Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 5

1. Итерации Пикара

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$dy_t = Ay_t\,dx_t,$$

которая в координатной записи имеет вид

$$dy_t^i = \sum_{k,m} a_{km}^i y_t^k\,dx_t^m.$$

Здесь a_{km}^i — вещественные числа, x_t — непрерывно дифференцируемая кривая, причем $t \in [0,T]$.

При построении решения с начальным условием y_0 на достаточно малом отрезке $[0,T]$ обычно к отображению

$$F(y) = y_0 + \int_0^{\cdot} Ay_s\,dx_s$$

применяется теорема Банаха о сжимающем отображении и решение является пределом последовательности итераций Пикара

$$y_{t,n} = F(y_{t,n-1}), \quad y_{t,0} = y_0.$$

Выпишем явный вид первых двух итераций Пикара:

$$y_{t,1}^i = y_0^i + \int_0^t \sum_{k,m} a_{km}^i y_0^k\,dx_s^m = y_0^i + \sum_{k,m} a_{km}^i y_0^k \int_0^t dx_s^m,$$

$$y_{t,2}^i = y_0^i + \int_0^t \sum_{k,m} a_{km}^i y_{s,1}^k\,dx_s^m =$$

$$= y_0^i + \sum_{k,m} a_{km}^i y_0^k \int_0^t dx_{u_1}^m + \sum_{k,m,p,q} a_{km}^i a_{pq}^k y_0^p \int_0^t \int_0^{u_2} dx_{u_1}^p\,dx_{u_1}^q.$$

Таким образом, каждая функция $y_{t,n}$ является линейной комбинацией выражений

$$1, \quad \int_0^t dx_{u_1}^{i_1}, \quad \int_0^t \int_0^{u_2} dx_{u_1}^{i_1}\,dx_{u_2}^{i_2}, \quad \ldots, \quad \int_0^t \int_0^{u_n} \ldots \int_0^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_n}^{i_n}.$$

Пусть $x_t\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ — непрерывно дифференцируемая кривая. Положим

$$X_{ab}^{i_1\ldots i_n} = \int_a^b \int_a^{u_n} \ldots \int_a^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_n}^{i_n} = \int_{a<u_1<\ldots<u_n<b} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_n}^{i_n}.$$

Совокупность всех таких выражений обозначаем через $X_{ab}^{(n)}$ и бесконечную последовательность

$$1, \quad X_{ab}^{(1)}, \quad X_{ab}^{(2)}, \quad \ldots, \quad X_{ab}^{(n)}, \quad \ldots$$

называем *сигнатурой* кривой x_t на отрезке $[a,b]$ и обозначается через $S(x_\cdot)$.

Свойства сигнатуры гладкой кривой исследовал в конце 50-х годов прошлого века Kuo–Tsai Chen.

2. Произведение элементов сигнатуры

Через $\mathrm{shuffle}(k,m)$ обозначим множество всех таких перестановок σ на

$$\{1,2,\ldots,k+m\},$$

что $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(k)$ и $\sigma(k{+}1) < \sigma(k{+}2) < \ldots < \sigma(k{+}m)$. Такие перестановки описывают перетасовку карточной колоды, когда она разбивается на две части из k и m карт, которые потом без изменения их порядка вкладываются друг между другом.

Теорема 1. *Пусть $x_t\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ — непрерывно дифференцируемая кривая. Верно равенство*

$$X_{ab}^{i_1\ldots i_k} \cdot X_{ab}^{i_{k+1}\ldots i_{k+m}} = \sum_{\sigma\in \mathrm{shuffle}(k,m)} X_{ab}^{i_{\sigma^{-1}(1)} i_{\sigma^{-1}(2)} \ldots i_{\sigma^{-1}(k+m)}}.$$

Таким образом, произведение двух элементов сигнатуры выражается линейным образом через элементы сигнатуры.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай:

$$X_{ab}^{i_1} \cdot X_{ab}^{i_2} = \int_a^b dx_{u_1}^{i_1} \cdot \int_a^b dx_{u_2}^{i_2} = \int_a^b dx_{u_1}^{i_1} \cdot \int_a^b dx_{u_2}^{i_2} = \int_a^b \dot{x}_{u_1}^{i_1}\, du_1 \cdot \int_a^b \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_2.$$

По теореме Фубини это выражение можно переписать в виде

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \dot{x}_{u_1}^{i_1} \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_1\, du_2.$$

