11.12.19. Парамонов. семинар 15.

Принцип аргумента. Теорема Руше

Теорема (Руше)

$f, g \in O(\bar{G})$, G — огр. область с простой границей.

И пусть $|f(z)| > |g(z)|$, $\forall z \in \partial G$

Тогда f и $f+g$ имеют одинак. число нулей в G, с учетом кратности
(этих нулей в области конечное число из т. единственности,
а у f и $f+g$ нет нулей на границе — т.к. $|f(z)| > |g(z)|$ на границе.)

Пример 1. $P(z) = z^5 + 2z^2 + 5z + 1$.

$D = \{1 < |z| < 2\}$.

Найти число нулей многочлена P в D.

Решение: $f(z) = 5z$

$|f(z)|\Big|_{|z|=1} = 5$.

А $\left| z^5 + 2z^2 + 1 \right|\Big|_{|z|=1} \leq 4$

А у $5z$ — нет нулей в кольце.

Но мы забыли про внешнюю границу — там уже $f = z^5$.

$\Rightarrow$ разобьём задачу на 2:

1) $D_1 = \{|z| < 1\}$. $\Rightarrow f_1(z) = 5z$, $g_1(z) = z^5 + 2z^2 + 1$ $\Rightarrow |f_1(z)| = 5 > 4 \geq |g_1(z)|$

$N_{D_1}(f_1 + g_1) \overset{\text{т. Руше}}{=} N_{D_1}(f_1) = 1$.

\ или $f_1(z) = 5z + 1$ $\Rightarrow$ на $|z| = 1$: $|f_1(z)| \geq 5 - 1 = 4$.

2) $D_2 = \{|z| < 2\}$.

Берём $f_2(z) = z^5$

$g_2(z) = 2z^2 + 5z + 1$.

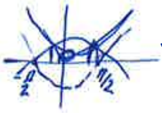
На ∂D_2: $|f_2(z)| = 32 \geq 19 \geq |g_1(z)|$

$\Rightarrow N_{D_2}(f_2 + g_2) = N_{D_2}(f_2) = 5$.

$\Rightarrow$ Если $D = D_2 \setminus \bar{D}_1$, то $N_D(f+g) = 5 - 1 = 4$

(на границе нет нулей)

ДЗ 1. Найти число нулей ф-ции $h(z) = z^2 - \cos z$ в области $D = \{|z| < 2\}$.

(док-ть, что их 2 шт, и оба $\in (-2, 2)$ на $\mathbb{R}$).  — док-ть, что больше нет).

$f(z) = z^2$
$g(z) = -\cos z$ и док-ть, что $|g(z)|\Big|_{|z|=2} < 4$

Т.е. хотим: $|g(z)|\big|_{|z|=2} < 4$.

имеем: $z = 2e^{it}$ — модуль $|e^{\text{веществ.}}|$ = вещ. часть.

$\Rightarrow |g(2e^{it})| = \left| e^{\frac{2ie^{it} + e^{-2ie^{it}}}{2}} \right|$ — найти max, и убедиться, что там < 4.

ф-ция от t

Примеры

ДЗ 2 Док-ть, что при $t > 1 \in \mathbb{R}$ (парам.): ур-е $z \cdot e^{t-z} = 1$ имеет в круге $\{|z| < 1\}$ ровно 1 корень, причем действ.

ну e^z и $z \cdot e^t$

принцип аргумента

① логарифмический вычет.

пусть $f \in \mathcal{O}(\mathring{U}_\delta(a))$, $f \neq 0$ в $\mathring{U}_\delta(a)$. (в a м.б. полюс)

тогда $\frac{f'}{f} \in \mathcal{O}(\mathring{U}_\delta(a))$ определен вычет $\operatorname{res}_a \frac{f'}{f} = \operatorname{Lres}_a f$.

Чем он полезен: если a — ~~полюс~~ ноль ф-ции f порядка n, то $\operatorname{Lres}_a f = n$.

полюс порядка p, то $\operatorname{Lres}_a f = -p$.

Теорема (о лог. вычетах)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_D(f) - P_D(f)}$$

$N_D(f)$ — число нулей f в D с учетом кратности; $P_D(f)$ — число полюсов в D с учетом кратности.

Условия:

- D — огр. область с простой границей
- $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$
- f не имеет на ∂D нулей и полюсов. — тогда т. Коши работает.

почему он логарифмический?

$\ln$ — его ветвь всегда нон $\exists$.

образ лежит либо вне разреза

Короче, либо $\mathbb{Z}$, основной, либо $[0, 2\pi]$.

$f(z) = z$

$\Rightarrow$ локально — ветвь есть, а глобально — нет. — т.к.

1 способ: $\ln z = \ln|z| + i \cdot \varphi$, где φ — $\operatorname{Arg} z$

ноц — нельзя выбрать непрерывно — у него скачок в разрезе. но вдруг можно выбрать как-то хитро? норм. способ: 2.

2 способ: если бы у $\frac{1}{z}$ была первообр, то это был бы $\ln z$.

но у $\frac{1}{z}$ нет голом. первообр, т.к $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} = 2\pi i \neq 0$, а если бы была первообр, то было бы $= 0$ по ф-ле Н-Л

$\Rightarrow$ у $\frac{1}{z}$ нет голом. первообр

$\Rightarrow \ln z$ — не голом. глоб.

причем $(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$

мы будем находить $N_D(f) - P_D(f)$, считая интеграл.

принцип аргумента:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_D(f) - P_D(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial^+ D} \operatorname{Arg}(f)}$$

Лемма Пусть $\gamma: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}_* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ — путь.

Тогда для многозначной ф-ции $\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ на всём $[\alpha,\beta]$ $\exists$ однозн. непрер. ветвь $\varphi(t)$, т.е. $\exists \varphi \in C([\alpha,\beta])$, такая что $\forall t\in[\alpha,\beta]$ имеем: $\varphi(t)\in \mathrm{Arg}(\gamma(t))$.

однозн. ветвь.

Кроме того, $\exists$ счётное мн-во таких φ, отличающихся друг от друга на $2\pi j$. ну $\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\varphi(t)}\big|_{t\in[\alpha,\beta]}$, где φ — непрер. ф-ция.

Пример окр-ти: $e^{it} \Rightarrow \varphi(t)=t$.

Зам. Мы не можем брать $\varphi = \arg(\gamma(t))$, т.к. он при переходе через π прыгает.

Пример $\gamma(t)=e^{it}\big|_{[0,2\pi]}$

$\varphi(t)=t$, на $[0,2\pi]$.

А $\arg(\gamma(t))\neq t$ при $t>\pi$ — т.к. $\arg$(чего угодно) $<\pi$.

$\mathrm{Arg}(\gamma(t))\big|_{[0,2\pi]} = \{t+2\pi k\}$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$\{\arg(t)+2\pi k\}$

Опр $\boxed{\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z) = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}$ ← γ не проходит через 0 — глоб. Arg $\exists$

приращение (непрерывного) аргумента вдоль γ.

— пока $f(z)\equiv z$.

! Это не вариация! А приращение!

Пусть $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$; $f\in C([\gamma])$; $f\neq0$ на $[\gamma]$.

носитель γ.

~~$\arg(\gamma(t))\neq t$~~.

$\sigma(t) = f(\gamma(t))\big|_{[\alpha,\beta]}$ — тоже путь.; он не проходит через 0 (т.к. $f\neq 0$ на $[\gamma]$.)

Вернёмся $\boxed{\Delta_\sigma \mathrm{Arg}(w) =: \Delta_\gamma \mathrm{Arg}(f)}$ — приращение f вдоль γ.

Если D — кольцо, то просто отдельно посчитать по 2-м границам.

а $\Delta_{\partial D}\mathrm{Arg}(z)$ для кольца $=0$ — т.к. внутри нет нулей, ни полюсов.

Теорема В усл. т. о лог. вычетах:

$$\boxed{N_D(f)-P_D(f)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\mathrm{Arg}(f)}.$$

Упр. Док-ть, что ур-е $\operatorname{tg} z = z$ имеет только вещ. корни.

(её нули и полюса только вещ.

полюсов других у $\operatorname{tg} z = z$ не может быть.

Зам. **2 способ** для **Т. Руше**

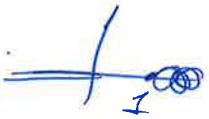
$~~\Delta A + \Delta g~~$ $N_D(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \operatorname{Arg}(f+g)$ — т.к. нет полюсов.

$N_D(f) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \operatorname{Arg}(f)$

но $f+g = f\left(1+\frac{g}{f}\right)$. ~~но $\operatorname{Arg}(f\cdot g) = \varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ — непрер. ветвь~~

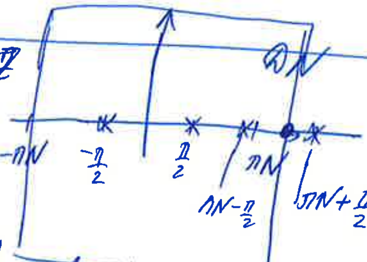
но $\operatorname{Arg}\left(f\cdot\left(1+\frac{g}{f}\right)\right) = \varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ — непрер. ветвь.

$\Rightarrow$ осталось док-ть, что $\Delta \arg\left(1+\frac{g}{f}\right)=0$. — ну очев.



— не обходит вокруг нуля.

Решение: рассм. $f(z) = z - \operatorname{tg} z$



у неё в нуле полюс 3 порядка.

Имеем: $N_{D_N}(f) - P_{D_N}(f) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D_N} \operatorname{Arg}(f)}_{\text{сейчас посчитаем, будет } 1}$

?

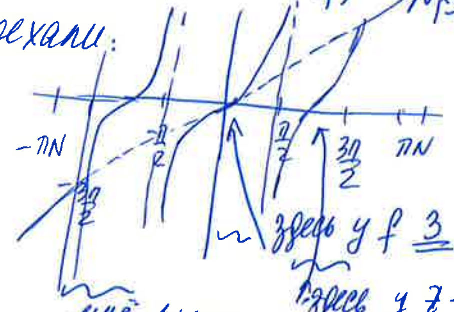
$\|$ ну $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ ну типа их $2N$ и мы их знаем

$\Rightarrow$ узнаем $N_{D_N}(f)$. это полюса tg. $=2N+1$.

С другой стороны, $N_{[-\pi N, \pi N]}(f)$ — можно найти из графика. (их $2N+1$)

И окажется, что $N_{D_N}(f) = N_{[-\pi N,\pi N]}(f)$. Итог.

ну поехали:



здесь у f $\underline{3}$ нуля

ещё 1 ноль

здесь у $z-\operatorname{tg} z$ $\underline{1}$ ноль 1 порядка.

Здесь такие такой же, как и на минимальной, а на минимальной оси tg-огр.

$\Rightarrow 2N+1$ ноль на вещ. оси. (ну $3+2(N-1)) = 2N+1$)

Осталось док-ть, что $\boxed{\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D_N} \operatorname{Arg}(f) \overset{?}{=} 1}$

Док-во. $\|\operatorname{tg} z\|_{\partial D_N} \leq 1$ — честно посчитать.

$f(z) = z - \operatorname{tg} z = z\left(1 - \underbrace{\frac{\operatorname{tg} z}{z}}_{<1}\right)$ не влияет на приращение аргумента.

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D_N} \operatorname{Arg}(f) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D_N} \operatorname{Arg}(z) = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

ДЗ 3) Сколько невещ. нулей имеет ф-ция $2z - \operatorname{tg} z$?

ДЗ 4) Док-ть, что $\forall$ голом. отобр. замкн. круга в себя имеет неподв. точку.

ДЗ 5) Найти число корней многочлена z^3+2z^2+3z+8 в открытой левой полуплоскости.

Учитывают мно: непр. [illegible] см. Павлов, Шабат.

$y'''+2y''+3y'+8y=0$, $y(t)\to 0$ — когда оно [illegible]? ну когда все корни хар. ур-я — имеют отриц. вещ. часть.

ну $f\in\mathcal{O}(\bar B_1)$, $f(\bar B_1)\subset B_1$

Док-во: $\exists z_0\in B_1$: $f(z_0)=z_0$.

10.12.19. ТФКП. Семинар 13.

1) Ряды Тейлора, Лорана

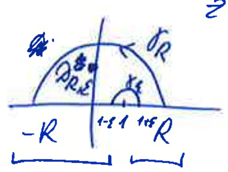
2) Вычет, т. о вычетах

3) интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{10}+1}$ — через вычеты (или в смысле главного значения)

или $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^4+2}dx \leftarrow f(z)=\frac{e^{iz}}{z^4+1}$.

4) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

пример 1 $\boxed{y = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^3-1}}$ — у неё в единице полюс. поэтому так не работает



$e^{\frac{2\pi i}{3}}$ — полюс. для $f(z)=\frac{1}{z^3-1}$.

по т. о вычетах: $\underbrace{\int_{I_1} f(z)dz + \int_{I_2} f(z)dz}_{\to y} + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz}_{\to ?} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dz}_{\to ?} = 2\pi i \sum$ вычетов.

вычет в $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{1}{3z^2}\Big|_{z=e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{1}{3\cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}}$

а) оценим $\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \max f \cdot$ длина пути $= \frac{1}{|R^3 e^{3i\varphi}-1|}\cdot \pi R \le \frac{\pi R}{|R^3 e^{3i\varphi}|-1} = \frac{\pi R}{R^3-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

б) оценим $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$.

пусть $z=1+\varepsilon e^{i\varphi}$

$f(z)=\frac{1}{z^3-1}=\frac{1}{(z-1)(z^2+z+1)}$

$\Rightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\pi}^{0}\frac{i\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}\left((1+\varepsilon e^{i\varphi})^2+(1+\varepsilon e^{i\varphi})+1\right)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} i\int_{\pi}^{0}\frac{d\varphi}{3} = -\frac{\pi i}{3}$

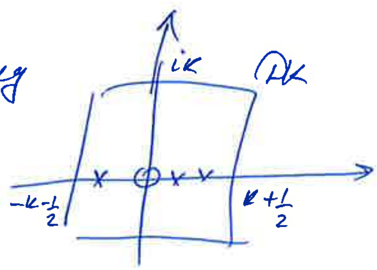
$dz=\varepsilon i e^{i\varphi}d\varphi$

$\Rightarrow y = \frac{\pi i}{3} + \frac{2\pi i}{3\cdot e^{\frac{4\pi i}{3}}}$ — оно на самом деле вещ.

