ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Существование асимптотически оптимальных стратегий в моделях рынка с дискретным временем

Выполнил студент
609 группы
Запольский Павел Алексеевич

____
подпись студента

Научные руководители:
доцент, к.ф.-м.н.
Житлухин Михаил Валентинович
академик РАН
Ширяев Альберт Николаевич

____
подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1. Введение

В финансовой математике стратегиями оптимального роста называются такие инвестиционные стратегии, которые показывают наибольшую асимптотическую доходность на бесконечном горизонте времени. Первые результаты о стратегиях такого типа были получены Келли в работе [1], где была рассмотрена простая модель рынка, состоящего из активов, производящих взаимоисключающие единичные выплаты в каждый момент времени[1]. Основной ее результат состоит в том, что асимптотически оптимальной является стратегия, которая на каждом шаге максимизирует математическое ожидание логарифма капитала в следующий момент времени. Ввиду этого такие стратегии также называют логарифмически оптимальными (лог-оптимальными) или стратегиями Келли. Еще одно название таких стратегий – нумерэр (numeraire) появилось в работе Лонга [2] и относится к связи лог-оптимальной стратегии с плотностью эквивалентной мартингальной меры (всегда в таких моделях предполагается, что рынок является безарбитражным, что обеспечивает существование эквивалентной мартингальной меры).

Результаты Келли были обобщены Л. Брейманом в работе [3] на более общую модель, где уже не предполагалась взаимная исключаемость выплат. Также им были доказаны и другие свойства лог-оптимальной стратегии, как например то, что она достигает фиксированного уровня капитала асимптотически быстрее любой другой стратегии в пределе, когда величина этого уровня стремится к бесконечности.

В 1960-1980-х гг. было доказано множество различных свойств лог-оптимальных стратегий. Обзор соответствущих результатов для моделей с дискретным временем можно найти, например, в книге [4], гл. 16. Среди этих работ, можно выделить работу Алгоета и Кавера [5], где было доказано существование лог-оптимальных стратегий в наиболее общей модели финансового рынка с дискретным временем и доказаны ее свойства асимптотической оптимальности. Из последующих обобщений отметим работу Каратзаса и Кардараса [6]. В этой работе рассматривалась общая семимартингальная модель с непрерывным временем, для которой были доказаны необходимые и достаточные условия существования лог-оптимальных стратегий (нумерэров) и показана их связь с условиями отсутствия арбитража.

Данная дипломная работа касается вопроса построения стратегий оптимального роста. Как уже было упомянуто, такую стратегию можно задать как решение задачи максимизации математического ожидания капитала портфеля. В свою очередь, эта задача имеет

[1]Строго говоря, Келли рассматривал не финансовый рынок, а задачу нахождения величины оптимальной ставки в пари. Однако эта задача несложно переносится на модель финансового рынка.

решение, когда логарифмы приращений цен являются интегрируемыми (т.е. имеют конечные математические ожидания). Во многих работах в литературе, например в упомянутой статье Алгоета и Кавера [5], такое предположение изначально накладывается на модель рынка. В случае когда логарифмы цен не интегрируемы, задача максимизации ожидания логарифма капитала не имеет решения, но стратегия оптимального роста все равно существует. Стандартной конструкцией для ее построения является ее получение в пределе при рассмотрении последовательности моделей рынка, в которых приращения цен усекаются, но в пределе сходятся к исходной модели. Такой подход, например, можно найти в работе Каратзаса и Кардараса [6]. Однако эта конструкция является достаточно громоздкой и неявной.

В настоящей дипломной работе для модели с дискретным временем будет предложена другая конструкция стратегий оптимального роста, которая является более простой. Основная идея состоит в том, что вместо задачи максимизации ожидания логарифма капитала можно рассматривать задачу максимизации ожидания логарифма капитала для вспомогательной модели рынка, где доходности активов заменены на их относительные доходности. А именно, если случайная величина S_t^i задает цену актива i в момент времени t, то доходностью будем называть величину $X_t^i = S_t^i / S_{t-1}^i$, а относительной доходностью величину $R_t^i = X_t^i / (X_t^1 + \cdots + X_t^N)$, где N – общее количество активов на рынке. Тогда рассматриваемая задача состоит в нахождении стратегии $\lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^N)$ максимизирующей условное математическое ожидание $\mathrm{E}(\langle \lambda_t, R_t \rangle \mid \mathcal{F}_{t-1})$. Здесь стратегия задается как последовательность векторов пропорций λ_t^i капитала, вложенных в каждый актив (точные определения будут даны далее). Будет показано, что у рассматриваемой задачи решение существует и полученная стратегия является стратегией оптимального роста.

