

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Эволюционная устойчивость стратегий поведения

Выполнил студент
609 академической группы
Куслина Кристина Николаевна

подпись студента

Научные руководители:
доцент, к.ф.-м.н.
Житлухин Михаил Валентинович
академик РАН
Ширяев Альберт Николаевич

подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Описание модели	5
3	Оптимальные стратегии	6
4	Существование и единственность глобально эволюционно оптимальной стратегии	7
5	Численное исследование достаточных условий для существования эволюционно оптимальной стратегии	12
6	Заключение	16
7	Список литературы	17

1 Введение

Данная дипломная работа посвящена стохастической модели, объясняющей возникновение определенных стратегий поведения в результате действий сил эволюции. Подход, который здесь используется, основан на идеях работ [2, 3, 4], где рассматривалась более простая версия изучаемой модели. Целью этих работ было объяснить существование некоторых особенностей в поведении экономических агентов, которые не согласуются с традиционной точкой зрения в теории игр, предполагающей что все агенты действуют рационально, т.е. наилучшим для себя образом. Так, например, один из основных примеров работы [2] состоит в том, что в некоторых экспериментах участники рандомизируют свое поведение, что не является оптимальной стратегией. Кратко приведем этот пример.

Рассмотрим популяцию особей, каждая из которых сталкивается с бинарным выбором между одним из двух возможных действий, a и b . В 60% случаев условия окружающей среды благоприятны, и действие a приводит к репродуктивному успеху, порождая 3 потомства для особи. В 40% случаев условия окружающей среды неблагоприятны, и действие a приводит к появлению 0 потомков. Предположим, действие b приводит к прямо противоположным результатам – всякий раз, когда a дает 3 потомства, b дает 0, и всякий раз, когда a дает 0, b дает 3. С точки зрения индивида, всегда выбирая ту стратегию, которая имеет более высокую вероятность репродуктивного успеха, вы в среднем получите больше потомства. Однако, если бы все особи в популяции вели бы себя таким “рациональным” образом, то при первом возникновении неблагоприятных условий окружающей среды вся популяция вымрет. Мы предполагаем, что потомство ведет себя идентично своим родителям, поэтому поведение “всегда выбирай a ” не может сохраниться с течением времени. По той же причине “всегда выбирай b ” не может сохраниться с течением времени. На самом деле, в данном примере оптимальной стратегией будет стратегия, рандомизирующая поведение индивида. Эта стратегия заключается в том, что каждый индивид выбирает a в 60% случаев и b в 40% случаев, что соответствует вероятностям репродуктивного успеха и неудачи. В конечном счете именно такого поведения будет придерживаться вся популяция.

Важное наблюдение статьи [2] состоит в том, что поведение, которое не оптимально для конкретного индивида, может оказываться оптимальным для всей популяции. Если предположить, что индивиды не всегда имеют возможность решать некоторую оптимизационную задачу для своих действий (например, в силу трудности такой задачи), то они могут полагаться на предопределенные стратегии поведения, которые передаются в следующие поколения (посредством биологического наследования). Тогда стратегией, преобладающей в популяции, будет та стратегия, которая обеспечивает наибольшую выживаемость и/или увеличение численности популяции, причем эта стратегия может быть отлична от индивидуально оптимальной стратегии.

В модели [2] рассматривается несколько сосуществующих популяций, но между ними не предполагается какого-либо взаимодействия. Целью дипломной работы

было предложить модель с наличием такого взаимодействия и изучить оптимальные стратегии в ней. Подобная модификация представляет интерес в ситуациях, когда скорость увеличения численности популяции может быть ограничена из-за ограниченности доступных ресурсов (например, ограниченность еды или территории для популяций животных) и возникает соперничество популяций за эти ресурсы.

Модель, которая изучается в этой работе, можно кратко описать следующим образом. Модель состоит из M исходных популяций особей (не обязательно людей), которые живут в течение одного периода, производят случайное количество потомства бесполом путем, а затем умирают. В течение своей жизни особи принимают только одно решение: они выбирают один из N возможных вариантов действий, которое влияет на случайное количество потомства, которое они производят. Потомки полностью наследуют родительское поведение. При этом выживут только те модели поведения, которые связаны с репродуктивным успехом, а менее репродуктивно успешное поведение исчезнет благодаря силам естественного отбора. Поведением, а также стратегией в данной работе называется вектор вероятностей, с которыми каждая особь в популяции выбирает одно из N возможных действий. Популяцией мы называем множество особей, следующих одной и той же стратегии.

Основная задача популяции – это максимизировать количество потомков на бесконечном горизонте времени. В данной модели мы будем предполагать, что скорость роста популяции зависит не только от действий самой популяции, но и от действий других популяций. Это можно себе представить, как то, что при выборе каждого действия из N вариантов, в этом варианте имеется ограниченное количество ресурсов. Т.к. от выбора действия зависит количество потомства в популяции, то ограничение ресурсов на прямую скажется на численности популяции в следующем поколении. Поэтому, если все популяции будут выбирать одновременно одинаковые действия, ресурсов на всех потомков может не хватить. Таким образом задается связь между поведением популяций.

