Раздел 4. Оценивание спектральной плотности

Пусть $\{u_t\}$, $t\in Z$, - стационарная последоват.,
$Eu_t=0$, $\operatorname{cov}(u_t, u_{t+\tau})=R(\tau)$. Пусть
$u_1,\dots,u_n$ - наблюдения.
Пусть дальше $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|R(\tau)|<\infty$, тогда существ.
спектральная плотность

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-i\lambda\tau},\ \lambda\in[-\pi,\pi].$$

Эквивалентная запись

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}R(\tau)\cos\lambda\tau=\frac{1}{2\pi}R(0)+\frac{1}{\pi}\sum_{\tau\geq 1}R(\tau)\cos\lambda\tau.$$

Пусть $\hat{R}_n(\tau)=\frac{1}{n-|\tau|}\sum_{t=1}^{n-|\tau|}u_t u_{t+|\tau|}$,

$$\tau=0,\pm 1,\dots,\pm(n-1)$$

- несмещенная оценка $R(\tau)$.
Периодограммой или выборочной спектральной плотностью называется ф-ия

$$\hat{f}_n(\lambda):=\frac{1}{2\pi}\sum_{|\tau|<n}\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)\hat{R}_n(\tau)e^{-i\lambda\tau},\ \lambda\in[-\pi,\pi]$$

Разумеется,

$$\hat{f}_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{|\tau|<n}\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)\hat{R}_n(\tau)\cos\lambda\tau.$$

$\hat{I}_n(\lambda)$ - выборочный аналог $f(\lambda)$, т.к.

$$\left(1 - \frac{|\tau|}{n}\right)\hat{R}_n(\tau) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n-|\tau|} u_t u_{t+|\tau|} =: R_n^*(\tau).$$

Статистика $R_n^*(\tau)$ - асимптотически несмещенная оценка $R(\tau)$.

Т.о., $$\hat{I}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|\tau|<n} R_n^*(\tau) e^{-i\lambda\tau}.$$

Очевидно, $\hat{I}_n(\lambda)$ - действительная четная ф-ия. Ее неотрицательность след. из задач.

Задача 1.

Показать, что $\hat{I}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{t=1}^{n} u_t e^{-i\lambda t}\right|^2$, следовательно, $\hat{I}_n(\lambda) \geq 0$.

Теорема 1

① Если $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|R(\tau)| < \infty$, то $E\hat{I}_n(\lambda) \to f(\lambda)$, т.е. $\hat{I}_n(\lambda)$ - асимптот. несмещенная оценка.

② Если $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|\tau R(\tau)| < \infty$, то

$$n[E\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda)] \to -\frac{1}{\pi}\sum_{\tau\geq 1}\tau R(\tau)\cos\lambda\tau.$$

В силу п.② $\forall\lambda$ $E\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda) \sim \frac{c}{n}$, $n\to\infty$

Док-во. ① Т.к.

$$E\hat{I}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|<n} \left(1 - \frac{|\tau|}{n}\right) R(\tau) e^{-i\lambda\tau},$$

(1) то $E\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda) = \alpha_n + \beta_n$, где

(2) $\alpha_n := \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|<n} \left[\left(1 - \frac{|\tau|}{n}\right) - 1\right] R(\tau) e^{-i\lambda\tau}$,

(3) $\beta_n := -\frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|\geq n} R(\tau) e^{-i\lambda\tau}$.

Очевидно, $|\beta_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|\geq n} |R(\tau)| = o(1)$, $n\to\infty$.

$\forall \varepsilon>0$ выберем M так, что $\frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|>M} |R(\tau)| < \varepsilon$.

Тогда $|\alpha_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|\leq M} \left(-\frac{|\tau|}{n}\right) R(\tau) e^{-i\lambda\tau} + \right.$

$\left. + \frac{1}{2\pi} \sum_{M<|\tau|<n} \left(-\frac{|\tau|}{n}\right) R(\tau) e^{-i\lambda\tau} \right| \leq |\dots| + |\dots| \leq$

$\leq n^{-1} \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|\leq M} |\tau R(\tau)| + \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau|>M} |R(\tau)| = o(1) + \varepsilon$

ч.т.д.