Разбивая квадрат на два треугольника и применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_a^b \int_a^{u_1} \dot{x}_{u_1}^{i_1} \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_2\, du_1 + \int_a^b \int_a^{u_2} \dot{x}_{u_1}^{i_1} \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_1\, du_2 = \int_a^b \int_a^{u_1} dx_{u_2}^{i_2}\, dx_{u_1}^{i_1} + \int_a^b \int_a^{u_2} dx_{u_1}^{i_1}\, dx_{u_2}^{i_2}.$$

Таким образом,

$$X_{ab}^{i_1} \cdot X_{ab}^{i_2} = X_{ab}^{i_1 i_2} + X_{ab}^{i_2 i_1}.$$

Теперь обоснуем общий случай. Имеем

$$X_{ab}^{i_1\ldots i_k} \cdot X_{ab}^{i_{k+1}\ldots i_{k+m}} =$$

$$= \int_{a<u_1<\ldots<u_k<b} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k} \cdot \int_{a<u_k<\ldots<u_{k+m}<b} dx_{u_k}^{i_1} \ldots dx_{u_{k+m}}^{i_{k+m}}.$$

По теореме Фубини это выражение равно

$$\int\limits_{a<u_1<\ldots<u_k<b,\, a<u_k<\ldots<u_{k+m}<b} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_{k+m}}^{i_{k+m}}.$$

Заметим, что множество

$$\{(u_1,\ldots,u_{k+m})\colon\ a<u_1<\ldots<u_k<b,\, a<u_k<\ldots<u_{k+m}<b\}$$

является объединением множества меру нуль и множеств вида

$$\{(u_1,\ldots,u_{k+m})\colon\ a<u_{\sigma^{-1}(1)}<\ldots<u_{\sigma^{-1}(k+m)}<b\},$$

где $\sigma\in \mathrm{shuffle}(k,m)$. Действительно, мы перебираем здесь все возможные упорядочивания координат u_i точек из $[a,b]^{k+m}$, когда $u_1<u_2<\ldots<u_k$ и $u_{k+1}<\ldots<u_{k+m}$. Следовательно, получаем выражение

$$\sum_{\sigma \mathrm{shuffle}(k,m)} \int\limits_{a<u_{\sigma^{-1}(1)}<\ldots<u_{\sigma^{-1}(k+m)}<b} dx_{u_{\sigma^{-1}(1)}}^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \ldots dx_{u_{\sigma^{-1}(k+m)}}^{i_{\sigma^{-1}(k+m)}}.$$

□

3. Единственность

Следующее утверждение показывает, что сигнатура в определенном смысле однозначно задает кривую.

Теорема 2. *Пусть* $x_t\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ *и* $y_t\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ *— непрерывно дифференцируемые инъективные отображения, причем* $\dot{x}_t \neq 0$ *и* $\dot{y}_t \neq 0$ *для всех* $t \in [0,1]$ *и* $x_0 = y_0 = 0$*. Тогда равенство* $S(x.) = S(y.)$ *влечет существование такого возрастающего гомеоморфизма* $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$*, что* $x_{\psi(t)} = y_t$*.*

Рассмотрим случай $d = 1$. Справедливо равенство

$$X_{01}^{(k)} = \frac{(x_1 - x_0)^k}{k!}.$$

Из равенства сигнатур $S(x.) = S(y.)$ получаем равенство $x_1 = y_1$. Следовательно, $x_t\colon [0,1] \to [0,b]$, $y_t\colon [0,1] \to [0,b]$, где $b = x_1 = y_1$ и отображение $\psi = x^{-1} \circ y$ — искомая замена параметра.

В многомерном случае рассуждение сложнее.

Доказательство. Достаточно проверить, что $x.([0,1]) = y.([0,1])$, так как в этом случае замена параметра ψ задается формулой $x^{-1} \circ y$. Отметим, что $\psi(0) = x^{-1}(y_0) = x^{-1}(x_0) = 0$ и ψ — возрастающее отображение.

