Задачи на ряды

18 мая 2022 г.

Признаки сходимости

Признаки сходимости для рядов с положительными членами.

Интегральный признак Коши: Пусть функция $f(x)$ – монотонно невозрастающая на $[1, +\infty]$. Тогда:

1. Если $0 \leq p_n \leq f(n), \forall n$, и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ также сходится;

2. Если $p_n \geq f(n) \geq 0, \forall n$, и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ расходится.

Признак Даламбера: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D,$$

то:

1. При $D < 1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$.
2. При $D > 1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.
3. При $D = 1$ признак ответа не дает.

Признак Коши: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D,$$

то:

1. При $D < 1$ ряд сходится.
2. При $D > 1$ ряд расходится.
3. При $D = 1$ признак ответа не дает.

Признак сравнения: Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Если $a_n \sim b_n,\ n \to \infty$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся или расходятся одновременно (легко получить из критерия Коши).

Общие признаки сходимости рядов.

По идее, все признаки ниже можно использовать, добавляя к условиям мантру 'начиная с некоторого номера n_0'.
Признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(-1)^{n-1},$$

где $b_n \geq 0$, сходится, если

1. $b_n \geq b_{n+1}$,
2. $b_n \to 0, \ \ n \to \infty$.

Признак Абеля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

сходится, если

1. $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ сходится,
2. b_n образует монотонную и ограниченную последовательность.

Признак Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

сходится, если

1. суммы $A_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$ ограничены в совокупности,
2. b_n монотонно стремится к нулю.

SER-1

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1).$$

Решение. Покажем, что общий член ряда не стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\ln 2 + o(1)) = \ln 2 \neq 0.$$

Ответ: ряд расходится.

SER-2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

Решение.

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)-1}{n}} \to_{n\to\infty} 1.$$

Ответ: ряд расходится.

SER-3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$$

Решение. Рассмотрим член ряда и вспомним второй замечательный предел:

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \left(1-\frac{2}{2n^2+3}\right)^{n^2} \sim \left(\left(1-\frac{2}{2n^2+3}\right)^{2n^2+3}\right)^{\frac{1}{2}} \to (e^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}$$

Член ряда не стремится к нулю.
Ответ: ряд расходится.

SER-4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$$

Решение. Рассмотрим член ряда и вспомним второй замечательный предел:

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}.$$

Рассмотрим степень (т.е. $\ln a_n$):

$$\ln a_n = n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n = n\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right) =$$
$$n\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = -\frac{1}{2}+o(1).$$

Поэтому

$$a_n \to e^{-\frac{1}{2}},\ n\to\infty.$$

Необходимый признак сходимости ряда нарушен.
Ответ: ряд расходится.

SER-5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$$

Решение:

$$a_n = \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!} = (2n+1)\cdot\frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (2n)}{(2n+1)\cdot \cdots \cdot (3n)} \le \frac{2n+1}{1.5^{2n}}$$

Мажорирующий ряд сходится (например, по признаку Даламбера).

Ответ: сходится.

SER-6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}.$$

Решение. Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot 3^n}{(n+1)! \cdot 3^{n+1} \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n 3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} < 1.$$

По признаку Д'Аламбера ряд сходится.
Ответ: ряд сходится.

SER-7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2 4^n}$$

Решение. Заметим, что n-тый член ряда положителен для любого $n \geq 1$. Рассмотрим подряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-(-1)^{2k-1})^{2k-1}}{(2k-1)^2 4^{2k-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{2k-1}}{(2k-1)^2 4^{2k-1}}.$$

Исследуем его на сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{6^{2k+1}}{(2k+1)^2 4^{2k+1}} \cdot \frac{(2k-1)^2 4^{2k-1}}{6^{2k-1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{36}{16} \cdot \frac{(2k-1)^2}{(2k+1)^2} = \frac{36}{16} > 1.$$

Таким образом, ряд $\{b_k\}|_1^{\infty}$ расходится, а следовательно, и исходный ряд расходится.
Ответ: ряд расходится.

SER-8

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Решение.

$$3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 3^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^2} \sim 3^n e^{-\frac{n^2}{n+1}} \geq \left(\frac{3}{e}\right)^n.$$

При этом, $\frac{3}{e} > 1$.
Ответ: ряд расходится.

SER-9

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Решение.

Покажем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\leqslant\frac{e}{n}$ для любого натурального n. Это будет означать, что исходный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$, а значит, сходится.

Итак,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\leqslant\frac{e}{n}\iff\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\leqslant e\left(1+\frac{1}{n}\right)\iff\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leqslant e.$$

Известно, что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. Таким образом остается показать, что последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ монотонно возрастает. Покажем же.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\geqslant^{1}$$

$$\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}\geqslant 1.$$

P.S. Можно было вместо этого посчитать производную или, наверное, вообще сказать, что это «хорошо известный факт»

Ответ: ряд сходится.