Основные результаты, полученные в работе состоят в следующем. Во-первых, введено понятие эволюционно оптимальной стратегии для популяции и такая стратегия найдена в явном виде. Далее рассмотрен случай, когда ни одна из популяций не использует оптимальную стратегию. В этом случае удалось численно продемонстрировать достаточные условия, при которых асимптотически будет преобладать стратегия, которая наиболее близка к оптимальной. Однако, при невыполнении этих условий может оказаться так, что относительная численность двух или более стратегий будет колебаться около оптимальной и, таким образом, в совокупной популяции не будет иметь место преобладание одной стратегии. В работе приведен конкретный пример такой ситуации.

Для нахождения оптимальной стратегии в дипломной работе использовались идеи работы [1], где изучались вопросы об эволюционной оптимальности инвестиционных стратегий на финансовых рынках.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 описана рассматриваемая

модель. В разделе 3 сформулировано понятие эволюционно оптимальной стратегии. В разделе 4 приведена теорема, в которой оптимальная стратегия строится в явном виде. В разделе 5 численно изучаются достаточные условия для существования эволюционно оптимальной стратегии.

2 Описание модели

Рассматривается игра, в которой присутствуют M популяций игроков. Игра состоит из последовательности шагов (раундов), где на каждом шаге игрок может выбрать одно из N действий. Различные действия приводят к различному количеству потомков. Целью игроков является максимизация количества потомков на бесконечном горизонте времени.

Игроки внутри одной популяции характеризуются тем, что каждый из них случайным образом выбирает одно из действий с заданным распределением вероятностей независимо от других игроков. Популяцией мы называем множество игроков, следующих одной и той же стратегии. Считается, что игроки являются “бесконечно малыми”, поэтому при изучении изменения численностей популяций можно будет считать, что доля игроков в популяции, выбирающих одно из возможных действий, в точности равна соответствующей вероятности из распределения вероятностей, задающей стратегию.

Для строгого описания модели будем предполагать заданным вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) . Размер популяции m в момент времени t будет обозначаться случайной величиной S_t^m . Отметим, что S_t^m не обязательно является целочисленной величиной; размер может быть выражен в каких-либо условных единицах измерения. Стратегия игроков в популяции m описывается вектором $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$, задающим вероятности, с которыми каждый игрок в этой популяции выбирает одно из N возможных действий. Предполагается, что векторы p^m являются векторами распределениями вероятностей, т.е. выполнены условия

$$p_n^m \geq 0, \quad \sum_{n=1}^N p_n^m = 1.$$

В момент времени $t \geq 1$ каждый из игроков, выбравших действие n , может произвести случайное число потомков. Общий размер потомства всех игроков, выбравших действие n , задается случайной величиной $X_{t,n} \geq 0$, причем число потомков каждого игрока имеет, в некотором смысле, одинаковое распределение. Величину $X_{t,n}$ можно интерпретировать как объем ресурсов, имеющихся для производства потомства. Фильтрация \mathcal{F}_t порождена случайным количеством ресурсов X_t . Как и в случае с размером популяции S_t^m , не предполагается, что величины $X_{t,n}$ обязаны быть целочисленными. В силу того, что мы предполагаем, что игроки являются бесконечно малыми, естественно считать, что размер потомства игроков популя-

ции m , которые выбрали действие n , будет равно

$$S_{t+1,n}^m = \frac{p_n^m S_t^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_t^i} X_{t+1,n}.$$

Смысл этого выражения состоит в следующем. Величина в числителе равна количеству игроков популяции m , выбравших действие n . Величина в знаменателе равна суммарному количеству игроков всех популяций, выбравших действие n . Таким образом, доступный объем ресурсов $X_{t+1,n}$ делится в равных долях между всеми игроками, и соответственно, делится между популяциями в долях, пропорциональных долям их игроков, выбравших данное действие.

В модели предполагается, что игроки из поколения в момент времени t , “умирают” при производстве потомства, и в момент времени $t + 1$ заменяются их потомками, которые в точности наследуют их стратегии. Тогда общая численность популяции m на следующем шаге будет равна

$$S_{t+1}^m = \sum_{n=1}^N S_{t+1,n}^m = \sum_{n=1}^N \frac{p_n^m S_t^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_t^i} X_{t+1,n}. \quad (1)$$

Уравнение (1) является основным уравнением, описывающим рассматриваемую модель.

Далее будет предполагать, что последовательность случайных векторов $X_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,N})$ состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин, таких, что для каждого $n = 1, \dots, N$ выполнено условие

$$P(X_{t,n} > 0) > 0.$$

Также считаем, что последовательность $X_{t,n}$ обладает свойством, что для ненулевого набора констант (c_0, c_1, \dots, c_N) сумма $\sum_{n=1}^N c_n X_{t+1,n} \neq c_0$ с вероятностью 1. Это естественное условие, потому что иначе количество ресурсов при выборе n -го действия можно вычислить линейной комбинацией количеств ресурсов других действий и тогда нет смысла рассматривать это действие, как отдельное.

Также будем предполагать, что компоненты стратегий всех популяций строго положительны, т.е.

$$p_n^m > 0 \text{ для всех } m, n.$$

3 Оптимальные стратегии

Профилем стратегий $P = (p^1, \dots, p^M)$ будем называть набор стратегий $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$ в конкретной игре. Будем считать, что начальные численности популяций S_0^m строго положительны и неслучайны.

