21.11.20. Дискр. матем. д/з от семинара 12.

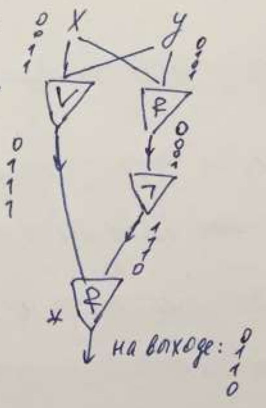
① $L_{\{\&;\vee;\neg\}}(x\oplus y)=4$

N6.5 Тор
407 N32 20:43

Решение: Сначала докажем, что $L_{\{\&;\vee;\neg\}}(x\oplus y)\le 4$.

Просто есть схема за 4 элемента:

Просто сверим, что получается на выходе из каждого элемента.



• Теперь докажем, что $L_{\{\&;\vee;\neg\}}(x\oplus y)\ge 4$, т.е. что за ≤ 3 элемента — нельзя.

Отметим, что если схема минимальна, то во всех вершинах реализуются разные ф-ции — т.к. если есть две с одинаковой ф-цией, то ту, которая ниже — её можно выкинуть, а её выходы переподключить к той, которая выше — и тогда элементов станет меньше $\Rightarrow$ схема была не минимальная.

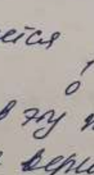
Пусть мы хотим за 3 элемента.

1) Пусть нижний элем — конъюнкция.

У неё на выходе реализуется (0110)

Есть 2 варианта: оба входа в эту конъюнкцию ведут из одной и той же вершины, или из 2-х разных.

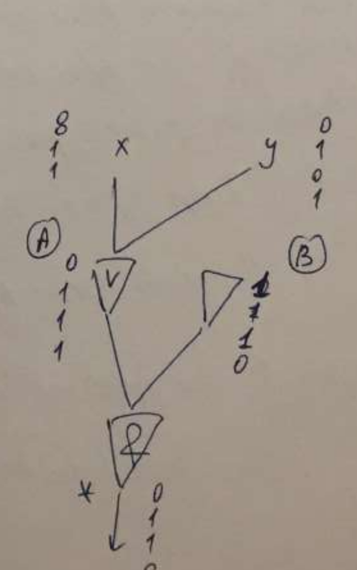
Если оба входа из одной: то в ней реализуется тоже (0110) — но так нельзя, т.к. в min схеме во всех вершинах реализуются разные ф-ции.



Значит, левый и правый вход в & ведут из двух разных элементов. Чтобы $A\&B=(0110)$, необх. чтобы $A=(*11*)$, $B=(*11*)$

Причём $A=(1111)$ — нельзя, т.к. это константа

$A=(0110)$ — тоже нельзя, т.к. опять будет повтор реализуемой ф-ции $\Rightarrow$



$\Rightarrow A = \begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}$; $B = \begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ – (или наоборот, но тогда переименуем правый с левым).

Смотрим: $A = \begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}$ – не x и не y (т.е. не выход переменной)

$B = \begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ – тоже не выход переменной.

$\Rightarrow$ A и B – это ещё 2 новых функц. элемента

$\Rightarrow$ уже 3 элемента есть, больше нельзя.

$\Rightarrow$ в A и B идут входы только от переменных.

И если A – можно так получить – ну $x \vee y = \begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}$,

то B – нельзя. Почему?

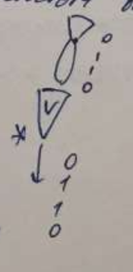
Ну либо перебрать 8 вариантов: $B = \& / \vee / \neg$ и 3 вариантов, откуда идут входы в B: либо (x,x) либо (x,y), либо (y,y).

Либо сказать, что $x \oplus y$ – не моног. ф-ция,

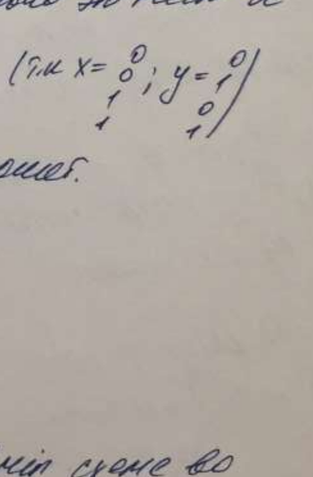
а & и $\vee$ – монотонные $\Rightarrow$ в схеме должно быть хотя бы одно отрицание $\Rightarrow$ B – это отрицание, т.к. только это место и осталось свободным. но $\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix} \neq \bar{x}$; $\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix} \neq \bar{y}$ (т.к. $x = \begin{smallmatrix}0\\0\\1\\1\end{smallmatrix}$; $y = \begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}$)

$\Rightarrow$ против $\Rightarrow$ & нижним элементом быть не может.

