Введение в финансовую математику

Лекция 3: Производные цен опционов по параметрам (“греки”)

26 мая 2020

Определения

Приращение цены

Пусть $V = V(x, \tau, r, \sigma)$ – цена опциона или фьючерса, где x – цена базового актива (фьючерса или акции), τ – время до экспирации, r – безрисковая ставка, σ – волатильность.

Изменение цены за малый промежуток времени можно разложить в виде

$$V(S + \Delta S, \tau - \Delta\tau, r + \Delta r, \sigma + \Delta\sigma) - V(S, \tau, r, \sigma) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S - \frac{\partial V}{\partial \tau}\Delta\tau + \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \dots$$

Производные цены по параметрам называются греками (greeks).

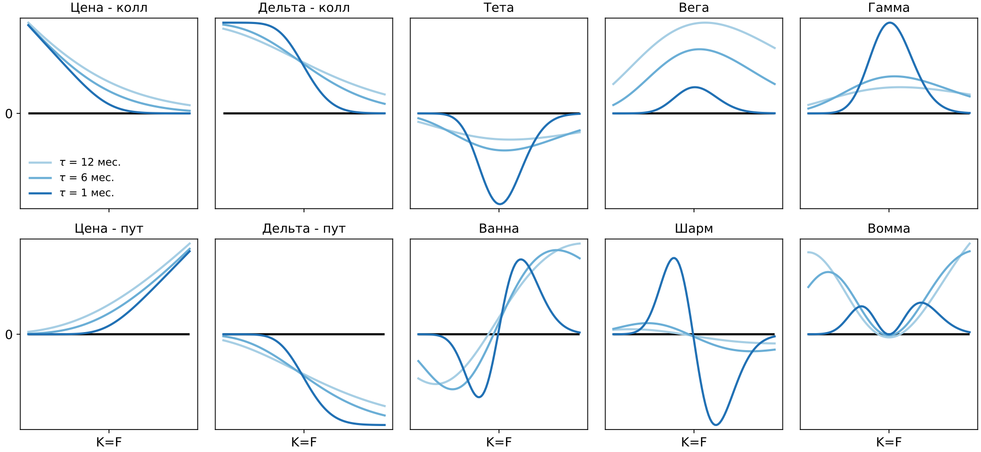
Греки позволяют вычислить изменение стоимости контракта при малом изменении параметров.

Основные греки

Первого порядка	Второго порядка
Дельта $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$	Гамма $\Gamma = \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
Тета $\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial \tau}$	Шарм $\mathrm{Charm} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial S}$
Вега $\mathcal{V} = \dfrac{\partial V}{\partial \sigma}$	Ванна $\mathrm{Vanna} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S}$
Ро $\rho = \dfrac{\partial V}{\partial r}$	Вомма (волга) $\mathrm{Vomma} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}$

- Основные, о которых дальше пойдет речь, – дельта, тета, гамма, вега.
- В модели Блэка–Шоулса греки для опционов можно вычислить явно.
- Для базового актива (акции/фьючерса) $\Delta = 1$, остальные греки равны 0.

Греки для опционов в модели Блэка–Шоулса (при $r = 0$)



Ось x – страйк опциона.

(При $r = 0$ тета, вега и греки второго порядка равны для опционов колл и пут.)

Знаки греков

	Опцион колл	Опцион пут	Базовый актив
Дельта	$+$	$-$	1
Тета	$-^{*}$	$-^{**}$	0
Вега	$+$	$+$	0
Гамма	$+$	$+$	0
Ро	$+$	$-$	0

* кроме случая $S \gg K$ и $r < 0$ ** кроме случая $S \ll K$ и $r > 0$

Знаки удобно запомнить, если интерпретировать опционы как страховку.

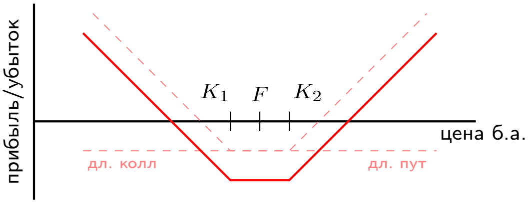
Греки и оценка риска портфеля

Свойство линейности

В силу линейности дифференцирования, греки портфеля вычисляются как сумма греков отдельных позиций.