Определение 1. Будем называть стратегию популяции m *эволюционно оптимальной* в заданном профиле стратегий P , если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^m}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = 1 \text{ п.н.}$$

Смысл определения эволюционной оптимальности состоит в том, что доля размера популяции в суммарном размере всех популяций стремится к 1, т.е. такая стратегия оказывается преобладающей (доминирующей) в совокупной популяции игроков. Легко видеть, что определение оптимальности не зависит от номера популяции m , которая ее применяет.

Определение 2. Будем называть стратегию p^* *глобально эволюционно оптимальной*, если она является оптимальной в любом профиле стратегий при любом положительном значении начальных численностей популяции.

Определение глобальной эволюционной оптимальности означает, что стратегия p^* является оптимальной для популяции, которая ее использует, в смысле определения (1), независимо от того, какие стратегии используют другие популяции.

4 Существование и единственность глобально эволюционно оптимальной стратегии

Теорема 1. Стратегия $p^* = (p_1^*, \dots, p_N^*)$ с компонентами

$$p_n^* = \mathbb{E} \frac{X_{t,n}}{\sum_{k=1}^N X_{t,k}} \quad (2)$$

является единственной глобально эволюционно оптимальной стратегией.

Замечание 1. Математическое ожидание в формуле (2) не зависит от момента времени t в силу предположения одинаковой распределенности векторов $X_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,N})$.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько известных результатов, которые приведены далее в виде лемм.

Лемма 1 (Неравенство Пинскера). Пусть векторы $x, y \in \mathbb{R}_+^N$ и выполнены условия $x_n > 0$, $y_n > 0$ для всех $n = 1, \dots, N$ и $\sum_{n=1}^N x_n = \sum_{n=1}^N y_n = 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^N x_n \ln \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{1}{2} |x - y|^2,$$

где $|z| = \sum_{n=1}^N |z_n|$.

Доказательство можно найти в [5].

Для формулировки следующих лемм, напомним, что случайная последовательность $\xi = (\xi_t)_{t=0}^\infty$, согласованная с некоторой фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=1}^\infty$, называется *мартингалом*, если $\mathbb{E}|\xi_t| < \infty$ и

$$\mathbb{E}(\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \xi_t.$$

Согласованная последовательность ξ_t называется *субмартингалом* (соответственно, *супермартингалом*), если $E|\xi_t| < \infty$ и в предыдущей формуле вместо равенства имеет место неравенство \geq (соответственно, \leq).

Будем использовать обозначение $E_t(\cdot) = E(\cdot \mid \mathcal{F}_t)$ для условного математического ожидания.

Лемма 2. Пусть ξ_t является субмартингалом и $\xi_t \leq 0$ для всех $t \geq 0$. Тогда с вероятностью 1 существует конечный предел $\xi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t$. Кроме того, компенсатор

$$A_t := \sum_{u=0}^{t-1} (E_u \xi_{u+1} - \xi_u)$$

также сходится, т.е. существует конечный предел $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t$.

Утверждение о существовании конечного предела неположительного субмартингала можно найти в [6, Глава 7.4, Следствие 1 Теоремы 1]. Приведем доказательство существования $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_t$.

Доказательство. ξ_t – субмартингал, следовательно из разложения Дуба имеем: $\xi_t = M_n + A_n$, где M_n – мартингал, а A_n – предсказуемая, неубывающая последовательность, $A_0 = 0$. Тогда $E A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} E A_t = \lim_{t \rightarrow \infty} E \xi_t - E \xi_0 < \infty$. Следовательно $A_\infty < \infty$. \square

Лемма 3. Пусть ζ_t , $t = 0, 1, \dots$, случайная последовательность (ζ_0 – константа) равномерно ограниченная сверху (т.е. $\zeta_t \leq c$ п.н. для всех t и некоторой константы c) и $E_{t-1} \zeta_t \geq \zeta_{t-1}$ п.н. для всех $t \geq 1$. Тогда $E|\zeta_t| < \infty$ и ζ_t является субмартингалом.

Доказательство. Последовательность M_t , где $M_0 = 0$ и

$$M_t = \zeta_t - \sum_{s=1}^t (E_{s-1} \zeta_s - \zeta_{s-1}), \quad t \geq 1,$$

является локальным мартингалом потому, что $E_{t-1} M_t = M_{t-1}$ [6, Глава 7.1, Теорема 1]. А поскольку она ограничена сверху, то является в том числе и мартингалом [6, Глава 7.1, Теорема 3], поэтому $E|M_t| < \infty$. Используя, что $M_t \leq \zeta_t \leq c$, мы получаем $E|\zeta_t| < \infty$. \square

Доказательство теоремы 1. Заметим, что т.к. начальные численности популяций S_0^m строго положительны и неслучайны, то без ограничения общности можно считать, что $\sum_{m=1}^M S_0^m = 1$.

