08.12.19. УРЧП. д/з от семинара 13

20.17
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\cdot(u_{xx}+u_{yy}) \\ u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0 \\ u|_{t=0} = A\sin\frac{\pi x}{p}\cdot\sin\frac{\pi y}{p} \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Решение:

$u = T(t)\cdot X(x)\cdot Y(y)$

$\Rightarrow T''\cdot X\cdot Y = a^2(T\cdot X''\cdot Y + T\cdot X\cdot Y'')$

$$\Rightarrow \frac{T''}{a^2\cdot T} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-\lambda} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-\mu}.$$

Ур-е на X: $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(p) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{p}; \ n = 1, 2\ldots \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 \end{cases}$

Ур-е на Y: $\begin{cases} Y''(y) + \mu\cdot Y(y) = 0. \\ Y(0) = Y(q) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_m = \sin\frac{\pi m y}{q} \\ \mu_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2 \end{cases}$

Ур-е на T: $T''_{nm} + a^2\cdot(\underbrace{\lambda_n+\mu_m}_{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{q}\right)^2})\cdot T_{nm} = 0$

$$\Rightarrow T_{nm} = A_{nm}\cdot\cos a\sqrt{\frac{(\pi n)^2}{p^2}+\frac{(\pi m)^2}{q^2}}\,t + B_{nm}\cdot\sin a\sqrt{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{q}\right)^2}\cdot t$$

$$\Rightarrow u(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\left(A_{nm}\cdot\cos a\sqrt{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{q}\right)^2}\,t + \underbrace{B_{nm}}_{0}\cdot\sin a\sqrt{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{q}\right)^2}\,t\right)\cdot\sin\frac{\pi n x}{p}\cdot\sin\frac{\pi m y}{q}.$$

Хотим. $u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\cdot\sin\frac{\pi n x}{p}\cdot\sin\frac{\pi m y}{q} \stackrel{?}{=} A\cdot\sin\frac{\pi x}{p}\cdot\sin\frac{\pi y}{p}.$

$\Rightarrow A_{11} = A$; остальные $A_{nm} = 0$.

$u'_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm}\, a\sqrt{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{q}\right)^2}\cdot\frac{\pi n}{p}\cdot\frac{\pi m}{q}\cdot\sin\frac{\pi n x}{p}\cdot\sin\frac{\pi m y}{q} = 0$

$\Rightarrow$ все $B_{nm} = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x,y) = A\cdot\cos\left(a\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}}\cdot\pi t\right)\cdot\sin\frac{\pi x}{p}\cdot\sin\frac{\pi y}{q}} \text{ — ответ}$$

20.18 $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \ ; \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = 3\sin x \cdot \sin 2y \\ u_t|_{t=0} = 5\sin 3x \cdot \sin 4y \end{cases}$

Решение: $u = T \cdot X \cdot Y$

$\Rightarrow T'' \cdot X \cdot Y = T \cdot X'' \cdot Y + T \cdot X \cdot Y''$

$\Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$

$\Rightarrow \begin{cases} X_n = \sin \frac{\pi n x}{p} = \sin nx, \ n = 1, 2 \ldots \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 = n^2 \end{cases}$

$\begin{cases} Y_m = \sin \frac{\pi m y}{q} = \sin my, \ m = 1, 2 \ldots \\ \mu_m = \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2 = m^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ур-е на T: $T'' + T \cdot (n^2 + m^2) = 0.$

$T_{nm} = A_{nm} \cdot \cos\sqrt{n^2+m^2}\,t + B_{nm} \cdot \sin\sqrt{n^2+m^2}\,t.$

$\Rightarrow u(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cdot \cos\sqrt{n^2+m^2}\,t + B_{nm} \cdot \sin\sqrt{n^2+m^2}\,t\right) \cdot \sin nx \cdot \sin my$

Хотим: $u|_{t=0} = 3 \cdot \sin x \cdot \sin 2y = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin nx \cdot \sin my$

$\Rightarrow A_{12} = 3$, остальные $A_{nm} = 0$.

$u_t|_{t=0} = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \cdot \sqrt{n^2+m^2} \cdot \sin nx \cdot \sin my = 5 \cdot \sin 3x \cdot \sin 4y$

$B_{34} \cdot \sqrt{3^2+4^2} = 5 \Rightarrow B_{34} = 1$, остальные $B_{nm} = 0$.

$\Rightarrow \boxed{u(t,x,y) = 3 \cdot \cos(\sqrt{5}t) \cdot \sin x \cdot \sin 2y + 1 \cdot \sin 5t \cdot \sin 3x \cdot \sin 4y}$ — ответ

20.19 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \\ u|_{x=0} = u|_{x=p} = u|_{y=0} = u|_{y=q} = 0. \\ u|_{t=0} = Axy(x-p) \cdot (y-q) \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

Решение: $u(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cdot \cos a \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2}\,t + B_{nm} \cdot \sin \sqrt{\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{q}\right)^2} \cdot at\right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{p} \cdot \sin \frac{\pi m y}{q}.$

Хотим: $u|_{t=0} = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \sin \frac{\pi n x}{p} \cdot \sin \frac{\pi m y}{q} \stackrel{?}{=} Axy(x-p) \cdot (y-q)$

разложим $xy(x-p)(y-q)$ по $\sin \frac{\pi n x}{p} \cdot \sin \frac{\pi m y}{q}$

$$A_{n,m} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q u_0 \cdot X_n \cdot Y_m\,dx\,dy = \frac{4}{pq}\int_0^p x(x-p)\cdot \sin\frac{\pi n x}{p}\,dx \cdot \int_0^q y(y-q)\cdot \sin\frac{\pi m y}{q}\,dy.$$

$$\int_0^p x^2 \cdot \sin\frac{\pi n x}{p}\,dx = -\frac{p}{\pi n}\cdot x^2 \cdot \cos\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p + \frac{p}{\pi n}\int_0^p 2x \cdot \cos\frac{\pi n x}{p}\,dx =$$

$$= -\frac{p^3}{\pi n}\cdot(-1)^n + \frac{2p^2}{(\pi n)^2}\cdot \overset{0}{\cancel{x\sin\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p}} - \frac{2p^2}{(\pi n)^2}\int_0^p \sin\frac{\pi n x}{p}\,dx =$$

$$= -\frac{p^3}{\pi n}\cdot(-1)^n + \frac{2p^3}{(\pi n)^3}\cdot\cos\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p = -\frac{p^3}{\pi n}\cdot(-1)^n + \frac{2p^3}{(\pi n)^3}\cdot(-1)^n - \frac{2p^3}{(\pi n)^3}$$

$$-p\int_0^p x \cdot \sin\frac{\pi n x}{p}\,dx = -p\cdot x\cdot\frac{p}{\pi n}\cdot\cos\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p + \frac{p^2}{\pi n}\int_0^p\cos\frac{\pi n x}{p}\,dx =$$

$$= -\frac{p^3}{\pi n}\cdot(-1)^n - \frac{p^3}{(\pi n)^2}\cdot\overset{0}{\cancel{\sin\frac{\pi n x}{p}\Big|_0^p}} = -\frac{p^3}{\pi n}\cdot(-1)^n.$$

$$\Rightarrow \int_0^p x(x-p)\sin\frac{\pi n x}{p}\,dx = \frac{2p^3}{(\pi n)^3}\cdot\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases}0, & n=2k\\ -\frac{4p^3}{(\pi n)^3}, & n=2k+1,\end{cases} \quad k=0\ldots\infty.$$

$$\Rightarrow A_{n,m} = \frac{4}{pq}\cdot\frac{4p^3}{(\pi(2k+1))^3}\cdot\frac{4q^3}{(\pi(2l+1))^3} = \frac{64p^2q^2}{\pi^6\cdot(2k+1)^3\cdot(2l+1)^3}$$

Но $u_t|_{t=0} = 0 \to$ все $B_{nm} = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x,y) = \cancel{\sum_{n,m=1}^{\infty}}\frac{64Ap^2q^2}{\pi^6}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3\cdot(2l+1)^3}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)x}{p}\cdot\sin\frac{\pi(2l+1)y}{q}\cdot\cos at\sqrt{\left(\frac{\pi(2k+1)}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi(2l+1)}{q}\right)^2}}$$

ответ

02.12.19. УРЧП. семинар 13.

