1 Непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывных функций

Определение 1.1. *Предел ф-и по Коши: Функция $f : X \to R$ непрерывна в точке $a \in X$ если $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такие что $\forall x \in X : |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$*

Определение 1.2. *Ф-я $f : X \to R$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*

Определение 1.3. *Ф-я $f : X \to R$ непрерывна на мн-ве X если она непр-на в любой т. множества X.*

Локальные свойства непрерывных функций: *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве и непрерывны в точке a. Тогда функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) * g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке a.(в случае частного необходимо потребовать чтобы $g(a) \neq 0$)*

Доказательство. Так как непрерывные в точке функции $f(x)$ и $g(x)$ имееют пределы равные $f(a)$ и $g(a)$ соотвественно, то в силу арифметических свойств пределов пределы функций $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)*g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ сущетсвуют и равны $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a)*g(a)$, $\frac{f(a)}{g(a)}$. Как раз эти величины равны частным значениям перечисленных функций в точке а. Из этого следует что по определению эти функции непрерывны в точке а. В случае частного надо понимать, что выражение определено в некоторой окрестночти точки а, где $g(a) \neq 0$ (Такая окрестность существует так как мы потребовали чтобы $g(a) \neq 0$). ☐

Теорема Коши о промежуточном значении *Пусть функция $f : [a, b] \to R$ непрерывна на отрезке [a, b]. Пусть, для определенности, $f(a) < f(b)$. Тогда $\forall x \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a, b]$, такое, что f(c)=x.*

Доказательство. Построим по индукции систему отрезков $[a_k, b_k]$ таких, что $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, и $f(a_k) \leq x \leq f(b_k)$. Положим $[a_0, b_0] = [a, b]$. Далее, разобьем отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ пополам, $c_{k-1} = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$, и выберем тот из отрезков $[a_{k-1}, c_{k-1}]$ и $[c_{k-1}, b_{k-1}]$, образ которого содержит x. Если содержат оба то выбираем любой. Полученная система отрезков удовлетворяет теореме о вложенных отрезках, согласно которой сущесвует единственное c, $\{c\} = \bigcap_{k=0}^{\infty}[a_k, b_k]$. Кроме того, $f(a_k) \leq x$ и $\lim_{k\to\infty} a_k = c$, поэтому $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(c)$ откуда $f(c) \leq x$. Рассмотрение $f(b_k)$ дает $f(c) \geq x$, откуда $f(c) = x$ ☐

Теорема 1.1. Критерий непрерывности монотонной функции. *Пусть $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда для непрерывности её на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы для любого $l \in [f(a), f(b)]$ нашлась точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) - l$*

Доказательство. Рассмотрим только случай неубывающей фуекции $f(x)$ на $[a, b]$.

Необходимость. Возьмём любое число $l \in [f(a), f(b)]$. Рассмотрим множество $X = \{x\} \subset [a, b]$, для которых $f(x) \geq l$, и пусть $x_0 = infX$. Тогда, поскольку $f(x)$ неубывающая ф-я, имеем:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) = l_1 \geq l$$

При $x < x_0$ (если $x_0 \neq a$) $f(x) < l$. Отсюда $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l_2 \leq l$, то есть $l_2 \leq l \leq l_1$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ непрерывна в т x_0, то есть $l_2 = l_1 = f(x_0)$. Следовательно, $l = l_2 = l_1 = f(x_0)$.

Если же $x_0 = a$, то $f(a) \leq l \leq l_1$, но из непрерывности $f(x)$ в a слева следует, что $f(a) = l_1$, а значит $l = f(a) = l_1$

Достаточность. Будем рассуждать от противного. Пусть $f(x)$ имеет разрыв в x_0 и $f(x)$ не убывает на $[a, b]$. Тогда для значений $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ выполняются неравенства $l_2 < l_1$ и $l_2 \leq f(x_0) \leq l_1$. Возьмём $l \in (l_2, l_1)$ и $l \neq f(x_0)$. Имеем:

$$l > f(x) \text{ при } x < x_0$$

$$l < f(x) \text{ при } x > x_0$$

$$l \neq f(x) \text{ при } x = x_0$$

то есть функция не принимает значение l на $[a, b]$. Таким образом мы пришли к противоречию. ☐

2 Функции многих переменных, полныи дифференциал и его геометрическои смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Определение 2.1. *Пусть $X \subset R^n$ тогда отображение $f : X \to R$ называется функцией многих переменных. Ниже X будет считаться открытым множеством. $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$. Будем говорить, что $f(\bar{x}) = \bar{\bar{o}}(\bar{x})$, если $f(\bar{x})$ определена в окрестности 0 и $\frac{f(\bar{x})}{||x||} \to 0$ при $x \to 0$.*

Определение 2.2. *функция $f : X \to R$ называется дифференцируемой в точке $\bar{x}_0 \in X$, если для некоторой линейной функции $L_f(\bar{x})$ для любого $\bar{x} \in X$ справедливо представление*

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = L_f(\bar{x} - \bar{x}_0) + \bar{\bar{o}}(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

При этом $L_f(\bar{x})$ называется полным дифференциалом функции $f(\bar{x})$ в точке x_0

Геометрический смысл $f(\bar{x}_0) + L_f(\bar{x} - \bar{x}_0)$ *является уравнением касательной гиперплоскости.*

Определение 2.3. *Частной производной $\frac{\partial f}{\partial x^i}|_{\bar{x}}$ называется предел*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \Delta x * e_i) - f(x)}{\Delta x}$$

если он сущетсвует.

Определение 2.4. **Градиент** - *вектор составенный из частных производных фнукции f называется вектором градиента*

Теорема 2.1. **Теорема Лагранжа** *Пусть функция f(x) дифференцируема в открытом промежутке (a,b) и сохраняет непрерывность на концах этого промежутка. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Достаточное условие диффернцируемости *Пусть $f : U(x) \to R$ функция, определенная в окрестности $U(x) \in R^m$ точки $x = (x^1, ..., x^m)$. Если функция f имеет частные производные в окрестности и они непрервны, то тогда функция f дифференцируема в точке x*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $U(x)$ является шаром $B(x; r)$. Тогда вместе с точками $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $x + h = (x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m)$ области $U(x)$ должны принадлежать также точки $(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m), \ldots, (x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + h^m)$ и соединяющие их отрезки. Воспользуемся этим, применяя в следующей выкладке теорему Лагранжа для функций одной переменной:

$$f(x+h) - f(x) = f(x^1+h^1, \ldots, x^m+h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = f(x^1+h^1, \ldots, x^m+h^m) - f(x^1, x^2+h^2, \ldots, x^m+h^m) +$$
$$+ f(x^1, x^2+h^2, \ldots, x^m+h^m) - f(x^1, x^2, x^3+h^3, \ldots, x^m+h^m) + \cdots + f(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m+h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) =$$
$$= \partial_1 f(x^1 + \theta^1 h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m)h^1 + \partial_2 f(x^1, x^2 + \theta^2 h^2, x^3 + h^3, \ldots, x^m + h^m)h^2 + \ldots$$
$$\cdots + \partial_m f(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + \theta^m h^m)h^m$$

Пока мы воспользовались лишь наличием у функции f в области $U(x)$ частных производных по каждой из переменных. Теперь воспользуемся их непрерывностью в точке x. Продолжая предыдущую выкладку, получим:

$$f(x+h) - f(x) = \partial_1 f(x^1, \ldots, x^m)h^1 + \alpha^1 h^1 + \partial_2 f(x^1, \ldots, x^m)h^2 + \alpha^2 h^2 + \cdots + \partial_m f(x^1, \ldots, x^m)h^m + \alpha^m h^m,$$

где величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в силу непрерывности частных производных в точке x стремится к нулю при $h \to 0$.

Но это означает, что

$$f(x + h) - f(x) = L(x)h + o(h) \text{ при } h \to 0,$$

где $L(x)h = \partial_1 f(x^1, \ldots, x^m)h^1 + \cdots + \partial_m f(x^1, \ldots, x^m)h^m$. □

3 Определенныи интеграл. Интегрируемость непрерывнои функции. Первообразная непрерывнои функци.

Определение 3.1. *Конечное множетсво T точек $x_0, x_1, ..., x_n$ называется неразмеченным разбиением отрезка [a,b] если $n \geq 1$ и $a = x_0 < x_1 < ..... < x_n = b$*

Определение 3.2. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. *Величина* $\Delta x_T = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ *называется* **диаметром разбиения**.

Определение 3.3. *На каждом отрезке Δx_k выберем точку $\xi_k, k = 1........n$ т.е. $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Совокупность $\{x_0, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n\}$ называется размеченным разбиением отрезка [a,b].*

Определение 3.4. *Сумма*

$$\sigma(V) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется интерргральной суммой функции $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению V

Определение 3.5. *Число I называется* **определенным интегралом (Римана)** *от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для всякого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a, b]$ с условием $\Delta_V < \delta$ справедливо неравенство:*

$$|I - \sigma(V)| < \epsilon \text{ то есть } |I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k| < \epsilon$$

Для интеграла I используют обозначение

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Определение 3.6. Верхней суммой Дарбу *функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$,назыается сумма*

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

где $M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$, Δ_k - отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, а Δx_k - его длина.
Нижней суммой Дарбу *назыется сумма*

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,$$

где $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$

Определение 3.7. *Число $I* = \inf\limits_{T \in A'} S(T)$ -* **верхний интеграл**, *а число $I_* = \sup\limits_{T \in A'} s(T)$ -* **нижний интеграл** *функции $f(x)$ на $[a, b]$, где A' - множество всех разбиений $[a, b]$.*

Теорема 3.1. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке. *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (190-193)*

$$\lim_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0$$

Доказательство. Используемые леммы:

Лемма 3.1. *Для любого размеченного разбиеня V имеем: $s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V))$*

Лемма 3.2. *Пусть T_0 - любое фиксированное разбиение и $\alpha(T_0)$ - множество разметок этого разбиения. Тогда $s(T_0) = \inf\limits_{V\in\alpha(T_0)} \sigma(V)$, $S(T_0) = \sup\limits_{V\in\alpha(T_0)} \sigma(V)$*

Лемма 3.3. *Для любых неразмеченных разбиений T_1 и T_2 имеем: $s(T_1) \leq S(T_2)$*

Лемма 3.4. *Для ограниченной функции верхний и нижний интегралы $I*$ и I_* существуют, причем для любого разбиения T справедливы неравенства: $s(T) \leq I_* \leq I* \leq S(T)$*

Лемма 3.5. *Диаметры размеченного разбиения V и отвечающего ему неразмеченного разбиения $T = T(V)$ совпадают, поэтому если $V \in b'_\sigma$, то $T(V) \in b_\sigma$. Здесь b'_σ - окончание базы размеченных разбиенй и b_σ - окончание базы неразмеченных разбиений, отвечающих числу σ*

Лемма 3.6. *Для любого разбиения T имеем: $I * - I_* \leq S(T) - s(T) = \Omega(T)$*

□

Определение 3.8. Омега сумма*:* $\Omega(T) = S(T) - s(T)$

Теорема 3.2. *Всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем*

Доказательство. В силу теоремы Кантора функция $f(x)$, непрерная на отрезке $[a, b]$, является равномерно непрерывной на нем. Поэтому для любого числа $\epsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x, y \in [a, b]$ с условием $|x - y| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

Возьмем любое разбиение T отрезка $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. Тогда будем иметь

$$\omega_k = \sup_{x,y\in\Delta_k} (f(x) - f(y)) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

Отсюда полчим

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Следователь, для всякого $\epsilon > 0$ мы нашли чисо $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T с диаметром $\Delta_T < \delta$ выполняется неравенство $\Omega(T) < \epsilon$, т.е. $\lim\limits_{\Delta_T\to 0} \Omega(T) = 0$. Отсюда в силу криетрия интегрируемости следует, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Теорема доказана □

Определение 3.9. *Функция $F(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется первообразной функции $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a, b)$*

Теорема 3.3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$. тогда $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$*

Доказательство. Фиксируем произвольное $x_0 \in (a, b)$, тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) + f(x_0) - f(x_0))dx = f(x_0)\Delta x + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))dx$$

Выберем произвольное $\epsilon > 0$. В силу непрерывности f в точке x_0 сущесвует δ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Если $\Delta x < \delta$, то $|x - x_0| < \delta$ для любого x из отрезка интегрирования в рассматриваемом интеграе. Пользуясь этим,

$$|\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)| = \frac{1}{\Delta x}|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))dx| \leq \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x) - f(x_0)|dx \leq \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \epsilon dx = \epsilon$$

Итак, если $\Delta x < \delta$, то $|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)| \leq \epsilon$, и такое δ существует для любого ϵ. Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

то есть $F'(x_0) = f(x_0)$ □

4 Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функции.

Пусть заданы точка $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in \mathbb{R}^n$, некоторая её ϵ-окрестность и множество точек, принадлежащих этой ϵ-окрестности и удовлетворяющих уравнению $f(\bar{x}, y) = 0$.

Определение 4.1. *Функция $\varphi(\bar{x})$, зависящая от $(n-1)$-й переменной $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$, называется* **неявной функцией***, соответствующей уравнению $f(\bar{x}, y) = 0$, если для любой точки $\bar{x}$ из этой δ-окрестности имеет место равенство*

$$f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$$

Определение 4.2. *Функция $f(\bar{x})$ называется* **гладкой** *в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если для любой точки $\bar{x} \in \Omega$ она является дифференцируемой и её частные производные непрерывны.*

Докажем теперь теорему о неявной функции

Теорема 4.1. о неявной функции *Пусть:*
1) функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ϵ-окрестности Ω точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
2) $f(a, b) = 0$
3) для любой точки $(x, y) \in \Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями
4) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} > 0$

Тогда существует единственная функция $y = \varphi(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки a, такая что:
1) $\varphi(a) = b$
2) для любой точки x, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(x, \varphi(x)) = 0$. Более того, оказывается, что эта фуекция $\varphi(x)$ является гладкой, причем

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x, y)|_{y=\varphi(x)}}$$

Доказательство. Так как $f'_y(x, y)$ - непрерывная на Ω и $f'_y(a, b) > 0$, то существует замкнутый квадрат $K \subset \Omega$ с центром в точке (a, b) и со сторонами, параллельными осям координат , длины $2h$, внутри которого минимальное значение $f'_y(x, y)$ равно $m > 0$. В силу того, что $f'_y(x, y) > 0$, функция $f(a, y)$ возрастает. Далее, так как $f(a, b) = 0$, то $f(a, b+h) > 0$ и $f(a, b-h) < 0$. В силу непрерывности функции $f(x, y)$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого значения $x \in [a-\delta, a+\delta]$ имеем $f(x, b+h) > 0$ и $f(x, b-h) < 0$

Отсюда следует, что на отрезке, соединяющем точки $A_1 = A_1(x) = (x, b-h)$ и $A_2 = A_2(x) = (x, b+h)$, монотонная фнкция $g(y) = f(x, y)$ обращается в нуль только в одной точке y_x

Каждой точке $x \in [a-\delta, a+\delta]$ поставим в соответствие точку y_x. Оно определяет функцию $y = \varphi(x) = y_x$, для которой

$$f(x, \varphi(x)) = f(x, y_x) = 0,$$

при этом из равенства $f(a, b) = 0$ имеем $\varphi(a) = y_a = b$.

Функция $\varphi(x)$ и является искомой. Надо только доказать, что $y = \varphi(x)$ дифференцируема внури интервала $(a-\delta, a+\delta)$, причем

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}.$$

Докажем сначала непрерывность $\varphi(x)$. Пусть точки x и x_0 принадлежат интервалу $(a-\delta, a+\delta)$. Покажем, что $\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x) - \varphi(x_0) \to 0$ при $\Delta x = x - x_0 \to 0$. Положим

$$y = \varphi(x),\ y_0 = \varphi(x_0),\ \Delta y = \Delta\varphi(x)$$

Имеем $f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$. Следовательно, для функции $g(t)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$ справедливы равенства $g(0)=g(1)=0$. Функция $g(t)$ при любом $t\in[0,1]$ имеем производную

$$g'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y.$$

По теореме Ролля существует число $\theta\in(0,1)$ такое, что $g'(\theta)=0$. Отсюда получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(\bar\xi)}{f'_y(\bar\xi)},$$

где $\bar\xi=(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$. Слеовательно,

$$|\frac{\Delta y}{\Delta x}|\le\frac{M}{m},\ M=\max_K|f'_x(x,y)|,\ m=\min_K|f'_y(x,y)|>0$$

т.е. величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - ограничена. Поэтому имеем, что $\Delta y=\Delta x*\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т.е. $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Кроме того, так как при $\Delta x\to 0$ имеем, что $\Delta y\to 0$, то $\bar\xi\to(x_0,y_0)$. Далее, в силу непрерывности частных производных f'_x и $f'_y>0$ получим

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(x,y)|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)|_{y=\varphi(x)}}$$

□

Замечания

1. Случай $f'_y(x,y)<0$ сводится к рассматренному заменой функции f на $g=-f$

2. График функции $y=\varphi(x)$ является частью линии уровня $z=0$ для поверхности $z=f(x,y)$

Следствие (общая теорема о неявной функции). *Пусть:*

1) функция $f(\bar x,y)$ непрерывна в некоторой ϵ-окрестности Ω точки $(\bar a,b)=(a_1,\dots,a_{n-1},b)\in\mathbb{R}^n$

2) $f(\bar a,b)=0$

3) для любой точки $(\bar x,y)\in\Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями

4) $\frac{\partial f(\bar a,b)}{\partial y}>0$

Тогда существует единственная функция $y=\varphi(\bar x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $\bar a$, такая что:

1) $\varphi(\bar a)=b$

2) для любой точки $\bar x$, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(\bar x,\varphi(\bar x))=0$.

3) функция $\varphi(\bar x)$ является гладкой, причем

$$\varphi'(\bar x)=-\frac{f'_{x_1}(\bar x,y)|_{y=\varphi(\bar x)}}{f'_y(\bar x,y)|_{y=\varphi(\bar x)}}$$

5 Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные при- знаки сходимости.

Определение 5.1. *Числовым рядом называется формальная сумма* $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i, x_i \in R$

Определение 5.2. *Частичной суммой ряда называется* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, x_i \in R$

Определение 5.3. *Ряд* S *называется сходящимся, если* $\exists\ S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Определение 5.4. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется последовательностью Коши или фундаментальной, если* $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon), \forall\ n, m > N(\varepsilon) : |\ x_n - x_m\ | < \varepsilon$

Теорема 5.1. Критерий сходимости Коши для последовательностей *(б/д) Для того, чтобы последовательность* $\{x_n\}$ *сходилась, необходимо и достаточно чтобы она была фундаментальной.*

Теорема 5.2. Вейерштрасса *(б/д)*
Пусть $\{x_n\}$ *неубывающая ограниченная сверху последоватльность, тогда* $\{x_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} = sup x_n$

Теорема 5.3. Критерий сходимости Коши
Ряд сходится $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists N, \forall m, n > N\ |\sum_{i=m}^{n} x_i| \le \varepsilon$

Доказательство. Заметим, что $\sum_{i=m}^{n} x_i = S_n - S_{m-1}$. После этого утверждение превращается в критерий Коши сходимости последовательности S_n. □

Теорема 5.4. Необходимое условие *Ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *сходится к нулю, тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Доказательство. Согласно свойствам предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$ □

Теорема 5.5. *Знакоположительный ряд сходится* $\Leftrightarrow$ *последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. Если ряд сходится, то S_n ограничена как сходящаяся последовательность. Обратно, $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \ge 0$, поэтому последовательность S_n не убывает. Тогда ее сходимость следует из ограниченности по теореме Вейерштрасса. □

Теорема 5.6. Оценочный признак. *Пусть есть два ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$*, причем* $\forall k y_k \ge x_k \ge 0$*. Тогда, если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится.*

Доказательство. Из условия $y_k \ge x_k$ следует, что $S_k^y \ge S_k^x$ (по индукции). С другой стороны, из сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, последовательность S_k^y ограничена, поэтому и S_k^x ограничена, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. □

Теорема 5.7. Признак Даламбера. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*, пусть он знакоположительный, и* $\forall\ n\ x_n \ne 0$*. Пусть существует предел* $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$*. Тогда, если* $r > 1$*, то ряд расходится, а если* $r < 1$*, то ряд сходится. Пример* $q = 1$*:* $1/n, 1/n^2$

Доказательство. Если $r > 1$, то для достаточно больших n, $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, т.е. $x_{n+1} \ge x_n$, поэтому x_n не стремится к 0, откуда ряд расходится.

Пусть $r < 1$, тогда $\exists k, q < 1$ такие, что для $n > k$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q$, откуда $x_{n+k} \le q^n x_k$. Поэтому, $S_{n+k} \le S_{k-1} + \sum\limits_{r=0}^{n} q^r x_k = S_{k-1} + x_k \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \le S_{k-1} + \frac{x_k}{1-q}$. Из ограниченности следует сходимость ряда. □

Теорема 5.8. Признак Дирихле *Пусть последовательность* $\{\alpha_n\}$ *не возрастает и стремится к 0 при* $n \to \infty$*. Пусть дан ряд* $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_n$*, частные суммы* Sn *которого ограничены. Тогда ряд* $S = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ *сходится*

Доказательство. Пусть $|S_n| < M \forall n$. Запишем признак Коши и преобразуем его (это называется преобразованием Абеля):

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k a_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k (S_k - S_{k-1})\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k S_k - \sum_{k=n}^{m} \alpha_k S_{k-1}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k S_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} \alpha_{k+1} S_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m-1} S_k(\alpha_k - \alpha_{k+1}) - \alpha_n S_{n-1} + \alpha_m S_m\right| \le \sum_{k=n}^{m-1} |S_k||\alpha_k - \alpha_{k+1}| + |\alpha_n||S_{n-1}| + |\alpha_m||S_m| \le$$

$$\le M \left(\sum_{k=n}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + |\alpha_n| + |\alpha_m|\right) = M(\alpha_n - \alpha_m + |\alpha_n| + |\alpha_m|) \le 4M\alpha_m \to 0,$$

при $n \to 0$. □

Теорема 5.9. Признак Абеля. *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, а последовательность α_n монотонна и имеет предел. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ сходится.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$, тогда $\alpha_n = \beta_n + A$, где β_n монотонна и стремится к 0. Пусть, для определенности, она убывает (иначе рассматривается $-\beta_n$). Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A x_k$. Первый ряд сходится по признаку Дирихле (частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ ограничены, так как он сходится), а второй есть результат умножения сходящегося ряда на константу. □

6 Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Определение 6.1. *Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *сходится абсолютно, если сходится ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$

Определение 6.2. *Ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *сх. условно, если сх. ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$*, но* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$ *расходится. (1,-1,1/2,-1/2 ...)*

Теорема 6.1. *Если ряд* $\sum a_n$ *абсолютно сходится, то он является сходящимся.*

Доказательство. По критерию Коши из сходимости ряда $\sum |a_n|$ следует, что при любом $\epsilon > 0$ найдется номер $n_0(\epsilon)$ такой, что при всех $p \geq 1$ и $n > n(\epsilon)$ имеем

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \epsilon,$$

откуда

$$\left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_m \right| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \epsilon.$$

Но это и означает выполнение критерия Коши. □

Определение 6.3. *Пусть* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *взаимно однозначное отображение. Тогда ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$*, где* $b_i = a_{\sigma(i)}$ *называется перестановкой ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$*.*

Теорема 6.2. *Любая перестановка* $\sum b_n$ *абсолютно сходящегося ряда* $\sum a_n = A$ *абсолютно сходится к той же сумме* A*.*

Доказательство. Положим

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, B_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, A' = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, A'_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Зафиксируем некоторое $\epsilon > 0$. Пусть n_1 настолько велико, что $A' - A'_{n_1} < \epsilon$. Тогда при любом $n > n_1$ для остатка $r_n = A - A_n$ ряда $\sum a_n$ имеем оценку

$$|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| = A' - A'_{n_1} < \epsilon.$$

Пусть теперь n_2 таково, что среди чисел $\sigma(1), ..., \sigma(n_2)$ содержатся все целые числа отрезка $[1, n_1]$. Положим $m = \max(\sigma(1), ..., \sigma(n_2))$. Тогда при всех $n > n_2$ имеем

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k + {\sum_{k=n_1+1}^{m}}' a_k.$$

Штрих в последней сумме означает, что некоторые слагаемые в ней опущены. Для этой суммы, очевидно, имеют место оценки

$$|B_n - A_{n_1}| = \left| {\sum_{k=n_1+1}^{m}}' a_k \right| \leq {\sum_{k=n_1+1}^{m}}' |a_k| = A'_m - A'_{n_1} \leq A' - A'_{n_1} < \epsilon.$$

Отсюда следует, что при всех $n > n_2$

$$|A - B_n| \leq |A - A_{n_1}| + |B_n - A_{n_1}| \leq (A' - A'_{n_1}) + (A' - A'_{n_1}) < 2\epsilon.$$

В силу произвольного выбора $\epsilon > 0$ это означает, что $B_n \to A$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n$ сходится и $\sum b_n = \sum a_n$. Отсюда, в частности, следует, что и ряд $\sum |b_n|$ сходится к сумме A', т.е. ряд $\sum b_n$ сходится абсолютно. □

Определение 6.4. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$, *где* $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$, *называется формальным произведением (или просто произведением) двух рядов* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$.

Теорема 6.3. *Если оба ряда* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *абсолютно сходятся, причем* $\sum a_n = A$, *а* $\sum b_n = B$, *то при любой перестановке попарных произведений их членов ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ *абсолютно сходится к сумме* AB.

Доказательство. Зафиксируем какую-либо перестановку попарных произведений $k \leftrightarrow (m(k), n(k))$. Докажем сначала, что ряд $\sum h_k$ сходится абсолютно. Пусть H'_k - последовательность частичных сумм ряда $\sum |h_k|$ и пусть r - какой-либо номер. Тогда имеем

$$H'_r = \sum_{k=1}^{r} |a_{m(k)} b_{m(k)}|.$$

Положим $m_0 = \max\limits_{k \le r} m(k), n_0 = \max\limits_{k \le r} n(k)$. В этом случае, очевидно,

$$H'_r = \sum_{k=1}^{r} |a_{m(k)}||b_{n(k)} \le \sum_{k=1}^{m_0} |a_k| \sum_{k=1}^{n_0} |b_k| \le A'B',$$

где $A' = \sum |a_n|, B' = |b_n|$.

