

11.01.2022. Доклад Токаева Александра

по статье Peter Bank, Antje Fruth "Optimal Order Scheduling for Deterministic Liquidity Patterns"

1) постановка задачи

- 1) мы хотим купить x акций, где x - достаточно большое, то есть агент влияет на цену. Важно, что мы допускаем только монотонные стратегии (в отличие от доклада Сами)
- 2) мы хотим купить эти же акции монотонно, причем так, чтобы минимизировать издержки (формула будет дана позже) от своего импакта из-за покупки этих акций. Импакт от трейда состоит из временной и постоянной: временной заключается в том, что на момент трейда откупим кусок order-book, \overline{bid} \overline{ask} и этим подвинем цену, а постоянной - в том, что этот наш текущий трейд будет в будущем тоже влиять на цену (например, трейдера увидели нашу заявку и тоже стали покупать, тем самым повышая цену)
- 3) То, как сильно наш трейд влияет на цену - определяется параметрами ликвидности рынка: глубиной b_t и упругостью η_t . От них и будет зависеть наша стратегия. На самом деле, с глубиной рынка мы уже встречались в моделях Амбриена-Криса, и там было два параметра: δ и λ . Так вот, $\frac{1}{b_t}$ - это глубина рынка, а при $\lambda=0$: упругость $b_t = \infty$ (т.е. i -й трейд влияет только на i -ю цену):

$$\begin{cases} S_0 = S_0^0 + \frac{\eta+x}{2} S_0^0 \\ S_1 = S_1^0 + \eta S_0^0 + \frac{\eta+x}{2} S_1^0 \\ S_k = S_k^0 + \eta S_0^0 + \dots + \eta S_{k-1}^0 + \frac{\eta+x}{2} S_k^0 \end{cases}$$
- 4) В Обиташева-Ванг b_t и η_t рассматривались постоянными, а у нас они будут зависеть от времени (но детерминированными). Если взять b_t и η_t постоянными и применить полученную в нашей статье формулу для оптим. стратегии - то получится как раз формула из Обиташева-Ванга.
- 5) Еще раз подчеркнем, что в отличие от статьи Сами, у нас рассматриваются (только) монотонные стратегии, вследствие чего задача сводится к задаче выпуклого анализа.
- 6) С помощью выпуклых оболочек и условий t -го порядка (которые сводятся к неравенству выпуклости), мы найдем явный вид решения.

2) обозначения

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ - непрерывно возрастающий процесс с $X_0 = 0$. (Он отвечает за то, какое у нас число акций в момент времени t)
- Время идет с 0, чтобы разрешить в 0 делать скачок.
- Отклонение цен от "unaffected price" описывает процесс η_t :

$$(2.1) \begin{cases} d\eta_t = \frac{dX_t}{dt} - \eta_t \eta_t dt \\ \eta_0 = \eta_0^0 \geq 0 \end{cases} \leftarrow \text{вспомогательный процесс} \quad \begin{cases} dR_t = \delta dX_t - \gamma R_t dt \\ R_0 = d \end{cases}$$

$$(2.2) \text{ решение } \eta_t = \frac{\eta_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} dX_s}{S_t}, \text{ где } S_t = e^{\int_0^t r ds}$$

предположим описат. η и δ :

$\gamma: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ - строго положит. и пок. интегр. по мере μ

$\delta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ - неотрицат., не тождеств. равн., огранич, полуинтерпр. сверху,
и еще $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_t}{\gamma_t} = 0$ - погранич. условие

Хотим минимизировать:

(1.3) $C(X) = \int_{[0, \infty)} \left(\gamma_t + \frac{\delta_t X}{2\delta_t} \right) d\chi_t$ по $X \in \mathcal{X}$, где $\chi = \{\chi_t\}_{t \geq 0}$: непрерыв. справа, возрастающее
 $\chi_0 = 0; \chi_\infty = x; C(X) < \infty$

обозн. $\delta_t X = \chi_t - \chi_{t-};$
 $\chi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_t$

Теорема 3.1 (главная)

Пусть выполнены предп. описат. η и δ ,

$\lambda_t := \frac{\delta_t}{\gamma_t}; \tilde{\eta}_t = \sup_{u \geq t} \eta_u,$

(3.1) $L_t^* := \inf_{u \geq t} \frac{\tilde{\eta}_u - \tilde{\eta}_t}{\tilde{\eta}_u/\gamma_u - \tilde{\eta}_t/\gamma_t}; t \geq 0$

тогда оптм. стратегия: $\chi_t^* = \gamma_0 (y^* L_0^* - \eta_0)^+ + \int_{[0, t]} \lambda_s d \sup_{0 \leq v \leq s} \{ (y^* L_v^*) \gamma v_0 \}; t \geq 0.$
 Константа $y^* > 0$ - выбирается из того, что $\chi_\infty^* = x$.
 Это можно сделать, если прав. часть при $y^* = 1$ - убыв. при $t \rightarrow \infty$.
 Иначе решения нет.

