19.03.18 Лин. алгебра. Лекция 12.

Следствие: Для любой кососимметрической БФ на пр-ве V существует базис, в котором она имеет матрицу вида:

$$F = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix}$$

с r блоками 2×2, где $2r = \operatorname{ранк} f =$
$= \operatorname{ранк}$ её матрицы
(следует из теоремы про базис кососимм. БФ)

Евклидовы пространства

В них задана спец. структура – скалярное произведение.

① пусть V – вект. пр-во над $\mathbb{R}$, f – симм. БФ на V.

Опр. f – **скалярное произведение**, если она положит. определена.

Т.е. (если ввести обозн. $f(x,y) = (x|y)$), то:

(1) $(x|y) = (y|x)$ – симметричность

(2) $(\lambda x + \lambda' x'|y) = \lambda(x|y) + \lambda'(x'|y)$ – линейность по 1 аргументу; она вместе с (1) гарантирует линейность по 2 аргументу.

(3) $(x|x) > 0 \ \forall x \neq 0$

② **Опр.** **Евклидово пространство** = векторное пр-во V над $\mathbb{R}$ с заданным на нём скалярным произведением $(x|y)$.

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ – базис V.

Опр. **Матрица Грама** $G = (g_{ij})$ скалярного произведения в базисе $\{e_1 \dots e_n\}$ – это матрица БФ (т.е. $g_{ij} = (e_i|e_j)$)

③ Основные метрические понятия

(1) **Длина (норма) вектора:** $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$

свойства длины: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ для $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема (Н-во Коши-Буняковского)

$$\boxed{|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Док-во: $(\lambda x - y|\lambda x - y) = \lambda^2 \cdot \|x\|^2 - 2\lambda(x|y) + \|y\|^2 \geq 0 \ \forall \lambda$ – т.к. (3)

Это кв. функция относительно $\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Дискриминант D ур-я $a\lambda^2 + b\lambda + c$ отрицателен (или $= 0$),

где $a = \|x\|^2$; $b = 2(x|y)$; $c = \|y\|^2$.

Т.е. $D = b^2 - 4ac \leq 0$.

$\Rightarrow 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.

$\Rightarrow (x|y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$

$\Rightarrow |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. ЧТД.

Следствие 1 (н-во Δ).

$\boxed{|x+y| \le |x|+|y|}$ (а вообще еще полезно знать: $||x|-|y|| \le |x-y| \le |x|+|y|$.

Док-тво: $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \|x\|^2 + \underbrace{2(x|y)}_{\text{см. н-во Коши-Буняковского}} + \|y\|^2 \le$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. чтд.

Следствие 2 $-1 \le \dfrac{(x|y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \le 1$. (раскрыли модуль в н-ве Коши-Буняковского, и поделили обе части на $\|x\|\cdot\|y\|$)

Тогда можно определить угол между векторами:

$\boxed{\exists!\ \varphi \in [0;\pi] \mid \cos\varphi = \dfrac{(x|y)}{\|x\|\cdot\|y\|}}$

④ Ортогональные векторы

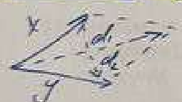
Опр. u и v ортогональны (т.е. $u \perp v$), если $(u|v) = 0$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Следствие 3 (Теорема Пифагора)

если $x \perp y$, то $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$

т.к. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2(x|y)}_{=0,\ \text{т.к. } x \perp y} + \|y\|^2$

Следствие 4 Диагонали ромба ⊥.



$d_1 = \vec{x} + \vec{y}$

$d_2 = \vec{x} - \vec{y}$

$\Rightarrow (d_1|d_2) = (x+y|x-y) = \|x\|^2 + (y|x) - (x|y) - \|y\|^2 = 0$.

Опр. набор $e_1 \dots e_n$ – ортогональный базис, если $e_i \perp e_j$

Опр. набор $e_1 \dots e_n$ – ортонормированный базис, если $e_i \perp e_j$ и $\|e_j\| = 1$

Теорема: В любом конечномерном евклидовом пр-ве существует ортонормированный базис.

Док-во: Пусть $q(x) = f(x;x) = (x|x)$ – квадр. форма.

Она невырожденная и положит. определена.