Рассуждаем от противного. Предположим, что $x_{t_0} \notin y.([0,1])$ для некоторой точки $t_0 \in (0,1)$. Найдется открытый шар $B(x_{t_0}, \delta)$, который не пересекается с $y.([0,1])$. Поскольку $\dot{x}_{t_0} \neq 0$, можно считать, что на некотором интервале

$$I = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset (0,1)$$

выполнено $\dot{x}_t^1 > 0$. Поскольку отображение $x.\colon [0,1] \to x.([0,1])$ является гомеоморфизмом, то множество $x.(I) = V \bigcap x.([0,1])$, где V открытое множество. Пусть $B(x_{t_0}, r) \subset V \bigcap B(x_{t_0}, \delta)$ и g — непрерывная неотрицательная функция, которая рана нулю вне $B(x_{t_0}, r)$, причем $g(x_{t_0}) = 1$. Заметим, что $g(x_t) = 0$ вне I, так как $t \notin I$ влечет $x_t \notin x.(I)$ и, значит, $x_t \notin V \bigcap x.([0,1])$ и $x_t \notin B(x_{t_0}, r)$. Так как функция $g(x_t)\dot{x}_t^1 \geq 0$ и $g(x_{t_0})\dot{x}_{t_0}^1 > 0$, то

$$\int_0^1 g(x_t)\, dx_t^1 > 0.$$

Поскольку шар $B(x_{t_0}, r)$ не пересекается с $y.([0,1])$, то $g(y_t) \equiv 0$ и

$$\int_0^1 g(y_t)\, dy_t^1 = 0.$$

Можно считать, что множества $x.([0,1])$, $y.([0,1])$ и $B(x_{t_0}, r)$ лежат внутри некоторого замкнутого куба. Приближая функцию g на этом кубе многочленом, находим многочлен, для которого справедливо неравенство

$$\int_0^1 P(x_t)\, dx_t^1 \neq \int_0^1 P(y_t)\, dy_t^1.$$

Следовательно, существует такой моном $(x^1)^{m_1}(x^2)^{m_2} \cdots (x^d)^{m_d}$, что

$$\int_0^1 (x_t^1)^{m_1}(x_t^2)^{m_2} \cdots (x_t^d)^{m_d}\, dx_t^1 \neq \int_0^1 (y_t^1)^{m_1}(y_t^2)^{m_2} \cdots (y_t^d)^{m_d}\, dy_t^1.$$

Так как $x_0 = y_0 = 0$, то

$$x_t^i = \int_0^t dx_{u_i}^i, \quad y_t^i = \int_0^t dy_{u_i}^i.$$

Таким образом, выражение $(x_t^1)^{m_1}(x_t^2)^{m_2} \cdots (x_t^d)^{m_d}$ является произведением элементов сигнатуры $S_{0t}(x.)$, а выражение $(y_t^1)^{m_1}(y_t^2)^{m_2} \cdots (y_t^d)^{m_d}$ является произведением элементов сигнатуры $S_{0t}(y.)$. По доказанной выше теореме эти выражения представляются в виде суммы элементов сигнатур и, следовательно, интегралы

$$\int_0^1 (x_t^1)^{m_1}(x_t^2)^{m_2}\cdots(x_t^d)^{m_d}\,dx_t^1 \qquad \int_0^1 (y_t^1)^{m_1}(y_t^2)^{m_2}\cdots(y_t^d)^{m_d}\,dy_t^1$$

являются линейными комбинациями элементов сигнатуры $S_{01}(x.)$ и сигнатуры $S_{01}(y.)$ соответственно, что влечет равенство этих интегралов и приводит к противоречию. □

Приведем теперь без доказательства более общий результат, полученный Kuo–Tsai Chen.

Непрерывная кривая $x_t\colon [a,b]\to\mathbb{R}^d$ называется кусочно регулярной, если отрезок $[a,b]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых x_t является ограничением непрерывно дифференцируемой кривой, у которой в каждой точке $\dot{x}_t\neq 0$. Непрерывная кусочно регулярная кривая x_t называется неприводимой, если для всякой точки $s\in(a,b)$ выполнено условие: не существует таких отрезков $[s_1,s]$ и $[s,s_2]$, что x_t непрерывно дифференцируемая кривая с $\dot{x}_t\neq 0$ на каждом из этих отрезков и $x.([s_1,s]) = x.([s,s_2])$. Две кривые $x_t\colon [a,b]\to\mathbb{R}^d$ и $y_t\colon [c,d]\to\mathbb{R}^d$ эквивалентны, если существует такой возрастающий гомеоморфизм $\psi\colon [c,d]\to[a,b]$ и $x_{\psi(t)} = y_t$.

Теорема 3. *Пусть x_t и y_t — непрерывные кусочно регулярные и неприводимые кривые, причем $x_0 = y_0$. Если $S(x.) = S(y.)$, то кривые x_t и y_t эквивалентны.*

На кривые ограниченной вариации этот результат обобщен в работе B.Hambly, T.Lyons в 2007 г.