② Из (1)-(3) следует (берем α_n и β_n в действ. виде)

$$n\left[E\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda)\right] = \underbrace{-\frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{n-1} \tau R(\tau) \cos\lambda\tau}_{= n\alpha_n} \; \overbrace{- \frac{n}{\pi} \sum_{\tau\geq n} R(\tau) \cos\lambda\tau}^{= n\beta_n}.$$

Но $\left| -\frac{n}{\pi} \sum_{\tau \geq n} R(\tau) \cos \lambda\tau \right| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{\tau \geq n} |\tau R(\tau)| = o(1)$,

а $-\frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{n-1} \tau R(\tau) \cos\lambda\tau \to -\frac{1}{\pi} \sum_{\tau \geq 1} \tau R(\tau) \cos\lambda\tau$ ч.т.д.

$\to$ в $\tilde{\hat{I}}_n(\lambda)$

Замечание:

Имеем: $E[\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda)]^2 = E[\hat{I}_n(\lambda) - E\hat{I}_n(\lambda)]^2 +$

$+ [E\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda)]^2 = D\hat{I}_n(\lambda) + o(1)$, $n \to \infty$.

$E[\hat{I}_n(\lambda) - f(\lambda)]^2 \not\to 0$ при $n \to \infty$, т.к.

Однако $D\hat{I}_n(\lambda) \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Действительно, пусть $u_1, \ldots, u_n$ — н.о.р., $u_1 \sim N(0,1)$. Тогда $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$. Всилу зад. 1

$\hat{I}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^{n} u_t e^{-it\lambda} \right|^2$, т.е.

$\hat{I}_n(0) = \frac{1}{2\pi} \Big| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} u_t}_{\sim N(0,1)} \Big|^2 \overset{d}{=} \frac{1}{2\pi} \xi^2$, $\xi \sim N(0,1)$

Значит, $E[\hat{I}_n(0) - f(\lambda)]^2 = E\left[\frac{1}{2\pi}\xi^2 - \frac{1}{2\pi}\right]^2 =$

$= \frac{1}{4\pi^2} E(\xi^2 - 1)^2 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Идея:

Дисперсия $\hat{I}_n(\lambda)$ велика из-за больших дисперсий слагаемых с большими номерами, Уменьшим за счёт весов влияние слагаемых в сумме $\hat{I}_n(\lambda)$ с большими номерами. Тогда смещение возрастёт, но дисперсия уменьшится.

Пусть
$$\hat{f}_n(\lambda) := \sum_{|\tau|<n} w_{\tau n}\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)\hat{R}_n(\tau)e^{-i\lambda\tau},$$
где веса
$$w_{\tau n} = \begin{cases} \mathcal{K}(\tau/k_n), & |\tau| \le k_n, \\ 0, & |\tau| > k_n \end{cases},$$

$k_n \le n$, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

$\hat{f}_n(\lambda)$ называется сглаженной оценкой спектральной плотности. $\mathcal{K}(\cdot)$ – ядро сп.пл.

Условие (i)

$\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(-x)$ для $x \in [-1, 1]$, $\mathcal{K}(x)$ непр,

$\mathcal{K}(0) = 1$.

Задача 2. (Объяснение термину и сглаж. оценка)

Проверить, что $\hat{f}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda - \nu)\hat{I}_n(\nu)d\nu$,

где $W_n(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\sum_{|\tau|\le k_n} \mathcal{K}(\tau/k_n)e^{-i\lambda\tau}$

наз. спектральным окном, $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda)d\lambda = 1$.

Пример (Усечённая оценка)

$\mathcal{K}(x)=1$ при $|x|\le 1$, $k_n\to\infty$, но $k_n/n\to 0$ при $n\to\infty$,

Здесь
$$W_n(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\lambda(2k_n+1)\right)}{2\pi\sin(\lambda/2)}, & \lambda\ne 0,\\[2mm] \dfrac{2k_n+1}{2\pi}, & \lambda=0.\end{cases}$$

$\hat{f}_n(\lambda)$ может быть отриц.!