Также заметим, что можно считать, что $\sum_{n=1}^N X_{t,n} = 1$. Покажем это, заменив в модели численности популяции в формуле (1), $X_{t,n}$ на $\frac{X_{t,n}}{\sum_{k=1}^N X_{t,k}}$. И заметим, что

такая замена не повлияет на определение глобально эволюционно оптимальной стратегии, которая определяется, как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^m}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m S_{t-1}^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_{t-1}^i} X_{t,n}}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = 1 \text{ п.н.}$$

Сделаем еще одно замечание из формулы (1).

$$\sum_{j=1}^M S_t^j = \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{p_n^j S_{t-1}^j}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_{t-1}^i} X_{t,n} = \sum_{n=1}^N X_{t,n}.$$

Теперь заменим определение числа ресурсов $X_{t,n}$ и перепишем формулу (1) как

$$S_t^m = \sum_{n=1}^N S_{t,n}^m = \sum_{n=1}^N \frac{p_n^m S_{t-1}^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_{t-1}^i} \frac{X_{t,n}}{\sum_{k=1}^N X_{t,k}}.$$

Заметим, что в новой модели численность совокупной популяции $\sum_{i=1}^M S_t^i = 1$, а глобально эволюционно оптимальная стратегия будет иметь вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^m}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m S_{t-1}^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_{t-1}^i} X_{t,n}}{\sum_{k=1}^N X_{t,k}} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m S_{t-1}^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_{t-1}^i} X_{t,n}}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = 1 \text{ п.н.}$$

Это уравнение идентично тому, как задавалась глобально эволюционно оптимальная стратегия в модели, когда мы определяли выплаты, как $X_{t,n}$. Таким образом мы показали, что без ограничения общности можно считать, что $\sum_{n=1}^N X_{t,n} = 1$. Тогда и $\sum_{m=1}^M S_t^m = 1$ для всех $t \geq 1$, т.е. размер совокупной популяции сохраняется и всегда равен 1. Заметим, что с учетом $\sum_{n=1}^N X_{t,n} = 1$ глобальная эволюционно оптимальная стратегия задается как $p_n^* = EX_{t,n}$.

Предположим, что какая-то популяция, скажем $m = 1$, использует стратегию p^* . И пусть $\bar{p}_t = (\bar{p}_{t,1}, \dots, \bar{p}_{t,N})$ обозначает взвешенную стратегию всех игроков:

$$\bar{p}_{t,n} = \sum_{m=1}^M p_n^m S_t^m.$$

Доказательство будет состоять из двух шагов. На первом шаге мы покажем, что $\bar{p}_t \rightarrow p^*$ п.н. при $t \rightarrow \infty$. На втором шаге мы покажем, что $S_t^1/S_t^m \rightarrow \infty$ для всех $m \neq 1$, откуда будет следовать утверждение теоремы.

Шаг 1. Напомним, что $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$ является фильтрацией, порожденной последовательностью X_t . Обозначим $\xi_t = \ln S_t^1$. Тогда

$$\begin{aligned} E_t \xi_{t+1} - \xi_t &= E_t \ln \frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = E_t \ln \left(\sum_{n=1}^N \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n} \right) \\ &\geq E_t \left(\sum_{n=1}^N X_{t+1,n} \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} \right) = \sum_{n=1}^N p_n^* \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} \geq \frac{1}{2} |p^* - \bar{p}_t|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Пояснение переходов:

1. $E_t \ln \frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = E_t \ln \left(\sum_{n=1}^N \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n} \right)$ следует из (1) и того, что популяция $m = 1$ по предположению использует оптимальную стратегию p^* .
2. $E_t \ln \left(\sum_{n=1}^N \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n} \right) \geq E_t \left(\sum_{n=1}^N X_{t+1,n} \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} \right)$. В силу того, что логарифм выпуклая вверх функция, данное неравенство следует просто из определения выпуклой вверх функции, где $X_{t+1,n}$ – переменные в определении, а $\frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}}$ – коэффициенты.
3. $E_t \left(\sum_{n=1}^N X_{t+1,n} \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} \right) = \sum_{n=1}^N E_t(X_{t+1,n}) \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} = \sum_{n=1}^N p_n^* \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}}$, где переход от условного к обычному математическому ожиданию верен поскольку случайная величина X_{t+1} не зависит от σ – алгебры \mathcal{F}_t и $E X_{t+1,n} = p_n^*$ по условию теоремы 1, а $\bar{p}_{t,n} - \mathcal{F}_t$ измерима.
4. $\sum_{n=1}^N p_n^* \ln \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} \geq \frac{1}{2} |p^* - \bar{p}_t|^2$ по лемме 1.

Заметим, что последовательность $\xi_t = \ln S_t^1$ удовлетворяет условиям леммы 3 т.к. $\ln S_t^0 = \text{const}$, $\ln S_t^1 \leq 1$ для всех $t \geq 1$ и $E_{t-1} \ln S_t^1 \geq \ln S_{t-1}^1$ п.н. для всех $t \geq 1$ из формулы 3. Поэтому согласно лемме 3 последовательность $\xi_t = \ln S_t^1$ является субмартингалом. По лемме 2 существует конечный предел ξ_∞ . Отсюда следует, что существует предел $S_\infty^1 = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t^1 = e^{\xi_\infty} > 0$.

Согласно лемме 2, компенсатор ξ_t также сходится, поэтому применяя 3, получаем

$$\sum_{t=1}^{\infty} |p^* - \bar{p}_t|^2 \leq 2 \sum_{t=1}^{\infty} (E_t \xi_{t+1} - \xi_t) < \infty.$$

Из сходимости ряда следует, что $|p^* - \bar{p}_t| \rightarrow 0$, что и требовалось доказать на первом шаге.

