01.12.21. Тунгускова Контрольная 1. Токаева Александра 509

Задача: по наклонной плоскости движется бесконечный слой вязкой жидкости толщиной h, за счёт силы тяжести $\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}=0\right)$

Решить задачу в предположении: $v_1 = v(x_3)$, $v_2 = v_3 = 0$

т.е. найти $\boxed{v_i \text{ и } p}$

+ граничные условия: при $x_3=0$: прилипание

при $x_3=h$ – свободная поверхность

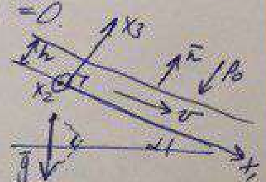
Решение: нам надо найти v_i и p.

У нас: 1) жидкость несжимаема $\Rightarrow \operatorname{div}\bar{v}=0$ – ур-е неразрывности

2) поток бесконечный $\Rightarrow$ движение установившееся $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}=0$

3) линии тока $\parallel$ оси $Ox_1 \Rightarrow v_2=v_3=0$ (по усл.)

4) $v_1 = v_1(x_3)$, $p = p(x_3)$ } – т.к. поток бесконечный вдоль Ox_1, массовые силы и граничные условия не зависят от x_1.



Полная система ур-й:

$$\begin{cases} \rho\frac{d\bar{v}}{dt} = \rho\bar{F} - \operatorname{grad}p + \mu\Delta\bar{v} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v} & (1) \leftarrow \text{ур-е Навье-Стокса} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\bar{v} = 0 & \leftarrow \text{ур-е неразрывности } (2) \\ \bar{v}\big|_{x_3=0} = 0 & \text{– условие прилипания на нижней границе } (3) \\ \bar{P}_n\big|_{x_3=h} = -p_0\bar{n} & \text{– условие на свободной пов-ти } (4) \end{cases}$$

(у нас несжимаемая жидкость $\Rightarrow \frac{d\rho}{dt}=0 \Rightarrow \operatorname{div}\bar{v}=0$)

(что вектор напряжений при $x_3=h$ равен внешнему давлению)

Проектируем ур-е (1) на оси Ox_1; Ox_2; Ox_3

на Ox_1: $\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_1}{\partial t}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_i}v_i}^{\,0}\right) = \rho g\sin\alpha - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x_1}}^{\,0} + \mu\Delta v_1 + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}(\cancel{\operatorname{div}\bar{v}}^{\,0})$

т.к. $\frac{\partial}{\partial t}=0$; т.к. v_1 зависит только от x_3, но $v_3=0$; т.к. $\frac{\partial p}{\partial x_1}=0$ по усл.; $\mu\Delta v_1 = \mu\frac{d^2v_1}{dx_3^2}$; $\operatorname{div}\bar{v} = 0$, см. ур-е неразрывности (2)

$$\Rightarrow 0 = \rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_1}{dx_3^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{-\rho g\sin\alpha}{2\mu}\cdot x_3^2 + a x_3 + b} \quad (5)$$

на Ox_2: $\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_2}{\partial t}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_i}v_i}^{\,0}\right) = 0 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\cancel{\Delta v_2}^{\,0} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}(\cancel{\operatorname{div}\bar{v}}^{\,0})$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0} \quad (6)$$ – и так по усл. выполнено

на Ox_3: $\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_3}{\partial t}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_i}v_i}^{\,0}\right) = -\rho g\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu\cancel{\Delta v_3}^{\,0} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{v}))$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g\cos\alpha \Rightarrow \boxed{p = -\rho g\cos\alpha\, x_3 + C} \quad (7)$$

$\Rightarrow$ имеем три произвольные постоянные a, b, c, которые надо определить из граничных условий $\begin{cases} \bar v|_{x_3=0}=0 \\ \bar p_n|_{x_3=h} = -p_0\bar n \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} v_1 = -\frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}x_3^2 + ax_3 + b \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \text{ – и так было по усл. (8)} \\ p = -\rho g\cos\alpha\, x_3 + c \end{cases} + \begin{cases} \bar v|_{x_3=0}=0 \\ \bar p_n|_{x_3=h} = -p_0\bar n \end{cases}$

Распишем граничные условия:

1) $\bar v|_{x_3=0}=0 \Rightarrow \begin{cases} v_1|_{x_3=0} = \left(-\frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}x_3^2+ax_3+b\right)\Big|_{x_3=0} = b \overset{?}{=} 0 \Rightarrow b=0 \\ v_2|_{x_3=0} \\ v_3|_{x_3=0} \end{cases}$ и так $v_2=v_3\equiv 0$