Дипломная работа устроена следующим образом. В разделе 2 описана модель рынка. В разделе 3 формулируется определение стратегии оптимального роста и выводятся некоторые простые следствия из него. Раздел 4 содержит основной результаты работы – теоремы о существовании и единственности стратегий оптимального роста, а также их доказательства. В разделе 5 приведены результаты симуляции оптимальной и случайной стратегии, средние значения их доходностей и графики.

2. Модель рынка

Будем предполагать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Время в модели дискретно, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Рынок состоит из N активов, цены которых задаются согласованными последовательностями $S^i = (S_t^i)_{t=0}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, N$. Напомним, что согласованность означает, что для каждого $t \geq 0$ величины S_t^i являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми. Будем считать, что цены строго положительны, т.е. $S_t^i > 0$ п.н. для всех t, i. Отметим, что на таком рынке может присутствовать и безрисковый актив с ценой, которая задается предсказуемой последовательностью, это очевидным образом является частным случаем общего определения. Также будем считать, что короткие продажи запрещены, это значит, что мы не можем иметь в портфеле отрицательное количество активов.

Пусть агент (инвестор, торгующий на этом рынке) обладает начальным капиталом $V_0 > 0$. Стратегией будем называть предсказуемую последовательность $h = (h_t)_{t=1}^{\infty}$, где $h_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$ является случайным вектором, задающим портфель инвестора на дату $t \geq 1$ и приобретаемый в момент $t-1$. Координата h_t^i выражает количество единиц актива i (количество акций в портфеле). Далее будет предполагаться, что $h_t \geq 0$. Смысл этого ограничения состоит в том, что на рынке запрещены короткие продажи и заимствование денежных средств.

Стоимостью портфеля стратегии в момент времени t будем называть величину

$$V_t^h = \sum_{i=1}^{N} h_t^i S_t^i = \langle h_t, S_t \rangle.$$

Будем называть стратегию самофинансируемой, если

$$\langle h_t, S_t \rangle = \langle h_{t+1}, S_t \rangle.$$

Смысл условия самофинансируемости состоит в том, что стоимость портфеля остается неизменной во время торгов в каждый момент времени t, то есть отсутствует приток или отток капитала из портфеля: в левой части равенства выше указана стоимость портфеля до торгов, а в правой – после. При этом, учитывая, что цены строго положительны, а короткие продажи запрещены, заметим, что для всех $t \geq 0$ выполяется $V_t > 0$ для любой стратегии.

Следующее предложение хорошо известно и позволяет удобным образом выразить стоимость портфеля самофинансируемой стратегии.

Предложение 1. *Стратегия h является самофинансируемой тогда и только тогда, когда*

$$V_t^h = V_0^h + \sum_{u=1}^{t} \langle h_u, \Delta S_u \rangle,$$

где $\Delta S_u = S_u - S_{u-1}$ представляет вектор изменения цен за период времени $[u-1, u]$.

Доказательство. Вычтем из V_t^h и прибавим $\sum_{u=1}^{t} \langle h_{u-1}, S_{u-1} \rangle$:

$$V_t^h = V_0^h + \left(\sum_{u=1}^{t} \langle h_u, S_u \rangle - \sum_{u=1}^{t} \langle h_u, S_{u-1} \rangle \right) + \sum_{u=1}^{t} \langle h_{u-1}, S_{u-1} \rangle - \sum_{u=1}^{t} \langle h_{u-1}, S_{u-1} \rangle.$$

Сгруппируем слагаемый следующим образом

$$V_t^h = V_0^h + \left(\sum_{u=1}^{t} \langle h_u, S_u \rangle - \sum_{u=1}^{t} \langle h_{u-1}, S_{u-1} \rangle \right) + \left(\sum_{u=1}^{t} \langle h_{u-1}, S_{u-1} \rangle - \sum_{u=1}^{t} \langle h_u, S_{u-1} \rangle \right).$$

Используя определение самофинансируемости $V_t^h = V_0^h + \sum_{u=1}^{t} \langle h_u, \Delta S_u \rangle$ сократим равные слагаемые и получим стоимость портфеля по определению выше

$$V_t^h = V_0^h + \langle h_t, S_t \rangle - \langle h_0, S_0 \rangle = \langle h_t, S_t \rangle.$$

□

Далее все стратегии будут считаться самофинансируемыми.