Пример 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = ?$

Рассм. $f(z)=\frac{ctg(\pi z)}{z^4}$ и применим к нему

т. о вычетах для области = квадрат



в нуле полюс 5 порядка

в ост. целых числах — полюс 1 порядка

$$\Rightarrow \int_{\partial D_k} f(z)\,dz \xrightarrow{} 0 = 2\pi i\cdot \sum \text{вычетов} = 2\pi i\left(\sum_{n=-k}^{-1}\operatorname{res}_n f(z) + \operatorname{res}_0 f(z) + \sum_{n=1}^{k}\operatorname{res}_n f(z)\right)$$

при $k\to\infty$: $0 = 2\pi i\cdot(2S + \operatorname{res}_0 f(z)) \Rightarrow S = \dots$

• Действительно: $\operatorname{res}_{\substack{\ell\neq 0\\ \ell\in\mathbb{Z}}} f(z) = \operatorname{res}_\ell \frac{\cos\pi z}{z^4}\cdot\frac{1}{\sin\pi z} = \frac{\cos\pi z}{z^4}\cdot\frac{1}{\pi\cdot\cos\pi z}\Big|_{z=\ell} = \frac{1}{\pi\cdot\ell^4}$

$$\Rightarrow \sum_{n=-k}^{-1}\operatorname{res}_n f(z) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

• Вычет в нуле: $\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0^+}\frac{\partial^4}{\partial z^4}(z\cdot\operatorname{ctg}\pi z) = \text{число } A \Rightarrow 0 = 2\pi i\left(\frac{2S}{\pi} + A\right) \Rightarrow S = -\frac{\pi}{2}\cdot A.$

• $\int_{\partial D_k} f(z)\,dz \overset{?}{\longrightarrow} 0.$

Лемма: $|\operatorname{ctg}\pi z|_{\partial D_k} \le 4$

Док-во.

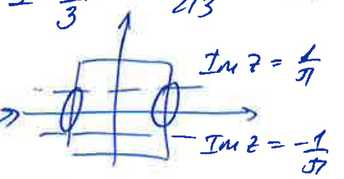
1) $\operatorname{Im} z = y \ge \frac{1}{\pi}$.

$$|\operatorname{ctg}\pi z| = \left|\frac{i\cdot(e^{i\pi z}+e^{-i\pi z})}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right| = \frac{|e^{2i\pi z}+1|}{|e^{2i\pi z}-1|} \le \frac{|e^{2\pi i z}|+1}{\left||e^{2\pi i z}|-1\right|} = \frac{e^{-2\pi y}+1}{|e^{-2\pi y}-1|} \le \frac{e^{-2}+1}{1-e^{-2}} \le$$

($z = x+iy$)

$$\le \frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4/3}{2/3} = 2.$$

2) $\operatorname{Im} z = y \le -\frac{1}{\pi}$



осталось эти 2 кусочка.

$$|\operatorname{ctg}(\pi n + \tfrac{\pi}{2} + iy)| = \left|\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+iy)}{\sin(\frac{\pi}{2}+iy)}\right| = \left|-\frac{\sin iy}{\cos iy}\right| = \frac{|e^{-y}-e^{y}|}{|e^{-y}+e^{y}|} = \frac{|1-e^{2y}|}{|1+e^{2y}|} \le$$

$$\underset{0\le y\le 1}{\le} \frac{e^2-1}{1+1} = \frac{8}{2} = 4.$$

(для $-1\le y\le 0$ – аналогично)

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial D_k} f(z)\,dz\right| \le 4\cdot\underbrace{\frac{1}{k^4}}_{max}\underbrace{(2k+2k+1)\cdot 2}_{\text{длина пути}} = \frac{4(8k+2)}{k^8}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \text{чтд.}$$

пример $\frac{1}{n^8+n^2+7}$ – даже если вычет [illegible] в [illegible], число.

Короче: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$, все $a_1\dots a_l \notin \mathbb{Z}$, $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi\sum_{j=1}^{n}\operatorname{res}_{a_j} f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)$$

Если ~~точки~~ плохие точки $a_{p_1}\dots a_{p_s}\in\mathbb{Z}$, 2

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq a_{p_1}\dots a_{p_s}}}^{\infty} f(n) = -\pi\sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{a_j} f(z)\,\operatorname{ctg}(\pi z)$$

Посчитаем почти наш ряд, кроме s членов — ну добавим их.

Пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2k}}$

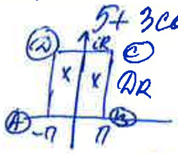
Рассм. $f(z)=\dfrac{1}{z^{2k}\cdot\sin(\pi z)}$ — считать по прямоуг. или кругу с $R=k+\frac{1}{2}$.

Лемма Жордана $t>0$, $\int\limits_{\gamma R} e^{itz} f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, если $M(R)=\max\limits_{\gamma R}|f(z)| \xrightarrow{R\to\infty} 0$.

ДЗ 1 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{n^8+n^2+7}=?$

Пример $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dfrac{d\varphi}{5+3\cos\varphi}=?$

Рассм. $f(z)=\dfrac{1}{5+3\cos z}$.

Область = 

по т. о вычетах: $\int\limits_{\partial D_R} f(z)dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z)dz + \underbrace{\int\limits_{BC} f(z)dz + \int\limits_{DA} f(z)dz}_{=0,\text{ т.к. периодич. ф-ция }2\pi\text{-период.}} + \int\limits_{CD} f(z) = 2\pi i\sum \operatorname{res}_{a_j} f(z)$.

Про $\int\limits_{CD}$: $\left|\int\limits_{CD} f(z)dz\right| \le \max\left|\dfrac{1}{5+3\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}\right|\cdot 2\pi\Bigg|_{z=x+iR;\ -\pi\le x\le\pi} =$

$$= \left|\frac{1}{5+\underbrace{\frac{3}{2}\cdot e^{-R}\cdot e^{ix}}_{\to 0}+\underbrace{e^{R}\cdot e^{-ix}}_{\to\infty}}\right|\cdot 2\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

$\Rightarrow \int\limits_{\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum \operatorname{res}_{a_j} f(z)$ — ну посчитать вычеты.

Нули знаменателя: $5+3\cos z=0$.

$\frac{3}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=-5$.

$e^{2iz}+1+\frac{10}{3}e^{iz}=0$.

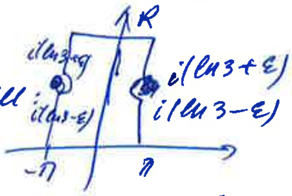
$e^{iz}=\dfrac{-\frac{10}{3}\pm\frac{8}{3}}{2}=\left[\begin{array}{l}-1/3\\ -3\end{array}\right.$

4

$iz = \ln\frac{1}{3} + 2\pi i k + \pi i \Rightarrow z = -i\ln\frac{1}{3} + \pi(2k+1)$; $z = i\ln 3 + \pi$

$iz = \ln 3 + 2\pi i k + \pi i \Rightarrow z = -i\ln 3 + \pi(2k+1)$ $z = i\ln 3 - \pi.$

$\Rightarrow$ 2 плохие точки:



$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma_\varepsilon^1} \frac{dz}{5+3\cos z} = \int\limits_{z = i\ln 3 - \pi + \varepsilon\cdot e^{i\varphi}} \frac{\varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi}{5+3\cos(i\ln 3 - \pi + \varepsilon\cdot e^{i\varphi})} = \leftarrow \text{ряд Тейлора}$$

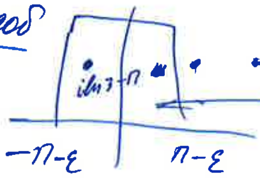
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{\varepsilon\cdot i e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon\cdot e^{i\varphi}\cdot 3(-\sin(i\ln 3 - \pi + \varepsilon e^{i\varphi}))+\dots} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{-i\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin(i\ln 3)} = A_1.$$

Аналогично, для γ_ε^2: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma_\varepsilon^2} f(z)dz = A_2.$

=:

$\Rightarrow Y = A_1 + A_2$

2 способ



$\leftarrow$ ровно 1 плохая точка.

$\Rightarrow$ нужен вычет в точке $\operatorname{res}_{i\ln 3-\pi} f(z).$

04.12.19. Парамонов. Семинар 14.

Вычисление интегралов с помощью вычетов.

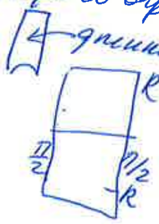
ДЗ 1) $\operatorname{res}_0 e^{\operatorname{ctg} z}$ —

0 — это сущ. особая, т.к. $\operatorname{ctg} \to \infty$, $\operatorname{ctg} \to -\infty$ по вещ. оси.

! по чётности. — нет.

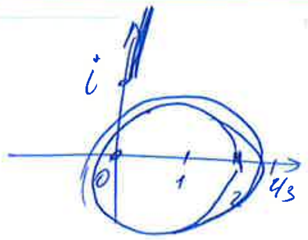
— надо по ор

← единичный прямоуг.



Разбор д/з: 1) $\int \frac{dz}{\ln(1+iz)\cdot(z-2)^2}$

$x^2+y^2=2x+\frac{7}{9}$



Решение: $(z-2)^2\cdot\ln(1+iz)=0$.

$z_1=2$ — полюс порядка 2

$1+iz=1 \Rightarrow z_2=0$ — полюс.

$$\operatorname{res}_2 f=\lim_{z\to 2}\left(\frac{(z-2)^2}{\ln(1+iz)(z-2)^2}\right)'=\frac{-i}{\ln^2(1+2i)\cdot(1+2i)}$$

$$\operatorname{res}_0 f=\left.\frac{1/(z-2)^2}{\frac{i}{1+iz}}\right|_{z=0}=\frac{1/4}{i}=-\frac{i}{4}.$$

Куда направлен разрез у логарифма: из i — вверх!

2) $\oint\limits_{|z-i|=2}\bar z\cos z\,dz$ — выражаем $\bar z$: $(z-i)(\bar z+i)=4$.

$\Rightarrow \bar z=\ldots$

3) $\int\frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}=-2\pi i\cdot\operatorname{res}_\infty\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$! $\frac{1}{z}$ — меняет ориентацию.

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}=\frac{1}{\frac{1}{z}-\frac{1}{6z^3}+\ldots}=\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{6z^2}+\ldots\right)}=z\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6z^2}+\ldots}=z\cdot\left(1+\frac{1}{6z^2}+\ldots\right)=z+\frac{1}{6z}+\ldots$$

↑res

! Интегралы вида $\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos t,\sin t)\,dt \xrightarrow{z=e^{it}} \oint\limits_{|z|=1}\tilde R(z)\frac{dz}{iz}$ — интеграл от рац. ф-ции по единичной окр-ти $\Rightarrow$ методом вычетов.

↑ рац. ф-ция $R(x,y)$ непрер. на $[-\pi;\pi]$, 2π-период.

пример 1: $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}}$

$z=e^{it}\big|_{t\in[-\pi;\pi]} \Rightarrow |z|=1.$

$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}$. $t=\frac{\ln z}{i}$, $it=\ln z$

$\cos(nt)=\frac{z^n+z^{-n}}{2}$

$\sin(nt)=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}$; $dz=i\underbrace{e^{it}}_{=z}dt \Rightarrow dt=\frac{dz}{iz}$

$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{5-3\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5iz-\frac{3z^2}{2}+\frac{3}{2}}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{-2dz}{3z^2-10iz-3}$$

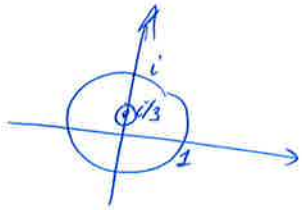
Ищем особые точки: $3z^2-10iz-3=0$.

$D=-100+36=-64$.

$z_{1,2}=\frac{10i\pm 8i}{6}$.

$z_1=\frac{i}{3}$

$z_2=3i$



$\Rightarrow$ интеграл $=\int \frac{2i\,dz}{(-3i)(z-\frac{i}{3})(z-3i)}$

не забыть.

$z=\frac{i}{3}$ — полюс 1 порядка.

$\mathrm{res}_{\frac{i}{3}} f=\lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{2i}{-3i\cdot(z-3i)}=\frac{2i}{-3i\cdot(\frac{i}{3}-3i)}=\frac{-2}{i-9i}=\frac{-2}{-8i}=\frac{1}{4i}=\frac{-i}{4}$.

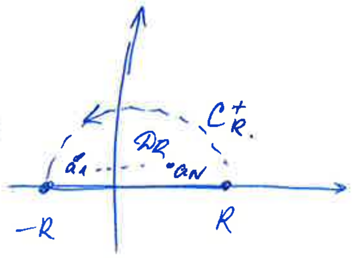
$\Rightarrow I=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Дз 2 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t\,dt}{13-12\cos t}$

Дз 3 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin t)^{14}\,dt$ — $(z-\frac{1}{z})^{14}$ — собрать коэф. c_{-1} при $\frac{1}{z}$.

3. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$, где P_n — полином степени ≥ 0,
Q_m — полином степени $m\geq 1$.
$m\geq n+2$
$Q_m(x)\neq 0$ на вещ. оси.
Тогда интеграл сход. абс.

Идея:



Пусть $a_1\ldots a_N$ — компл. нули $Q_m(z)$ в Π_+. — главное, чтобы на $\mathbb{R}$ не было нулей знаменателя

Берём $R>\max_{1\leq n\leq N}|a_n|$; $f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ — комплексификация $f(x)$ — мероморфная (имеет только полюса)

Хотим $\int_{\partial D_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{n=1}^{N}\mathrm{res}_{a_n} f=I$, $\forall R>\max_{1\leq n\leq N}|a_n|$.

Убедимся, что $\int_{C_R^+} f(z)\,dz\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$

I_R:

Ну $|I_R|\leq O\left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot\pi R\to 0$ — на C_R $|z|=R$. — на самом деле $O\left(\frac{1}{R^{m-n}}\right)$

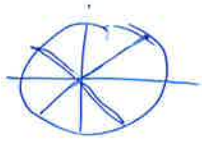
Ответ: $\boxed{I=2\pi i\cdot\sum_{n=1}^{N}\mathrm{res}_{a_n} f}$

нулей берём только в верхней полуплоскости.

пример 2 $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+4} = ?}$ $\quad n=2,\ m=4$; $m-n=2$. ① $\Rightarrow$ инт. сход. абс.

Ищем особые точки: $x^4=-4$.

$x=\sqrt[4]{-4}$



$-4=4\cdot e^{i\pi} \Rightarrow \sqrt[4]{-4}=\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}.$$

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt2}+i\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)=(1+i)$ $\qquad z_3=-1-i$

$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt2}+i\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)=-1+i$ $\qquad z_4=1-i$

$$f(z)=\frac{z^2}{z^4+4}=\frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=\frac{z^2}{(z-(1+i))(z-(-1+i))(z-(-1-i))(z-(1-i))}=$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z_1} f = \lim_{z\to1+i}\frac{z^2}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))(z-(1-i))}=\frac{(1+i)^2}{(1+i+1-i)(1+i+1+i)(1+i-1+i)}=\frac{(1+i)^2}{2\cdot2(1+i)\cdot2i}=\frac{1+i}{8i}=$$

$$=\frac{-i(1+i)}{8}=\frac{-i+1}{8}=\frac{1-i}{8}.$$

$$\operatorname*{res}_{z_2} f=\operatorname*{res}_{-1+i}\frac{z^2}{z^4+4}=\frac{(-1+i)^2}{4\cdot(-1+i)^3}=\frac{1}{4(-1+i)}=\frac{-1-i}{4\cdot2}=\frac{-1-i}{8}.$$

$$\Rightarrow I=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1}f+\operatorname*{res}_{z_2}f\right)=2\pi i\left(\frac{1-i}{8}+\frac{-1-i}{8}\right)=\frac{2\pi i\cdot(-2i)}{8}=\frac{\pi}{2}$$ ответ

Дз 4) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^4dx}{x^6+64}=\frac12\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4dx}{x^6+64}$

! $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^4+x)dx}{x^6+64}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4dx}{x^6+64}+\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^6+64}}_{=0}$ $\quad$ $= 0$. — он нечётный

Дз 5) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^3}$ — только i, но 3 порядка.

