24.11.20. Спецкурс. д/з от лекции 10.

① $X \sim R[0,2b]$; $\bar F_X(t)=\left(1-\frac{t}{2b}\right)\cdot I[0;2b]$

$Y \sim Exp\left(\frac{1}{b}\right)$; $\bar F_Y(t)=e^{-\frac{t}{b}}\cdot I[0;+\infty]$

$Z \sim Par(b;0)$; $\bar F_Z(t)=\frac{b^2}{(b+t)^2}\cdot I[0;+\infty)$

Найти Π_ρ для X, Y, Z при $\rho = 1.2$, 1.5, 1.8.

Решение: $\Pi_\rho(X)=\int_0^{+\infty}(\bar F_X(t))^{1/\rho}dt$; $\rho\geq 1$ – см. лекцию 10.

1) Для $X\sim R[0,2b]$:

$$\Pi_\rho(X)=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{2b}\right)^{1/\rho}dt=-2b\cdot\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{2b}\right)^{1/\rho}d\left(1-\frac{t}{2b}\right)=-2b\cdot\frac{\left(1-\frac{t}{2b}\right)^{\frac{1}{\rho}+1}}{\frac{1}{\rho}+1}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{-2b\rho}{\rho+1}(0-1)=\frac{2\rho}{\rho+1}\cdot b$$

2) Для $Y\sim Exp\left(\frac{1}{b}\right)$:

$$\Pi_\rho(Y)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{t}{b}}\right)^{1/\rho}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{\rho b}}dt=-\rho b\cdot e^{-\frac{t}{\rho b}}\Big|_0^{+\infty}=\rho b$$

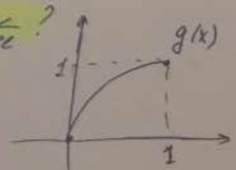
3) Для $Z\sim Par$:

$$\Pi_\rho(Z)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{b^2}{(b+t)^2}\right)^{1/\rho}dt=b^{\frac{2}{\rho}}\cdot\int_0^{+\infty}(b+t)^{-\frac{2}{\rho}}d(b+t)=b^{\frac{2}{\rho}}\cdot\frac{(b+t)^{-\frac{2}{\rho}+1}}{-\frac{2}{\rho}+1}\Bigg|_0^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } \rho\geq 2\\ \frac{b\rho}{2-\rho}, & \text{если } \rho<2.\end{cases}$$

=>

ρ	X	Y	Z
1.2	≈1,09b	1.2b	1.5b
1.5	1.2b	1.5b	3b
1.8	≈1,2857b	1.8b	9b

② Сохраняет ли принцип $H(X)=\int_0^{+\infty}g(\bar F_X(t))dt$ порядки $\leq_{st}$ и $\leq_{sl}$?



Ответ: да, сохраняет.

Решение: 1) $X\leq_{st}Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \bar F_X(t)\leq \bar F_Y(t)$, $\forall t$.

Считаем, что g – возрастающая вогнутая, $g(0)=0$; $g(1)=1$.

$\Rightarrow g(\bar F_X(t))\leq g(\bar F_Y(t))$

$\Rightarrow H(X)=\int_0^{+\infty}g(\bar F_X(t))dt\leq\int_0^{+\infty}g(\bar F_Y(t))dt=H(Y)$

2) $X\leq_{sl}Y \overset{def}{\Leftrightarrow} E(X-d)^+\leq E(Y-d)^+$, $\forall d$

$\Pi_X(x)=E[(X-x)_+]=\int_x^{+\infty}\bar F_X(t)dt$

т.е. $X\leq_{sl}Y \Leftrightarrow \Pi_X(x)\leq\Pi_Y(x)$, $\forall x$

Введем понятие "crossover point", или CP

$\{\varepsilon; u\} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ является CP для $\{F_1(x); F_2(x)\}$,

если для $i \neq j \in \{1;2\}$: $\begin{cases} F_i(\varepsilon^-) \le F_j(\varepsilon^-) \le F_j(\varepsilon) \le F_i(\varepsilon) \\ u = F_j(\varepsilon) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_i^{-1}(u) \le F_j^{-1}(u) \le F_j^{-1}(u^+) \le F_i^{-1}(u^+) \\ \varepsilon = F_j^{-1}(u) \end{cases}$$

Как связана CP и точки пересечения F_1 и F_2?