Лемма Фол-ва:

Предп. 3.2 Перепараметризацией сворачив задачу минимизации $C(X)$ к задаче минимизации $K(Y)$.

Предп. 3.3 Условие на x , чтобы \exists $y^* > 0$ так, чтобы $K = K(Y)$ был выпуклым.

Теорема 3.4 Вводим выпуклую задачу $\tilde{K}(\tilde{Y})$, которая эквивалентна ~~задаче~~ задаче с $K(Y)$, и при этом при некот. условиях решение задачи $\tilde{K}(\tilde{Y})$ явл. решением $K(Y)$.

Предп. 3.5 Условие 1-го порядка, чтобы проверить, является ли какой-то \tilde{Y}^* решением задачи $\tilde{K}(\tilde{Y})$.

Теорема 3.6 Предъявляем $\tilde{Y}_t^* = (y \partial \hat{\lambda}_{K_t}^*) \gamma v_0$

Предп. 3.7 ^{при некот. усл.} Можно выбрать $y^* > 0$ так, чтобы

$\chi_t^* = \gamma_0 (y^* \partial \hat{\lambda}_{K_0}^* - \eta_0)^+ + \int_{[0, t]} \lambda_s d \{ (y^* \partial \hat{\lambda}_{K_s}^*) \gamma v_0 \}$ - повоим на 3.2, но еще не совсем

Теорема 3.1 Вводим L_t^* , и ^{из этого} получаем (3.2)

предп. 3.2 пусть вол. предп. относит. δt и δx

$$\lambda = \frac{\delta}{\delta t}; K = \frac{\delta}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta^2}$$

$Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ — возрастающий и непрерыв. справа

$$K(Y) = \frac{1}{2} \int_{[0, \infty)} K_t d(Y_t^2)$$

тогда (3.3) $\begin{cases} Y_t = \eta_0 + \int_{[0, t]} \frac{dX_s}{\lambda_s}; Y_0 = \eta_0 \\ X_t = \int_{[0, t]} \lambda_s dY_s; X_0 = 0 \end{cases}$; $t \geq 0$ — это в. процесс. отобр. из X в Y ,

где $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ — непрерыв. справа, возрастающ., $Y_0 = \eta_0$; $\int_{[0, \infty)} \lambda_t dY_t = \infty$; $K(Y) < \infty$

при этом $C(X) = K(Y)$

Доказ. по X восстанавливается Y и наоборот,
при этом Y — возрастающ. т.к. $X_0 = 0$; X — возрастающ. по отобр. X (и наоборот, если Y вобр.,
и Y — непрерыв. справа как интеграл по непрерыв. справа процессу X .
 $Y_t = \eta_t \cdot \eta_t$ — по отобр. η_t и Y_t ; $dX = \lambda dY$ — из 8-н гл. X и Y .

Проверим, что $K(Y) \stackrel{?}{=} C(X)$

$$\frac{1}{2} \int_{[0, \infty)} K_t d(Y_t^2) \stackrel{?}{=} \int_{[0, \infty)} (\eta_t - \frac{\delta_t X}{2 \delta t}) dX_t$$

Для этого:

пишем по-н.у. $AB = A_0 B_0 + A \cdot B + B \cdot A + [A, B]$ где $A = B = Y$:

$$Y_t^2 = \eta_0^2 + 2 \int_{[0, t]} Y_s \cdot dY_s + [Y]_t$$

$$\Rightarrow d(Y_t^2) = 2 Y_t \cdot dY_t + d[Y]_t$$

$$[Y + \Delta Y, Y + \Delta Y] = [Y, Y] + 2[Y, \Delta Y] + [\Delta Y, \Delta Y]$$

но, т.к. Y — непрерыв. ΔY — отобр. вобр. $\sum_{S \leq t} \Delta Y_s^2 = \sum_{S \leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{\lambda_s^2}$
(т.к. Y_t — непрерыв. справа, а отобр. Y_t — вобр.,
и Y_t — отобр. вариация (т.к. Y — монотон. вобр.)

$$\Rightarrow d(Y_t^2) = 2 Y_t \cdot dY_t + d(\sum_{S \leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{\lambda_s^2})$$

$$\Rightarrow K(Y) = \frac{1}{2} \int_{[0, \infty)} K_t d(Y_t^2) = \frac{1}{2} \int_{[0, \infty)} K_t \cdot 2 Y_t \cdot dY_t + \frac{1}{2} \sum_{S \leq t} K_s \cdot \frac{(\Delta X_s)^2}{\lambda_s^2} =$$