2) Пусть нижний элем = $_*\overline{\vee}$



Опять, если оба входа в $_*\overline{\vee}$ идут из одного и того же элемента, то на этом элементе реализуется тоже ф-ция $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ – это противоречит тому, что в этой схеме во всех вершинах реализуются разные элем.



$\Rightarrow$ входы в $_*\overline{\vee}$ идут из 2-х разных вершин, A и B.

Чтобы $A \vee B = \begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ – необх, чтобы $A = \begin{smallmatrix}0\\*\\*\\0\end{smallmatrix}$; $B = \begin{smallmatrix}0\\*\\*\\0\end{smallmatrix}$.

но A (или B) $\neq \begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ – т.к. будет повтор.

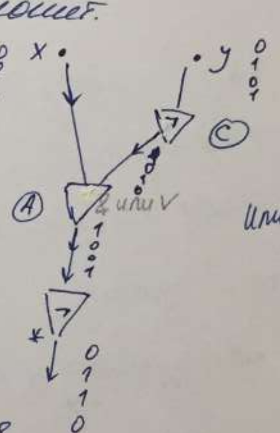
и A (или B) $\neq \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix}$ – т.к. константа

$\Rightarrow A = \begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}$; $B = \begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}$.

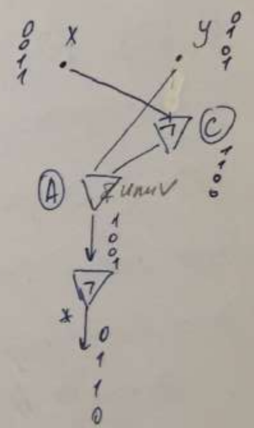
Видим, что A – не переменная
B – не переменная.

⇒ A и B – это ещё 2 новых функц. элемента. ⇒ уже 3 элемента есть
⇒ больше элементов нельзя.
Причём одно из них – обязательно отрицание,
т.к & и ∨ – монотонные, а $x \oplus y$ – не монотонная.
но $\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix} \neq \bar{x}, \neq \bar{y}$; $\begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix} \neq \bar{x}; \neq \bar{y}$ ⇒ противоречие
⇒ ∨ – минимум элементом быть не может.

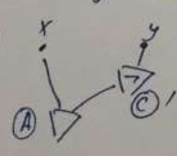
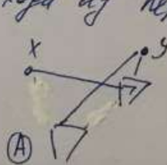
3) Пусть минимум элемент = ¬
В него берёт вход из какого-то элемента A,
причём в A реализуется $\begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}$
$A = \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}$ – не переменная.



Или



⇒ A ещё один. функц. элемент,
причём не отрицание – т.к два отрицания подряд – их можно убрать оба, и схема станет меньше.
⇒ A = & или ∨ – т.е 2-элементная ф-ция.
и C – это ¬, т.к ф-ция $\begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}$ – не монотонна.
И причём в A не могут вести оба входа из одного элемента – т.к тогда будет повтор ф-ции.
И в A не могут вести оба входа из переменных – т.к $A = \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix} \neq x \vee y$; $A = \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix} \neq x \& y$.

⇒ либо  , либо 

– т.к если в (A) подаётся на вход x – то в (¬) должно подаваться y, иначе выходная ф-ция не будет зависеть от y – но это не верно.
(И наоборот: если в A – идёт y, то в ¬ – идёт x).

но видно, что $\begin{cases} x \begin{smallmatrix}\&\\ \vee\end{smallmatrix} \bar{y} \neq \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix} \\ y \begin{smallmatrix}\&\\ \vee\end{smallmatrix} \bar{x} \neq \begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix} \end{cases}$ ⇒ противоречие
⇒ (¬) – тоже не может быть минимум элементом.

$\boxed{\text{Ответ: } L_{\{\&;\vee;\neg\}}(x \oplus y) = 4}$

② а) $L_{\{\downarrow\}}(x \& y) = ?$ 3

б) $L_{\{\downarrow\}}(x \to y) = ?$ 3

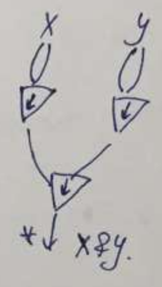
в) $L_{\{\downarrow\}}(x \oplus y) = ?$ 5 — № 6.12

г) $L_{\{\downarrow\}}(x \sim y) = ?$ 4 — № 6.11

Решение: $A \downarrow B = \overline{A \vee B} = \begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}$

$A \downarrow A = \overline{A \vee A} = \overline{A}$

а) $x \& y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{x} \downarrow \overline{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

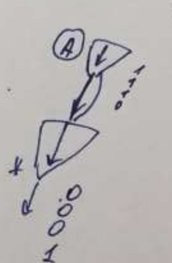


$\Rightarrow$ можно за 3 элемента:

почему нельзя схемой сложности ≤ 2?

