14.09.20. Спецкурс Вуличская, 932   Токаева Александра 409

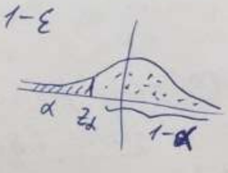
① Как выбрать премию π_i так, чтобы вероятность разорения $< \varepsilon$?

<u>Решение:</u> Будем взимать с каждого риска премию π_i (понятно, что $\pi_i > EX_i$, поскольку X_i - случайная величина, а π_i - детерминированная, поэтому мы делаем надбавку за риск).

Всего собрали $\Pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$; $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Хотим: $P(S_n \le \Pi) \ge 1-\varepsilon$ — т.е вер-ть неразорения $\ge 1-\varepsilon$ (чтобы близко к 1 обычно)

Но $P(S_n \le \Pi) = P\Big(\underbrace{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{Var S_n}}}_{\xi_0 \text{ по ЦПТ}} \le \frac{\Pi - ES_n}{\sqrt{Var S_n}}\Big) \sim \Phi\Big(\frac{\Pi - ES_n}{\sqrt{Var S_n}}\Big) \overset{?}{\ge} 1-\varepsilon$



$\Rightarrow \frac{\Pi - ES_n}{\sqrt{Var S_n}} \ge z_{1-\varepsilon}$

$\Rightarrow \boxed{\Pi \ge ES_n + z_{1-\varepsilon} \cdot \sqrt{Var S_n}}$

② Док-ть, что единств. непрер. расп (т.е $\exists f = F'$) со св-вом отсутствия памяти - это эксп. расп.

<u>Решение:</u> Хотим: $P(X > x+t \mid X > x) = P(X > t)$

$P(X > x+t \mid X > x) = \frac{P(X > x+t \cap X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}$

$P(X > t) = 1 - P(X \le t) = 1 - F(t)$

$\Rightarrow$ Хотим: $\frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} = 1-F(t)$

$\Rightarrow 1-F(x+t) = (1-F(x))(1-F(t))$

Обозначим $g(k) := 1-F(k)$

Тогда задача стала такой: найти все дифф. ф-ции $g(k)$ такие, что $g(x+t) = g(x) \cdot g(t)$

Будем решать эту задачу.

Сначала подставим $x = t = 0$

$\Rightarrow g(0) = g(0) \cdot g(0)$

$\Rightarrow g(0) \cdot (g(0) - 1) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(0) = 0 \text{ — не подх.} \\ g(0) = 1. \end{array}\right.$

Заметим, что если $g(0)=0$,

то $\forall x: \ g(x+0) = \underset{0}{g(0)} \cdot g(x) = 0.$

$\Rightarrow g(k) \equiv 0$

но $\underset{0}{g(k)} = 1 - F(k) \Rightarrow F(k) \equiv 1$ – такого у ф.р. быть не может, т.к. $F(-\infty)=0$.

$\Rightarrow g(0) = 1.$

~~Далее,~~ $\cancel{\frac{g(x+0)-g(0)}{x} = \frac{g(x)\cdot g(0) - g(0)}{x} = g(0)\cdot\frac{g(x)-1}{x} = g(0)\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x}}$

$\cancel{\Rightarrow g'(x) = \lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0} g(0)\frac{g(x)-g(0)}{x} = g(0)\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = g(0)\cdot g'(0)}$

Далее, поскольку g – дифф. по усл:

$$g'(x) = \lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{g(x)\cdot g(h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{g(x)(g(h) - \overset{g(0)}{1})}{h} = g(x)\cdot\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}}_{=g'(0)}$$

$\Rightarrow g'(x) = g(x)\cdot \underbrace{g'(0)}_{=c}$ – какая-то константа.

$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = g(x)\cdot c$

$\Rightarrow \frac{dg}{g} = c\,dx \Rightarrow \ln g = cx + \tilde{c} \Rightarrow g(x) = e^{cx}\cdot\tilde{\tilde{c}}$

причем выше мы выяснили, что $g(0)=1 \Rightarrow g(0) = e^0\cdot\tilde{\tilde{c}} \overset{?}{=} 1 \Rightarrow \tilde{\tilde{c}} = 1.$

$\Rightarrow \underset{1-F(x)}{g(x)} = e^{cx}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = 1 - e^{cx}}$ – а это ф.р. для эксп. величины с параметром $\lambda = -c$.

(3) $Y = X^{1/\tau}$

$X \sim Exp(1)$, т.е. $F(x) = 1 - e^{-x}$

Найти распр. Y.

<u>Решение</u>: Если $\tau>0$: $P(Y\le t) = P(X^{1/\tau}\le t) \overset{\tau>0}{=} P(X\le t^\tau) = F(t^\tau) = 1 - e^{-t^\tau}$

Если $\tau<0$: $P(Y\le t) = P(X^{1/\tau}\le t) \underset{\tau<0}{=} P(X\ge t^\tau) = 1 - F(t^\tau) = e^{-t^\tau}$