Ещё есть 2 CP в концах носителей $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (где никакой смены знака между F_1 и F_2 на самом деле не происходит)

Пусть $(a_i; b_i)$; $-\infty \le a_i < b_i \le \infty$ – открытый носитель F_i

$\underline{a} = \min\{a_1; a_2\}$

$\overline{b} = \max\{b_1; b_2\}$

$\Rightarrow (\underline{a}; \overline{b})$ – открытый носитель пары $\{F_1(x); F_2(x)\}$

$\{\underline{a}; 0\}$ и $\{\overline{b}; 1\}$ – остаточные CP.

Ещё нам понадобятся обобщенная теорема Карлина-Новикова и лемма.

<u>Теорема</u> (обобщ. т. Карлина-Новикова о пересечении)

X, Y – случ. величины с μ_X, μ_Y, $F_X(x)$; $F_Y(x)$; $\pi_X(x)$; $\pi_Y(x)$.

Пусть распределения пересекаются $n \ge 1$ раз в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Тогда $X \le_{SL} Y \Leftrightarrow$ [либо первая перемена знака $\underline{\text{у } F_Y(x) - F_X(x)}$ с – на +, $n = 2m$ и $\pi_X(t_{2j-1}) \le \pi_Y(t_{2j-1})$; $j = 1 \ldots m$

либо первая перемена знака у $F_Y(x) - F_X(x)$ происходит с + на –, $n = 2m+1$, $\mu_X \le \mu_Y$ и $\pi_X(t_{2j}) \le \pi_Y(t_{2j})$; $j = 1 \ldots m$.

<u>Лемма 1</u> $X_1 \le_{SL} X_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall$ CP-пар $\{\varepsilon, u\}$ для $\{F_1(x); F_2(x)\}$

выполнено: $\pi_1(\varepsilon) \le \pi_2(\varepsilon)$

<u>Док-во</u>: • $\pi_1(\overline{b}) \le \pi_2(\overline{b}) \Leftrightarrow b_1 \le b_2$ – т.к. $\pi_i(x) = \int_x^{+\infty} \overline{F}_i(t)dt$

где $\overline{b} = \max\{b_1; b_2\}$

• $\pi_1(\underline{a}) \le \pi_2(\underline{a}) \Leftrightarrow \mu_1 \le \mu_2$ – т.к. если $\underline{a} > -\infty$, то всё следует из того, что $\pi_i(\underline{a}) = \mu_i - \underline{a}$

где $\underline{a} = \min\{a_1; a_2\}$ — если $\underline{a} = -\infty$, то:

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} \overline{F}_1(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_1(x) \le \int_0^{+\infty} \overline{F}_2(x) - \int_{-\infty}^0 F_2(x)dx = \mu_2$$

$$\Updownarrow \quad \pi_1(\underline{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}_1(x)dx \le \pi_2(\underline{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}_2(x)dx$$

~~Но~~ $\begin{cases} \text{мн-во CP-пар есть } \{c_1 \ldots c_n\} \cup \{\underline{a}; 0\} \cup \{\overline{b}; 1\} \\ \pi_1(\varepsilon) \le \pi_2(\varepsilon) \ \forall \{\varepsilon, u\} \in \text{CP-пары} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ вып. усл. $\underset{\text{обобщ}}{\underline{\text{теоремы}}}$ Карлина-Новикова $\Leftrightarrow X_1 \le_{SL} X_2$. Чтд.