Рассм. самый нижний элемент.

Если в него идут на вход стрелки из одного и того же элемента A:



тогда на выходе A реализуется $\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ — это не переменная

$\Rightarrow$ это 2-й функц. элемент $\Rightarrow$ больше нельзя.

$\Rightarrow$ в A — идут стрелки только из переменных

но $\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix} \neq x \downarrow x$; $\neq y \downarrow y$; $\neq x \downarrow y$. $\Rightarrow$ противоречие.

Если в самый нижний элемент идут стрелки из 2-х разных вершин, то заметим, что на выходах этих вершин $^{A \neq B}$ (чтобы $A \downarrow B = \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}$)

должна реализовываться ф-ция вида $\begin{smallmatrix}*\\*\\*\\0\end{smallmatrix}$ $\Rightarrow$ это не переменное

$\Rightarrow A \neq B$ — это есть 2 новых функц. элемента

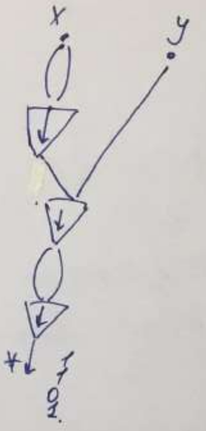
$\Rightarrow$ уже ≥ 3 функц. элементов. против. $\Rightarrow$ за ≤ 2 элем — нельзя

$\Rightarrow L_{\{\downarrow\}}(x \& y) = 3$.

стр 3

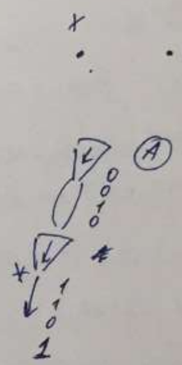
б) $x\to y = \bar{x}\vee y = \overline{\overline{\bar{x}\vee y}} = \overline{\bar{x}\downarrow y} = [(x\downarrow x)\downarrow y ; \downarrow ; (x\downarrow x)\downarrow y]$

⇒ за 3 можно:



почему нельзя за ≤2 элемента?

смотрим на самый нижний элемент.



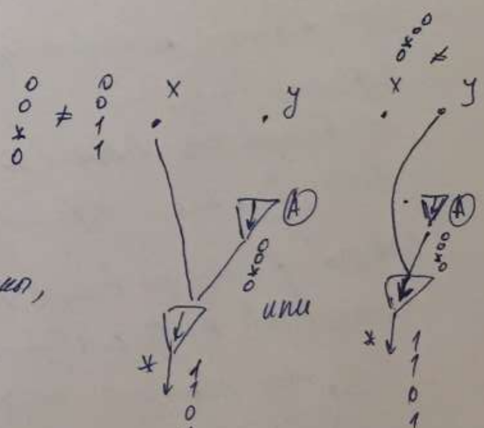
Если на него подаётся одна и та же вершина A — то на выходе из этой вершины (A) реализуется $\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}$ — это не переменная

→ уже 2 функц. элемента есть.

→ больше нельзя.

⇒ в A берут только переменные.

но $\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix} \neq x\downarrow x ; \neq x\downarrow y ; \neq y\downarrow y$. ⇒ противоречие.



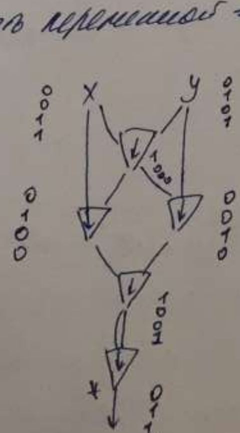
Если на самый нижний подаются 2 разные вершины, то это переменная и какой-то элем A — т.к. $\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\0\end{smallmatrix} \neq x\downarrow y$

причем на этих 2-х вершинах реализуется $\begin{smallmatrix}0\\0\\*\\0\end{smallmatrix}$ - чтобы на выходе было $\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}$.

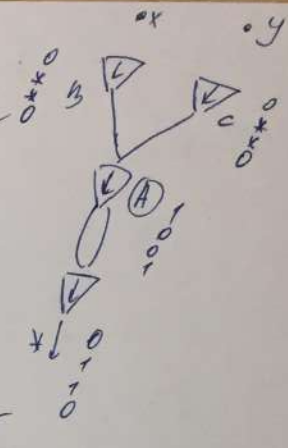
но $\begin{smallmatrix}0\\0\\*\\0\end{smallmatrix}$ - это не переменная, но мы уже сказали, что одна из $\begin{smallmatrix}0\\0\\*\\0\end{smallmatrix}$ - должна быть переменной ⇒ против. ⇒ нельзя за 2 элем.

