Задача №1 Ёжиковой Анны 509 гр.

AR(1) $\begin{cases} U_t = \beta U_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1 \ldots n \\ U_0 = 0 \end{cases}$

① U^*_{n+k} — оптим. с.к. прогноз U_{n+k}

Ищем $\varphi(U_1 \ldots U_n) \in \mathbb{R}$, кот. решает задачу:

$$E(U_{n+k} - \varphi(U_1 \ldots U_n))^2 \longrightarrow \min_{\substack{\varphi(U_1 \ldots U_n):\, E\varphi^2 < \infty \\ \text{борел. ф.}}}$$

$\mathcal{F}_n = \sigma\{U_1 \ldots U_n\}$

Решение: $U^*_{n+k} = \varphi^*(U_1 \ldots U_n) = E(U_{n+k} / U_1 \ldots U_n) =$

$$= E(\underbrace{\beta U_{n+k-1}}_{\beta U_{n+k-2} + \varepsilon_{n+k-1}} + \varepsilon_{n+k} / U_1 \ldots U_n) = E(\beta^2 U_{n+k-2} + \beta \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} / U_1 \ldots U_n) =$$

$$= \ldots = E(\beta^k U_n + \beta^{k-1} \varepsilon_{n+1} + \ldots + \beta \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} / U_1 \ldots U_n) =$$

$\Big(U_t = \beta U_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1} + \beta^2 U_{t-2} = \ldots = \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta^{t-1} \varepsilon_1$

$\Rightarrow U_t$ — зависит только от $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_{t+1} \perp\!\!\!\perp \{U_t \ldots U_1\}$ при незав. $\{\varepsilon_t\}_{t=1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_{n+1} \ldots \varepsilon_{n+k} \perp\!\!\!\perp \sigma\{U_1 \ldots U_n\} \Big)$

$$= E(\beta^k U_n / U_1 \ldots U_n) \underset{\uparrow}{=} \beta^k U_n$$

$U_n \in \sigma\{U_1 \ldots U_n\}$

$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \overset{\text{незав.}}{\underset{i \neq j}{=}} E(\varepsilon_i) E(\varepsilon_j) = 0$

② $\Delta_k = E(U^*_{n+k} - U_{n+k})^2 = E(\beta^{k-1} \varepsilon_{n+1} + \ldots + \beta \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k})^2 \overset{*}{=}$

$$= E(\beta^{2(k-1)} \varepsilon^2_{n+1} + \ldots + \beta^2 \varepsilon^2_{n+k-1} + \varepsilon^2_{n+k}) = \Big(E\varepsilon^2_{n+1} = \ldots = E\varepsilon^2_{n+1} = E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 \Big)$$

$$= (\beta^{2(k-1)} + \ldots + \beta^2 + 1) E\varepsilon_1^2 = \frac{1 - \beta^{2k}}{1 - \beta^2} E\varepsilon_1^2$$

Сканировано с CamScanner

$k \to \infty$:

$|\beta| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2} E\varepsilon_1^2 = \frac{1}{1-\beta^2} E\varepsilon_1^2$

$|\beta| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2} E\varepsilon_1^2 = \infty$

$|\beta| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2} E\varepsilon_1^2 = \lim\limits_{k\to\infty} k\beta E\varepsilon_1^2 = \infty$

Ответ: ① $u^*_{n+k} = \beta^k u_n$

② $|\beta| < 1$: $\Delta_k \sim \frac{1}{1-\beta^2}\sigma^2$, $k \to \infty$

$|\beta| \geq 1$: $\Delta_k \to \infty$, $k \to \infty$

Задача №2

AR(2) $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = \mathcal{D}$, $0 < D\varepsilon_1 = \sigma^2 < \infty$

корни хар. по mod < 1

① Это авторегр. с ненулевым средним

$\Rightarrow$ заменим $V_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \mathcal{D} + \varepsilon_t$

Введем: $\mathcal{D} = (1-\beta_1-\beta_2)\mu \Rightarrow \mu = \frac{\mathcal{D}}{1-\beta_1-\beta_2} = E$:

$1-\beta_1-\beta_2 \neq 0$ (т.к. корни < 1)