Шаг 2. Докажем, что $S_t^1/S_t^m \rightarrow \infty$. Рассмотрим произвольную популяцию $m \neq 1$. Положим

$$D_{t+1} := \ln \frac{S_{t+1}^1}{S_{t+1}^m} - \ln \frac{S_t^1}{S_t^m}.$$

Тогда

$$D_{t+1} = \ln \frac{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n}}{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n}}.$$

Заметим, что последовательность D_t равномерно ограничена:

$$\ln \frac{\min_n p_n^*}{\max_n p_n^m} \leq D_t \leq \ln \frac{\max_n p_n^*}{\min_n p_n^m}.$$

Распишем $\ln \frac{S_t^1}{S_t^m}$:

$$\begin{aligned} \ln \frac{S_t^1}{S_t^m} &= \sum_{u=0}^{t-1} \left(\ln \frac{S_{t+1}^1}{S_{t+1}^m} - \ln \frac{S_t^1}{S_t^m} \right) + \ln \frac{S_0^1}{S_0^m} = \ln \frac{S_0^1}{S_0^m} + \sum_{u=0}^{t-1} D_{u+1} = \\ &= \ln \frac{S_0^1}{S_0^m} + \sum_{u=0}^{t-1} E_u D_{u+1} + \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - E_u D_{u+1}), \end{aligned}$$

где в последнем переходе мы просто добавили и вычли $\sum_{u=0}^{t-1} E_u D_{u+1}$. Поделим полученное равенство на t и рассмотрим выражение:

$$t^{-1} \ln \frac{S_t^1}{S_t^m} = t^{-1} \ln \frac{S_0^1}{S_0^m} + t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} E_u D_{u+1} + t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - E_u D_{u+1}). \quad (4)$$

Заметим, что $\zeta_t := \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - E_u D_{u+1})$ является мартингалом и даже более того, квадратично интегрируемым мартингалом. Применим к нему ЗБЧ для квадратично интегрируемых мартингалов. Для этого проверим, что он действительно является квадратично интегрируемым и покажем, что его квадратическая характеристика ограничена.

Квадратичная интегрируемость верна в силу того, что последовательность D_{u+1} ограничена, поэтому и $(D_{u+1} - E_u D_{u+1})$ — ограничена. Таким образом в каждый фиксированный момент времени каждое слагаемое суммы $\zeta_t := \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - E_u D_{u+1})$ ограничено, поэтому и вся сумма ограничена, а значит и квадрат суммы ограничен, следовательно $E\zeta_t^2 < \infty$, т.е. мартингал является квадратично интегрируемым. Рассмотрим его квадратическую характеристику:

$$\langle \zeta \rangle_t = \sum_{k=0}^{t-1} E_k (\Delta \zeta_{k+1})^2 = \sum_{k=0}^{t-1} E_k (D_{k+1} - E_k D_{k+1})^2 \leq Ct,$$

для некоторой константы C . Выпишем для ζ_t ЗБЧ для мартингалов:

$$\frac{\zeta_t}{Ct} \leq \frac{\zeta_t}{\langle \zeta \rangle_t} \rightarrow 0 \text{ п.н.}$$

Таким образом мы получили, что в формуле 4 $\zeta_t t^{-1} = t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - E_u D_{u+1}) \rightarrow 0$ п.н.

Теперь, чтобы установить, что $S_t^1/S_t^m \rightarrow \infty$ в выражении 4, будет достаточно показать, что существует $\varepsilon > 0$ и случайное время τ такое, что для всех $t \geq \tau$ справедливо, что

$$E_t D_{t+1} \geq \varepsilon. \quad (5)$$

Вспомним, что

$$E_t D_{t+1} = E_t \ln \frac{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^*}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n}}{\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m}{\bar{p}_{t,n}} X_{t+1,n}}.$$

Воспользуемся фактом, объединяющем теорему Лебега о мажорируемой сходимости и теорему П. Леви, который формулируется следующим образом:

Лемма 4. Пусть ξ_n – последовательность случайных величин, таких, что $\xi_n \rightarrow \xi$ (н.н.), $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$ и \mathcal{F}_m – неубывающее семейство σ – алгебр, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_m)$, тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} E(\xi_n | \mathcal{F}_m) = E(\xi | \mathcal{F}_\infty) \text{ н.н.}$$

Как было доказано в Шаге 1, мы имеем $\bar{p}_t \rightarrow p^*$. Следовательно, опираясь на лемму 4, с вероятностью 1 верно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_t D_{t+1} = -E \ln \left(\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m}{p_n^*} X_{t+1,n} \right) > -\ln E \left(\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m}{p_n^*} X_{t+1,n} \right) = 0,$$

где строгое неравенство выполнено по неравенству Йенсена с учетом того, что логарифм является строго выпуклой функцией, а случайная величина $\sum_{n=1}^N \frac{p_n^m}{p_n^*} X_{t+1,n}$ не является константой. \square

5 Численное исследование достаточных условий для существования эволюционно оптимальной стратегии

В данной главе мы численно изучим достаточные условия при которых стратегия, отличная от глобально эволюционно оптимальной, является эволюционно оптимальной в заданном профиле стратегий.

