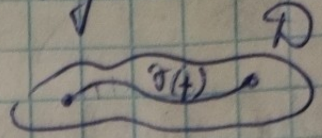
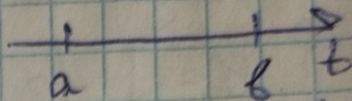
(23) Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

Опр. Пусть $\gamma(t)$, $t\in[a,b]$ - кус-гладкий путь в $\mathbb{C}$

Пусть $w=f(z): D\to\mathbb{C}$ и $\gamma(t)\in D\ \forall t$



Тогда $\int\limits_\gamma f(z)dz := \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1}))$



где $d=\max\limits_{0\le j\le n-1}|t_{j+1}-t_j|$, $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ - разбиение $[a,b]$; $t_0\le\xi_1\le t_1\le\ldots\le\xi_n\le t_n$ - метка (ξ_k)

Утв 1. Если $f\in C(D)$, то ∫-л ∃-ет и равен

$\int\limits_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int\limits_\gamma (u(x,y)dy + v(x,y)dx)$ ← через ∫-a II рода

Утв. 2. В усл. def: $\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt$

$\int\limits_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int\limits_a^b Re[f(\gamma(t))\dot\gamma(t)]dt + i\int\limits_a^b Im[f(\gamma(t))\dot\gamma(t)]dt$

Опр. Пусть $f(z)\in C(D)$, $\gamma\subset D$ - кус-гл. путь, тогда при $\gamma=\gamma(t)$ и $t\in[a,b]$: $\int\limits_\gamma f(z)|dz| = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$

∫л I рода

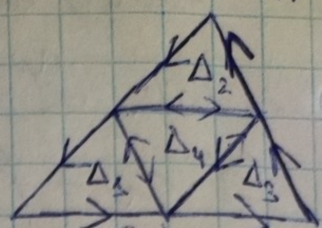
Утв 3. Пусть $f\in C(D)$, $\gamma\subset D$ - кус-гл., тогда lim ∃-ет и $=\int\limits_a^b f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|dt$

Св-ва:

1. $\tilde\gamma(s)=\gamma(t(s)) \Rightarrow \int\limits_{\tilde\gamma} f\,dz = \int\limits_\gamma f\,dz$
2. $\int\limits_\gamma (kf(z)+lg(z))dz = k\int\limits_\gamma f\,dz + l\int\limits_\gamma g(z)dz$
3. $\gamma=\gamma_1\sqcup\gamma_2 \Rightarrow \int\limits_\gamma f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz$
4. $\left.\begin{matrix}\gamma(t),\ t\in[0,1]\\ \gamma_-(t)=\gamma(1-t)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \int\limits_{\gamma_-} f(z)dz = -\int\limits_\gamma f(z)dz$
5. Пусть $f\in C(D)$, $\gamma\subset D$ - кус-гл $\Rightarrow \left|\int\limits_\gamma f\,dz\right| \le \int\limits_\gamma |f(z)|\cdot|dz| \le \max\limits_{z\in\gamma}|f|\cdot \underbrace{l_\gamma}_{\text{длина } \gamma}$

Лемма Гурса: Пусть $f \in \overset{\text{голоморфна}}{\mathcal{O}}(\Delta)$, Δ - откр. треуг. с внутрен.

Пусть $f \in C(\overline{\Delta}) \Rightarrow \int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$



▶ Пусть $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Delta_i$ и $Y = \int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz$ ← согласов. контур (область слева)

Т.к. внутр. контуры сократятся, то

$$Y = \int\limits_{\partial\Delta_1} f dz + \int\limits_{\partial\Delta_2} f dz + \int\limits_{\partial\Delta_3} f dz + \int\limits_{\partial\Delta_4} f dz$$ ← хотя бы 1 из $\int$-лов $\geq \frac{|Y|}{4}$

Возьмём такой $\int$-л и обозн. его $\Delta =: \Delta_{j_1}$

Δ_{j_1} - сделаем то же самое, что с Δ, т.е. Δ_{j_1} и найдём $\Delta_{j_1 j_2} \,/\, \left|\int\limits_{\partial\Delta_{j_1j_2}} f(z)dz\right| \geq \frac{|Y|}{16}$ и т.д.

