Кузнецова Анастасия, 409гр. К/р №2. 08.04.2021г. 12:40 – 14:40

$\boxed{\text{Задача 1.1}}$ Построить для ур-ия $y'(x) = f(x)$ разн. сх. с наивысшим порядком аппр. на реш-ии.

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}.$$

Реш-ие:

Рассм. разн. схему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}, \quad k = 2, \dots, N, \quad f_k := f(x_k) \\ \qquad x_k = kh, \ h = \frac{1}{N} \\ y_0 = y^0 \\ y_1 = y^1 \end{cases}$$

Определим опер-ры проецирования:

$$[y]_{Y_h} := \begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(x_k) \\ \vdots \\ y(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad [f]_{F_h} := \begin{pmatrix} f(h) \\ \vdots \\ f(1-h) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1}$$

$\|g\|_h = \max\limits_k |g_k|$ – норма в пр-вах Y_h, F_h, Φ_h

Опр. Разн. сх. $\begin{cases} L_h y_h = f_h \\ l_h y_h = \varphi_h \end{cases}$ аппр-ет задачу $\begin{cases} Ly = f \\ ly = \varphi \end{cases}$ (*) на реш-ии,

гр. усл.

если $\exists c_1, c_2, p_1, p_2, h_0 : \forall h \le h_0$ вып-но

$\|L_h [y]_{Y_h} - f_h\|_{F_h} \le c_1 h^{p_1}$, $\|l_h [y]_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \le c_2 h^{p_2}$, где y – реш-ие з. (*),

и вып-но: $\|[f]_{F_h} - f_h\|_{F_h} \to 0$, $\|[\varphi]_{\Phi_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \to 0$, $h \to 0$.

- $\|\underset{\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix}}{[\varphi]_{\Phi_h}} - \underset{\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix}}{\varphi_h}\|_{\Phi_h} = 0$

- $\|[f]_{F_h} - f_h\|_{F_h} = \left\| \begin{pmatrix} f(h) \\ \vdots \\ f(1-h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 f(x_k) + a_0 f(x_{k-1}) + a_{-1} f(x_{k-2}) \end{pmatrix} \right\| =$

$= \max\limits_{k=2,N} \Big| f(x_{k-1}) - (a_1 \underset{f(x_{k-1}) + O(h)}{f(x_k)} + a_0 f(x_{k-1}) + a_{-1} \underset{f(x_{k-1}) + O(h)}{f(x_{k-2})}) \Big| = O(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \iff a_1 + a_0 + a_{-1} = 1$

1-е ур-ие

- $\|l_h [y]_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} = \left\| \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} \right\| = 0.$

- $\|L_h [y]_{Y_h} - f_h\|_{F_h} = \max\limits_{k=2,N} \left| \dfrac{y(x_k) - y(x_{k-2})}{2h} - a_1 f(x_k) - \cancel{a_0 f(x_{k-1})} - a_{-1} f(x_{k-2}) \right|.$

$y(x_k) = \cancel{y(x_{k-1})} + y'(x_{k-1})h + \cancel{y''(x_{k-1})\frac{h^2}{2}} + y'''(x_{k-1})\frac{h^3}{3!} + \cancel{y^{IV}(x_{k-1})\frac{h^4}{4!}} + O(h^5)$

$y(x_{k-2}) = \cancel{y(x_{k-1})} - y'(x_{k-1})h + \cancel{y''(x_{k-1})\frac{h^2}{2}} - y'''(x_{k-1})\frac{h^3}{3!} + \cancel{y^{IV}(x_{k-1})\frac{h^4}{4!}} + O(h^5)$

$f(x_k) = \cancel{f(x_{k-1})} + f'(x_{k-1})h + f''(x_{k-1})\frac{h^2}{2} + \cancel{f'''(x_{k-1})\frac{h^3}{3!}} + O(h^4)$

$f(x_{k-2}) = \cancel{f(x_{k-1})} - f'(x_{k-1})h + f''(x_{k-1})\frac{h^2}{2} - \cancel{f'''(x_{k-1})\frac{h^3}{3!}} + O(h^4)$

// $y'(x_k) = f(x_k)$ // т.к. y – реш-ие.