$\frac{dX_t}{\lambda_t} = \frac{dY_t \cdot \lambda_t}{\lambda_t} = dY_t$
 $\frac{dX_t}{\lambda_t} = \frac{dY_t \cdot \lambda_t}{\lambda_t} = dY_t$
 $\frac{dX_t}{\lambda_t} = \frac{dY_t \cdot \lambda_t}{\lambda_t} = dY_t$
 $\frac{dX_t}{\lambda_t} = \frac{dY_t \cdot \lambda_t}{\lambda_t} = dY_t$

$$= \frac{1}{2} \int_{[0, \infty)} 2 \frac{\delta_t}{\delta t^2} \cdot \eta_t \cdot \eta_t \cdot \frac{dX_t \cdot \delta_t}{\delta t} + \frac{1}{2} \sum_{S \leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{\delta s} = \int_{[0, \infty)} (\eta_t - \frac{\delta_t X}{2 \delta t}) dX_t = C(X). \text{ Упр.}$$

Предп. 3.3 Для полунепр. сверху k , функционал $K=k(V)$ явл. (срнго) выпуклым для непр. справа $V \in Y_0 = \mathcal{V}_0$

$\Leftrightarrow k$ (срнго) полунепр. и (срнго) убывает.

Док-во: \Leftarrow пусть k срнго полунепр. и срнго убывает.

$$K(V) = \frac{1}{2} \int_{(0, \infty)} k_t d(V_t^2) - \text{по опр.}$$

по верка гр-ла:

$$K(V) = \frac{1}{2} (k_{\infty}(V_{\infty}^2 - \eta_0^2) - \int_{(0, \infty)} (V_t^2 - \eta_0^2) dk_t)$$

действительно:

$$(KV^2)_{\infty} = (KV^2)_0 + (k \cdot V^2)_{\infty} + (V^2 \cdot k)_{\infty} + [k, V^2]$$

$$\begin{aligned} & \parallel \begin{aligned} & k_0 \cdot \eta_0^2 \\ & \parallel \eta_0^2 (k_{\infty} - \int_0^{\infty} dk_t) \end{aligned} \quad \parallel \int_{(0, \infty)} k_t dV_t^2, \quad \parallel \int_{(0, \infty)} V_t^2 dk_t \\ & \text{т.к. } k_t - \text{непр. слева} \quad \text{т.к. } k_t - \text{полунепр. сверху и убывает} \end{aligned}$$

$$\parallel [k, V^2] + [k, \Delta V^2]$$

$$\parallel_0, \text{ т.к. } k \in BV(\text{тот же}) \quad V \in C \text{ (т.к. } V_t - \text{непр. справа)}$$

$$\parallel \int_{(0, \infty)} \Delta V_t^2 dk_t$$

$$\parallel \int_{(0, \infty)} V_t^2 dk_t$$

$$\Rightarrow (KV^2)_{\infty} = \eta_0^2 k_{\infty} - \int_0^{\infty} \eta_0^2 dk_t + \int_{(0, \infty)} k_t dV_t^2 + \int_{(0, \infty)} V_t^2 dk_t$$

$$\Rightarrow K(V) = \frac{1}{2} (k_{\infty}(V_{\infty}^2 - \eta_0^2) - \int_{(0, \infty)} (V_t^2 - \eta_0^2) dk_t)$$

и теперь получая тем представлением, доказав, что $K(V)$ - выпукло по V , если k - срнго убывает:

$$\alpha K(X) + (1-\alpha) K(Y) \stackrel{?}{\geq} K(\alpha X + (1-\alpha)Y), \text{ где } X, Y \in Y$$

$$\text{подставляем, что } K(V) = \frac{1}{2} (k_{\infty}(V_{\infty}^2 - \eta_0^2) - \int_{(0, \infty)} (V_t^2 - \eta_0^2) dk_t)$$

\Rightarrow хотим:

$$\frac{\alpha}{2} (k_{\infty}(X_{\infty}^2 - \eta_0^2) - \int_{(0, \infty)} (X_t^2 - \eta_0^2) dk_t) + \frac{(1-\alpha)}{2} (k_{\infty}(Y_{\infty}^2 - \eta_0^2) - \int_{(0, \infty)} (Y_t^2 - \eta_0^2) dk_t) \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{2} (k_{\infty}((\alpha X + (1-\alpha)Y)_{\infty}^2 - \eta_0^2) - \int_{(0, \infty)} ((\alpha X + (1-\alpha)Y)_t^2 - \eta_0^2) dk_t)$$

\Rightarrow остается:

$$-\frac{\alpha}{2} \int_{(0, \infty)} (X_t^2 - \eta_0^2) dk_t + \frac{(1-\alpha)}{2} \int_{(0, \infty)} (Y_t^2 - \eta_0^2) dk_t \stackrel{?}{\geq} - \int_{(0, \infty)} ((\alpha X + (1-\alpha)Y)_t^2 - \eta_0^2) dk_t$$

\Rightarrow хотим:

$$\int_{(0, \infty)} ((\alpha X + (1-\alpha)Y)_t^2 - \eta_0^2) dk_t \stackrel{?}{\leq} \alpha \int_{(0, \infty)} (X_t^2 - \eta_0^2) dk_t + (1-\alpha) \int_{(0, \infty)} (Y_t^2 - \eta_0^2) dk_t$$

Перво, т.к. $0 \leq \alpha$, т.к. $f(V) = V^2$ - выпуклая, а dk_t - убывает $\Rightarrow dk_t \leq 0$.