Для простоты: $\Delta =: \Delta^0 \supset \Delta_{j_1} =: \Delta^1 \supset \Delta_{j_1 j_2} =: \Delta^2 \supset \ldots$

система замкнутых вложенных Δ-ков (diam, к-ых $\to 0$)

$\Rightarrow \exists$ т. $a \in \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \overline{\Delta^k} \Rightarrow f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \bar{o}(|z-a|)$

голом. $f \Rightarrow$ дифф. f

$\forall \varepsilon > 0$ - пр-но фикс. $\Rightarrow \exists n \,/\, |\bar{o}(|z-a|)| \leq \varepsilon |z-a|$ на Δ-ке $z \in \overline{\Delta^n}$

$\operatorname{diam} \overline{\Delta^n} < \delta$, будет т.к. $\operatorname{diam}\overline{\Delta^n} = \frac{\operatorname{diam}\Delta}{2^n}$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz = \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta^n} \overset{\text{const}}{f(a)}dz}_{=0 \text{ т-ма}} + \underbrace{\int\limits_{\partial\Delta^n} f'(a)(z-a)dz}_{=0 \text{ многочлен + т-ма}} + \int\limits_{\partial\Delta^n} \bar{o}(z-a)dz$$

$$\Rightarrow \frac{|Y|}{4^n} \leq \left|\int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\Delta^n} \bar{o}(z-a)dz\right| \leq \int\limits_{\partial\Delta^n} |\bar{o}(z-a)||dz| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta^n} |z-a||dz| \leq \varepsilon \frac{\operatorname{diam}\Delta}{2^n} P_{\Delta^n} = \frac{\varepsilon \operatorname{diam}\Delta \cdot P_\Delta}{4^n}$$ ← периметр Δ

$$\Rightarrow |Y| \leq \varepsilon \operatorname{diam}\Delta \cdot P_\Delta \underset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} |Y| = 0$$ ◀

Опр. Пусть f - определена в D, тогда $F(z)$ назыв. первообразной f если $F \in \mathcal{O}(D)$ и $F'(z) = f(z)$.

Теорема: Пусть $D = \{|z-a| < r\}$ - круг, $f \in C(D)$. Пусть $\forall \Delta \subset D$: $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz \Rightarrow$ у f в D $\exists$ первообразная

Пример: $\int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \left| \begin{matrix} z=a+\rho e^{i\varphi} \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{matrix} \right| =$

$$= \int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\varphi}\cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi)d\varphi = \left[\begin{matrix} 2\pi i \rho^{n+1}, \text{ если } n=-1 \\ 0, \text{ если } n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\} \end{matrix}\right.$$

Формула Ньютона-Лейбница: Пусть $f(z)\in C(D)$,

$\gamma=\gamma(t)\subset D$ - кус.-гл., $t\in[a,b]$ и $\exists$ п/обр. $F(z)$ в D

Тогда $\int\limits_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

▲ $\int\limits_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt =$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}[F(\gamma(t))]dt \overset{\text{Н-Л на } [a,b]}{=} F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$ ▲

Теорема Коши (о гомотопных путях):

Пусть D - область в $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{O}(D)$, γ_0 и γ_1 - два пути в D

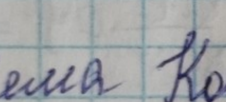
$\gamma_0(t)\underset{\text{гомотопия}}{\sim}\gamma_1(t)$ в D, $t\in[a,b]$ $\Rightarrow \int\limits_{\gamma_0} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz$

Следствие 1: $\forall$ односвязной D $\forall f\in\mathcal{O}(D)$ и

$\forall$ путей γ_0 и γ_1 / $\begin{matrix}\gamma_0(a)=\gamma_1(a) \\ \gamma_0(b)=\gamma_1(b)\end{matrix} \Rightarrow \int\limits_{\gamma_0} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz$

Следствие 2: В односв. D для $\forall f\in\mathcal{O}(D)$: $\int\limits_\gamma f(z)dz=0$

где γ - замкнутый путь

▲ 

$\gamma_0\sim\gamma_1 \Rightarrow \int\limits_{\gamma_0} f\,dz = \int\limits_{-\gamma_1} f(z)dz \Rightarrow (\int\limits_{\gamma_0} - \int\limits_{\gamma_1}) f\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int\limits_\gamma f\,dz = \int\limits_{\gamma_0\cup\gamma_1} f\,dz = (\int\limits_{\gamma_0} - \int\limits_{\gamma_1}) f\,dz = 0$$ ▲