Коэф. при h: $a_1 = a_{-1}$, Коэф. при h^2: $y'''(x_{k-1})\frac{h^2}{3!} - a_1 \underset{y'''(x_{k-1})}{f''(x_{k-1})}\frac{h^2}{2} - a_{-1} f''(x_{k-1})\frac{h^2}{2} = 0$

$\Rightarrow$ имеем сист. ур-ий:

$$\begin{cases} a_1+a_0+a_{-1}=1. \\ a_1=a_{-1} \\ \frac{1}{6}-\frac{a_1}{2}-\frac{a_{-1}}{2}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=a_{-1} \\ \frac{1}{6}-a_1=0 \\ a_0+2a_1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=a_{-1} \\ a_1=\frac{1}{6}=a_{-1} \\ a_0=1-2a_1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

При этом, пор. аппр. на реш-ии: $p=4$.

$\boxed{\text{Задача 1.2}}$ Иссл. устойчивость разн. схемы

$$\theta\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+(1-\theta)\frac{y_k-y_{k-1}}{h}=f_k \text{ при } \theta\in[0,1].$$

Реш-ие:

Исследуем сх. на α-уст-ть.

Опр. Разн. сх. $\frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m}a_{-n}y_{k-n}=f_k$ – α-уст-ва, если все корни хар.-го ур-ия $\sum_{n=0}^{m}a_{-n}\mu^{k-n}=0$ удовл.-ют усл. $|\mu|\le 1$, причём, на границе круга ($|\mu|=1$) нет кратных корней.

Хар. ур-ие: $\theta(\mu^2-\mu)+(1-\theta)(\mu-1)=0$

$\theta\mu(\mu-1)+(1-\theta)(\mu-1)=0$

$(\mu-1)(\theta\mu+1-\theta)=0$

$\mu=1$ $\qquad\theta\mu+1-\theta=0$

• $\theta=0$ $\Rightarrow$ 1 корень ур-ие: $\mu=1$ $\Rightarrow$ α-уст.

• $\theta\neq0$ $\quad\mu=\frac{\theta-1}{\theta}=1-\frac{1}{\theta}$

$\left]\ \left|1-\frac{1}{\theta}\right|\le 1\right.$

$$\begin{cases} 1-\frac{1}{\theta}\le 1, \\ 1-\frac{1}{\theta}\ge -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{\theta}\le 0 \text{ верно} \\ 2-\frac{1}{\theta}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\theta}\le 2, \quad \theta\ge\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ проверим, что $1-\frac{1}{\theta}\neq 1$, т.е. нет кр. корней на границе, действ., $-\frac{1}{\theta}\neq 0$.

$\Rightarrow$ при $\theta=\{0\}\cup[\frac{1}{2},1]$ сх. α-уст.

$\boxed{\text{Задача 1.3}}$ Для задачи $y'=y$, $y(0)=1$ рассм. схему

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=\frac{y_{k+1}+y_k}{2},\ y_0=1,\ k\ge 0.$$

В разл. ошибки $y(x_N)-y_N=c_1h+c_2h^2+\dots$ найти пост-ую c_1 для $x_N=Nh=1$

Реш-ие:

$$\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} = \frac{y_{k+1}}{2} + \frac{y_k}{2}$$

$$y_{k+1}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\right) = y_k\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right) \quad | \cdot h$$

$$y_{k+1}\left(1 - \frac{h}{2}\right) = y_k\left(1 + \frac{h}{2}\right), \quad k \geq 0$$

$$\Rightarrow y_N = y_{N-1} \cdot \frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}} = \ldots = \underset{1}{y_0}\left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)^N = \left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)^N$$