4. ! Вычисление преобр. Фурье от конкр. ф-ций.

Пусть $f\in L_1(\mathbb{R})$; $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\tilde f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx}$$ — преобр. Фурье. ; непрер. на $\mathbb{R}$ (при усл., что $f\in L_1$)

$|e^{-i\lambda x}|=1$.

проверить в L_2.

Обр. преобр. Фурье: $\boxed{\hat f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx}$

преобр. Фурье переводит опер. дифф. в оператор умножения на $-\lambda$.

$f''+f=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2+1\cdot f=0 \;\Rightarrow\; f=\frac{1}{\lambda^2+1}$

преобр. Фурье.

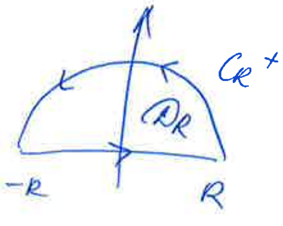
Мы рассм. случай $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $m\geq n+2$.

непрер. на всей оси $\mathbb{R}$.

т.е $f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ не имеет полюсов на $\mathbb{R}$.

$$\tilde f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

пусть $\lambda<0$. т.е $\mu=-\lambda>0$.



$$\tilde f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cdot e^{-i\lambda z}dz=\lim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} f(z)e^{-i\lambda z}dz=\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n=1}^{N}\operatorname{res}_{a_n} f(z)e^{-i\lambda z}\right)$$

при $\lambda<0$.

a_n — нули Q_m в Π_+.

$$\left|f(z)\cdot e^{i\mu z}\right|_{\text{на } C_R^+}\leq O\left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot 1\cdot \pi R\to 0.$$

$|e^{i\mu z}|=|e^{i\mu(x+iy)}|=|e^{-\mu y}|\leq 1.$

ДЗ 6 $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$; $\tilde f(\lambda)=?$

1) Ряд Тейлора, Лорана, Фурье
2) обычный интегр.
3) выч. интеграл
4) принцип аргумента, т. Руше

ну при $\lambda<0$ — посчитаем.

$\lambda\geq 0$ ну $f(-\lambda)=f(\lambda)$ — если ф-ция чётная, то преобр. Фурье ~~чётное~~ — чётное и дейст.

если ф-ция нечётная то преобр. Фурье тоже неч. — мнимая неч. ф-ция

ну $\tilde f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx$.

если f чётная, то этот интеграл $=0$, т.к. $\sin\lambda x$ — нечёт, а этот не изменится, т.к. $f(x)$ и $\cos\lambda x$ — чётные.

ДЗ 7 посмотреть принцип аргумента и теорему Руше (+ логарифм. вычет)

+ приращение полярного аргумента вдоль пути.

$\Delta\, \mathrm{Arg}(z)=?$ ← для замкн. пути он : 2π. если делим на 2π, то будет индекс пути.

он $\exists$, даже если путь не гладкий.

03.12.19. ТФКП. Семинар 12. (17 декабря – кр)

Пример 1 $$\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{\sin(z-3)\cos z\cdot(z^2-5)(z-10)} = 2\pi i \sum_j \operatorname{res}_{a_j} f(z)$$

Решение: Найдём особые точки: $z=10$, $z=\pm\sqrt5$, $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $z-3=\pi k$.

$z=3$: $f(z)=\frac{1}{0}=\infty$ – полюс порядка 1. – т.к. у знаменателя ноль порядка 1.

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{1/(\cos z\cdot(z^2-5)(z-10))}{\sin(z-3)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_3 f(z)=\frac{1/(\cos 3\cdot 4\cdot(-7))}{\cos(z-3)\big|_{z=3}} = -\frac{1}{28\cdot\cos 3}$$ $\cos 0=1$

$z=\pm\sqrt5$: опять полюс 1 порядка.

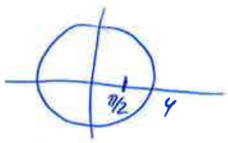
$z=\sqrt5$: $f(z)=\frac{1}{z-\sqrt5}\cdot h(z)$

$$\Rightarrow \text{вычет} = h(\sqrt5) = \frac{1}{\sin(\sqrt5-3)\cos\sqrt5\cdot 2\sqrt5\cdot(\sqrt5-10)}$$

$z=-\sqrt5$: $$\text{вычет} = \frac{1}{\sin(-\sqrt5-3)\cos(-\sqrt5)\cdot(-2\sqrt5)\cdot(-\sqrt5-10)}$$

$z=10$ – вне области $|z|=4$.

$\cos z=0$: $z=\frac{\pi}{2}+\cancel{2}\pi k$.



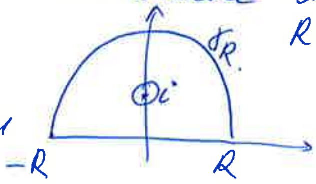
$z=\pm\frac{\pi}{2}$ – полюс 1 порядка.

$$\operatorname{res} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{1/\left(\sin(\frac{\pi}{2}-3)\cdot(\frac{\pi^2}{4}-5)\cdot(\frac{\pi}{2}-10)\right)}{-\sin\frac{\pi}{2}}$$

И ответ = сумма этих 4-х вычетов.

Пример 2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cdot\sin tx}{x^2+1}\,dx$, $t>0$ – парам. – в смысле $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}$

Решение: применим т. о вычетах к области



$f(z)=\frac{z\cdot e^{itz}}{z^2+1}$ – и хотим $\operatorname{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\right)$

~~тогда~~ $\int\limits_{\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_j \operatorname{res}_{a_j}$

но особая точка – только i.

i - полюс 1 порядка

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{i\cdot e^{iti}}{2i} = \frac{e^{-t}}{2}.$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial D_R} f(z)dz = 2\pi i\cdot\frac{e^{-t}}{2} = \pi i\cdot e^{-t}$$

$$\parallel$$

$$\int\limits_{[-R;R]} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)dz$$

$$\Rightarrow I + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz}_{\text{чтобы его посчитать, исп. лемму Жордана.}} = \pi i\cdot e^{-t}$$

Лемма Жордана

$g(z)$ непрер. в $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus U_{R_0}$.

$M(R) = \max\limits_{\gamma_R} |f(z)|$, причем $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} g(z)e^{itz} = 0$, при $t>0$. (иначе не верно)

Док-во: $$\left|\int_0^\pi g(Re^{i\varphi})\cdot e^{itR\cos\varphi}\cdot e^{itRi\sin\varphi}\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi |g(Re^{i\varphi})| e^{-tR\sin\varphi}\cdot R\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant M(R)\int_0^\pi e^{-tR\sin\varphi}\cdot R\,d\varphi = M(R)\cdot 2\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\varphi}R\,d\varphi \overset{\sin\varphi \geqslant \frac{2\varphi}{\pi}}{\leqslant}$$

$$\leqslant 2M(R)\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-t\cdot\frac{2R}{\pi}\varphi}d\varphi \underset{\tau=\frac{2R}{\pi}\varphi}{=} \pi M(R)\int_0^R e^{-t\tau}d\tau \underset{y=\tau t}{\leqslant} \frac{\pi}{t}\cdot \underbrace{M(R)}_{\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy$$ чтд.

$$\Rightarrow \boxed{I = \operatorname{Im}(\pi i e^{-t}) = \pi\cdot e^{-t} \text{ при } t>0.}$$

При $t<0$: $I = -\pi\cdot e^{-t}$ при $t<0$

$I = 0$ при $t=0$.

Ответ.

Убедим, что лемма Жордана неверна при $t<0$:

$$t<0: \underbrace{\int_{\partial D} f(z)dz}_{\pi i e^{-t}\ (\text{ну } \Sigma \text{ вычетов})} = \underbrace{\int_{[-R;R]} f(z)dz}_{-\pi i e^{t}\ (\text{посчитали})} + \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)e^{itz} = \pi i e^{-t} + \pi i e^{t} \neq 0.$$

контрпример к лемме Жордана.

Пример 3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5+7x+1}{x^8+1}dx$

найдем особые точки: $x=\sqrt[8]{-1}$.

$-1 = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \pi$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right);\ k=0\ldots n-1.$$

$k=1,3,5,7$ — те, которые в верхней полуплоскости.

$$z_1 = e^{\frac{\pi i k}{8}}$$

$$f(z) = \frac{z^5+z+1}{z^8+1}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{\frac{\pi i k}{8}} = \frac{e^{\frac{\pi i}{8}\cdot 5k} + 7e^{\frac{\pi i k}{8}}+1}{8\cdot e^{\frac{\pi i}{8}\cdot 7k}}$$ — вычет зависит от k. — полюса 1 порядка.

Поймем, почему $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{z^5+7z+1}{z^8+1} \xrightarrow[R\to\infty]{?} 0$

$$\int_{\gamma_R}\left|\frac{z^5+7z+1}{z^8+1}dz\right| = \int_0^{\pi}\left|\frac{R^5e^{5i\varphi}+7Re^{i\varphi}+1}{R^8e^{8i\varphi}+1}iR\cdot e^{i\varphi}d\varphi\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{R^5\cdot e^{5i\varphi}+7Re^{i\varphi}+1}{R^8e^{8i\varphi}+1}\cdot R\right||d\varphi| \le$$

$z=R\cdot e^{i\varphi}$

$dz = Ri\, e^{i\varphi}d\varphi$

$$\le R\int_0^{2\pi}\left|\frac{R^5\cdot e^{5i\varphi}}{R^8e^{8i\varphi}+1}\right||d\varphi| + R\int_0^{2\pi}\left|\frac{7Re^{i\varphi}}{R^8e^{8i\varphi}+1}\right||d\varphi| + R\int_0^{2\pi}\frac{|d\varphi|}{|R^8e^{8i\varphi}+1|} \le$$

$|R^8e^{i\varphi}+1| \ge |R^8e^{i\varphi}|-1.$

$|R^8e^{i\varphi}| \le |R^8e^{i\varphi}+1|+|-1|$

$$\le R\int_0^{\pi}\frac{R^5}{R^8-1}d\varphi + R\int_0^{\pi}\frac{7R}{R^8-1}d\varphi + R\int_0^{\pi}\frac{1}{R^8-1}d\varphi = \frac{R^6\pi}{R^8-1} + \frac{7R^2\pi}{R^8-1} + \frac{R\pi}{R^8-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

$\Rightarrow$ интеграл $= 2\pi i\cdot\Sigma$ вычетов.

пример 4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, причем 1) $\deg Q(x) - \deg P(x) \geqslant 2$

2) $Q(x) \neq 0$ на вещ. оси.

он $= \sum$ вычетов, т.к. интеграл по $\gamma_R \to 0$.

сущ. особых точек нет, только полюса.

пример 5. Вещ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{itx}\, dx$, $t>0$.

тоже умеем считать, при 1) $\deg Q(x) - \deg P(x) \geqslant 1$.

2) $Q(x) \neq 0$ на вещ. оси.

$$\int\limits_{\partial D_R} = \underbrace{\int\limits_{[-R;R]}}_{\downarrow\, I} + \underbrace{\int\limits_{\gamma_R}}_{\downarrow\, 0}.$$

пример $\int\limits_{|z-i|=2} \bar{z} \cos z\, dz$.

Выразим: $\bar{z} = \varphi(z)$

$(z-i)\cdot(\bar{z}+i) = 4$.

$\Rightarrow \bar{z} = \frac{4}{z-i} - i$

$\Rightarrow \int\limits_{|z-i|=2} \left(\frac{4}{z-i} - i\right) \cos z\, dz$.

$\operatorname{res}_i = 4$ — полюс 1 порядка.

$\Rightarrow \int\limits_{|z-i|=2} \left(\frac{4}{z-i} - i\right) \cos z\, dz = 8\pi i$

Вычет в ∞:

! интеграл по часовой стрелке

02.12.19. ТФКП. д/з от семинара 11.

① $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z \cdot (1-z)}{(1-z^3)(1+\cos^2 z)} = \dfrac{\sin z \cdot (1-z)}{\cos z \cdot (1-z^3)(1+\cos^2 z)}$ — найти тип особ. т.

Особые точки:

- $\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $f(\frac{\pi}{2}+\pi k) \rightarrow \frac{const}{0} = \infty \Rightarrow$ полюс, причем порядка 1.
- $1 - z = 0 \Rightarrow z = 1$ — устранимая
- $(1+z+z^2) = 0.$

  $z^2+z+1=0.$

  $D = 1 - 4 = -3.$

  $z_{1;2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ $f(\text{от них}) \rightarrow \frac{const}{0} = \infty \Rightarrow$ полюс, причем порядка 1, т.к. ноль у знаменателя порядка 1.

② $f(z) = \dfrac{z^3-1}{(z^4-1)(\operatorname{ctg} z+2)}$ — найти вычеты.

$f(z) = \dfrac{1+z+z^2}{(z-1)^3 \cdot (\operatorname{ctg} z+2)}$

Особая точка: $z=1$ — полюс порядка 3.

$\operatorname{res}_1 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2} \cdot \left\{ \dfrac{1+z+z^2}{\operatorname{ctg} z+2} \right\}''$

$g(z) = \dfrac{1+z+z^2}{\operatorname{ctg} z+2}$

$g'(z) = \dfrac{(1+2z)(\operatorname{ctg} z+2) - (1+z+z^2)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 z}\right)}{(\operatorname{ctg} z+2)^2} = \dfrac{(1+2z)(\sin z\cdot\cos z + 2\sin^2 z) + 1+z+z^2}{(\operatorname{ctg} z+2)^2}$

$g''(z) = \dfrac{1}{(\operatorname{ctg} z+2)^4}\Big(\big(2(\sin z\cdot\cos z+2\sin^2 z)+(1+2z)(\cos^2 z-\sin^2 z+4\sin z\cos z)+2z+1\big)(\operatorname{ctg} z+2)^2 -$

$-\left\{(1+2z)(\sin z\cdot\cos z+2\sin^2 z)+1+z+z^2\right\} 2(\operatorname{ctg} z+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 z}\right)\Big)$

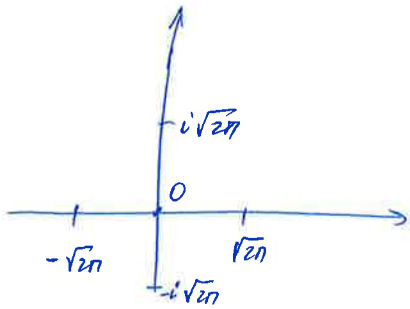
$g''(1) = \dfrac{1}{(\operatorname{ctg}1+2)^4}\Big(2\cdot\sin1\cdot\cos1 + 4\sin^2 1 + 3(2\cos^2 1 + 4\sin1\cos1)\Big)(\operatorname{ctg}1+2)^2 + \dfrac{2}{\sin^2 1}(\operatorname{ctg}1+2)\left\{3\sin1\cos1+6\sin^2 1+3\right\} =$

$= \dfrac{(7\sin 2 + \overset{+4+}{2}\cos^2 1)(\overset{\sin 2}{\cos 1} + 2\sin^2 1) + 6\sin1\cos1 + 12\sin^2 1 + 6}{(\operatorname{ctg}1+2)^3 \cdot \sin^2 1}$

27.11.19. ТФКП. Парамонов №13.