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum |h_k|$ ограничены в совокупности, а это значит, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ абсолютно сходится к некоторой своей сумме H. Но тогда при любой перестановке его членов сходимость не нарушается и сумма не изменяется. Переставим эти члены так, чтобы при любом $k = n^2$ частичная сумма H_k имела вид $H_k = (a_1 + ... + a_n)(b_1 + ... + b_n) = A_n B_n$. Тогда при $n \to \infty$ будем иметь $H_{n\hat{}2} \to AB$. В силу сходимости ряда $\sum h_k$ последовательность H_k его частичных сумм сходится к H, и так как $H_{n\hat{}2}$ - подпоследовательность H_k, то $H = AB$. $\square$

7 Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

Определение 7.1. *Функциональным рядом называется ряд вида* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$. *Его сумма S(x) определяется поточечно как сумма соответствующего числового ряда. Соответственно, он определена там, где ряд сходится.*

Определение 7.2. *Ряд называется равномерно сходящимся, если* $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) : \forall\ x \in X\ \forall\ n > N$ $\mid S_n(x) - S(x) \mid < \varepsilon$

Определение 7.3. *Если функция* $A(x) = A_n(x) + r_n(x)$ *и* r_n *равномерно сходится к 0 на* M *при* $n \to \infty$, *то* $A_n(x)$ *равномерно сходится к* $A(x)$ *на* M *при* $n \to \infty$

Теорема 7.1. *Пусть каждая из* $a_n(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in R$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ *сходятся равномерно к A(x) на интервале* $I = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, *где* $\delta > 0$, *тогда* $A(x)$ *непрерывна в* x_0

Доказательство. По определению равномерной сходимости имеем

$$A(x) = A_n(x) + r_n(x), r_n(x) \rightrightarrows 0 (n \to \infty),$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x), r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x).$$

Используя обозначение $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, где $f(x)$ - любая функция, получим

$$\Delta A(x) = \Delta A_n(x) + \Delta r_n(x) = \Delta A_n(x) + r_n(x) - r_n(x_0).$$

Отсюда

$$|\Delta A(x)| \leq |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|.$$

Поскольку $r_n(x) \rightrightarrows 0 (n \to \infty)$, при любом $\epsilon_1 > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\epsilon_1)$ такой, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in I$ имеем

$$|r_n(x)| < \epsilon_1, |r_n(x_0)| < \epsilon_1.$$

Заметим теперь, что функция $A_n(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, поэтому для любого $\epsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $|x - x_0| < \delta_1$ выполнено неравенство

$$|\Delta A_n(x)| = |A_n(x) - A_n(x_0)| < \epsilon_1.$$

Теперь при заданном $\epsilon > 0$ можно взять $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{3}$, и тогда при всех x с условием $|x - x_0| < \delta(\epsilon) = \delta_1(\epsilon_1)$ и при $n = n_0(\epsilon_1) + 1 = n_0(\epsilon)$ получим

$$|\Delta A(x)| \leq |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)| < \epsilon_1 + \epsilon_1 + \epsilon_1 = \epsilon.$$

Но это и означает, что функция $A(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. □

Определение 7.4. *Сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(x), p_i > 0$ *называется мажорантой функционального ряда* $\sum i = 1^{\infty} f_i(x)$ *на множестве M, если* $\forall\ i \in N$ *и* $x \in M$ $|a_i(x)| < p_i$

Теорема 7.2. Признак Вейерштрасса *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ *имеет мажоранту* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i(x)$ *на множестве M, тогда он равномерно сходится на этом множестве.*

Доказательство. Достаточно установить, что остаток ряда $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на M. Но заметим, что при любом фиксированном $x \in M$ числовой ряд $\sum a_n(x)$ сходится, поскольку имеет мажоранту $\sum p_n = P$. Кроме того, при каждом фиксированном x имеем

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \rho_n,$$

где ρ_n - остаток числового ряда $\sum_n$ и $\rho \to 0$ при $n \to \infty$. Но по теореме о том, что для того, чтобы $b_n(x) \rightrightarrows_M 0$ при $n \to \infty$,необходимо и достаточно, чтобы существовала числовая последовательность β_n с условием $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $|b_n(x)| \leq \beta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in M$, это означает, что $r_n(x)$ имеет бесконечно малую мажоранту ρ_n. Следовательно, $r_n(x) \rightrightarrows_M 0$, т.е. ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится. □

Обратим внимание на то, что теорема о непрерывности сумм равномерно сходящегося ряда означает, что

$$A(x_0) = \lim_{x \to x_0} A(x) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} A_n(x)) = \lim_{x \to x_0} \sum a_n(x) = \sum a_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} A_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} A_n(x)).$$

Напомним также некоторые определения и теоремы:

Определение 7.5. *Множество A точек на числовой прямой имеет лебегову меру нуль, если для всякого числа $\epsilon > 0$ существует конечное или счетное покрытие A интервалами с общей длиной, не превосходящей ϵ. Другими словами, для всякого $\epsilon > 0$ найдутся интервалы $I_1, ..., I_n, ...$ с длинами их соответственно $\delta_1, ..., \delta_n, ...$ таких, что $A \subset \cup_{n=1} \hat{} I_n$ и для любого натурального n имеет место неравенство $s_n = \delta_1 + \cdots + \delta_n < \epsilon$.*

Это обозначают так: $\mu(A) = 0$.

Теорема 7.3. Критерий Лебега интегрируемости по Риману *Для того чтобы ограниченная на отвезке функция была интегрируема по Риману на нем необходимо и достаточно чтобы множество ее точек разрыва имела лебегову меру нуль.*

Теорема 7.4. *Сумма $A(x)$ равномерно сходится на $I = [\alpha, \beta]$ ряда $\sum a_n(x)$, составленного из функций, интегрируемых на $[\alpha, \beta]$ по Риману, тоже является интегрируемой по Риману функцией, причем*

$$B = \int\limits_{\alpha}^{\beta} A(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Доказательство. Согласно критерию Лебега интегрируемости функции функции по Риману мера множества T_n точек разрыва каждой из функций $a_n(x)$ равна нулю. Но тогда объединение T всех таких множеств, $T = \cup T_n$, также имеют лебегову меру нуль. Все остальные точки промежутка I будут общими точками непрерывности одновременно для всех функций $a_n(x)$. Поэтому в силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ сумма $A(x)$ этого ряда будет ограничена и в этих точках непрерывна. Другими словами, тогда лебегова мера точек разрыв ограниченной функции $A(x)$ тоже равна нулю и согласно критерию Лебега $A(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha, \beta]$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} A_n(x)dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta} r_n(x)dx.$$

Но так как $r_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_I |r_n(x)| = \rho_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда получим

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} A_n(x)dx\right| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |r_n(x)|dx \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho_n dx = \rho_n(\beta - \alpha) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $(B - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k) \to 0$ при $n \to \infty$ и $B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. □

Полученный результат позволяет весьма просто доказать первое правило почленного дифференцирования ряда.

Теорема 7.5. *Ряд $\sum a_n(x)$ можно почленно дифференцировать, если:*

1) он сходится в некоторой точке x_0 отрезка $I = [\alpha, \beta]$;

2) производные всех его слагаемых $a_n(x)$ существуют и непрерывны на I;

3) ряд $\sum a'_n(x)$, составленный из этих производных, равномерно сходится на отрезке I.

Точнее, имеем:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) = A_n(x) \rightrightarrows A(x)$;

2) $A'(x) = \sum a'_n(x)$.

Доказательство. Условия данной теоремы позволяют применить теорему 7.4 для почленного интегрирования ряда $\sum a'_n(x)$ на отрезке с концами x_0 и t при любом $t \in [\alpha, \beta]$. При этом с помощью формулы Ньютона-Лейбница получим

$$A(t) - A(x_0) = B(t) = \int\limits_{x_0}^{t} A'(x)dx = \int\limits_{x_0}^{t} \sum a'_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{t} a'_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t) - a_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t).$$

Это равенство означает, что $A'(t) = B'(t) = \sum a'_n(t)$. Осталось показать, что ряд $\sum a_n(t)$ сходится равномерно на I. Имеем

$$\beta_n(t) = \int\limits_{x_0}^{t} r'_n(x)dx = \int\limits_{x_0}^{t} \sum_{k=n+1}^{\infty} a'_n(x)dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(t) - a_k(x_0)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n(t), \beta_n(t) = B(t) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t).$$

Но $r_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, поэтому существует последовательность p_n с условием $p_n \to 0$ и $|r'_n(x)| \leq p_n$ при всех достаточно больших $n > n_0$ и всех $x \in I$. Следовательно,

$$|\beta_n(t)| \leq \int\limits_{x_0}^{t} |r'_n(x)|dx \leq \int\limits_{x_0}^{t} p_n dx = p_n(t - x_0) \leq p_n(\alpha - \beta).$$

Это значит, что $\beta_n(x) \rightrightarrows$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n(t)$ сходится равномерно на I, а вместе с ним и ряд $\sum a_n(t)$ тоже равномерно сходится, так как

$$A(t) = \sum a_n(t) = \sum b_n(t) + \sum a_n(x_0),$$

где $\sum a(x_0)$ - сходящийся числовой ряд. $\square$

8 Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.

Теорема 8.1. Признак коши в предельной форме *Пусть* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} p_n^{1/n} = q$*, где* $p_n > 0\ \forall\ n$*. Тогда при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_i$ *сходится, а при* $q > 1$ *- расходится*

Определение 8.1. *Число* R *называется радиусом сходимости степенного ряда* $\sum a_n(x-x_0)^n$*, если этот ряд сходится при всех* x *с условием* $|x-x_0| < R$ *и расходится при* $|x-x_0| > R$.

Корректность определения обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 8.2. Теорема Коши-Адамара. *Пусть задан степенной ряд* $\sum f_n(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$*. Рассмотрим числовую последовательность* $b_n = |a_n|^{1/n}$*. Тогда:*

1) *если* b_n *является неограниченной последовательностью, то этот ряд расходится при всех* $x \neq x_0$*;*
2) *если* b_n *ограничена и* $l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, то* $R = 1/l$*;*
3) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*, то данный ряд сходится при всех* $x \in R$.

Напомним, что для всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы.

Доказательство. Для краткости записи будем считать, что число x_0 равно нулю. Для общего члена числового ряда имеем равенство

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| = b_n^n |x|^n = (b_n|x|)^n.$$

В случае 1) общий член $f_n(x)$ не стремится к нулю и потому ряд расходится. В случае 2) при фиксированном $|x| < 1/l$ и любом $n > n_0$, применяя признак сходимости Коши в предельной форме к ряду $\sum |f_n(x)|$, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(x)|^{1/n} = x \varlimsup_{n\to\infty} b_n < l/l = 1.$$

Это значит, что все $x < 1/l$ принадлежат области сходимости ряда. Если же $|x| > 1/l$, то легко видеть, что общий член ряда, как и в случае 1), не стремится к нулю и ряд тоже расходится.

В случае 3) снова согласно признаку Коши при всех x имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(x)|^{1/n} = |x| \varlimsup_{n\to\infty} b_n = 0 < 1,$$

т.е. ряд сходится. □

Замечание. *Если* $|x| = R$*, то ряд* $\sum f_n(x)$ *в доказанной теореме может и сходиться, и расходиться. Примером служит ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x},$$

для которого $R = 1$ *и при* $x = -1$ *имеет место сходимость, а при* $x = 1$ *- расходимость.*

Теорема 8.3. *Пусть* $R > 0$ *- радиус сходимости степенного ряда* $\sum a_n x^n$ *и* r *- произвольное число с условием* $0 < r < R$*. Тогда на отрезке* $[-r, r]$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно, а его сумма* $A(x)$ *непрерывна на нем.*

Доказательство. Точка $r_1 = (R+r)/2 < R$ принадлежит области сходимости ряда, поэтому при $x = r_1$ его общий член $a_n r_1^n$ ограничен, т.е. $|a_n| r_1^n < c$ при некотором $c > 0$ и всех n. В силу того, что $r < r_1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = \frac{c}{1 - r/r_1}.$$

Но тогда сходящийся ряд $\sum |a_n|r^2 < \infty$ будет мажорантой для $\sum a_n x^n$ на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, на этом отрезке ряд сходится абсолютно и равномерно.

При тех же условиях сумма $A(x)$ ряда $\sum a_n x^n$ является непрерывной функцией на отрезке $[-r, r]$, поскольку он сходится там равномерно и его члены непрерывны. $\square$

Теорема 8.4. *Если $R > 0$ - радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то на любом отрезке $[-r, r] \subset [-R, R]$ этот ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать на интервале сходимости.*

Доказательство. Формальное почленное дифференцирование степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дает ряд $x^{-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x^{-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, а интегрирование его приводит к ряду $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{n+1}$. Для величин $|b_n|^{1/n}$ и $|c_n|^{1/n}$ в теореме Коши-Адамара имеем равенства

$$|b_n|^{1/n} = n^1 |a_n|^{1/n}, |c_n|^{1/n} = (n+1)^{-1/n} |a_n|^{1/n}.$$

Но так как $(n+1)^{-1/n} \to 1$ при $n \to \infty$, то по этой теореме радиусы сходимости всех трех рядов равны и ряды сходятся равномерно на любом отрезке вида $[-r, r], r \leq R$. Но тогда их можно почленно дифференцировать и интегрировать на этом интервале сходимости. $\square$

Разложение элементарных функций:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ..., \text{ где } -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ..., \text{ где } -\infty < x < \infty$$

$$\ln 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + ..., \text{ где } |x| < 1$$

$$(1+x)^\beta = 1 + \beta x + \frac{\beta(\beta-1)x^2}{2!} + ... + \frac{\beta(\beta-1)...(\beta-n+1)x^n}{n!} + ..., \text{ где } |x| < 1$$

Теорема 8.5. О круге сходимости степенного ряда. *Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$*

1) абсолютно сходится внутри круга сходимости (т.е. на мн-ве $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_{cx}\}$)
2) расходится вне круга сходимости (т.е. на мн-ве $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_{cx}\}$)
3) на границе круга сходимости (т.е. на мн-ве $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R_{cx}\}$) может сходиться и расходиться

Доказательство. Зафиксируем произвольное комплексное число $z \neq 0$ и исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ с помощью обобщенного признака Коши. Определим

$$q = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|z|}{R_{\text{сх}}}$$

(где при $R_{\text{сх}} = 0$, $|z| > 0$ следует положить $q = +\infty$).

1) при $z = 0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ состоит из нулей, а значит, сходится. Если $0 < |z| < R_{\text{сх}}$, то $q < 1$ и в силу обобщ. пр. Коши ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сходится, т.е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх абсолютно.

2) Если $z > R_{\text{сх}}$, то $q > 1$ и в силу обобщ.пр. Коши члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не стремятся к нулю, след-но, не стремятся к нулю и члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, а значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расх. (Заметим, что из расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, и поэтому важно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не только расх, но и его члены не стремятся к нулю.)

3) Рассмотрим, например ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$. По формуле Коши-Адамара для радиуса сходимости $R_{\text{сх}}$ имееи $\frac{1}{R_{\text{сх}}} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-\ln(k+1)/k} = e^0 = 1$

При $z = 1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ и расходится. При $z = -1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Этот ряд сх в силу признака Лейбница. □

Теорема 8.6. Первая теорема Абеля. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *сх в т.* $z = z_0$. *Тогда в любой точке* $z = z_1$ *такой, что* $|z_1| < |z_0|$ *этот ряд сх абсолютно.*

Доказательство. Т.к. степ. ряд сх в т. $z = z_0$, то в силу пункта 2) $R_{\text{сх}} \geq |z_0|$. След-но, $|z_1| < |z_0| \geq R_{\text{сх}}$ и согласно 1) в т $z = z_1$ степ ряд сх абсолютно. □

Теорема 8.7. О равномерной сх степ ряда. *Пусть* $R_{cx} > 0$ *- радиус с[степ ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. *Тогда для* $\forall$ $r \in (0, R_{cx})$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *сх р/м в круге* $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$

Доказательство. Заметим, что $\forall z \in Z\ \forall k \in \mathbb{N} \to |c_k z^k| \leq |c_k| r^k$. Поскольку $|r| = r < R_{\text{сх}}$, то по предпреду-ей теор ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сх. Отсюда и из признака Вейерштрасса р/м-ной сх-ти компл ряда следует р/м сх-ть ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ на множестве Z. □

9 9-11 В конце будут

10 9-11 В конце будут

11 9-11 В конце будут

12 Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений (СЛУ). Геометрическая интерпретация СЛУ. Фундаментальная система решений системы однородных ЛУ. Теорема Кронеккера-Капелли

Определение 12.1. **Линейным пространством** *над полем называется множество V с заданными операциями:*

1. *сложение двух элементов из V*
2. *умножение элемента поля на элемент множества V*

Свойства:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists\ 0 \in V : 0 + a = a$
4. $\forall\ a \in V \exists b \in V : a + b = 0$
5. $(\mu\lambda)a = \mu(\lambda a) \forall \mu, \lambda \in K$
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
7. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
8. $1a = a$

Определение 12.2. *Пусть V - линейное пространство над K, $L \subset V$. Непустое подмножество L называется* **линейным подпространством**, *если:*

1. $\forall a, b \in L : a + b \in L$
2. $\forall \lambda \in K, \forall a \in L : \lambda a \in L$

Определение 12.3. **Линейной комбинацией элементов** *называется вектор вида $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$, где $\lambda_i \in K, a_i \in V$. Она нетривиальна, если хотя бы один из $\lambda_i \neq 0$*

Определение 12.4. *Система векторов a_i* **линейно зависима**, *если $\exists$ ее нетривиальная комбинация, равная 0. Иначе - линейно независимая*

Определение 12.5. *Линейно независимое множество вектором максимальное, если при добавлении любого вектора, это множество линейно зависимо.*

Определение 12.6. *Максимальный линейно независимый набор векторов -* **базис**.

Определение 12.7. **Линейной оболочкой** *системы векторов линейного пространства называется множество всех векторов, являющихся их линейной комбинацией.*

Лемма 12.1. *Основная лемма о линейной зависимости. Если $b_1, .., b_m \in Lin\{a_1, .., a_k\}$ и $m > k$, то векторы $b_1, ..b_m$ линейно зависимы.*

Доказательство.

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m = \overline{0}, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, ..., 0),$$

$$(b_1, \ldots, b_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \overline{0},\ b_1 = (a_1, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{pmatrix} \Rightarrow (b_1, \ldots, b_m) = (a_1, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{km} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \text{решим систему относительно } \lambda_i:$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \text{ т.к. } m > k \Rightarrow \text{ есть ненулевое решение.}$$

□

Теорема 12.1. *Если V - конечномерно и $\{a_1, .., a_k\}, \{b_1, .., b_m\}$ - базисы, то $n = m$*

Доказательство. Пусть $m > k$, тогда по лемме о линейной зависимости $m = k$. Обратно аналогично. □

Определение 12.8. *Размерность линейного пространства V - число векторов в любом базисе V*

Определение 12.9. *Ранг множества векторов S:*
1. если в S существует только нулевой вектор, то ранг равен 0
2. если в S существует ненулевой вектор a, то смотрим, существует ли в S b такой, что a, b ленейно независима. Если нет, то ранг равен 1. И т.д.
3. Если процесс прекращается на шаге n, то ранг равен n. Иначе - бесконечность.

Определение 12.10. *Арифметическим пространством F^n называется линейное пространство строк $(a_1, \ldots, a_n), a_i \in F$, с покомпонентными операциями сложения и умножения на элементы F.*

В свете этого опр-я, строки матрицы $m \times n$ можно рассматривать как элементы пространства F^m.

Определение 12.11. *Рангом матрицы A называется ранг ее системы строк. Обозначается rkA.*

Выберем в данной матрице некоторые k строк и k столбцов. На их пересечении образуется "подматрица" размерности $k \times k$, определитель которой называется минором порядка k. Очевидно, числом k он определен неоднозначно.

Напомним, что определитель сохраняется при транспонировании матрицы. Кроме того, равенство или неравенство определителя 0 сохраняется при элементарных преобразованиях (прибавление к одной строке другой с коэффициентом, перестановка строк, умножение строки на число).

Лемма 12.2. *Ранг матрицы A равен порядку ее наибольшего отличного от 0 минора.*

Доказательство. Пусть $r_1 = rkA, r_2$ есть порядок наибольшего отличного от 0 минора.

Во-первых, рассмотрим минор порядка $r > r_1$. Тогда образующие его строки в исходной матрице являлись линейно зависимыми (по определению ранга). Значит, их подстроки, вошедшие в минор, также будут линейно зависимыми (с теми же коэффициентами). Если строки минора линейно зависимы, то элементарными преобразованиями можно сделать нулевую строку, откуда минор равен 0. Итак, любой минор порядка $r > r_1$ равен 0, поэтому $r_2 \leq r_1$.

Теперь выберем в матрице систему из r_1 линейно независимых строк. Приведем ее методом Гаусса к ступенчатому виду, при этому равенство или неравенство нулю любых построенных из нее миноров сохранится. Кроме этого, любая строка новой матрицы есть нетривиальная линейная комбинация строк исходной системы, поэтому нулевых строк нет. Выбрав столбцы, содержащие первые элементы "ступенек", получим отличный от нуля минор порядка r_1. Итак, $r_2 \geq r_1$, откуда $r_2 = r_1$. □

Теорема 12.2. О ранге матрицы. *Ранг системы строк матрицы равен рангу системы строк ее столбцов и равен порядку ее наибольшего отличного от 0 минора.*

Доказательство. Обозначим ранг системы строк матрицы A через r_1, ранг системы столбцов r_2, порядок наибольшего отличного от 0 минора через r_3,порядок наибольшего отличного от 0 минора матрицы A^t через r_4. Покажем, что $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$.

По лемме, $r_1 = r_3$. Далее, $r_2 = r_4$, поскольку система столбцов A есть система строк A^t, и далее используется лемма. $r_3 \leq r_4$, поскольку отличный от 0 минор матрицы A переходит при транспонировании в отличный от 0 минор матрицы A^t. Аналогично, $r_3 \geq r_4$, откуда $r_3 = r_4$. □

Определение 12.12. *Системой линейных уравнений называется система вида*

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 & + \ldots + & a_n^1 x^n = & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m x^1 & + \ldots + & a_n^m x^n = & b^m \end{cases}$$

Матрица A называется матрицей системы, матрица A с добавлением столбца b – расширенной матрицей системы, обозначим ее A_{ext}.

Если $b = 0$, то система однородная.

Отметим, что подстановка любого набора значений вместо переменных $x_1, ..., x_n$ дает линейную комбинацию столбцов матрицы. Поэтому, существование ненулевого решения у однородной системы эквивалентно линейной зависимости ее столбцов, то есть $rkA < n$. В частности, это так при $m < n$, так как $rkA \leq m$. Получаем

Предложение. *Если число уравнений меньше числа неизвестных, однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение.*

Кроме того, существование решения у неоднородной системы эквивалентно тому, что столбец b выражается линейной комбинацией столбцов матрицы A. Из этого можно вывести:

Теорема 12.3. Кронеккера-Капелли. *Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда $rkA = rkA_{ext}$.*

Доказательство. Обозначим $r_1 = rkA, r_2 = rkA_{ext}$. Очевидно, $r_1 \leq r_2$.

Пусть система имеет решение. Предположим, $r_1 < r_2$. Выберем в A_{ext} линейно независимую систему E из r_2 столбцов. Если она не включает b, то она есть подсистема столбцов A, где нет линейно независимых подсистем из более чем r_1 векторов. Поэтому, $E = E' \cup \{b\}, E'$ - некоторая система столбцов A, она линейно независима, поэтому число векторов в ней $|E'| \leq r_1$.

С другой стороны, $|E'| = r_2 - 1 \geq r_1$, поэтому $|E'| = r_1$, и E' - максимальная линейно независимая подсистема. Значит, все столбцы A выражаются через E' линейными комбинациями (столбец, который не выражается, может быть добавлен с сохранением линейной независимости - это легко следует из определения). Тогда b выражается через E' линейной комбинацией (система имеет решение). Но тогда E - линейно зависимая система - противоречие.

Пусть теперь система не имеет решения. Пусть E' - максимальная линейно независимая система столбцов A. Поскольку b не выражается линейной комбинацией E' (система не имеет решения), он может быть добавлен к E' с сохранением линейной независимости. Получаем $E = E' \cup \{b\}$ - линейно независимая подсистема столбцов A_{ext} из $r_1 + 1$ столбца, поэтому $r_2 > r_1$. $\square$

Если x_1 и x_2 - решения однородной системы, то $x_1 + x_2, \lambda x_1$ - также решения (проверяется подстановкой). Поэтому множество решений системы является линейным подпространством в F^n, обозначим его V.

Определение 12.13. *Базис этого пространства называется фундаментальной системой решений.*

Способ построения фундаментальной системы дастся методом Гаусса. Из него следует, что $\dim V = n - rkA$ *(ранг A сохраняется при элементарных преобразованиях, поскольку сохраняются миноры).*

Далее, если x_1 и x_2 - два решения неоднородной системы, то $x_1 - x_2$ - решения однородной. Обратно, если x_1 - решение неоднородной системы, x_2 - однородной, то $x_1 + x_2$ - решение неоднородной системы. Поэтому, множество решений неоднородной системы, имеющей хотя бы одно решение x_1, есть $x_1 + V$ - аффинное подпространство в F^n.

13 Билинейные и квадратичные функции (формы). Приведение к нормальному виду.

Билинейные формы

Мы ограничимся пока случаем $V_1 = V_2 = V$ и будем говорить о **билинейной** *($p = 2$) форме f на V (а не на V^2, что было бы более правильным). В соответствии с общим определением, билинейная форма f на векторном пространстве V над $\mathfrak{K}$ характеризуется свойствами*

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$f(\mathbf{w}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - (2)$$

для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha, \beta \in \mathfrak{K}$. Заметим, что, вообще говоря, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Выбрав в V некоторый базис $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ и выразив $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ через их координаты

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + \ldots + x_n\mathbf{e_n}, \ \mathbf{y} = y_1\mathbf{e_1} + \ldots + y_n\mathbf{e_n},$$

мы используем определяющие свойства (2) для записи значения $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ формы f через n^2 скаляров $f(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j})$. Именно,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f\left(\sum_i x_i\mathbf{e}, \sum_j u_j\mathbf{e_j}\right) = \sum_i x_i f\left(\mathbf{e_i}, \sum_j y_j\mathbf{e_j}\right) = \sum_i x_i \sum_j y_j f(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = \sum_{i,j} f_{ij}x_iy_j, -(3)$$

где $f_{ij} = f(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j})$.