реш-ие задачи $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \to y(x) = e^x \to$

$$\Rightarrow y(x_N) - y_N = e - \left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)^{\frac{1}{h}} = e - e^{\frac{1}{h}\ln\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}} = e - e^{\frac{1}{h}\left(\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)}$$

$$\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4} + O(h^5) + \frac{h}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4} + O(h^5) = h + \frac{2}{3}\cdot\frac{h^3}{8} + O(h^5) = h + \frac{h^3}{12} + O(h^5)$$

$$\Rightarrow y(x_N) - y_N = e - e^{1 + \frac{h^2}{12} + O(h^4)} = e\Big(\cancel{1} - \underbrace{e^{\frac{h^2}{12} + O(h^4)}}_{= \cancel{1} + \frac{h^2}{12} + O(h^4)}\Big) = -\frac{eh^2}{12} + O(h^4)$$

$$\Rightarrow c_1 = 0.$$

Задача 1.4 Для задачи $y' + 5y = \sin 2x$; $y(0) = 2$, построить двухточечную разностную сх. 2-го порядка сходимости.

Реш-ие:

Рассм. разн. схему

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = f_k := f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) = \sin(2x_k + h), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad x_k = kh, \ h = \frac{1}{N} \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Определения опер-ра проец.:

$$[y]_{Y_h} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(x_k) \\ y(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad [f]_{F_h} = \begin{pmatrix} f\left(\frac{h}{2}\right) \\ \vdots \\ f\left(1 - \frac{h}{2}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

$\|g\|_h = \max_k |g_k|$ - нормы в пр-вах Y_h, F_h, Φ_h.

В соотв.-ии с опр., приведённым в $\boxed{з. 1.1}$, исследуем аппр. на реш-ии:

- $\|\underset{2}{[\varphi]_{\Phi_h}} - \underset{2}{\varphi_h}\|_{\Phi_h} = 0$
- $\|[f]_{F_h} - f_h\|_{F_h} = \left\| \begin{pmatrix} f\left(\frac{h}{2}\right) \\ \vdots \\ f\left(1-\frac{h}{2}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_0 = f\left(\frac{h}{2}\right) \\ \vdots \\ f_{N-1} = f\left(1-\frac{h}{2}\right) \end{pmatrix} \right\| = 0$
- $\|l_h[y]_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} = \|y(0) - 2\| = 0$

• $\|L_h[y]_{y_h} - f_h\|_{F_h} = \max\limits_{k=\overline{0,N-1}} \left| \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} + 5\frac{y(x_{k+1}) + y(x_k)}{2} - f(x_k + \frac{h}{2}) \right| = O(h^2)$

$\cancel{y(x_{k+1}) = y(x_k)}$: $y(x_k) + \cancel{y'(x_k)h} + \cancel{y''(x_k)\frac{h^2}{2}} + O(h^3)$ $\cancel{y(x_k)} + \cancel{y'(x_k)h} + O(h^2)$ $f(x_k) + f'(x_k)\frac{h}{2} + O(h^2)$

$\cancel{y''(x_k) + 5y'(x_k)}\frac{h}{2}$

$\cancel{y'(x_k) + 5y(x_k)}$

$\Rightarrow$ пор. аппр. на реш-ии : $p = 2$.

Th. (Филиппова)

+

$\begin{cases} L_h y_h = f_h & (3) \\ l_h y_h = \varphi_h & (4) \end{cases}$ $\begin{cases} Ly = f & (1) \\ ly = \varphi & (2) \end{cases}$

Пусть:

1. $(1,2)$, $(3,4)$ – лин-ые задачи
2. $\exists!$ реш-ие з. $(1,2)$
3. Разн. схема апп-ет ~~з~~ з. $(1,2)$ на реш-ии с пор. p.
4. Разн. сх. уст-ва.

Тогда реш-ие з. $(3,4)$ сх-ся к реш-ию з. $(1,2)$ с пор. не ниже p.

Т.е. сх-ть = апп. + уст-ть, но мы будем исследовать лишь α-уст-ть.

По опр.: $\mu - 1 = 0 \Rightarrow$ схема α-уст. $\Rightarrow$ сх. сх-ся с пор. не ниже $p = 2$.