$\Rightarrow L_{\{\downarrow\}}(x\to y) = 3$.

в) $x\oplus y$ за 5 можно:



почему нельзя за ≤ 4?



1) пусть в самый нижний элемент идут стрелки от одной и той же вершины А. => на выходе А имеем $\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\1\end{smallmatrix}$

Если к А ведут два ребра из одной и той же вершины В, то на выходе вершины В реализуется то же самое, что и на выходе * — т.к. $x \downarrow x = \bar{x}$ — но это противоречит тому, что в мин схеме во всех вершинах реализуются разные ф-ции.

=> к А ведут 2 ~~[illegible]~~ ребра из разных вершин В и С.

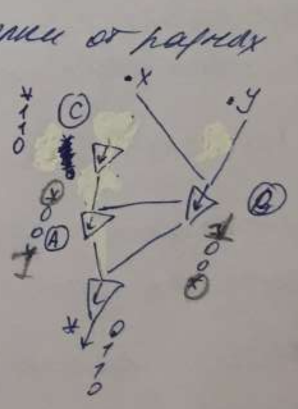
тогда на выходах В и С реализуются ф-ции $\begin{smallmatrix}0\\ *\\ *\\0\end{smallmatrix}$

=> В и С — это не переменные

=> уже 4 элемента есть => больше нельзя.

Один из элементов В или С должен быть "самой верхней", т.е на его вход подаются только переменные. но тогда при $x=y=0$ этот элемент выдает 1 — а должен быть 0 — т.к $\begin{smallmatrix}\boxed{0}\\ *\\ *\\0\end{smallmatrix}$ => против

2) пусть в самый нижний элемент $* \begin{smallmatrix}\downarrow\\0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ идут стрелки от разных вершин А и В.



На выходах этих вершин реализуются функции вида $\begin{smallmatrix}*\\0\\0\\ *\end{smallmatrix}$ — это не переменные.

причем если на выходе хотя бы одного из элементов А и В реализуется ф-ция 1001, то из этого элемента можно провести и второе ребро ко входу "самого нижнего" элемента — и получим $\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}$ — т.к $x \downarrow x = \bar{x}$.

Тогда мы получим схему из рассм. выше случая 1.

но в А (и в В тоже) не может реализовываться $\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix}$

=> $A = \begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}$, $B = \begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}$ — или наоборот, тогда переименуем А и В

=> А и В — обе не переменные.

=> это ещё 2 элемента.

причем В — это $x \downarrow y$

Рассм. элемент А. На его входы не может поступать ни одна из переменных, т.к тогда на наборе $x=y=1$ мы не получим значение 1.

только от ~~[illegible]~~ выхода элемента В ребра на вход элемента А вести не могут, т.к тогда мы бы на выходе А получили бы $\bar{B} = \begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}$, а не $\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}$.

=> хотя бы одно ребро в A идёт от элемента C, причём C реализует $\begin{matrix}*\\1\\1\\0\end{matrix}$. Этот (C) — уже 4-й элемент в схеме => больше элем. нельзя

но $\begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}$ — уже было, => на выходе C будет $\begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}$.

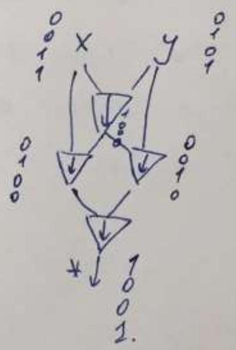
=> на выходах элементов, ведущих в (C) — должна быть ф-ция $\begin{matrix}0\\0\\0\\*\end{matrix}$

но это не переменная и не B => противоречие

=> за ≤ 4 элемента нельзя

=> $L_{\{\downarrow\}}(x\oplus y)=5$.

2) $x\sim y$ — можно за 4 реализовать:



почему нельзя за ≤ 3?

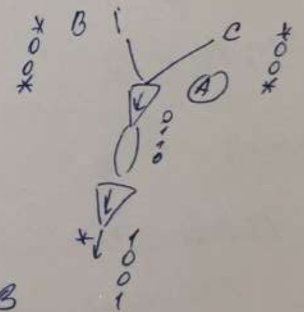
Ну если бы можно за ≤ 3,

то поскольку $x\oplus y=\overline{x\sim y}$ —

то мы бы $x\oplus y$ реализовали за 4 элемента,

но мы только что в 2в) доказали, что это невозможно.

