19.10.20. Дискр матан д/з от семинара 7.

① Найти асимптотику числа двудольных графов на m и n вершинах, $m \neq n$.

Решение: очевидно, что $N \geq \frac{2^{nm}}{n!m!}$ — т.к 2^{nm} — столько неизом. графов на помеченных вершинах, а каждый непомеченный даёт $\leq n!m!$ помеченных

Почему $\leq n!m!$? Ну т.к. и — неизом,

а и — изом,

т.е ~~перестановки~~ перенумерация вершин не всегда даёт неизом. помеченные графы.

И на семинаре 7 мы выяснили, что

$$N = \frac{1}{n!m!}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\substack{\pi=(\sigma_i;\sigma_j)\\ \sigma_i - \text{ост. } n-k \text{ элем.}\\ \sigma_j - \text{ост. } m-s \text{ элем.}}} 2^{\#\text{циклов на мн-ве пар } K_{n,m} \text{ под действием } \pi} \leq \frac{2^{mn}}{n!m!}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\left(\frac{n}{2^{\frac{1}{2}(m-\frac{s}{2})}}\right)^{k}\cdot\left(\frac{m}{2^{\frac{1}{2}(n-\frac{k}{2})}}\right)^{s} = ?$$

Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\left(\frac{n}{2^{\frac{1}{2}(m-\frac{s}{2})}}\right)^{k}\cdot\left(\frac{m}{2^{\frac{1}{2}(n-\frac{k}{2})}}\right)^{s} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{n^k}{2^{\frac{mk}{2}}\cdot 2^{-\frac{sk}{4}}}\cdot\left(\frac{m}{2^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{-\frac{k}{4}}}\right)^{s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{2^{\frac{mk}{2}}}\left[\sum_{s=0}^{m}\left(\frac{m}{2^{-\frac{k}{4}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{-\frac{k}{4}}}\right)^{s}\right] = \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{2^{\frac{mk}{2}}}\left[\sum_{s=0}^{m}\left(\frac{m}{2^{-\frac{k}{2}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\right)^{s}\right] \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{2^{\frac{mk}{2}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m}{2^{\frac{1}{2}(n-k)}}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 1, \text{ если } \frac{n}{m} = \text{const.}$$

у этого ~~...~~ первое слагаемое (т.е при $k=0$) — равно 1, а остальные $\to 0$, если $\frac{n}{m} = \text{const}$.

$\to 1$ при $k \to \infty$ т.е слагаем. беск. малое.

$\Rightarrow$ если n и m одинаково быстро стремятся в ∞, то $\frac{2^{mn}}{n!m!} \leq N \underset{\text{асимпт.}}{\leq} \frac{2^{mn}}{n!m!} \Rightarrow N \sim \frac{2^{mn}}{n!m!}$

А если нет, то сумма $\not\to 1$, то есть верхняя и нижняя оценка для N не совпадут $\Rightarrow$ асимптотики не будет.

② Теорема Оре: если в графе G $\forall$ несмежных вершин u и v : $\delta(u)+\delta(v) \geq n$, где n - число вершин в G, то в G $\exists$ гамильтонов цикл (т.е цикл по всем вершинам)

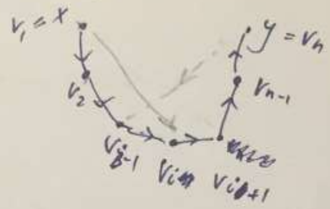
Решение: Известно, что $A \Rightarrow B$
$\Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

поэтому ~~...~~ теорема экв. тому, что в любом графе, в котором $\nexists$ гамильт. цикла, $\exists$ несмежные вершины u и v : $\delta(u)+\delta(v) \leq n-1$.

Берём граф H, в котором $\nexists$ гамильт. цикла. Добавим в него все рёбра, пока можно (получим граф $\tilde{H}$), т.е остановимся в тот момент, когда добавление любого ребра будет давать существование гамильт. цикла в $\tilde{H}$. Тогда степени вершин G $\leq$ степеней соотв. вершин в $\tilde{G}$

Рассм. любые две несмежные вершины x и y.