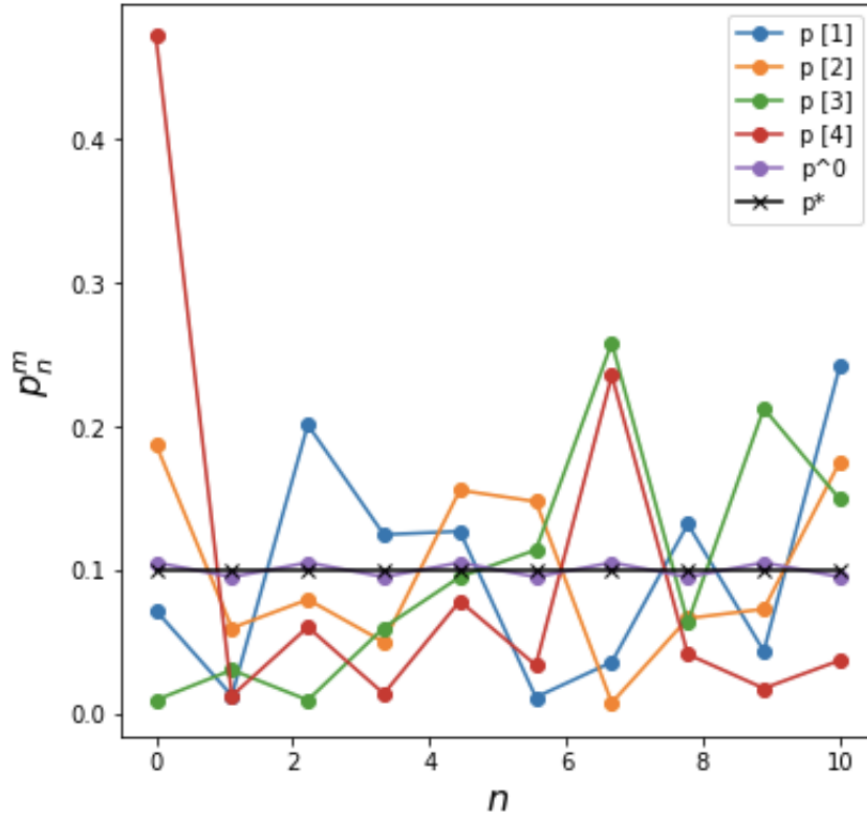
Утверждение 1. Пусть задан профиль стратегий $P = (p^1, \dots, p^M)$, $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$. И p^1 такое, что $|p^1 - p^*| \leq C|p^m - p^*|$, для любого $m \neq 1$ и некоторой малой константы $C > 0$. Тогда стратегия p^1 будет эволюционно оптимальной в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^1}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = 1 \text{ п.н.,}$$

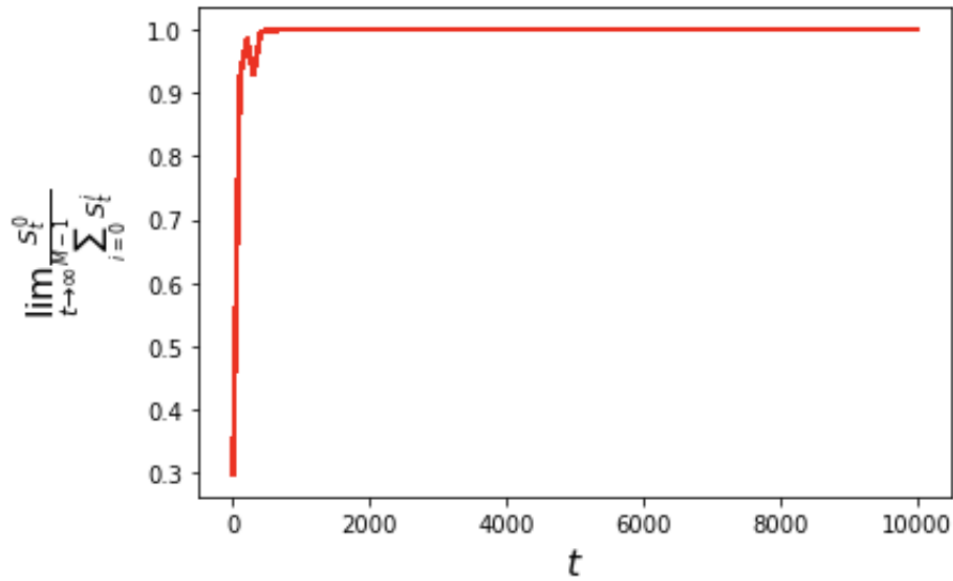
где $|x - y| = \sum_{n=1}^N |x_n - y_n|$.

Численно покажем, что утверждение 1 имеет место быть. Пусть X_t имеют распределение Дирихле с параметром концентрации $\alpha = (1, \dots, 1)$. Для такого распределения верно, что $\sum_{n=1}^N X_{t,n} = 1$ и $P(X_{t,n} > 0) > 0$. Тогда оптимальная стратегия, которая задается, как $p^* = EX_t$, имеет вид $p^* = EX_t = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$. Остальные параметры: p_n^m, S_0^m зададим случайно, лишь учитывая, что $\sum_{n=1}^N p_n^m = 1$ и $\sum_{m=1}^M S_t^m = 1$.