Матрица $F = (f_{ij})$ называется матрицей билинейной формы f на V в базисе $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$. Введя в рассмотрение координатную $n \times 1$-матрицу (столбец) $X = [x_1, \ldots, x_n]$ и транспонированную с ней координатную $1 \times n$-матрицу (строку) ${}^tX = (x_1, \ldots, x_n)$, мы перепишем выражение (3) в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =^t XFY. - (4)$$

Для этого нужно лишь воспользоваться известными правилами умножения матриц размеров $1 \times n, n \times n, n \times 1$.

Обратно, имея квадратную матрицу $F = (f_{ij})$, мы при помощи соотношения (4) (или (3)) определим на V билинейную форму f, полагая $f(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = f_{ij}$. Таким образом, при заданном базисе $(\mathbf{e_1}, \ldots, _\mathbf{n})$ векторного пространства над $\mathfrak{K}$ имеется взаимно однозначное соответствие между квадратными $n \times n$-матрицами над $\mathfrak{K}$ и билинейными формами на $V (n = \dim_{\mathfrak{K}} V)$.

Квадратичные формы

Определение 13.1. *Квадратичной формой на конечномерном векторном пространстве V над $\mathfrak{K}$ называется функция $q : V \to \mathfrak{K}$, обладающая двумя свойствами:*
i) $q(-\mathbf{v}) = q(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$;
ii) отображение $f : V \times V \to \mathfrak{K}$, определенное формулой $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dfrac{1}{2}\{q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\}$, является билинейной формой на V (очевидно, симметричной). Ее ранг называется так же рангом $q : q = f$.

Говорят еще, что симметричная билинейная форма f получается из q поляризацией или что f - билинейная форма, полярная к квадратичной форме q.

Определение 13.2. *Матрицей квадратичной формы $q = q_f$ относительно базиса $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ пространства V называется матрица F билинейной формы f, полярной к q.*

$$F = (f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = \frac{1}{2}\{q(\mathbf{e_i} + \mathbf{e_j} - q(\mathbf{e_i}) - q(\mathbf{e_j})\}, i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Определение 13.3. *Базис пространства V называется каноническим, если матрица квадратичной функции $f: V \to R$ в этом базисе диагональна.*

$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + .. + \lambda_n x_n^2$ *- каноническая форма.*

Теорема 13.1. Метод Лагранжа. *У любой q - квадратичной функции существует канонический базис*

Доказательство. Индукцией по $dimV = n$:

1. $n = 1. q(x) = \lambda x^2$
2. $(n-1)$ - верно, тогда:

1) $q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i)^2 + 2\sum\limits_{i<j}^{n} b_{ij} x^i x^j =$ / пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда / $= \lambda_1 (x_1^2 + 2x_1(\dfrac{b_{12}}{\lambda_1}x_2 + + \dfrac{b_{1n}}{\lambda_1}x_n) + (\ldots)^2) - \lambda(\ldots)^2 + \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i (x^i)^2 + 2\sum\limits_{2\le i<j}^{n} x^i x^j b_{ij} =$ делаем замену $= \lambda_1 (x_1 + \dfrac{b_{12}}{\lambda_1}x_2 + \ldots + \dfrac{b_{1n}}{\lambda_1}x_n)^2 - \lambda_1(\ldots) + \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i (x^i)^2 + 2\sum\limits_{2\le i<j}^{n} x^i x^j b_{ij} =$ $//x'_1 = x_1 + \dfrac{b_{12}}{\lambda_1}x_2 + \ldots // = \lambda_1 (x'_1)^2 - \underbrace{\lambda_1(\ldots) + \ldots}_{\text{имеет канонический вид (форму)}}$.

2) Если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, то делаем замену

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 - x_2 \\ \vdots \\ x'_n = x_n \end{cases}$$, и все сводится к 1). □

$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + .. + \lambda_n x_n^2$, *пусть $rkq = r$, тогда будем считать, что $\lambda_1, .., \lambda_n \neq 0$*

Определение 13.4. *Пусть $f: V \to C$, тогда $y_i = x_i \sqrt{\lambda_i}$, если $i \le r$ и $y_i = x_i$, если $i > r$. Тогда $q(x) = y_1^2 + .. + y_n^2$ (*) есть нормальный вид квадратичной формы.*

Теорема 13.2. *Над C любая квадратичная функция имеет вид в некотором нормальное базисе (*)*

$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 - \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 - \ldots - \lambda_r x_r^2$, *над $\mathbb{R}$ имеет нормальный вид при замене*

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1 \\ \vdots \\ y_r = \sqrt{\lambda_r} x_r \end{cases} : q(x) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

Любая квадратичная функция имеет нормальный вид.

Определение 13.5. *Две квадратичные формы называются эквивалентными, если они представляют одну и ту же квадратичную функцию в разных базисах: $B_2 = c^T B_1 C$.*

Закон инерции: $q: V \to \mathbb{C}$, *тогда $B_2 = B_1$ у эквивалентных квадратичных функций.*

Теорема 13.3. *Пусть даны два нормальных базиса, тогда $q: V \to \mathbb{R}$ имеет одинаковое число положительных и отрицательных индексов в обоих представлениях.*

Доказательство.

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2)$$
$$q(x) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - (y_{s+1}^2 + \cdots + y_n^2), p > s.$$

Возьмем $L = L_n\{e_1, \cdots, e_n\}$ и $M = L_n\{e'_{s+1}, \cdots, e'_n\}$,

тогда $\dim L + \dim M = n + (p - s) > n$, т.е. $\dim(L \cap M) \ge 1 \Rightarrow \exists \bar{0} \neq \bar{x} \in (L \cap M):$

$$\bar{x} = \{x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0\}$$

$$\bar{x} = \{0, \cdots, 0, y_{s+1}, \cdots, y_n\},$$

тогда $q(\bar{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 > 0$, но! $q(x) = -(y_{s+1}^2 + \cdots + y_n^2) < 0$ - противоречие. □

Предложение. *Матрица $C: E \to E'$ - базисы, является треугольной и невырожденной, если: $L_n(E_k) = L_n(E'_k), k = \overline{1,n}$.*

14 Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

Определение 14.1. *Пусть V, W - векторные пространства размерностей над одним и тем же полем n, m. Отображение $f : V \to W$ называется линейным, если*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Другими словами, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Частным типом линейного отображения служит понятие линейной функции $f : V \to \mathfrak{K}$.

Совокупность всех линейных отображений $V \to W$, обозначаемая символом $\mathfrak{L}$ (или (V, W)), - векторное пространство с естественными операциями сложения отображений и их умножения на скаляры: если $f, g \in \mathfrak{L}(V, W)$ и $\nu, \mu \in F$, то по определению

$$(\nu f + \mu g)(x) = \nu f(x) + \mu g(x).$$

С любым линейным отображением $f : V \to W$ ассоциируются два подпространства - его ядро

$$Kerf = \{v \in V | f(v) = 0\}$$

и образ

$$Imf = \{w \in W | w = f(v) \text{ для некотрого } v \in V\}.$$

Ядро и образ являются векторными подпространствами в V и W соответственно (легкая проверка, очевидная для $Kerf$, а для Imf приводимая ниже). Для любого подпространства $U \subset V$ условимся писать коротко $f(U) = \{f(u) | u \in U\}$. Если $u_1, u_2 \in U; \nu_1, \nu_2 \in F$, то

$$\nu_1 f(u_1) + \nu_2 f(u_2) = f(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2) \in f(U).$$

Задание линейных отображений матрицами. *Пусть нам заданы базисы $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)$ векторных пространств V и W соответственно. Любой вектор из образа $Imf \subset W$ является линейной комбинацией векторов:*

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m, \qquad (14.1)$$

Обратно, задание набора векторов $w'_1 = f(v_1), \dots, w'_n = f(v_n)$ пространства W полностью определяет линейное отображение f; произвольному вектору $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ достаточно поставить в соответствие вектор $w = \alpha_1 w'_1 + \dots + \alpha_n w'_n$. Если $v' = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n$, то

$$f(\nu v + \nu' v') = f((\nu\alpha_1 + \nu'\alpha'_1)v_1 + \dots + (\nu\alpha_n + \nu'\alpha'_n)v_n) = (\nu\alpha_1 + \nu'\alpha'_1)w'_1 + \dots + (\nu\alpha_n + \nu'\alpha'_n)w_n =$$

$$= \nu(\alpha_1 w'_1 + \dots + \alpha_n w'_n) + \nu'(\alpha'_1 w'_1 + \dots + \alpha'_n w'_n) = \nu f(v) + \nu' f(v').$$

Матрица

$$M_f = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

называется **матрицей линейного отображения** $f : V \to W$ *относительно базисов $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_m)$ (или в базисах (v_j), (w_j)) пространств V и W. Различным матрицам отвечают различные линейные отображения.*

Матрица линейного оператора в различных бзисах.

Пусть V - n-мерное векторное пространство на полем $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A} : V \to V$ - линейный оператор. Выбрав в V базис $(e_1, \dots, e_n)$, мы можем задать $\mathfrak{A}$ его матрицей $A = (a_{ki})$, так что

$$\mathfrak{A}e_i = \sum_k a_{ki}e_k \tag{20.7}$$

Но тот же самый оператор $\mathfrak{A}$ в ином базисе $(_1 \dots, e'_n)$ пространства V будет иметь какую-то другую матрицу $A' = (a'_{ki})$:

$$\mathfrak{A}e'_i = \sum_k a'_{ki}e'_k. \tag{20.7'}$$

Если $B = (b_{ij})$ - матрица перехода от базиса (e_i) к базису (e'_i), то формулы $e'_j = \sum_i b_{ij}e_i$, $1 \leq i \leq n$, наводят на мысль ввести линейный оператор $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}e_j = e'_j \tag{20.8}$$

с матрицей B в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. Так как $\det B \neq 0$, то оператор $\mathfrak{B}$ обратим.

Наконец, определим вспомогательный оператор $\mathfrak{A}'$, имеющий в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ ту же матрицу A', что и оператор $\mathfrak{A}$ в базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$. Другими словами, положим

$$\mathfrak{A}'e_i = \sum_k a'_{ki}e_k. \tag{20.9}$$

Мы имеем право это сделать, поскольку при фиксированном базисе между линейными операторами и матрицами имеется биективное соответствие. Используя 20.7 и 20.8, перепишем соотношение 20.7' в виде

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}e_j = \mathfrak{A}e'_j = \sum_i a'_{ij}e'_i = \sum_i a'_{ij}\mathfrak{B}e_i = \mathfrak{B}(\sum_i a'_{ij}e_i)$$

Откуда ввиду обратимости $\mathfrak{B}$ и ввиду выражения (20.9) для $\mathfrak{A}'$ получим

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}e_j = \mathfrak{A}'e_j, 1 \leq j \leq n. \tag{20.10}$$

Рассматривая все операторы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}'$ в одном и том же базисе $(e_1, ..., e_n)$, мы переходим от (20.10) к матричному соотношению

$$A' = B^{-1}AB \tag{20.11}$$

К соотношению (20.11) можно прийти более прямым, координатным путем. Пусть, как обычно, $\sum_i x_ie_i = x = \sum_i x'_ie'_i$ - запись произвольного вектора $x \in V$ в исходном и новом (штрихованном) базисе; $X = [x_1, \cdots, x_n], X' = [x'_1, \cdots, x'_n]$ - соответствующие столбцы координат. Далее, пусть $Y = AX, Y' = A'X'$, где A, A' - матрица, определенная соотношениями (20.7) и (20.7'). Так как $X = BX', Y = BY'$, то

$$ABX' = AX = Y = BY' = BA'X'.$$

Ввиду произвола в выборе столбца X' (вектора $x \in V$) имеем $AB = BA'$, откуда $A' = B^{-1}AB$.

Итак, мы дважды убедились в том, что справедливо

Теорема 14.1. *Матрица A' линейного оператора в базисе $(e'_1, \cdots, e'_n)$ получается из матрицы A того же оператора $\mathfrak{A}$ в базисе $(e_1, \cdots, e_n)$ по формуле (20.11), где B - матрица перехода от (e_i) к (e'_i).*

Определение 14.2. *Вектор $0 \neq v \in V$ называется собственным вектором линейного отображения f, если $\exists \lambda \in F, f(v) = \lambda v$. λ называется собственным значением линейного отображения f.*
В координатах уравнение $f(v) = \lambda v$ принимает вид $Av = \lambda v$, или $(A - \lambda E)v = 0$. Это однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $(A - \lambda E) < n$. Это означает, что у матрицы $A - \lambda E$ нет ненулевых миноров порядка n, то есть $\det(A - \lambda E) = 0$.

Итак, λ является собственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$\det(A - \lambda E)$ *есть сумма произведений по n различных элементов матрицы $A - \lambda E$, каждый из которых имеет вид $a^i_i - \lambda$ или a^i_j. Поэтому, $\det(A - \lambda E)$ есть многочлен степени n от λ.*

Определение 14.3. *Он называется характеристическим многочленом линейного отображения. Его корни называются характеристическими корнями.*

Из вышесказанного следует, что характеристические корни линейного отображения - это его собственные значения. В частности, если F алгебраически замкнуто, существует хотя бы один характеристический корень, и, соответственно, хотя бы один собственный вектор.

Теорема 14.2. *Собственный векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, .., \lambda_m$ – различные собственные значения линейного отображения f. $v_1, .., v_m$ – соответствующие собственные вектора. Пусть они линейно зависимы. Не ограничивая общности, можно считать, что $v_1, .., v_{m-1}$ линейно независимы, и v_m через них выражается.

Пусть $v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i v_i$. Применим к этому равенству f:

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i \lambda_m v_m = \lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m-1} c_i (\lambda_i -_m) v_i = 0, \text{ где, } v_i \text{ лин независ.}$$

Значит $c_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$, λ - различные. Следовательно $c_i = 0$, следовательно $\sum\limits_{i=1}^{m-1} c_i v_i = 0 = v_m$ - противоречие.

$\square$

15 Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Определение 15.1. *Евклидовым векторным простанством называется вещественное векторное пространство V с выделенной на нём симметричной билинейной формой $(x,y) \mapsto (x|y)$ такой, что соответствующая квадратичная форма $x \mapsto (x|x)$ (или просто $(x|x)$) положительно определена.*

В общем случае знчение $(x|y)$ симметричной билинейной формы $(*|*)$ на векторых $x, y \in V$ будет называться их **скалярным произведением***.*

Итак, в соответствии с определением 15.1 евклидово векторное пространство - это пара $(V, (*|*))$, где V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $(*|*)$ - фиксированная симметричная билинейная форма над V. Отметм ещё раз основные свойства скалярного произведения:

1) $(x|y) = (y|x)\ \forall\ x, y \in V$
2) $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3) $(x|x) > 0\ \forall\ x \neq 0\ ((0|x) = 0)$

Основные метрические понятия *Пусть V - евклидово векторное пространство со скалярным произведением $(x|y)$*

Определение 15.2. Длиной *или* **нормой** $||v||$ *любого вектора $v \in V$ называется неотрицательное вещественное число*

$$||v|| = \sqrt{(v|v)} \tag{15.1}$$

Так как $(v|v) > 0$, то длина любого ектора вполне определена, причем $v \neq 0 \Rightarrow ||v|| > 0$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda v|\lambda v)} = |\lambda| * ||v||$

Вектор длины 1 называется **нормированным***. Любой вектор $x \neq 0$ можно нормировать, умножив его на подходящий скаляр, а именно для вектора $x' = \frac{1}{||x||}x$ имеем*

$$||x'|| = \left|\left|\frac{1}{||x||}x\right|\right| = \frac{1}{||x||}||x|| = 1$$

Неравенство Коши-Буняковского *означает, что*

$$-1 \leq \frac{(x|y)}{||x|| * ||y||} \leq 1$$

Стало быть, отношение $\frac{(x|y)}{||x|| * ||y||}$ является косинусом вплне определенного угла φ:

$$\cos\varphi = \tfrac{(x|y)}{||x||*||y||},\ 0 \leq \varphi \leq \pi \tag{15.2}$$

Именно этот угол φ и считается, по определению, углом между векторами x и y.

Определение 15.3. *Векторы x и y называются* **ортогональными** *(обозначение $x \perp y$), когда угол между ними равен $\pi/2$, т.е. $(x|y) = 0$*

Процесс ортогонализации. *В стандартном пространстве $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением векторы $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ попарно ортогональны и образуют базис. Естественно ожидать, что в любом евклидовом векторном пространстве V можно выбрать базис с аналогичными свойствами. Сформулируем точнее*

Определение 15.4. *Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ евкидова векторного пространства V называется* **ортогональным***, если $(e_i|e_j) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Если, кроме того, $(e_i|e_i) = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, то базис называется* **ортонормированным** *(или* **ортонормальным***).*

Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. *В евклидовом векторном пространстве V ортонормированные базисы играют особую роль, поэтому естественно посмотреть на формулы перехода от одного ортонормированного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к другому ортонормированному базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Как всегда, записав*

$$e'_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n,\ 1 \le j \le n, \tag{15.3}$$

мы получаем матрицу перехода $A = (a_{ij})$, *в* k*-м столбце которой стоят координаты вектора* e'_k *относительно базиса* $(e_1, \dots, e_n)$. *Пока мы на* A *имеем единственное ограничение* $\det A \neq 0$. *Воспользуемся теперь ортонормированностью базисов:*

$$\delta_{ij} = (e'_i|e'_j) = (\sum_k a_{ki}e_k | \sum_l a_{li}e_l) = \sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}(e_k|e_l) = \sum_k a_{ki}a_{kj}$$

Итак,

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{15.4}$$

Взяв транспонированную матрицу ${}^tA$, *соотношения 15.3 (или 15.4) перепишем в кратком виде:*

$${}^tA * A = E \tag{15.5}$$

откуда $A^{-1} =^t A$. *Так как* $A^{-1}A = E \Rightarrow A * A^{-1} = E$, *то и*

$$A *^t A = E \tag{15.5'}$$

что приводит к соотношениям

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{15.4'}$$

Определение 15.5. *Квадратная матрица* $A = (a_{ij})$, *удовлетворяющая одному из эквивалентных условий 15.4, 15.4', 15.5, 15.5', назыается* **ортогональной**. *Множество всех ортогональных матриц порядка n обозначается символом* $O(n)$.

Непосредственно проверяется, что $O(n)$ *- группа. Она называется* **ортогональной группой**. *Если теперь* A *- произвольная ортогональная матрица, то система веторов* $(e'_1, \dots, e'_n)$, *полученная из ортонормированного базиса* $(e_1, \dots, e_n)$ *по формулам 15.3, будет также ортонормированным базисом.*

Мы приходим к следующему выводу.

Теорема 15.1. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональная, и всякая ортогональная матрица может быть матрицей такого перехода*

Определение 15.6. *Говорят, что квадратичная форма* q *имеет в базисе* $(e_1, \dots, e_n)$ *пространства* V **канончеcкий** *или* **диагональный** *вид, если для каждго вектора* $x = \sum x_i e_i \in V$ *значение* $q(x)$ *вычисляется по формуле*

$$q(x) = \sum_i f_{ii}x_i^2$$

Базис (e_i) *при этом называется* **каноническим базисом** *для* q.

Та же терминология относится и к соответствующей полярной билинейной форме f*:*

$$f(x, y) = \sum_i f_{ii}x_i y_i$$

Канонический вид квадратичной формы. *Вопрос о возможности выбора базиса, в котором данная форма принимала бы наиболее простой вид (а таковым является канонический вид), имеет важное теоретическое и прикладное значение.*

Теорема 15.2. *Для всякой симметрической билинейной формы* f *на* V *существует канонический базис*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно, поэтому можно использлвать индукцию по n. Если $f(x, y) = 0$ для всех $x, y \in V$ (то есть $f = 0$), то теорема очевидна: любой базис годится. Если же $f \neq 0$, то отлична от нуля и соответсвующая квадратичная форма. Пусть e_1 - такой вектор, что $f(e_1, e_1) = q(e_1) \neq 0$. Тогда линейная функция $f_1 : x \mapsto f(x, e_1)$ отлична от нуля ($f_1(e_1) \neq 0$). Линейное подпространство

$$L = Ker f_1 = \{x \in V | f_1(x) = 0\}$$

имеет размерность $n - 1$, т.е. является гиперплоскостью. По предположению индукции L обладает базисом $(e_2, \dots, e_n)$, в котором матрица формы f, ограниченной на L, диагональна, т.е.

$$f(e_i, e_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\ i, j = 2, \dots n.$$

Так как по построению $f(e_i, e_j) = 0, i = 2, 3, \ldots, n$, то мы получаем свойства $f(e_i, e_j) = 0, i \neq j$, характеризующее канонический базис (e_k), если только система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима. Предположив противное, мы в любом соотношении

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

имели бы коэффицент $\alpha_1 \neq 0$, поскольку $(e_2, \ldots, e_n)$ - базис в L. Но в таком случае $e_1 = \sum\limits_{i>1} \beta_i e_i$ и

$$0 \neq f_1(e_1) = f_1(\sum_{i>1} \beta_i e_i) = \sum_{i>1} \beta_i f_1(e_i) = 0$$

-противоречие, доказывающее теорему $\square$

Следствие 1. *Пусть на векторном пространтве V размерности n над полем $\mathfrak{K}$ задана квадратичная форма q ранга $r \leq n$. Тогда в V существует базис (e_i), в котором q принимает канонический вид*

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$$

Следствие 2. *Для любой симметричной матрицы F существует невырожденная матрица A такая, что ${}^tAFA$ - диагональная матрица такого же ранга, что и F. Другими словами, всякая симметричная матрица конгруэнтна диагональной.*

16 Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.

Определение 16.1. *Множество G с операцией $\bullet$: $G \times G \to G$ называется* **группой***, если выполнены следующие три аксиомы:*

1) $a(bc) = (ab)c \ \forall\ a, b, c \in G$

2) $\exists\ e \in G$, такое, что $\forall\ a \in G$, $ae = ea = a$. e называется единицей или нейтральным элементом группы.

3) $\forall\ a \in G$, $\exists\ b \in G$, $ab = ba = e$. b обозначается a^{-1} и называется обратным элементом к a.

Определение 16.2. *Количество элементов в G называется* **порядком** *G и обозначается $|G|$.*

Определение 16.3. *Непустое подмножество $H \subset G$ называется* **подгруппой***, если оно замкнуто относительно операции $\bullet$ и взятия обратного элемента*

Замечание. *Тогда H содержит $e = aa^{-1}$ для некоторого $a \in H$*

Определение 16.4. *Для любой подгруппы H и любого элемента $g \in G$, $gH = \{gh | h \in H\}$ -* **левый смежный класс** *элемента g по подгруппе H. Аналогично определяется правый.*

Лемма 16.1. *Если два смежных класса g_1H и g_2H пересекаются, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть $x \in g_1H \cap g_2H$. Пусть $y \in g_1H$, покажем, $y \in g_2H$. Все h_i ниже из H.

Из $x = g_1h_1 = g_2h_2$ получается $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$, откуда $y = g_1h_3 = g_2h_2h_1^{-1}h_3 \in g_2H$, так как $h_2h_1^{-1}h_3 \in H$, так как H - подгруппа. □

Замечание. *$g_1H = g_2H$ тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2h$ для некторого $h \in H$*

Определение 16.5. *Если $\forall\ g \in G$, $gH = Hg$, то подгруппа H называется* **нормальной***, запись $H \triangleleft G$.*

Теорема 16.1. Лагранжа. *Пусть G - конечная группа, H - подгруппа в G. Тогда G разбивается в объединение непересекающихся смежных классов по подгруппе H, каждый из которых содержит столько же элементов, сколько и H.*

Доказательство. Во-первых, $H = eH$- смежный класс. Пусть уже построены классы (различные) $g_1H, \ldots, g_kH$. они не пересекаются по лемме. Если $\bigcup\limits_i g_iH \neq G$, то существует $g \in G - \bigcup\limits_i g_iH$, построим gH. Если gH пересекается с одним из построенных классов, то он с им совпадает. В этом случае g в нем лежит (так как $g = ge \in gH$), что противоречит выбору g. Итак, построен новый смежный класс. Количество элементов в нём равно порядку H, так как он содержит элементы вида gh для всех $h \in H$, и они все различны (из $gh_1 = gh_2$ следует $h_1 = h_2$ - надо домножить слева на g^{-1}).

Количество элементовв $G - \bigcup\limits_i g_iH$ убывает при этом процессе, в силу конечности G, процесс закончен. □

Определение 16.6. *Количество смежных классов называется* **индексом группы** *G по подгруппе H и обозначается $(G : H)$*

Из теоремы Лагранжа, $(G : H) \bullet |H| = |G|$, откуда порядок H делит порядок G. Определим $g^k = \underbrace{g \ldots g}_{k}$ для натуральных k. Распространим это на целые k, положив $g^{-k} = (g^{-1})^k$, $g^0 = e$. Тогда

Предложение. $g^{k+m} = g^k g^m$

Доказательство. Если один из k и m равен 0, утверждение очевидно из $g^k e = g^k$, $eg^m = g^m$. Если k и m одного знака, то утверждение также очевидно из ассоциативности умножения (в определении будет $k + m$ сомножителей слева и справа). Если же k и m разных знаков, $|k - m|$ пар gg^{-1} или $g^{-1}g$ "сократится", и опять получится желаемый ответ.

В частности, отсюда следует, что $g^{-k} = (g^k)^{-1}$. Далее, дегко видеть, что $H =< g >= \{g^k | \forall k\}$ является поддгруппой. □

Определение 16.7. *Она называется подгруппой, порожденной элеентом g*

Определение 16.8. *Пусть существует такое полжительное k, что $g^k = e$. Наименьшее такое k называется* **порядком элемента** *g. g называтся* **элементом конечного порядка**.

Замечание. *Если G конечна, то найдётся такое положительное k, что $g^k = e$. В самом деле, будем строить $e, g, g^2, \ldots$. В силу конечности группы, найдутся $m \neq n$, $g^m = g^n$. Пусть $m > n$, тогда $g^{m-n} = g^m(g^n)^{-1} = e$.*

Легко видеть, что, если g конечного порядка k, то $< g >= \{e, g, g^2, \ldots, g^{k-1}\}$, остальные элементы будут совпадать с этими. Отсюда, $| < g > | = k$. Поскольку порядок подгруппы делит порядок группы, получаем

Предложение. *В группе конечного порядка порядок любого элемента конечен и делит порядок группы.*

Определение 16.9. **Группа** *G называется* **циклической**, *если существует $g \in G$, такой, что $G =< g >$*

Если порядок некоторого элемента g группы G совпадает с поряжком G, то $| < g > | = |G|$, поэтому $< g >= G$, и G - циклическая.