$\boxed{\text{Задача 1.5}}$ Построить аппр. на реш-ии 2-го порядка по точкам $x_0 = 0$ и $x_1 = h$ краевою условие $u'(0) - u(0) = 0$ для ур-ия $u'' - 2u = \sin x - 1$

Реш-ие:

Будем искать аппр. в виде: $\frac{u(h) - u(0)}{h} - u(0) = \delta$, т.ч. $\left| \frac{u(h) - u(0)}{h} - u(0) - \delta \right| = O(h^2)$

$u(0) + u'(0)h + u''(0)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$

+

$\Leftrightarrow \left| u'(0) + u''(0)\frac{h}{2} + O(h^2) - u(0) - \delta \right| = O(h^2)$

$u'(0) - u(0) = 0$ – по усл.

$\Leftrightarrow \left| u''(0)\frac{h}{2} - \delta + O(h^2) \right| = O(h^2)$

$\Rightarrow$ Ǝ $\delta = u''(0)\frac{h}{2} = \underbrace{(\sin 0 - 1 + 2u(0))}_{\text{т.к. } u \text{ – реш-ие}}\frac{h}{2} = (2u_0 - 1)\frac{h}{2} = (u_0 - \frac{1}{2})h$

$\Rightarrow \frac{u_1 - u_0}{h} - u_0 = (u_0 - \frac{1}{2})h$ – аппр. на реш-ии 2-го пор.

$\boxed{\text{Задача 1.6}}$ Для задачи $-u''(x) + pu(x) = f(x)$, $p = \text{const} > 0$, $u(0) = a$, $u'(1) = b$ построить на равномер. сетке разн. сх. 2-го пор. сх-ти, т.е. док-ть аппр., уст-ть по правой части, сформ.-ть теор. Филиппова.

Реш-ие:

Рассм. схему

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}+pu_k = f_k := f(x_k), & k=\overline{1,N-1} \\ & x_k = kh,\ h=\dfrac{1}{N-0{,}5} \\ u_0 = a \\ \dfrac{u_N-u_{N-1}}{h} = b \end{cases} \quad (\#)$$

Класс! но сетки просили несмещённые.

Опр. опер-ры проек.:

$[u]_{Y_h} := \begin{pmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(1) \end{pmatrix} \in R^{N+1}$, $[f]_{F_h} := \begin{pmatrix} f(h) \\ \vdots \\ f(1-\frac{h}{2}) \end{pmatrix} \in R^{N-1}$, $\|g\|_h = \max\limits_k |g_k|$ — норма в пр-вах Y_h, F_h, Φ_h.

+.

~~На По опр.~~ По Th. Фил., сформулир.-ой в $\boxed{3.\ 1.4}$, сх-ть = аппр. + уст-ть.

Иссл-ем аппр. на реш-ии:

- $\|[f]_{F_h} - f_h\|_{F_h} = 0.$

- $\|L_h[u]_{Y_h} - f_h\|_{F_h} = \max\limits_{k=\overline{1,N-1}} \Big| -\dfrac{u(x_{k+1})-2u(x_k)+u(x_{k-1})}{h^2} + pu(x_k) - f(x_k)\Big| = O(h^2)$

  $u(x_k) + \cancel{u'(x_k)h} + u''(x_k)\frac{h^2}{2} + \cancel{u'''(x_k)\frac{h^3}{6}} + O(h^4)$

  $\overset{\shortparallel}{u''(x_k)}$, т.к. u-реш-е

- $\|l_h[u]_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} = \max\Big\{\underbrace{|u(0)-a|}_{=0}, \Big|\dfrac{u(1)-u(1-h)}{h} - b\Big|\Big\} = O(h) \to 0.$

  $u(x_k) - u'(x_k)h + u''(x_k)\frac{h^2}{2} - u'''(x_k)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$

  $u(1) - u'(1)h + O(h^2)$

=> аппр. на реш-ие 2-го пор.

Док-ем уст-ть по прав. части:

Перепишем з. (#) в матр. виде: $Au = f$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2}+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{a}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + \frac{b}{h} \end{pmatrix}$$

A - симм-на => её собств. век. ортог., а скал. произв. $(u,v) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$ обесп.-ют эту ортог.-ть.

