\frac{c}{(a-t)^3}$: $\frac{1}{n!}\left(\frac{c}{(a-t)^3}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{c}{n!}\left((a-t)^{-3}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{c \cdot (-3)(-4)\ldots(-n-2)\cdot(-1)^n}{n! \ (a-t)^{n+3}}\Big|_{t=0} = \frac{c(n+1)(n+2)}{2(a-t)^{n+3}}\Big|_{t=0} = \frac{c(n+1)(n+2)}{2 \cdot a^{n+3}}$

Для $\frac{c}{(a-t)^k}$: $\frac{1}{n!}\, c\cdot\left((a-t)^{-k}\right)^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{n!}\cdot \frac{c\,(-k)(-k-1)\ldots(-k-(n-1))\,(-1)^n}{(a-t)^{n+k}}\Bigg|_{t=0} = \frac{c\cdot(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{(k-1)!\,(a\cancel{-t})^{n+k}}$

Заметим, что у знаменателя $F(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)}$ все a - по модулю $=1$, т.к это корни из единицы. И наибольшая кратность у $t=1$.

$\Rightarrow$ если $c_k \neq 0$, то асимптотически наибольшим при $n\to\infty$ будет

$$\frac{c_k\cdot(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{(k-1)!} \underset{\text{при } n\to\infty}{\sim} \frac{c_k\cdot n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Как найти c_k?

$c_k = \left((1-t)^k\cdot F(t)\right)\Big|_{t=1}$ — потому что у остальных дробей либо вообще нет в знаменателе $(1-t)$, либо есть, но степень $< k$.

$$\Rightarrow c_k = (1-t)^k\cdot\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^k)}\Bigg|_{t=1} \overset{\uparrow}{=} \frac{(1-t)^k}{(1-t)\underbrace{(1-t)(1+t)}_{\overset{\shortparallel}{1-t^2}}\cdot\underbrace{(1-t)(1+t+t^2)}_{\overset{\shortparallel}{1-t^3}}\cdots\underbrace{(1-t)(1+t+\ldots+t^{k-1})}_{\overset{\shortparallel}{1-t^k}}}\Bigg|_{t=1} =$$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\ldots+b^{n-1})$

$$= \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{1}{k!}$$

$\Rightarrow$ асимптотически $\boxed{a_n \sim \frac{c_k\cdot n^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}}$ $\leftarrow$ ответ