Разбор д/з. 4.24. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3u \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$ Док-ть: $|u(t,x)| \le C \cdot e^{-6t}$.

Решение: 1 способ $u = T \cdot X$

$$\Rightarrow T' X = T \cdot X'' + 3TX$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X'' + 3X}{X} = -\lambda$$

$$\Rightarrow X'' + (3+\lambda) X = 0.$$

Решение $\ne 0$, если $(3+\lambda) > 0 \Rightarrow \lambda > -3$.

$$\Rightarrow X_n = \cancel{c_1 \cos} \sqrt{\lambda+3}\, x + c_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda+3}\, x.$$

но $X(0) = X(1) = 0 \Rightarrow$ ~~$X_n = \sin\sqrt{\lambda+3}x$~~

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda+3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda+3} = \pi n \Rightarrow 3 + \lambda_n = \pi^2 n^2 \Rightarrow \lambda_n = \pi^2 n^2 - 3.$$

$$\Rightarrow X_n = \sin\sqrt{\lambda_n + 3} \cdot x$$

$$T_n' + \lambda_n \cdot T_n = 0$$

$$\Rightarrow T_n = A_n \cdot e^{-\lambda_n t} = A_n \cdot e^{-t(\pi^2 n^2 - 3)}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-t(\pi^2 n^2 - 3)} \cdot \sin\sqrt{\lambda_n + 3} \cdot x$$

но $|A_n \cdot e^{-t(\pi^2 n^2 - 3)}| \le \text{const} \cdot e^{-6t}$ $\Rightarrow |u(t,x)| \le \text{const} \cdot e^{-6t}$. чтд.

$\pi^2 > 3^2$

$\Rightarrow \pi^2 - 3 > 6$

2 способ Замена: $u = e^{\alpha t} \cdot v$

$$\Rightarrow \alpha \cdot e^{\alpha t} v + e^{\alpha t} \cdot v_t = e^{\alpha t} \cdot v_{xx} + 3 e^{\alpha t} \cdot v$$

положим $\alpha = 3$

$\Rightarrow$ станет ур-е $v_t = v_{xx}$

$$\Rightarrow v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\pi^2 n^2 t} \cdot \sin \pi n x = A_1 \cdot e^{-\pi^2 t} \cdot \sin \pi x + \ldots$$

$$\Rightarrow u = e^{3t} \cdot v = A_1 \cdot e^{-(\pi^2 - 3)t} \sin \pi x + \ldots$$

$$\Rightarrow |u| \le \text{const} \cdot e^{-6t}. \text{ чтд.}$$

Многомерное ур-е теплопроводности.

$u_t = a^2 \Delta u$; $u = u(t,x,y)$; $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$u|_{t=0} = u_0(x,y)$ + краевое условие, например, $u|_{\partial D} = 0$ (или производная по внешней нормали $= 0$)

$D = (0,a) \times (0,b)$

Рассм. краевое усл: $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0$ – теплоизолир. пластина

Ищем $u = T(t)\cdot X(x)\cdot Y(y)$

$\Rightarrow T'\cdot X\cdot Y = a^2(T\cdot X''\cdot Y + T\cdot X\cdot Y'')$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{T'}{a^2 T}}_{=-(\lambda+\mu)} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-\lambda} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-\mu}$$

Ур-е на X: $\begin{cases} X''(x) + \lambda\cdot X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(a) = 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \cos\frac{\pi n}{a}x \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2;\ n = 0, 1\ldots \end{cases}$$

Для Y: $\begin{cases} Y_m(y) = \cos\frac{\pi m}{b}y \\ \mu_m = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;\ m = 0, 1\ldots \end{cases}$

Для T: $T'_{nm} + a^2\underbrace{(\lambda_n + \mu_m)}_{=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} T_{nm} = 0.$

$\Rightarrow T_{nm} = A_{nm}\cdot e^{-\left(\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right)t}$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm}\cdot e^{-\left(\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right)t}\cdot \underbrace{\cos\frac{\pi n x}{a}}_{X_n(x)}\cdot \underbrace{\cos\frac{\pi m y}{b}}_{Y_m(y)}}$$

Хотим: $u_0(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm}\cdot X_n(x)\cdot Y_m(y)$

$$\Rightarrow \int_0^a\int_0^b u_0\cdot X_n\cdot Y_m\,dx\,dy = A_{nm}\cdot\int_0^a\int_0^b X_n^2(x)\cdot Y_m^2(y)\,dx\,dy$$

но при $n \geq 1$: $\int_0^a X_n^2(x)\,dx = \frac{a}{2}$

при $n = 0$: $X_n = 1 \Rightarrow \int_0^a X_n^2\,dx = a$

$$\Rightarrow A_{n,m} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0\cdot X_n\cdot Y_m\,dx\,dy.$$

Зам. Если $u_0 = \cos 2\pi x\cdot\cos\pi y$ – то только $A_{21} \neq 0$.

пусть D = круг $B_R^2(0)$.

$u|_{\partial D} = f(\varphi)$

перейдём к полярным коорд: $\Delta u = \frac{1}{r}\cdot(r\cdot u_r)'_r + \frac{1}{r^2}\cdot u_{\varphi\varphi} = 0.$

Ищем $u(r,\varphi) = R(r)\cdot \Phi(\varphi)$

$\Rightarrow \Phi(\varphi)\cdot\frac{1}{r}\cdot(rR')' + \frac{1}{r^2}\cdot\Phi''(\varphi)\cdot R(r) = 0.$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{r\cdot(rR')'}{R}}_{=\lambda} + \underbrace{\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{=-\lambda} = 0.$

Для Φ: $\Phi''(\varphi) + \lambda\cdot\Phi(\varphi) = 0.$

$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$

Вместо граничных условий: φ – периодическая

$\Rightarrow \Phi(0) = \Phi(2\pi).$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \lambda = n^2.$

Ур-е на R: $r\cdot(rR')' - n^2\cdot R = 0$ – лин. одноф. ур-е 2 порядка.

Ищем 2 лин. незав. решения.

например: $R = r^\alpha$.

будет $R = r^{n-1}$ и $R = r^{n+1}$.

А при $n=1$: 1 и $\ln r$. – см. §16.

ДЗ

Вл

20.17

20.18

20.19

Ш

5.25

5.40

+ §16 – чит.

Для $u_t = \alpha^2 \cdot \Delta u$: $\lim\limits_{t\to\infty} u = A_{00} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\int_0^a\int_0^b u_0\,dx\,dy$ — температура выравнивается.

Это если краевые условия $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=a} = 0$ — тогда $\lim\limits_{t\to\infty}$ предел $= const$

А если такие: $u_x|_{x=0} = u|_{x=0}$ — то $\lim\limits_{t\to\infty}$ предел $= 0$

16.7
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{x=0} = A\cdot\sin\frac{\pi y}{b};\ u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = B\cdot\sin\frac{\pi x}{a};\ u|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Решение: $u = u_1 + u_2$ (а u_2 — $\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_{x=0} = u_2|_{x=a} = 0 \\ u_2|_{y=0} = B\cdot\sin\frac{\pi x}{a};\ u_2|_{y=b} = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_{x=0} = A\sin\frac{\pi y}{b};\ u_1|_{x=a} = 0 \\ u_1|_{y=0} = u_1|_{y=b} = 0. \end{cases} \Rightarrow u_1 = X(x)\cdot Y(y)$$

$X''\cdot Y + X\cdot Y'' = 0.$

$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\mu} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\mu} = 0.$

Для $\mu > 0$: $\begin{cases} Y'' + \mu Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} Y_m(y) = \sin\frac{\pi m y}{b} \\ \mu = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \end{cases}$

