

Домашнее задание 1

5.11.2022

Задача 1

Найдите вероятность того, что в группе из n человек хотя бы у двух совпадают дни рождения (год может быть разным).

Задача 2

Секретарю нужно было разложить n писем по n конвертам, на которых уже были написаны адреса (все адреса различны). Он все перепутал и разложил письма в случайном порядке. Какова вероятность, что хотя бы кто-то из адресатов получит свое письмо? Найдите эту вероятность для произвольного n и предел при $n \rightarrow \infty$.

Задача 3

Имеется тест из 10 вопросов, где в каждом вопросе пять вариантов ответа и ровно один правильный. Пусть X обозначает число правильных ответов, если пытаться случайным образом угадать ответы на все вопросы.

- Найдите распределение X .
- Найдите $E(X)$.
- Пусть за каждый правильный ответ дается 1 балл, а неправильный вычитается 0.25 балла. Найдите математическое ожидание суммы баллов при угадывании ответов.

Задача 4

Бросают два кубика. Пусть X, Y обозначают количество очков на них, $Z = \max(X, Y)$. Найдите распределение и математическое ожидание Z .

Задача 5

Докажите, что сумма двух независимых случайных величин, имеющих биномиальные распределения с параметрами (n, p) и (m, p) имеет биномиальное распределение с параметрами $(n + m, p)$.

Задача 6

Пусть в коробке лежат N шаров: K белых и $N - K$ черных. Из нее случайным образом достают n шаров. Пусть X обозначает число белых среди них.

- Найдите $P(X = k)$.
- Найдите EX .

Для случайной величины X определим *дисперсию* $DX = E((X - EX)^2)$. Для двух случайных величин X, Y определим *ковариацию* $\text{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$.

Задача 7

Пусть случайные величины X, Y заданы на вероятностном пространстве с конечным множеством исходов.

- Докажите, что $D(X + Y) = DX + 2\text{cov}(X, Y) + DY$.
- Докажите, что $\text{cov}(X, Y) = 0$, если случайные величины X, Y независимы.

Задача 8

Пусть сначала бросается кубик, а затем бросается столько монет, сколько очков выпало на кубике. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа орлов.

Задача 9

В задаче 2 найдите математическое ожидание и дисперсию числа адресатов, получивших свои письма.

Задача 10

Пусть 60% населения поддерживают партию А, а 40% населения поддерживают партию Б. Если случайным образом выбрать 500 человек, то какова будет вероятность, что

- а) среди них как минимум 310 человек поддерживают партию А?
- б) число поддерживающих партию А больше числа поддерживающих партию Б?

В решении воспользуйтесь центральной предельной теоремой.