Пусть есть группа G и нормальная подгруппа H. Рассмотрим множество смежных классов $G/H = \{gH\}$, $g \in G$, введем на нем операцию $g_1H \bullet g_2H = (g_1g_2H)$

Предложение. *Это определение корректно.*

Доказательство. Всюду ниже $h_i \in H$. Пусть $g_1H = g_1'H, g_2H = g_2'H$. Тогда $g_1' = g_1h_1, g_2' = g_2h_2$. $h_1g_2 \in H$, $g_2 = g_2H$, поэтому, существует такое h_3, что $h_1g_2 = g_2h_3$. Теперь $g_1'g_2' = g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h_3h_2$, поэтому $(g_1'g_2')H = (g_1g_2)H$. ☐

При таком определении, $eH \bullet gH = gH \bullet eH = gH$, и $(g^{-1})H \bullet gH = gH \bullet g^{-1}H = eH = H$. Итак, G/H является группой относительно введенной операции.

Определение 16.10. *Эта группа называется* **факторгруппой** *группы G по подгруппе H*

Определение 16.11. *Пусть G, H - две группы. Отображение $f : G \to H$ называется* **гомоморфизмом**, *если $\forall\ g_1, g_2 \in G$, $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$.*

Отметим, что тогда $f(g)f(e) = f(ge) = f(g)$ (и с другой стороны), поэтому $f(e)$ - единица H. Далее, $f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(e)$ (и с другой стороны), поэтому $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

Определение 16.12. *Если гомоморфизм f - биекция, то f называется* **изоморфизмом**.

Определение 16.13. *$Kerf = \{g \in G | f(g) = e\}$ -* **ядро** *гомоморфизма f.*
$Imf = \{f(g) | g \in G\} \subset H$ - **образ группы** *G при гомоморфизме f*

Очевидно, что $e \in Kerf$.

Предложение. *Гомоморфизм f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $Kerf = e$ и $Imf = H$*

Доказательство. Очевидно, что $Imf = H$ эквивалентно сюръективности. Поэтому, если при этом условии f - не изоморфизм, то $\exists\ g \neq h \in G$, $f(g) = f(h)$, тогда $f(g^{-1}h) = e$, и $e \neq g^{-1}h \in Kerf$. Обратно, если $e \neq g \in Kerf$, то $f(g) = e = f(e)$. ☐

Теорема 16.2. О гомоморфизме. *Если f - гомоморфизм из G в H, то его ядро $Kerf$ - нормальная подгруппа в G, его образ Imf - подгруппа в H, и факторгруппа $G/Kerf$ изоморфна Imf. Обратно, любая нормальная подгруппа является ядром некоторого гомоморфизма.*

Доказательство. Если $h_1, h_2 \in Imf$, то $h_1 = f(g_1), h_2 = f(g_2)$, но тогда $h_1h_2 = f(g_1g_2) \in Imf$. Включение обратных элементов проверяется аналогично из $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$. Итак, Imf - подгруппа.

Если $g_1, g_2 \in Kerf$, то $f(g_1) = e = f(g_2)$. Тогда $f(g_1 g_2) = e$, и $g_1 g_2 \in Kerf$. Далее, $f(g_1^{-1}) = f(g_1^{-1})e = f(g_1^{-1})f(g_1) = f(e) = e$, так что, $g_1^{-1} \in Kerf$. Итак, $Kerf$ - подгруппа, обозначим её N.

Покажем для $g \in G$, $gN = Ng$. В самом деле, пусть $h \in Ng$, тогда $hg^{-1} \in N$, $f(hg^{-1}) = e$. Тогда $f(h)^{-1} = f(g^{-1})$, поэтому $f(g^{-1}h) = f(g^{-1})f(h) = e$. Отсюда, $g^{-1}h \in N$, и $h \in gN$. Итак, $Ng \subset gN$, обратное включение проверяется аналогично.

Построим отображение $\omega : G/N \to Imf$ по правилу $gN \to f(g)$. Во-первых, это корректно: $g_1 N = g_2 N$ тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2 h$, $h \in N$, иначе говоря, $g_1 g_2^{-1} \in N = Kerf$, что равносильно $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)^{-1} = e$, $f(g_1) = f(g_2)$. Отсюда же следует, что ω инъективно. С другой стороны, ω - сюръективно, поскольку у любого элемента $f(g)$ из Imf есть прообраз gN. Итак, ω - биекция. Наконец, $\omega(g_1 H \bullet g_2 H) = \omega((g_1 g_2)H) = f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2) = \omega(g_1 H)\omega(g_2 H)$, так что ω - гомоморфизм, и, значит, изоморфизм.

Наконец, пусть H - нормальная подгруппа в G. Построим отбражение $f : G \to G/H$ по правилу $f(g) = gH$. По определению умножения в факторгруппе, это гомоморфизм. Кроме того, $h \in Kerf$ тогда и только тогда, когда $gH = eH$, что эквивалентно $g = eH \in H$. Итак, $Kerf = H$, что доказывает последнее утверждение теоремы. Отметим, что построенный гомоморфизм называется каноническим. $\square$

17 Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

Определение 17.1. *Кривые второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат на плоскости уравнением второй степени* $F(x,y)=0$, *где* $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$.

Определение 17.2. Квадрикой *будем называть класс эквивалентности уравнений 2-ой степени относительно умножения на некоторый ненулевой множитель.*

$$(F=0)\sim(G=0)\Leftrightarrow F=\lambda G,\lambda\neq 0.$$

При замене коор-т $(x,y)\to(x',y')$ *квадрика* $F(x,y)=0$ *переходит в квадрику* $F'(x',y'):=F(x(x',y'),y(x',y'))=0$

Далее будет доказано, что два уравнения второго порядка задают одну и ту же кривую, тогда и только тогда, когда они пропорциональны, при условии, что кривая состоит более, чем из одной точки. Т.о. для таких кривых соответствие квадрика $\leftrightarrow$ *кривая является взаимно однозначным.*

Теорема 17.1. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих видов (называемых каноническими уравнениями квадрики):*

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a\geq 0,b>0)$, *эллипс;*
(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1,(a\geq 0,b>0)$, *мнимый эллипс;*
(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,(a\geq 0,b>0)$, *пара пересекающихся мнимых прямых;*
(4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>0,b>0)$, *гипербола;*
(5) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,(a\geq 0,b>0)$, *пара пересекающихся прямых;*
(6) $y^2=2px,(p>0)$, *парабола;*
(7) $y^2-a^2=0,(a>0)$, *пара параллельных прямых;*
(8) $y^2+a^2=0,(a>0)$, *пара мнимых параллельных прямых;*
(9) $y^2=0$, *пара совпадающих прямых.*
(уравнения 3 и 5 определены с точностью до ненулевого множителя).

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему прямоугольных координат и уравнение квадрики в ней. Доказательство основано на следующих двух леммах, соответствующих двум заменам координат, т.е.двум шагам приведения кривой к каноническому виду.

Лемма 17.1. *Подходящим поворотом осей координат можно добиться того, что* $a'_{12}=0$, *где штрих означает соответствующий коэффициент уравнения квадрики в новой системе координат.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный поворот:

$$\begin{pmatrix}(x\\ y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}.$$

Тогда $F'(x',y'):=F(x(x',y'),y(x',y'))=$

$$=a_{11}(\cos\phi x'-\sin\phi y')^2+2a_{12}(\cos\phi x'-\sin\phi y')(\sin\phi x'+\cos\phi y')+a_{22}(\sin\phi x'+\cos\phi y')^2+\text{линейная часть.}$$

$$a'_{12}=-a_{11}\cos\phi\sin\phi+a_{12}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)+a_{22}\cos\phi\sin\phi=(a_{22}-a_{11})\frac{\sin 2\phi}{2}+a_{12}\cos 2\phi.$$

Мы хотим найти такое ϕ, чтобы $a'_{12}=0$, т.е.

$$\operatorname{ctg}2\phi=\frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi}=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

Задача разрешима, так как если бы $a'_{12} = 0$, то не требовалось бы никакого поворота. В повернутой системе координат многочлен F примет вид

$$F'(x', y') = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = 0.$$

□

Лемма 17.2. *Многочлен указанного выше вида (строчка выше) параллельным переносом приводится к одному из следующих видов:*
(1) $F'' = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau, (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$;
(2) $F'' = \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'', (\lambda_2, b_1 \neq 0)$;
(3) $F'' = \lambda_2 (y'')^2 + \tau, (\lambda_2 \neq 0)$.

Доказательство. 1: $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Тогда выделяем полные квадраты:

$$F'(x', y') = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 y'\hat{}2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

$$\text{где} x'' := x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \text{- формулы замены координат, обратной к искомой.}$$

2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (если $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$, то поменяем координаты местами). Возможны 2 случая.

а) Если $b_1 \neq 0$, то

$$F'(x', y') = \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1 x' + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) = \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'',$$

где

$$x'' := x' + \frac{1}{2b_1}\left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right), y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \text{- формулы замены координат, обратной к искомой.}$$

б) Если $b_1 = 0$, то

$$F'(x', y') = \lambda_2 {y'}^2 + 2b_2 y' + b_0 = \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right) = \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

где

$$x'' := x', y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

- формулы замены координат, обратной искомой. Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы и разберем различные случаи уравнений из предыдущей леммы.
1). 1. λ_1 и λ_2 - одного знака, τ - противоположного. Получаем уравнение эллипса.
2. $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ - одного знака. Получаем уравнение мнимого эллипса.
3. λ_1, λ_2 - одного знака, $\tau = 0$. Пара пересекающихся мнимых прямых.
4. λ_1 и λ_2 - разных знаков, $\tau \neq 0$. Гипербола.
5. λ_1 и λ_2 - разных знаков, $\tau = 0$. Пара пересекающихся прямых.
2) 6. Парабола.
3) 7. $\tau < 0$. Пара параллельных прямых.
8. $\tau > 0$. Пара мнимых параллельных прямых.
9. $\tau = 0$. Пара совпадающих прямых. □

Следствие. Уравнение второй степени на плоскости задает одну из следующих кривых (как множество точек): эллипс; гипербола; парабола; пара пересекающихся прямых; пара параллельных прямых; пара совпадающих прямых; точка; пустое множество.

Определение 17.3. Преобразованием *называется взаимно-однозначное отображение множества на себя.*

Определение 17.4. *Отображение плоскости (пространства) в себя называется аффинным преобразованием, если найдутся такие две аффинные системы координат, что координаты любой точки в одной из них являются координатами ее образа в другой.*

Определение 17.5. *Аффинное преобразование называется изометрическим, если оно сохраняет расстояние между точками.*

Определение 17.6. *Две квадрики аффинно (соотв. метрически) эквивалентны, если одна из них может быть переведена в другую афинным (соотв. изометрическим) преобразованием, т.е. уравнение первой кривой в некоторой системе координат совпадает (с точностью до ненулевого множителя) с уравнением второй кривой в соответствующей отображенной системе для некоторого аффинного (соотв. изометрического) преобразования.*

Теорема 17.2. *Две квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.*

Доказательство. Достаточность. Всякая квадрика имеет в некоторой прямоугольной (канонической) системе координат каноническое уравнение одного из 9 типов, причем однозначно определенное. Пусть две квадрики имеют одинаковые канонические уравнения в двух системах. Тогда изометрия, переводящая первый репер во второй, переводит первую квадрику во вторую.

Необходимость. Рассмотрим две метрически эквивалентные квадрики. Рассмотрим каноническую систему Oxy для первой из них и ее образ $O'x'y'$ при данной изометрии. В первой системе квадрики имеют уравнения $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, причем F_1 - каноническое. Тогда вторая квадрика имеет 2 уравнения в новой системе координат: то же, что первая кривая имела в исходной системе, т.е. $F_1(x', y') = 0$ и то, что получается заменой координат, т.е. $F'_2(x', y') = F_2(x(x', y'), y(x', y')) = 0$. Т.о., $F_1(x', y') = 0$ - каноническое уравнение и для второй квадрики (с точностью до умножения на можитель). □

Лемма 17.3. *Для любой квадрики существует аффинная система координат, в которой она имеет одно из следующих уравнений:*

(1) $x^2 + y^2 = 1$, *эллипс;*
(2) $x^2 + y^2 = -1$, *мнимый эллипс;*
(3) $x^2 + y^2 = 0$, *пара пересекающихся мнимых прямых;*
(4) $x^2 - y^2 = 1$, *гипербола;*
(5) $x^2 - y^2 = 0$, *пара пересекающихся прямых;*
(6) $y^2 - 2x = 0$, *парабола;*
(7) $y^2 - 1 = 0$, *пара параллельных прямых;*
(8) $y^2 + 1 = 0$, *пара мнимых параллельных прямых;*
(9) $y^2 = 0$, *пара совпадающих прямых.*

Доказательство. Берем каноническое уравнение и растягиваем оси. □

Теорема 17.3. *Две квадрики аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство. По лемме, аналогично теореме о метрической классификации, получаем, что квадрики одного названия аффинно эквивалентны.

Обратно, докажем, что квадрики с различными названиями аффинно неэквивалентны.

У коник никакие три точки не лежат на одной прямой, в отличие от остальных квадрик.

Поскольку при аффинных преобразованиях сохраняется условие числа точек пересечения и деления в днном отношении, то центр переходит в центр, а асимптотическое направление - в асимптотическое.

Так как у параболы нет центра, а у эллипса и гиперболы - есть, причем у эллипса нет асимптотических направлений, а у гиперболы - есть, то эллипс, гипербола и парабола аффинно неэквивалентны.

Пара прямых различаются геометрически.

Наконец, у мнимого эллипса нет асимптотических направлений, а у пары мнимых параллельных прямых - есть. □

Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

При этом требуется, чтобы квадратичная часть была отлична от 0.

Как и раньше будем называть квадрикой многочлен второй степени с точность до умножения на ненулевой множитель.

Определение аффинной и метрической эквивалентности квадрик в пространстве полностью аналогично случаю плоскости.

Теорема 17.4. *Две квадрики в пространстве метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.*

Проективная классификация кривых

Определение 17.7. Пополненная плоскость - *это плоскость, к которой присоединены некоторые "бесконечно удаленные"элементы (точки) - несобственные точки. Несобственный пучок (параллельные прямые) пересекается в несобственной точке, собственный пучок - в собственной. Объединение всех несобственных точек называется* **несобственной прямой**.

Если забыть о том, что некоторые точки несобственные, т.е. присоединенные, то переходим к понятию *проективной плоскости.*

Почему так сложно вводилось и в чем разница между пополненной и проективной плоскостью? В пополненной выделяются несобственные точки (и то, что они отличаются от собственных), в проективной все "равнозначы".

Определение 17.8. *Точка называется* **инцидентной** *прямой, если точка лежит на этой прямой. Прямая называется* **инцидентной** *точке, если она проходит через эту точку.*

Аксиомы на проективной плоскости:

A1. Для любых двух различных точек существует единственная прямая, инцидентная им.

A2. Для любых двух различных прямых существует единственная точка, инцидентная им.

Принцип двойственности. *Если верно какое-то общее утверждение о точках, прямых и инцидентности между ними на проективной плоскости, то верно и двойственное утверждение, в котором точки и прямые меняются местами.*

Отметим, что на обычной плоскости принцип двойственности не выполняется: аксиома A1 верна, а A2 - нет (параллельные прямые).

Определение 17.9. Связкой *прямых и плоскостей с центром в в трехмерном пространстве называется множество всех прямых и плоскостей, проходящих через данную точку O. Прямая связки инцидентна плоскости, если она в ней содержится, плоскость связки инцидентна прямой, если она через нее проходит.*

Теорема 8.1 (из курса линейной алгебры). *Пусть в некоторой прямоугольной системе координат задана квадратичная часть $q(x, y, z)$. Тогда найдется другая прямоугольная система координат с тем же началом, в которой квадратичная часть примет диагональный вид*

$$q'(x', y', z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения Q, т. е. корни характеристического многочлена

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = 0,$$

а новые базисные вектора $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ являются соответствующими собственными векторами. В частности, все собственные значения вещественны, а собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Лемма 8.2. *Для любого многочлена второй степени в пространстве существует прямоугольная система координат, в которой он принимает один из следующих пяти видов:*

(i) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \tau \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$;
(ii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z \qquad (\lambda_1\lambda_2 b_3 \neq 0)$;
(iii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau \qquad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
(iv) $F = \lambda_1 x^2 + 2c_2 y \qquad (\lambda_1 c_2 \neq 0)$;
(v) $F = \lambda_1 x^2 + \tau \qquad (\lambda_1 \neq 0)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы можем найти такую прямоугольную систему, в которой квадратичная часть диагональна, т. е.

$$F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + b_0 = 0.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

Определение 17.10. Перспективное соответствие *осуществляет взаимно однозначное отображение пополненной плоскости на связку, т.е. отображение точек пополненной плоскости на множество прямых связки, определяемое следующим образом.*

Рассмотрим пополняемую плоскость π как лежащую в трехмерном пространстве. Пусть точка O не принадлежит π и определяет связку. Каждой собственной точке π поставим в соответствие единственную прямую связки O, проходящую через нее. Каждой несобственной точке π, т.е. направлению или пучку на π, поставим в соответствие единственную прямую свзки, имеющую то же направление.

(i) При $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(x + \frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2 +$$

$$+\left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2} - \frac{(b_3)^2}{\lambda_3}\right) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \tau.$$

(ii) При $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2\beta_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_3z + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_3z + \tau = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2b_3\left(z + \frac{\tau}{2b_3}\right) =$$

$$= \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2b_3z'.$$

(iii) При $\lambda_3 = \beta_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \tau.$$

(iv) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ и хотя бы один из b_2 и b_3 не равен нулю. Тогда имеем

$$F = \lambda_1\left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2b_2y + 2b_3z + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1(x')^2 + 2c_2y',$$

где

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b_1}{\lambda_1}, \qquad\qquad c_2 = \sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2} \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}}\left(b_2y + b_3z + \frac{1}{2}\left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right)\right) \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2 + (b_3)^2}}\left(-b_3y + b_2z\right). \end{aligned}$$

Такая “нормировка” функций перехода гарантирует ортогональность соответствующей матрицы и, тем самым, что замена прямоугольная.

Если же $b_2 = b_3 = 0$, то мы сразу имеем выражение конечного вида.

(v) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = b_2 = b_3 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1 (x')^2 + \tau.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 8.3. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих 17 видов:*

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ (*эллипсоид*);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ (*мнимый эллипсоид*);

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*однополостный гиперболоид*);

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*двуполостный гиперболоид*);

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*конус (второго порядка)*);

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*мнимый конус (второго порядка)*);

7) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$, $(p \geqslant q > 0)$ (*эллиптический параболоид*);

8) $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$, $(p \geqslant q > 0)$ (*гиперболический параболоид*);

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*эллиптический цилиндр*);

10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*мнимый эллиптический цилиндр*);

11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*две мнимые пересекающиеся плоскости*);

12) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*гиперболический цилиндр*);

13) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*две пересекающиеся плоскости*);

14) $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ (*параболический цилиндр*);

15) $y^2 = a^2$, $(a > 0)$ (*две параллельных плоскости*);

16) $y^2 = -a^2$, $(a > 0)$ (*две мнимых параллельных плоскости*);
17) $y^2 = 0$, (*две совпадающих плоскости*).

Доказательство. Сначала применяем лемму, а потом для каждого из типов (i)–(v) рассматриваем все случаи. Например, возьмем (i). Возможны случаи:

Если все λ_i одного знака, а τ — противоположного, то делением на $-t$ и переменой осей уравнение приводится к виду 1) (эллипсоид).

Если все λ_i и τ одного знака, то делением на t и переменой осей уравнение приводится к виду 2) (мнимый эллипсоид).

Если все λ_i одного знака, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 6) (мнимый конус).

Если λ_i разных знаков, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 5) (конус).

Если λ_i разных знаков, причем у одного тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 3) (однополостный гиперболоид).

Если λ_i разных знаков, причем у двух тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 4) (однополостный гиперболоид).

Таким образом, случай (i) дает 1)–6). Аналогично с другими:

(i)	1, 2, 3, 4, 5, 6
(ii)	7, 8
(iii)	9, 10, 11, 12, 13
(iv)	14
(v)	15, 16, 17

□

Теорема 8.4. *Каноническое уравнение определено однозначно (для видов* $5, 6, 11, 13$ *— с точностью до множителя).*

Доказательство. Так же, как и в случае кривых, доказывается, что коэффициенты (в частности, определитель δ и след S) и корни λ_i характеристического многочлена матрицы Q являются ортогональными инвариантами, а также определитель Δ матрицы A. Также инвариантны ранги r и R матриц Q и A.

Тогда поверхность однозначно относится к одному из типов (i)–(v), так как

(i)	$r=3$; $R=3$ или $R=4$
(ii)	$r=2$, $R=4$
(iii)	$r=2$, $R=2$ или $R=3$
(iv)	$r=1$, $R=3$
(v)	$r=1$, $R=1$ или $R=2$

Внутри типа (i) λ_i — инварианты, а $\tau=\Delta/\delta$. Внутри типа (ii) λ_1,λ_2 — инварианты, а $(b_3)^2=-\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}$.

Остальные поверхности, являясь цилиндрическими, имеют канонические уравнения, не содержащие z. Допустим, имеется замена прямоугольных координат, переводящая одно из таких уравнений в другое. Тогда x и y не зависят от z' (и поэтому доказательство сводится к доказанному двумерному случаю). Покажем это, например, для уравнения вида $\lambda x^2+\mu y^2+\tau=0$. Пусть $x=c_{11}x'+c_{21}y'+c_{31}z'+c_1$ и $y=c_{12}x'+c_{22}y'+c_{32}z'+c_2$, а результирующее выражение не зависит от z'. Тогда

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda c_{11}c_{31} & = & -\mu c_{12}c_{32} \\
\lambda c_{21}c_{31} & = & -\mu c_{22}c_{32} \\
\lambda c_{31}c_{31} & = & -\mu c_{32}c_{32} \\
\lambda c_{1}c_{31} & = & -\mu c_{2}c_{32},
\end{array}
$$

в частности, если хотя бы одно из c_{31} и c_{32} отлично от 0, то две первые строки матрицы перехода линейно зависимы и получаем противоречие.

Уравнения распадающихся поверхностей (11, 13, 15, 16, 17) определяются однозначно также из геометрических соображений (теория плоскостей). □

Теорема 8.42. *Две квадрики в пространстве аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство теорем дословно повторяет случай кривых, за исключением доказательства аффинной неэквивалентности поверхностей с разными названиями. Проведем его.

Прежде всего заметим, что ранги r и R являются аффинными, а не только ортогональными инвариантами. Поэтому надо доказать неэквивалентность лишь в пределах каждого из классов (i)–(v).

Точка (мнимый конус), прямая (пара мнимых пересекающихся плоскостей), пара параллельных, пересекающихся или совпадающих плоскостей, очевидно, аффинно неэквивалентны ни друг другу, ни другим поверхностям. Для пустых множеств: мнимый эллиптический цилиндр имеет 1 асимптотическое направление, мнимый эллипсоид не имеет асимптотических направлений, пара мнимых параллельных плоскостей имеет целую плоскость асимптотических направлений.

Кроме того, эллипсоид ограничен в отличие от других нерассмотренных поверхностей. В типе (ii) остался один конус. Для оставшихся имеем

Тип	Название	Наличие центров	Прямолин. образующие
(i)	однополостный гиперболоид	1	есть
	двуполостный гиперболоид	1	нет
	эллиптический параболоид	нет	нет
	гиперболический параболоид	нет	есть

Тип	Название	Наличие центров	Асимптот. направления
(iii)	эллиптический цилиндр	прямая	одно
	гиперболический цилиндр	прямая	две плоскости
	параболический цилиндр	нет	

Теорема доказана. □

Очевидно, что при перспективном соответствии прямые переходят в плоскости и сохраняется отношение инцидентности. Поэтому прямые связки называют "точками а плоскости - "прямыми"данной модели проективной плоскости.

Определение 17.11. *Если аффинное преобразование пространства оставляет центр связки на месте, то оно отображает прямые, проходящие через O, в некоторые другие прямые, проходящие через O. Возника-*

ющее таким образом отображение связки в себя называют **проективным**.

Кривая второго порядка *на проективной плоскости определяется как однородное уравнение второго порядка в некоторой однородной системе координат:*

$$q(x) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 +$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}(x_3)^2 = 0.$$

Очевидно, что при проективном преобразовании она перейдет в кривую второго порядка, и что определение корректно, т. е. не зависит от умножения тройки однородных координат на ненулевой множитель.

По той же теореме из линейной алгебры, которой мы пользовались, когда говорили о поверхностях, существует такая проективная замена координат, что в новой системе уравнение примет вид

$$q'(x') = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2 = 0.$$

В зависимости от знаков λ_i возможны пять случаев:

$\boxed{1}$ λ_1 и λ_2 одного знака, а λ_3 — противоположного, заменой базиса уравнение приводится к виду $(x''_1)^2 + (x''_2)^2 - (x''_3)^2 = 0$.

$\boxed{2}$ все λ_i одного знака, уравнение приводится к виду

$$(x''_1)^2 + (x''_2)^2 + (x''_3)^2 = 0.$$

$\boxed{3}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 разных знаков, тогда $(x''_1)^2 - (x''_2)^2 = 0$.

$\boxed{4}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 одного знака, тогда $(x''_1)^2 + (x''_2)^2 = 0$.

$\boxed{5}$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тогда $(x''_1)^2 = 0$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.28. *Существует система однородных координат, в которой данная кривая второго порядка имеет один из следующих видов:*

$\boxed{1}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0$	(овал)
$\boxed{2}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$	(мнимый овал)
$\boxed{3}$	$(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0$	(пара различных прямых)
$\boxed{4}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$	(пара мнимых прямых)
$\boxed{5}$	$(x_1)^2 = 0$	(пара совпавших прямых)

Теорема 9.29. *Существует ровно пять указанных классов эквивалентности кривых второго порядка относительно проективных преобразований.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы нужно только показать, что кривые из разных классов неэквивалентны. Это

18 Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

Дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение 18.1. *ДУ первого порядка называется уравнение вида $f(x, y, y') = 0$ или $y' = F(x, y)$*

Определение 18.2. *Решение ДУ первого порядка - ф-я $y = \phi(x)$ один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество*

Определение 18.3. **Общее решение** *ДУ - совокупность функций, содержащих все решения уравнения.*

Определение 18.4. **Частное решение** *ДУ - решение, полученное из формулы общего решения при некотором значении $C = C_0$*

Теорема о существовании и единственности решения. *Задача Коши для ДУ первого порядка: найти решение уравнения $y' = F(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, то есть задача*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{18.1}$$

Определение 18.5. *Будем говорить, что задача Коши 18.1 имеет единственное решение, если $\exists h, h > 0$, что в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ определено $y = \phi(x)$, являющееся решением задачи Коши, и не существует решения определенного в том же интервале, и не совпадающего с решением $y = \phi(x)$ хотя бы в одной точке этого интервала, отличной от точки x_0.*

Теорема 18.1. *Пусть функция $F(x, y)$*

1) определена и не прерывна по совокупности переменных в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$, тогда существует решение задачи Коши, определенная на $V_h(x_0) = \{x_0 - h, x_0 + h\}$, где $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, M это $\max_\Pi F(x, y)$;

2) если производная $F'_y(x, y)$ определена и непрерывна в Π, то решение задачи Коши единственно в $V_h(x_0)$.