Для X: $X'' - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 X = 0.$

$\Rightarrow X_m(x) = A_m\cdot e^{\frac{\pi m x}{b}} + B_m\cdot e^{-\frac{\pi m x}{b}}$

$$\Rightarrow u_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cdot e^{\frac{\pi m}{b}x} + B_m\cdot e^{-\left(\frac{\pi m}{b}x\right)}\right)\sin\frac{\pi m}{b}y$$

Хотим: $u_1|_{x=0} = A\sin\frac{\pi y}{b} \overset{?}{=} \sum_{m=1}^{\infty}(A_m + B_m)\sin\frac{\pi m y}{b}$

$\Rightarrow \begin{cases} A_m + B_m = 0,\ m > 1 \\ A_1 + B_1 = A \end{cases}$

$u_1|_{x=a} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cdot e^{\frac{\pi m a}{b}} + B_m\cdot e^{-\frac{\pi m a}{b}}\right)\sin\frac{\pi m y}{b} \overset{?}{=} 0.$

$\Rightarrow$ при $m \neq 1$: $\begin{cases} A_m + B_m = 0. \\ A_m\cdot e^{\frac{\pi m a}{b}} + B_m\cdot e^{-\frac{\pi m a}{b}} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_m = B_m = 0.$

при $m = 1$: $\begin{cases} A_1 + B_1 = A \\ A_1\cdot e^{\frac{\pi a}{b}} + B_1\cdot e^{-\frac{\pi a}{b}} = 0. \end{cases} \Rightarrow$ находим A_1 и B_1

$\Rightarrow \boxed{u_1(x,y) = \left(A_1\cdot e^{\frac{\pi x}{b}} + B_1\cdot e^{-\frac{\pi x}{b}}\right)\sin\frac{\pi y}{b}}$ — аналогично ищем u_2.

01.12.19. УРЧП. д/з от семинара 12.

(20.16) 1) $\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8\cdot e^t \cdot \cos x \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = 2x \\ u_x|_{x=0} = 2t \\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t \end{cases}$

Решение: Уберём неоднородность из граничного усл.:

$u = v + w.$

$\Rightarrow v = 2tx$ — короче см. д/з от семинара 11.

(20.16)

2) $\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t(\sin x - x) \\ u|_{t=0} = 3 \\ u_t|_{t=0} = x + \sin x \\ u|_{x=0} = 3 \\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + t. \end{cases}$

Решение: уберём неоднородность из граничного усл.:

$u = v + w.$

$\Rightarrow v = 3 + x(t^2+t) \quad \Rightarrow \quad v_{xx} = 0, \quad v_t = x(2t+1), \quad v_{tt} = x\cdot 2$

$\Rightarrow \underbrace{v_{tt}}_{=2x} + w_{tt} - \underbrace{2v_t}_{=2x(2t+1)} - 2w_t = \cancel{v_{xx}}^{0} + w_{xx} + 4t(\sin x - x)$

$\Rightarrow w_{tt} - 2w_t = w_{xx} + \cancel{2x(2t+1)} + 4t(\sin x - \cancel{x})$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} w_{tt} - 2w_t = w_{xx} + 4t\cdot\sin x \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 3 - 3 = 0 \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = (x + \sin x) - x = \sin x \\ w|_{x=0} = w_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}}$$

Ищем собств. ф-ции: $W = T(t)\cdot X(x)$

$T''\cdot X - 2\cdot T'\cdot X = T\cdot X''$

$\Rightarrow \dfrac{T'' - 2T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$

5

$\Rightarrow \dfrac{X''}{X} = -\lambda \quad + \begin{cases} W|_{x=0} = 0 \\ W_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$

• $\underline{\lambda = 0}$ $\Rightarrow X = C_1 x + C_2$

$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X'(\frac{\pi}{2}) = C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$

• $\underline{\lambda < 0}$ $\Rightarrow p^2 + \lambda = 0.$

$p^2 = -\lambda > 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda}$

$\Rightarrow X = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0. \\ X'(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{-\lambda} \cdot C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{-\lambda} \cdot C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$ т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} & -e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0.$

• $\underline{\lambda > 0}$ $\Rightarrow p^2 = -\lambda < 0$

$\Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow X = \cancel{C_1} \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x$

$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X'(\frac{\pi}{2}) = \underset{0}{C_1} \cdots + C_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2} = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi + 2\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = 1 + 2n, \ n \in \mathbb{Z}$

$\lambda_n = (1+2n)^2, \ n \in \mathbb{Z}_+.$

$\Rightarrow X(x) = C_2 \cdot \sin(1+2n)x, \ n \in \mathbb{Z}_+$

Ищем w_1: $\begin{cases} W_{tt} - 2W_t = W_{xx} \\ W|_{t=0} = 0 \\ W_t|_{t=0} = \sin x \\ W|_{x=0} = 0 \\ W_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$

Для этого ищем T_n: ур-е на T_n: $T'' - 2T' + \lambda T = 0.$

$T(0) = 0$

$T'(0) = \sin x$

ХУ $p^2 - 2p + \lambda = 0.$

~~\[illegible\]~~

- если $n=0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \Rightarrow (p-1)^2 = 0.$

$\Rightarrow p = 1$ – кратности 2.

$\Rightarrow \boxed{T_0 = (C_1 t + C_2)\cdot e^t}$

- если $n \neq 1 \Rightarrow D = 4 - 4\lambda = 4(1-\lambda) = 4(\cancel{1}-\cancel{1}-4n-4n^2) = -16n(n+1)$

$$\Rightarrow p_{1;2} = \frac{2 \pm 4i\sqrt{n(n+1)}}{2} = 1 \pm 2i\sqrt{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t\sqrt{n(n+1)} + B_n \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t\sqrt{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow w(x,t) = e^t(C_1 t + \underbrace{C_2}_{0}) \cdot \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{A_n}_{0} \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t\sqrt{n(n+1)} + B_n \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t\sqrt{n(n+1)}\right) \sin(1+2n)x$$

Хотим: $\begin{cases} w|_{t=0} = 0 \\ w_t|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$

$$\Rightarrow w(0) = C_2 \cdot \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(1+2n)x = 0. \quad \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ A_n = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_t(0) = \Big(e^t \cdot C_1 t + C_1 \cdot e^t\Big)\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} - B_n \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t\sqrt{n(n+1)} + B_n \cdot e^{-t} \cdot 2\sqrt{n(n+1)} \cos 2t\sqrt{n(n+1)} \Big) \sin(1+2n)x \Big|_{t=0} =$$

$$= C_1 \cdot \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-t} \cdot 2\sqrt{n(n+1)} \sin(1+2n)x \overset{?}{=} \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ \text{все } B_n = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = t \cdot e^t \cdot \sin x}$$

ищем w_2: $\begin{cases} w_{tt} - 2w_t = w_{xx} + \underbrace{4t \cdot \sin x}_{\text{добавка к } g_0} \\ w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = 0. \\ w|_{x=0} = 0. \\ w_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$

$f(t,x) = 4t \cdot \sin x$ – уже разложилось: $\begin{cases} g_0 = 4t \\ \text{все остальные } g_n = 0. \end{cases}$

см. ранее

$\Rightarrow$ при $n=0$: $T_0''\cdot X_0 - 2T_0'\cdot X_0 = T_0\cdot X_0'' + (4t)X_0$

$$\frac{T_0''-2T_0'}{T_0} = \frac{X_0''}{X_0} + \frac{(4t)}{\ldots} = -\lambda_0 = -1.$$

$$\Rightarrow T_0'' - 2T_0' + T_0 = 4t.$$

$$T = (C_1 t + C_2)\cdot e^t + \underbrace{At + B}$$

$$-2A + At + B = 4t \quad \Rightarrow A = 4$$

$$B = 2A = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_0 = (C_1 t + C_2)\cdot e^t + 4t + 8 \\ T_0(0) = 0 \\ T_0'(0) = 0. \end{cases}$$

но $T_0(0) = C_2 + 8 = 0 \Rightarrow C_2 = -8$.