Приведем еще один способ задания самофинансируемой стратегии, который будет удобен в дальнейшем. Вместо последовательности векторов h_t можно рассматривать последовательность векторов $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N)$, задающих пропорции, в которых капитал портфеля распределяется между инвестициями в активы. А именно, положим

$$\lambda_t^i = \frac{h_t^i S_t^i}{V_t^h}.$$

Заметим, что $\lambda_t^i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^N \lambda_t^i = 1$. Таким образом, значения λ_t принадлежат стандартному симплексу $\Delta^N = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x^1 + \dots + x^n = 1\}$ в $\mathbb{R}^N$. При этом стоимость портфеля самофинансируемой стратегии можно выразить по формуле

$$V_t^\lambda = V_0 \prod_{u=1}^t \langle \lambda_t, X_t \rangle,$$

где величины $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ представляют доходность активов

$$X_t^i = \frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}.$$

3. Стратегии оптимального роста

Определение 1. Будем называть стратегию λ с начальным капиталом $V_0^\lambda > 0$ *стратегией* оптимального роста, если для любой другой стратегии μ верно, что

$$\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} \text{ является супермартингалом.}$$

Условие (1) обычно связывают с определение нумерэра. Далее приведены несколько предложений, проясняющих, почему такую стратегию можно называть стратегией оптимального роста, т.е. обеспечивающий наибольший рост капитала на бесконечном горизонте времени.

Предложение 2. *Если λ является стратегией оптимального роста, то для любой стратегии μ существует случайная величина с такая, что*

$$\sup_{t \geq 0} \frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} < c \text{ п.н.}$$

Смысл этого утверждения в том, что капитал никакой другой стратегии не может асимптотически иметь больший порядок роста, чем капитал стратегии оптимального роста.

Доказательство. Так как $\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}$ супермартингал, то по теореме Дуба о сходимости мартин-

галов, имеем конечный предел $V = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}\right]$ почти наверное, $\mathrm{E}(V) \leq 1$.
Таким образом в пределе супермартингал ограничен, а в промежуточный момент для любого $t > 0$, V_t^μ – конечен, следовательно $\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}$ – так же конечен.
В итоге, для почти любого ω верно, что найдется $c(\omega)$ такая, что $\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}(\omega) < c(\omega)$. То есть существует такая случайная величина с, что

$$\sup_{t\geq 0}\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} < c \text{ п.н.}$$

$\square$

Предложение 3. *Если λ является стратегией оптимального роста, то для любой стратегии μ*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln V_t^\lambda \geq \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln V_t^\mu \text{ \textit{п.н.}}$$

Величина $\rho(\lambda) := \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\ln V_t^\lambda$ обычно называется асимптотической скоростью роста капитала стратегии (таким образом, капитал стратегии растет “примерно” как $\exp(\rho t)$). Таким образом, предложение показывает, что стратегия оптимального роста также обладает наибольшей асимптотической скоростью роста капитала.

Доказательство. $\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}$ – положительный супермартингал, тогда по теореме Дуба о сходимости мартингалов, имеем конечный предел $V = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}\right]$ почти наверное, $\mathrm{E}(V) \leq 1$.
Заметим, из неравенства Маркова следует, что для любых t, c_t верно, что $\mathrm{P}\left(\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} > c_t\right) \leq \frac{1}{c_t}$.
Применим $\frac{\ln(*)}{t}$ к обеим сторонам неравенства под знаком вероятности:

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{t}\ln\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} > \frac{1}{t}\ln c_t\right) \leq \frac{1}{c_t}.$$

Положим $c_t = t^2$ и просуммируем по t:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{P}\left(\frac{1}{t}\ln\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} > \frac{2\ln t}{t}\right) \leq \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^2}.$$

Тогда $\sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{P}\left(\frac{1}{t}\ln\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} > \frac{2\ln t}{t}\right)$ сходится и по лемме Бореля-Кантелли имеем

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{t}\ln\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} > \frac{2\ln t}{t}\right) = 0.$$

Это значит, что для почти любой последовательности, существует такое N, что для любого $t > N$, $\frac{1}{t}\ln\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} < \frac{2\ln t}{t}$. Тогда, $\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} \leq 0$ или

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln V_t^\lambda \geq \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln V_t^\mu \text{ п.н.}$$

$\square$

Предложение 4. *Если λ является стратегией оптимального роста, то для любой стратегии μ с таким же значением начального капитала ($V_0^\lambda = V_0^\mu$) и любого момента времени $T > 0$ выполнено*

$$\mathrm{E} \ln V_T^\lambda \geq \mathrm{E} \ln V_T^\mu.$$

Величина $U(\lambda, T) = \mathrm{E} \ln V_T^\lambda$ представляет собой ожидаемую логарифмическую полезность портфеля стратегии в момент T. Таким образом, стратегия оптимального роста также максимизирует ожидаемую логарифмическую полезность.