\Rightarrow пусть $K(V)$ - выпукло по V . Докажем, что k - убывает.

Рассм. $V := \eta_0 + a \mathbb{1}_{[s, \infty)} + b \mathbb{1}_{[t, \infty)}$; $0 \leq s < t < \infty$

$$\Rightarrow K(V) = \frac{1}{2} \int_{(0, \infty)} k_t d(V_t^2) = \frac{1}{2} (k_s(a + \eta_0^2 - \eta_0^2) + k_t((a + b + \eta_0^2) - (a + \eta_0^2))) = \frac{1}{2} k_s a^2 + k_t ab + \frac{1}{2} k_t b^2 - \eta_0^2 (a k_s + b k_t)$$

выучено по 2.8
 $\frac{d}{dt} (k_s k_t) \stackrel{?}{\geq} 0$
 $k_t k_s - k_t > 0$
 $\Rightarrow k_s \geq k_t \geq 0$

Дальше нам нужна две технические леммы для доп. в теореме 3.4.

Лемма 5.1 $\{d\tilde{\gamma} > 0\} = \{t \geq 0: \tilde{\gamma}_t < \gamma_t \forall u > t\}$ - для возрастающих $\tilde{\gamma}$
 $\{d\tilde{\gamma} < 0\} = \{t < 0: \tilde{\gamma}_t > \gamma_t\}$ - для убывающих $\tilde{\gamma}$.

Лемма 5.1 Для полунепрерывно сверху огранич. $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеем:

а) $\tilde{\gamma}_t = \sup_{u \geq t} \gamma_u$ - непрерывно слева и убывает

б) $\{d\tilde{\gamma} < 0\} \subset \{\tilde{\gamma} = \gamma\}$

в) $\mathbb{R} = \{d\tilde{\gamma} < 0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} [l_n, r_n] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_2} (l_n, r_n]$, где $[l_n, r_n], n \in \mathbb{N}$ - накрытие $\mathbb{R} \setminus \text{supp } d\tilde{\gamma}$,
 $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}: l_n \geq 0, d_{l_n} \tilde{\gamma} = 0\}$
 $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$

Доказ.

а) убывание $\tilde{\gamma}_t$ - очев.

непрерывно слева - доказывается в лоб, используя полунепрерывность сверху

б) по лемме $\{d\tilde{\gamma} < 0\} \subset \{\tilde{\gamma} = \gamma\}$:

у нас $\tilde{\gamma}$ - непрерывно слева полунепрерывно, поэтому в опр. $\{d\tilde{\gamma} < 0\}$: $\tilde{\gamma}_t = \tilde{\gamma}_t$.

$\Rightarrow \{d\tilde{\gamma} < 0\} = \{t \geq 0: \tilde{\gamma}_t > \gamma_t \forall u > t\} \subset \{\tilde{\gamma}_t = \gamma_t\}$

$\sup_{s \geq t} \gamma_s > \gamma_t \forall u > t$

↑ так как $\tilde{\gamma}_t > \gamma_t \forall u > t$, то \sup достигается в t .

в) $\{d\tilde{\gamma} < 0\} \subset \text{supp } d\tilde{\gamma}$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{d\tilde{\gamma} < 0\} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [l_n, r_n]$

и данное замечает, что правые концы все же левее, а левые правее. только не наоборот.

Лемма 5.2 при усл. теоремы 3.4,

для непрерывно справа возрастающего $\gamma \geq \gamma_0$ мы можем написать

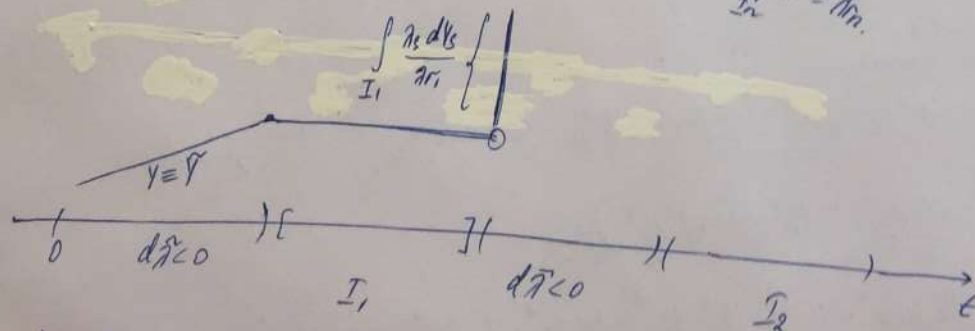
непрерывно справа возрастающий $\tilde{\gamma} \geq \gamma_0$ такой что $\tilde{\gamma} \leq \gamma$