Пример 1. Покажем, что p^1 действительно является оптимальной стратегией, когда она близка к p^* , а другие стратегии далеки в смысле определения утверждения 1. Таким образом мы покажем, что при выполнении условий утверждения 1, оптимальная стратегия p^1 действительно существует.

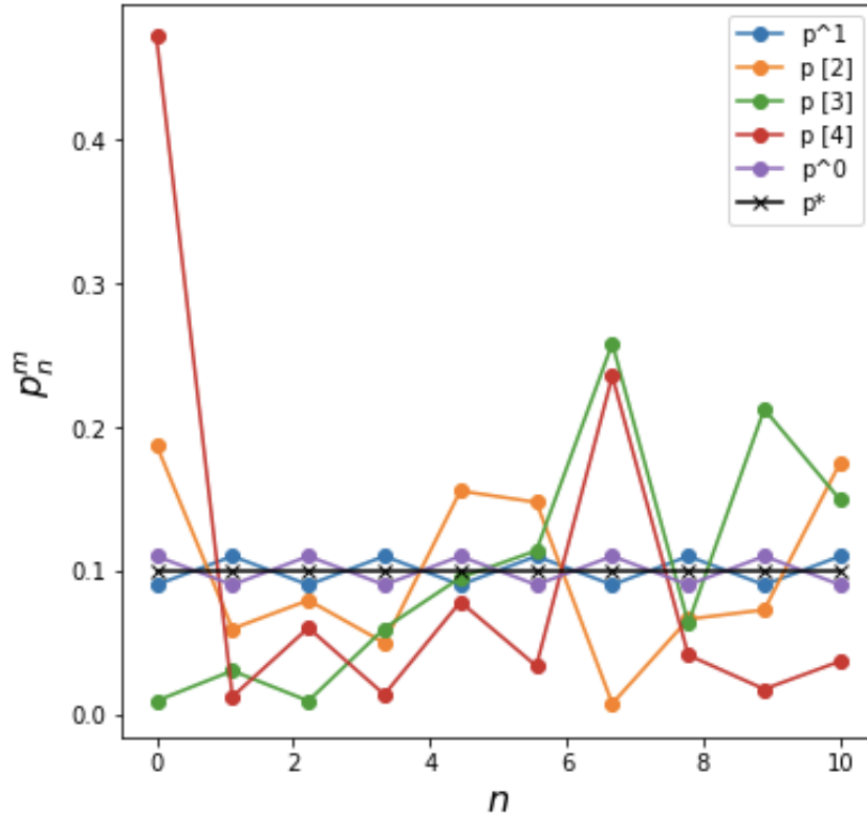


На данном рисунке показаны стратегии $M = 5$ игроков и глобально эволюционно оптимальная стратегия p^* . В данном примере стратегия p^0 отстает от p^* на $\varepsilon = 0.005$. Выведем для стратегии p^0 график $f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_t^0}{\sum_{i=0}^{M-1} s_t^i}$, чтобы проверить сходится ли он к 1.

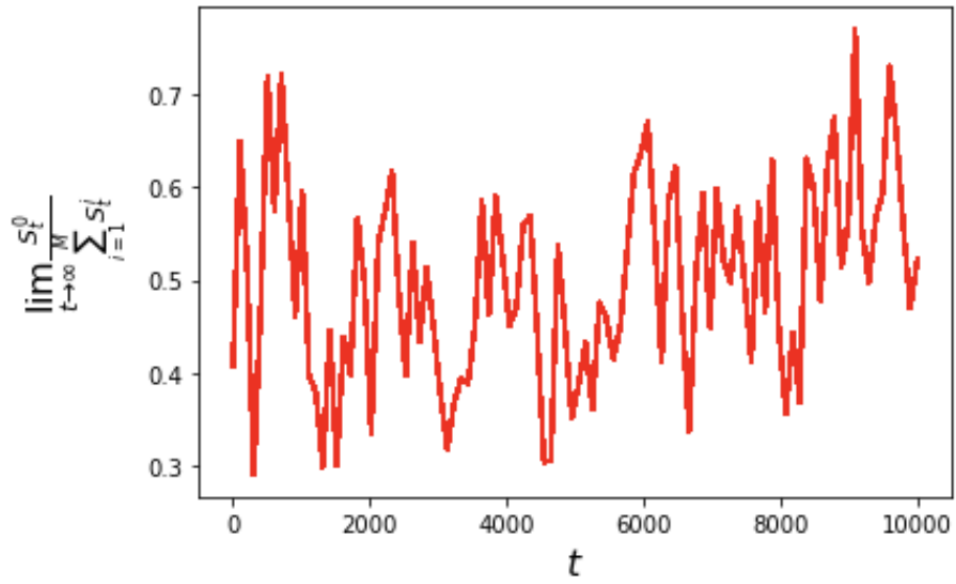


Данный график демонстрирует то, что стратегия p^0 действительно является эволюционно оптимальной т.к. для нее $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^0}{\sum_{i=0}^{M-1} S_t^i} = 1$.