Доказательство. Так как $\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda}$ является супермартингалом, имеем

$$E\left(\frac{\sum_n \mu_t^n X_t^n}{\sum_n \lambda_t^n X_t^n} \mid F_{t-1}\right) \leqslant 1.$$

Применим $\ln(*)$ к обеим частям неравенства и воспользуемся неравенством Йенсена для строго вогнутой функции

$$E\left((\ln \prod_n (\mu_t^n X_t^n) - \ln \prod_n (\lambda_t^n X_t^n)) \mid F_{t-1} \right) \leqslant 0.$$

$$E\left(\ln \prod_n (\mu_t^n X_{T+1}^n) \mid F_T\right) \leqslant E\left(\ln \prod_n (\lambda_T^n X_{T+1}^n) \mid F_T\right).$$

Для моментов остановки $T < T+1 < N$, где $N > 0$ имеем

$$E\left(\sum_n \ln(\mu_t^n X_T^n)\right) \leqslant E\left(\sum_n \ln(\lambda_T^n X_T^n)\right).$$

$$\mathrm{E} \ln V_T^\lambda \geq \mathrm{E} \ln V_T^\mu.$$

□

4. Существование и единственность стратегии оптимального роста

Определим относительные доходности акций

$$R_t^i = \frac{X_t^i}{\sum_{k=1}^N X_t^k}.$$

Теорема 1. *В рассматриваемой модели существует стратегия λ такая, что для каждого $t \geq 1$*

$$\lambda_t \in \arg\max_{\lambda \in \Delta^N} \mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle) \mid \mathcal{F}_t). \tag{1}$$

и такая стратегия является стратегией оптимального роста.

Доказательство. Для доказательства существования стратегии λ, решающей максимизационную задачу (1) сначала докажем следующее утверждение. Для любого t существует

$\mathcal{F}_{t-1}$-измеримая $\widehat{\lambda}_t$ такая, что

$$\widehat{\lambda}_t(\omega) \in \arg\max_{\lambda \in \Delta^N} \mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t)(\omega).$$

Сначала покажем, что у нашей оптимизационной задачи существует конечное решение. Чтобы ограничить решение сверху, заметим оценку $\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle \leq \ln\langle E, R_{t+1} \rangle$, где E – вектор из 1, тогда $\mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t)(\omega) \leq 0$. Чтобы найти оценку снизу достаточно предъявить λ, такую что все $\lambda_i = \frac{1}{n}$. Тогда, так как $\sum_t R_t = 1$, скалярное произведение $\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle$ – константа. Для доказательства существования и измеримости $\widehat{\lambda}_t(\omega)$ воспользуемся теоремой об измеримом максимуме [7]: нам необходимо показать, что для любого t

$$\mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t) : \Omega^N \times \mathbb{K} \to \mathbb{R} \text{ – функция Каратеодори}$$

Имеем, что $\mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t)$ как условное математическое ожидание при фиксированном λ_{t+1} является измеримым.
Для того, чтобы функция $\mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, X_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t)$ была функцией Каратеодори достаточно показать полунепрерывность по λ сверху при фиксированном ω. Также имеем, что величины доходностей $R_t > 0$, для любого $t > 0$. Это следует из того, что мы считаем цены строго положительными.
Пусть для некоторго λ математическое ожидание конечно, пусть есть последовательность λ_i сходящееся к λ. Тогда

$$\overline{\lim}_{i\to\infty} \mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{i,t+1}, R_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t) \leq \mathrm{E}(\ln\langle \lambda_{t+1}, R_{t+1} \rangle \mid \mathcal{F}_t)$$

И по теореме Лебега о мажорируемой сходимости будем иметь полунепрерывность сверху.

