Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 6

1. Тензорная алгебра

Пусть $V = \mathbb{R}^d$, пространство V^* — сопряженное пространство к V, $e_1, \ldots, e_d$ — стандартный базис в пространстве V и $e^1, \ldots, e^d$ — дуальный к нему базис в V^*. Если $l \in V^*$ и $v \in V$, то $v(l) = l(v)$.

Рассмотрим полилинейные функции $f(l_1, \ldots, l_k)$ и $g(l_1, \ldots, l_m)$ на V^*. Тензорное умножение $f \otimes g$ задает полилинейную функцию и определяется формулой

$$f \otimes g(l_1, \ldots, l_{k+m}) = f(l_1, \ldots, l_k)g(l_{k+1}, \ldots, l_m).$$

Это умножение ассоциативно, но не является коммутативным. Представляя функционалы в виде $l_n = l_n(e_1)e^1 + \ldots + l_n(e_d)e^d$ и используя полилинейность f, получаем

$$f(l_1, \ldots, l_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} f(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}) e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}(l_1, \ldots, l_k).$$

Таким образом, всякая полилинейная функция f определяется своими координатами $c^{i_1 \ldots i_k} = f(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k})$ в базисе $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$. При заменах координат эти числа меняются именно как координаты векторов. Если $c^{i_1 \ldots i_k}$ — координаты f и $b^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты g, то

$$(f \otimes g)^{i_1 \ldots i_{k+m}} = c^{i_1 \ldots i_k} \cdot b^{i_{k+1} \ldots i_{k+m}}.$$

Линейное пространство всех k — линейных функций обозначаем через $T^{(k)}(V)$.

Рассмотрим бесконечную прямую сумму

$$T(V) = \mathbb{R} \oplus T^1(V) \oplus T^2(V) \oplus \cdots \oplus T^k(V) \oplus \ldots,$$

то есть $T(V)$ — линейное пространство бесконечных последовательностей

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots), \quad a_k \in T^k(V).$$

Для элементов $a, b \in T(V)$ умножение $a \otimes b$ определено формулой

$$(a \otimes b)_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \otimes b_{m-k}.$$

Заметим, что в координатах это равенство записывается в виде

$$(a \otimes b)_m^{i_1 \ldots i_m} = \sum_{k=0}^{m} a_k^{i_1 \ldots i_k} \cdot b_{m-k}^{i_{k+1} \ldots i_m}.$$

Линейное пространство $T(V)$ с таким умножением называется тензорной алгеброй. Через $T^{(m)}(V)$ обозначаем линейное пространство

$$\mathbb{R} \oplus T^1(V) \oplus T^2(V) \oplus \cdots \oplus T^m(V),$$

то есть $T^{(m)}(V)$ — линейное пространство конечных упорядоченных наборов

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m), \quad a_k \in T^k(V).$$

Пространство $T^{(m)}(V)$ является алгеброй с умножением $a \otimes b$.

2. Соотношения Чена

Пусть $x_t \colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ — кусочно непрерывно дифференцируемая кривая. Сигнатуре

$$S_{ab}(x) = \{1, X_{ab}^{i_1}, X_{ab}^{i_1 i_2}, \ldots X_{ab}^{i_1 \ldots i_k}, \ldots\},$$

$$X_{ab}^{i_1\dots i_k} = \int_{a<u_1<\dots<u_k<b} dx_{u_1}^{i_1} \cdots dx_{u_k}^{i_k},$$

соответствует элемент

$$S_{ab}(x) = (1, X_{ab}^{(1)}, \dots, X_{ab}^{(k)}, \dots)$$

алгебры $T(V)$, где

$$X_{ab}^{(k)} = \sum_{i_1\dots i_k} X_{ab}^{i_1\dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}.$$

Здесь важно отметить, что при заменах координат в $V = \mathbb{R}^d$ наборы чисел $X_{ab}^{i_1\dots i_k}$ меняются именно как координаты полилинейной функции на V^*. Далее всегда считаем, что сигнатура кривой — элемент алгебры $T(V)$.

Пусть x_t — кусочно непрерывная кривая на $[a, c]$ и y_t — кусочно непрерывная кривая на $[c, b]$, где $a < c < b$. Положим

$$(x * y)_t = \begin{cases} x_t, & t \in [a, c] \\ y_t - y_c + x_c, & t \in [c, b] \end{cases}$$

Теорема 1. (Chen) *Верно равенство*

$$S_{ab}(x * y) = S_{ac}(x) \otimes S_{cb}(y).$$

Доказательство. Пусть $z = x * y$ и $Z_{ab}^{(k)}$ — соответствующие элементы сигнатуры. Надо проверить равенство

$$Z_{ab}^{i_1\dots i_m} = \sum_{k=0}^{m} X_{ac}^{i_1\dots i_k} \cdot Y_{cb}^{i_{k+1}\dots i_m}.$$

По определению

$$Z_{ab}^{i_1\dots i_m} = \int_{a<u_1<\dots<u_m<b} dz_{u_1}^{i_1} \dots dz_{u_m}^{i_m}.$$