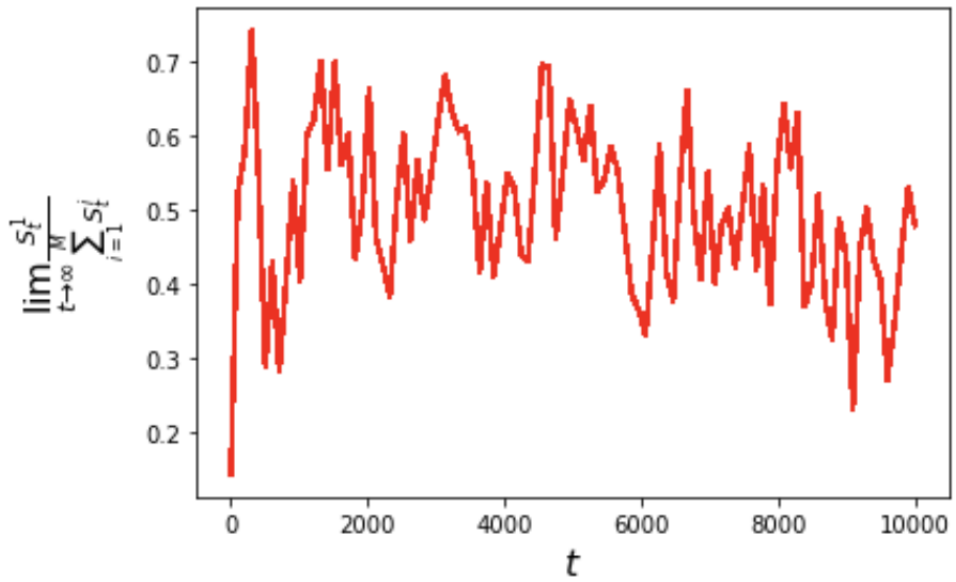
Пример 2. Приведем пример, которые продемонстрирует, что, при невыполнении условий утверждения 1, не существует оптимальной стратегии в заданном профиле стратегий. Построим график с теми же p_n^m , что и в Примере 1, но теперь p^0 и p^1 будут колебаться около глобально эволюционной оптимальной стратегии, тем самым нарушая условие утверждения о том, что только одна стратегия должна быть "близка" к p^* , чтобы быть эволюционно оптимальной.



Для стратегий p^0 и p^1 изучаемый предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^0}{\sum_{i=0}^{M-1} S_t^i}$ выглядит следующим образом. Для p^0 :



Для p^1 :



Таким образом в Примере 2 мы наглядно показали, что при невыполнении условия утверждения 1, численности популяций S_t^0 и S_t^1 не будут стремиться к единице в заданном профиле стратегий.

6 Заключение

Основной целью работы было предложить модель, в которой будет предполагаться взаимодействие между особями в процессе эволюции. В работе удалось смоделировать условия ограниченности ресурсов и найти в явном виде глобально эволюционно оптимальную стратегию. Также в работе были предложены понятия эволюционной оптимальности и глобальной эволюционной оптимальности стратегии в динамической модели эволюции.

Простыми словами идею оптимальности можно выразить следующим образом. Если популяция следует оптимальной стратегии, то ее численность можно считать бесконечной относительно численности любой другой популяции. Такая постановка позволяет найти глобально эволюционно оптимальную стратегию. Которая по сути означает, что популяция сможет увеличить свой относительный размер до бесконечности, если будет в некотором смысле "инвестировать" в каждое действие с вероятностью, которая равна ожидаемому количеству потомства в этом действии.

Также важным результатом работы является формулировка и численное моделирование утверждения (утверждение 1) об эволюционно оптимальности стратегии, близкой к глобально эволюционно оптимальной. Это утверждение предполагает, что для достижения эволюционной оптимальности стратегии при заданных стратегиях других игроков, популяции следует действовать максимально похожим на глобально эволюционно оптимальную стратегию образом. При таком поведении численность популяции будет расти вплоть до того, что она вытеснит другие популяции.

Можно выделить несколько дальнейших направлений исследования, относящихся к результатам данной работы. Во-первых, было бы интересно обобщить рассматриваемую модель на случай произвольного числа действий. Можно ожидать, что форма оптимальной стратегии должна остаться такой же – ожидание относительного количества ресурсов. Во-вторых можно сделать модель более реалистичной, рассматривая половое размножение, а также количество ресурсов, зависящим от некоторого вектора состояний. Также интересно исследовать константу в утверждении 1 и предъявить ее в явном виде.

7 Список литературы

- [1] R. Amir, I. V. Evstigneev and K. R. Schenk-Hoppé. Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144, 2013.
- [2] T. J. Brennan and A. W. Lo. The origin of behavior. *The Quarterly Journal of Finance*, 1(01):55–108, 2011.
- [3] N. Koduri and A. W. Lo. The origin of cooperation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(26):e2015572118, 2021.
- [4] R. Zhang, T. J. Brennan, and A. W. Lo. The origin of risk aversion. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(50):17777–17782, 2014.
- [5] I. Sason, S. Verdú. An Improved Reverse Pinsker Inequality for Probability Distributions on a Finite Set. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, arXiv:1503.03417v2, 2015.
- [6] Ширяев А. Н. Вероятность-2. МЦНМО, 2004.
- [7] Ссылка на исходный код для построения графиков, приведенных в работе <https://gist.github.com/KristinaKuslina/aced6710544cbd5cc9f62b7f198373cb>