Пример 1: стрэнгл (strangle)

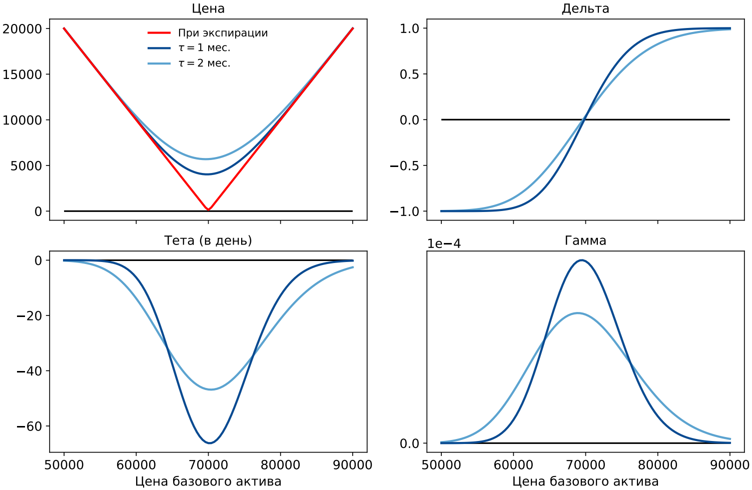
“Длинный” колл + “длинный” пут.



(“Длинная” позиция означает купленный контракт, “короткая” – проданный.)

Если $K_1 = K_2$, то называют стрэддл (straddle).

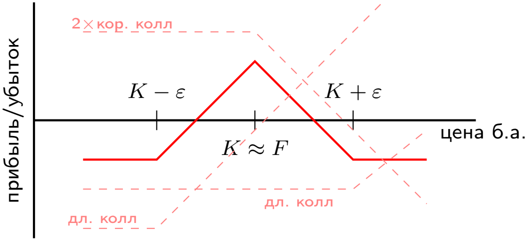
Греки для короткого стрэддла



Параметры: $F = K = 70000$.

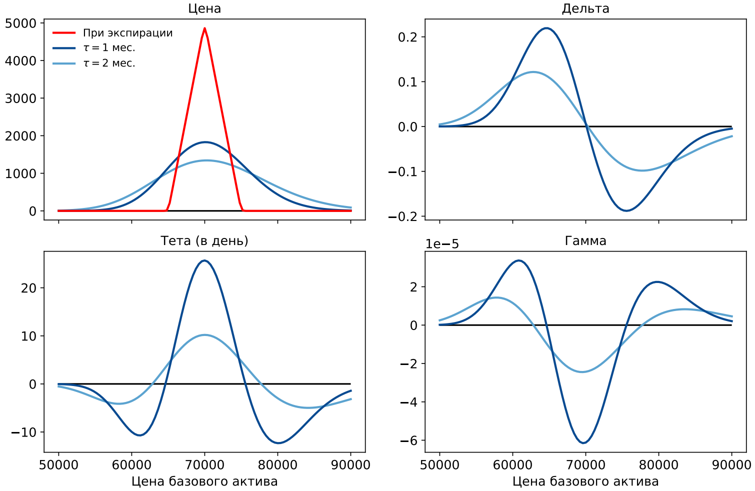
Пример 2: опционная “бабочка”

2 длинных колла + 2 коротких колла.



Упражнение: используя паритет пут–колл, докажите, что бабочку можно также получить как $\mathrm{Put}_{K-\varepsilon} - \mathrm{Put}_K - \mathrm{Call}_K + \mathrm{Call}_{K+\varepsilon} = \mathrm{Strangle}_{K\pm\varepsilon} - \mathrm{Straddle}_K$.

Греки для длинной бабочки



Параметры: $F = K = 70000$, $\varepsilon = 5000$.