Классификация изол. Вычеты

(разбор дз)



② $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z^2}$

Найти все изол. и порядки.

$1-\cos z^2=0.$

1) $z_{\pm k}=\pm\sqrt{2\pi k}$ — нули 2 порядка

$z_{\pm ki}=\pm i\sqrt{2\pi k}$ — нули 2 порядка $\Rightarrow$ у $f(z)$ это полюс 2 порядка

2) $z_0=0$ — нуль 4 порядка. $\Rightarrow$ у $f(z)$ — это полюс 4 порядка.

! Счетное число особых точек.

Почему нули 2 порядка?

$f(z)=1-\cos z^2 \Big|_{z_{\pm k},\ z_{\pm ki}}=0.$

$f'(z)=(1-\cos z^2)'=\sin z^2\cdot 2z$

$\Rightarrow f'(z)\Big|_{z_{\pm k},\ z_{\pm ki},\ k\neq 0}=\sin 2\pi k\cdot 2z=0.$

$f''(z)\Big|_{z_{\pm k},\ z_{\pm ki}}\neq 0$ $\Rightarrow$ нуль 2 порядка.

Ответ:

A $z_0=0$ — полюс 4 порядка.

A остальные особые точки — полюса 2 порядка.

Утв. Пусть $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$; $a\in\mathbb{C}$ — изолир. ос. точка, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — голом. в т. a.

Пусть n_1 — порядок нуля a для f_1 (он может быть $=0$ если числитель в этой точке $\neq 0$).

n_2 — порядок нуля для f_2.

Тогда: 1) при $n_1\geq n_2$ — a — устр. ос. точка для f.

2) при $p=n_2-n_1>0$ — то a — полюс порядка p.

Пример. $f(z)=\dfrac{z^2}{1-\cos(z^2)}$. $a=0$.

$f_1(z)=z^2$; $n_1=2$. $\Rightarrow p=n_2-n_1=2$ — порядок полюса $a=0$ для f.

$f_2(z)=1-\cos z^2$; $n_2=4$

Если $f(z)=\frac{z^{10}}{1-\cos z^2}$ — то будет устр. ос. точка.

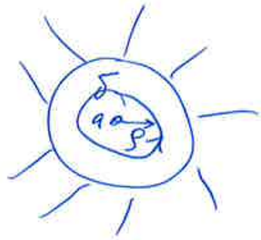
ДЗ 1. Найти и классифицировать все изол. ос. т. для $f(z)=\operatorname{ctg}(z^2)$.

ДЗ 2. Найти и классиф. все изол. ос. т. для $f(z)=\frac{\cos 1/z}{(1+z^2)^2}$

ну у $\cos 1/z$ — по виду. осн. нет предела
А у знаменателя — есть предел ⇒ будет сущ. особая точка.

ДЗ 3. $f(z)=\frac{z\cdot\cos 1/z}{(1+z^2)^2}$.

Вычеты



Пусть $a\in\mathbb{C}$ — изол. ос. т. ф-ции f; $f\in Hol(\mathring{U}_\delta(a))$

$\gamma_\rho^+=\{|z-a|=\rho\}$; $\rho\in(0,\delta)$.

Тогда величина $\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho^+} f(z)\,dz =: \operatorname{res}_a f}$ — вычет f в точке a.

Если мы разложим ф-цию в ряд Лорана: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot(z-a)^n$ на $\mathring{U}_\delta(a)$

Тогда $\operatorname{res}_a f = c_{-1}$ — т.к. ряд сход. равном., переставим интеграл и сумму; у всех степеней, кроме $1/z$, будет первообразная ⇒ их интеграл $=0$.
А у $\frac{1}{z}$ — не будет.

Пример. Найти $\operatorname{res}_0 \frac{\operatorname{tg} z}{z^4}$ — полюс 3 порядка: т.к. в числителе 0 1 порядка, а в знаменателе — 4 порядка.

ну $a=0$ — изол. ос. т. — т.к. $\operatorname{tg} z$ в нуле голом.
А $\frac{const}{z^4}$ — голом. в проколотой окр-ти $\mathring{U}_\delta$.
А $\delta=\frac{\pi}{2}$ — т.к. $\frac{\pi}{2}$ — первая особенность у $\operatorname{tg} z$.

Найдем ~~tgz~~ c_{-1}.

$\operatorname{tg} z = z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\ldots$ — ну z-$\operatorname{tg} z$ — посчитать произв. в нуле.

$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} z}{z^4}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3z}+\frac{2}{15}z+\ldots \Rightarrow c_{-1}=\frac{1}{3}$

Вычет в ∞: Если $f \in Hol(\mathring{U}_{\delta_{z_0}}(\infty)) = \{\frac{1}{\delta} < |z-z_0| < +\infty\}$

на ∞ в ряд Лорана можно раскладывать по $\forall$ центру.

И c_{-1} будет всегда одинаковое. А другие коэф – м.б. другие.

Ряд по z_0: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$

z_0 – выбираем сами; e.g. $e^{\frac{1}{z-i}} \Rightarrow z_0 = i$. – т.е. z_0 – какая-то точка, окр-ть которой содержит ∞.

$\Rightarrow \operatorname{res}\limits_{\infty} f = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^+_{\rho_{z_0}}(\infty)} f(z)dz$, где $\gamma^+_{\rho_{z_0}}(\infty) = \{|z-z_0| = \rho > \frac{1}{\delta}\}$ – ориент. в отр. сторону.

! Мы обходим так, чтобы ∞ была слева, т.е. ориентация с минусом.

! У $f(z) = \frac{tg\, z}{z^4}$: ∞ – не изолир. ос. точка.

Пример. $\operatorname{res}\limits_{\infty} \frac{\sin z}{z^4} = ?$ ∞ – сущ. изол. точка.

$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \ldots}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \ldots \Rightarrow \operatorname{res}\limits_{\infty} = +\frac{1}{6}$ – т.к. коэф $= -\frac{1}{6}$, но мы знак должны поменять.

~~Зам. Если точка устранимая то вычет = 0.~~

Утв. Пусть $a \in \mathbb{C}$, a – полюс f порядка $p = 1$.

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{res}\limits_{a} f = \lim\limits_{z \to a} f(z) \cdot (z-a)}$

Если a – полюс f порядка $p \geq 2 \Rightarrow \operatorname{res}\limits_{a} f = \frac{1}{(p-1)!} \lim\limits_{z \to a} \left[f(z) \cdot (z-a)^p\right]^{(p-1)}$

Зам. Если точка устранимая, то вычет $= 0$.

А на ∞ так может не быть (вычет $\neq 0$).

напр. $f(z) = \frac{1}{z} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0 \Rightarrow \infty$ – устр. но вычет $= -c_{-1} = -1 \neq 0$.

Док-во: $f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \ldots$

$\Rightarrow (z-a)^p \cdot f(z) = c_{-p} + \ldots + c_{-1} \cdot (z-a)^{p-1}$

$\frac{\partial}{\partial x^p}\left((z-a)^p \cdot f(z)\right) = (p-1)! \cdot c_{-1}$. ч.т.д.

Зам. пусть $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где f_1 и f_2 – гол. в окр-ти $a \in \mathbb{C}$; $f_1(a) \neq 0$, $f_2(a) = 0 \neq f_2'(a)$ $\Rightarrow$ полюс 1 порядка.

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{res}\limits_{a} f = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}}$ – т.е. в числителе не 0, а в знаменателе – ~~полюс 1~~ ноль 1 порядка.

Док-во: $\operatorname{res}_a f = \lim\limits_{z\to a} \frac{f_1(z)}{f_2(z)}(z-a) = \lim\limits_{z\to a} \frac{f_1(z)\,(z-a)}{\underbrace{f_2(z)-f_2(a)}_{=0}} \to \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}$. $\to f_2'(a)$

Упр. $\boxed{f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z^3}}$ — найти все полюс и вычеты в них. тут ∞ — не полюс. к ней $\to$ точки πk.

$a=0$: $f(z)=\frac{\cos z}{\sin z\cdot z^3} \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{1}{0}=\infty \Rightarrow a=0$ — полюс.

- посчитаем порядок полюса.

Используем, что $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$

Но $f_1(0)\neq 0 \Rightarrow n_1=0$.

~~$f_2(0)=0$, но $f_2'(0)=\cos z|_{z=0}=1\neq 0 \Rightarrow n_2=1$.~~

$f_2(z)=z^3\cdot\sin z$.

порядок нуля $=3+1=4$ — по т. о нулях. —

т.к. $\sin z = z\cdot h(z)$

$\Rightarrow z^3\cdot\sin z = z^4\cdot h(z) \Rightarrow n_2=4$.

$\Rightarrow p=n_2-n_1=4 \Rightarrow$ полюс порядка 4.

- найдем вычет — можно умножить на z^4, дифф. 3 раза.

или ряд Лорана — это не решим.

т.к. ~~$\Rightarrow$~~ $\operatorname{res}=\frac{1}{3!}\left(z^4\cdot\operatorname{ctg} z\right)^{IV}$ — сложно.

Норм. способ: Если ф-ция чётная относ. этой точки, т.е. $f(a+z)=f(a-z)$, ~~то~~ то вычет в a и в $\infty = 0$. $\leftarrow$ т.к. из ф-лы для коэф.:

$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$

т.к. ф-ция чётная, а ориентация поменялась, если $f(a+z)\Leftrightarrow f(a-z)$.

т.к. $\frac{\operatorname{ctg} z}{z^3}$ — чётная $\Rightarrow \operatorname{res}_0 = 0$ — т.к. она чётная.

$a=\pi k$: $f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z^3}=\frac{\cos z}{\sin z\cdot z^3}=\frac{\cos z/z^3}{\sin z}$

$\Rightarrow \operatorname{res}_{\pi k} f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{\cos\pi k/(\pi k)^3}{\cos \pi k} = \frac{1}{(\pi k)^3}$

ДЗ 3. найти $\operatorname{res}_0 \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$ — вычет уже $\neq 0$.

а) по ф-ле

б) через ряд Лорана

т.к. $f(z)=\frac{\cos z}{z^2\cdot\sin z}$ — полюс 3 порядка

$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{2!}\left(\frac{z\cos z}{\sin z}\right)''$

Или так: $\frac{ctg z}{z^2} = \frac{1}{z^2 \cdot tg z} = \frac{1}{z^3\left(1+\frac{1}{3}z^2+\dots\right)} = \frac{1-\frac{z^2}{3}+O(z^3)}{z^3}$ => вычет $= -1/3$.

через ряд Лорана

$\frac{1}{1+w} = 1 - w + O(w^2)$

Теорема (Коши, о вычетах).

Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область с простой границей.

Пусть $A = \{a_1 \dots a_N\} \subset \mathcal{D}$

различные точки в $\mathcal{D}$

Пусть $\mathcal{D} \in Hol(\text{окр-ть}(\bar{\mathcal{D}}) \setminus A)$

Тогда $\boxed{\int_{\partial^+ \mathcal{D}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f}$

ориент. граница

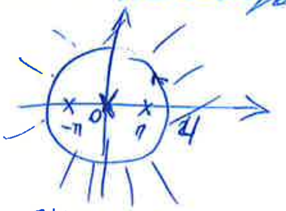
Док-во.

$f \in Hol\, \mathcal{D}_\varepsilon$ — новая граница.

$0 = \int_{\partial \mathcal{D}_\varepsilon} = \int_{\partial \mathcal{D}} - \underbrace{\int_{U_\varepsilon}}_{=\sum res} \to \int_{\partial \mathcal{D}} = 2\pi i \sum res$.

Посчитаем интеграл с помощью вычетов.

Пример $\int_{|z|=4} \frac{ctg z}{z^3}\,dz$



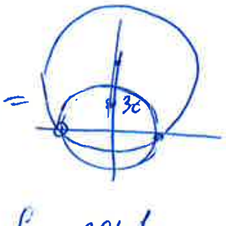
Ос. точка: $a_1 = 0$; $a_k = \pi k$.

Попали в $\mathcal{D}$: $a_2 = -\pi$; $a_2 = \pi$. ! На границе ос. точек не должно быть.

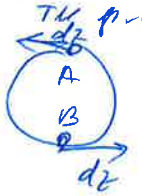
$I = 2\pi i\left(\operatorname{res}_0 f + \operatorname{res}_\pi f + \operatorname{res}_{-\pi} f\right) = 0 - \frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^3} = 0.$

вычет уже считали; полюс f

А у $\frac{ctg z}{z^4}$ — уже вычет в нуле $\neq 0$

$\tilde{\mathcal{D}} :=$  $= |z - 3i| = 5$ — тоже вычет $= 0$

Итак было понятно т.к. ф-ция четная



, а $f(A) = f(B)$.

Д/з 4) $\int_{|z-i|=\sqrt{2}} \frac{\cos\frac{1}{z}}{(z^2+1)^2}\,dz$

Д/з 5) $\int \frac{dz}{\underbrace{\ln(1+iz)}(z-2)^2}$

$x^2+y^2 = 2x + \frac{7}{9}$ посмотреть, куда разрез торчит. Должен вовне. Чтоб внутри области были типа полюс

Д/з 6) $\int_{|z-i|=2} \bar{z} \cos z\,dz$

Д/з 7) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}$ — внутри счётное мн-во полюс. и 0 — не изолир. точка => т. Коши не применяется

26.11.19. ТФКП. Семинар 11 (у 308)

1) $\frac{z^2}{\sin z}$ $z=0$

$z=\pi k, \ k\neq 0.$

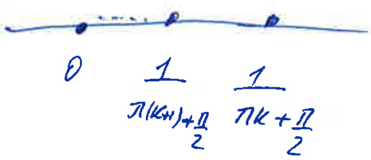
2) $e^{\frac{1}{z-5}}$ – у нее $z=5$ – сущ. особая точка : $z_n\to 5+0$: предел $=\infty$

$z_n\to 5-0 \Rightarrow$ предел $=0$.