Замечание 1.1 *Теорема носит локальный характер, то есть утверждается существование и единственность решения лишь в некоторой окрестности точки x_0*

Замечание 1.2 *Теорема даёт лишь достаточные условия существования и единственности, которые можно ослабить, заменив, например, второе условие условием Липшица.*

Определение 18.6. **Функция** $F(x, y)$ **удовлетворяет условию Липшица по** y **в** Π, *если существует такое $L > 0$, что для всех (x, y_1), $(x, y_2) \in \Pi$ имеем $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$*

Доказательство. теоремы 18.1 с учетом условия Липшица.
I. Существование

Запишем интегральное уравнение
$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{18.2}$$

Решением уравнения 18.2 называется непрерывная функция, обращающая уравнение в тождество.

Лемма 18.1. *(Об интегральном уравнении). Функция $y(x)$ является решением уравнения 18.2 тогда и только тогда, когда она является решением задачи 18.1*

Доказательство. Леммы 18.1. Пусть $y(x)$ - решение системы, тогда оно удовлетворяет тождеству $y' = f(x, y(x))$

Проинтегрируем:

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Функция $y(x)$ непрерывна. Учитывая н.у. 18.1, получаем, что $y(x)$ - решение уравнения 18.2.

Пусть $y(x)$ - решение уравнения 18.2. Функция $f(x, y)$ непрерывна по условию, функция $y(x)$ - по определению решения. Продифференцируем уравнение 18.2:

$$y' = f(x, y(x))$$

Кроме того, $y(x_0) = y_0$. Лемма доказана. $\square$

Далее будем рассматривать решение интегрального уравнения 18.2.

Метод последовательных приближений. *Пусть:*

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \qquad y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds, \text{тогда по ММИ} \qquad y_m(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_{m-1}(s))ds.$$

Предположим, что эта последовательность сходится к $\bar{y}(x)$, и разрешен предельный переход под знаком интеграла и функции f. Тогда при $m \to \infty$ получим:

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \bar{y}(s))ds \tag{18.3}$$

то есть $\bar{y}$ - решение уравнения 18.2, а, следовательно, и задачи Коши 18.1. Непрерывность функции $\bar{y}(x)$ будет доказана позже.

1) Докажем, что все функции последовательности $y_m(x)$ определены и непрерывны в $U_h(x_0)$ и не выходят за Π, то есть $|y_k(x) - y_0| < b$, $k = 1, 2, \dots$ при $|x - x_0| < h$, где $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \sup_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$. (Для всех точек $(x, y) \in \Pi$ выполняется $f(x, y) \in C(\Pi)$, и, так как Π - замкнуто и ограничено, то M - конечно)

По ММИ. База: $k = 1$: Рассмотрим $y_1(x)$. Она непрерывна при $|x - x_0| \le a$, так как $f(x, y)$ непрерывна, а интеграл с переменным верхним пределом – непрерывная ф-я на том же отрезке. Если т. $(x, y) \in \Pi$, то при $|x - x_0| < h$ для неё выполняются условия :

$$|y_1(x) - y_0| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds| \le |\int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|ds| \le M|x - x_0| \le b$$

Далее, пусть это утверждение справедливо для $y_{n-1}(x)$, то есть выполняется $|y_{n-1}(x)-y_0| \le M|x-x_0| \le b$. Для функции $y_n(x)$ получим

$$y_n(x) - y_0 \le |\int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s))|ds|.$$

Так как $(s, y_{n-1}(s)) \in \Pi$, то $|f(s, y_{n-1}(s))| \le M$, поэтому:

$$|y_n(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le b \tag{18.4}$$

2) Докажем, что послед-ть ф-й $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится р/м к $\bar{y}(x)$, ($y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x)$) на отрезке $|x - x_0| \le h$.

Построим такой ряд, чтобы послед-сть $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являлась послед-стью его частных сумм:

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots \tag{18.5}$$

Докажем р/м сходимость этого ряда, используя признак Вейерштрасса. Для этого докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}|x - x_0|^n/n! \le ML^{n-1}h^n/n!$$

По ММИ. База: $n = 1$. Тогда согласно 18.4: $|y_1(x) - y_0(x)| \le M|x - x_0|$
Пусть для $n = k$ неравенство доказано. Докажем его для $n = k + 1$:

$$|y_{k+1}(x)\breve{\ }y_k(x)| \le |\int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))|ds| \le |\int\limits_{x_0}^{x} L|y_k(s) - y_{k-1}(s)|ds| \le$$

$$\le L\int\limits_{x_0}^{x} \frac{ML^{k-1}|x - x_0|^k}{k!} = \frac{ML^k|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Так как $|x - x_0| \le h$, получаем требуемое неравенство: $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{ML^{n-1}h^n}{n!}$

Ряд $\sum \frac{L^{n-1}h^n}{n!}$ *сходится (признак Даламбера). Таким образом, по признаку Вейерштрасса ряд 18.5 сходится равномерно, и его сумма* $\bar{y}(x)$ *является непрерывной функцией.*

3) Докажем, что $\bar{y}(x)$ *- решение задачи Коши 18.1. Для этого докажем, что эта ф-я - решение 18.3.*

Используем условие Липшица и р/м сходимость послед-сти $\{y_n(x)\}$ *к* $\bar{y}(x)$*, получим, что* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$*, что при всех* $n \geq N$ *будет выполняться неравенство:*

$$|\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds - \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \bar{y}(s))ds| \leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y_n(s)) - f(s, \bar{y}(s))|ds \leq L \int\limits_{x_0}^{x} |y_n(s) - \bar{y}(s)|ds \leq$$

$$\leq L\varepsilon|x - x_0| \leq L\varepsilon h.$$

Т.о., мы обосновали законность предельного перехода под знаком интеграла, откуда следует, что $\bar{y}(x)$ *- решение 18.3* $\rightarrow$ *и задачи Коши 18.1.*

II. Единственность
Пусть $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *- решения задачи Коши 18.4, тогда они могут быть записаны в следующем виде:*

$$y_1(x) = y_o + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds, y_2(x) = y_o + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds.$$

Получим оценку для их разности:

$$0 \leq |y_1(x) - y_2(x)| \leq |\int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|ds| \leq L|\int\limits_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|ds| \leq$$

$$\leq Lh \sup_{|x - x_0| \leq h} |y_1(x) - y_2(x)| \leq Lh^2M \rightarrow 0$$

откуда следует, что

$$(1 - Lh) \sup_{|x - x_0| \leq h} |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0$$

И, выбирая h *так, чтобы* $h < \frac{1}{L}$*, получим*

$$\sup_{|x - x_0| \leq h} |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0$$

Таким образом, $y_1(x) \equiv y_2(x)$*.* $\square$

19 Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение.

Определение 19.1. *ЛНУ с произвольными коэффициентами порядка 2 имеет вид:*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{19.1}$$

где $a_j(x)$ $(j = 0, 1, 2)$, $f(x)$ - непрерывные на интервале (a, b) функции. Тогда для любого x_0 из интервала (a, b) и любых y_0, y_1, y_2 существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Пусть L - линейный оператор, определяемый формулой:

$$Ly = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

тогда уранение 19.1 можно записать в виде

$$Ly = f(x) \tag{19.2}$$

Будем также рассматриать однородное уравнение

$$Ly = 0 \tag{19.3}$$

***Свойства линейного оператора** L*

1) $L(\alpha y) = \alpha L y$, при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in C)$

2) $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ при любых y_1 и y_2, удовлетворяющих 19.3

Свойства уравнений 19.2 и 19.3 - не надо

1) Уравнения остаются линейными при любой непрерывно дифференцируемой 2 раза замене независимой переменной $x = \varpi(t)$

2) Уравнения остаются линейными при линейной замене неизвестной функции $y(x) = a(x)z(x) + b(x)$, где $a(x)$, $z(x)$ и $b(x)$ - непрерывно дифференцируемые 2 раза функции.

Свойства решений уравнения 19.3 - не надо

1) Если $y(x)$ - решение уравнения 19.3, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in C)$ функция $y_1(x) = \alpha y(x)$ также является решением этого уравнения

2) Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решение уравнения 19.3, то функция $y_(x) = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения

3) Если $y_1(x)$, $\ldots$ $y_n(x)$ - решение уравнения 19.3, то функция $y_(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ также является решением этого уравнения.

Линейная зависимость функций. Определитель Вронского.

Определение 19.2. *Функция $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$ только в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$*

Определение 19.3. *Функция $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ называются линейно зависимыми, если существуют такие $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равные нулю, что линейная комбинация $\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$*

Необходимое и достаточное условие линейной зависимости функций

Функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда одна из этих функций линейно выражается через остальные, то есть существуют такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, что

$$f_i(x) = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \alpha_k f_k(x), i = 1, \ldots n$$

Пусть функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ имеют производные до $n-1$ - го порядка. Тогда определитель

$$W(y_1 \dots y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \text{ - } \textbf{определитель Вронского}$$

Теорема 19.1. *Если система функций линейно зависима, то их определитель Вронского равен 0.*

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы. Тогда существуют такие постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Без ограничения общности рассуждений можем считать, что $\alpha_n \neq 0$. Тогда

$$y_n(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \dots - \frac{\alpha_(n-1)}{\alpha_n} y_{n-1}(x)$$

Вычеслим $y_n'(x), \dots, y_n^{(n-1)}$ и подставим полученные значения в определитель Вронского вместо последнего столбца. При этом получится определитель, у которого последний столбец есть линейная комбинация предыдущих $(n-1)$ столбцов. А такой определитель равен 0. □

Лемма 19.1. *(ХЗ)Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно не зависимые решения уравнения $Ly = 0$, то определитель Вронского $W(y_1, \dots, y_n)$ не обращается в 0 ни в одной точке области существования решений уравнения. (Если $a_1(x), \dots, a_n(x) \in (a, b)$, то $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ ни при каком $x_0 \in (a, b)$)*

Доказательство. Доказательство проведём от противного. Пусть существует $x_0 \in (a, b)$, такой, что $W(x_0) = 0$, то есть

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрим функцию $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$. По свойству решений уравнения 19.3, если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ есть решения уравнения $Ly = 0$, то и их линейная комбинация также является решением этого уравнения. Следовательно, $y(x)$ - решение уравнения $Ly = 0$. Вычеслим производные этой функции до $(n-1)$ порядка:

$y'(x) = C_1 y_1'(x) + \dots + C_n y_n'(x)$,

$\dots$,

$y^{(n-1)}(x) = C_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x)$ (19.4)

Вычислим значение функции $y(x)$ и её производных в точке x_0. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \end{cases} \tag{19.5}$$

Это линейная однородная система уравнений, главный определитель которой есть определитель Вронского с неизвестными $C_1, \dots, C_n$. Так как главный определитель системы по предположению равен 0, то существует ненулевое решение этой системы: $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$.

Подставим эти $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в функцию $y(x)$ и 5.4, получим:

$$\begin{cases} y(x) = C_1^0 y_1(x) + \dots + C_n^0 y_n(x), \\ y(x) = C_1^0 y_1'(x) + \dots + C_n^0 y_n'(x), \\ \dots \\ y(x) = C_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n^0 y_n'(x), \end{cases}$$

В точке x_0 из системы 19.5 имеем:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В частности, этими данными Коши обладает нулевое решение. А по теореме существования и единственности, которая выполняется в силу предположения леммы, любое решение, имеющее тот же набор данных Коши, должно с ним совпадать. Отсюда имеем $y(x) \equiv 0$. Таким образом, получили, что существуют такие константы $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, не все равные 0, что

$$C_1^0 y_1(x) + \dots + C_1^0 y_n(x) = 0$$

то есть решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы. □

Теорема 19.2. *(ХЗ)Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ - решения линейного однородного дифференциального уравнения $Ly = 0$. Эти функции являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда определитель Вронского $W(y_1, \dots, y_n)$ равен 0.*

Доказательство.
1) Если решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы, то определитель Вронского равен 0 в силу теоремы о равенстве нулю определителя Вронского для любой системы линейно зависимых функций (необязательно решений уравнения).
2) Если определитель Вронского равен 0, то в силу леммы 19.1 решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линено зависимы □

Фундаментальная система решений.

Определение 19.4. *Система n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n называется* ***фундаментальной системой решения***

Из доказанных ранее теорем следует, что система n решений данного линейного однородного дифференциального уравнения порядка n является фундаментальной тогда и только тогда, когда её определитель Вронского не равен 0.

Любое решение линейного однородного дифференциального уравнения порядка n есть линейная комбинация его фундаментальных решений.

Утверждение. *Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n не может иметь более чем n линейно независимых частных решений.*

Доказательство. Действительно, рассматрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ - частные решения этого уравнения. Рассмотрим первые n решений.

1) Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ - линейно зависимые, тогда существуют такие постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные 0, что $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Добавим к этой сумме слагаемое $0 * y_{n+1}(x)$. Получим $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) + 0 * y_{n+1}(x) = 0$. Так как не все α_i равны 0, а линейная комбинация обращается в нуль, следовательно $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ - линейно зависимы.

2) Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ - линейно независимые, тогда $y_1(x), \dots, y_n(x)$ являются фундаментальной системой решения. А так как $y_{n+1}(x)$ - также решение, то его можно представить в виделинейной комбинаци

$$y_{n+1}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Следовательно, $y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ - линейно зависимы. Тем самым доказали, что любые $(n+1)$ решений линейного ОДУ порядка n являются линейно зависимыми. □

(ХЗ) Построение решения линейного ОДУ. *Для построения требуется найти n линейно независимых частных решений, а затем взять их линейную комбинацию.*

(ХЗ) Линейное неоднородное уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Теорема 19.3. *(ХЗ)Если y_1 - частное решение линейного неоднородного уравнения, то общее решение этого уравнения даётся формулой:*

$$y = y_1 + z,$$

где z - общее решение соответствующего линейного однородного уравнения
Доказательство аналогично случаю линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка

Теорема 19.4. *(ХЗ)Если правую часть уравнения можно представить в виде*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение имеет вид:

$$y = y^{(1)} + y^{(2)},$$

где $y^{(1)}$ - частное решение уравнения $LY = f_1(x)$, а $y^{(2)}$ - частное решение уравнения $LY = f_2(x)$

20 Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.

Линейные ОДУ высших порядков с постоянными коэф-ми

Линейное ОДУ с постоянными коэффициентами порядка n имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \text{ где } a_j = const, \ (j = 0, \ldots, n) \tag{20.1}$$

Чтобы решить его, необходимо составить характерестческое ураавнение:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{20.2}$$

и найти все его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения 20.1 есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_j e^{\lambda_j x}$ для каждого простого корня λ_j уравнения 20.2 и слагаемых вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня λ кратности k уравнения 20.2. Здесь все C_j - произвольные постоянные.

Если все коэффициенты a_j уравнения 20.1 вещественные, то слагаемые, отвечающие комплексным корням $\lambda = \alpha \pm i\beta$ уавнения 20.2, можно записать в вещественной форме:

$$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и

$$P_{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\lambda = \alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} - многочлены от x степени $k-1$. Их коэффициенты - произвольные постоянные.

Линейные НДУ с постоянными коэф-ми и правой частью специального вида

Имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \text{ где } a_j = const, \ (j = 0, \ldots, n) \tag{20.3}$$

Если правая часть $f(x)$ состоит из сумм и поизведений функций вида $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, e^{ax}, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, частное решение можно искать МНК.

Для у-й с правой частью $f(x) = P_m(x) e^{ax}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, есть частное решение вида

$$y_1 = x^r Q_m(x) e^{ax}, \tag{20.4}$$

где $Q_m(x)$ - многочлен с неопр-ми коэф-ми степени m. Число $r = 0$, если a - не корень характерестического у-я 20.2, а если a - корень, то r равно кратности этого корня. Чтобы найти коэф-ты многочлена $Q_m(x)$, надо решение 20.4 подставить в диффер-ное у-е и приравнять коэф-ты при подобных членах в левой и правой частях у-я.

Если в правую часть уравнения входят $\cos bx$ и $\sin bx$, то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера. Если же коэф-ты a_j левой части уравнения 20.3 вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx) \tag{20.5}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^r e^{ax}(R_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx) \tag{20.6}$$

где $r = 0$, если $a + ib$ не корень характ-ского у-я, и r равно кратности корня $a + ib$ в противном случае, а R_l и T_l - многочлены степени l, равной наибольшей из степеней m и n многочленов P и Q. Чтобы найти коэф-ты многочленов R_l и T_l, надо подставить решение 20.6 в 20.3 и приравнять коэф-ты при подобных членах.

Если правая часть у-я равна сумме нескольких функций вида 20.5, то частное решение линейного у-я с правой частью $f_1 + f_2 + \cdots + f_p$ равно сумме частных решений у-й с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного НДУ во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Линейные НДУ с постоянными коэф-ми и правой частью произвольного вида

Линейное НДУ 20.3 с непрерывной правой частью $f(x)$ произвольного вида решается методом вариации произвольных постоянных. Пусть найдено общее решение $y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n$ соответствующего линейного однородного уравнения. Тогда решение уравнения 20.3 ищется в виде $y = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n$.
Функции $C_k(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'y_1 + \dots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + \dots + C_n'y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + \dots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0}, \end{cases}$$

где a_0 - коэф-ты при старшей производной в уравнении 20.3

21 21 Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - функция комплексного переменного. С вещественной точки зрения $z = x+iy, f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, т.е. $(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$. Таким образом все основные определения вещественного анализа - предел последовательности, предел функции, непрерывность, открытость, замкнутость, компактность, связность и односвязность - имеют место быть и в комплексном анализе.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки z.

***Определение**: Функция f называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z, если существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} =: f'(z)$ Обозначим $\Delta f := f(z+\Delta z) - f(z)$, $\alpha(z, \Delta z) := \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)$*

***Равносильное определение**: Функция f называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z, если $\Delta f = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z$.*

***Определение**: $f = u(x,y) + iv(x,y)$, определенная в окрестности точки $z = x + iy$, называется $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z, если:*

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) = u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) = v(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Складываем первое равенство со вторым, умноженным на i, получаем:

$$f(z+\Delta z) = f(z) + (\frac{\partial u(z)}{\partial x} + i\frac{\partial v(z)}{\partial x})\Delta x + (\frac{\partial u(z)}{\partial y} + i\frac{\partial v(z)}{\partial y})\Delta y + o(|\Delta z|)$$

Обозначим $\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$

$$f(z+\Delta z) = f(z) + \frac{\partial f(z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(z)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|),$$

где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \Delta x = \frac{\Delta z + \Delta\overline{z}}{2}, \Delta y = \frac{\Delta z - \Delta\overline{z}}{2i}$

$$f(z+\Delta z) = f(z) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - i\frac{\partial f(z)}{\partial y})\Delta z + \frac{1}{2}(\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i\frac{\partial f(z)}{\partial y})\Delta\overline{z} + o(|\Delta z|)$$

Обозначим: $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$ Тогда

$$f(z+\Delta z) = f(z) + \frac{\partial f(z)}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\Delta\overline{z} + o(|\Delta z|)$$

***Определение**: Операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ называются формальными частными производными.*

***Утверждение**: $\mathbb{C}$-дифференцируемость функции f в точке z эквивалентна $\mathbb{R}$-дифференцируемости при условии $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. (Правило дифференцирования: забыть, что $\overline{z}$ -функция от z, считать их независимыми.)*

Условие $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ называется условием Коши-Римана.

Эквивалентно $\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)) = 0$ или

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$ - расстояние от точки $O(0,0)$ до точки $M(x,y)$.

Аргумент комплексного числа $\phi = arg z$ - полярный угол точки $M(x,y)$, $tg\phi = \frac{y}{x}$.

Модуль производной означает, что коэффициент масштабирования одинаков в любом направлении от точки z, то есть не зависит от направления. Вообще говоря, коэффициент масштабирования меняется от точки к точке.

Если коэффициент масштабирования $|z| > 1$, то в окрестности точки z расстояния между точками увеличиваются, и коэффициент масштабирования называют коэффициентом растяжения. Если коэффициент масштабирования $|z| < 1$, то в окрестности точки z расстояния между точками уменьшаются, и коэффициент масштабирования называют коэффициентом сжатия. Пример для функции $f(z) = z^2+2z-1$ в точке $z = 1$ производная равна 4, поэтому все длины увеличиваются в четыре раза.

Что касается аргумента производной, то он определяет угол поворота гладкой кривой, проходящей через данную точку z. Все гладкие кривые при таком отображении поворачиваются на один и тот же угол.

22 22 Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.

Определение: *Функция f, определенная в области D и имеющая $\mathbb{C}$-производную в каждой точке области D, называется голоморфной (или аналитической или регулярной) в этой области.*

Рассмотрим произвольную функцию $f(z)$, голоморфную в некоторой окрестности точки a. Пусть $f(a) = b$. Рассмотрим гладкую кривую $z(t) : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{C}$, такую, что $z(0) = a$. Рассмотрим также образ этой кривой при отображении f, то есть $f(z(t))$. Обозначим через e касательный вектор к кривой $z(t)$, т.е. $\frac{dz}{dt}(0)$. Тогда $\frac{df(z(t))}{dt}(0) = df|_a e$. Таким образом, геометрический смысл комплексного дифференциала: происходит гомотетия (преобразование подобия) с коэффициентом $|df|$ и поворот на угол $arg df$. При этом сохраняются углы и ориентация.

Определение: *Линейное отображение, сохраняющее углы и ориентацию, называется конформным.*

Определение: *Дробно-линейным преобразованием называется преобразование, выражающееся в виде частного двух линейных функций*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$$

.

Примерами простейших многозначных функций являются $\log \sqrt{z}$ и $\sqrt[n]{z}$.

Основные элементарные функции:

1. *Параллельный перенос $z \to w = z + a$*
2. *Гомотетия $z \to w = kz$*
3. *Поворот $z \to w = \exp i\phi z$*
4. *Не элементарная, но стоит помнить: функция Жуковского*
   $z \to w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Вот картиночки отсюда: http://natalibrilenova.ru/blog/1353-konformnye-otobrazheniya.html Это туча конформных отображений, достаточно основных. Чисто чтобы вспомнить вообще, что происходит.

23 23 Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

***Теорема Коши**: Пусть D ограниченная область с кусочно-гладкой границей, функция $f(z)$ голоморфна в D и $f \in C^1(\overline{D})$. Тогда $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$.*

Замечание: Компоненты границы имеют согласованную ориентацию: при обходе вдоль границы область остается слева.

Доказательство: Используется результат теоремы Стокса $\int_{\partial D} w = \int_D dw$.

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz)$$

.

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

Так как функция голоморфна, то $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, то есть $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$. Значит $d(f(z)dz) = f'(z)dz \wedge dz = 0$, поскольку $dz \wedge dz = 0$. Отсюда следует, что $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Замечание: условия теоремы заведомо выполнены, если $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}$.

***Теорема (Интегральная формула Коши)**: Пусть D - область с кусочно-гладкой границей γ, $f(z)$ голоморфна в D и $f \in C^1(\overline{D})$. Тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.*

Доказательство: Пусть пока область ∂D односвязна. Фиксируем точку $z \in D$. Рассмотрим область $D_\varepsilon := D \backslash \overline{C_\varepsilon}$, где C_ε - круговая окрестность точки z радиуса ε. Рассмотрим функцию $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Она будет голоморфной в окрестности D_ε как частное двух голоморфных функций, так как мы исключили z из области рассмотрения. Граница C_ε ориентирована по-другому, значит

$$\int_{\partial D_\varepsilon} g d\zeta = \int_{\partial D} g d\zeta \int_{\partial C_\varepsilon} g d\zeta$$

.

Так как функция g голоморфна в D_ε, то применима обычная теорема Коши и левая часть обращается в нуль. Имеем $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta)$, тогда

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial C_\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\partial C_\varepsilon} \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

.

Первое слагаемое равно $f(z)\int \partial C_\varepsilon \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = f(z)2\pi i$. Отметим, что оно не зависит от ε. Покажем, что второе слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Функция $\alpha(\zeta)$ является бесконечно малой при $\varepsilon \to 0$, а длина контура интегрирования равна $2\pi\varepsilon$. Поэтому имеем $|\int_{\partial C_\varepsilon} \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta| = O(\varepsilon) \to 0$.

***Теорема (о разложении в ряд)**: Пусть $f(z)$ голоморфна в области D. Фиксируем точку $a \in D$. Пусть $r < dist(a, \partial D)$. Тогда функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n)$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta$. Этот ряд сходится абсолютно и равномерно при $|z - a| < r$.*

Доказательство: Представим дробь в виде $\frac{1}{\zeta - z}$ в виде суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-a}{\zeta - a})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

.

Обозначим через C окружность радиуса r с центром в точке a. Пусть $|\zeta - a| = r$, т.е. ζ бегает по окружности C. Если $|z - a| < r$, то $\frac{|z-a|}{|\zeta - a|} = \frac{|z-a|}{r} < 1$. Значит в открытом круге радиуса r ряд сходится равномерно и его можно почленно интегрировать. Представим функцию $f(z)$ формулой Коши, взяв в качестве контура окружность C, а затем пождставим в интеграл выражение для дроби $\frac{1}{\zeta - z}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}^{n+1}d\zeta)(z-a)^n$$

.

Обозначая выражение в скобках через c_n получим утверждение теоремы.

Определение: *Рядом Тейлора в точке a функции $f(z)$ переменной z, бесконечно дифференцируемой в окрестности точки a, называется степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(z-a)^2 + \dots$$

24 24 Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

Рассмотри так называемые ряды Лорана вида $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$.

Определение: *Сумма* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ *называется регулярной частью ряда Лорана, а сумма* $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ *называется главной частью ряда Лорана.*

Сходимость лорановских рядов понимается, как сходимость (по отдельности) главной и регулярной частей.

Регулярная часть - это обычный степенной ряд. У него есть круг сходимости $|z-a| < R$. *Главная часть становится степенным рядом после замены* $\zeta = \frac{1}{z-a}$. *Значит он сходится вне некоторого круга* $|z-a| > r$. *Таким образом, ряд Лорана имеет кольцо* $0 \le r < R \le +\infty$ *(крайние случаи возможны). Будем обозначать кольцо сходимости через* $K(r, R)$.