но можно и явно опять перебрать.



1) пусть на вход к самому нижнему элементу ведут ребра из одной и той же вершины A.

тогда на выходе A имеем $\begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}$.

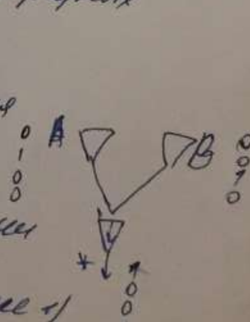
К вершине A два ребра от одной и той же вершины B быть уже не могут, т.к. тогда на выходе B и самого нижнего элемента реализуется одна и та функция $\begin{matrix}1\\0\\0\\1\end{matrix}$ — т.к. $x\downarrow x=\bar{x}$, а $\bar{\bar{x}}=x$. — а так нельзя, т.к. схема минимальная.

=> к вершине A ведут ребра от двух разных элементов, причём один из них — переменная, т.к. иначе было бы уже 4 элемента.

но на выходах B и C — должна быть ф-ция $\begin{matrix}*\\0\\0\\*\end{matrix}$ — а это не переменная. против.

2) пусть к самому нижнему элементу ведут два ребра из разных вершин A и B. на выходах этих вершин реализуется $\begin{matrix}0\\*\\*\\0\end{matrix}$.

Если на выходе хотя бы одной из вершин A и B реализуется ф-ция $\begin{matrix}0\\1\\1\\0\end{matrix}$, то можно провести и второе ребро ко входу "самого нижнего" элемента. при таком преобразовании сложность схемы не увеличится, а мы окажемся в случае 1), который разобран выше.



$\Rightarrow$ считаем, что $\begin{smallmatrix}? \\ 1 \\ 0\end{smallmatrix}$ – не реализуется ни ~~в~~ в A, ни в B.

но $\begin{smallmatrix}? \\ ?\end{smallmatrix}$ – тоже непора – т.к константа

$\Rightarrow$ на A – $\begin{smallmatrix}? \\ 0 \\ 0\end{smallmatrix}$, на B – $\begin{smallmatrix}0 \\ 0 \\ ?\end{smallmatrix}$.

Это не константы $\Rightarrow$ это еще 2 новых элемента

$\Rightarrow$ уже 3 элемента есть $\Rightarrow$ других нет.

$\Rightarrow$ Один из A или B должен быть "самым верхним" элементом, т.е ему на вход подаются только переменные.

но тогда на наборе $x=y=0$ "самый верхний" элемент даст 1, а ~~он~~ должен дать 0. $\Rightarrow$ против.

$\Rightarrow L_{\{\downarrow\}}(x \sim y) = 4.$

<u>Ответ:</u> а) $L_{\{\downarrow\}}(x \not\equiv y) = 3$

б) $L_{\{\downarrow\}}(x \to y) = 3$

в) $L_{\{\downarrow\}}(x \oplus y) = 5$

г) $L_{\{\downarrow\}}(x \sim y) = 4.$

③ $L_{\{\downarrow\}}(P_2(n)) = 2^{2^n} - n.$ N6.10

<u>Решение:</u> Очевидно, что $L_{\{\downarrow\}}(P_2(n)) \geq 2^{2^n} - n$ – т.к всего 2^{2^n} ф-ций от n переменных, из них n входов-переменных $\Rightarrow \geq 2^{2^n} - n$ вершин нужно

на каждую из которых нужен хотя бы 1 элементу выход

покажем, что $2^{2^n} - n$ – хватит.

Вспомним, что $\{\downarrow\}$ – полная система в $P_2(n)$, т.е все ф-ции как-то выражаются $\Rightarrow$ какую-то схему из функц. элементов мы построим. А теперь если мы в этой схеме какая-то функция f ~~вершин~~ реализуется не только на выходе, но и где-то в середине – то этот элемент f из середины выкидываем, а все его ребра переподключаем к f, которая выход

$\Rightarrow$ проделывая такую операцию, мы получим схему, у которой все вершины, которые не входные переменные – являются выходами.

Причем реализованы все 2^{2^n} ф-ций $\Rightarrow L = 2^{2^n} - n$. ч.т.д.

4. $\boxed{L_\oplus\left\{\begin{pmatrix}0 & \cdot & 1 & \cdot & 1\\ & & & \ddots & 1\\ 1 & 1 & & \cdot & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\} = 2(n-1)}$ №6.24 №6.25 407 №9.3 14:48

Решение: при $n \geq 4$: $L = 2(n-1)$.

при $n = 3$: $L = 3$

$n = 2$: $L = 0$

$n = 1$: $L = 1$.