SER-10

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$$

Решение.

Докажем, что ряд, начиная с $n=3$, расходится. Из этого будет следовать, что и исходный ряд тоже расходится.

[1]По неравенству Бернулли

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{(\ln x)^{\ln\ln x}}$. Заметим, что если $x_1>x_2>e$, то

$$(\ln\ln x_1)^2 > (\ln\ln x_2)^2$$

$$(\ln x_1)^{\ln\ln x_1} > (\ln x_2)^{\ln\ln x_2}$$

$$\frac{1}{(\ln x_1)^{\ln\ln x_1}} < \frac{1}{(\ln x_2)^{\ln\ln x_2}}.$$

Следовательно, $f(x)$ монотонно убывает на $[3, \infty]$. Кроме того,

$$p_n := \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = f(n) \geq 0, \forall n \geq 3.$$

Далее,

$$\int\limits_3^{\infty} f(x)dx = \int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln\ln x}} = \int\limits_3^{\infty} \frac{xd(\ln x)}{(\ln x)^{\ln\ln x}} = \int\limits_{\ln 3}^{\infty} \frac{e^u du}{u^{\ln u}} = \int\limits_{\ln 3}^{\infty} \frac{e^u du}{e^{\ln^2 u}} =$$

$$= \int\limits_{\ln 3}^{\infty} e^{(u-\ln^2 u)} du > [u - \ln^2 u > \frac{u}{2} \quad \forall u > \alpha] > \int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{\frac{u}{2}} du =$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{u}{2}} du = \lim_{\beta\to\infty} 2e^{\frac{u}{2}}\Big|_{\alpha}^{\beta} = \infty,$$

то есть интеграл расходится. Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=3}^{+\infty} p_n$ расходится.
Ответ: ряд расходится.

Решение покороче: Покажем, что $\frac{1}{\ln^{\ln\ln n}} > \frac{1}{n}$, тогда ряд будет расходиться.

$$\frac{1}{\ln^{\ln\ln n}} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \ln^{\ln\ln n}$$

$$\ln n > (\ln\ln n)^2$$

$$\sqrt{\ln n} > \ln(\ln n)$$

$$\sqrt{x} > \ln x, \text{ что верно при } \ x \to \infty$$

Ответ: расходится.

SER-11

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^{\ln x}}$. Заметим, что если $x_1 > x_2 > 1$, то

$$\ln x_1 \ln\ln x_1 > \ln x_2 \ln\ln x_2$$

$$(\ln x_1)^{\ln x_1} > (\ln x_2)^{\ln x_2}$$

$$\frac{1}{(\ln x_1)^{\ln x_1}} < \frac{1}{(\ln x_2)^{\ln x_2}}.$$

Следовательно, $f(x)$ монотонно убывает на $[2, \infty]$. Кроме того,

$$p_n := \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = f(n) \geq 0, \forall n \geq 2.$$

Далее,

$$\int\limits_2^{\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}} = [u = \ln x] = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^u d(u)}{u^u} =$$

$$= \int\limits_{\ln 2}^{e^2} \frac{e^u d(u)}{u^u} + \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{e^u d(u)}{u^u} < const + \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{e^u d(u)}{e^{2u}},$$

поскольку при $u > e^2$ имеем:

$$u > e^2$$

$$u \ln u > 2u$$

$$u^u > e^{2u}.$$

Тогда

$$\int\limits_2^{\infty} f(x)dx < const + \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{d(u)}{e^u} = const \ -\frac{1}{e^u}\Bigg|_{e^2}^{\infty} = const,$$

т.е. интеграл сходится. Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} p_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

сходится.
Ответ: ряд сходится.

Решение покороче: Покажем, что $\frac{1}{\ln n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$, тогда ряд будет сходиться.

$$\frac{1}{\ln n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 < \ln^{\ln n}$$

$$2 \ln n < (\ln n)^2, \ \text{ успех}$$

Ответ: сходится.

SER-12

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Она, очевидно, монотонно убывает на $[2, \infty]$. Кроме того, $p_n := \frac{1}{n \ln^2 n} = f(n) \geq 0$, $\forall n \geq 2$. Далее,

$$\int\limits_2^{\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\bigg|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

т.е. интеграл сходится.

Следовательно, по интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится.

Ответ: ряд сходится.

SER-13

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Лейбница. Для этого нам надо понять, что (с какого-то момента) последовательность $\frac{\ln^{2020} n}{n}$ монотонно убывают к нулю. То, что убывает к нулю – это ясно, а посчитав производную функции $y = \frac{\ln^{2020} x}{x}$,

$$y' = \frac{2020 \ln^{2019} x - \ln^{2020} x}{x^2},$$

мы находим, что последовательность будет убывать при $n > e^{2020}$.

Ответ: сходится.

SER-14

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n}.$$

Решение.

