Выживающие стратегии в модели рынка с континуальным числом агентов

VEGA INSTITUTE
Science Promotion Foundation

Нина Бадулина, Дмитрий Шатилович

Научная группа «Фундаментальные задачи финансовой математики»
Руководитель: Житлухин М. В.

Введение

В настоящей работе рассматривается модель финансового рынка, введенная в статье [BE92]. На эту модель можно смотреть как на игру конечного числа игроков, на каждом раунде которой агенты распределяют капитал среди конечного числа активов. В конце каждого раунда только один случайно выбранный актив производит выплату, которая разделяется между игроками соразмерно вложениям. Игроки распределяют капитал, исходя из истории игры и информации, полученной к началу раунда.

Цель работы

Во всех работах в данном направлении предполагается, что в модели рынка присутствует конечное число агентов. Однако интересен случай, когда множество агентов бесконечно и его можно снабдить структурой измеримого пространства. Цель нашей работы состояла в обобщении результатов статьи [BE92] на такую модель.

Основные вопросы

Основные вопросы, связанные с этой игрой, состоят в построении выживающей и доминирующей стратегий распределения капитала.
Под выживающей имеется в виду стратегия, используя которую агент не разорится, то есть доля его капитала всегда будет строго отделена от нуля с вероятностью 1 на всем бесконечном горизонте времени вне зависимости от того, какие еще стратегии присутствуют на рынке.
Доминирующей называется стратегия, используя которую агент асимптотически заберет весь капитал себе.

Модель рынка с конечным числом агентов

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ - фиксированное вероятностное пространство
- $M \geq 2$ агентов
- $N \geq 2$ короткоживущих активов
- W_t^m - капитал m-го агента после t раундов игры
- $\lambda_{t,n}^m$ - доля капитала, которую m-ый агент вкладывает в актив n на раунде t
- $\lambda^m = (\lambda_{t,1}^m, \ldots, \lambda_{t,N}^m)$ - стратегия агента m
- $\lambda_{t,n}^m \geq 0, n = 1, \ldots N$
- $\sum_{n=1}^N \lambda_{t,n}^m = 1$
- W_0^m - не случайный
- $W_0^m > 0$ для каждого m
- $\sum_{m=1}^M W_0^m = 1$
- $X_{t,n}(\omega)$ - индикатор исхода n на раунде t
- $X_t = (X_{t,1}, \ldots, X_{t,N})$ независимы и одинаково распределены

Эволюция капитала:

$$W_{t+1}^m(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_{t,n}^m W_t^m(\omega)}{\sum_{l=1}^M \lambda_{t,n}^l W_t^l(\omega)} X_{t+1,n}(\omega), \quad t \geq 0$$

Асимптотическое доминирование

Стратегия $\lambda^* \in \Delta^N$ называется *асимптотически доминирующей*, если в любом профиле $\Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^M)$, где $\lambda^1 = \lambda^*$, выполнено

$$\lim_{t \to \infty} W_t^1 = 1$$

(и, следовательно, $\lim_{t\to\infty} W_t^m = 0$ для всех $m \geq 2$).

Теорема [BE92]

Стратегия $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_N^*)$, где

$$\lambda_n^* = \mathbb{E}X_n \quad n = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

является асимптотически доминирующей.

Модель с континуумом агентов

Рассмотрим множество всех стратегий $\Delta^N = \{a \in \mathbb{R}_+^N : a_1 + \ldots + a_N = 1\}$.
Распределением капитала на рынке в момент $t \geq 0$ будем называть последовательность случайных вероятностных мер $\mu_t(\omega)$ на $(\Delta^N, \mathcal{B}(\Delta^N))$.
Мера $\mu_t(A)$, $A \in \mathcal{B}(\Delta^N)$, выражает богатство группы агентов, которые используют стратегии из множества A.
Рассматриваются только стратегии, не зависящие от времени.
Начальное распределение капитала μ_0 предполагается неслучайным. В последующие моменты времени меры μ_t являются случайными элементами в борелевском пространстве вероятностных мер на Δ^N с метрикой слабой сходимости.
Мера всего симплекса в любой момент времени равна единице, а динамика капитала задается следующим образом:
для любого множества $A \in \mathcal{B}(\Delta^N)$ выполнено

$$\mu_{t+1}(A) = \sum_{n=1}^N \frac{\int_A \lambda_n \mu_t(d\lambda)}{\int_{\Delta^N} \lambda_n \mu_t(d\lambda)} X_{t+1,n}.$$

Основной результат

Стратегия λ^* называется асимптотически доминирующей, если для любого начального распределения капитала μ_0 такого, что $\lambda^* \in \operatorname{supp}(\mu_0)$ выполнено

$$\mu_t \xrightarrow{w} \delta_{\lambda^*} \text{ п.н. при } t \to \infty,$$

где δ_{λ^*} является мерой Дирака с носителем в точке λ^*.

Теорема

Стратегия $\lambda^* = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$ является асимптотически доминирующей в модели с континуумом агентов.

Заключение

В работе была рассмотрена модель рынка с бесконечным числом агентов, являющаяся обобщением модели из статьи [BE92]. Определение асимптотически доминирующей стратегии было распространено на случай бесконечного пространства агентов, а также введено эквивалентное ему определение, с помощью которого доказана теорема о явном виде асимптотически доминирующей стратегии в указанной модели.
В дальнейшем планируется доказать соответствующий результат для случая, где выплаты перестают быть взаимоисключающими. Кроме того, предполагается исследовать вопросы устойчивости стратегии при преобразованиях меры, и найти условия, при которых стратегия указанного вида остается оптимальной в некотором смысле.

Список литературы

[BE92] Lawrence Blume and David Easley. “Evolution and market behavior”. In: *Journal of Economic Theory* 58.1 (1992), pp. 9–40.

[Ami+11] Rabah Amir et al. “Evolutionary finance and dynamic games”. In: *Mathematics and Financial Economics* 5.3 (2011), pp. 161–184.

[EHS11] Igor V Evstigneev, Thorsten Hens, and Klaus Reiner Schenk-Hoppé. “Local stability analysis of a stochastic evolutionary financial market model with a risk-free asset”. In: *Mathematics and Financial Economics* 5.3 (2011), pp. 185–202.

[Sas15] Igal Sason. “On reverse Pinsker inequalities”. In: *arXiv:1503.07118* (2015).