Доказ. Просто определяем $\tilde{\gamma}_t$:

$$\tilde{\gamma}_t = \gamma_0 + \int_{\gamma_0, t}^{\gamma} \frac{1}{\{d\tilde{\gamma} < 0\}}(s) d\gamma_s + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}; \\ \gamma_n \leq t}} \int_{\gamma_n}^{\gamma_s} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_n} \right) d\gamma_s$$

≤ 1 , так $\sup \gamma = \gamma_n$.

$$\begin{cases} (i) \int_{\gamma_0, \infty} \gamma d\gamma = \int_{\gamma_0, \infty} \gamma d\tilde{\gamma} \\ (ii) \{d\tilde{\gamma} > 0\} \subset \{d\tilde{\gamma} < 0\} \\ (iii) K(\gamma) \geq K(\tilde{\gamma}) = \tilde{K}(\gamma) \end{cases}$$



и очевидно, что $\tilde{\gamma} \leq \gamma$.

(i) - проверяется в лоб; (ii) очев, так правые концы в γ_n , а $\gamma_n \in \{d\tilde{\gamma} < 0\}$ (iii) - проверяется непосредственно леммой 5.1

Теорема 3.4 пусть $\lambda = \frac{\delta}{\rho}$, $\kappa = \frac{\delta}{\rho^2}$

Тогда задача (3.4) имеет то же опт. значение функционала, что и вогнутая задача

(3.5) minimize $\tilde{K}(\tilde{Y}) = \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} \tilde{\kappa}_t d(\tilde{V}_t^2)$ по $\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$, где $\tilde{\kappa}_t = \frac{\tilde{\lambda}_t}{\rho t}$

$\tilde{\lambda}_t = \sup_{u \geq t} \lambda_u, t \geq 0$

$\tilde{Y} = \{(\tilde{V}_t) : \text{непрер. справа, возрастает, } \tilde{V}_0 = \eta_0, \int_{(0,\infty)} \tilde{\lambda}_t d\tilde{V}_t = \infty; \tilde{K}(\tilde{Y}) < \infty\}$

Более того, если \tilde{Y}^* - решение (3.5) с $\text{Id } \tilde{Y}^* > 0 \} \subset \{ \tilde{\lambda} = \lambda \}$ - то это решение (3.4).

Доц. во: $\tilde{K}(\tilde{Y}) \geq K(Y)$, очев, т.к. $\tilde{\kappa} = \sup \kappa \Rightarrow \inf \tilde{\kappa} \geq \inf \kappa$
 $\forall Y \in \tilde{\mathcal{Y}}: K(Y) \geq K(\tilde{Y}) = \tilde{K}(\tilde{Y})$ - из леммы 5.2 $\Rightarrow \inf K \geq \inf \tilde{K} \Rightarrow \inf K = \inf \tilde{K}$

Более того, если $\tilde{Y}^* \in \tilde{\mathcal{Y}}$ доставляет \inf , то применяем лемму 5.1 к $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\kappa}$ (вместо λ и κ), и получаем другой опт. план \tilde{Y}^{**} т.к. $\tilde{\kappa}$ - η миним. план $K(\tilde{Y}^*)$ уже отсюда, $\alpha K(\tilde{Y}^{**}) \leq K(\tilde{Y}^*) \Rightarrow$ они равны) $\tilde{Y}^{**} \in \tilde{\mathcal{Y}}$, который удовлетворяет условию $\text{Id } \tilde{Y}^{**} > 0 \} \subset \{ \tilde{\lambda} = \lambda \}$.

А по лемме 5.1: $\{ \tilde{\lambda} = \lambda \} \subset \{ \tilde{\lambda} = \lambda \} = \{ \kappa = \tilde{\kappa} \} \Rightarrow \tilde{Y}^{**} \in \mathcal{Y} \Rightarrow \tilde{Y}^{**}$ - опт. в (3.4). ч.т.д.

Лемма 3.5 (приведения)

Для $\tilde{\kappa}, \tilde{\lambda} \geq 0$ как в теореме 3.4:

$\tilde{Y}^* \in \tilde{\mathcal{Y}}$ - решение (3.5).

$\Leftrightarrow \exists y > 0: \left[- \int_{[t,\infty)} \tilde{Y}_u^* d\tilde{\kappa}_u \geq y \tilde{\lambda}_t \quad \forall t \geq 0, \text{ причем равенство } \stackrel{\text{iff}}{\Leftrightarrow} d\tilde{V}_t^* > 0. \right]$

Доц. во: \Rightarrow необходимость:

$\tilde{K}(Y) = \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} \tilde{\kappa}_t d(\tilde{V}_t^2)$ - по опр.