Можно показать, что при $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|\tau R(\tau)|<\infty$ для усеч. оценки
$$E\left[\hat{f}_n(\lambda)-f(\lambda)\right]^2\to 0,\ n\to\infty.$$

Но лучшей скорости можно достичь, если выполнено

Условие (ii)

Существуют конечные числа $q>0$ и $k>0$ такие, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathcal{K}(x)}{|x|^q}=k$.

Для усечённой оценки таких k и q не существует!

Пример (оценка Бартлетта)

$\mathcal{K}(x)=1-|x|$ при $|x|\le 1$. Тогда $k=q=1$

Здесь

$$W_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|\tau|\le k_n} \varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right) e^{-i\lambda\tau} = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\frac{k_n\lambda}{2}\right)}{2\pi k_n \sin^2(\lambda/2)}, & \lambda\ne 0 \\ \dfrac{k_n}{2\pi}, & \lambda=0. \end{cases}$$

Т.к. $W_n(\lambda)\ge 0$, то $\hat{f}_n(\lambda)\ge 0$.

Видно, что $W_n(\lambda)\to \begin{cases} 0, \lambda\ne 0, \\ \infty, \lambda=0 \end{cases}$, $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda)\,d\lambda=1$

~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Это типичное свойство „хорошего" спектрального окна.

Теорема 2 (об асимптот. смещении сглаж. оценки)

Пусть выполнены условия (i)-(ii). Пусть $k_n\to\infty$ так, что $k_n^q/n\to 0$. Пусть для некоторого $p\ge \max(1,q)$ сходится ряд $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|\tau|^p|R(\tau)|<\infty$. Тогда

$$k_n^q\left[E\hat{f}_n(\lambda)-f(\lambda)\right]\to -\frac{\kappa}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|\tau|^q R(\tau)\cos\lambda\tau$$

Замечание.

В условиях теоремы 1 для периодограммы

$$n\left[EI_n(\lambda)-f(\lambda)\right]\to c=-\frac{1}{\pi}\sum_{\tau\ge 1}\tau R(\tau)\cos\lambda\tau.$$

В условиях теоремы 2

$$n\left[E\hat{f}_n(\lambda)-f(\lambda)\right]=\frac{n}{k_n^q}\cdot k_n^q\left[E\hat{f}_n(\lambda)-f(\lambda)\right]\sim$$

$$\sim\frac{n}{k_n^q}c_1,\text{ где } c_1=-\frac{k}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|\tau|^q R(\tau)\cos\lambda\tau.$$

Значит, $n\left[E\hat{f}_n(\lambda)-f(\lambda)\right]\to\infty,\ n\to\infty,$

и смещение у $\hat{f}_n(\lambda)$ больше, чем у $\hat{I}_n(\lambda)$.

Док-во теоремы 2

Очевидно, $E\hat{f}_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{|\tau|\le k_n}\varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right)\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)R(\tau)\cos\lambda(\tau)$.

Напомним, $f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty}R(\tau)\cos\lambda\tau.$

Значит, $k_n^q\left[E\hat{f}_n(\lambda)-f(\lambda)\right]=$

$$=\frac{k_n^q}{2\pi}\sum_{|\tau|\le k_n}\left[\varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right)\left(1-\frac{|\tau|}{n}\right)-1\right]R(\tau)\cos\lambda\tau-$$

$$-\frac{2k_n^q}{2\pi}\sum_{\tau\ge k_n+1}R(\tau)\cos\lambda\tau=$$

(4) $$=\frac{k_n^q}{2\pi}\sum_{|\tau|\le k_n}\left[\varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right)-1\right]R(\tau)\cos\lambda\tau-$$

(5) $$-\frac{k_n^q}{2\pi}\sum_{\tau=1}^{k_n}\varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right)\cdot\frac{\tau}{n}\cdot R(\tau)\cos\lambda\tau-$$