3) $tg\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ – z – не изолир. особая. точка.

т.к. полюса $\frac{1}{\pi k+\frac{\pi}{2}}\to 0$.

неизолир. ос. точка



Что можно сказать об особой точке, если ряд Лорана?

а) Устр. ос. точка $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$

($\Rightarrow$) $\exists \lim f(z)=A \Rightarrow \exists U_{\varepsilon_1} : f(z)\le M$ в этой окр-ти

$\Rightarrow \begin{cases} |c_n|\le \frac{M}{r^n}\to 0. \\ |c_{-n}|\le M\cdot r^n \to 0 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$

положим $f(a):=c_0$. $\Rightarrow$ ряд Тейлора, везде, где сходится, з.д. опр. голом. ф-цию.

б) Полюс $\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-N}^{\infty} c_n\cdot(z-a)^n$

($\Rightarrow$) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty \Rightarrow \exists U_{\varepsilon_1} : f(z)\neq 0$ $\forall z\in \mathring{U}_{\varepsilon_1}$ ~~в этой окр-ти~~. (иначе $\exists$ посл-ть, предел по которой $=0$, а не ∞)

Рассм. $g(z)=\frac{1}{f(z)}\in Hol(\mathring{U}_{\varepsilon_1})$.

причем $\lim\limits_{z\to a} g(z)=\frac{1}{\infty}=0$. $\Rightarrow$ a – это устр. ос. точка для $g(z)$

$\rightarrow$ в ряде Лорана для $g(z)$ нет отриц. членов.

$\rightarrow g(z)=(z-a)^N\cdot h(z)$ – ну ноль порядка N.

где $h(a)\neq 0$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (z-a)^n = \sum_{n=-N}^{\infty} b_{n+N} (z-a)^n.$$

$$\Leftarrow\ f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-a)^N}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N} (z-a)^n}_{=\psi(z)}}_{\to 0} \xrightarrow[z\to a]{} \infty.$$

в) Оставшийся случай: $\nexists \lim f(z) \Leftarrow \sum_{n=-\infty} c_n \cdot (z_n - a)^n$

т.е $\exists\, n_k \to \infty \,/\, c_{n_k} \neq 0.$

Пример. $f(z) = \dfrac{z-2}{(z^2-4)\cdot \sin\frac{1}{z^2} \cdot (1-\cos(z+20))}$ — найти все особ. точки.

- $z=2$ — устр.
- $z=-2$. — полюс, т.к $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\psi(z)}}_{\text{голом}} \to \infty.$
- $\dfrac{1}{z^2} = \pi k$ $\Rightarrow z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$ если $k=0$
- $\boxed{z=0 : \lim\limits_{z\to 0} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) \cdot \cancel{z} \Rightarrow \text{сущ. особая}}$ — она вообще не изолир. ос. точка. Там нули накапливаются.
- $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$; $k \neq 0 \Rightarrow \exists \lim \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \infty \Rightarrow$ полюс.
- $z + 20 = 2\pi k$

$z = 2\pi n - 20.$ посчитаем порядок полюса у при $z = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$

посчитаем порядок нуля $z = \dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$ для $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$

~~обозн~~

$$\left(\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\Big|_{\frac{1}{z^2}=\pi k} = 0.$$

$$\left(\sin\frac{1}{z^2}\right)' = \cos\frac{1}{z^2} \cdot -\frac{1}{z^4} \cdot 2z \Big|_{\frac{1}{z^2}=\pi k} \neq 0 \Rightarrow \text{порядок} = 1.$$

— ну посл-ть 1) $\dfrac{1}{z_n^2} = \pi n + \dfrac{1}{3}$ $h(x_n) = \sin\frac{1}{3}$

2) $\dfrac{1}{z_n^2} = \pi n$ $\Downarrow$ $h(x_n) = 0.$

— ну $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^N} \cdot h(z)$, где $h(a) \neq 0.$

$\Downarrow$ $\dfrac{1}{f(z)} = (z-a)^N \cdot \dfrac{1}{h(z)}.$

$\boxed{\text{ДЗ1}\quad f(z) = \dfrac{z^3-1}{(z^5-1)(ctg^3 z - 1)}}$

найти особ. точки и их тип.

② **Вычеты.**

Опр $\mathrm{res}_a f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)\,dz$ ← не зависит от числа r.

↑ полож

ф-ция голом. в прок. окр-ти ⇒ и в кольце

$\int\limits_{\partial U_{r_1}} - \int\limits_{\partial U_{r_2}} = 0$ — т. Коши

⇒

Пусть дана кус-гладкая область D; $f \in Hol(G)$, где $G \supset \overline{D}$.

Тогда $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

Пусть в D есть конечное число особых точек.

Граница с кружочками: D_ε.

Теорема Коши для D_ε: $\int\limits_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$.

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_j \int\limits_{\partial U_j} f(z)\,dz = 0.$$

$$\boxed{\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j \mathrm{res}_{a_j} f(z)}$$

$= 2\pi i \sum_j \mathrm{res}_{a_j} f(z)$

! Вычет определяется в изолир. особой точке.

! Докажем, что $\mathrm{res}_a f(z) = c_{-1}$.

В окр-ти ряд Лорана сход. равном ⇒ можно переставлять интегр. и сумму.

$$\Rightarrow \mathrm{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n\,dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n\,dz =$$

сход. равном ⇒ переставим $\int$ и Σ

$\int \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

иначе $\int z^k\,dz = 0$.

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}.$$

! Если точка устр ⇒ $\mathrm{res} = c_{-1} = 0$.

Если полюс или сущ. особая ⇒ res — какой угодно.

! Вычет $= 0$ ⇒ устр / полюс / сущ. особая — что угодно.

Если точка – полюс, то вычет можно найти дифференцированием.

1) $\underline{N=1}$ $\Rightarrow f(z) = \dfrac{C_{-1}}{(z-a)} + C_0 + \dots$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to a} (z-a)\cdot f(z) = C_{-1}.$

2) $\underline{N>1}$. $f(z) = \dfrac{C_{-N}}{(z-a)^N} + \dots + \dfrac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + \dots$ — если полюс.

$\Rightarrow \lim \dfrac{1}{(N-1)!} \cdot \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} f(z)(z-a)^N = C_{-1}.$

3) Если полюс 1 порядка, и $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$.

$\Rightarrow \lim \dfrac{x-a}{\psi(z) - \underset{0}{\psi(a)}} \cdot \varphi(z) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

Д/З Найти все особ. и в них вычеты:

$$f(z) = \frac{(z^3+2)}{(z^2+10)(z-7)\sin\frac{1}{z}}$$

Эту сторону бланка можно использовать как черновик.
Она не сканируется и не проверяется.

26.11.19. ТФКП. Семинар 11 (у 310)

① Изолированные особые точки

$f(z)$, точка a, $0<|z-a|<\varepsilon$ – окр-ть.

а) $\lim\limits_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$ – устранимая

б) $\lim\limits_{z\to q} f(z)=\infty$ – полюс

в) $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$ – существ. особая точка.

! у $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ – точка 0 – не изолированная, там нули накапливаются.

при $z=\frac{1}{\pi n} \to 0.$, $n\in\mathbb{N}$. – посл-ть полюсов $\to 0$.

а) Если ос. точка устранимая: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$; $c_n \le \frac{M}{r^n}$ – н-во Коши для коэф. Лорана, где $f(z)\le M$ –

(=>)

т.е. ос. точка устранима <=> в ряде Лорана нет отриц. слагаемых

$c_n \le \frac{M}{r^n}$

$c_{-n} \le \frac{M}{r^{-n}} = M\cdot r^n$, $r\to 0$; $c_{-n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

(<=)

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$ – предел есть.

чтд.

б) точка полюс <=> в ряде Лорана только конечное число отриц. слагаемых.

т.е. $\sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $c_{-N}\ne 0$.

(=>) пусть $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty \Rightarrow$ в окр-ти точки a: $f(z)\ne 0$.

$\Rightarrow g(z)=\frac{1}{f(z)}$ – голом. в некот. проколот. окр-ти точки a. $0<|z-a|<\varepsilon_1$

Заметим, что $\lim\limits_{z\to a} g(z) = \frac{1}{\infty}=0. \Rightarrow a$ – устр. для g.

$\Rightarrow g(z)=(z-a)^N\cdot h(z) \Rightarrow h(z)$ не обр. в 0 в окр-ти $0<|z-a|<\varepsilon_2$.

~~Но~~ $\frac{1}{h(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n$ – ряд Тейлора для $h(z)$.

$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^N}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n = \sum\limits_{n=-N}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n$.

(<=) $f(z)=\sum\limits_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n \Rightarrow f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tilde{c}_n(z-a)^n \longrightarrow \infty$. => полюс. чтд.

её lim при $z\to a\ne 0$, т.к. $c_n\ne 0$

в) пусть сущ. особ. точка $\Leftrightarrow$ у ряда Лорана беск. много отриц. слагаемых — ну оставшийся случай

пример. пусть $f(z)$
a
$0 < |z-a| < \varepsilon$, причем известно, что $\boxed{|z-a|^{1/2} \cdot f(z) \text{ — огр.}}$
Какой тип у точки a?
ну устранимой, т.к не б) и не в).

пример. $\boxed{f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}}$, $z=0$ — явл. изолир. ос. точкой?
т.е $\exists$ ли ~~прок.~~ окр-ть, в которой f голоморфна.

найдём нули ф-ции $1-\cos z = 0$.
ну $\exists$ окр-ть нуля, в которой $\cos z \neq 0$. $\Rightarrow$ изолир.

Определим тип: либо считаем предел, либо пишем ряд Лорана.

$$1-\cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \ldots = z^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \ldots\right)}_{\text{голом. ф-ция, которая } \neq 0}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1-\cos z} = \frac{z}{z^2} \cdot h(z) \xrightarrow[z\to 0]{} \infty \Rightarrow \text{ноль — это полюс 1 порядка.}$$

! порядок полюса = порядок нуля обратной ф-ции.

пример. $\boxed{f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z(z-2)}}$

Особые точки: $z=0$, $z=2$.

при $z=2$: полюс, т.к оставшийся множитель голоморфен и $\neq 0$.

при $z=0$: $\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \ldots$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z(z-2)} = \dfrac{1}{z^2(z-2)} - \ldots$ $\Rightarrow$ беск. много отриц. слагаемых
$\Rightarrow$ сущ. особая точка.

! проколотая окр-ть ∞: $R < |z| < \infty$.
чтобы написать критерий через ряд Лорана, надо рассм. $f(\frac{1}{z})$.
$\Rightarrow \infty$ — устр $\Leftrightarrow$ нет полож. членов
∞ — полюс $\Leftrightarrow$ конечное число полож. членов и сущ. особая — если весь ряд есть.

Теорема (Сохоцкого)

Мн-во предельных значений в окр-ти сущ. особой точки $= \bar{\mathbb{C}}$ — т.е. все точки предельные.

Пример. Даны $f_N(z)$ и $f_K(z)$.

Пусть $z=0$ — полюс для обеих ф-ций,

причём у f_N — это полюс порядка N, а у f_K — полюс порядка K.

Каков тип особой точки для $g(z) = f_N(z)+f_K(z)$ — полюс порядка $\max(N,K)$, если $N \neq K$.

Если $N=K$ — может быть все 3 типа.

ДЗ 1 $\boxed{f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z \cdot (1-z)}{(1-z^3)(1+\cos^2 z)}}$ — найти ос. точки и определить тип.

Утв.
Ф-ция наз. целой, если она голом. в $\mathbb{C}$.
Предположим, что в ∞ у неё — устр. точка или полюс.

Тогда f — многочлен.

Док-во: в окр-ти ∞: в ряде Лорана только конечное число полож. членов.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{N} c_n \cdot z^n$$

Вычтем из f её полож. часть Лорана.

$$h(z) = f(z) - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} c_n \cdot z^n}_{\substack{\text{многочлен} \\ \Rightarrow \text{голом.}}}$$
← в некот. окр-ти ∞ вида $R<z<\infty$. $h(z)$ голом $\Rightarrow$ огр.

А в $|z| \le R$ — тоже огр.

А по т. Лиувилля: если ф-ция голом. в $\bar{\mathbb{C}}$ и огр $\Rightarrow$ она $=$ const.

$\Rightarrow h(z) = \text{const} \Rightarrow f(z) =$ многочлен. чтд.

КР
- интеграл
- суммировать ряд
- найти типы ос. точек.

$\boxed{\text{Вычет}}$ (в изолир. особой точке)


← интеграл по внеш. границе $=0$.

Опр. a — изолир. особая точка; $f \in Hol(0<|z-a|<\varepsilon)$

$$res_a f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|<r} f(z)\,dz$$
— интеграл не зав. от окр-ти по теореме Коши.

где $r<\varepsilon$

Теорема Коши Дана область D с кус-гладкой границей.

и $f \in Hol(G)$, где $G \supset \overline{D}$.

Тогда интеграл по ориент. границе $=0$: $\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

Пусть в этой области есть особые точки:

пусть D_ε – новая граница, с выколотыми точками.

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,dz = 0 = \int_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_{a_j} \underbrace{\int_{\partial U_j} f(z)\,dz}_{= 2\pi i \cdot \sum_{a_j} res_{a_j} f(z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum \text{вычетов}} \ !$$

① **Как найти вычет: $C_{-1} = res_a f(z)$.**

Ну $res_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|<r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|<r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \underbrace{\int_{|z-a|<r} (z-a)^n\,dz}_{\text{это } =0, \text{ кроме } n=-1:\ \text{там } 2\pi i} =$

$= \frac{1}{2\pi i} \cdot C_{-1} \cdot 2\pi i = C_{-1}$.

Зам. • Если ос. точка устр $\Rightarrow res = 0$.

• Если ос. точка – полюс порядка N, то res можно искать дифференцированием.

② **пусть $N=1$** $\Rightarrow f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$

$\Rightarrow c_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) = c_{-1} = res_a f(z)$.

③ **пусть $N>1$** $\Rightarrow f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$

$\Rightarrow \lim_{z\to a} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} f(z)(z-a)^N \right] \cdot \frac{1}{(N-1)!} = c_{-1} = res_a f(z)$

4. пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$; $\psi'(a) \neq 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{z \to a} \frac{(z-a)}{\psi(z)} \varphi(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$ — ну см. Савчук

Пример $\boxed{f(z) = \frac{1}{\sin z\,(z-6)},\ z = 0.}$ — полюс 1 порядка. — см. ряд Лорана.

$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim\limits_{z \to 0} (z-0) \cdot \frac{1}{\sin z \cdot (z-6)} = -1/6.$

Или так: $(\sin z (z-6))' = \cos z \cdot (z-6) + \sin z \Big|_{z=0} = -6.$

$\Rightarrow \operatorname{Res}_0 f(z) = \frac{1}{-6} = -1/6.$

Пример $\boxed{f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2 \cdot \cos z} = \frac{1}{(z+i)^2 \cdot (z-i)^2 \cdot \cos z}}$

$\operatorname{Res}_i f(z) = ?$

Какого порядка полюс: 2 порядка.

