Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 11

Грубый интеграл

Прежде чем определить интеграл по грубой траектории рассмотрим гладкую кривую $X_t\colon [0,T]\to\mathbb{R}^d$ и ее стандартное поднятие до грубой траектории:

$$\mathbb{X}^{ij}_{st}=\int_s^t X^i_{su}\,dX^j_u.$$

Пусть f^k — гладкие функции с ограниченными производными. Далее по повторяющимся индексам всегда предполагается суммирование. Для всякого разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[0,T]$ на отрезки $[u,v]$ верно равенство

$$\int_0^T f^k(X_t)\,dX^k_t=\sum_{[u,v]}\int_u^v f^k(X_t)\,dX^k_t.$$

По формуле Тейлора

$$\int_u^v f^k(X_t)\,dX^k_t=f^k(X_u)X^k_{uv}+f^k_{x_j}(X_u)\mathbb{X}^{jk}_{uv}+\ldots.$$

Для гладкой кривой X_t уже второе слагаемое $f^k_{x_j}(X_u)\mathbb{X}^{jk}_{uv}$ есть $O(|u-v|^2)$. Если такого вида сумму написать для мультипликативного функционала $(1,X^{(1)}_{st},X^{(2)}_{st},\ldots)$, у которого $|X^{(k)}_{st}|\le C_k|t-s|^{k\alpha}$ с $\alpha>1/3$, то второе слагаемое есть $O(|u-v|^{2\alpha})$, а уже третье слагаемое есть $O(|u-v|^{3\alpha})$. При стремлении масштаба разбиения к нулю сумма $\sum_{[u,v]}O(|u-v|^{3\alpha})$ сходится к нулю, так как $3\alpha>1$. Это наблюдение позволяет надеяться, что интеграл по грубой траектории будет определяться пределом сумм вида

$$\sum_{[u,v]}f^k(X_u)X^k_{uv}+f^k_{x_j}(X_u)\mathbb{X}^{jk}_{uv}.$$

Отметим, что пара $Y^k_t=f^k(X_t)$ и $(Y'_t)^{kj}=f^k_{x_j}(X_t)$ является контролируемой кривой относительно X_t и с учетом таких обозначений сумму можно переписать в виде

$$\sum_{[u,v]}Y^k_uX^k_{uv}+(Y'_u)^{kj}\mathbb{X}^{jk}_{uv}.$$

Пусть теперь $(X,\mathbb{X})\in\mathfrak{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$, где $\frac13<\alpha<\frac12$. Пусть (Y,Y') — контролируемая относительно X_t кривая в $\mathbb{R}^{N\times d}$, то есть

$$Y^{lk}_{st}=(Y'_s)^{lkj}X^j_{st}+R^{lk}_{st},\quad |R^{lk}_{st}|\le C|t-s|^{2\alpha},$$

причем Y_t и Y'_t принадлежат C^α.

Интегралом от (Y,Y') по $(X,\mathbb{X})$ называется выражение

$$\int_0^T Y^{lk}_t\,dX^k_t=\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to0}\sum_{[u,v]}\Bigl(Y^{lk}_uX^k_{uv}+(Y'_u)^{lkj}\mathbb{X}^{jk}_{uv}\Bigr).$$

Далее индексы для упрощения записи опускаем и пишем короче

$$\int_0^T Y_t\,dX_t=\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to0}\sum_{[u,v]}\Bigl(Y_uX_{uv}+(Y'_u)\mathbb{X}_{uv}\Bigr).$$

Предложение 1. *Для отображения*

$$A_{st} = Y_s X_{st} + (Y_s')\mathbb{X}_{st}$$

выполнены условия леммы о сшивке.

Доказательство. Применяя соотношения Чена, устанавливаем для всех $0 \le s \le u \le t \le T$ справедливость равенства

$$A_{st} - A_{su} - A_{ut} = -R_{su} X_{ut} - Y_{su}' \mathbb{X}_{ut}.$$

Тогда

$$|A_{st} - A_{su} - A_{ut}| \le |t-s|^{3\alpha} \big(\|R\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \big).$$

Поскольку $3\alpha > 1$, то применима лемма о сшивке. □

В качестве немедленного следствия получаем непрерывность

$$t \to \int_0^t Y_u \, dX_u,$$

оценку

$$\Big| \int_s^t Y_u \, dX_u - Y_s X_{st} - Y_s' \mathbb{X}_{st} \Big| \le |t-s|^{3\alpha} \big(\|R\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \big)$$

и равенство

$$\int_s^t Y_u \, dX_u = \lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sum_{[u,v]} \Big(Y_u X_{uv} + Y_u' \mathbb{X}_{uv} \Big).$$

Предложение 2. *Пара*

$$\Big(\int_0^t Y_u \, dX_u, Y_t \Big)$$

является контролируемой относительно X траекторией. Далее соответствующий остаточный обозначаем через $R^{\int Y\,dX}$.