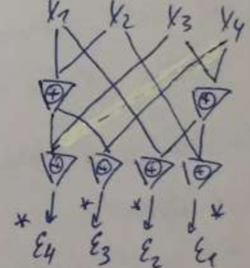
почему? ну $n = 1 \Rightarrow M_1 = (0)$

т.е $f \equiv 0$ — ну $L = 1$, т.к $0 = x \oplus x$ — а за 0 элементов нельзя, т.к x_1 — это не 0.

$n = 2 \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ — т.е $\begin{cases}x_2\\ x_1\end{cases} \Rightarrow L = 0$ — просто x_2 и x_1 сразу на выход подаём.

$n = 3 \Rightarrow M_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ — т.е $\begin{cases}x_2 \oplus x_3\\ x_1 \oplus x_3\\ x_1 \oplus x_2\end{cases} \Rightarrow L = 3$ — т.к каждый выход реализуется с помощью 1 сложения, и в то же время все эти выхода должны быть выходами различных элементов сложения.

$n = 4 \Rightarrow M_4 = \begin{pmatrix}0 & 1 & \boxed{1} & \boxed{1}\\ 1 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1}\\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 1\\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow L = 6.$ — ну за 6 можно:



почему нельзя за ≤ 5:

пусть такая схема $\exists$.

Выходы схемы $\varepsilon_1 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$

$\varepsilon_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4$

$\varepsilon_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$

$\varepsilon_4 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

должны быть выходами 4 различных элементов.

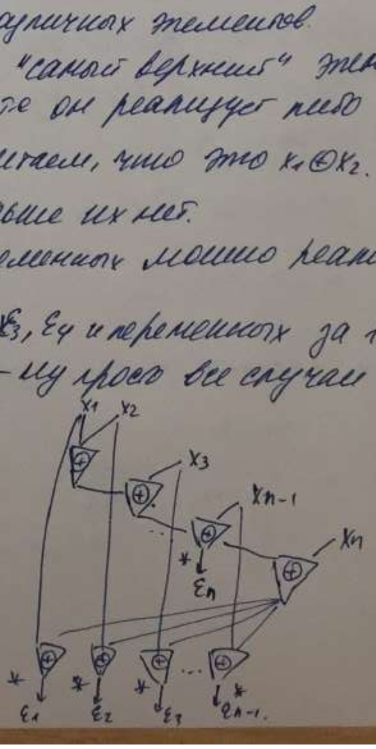
Кроме того, в схеме есть "самый верхний" элемент, на который подаются только переменные, т.е он реализует либо $x_i \oplus x_i \equiv 0$ — не нужно, либо $x_i \oplus x_j$. считаем, что это $x_1 \oplus x_2$. $\Rightarrow$ уже 5 элементов в схеме есть $\Rightarrow$ больше их нет.

С помощью $x_1 \oplus x_2$ и переменных можно реализовать ε_3 и ε_4.

но с помощью $x_1 \oplus x_2$; $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ и переменных за 1 сложение ε_1 и ε_2 — уже нельзя — ну просто все случаи перебираем.

$\Rightarrow L_4 = 6$.

Для n: можно за $2(n-1)$:



почему меньше за $< 2(n-1)$?

Докажем, что $L_\oplus(M_n) \geq L_\oplus(M_{n-1})+2$ при $n \geq 3$.

(а база: при $n=4$: $L_\oplus(M_4) = 6 = 2\cdot 3 = 2(4-1)$) — уже доказали.

Воспользуемся методом забивания.

Рассм. минимальную по сложности схему, реализующую матрицу M_n.

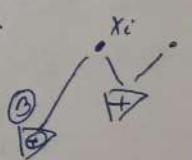
Поскольку все строки матрицы M_n содержат > одной единицы, то хотя бы один элемент (ну сложения) в схеме есть. Тогда из всех элементов сложения найдется "самый верхний", т.е такой, на входы которого подаются только переменные. Причем если бы на вход этого элемента сложения подавалась одна и та же переменная, то на выходе был бы $\underbrace{=0 \text{ — и } 0 \text{ пошел бы ниже}}_{\text{т.е этот элемент можно выкинуть}}$ — т.е это была бы не мин схема.

⇒ на вход самому верхнему элементу подаются 2 разные переменные x_i и x_j.

Причем заметим, что хотя бы одна из этих переменных подаётся ещё куда-то, т.к иначе бы дальше x_i и x_j во всех выходах "ходили парой", т.е либо обе есть, либо обеих нет — но это неправда, т.к в i-й строке матрицы M_n, т.е на i-м выходе: x_j есть, а x_i — нет ⇒ против.