(невырожд, т.к. если $f(x;x) \equiv 0$, то $f(x+x;x) = \underset{0}{f(x;x)} + \underset{0}{f(x;x)} = 0 \Rightarrow x = 0$,

т.к. $(x|x) > 0\ \forall x \ne 0 \Rightarrow$ ядро тривиальное).

$\Rightarrow \exists$ базис $e_1 \dots e_n$, в котором $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$,

т.е. q ($\Rightarrow$ и f) равна E – действуя по методу Лагранжа.

$\Rightarrow$ базис ортонормирован, т.е. $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ чтд.

3) Изоморфизм евклидовых пространств

Пусть U и V – два евклидова пр-ва.

Опр. $\varphi: U \to V$ – изоморфизм евклидовых пространств, если:

1) φ – изоморфизм векторных пр-в.
2) $(\varphi(x) | \varphi(y)) = (x|y)$ – сохраняет операцию.

Теорема конечномерные евклидовы пр-ва U и V изоморфны $\Leftrightarrow \dim U = \dim V$.

Док-во: ($\Rightarrow$) От противного.

Если $\dim U \neq \dim V$, то U и V не изоморфны (как вект. пр-ва) см. лекция 1.

($\Leftarrow$) Если $\dim U = \dim V$, то предъявим изоморфизм.

Рассмотрим ортонормированные базисы в U и V:

$u_1 \dots u_n \in U$; $v_1 \dots v_n \in V$.

Тогда $\varphi: U \to V$ такой что $\varphi(\Sigma x_i u_i) = \Sigma x_i v_i$ – линеен, биективен, сохраняет скалярное произведение. – т.к. базисы в U и V ортонормированные.

$\Rightarrow \varphi$ – изоморфизм евклидовых пр-в. ◄

21.03.18. лин. алгебра лекция 13.

Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)
пусть $e_1 \ldots e_m$ — лин. незав. векторы из E^n $(m \le n)$
Тогда $\exists$ ортонорм. система $e_1' \ldots e_m'$, такая что
$\langle e_1 \ldots e_i \rangle = \langle e_1' \ldots e_i' \rangle \ \forall i = 1 \ldots m$.

Док-во: индукция по числу векторов.
1) если $m=1$, то положим $e_1' = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$
2) пусть $m>1$: положим $e_1' = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1$;
пусть $e_1' \ldots e_k'$ уже построены, причем $e_1' \ldots e_i'$ — лин. комбинации $e_1 \ldots e_i$ $\forall i \le k$, т.е. $\langle e_1 \ldots e_i \rangle = \langle e_1' \ldots e_i' \rangle \ \forall i \le k$.
при этом $e_1' \ldots e_k'$ — ортонормированная система
$\Rightarrow (e_i' | e_j') = \delta_{ij}$

Положим $e_{k+1}' = e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j'$, где $\lambda_j = (e_j' | e_{k+1})$.
Тогда $\langle e_1' \ldots e_{k+1}' \rangle = \langle e_1 \ldots e_{k+1} \rangle$ и $(e_i' | e_j') = 0 \ \forall i \ne j \in [1; k+1]$.
Действительно, если $i, j \ne k+1$, то и так $(e_i' | e_j') = 0$.
Надо для e_i' и e_{k+1}'; $i \in [1; k]$.
$(e_i' | e_{k+1}') = (e_i' | (e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (e_j' | e_{k+1}) \cdot e_j')) = (e_i' | e_{k+1}) - \sum_{j=1}^{k} (e_j' | e_{k+1}) \cdot (e_i' | e_j') \Rightarrow$
В этой сумме только одно слагаемое $\ne 0$: при $j = i$
(за счет того, что $(e_i' | e_j') = 0 \ \forall i \ne j \in [1; k]$)
$\Rightarrow ? = (e_i' | e_{k+1}) - (e_i' | e_{k+1}) = 0$.
Если $\|e_{k+1}'\| \ne 1$, то нормируем e_{k+1}'. чтд.

Следствие любую ортонормированную систему векторов в E^n можно дополнить до ортонормир. базиса E^n.
Док-во: Если $e_1 \ldots e_m$ — ортонорм. система, то они, в частности, лин. независимы, (т.к. если $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m = 0$, то $0 = (e_j | u) = \lambda_j = 0 \Rightarrow$ все $\lambda_j = 0$. $\Rightarrow$ лин. комб. тривиальная).
Тогда дополним их до произвольного базиса $e_1 \ldots e_m, e_{m+1} \ldots e_n$, а потом нормируем векторы, начиная с e_{m+1}. чтд.