$$T_0'(0) = \{e^t(C_1 t + C_2) + C_1\cdot e^t + 4\}\Big|_{t=0} = e^t\cdot C_2 + C_1\cdot e^t + 4 = 0.$$

$$\Rightarrow C_1 = -4 - C_2 = -4-(-8) = 4$$

$$\Rightarrow T_0 = ((4t-8)e^t + 4t + 8. =$$

~~при $n\neq 0$:~~

$$\Rightarrow W_2 = ((4t-8)e^t + 4t + 8)\cdot \sin x$$

$$\Rightarrow U = V + W_1 + W_2 = 3 + x(t^2+t) + (4t\cdot e^t - 8e^t + 4t + 8)\sin x + e^t\cdot t\cdot \sin t$$

$$= \boxed{3 + x(t^2+t) + \{(5t-8)e^t + 4t + 8\}\sin x} \leftarrow \text{ответ.}$$

20.41 1) $\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U|_{t=0} = x^2 - 1 \\ U_x|_{x=0} = 0 \\ U_x|_{x=1} = 0 \end{cases}$

Решение: Из граничного усл.

$$U = X\cdot T$$

$$\Rightarrow X\cdot T' = X''\cdot T$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$+ \begin{cases} U_x(0)=0 \\ U_x(1)=0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{\ell}, n\in\mathbb{Z}_+ \; ; \; \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2; \lambda_0 = 1$$

$\Rightarrow$ ур-е на T: $T_n' + \lambda_n \cdot T_n = 0$.

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot e^{-\lambda_n t} = A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$$

$$\Rightarrow u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Разложим $u_0(x) = -1 + x^2$ — по $\cos\frac{\pi n x}{l}$. — но $u|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\frac{\pi n x}{l}$.

ну $g_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{2} - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

$$g_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cdot \cos \pi n x \, dx = \frac{2}{\pi n} x^2 \cdot \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 2x \cdot \sin \pi n x \, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2} \cdot x \cdot \cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{4}{\pi^2 n^2}\underbrace{\int_0^1 \cos \pi n x \, dx}_{=0} = \frac{4}{\pi^2 n^2} \cdot \cos \pi n = \frac{4}{\pi^2 n^2} \cdot (-1)^n =: A_n.$$

$$\Rightarrow \boxed{u = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cdot (-1)^n \cdot e^{-(\pi n)^2 t} \cdot \cos \pi n x}$$ — ответ;

2) $\begin{cases} u_t + u = u_{xx} \\ u|_{t=0} = 1 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$

Решение: $u = T \cdot X$

$\Rightarrow T' \cdot X + T \cdot X = T \cdot X''$

$\Rightarrow \frac{T' + T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$+ \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ $n \in \mathbb{N}$; $a_n = \frac{\pi n}{l}$

ур-е на T_n: $T_n' + T_n(1 + \lambda_n) = 0$.

$$\Rightarrow T_n = A_n \cdot e^{-(1+\lambda_n)t} = A_n \cdot e^{-\left(1 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) t}$$

$$\Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(1 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) t} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

$$\Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \overset{?}{=} 1.$$

Разложим 1 по $\sin\frac{\pi n x}{l}$: $g_n = \frac{2}{l}\int_0^l 1 \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx = \frac{-2}{l \cdot \pi n} l \cdot \cos \pi n x \Big|_0^l =$

$$= -\frac{2}{\pi n x}(\cos \pi n l - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{\pi n}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot e^{-\left(1 + \left(\frac{\pi(2k+1)}{l}\right)^2\right) t} \cdot \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}$$ — ответ;

(20.45) 1) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = 1 \\ u|_{x=l} = 0. \end{cases}$

Решение: Уберем неоднородность из краевых усл:

$u = v + w$

$v = x - l \quad \Rightarrow v_{xx} = v_t = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 0 - x + l = -x + l. \\ w_x|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \end{cases}$

Найдем собств. ф-ции: $u = T\cdot X$

$\Rightarrow T'\cdot X = T\cdot X''$

$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$+ \begin{cases} w_x|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=l} = 0. \end{cases}$

• $\lambda = 0 \Rightarrow X = c_1 x + c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$

• $\lambda < 0 \Rightarrow X = c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$

• $\lambda > 0 \Rightarrow p^2 = -\lambda < 0.$

$\Rightarrow X = c_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x$

$X' = -c_1\sqrt{\lambda}\cdot\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$\Rightarrow \begin{cases} X'(0) = c_2\cdot\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \\ X(l) = c_1\cdot\cos\sqrt{\lambda}l + \cancel{c_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi + 2\pi n}{2} = \frac{\pi}{2}(1+2n)$

$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi}{2l}(1+2n)\right)^2$

$\Rightarrow X_n = \cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x$, $n \in \mathbb{Z}_+$

Ищем T_n: $T' + \lambda T = 0 \Rightarrow T_n = A_n \cdot e^{-\lambda_n t}$

$\Rightarrow w(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\lambda_n t} \cdot \cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x.$

$w|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x \overset{?}{=} -x + l.$

Разложим $-x+l$ по $\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x$: $g_n = \frac{2}{l}\int_0^l (-x+l)\cdot\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\,dx =$

$= \frac{2}{l}\cdot\frac{2l}{\pi(1+2n)}\cdot\sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\Big|_0^l + \frac{4}{\pi(1+2n)}\int_0^l \sin\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\,dx = \frac{4}{\pi(1+2n)}\cdot\frac{2l}{\pi(1+2n)}\cdot\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\Big|_0^l = \frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}.$

$\Rightarrow A_n = \frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2} \Rightarrow w(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}\cdot e^{-\lambda_n t}\cdot\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x$

$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = x - l + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8l}{\pi^2(2n+1)^2}\, e^{-\lambda_n t}\cdot\cos\frac{\pi(1+2n)}{2l}x}$ ответ

(20.45) 3) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t \\ u|_{t=0} = e^x \cdot \sin \pi x \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = t. \end{cases}$

E

Решение: Уберём неоднородность из краевого усл.:

$u = v + w$ ← вместе

$v = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} + \alpha(t) = t.$ xt?

$\Rightarrow \begin{cases} w_t = w_{xx} - 2w_x + x + 2t - 1 \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = e^x \cdot \sin \pi x \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \end{cases}$

$w = X \cdot T$

$X \cdot T' = X'' \cdot T - 2 \cdot X' \cdot T$

$\frac{T'}{T} = \frac{X'' - 2X'}{X} = -\lambda$

$\Rightarrow X'' - 2X' + \lambda X = 0.$

• если $\lambda = 1 \Rightarrow X = (C_1 t + C_2) e^t$

$X(0) = C_2 = 0$

$X(l) = C_1 \cdot l \cdot e^l = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$

• если $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ $p^2 - 2p + \lambda = 0.$

$D = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda)$ → $\lambda > 1 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \sin$ и $\cos$; → $\lambda < 1 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow e^{\dots} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$

$\lambda_{1;2} = 1 \pm i\sqrt{1-\lambda}$, при $\lambda > 1$

$\Rightarrow \lambda > 1 \Rightarrow X = \cancel{C_1 \cos} \sqrt{1-\lambda}x + C_2 \cdot \sin \sqrt{1-\lambda} x$

$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \cdot \sin \sqrt{1-\lambda} l = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{1-\lambda}\, l = \pi n$

$1 - \lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$

$\lambda = 1 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$

?