Подробнее о дельте, гамме, тете, веге

Дельта и гамма

Портфель называется дельта-нейтральным, если $\Delta = 0$, и дельта-гамма-нейтральным, если $\Delta = \Gamma = 0$. Для поддержания нейтральности портфель нужно постоянно перебалансировать (продавать/покупать контракты).

- Δ-нейтральный портфель слабо подвержен изменениям в цене базового актива (но, все-таки, подвержен, если $\Gamma \neq 0$).

- В модели Блэка–Шоулса хеджирование, по сути, является операцией сведения к Δ-Γ-нейтральному портфелю (при этом важно, что σ и r постоянны).

Утверждение. В модели Блэка–Шоулса для любой самофинансируемой стратегии со стоимостью портфеля V и ценой базового актива x выполнено

$$\theta + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \Gamma = r(V - x\Delta)$$

(это сразу следует из уравнения Блэка–Шоулса).

Тета и временная стоимость опционов

Стоимость опциона можно разложить на внутреннюю и временную:

$$V = V^{\text{внутр}} + V^{\text{врем}},$$

где

- $V^{\text{внутр}} = (K - x)^+$ или $(x - K)^+$ – премия за исполнение сейчас;
- $V^{\text{врем}} = V - V^{\text{внутр}}$ – премия за риск продавцу опциона.

Таким образом, тета представляет скорость уменьшения (“распад”) временной стоимости:

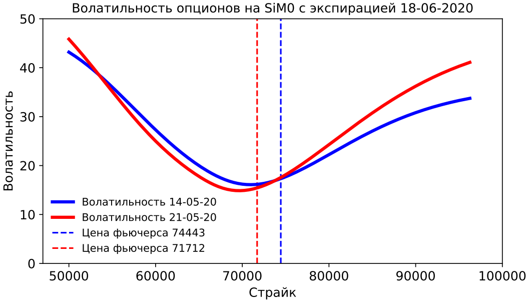
$$\theta = -\frac{\partial V^{\text{врем}}}{\partial \tau}.$$

Вега

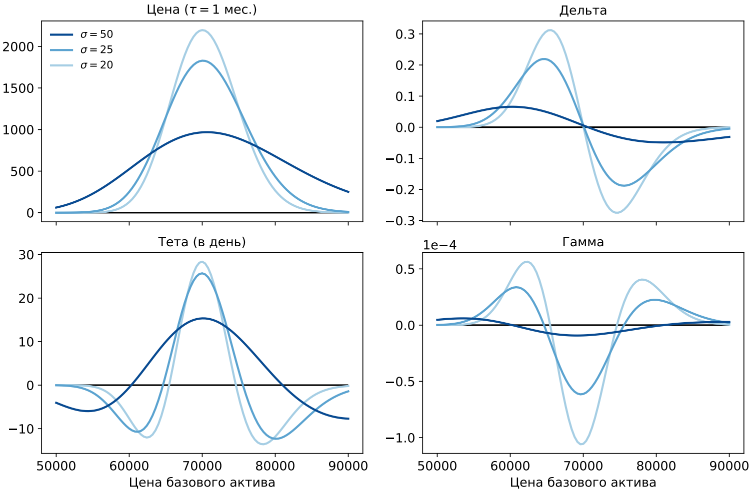
В модели Блэка–Шоулса параметр σ постоянен, но в реальности волатильность меняется, что дополнительно влияет на изменение цены опционов.

Поправку на изменение волатильности можно задавать вегой $\mathcal{V} = \dfrac{\partial V}{\partial \sigma}$.

Пример изменения волатильности за неделю:



Пример: изменения греков опционной бабочки при изменении волатильности



Покупка и продажа волатильности

Δ-Γ-нейтральная стратегия позволяет "торговать" волатильностью:

- $\mathcal{V} > 0$ – ставка на рост волатильности,
- $\mathcal{V} < 0$ – ставка на падение волатильности.

В модели Блэка–Шоулса трудность в том, что волатильность на разных страйках и разных датах экспирации меняется не на одинаковую величину $\Longrightarrow$ нельзя просто сложить веги опционов, входящих в портфель.