Тузова 409, начало: 12:38

№1 Построить для ур-я $y'(x) = f(x)$ разн. схему с наивысшим пор-м аппр-ии на решении:

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 \cdot f_k + a_0 \cdot f_{k-1} + a_{-1} \cdot f_{k-2}$$

▷ Сдвинем ~~все~~ индексы на 1 для удобства: $k \to k+1 \Rightarrow \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = a_1 f_{k+1} + a_0 f_k + a_{-1} \cdot f_{k-1}$

Аппр-я на решении: $\exists C, h_0, p: \| L_h[y_h] - f_h \|_{F_h} \le C \cdot h^p \quad \forall h \le h_0$ (где y – решение задачи $y' = f$)

$y_k = y(x_k)$, $f_k = f(x_k)$ $\quad N \cdot h = 1$

$\Rightarrow$ хотим оценить $\max\limits_{x_k} \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k-h)}{2h} - \left[a_1 \underbrace{f(x_k+h)}_{= y'(x_k+h)} + a_0 \cdot \underbrace{f(x_k)}_{= y'(x_k)} + a_{-1} \cdot \underbrace{f(x_k-h)}_{= y'(x_k-h)} \right] \right|$

Разложим по ф-ле Тейлора:

$$y(x_k+h) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + y''(x_k) \cdot \frac{h^2}{2} + y^{(3)}(x_k) \cdot \frac{h^3}{6} + y^{(4)}(x_k) \frac{h^4}{24} + \underline{O}(h^5)$$

$$y(x_k-h) = y(x_k) - y'(x_k) \cdot h + y''(x_k) \frac{h^2}{2} - y^{(3)}(x_k) \cdot \frac{h^3}{6} + y^{(4)}(x_k) \frac{h^4}{24} + \underline{O}(h^5)$$

$$\left.\begin{aligned} y'(x_k+h) &= y'(x_k) + y''(x_k) \cdot h + y^{(3)}(x_k) \frac{h^2}{2} + y^{(4)}(x_k) \cdot \frac{h^3}{6} + \underline{O}(h^4) \\ y'(x_k-h) &= y'(x_k) - y''(x_k) \cdot h + y^{(3)}(x_k) \cdot \frac{h^2}{2} - y^{(4)}(x_k) \frac{h^3}{6} + \underline{O}(h^4) \end{aligned}\right\} \text{до 4й произв-й т.к. не делим на } h$$

Подставим все это:

$$\max_{x_k} \left| \cancel{\frac{y(x_k)}{2h}} + \frac{y'(x_k)}{2} + \cancel{\frac{h}{4} y''(x_k)} + \frac{h^2}{12} y^{(3)}(x_k) + \cancel{\frac{h^3}{48} y^{(4)}}(x_k) + \underline{O}(h^4) - \cancel{\frac{y(x_k)}{2h}} + \frac{y'(x_k)}{2} - \cancel{\frac{h}{4} y''(x_k)} + \frac{h^2}{12} y^{(3)}(x_k) - \cancel{\frac{h^3}{48} y^{(4)}}(x_k) - \right.$$

$$\left. - y'(x_k)(a_1 + a_0 + a_{-1}) - y''(x_k)(a_1 h - a_{-1} h) - y^{(3)}(x_k) \cdot \frac{h^2}{2}(a_1 + a_{-1}) - y^{(4)}(x_k) \cdot \frac{h^3}{6}(a_1 - a_{-1}) \right|$$

При $y'(x_k)$: $\begin{cases} a_1 + a_0 + a_{-1} = 1 & \text{– чтобы сократилось} \end{cases}$

При y'': $\quad a_1 - a_{-1} = 0$

При $y^{(3)}$: $\quad a_1 + a_{-1} = \frac{1}{3}$ – чтобы $\frac{h^2}{6} y^{(3)}(x_k)$ сократилось

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1/6 = a_{-1} \\ a_0 = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

+

В итоге:

раскроем на 1 порядок выше

$$\max_{x_k} \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k-h)}{2h} - \left[\frac{1}{6} f(x_k+h) + \frac{2}{3} f(x_k) + \frac{1}{6} f(x_k-h) \right] \right| = \max_{x_k} \left| y^{(5)}(\xi_k) \cdot \frac{h^4}{120} - \frac{2}{6} y^{(5)}(\xi'_k) \cdot \frac{h^4}{24} \right| \le C \cdot h^4$$

Ответ: $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6}$, $a_0 = \frac{2}{3}$, порядок аппр-ии $p = 4$ ◢

№2 Иссл-ть устойчивость разностной схемы: $\theta \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta) \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k$, $\theta \in [0, 1]$