Заметим, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{i=0}^{n} \cos 2n$ ограничена. Для этого выведем более общую формулу для $\sum_{i=0}^{n} \cos k\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \alpha \neq 2\pi m$. Воспользуемся тождеством

$$\sum_{n=0}^{N} e^{in\alpha} = \frac{1-e^{i(N+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\frac{(N+1)\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(N+1)\alpha}{2}} - e^{i\frac{(N+1)\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} =$$
$$e^{i\frac{N\alpha}{2}} \frac{\sin\frac{(N+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \left(\cos\frac{N\alpha}{2} + i\sin\frac{N\alpha}{2}\right) \frac{\sin\frac{(N+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Осталось взять вещественную часть.

$$\sum_{n=0}^{N} \cos n\alpha = \cos\frac{N\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{(N+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

что показывает, что суммы S_n ограничены.

В то же время, $a_n = \frac{1}{\ln\ln n}$ монотонно сходится к нулю, поэтому можно применить признак Дирихле.
Ответ: сходится.

SER-15

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Лейбница. Для этого исследуем функцию

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}, \ \ x > 0.$$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \ln x - e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{\ln^2 x} \left(\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} \ln x - \frac{1}{x}\right) =$$
$$\underbrace{\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x\ln^2 x}}_{>0} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} - 1\right).$$

Т.к. $\ln^\alpha x = o(x), \ \ x \to +\infty$ для $\forall \alpha > 0$, то для какого-то x_0:

$$f'(x) < 0, \ \ \forall x \geq x_0.$$

Следовательно, для $n > [x_0] + 1$ верны условия признака Лейбница.
Ответ: сходится.

SER-16

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Решение.

Напишем разложение Тейлора для общего члена ряда:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + r_n,$$

где $r_n = o(n^{\frac{3}{2}})$ при $n \to \infty$.

Ряды $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}$ сходятся по признаку Лейбница. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} r_n$ сходится, поскольку $r_n = o(n^{\frac{3}{2}})$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\frac{3}{2}}$ сходится. А вот ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{2n}\right)$ расходится. Таким образом, исходный ряд, будучи суммой сходящегося и расходящегося рядов, расходится.

Ответ: ряд расходится.

SER-17

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

Решение.

Воспользуемся критерием Коши и рассмотрим отрезок ряда.

$$\left|\sum_{k=2n}^{4n+1}(-1)^k\frac{2+(-1)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{3}{2k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k+1}\right| =$$
$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k+1}\right| = \left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}+\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k(2k+1)}\right| \geq \tag{1}$$
$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right| - \left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k(2k+1)}\right| \geq \frac{1}{2} - \left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k(2k+1)}\right|.$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} < \infty,$$

значит, по критерию Коши, можно подобрать N: $\forall n \geq N$:

$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k(2k+1)}\right| < \varepsilon.$$

Для таких n получаем в (1)

$$\left|\sum_{k=2n}^{4n+1}(-1)^k\frac{2+(-1)^k}{k}\right| \geq \frac{1}{2}-\varepsilon.$$

Критерий Коши не выполняется.
P.S. Можно просто написать равенство

$$\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k\frac{2+(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k+1)}.$$

Отсюда сразу видно, что ряд расходится, как 'сумма' расходящегося и сходящегося ряда.
Ответ: ряд расходится.

SER-18

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Решение. Рассмотрим члены ряда a_n с номерами $n_k = 2k,\ \ k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n_k\to\infty}a_{n_k} = \lim_{n_k\to\infty}\frac{2^{n_k^2}}{n_k!} = \lim_{n_k\to\infty}\frac{(2^{n_k})^{n_k}}{n_k!} = \lim_{n_k\to\infty}\frac{2^{n_k}\cdot 2^{n_k}\cdot\cdot\cdot 2^{n_k}}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot n_k} = \infty.$$

Поэтому необходимый признак сходимости уже точно не выполняется.
Ответ: ряд расходится.

SER-19

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}.$$

Решение. Пусть

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n},\ b_n = \cos \frac{\pi}{n}.$$

Тогда ряд $\sum_{i=1}^{n} a_n$ сходится (по признаку Дирихле, например, или если вы помните разложение логарифма), а b_n монотонно растет и ограничена.

Осталось применить признак Абеля.

Ответ: ряд сходится.

SER-20

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{1 - \cos \frac{1}{n}}$$

Решение. Функция косинуса монотонна на интервале $(0, 1)$ и $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$, поэтому последовательность $\sqrt{1-\cos \frac{1}{n}}$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. Т.к. ряд является знакочередующимся, то получаем, что он сходится по признаку Лейбница.

Покажем, что ряд абсолютно расходится. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\cos \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 - 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Таким образом, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos \frac{1}{n}}$ равносильна сходимости гармонического ряда, но тот расходится.

Ответ: ряд сходится условно.