Решение 1 задачи, новый материал. Без ограничения общности, утверждение можно доказать для функции $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Допустим, что f – субмодулярная. Тогда при $x_1 \le x_2$ и $y_1 \le y_2$ выполнено

$$0 \ge \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_1) \right) dx$$

$$= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_1, y_1),$$

что и требовалось. Обратно, пусть $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Тогда по свойству субмодулярности для произвольного ϵ выполнено

$$f(x + \epsilon, y + \epsilon) - f(x, y + \epsilon) - f(x + \epsilon, y) + f(x, y) \le 0.$$

Разделив неравенство на ϵ и устремив ϵ к нулю, получим $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \le 0$, что и требовалось. $\square$

Решение 1 задачи, старый материал.

1. Заметим, что в равновесии выполнено $Q_1 + Q_2 < 5$, иначе фирме, которая что-то производит, выгоднее этого не делать. Таким образом, каждой фирме нужно решить задачу

   $$\Pi_i(Q_1, Q_2) = Q_i(5 - Q_1 - Q_2) - cQ_i^2 \to \max_{Q_i:\, Q_1 + Q_2 < 5}$$

   Продифференцируем:

   $$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i}(Q_1, Q_2) = 5 - 2Q_i - Q_j - 2cQ_i.$$

   Значит, Π_i возрастает по Q_i на $[0, (5 - Q_j)/(2c + 2))$, и убывает далее. Таким образом, максимальную прибыль фирма i получает при

   $$0 < \hat{Q}_i = \frac{5 - Q_j}{2c + 2} < 2.5.$$

   Аналогичное равенство имеет место для фирмы $j \ne i$. Получаем систему уравнений

   $$\hat{Q}_1 = \frac{5 - \hat{Q}_2}{2c + 2}, \quad \hat{Q}_2 = \frac{5 - \hat{Q}_1}{2c + 2}.$$

   Очевидно, что $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$. Сложив два равенства, получаем

   $$Q = \frac{10 - Q}{2c + 2} \Rightarrow \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 = \frac{5}{2c + 3}.$$

2. Аналогично, в равновесии выполнено $2Q < 5$, и каждая фирма должна максимизировать функцию

$$\Pi(Q) = Q(5 - 2Q) - cQ^2,$$

максимум которой достигается в точке $Q^* = \frac{5}{2c+4}$.

3. Это очевидно при любом $c > 0$, потому что Q^* – строгий максимум функции $\Pi(Q)$, а $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 > Q^*$.

□

Решение 2 задачи, старый материал. Фактически, каждая фирма должна максимизировать

$$\Pi(Q) = \left(P_0\left(1 - \frac{NQ}{Q_0}\right) - c\right)Q$$

по Q. Продифференцировав, получим

$$\frac{d}{dQ}\Pi(Q) = P_0 - c - \frac{2P_0N}{Q_0}Q.$$

Таким образом, искомое симметричное равновесие Нэша имеет вид

$$Q^* = Q_0\frac{1 - \frac{c}{P_0}}{2N}.$$

□

Решение 3 задачи, старый материал. Выигрыш первого игрока не зависит от стратегии второго, поэтому достаточно исследовать равновесность профилей лишь исходя из выигрыша второго.

1. Пусть $(R, S) = ((p, 1-p), (q, 1-q))$ – профиль стратегий. Тогда

$$\Pi_2(R, S) = q(pb + f(1-p)) + (1-q)(pd + h(1-p))$$
$$= q\Pi_2(R, 1) + (1-q)\Pi_2(R, 2).$$

Значит, если $\Pi_2(R, 1) = \Pi_2(R, 2)$, то любая стратегия второго будет равновесной. В свою очередь, это как раз выполнено при $p = p^*$. При этом, $\Pi_2(R, 1) > \Pi_2(R, 2)$ при $p > p^*$, поэтому равновесной стратегией второго будет $(1, 0)$, и аналогично при $p < p^*$ оптимальная стратегия второго – $(0, 1)$, что и требовалось.

2. Сразу следует из того, что если поменять местами стратегии второго игрока, то получится конфигурация первого пункта.

3. Если $d > b$ и $h > f$, то вторая стратегия второго строго мажорирует первую. С другой стороны, любой профиль $((p, 1-p), (0, 1))$ будет являться равновесием Нэша. Значит, это и есть все равновесия, и других не бывает.

□

Решение 4 задачи, старый материал. Выигрыш каждого игрока не зависит от стратегии другого. Значит, при любом профиле никому никуда не выгодно отклоняться. □

Решение 5 задачи, старый материал. Пусть $(\sigma, \sigma) = ((p, 1-p), (p, 1-p))$ – симметричный профиль. Тогда

$$\Pi(\sigma, \sigma) = p(1-p)V + (1-p)(1-p)D.$$

1. Пусть $V = D$. Тогда при $p \in [0, 1]$ профиль образует равновесие Нэша. Покажем, что он не является ESS. Пусть $q \in [0, 1]$, и $\sigma^* = (q, 1-q)$. Тогда

$$\Pi(\sigma, \sigma) = p(1-p)V + (1-p)(1-p)D = q(1-p)V + (1-q)(1-p)D = \Pi(\sigma^*, \sigma),$$

$$\Pi(\sigma, \sigma^*) = p(1-q)V + (1-p)(1-q)D = q(1-q)V + (1-q)(1-q)D = \Pi(\sigma^*, \sigma^*),$$

то есть, нарушен критерий ESS.