$\Rightarrow \operatorname{Res}_i f(z) = \frac{1}{(\underbrace{N}_{2}-1)!} \lim\limits_{z \to i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(z+i)^2 \cos z} \right) = -\frac{-4\sin i + 4i\cos i}{-4\cos^2 i}.$

$\left(\frac{1}{(z+i)^2 \cos z}\right)' = \frac{-1}{(z+i)^4 \cdot \cos^2 z} \left(-(z+i)^2 \sin z + 2(z+i)\cos z\right) = \ldots$ подставим i

Вопрос:
пусть вычет $\operatorname{res}_a f(z) = 0$. Какой тип особ.?

Да это устрано, т.к. это влечет только $c_{-1} = 0$. остальные c_i — любые.

Пример $\boxed{f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cdot z}$ — сущ. особенность в 0. — нет предела никакого.

$\operatorname{res}_0 f(z) = ?$

ну $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cdot z = z\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} + \ldots\right) = z + \frac{z}{z^2} + \frac{z}{2z^4} + \ldots = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \ldots$

$\rightarrow c_{-1} = 1$.

Или так: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$

$$\Rightarrow C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} z\cdot e^{1/z^2}\, dz = \ldots$$

$n=-1$

! У $e^{\frac{1}{z^2}}$ – вычет $=0$.

Если устр. точка или полюс – есть те способы.

Если сущ. особая точка – то только ф-ла или ряд Фурье.

ДЗ 2 $\boxed{f(z) = \frac{z^3-1}{(z^4-1)(\operatorname{ctg} z+2)}}$ – найти особые точки и их тип.

19.11.19. ТФКП. Семинар 10.

Т. (о разложении в ряд Лорана)

$f \in Hol(S_{a,r,R})$, $S_{a,r,R} = \{r < |z-a| < R\}$, $r \geq 0$, $R \leq +\infty$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$, $\forall z \in S_{a,r,R}$, где $c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{-n-1} dz$, $\forall r < \rho < R$ (фикс.), $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Т.е ряд во всем этом кольце точно сходится (а может, и ещё где-то)

Т.е от ρ не зависит – ну или по т. о гомотопии, либо по инт. теореме Коши: т.к $f(z) \cdot (z-a)^{-n-1}$ – голом. ф-ция $\Rightarrow$ интеграл от неё по окр-ти $= 0$.

Следствие 1 (н-во Коши)

Пусть $M_\rho := \max_{|z-a|=\rho \text{ - фикс}} |f(z)|$

$\Rightarrow |c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Следствие 2 (т. Лиувилля)

(голом + огр $\Rightarrow$ равном. огр.)

Если $f \in Hol(\mathbb{C})$ – ограничена на $\mathbb{C}$, то $f \equiv const$.

голом. в $\mathbb{C}$ ф-ция наз. целой

~~(Из этой т.)~~

Док-во: положим $r := 0$; $R := +\infty$.

$A\ \rho \to +\infty$.

$\Rightarrow |c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0$. $\Rightarrow$ все коэф $= 0$. $\Rightarrow f = const$.

Д/з 1 Пусть f – целая функция с двумя вещ. незав. периодами T_1 и T_2. (где $T_1, T_2 \neq 0$, $T_1/T_2 \notin \mathbb{R}$) $\Rightarrow f = const$.

$\sin$ и $\cos$ – имеют период 2π.

И e – тоже – т.к $\begin{cases} e^{2\pi i} = 1. \\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \end{cases}$

Если ф-ции непост, то есть мин период, а остальные кратны.

Следствие 3

Пусть $f \in Hol(U'_\varepsilon(a))$ (тогда a наз. изолир. особой точкой)

$U'_\varepsilon(a)$ – прокол. окр-ть $\{0 < |z-a| < \varepsilon\}$

Пусть f – ограничена в $U'_{\varepsilon'}(a)$, где $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ по т. об устранимой особ. точке: $\exists \lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$, и после доопределения $f(a)$

этим пределом, то $f \in Hol(U_\varepsilon(a))$ — т.е если огр. => сразу есть предел.

а на $\mathbb{R}$: ~~...~~ $\sin\frac{1}{x}$ — огр., но нет предела.

Док-во: $r=0$; $R=\varepsilon$.

Хотим: все c_n при $n<1$ $=0$.

$|c_{-1}| = \frac{M_\rho}{\rho^{-1}} = \rho\cdot M_\rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. => все отриц. коэф. $=0$.

=> будет ряд Тейлора.

Следствие 4 (лемма Шварца).

Пусть $U_1=\{|z|<1\}$, $f\in Hol(U_1)$, $f(U_1)\subset U_1$; $f(0)=0$.

Тогда $|f(z)|\le|z|$, $\forall z\in U_1$.

причем если $\exists z_1\ne0$ | $|f(z_1)|=|z_1|$, то $\exists\theta\in\mathbb{R}: f(z)=e^{i\theta}\cdot z$.

выр.

Док-во: рассм. $g(z)=\frac{f(z)}{z}$, где $f(z)=\overset{0}{c_0}+c_1z+\ldots = z(c_1+c_2z+\ldots)$

И положим $g(0)=\lim_{z\to0}\frac{f(z)}{z}$, который $\exists$ ~~кон. об. хор. 0~~

=> по т. об устранимой особой точке: g тоже $\in Hol(U_1)$,

и $|g(z)|\le1$. — из т. о среднем (значение голом. ф-ции в точке = среднему значению на границе)

$\Rightarrow |f(z)|\le|z|$

А по принципу максимума: максимум не может достигаться внутри.

Следствие 5. Пусть D — круговая область (круг, полуплоскость, внешность круга — т.е области, ограниченные обобщ. окр-тью),

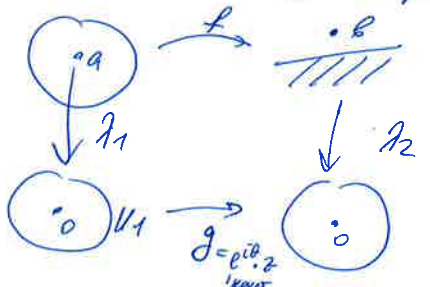
пусть f — конформный автоморфизм D на D (и их внешность)

(например, ДЛО: конформно $\bar{\mathbb{C}}$ в $\bar{\mathbb{C}}$).

Тогда f — ДЛО: $\frac{az+b}{cz+d}$, где $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\ne0$.

Т.е мы выписали все конф. отобр. круга — и других нет.

Док-во:



$\Rightarrow \varphi=\lambda_1\circ f\circ\lambda_2$ — она $0\to0$, причем $\begin{cases}|\varphi(z)|\le|z|\\|z|\le|\varphi(z)|\end{cases}$ => $|z|=|\varphi(z)|$ => вып. 2 усл. леммы Шварца.

=> по лемме Шварца: $\lambda_1\circ f\circ\lambda_2 = \underbrace{e^{i\theta}z}_{g}$ — ДЛО => $f=\lambda_1\cdot g\cdot\lambda_2$ — тоже ДЛО. чтд.

Ду.2 (на лемму Шварца).

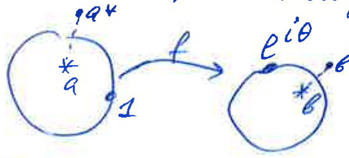
a, b – фикс. (любые) точки, их выбросим.

Найти все конформные изоморфизмы области $U_1\setminus\{a\}$ на $U_1\setminus\{b\}$.

Подсказка: использовать т. об устр. особой точке. А потом всё сведётся к поиску конф. автоморфизма круга на круг, который $a\to b$. А описание всех конф. автоморфизмов есть – ДЛО. – ну $f(a):=b$ – необходимо, т.к вдруг при $x\to a$ $f(a)\to$ к границе.

он конф, т.е. произв. $\neq 0$, т.к. $f\circ g^{-1}=id$.

Короче: по этой теореме мы ищем конф. автом – это будет ДЛО. Строим его:



$a\to b$.
$a^*\to b^*$ – из-за симметрии
$1\to e^{i\theta}$ – граница → границу.

Ряды Фурье

Пусть $f(z)\in Hol$ (кольцо $V=\{r<|z|<R\}$), $0\le r<1<R\le+\infty$.

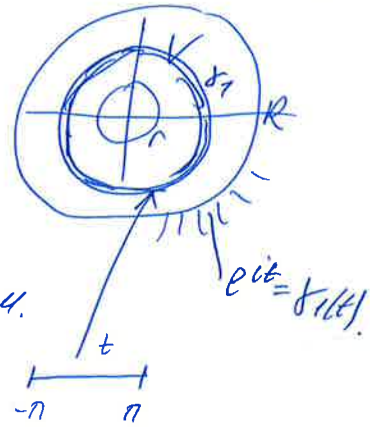
Главное, чтобы это кольцо содержало единичную окр-ть.

→ по т. о ряде Лорана: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot z^n$ в V.

Причём на любом компакте внутри V – сход. равном.

Пусть $z\in\gamma_1$; $|z|=1$.

$\Rightarrow z=e^{it}$, $t\in[-\pi;\pi]$.



Рассм. ф-цию $g(t)=f(e^{it})\Big|_{[-\pi;\pi]}$ – живёт на отрезке, периодическая

$$\Rightarrow g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{c_n}_{a_n+ib_n}\cdot\underbrace{e^{int}}_{\cos nt+i\sin nt}$$ – компл. запись ряда Фурье. Он сходиться будет равном.

Если $g(t)$ оказывается вещ, то в ряде Фурье коэф. при i будет $=0$.

Пример. $g(t)=\dfrac{2}{5+4\cos t}\Big|_{[-\pi;\pi]}$ ← может быть любая рац. ф-ция от $\sin t$ и $\cos t$, у которой знаменатель $\neq 0$ на $[-\pi;\pi]$

Это вещ. непр. ф-ция, период $=2\pi$; чётная ⇒ будут только косинусы.

Решение: обозн. $z=e^{it}$.

$\Rightarrow \cos(nt) = \frac{e^{int}+e^{-int}}{2} = \frac{z^n+z^{-n}}{2}$

$\sin(nt) = \frac{e^{int}-e^{-int}}{2i} = \frac{z^n-z^{-n}}{2i}$

$\Rightarrow \underset{g(e^{it})}{f(z)} = \frac{2}{5+4\cdot\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)} = \frac{2}{5+2z+\frac{2}{z}} = \frac{2z}{2z^2+5z+2}$ – хорошая ф-ция на единичной окр-ти (т.е. у нее нет особых точек)

$\Rightarrow$ есть конечно, в ~~окр-ти~~ ~~котором~~ котором. f голом.

$2z^2+5z+2=0 \Rightarrow z_1=-2$
$z_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{2z}{2z^2+5z+2} = \frac{A_1}{z+2} + \frac{A_2}{z+\frac{1}{2}}$

$\frac{2z}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}$

$A_1 = \lim\limits_{z\to -2} (z+2)\cdot f(z)$

$$\boxed{\Rightarrow f(z) = \frac{4/3}{z+2} + \frac{-1/3}{z+\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2.}$$

1) $f_1(z) = \frac{4/3}{z+2} \underset{\text{ряд тейл. в } U_2(0)}{=} \frac{4/3}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n$

2) $f_2(z) = \frac{-1/3}{z+\frac{1}{2}} \underset{\text{р. Лорана в } \{|z|>1/2\}}{=} \frac{-1/3}{z(1+\frac{1}{2z})} = -\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n\cdot z^n} = -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n\cdot z^{n+1}} =$

$\underset{n+1=k}{=} -\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\cdot z^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n\cdot z^{-n}, \quad |z|>1/2.$

$\Rightarrow f(z) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\cdot\underbrace{\frac{z^n+\frac{1}{z^n}}{2}}_{\cos nt}$ – ряд Лорана.

$$\boxed{\Rightarrow \underset{f(e^{it})}{g(t)} = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\cdot\cos nt}$$ – ряд Фурье.

D133 $g(t) = \frac{\sin t}{13-12\cos t}$ в ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$ – она нечётная $\Rightarrow$ будут синусы.

Нули голоморфных функций.

$f \in Hol(U_\varepsilon(\underset{\in\mathbb{C}}{a}))$, $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$.

Что значит, что a – ноль функции f порядка n.

Опр. a – ноль функции f порядка n.

$\Leftrightarrow f(a)=0=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)$, но $f^{(n)}(a)=0$. ← если $f(a)\neq 0$, то ноль 0 порядка.

Пример. $f(z)=1-\cos z^2$; $a=0$.

Найдём порядок нуля.

$f'(z)=\sin z^2\cdot 2z$ – тоже $=0$ при $a=0$.

$$f''(z)=2\cdot\sin z^2+\cos z^2\cdot 4z^2\Big|_{z=0}=0.$$

$$f'''(z)=\underbrace{2\cdot\cos z^2\cdot 2z+8z\cdot\cos z^2}_{=12z\cdot\cos z^2}-4z^2\cdot\sin z^2\cdot 2z\Big|_{z=0}=0.$$

$$f^{IV}(z)=12\cos z^2+\ldots\Big|_{z=0}=12\neq 0.$$

$\Rightarrow n_0=4$

Пример. $f(z)=(1-\cos(z^2))^{2019}$ – что делать?

Теорема (о нулях голоморфной ф-ции)

Пусть $a\in\mathbb{C}$, и $f\in Hol(U_\varepsilon(a))$.

Тогда след. усл. эквив.: (1) a – ноль ф-ции f конечного порядка $n\in\{0,1,2\ldots\}$

(2) $\exists g\in Hol(U_\varepsilon(a))$, причём $g(a)\neq 0$ в некот. $U_{\varepsilon'}(a)$ /

$f(z)=(z-a)^n\cdot g(z)$, и наоборот.

В частности, в обоих случаях a – изолир. ноль ф-ции f – т.е. в некот. окр-ти точки a нет других нулей – т.к. g – голом, $g(a)\neq 0\Rightarrow$ и в некот. окр-ти тоже.

! Если нули конечного порядка – они всегда изолир.

Теорема (единственности)

Пусть D – область в $\mathbb{C}$; $f\in Hol(D)$, $N_f=\{z\in D\,|\,f(z)=0\}$.

Если N_f имеет хоть одну предельную точку в D $\Rightarrow f\equiv 0$ в D.

Док-во: В точке z_0 по непрер-ти: $f(z_0)=0$.

Если бы в точке z_0 был ноль конечного порядка, то в окр-ти бы не было других нулей – они есть $\Rightarrow$ ноль беск. порядка

$\Rightarrow f\equiv$ ноль.

$\Rightarrow$ в этой задаче: $f(z) = (1-\cos(z^2))^{2019}$ $\leftarrow$ тут $n_0 = 4 \cdot 2019 = 8076$.

$g(z) = 1-\cos(z^2) = z^4 \cdot g_1(z)$ – т.к. у g – порядок $= 4$.