7. Ортогональное дополнение

пусть V — евклидово пр-во; $U \le V$ — подпр-во.
Опр. $U^\perp = \{x \in V : (x|u) = 0 \ \forall u \in U\}$ — ортогональное дополнение к U.

Св-ва: 1) $U^\perp$ — подпр-во U.
2) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ — т.к. $(u; y) = 0 \ \forall y \in U^\perp$ и $u \in U$.

Теорема пусть V — конечномерное евклидово пр-во.
Тогда для любого подпр-ва $U \subseteq V$ выполняется: $V = U \oplus U^\perp$

Док-во: 1) Докажем, что сумма прямая, т.е. $U \cap U^\perp = \varnothing$.
Пусть $y \in U \cap U^\perp$. Тогда $(y|y) = 0 \Rightarrow y = 0$ – т.к. скалярное произведение положительно определено.
2) Докажем, что сумма совпадает со всем пр-вом V.
Выберем $e_1 \dots e_m$ – ортонорм. базис U.
Тогда $\forall v \in V$ положим $\lambda_i = (v|e_i)$ $\forall i = 1 \dots m$.
и вычислим $w = v - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$.
Тогда $(w|e_j) = 0$, т.е. $w \in U^\perp$

$$\Rightarrow v = \underbrace{w}_{\in U^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i}_{\in U} \in U \oplus U^\perp. \text{ ЧТД.}$$

Следствие. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.
$\Rightarrow$ Если $U = V$, то $U^\perp = \{0\}$.

8) Сопряжённые операторы.

Пусть V – евклидово пр-во; A, B – лин. операторы на V.
Опр. B сопряжён к A, если $(A(x)|y) = (x|B(y))$ $\forall x, y \in V$.
Обозн: $B = A^*$; т.е. $(A(x)|y) = (x|A^*(y))$.
Предложение (1) $A^{**} = A$.
(2) $(AB)^* = B^*A^*$

Док-во: (1) $$(A(x)|y) \underset{\substack{\text{т.к. } A^*\text{-сопр.} \\ \text{(по опр.)}}}{=} (x|A^*(y)) \underset{\substack{\text{симметричност} \\ \text{скал. произв.}}}{=} (A^*(y)|x) \underset{\text{по опр. } A^{**}}{=}$$
$$= (y|A^{**}(x)) \underset{\text{симметричност}}{=} (A^{**}(x)|y) \quad \forall x, y \in V.$$
$$\Rightarrow ((A - A^{**})(x)|y) = 0. \quad \forall x, y \in V.$$
$\Rightarrow (A - A^{**})(x) \in V^\perp$. но $U = V \Rightarrow U^\perp = V^\perp = \{0\}$.
$$\Rightarrow (A - A^{**})(x) = 0 \Rightarrow A(x) = A^{**}(x).$$
(2) $$((AB)^*(x)|y) = (x|(AB)^{**}(y)) = (x|(AB)(y)) = (x|A(B(y))) =$$
$$= (x|A^{**}(B(y))) = (A^*(x)|B(y)) = (A^*(x)|B^{**}(y)) = (B^*A^*(x)|y)$$
$$\Rightarrow (AB)^* = B^*A^*. \text{ ЧТД.}$$

Теорема. Пусть A – матрица оператора A в ортонорм. базисе $e_1 \dots e_n$. Тогда A^* имеет в этом базисе матрицу A^T (в т.ч. это док-во того, что A^* существует).

Док-во: пусть $B = A^*$ и B — его матрица в базисе $\{e_1 \dots e_n\}$.
Тогда $A(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$;
$B(e_k) = \sum_i b_{ik} e_i$;
Но $(A(e_j) | e_k) = (e_j | A^*(e_k)) = (e_j | B(e_k))$. $(*)$.
лев. часть $(*) = (\sum_i a_{ij} e_i | e_k) = a_{kj}$
прав. часть $(*) = (e_j | \sum_i b_{ki} e_i) = b_{jk}$.
$\Rightarrow B = A^T$. чтд.

самосопр. л. сохраняется при замене базиса. Если дано $A^* = A$ и $\{e_i\}$ — ортонорм., то сохраняется

⑨ Самосопряжённый оператор

Опр. A — самосопряжённый оператор, если $A^* = A$, т.е. $(A(x)|y) = (x|A(y))$

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ — ортонорм. базис и A — матрица оператора A в этом базисе. Тогда A самосопряжён $\Leftrightarrow A^T = A$.