2) $\bar p_n|_{x_3=h} = -p_0\bar n$

но $\begin{cases} \bar p_n = \sigma_{ij}n_j\bar e_i \\ \bar n = n_i\bar e_i \end{cases} \Rightarrow \sigma_{ij}n_j|_{x_3=h} = -p_0 n_i$

У нас $\bar n = (0,0,1)$, т.е. $n_1=n_2=0;\ n_3=1$

$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11}\cancel{n_1}^{0}+\sigma_{12}\cancel{n_2}^{0}+\sigma_{13}n_3 = -p_0\cancel{n_1}^{0} \\ \sigma_{21}\cancel{n_1}^{0}+\sigma_{22}\cancel{n_2}^{0}+\sigma_{23}n_3 = -p_0\cancel{n_2}^{0} \\ \sigma_{31}\cancel{n_1}^{0}+\sigma_{32}\cancel{n_2}^{0}+\sigma_{33}n_3 = -p_0 n_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13}|_{x_3=h}=0 \\ \sigma_{23}|_{x_3=h}=0 \\ \sigma_{33}|_{x_3=h}=-p_0 \end{cases}$ (11)

Что нам мешает использовать эти граничные условия?

То, что в них не входят неизвестные величины v, p, ρ. Сделаем так, чтобы входили:

неизвестно!

по опр. вязкой жидкости: $\boxed{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}+\tau_{ij}}$ (9)

а по опр. линейно-вязкой (= ньютоновской) жидкости: $\boxed{\tau_{ij} = \lambda\,\cancel{\mathrm{div}\,\bar v}^{\,0}\,\delta_{ij} + 2\mu v_{ij}}$ (10)

$\boxed{\text{Найдем } v_{ij} = \frac12\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}$, где $v_1 = -\frac{\rho g\sin\alpha}{2\mu}x_3^2+ax_3+b$; $v_2=0$; $v_3=0$. (см. (5))

Ну $\begin{cases} v_{11}=0;\ v_{12}=0;\ v_{13} = -\frac12\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}x_3+\frac a2 \\ v_{21}=0;\ v_{22}=0;\ v_{23}=0 \\ v_{31} = -\frac12\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}x_3+\frac a2;\ v_{32}=0;\ v_{33}=0 \end{cases}$

Подставляем это в (10), а (10) подставляем в (9):

$\Rightarrow \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}+\tau_{ij} = -p\delta_{ij}+2\mu v_{ij} = \begin{cases} \sigma_{11}=-p;\ \sigma_{12}=0;\ \sigma_{13}=2\mu v_{13} = -\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}x_3+a \\ \sigma_{21}=0;\ \sigma_{22}=-p;\ \sigma_{23}=0 \\ \sigma_{31} = -\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}x_3+a;\ \sigma_{32}=0;\ \sigma_{33}=-p \end{cases}$ (12)

Теперь подставляем (12) в (11): (ведь p – неизвестное)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13}\big|_{x_3=h} \overset{(12)}{=} -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{\mu}x_3 + a\Big|_{x_3=h} = -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{\mu}h + a = 0 \\ \sigma_{23}\big|_{x_3=h} = 0 = 0 \\ \sigma_{33}\big|_{x_3=h} \overset{(11)}{=} -p \overset{(8)}{=} (\rho g \cos\alpha\, x_3 - c)\Big|_{x_3=h} = \rho g \cos\alpha\, h - c = -p_0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\rho g \sin\alpha}{\mu}h \\ c = p_0 + \rho g \cos\alpha \end{cases}$ — нашли эту константу (а $b=0$ уже была найдена раньше); — тоже нашли эту константу

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{\rho g \sin\alpha}{\mu}h \\ c = p_0 + \rho g \cos\alpha \end{cases} \quad (13)$$

Подставляем (13) в (8):

$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}x_3^2 + a x_3 + b \overset{a=\dots}{=} -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}x_3^2 + \dfrac{\rho g \sin\alpha}{\mu}h\, x_3 = \dfrac{\rho g \sin\alpha\, x_3}{2\mu}(2h - x_3) \\ p = -\rho g \cos\alpha\, x_3 + c \overset{c=\dots}{=} -\rho g \cos\alpha\, x_3 + p_0 + \rho g \cos\alpha = p_0 + \rho g \cos\alpha\,(h - x_3) \end{cases}$$

Ответ: $v_1 = \dfrac{\rho g \sin\alpha\, x_3}{2\mu}(2h - x_3)$

$p = p_0 + \rho g \cos\alpha\,(h - x_3)$