(20.46) 1) $\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2\cos t \\ u|_{t=0} = \cos 2x \\ u_x|_{x=0} = t^2 \\ u_x|_{x=\pi} = t^2 \end{cases}$ (5)

Решение: уберем неоднор. из краевого усл:

$u = v + w$

$v = x \cdot t^2 \Rightarrow v_{xx} = 0$

$v_t = 2xt.$

$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2xt} + w_t - w_{xx} - \cancel{xt^2} - w = \cancel{2xt} - \cancel{xt^2} + 2\cos t \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = \cos 2x - 0 = \cos 2x \\ w_x'|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$

$w = T \cdot X$

$\Rightarrow T' X - T \cdot X'' - T \cdot X = 0.$

$\frac{T' - T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$+ \begin{cases} w_x|_{x=0} = 0 \\ w_x|_{x=\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \cos \frac{\pi n x}{l}; \; n \in \mathbb{Z}_+; \; \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \; \lambda_0 = 0$

ищем w_1: (одноp)

$\Rightarrow$ ур-е на T: $T_n' + T_n(\lambda_n - 1) = 0.$

$p + \lambda_n - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 - \lambda_n.$

• $\lambda_0 = 1 \Rightarrow T_0' = 0 \Rightarrow T_0 = C_1.$

• $\lambda_n \neq 1 \Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot e^{(1-\lambda_n)t} = A_n \cdot e^{(1-n^2)t}$

$\Rightarrow w(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{(1-n^2)t} \cdot \cos nx$

Коши: $w|_{t=0} = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 1 \\ \text{все ост. } A_n = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow w_1 = \cos 2x \cdot e^{-3t}$

ищем w_2: (неодноp)

ур-е на T: $T_n' + T_n(\lambda_n - 1) = 2\cos t \cdot g_n(t)$, где $g_n(t)$ — результат разложения $f(t,x) = 1$ по $\cos nx$:

$g_0 = 1$

$g_n = 0$

$p = 1 - \lambda_n \neq \pm i. \Rightarrow$ резонанса нет.

~~• $n=0$: $\lambda_0 = 0$; $T_n' + T_n = 2\cos t.$~~

при $n=0$ $\Rightarrow T_n = A_n \cdot e^{(1-n^2)t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t$

иначе $w_2 = 0$. Подберем c_1 и c_2, чтоб $c_1\cos t + c_2 \sin t$ было решением:

$-c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_1(\lambda_n - 1)\cos t + c_2(\lambda_n - 1)\sin t = 2\cos t$

$$\begin{cases} C_1 = C_2(\lambda_n - 1) \\ C_2 + C_1(\lambda_n - 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow C_2 + C_2(\lambda_n - 1)^2 = 2.$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{2}{1+(1-\lambda_n)^2}$$

но $\lambda_n = 0 \Rightarrow C_2 = 1$, $C_1 = -1$.

$$C_1 = C_2(\lambda_n - 1) = \frac{2(\lambda_n - 1)}{1+(\lambda_n-1)^2}$$

$$\Rightarrow W_2(t,x) = \left(A_0 e^{t} + C_{10}\cos t + C_{20}\sin t\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{(1-n^2)t} + C_{1n}\cos t + C_{2n}\sin t\right)\cos nx$$

$$\Rightarrow W|_{t=0} = A_0 + C_{10} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + C_{1n})\cos nx = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = -C_{10} \\ A_n = -C_{1n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_2(t,x) = A_0 \cdot e^{t} - \cos t + \sin t \cdot \overset{\cos 0x}{1}$$

но мы хотим, чтобы $W_2|_{t=0} = A_0 - 1 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow A_0 = 1.$

$$\Rightarrow W_2 = e^{t} - \cos t + \sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{u = v + W_1 + W_2 = xt^2 + \cos 2x \cdot e^{-3t} + e^{t} - \cos t + \sin t}$$ ответ.

20.46 2)
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2 \\ u|_{t=0} = x^2 + 2 \\ u_x|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi \end{cases}$$

Решение: уберём неоднородность из краевых усл:

$u = v + w$

$v = x^2 \Rightarrow v_{xx} = 2.$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t - \cancel{2} - w_{xx} - \cancel{9x^2} - 9w = 4\sin^2 t\cos 3x \cancel{- 9x^2 - 2} \\ w|_{t=0} = 2 \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

$W = T \cdot X$

$\Rightarrow T' \cdot X - T \cdot X'' - 9TX = 0.$

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 9X}{X} = -\lambda$$

$X'' + X(9 + \lambda) = 0.$

$p^2 = -9 - \lambda$

$\Rightarrow$ ненулевое реш. при $\lambda > -9$:

$$X_n = C_1 \cdot \cos\sqrt{9+\lambda}\,x + C_2 \cdot \sin\sqrt{9+\lambda}\,x$$

$$X' = -\sqrt{9+\lambda}\,C_1 \cdot \sin\sqrt{9+\lambda}\,x + C_2\sqrt{9+\lambda}\cos\sqrt{9+\lambda}\,x$$

$$\Rightarrow X'(0) = C_2\sqrt{9+\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X'(\pi) = -\sqrt{9+\lambda}\,C_1 \cdot \sin\sqrt{9+\lambda}\,\pi = 0.$$

$$\Rightarrow \sqrt{9+\lambda}\,\pi = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\sqrt{9+\lambda} = n,\ n \in \mathbb{Z}_+$$

$$9+\lambda_n = n^2 \Rightarrow \lambda_n = n^2 - 9.\ ;\ n \in \mathbb{N}_+$$

ищем w_1 (однор.): $\Rightarrow X_n = \cos\sqrt{9+\lambda_n}\,x$

Ищем T_n: $T_n' + \lambda_n T = 0.$

$$T_n(t) = A_n \cdot e^{-\lambda_n t} = A_n \cdot e^{(9-n^2)t}$$

$$\Rightarrow w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{(9-n^2)t} \cdot \cos\sqrt{9+\lambda_n}\,x.$$

Хотим: $w_1|_{t=0} = 2$ Разложим 2 по $\cos\sqrt{9+\lambda_n}\,x$. : нужн $n=0 \Rightarrow \lambda_n = -9$

$\Rightarrow A_0 = 2$, все ост. $A_n = 0$.

$$\Rightarrow w_1 = 2 \cdot e^{9t}$$

ищем w_2 (неодн.):

разложение $\cos 3x$ по $\cos\sqrt{9+\lambda_n}\,x$: нужн $\lambda_n = 0$, иначе $T_n \equiv 0$.

Ищем T_n: $T_n' + \lambda_n T = 4\sin^2 t \cdot g_n(t)$

При $n=0$: $\lambda_n = 0 \Rightarrow T_0' = 4\sin^2 t. = 2\cdot(1-\cos 2t) = 2 - 2\cos 2t$

$$T = A\sin 2t + B\cos 2t + C$$

подберем A, B, C, чтобы это было решением. и $T(0) = 0$:

$$2A\cos 2t - 2B\sin 2t = 2 - 2\cos 2t.$$

$$\begin{cases} 2A = -2 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow T_0 = -\sin 2t + \overbrace{C_1 + C_2 t}^{\text{т.к. } 2 - \text{у него } \lambda=0, \text{ как и у хар-ур-я}}$$

$C_2 = 2$

$\Rightarrow T_0 = 2t - \sin 2t + C_1$

но $T_0(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ $\Rightarrow w_2 = 2t - \sin 2t$

$$\Rightarrow u = v + w_1 + w_2 = x^2 + 2\cdot e^{9t} + 2t - \sin 2t \quad \text{ответ.}$$

(4.13)
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = \cos^4 x + 4\sin^5 x = (1-\sin^2 x)^2 + 4\sin^5 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x + 4\sin^5 x \\ u|_{x=0} = 1 \\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 4. \end{cases}$$

найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$

Решение: Уберём неоднородность из краевого усл:

$u = v + w$

$v = \frac{\beta(t)-\alpha(t)}{l} \cdot x + \alpha(t) = \frac{3}{\pi/2} \cdot x + 1 = \frac{6}{\pi} x + 1.$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w|_{t=0} = \cancel{1} - 2\sin^2 x + \sin^4 x + 4\sin^5 x - \frac{6}{\pi} x - \cancel{1} \\ w|_{x=0} = w|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

Ищем собств. ф-ции: $w = X \cdot T$

$X \cdot T' = T \cdot X''$

$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$+ \{ w(0) = w(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X_n = \sin \frac{\pi n x}{l} = \sin 2nx. \quad \lambda_n = (2n)^2.$

Ищем T: $T_n' + \lambda_n \cdot T = 0.$

$\Rightarrow T_n = A_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot t}$

$\Rightarrow w = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\lambda_n t} \cdot \sin 2nx$

подберём A_n так, чтобы $w|_{t=0} = \cos^4 x + 4\sin^5 x - \frac{6}{\pi} x - 1.$

но всё равно $w \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$

$\Rightarrow u = v + w \to \frac{6}{\pi} x + 1 + 0 = \frac{6}{\pi} x + 1.$ Ответ.