Из р-на в Лемм. 3.3 и из того, что $\tilde{\kappa}_0 = 0$ имеем представление:

$\tilde{K}(Y) = - \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (\tilde{V}_t^2 - \tilde{\rho}_0^2) d\tilde{\kappa}_t$

Далее, $\forall Y \in \tilde{\mathcal{Y}}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$:

$\tilde{\rho}_0 Y^* - \text{минимизирует } \tilde{K}(Y)$ по \mathcal{Y}

$0 \leq \tilde{K}(\varepsilon Y + (1-\varepsilon) Y^*) - \tilde{K}(Y^*) = - \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} ((\varepsilon Y + (1-\varepsilon) Y^*)_t^2 - \tilde{\rho}_0^2) d\tilde{\kappa}_t + \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (\tilde{V}_t^{*2} - \tilde{\rho}_0^2) d\tilde{\kappa}_t =$
 $= - \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (\tilde{V}_t^2 - \varepsilon^2 \tilde{Y}^2 - 2\varepsilon(1-\varepsilon) \tilde{V}_t \tilde{V}_t^* - (1-\varepsilon)^2 \tilde{V}_t^{*2}) d\tilde{\kappa}_t =$
 $= - \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (\tilde{V}_t^2 - \varepsilon^2 \tilde{V}_t^2 - 2\varepsilon \tilde{V}_t \tilde{V}_t^* + 2\varepsilon^2 \tilde{V}_t \tilde{V}_t^* - \tilde{V}_t^{*2} + 2\varepsilon \tilde{V}_t^* - \varepsilon^2 \tilde{V}_t^{*2}) d\tilde{\kappa}_t =$
 $= - \varepsilon \int_{(0,\infty)} \tilde{V}_t^* (\tilde{V}_t - \tilde{V}_t^*) d\tilde{\kappa}_t - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{(0,\infty)} (\tilde{V}_t - \tilde{V}_t^*)^2 d\tilde{\kappa}_t$

Велич на ε , устремляем $\varepsilon \rightarrow 0$,

получаем $-\int_{(0,\infty)} (y_t^*)^2 d\tilde{k}_t \leq -\int_{(0,\infty)} y_t^* y_t d\tilde{k}_t$.

$\Rightarrow y^*$ - решение (5.5) minimize $\left[-\int_{(0,\infty)} y_t^* y_t d\tilde{k}_t \right]$ по $y \in \tilde{Y}$

но это равно $\min_{(5.6)} \left[\int_{(0,\infty)} (-\int_{(t,\infty)} y_u^* d\tilde{k}_u) dy_t \right]$

Действительно: $\int_{(0,\infty)} (-\int_{(t,\infty)} y_u^* d\tilde{k}_u) dy_t = -\int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} y_u^* d\tilde{k}_u dy_t + \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{(0,t]} y_u^* d\tilde{k}_u) dy_t$

где $z = y^* \cdot \tilde{k}$; $t \geq 0$; $z_0 = 0$.

$(y^*)_{\infty} = (z^*)_{\infty} + \int_{(0,\infty)} z_t dV_t + \int_{(0,\infty)} y_t \cdot y_t^* d\tilde{k}_t + [z, y]_{\infty}$

$\Rightarrow \int_{(0,\infty)} (-\int_{(t,\infty)} y_u^* d\tilde{k}_u) dy_t = \int_{(0,\infty)} y_t y_t^* d\tilde{k}_t$

А теперь минимизируем (5.6):

$\int_{(0,\infty)} (-\int_{(t,\infty)} \frac{y_u^* d\tilde{k}_u}{\tilde{k}_t}) \tilde{k}_t dy_t \rightarrow \min_{y_t}$, причем y_t^* - решение $\int_{(0,\infty)} \tilde{k}_t dy_t = x$.

Видно, что $\int_{(0,\infty)} f_t \tilde{k}_t dy_t \geq \inf_t f_t \cdot \int_{(0,\infty)} \tilde{k}_t dy_t$,
причем $\min_{(5.6)} a \Rightarrow u(5.5)$

те формулы необходимы: если y^* - решение (5.5), то это \sup вон.

Докажем:

$\tilde{k}(y) - \tilde{k}(y^*) = -\frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (y_t - y_t^*)^2 d\tilde{k}_t \geq -\int_{(0,\infty)} y_t^* (y_t - y_t^*) d\tilde{k}_t \geq 0$

$\frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (y_t + y_t^*) (y_t - y_t^*) d\tilde{k}_t \geq -\int_{(0,\infty)} y_t^* (y_t - y_t^*) d\tilde{k}_t$
 $\int_{(0,\infty)} (-\frac{y_t}{2} - \frac{y_t^*}{2} + y_t^*) (y_t - y_t^*) d\tilde{k}_t \geq 0$
 $-\frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} (y_t - y_t^*)^2 d\tilde{k}_t \geq 0$ - верно, так $d\tilde{k}_t \geq 0$, так \tilde{k}_t - убывает

$\Rightarrow \tilde{k}(y) - \tilde{k}(y^*) \geq 0 \Leftrightarrow y^*$ - решение (5.5) $(ny - \int y_t^* y_t d\tilde{k}_t \geq -\int y_t^* d\tilde{k}_t)$

те если y^* - решение 5.5 (что $\tilde{k}_t dy_t^* \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{y_t^* dy_t}{\tilde{k}_t} \geq \inf$) - то $\tilde{k}(y) \geq \tilde{k}(y^*)$.