Пусть μ_t – любая стратегия. Для стратегии $\widehat{\lambda}_t$ мы хотим показать, что $\frac{V_t^{\mu}}{V_t^{\widehat{\lambda}}}$ супермартингал, то есть

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_n \mu_t^n X_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n X_t^n} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right) \leq 1 \text{ что эквивалентно тому, что } \mathrm{E}\left(\frac{\sum_n \mu_t^n R_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n R_t^n} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right) \leq 1.$$

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$, рассмотрим следующую выпуклую комбинацию

$$Y(\varepsilon, \omega) = \ln \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\mu_t^n \cdot \varepsilon + \widehat{\lambda}_t^n (1-\varepsilon) \right) R_t^n \right).$$

Покажем, что $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \mathrm{E}\left(Y(\varepsilon, \omega) \mid \mathcal{F}_{t-1} \right)$ существует и

$$\frac{\partial \mathrm{E}(Y(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_{t-1})}{\partial \varepsilon} = \mathrm{E}\left(\frac{\partial Y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right).$$

Заметим, что

$$\left| \frac{\partial Y(\varepsilon, \omega)}{\partial \varepsilon} \right| \leq Z(\omega), \quad \varepsilon \in [0,1], \quad \mathrm{E}[Z(\omega)] < \infty.$$

Так как производная имеет вид $\frac{\partial Y(\varepsilon,\omega)}{\partial \varepsilon} = \frac{A(\omega)}{B(\omega)\varepsilon + C(\omega)(1-\varepsilon)}$, а $A, B, C > 0$, тогда знаменатель не обращается в 0 ни при каких $\varepsilon \in [0,1]$. Таким образом, возьмем $Z(\omega) = \frac{A(\omega)}{\min(B(\omega), C(\omega))}$.

Тогда по теореме Фубини имеем

$$\int_a^\varepsilon \mathrm{E}\left[\frac{\partial Y(u)}{\partial u} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] du = \mathrm{E}\left[\int_a^\varepsilon \frac{\partial Y(u)}{\partial u} du \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathrm{E}[Y(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_{t-1}] - \mathrm{E}[Y(a) \mid \mathcal{F}_{t-1}], \quad a, \varepsilon \in [0,1].$$

Иными словами $\mathrm{E}[Y(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_{t-1}]$ дифференцируемо по ε и

$$\frac{\partial \mathrm{E}[Y(\varepsilon) \mid \mathcal{F}_{t-1}]}{\partial \varepsilon} = \mathrm{E}\left[\frac{\partial Y(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \mid \ \mathcal{F}_{t-1}\right].$$

Для любого $\varepsilon \in [0,1]$ выражение

$$\mathrm{E}\left(\ln\left(\sum_{n=1}^N \left(\mu_t^n \cdot \varepsilon + \widehat{\lambda}_t^n (1-\varepsilon)\right) R_t^n\right) \mid F_{t-1}\right) \text{ достигает максимума при } \varepsilon = 0.$$

Тогда функция от ε не возрастает на отрезке $[0,1]$ и производная не больше 0.

$$E\left(\frac{\sum_n \left(\mu_t^n - \widehat{\lambda}_t^n\right) R_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n R_t^n} \mid F_{t-1}\right) \leq 0$$

Что эквивалентно тому, что $\mathrm{E}\left(\frac{\sum_n \mu_t^n R_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n R_t^n} \mid F_{t-1}\right) \leq 1.$ □

Теорема 2. *Предположим, что в рассматриваемой модели для каждого $t \geq 1$ доходности X_t^i не являются линейно зависимыми, т.е. из равенства $\sum c_i X_t^i = c_0$ с некоторыми константами c_i следует, что $c_1 = \cdots = c_N = 0$. Тогда стратегия оптимального роста п.н. единственна, т.е. если $\widetilde{\lambda}$ – другая стратегия оптимального роста, то $\widehat{\lambda}_t = \widetilde{\lambda}_t$ п.н. для всех $t \geq 1$.*

Доказательство. Рассмотрим логарифм отношения другой стратегии $\widetilde{\lambda}$ и оптимальной стратегии $\lambda : \ln \frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}}$. Покажем, что данный процесс является строгим супермартингалом.
Так как $\ln(\cdot)$ – строго вогнутая функция, применим неравенство Йенсена для условного математического ожидания:

$$\mathrm{E}\left[\ln \frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] \leq \ln\left(\mathrm{E}\left[\frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]\right).$$

Обратим внимание, что если имеем ожидание функции от неконстантной случайной величины, тогда это будет строгое неравенство, то есть

$$\mathrm{E}\left[\ln \frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid F_{t-1}\right] = \ln\left(\mathrm{E}\left[\frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid F_{t-1}\right]\right) \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} = a \mid F_{t-1}\right) = 1 \text{ для некотороый константы a.}$$