Лемма 1. Пусть A — линейный оператор на конечномерном пр-ве V над $\mathbb{R}$.
Тогда $\exists U \subseteq V: A(U) \subseteq U$ и $\dim U \leq 2$.
(т.е. для A существует инвариантное подпр-во размерности 1 или 2).

Док-во: 1) Если A имеет собств. вектор x, то $U = \langle x \rangle$ — одномерное инвар. подпр-во V (размерности 1).
2) пусть собств. векторов нет.
Рассмотрим минимальный многочлен $\mu_A(t) =: f(t)$ — то есть аннулирующий минимальной степени.
У него есть множитель степени 2 (иначе $f(t)$ линеен $\Rightarrow$ у A есть собств. вектор).
т.е. $f(t) = g(t) \cdot h(t)$, где $\deg g(t) = 2$.
Рассмотрим оператор $B = h(A)$.
$\deg h < \deg \mu_A(t)$, поэтому h не может быть аннулирующим для $A \Rightarrow B \neq 0$.
пусть $W = B(V)$ и $w \in W$ — ненулевой вектор из W ($w \neq 0$).
положим $U = \langle w; A(w) \rangle$.
Тогда $\dim U \leq 2$ (2, если они лин. незав. и 1, если они лин. зав.)
Достаточно доказать, что $A(U) \subseteq U$, т.е. что $A^2(w) \in U$.
пусть $g(t) = t^2 + \lambda t + \mu$.
Тогда $f(t) = g(t) \cdot h(t) = (t^2 + \lambda t + \mu) \cdot h(t)$.
но $f(A) = 0$, т.к. $f(t) = \mu_A(t)$ — аннулирующий многочлен для A.

$\Rightarrow g(A) \cdot h(A) = (A^2 + \lambda A + \mu E) \cdot B = 0.$

поскольку $w = B(v)$ и $B \neq 0$, то $\exists\, v \in V:\ w = B(v)$.

следовательно, $0 = (A^2 + \lambda A + \mu E) \underbrace{B(v)}_{= w} = A^2(w) + \lambda A(w) + \mu \cdot w.$

$\Rightarrow A^2(w) = -\lambda A(w) - \mu w \;\Rightarrow A^2(w) \in \langle w; A(w) \rangle = U.$

$\Rightarrow U = \langle w; A(w) \rangle$ – искомое подпр-во. чтд.

Лемма 2 пусть A – самосопр. оператор на евклидовом пр-ве E^n; V – инвариантное подпр-во для A.
Тогда $V^\perp$ – тоже инвар. подпр-во для A.

Док-во: пусть $x \in V^\perp$, т.е. $\forall\, v' \in V\ (v'|x) = 0.$

Тогда $\forall\, v \in V:\ (v|A(x)) = (\underbrace{A(v)}_{= v' \in V}|x) = (v'|x) = 0$ т.к. V – инвар. подпр-во.

т.е. $A(x) \in V^\perp$. чтд.

! Самосопряжённость не зависит от базиса!
Если A – самосопр. то он в любом базисе такой,
т.к. по опр. A самосопр., если $(x|A(y)) = (A(x)|y)$. – не упоминается базис.

Другое дело, если $\{e_i\}$ ортонормир., то $A = A^T$.
И если перейти в другой ортонормированный базис $\{e_j'\}$, т.е. $C^{-1} = C^T$,
то матрица остается симметричной.

Т.к.: $A^T = A$ – т.к. A самосопр.

$B = C^{-1}AC$. проверим, что $B^T = B$.

$B^T = (C^{-1}AC)^T = (C^TAC)^T = C^T A^T C^{TT} = C^T A^T C = C^T A C = C^{-1}AC = B.$ чтд.
(т.е. $B^{-1} = B^T$)

! И ортогональная матрица остается ортогон. в другом ортонорм. базисе. ($C^T = C^{-1}$).

Т.е надо проверить, что если умножить ортог. матрицу на ортог. матрицу, то будет ортог. матрица.

пусть $A^T = A^{-1}$; $B^T = B^{-1}$!

Тогда $(AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{= E} B = \underbrace{B^T B}_{= E} = E \Rightarrow (AB)^T = (AB)^{-1}$!