Так как

$$\Big\{(u_1, \dots, u_m)\colon\ a < u_1 < \dots < u_m < b\Big\} =$$

$$\bigsqcup_{k=0}^{m} \Big\{(u_1, \dots, u_m)\colon\ a < u_1 < \dots < u_k < c < u_{k+1} < \dots < u_m < b\Big\} \bigsqcup V,$$

где $u_0 = a$ и V — множество меры нуль, соответствующее подмножествам плоскостей $u_i = c$. По теореме Фубини

$$\int_{a<u_1<\dots<u_k<c<u_{k+1}<\dots<u_m<b} dz_{u_1}^{i_1} \dots dz_{u_m}^{i_m} =$$

$$\int_{a<u_1<\dots<u_k<c} dz_{u_1}^{i_1} \dots dz_{u_k}^{i_k} \cdot \int_{c<u_{k+1}<\dots<u_m<b} dz_{u_{k+1}}^{i_{k+1}} \dots dz_{u_m}^{i_m}.$$

Поскольку $dz_t^i = dx_t^i$ на $[a, c]$ и $dz_t^i = dy_t^i$ на $[c, b]$, получаем

$$\int_{a<u_1<\dots<u_k<c<u_{k+1}<\dots<u_m<b} dz_{u_1}^{i_1} \dots dz_{u_m}^{i_m} = X_{ac}^{i_1\dots i_k} \cdot Y_{cb}^{i_{k+1}\dots i_m}.$$

Используя аддитивность интеграла, получаем равенство

$$Z_{ab}^{i_1\dots i_m} = \sum_{k=0}^{m} X_{ac}^{i_1\dots i_k} \cdot Y_{cb}^{i_{k+1}\dots i_m}.$$

□

Рассмотрим частный случай, когда $x_t\colon [a,b]\to\mathbb{R}^d$ и $y_t = x_t$ на $[c,b]$. Тогда

$$X^{(m)}_{ab} = \sum_{k=0}^{m} X^{(k)}_{ac}\otimes X^{(m-k)}_{cb}.$$

Если $m=1$, то

$$X^i_{ab} = X^i_{ac} + X^i_{cb},$$

что полностью согласуется с $X^i_{st} = X^i_t - X^i_s$. Отметим, что если задана функция $f(s,t)$ двух переменных и $f(s,t) = f(s,u)+f(u,t)$ при $s<u<t$, то $f(s,t) = f(0,t)-f(0,s)$.

Если $m=2$, то

$$X^{ij}_{ab} = X^{ij}_{ac} + X^{ij}_{cb} + X^i_{ac}\cdot X^j_{cb}.$$

Таким образом, соотношения Чена в определенном смысле являются обобщением аддитивности интеграла.

3. Мультипликативные функционалы

Пусть $\Delta_T = \{(s,t)\colon\ 0\le s\le t\le T\}$.

Мультипликативным функционалом степени m называется отображение

$$X_{st}\colon \Delta_T\to T^{(m)}(V),$$

для которого выполнено $X^{(0)}_{st}=1$ и для всех $s<u<t$ и всех $1\le n\le m$ справедливы равенства

$$X^{(n)}_{st} = \sum_{k=0}^{n} X^{(k)}_{su}\otimes X^{(n-k)}_{ut}.$$

Сигнатура кусочно гладкой кривой задает мультипликативный функционал. Пример мультипликативного функционала, который не порождается сигнатурой гладкой кривой:

$$X_{st} = (1,0,0,\ldots,F_t-F_s),$$

где F — произвольное отображение $[0,T]\to T^m(V)$. Действительно, достаточно проверить лишь равенство

$$X^{(m)}_{st} = \sum_{k=0}^{m} X^{(k)}_{su}\otimes X^{(m-k)}_{ut}.$$

Левая часть равна F_t-F_s, а в правой части все слагаемые равны нулю, кроме слагаемых с номерами $k=0$ и $m=0$, то есть правая часть равна

$$X^m_{su}+X^m_{ut} = F_u-F_s+F_t-F_u = F_t-F_s.$$

Предложение 1. *Если X_{st} и Y_{st} — мультипликативные функционалы степени m и*

$$X^{(1)}_{st}=Y^{(1)}_{st},\quad X^{(2)}_{st}=Y^{(2)}_{st},\quad \ldots\quad X^{(m-1)}_{st}=Y^{(m-1)}_{st},$$

то для $Z^{(m)}_{st}=X^{(m)}_{st}-Y^{(m)}_{st}$ для всех $s<u<t$ справедливо равенство

$$Z^{(m)}_{st} = Z^{(m)}_{su}+Z^{(m)}_{ut},$$

то есть $Z_{st}=Z_{0t}-Z_{0s}$.