▷ Ищем решение в виде $y_k = \mu^k$

$$\theta \frac{\mu^{k+1} - \mu^k}{h} + \frac{\mu^k - \mu^{k-1}}{h} - \theta \frac{\mu^k - \mu^{k-1}}{h} = \mu^{k-1} \left(\frac{\theta}{h} \mu^2 - \underbrace{\frac{\theta}{h} \mu} + \underbrace{\frac{1}{h} \mu} - \frac{1}{h} - \underbrace{\frac{\theta}{h} \mu} + \frac{\theta}{h} \right) = \mu^{k-1} \left(\frac{\theta}{h} \mu^2 - \frac{2\theta - 1}{h} \mu + \frac{\theta - 1}{h} \right) = 0$$

Т.е. решение $\theta \mu^2 - (2\theta - 1)\mu + (\theta - 1) = 0$: $D = (2\theta - 1)^2 - 4\theta(\theta - 1) = 1 \Rightarrow \mu = \frac{2\theta - 1 \pm 1}{2\theta} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{\theta - 1}{\theta} = 1 - \frac{1}{\theta} \end{array} \right.$

Для α-уст-ти нужно: $|\mu_{1,2}| \le 1 \Rightarrow \left| 1 - \frac{1}{\theta} \right| \le 1$, отсюда $\theta \ge \frac{1}{2}$

Расс-м случай $\theta = 0$:

$\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow$ также есть уст-ть

+

В итоге для уст-ти $\theta = 0$ или $\theta \ge \frac{1}{2}$ + усл-е $\theta \in [0, 1]$

$\Rightarrow$ Ответ: $\theta \in \{0\} \cup [\frac{1}{2}; 1]$ ◢

№3 $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_{k+1} + y_k}{2} \\ y_0 = 1, \ k \geq 0 \end{cases}$ В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = C_1 h + C_2 h^2 + \ldots$ найти C_1 для $x_N = Nh = 1$

▶ знаем, что $y(x) = e^x$ — точное решение $\Rightarrow y(x_N) = e^{x_N}$

Перепишем схему в виде: $2(y_{k+1} - y_k) - h(y_{k+1} - y_k) = 0 \Big/_{k=N-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y_N - 2y_{N-1} - hy_N + hy_{N-1} = 0$ отсюда: $y_{k+1} = \frac{2+h}{2-h} y_k$

$\Rightarrow y_N = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N \cdot \underbrace{y_0}_{=1}$

Значит, $y(x_N) - y_N = e^{x_N = 1} - \underbrace{\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N}_{= \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e^{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right)}} \ominus$ $\quad \frac{2+h}{2-h} = \frac{1+\frac{h}{2}}{1-h/2}$, $\quad \frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right) = \frac{1}{h}\left(\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)$

$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

Т.к. $\ln(1+x) \sim x$ при малом x,

$\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) \simeq \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + O(h^3)$, $\ln\left(1-\frac{h}{2}\right) \simeq -\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + O(h^3) \Rightarrow e^{\frac{1}{h}\left(\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)} = e^{\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) + O(h^3)} = e^{1 + O(h^2)}$

$\ominus \ e - e^{1+O(h^2)} = e\left(1 - \underbrace{e^{O(h^2)}}_{= 1 + O(h^2) + \ldots}\right)$, отсюда видим, что $C_1 = 0$

+

Ответ: $C_1 = 0$ ◢

№4 Для задачи $\begin{cases} y' + 5y = \overbrace{\sin 2x}^{= f(x)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ построить двухточечную разн-ю схему 2го порядка сходимости.

▶ $Nh = 1$

Возьмем $f_k := f\left(x_k + \frac{h}{2}\right)$ и схему

$$\boxed{\begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = \underbrace{\sin\left[2\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right]}_{= f_k} \\ y_0 = 2 \end{cases}}$$

$[\ ]_{y_h} : y(x) \to \begin{pmatrix} y(x_0) \\ \ldots \\ y(x_N = 1) \end{pmatrix}$

$[\ ]_{F_h} : f(x) \to \begin{pmatrix} f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \\ \ldots \\ f(1 - h/2) \end{pmatrix}$

Покажем, что есть сх-ть 2го порядка:

1) Апп-я задачи: $\exists C_1, C_2, p_1, p_2, h_0$: $\forall$ р. $y \in Y$

$\|[Ly]_{F_h} - L_h[y]_h\|_{F_h} + \|[f]_{F_h} - f_h\|_{F_h} \overset{?}{\leq} C_1 h^{p_1}$ $\quad \forall h \leq h_0$

$\|[ly]_{\Phi_h} - l_h[y]_h\|_{\Phi_h} + \|[\varphi]_{\Phi_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \leq C_2 h^{p_2}$

2е нер-во очевидно: $\max_k |y(0) - y_0| + (2-2) = 0$

(возьмем норму $\|u\| = \max_k |u_k|$)