Предл. 3.7 при усл. теоремы 3.6, имеем:

Если $\|\partial \hat{\lambda}\|_{L^2} = \left(\int_0^{\tilde{k}_0} \|\partial \hat{\lambda}_k\|^2 dk \right)^{1/2} < \infty$, то можем выбрать $y^* > 0$

такое что $x_t^* = \eta_0 (y^* \partial \hat{\lambda}_{k_0} - \eta_0)^+ + \int_{[0,t]} \lambda_k d\left\{ (y^* \partial \hat{\lambda}_{k_0}) \vee \eta_0 \right\}, t \geq 0$ —

увеличивается с $x_0^* = 0$ до $x_\infty^* = x$.

Это $x^* \in X$ — опт. решение глв. задачи (2.3)

В случае $\eta_0 = 0$, имеем $y^* = \frac{x}{\|\partial \hat{\lambda}\|_{L^2}^2}$, и $\inf_{x \in X} C(x) = \frac{x^2}{2 \|\partial \hat{\lambda}\|_{L^2}^2}$

Если $\|\partial \hat{\lambda}\|_{L^2} = \infty$, и $\inf_{x \in X} C(x) = 0$, и задача (2.3) не имеет решения.

Доказ.

положим $\hat{\lambda}_k^1 := \partial \hat{\lambda}_{k_0}$
 $\hat{\lambda}_0^1 = 0$

$\hat{\lambda}_k^y := (y \hat{\lambda}_k^1) \vee \eta_0$

$\hat{\lambda}_0^y = \eta_0$

тогда $d\hat{\lambda}_k^y > 0$ только при $k \in [0, \tilde{k}_0]$, когда $\tilde{\lambda}_{k_0} = \tilde{\lambda}_0$.

Для этого проверим, что глв. задача $d\hat{\lambda}_k^y < 0$. — расч. $\begin{cases} \Delta_{k_0} \tilde{k} \leq 0 \\ \tilde{k}_0 = \tilde{k}_0 \end{cases}$

После этого проверим, что $\|\partial \hat{\lambda}_k^y\|_{L^2} < \infty \Leftrightarrow \hat{\lambda}$ свл. д-интегрируема:

$$\int_{(0,\infty)} \lambda_k d\hat{\lambda}_k^y = \int_{(0,\infty)} \tilde{\lambda}_{k_0}^y d(\partial \hat{\lambda}_{k_0}^y) = \int_{(0,\infty)} \hat{\lambda}_{k_0}^y d(\partial \hat{\lambda}_{k_0}^y) = \int_0^{\tilde{k}_0} \partial \hat{\lambda}_k^y \partial \hat{\lambda}_{k_0}^y dk = \int_0^{\tilde{k}_0} \|\partial \hat{\lambda}_k^y\|^2 dk$$

там, где $\partial \hat{\lambda}_{k_0}^y = 0$, там $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}$

$\hat{\lambda}_{k_0}^y = \int_0^{\tilde{k}_0} \partial \hat{\lambda}_k^y dk$

Потому, если $\|\partial \hat{\lambda}_k^y\|_{L^2} < \infty$, то мы можем расч. $x_t^y = \int_{[0,t]} \lambda_k d\hat{\lambda}_k^y, t \geq 0$.
 Он определен, непрерывен справа, возрастает по т.

Вопре тому, x_∞^y ^{ср. 3.6} возрастает по y от 0 до ∞ .
 $\Rightarrow \exists! y^*: x_\infty^{y^*} = x$.

Далее проверим в под, что $K(y^*) < \infty \Rightarrow y^* \in Y, a x^* \in X$.

почему эти $x^* \vee y^*$ — опт. в задачах 2.3 и 3.5 (и \Rightarrow 3.4)?

пу попробуем взять $y^* = (y^* \partial \hat{\lambda}_{k_0}^y) \vee \eta_0$ — по т. 3.6 он непрер. справа и удовл. условию 1-го порядка — а по прор 3.5 этого дост, чтобы быть решением

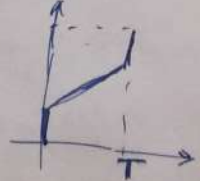
задачи (3.5). А еще y^* — решение задачи (3.4), так $\{d\hat{\lambda}_k^y > 0\} = \{d\hat{\lambda} > 0\}$ — доказали в начале этого док-ва. 2-го.