Доказательство. Имеем

$$R_{st}^{\int Y\,dX} = \int_s^t Y_u \, dX_u - Y_s X_{st}.$$

Поскольку

$$\Big| \int_s^t Y_u \, dX_u - Y_s X_{st} - Y_s' \mathbb{X}_{st} \Big| \le |t-s|^{3\alpha},$$

то

$$\Big| R_{st}^{\int Y\,dX} \Big| \le C|t-s|^{3\alpha} + |Y_s' \mathbb{X}_{st}| \le \Big(C T^\alpha + (\|Y_0'\| + \|Y'\|_\alpha T^\alpha) \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \Big) |t-s|^{2\alpha}.$$

□

Следующее утверждение показывает непрерывность отображения

$$(X, \mathbb{X}), (Y, Y') \mapsto \int Y \, dX.$$

Положим

$$\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})) = \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha} + |Y_0 - \widetilde{Y}_0| + |Y_0' - \widetilde{Y}_0'| + \|Y - \widetilde{Y}'\|_\alpha + \|R - \widetilde{R}\|_{2\alpha}.$$

Теорема 1. *Пусть* $(X,\mathbb{X}),(\widetilde{X},\widetilde{\mathbb{X}})\in\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ *и* $(Y,Y')\in\mathcal{D}^{2\alpha}_X$, $(\widetilde{Y},\widetilde{Y}')\in\mathcal{D}^{2\alpha}_{\widetilde{X}}$, *причем для некоторого числа* $M>0$ *выполнено*

$$\|X\|_\alpha+\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}+\|\widetilde{X}\|_\alpha+\|\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\le M,$$

$$|Y_0|+|Y_0'|+\|Y'\|_\alpha+\|R\|_{2\alpha}+|\widetilde{Y}_0|+|\widetilde{Y}_0'|+\|\widetilde{Y}'\|_\alpha+\|\widetilde{R}\|_{2\alpha}\le M.$$

Тогда

$$\Big\|\int Y\,dX-\int\widetilde{Y}\,d\widetilde{X}\Big\|_\alpha\le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})),$$

$$\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha+\|R^{\int Y\,dX}-R^{\int\widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}\le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})).$$

Доказательство. Достаточно установить оценку выражения

$$\|R^{\int Y\,dX}-R^{\int\widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}.$$

Положим

$$\Delta_{st}=Y_uX_{uv}+Y_u'\mathbb{X}_{uv}-\widetilde{Y}_u\widetilde{X}_{uv}-\widetilde{Y}_u'\widetilde{\mathbb{X}}_{uv}.$$

Справедливо равенство

$$\Delta_{st}-\Delta_{su}-\Delta_{ut}=R_{su}\big(\widetilde{X}_{ut}-X_{ut}\big)+\big(\widetilde{R}_{su}-R_{su}\big)\widetilde{X}_{ut}+\big(\widetilde{Y}_{su}'-Y_{su}'\big)\mathbb{X}_{ut}+\widetilde{Y}_{su}'\big(\widetilde{\mathbb{X}}_{ut}-\mathbb{X}_{ut}\big).$$

Следовательно, верна оценка

$$|\Delta_{st}-\Delta_{su}-\Delta_{ut}|\le C(M)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{3\alpha}.$$

Применяя лемму о сшивке к Δ_{st}, получаем

$$\Big|\int_s^t Y_u\,dX_u-\int_s^t\widetilde{Y}_u\,d\widetilde{X}_u-\Big(Y_sX_{st}+Y_s'\mathbb{X}_{st}-\widetilde{Y}_s\widetilde{X}_{st}-\widetilde{Y}_s'\widetilde{\mathbb{X}}_{st}\Big)\Big|\le$$
$$\le C(M)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{3\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Big|R_{st}^{\int Y\,dX}-R_{st}^{\int\widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\Big|\le C(M)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{3\alpha}+|\widetilde{Y}_s'\widetilde{\mathbb{X}}_{st}-Y_s'\mathbb{X}_{st}|.$$

Оценивая второе слагаемое в правой части, получаем неравенство

$$\Big|R_{st}^{\int Y\,dX}-R_{st}^{\int\widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\Big|\le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{2\alpha},$$

из которого следует оценка

$$\|R^{\int Y\,dX}-R^{\int\widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}\le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{2\alpha}.$$

□

Стохастический интеграл совпадает с грубым интегралом

Пусть $(B_t,\mathbb{B}_{st})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу w_t и построенная с помощью интеграла Ито, а (Y_t,Y_t') — α–гёльдеров согласованный случайный процесс, почти наверное контролируемый относительно траекторий винеровского процесса w_t.