по построению, добавление ребра xy создаст в $\bar{H}$ по крайней мере один гамильтонов цикл, => из рёбер без ребра xy составляется гамильтонов путь $v_1 v_2 \dots v_n$ в $\bar{H}$ из x в y.



Заметим, что $\forall i = 2 \dots n$:
в $\bar{H}$ есть только одно из рёбер $v_1 v_i$ и $v_n v_{i-1}$ —
т.к. если они оба есть,
то $x v_i v_n v_{i-1} v_i$ — гамильтонов цикл.

=> суммарное число рёбер, инцидентных x или y — не превосходит числа вершин i, т.е. $\le n-1$.

т.е. $\exists$ x и y - несмежные: $\deg_{\bar{H}} x + \deg_{\bar{H}} y \le n-1$.

Причём по постр. очев, что степень вершины в $H \le$ степени этой вершины в $\bar{H}$ (т.к. рёбра могли только добавляться)

=> $\exists$ x и y - несмежные: $\deg_H x + \deg_H y \le n-1$.

=> мы доказали импликацию $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

=> мы доказали $A \Rightarrow B$. ч.т.д.

3. Рёберная т. Менгера $\Leftarrow$ т. Форда-Фалкерсона.

Решение: Рёберная т. Менгера: макс. число рёберно-непересек. цепей, соединяющих 2 различные вершины v и w связного графа = min числу рёбер в рёберном vw-разделяющем мн-ве.

Т. Форда-Фалкерсона: max величина потока = пропускной способности min разреза.

просто поставим на каждом ребре пропускную способность = 1.
(и прямому, и обратному ребру)

тогда очевидно, что пропускная способность $\forall$ разреза = числу рёбер в разрезе,

т.к. $\varphi(X, \bar{X}) = \sum_{x \in X,\, y \in \bar{X}} \underbrace{\varphi(x,y)}_{1}$ = # рёбер в разрезе.

=> если разрез минимальный, (т.е. ~~кол-во~~ его пропускная способность min),
то и кол-во рёбер в нём min. - т.к. кол-во рёбер = пропускной способности.

А почему рёбра разреза явл. vw-рёберным разделяющим мн-вом?

Ну т.к. по опр. разреза: $\begin{cases} u \in X \\ v \in \bar{X} \end{cases}$ => любой путь из u в v должен перейти из X в $\bar{X}$,
т.е. должен пройти по какому-то ребру из разреза.

=> пропускная способность min разреза = min числу рёбер в рёберном vw-разделяющем мн-ве.

А почему макс. число рёберно-непересек. цепей = величине max потока?

Пусть $\psi_{max} = \psi(u) = k$.

Тогда $\exists$ путь из u в v: $\psi(x,y) = 1$ $\forall x, y$ из этого пути.

(ну если его нет, то рассм. X = {мн-во вершин, до которого такой путь $\exists$}, и построим по нему разрез. X | $\bar{X}$

Тогда на всем разрезе $\psi = 0$ — т.к. $\psi = 0$ или 1 и $\psi_{(x,y)} \neq 1$.

Но тогда $\psi(w) = 0 \neq k$ — против.)

После этого ~~на всех~~ стираем все рёбра этого пути.

$\Rightarrow \psi_{max\,нов} = \psi_{новое}(u) = k-1$.

Повторяем процедуру ещё $k-1$ раз — получаем k рёберно-непересек. цепей.

~~Аналогично~~

А больше, чем k рёберно непересек. цепей мы и не могли построить — т.к. тогда ψ_{max} было бы $> k$. $\Rightarrow$ max цепей равно k.

$\Rightarrow$ max число рёберно-непересек. цепей = величине max потока. чтд.

~~(5) Алгоритм поиска max потока в графе~~

(4) Рёберная т. Менгера $\Rightarrow$ т. Форда-Фалкерсона.