2. Пусть $V < D$. Тогда $p = 0$. Такой профиль является ESS, потому что для всех $q \in (0, 1]$

$$\Pi(\sigma, \sigma) = D > qV + (1-q)D = \Pi((q, 1-q), \sigma).$$

3. Пусть $V > D$. Тогда $p = 1$. Такой профиль является ESS, потому что для всех $q \in [0, 1)$

$$\Pi(\sigma, \sigma) = V > qV + (1-q)D = \Pi((q, 1-q), \sigma).$$

□

Решение 6 задачи, старый материал. □

Решение 7 задачи, старый материал.

1. Пусть $\sigma = (p, 1-p)$ для некоторого $p \in [0,1]$. Тогда

$$\Pi(\sigma,\sigma) = p(-p + 5(1-p)) + (1-p)3(1-p)$$

При $p = 0$ равновесия быть не может, потому что $\Pi(s_1,\sigma) = 5 > 3 = \Pi(s_2,\sigma)$. Аналогично, $p = 1$ не является равновесием, поскольку $\Pi(s_1,\sigma) = -1 < 0 = \Pi(s_2,\sigma)$. Значит, в равновесии $p \in (0,1)$. Тогда критерием равновесности является

$$\Pi(s_1,\sigma) = \Pi(s_2,\sigma) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3},$$

что и требовалось.

2. Уравнение имеет вид

$$\dot{x} = x(1-x)(\Pi(s_1,\nu) - \Pi(s_2,\nu)) = x(1-x)(2-3x) = f(x).$$

Неподвижные точки – $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{2}{3}$. Проверим их асимптотическую устойчивость.

- $f'(0) = 2$, поэтому $x = 0$ не является асимптотически устойчивой точкой.
- $f'(1) = 1$, поэтому $x = 1$ тоже не является асимптотически устойчивой точкой.
- $f'(2/3) < 0$, поэтому $x = \frac{2}{3}$ является асимптоитчески устойчивой точкой.

3. Очевидно, (σ_B, σ_B) не является равновесием, потому что можно отклониться в A. В свою очередь,

$$0 = \Pi(d, \sigma_A) > \Pi(\sigma_A, \sigma_A),$$

поэтому (σ_A, σ_A) тоже не является равновесием. Найдём условия, при которых (σ_T, σ_T) образует равновесие Нэша. Пусть σ – стратегия игрока, при которой он отклонился от B на шаге k. Тогда

$$\Pi(\sigma, \sigma_T) \leq 3\sum_{i=0}^{k-1} \delta^i + 5\delta^k,$$

и равенство достигается, если сразу после отклонения вновь играть B. Таким образом, (σ_T, σ_T) образует равновесие Нэша тогда и только тогда, когда

$$3\sum_{i=0}^{k-1} + 5\delta^k \leq 3\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i \Leftrightarrow \delta \geq \frac{2}{5},$$

что логично (чем больше δ, тем больше нужно иметь в виду дальнейшие последствия, отклоняясь). В свою очередь, при $\delta > \frac{2}{5}$ неравенство строгое, поэтому (σ_T, σ_T) образует ESS. Осталось рассмотреть случай $\delta = \frac{2}{5}$.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что

$$\Pi(\sigma_T, \sigma_T) > \Pi(\sigma, \sigma_T)$$

для всех σ кроме стратегий вида «отклониться один раз, затем вернуться обратно». Пусть σ^* – такая стратегия, и пусть отклонение происходит на шаге k. Для того, чтобы критерий ESS был выполнен, достаточно того, что $\Pi(\sigma_T, \sigma^*) > \Pi(\sigma^*, \sigma^*)$. Проверим это:

$$\Pi(\sigma_T, \sigma^*) = 3\sum_{i=0}^{k-1}\delta^i + 5\sum_{i=k+1}^{\infty}\delta^i > 3\sum_{i=0}^{k-1}\delta^i - \delta^k + 3\sum_{i=k+1}^{\infty}\delta^i = \Pi(\sigma^*, \sigma^*),$$

то есть, (σ_T, σ_T) является ESS.

4. Если первый игрок выбрал h, то второй должен выбрать d. А если первый выбрал d, то второй выбирает h. В такой игре поддеревья (подыгры) – выборы второго при условии некоторого действия первого, который второй сделал оптимально по построению. Значит, в такой игре с таким профилем стратегий свойство SPNE имеет место сразу по определению. В свою очередь, если рассмотреть бесконечную игру, то свойство SPNE тоже будет выполнено, потому что игра марковская – от предыдущих «раундов» будущий расклад не зависит (что не так, например, в случае Trigger стратегий).

$\square$