Утверждение: *Пусть* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ *имеет непустое кольцо сходимости* $K(r, R)$, *тогда: 1) Сумма ряда для* $f(z)$ *голоморфна в* $K(r, R)$. *2) Если* γ *- кусочно-гладкий контур в* $K(r, R)$, *то рядможно почленно интегрировать. 3) Ряд можно почленно дифференцировать.*

Доказательство: Это следует из соответствующего утверждения для степенных рядов, применённого к регулярной и главной частям по отдельности. наш ряд сходится в $K(r, R)$ *равномерно на компактных подмножествах и утверждение следует из теоремы Вейерштрасса.*

Теорема Лорана: *Пусть* $K(a; r, R)$ *- непустое кольцо,* $fin\mathbb{O}(K)$. *Пусть* C_p *- окружность радиуса* $p \in (r, R)$ *с цетнром в точке* a. *Тогда* f *представляется сходящимся в* K *рядом Лорана* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, *где* $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство: Возьмем кольцо поменьше $K'(a; r', R')$, *где* $r < r' < R' < R$. *Через* c' *и* C' *обозначим окружности радиусов* r' *и* R' *соответственно. Для* $z \in K'$ *имеет место формула Коши (для многосвязной области!):*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta =: I_1 - I_2$$

.

I_1: *ζ дальше от центра, чем* z, *поэтому* $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1})}d\zeta)(z-a)^n$$

I_2: *z дальше от центра,чем* ζ, *поэтому* $\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(\int_{c'} f(\zeta)(\zeta-a)^n)d\zeta)\frac{1}{(z-a)^{n+1}} =$$

.

Пусть $m = -(n+1)$, *тогда* $I_2 = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m(z-a^m)$. *Поскольку* $f \in \mathbb{O}(K)$, *радиусы* R' *и* r' *можно брать любыми в пределах от* r *до* R.

Следствие (неравенство Коши): *Пусть* C_p — *окружность радиуса* p *с центром в точке* a, *и функция* $f(z)$ *представляется рядом Лорана:* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$. *Тогда* $|c_n| \le \frac{M(p)}{p^n}$, *при* $n \in \mathbb{Z}$, *где* $M(p) = \max_{C_p}|f(z)|$.

Теорема (единственность разложения в ряд Лорана): *Пусть* $f(z)$ *имеет два представяления* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty} +\infty d_n(z-a)^n$ *в непустом кольце* $K(a; r, R)$. *Тогда* $c_n = d_n \forall n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство: Покажем, что нулевая функция разлагается единственным образом. Пусть $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = 0$. *Рассмотрим окружность* C *радиуса* p *с центром в точке* a, *где* $p \in (r, R)$. *Вспомним, что*

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, n \ne -1 \\ 2\pi i, n = -1 \end{cases}$$

В силу равномерной сходимости можно проинтегрировать ряд почленно. Из предыдущегй формулы следует, что выживет только одно слагаемое:

$$0 = \int_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_C (z-a)^n dz = 2\pi i c_{-1}$$

.

Значит $c_{-1} = 0$. Домножая исходный ряд на (z-a) в подходящей степени, можно сдвинуть любой коэффициент c_k на место c_{-1}. От домножения на фиксированную степень область сходимости не изменится. Значит, повторяя ту же самую процедуру над «сдвинутым» рядом, получим, что все коэффициенты равны нулю.

***Определение**: Говорят, что точка a является изолированной особой точкой, если $f(z)$ не определена в a, но голоморфна в проколотой окрестности этой точки.*

***Определение**: Пусть точка a - изолированная особоая точка функции f. Рассмотрим проколотую окрестность $\dot{U}(a)$) радиуса R такую, что $f \in \mathbb{O}(U(a))$. Тогда в кольце $K(a; 0, R)$ имеет место разложение в ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$. При этом разделяют 3 случая:*

1) (У) - главной части нет: $c_n = 0$ при $n < 0$. Тогда говорят, что точка устранимая.

2) (П) - главная часть является многочленом от $\frac{1}{z-a}$, т.е. число слагаемых в ней конечно ($c_n = 0$ при $n < -N$). Такую точку называют полюсом, а старшую отрицательную степень - порядком полюса.

3) (С) - главная часть бесконечная. Тогда это существенная особая точка.

Если особая точка устранима, то ряд дает ее голоморфное продолжениев полную окрестность $U(a)$.

***Теорема (классификация особых точек)**: Рассмотрим изолированную особую точку a функции $f(z)$. Рассмотрим предел $\lim_{z\to a} f(z)$. Имеет место соответствие между типом особой точки и наличием предела:*

(У) предел конечен (или $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки a)

(П) предел равен ∞

(С) предел не существует

Доказательство:

(У) Если существует $\lim_{z\to a} f(z)$, то доопределим $f(z)$ в точке по непрерывности. Так как $f \in \mathbb{O}(\dot{U}(a))$, то интеграл по любому треугольнику окрестности равен нулю. Но это значит, что интеграл по любому треугольнику в полной окрестности тоже равен нулю (если бы это было не так, он был бы ненулевым и при малом шевелении треугольника). Следовательно, $f \in \mathbb{O}(U(a))$.

Обратно: если главная часть нулевая, то $f(z)$ представляется степенным рядом, а это значит голоморфность.

Покажем, что для устранимости досттаочно ограниченности функции. По неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{p^n}$. Значит при $n < 0$ имеем $c_n = 0$ (устремляем $p \to 0, c_n \to 0$).

(П) Пусть $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Положим $g(z) := \frac{1}{f(z)}$. Тогда $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Значит $g(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки a. Тогда точка a является устранимой для $g(z)$, поэтому $g(z)$ разлагаетсяв ряд Тейлора. Пусть $g(z) = (z-a)^k(1+\phi(z))$, причем в некоторой окрестности $1 + \phi(z) \neq 0$. Тогда $\frac{1}{1+\phi(z)}$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}\frac{1}{1+\phi(z)} = \frac{1}{(z-a)^k}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

. Значит a - полюс для $f(z)$.

Обратно: $f(z) = P(\frac{1}{z-a}) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $P \in \mathbb{C}[z]$. Второе слагаемое голоморфно а $P \to \infty$ при $z \to a$.

(С) Это единственная оставшаяся возможность.

Особые точки мешают применить формулу Коши. Пусть у функции f в ограниченной области D конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_n$, а на кусочно-гладкой границе ∂D их нет. Будем вырезать эти точки из области вместе с маленькими кругами C_i радиуса ε, получим область D_ε. Тогда функция будет голоморфной в D_ε и интегральной формулой можно пользоваться. Имеем $D_\varepsilon = D \backslash U Int C_i$. По формуле Коши:

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz - \sum \int_{C_i} f(z)dz$$

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum \int_{C_i} f(z)dz$$

Пусть $\sum_{c=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a_i)^n$ - лорановское разложение функции $f(z)a_i$. Этот ряд можно проинтегрировать почленно в силу равномерной сходимости. У всех степеней есть первообразная, кроме $n = -1$. Значит получаем $\int_{C_i} f(z)dz = 2\pi i C_{-1}$.

***Определение**: Лорановский коэффициент разложения функции f в изолированной особой точке a с номером -1 называется вычетом функции f в точке a и обозначается $res_a f$.*

Теорема (о вычетах)*: Пусть D - ограниченная область с кусочной-гладкой границей, и функция $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{D}$ за исключением особых точек $a_1, \ldots, a_n \in D$. Тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} res_{a_i} f$$

.

Нахождение вычетов:

1) Если a - полюс первого порядка, то

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

$$\downarrow$$

$$f(z)(z-a) = c{-1} + c_0(z-a) + c_1(z-a)^2 + \ldots$$

$$\downarrow$$

$$c_{-1} = \lim_{z \to a}(f(z)(z-a))$$

.

2) Если a полюс порядка p, то по определению

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \ldots \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \ldots$$

$$\downarrow$$

$$f(z)(z-a)^p = c_{-p} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + \ldots$$

Поскольку функция голоморфна, продифференцируем ее $(p-1)$ раз:

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(f(z)(z-a)^{p-1}) = (p-1)!c_{-1} + \ldots$$

$$\downarrow$$

$$c_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(f(z)(z-a)^p)$$

.

3) Если a - существенная особая точка, то нужно разложить функцию в ряд и явно найти коэффициент c_{-1}.

25 Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.

Определение 25.1. *Фигура $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ - гладкая кривая, если для любой т. на кривой найдется такая окрестность этой т., в которой γ можно задать гладкой функцией $r : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ и $v = \dot{r} \neq 0$ при $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Замечание. *Гладкость кривой не зависит от системы координат, в которой она задана. Наше определение корректно, потому что в нём мы использовали только гладкость функции и то, что вектор скорости не равен нулю, а эти понятия от системы координат не зависят.*

Определение 25.2. Гладкая поверхность - *это фигура, которая локально в каждой точке a_0 допускает описание гладкой функцией $r = r(u^1, u^2)$, где $r_0 = r(0,0) = a_0$. При этом векторы $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}(0)$ и $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}(0)$ не коллинеарны.*

Заметим, что опр-е гладкой поверхности, как и гладкой кривой, не зависит от выбора системы координат.

В частности, плоскость задается гладкой функцией $r = r_0 + m_1 u^1 + m_2 u^2$, где m_1 и m_2 не коллинеарны.

Теорема 25.1. *Поверхность можно задать тремя эквивалентными способами:*
1. *Так, как в определении;*
2. *С помощью гладкой функции $z = f(x, y)$;*
3. *С помощью гладкой неявной функции $F(x, y, z)$, для которой $grad\ F \neq 0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: Напишем вектора m_1 и m_2 один под другим, получим матрицу:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

Условие неколлинеарности векторов m_1 и m_2 эквивалентно тому, что $rk\ A = 2$, т.е. в матрице есть минор, не равный нулю. Без ограничения общности,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда существуют гладкие обратные функции $u^1 = u^1(x, y)$ и $u^2 = u^2(x, y)$. Следовательно, $z = z(u^1, u^2) = z(u^1(x, y), u^2(x, y)) = f(x, y)$, т.е. z - гладкая функция от x и y.

$2 \Rightarrow 1$: Положим $x = u^1$, $y = u^2$, $z = f(u^1, u^2)$. Тогда $m_1 = (1, 0, f_{u^1})$, а $m_2 = (0, 1, f_{u^2})$ и они, очевидно, неколлинеарны.

$2 \Rightarrow 3$: Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) := f(x, y) - z = 0$, тогда $grad\ F = (f_x, f_y, -1) \neq 0$.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть $grad\ F \neq 0$, тогда, БОО, $F_z \neq 0$. По теореме о неявной функции можно разрешить $F(x, y, z) = 0$ относительно z, т.е. $z = f(x, y)$. □

Теорема 25.2. *Существует локальная биекция между точками поверхности и парами (u^1, u^2), т.е. $\{u^i\}$ есть локальные координаты на поверхности (криволинейные координаты).*

Доказательство. Ясно, что каждой паре координат (u^1, u^2) соответствует точка поверхности. Это соответствие биективно в силу того, что $(x, y, z) \leftrightarrow (x, y, z(x, y)) \leftrightarrow (x, y) \leftrightarrow (u^1, u^2)$. □

Определение 25.3. *Пусть $r = r(u^1, u^2)$. Зафиксируем координату u^2, тогда получим кривую $r = r(u^1, u_0^2) = r(u^1)$ на поверхности. Такие кривые называются u^1-линиями. Аналогично, зафиксируем координату u^1, получим u^2-линию. Совокупность всех этих линий называется* **координатными линиями.**

Теорема 25.3. *Координатные линии "разных сортов"пересекаются, а координатные линии "одного сорта"(при разных значениях зафиксированных параметров) не пересекаются и не касаются.*

Доказательство. Допустим, что две линии одного сорта имеют общую точку на поверхности. Но тогда этой точке будут соответствовать две пары координат, а это противоречит предыдущему утверждению. □

Первая квадратичная форма

Рассмотрим произвольную поверхность $r = r(u^1, u^2)$*. По определению гладкой поверхности векторы* $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$ *и* $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$ *не коллинеарны. Рассмотрим их матрицу Грама:*

$$G = G(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} (m_1, m_1) & (m_1, m_2) \\ (m_2, m_1) & (m_2, m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты этой матрицы являются функцией от координат, т.е. $g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2)$*. При замене координат* $(u^1, u^2) \to (v^1, v^2)$ *матрицей перехода будет матрица Якоби* $J = (\frac{\partial u^i}{\partial v^j})$*, и матрица Грама изменится по формуле* $G' = J^t G J$*. Элементы новой матрицы будут равны*

$$g'_{\alpha\beta} = (m'_\alpha, m'_\beta) = \left(\frac{\partial r}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial r}{\partial v^\beta}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}\right) = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}.$$

Найдем угол между двумя пересекающимися кривыми на поверхности с уравнениями $r(t) = (u^1(t), u^2(y))$ *и* $\tilde{r}(\tau) = (\tilde{u}^1(\tau), \tilde{u}^2(\tau))$*. Он равен углу между касательными векторами* v *и* $\tilde{v}$*, которые равны соответственно*

$$v = \left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}\right) = \frac{du^1}{dt}m_1 + \frac{du^2}{dt}m_2,\ \ \tilde{v} = \left(\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}, \frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}\right) = \frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}m_1 + \frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}m_2.$$

По формуле для скалярного произведения получаем

$$(v, \tilde{v}) = g_{11}\frac{du^1}{dt}\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau} + g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau} + \frac{du^2}{dt}\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\right) + g_{22}\frac{du^2}{dt}\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau},$$

$$(v, v) = g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2,$$
$$(\tilde{v}, \tilde{v}) = g_{11}\left(\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\tilde{u}^1}{d\tau}\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau} + g_{22}\left(\frac{d\tilde{u}^2}{d\tau}\right)^2,$$

а тогда косинус искомого угла равен $\cos\phi = \frac{(v,\tilde{v})}{|v||\tilde{v}|}$.

Так как $dr = vdt$ *и* $d\tilde{r} = \tilde{v}d\tilde{t}$*, то формально умножая полученные три равенства на* $(dt)^2$*, получаем*

$$(dr, d\tilde{r}) = g_{11}du^1d\tilde{u}^1 + g_{12}(du^1d\tilde{u}^1 + du^2d\tilde{u}^1 + g_{22}du^2d\tilde{u}^2,$$

$$(dr, dr) = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2,$$
$$(d\tilde{r}, d\tilde{r}) = g_{11}(d\tilde{u}^1)^2 + 2g_{12}d\tilde{u}^1d\tilde{u}^2 + g_{22}(d\tilde{u}^2)^2.$$

Определение 25.4. *Квадратичная функция* $ds^2 = (dr, dr) = g_{ij}du^idu^j$*, определенная на касательных векторах в точках поверхности, называется первой квадратичной формой или метрикой поверхности. Она определяет соответствующую билинейную функцию* $(dr, d\tilde{r}) = g_{ij}du^id\tilde{u}^j$.

Таким образом, имеем

$$\phi = \frac{(dr, d\tilde{r})}{|dr||d\tilde{r}|} = \frac{g_{ij}du^id\tilde{u}^j}{\sqrt{g_{ij}du^idu^j}\sqrt{g_{ij}d\tilde{u}^id\tilde{u}^j}}.$$

Найдем матрицу Грама при других способах задания поверхности. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$*. Тогда* $m_1 = (1, 0, f_x)$ *и* $m_2 = (0, 1, f_y)$*, значит, матрица Грама имеет вид*

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_xf_y \\ f_xf_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix},\ \ det\, G = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

Если же поверхность задана неявной функцией $F(x, y, z) = 0$*, то, считая для определенности* $F_z \neq 0$*, выразим частные производные:* $f_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$ *и* $f_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$*, и сведем задачу к предыдущей.*

26 Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.

Определение 26.1. *Фигура $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется гладкой кривой, если для любой точки точки на кривой найдется такая окрестность этой точки, в которой γ можно задать гладкой функцией $r : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ и $v = \dot{r} \neq 0$ при $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Определение 26.2. Длина гладкой кривой $r = r(t)$ от точки $r(t_0)$ до точки $r(t)$ равна $s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{r}|dt$.

Определение 26.3. *Выберем в качестве параметра кривой величину $s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{r}|dt$ (это можно сделать: так как $\frac{ds}{dt} = |\dot{r}| \neq 0$, то функция $s = s(t)$ обратима: $t = t(s)$). Такой параметр называется* **натуральным.**

Теорема 26.1. *Параметр t является натуральным параметром тогда и только тогда, когда в этой параметризации $|\dot{r}| = |v| = 1$. Параметр t равен λs тогда и только тогда, когда $|x| = const$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из второго. Пусть $t = \lambda s$, тогда $|v| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda} = const$. Наоборот: если $|v| = const$, то $ds = |v|dt \Rightarrow s = |v|t$ и $t = \frac{s}{|v|}$. □

Пусть кривая задана натуральным параметром $t = s$. Обозначим $\epsilon_1 := \frac{dr}{ds} = v$, $|\epsilon_1| = 1$. Тогда при движении по кривой конец свободного вектора ϵ_1 будет двигаться по единичной сфере. $|\epsilon_1| = 1 \Rightarrow (\epsilon_1, \epsilon_1) = 1$, продифференцировав это, получим $(\epsilon_1, {\epsilon'}_1) + ({\epsilon'}_1, \epsilon_1) = 2(\epsilon_1, {\epsilon'}_1) = 0 \Rightarrow \epsilon_1 \perp {\epsilon'}_1$. Заметим, что чем больше вектор ${\epsilon'}_1$, тем сильнее изгибы кривой.

Определение 26.4. Кривизной *гладкой кривой называется величина*

$$k(s) := \left|\frac{d\epsilon_1}{ds}\right| = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right|.$$

Определение 26.5. *При $k(s) \neq 0$ определен* **вектор главной нормали** $\epsilon_2 = \frac{1}{k}{\epsilon'}_1 \perp \epsilon_1$ *к кривой в точке $r(s)$.*

Определение 26.6. *Пусть $k(s_0) \neq 0$. Плоскость, натянутая на векторы ϵ_1 и ϵ_2 и проходящая через точку $r(s_0)$, называется* **соприкасающейся плоскостью**.

Определение 26.7. Гладкая поверхность *- это фигура, которая локально в каждой точке a_0 допускает описание гладкой функцией $r = r(u^1, u^2)$, где $r_0 = r(0, 0) = a_0$. При этом векторы $m_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}(0)$ и $m_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}(0)$ не коллинеарны.*

Будем теперь изучать поверхность локально в окрестности фиксированной точки A_0. Для этого возьмем нормальный вектор к поверхности $n := \frac{[m_1, m_2]}{|[m_1, m_2]|}$ и будем рассматривать все плоскости, содержащие точку A_0 и этот вектор. Сечения поверхности такими плоскостями назовем **нормальными сечениями**.

Зафиксируем какой-нибудь единичный вектор $\epsilon_1 \perp n$ и рассмотрим нормальное сечение в точке A_0 плоскостью α, натянутой на векторы ϵ_1 и n. Теперь повернем эту плоскость вокруг ϵ_1 на угол $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ - получим плоскость β.

В пересечении поверхности и плоскости β будет гладкая кривая. Действительно, зададим поверхность уравнением $F(x, y, z) = 0$. Линия пересечения задается системой

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Поскольку угол поворота θ не равен $\frac{\pi}{2}$, то вектор нормали (A, B, C) к плоскости не коллинеарен вектору grad F, который параллелен n, и из теоремы о неявных функциях следует, что две из координат, например, y и z, оказываются гладкими функциями третьей: $y = y(x), z = z(x), r = (x, y(x), z(x)), \dot{r} = (1, \dot{y}, \dot{z}) \neq 0$.

Будем рассматривать кривые, у которых плоскость $(A_0, \epsilon_1, \epsilon_2)$ является соприкасающейся.

Теорема 26.2. Теорема Менье. *Все кривые на поверхности, проходящие через A_0, касающиеся ϵ_1 и имеющие одну и ту же соприкасающуюся плоскость, имеют одинаковую кривизну в точке A_0.*

Доказательство. Вместо u^1 и u^2 будем использовать u и v.

Пусть поверхность задана уравнением $r = r(u, v)$. Возьмем кривую $r = r(u(t), v(t))$ с заданной соприкасающейся плоскостью, и пусть t - натуральный параметр. Вектор ϵ_1 для нее - это первый ветор базиса Френе, т.е.

$$\epsilon_1 = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\dot{v} = \dot{u}m_1 + \dot{v}m_2.$$

Вектор ϵ_2 - это второй вектор базиса Френе, он одинаков для всех кривых рассматриваемого класса. Имеем

$$k\epsilon_2 = \dot{\epsilon_1} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \ddot{u}m_1 + \ddot{v}m_2.$$

Умножим вектор $k\epsilon_2$ скалярно на n и учтем, что $(m_i, n) = 0$. Получим:

$$(k\epsilon_2, n) = k\cos\theta = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}, n\right)\dot{u}^2 + 2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}, n\right) + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}, n\right)\dot{v}^2.$$

Коэффициенты при производных не зависят от кривой, $cos\theta$ тоже одинаковый для всех кривых с данной соприкасающейся плоскостью, величины $\dot{u}$ и $\dot{v}$ являются координатами зафиксированного нами вектора ϵ_1, следовательно, тоже постоянны. Значит, кривизна одинакова для всех кривых с данной соприкасающейся плоскостью. □

Определение 26.8. *Кривизна при нормальном сечении называется* **нормальной кривизной** k_n.

Из теоремы Менье следует, что кривизна произвольного сечения определятся как $k_\theta = \frac{k_n}{cos\theta}$, *тогда получаем формулу:*

$$k_n = l_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2l_{12}\left(\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}\right) + l_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2, \ l_{ij} := \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, n\right).$$

Таким образом k_n *- это квадратичная функция от* $\frac{du^1}{ds}$ *и* $\frac{du^2}{ds}$. *Для произвольного параметра* t *имеем* $ds = |dr| = |v|dt$, *поэтому*

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{u}^i}{|v|}.$$

Следовательно, кривизна нормального сечения по направлению $v = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ *равна*

$$k_n = \frac{l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{|v|^2} = \frac{l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} = \frac{l_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j}.$$

Определение 26.9. *Квадратичная функция* $l_{ij}du^i du^j$, *определенная на касательных векторах в точках поверхности, называется второй квадратичной формой поверхности.*

Осуществим замену координат $(u^1, u^2) \to (v^1, v^2)$ *с матрицей перехода* $J = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right\}$. *Пусть в новом базисе квадратичная форма имеет коэффициенты* ${l'}_{\alpha\beta}$, *тогда*

$${l'}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, n\right), \ \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + m_i\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}.$$

Следовательно, так как $m_i \perp n$

$${l'}_{\alpha\beta} = l_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \leftrightarrow L' = J^t L J.$$

Значит, выражение $l_{ij}du^i du^j$ *действительно является квадратичной формой. Ее матрицу будем обозначать буквой* L. *Итак, мы получили, что в любой точке поверхности нормальные кривизны по любым направлениям* (du^1, du^2) *равны отношению второй и первой квадратичных форм.*

Заметим, что в отличие от теории кривых, где всегда $k >= 0$, *величина* k_n *может иметь знак: в зависимости от направления нормального сечения вектор* ϵ_2 *для этого сечения может совпадать с* n *или с* $-n$.

27 27. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

Определения см. в билете 26.

Будем вращать плоскость нормального сечения вокруг вектора n на угол ϕ. При этом мы будем получать нормальные кривизны $k_n = k_n(\phi)$. Эта непрерывная функция периодична с периодом π и имеет максимальное и минимальное значение.

Определение 27.1. *Максимальное и минимальное значение нормальной кривизны k_n называются главными кривизнами. Их направления называются* **главными направлениями** *(в рассматриваемой точке поверхности).*

Теорема 27.1. *В любой точке поверхности существует ровно две главных кривизны и ровно два главных направления (или все направления главные). Главные направления ортогональны.*

Доказательство. Зафиксируем точку A_0 поверхности. Любому преобразованию координат в плоскости $A_0m_1m_2$ (переходу к новому базису $A_0m'_1m'_2$) отвечает такое же преобразование криволинейных координат вблизи A_0 на поверхности:

$$\begin{pmatrix} u^1 - u_0^1 \\ u^2 - u_0^2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Здесь C есть матрица перехода от m_1, m_2 к m'_1, m'_2. Таким образом, можно перейти к координатам v^1, v^2, для которых $m'_i = \frac{\partial r}{\partial v_i}, i = 1, 2$ ортонормированы (в точке A_0). Выберем на поверхности такие координаты (v^1, v^2). В них первая квадратичная форма имеет вид $(dv^1)^2 + (dv^2)^2$, следовательно, кривизна равна $k_n = \frac{l_{ij} dv^1 dv^2}{(dv^1)^2 + (dv^2)^2}$. Первая квадратичная форма положительно определена, и по теореме из линейной алгебры существуют координаты (w^1, w^2) на поверхности с ортонормированными в точке A_0 векторами $\frac{\partial r}{\partial w_1}, \frac{\partial r}{\partial w_2}$, для которых:

Определение. Формула Эйлера.

$$k_n = \frac{\lambda_1 (dw^1)^2 + \lambda_2 (dw^2)^2}{(dw^1)^2 + (dw^2)^2} = \lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 \phi.$$

Здесь ϕ - угол наклона вектора (dw^1, dw^2) к вектору $m'_1 = \frac{\partial r}{\partial w_1}$. Следовательно, k_n заключено между λ_1 и λ_2 - это и есть главные кривизны (они единственны). Направления векторов базиса m'_1, m'_2 являются главными направлениями, откуда следует второе утверждение теоремы. □

Примечание. *Главные кривизны λ_1, λ_2 - инварианты второй квадратичной формы.*

20-03.jpg

20-04.jpg

20-05.jpg

2. Указанная область приведена в таблице под № 4 ($n = 2$). Возводя в квадрат

$$w = z_1^2,$$

преобразуем эту область в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Тем самым, искомое отображение

$$w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

Б. Заданная область

$$|z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

приведена в таблице за № 9.

Искомое преобразование имеет вид

$$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Оба отображения $w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ и $w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ переводят взаимно однозначно и конформно заданный полукруг

$$|z| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

в верхнюю полуплоскость

$$\operatorname{Im} w > 0. \blacktriangleright$$

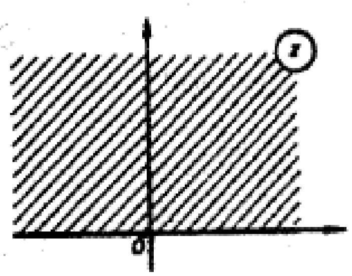
Организация таблицы и правила пользования ею

Таблица строится по следующей схеме: номер по порядку, область $\mathscr{D}$ на комплексной плоскости z, конформное отображение (прямое $w = f(z)$ и обратное $z = g(w)$), область $\mathscr{D}'$ на комплексной плоскости w, конформно эквивалентная области $\mathscr{D}$.