Решение: Возьмем 2-ю формулировку рёберной т. Менгера:

max число дугонепересек. путей из v в w в ориент. графе = min кол-ву дуг в (рёберном) vw-разделяющем мн-ве

Тогда $\forall$ пропускную способность можно получить "склейкой" нужного кол-ва дуг. На дуге пропускная способность = 1.

Как и в (3), из-за того, что $\psi(\rightarrow) = 1$, то кол-во рёбер в разрезе = по vw-мн-ве пропускной способности; кол-во рёбер в min vw-мн-ве = min пропускной способности разреза (т.к. иначе возьмем разрез, состоящий из левых и правых вершин — и там меньше рёбер $\Rightarrow$ меньше пропускная способность)

А max число дугонепересек. путей = величине max потока — как и в (3), если учесть, что у потока на кратные рёбра выше склеиваем. чтд.

(5) Алгоритм поиска max потока в графе.

Решение — а) обнуляем ~~все~~ потоки на всех рёбрах.

б) В остаточной сети находим $\forall$ путь из v в w.

в) На этом пути находим min пропускную способность ребра. И всем рёбрам-вперёд увеличиваем поток на ψ_{min}, а обратным рёбрам — уменьшаем поток на φ_{min}.

После этого модифицируем остаточную сеть:

всем рёбрам из пути вычисляем новую пропускную способность,
если она стала $= 0$ — то выкидываем ребро. На все ост. рёбра
опять ставим нулевой поток.

И повторяем процедуру, пока $\exists$ путь из u в v по ост. сети.

Почему этот поток будет max?

Из теор. Форда-Фалкерсона: (см. Дискр. мат, Мацюха, Сахнюк, Червяков, стр. 72)

1) поток $\exists$ макс. в сети G

$\Updownarrow$ 2) Ост. сеть не содержит дополняющих путей

$\Updownarrow$ 3) Для некот. разреза: $\varphi(X, \bar{X}) = \varphi_{max}$.

Из 1) => 2) — очев. т.к. если путь $\exists$, то вычислим φ_{min}, и тогда поток увеличится.

2) => 3) Пусть в ост. сети нет путей.

Рассм. $S :=$ мн-во вершин, до кот. в ост. сети $\exists$ путь из истока ~~в сток~~ в сток.

Тогда $(S, V \setminus S)$ — разрез

Причем $\forall u \in S, v \in V \setminus S$: ребра uv нет в ост. графе.

$\Rightarrow \varphi(u,v) = \varphi(u,v)$

$\Rightarrow \varphi(S, V \setminus S) = \varphi(S, V \setminus S)$

3) => 1) Из лекций: ~~любой поток~~ $\forall$ разреза: поток $\le$ пропускающей способности

$\Rightarrow$ если достиглось равенство — то это max поток. ч.т.д.

8) Алгоритм поиска max паросочетания.

Решение: max паросочетание — это max набор вершинно-непересек. рёбер.

Сопоставим поток $\leftrightarrow$ паросочетание.

($\Leftarrow$) Если $M =$ {мн-во рёбер из паросочетания}, то добавим вершину истока s и стока t,

и получим поток:
$$\begin{cases} \varphi(s,u) = \varphi(u,v) = \varphi(v,t) = 1 \\ \varphi(u,s) = \varphi(v,u) = \varphi(t,v) = -1 \end{cases}$$
φ(остальные рёбра, кроме M) $= 0$.

($\Rightarrow$) Пусть есть поток, пропускная способность дуг $= 0$ или 1.

Определим M как $\{(u,v) : \varphi(u,v) = 1\}$.

Тогда это паросочетание — т.к. в $\forall$ вершину входит/выходит ≤ 1 дуги, по которой поток $= 1$.

$\Rightarrow$ паросочетание $\leftrightarrow$ поток

$\Rightarrow$ просто ищем max поток по т. Форда-Фалкерсона.