(4.17)
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = x^3 - 3x^2 + 3x \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 3 \end{cases}$$

найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$

Решение: Уберём неоднородность из краевого усл:

$u = v + w$

$v = 3x$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w|_{t=0} = (x^3 - 3x^2 + 3x) - 3x = x^3 - 3x^2 \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=2} = 0. \end{cases}$$

Ищем собств. функции: $w = T \cdot X$

$T' X = T \cdot X''$

$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$+ \{ w_x(0) = w_x(2) = 0 \Rightarrow X_n = \cos \frac{\pi n x}{l}$; $n \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$

$T_n' + \lambda_n \cdot T = 0$

$\Rightarrow T_n = A_n \cdot e^{-\lambda_n t} = A_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{2} \cdot t}$

$\Rightarrow W = \sum\limits_{n=0} A_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{2} t} \cdot \cos \frac{\pi n x}{2}$

подберём коэф. так, чтобы $W|_{t=0} = x^3 - 3x^2$.

Разложим $x^3 - 3x^2$ по $\cos \frac{\pi n x}{2}$

но нас хотим $\lim\limits_{t \to \infty} W \Rightarrow$ нужен только A_0.

$A_0 = \frac{2}{2} \cdot \int_0^2 (x^3 - 3x^2)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3\right)\Big|_0^2 = 4 - 8 = -4.$

$\Rightarrow \frac{A_0}{2} = -2.$

$\Rightarrow u = v + w = 3x - 2 +$ что-то $\to 0$ при $t \to \infty$.

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{t \to \infty} u = 3x - 2}$ ответ.

4.18
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = x^3 + x \\ u_x|_{x=0} = 1 \\ u_x|_{x=2} = 13 \end{cases}$$
найти $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$

<u>Решение:</u> Уберём неоднородность из краевого усл.: $u = v + w$

$v = ax^2 + bx + c$

$v_x' = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 4a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow v = 3x^2 + x$

$\Rightarrow v|_{t=0} = 3x^2 + x$

$v_{xx} = 6.$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t = w_{xx} + 6 \\ w|_{t=0} = x^3 + x - (3x^2 + x) = x^3 - 3x^2 \\ w_x|_{x=0} = w_x|_{x=2} = 0. \end{cases}$$

$X_n = \cos \frac{\pi n}{2}$; $\lambda_n = 2\pi n$

$T_n = A_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{2} t}$

ищем w_1:

$\Rightarrow w_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\frac{\pi n}{2} t} \cdot \cos \frac{\pi n x}{2}.$

Найдём A_n, чтобы $w_1|_{t=0} = x^3 - 3x^2$.

из $A_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x^3 - 3x^2)\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3\right)\Big|_0^2 = 4 - 8 = -4 \Rightarrow \frac{A_0}{2} = -2.$

$\Rightarrow w_1 = -2 + \ldots \to 0$ при $t \to \infty$.

ищем w_2: при $n = 0$, $\lambda_n = 0$: $T_n' + \lambda_n T = 6. \Rightarrow$ решаем

$\Rightarrow T_n = c \cdot t \Rightarrow T_n = 6t \to \infty$ при $t \to \infty$. $\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{t \to \infty} u = +\infty}$ ответ.

28.11.19. УРЧП. Семинар 12.

Разбор д/з. 3.37

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \underbrace{\sin x \cdot \cos 5x \cdot \sin \omega t}_{=:f(t,x)} \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$$

найти все ω: $\sup |u| < \infty$ – т.е при каких ω не будет резонанса.

Решение: $u = \underset{\text{одпор}}{\overset{=0}{u_1}} + \underset{\text{неодпор}}{u_2}$

Разложим $f(t,x)$ по системе собств. ф-ций: $X_n(x) = \sin nx$

$\Rightarrow f(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot \sin nx.$

но $f(t,x) = \sin x \cdot \cos 5x \overset{\cdot \sin \omega t}{=} \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) \cdot \sin \omega t$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_n(t) = 0, \text{ при } n \neq 4,6 \\ g_4 = -\frac{\sin \omega t}{2} \\ g_6 = \frac{\sin \omega t}{2} \end{cases}$$

$u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x)$

$\Rightarrow$ ур-е на T_n: $\begin{cases} T_n''(t) + (\frac{\overset{=1}{a}\pi n}{\underset{=\pi}{l}})^2 \cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

Если $n \neq 4,6$, то $T_n = 0.$

при $n=4$: $\begin{cases} T_4''(t) + 16 T_4(t) = -\frac{\sin \omega t}{2} \\ T_4'(0) = T_4(0) = 0. \end{cases}$ $\leftarrow \alpha + i\beta \overset{?}{=} 0 + i \cdot 4.$ – если ~~не~~ $\omega = \pm 4$, то будет резонанс

Если $\omega = \pm 4$: (т.к $\lambda^2 + 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4i$)

$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot \cos 4t + B_n \cdot \sin 4t + \underbrace{t(K \sin \omega t + L \cos \omega t)}_{\text{неогр. решения}}$

Аналогично, при $n=6$ и $\omega = \pm 6$ – тоже резонанс. $\Rightarrow$ все решения огр. при $\omega \neq \pm 4, \pm 6$

ответ ↑

3.38 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = ax \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = \sin at \end{cases}$ – найти все a, при которых $\sup |u| < \infty$.

Решение: Уберём неоднородность из граничного условия.

$u = v + w$

$v = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} x + \alpha(t) = \sin at \cdot x$

$\Rightarrow w = u - v$

$\Rightarrow \begin{cases} v_{tt} + w_{tt} = \cancel{v_{xx}}^{0} + w_{xx} \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 0 - 0 = 0 \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = ax - a \cdot \cancel{\cos at}^{1} \cdot x = 0. \\ w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow w_{tt} = w_{xx} + x \cdot a^2 \cdot \sin at$

$u = u_1 + u_2$
$u_1 = 0.$

Разложим $f(t,x) = a^2 x \cdot \sin at$ по собств. функциям $X_n(x) = \sin \pi n x$.

$a^2 x \cdot \sin at = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot \sin \pi n x,$

где $g_n = \frac{2}{1} \cdot a^2 \cdot \sin at \cdot \int_0^1 x \cdot \sin \pi n x \, dx = -\frac{2}{\pi n} \cdot a^2 \sin at \cdot x \cdot \cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n} \cdot a^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 \cos \pi n x \, dx}_{=0} =$

$= -\frac{2}{\pi n} \sin at \cdot \cos \pi n = -\frac{2}{\pi n} \cdot (-1)^n \cdot \sin at$

$\Rightarrow$ ур-е на T_n: $T_n'' + (\pi n)^2 T_n(t) = g_n(t) = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi n} \cdot \sin at.$

$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot \cos \pi n t + B_n \cdot \sin \pi n t + T_{част}(t)$

если $\pm \pi n = a$, то резонанс.

Ответ: $a \neq \pm \pi n.$

20.14 ч) $\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 1 - x \\ u|_{x=0} = t \\ u|_{x=1} = 0 \end{cases}$

Решение: уберём неодноp. из граничного усл.