А $\|u\|_{L_{2,h}} := \left(\sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$ - норма в $L_{2,h}$

$Au = f \Rightarrow \|u\|_{L_{2,h}} \le \|A^{-1}\|_{L_{2,h}} \|f\|_{L_{2,h}}$

Пок-ем, что $\|A^{-1}\|_{L_{2,h}} \le const$ => сх. уст-ва.

Опр. Разн. сх. $\begin{cases} L_h y_h = f_h \\ l_h y_h = \varphi_h \end{cases}$ наз. устойчивой, если (в случае лин. задачи) $\exists c_1, c_2, h_0$: $\forall y_h^{(i)}, f_h^{(i)}, \varphi_h^{(i)}$, т. ч. $\begin{cases} L_h y_h^{(i)} = f_h^{(i)} \\ l_h y_h^{(i)} = \varphi_h^{(i)} \end{cases}$, $i=1,2$, вып-ся:

$$\|y_h^{(2)} - y_h^{(1)}\|_{Y_h} \le c_1 \|f_h^{(2)} - f_h^{(1)}\|_{F_h} + c_2 \|\varphi_h^{(2)} - \varphi_h^{(1)}\|_{\Phi_h}, \quad \forall h \le h_0.$$

Но $\|A\|_{L_{2,h}} = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|_{L_{2,h}}}{\|x\|_{L_{2,h}}} = \sup\limits_{x\ne 0} \dfrac{\sqrt{h}\,\|Ax\|_2}{\sqrt{h}\,\|x\|_2} = \|A\|_{L_2} = \max\limits_i \lambda_i^A$

$\Rightarrow \|A^{-1}\|_{L_{2,h}} = \|A^{-1}\|_{L_2} = \dfrac{1}{\min\limits_i \lambda_i^A}$, $\lambda_i = \dfrac{4}{h^2} \sin^2 \dfrac{\pi(2i-1)h}{4} + p$

$\Rightarrow \min\limits_i \lambda_i^A = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{\pi h}{4} + p \ge \dfrac{4}{h^2}\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi h}{4}\right)^2 + p = p + 1$

$\Rightarrow \|A^{-1}\|_{L_{2,h}} \le \dfrac{1}{1+p}$.

$\Rightarrow$ сх. сх-сти с пор. $p = 2$.

~~Рассм.~~

~~$N-1$~~ ~~$N-1$~~ ~~$N-1$~~

$\boxed{\text{Задача 1.7}}$ Исслед-ть методом апр. оценок уст-ть разн. схемы

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p_iu_i=f_i, \ 1\le i\le N-1, \ p_i\ge 0 \\ u_0=0, \ u_N=u_{N-1}, \quad (N-\frac{1}{2})h=1 \end{cases}$$

Реш-ие:

Рассм.

$$-\frac{1}{h^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}(u_{k+1}-u_k-u_k+u_{k-1})u_k}_{\displaystyle \sum_{k=1}^{N-1}(u_{k+1}-u_k)u_k-\sum_{k=1}^{N-1}(u_k-u_{k-1})u_k}+\sum_{k=1}^{N-1}p_ku_k^2=\sum_{k=1}^{N-1}f_ku_k$$

$\overset{\text{т.к. } u_0=0}{=}$ ... $\overset{\text{т.к. } u_N=u_{N-1}}{=}$

$$\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})u_{k-1}-\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})u_k$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2+\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}p_ku_k^2}_{\ge 0}=\sum_{k=1}^{N-1}f_ku_k \quad (1)$$

$$u_k=\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1}) \Rightarrow u_k^2\le\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})^2\cdot\sum_{i=1}^{k}1^2\le N\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1}u_k^2\le N^2\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2\overset{(1)}{\le}\sum_{k=1}^{N-1}f_ku_k$$

Зачт.

$\Rightarrow \|u_h\|^2_{L_{2,h}} \leq \|f_h\|^2_{L_{2,h}}$ (норма та же, что определялась в $\boxed{\text{з. 1.6}}$)

$\left(\sum\limits_{1}^{N-1} u_i v_i h\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ имеем устойчивость по правой части в $L_{2,h}$.