$\Rightarrow \tilde{D} = C^{-1} \underbrace{DC}_{\text{ортог.}} = \underbrace{C^T}_{\text{ортог.}} \underbrace{DC}_{\text{ортог.}} = \text{ортог.} \cdot \text{ортог.} = \text{ортог.}$

26.03.18. Лин. алгебра. Лекция 14.

Теорема. Пусть A - самосопр. оператор на евкл. пр-ве $V = E^n$. Тогда в V существует ортонормированный базис из собств. векторов оператора A.

Док-во: Индукция по $n = \dim V$.

1) $n = 1$ - очевидно, т.к. любой вектор собственный, остается только его отнормировать.

2) $n = 2$. Возьмем произв. ортонорм. базис $\{e_1; e_2\}$ и рассм. матрицу A в этом базисе.
A самосопр $\Rightarrow$ матрица симметрична.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ Считаем $\chi_A(\lambda)$

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a+b) + ac - b^2.$$

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + b^2 \geq 0.$$

$\Rightarrow$ есть хотя бы 1 корень $\Rightarrow$ у A есть собств. вектор v.

Тогда по теореме лекции 13 $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$ - сумма инвар. 1-мерных подпр-в, причём $\langle v \rangle^{\perp}$ - тоже инвар. подпр-во по лемме 2 лекции 13.

$\Rightarrow \exists\, e_1' \in \langle v \rangle; e_2' \in \langle v \rangle^{\perp}$ - базис V, причём $e_1' \perp e_2'$.
Если отнормировать e_1' и e_2', то получим $\|e_1'\| = \|e_2'\| = 1$.
$\Rightarrow \{e_1'; e_2'\}$ - ортонорм. базис из собств. векторов A

3) если $n > 2$, то по лемме 1 $\exists\, U \subseteq V$ - инвар. подпр-во V с $\dim U \leq 2$. Тогда $U^{\perp}$ - тоже инвар. подпр-во - по лемме 2 лекции 13.
По теореме из лекции 13: $V = U \oplus U^{\perp}$
$\rightarrow \dim U^{\perp} \leq n-1$. $\Rightarrow$ для $U^{\perp}$ можно применить предположение индукции. Оно нам даст нужный базис $U^{\perp}$.
А базис U осталось только отнормировать. чтд

Следствие Все собств. числа самосопр. оператора будут вещественными (т.к. есть базис из собств. векторов, и матрица в этом базисе вещественная $\Rightarrow$ собств. знач. λ - вещественное).

Опр. A - ортогональная матрица, если $A^T = A^{-1}$, т.е. $A \cdot A^T = E$.
То есть скал. произв. строки на себя $= 1$, а на другие - ноль, поэтому все векторы $\perp$ и по длине $= 1$.

Лемма 3 Матрица перехода от одного ортонорм. базиса к другому ортонорм. базису ортогональна.

Док-во: пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ и $\{e_1' \dots e_n'\}$ - два ортонорм. базиса в E^n, а C - матрица перехода $\{e_i\} \rightarrow \{e_i'\}$, т.е. $e_j' = \sum_i c_{ij} e_i$

Из ортонормированности обоих базисов:

$(e_i'|e_j') = \delta_{ij}$; $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$

Вычислим: $\delta_{ij} = (e_i'|e_j') = (\sum\limits_k c_{ki} e_k \mid \sum\limits_t c_{tj} e_t) = \sum\limits_{k,t} c_{ki} \cdot c_{tj} (e_k|e_t) =$

если $k \ne t$, то это 0. $= \sum\limits_{k=t} c_{ki} \cdot \underbrace{c_{tj}}_{c_{kj}} \cdot 1 = \sum\limits_k c_{ki} \cdot c_{kj}$ А это как раз скал. произв. строк $\begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2n} \\ c_{n1} c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix}$

Другими словами, $C^T C = E \Rightarrow C^T = C^{-1}$. чтд.

Приведение квадр. формы к главным осям.

Пусть $q = q(x)$ – квадр форма в евкл. пр-ве E^n.

Теорема. В E^n существует ортонорм. базис, в котором q имеет вид $q = \sum\limits_i \lambda_i x_i^2$ (λ_i – какие-то, (± 1 или 0) мы не можем обеспечить, т.к. базис ортонорм.)

Док-во: Рассмотрим произв. ортонорм. базис в E^n.