$u = v + w$

$v = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} \cdot x + \alpha(t) = -t \cdot x + t = t(1 - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{v_{tt}}^{\to 0} + w_{tt} + \underbrace{v_t}_{=1-x} + w_t = \cancel{v_{xx}}^{\to 0} + w_{xx} \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 1-x-(1-x) = 0. \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = 1-x-(1-x) = 0. \\ w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0. \end{cases} \Rightarrow w_{tt} + w_t = w_{xx} + x - 1.$$

Найдём собств. ф-ции и разложим по ним $x-1$:

$$W = T(t) \cdot X(x)$$

$$\Rightarrow T'' \cdot X + T' \cdot X = T \cdot X''$$

$$\Rightarrow \frac{T'' + T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n = \sin \pi n x$$

$$\Rightarrow x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot \sin \pi n x,$$

где $g_n(t) = 2\int_0^1 (x-1) \cdot \sin \pi n x \, dx = -\frac{2 \cdot (x-1) \cdot \cos \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 + \underbrace{\frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x \, dx}_{=0} = \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$

Ур-е на T_n: $\begin{cases} T_n'' + T_n' + (\pi n)^2 T_n = g_n(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi n} \\ T_n'(0) = T_n(0) = 0. \end{cases}$

$$T_n = T_{\text{общ.однор}} + T_{\text{частн.неоднор}}.$$

Ищем $T_{о.о}$: $\lambda^2 + \lambda + (\pi n)^2 = 0.$

$$\Rightarrow D = 1 - 4\pi^2 n^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\pi^2 n^2}}{2} \quad (1-4\pi^2n^2<0) \quad = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\pi^2 n^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow T_{\text{общ.однор}} = e^{-1/2 t} \cdot \left(A_n \cos t\sqrt{\pi^2 n^2 - \tfrac{1}{4}} + B_n \cdot \sin t\sqrt{\pi^2 n^2 - \tfrac{1}{4}}\right).$$

Ищем $T_{ч.н}$: $g_n = \text{const} \sim \cos 0 t.$

А поскольку $\sqrt{\pi^2 n^2 - \frac{1}{4}} \neq 0$, то резонанса нет. $\Rightarrow T_{ч.н} = \frac{g_n}{\pi^2 n^2}.$

$$\Rightarrow T_n = e^{-t/2} \cdot \left(A_n \cos t\sqrt{\pi^2 n^2 - \tfrac{1}{4}} + B_n \cdot \sin t\sqrt{\pi^2 n^2 - \tfrac{1}{4}}\right) + \frac{g_n}{(\pi n)^2}.$$

Теперь найдём A_n и B_n из условия, что $T_n'(0) = T_n(0) = 0$. Zоз.

Ур-е теплопроводности:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ \left[\begin{array}{l} u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$u|_{t=0} = u_0(x) \leftarrow$ в нач. момент такая температура

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$. – тепло выходит через оба конца

$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ – концы стержня теплоизолир. => температура выравнивается

$u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ – тепло выходит через левый конец.

а) Рассм. условие $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$:

$u = T(t) \cdot X(x)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda} + u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \\ X_n = \sin\frac{\pi n x}{l};\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ур-е на T_n: $\begin{cases} T_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$.

$$\Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \quad \Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=1} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Но $u|_{t=0} = u_0(x)$ = разложим: $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$, где $g_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\pi n x\,dx$

$\Rightarrow A_n = g_n$

$$\Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$\Rightarrow$ при $t \to \infty$: $u_n \to 0$, и $u \to 0$. – тепло ушло

(хотя не обязательно если $u_n \to 0$, то $u \to 0$)

б) Рассм. условие $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l}$

$\Rightarrow X_n = \cos\frac{\pi n x}{l}$

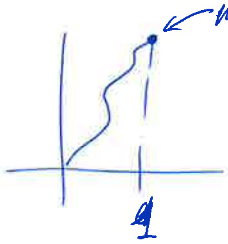
$$\Rightarrow \begin{cases} T_n(t) = A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t},\ n \in \mathbb{N} \\ T_0(t) = A_0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{\pi n}{l}x$$

$\Rightarrow$ при $t \to 0$: $u \longrightarrow \frac{1}{l}\int_0^l u_0 dx = A_0$.

Задача

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = 1. \end{cases}$$



поддерживают температуру = 1.

— будет прямая.

Найти: $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = ?$ — прямая.

Решение: Уберем неоднородность из граничных усл.

$u = v + w.$

ищем $v = \dfrac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} \cdot x + \alpha(t) = x.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{0}{v_t} + w_t = \overset{0}{v_{xx}} + w_{xx} \\ w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0 \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = u_0(x) - x. \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(\pi n)^2 t} \cdot \sin \pi n x \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow u = x + \underbrace{w}_{\to 0} \to x \quad \Rightarrow \text{предел} = \text{прямая } u = x.$$

Д/З.

Ш: 4.13, 4.17, 4.18, 4.24

Вл: 20.16(1,2), 20.41(1,2), 20.45(3), 20.46(1,2)

24.11.19. УРЧП. д/з от семинара 12.

20.6 г)
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos t. \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \qquad 0 < x < \pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} = \sin nx \\ \lambda_n = n^2, \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Решение: $u = v + w$

но $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow v \equiv 0.$

Ищем w: разложим $\cos t$ по $\sin nx$.

$$\cos t = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot X_n(x), \text{ где } g_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \cdot \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \cos t \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} \cdot \cos t \cdot (\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{\pi n} \cdot \cos t, & n = 2k-1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

Ищем T:
$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$$

- $n = 2k \Rightarrow g_n(t) \equiv 0 \Rightarrow T_n \equiv 0.$
- $n = 2k-1$: $\boxed{T_n''(t) + n^2 \cdot T_n(t) = \frac{4}{\pi n} \cdot \cos t.}$ $(*)$

$\Rightarrow T_n(t) = C_{1n} \cdot \sin nt + C_{2n} \cdot \cos nt$ + частн. реш.

если $n \neq 1$, то нет резонанса: $T_ч = A \cdot \cos t + B \cdot \sin t$

$T_ч'' = -A \cos t - B \cdot \sin t.$

МОТ-решение $(*)$ $\Rightarrow -A\cos t - B\sin t + n^2 A \cdot \cos t + n^2 \cdot B \cdot \sin t = \frac{4}{\pi n} \cdot \cos t.$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(n^2-1) = 0. \Rightarrow B = 0. \\ A(n^2-1) = \frac{4}{\pi n} \Rightarrow A = \frac{4}{\pi n (n^2-1)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_ч = \frac{4}{\pi n (n^2-1)} \cos t}$$

при $n = 1$ — резонанс 1 порядка

$\Rightarrow T_ч = t(A\cos t + B \sin t)$

$\Rightarrow T_ч' = A\cos t + B\sin t - t \cdot A \cdot \sin t + t \cdot B \cos t$

$\Rightarrow T_1'' = -A\sin t + B\cos t - A\sin t - tA\cos t + B\cos t - Bt\sin t$

$\Rightarrow tA\cos t + tB\sin t + \sin t\,(-2A - Bt) + \cos t\cdot(2B - tA) = \frac{4}{\pi\cdot n}\cdot\cos t$

$$\begin{cases} \cancel{tB} - 2A - \cancel{Bt} = 0 \Rightarrow A = 0. \\ \cancel{tA} + 2B - \cancel{tA} = \frac{4}{\pi n} \Rightarrow B = \frac{2}{\pi n} \end{cases} \Rightarrow \tilde{T}_1 = \frac{2}{\pi}\cdot t\cdot\sin t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = C_1\sin t + C_2\cos t + \frac{2}{\pi}t\cdot\sin t \\ T_n = C_{1n}\cdot\sin nt + C_{2n}\cdot\cos nt + \frac{4}{\pi n(n^2-1)}\cdot\cos t \end{cases}$$

но $T_n(0) = T_n'(0) = 0 \Rightarrow$ при $n=1$: $C_2 = 0 \Rightarrow T_1 = C_1\cdot\sin t + \frac{2}{\pi}t\cdot\sin t$

$\Rightarrow T_1' = C_1\cdot\cos t + \frac{2}{\pi}\cdot\sin t + \frac{2}{\pi}t\cdot\cos t$

$\Rightarrow T_1'(0) = C_1 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{2}{\pi}t\cdot\sin t.$

Аналогично, ф-ла: $T_n = \frac{4}{\pi n(n^2-1)}(\cos t - \cos nt)$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = \frac{2}{\pi}t\sin t\cdot\sin x + \sum_{\substack{k=2 \\ k-\text{нечет}}}^{\infty}\frac{4}{\pi k(k^2-1)}(\cos t - \cos kt)\cdot\sin kx.}$$ – ответ.