Теперь введем преобразование Харди-Литтлвуда X^H:

$$(F_X^H)^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{1-u}\int_u^1 F_X^{-1}(v)\,dv, & u<1 \\ F_X^{-1}(1), & u=1 \end{cases}$$

Лемма 3 $\boxed{X_1 \le_{sl} X_2 \iff X_1^H \le_{st} X_2^H}$ — т.е. свели стоп-лосс порядок к стохастическому

Док-во: (Kertz and Rösler (1992), Lemma 1.8)

$\forall$ СР-пары, выражение $\int_\varepsilon^{+\infty}\{F_1(t)-F_2(t)\}dt = \int_u^1\{F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v)\}dv$

выражает тот факт, что площадь между F_1 и F_2 правее ε равна площади между F_1^{-1} и F_2^{-1} правее u.

Из этого и леммы 1 получаем:

$X_1 \le_{sl} X_2$

$\iff \pi_1(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty}\bar F_1(t)dt \le \int_\varepsilon^{+\infty}\bar F_2(t)dt = \pi_2(\varepsilon)$ $\forall$ СР-пара $\{\varepsilon; u\}$

$\iff \int_\varepsilon^{+\infty}\{F_1(t)-F_2(t)\}dt \ge 0$ $\forall$ СР-пары $\{\varepsilon; u\}$

$\iff \int_u^1\{F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v)\}dv \ge 0$ $\forall$ СР-пары $\{\varepsilon, u\}$

$\iff (F_1^H)^{-1}(u) \le (F_2^H)^{-1}(u)$ $\forall u\in[0,1]$

$\iff X_1^H \le_{st} X_2^H$. чтд

~~Теперь докажем, что Hg сохраняет~~ $\cancel{\le_{sl}}$

~~Док-во: Для X≥0 определим~~ $\cancel{X^g}$ ~~с ф.р.~~ $\cancel{F_X^g(x) = g(F_X(x))}$

Лемма 2 $X \le_{sl} Y \Rightarrow \exists$ посл-ть сл.вел $Z_1, Z_2 \dots Z_n$: $\begin{cases} X = Z_1 \\ Y = Z_n \\ Z_i \le_D Z_{i+1};\ i=1\dots n-1 \end{cases}$ — см. Kaas &all (1994)

где $X \le_D Y \overset{def}{\iff} \begin{cases} F_X(x) \le F_Y(x), & \forall x<c \\ F_X(x) \ge F_Y(x), & \forall x \ge c \\ \mu_X \le \mu_Y \end{cases}$ — такое почти было, см. теорема 12 на стр. 46 в книге Е.В. Булинской.

Теперь докажем, что Hg — сохраняет $\le_{sl}$.

Док-во: Для сл.вел $X \ge 0$ определим X^g (сл.вел) с доп. ф.р. $\bar F_X^g(x) := g(\bar F_X(x))$.

По лемме 2 дост. док-ть, что $X \le_D Y$ влечет $X^g \le_{sl} Y^g$

Тогда мы получим, что $Hg(X) = EX^g \le EY^g = Hg(Y)$

Итак, хотим док-ть, что $X \le_D Y$ влечет $X^g \le_{sl} Y^g$.

по лемме 3 дост. док-ть, что $X \leq_D Y$ влечет $(X^g)^H \leq_{st} (Y^g)^H$

Ну пусть $\begin{cases} X \leq_D Y \\ EX \leq EY \\ \forall q \in (0,1): \begin{cases} F_X^{-1}(u) \geq F_Y^{-1}(u), & 0 \leq u < q \\ F_X^{-1}(u) \leq F_Y^{-1}(u); & q \leq u \leq 1. \end{cases} \end{cases}$

$(F_X^g)^{-1} = (\gamma \circ F_X)^{-1}$

но $(F_X^H)^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{1-u} \int_u^1 F_X^{-1}(v)dv; & u < 1 \\ F_X^{-1}(1); & u = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow (F_X^{g,H})^{-1}(u) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 (\gamma \circ F_X)^{-1}(v)dv = \frac{1}{1-u} \int_{\gamma^{-1}(u)}^1 F_X^{-1}(v)d\gamma(v); \ 0 \leq u < 1.$

Аналогично для Y.

Хотим: $(F_X^{g,H})^{-1}(u) \leq (F_Y^{g,H})^{-1}(u) \ \forall u \in [0,1]$,

т.е $\int_w^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\} d\gamma(v) \geq 0 \ \forall w \in [0,1]$.