Учитывая, что X_t^i – линейно независимы, верно что

$$\mathrm{P}(V_t^{\widetilde{\lambda}} - aV_t^{\widehat{\lambda}} = 0 \mid F_{t-1}) = 1 \text{ или } \mathrm{P}\left(\sum_n \left(\widetilde{\lambda}^n - a\widehat{\lambda}^n\right) X_t^n = 0 \mid F_{t-1}\right) = 1.$$

Что эквивалентно тому, что $\mathrm{P}\left(\widetilde{\lambda}^n - a\widehat{\lambda}^n\right) = 0$. Но так как $\sum_n \widehat{\lambda}^n = \sum_n \widetilde{\lambda}^n = 1$,то $a = 1$ то есть $\widehat{\lambda} = \widetilde{\lambda}$.

В итоге, получили, что для любого $\widetilde{\lambda} \neq \widehat{\lambda}$

$$\mathrm{E}\left[\ln \frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid F_{t-1}\right] < \ln\left(\mathrm{E}\left[\frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid F_{t-1}\right]\right) \leq 0.$$

$$\mathrm{E}\left[\ln V_t^{\widetilde{\lambda}} \mid F_{t-1}\right] < \mathrm{E}\left[\ln V_t^{\widehat{\lambda}} \mid F_{t-1}\right].$$

Иными словами, $\widetilde{\lambda}$ не максимизирует функционал математического ожидания логарифма доходностей и не является стратегией оптимального роста. Следовательно получили противоречие, и, значит, имеет место единственность. □

5. Численные симуляции

Чтобы проиллюстрировать оптимальность найденной стратегии, сравним ее с какой-нибудь другой стратегией. В качестве примера возьмем стратегию, распределяющую капитал в равных долях.

Будем рассматривать модель из двух акций, симулированных геометрическим броуновским движением, логарифмические доходности которых имеют нормальное распределение, и одного безрискового актива, доходность которого равна безрисковой ставке, начисляемой каждый торговый день.

Для симуляции акций возьмем следующие параметры:

1. $T = 20$ – продолжительность симуляции в годах
2. $days = 250$ – торговых дней в году
3. $\mu_1 = 0,07, \mu_2 = 0,09$ – коэффициент сноса 1й и 2й акции
4. $\sigma_1 = 0,2, \sigma_2 = 0,1$ – волатильность 1й и 2й акции
5. $r = 0,05$ – безрисковая ставка

Рис. 1: Симуляция поведений акций за 20 лет

Назовем "Случайной стратегией"стратегию, в которой аллокация актитвов происходит в равных долях, а "Асимптотически оптимальной стратегией"– стратегию с долями пропорционально математическому ожиданию логарифма доходностей. Покажем доходность соответсвующих стратегий на примере выше с изначальным капиталом 80$:

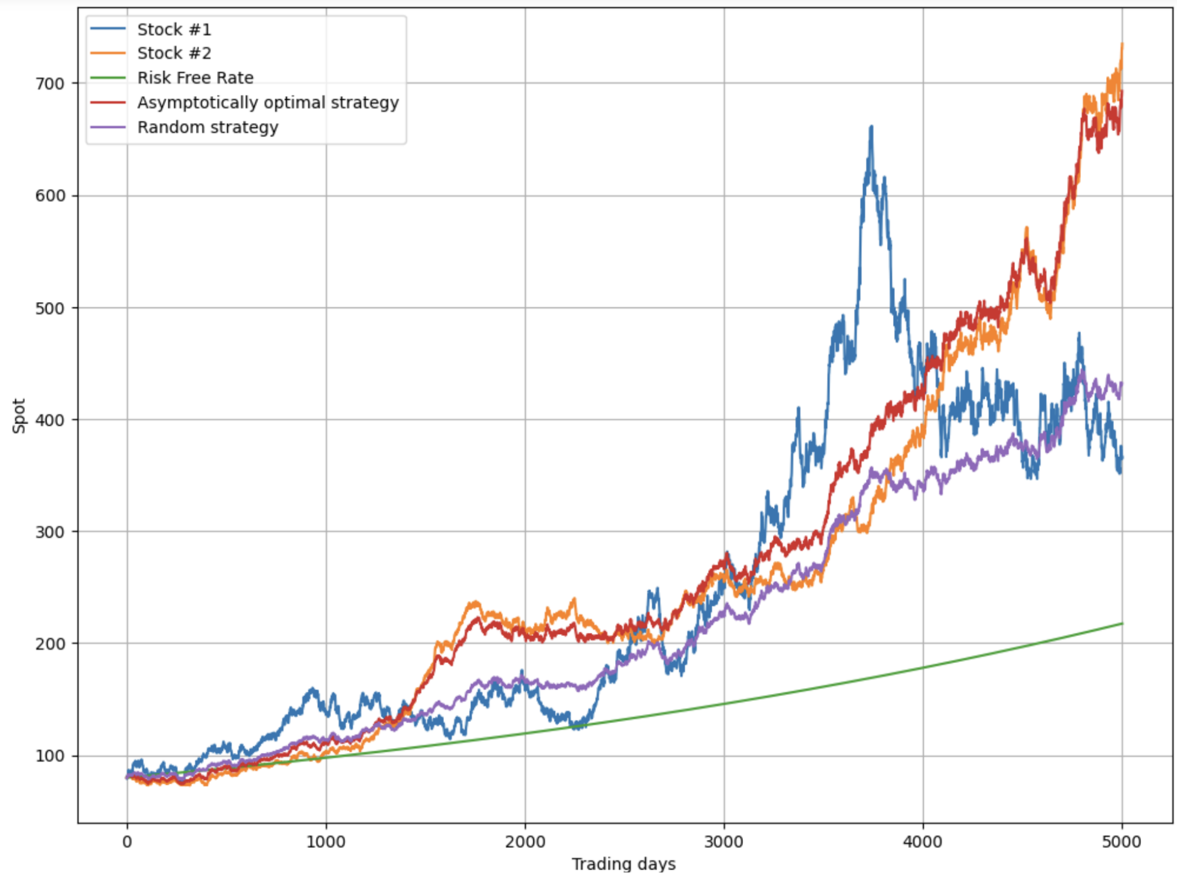

Рис. 2: Доходность портфеля на 80$

Теперь воспользуемся методом Монте-Карло: проведем симуляцию 3000 траекторий и посчитаем для них доходность лог-оптимальной стратегии и доходность стратегии с равными долями в активах.