Итак, значит, x_i — подаётся ещё на какой-то элемент A.

Подставим $x_i = 0$.



Тогда в ф-ле (ну в матрице):

нужно убрать i-й столбец — т.к это i-й вход.

Но заметим, что можно убрать и i-ю строку —

т.к в ней теперь реализуется сумма всех.

А сумма всех нам не нужна. — т.к нам нужна сумма всех, кроме одного.

⇒ получим схему, реализующую M_{n-1}.

При этом удалится ≥ 2 элементов — самый верхний элемент и ещё B.

$$\Rightarrow \begin{cases} L_\oplus(M_n) \geq L_\oplus(M_{n-1})+2 \\ L_\oplus(M_4) = 6 = 2(4-1) \end{cases} \Rightarrow L_\oplus(M_n) \geq 2(n-1).$$

А за $2(n-1)$ — мы уже реализовали ⇒ $L_\oplus(M_n) = 2(n-1)$. Чтд.

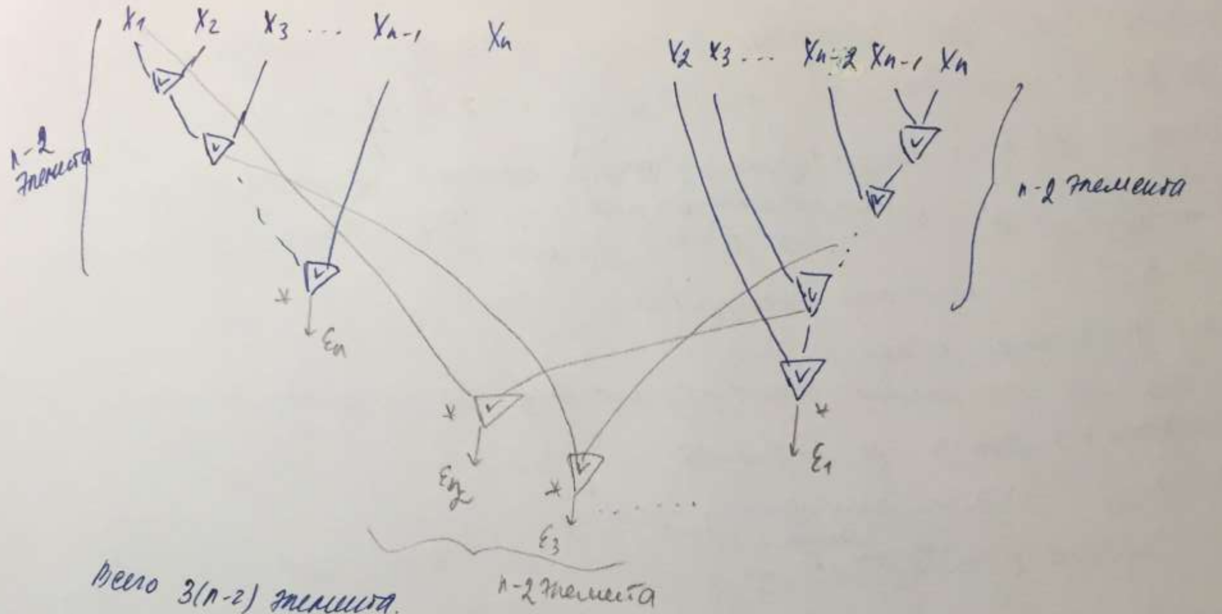
5. $L_\vee\left(\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 3(n-2)$

это $\begin{cases} x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n \\ x_1 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n \\ \vdots \\ x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} \end{cases}$

Решение: Для $n=2$: $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = 0$ — это и будет основанием индукции.

$n=3$: $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = 3$

построим схему с $3(n-2)$ элементами:



Всего $3(n-2)$ элемента.

А почему за $< 3(n-2)$ нельзя?

ну опять берём верхний элемент, там происходит $x_i \vee x_j$, причём x_i пораётся ещё куда-то. (в В) подставляем $x_i = 0$. Уберётся самый верхний элемент, элемент В и ещё убираем i-й выход. — т.к. на нём реализуется дизъюнкция всех новых перем: $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n$ — а оно не нужно.