Под каждым номером в приводимой в таблице одной из областей, как правило, является либо верхняя полуплоскость, либо единичный круг с центром в нуле. Как будет показано в конце параграфа, такая стандартизация удобна для практического использования. Часто приводится только преобразование, сводящее заданную область к ранее рассмотренной. В этом случае дается ссылка на преобразование, переводящее полученную область в стандартную (единичный круг с центром в нуле или верхнюю полуплоскость).

Основные элементарные функции

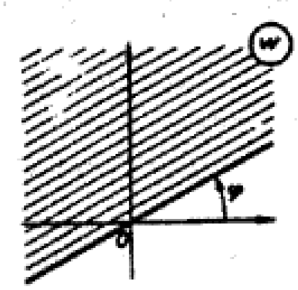
Таблица



$\operatorname{Im} z > 0$

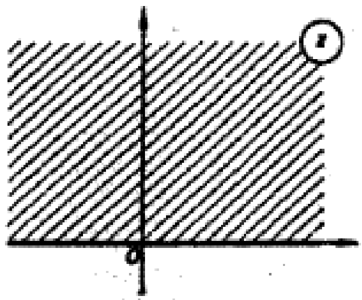
$$w = e^{i\varphi} z$$

$$z = e^{-i\varphi} w$$



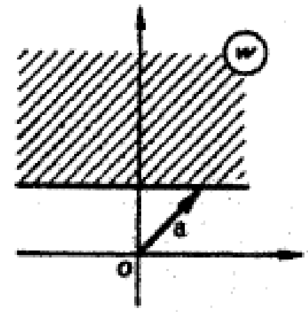
$\varphi < \operatorname{Arg} w < \pi + \varphi$

№ 1



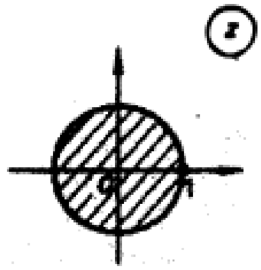
$$w = z + a$$

$$z = w - a$$



$\operatorname{Im} z > 0$ $\qquad$ $\operatorname{Im} w > \operatorname{Im} a$

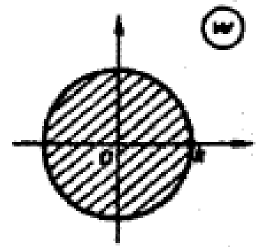
№ 2



$$w = kz$$

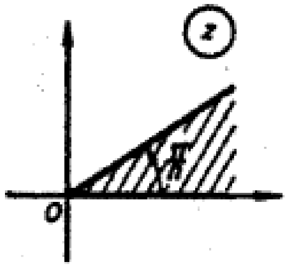
$$z = \frac{1}{k} w,$$

$$k > 1$$



$|z| < 1$ $\qquad$ $|w| < k$

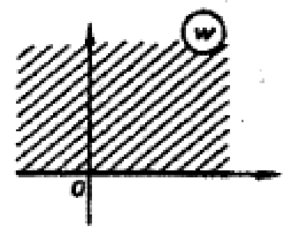
№ 3



$$w = z^n$$

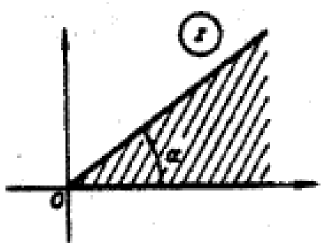
$$z = \sqrt[n]{w},$$

$$n = 2,\ 3,\ \ldots$$



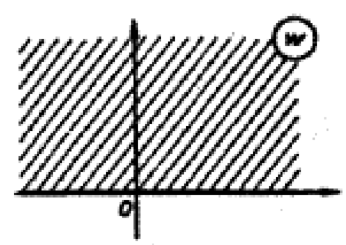
$0 < \operatorname{Arg} z < \pi/n$ $\qquad$ $\operatorname{Im} w > 0$

№ 4



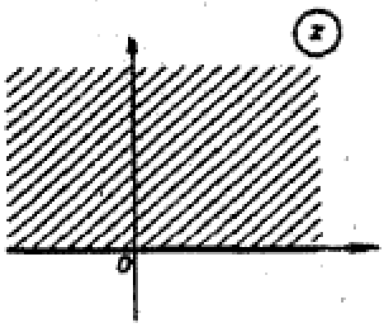
$$w = z^{\pi/\alpha}$$

$$z = w^{\alpha/\pi}$$



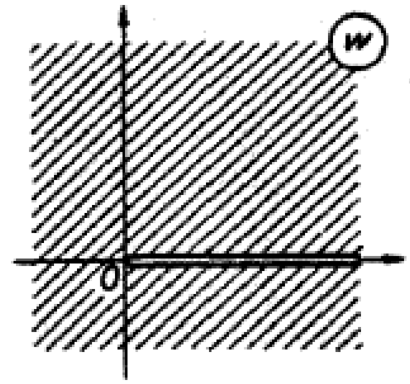
$0 < \operatorname{Arg} z < \alpha < \pi$ $\qquad$ $\operatorname{Im} w > 0$

№ 5



$$w = z^2$$

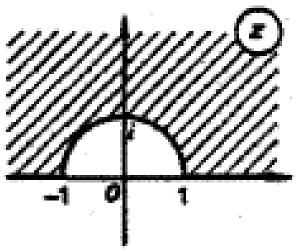
$$z = \sqrt{w}$$



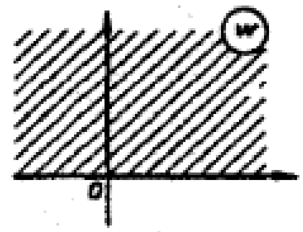
$\operatorname{Im} z > 0$

Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 6



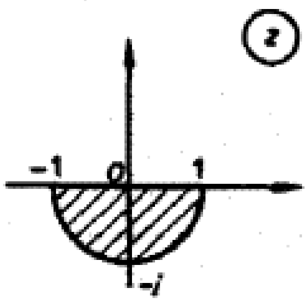
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



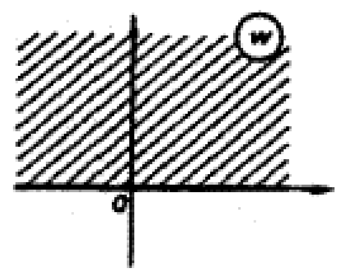
$\operatorname{Im} z > 0, \quad |z| > 1$

$\operatorname{Im} w > 0$

№ 7



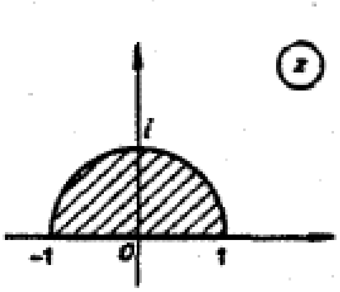
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



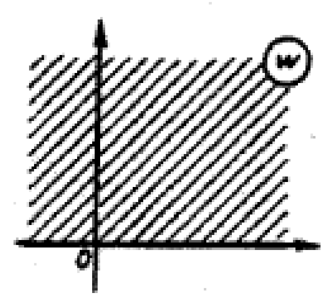
$\operatorname{Im} z < 0, \quad |z| < 1$

$\operatorname{Im} w > 0$

№ 8



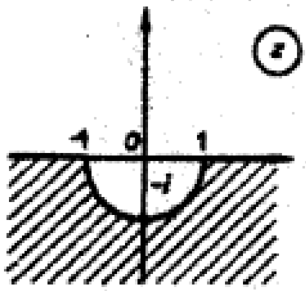
$$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



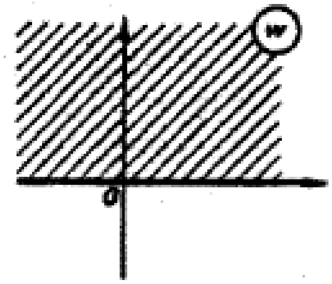
$\operatorname{Im} z > 0, \quad |z| < 1$

$\operatorname{Im} w > 0$

№ 9



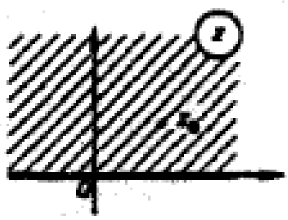
$$w = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



$\operatorname{Im} z < 0, \quad |z| > 1$

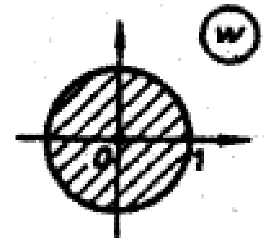
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 10



$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

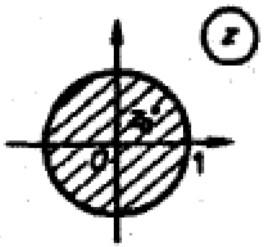
$$w(z_0) = 0$$



$\operatorname{Im} z > 0$

$|w| < 1$

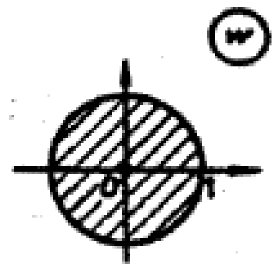
№ 11



$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

$$w(z_0) = 0$$

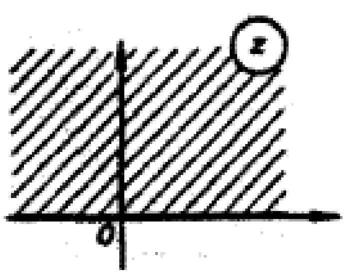
$$\operatorname{Arg} w'(z_0) = \alpha$$



$|z| < 1$

$|w| < 1$

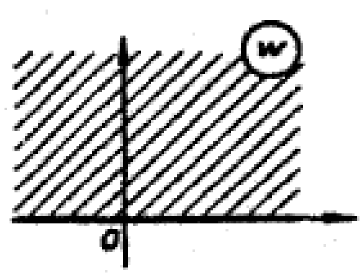
№ 12



$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

a, b, c, d – действительные

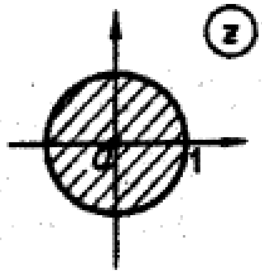
$ad - bc > 0$



$\operatorname{Im} z > 0$

$\operatorname{Im} w > 0$

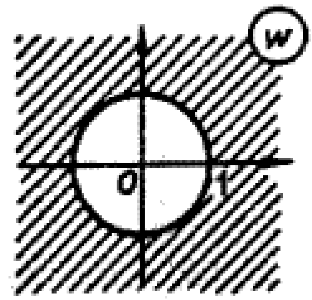
№ 13



$|z| < 1$

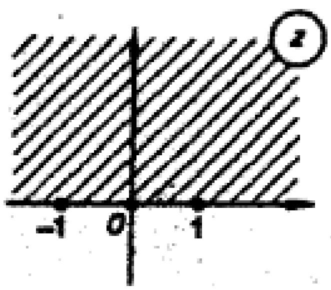
$$w = \frac{1}{z}$$

$$z = \frac{1}{w}$$



$|w| > 1$

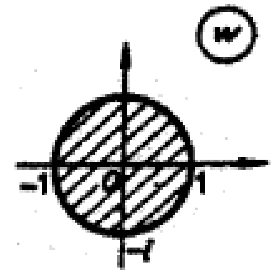
№ 14



$\mathrm{Im}\, z > 0$

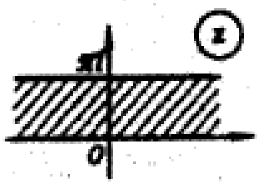
$$\frac{w+1}{w+i}\,\frac{1+i}{1+1} =$$

$$= \frac{z+1}{z+0}\,\frac{1-0}{1+1}$$



$|w| < 1$

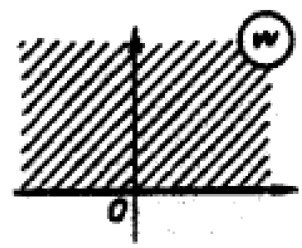
№ 15



$0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$

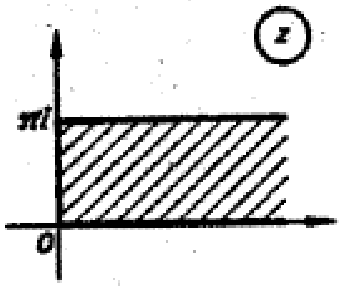
$$w = e^z$$

$$z = \ln w$$



$\mathrm{Im}\, w > 0$

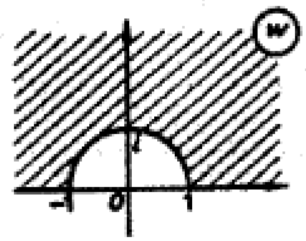
№ 16



$0 < \mathrm{Im}\, z < \pi, \quad \mathrm{Re}\, z > 0$

$$w = e^z$$

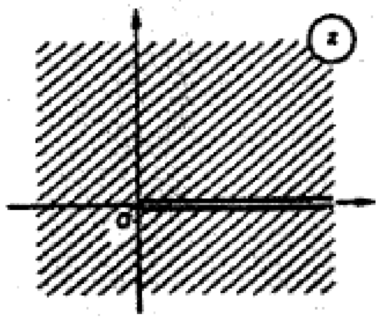
$$z = \ln w$$



$\mathrm{Im}\, w > 0, \quad |w| > 1$

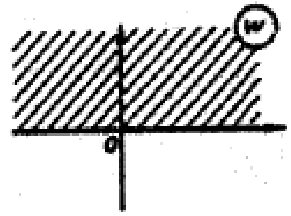
№ 17

Плоскость с разрезами



$$w = \sqrt{z}$$

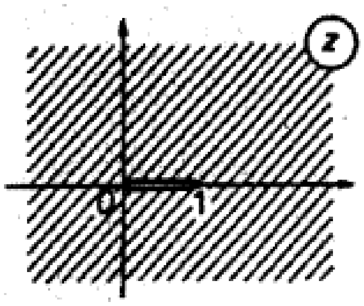
$$z = w^2$$



Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

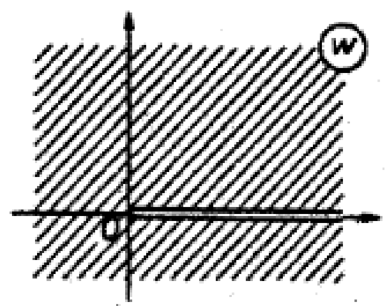
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 18



$$w = \frac{z}{1 - z}$$

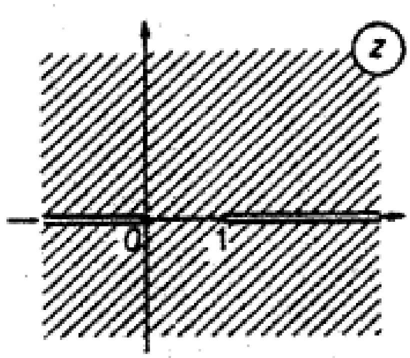
$$z = \frac{w}{w + 1}$$



Плоскость с разрезом по отрезку $[0, 1]$

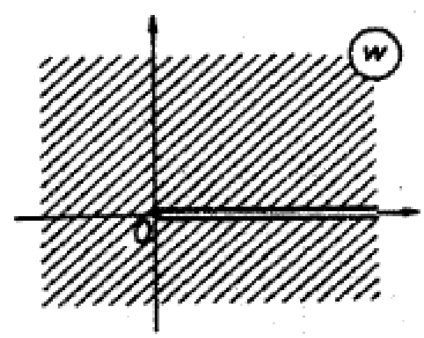
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 19



$$w = \frac{z}{z - 1}$$

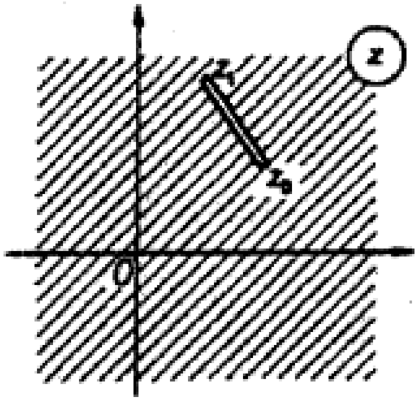
$$z = \frac{w}{w - 1}$$



Плоскость с разрезами по действительным лучам $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$

Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

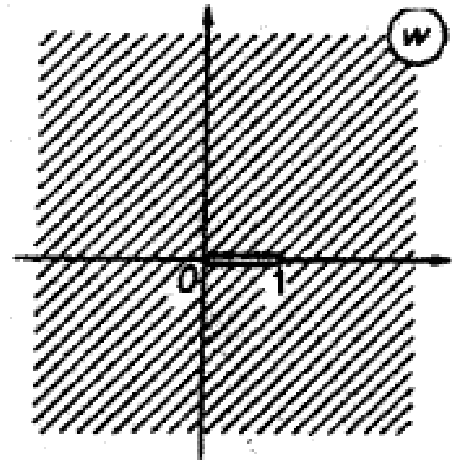
№ 20



Плоскость с разрезом
по отрезку $[z_0, z_1]$

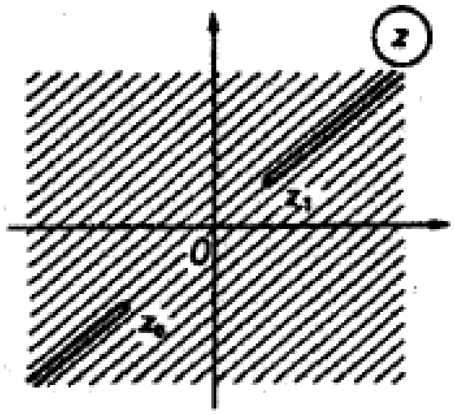
$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)w$$



Плоскость с разрезом
по отрезку $[0, 1]$

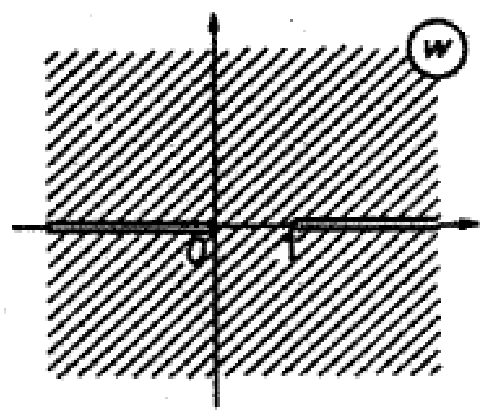
№ 21



лоскость с разрезами
о лучам, лежащим
а прямой, проходящей через
ачало координат

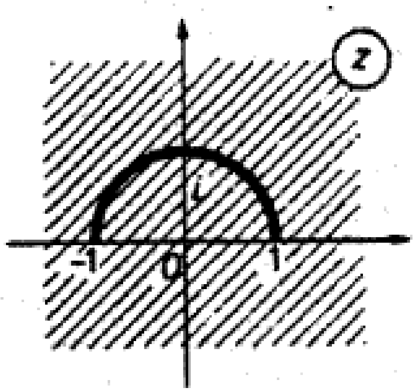
$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)w$$



Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$

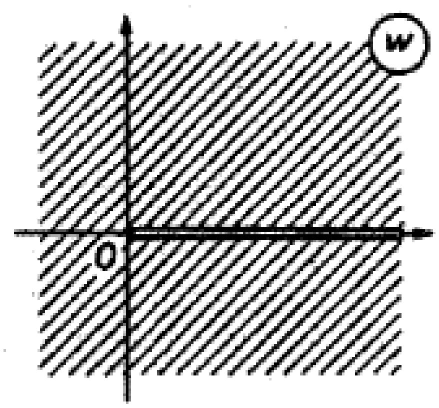
№ 22



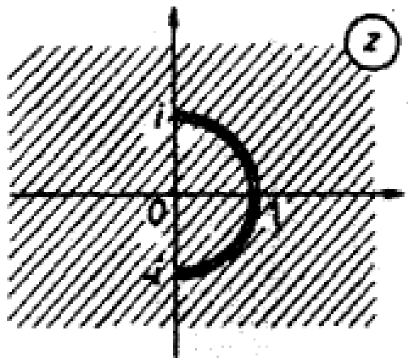
Плоскость с разрезом
по дуге окружности
$|z| = 1, \ \operatorname{Im} z > 0$

$$w = \frac{1}{i}\,\frac{z - 1}{z + 1}$$

$$z = \frac{iw + 1}{1 - iw}$$

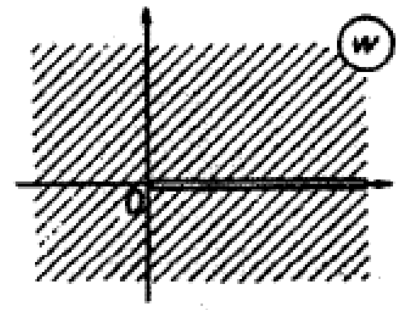


Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$



$$w = \frac{1}{i}\,\frac{z-i}{z+i}$$

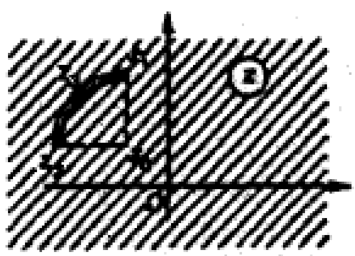
$$z = \frac{w+i}{1+iw}$$



Плоскость с разрезом по дуге окружности $|z| = 1, \quad \mathrm{Re}\, z > 0$

Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 24

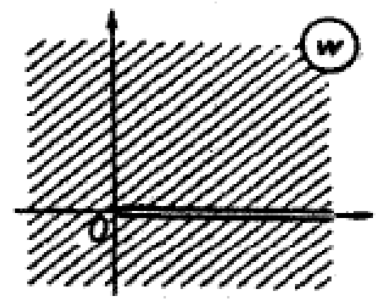


$$w = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\,\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

$$z_1 = z(\varphi_1),$$

$$z_2 = z(\varphi_2),$$

$$z_3 = z\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

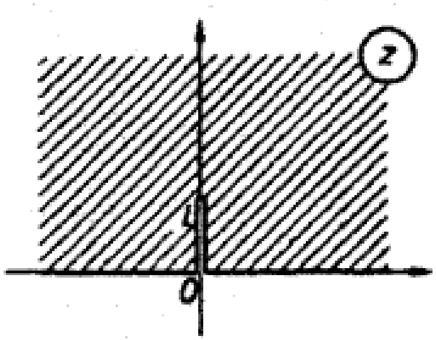


Плоскость с разрезом по дуге окружности $|z - z_0| = r,\ z = z_0 + re^{i\varphi},$ $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$

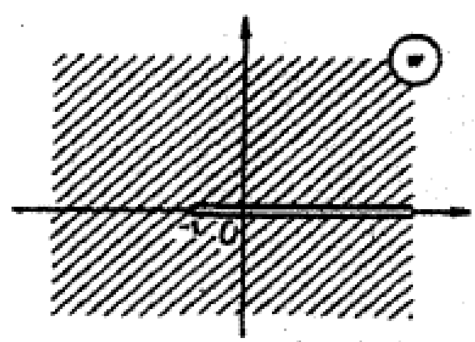
Плоскость с разрезом по действительному лучу $[0, +\infty[$

№ 25

Полуплоскость с разрезами



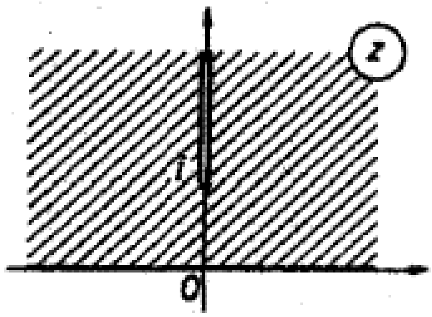
$$w = z^2$$



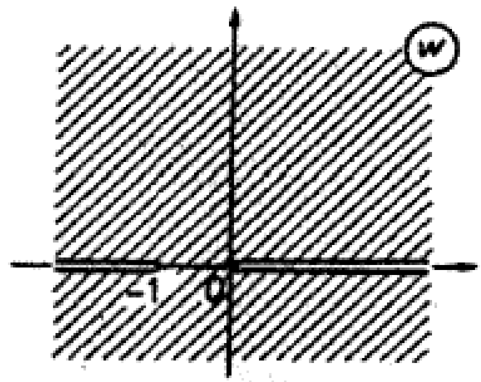
Полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ с разрезом по отрезку $[0, i]$

Плоскость с разрезом по действительному лучу $[-1, +\infty[$

№ 26



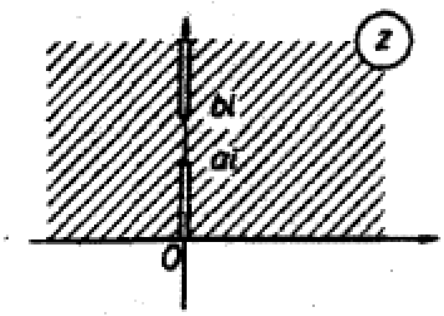
$$w = z^2$$



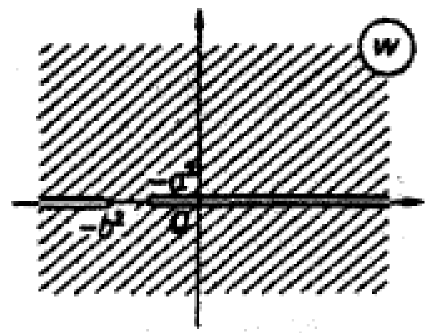
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $[i,\ i+\infty[$

Плоскость с разрезами по действительным лучам $]-\infty,\ -1]$ и $[0,\ +\infty[$

№ 27



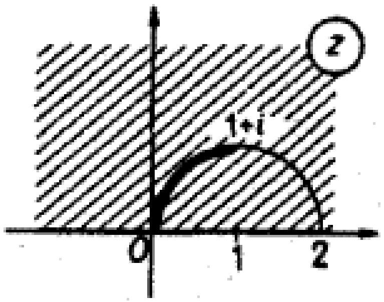
$$w = z^2$$



Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезами по отрезку $[0,\ ai]$ и мнимому лучу $]bi,\ +i\infty[$ $0 < a < b$