Пример

пусть $\delta_k = \delta_0 \cdot \mathbb{1}_{[0,T]}(k)$

$\tilde{k}_0 \equiv T_0 > 0, t \geq 0$
 $\eta_0 = 0$

Хотим убедиться, что наш ответ в этом случае даст то, что у одноклассов-ваши:



имеем: $\lambda_t = \frac{\delta_t}{\beta_t}$; $\beta_t = e^{\int_0^t \rho_0 ds} = e^{\rho_0 t}$

$\Rightarrow \tilde{\lambda}_t = \tilde{\lambda}_t = \delta_0 \cdot e^{-\rho_0 t} \cdot \mathbb{1}_{[0, T]}(t)$

$k_t = \tilde{k}_t = \delta_0 \cdot e^{-2\rho_0 t} \cdot \mathbb{1}_{[0, T]}(t)$

$\tau_k := \inf\{t \geq 0: \tilde{k}_t \leq k\}$

\Rightarrow хотим: $\delta_0 \cdot e^{-2\rho_0 \tau_k} \cdot \mathbb{1}_{[0, T]} = k$

\Rightarrow если $t \in [0, T]$, то $e^{-2\rho_0 \tau_k} = \frac{k}{\delta_0}$

$-2\rho_0 \tau_k = \ln(\frac{k}{\delta_0})$

$\rho_0 \tau_k = \frac{1}{2} \ln(\frac{\delta_0}{k})$

- а если нет, то дифф $\frac{1}{2} \ln(\frac{\delta_0}{k\tau})$

$\Rightarrow \beta_{\tau_k} = e^{\tau_k \cdot \rho_0} = e^{\frac{1}{2} \ln(\frac{\delta_0}{k\tau_k})} = \sqrt{\frac{\delta_0}{k\tau_k}}$

$\Rightarrow \tilde{\lambda}_k = k \cdot \beta_{\tau_k} = k \cdot \sqrt{\frac{\delta_0}{k\tau_k}} = \sqrt{\delta_0 k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_k}}$

$\tilde{\lambda} -$ выпукло вверх $\Rightarrow \tilde{\lambda} = \hat{\lambda}$

Раньше считали

$\hat{\lambda}_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_0}{k}}, & \text{если } k > \tau_k \\ \sqrt{\frac{\delta_0}{k\tau_k}}, & \text{если } k \leq \tau_k \end{cases}$

$\sqrt{\frac{\delta_0}{k\tau_k}} = \sqrt{e^{2\rho_0 \tau_k}} = e^{\rho_0 \tau_k}$, если $k \leq \tau_k$

$\Rightarrow \hat{\lambda}_k := \hat{\lambda}_{k\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta_0}{k\tau}}, & t < \tau \\ \sqrt{\frac{\delta_0}{k\tau}}, & t \geq \tau \end{cases}$

Теперь берем массу y -ну для k_t^* , и пока не y^* -оптимально, а просто $y > 0$ берем какой-то.

$k_t^* = \eta_0 (y^* \hat{\lambda}_{k_0^*} - \eta_0)^+ + \int_0^t \lambda_s d(y^* \hat{\lambda}_{k_s^*}) \vee \eta_0, t \geq 0$

У нас $\eta_0 = 0$ по ум.

имеем: $\eta_0 = \frac{\delta_0}{\beta_0} = \delta_0$

$\hat{\lambda}_{k_0} = \frac{1}{2} e^{\rho_0 \cdot 0} = \frac{1}{2}$

\Rightarrow 1-е слагаемое дифф $\delta_0 \cdot (y \cdot \frac{1}{2})^+ = \delta_0 \cdot y \cdot \frac{1}{2}$

смотрим на 2-е слагаемое: $\lambda_s = \frac{\delta_0}{\beta_s} = \delta_0 \cdot e^{-\rho_0 s}$

если $t < T$, то $\hat{\lambda}_{k_s^*} = \frac{1}{2} e^{\rho_0 t}$, где $t < T$ - не меняется

$\Rightarrow d(\hat{\lambda}_{k_s^*}) = d(\frac{1}{2} e^{\rho_0 s}) = \frac{\rho_0}{2} e^{\rho_0 s} ds$

$\Rightarrow \int_0^t \lambda_s d(y^* \hat{\lambda}_{k_s^*}) = \int_0^t \delta_0 \cdot e^{-\rho_0 s} \cdot y \cdot \frac{\rho_0}{2} e^{\rho_0 s} ds = \frac{\delta_0 y \rho_0}{2} (t \wedge T)$

А если $t \geq T$, то $\delta_t \neq 0$ только при $t = T$,

и слагаемое в $t = T$ дифф $\lambda_T \cdot \text{скачок}(y \cdot \hat{\lambda}_{k_T^*}) = \delta_0 \cdot e^{-\rho_0 T} \cdot y \cdot (e^{\rho_0 T} - \frac{1}{2} e^{\rho_0 T}) = \frac{1}{2} \delta_0 y$

$\Rightarrow k_t^y = \frac{y \delta_0}{2} (1 + \rho_0 (t \wedge T)) + \mathbb{1}_{[T, +\infty)}(t)$

Хотим: $k_T^y = x : \frac{y \delta_0}{2} (2 + \rho_0 T) = x \Rightarrow y \delta_0 (1 + \frac{\rho_0 T}{2}) = x \Rightarrow y = \frac{x}{\delta_0 (1 + \frac{\rho_0 T}{2})}$