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{\{\vee\}}(M_n) \geq L_{\{\vee\}}(M_{n-1}) + 3. \\ L_{\{\vee\}}(M_2) = 0 = 3(n-2) \end{cases} \Rightarrow L_{\{\vee\}}(M_n) \geq 3(n-2).$$

А за $3(n-2)$ — мы умеем реализовывать.

$$\Rightarrow L_{\{\vee\}}\left(M_n\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 3(n-2). \text{ чтд}$$

6. $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & \overline{H_{k-1}} \end{pmatrix}$$

$$L_{\{\oplus\}}\left(H_k\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2^k} \end{pmatrix}\right) = 3(2^n - n - 1) + 1.$$

Решение: $H_2 = \left(\begin{array}{c} 0000 \\ 0101 \\ 0011 \\ 0110 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{это} \equiv 0. \\ \leftarrow \text{это } y_1 \\ \leftarrow \text{это } y_2 \\ \leftarrow \text{это } y_1 + y_2 \end{array}$

y_1	y_2
0	0
0	1
1	0
1	1

$$H_3 = \left(\begin{array}{cc} 0000 & 0000 \\ 0101 & 0101 \\ 0011 & 0011 \\ 0110 & 0110 \\ 0000 & 1111 \\ 0101 & 1010 \\ 0011 & 1100 \\ 0110 & 1001 \end{array}\right) \begin{array}{l} \equiv 0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_2 + y_3 \\ y_1 \\ y_1 + y_3 \\ y_1 + y_2 \end{array}$$

y_1	y_2	y_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Если мы выпишем H_k – то там по строкам вектор-столбцы всех линейных ф-ций, сохраняющих ноль.

А если выписать только строки, содержащие $y_1 y_2 \dots y_k$ – то это будет универсальная матрица U_n. Её сложность $= 2(2^n-n-1)$ – см. стр. 163 в учебнике.

А остальные 2^n-n-1 строки (кроме $\equiv 0$ и переменных) – получаются ~~за~~ по одному сложению: ~~накапливая~~ $y_1 \dots y_k$ (если последовательно делать $y_1 \dots y_k \to y_i \oplus y_j \to y_{i_1} \oplus y_{i_2} \oplus y_{i_3} \to \dots \to y_1 \oplus \dots \oplus y_n$). $\Rightarrow$ ещё 2^n-n-1 элементов.

$\Rightarrow$ за $3(2^n-n-1)$ – можем реализовать.

А почему за меньше нельзя?

Ну на стр. 165 есть лемма: если в матрице $a \times b$ есть k разных столбцов, в которых ≥ 2 единицы – то $L \geq b+k-a$.

У нас $a = 2^n$; $b = 2^n - 1$ (1-й столбец убрали, он нулевой); $k = 2^n - 1$.

$\Rightarrow b+k-a = 2^n-1+2^n-1-2^n = 2^n-2$

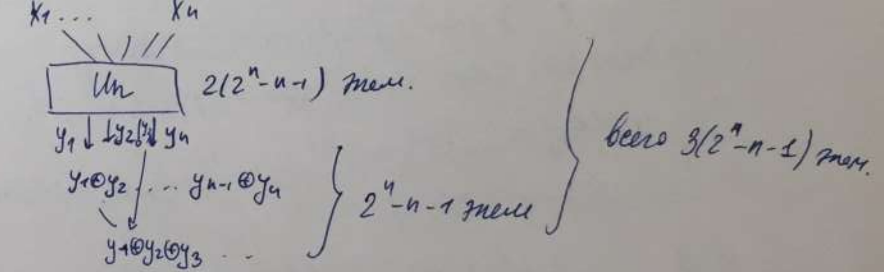
Я не знаю, почему лемма не дала $3(2^n-n-1)$

Для универсальной матрицы лемма даёт ответ:

$$L(U_n) \geq \underbrace{(2^n-1)}_{\text{столбцов}} + \underbrace{(2^n-n-1)}_{\text{столбцов с } \geq 2 \text{ единицами}} - \underbrace{n}_{\text{ур-й}} = 2(2^n-n-1).$$

Схема за $3(2^n-n-1)$ элем:

(и ещё +1 элем – на $\equiv 0$)



7. $\boxed{L_{\{\oplus\}}\left(M\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{12}\end{pmatrix}\right) = 13}$

Решение: по лемме со стр. 165:

$a = 3$; $b = 12$; $k = 4$

$\Rightarrow L \geq 12+4-3 = 13.$

$$M = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

т.е. вообще разных столбцов 5, но один – в нём только одна единица.

А за 13 – можно:

$$\begin{matrix} 0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1 \end{matrix}$$

A_1 – за 3 операции
A_2 – за 1 операцию
A_3 – за 2 операции
$A_4 = A_2 + A_3$ – за 1 операцию
} 7 операций

1-я строка $= A_1 + A_2 + x_4 \leftarrow$ 3 операции
2-я строка $= A_4 + x_6 \leftarrow$ 1 операция
3-я строка $= x_1 + A_1 + A_4 \leftarrow$ 2 операции
} 6 операций

в сумме 13 операций

$\boxed{\text{ответ: } L_{\oplus}(M) = 13}$