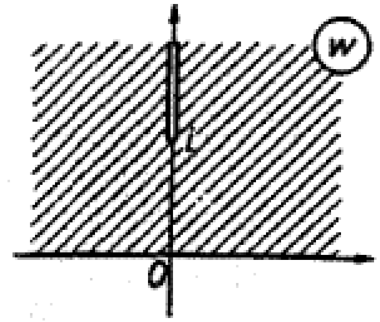
Плоскость с разрезами по действительным лучам $]-\infty,\ -b^2]$ и $[-a^2,\ +\infty[$

№ 28



$$w = \frac{z-1}{z}$$

$$z = \frac{1}{1-w}$$

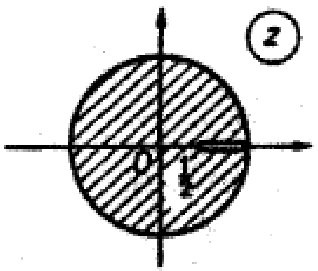


Полуплоскость с разрезом по дуге окружности $|z-1| = 1,\ z = 1 + e^{i\varphi}$, $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

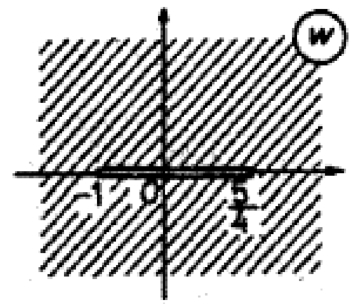
Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ с разрезом по мнимому лучу $[i,\ i\infty[$

№ 29

Круг с разрезами



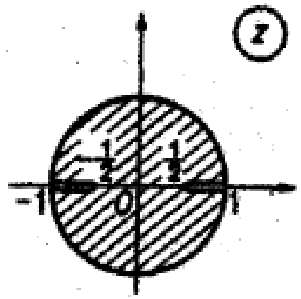
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



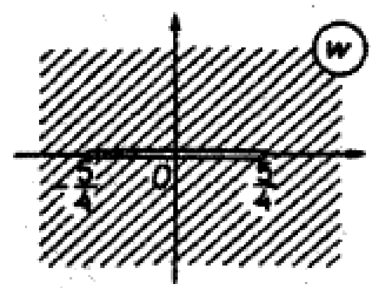
Круг $|z| < 1$
с разрезом
по отрезку [1/2, 1]

Плоскость с разрезом
по отрезку [−1, 5/4]

№ 30



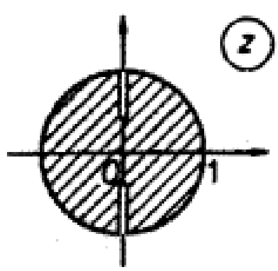
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



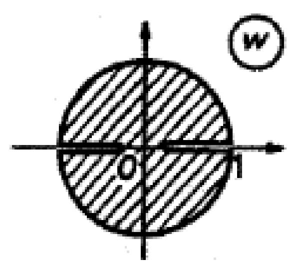
Круг $|z| < 1$
с разрезами
по отрезкам [-1, -1/2] и [1/2, 1]

Плоскость с разрезами
по отрезкам [−5/4, 5/4]

№ 31



$$w=\frac{z}{i}$$

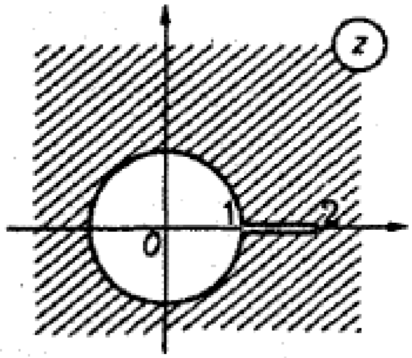


Круг $|z| < 1$
с симметричными
разрезами по мнимой оси

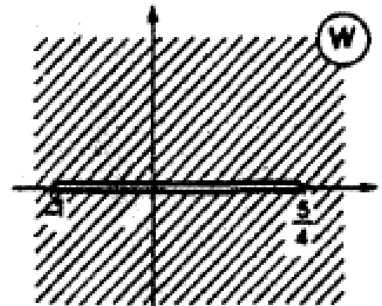
Круг $|w| < 1$
с симметричными разрезами
по действительной оси

№ 32

Внешность круга с разрезами



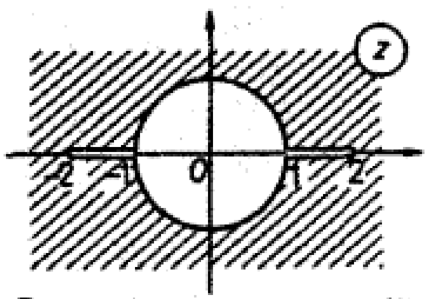
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



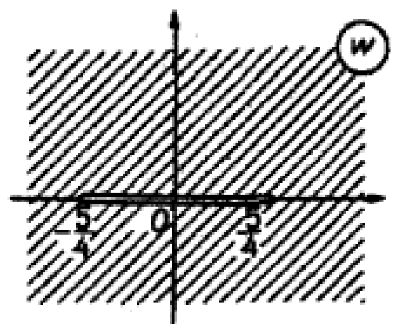
Внешность единичного круга $|z| > 1$ с разрезом по отрезку $[1,\ 2]$

Плоскость с разрезом по отрезку $[-1,\ 5/4]$

№ 33



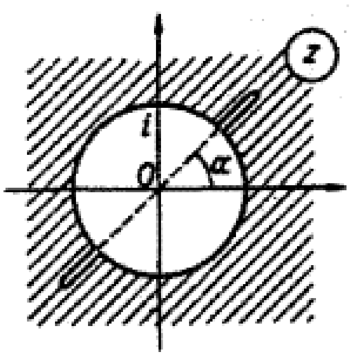
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$



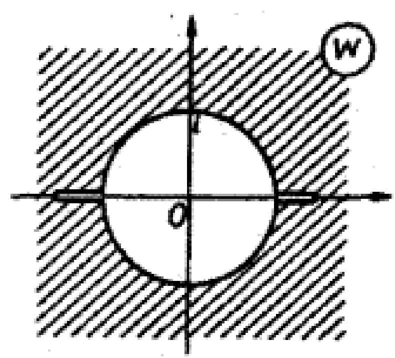
Внешность единичного круга с разрезом по отрезкам $[-2,\ -1]$ и $[1,\ 2]$

Плоскость с разрезом по отрезку $[-5/4,\ 5/4]$

№ 34



$$w = e^{-i\alpha} z$$

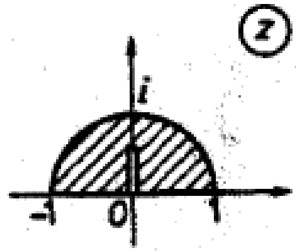


Внешность единичного круга $|z| > 1$ с разрезами по отрезкам, являющимися продолжениями его диаметра

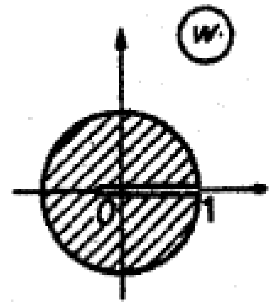
Внешность единичного круга $|w| > 1$ с разрезами по отрезкам, лежащим на действительной оси

№ 35

Полукруг с разрезами



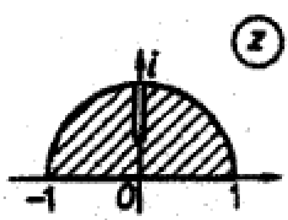
$w = z^2$



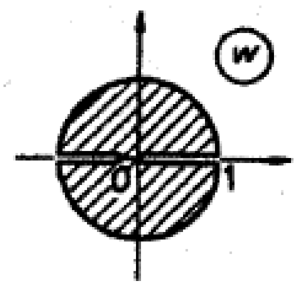
Полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$,
с разрезом по отрезку $[0,\ i/2]$

Круг $|w| < 1$
с разрезом по отрезку $[-1/4,\ 1]$

№ 36



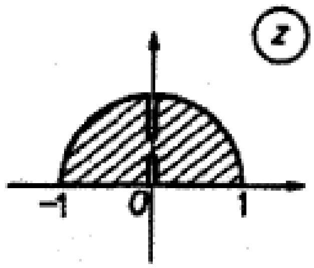
$w = z^2$



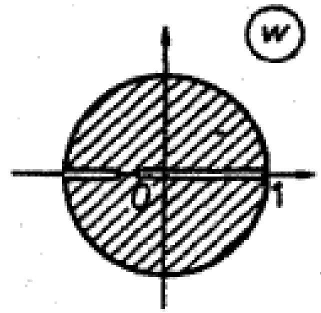
Полукруг $|z| < 1$,
с разрезом по отрезку $[i/2,\ i]$

Круг $|w| < 1$
с разрезами по отрезкам
$[-1,\ -1/4]$ и $[0,\ 1]$

№ 37



$w = z^2$

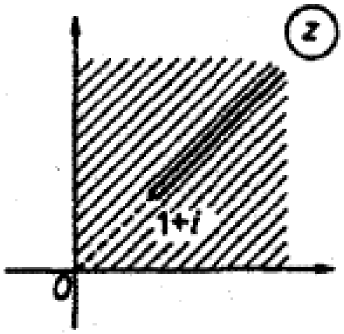


Полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$,
с разрезами по отрезкам
$[0,\ ai]$ и $[bi,\ i]$, где
$0 < a < b < 1$

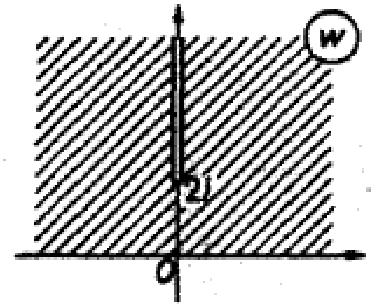
Круг $|w| < 1$
с разрезами по отрезкам
$[-1,\ -b^2]$ и $[-a^2,\ 1]$

№ 38

Угол с разрезами



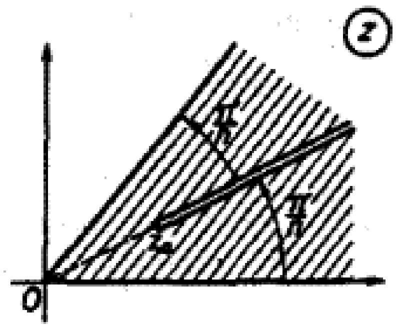
$w = z^2$



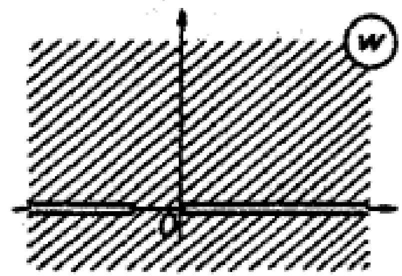
Угол $0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$
с разрезом по действительному
лучу $\operatorname{Arg} z = \pi/4$
с началом в точке $1 + i$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$
с разрезом по мнимому лучу
с началом в точке $[2i, +i\infty[$

№ 39



$w = z^n$

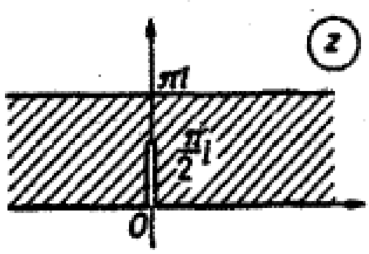


Угол $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi/n$
с разрезом по действительному
лучу $\operatorname{Arg} z = \pi/n$
с началом в точке $z_0 = e^{i\pi/n}a$; $a > 0$

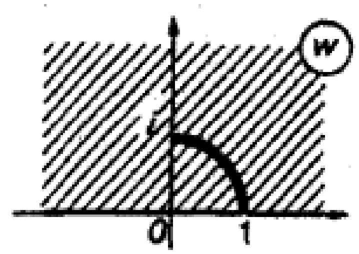
Плоскость с разрезами
по действительным лучам
$]-\infty, -a^n]$ и $[0, +\infty[$

№ 40

Полоса с разрезами



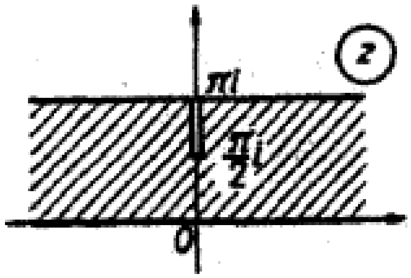
$w = e^z$



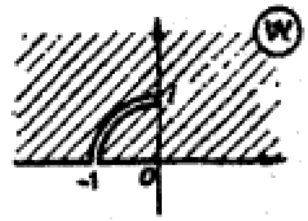
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$
с разрезом по мнимому
отрезку $[0, i\pi/2]$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$
с разрезом по дуге
окружности $w = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$

№ 41



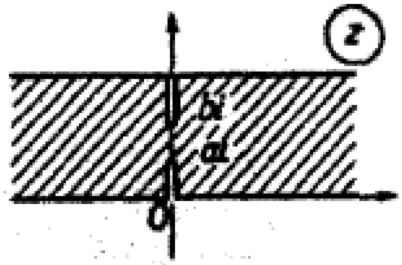
$w = e^z$



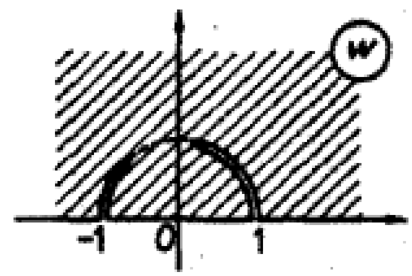
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$
с разрезом по мнимому
отрезку $[\pi i/2,\ \pi i]$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$
с разрезом по дуге
окружности $w = e^{i\varphi}$, $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

№ 42



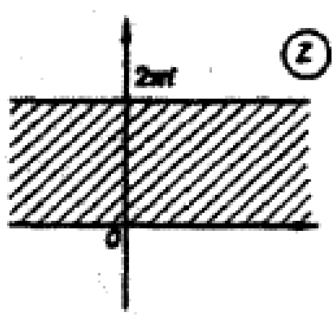
$w = e^z$



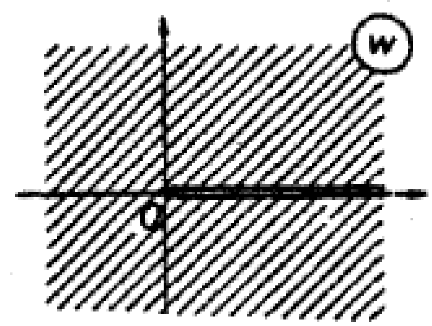
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$
с разрезами по мнимым
отрезкам $[0,\ ai]$ и $[bi,\ \pi i]$,
где $0 < a < b < \pi$,

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$
с разрезами по дуге
окружности $w = e^{i\varphi}$,
где $0 \leqslant \varphi \leqslant a$, $b \leqslant \varphi \leqslant \pi$

№ 43



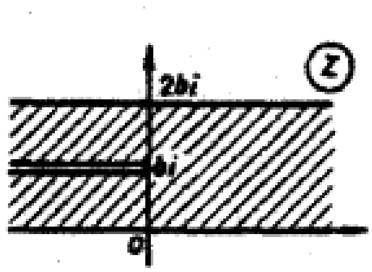
$w = e^z$



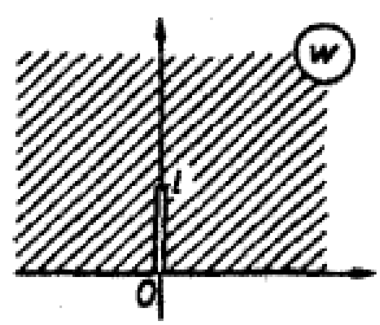
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$

Плоскость с разрезом
по действительному лучу
$[0,\ +\infty[$

№ 44

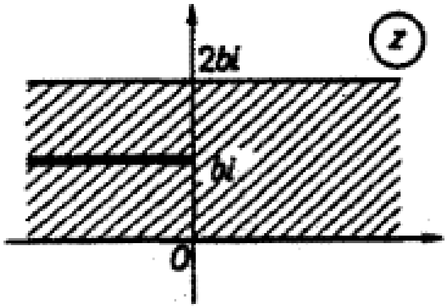


$w = e^{\frac{\pi z}{2b}}$

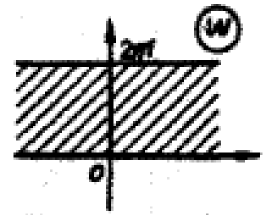


Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2b$ с разрезом

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$



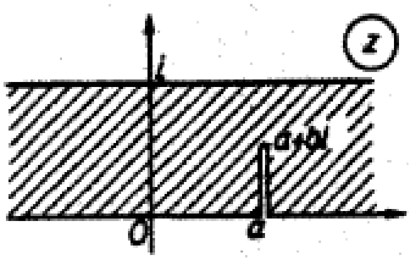
$$w = \ln(e^{\pi z/b} + 1)$$



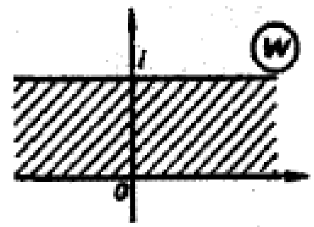
Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2b$ с разрезом по действительному лучу $\operatorname{Im} z = b$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$

Полоса $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$

№ 46



$$w = \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi b}{2}}$$

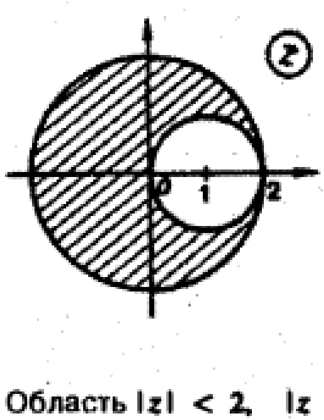


Полоса $0 < \operatorname{Im} z < 1$ с разрезом по действительному лучу $\operatorname{Re} z = a$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b < 1$

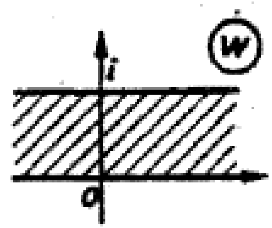
Полоса $0 < \operatorname{Im} w < 1$

№ 47

Различные области



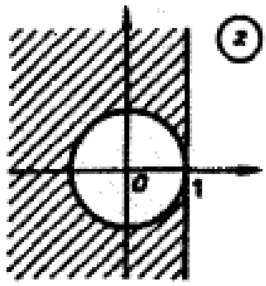
$$w = 2i \frac{z}{z-2}$$



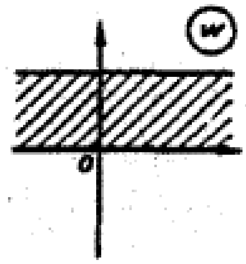
Область $|z| < 2$, $|z - 1| > 1$

Полоса $0 < \operatorname{Im} w < 1$

№ 48



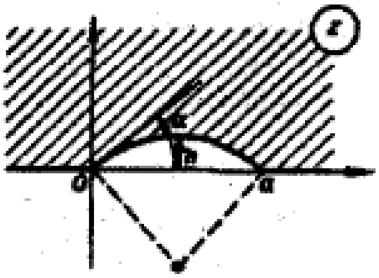
$$w = i\frac{z+1}{z-1}$$



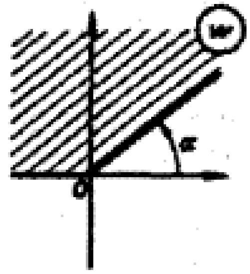
Область с удаленным кругом
$\operatorname{Re} z < 1, \quad |z| > 1$

Полоса $0 < \operatorname{Im} w < 1$

№ 49



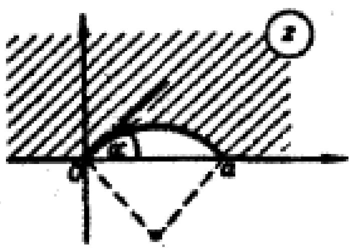
$$w = \frac{z}{a-z}$$



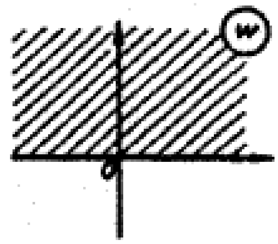
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$
с удаленным круговым
сегментом

Угол $\alpha < \operatorname{Arg} w < \pi$

№ 50



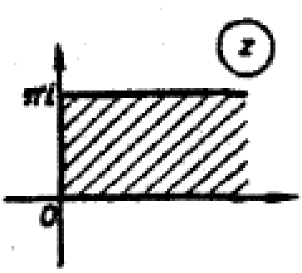
$$w = -\left(\frac{z}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$$



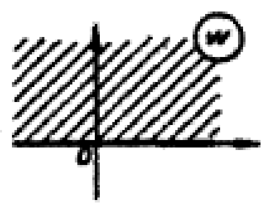
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$
с удаленным круговым
сегментом

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 51

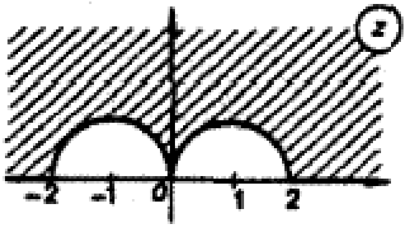


$$w = \operatorname{ch} z$$

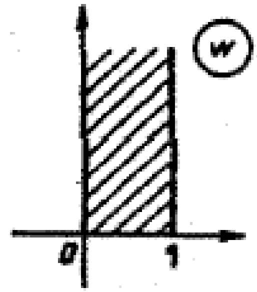


Полуполоса

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$



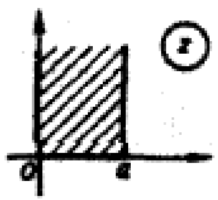
$$w = \frac{z-2}{z}$$



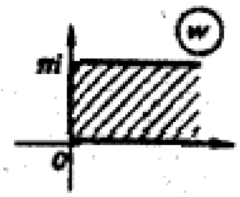
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$
с удаленными полукругами

Полуполоса $0 < \operatorname{Re} w < 1$,
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 53



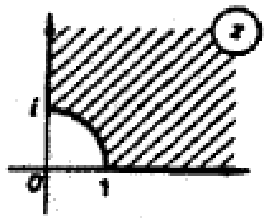
$$w = \pi \frac{\frac{z}{a} - 1}{i}$$



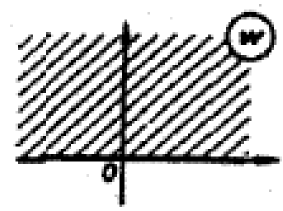
Полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < a$,
$\operatorname{Im} z > 0$

Полуполоса $0 < \operatorname{Im} w < \pi$,
$\operatorname{Re} w > 0$

№ 54



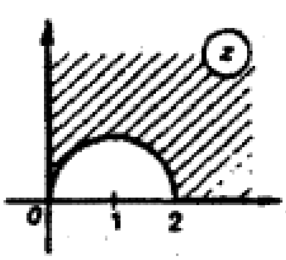
$$w = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$



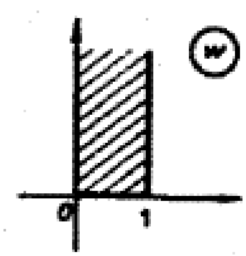
Угол $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$
с удаленным сектором
единичного круга $|z| < 1$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 55



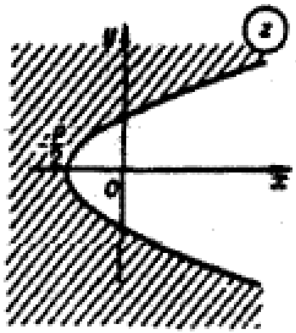
$$w = -\frac{2}{z}$$



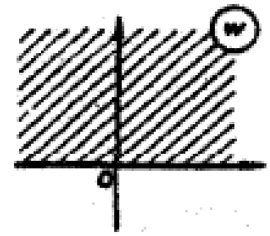
Угол $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z > 0$
с удаленным полукругом

Полуполоса $0 < \operatorname{Re} w < 1$,
$\operatorname{Im} w > 0$

№ 56



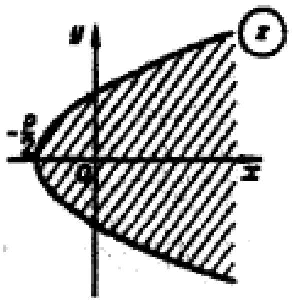
$$w = \sqrt{z} - i\sqrt{\frac{p}{2}}$$



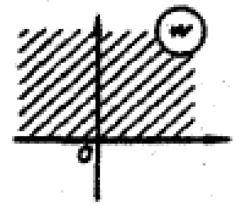
Внешность параболы
$y^2 = 2p(x + p/2),\ p > 0,$
$z = x + iy$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 57



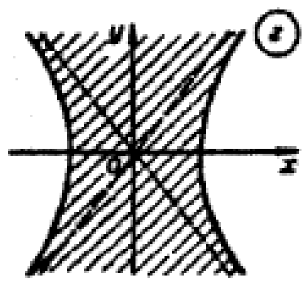
$$w = i\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\sqrt{\frac{z}{2p}}$$



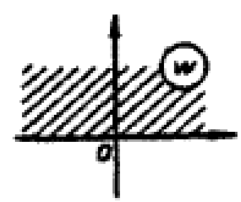
Внутренность параболы
$y^2 = 2p(x + p/2),\ p > 0,$
$z = x + iy$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 58



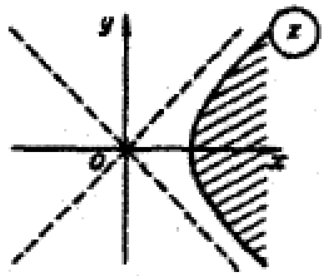
$$w = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{ce^{i\theta}}\right)^{\frac{\pi}{\pi - 2\theta}}$$



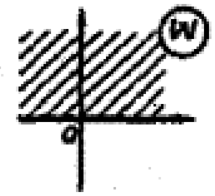
Внешность гиперболы
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ c = \sqrt{a^2 + b^2},$
$\theta = \arcsin\frac{a}{c}$

Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 59



$$w = i\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2\theta}\,\mathrm{Arch}\,\frac{z}{c}\right)$$



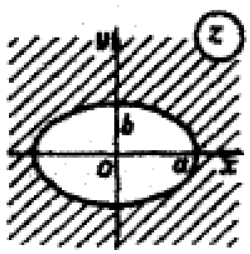
Внутренность правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

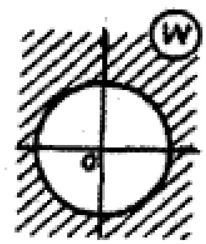
$$\theta = \arcsin\frac{a}{c}$$

Полуплоскость $\mathrm{Im}\, w > 0$

№ 60



$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}$$



Внешность эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0,\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Внешность круга $|w| > 1$

№ 61