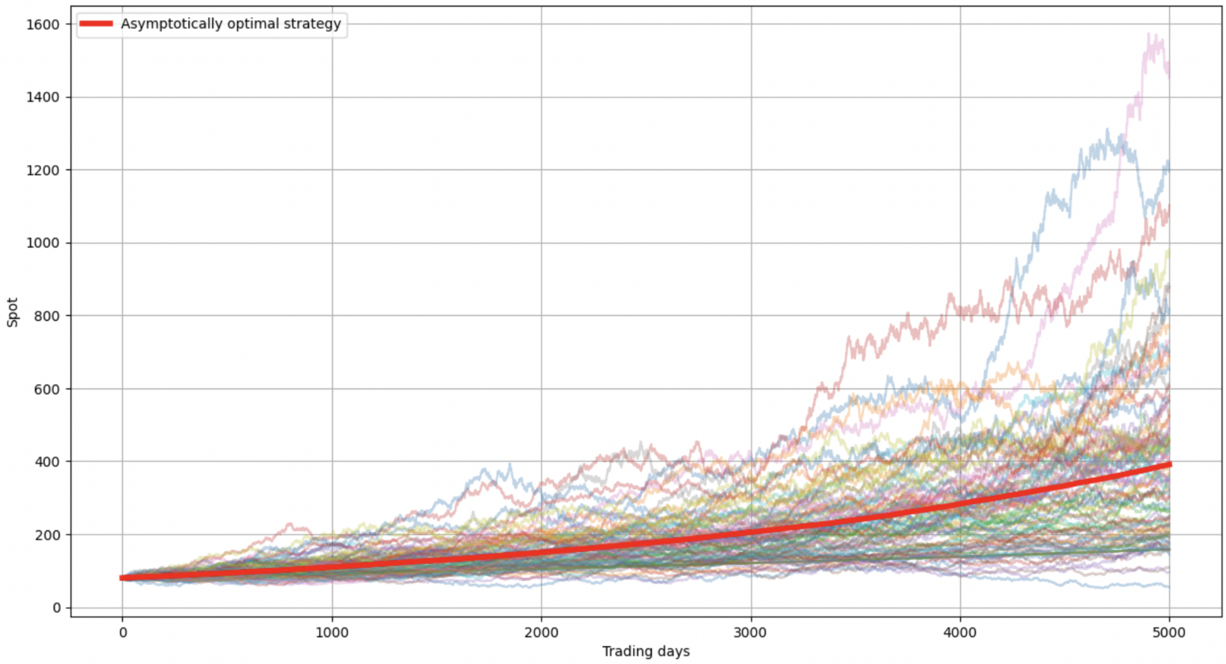

Рис. 3: Симуляция доходностей для лог-оптимальной стратегии

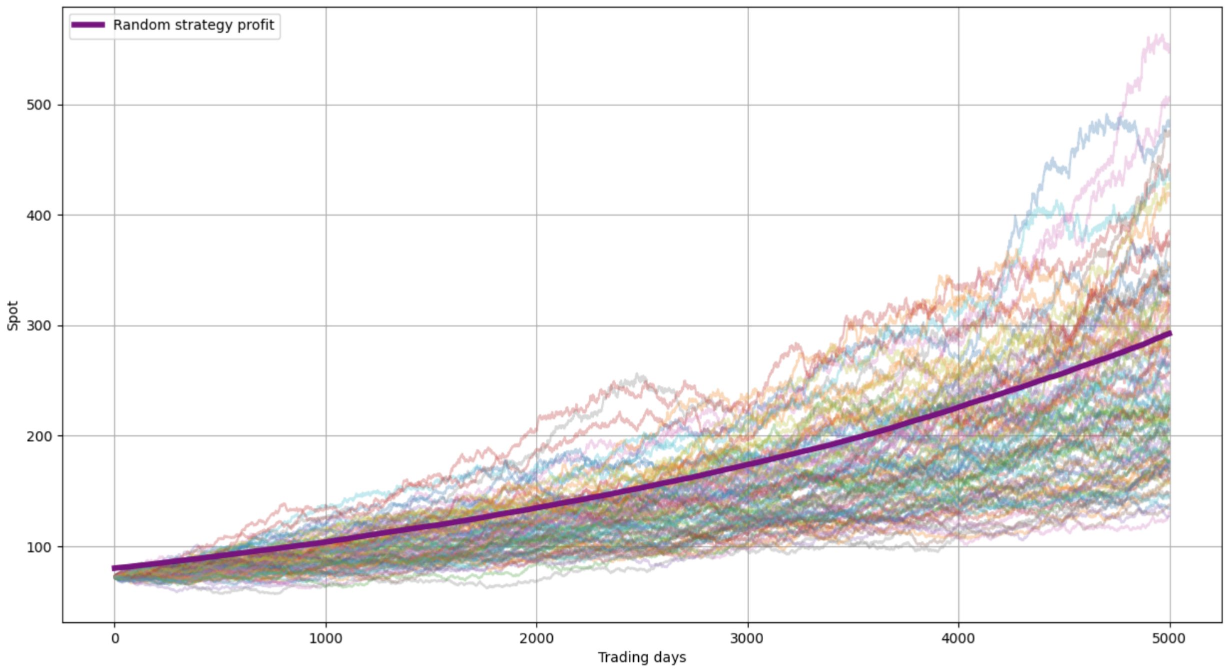

Рис. 4: Симуляция доходностей для стратегии аллокации в равных долях

В результате симуляции получили для лог-оптимальной стратегии в среднем 391$ из 80$ спустя 20 лет, а для стратегии в равных долях получили 292 $. Доходности стратегий – 388% и 265% соответсвенно.

Список литературы

[1] Kelly J.L. (1956) ”A new interpretation of information rate”, Bell System Technical Journal 35(7), 917-926.

[2] Long J.B jr. (2002) "Numeraire Portfolio Tests of the Size and Source of Gains from International Diversification”, SSRN Electronic Journal

[3] Breiman L.(1961), ”Optimal gambling systems for favorable games”, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 65-78

[4] Cover T. M.(1998), ”Shannon and investment”, IEEE Information Theory Society Newsletter, Summer , Special Golden Jubilee Issue, 10–11.

[5] Algoet P.H., Cover T.M. (1988) ”Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment”, Annals of Probability, 16(2), 876-898.

[6] Kazatzas I., Kardaras C. (2007) "The numéraire portfolio in semimartingale financial models"Finance Stoch 11: 447–493

[7] Aliprantis C. D., Border K. C. Border "Infinite Dimensional Analysis Third Edition, 18.19 Measurable Maximum Theorem, 605.