Задачи на производные

18 мая 2022 г.

Правила дифференцирования и таблица производных

ToDo

DER-1

$$y = \arctan \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$$

Решение:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}} = \left[\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x \cdot (2 + \frac{1}{\cos^2 x} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x + 1}$$

Ответ:

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x + 1}$$

DER-2

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$$

Решение:

$$y' = \left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2} \cdot \ln \frac{1}{3} \cdot (\arcsin x^2)' =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2} \cdot \ln \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

Ответ:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2} \cdot \frac{2x \cdot \ln \frac{1}{3}}{\sqrt{1 - x^4}}$$

DER-3

$$y = \frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

Решение:

$$y' = \frac{2x\sqrt{1+x^2} - (2+x^2)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$
$$= \frac{2x+2x^3-(2x+x^3)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ответ:

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

DER-4

$$y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Решение:

$$\ln y = \ln((x+1)^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}\,\ln(x+1)$$
$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\,\ln(x+1) + \frac{1}{x(x+1)}$$
$$y' = \frac{x-(x+1)\,\ln(x+1)}{x^2}\cdot(x+1)^{\frac{1-x}{x}}$$

Ответ:

$$\frac{x-(x+1)\,\ln(x+1)}{x^2}\cdot(x+1)^{\frac{1-x}{x}}$$

DER-5

$$y = \frac{\sin(2x)+1}{\sin(x)-\cos(x)}$$

Решение:

$$y' = \frac{(\sin(2x)+1)'(\sin(x)-\cos(x)) - (\sin(2x)+1)(\sin(x)-\cos(x))'}{(\sin(x)-\cos(x))^2} =$$

$$\frac{2\cos(2x)(\sin(x)-\cos(x)) - (\sin(2x)+1)(\cos(x)+\sin(x))}{\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)} =$$

$$\frac{2(2\cos^2(x)-1)(\sin(x)-\cos(x)) - (2\sin(x)\cos(x)+1)(\cos(x)+\sin(x))}{1-\sin(2x)} =$$

$$\frac{4\cos^2(x)\sin(x) - 4\cos^3(x) - 2\sin(x) + 2\cos(x) - 2\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) - \cos(x) - \sin(x)}{1-\sin(2x)} =$$

$$\frac{2\cos^2(x)\sin(x) - 4\cos^3(x) - 3\sin(x) + \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)}{1-\sin(2x)} =$$

$$\frac{2\cos^2(x)\sin(x) - 4\cos(x)(1-\sin^2(x)) - 3\sin(x) + \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)}{1-\sin(2x)} =$$

$$\frac{2\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x) - 3\sin(x) + 2\sin^2(x)\cos(x)}{1-\sin(2x)} =$$

$$\frac{(\cos(x)+\sin(x))(\sin(2x)-3)}{1-\sin(2x)}$$

Ответ:

$$\frac{(\cos(x)+\sin(x))(\sin(2x)-3)}{1-\sin(2x)}.$$

DER-6

$$y = e^{-x}\frac{x-2}{(1-x)^2}$$

Решение:

$$y' = \frac{(e^{-x}(x-2))'(1-x)^2 - (e^{-x}(x-2))(2(1-x))(-1)}{(1-x)^4} =$$

$$\frac{(-e^{-x}(x-2)+e^{-x})(1-x) + 2e^{-x}(x-2)}{(1-x)^3} = \frac{(-xe^{-x}+3e^{-x})(1-x) + 2e^{-x}(x-2)}{(1-x)^3} =$$

$$\frac{x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x}}{(1-x)^3} = (e^{-x})\frac{x^2-2x-1}{(1-x)^3}.$$

Ответ: $(e^{-x})\frac{x^2-2x-1}{(1-x)^3}$.

DER-7

$$y = e^{2x}(3\cos(3x) - 2\sin(3x))$$

Решение

$$(e^{2x}(3\cos(3x) - 2\sin(3x)))' = 2e^{2x}(3\cos(3x) - 2\sin(3x)) + e^{2x}(3\cos(3x) - 2\sin(3x))' =$$

$$= 2e^{2x}(3\cos(3x) - 2\sin(3x)) + e^{2x}(-9\sin(3x) - 6\cos(3x)) = -5\sin(3x)e^{2x}$$

Ответ: $-5\sin(3x)e^{2x}$.