$\|[Ly]_{F_h} - L_h[y]_h\|_h + \|[f]_h - f_h\|_h = \left\|y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + 5y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - \left(\frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + 5\frac{y(x_k+h) + y(x_k)}{2}\right)\right\| +$

$+ \underbrace{\left\|\sin 2\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - \sin 2\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right\|}_{= 0}$

Знаем, что $y(x_k + h) = y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} + y''\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{(h/2)^2}{2} + y^{(3)}(x_k + h/2) \cdot \frac{(h/2)^3}{6} + O(h^4)$

$y(x_k) = y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} + y''(x_k + h/2) \cdot \frac{(h/2)^2}{2} - y^{(3)}(x_k + h/2) \cdot \frac{(h/2)^3}{6} + O(h^4)$

Подставляя это в выражение, получим:

$$\left\| \cancel{y'(x_k+\tfrac{h}{2})} + 5y(x_k+\tfrac{h}{2}) - \frac{\cancel{y'(x_k+\frac{h}{2})h} + \frac{h^3}{48}\left(y^{(3)}(\xi_1)+y^{(3)}(\xi_2)\right)}{h} - 5\left(\cancel{y(x_k+\tfrac{h}{2})} + \frac{h^2}{8}y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h^3}{96}\left(y^{(3)}(\xi_1)-y^{(3)}(\xi_2)\right)\right)\right\|$$

$$\le \left\| -\frac{h^2}{48}\left(y^{(3)}(\xi_1)+y^{(3)}(\xi_2)\right) - \frac{5h^2}{8}y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \underline{O}(h^3)\right\| \le Ch^2 \Rightarrow \text{порядок } p=2$$

Ур-е 1го порядка => дост-но проверить α-уст-ть:

+

$$\frac{\mu^{k+1}-\mu^k}{h} = 0 \Rightarrow \mu^k(\mu-1)=0 \Rightarrow \mu = 1,\ 0 \Rightarrow \text{есть } \alpha\text{-уст-ть}.$$

аппр-я + устойчивость = сходимость => наша схема имеет сх-ть $\underline{O}(h^2)$

№5 Постр. аппр-ю на решении 2го порядка по $x_0=0$ и $x_1=h$ кр. усл-я

$$\begin{cases} u'(0)-u(0)=0 \\ u''-2u=\sin x-1 \end{cases}$$

Знаем, что аппр-я $\dfrac{\overbrace{u(x_0+h)}^{=u_1}-\overbrace{u(x_0)}^{=u_0}}{h} - \overbrace{u(x_0)}^{=u_0} = 0$ имеет 1й порядок. „Подправим":

заменим 0 на δ и найдем это δ:

$$u(x_0+h) = u(x_0) + \frac{h}{1}u'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{6}u'''(x_0) + \underline{O}(h^3)$$

$$\Rightarrow \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} = u'(x_0) + \frac{h}{2}u''(x_0) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(x_0) + \underline{O}(h^2)$$

из ур-я: $u''(0)-2u(0) = \sin 0 - 1 = -1$

$$\Rightarrow \frac{u_1-u_0}{h} - u_0 = \underbrace{-u_0+u'(0)}_{=0} + \frac{h}{2}\underbrace{u''(0)}_{=2u(0)-1} + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(0) + \underline{O}(h^2) = \underbrace{hu(0)-\frac{h}{2}} + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(0) + \underline{O}(h^2)$$

+

$$\Rightarrow \delta = \frac{h}{2}(2u_0-1)$$

В итоге, аппр-я имеет вид: $\boxed{\dfrac{u_1-u_0}{h} - u_0 - \dfrac{h}{2}(2u_0-1) = 0}$

№6 $\begin{cases} -u''(x)+pu(x)=f(x), \quad p=\text{const}>0 \\ u(0)=a \\ u'(\overset{=Nh}{1})=b \end{cases}$

несмещ. сетка, сетка 2го порядка сх-ти:

Схема имеет вид: $\boxed{\begin{cases} -\dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}+pu_k=f_k \\ u_0=a \\ \dfrac{u_N-u_{N-1}}{h} = b+\delta \end{cases}}$

Уст-ть: $\exists C, h_0: \forall f^{(i)}, \varphi^{(i)}, i=1,2 \quad \|y_h^{(1)}-y_h^{(2)}\|_h \le C\left(\|f_h^{(1)}-f_h^{(2)}\|_h + \|\underbrace{\varphi_h^{(1)}-\varphi_h^{(2)}}_{=0 \text{ считаем}}\|\right) \quad \forall h\le h$

Пусть $y_k := y_k^{(1)}-y_k^{(2)}$, $f_k = f_k^{(1)}-f_k^{(2)}$

Найдем δ:

$$\left|\underbrace{\frac{y(hN)-y(hN-h)}{h}} - b - \delta\right| \Rightarrow \text{положим } \delta =$$