$\begin{cases} V_t = \mu + u_t \\ u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t \end{cases}$ $\quad cov(V_t, V_{t+\tau}) = cov(u_t, u_{t+\tau})$ $\Downarrow$ спектр. пл-ти совпадают

Заменим задачу с нулевым средним:

$V_t = \beta_1 V_{t-1} + \beta_2 V_{t-2} + \xi_t$, $\quad E\xi_t = 0$

Из задачи о существ. спектр. пл-ти вида $f_\eta(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda)$

имеем:

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(\frac{1}{|1-\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|}\right)^2$$

Сканировано с CamScanner

② $\overline{U_n} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} U_t$

$F(\lambda)$ – непр. в 0 => по следств. из ЗБЧ в с.к.:

$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} V_t \xrightarrow[n\to\infty]{с.к.} 0 \underset{ЗБЧ}{=>} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} U_t \xrightarrow{с.к.} EU_1 = \frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2}$

③ $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$

U_t – удовлетв. усл. сильного перемешивания

Знаем: $\alpha(\tau) \le c\lambda^{\tau}$, $0<\lambda<1$ => $\sum_{\tau\ge1} (\alpha(\tau))^{\frac{2}{2+\delta}} < \infty$

У нас: $E|U_1-\mu|^{2+\delta} < \infty$ при $\delta>0$, $E(U_1-\mu)=0$

По ЦПТ: $\sqrt{n}(\overline{U_n}-\mu) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\Delta^2)$,

где $\Delta^2 = \underset{R(0)}{\underbrace{E(U_0-\mu)^2}} + 2\sum \underset{R(\tau)}{\underbrace{E(U_0-\mu)(U_\tau-\mu)}} \underset{2\pi\cdot f(0)}{=} \frac{\sigma^2}{|1-\beta_1-\beta_2|^2}$

<u>Ответ</u>: ① $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{|1-\beta_1 e^{-i\lambda}-\beta_2 e^{-2i\lambda}|^2}$

② Сходится в с.к. к $\frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2}$

③ Да: $N\left(0, \frac{\sigma^2}{|1-\beta_1-\beta_2|^2}\right)$

Задача №3

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}, \ t = 1 \dots n \\ \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

$\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$ – н.о.р., $\varepsilon_1 \sim N(0,1) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Запишем ур-ние правдоподобия

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \\ u_2 = \varepsilon_2 - \alpha \varepsilon_1 \\ u_3 = \varepsilon_3 - \alpha \varepsilon_2 \\ \dots\dots \\ u_n = \varepsilon_n - \alpha \varepsilon_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = u_1 \\ \varepsilon_2 = u_2 + \alpha \varepsilon_1 = u_2 + \alpha u_1 \\ \varepsilon_3 = u_3 + \alpha \varepsilon_2 = u_3 + \alpha u_2 + \alpha^2 u_1 \\ \dots\dots \\ \varepsilon_n = u_n + \alpha \varepsilon_{n-1} = u_n + \alpha u_{n-1} + \alpha^2 u_{n-2} + \\ \quad + \dots + \alpha^{n-2} u_2 + \alpha^{n-1} u_1 \end{cases}$$

Запишем матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha & 1 & & 0 & \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & & \\ & * & & \ddots & \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \qquad \overset{(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}} = B \overset{(u_1 \dots u_n)}{\overset{\shortparallel}{u}}$$

$$\left(g_\varepsilon(x) = \prod_{t=1}^{n} g(x_t) \right)$$

$u = B^{-1} \varepsilon \Rightarrow$ пл-ть u: $g_u(x_1 \dots x_n, \alpha) = g_\varepsilon(Bx) \frac{1}{|\det B^{-1}| = 1} =$

$$\left(\begin{aligned} &\int_\Omega g(x)dx = P(\overset{Bu}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}} \in \Omega) = P(u \in B^{-1}\Omega) = \int_{B^{-1}\Omega} g_u(y)dy \overset{y = B^{-1}x}{=} \\ &= \int_\Omega g_u(B^{-1}x) |B^{-1}| dx \\ &\forall \Omega \Rightarrow g(x) = g_u(B^{-1}x) \cdot |B^{-1}| \end{aligned} \right)$$

$$= \prod_{t=1}^{n} g(x_t + \alpha x_{t-1} + \alpha^2 x_{t-2} + \dots + \alpha^{t-2} x_2 + \alpha^{t-1} x_1)$$

Вместо аргументов — наблюдение u

Вместо α — оценка θ.

