Модель с долгоживущими (long-lived) активами

Amir et al. 2011

① Рынок: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}, P)$

- K активов
- N агентов
- Послед. капитала W_t^n [в статье w_t^n]
- Цены активов p_t^k
- Стратегии $\lambda_t^n = (\lambda_{t,1}^n, \dots, \lambda_{t,K}^n)$, где $\lambda_{t,k}^n \geq 0$, $\sum_{k=1}^{K} \lambda_{t,k}^n = 1$ } на промежутке $[t, t+1]$
- Портфели $x_t^n = (x_{t,1}^n, \dots, x_{t,K}^n)$, $x_{t,k}^n = \lambda_{t,k}^n W_t^n / p_t^n$ }
- Дивиденды $D_{t,k}$ (наличные) – $\mathcal{F}_t$-изм „внешние"

② Уравнение капитала

$$W_t^n = \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{K} x_{t-1,k}^n \cdot (D_{t,k} + p_{t,k})}_{\text{стоим. портфеля + див.}}, \qquad \alpha \in (0,1) \text{ – к-т реинвестирования}$$

Цены – из равенства спроса и предложения

$$\sum_{n=1}^{N} x_{t,k}^n = V_k \qquad \text{где } V_k \text{ – кол-во выпущенных акций.}$$

Далее считаем $V_k = 1$ для всех k

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_{t,k}^n W_t^n}{p_{t,k}} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{t,k} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_{t,k}^n W_t^n$$

В статье V_k – зависит от t, ω

Условие $\frac{V_{t+1,k}}{V_{t,k}} \sim \alpha$

В итоге имеем систему

$$\begin{cases} W_t^n = \alpha \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_{t-1,k}^n W_{t-1}^n}{p_{t-1,k}} (D_{t,k} + p_{t,k}) \\ p_{t,k} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_{t,k}^n W_t^n \end{cases}$$

$\alpha < 1$!

Утв. $\exists!$ решение $p_{t,k}$, W_t^n.
(Proposition 1)

③ Выживающие стратегии

Хотим найти стратегию λ^* т.ч., если агент $n=1$ ее использует, то для любых стратегий других агентов

$$\inf_{t \geq 0} \frac{W_t^1}{\sum_{n=1}^{N} W_t^n} > 0 \quad \text{п.н.}$$

Теорема Выживающая стратегия (см. ф-лу (18) в статье)

$$\lambda_{t,k}^* = E_t \sum_{s=t+1}^{\infty} \alpha^{s-t-1} (1-\alpha) R_{t,k}, \qquad \text{где } R_{t,k} = \frac{D_{t,k}}{\sum_{m=1}^{K} D_{t,m}}$$

Замеч. Если D_t – н.о.р, то $\lambda_{t,k}^* \equiv \lambda_k^* = E R_{t,k}$ (не зависит от t и не случайна)

④ Доказательство

1) Достаточно считать $N=2$ (2 агента) - Prop. 3 $\square$

2) Обозначим $r_t^n = \frac{W_t^n}{W_t^1+W_t^2}$ $n=1,2$

Short-lived
$\ln r_t^1$ - субмартингал

$$Y_t = -\ln r_t^1 \geq 0$$

$$Z_{t,k} = \ln\left(1+\frac{r_t^2\lambda_{t,k}}{r_t^1\lambda^*_{t,k}}\right) \geq 0,$$

λ^* - стратегия 1-го агента

λ - стратегия 2-го агента

$$Z_t = \sum_{k=1}^{K}\lambda^*_{t,k} Z_{t,k} \geq 0,$$

$$Z_t = -\sum_{k=1}^{K}\lambda^*_{t,k}\ln\left(\frac{r_t^1\lambda^*_{t,k}}{r_t^1\lambda^*_{t,k}+r_t^2\lambda_{t,k}}\right)$$

$$\zeta_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)Y_t$$

? почему

В статье ρ вместо α, но в нашем случае $\rho=\alpha$

3) Нужно д-ть, что ζ_t - супермартингал

Тогда $\zeta_t \geq 0 \Rightarrow \zeta$ - сходится $\Rightarrow (1-\alpha)Y_t \leq \zeta_t \leq \overset{\text{сл. вел.}}{C} \Rightarrow \ln r_t^1 \geq \frac{C}{1-\alpha}$

lemma 2 (из нер. ва Гиббса) $\sum_k \lambda^*_{t,k}\ln\frac{\lambda^*_{t,k}}{\lambda_{t,k}} \geq 0$

4) Ключевые леммы

Proposition 5

$$E_t\left(\alpha\lambda^*_{t+1,k}+(1-\alpha)R_{t+1,k}\right) = \lambda^*_{t,k} \quad \square$$

Lemma 1

$$\zeta_{t+1} = \alpha Z_{t+1} + (1-\alpha)Y_{t+1} \leq \sum_{k=1}^{K}\left(\alpha\lambda^*_{t+1,k}+(1-\alpha)R_{t+1,k}\right)Z_{t,k} \quad \square$$

5) Тогда

$$E_t\zeta_{t+1} \leq \sum_{k=1}^{K} Z_{t,k}E_t\left(\alpha\lambda^*_{t+1,k}+(1-\alpha)R_{t+1,k}\right) = \sum_{k=1}^{K} Z_{t,k}\lambda^*_{t,k} = Z_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)\underbrace{(Z_t-Y_t)}_{=:U_t} + (1-\alpha)Y_t$$

$$\leq \alpha Z_t + (1-\alpha)Y_t = \zeta_t$$

где $U_t \leq 0$ по нер-ву Гиббса (Lemma 2)

проверьте

Ч.т.д.

(9) <u>Безрисковий актив</u> (ставка = 0)

$\lambda^n_{t,k} \ge 0 \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda^n_{t,k} \underset{=}{\le} 1 \qquad \lambda^n_{t,0} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \lambda^n_{t,k}$ - пропорция в б/р активе

$$W^n_t = \alpha\left(\sum_{n=1}^{N} x^n_{t-1,k}\left(D_{t,k} + p_{t,k}\right) + \overset{(1+r)}{\vee}\lambda^n_{t-1,0}\, W^n_{t-1}\right)$$

? $\qquad \lambda^n_{t,0}\, W^n_t$?