Если $w \geq q$ – то всё очев, т.к $F_X^{-1}(u) \leq F_Y^{-1}(u)$; $q \leq u \leq 1$

Если $0 \leq w \leq q < 1$: $\gamma(x)$ – выпуклая $\Rightarrow \gamma'(x)$ – возрастает

$\Rightarrow \gamma'(w) \leq \gamma'(q) \leq \gamma'(1)$

$\Rightarrow \int_w^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\} d\gamma(v) = -\int_w^q \{F_X^{-1}(v) - F_Y^{-1}(v)\}\gamma'(v)dv \geq$

$\geq \gamma'(q) \int_w^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\}dv \geq \gamma'(q) \cdot \int_0^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\}dv = \gamma'(q) \cdot \{EY - EX\} \geq 0.$ чтд.

(3) Док-ть, что $H(X+Y) \leq H(X) + H(Y)$

Док-во: Дост. док-ть это для произв. Y и дискретного X со знач. $1, \dots n$.

Действительно, $H(aX+b) = aH(X) + b \Rightarrow$ утв. верно для $Y \in \{k, \dots n+k\}$

и $X \in \{kh \dots (n+k)h\}$; $k \in \mathbb{N}_+$, $h > 0$.

А поскольку любую сл. вел можно сколь угодно хорошо приблизить дискретной сл. вел с дост. малым h, то утв. будет верно для любой X.

Докажем по индукции.

База: $n = 0$ – всё очев.

Шаг: $n \rightsquigarrow n+1$

$X \in \{0 \dots n+1\}$

пусть $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ распределены как $(X, Y \mid X > 0)$.

поскольку $\tilde{X} \in \{1 \dots n\}$ – то по предп. инд: $H(\tilde{X} + \tilde{Y}) \leq H(\tilde{X}) + H(\tilde{Y})$.

Обозн. $\varepsilon = P(X=0)$

$\bar{F}_{Y|0}(x) = P(Y > x \mid X = 0)$

Имеем $\forall x > 0$:

$\bar F_X(x) = (1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X}(x)$

$\bar F_Y(x) = \varepsilon \bar F_{Y|0}(x) + (1-\varepsilon)\bar F_{\tilde Y}(x)$

$\bar F_{X+Y}(x) = \varepsilon \bar F_{Y|0}(x) + (1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X+\tilde Y}(x)$

Используем лемму: $g(x)$ - вогнутая для $x \geq 0$.

$\Rightarrow \forall x \geq 0: \ g(x+b) - g(x+a) \leq g(b) - g(a)$

(ну $g(x)$ - вогнутая $\Leftrightarrow \dfrac{g(y)-g(x)}{y-x} \geq \dfrac{g(z)-g(y)}{z-y} \quad \forall\, 0 \leq x < y \leq z.$

и просто последовательно применим эту ф-ку для

$a < b \leq x+a < x+b$

и $a < x+a < b < x+b$)

$\Rightarrow$ по лемме:

$$g(\bar F_{X+Y}(x)) - g(\bar F_X(x))\, g(\bar F_Y(x)) \leq g((1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X+\tilde Y}(x)) - g((1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X}(x)) - g((1-\varepsilon)\bar F_{\tilde Y}(x)).$$

Теперь заметим, что $k(x) := \dfrac{g((1-\varepsilon)x)}{g(1-\varepsilon)}$ - возрастающая вогнутая ф-ция на $[0,1]$

$k(0) = 0$

$k(1) = 1.$

Интегрируем с обеих сторон, используем предп. индукции для $k(x)$:

$$\Rightarrow H(X+Y) - H(X) - H(Y) \leq g(1-\varepsilon)\left\{ \int_0^{+\infty} k(\bar F_{\tilde X+\tilde Y}(x))\,dx - \int_0^{+\infty} k(\bar F_{\tilde X}(x))\,dx - \int_0^{+\infty} k(\bar F_{\tilde Y}(x))\,dx \right\} \leq 0.$$ ч.т.д.