Предложение 3. *Грубый интеграл и стохастический почти наверное равны, то есть почти наверное*

$$\int_0^T Y_t\,dB_t=\int_0^T Y_t\,dw_t.$$

Доказательство. По определению

$$\int_0^T Y_t\,dB_t = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}\Big(Y_u B_{uv} + Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big).$$

Существует такая последовательность разбиений $\mathbb{T}_n$ (масштаб которых стремится к нулю), что с вероятностью единица

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0}\sum_{[u,v]} Y_u B_{uv} = \int_0^T Y_t\,dw_t.$$

Покажем, что с вероятностью единица

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0}\sum_{[u,v]} Y'_u\mathbb{B}_{uv} = 0.$$

Пусть $\sup|Y'_t| \le M$. Напомним, что

$$\mathbb{B}^{ij}_{uv} = \int_u^v w^i_s\,dw_s - w^i_u(w^j_v - w^i_u).$$

В частности, верно равенство

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{B}_{uv}|\mathcal{F}_t\big) = 0, \quad t \le u < v,$$

а $\mathcal{F}_t$ — фильтрация, порождаемая винеровским процессом. Следовательно, верно равенство

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{[u,v]} Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big|^2 = \sum_{[u,v]}\mathbb{E}\Big|Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big|^2.$$

Поскольку правая часть оценивается выражением

$$M^2 C\sum_{[u,v]}|u-v|^2,$$

то

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{[u,v]} Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big|^2$$

стремится к нулю при $\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0$. Случай неограниченного Y' сводится к уже рассмотренному с помощью моментов остановки. □

Формула Ито и грубая экспонента

Пусть функция f трижды непрерывно дифференцируема и ее производные третьего порядка ограничены. Пусть $(x, \mathbb{X})$ — грубая траектория. Кривая $(Df(X_t), D^2f(X_t))$ является контролируемой относительно X_t. Положим

$$[X]_{st} = X_{st}\otimes X_{st} - 2\mathrm{Sym}\mathbb{X}_{st}.$$

Можно показать, что $[X]_{st} = [X]_{su} + [X]_{ut}$ для всех $s \le u \le t$. Далее через $[X]_t$ обозначаем $[X]_{0t}$, то есть $[X]_{st} = [X]_t - [X]_s$.

Заметим, что $D^2 f$ — симметричная матрица и верно равенство

$$\mathrm{tr}\big(D^2 f\mathbb{X}\big) = \mathrm{tr}\big(D^2 f\,\mathrm{Sym}\mathbb{X}\big).$$

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$f(X_T) - f(X_0) = \sum_{[u,v]}\Big(Df(X_u)X_{uv} + D^2 f(X_u)\mathbb{X}_{uv} + \frac{1}{2}D^2 f(X_u)[X]_{uv} + O(|u-v|^{3\alpha})\Big).$$

Устремляя $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$, приходим к обобщению формулы Ньютона–Лейбница и аналогу формулы Ито для стохастического интеграла:

$$f(X_T) - f(X_0) = \int_0^T Df(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T D^2 f(X_t)\,d[X]_t.$$

Первое слагаемое — грубый интеграл, а второе слагаемое — интеграл Юнга. Это равенство обобщается на случай выражения $f(X_t + F_t)$, где F_t — гёльдерова кривая с показателем 2α, следующим образом:

$$f(X_T{+}F_T){-}f(X_0{+}F_0) = \int_0^T Df(X_t{+}F_t)\,dX_t{+}\int_0^T Df(X_t{+}F_t)\,dF_t{+}\frac{1}{2}\int_0^T D^2 f(X_t)\,d[X]_t,$$

первое слагаемое — грубый интеграл, а второе и третье слагаемые — интегралы Юнга.

Применяя последнее равенство к

$$Y_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}[X]_t),$$

получаем

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s\,dX_s, \quad Y_0 = 1.$$

Таким образом, кривая Y_t является решением грубого дифференциального уравнения $dY_t = Y_t\,dX_t$.