Сканировано с CamScanner

Запишем ~~[illegible]~~ логарифмич. правдоп.:

$$\ln g_n(u_1 \dots u_n, \theta) = \sum_{t=1}^{n} \ln g(u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2} u_2 + \theta^{t-1} u_1)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2} u_2 + \theta^{t-1} u_1)^2}{2}} \longrightarrow \max_{\theta \in R}$$

$$\parallel$$

$$\ln \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\dots)^2}{2}}$$

$$\parallel$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sum_{t=1}^{n} \frac{(\dots)^2}{2}}$$

Перепишем задачу:

$$\sum_{t=1}^{n} (u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2} u_2 + \theta^{t-1} u_1)^2 \longrightarrow \min_{\theta \in R}$$

Ответ: $\sum_{t=1}^{n} 2(u_{t-1} + \dots + (t-2)\theta^{t-3} u_2 + (t-1)\theta^{t-2} u_1) \cdot$
$\cdot (u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2} u_2 + \theta^{t-1} u_1) = 0$

Решение этого ур-ния θ — оценка для α

Задача №4

$$\begin{cases} u_t = \alpha + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + Z_t^{\gamma} \xi_t, \quad t = 1 \dots n \end{cases}$$

незав.
$\{\varepsilon_t\}$ — н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 \sim G(x)$, $\exists g(x) = G'(x)$
$g(x) = g(-x)$
$\{\xi_t\}$ — н.о.р., $\xi_t \sim M_\xi$
$g(x)$ — непр. и огр.
$\{Z_t^{\gamma}\}$ — н.о.р., $Z_t^{\gamma} \sim Bin(1, \gamma)$, $0 \le \gamma \le 1$

$F(x)$ — непр., симметр. ф.р., $F(x) + F(-x) = 1$

$$\sum_{t=1}^{n} \left(F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right) = 0$$

① Если ф-ция строго убывающая, то решение ур-ния $\exists$ и единств.

Если не строго => м.б. беск. много.

② y_t – удовлетв. усл. сильного перемешивания => применяем ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{P} E\left(F(\overset{\nearrow z_1^\gamma}{y_1}-\theta)-\frac{1}{2}\right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \quad \Lambda(\gamma,\theta)$$

Введем полную группу гипотез:

$H_0=\{z_1^\gamma=0\}$

$H_1=\{z_1^\gamma=1\}$

$$\Lambda(\gamma,\theta)=E\left(F(y_1-\theta)-\frac{1}{2}\Big/H_0\right)P(H_0)+E\left(F(y_1-\theta)-\frac{1}{2}\Big/H_1\right)P(H_1)$$

$$=E\left(F(u_1-\theta)-\frac{1}{2}\right)(1-\gamma)+E\left(F(u_1\overset{+\xi_1}{-}\theta)-\frac{1}{2}\right)\gamma$$

$$\Lambda(0,a)=E\left(F(u_1-a)-\frac{1}{2}\right)=E(F(\varepsilon_1))-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}\Bigg|_{(0,a)}=-EF(\overset{\varepsilon_1}{u_1-a})+EF(\overset{\varepsilon_1}{u_1-a}+\xi_1)=$$

$$=EF(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}$$ $\exists$ и непр. ч.п.

$$\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}\Bigg|_{(0,a)}=EF'(u_1-a)=EF'(\varepsilon_1)>0$$ если строго убыв. $\exists$ и непр. ч.п.

$$IF(\theta_\gamma,M_\xi)=\frac{\overbrace{EF(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}}^{<\infty}}{\underbrace{EF'(\varepsilon_1)}_{>0}}\Rightarrow GES(\theta_\gamma,M_\xi)<\infty \Rightarrow \hat{a}_n \text{ — B-робастно}$$

$GES(\theta_\gamma,M_\xi)=\sup_{M_\xi\in M_\gamma}|IF|$

Ответ: 1 неизвестно (м.б. единств., м.б. беск. много)

2 Да

$$IF(\theta_J, \mu_q) = \frac{EF(\varepsilon_1 + q_1) - \frac{1}{2}}{EF'(\varepsilon_1)}$$

$$GES(\theta_J, \mu_q) < \infty$$