$F = (f_{ij})$ – матрица q в этом базисе.

Тогда $F^T = F$ (т.к. у квадр. формы полярная БФ симметрична по опр.)

$\Rightarrow \exists$ линейный оператор $A: E^n \to E^n$ с этой матрицей.

Базис ортонорм; матрица симм.

$\Rightarrow A$ самосопряжён.

По предыдущей теореме $\exists$ ортонорм. базис, состоящий из собств. векторов $\{e_1' \dots e_n'\}$, т.е. матрица F' оператора A в этом базисе диагональна: $F' = C^{-1} F C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, а C – матрица перехода – ортогональна по лемме 3.

$\Rightarrow C^T = C^{-1} \Rightarrow F' = C^T F C$.

Но так изменяется матрица кв. формы q при замене базиса. Значит, q имеет диагональную матрицу в ортонорм. базисе $\{e_1' \dots e_n'\}$. чтд.

Опр. Приведение кв. формы к главным осям – это переход к ортонорм. базису в евкл. пр-ве E^n, в котором q имеет канонический вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Ортогональные операторы

① Пусть A – лин. оператор в евкл. пр-ве E^n.

Опр. A – ортогональный оператор, если $(A(x)|A(y)) = (x|y)$ $\forall x, y \in E^n$

Лемма 4. A ортогонален $\Leftrightarrow$ A имеет ортогональную матрицу в любом ортонорм. базисе.

Док-во: $(x|y) = (A(x)|A(y)) = (x|A^*(A(y))) \Leftrightarrow y = A^*(A(y))$

$\Rightarrow A^* \cdot A = E$ – тождеств. оператор, то матрица тождественна.

$\Rightarrow A^* \cdot A = E$, где A – матрица A.

Но если базис ортонорм, то $A^* = A^T$ – см. лемму 13.

$\Rightarrow A^T \cdot A = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$. чтд.

Лемма 5. Пусть V – евкл. пр-во; A – ортогональный оператор на V. Если U – инв. подпр-во для A, т.е $A(U) \subseteq U$, то и $U^\perp$ – инвар. подпр-во для A, т.е. $A(U^\perp) \subseteq U^\perp$ (на самом деле $=$).

Док-во: 1) A – невырожд, т.к. $\exists A^{-1} = A^T$

2) Из 1) следует, что $A(U) = U$, т.к. $\dim \ker U = 0 \Rightarrow \dim A(U) = \dim U$.

3) Пусть $z \in U^\perp$; $x \in U$.

Тогда из (2) $\exists y \in U : A(y) = x$

$\Rightarrow (x \mid A(z)) = (A(y) \mid A(z)) = (y \mid z) = 0$. чтд.

② Канонический базис для ортогонального оператора.

Теорема. Пусть A – ортогональный оператор в E^n. Тогда $\exists$ ортонорм. базис, в котором матрица A имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & & \\ & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & & \\ & & & & & \pm 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Док-во: (1) По лемме 1 у оператора A есть инвар. подпр-во U размерности ≤ 2: $A(U) \subseteq U$; $\dim U \leq 2$. (на самом деле $A(U) = U$ – см. (2) в лемме 5)

По лемме 5 $A(U^\perp) \subseteq U^\perp$ – т.е $U^\perp$ – тоже инвар. подпр-во.

Следовательно, $E^n = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, где $A(U_j) = U_j$; $\dim U_j = 1$ или 2,

$U_j \perp (U_1 \oplus \dots \oplus U_{j-1} \oplus U_{j+1} \oplus \dots \oplus U_m)$ $\forall j$

Более того, можно считать, что U_j – минимальное инвар. подпр-во $\forall j$, т.е нет $W \subseteq U_j$; $W \neq \{0\}$ и $\{U_j\}$ такого что $A(W) \subseteq W$.

Т.е если мы говорим, что $\dim U_j = 2$, то у A на U_j нет собств. векторов, т.е. одномерного собств. подпр-ва.

(2) Пусть $U = U_j$; $\dim U_j = 1$.

Тогда $U = \langle x \rangle$; $A(x) = \lambda x$.

При этом $(x \mid x) = (A(x) \mid A(x)) = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda^2 (x \mid x) \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

$\Rightarrow$ с теми U_j, у которых размерность $= 1$, мы разобрались.

Они превратились в ± 1, как мы и хотели.