Доказательство. Имеем

$$Z^{(m)}_{st} = X^{(m)}_{st}-Y^{(m)}_{st} = \sum_{k=0}^{m} X^{(k)}_{su}\otimes X^{(m-k)}_{ut} - \sum_{k=0}^{m} Y^{(k)}_{su}\otimes Y^{(m-k)}_{ut}.$$

Так как все члены с номерами $1\le k\le m-1$ сокращаются, то

$$Z^{(m)}_{st} = X^{(m)}_{su}+X^{(m)}_{ut}-Y^{(m)}_{su}-Y^{(m)}_{ut} = Z^{(m)}_{su}+Z^{(m)}_{ut}.$$

□

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим теперь мультипликативные функционалы X_{st} степени m, для которых выполнены оценки

$$|X_{st}^{(k)}| \le C_k |t-s|^{k\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots m.$$

Предложение 2. *Если* $(k+1)\alpha > 1$ *и*

$$X_{st}^{(1)} = Y_{st}^{(1)}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{st}^{(2)}, \quad \dots \quad X_{st}^{(k)} = Y_{st}^{(k)},$$

то

$$X_{st}^{(k+1)} = Y_{st}^{(k+1)}, \quad X_{st}^{(k+2)} = X_{st}^{(k+2)}, \quad \dots \quad X_{st}^{(m)} = Y_{st}^{(m)}.$$

Доказательство. По предыдущему утверждению для $Z_{st}^{(k+1)} = X_{st}^{(k+1)} - Y_{st}^{(k+1)}$ справедливо равенство

$$Z_{st}^{(k+1)} = Z_{su}^{(k+1)} + Z_{ut}^{(k+1)}.$$

Для всякого разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[s,t]$ точками $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ справедливо равенство

$$Z_{st}^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{N-1} Z_{u_j u_{j+1}}^{(k+1)}.$$

Поскольку $|X_{st}^{(k+1)}| \le C_x |t-s|^{(k+1)\alpha}$ и $|Y_{st}^{(k+1)}| \le C_y |t-s|^{(k+1)\alpha}$, то $|Z_{st}^{(k+1)}| \le (C_x + C_y)|t-s|^{(k+1)\alpha}$. Следовательно, выполнено

$$|Z_{st}^{(k+1)}| \le \sum_{j=0}^{N-1} |Z_{u_j u_{j+1}}^{(k+1)}| \le (C_x + C_y) \sum_{j=0}^{N-1} |u_{j+1} - u_j|^{(k+1)\alpha} \le (C_x + C_y) T \lambda(\mathbb{T})^{(k+1)\alpha - 1}.$$

Устремляя масштаб разбиения к нулю, получаем $Z_{st}^{(k+1)} = 0$ и $X_{st}^{(k+1)} = Y_{st}^{k+1}$. □

Предложение 3. *Если* $(k+1)\alpha > 1$ *и* X_{st} *— мультипликативный функционал степени* k*, то существует такой мультипликативный функционал* Y_{st} *степени* $k+1$*, что*

$$X_{st}^{(1)} = Y_{st}^{(1)}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{st}^{(2)}, \quad \dots \quad X_{st}^{(k)} = Y_{st}^{(k)}.$$

Разберем подробно случай $\alpha > 1/2$ и $k = 1$.

Лемма 1. *Пусть* $y_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ *и* $x_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$*, причем*

$$|y_{st}| \le C|t-s|^{\alpha}, \quad |x_{st}| \le C|t-s|^{\alpha},$$

где $\frac{1}{2} < \alpha < 1$*,* $x_{st} = x_t - x_s$*,* $y_{st} = y_t - y_s$*. Тогда существует число* M *такое, что для всех* $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ *справедлива оценка*

$$\Big| \sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st} \Big| \le M C^2 |t-s|^{2\alpha}.$$

Доказательство. Заметим, что при $N = 1$ неравенство справедливо с произвольной константой, так как левая часть равна нулю. Пусть $N \ge 2$. Найдется такой номер $1 \le k \le N-1$, что

$$|u_{k+1} - u_{k-1}| \le \frac{2|t-s|}{N-1}.$$

Удалим из разбиения $\mathbb{T}$ точку u_k и новое разбиение обозначим через $\mathbb{T}'$. Тогда

$$\Big| \sum_{u_k \in \mathbb{T}'} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - \sum_{u_k \in \mathbb{T}} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} \Big| = \Big| y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1} u_{k+1}} - y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1} u_k} - y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} \Big|$$

Поскольку $y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1}u_{k+1}} = y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1}u_k} + y_{u_{k-1}} x_{u_k u_{k+1}}$, то получаем оценку

$$\Big|\sum_{u_k \in \mathbb{T}'} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - \sum_{u_k \in \mathbb{T}} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}}\Big| \le |y_{u_{k-1}u_k}||x_{u_k u_{k+1}}| \le \frac{4^\alpha C^2 |t-s|^{2\alpha}}{(N-1)^{2\alpha}}.$$

Удаляя точки, приходим к выражению $y_s x_{st}$ и получаем оценку

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Big| \le 4^\alpha C^2 |t-s|^{2\alpha} \Big(\frac{1}{(N-1)^{2\alpha}} + \frac{1}{(N-2)^{2\alpha}} + \ldots + 1\Big).$$

Положим

$$M = 4^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Big| \le M C^2 |t-s|^{2\alpha}.$$

$\square$