DER-8

$$y = (e^x + e^{-x})^{\cos 2x}.$$

Решение.

$$y' = \left(e^{\cos 2x \ln (e^x + e^{-x})}\right)' = e^{\cos 2x \ln (e^x + e^{-x})} \cdot (\cos 2x \ln (e^x + e^{-x}))' =$$
$$= (e^x + e^{-x})^{\cos 2x} \cdot \left((\cos 2x)' \ln e^x + e^{-x} + \cos 2x \cdot (\ln (e^x + e^{-x}))'\right) =$$
$$= (e^x + e^{-x})^{\cos 2x} \cdot \left(-2\sin 2x \ln (e^x + e^{-x}) + \cos 2x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right).$$

Ответ: $(e^x + e^{-x})^{\cos 2x} \cdot \left(-2\sin 2x \ln (e^x + e^{-x}) + \cos 2x \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$.

DER-10

$$y = 2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}$$

Решение

$$y' = \left(2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}\right)' = 2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}} \ln 2 \left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= -\frac{2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}} \ln 2 \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1} == -\frac{\ln 2 \cdot 2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x}{(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= 2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x^2}} \ln 2 \cdot \frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Ответ: $2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x^2}} \ln 2 \cdot \frac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

DER-11

$$y = x \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Решение

$$y' = \left(x \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$$

$$= x' \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + x \left(\ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' =$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ответ: $\ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

DER-12

$$y = \arcsin \frac{x+2}{2x+2}, \ \ x > 0$$

Решение

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2}}} \cdot \frac{2x+2-2(x+2)}{(2x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x+2}{\sqrt{(2x+2)^2-(x+2)^2}} \cdot \frac{-2}{(2x+2)^2} = -\frac{1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$$

Ответ: $-\frac{1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$

DER-13

$$y = \ln \mathrm{tg}\, x + \frac{1}{2} \,\mathrm{ctg}\, 2x$$

Решение

$$y' = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x} \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}(-\frac{2}{\sin^2 2x}) = \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 2x} =$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x}$$

Ответ: $\dfrac{2}{\sin 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 2x}$

DER-14

$$y = \log_2 \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$$

Решение

$$y' = \frac{1}{\ln 2}(\ln \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x})' =$$

$$\frac{1}{\ln 2}\frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}\frac{(-\sin x + \sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x) - (\cos x + x \sin x)(\cos x - \cos x + x \sin x)}{(\sin x - x \cos x)^2} =$$

$$\frac{1}{\ln 2}\frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}\frac{x \cos x(\sin x - x \cos x) - (\cos x + x \sin x)x \sin x}{(\sin x - x \cos x)^2} =$$

$$\frac{1}{\ln 2}\frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}\frac{-x^2 \cos^2 x - x^2 \sin^2 x}{(\sin x - x \cos x)^2} =$$

$$\frac{1}{\ln x}\frac{-x^2}{(\cos x + x \sin x)(\sin x - x \cos x)} =$$

$$\frac{-x^2}{\ln 2}\frac{1}{\cos x \sin x - x \cos^2 x + x \sin^2 x - x^2 \sin x \cos x} =$$

$$\frac{-x^2}{\ln 2}\frac{2}{(1 - x^2) \sin 2x - 2x \cos 2x}$$

Ответ: $\frac{-x^2}{\ln 2}\frac{2}{(1 - x^2) \sin 2x - 2x \cos 2x}$

DER-15

$$y = x\ (\cos(2 \ln x) + 2 \sin(2 \ln x))\ .$$

$$y' = \cos(2 \ln x) + 2 \sin(2 \ln x) + x \left(- \sin(2 \ln x)\frac{2}{x} + 2 \cos(2 \ln x)\frac{2}{x}\right) = 5 \cos(2 \ln x).$$

Ответ: $5 \cos(2 \ln x)$.

DER-16

$$y = \arcsin \frac{x + 2}{2x + 2}$$

Решение

Вспомним, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\Big(\arcsin\frac{x+2}{2x+2}\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x+2}{2x+2})^2}}\cdot\Big(\frac{x+2}{2x+2}\Big)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3x^2+4x}{4x^2+8x+4}}}\cdot\frac{-1}{2(x+1)^2} = \frac{-1}{2(x+1)^2}\cdot\frac{2(x+1)}{\sqrt{3x^2+4x}} = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}.$$

Ответ:

$$\frac{-1}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}.$$

DER-19

$$y = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

Решение

$$y' = \frac{\cos x\cdot\cos^3 x - \sin x\cdot(-3\cos^2 x\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1+(1-\cos 2x)}{\cos^4 x} = \frac{2-\cos 2x}{\cos^4 x}$$

Ответ: $\dfrac{2-\cos 2x}{\cos^4 x}$.