$\Rightarrow f(z) = z^{4 \cdot 2019} \cdot (g_1(z))^{2019}$

тоже голом. ф-ция, кот $\neq 0$ в точке 0.

Дз 4. Найти все нули ф-ции $f(z) = (1-\cos(z^2))^{2019}$ и их порядки.

(вспомнить, какие нули укоснулся)

"const $\cdot \sin^2(\frac{z^2}{2})$"

$\Rightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

$k = 0$ – сделали.

если $k > 0$: 2 корня $\pm\sqrt{2\pi k}$

если $k < 0$: 2 мнимых корня.

z_{kj}; $j = 1,2,3,4$, $m \in \mathbb{N}$

т.е. для каждого $m \in \mathbb{N}$ – 4 нуля.

И для каждого нуля: ищем сначала порядок нуля для $1-\cos z^2$. (он будет $= 2$)

$\Downarrow$ у $(1-\cos z^2)^{2019}$ – порядок $= 2 \cdot 2019$

Пример. $\exists?\ f \in Hol(U_1 = \{|z| < 1\})$: $\begin{cases} f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}, & n = 2,3\ldots \\ f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}, & n = 2,3\ldots \end{cases}$

Решение: рассм. $g(z) = z^3$.

$\Rightarrow g(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$, $n = 2,3\ldots$; $g(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3}$

Рассм.: $h(z) = f(z) - g(z) \in Hol(U_1)$

$\Rightarrow h(\frac{1}{n}) = 0$, для $n = 2,3\ldots$

но $\{\frac{1}{n}\} \to 0 \Rightarrow h \equiv 0$. но $h(-\frac{1}{n}) = \frac{2}{n^3} \neq 0$. против.

Дз 5 $\exists?\ f \in Hol(U_1)$

а) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$; $n = 2,3\ldots$

б) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n = 2,3\ldots$

– исп. ряд Тейлора, ноль конечного порядка, и то, что $f(0) = 0$ по непрер-ти.

Заметим, что $f(0) = 0$ – по непрер-ти. причем $f \neq 0$, т.е. у неё ноль в нуле конечного порядка – иначе $f \equiv 0$. От противного. пусть этот ноль порядка k. разложим в ряд Тейлора и покажем, что тогда такого быстрого убывания быть не может.

Дз 6 пусть $f \in Hol(\mathbb{C})$; $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ – она вещ. на вещ. оси.

Тогда $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ – т.е. она переводит симм. точки в симм. точки – тоже т. единств.

Дз 7 U_1 – единичный круг.

$f \in Hol(U_1) \cap C(\overline{U_1})$

$f|_\gamma = 0$ Тогда $f \equiv 0$.

17.11.19. ТФКП. ~~д/з~~ от семинара 9

20.08

1. $\boxed{\dfrac{1}{(z+1)(z-2)} \;;\; \text{в } 1<|z|<2}$

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{-1/3}{z+1} + \frac{1/3}{z-2}$$

бмс

- $-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z+1} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = -\dfrac{1}{3z}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{z^n}$

- $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2-z} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = -\dfrac{1}{6}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^k} - \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\frac{1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{k+1}} - \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\cdot z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot z^n, \text{ где } c_n = \begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+2}}{3}, & n\le -1\\ -\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2^n}, & n\ge 0.\end{cases}$$

$-k-1=n$

2. $\boxed{\dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)} \quad \text{в } 1<|z|<2}$

$(z-1)(z+2) = z^2+z-2$

$$\begin{array}{r|l} z^4+1 & z^2+z-2 \\ \hline -\;z^4+z^3-2z^2 & z^2-z+3 \\ -z^3+2z^2+1 & \\ -\;-z^3-z^2+2z & \\ 3z^2-2z+1 & \\ -\;3z^2+3z-6 & \\ \hline -5z+7 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)} = z^2-z+3+\frac{-5z+7}{(z-1)(z+2)} = z^2-z+3+\left(\frac{2/3}{z-1}+\frac{-17/3}{z+2}\right) =$$

бмс

$$= z^2-z+3+\frac{2/3}{z-1}-\frac{17/3}{z+2} = z^2-z+3+\frac{2/3}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{17/6}{1+\frac{z}{2}} =$$

$$= z^2-z+3+\frac{2}{3z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k-\frac{17}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot z^k}{2^k} = z^2-z+3+\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}-\frac{17}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot z^k =$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + z^2-z+3-\frac{17}{6}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}\right)-\frac{17}{6}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot z^n =$$

$k+1=-n$
$n=-k-1$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \frac{7}{24}z^2+\frac{5}{12}z+\frac{1}{6}z-\frac{17}{6}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot z^n$$

ответ:

(3.) $\boxed{\dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}, \quad 1<|z|<2}$

$$\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = \frac{\frac{2}{5}(z+\frac{1}{2})}{z^2+1} + \frac{-2/5}{z+2}$$

• $$\frac{\frac{2}{5}(z+\frac{1}{2})}{z^2+1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^2+1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{z}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k}} + \frac{1}{5z^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k}} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k+1}} + \frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k+2}} \underset{\substack{-2k-1=n \\ k=\frac{-n-1}{2}}}{=} \frac{2}{5}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{\frac{-n-1}{2}}\cdot z^n + \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{\frac{-n-2}{2}}\cdot z^n$$

• $$\frac{-2/5}{z+2} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = -\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot z^k}{2^k}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-2}\left(2\cdot(-1)^{\frac{-n-1}{2}}+(-1)^{\frac{-n-2}{2}}\right)z^n + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{2^n}$$

(20.09) (1.) $\boxed{\dfrac{1}{z(z-3)^2} \quad a=1 \quad D: 1<|z-1|<2}$

Замена: $z-1=w \quad \Rightarrow D: 1<|w|<2.$

$$f(z) = \frac{1}{(w+1)(w-2)^2} = \frac{1/9}{w+1} + \frac{1/3}{(w-2)^2} + \frac{-1/9}{w-2}$$

• $$\frac{1/9}{w+1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{w(1+\frac{1}{w})} = \frac{1}{9w}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{w^k} = \frac{1}{9}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{w^{k+1}} \underset{-k-1=n}{=} \frac{1}{9}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\cdot w^n$$

• Как сделать $\dfrac{1}{(x-2)^2}$?

$$\left(\frac{1}{(x-2)}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2}\cdot 1 \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = -\left(\frac{1}{x-2}\right)'$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{x}{2})} = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\left(\frac{1}{x-2}\right)'}_{\frac{1}{(x-2)^2}} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{x^{k-1}}{2^k} \underset{k-1=n}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1/3}{(w-2)^2} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)w^n}{2^{n+1}}$$

• $$\frac{-1/9}{w-2} = \frac{1}{9\cdot 2(1-\frac{w}{2})} = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^n}$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} + = \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+5)w^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(w+1)(w-2)^2} = \frac{1}{9}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\cdot w^n + \frac{1}{18}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n+5)}{2^{n+1}}\cdot w^n =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\cdot(z-1)^n + \frac{1}{18}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{2^{n+1}}\cdot(z-1)^n$$

ответ!

(2.) $\frac{1}{z^2\cdot(z^2-9)}$; $a=1$; $D: 1<|z-1|<2$.

Замена: $z-1=w$ $\Rightarrow D: 1<|w|<2$.
$z=w+1$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{(w+1)^2\cdot(z-3)(z+3)}=\frac{1}{(w+1)^2\cdot(w-2)(w+4)}$$

гл.ч.

$$\frac{1}{(w+1)^2(w-2)(w+4)}=\frac{1/54}{w-2}+\frac{-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}}{w+4}+\frac{-1/9}{(w+1)^2}$$

$$\frac{1}{(w+1)^2}=-\left(\frac{1}{w+1}\right)'=-\left(\frac{1}{w(1+\frac{1}{w})}\right)'=-\left(\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{w^k}\right)'=-\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{w^{k+1}}\right)=$$

$$=-\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot w^n\right)'=-\sum_{n=-\infty}^{-1}n\cdot(-1)^{-n-1}\cdot w^{n-1}=-\sum_{p=-\infty}^{-2}(p+1)\cdot(-1)^{p-2}\cdot w^p$$

$-k-1=n$; $n-1=p$

$$\Rightarrow \frac{-1/9}{(w+1)^2}=-\frac{1}{9}\cdot-\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)(-1)^{n-2}\cdot w^n=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)(-1)^{n-2}\cdot w^n.$$

- $\frac{1/54}{w-2}=-\frac{1}{54}\cdot\frac{1}{2-w}=\frac{-1}{108}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{2}}=\frac{-1}{108}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^n}$
- $\frac{-1/54}{w+4}=-\frac{1}{54\cdot4}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{4}}=\frac{-1}{216}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^n}{2^{2n}}$

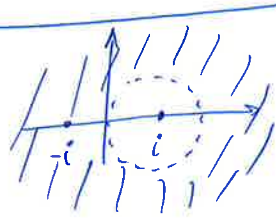
$+\Big\}=\frac{-1}{216}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^{2n}}\left(2\cdot2^n+(-1)^n\right)$

$$\Rightarrow f(w)=\frac{1}{(w+1)^2\cdot(w-2)(w+4)}=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\cdot(-1)^{n-2}\cdot w^n-\frac{1}{\underset{=27\cdot8}{216}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{2n}}\cdot w^n.$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\cdot(-1)^{n-2}\cdot(z-1)^n-\frac{1}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{2n+3}}\cdot(z-1)^n$$

ответ.

(3.) $\frac{z+i}{z^2}$; $a=i$; $-i\in D$.



Замена: $z-i=w$.
$z=w+i$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{z+i}{z^2}=\frac{w+2i}{(w+i)^2}=\frac{w+i}{(w+i)^2}+\frac{i}{(w+i)^2}=\frac{1}{w+i}+\frac{i}{(w+i)^2}$$

но $\frac{1}{(w+i)^2}=-\left(\frac{1}{w+i}\right)'=-\left(\frac{1}{w(1+\frac{i}{w})}\right)'=-\left(\frac{1}{w}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot i^k}{w^k}\right)'=-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot i^k}{w^{k+1}}\right)'=$

$-k-1=n$.

$$= -\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-n-1}\cdot i^{(-n-1)}\cdot w^{n}\right)' = -\sum_{n=-\infty}^{-1} n\cdot(-1)^{-n-1}\cdot i^{(-n-1)}\cdot w^{n-1} =$$

$\uparrow n-1=p.$

$$= -\sum_{p=-\infty}^{-2}(p+1)\cdot(-1)^{-p-2}\cdot i^{(-p-2)}\cdot w^{p}$$

$$\Rightarrow \frac{w}{(w+i)^2} = w\cdot -\sum_{p=-\infty}^{-2}(p+1)\cdot(-1)^{-p-2}\cdot i^{(-p-2)}\cdot w^{p} = -\sum_{p=-\infty}^{-2}(p+1)\cdot(-1)^{-p-2}\cdot i^{(-p-2)}\cdot w^{p+1} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} n\cdot(-1)^{-n-1}\cdot i^{-n-1}\cdot w^{n}$$

$p+1=n$
$p=n-1$

• $\frac{i}{(w+i)^2} =$

• $$\frac{i}{(w+i)^2} = -i\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\cdot(-1)^{-n-2}\cdot i^{(-n-2)}\cdot w^{n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\cdot(-1)^{-n-1}\cdot i^{-n-1}\cdot w^{n}$$

• $$\frac{1}{w+i} = \frac{1}{w(1+\frac{i}{w})} = \frac{1}{w}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot i^k}{w^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot i^k}{w^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}\cdot i^{-n-1}\cdot w^{n}$$

$-k-1=n.$
$k=-n-1$

$$\Rightarrow \frac{1}{w+i}+\frac{i}{(w+i)^2} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1+1)\cdot(-1)^{-n-1}\cdot i^{-n-1}\cdot w^{n} + \frac{1}{w} = \frac{1}{w} + \sum_{n=-\infty}^{-2}(n+2)\underbrace{(-1)^{-n-1}\cdot i^{-n-1}}_{(-1)^{-n-1}\cdot(-1)^{-n-1}\cdot i^{n+1}}\cdot w^{n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-\infty}^{-2}(n+2)\cdot i^{n+1}\cdot(z-i)^{n} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{-1}(n+2)\cdot i^{n+1}\cdot(z-i)^{n}}$$ ответ:

в качестве члена при $n=-1$

20.16 (1.) $\boxed{z^3\cdot e^{1/z};\quad a=0;\quad 0<|z|<\infty}$

$$z^3\cdot e^{1/z} = z^3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3-k}}{k!} = \sum_{n=-3}^{\infty}\frac{z^{-n}}{(n+3)!} = \boxed{z^3+z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{(n+3)!}}$$ ответ:

$3-k=-n$
$n=k-3$

(2.) $\boxed{z^2\cdot\sin\pi\frac{z+1}{z};\quad a=0;\quad 0<|z|<\infty}$

$$\sin\pi\left(\frac{z+1}{z}\right) = \sin\pi\left(1+\frac{1}{z}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{z}\right) = -\sin\frac{\pi}{z}$$

$$\Rightarrow f(z) = -z^2\cdot\sin\frac{\pi}{z} = -z^2\cdot\frac{e^{\frac{i\pi}{z}}-e^{-\frac{i\pi}{z}}}{2i} = -\frac{z^2}{2i}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k\cdot\pi^k}{z^k\cdot k!} - \sum_{k=0}\frac{(-1)^k\cdot i^k\cdot\pi^k}{z^k\cdot k!}\right) =$$

$$= -\frac{z^2}{2i}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k\cdot\pi^k}{k!\cdot z^k}\left(1-(-1)^k\right)\right) = -\frac{z^2}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}\cdot\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot z^{2n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}\cdot\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\,z^{2n-1}} =$$

если $k=2n$, то это $=0$
если $k=2n+1$, то это $=2$

$$= \boxed{-\pi z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}}}$$ ответ:

20.21 (1.) $\boxed{\dfrac{z}{(z+2)^2}\ ;\ z_0=-2.}$

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}\cdot(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots$$

3

Замена: $z+2=w \Rightarrow z=w-2$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{w-2}{w^2}$$

при $w\to 0$: $f(z)\sim -\dfrac{2}{w^2}=\dfrac{-2}{(z+2)^2}$

$$f'(z)=\frac{1\cdot w^2-(w-2)\cdot 2w}{w^4}=\frac{w^2-2w^2+4w}{w^4}=\frac{-w^2+4w}{w^4}=\frac{-w+4}{w^3}$$

$$\Rightarrow f'(z)\underset{w\to 0}{\sim}\frac{4}{w^3}=\frac{4}{(z+2)^2}$$

$$\Rightarrow f(z)\underset{z\to -2}{\sim}\frac{-2}{(z+2)^2}+\frac{4}{(z+2)^2}$$ ответ:

(2.) $\boxed{\dfrac{e^z+1}{e^z-1}\ ;\ z_0=0;\pm 2\pi i;\pm 4\pi i\ldots}$

$$\frac{e^z+1}{e^z-1}=1+\frac{2}{e^z-1}=1+\frac{2}{z+\frac{z^2}{2}+\ldots}=1+\frac{2}{z(1+\frac{z}{2}+\ldots)}=1+\frac{2}{z}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\ldots\right)=$$

$$=\cancel{1}+\frac{2}{z}\cancel{-1}-\frac{z}{2}\ldots=\underbrace{\frac{2}{z}}_{\text{гл. част}}-\frac{z}{2}\ldots$$

$$\Rightarrow \frac{e^z+1}{e^z-1}\sim\frac{2}{z}\ \text{при } z\to 0.$$

При $z_0=2\pi k i$:

$w=z-z_0 \Rightarrow z=\underbrace{w+2\pi k i}_{\to 0}$ при $w\to 2\pi k i$

см. выше

$$\Rightarrow\frac{e^z+1}{e^z-1}=1+\frac{2}{e^z-1}=1+\frac{2}{e^w\,e^{2\pi k i}-1}=1+\frac{2}{(e^w-1)}=\frac{2}{w}-\frac{w}{2}+\ldots$$

$w\to 0$

$$\Rightarrow\frac{e^z+1}{e^z-1}\sim\frac{2}{w}=\frac{2}{z-2\pi k i}\ \text{при } z\to 2\pi k i$$ ответ.