Следствие 3: В односвязной обл D у $\forall f\in\mathcal{O}(D)$

$\exists$ п/обр. $F(z)$ / $F(z)\in\mathcal{O}(D)$ и $F'(z)=f(z)$

Теорема (интегральная формула Коши):

$\forall$ D-обл., $f \in \mathcal{O}(D)$, $a \in D$, $U_r(a) \subset D$, $z \in U_r(a)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

▶ Возьмем $|\xi - z| = \varepsilon$, $U_\varepsilon(z) \subset U_r(a)$

$$\Rightarrow \int\limits_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi$$ — по Т. Коши о гомотопных путях

Имеем: $$\int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \underbrace{\int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} dz}_{(1)} + \underbrace{f(z) \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{d\xi}{\xi - z}}_{=(2)}$$

$$(1) \le \max_{|\xi - z| = \varepsilon} \underbrace{\left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right|}_{= f'(z) + \bar{o}(1)} \cdot 2\pi\varepsilon = \max_{|\xi - z| = \varepsilon} |f'(z) + \bar{o}(1)| \cdot 2\pi\varepsilon \quad \xi \to z$$

(2), т.к. $\xi = z + \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi] \Rightarrow f(z) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cancel{\varepsilon} i \cancel{e^{i\varphi}}}{\cancel{\varepsilon e^{i\varphi}}} d\varphi = 2\pi i f(z)$

ε - выберем / $|\bar{o}(1)| < 1$ и $2\pi\varepsilon(f'(z) + 1) < \delta$

$\delta \to 0 \Rightarrow (1) \to 0$

$$\Rightarrow \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$ ◀

Теорема (интегральная ф-ла Коши для производных)

$\forall$ D-обл., $f \in \mathcal{O}(D)$, $U_a = \{|z - a| < r\} \subset D$, $z_0 \in U_a$

$\Rightarrow$ 1) $f \in C^\infty(U_a)$

2) $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z - a| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

▶ Индукция по n, + меняем $\lim$ и $\int$ местами (можно, т.к р/м сход) ◀

Теорема (о ряде Тейлора):

Пусть D - обл., $f \in \mathcal{O}(D)$, $a \in D$, $U_a = \{|z-a| < r\}$, $U_a \subset D$.

Тогда 1) $\forall z \in U_a$: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, где $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

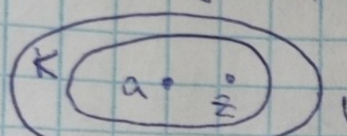
2) ряд сход. р/м на $\forall K$-компакте: $K \subset U_a$

▲ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ – интегр. ф-ла Коши

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi - a}\right)} = \frac{1}{\xi - a}\left(1 + \frac{z-a}{\xi-a} + (\ldots)^2 + \ldots\right)$$

Надо д-ть, что $|q| = \left|\frac{z-a}{\xi - a}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z-a| \overset{?}{<} |\xi - a|$

в K бежит по ∂U_a



$\Rightarrow |q| \le p < 1$, $p = \sup\limits_{z \in K} \left|\frac{z-a}{r}\right| < 1$

Подставим геом. прогрессию в интеграл и почленно проинтегрируем $\Longleftrightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = r} f(\xi) / (\xi - a)^{n+1} d\xi$$

поменяли Σ и $\int$, т.к. есть р/м-ая сх-ть по Вейерштрассу

$$\left| f(\xi) \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \right| \le \max_{|\xi - a| = r} |f(\xi)| \cdot \frac{p^n}{r}$$ ← ряд из таких штук сход, т.к. $p < 1$

И $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ - интегр. ф Коши для производных ■

Теорема Абеля: 1) $f \in \mathcal{O}(|z-a| < r) \Rightarrow$ ряд Тейлора сход. в круге

2) $f \notin \mathcal{O}(|z-a| < r) \Rightarrow$ ряд Тейлора расх. в круге

← хотя бы в 1 точке

Пример: $f(z) = \frac{\cos z}{z+1}$, т.к. $z = -1$ - особая

$\Rightarrow R = 1$ - радиус сходимости

Формула Коши-Адамара:

Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $R_{сход} = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$