(6) $$-\frac{k_n^q}{\pi}\sum_{\tau\ge k_n+1}R(\tau)\cos\lambda\tau$$

Рассмотрим (4). Для $k_n^*<k_n$ перепишем (4) в виде

(7) $$\frac{1}{2\pi}\sum_{|\tau|\le k_n^*}\frac{\varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right)-1}{\left|\frac{\tau}{k_n}\right|^q}\cdot|\tau|^q R(\tau)\cos\lambda\tau+$$

(8) $$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k_n^*<|\tau|\le k_n}\ldots$$

Эта $\forall \varepsilon > 0$ существует δ: при $\left|\frac{\tau}{k_n}\right| < \delta$

$$\left| \frac{\varkappa\left(\frac{\tau}{k_n}\right) - 1}{\left|\frac{\tau}{k_n}\right|^q} + \kappa \right| < \varepsilon.$$

Положим $k_n^* = [\delta k_n]$. Тогда в (7)

$$\left|\frac{\tau}{k_n}\right| \le \frac{k_n^*}{k_n} \le \frac{\delta k_n}{k_n} = \delta.$$

Поэтому, если ввести величину

$$(9) \qquad -\frac{\kappa}{2\pi} \sum_{|\tau| \le k_n^*} |\tau|^q R(\tau) \cos \lambda\tau,$$

то

$$(10) \qquad |(7) - (9)| \le \varepsilon \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau|^q |R(\tau)|.$$

Очевидно, выражение в (9) есть

$$(11) \qquad -\frac{\kappa}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau|^q R(\tau) \cos \lambda\tau + o(1), \; n \to \infty.$$

В силу (10)-(11) получаем:

$$\left| (7) + \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau|^q R(\tau) \cos \lambda\tau \right| \le \varepsilon \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau|^q R(\tau) \cos\lambda\tau + o(1).$$

Значит, выражение в (7) при $n \to \infty$ стремится к

$$-\frac{\kappa}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau|^q R(\tau) \cos \lambda\tau.$$

Осталось проверить, что выражения (8), (5)-(6) стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Рассмотрим (8). Т.к. $\varkappa(x) \le M$, то

$$\left| \frac{1 - \varkappa(x)}{|x|^q} \right| \le \frac{M+1}{\delta^q} \quad \text{при } |x| \ge \delta \text{ (} \delta \text{ фикс!)}$$

Но для суммы в (8) имеем:

$$\left|\frac{\tau}{k_n}\right| \geq \frac{k_n^*+1}{k_n} = \frac{[\delta k_n]+1}{k_n} \geq \frac{\delta k_n - 1 + 1}{k_n} = \delta.$$

Значит, модуль выражения (8) не больше

$$\frac{M+1}{2\pi\delta^{\nu}} \sum_{|\tau|>[\delta k_n]} |\tau|^{\nu} |R(\tau)| = o(1), \; n\to\infty.$$

~~Аналогично, выражение (4) и~~
модуль выражения в (5) не больше

$$\frac{M k_n^{\nu}}{2\pi n} \sum_{\tau \geq 1} |\tau R(\tau)| = o(1), \text{ т.к. } k_n^{\nu}/n \to 0$$

при $n\to\infty$.

Наконец, модуль выражения в (6) не больше

$$\frac{k_n^{\nu}}{\pi} \sum_{\tau \geq k_n+1} |R(\tau)| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{\tau \geq k_n+1} \tau^{\nu} |R(\tau)| = o(1), \; n\to\infty.$$

Теорема 2 полн. доказана.

N	Название оценки	Форм. для $\varkappa(x)$, $\lvert x\rvert \leq 1$	q	k	$\int_{-1}^{1} \varkappa^2(x)\,dx$
1	Бартлетта	$1-\lvert x\rvert$	1	1	$2/3 = 0.666$
2	Хеннана	$1/2(1+\cos\pi x)$	2	$\pi^2/4$	$3/4 = 0.750$
3	Парзена	$1-x^2$	2	1	$16/15 = 1.067$
4	Даниэля	$\sin(\pi x)/(\pi x)$	2	$\frac{\pi^2}{6}$	0.902