- $$\frac{y(Nh)-y(Nh-h)}{h} = \underbrace{y'(Nh)-\frac{h}{2}y''(Nh)}, + \underline{O}(h^2) \quad \Rightarrow \delta = \cancel{-b} + \cancel{u'(1)} - \frac{h}{2}\underbrace{u''(1)} =$$

$$y(h(N-1)) = y(Nh) - h\cdot y'(Nh) + \frac{h^2}{2}y''(Nh) + \underline{O}(h^3) \qquad = \boxed{\frac{h}{2}(f_N - pu_N)}$$

$Au=f$ - наша задача

$$\tilde{A} = A^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p \end{pmatrix}$$

$\parallel$

$A+(p\cdot)$

$$\|y^{(1)}-y^{(2)}\|_h \le \underbrace{\|A^{-1}\|_h}\cdot\|f^{(1)}-f^{(2)}\|_h$$

хотим $\le C \ \forall h \le h_0$

$$\Rightarrow \{\lambda_{\tilde{A}}\} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi m h}{2} + p$$

Возьмем $\|A\|_2 = \lambda_{max}(A) \Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}(A)}$; $\{\lambda_A^{(m)}\} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2} \ge 4+p$

Отнормируем эту норму uн-лем h, тогда $\|u\|_{2,h} = (\sum u_i^2 \cdot h)^{1/2}$, $\|A\|_{2,h} = \|A\|_2$

Таким образом, установили уст-ть.

Аппр-я: знаем, что $u'(1)=b$ подгадали $O(h^2)$ (выбрали так δ), $u(0)=a$ аппр-ся точно.

$$y''(x_k) = \frac{y(x_k+h)-2y(x_k)+y(x_k-h)}{h^2} + O(h^2) - \text{была т. на семинаре}$$

$\Rightarrow$ имеем аппр-ю порядка $O(h^2)$ $\qquad (u_k = u(x_k),\ f_k = f(x_k))$

$\Rightarrow$ 1 задача линейна, устойчива и аппр-се схемой в одной норме $\Rightarrow$ есть сход-ть порядка не ниже $p_1 = 2$, по т. Филиппова (в норме $\|\cdot\|_{2,h}$)

№7 Иссл-ть методом апр. оценок уст-ть:

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + p_i u_i = f_i, & i=\overline{1,N-1},\ p_i \ge 0 \\ u_0 = 0 \\ u_N = u_{N-1} \\ h = \frac{1}{N-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p_1 & -\frac{1}{h^2} & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \frac{2}{h^2}+p_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

+

зачёт.

умн-м каждое из $N-1$ ур-й на u_i и просумм-м: $-\frac{1}{h^2}\sum_1^{N-1}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})u_i + \sum_1^{N-1} p_i u_i^2 = \sum_1^{N-1} f_i u_i$

$$\sum_1^{N-1}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})u_i = \underbrace{\sum_1^{N-1}(u_{i+1}-u_i)u_i}_{\sum_1^{N-2}(\dots) + (\cancel{u_N-u_{N-1}})u_{N-1}} - \sum_1^{N-1}(u_i-u_{i-1})u_i \ \textcircled{=}$$

$u_N - u_{N-1} = 0$

$$\sum_1^{N-2}(u_{i+1}-u_i)u_i \underset{i\to i+1}{=} \sum_2^{N-1}(u_i-u_{i-1})u_{i-1}$$

$$\textcircled{=} \sum_2^{N-1}(u_i-u_{i-1})u_{i-1} - \underbrace{(u_1-\overset{0}{u_0})u_1}_{u_1^2} - \sum_2^{N-1}(u_i-u_{i-1})u_i \ \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \sum_2^{N-1}(u_i-u_{i-1})(u_{i-1}-u_i) = -\sum_2^{N-1}(u_i-u_{i-1})^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{h^2}\sum_1^{N-1}(u_i-u_{i-1})^2 + \underbrace{\sum_1^{N-1}p_k u_k^2}_{\ge 0} = \sum_1^{N-1} f_k u_k}$$

$$u_i = \sum_1^i (u_k-u_{k-1}) \Rightarrow u_i^2 \le \sum_2^{N-1}(u_i-u_{i-1})^2\cdot(N-\tfrac{1}{2}) \Rightarrow \sum_1^{N-1} u_k^2 h \le \frac{1}{h^2}\sum_1^{N-1}(u_i-u_{i-1})^2$$

$$\sum_1^{N-1} u_k^2 \le \sum_1^{N-1} f_k u_k \le \frac{1}{2}\sum_1^{N-1} f_k^2 + \frac{1}{2}\sum_1^{N-1} u_k^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_1^{N-2} u_k^2 \cdot h \le \sum_1^{N-2} f_k^2 \cdot h} \Rightarrow \text{ex-ть есть}$$