(3.) $\boxed{\dfrac{z-1}{\sin^2 z}\ ;\ z_0=0}$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$

$$\frac{z-1}{\sin^2 z}=\frac{z-1}{(1-\cos 2z)/2}=\frac{2(z-1)}{1-\cos 2z}=\frac{2(z-1)}{\frac{4z^2}{2}-\frac{16z^4}{24}+\ldots}=\frac{2(z-1)}{2z^2(1-\frac{z^2}{3}+\ldots)}=\frac{(z-1)}{z^2}\left(1+\frac{z^2}{3}+\ldots\right)\approx$$

$$\frac{z-1}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$$ ответ.

(3) $\boxed{z^3 \cdot \cos\frac{1}{z-2} \quad a=2;\ 0<|z-2|<\infty}$

<u>Замена:</u> $z-2=w$

$$\Rightarrow (w+2)^3 \cdot \cos\frac{1}{w}$$

$$(w+2)^3 = w^3+2w^2+4w+8$$

$$\cos\frac{1}{w} = \frac{e^{\frac{i}{w}}+e^{-\frac{i}{w}}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!\,w^k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot i^k}{k!\,w^k}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2w^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{w^4}+\sum_{n=3}^{\infty}\right.$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!\,w^k}\left(1+(-1)^k\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}}{(2n)!\,w^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}}$$

если $k=2n$, то это $=2$

если $k=2n+1$, то это $=0$

- $$w^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}} = w^3\cdot\left(1-\frac{1}{2w^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{w^4}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\cdot w^{2k}}\right) =$$
$$= w^3-\frac{1}{2}w+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,w^{2k-3}} \underset{k=n+1}{=} w^3-\frac{1}{2}w + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\cdot w^{2n-1}}$$
$$\frac{1}{w}+\frac{1}{w^3}$$

- $$2w^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}} = 2w^2\left(1-\frac{1}{2w^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,w^{2k}}\right) =$$
$$= 2w^2-1+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,w^{2k-2}} \underset{k=n+1}{=} (2w^2-1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\cdot w^{2n}}$$

- $$4w\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}} = 4w\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,w^{2k}}\right) = 4w+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!\,w^{2k-1}}$$

- $$8\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}} = 8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,w^{2n}}$$

12.11.19. ТФКП. Семинар 9.

Тейлора — Ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\cdot(z-a)^n$ — приближение многочленами.

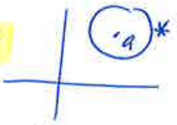
Лорана

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot(z-a)^n$ — приближение ф-ции рац. дробями

Если ф-ция голоморфна в круге — то в круге она расклад. в Тейлора.
Если ф-ция голоморфна в кольце — то в ~~круге~~ кольце — в ряд Лорана.

~~Т~~ Т. Абеля Макс. круг сходимости содержит на своей огр-и особую точку. — т.е ряд сход до первой особенности.

Пример 1



$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$ — сход. на $(-1;1)$

А дальше — нет, т.к $\pm i$ — особые точки

Как $\frac{1}{x^2+1}$ — в ряд Лорана, за пределами $(-1;1)$.

$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n} = \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{x^{2n}}$ — ряд Лорана: все степени <0 : $-2, -4, \ldots$

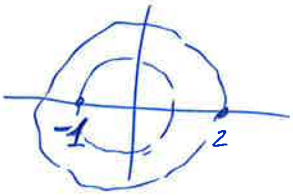
ее ряд Лорана сход $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^2}\right|<1$, т.е $|x|>1$.

! Одна и та же ф-ция на разных кольцах: $0\le|z|<1$ и $1<|z|<\infty$. представляется разными рядами Лорана $\Rightarrow$ надо указывать ф-цию, точку и кольцо.

Пример 2. $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ — ф-ция

$a=0$ — точка разложения

$1<|z|<2$.



$\frac{1}{1+q} = 1-q+q^2+\ldots$

3 кольца $\Rightarrow$ 3 ряда Лорана

Хотим в среднем кольце разложить.

$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{-1/3}{z+1} + \frac{1/3}{z-2}$

У каждой дроби нужно выбрать: раскладывать по z или $\frac{1}{z}$ — сход. во внешности
сход. во внутренности

• $\frac{-1/3}{z+1}$ хотим $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$|z| > 1 \Rightarrow \frac{-1/3}{z+1} = \frac{-1/3}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{-1/3}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}$

• $\frac{1/3}{z-2} = \frac{-1/6}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1/3}{z}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^n}} - \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{2^n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot z^n, \text{ где } c_m = \begin{cases} -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^m}, & m\ge 0 \\ \frac{(-1)^m}{3} & m\le -1 \end{cases}$$

$\parallel$ $\frac{1}{z^{n+1}}$; $n\ge 0$

$\parallel$ $z^{-n-1} = z^m$,

$\uparrow$ $m := -n-1$

$n = -m-1$

пример 3 ~~Итд~~ а) $\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$

б) $\frac{1}{(1-z)^2} = ?$ – му продиф. ряд для $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots$

$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$.

пример 4. $\boxed{\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} \text{ – в } 1<|z|<2.}$

$$\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = \frac{\frac{2}{5}(z+\frac{1}{2})}{z^2+1} - \frac{2/5}{z+2}$$

• $\frac{\frac{2}{5}(z+\frac{1}{2})}{z^2+1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^2+1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{z}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} =$

$= \underbrace{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^{2n}} + \frac{1}{5z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^{2n}}}$ ← степень z^{2n-1} и z^{2n-2}.

$m = -2n-1$, $2n = -m-1$, $n = \frac{-m-1}{2}$

$m = -2n-2$, $n = \frac{-m-2}{2}$.

• $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z+2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z}{(z^2+1)(z+2)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\cdot z^m, \text{ где } c_m = \begin{cases} (-1)^{m+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\frac{1}{5}, & m\ge 0 \\ \frac{2}{5}(-1)^{\frac{-m-1}{2}} & m<0,\ m\text{ – нечет.} \\ \frac{1}{5}\cdot(-1)^{\frac{-m-2}{2}}, & m<0,\ \text{чет.} \end{cases}}$$

Пример 5 $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 2i}$

Задача $f \in Hol(|z|<R)$
$f(x) \in \mathbb{R}$ при $x \in (-R;R)$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \Rightarrow c_n \in \mathbb{R}$.

$a = 1$.

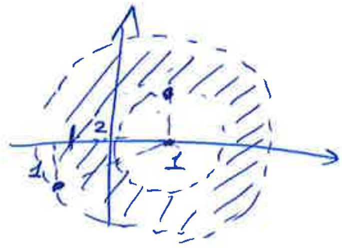
кольцо подобрать самим так, чтобы $-1 \in D$, обл. сход.

Найдем особые точки: найдем корень из $2i$:

$$2i = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$$

$$\sqrt{2i} = \pm\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(1+i)$$

$$\Rightarrow 1 < |z-1| < \sqrt{5}$$



Замена: $z-1 = w$
$\Rightarrow z = w+1$.

$$\Rightarrow \frac{2z}{z^2-2i} = \frac{2(w+1)}{(w+1)^2 - 2i} = \frac{2w+2}{(w-i)(w+2+i)} = \frac{1}{w-i} + \frac{1}{w+2+i}$$

- $\dfrac{1}{w-i} = \dfrac{1}{w\left(1-\frac{i}{w}\right)} = \dfrac{1}{w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{w}\right)^n$ – относ. $\frac{1}{w}$
- $\dfrac{1}{w+2+i} = \dfrac{1}{(2+i)\left(1+\frac{w}{i+2}\right)} = \dfrac{1}{2+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{w}{i+2}\right)^n$ – относ. w

Пример 6 $e^z \sin z$ – разложить на всей плоскости $0 < |z| < \infty$.

$$e^z\cdot\sin z = e^z\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{z(1+i)} - e^{z(1-i)}\right) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}\cdot z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!} z^n\right)$$

$$c_n = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i\cdot n!} = \frac{2^{n/2}}{n!}\cdot\frac{e^{\frac{i\pi n}{4}} - e^{-\frac{i\pi n}{4}}}{2i} = \frac{2^{n/2}}{n!}\cdot\sin\frac{\pi n}{4} \Rightarrow \text{коэф. вещ.}$$

$$1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\Rightarrow (1+i)^n = 2^{n/2}\cdot e^{i\pi n/4}$$
$$(1-i)^n = 2^{n/2}\cdot e^{-i\pi n/4}$$

Пример 7 (20.16.5) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$

$a = 1$.

$1 < |z-1| < 2$.

Делаем сдвиг: $z-1 = w \Rightarrow z = w+1 \Rightarrow f = \dfrac{e^{\frac{1}{w}}}{(w+1)(w+2)}$

$$\frac{e^{1/w}}{(w+1)(w+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{w^k}\cdot\left(\sum_{\ell=-\infty}^{-1}(-1)^{\ell+1}\cdot w^\ell - \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell w^\ell}{2^{\ell+1}}\right) =$$

Т.к. $$\frac{1}{(w+1)(w+2)} = \frac{1}{w+1} - \frac{1}{w+2} \underset{1<|w|<2}{=} \frac{1}{w(1+\frac{1}{w})} - \frac{1}{2(1+\frac{w}{2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{w^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{w^k}\cdot\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell\cdot w^\ell = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w^n \sum_{\ell=n}^{+\infty}\frac{a_\ell}{(\ell-n)!} =: c_n$$

$w^{\ell-k}=w^n$

$\ell-k=n$

$k=\ell-n\geq 0$

Т.е. $$c_n = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=n}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^{\ell+1}\cdot(\ell-n)!},\ \ell\geq n, & \text{если } n\geq 0. \\ \sum\limits_{\ell=n}^{-1}\frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-n)!} + \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^{\ell+1}(\ell-n)!}, & \text{если } n<0. \end{cases}$$

Зам. Иногда не нужен весь ряд Лорана.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot(z-a)^n$$

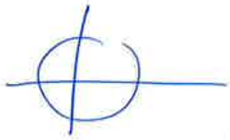
$z\sim a$ — тут роль играет часть, где $n\leq -1$ — главная часть.

$z\sim\infty$ => тут нужна часть с $n\geq 0$.

пример 8 $a=0$;

$0<|z|<\pi$

$f(z)=\frac{1}{\sin z}$ — найти главную часть.



Заметим, что $\frac{1}{\sin z}\sim\frac{1}{z}$ при $z\to 0$, => у ряда Лорана все степени ≥ -1.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin z} = \underbrace{\frac{c_{-1}}{z}}_{\text{вот главная часть.}} + c_0 + c_1\cdot z + \dots$$

! Главное слагаемое всегда вписывается по экв-ти.

но $\frac{1}{\sin z}\sim\frac{1}{z} \Rightarrow c_{-1} = 1$.

пример 9 $\frac{z}{(z^2+b^2)^2}$ — главная часть.

$a=ib$, $b\in\mathbb{R}^+$

Замена: $z=w+ib$, $w=z-ib$ => $f(z) = \frac{w+ib}{(w^2+2ibw)^2} = \frac{w+ib}{w^2(w+2ib)^2}$

$\sim$const при $w\to 0$

← ну $\frac{w+ib}{(w+2ib)^2} = \frac{ib}{-4b^2} = \frac{-i}{4b}$.

$$\Rightarrow \frac{w+ib}{w^2(w+2ib)^2} = \frac{-i}{4b}\cdot\frac{1}{w^2}+\dots$$

Хотим 2-е слагаемое: $\varphi(w)=\dfrac{w+ib}{(w+2ib)^2} = \varphi(0)+\varphi'(0)w+\dots$

$$\varphi(0) = \frac{ib}{-4b^2} = \frac{i}{-4b^2}$$

$$\varphi'(w) = \frac{1\cdot(w+2ib)^{\cancel{2}}-(w+ib)\cdot 2\cancel{(w+2ib)}}{(w+2ib)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{w+\cancel{2ib}-2w-\cancel{2ib}}{(w+2ib)^3} = \frac{-w}{(w+2ib)^3}$$

$\Rightarrow \varphi'(0) = \dfrac{-4b^2+4b^2}{16b^4} = 0$ $\Rightarrow$ гл. часть — это $\dfrac{-i}{4b}\cdot\dfrac{1}{w^2}$

2 способ
$$\frac{w+ib}{w^2(w+2ib)^2} = \frac{w+ib}{-4b^2\cdot\left(1+\frac{w}{2ib}\right)^2} = \frac{w+ib}{-4b^2}\left(1-\frac{2w}{2ib}+\dots\right) = \frac{-i}{4b}+0\cdot w+\dots$$

Задача
$$\frac{1}{(1+x)^\alpha} = 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots$$

3 способ
$$\frac{w+ib}{w^2(w+2ib)^2} = \frac{C_{-2}}{w^2}+\frac{C_{-1}}{w}+\dots$$

$$\Rightarrow \frac{w+ib}{(w+2ib)^2} = C_{-2}+C_{-1}\cdot w$$

$$w+ib = (w^2+4ibw-4b^2)C_{-2}+C_{-1}\cdot w(w^2+4ibw-4b^2) =$$

$$= \cancel{C_{-2}\cdot w^2+4ibC_{-1}w^2+C_{-1}w^3}$$

$$= -4b^2\cdot C_{-2}+w(4ibC_{-2}-4b^2C_{-1})+w^2(C_{-2}+4ibC_{-1})+w^3\cdot C_{-1}$$

не получилось!

Д/З. Задачник Евградова — "Сборник задач по аналит. ф-циям".
§20 : N 8, 9, 16, 21 — по 3 первых пункта