20.9) 1)
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \qquad 0 < x < l. \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = t \quad \text{– неоднор.} \end{cases}$$

Решение: перенесём неоднородность из краевых усл. в ур-е.

$u = v + w.$

$v := \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l}x + \alpha(t) = \frac{t-0}{l}\cdot x + 0 = \frac{t}{l}\cdot x. \Rightarrow v_t' = \frac{x}{l}$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} = a^2\cdot w_{xx} + \underbrace{a^2\cdot v_{xx} - v_{tt}}_{=0} \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 0 - 0 = 0 \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = 0 - \frac{x}{l} = \frac{x}{l} \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

(2)

получили однор. ур-е с краевыми усл: $w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l};\ n\in\mathbb{N} \\ \lambda_n(x) = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Ищем T: $\frac{T''}{a^2\cdot T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$.

$$T_n'' + a^2\cdot\lambda_n T_n = 0.$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n\cdot\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right).$$

$$T_n'(t) = -A_n\cdot\frac{a\pi n}{l}\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\cdot\frac{a\pi n}{l}\cdot\cos\left(\frac{a\pi n t}{l}\right)$$

~~Хотим: $w|_{t=0}=0$~~

~~$w_t|_{t=0} = \frac{x}{l}$~~

~~$\Rightarrow T(0) =$~~

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{l} \quad \Rightarrow w|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$u'(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\cdot\frac{a\pi n}{l}\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n\cdot\frac{a\pi n}{l}\cos\left(\frac{a\pi n t}{l}\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \Rightarrow w_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cdot\frac{a\pi n}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

Хотим: $w|_{t=0}=0$

$$w_t|_{t=0} = \frac{x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\cdot X_n(x)$$

$$\text{где } g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x}{l}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = -\frac{2}{l^2}\cdot\frac{l}{\pi n}\int_0^l x\cdot d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right) =$$

$$= \frac{-2}{\pi n l}\cdot x\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l + \frac{2}{\pi n l}\int_0^l \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cdot\cos\pi n \underbrace{+\frac{2}{\pi n l}\cdot\frac{l}{\pi n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l}_{\parallel\, 0} = -\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n = \frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \text{из усл. } w_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cdot\frac{a\pi n}{l}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{l}{a\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^{n+1} = \frac{2l}{\pi^2 n^2}\cdot(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2 n^2}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = v + w = \frac{tx}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2 n^2}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}t\right)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}}$$ Ответ.

20.9 2) $\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \\ u|_{t=0} = x+1 \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = t+1 \\ u|_{x=1} = t^3+2 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$

$\lambda_n = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 ; n \in \mathbb{N}.$

Решение: Уберем неоднородность из краевых усл.

$u = v + w$

$v = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} \cdot x + \alpha(t) = \frac{t^3+2-t-1}{1} \cdot x + t + 1 = (t^3 - t + 1)x + t + 1.$

$\Rightarrow v_{xx} = 0$ $\quad v|_{t=0} = x+1$

$v_{tt} = 6xt.$ $\quad v_t|_{t=0} = (3t^2-1)x + 1\Big|_{t=0} = 1 - x.$

$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} = w_{xx} - 6xt \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = x+1-(x+1) = 0. \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = 0 - (1-x) = x - 1. \end{cases}$

$w = w_1 + w_2.$

Ищем w_1 $\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} \\ w|_{t=0} = 0 \\ w_t|_{t=0} = x - 1. \end{cases}$ – разложим по $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \sin(\pi n x)$:

$x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot X_n(x),$

где $g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l (x-1)\sin \pi n x\, dx = -\frac{2}{\pi n} \cdot \int_0^1 x\, d(\cos \pi n x) - 2\int_0^1 \sin \pi n x\, dx =$

$= -\frac{2}{\pi n} \cdot x \cdot \cos \pi n x\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^1 \cos \pi n x\, dx}_{0} - \frac{2}{\pi n} \cdot \cos \pi n x\Big|_0^1 =$

$= -\frac{4}{\pi n} \cdot \cos \pi n + \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}(-2 \cdot (-1)^n + 1)$

Но $T_n'' + a^2 \cdot \lambda_n T_n = 0.$

$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot \cos\left(a\frac{\pi n}{l}t\right) + B_n \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi n}{l}t\right)$

$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right) \sin\frac{\pi n x}{l} \Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} = 0 \Rightarrow A_n = 0$

$u_t'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n \cdot \frac{a\pi n}{l}\sin\left(a \cdot \frac{\pi n}{l}t\right) + B_n \cdot \frac{a\pi n}{l}\cos\left(a \cdot \frac{\pi n}{l}t\right)\right) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$

3

$$\Rightarrow u'_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{a\pi n}{l} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \cdot (2\cdot(-1)^{n+1}+1) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} \cdot (2(-1)^{n+1}+1) \quad \Rightarrow W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} (2(-1)^{n+1}+1) \sin(\pi n t) \cdot \sin(\pi n x)$$

Ищем W_2: $\begin{cases} W_{tt} = W_{xx} + 6xt \\ W|_{t=0} = 0 \\ W_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

Разложим $6xt$ по $\sin\frac{\pi n x}{l}$.

$$6xt = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $q_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l 6xt \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = 12t \cdot \int_0^1 x \cdot \sin \pi n x\,dx =$

$$= -\frac{12t}{\pi n} \cdot x \cdot \cos \pi n x \Big|_0^1 + \underbrace{\frac{12t}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x\,dx}_{=0} = -\frac{12t}{\pi n} \cdot \cos \pi n = \frac{12t}{\pi n} \cdot (-1)^{n+1}$$

Ищем T: $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = q_n(t) = \frac{12t}{\pi n} \cdot (-1)^{n+1} \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow T = C_{1n} \cdot \cos \pi n t + C_{2n} \cdot \sin \pi n t + T_{\text{частн}}$$

Ищем $T_{\text{частн}}$: $T = At + B$.

$$\pi^2 n^2 (At+B) = \frac{12}{\pi n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot t \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{12}{(\pi n)^3} \cdot (-1)^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = C_1 \cdot \cos \pi n t + C_2 \cdot \sin \pi n t + \frac{12}{(\pi n)^3} (-1)^{n+1} \cdot t \\ T(0) = T'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \;; \quad \pi n \cdot C_2 = \frac{12}{(\pi n)^3} \cdot (-1)^{n+1} \Rightarrow C_2 = \frac{12}{(\pi n)^4} \cdot (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow T = \frac{12}{(\pi n)^4} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin \pi n t + \frac{12}{(\pi n)^3} \cdot (-1)^{n+1} \cdot t$$

$$\Rightarrow W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{(\pi n)^4} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin \pi n t + \frac{12}{(\pi n)^3} (-1)^{n+1} \cdot t \right) \sin \pi n x$$

$$\Rightarrow u = v + W_1 + W_2 = t + 1 + (t^3 - t + 1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{(\pi n)^2} \left(2(-1)^{n+1} + 1 + \frac{6}{(\pi n)^2} \cdot (-1)^{n+1} \right) \sin \pi n t + \frac{12t}{(\pi n)^3} (-1)^{n+1} \right\} \sin \pi n x$$

ответ

17

③

20.14) 1) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4\cdot u \\ u|_{t=0} = x^2 - x \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$ $0 \le x \le 1.$

$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}. \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \end{cases}; n \in \mathbb{N}$

Решение: $u = T(t)\cdot X(x)$

$\Rightarrow T''(t)\cdot X = T\cdot X'' - 4T\cdot X$

$\Rightarrow \frac{T''+4T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

Ищем T: $T_n'' + 4T_n + \lambda_n \cdot T_n = 0.$

$T_n'' + (4+\lambda_n)T_n = 0.$

$p^2 = -(4+\lambda_n) \Rightarrow p = \pm i\sqrt{4+\lambda_n}$

$\Rightarrow T(t) = A_n \cdot \cos\left(\sqrt{4+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}}\, t\right) + B_n \cdot \sin\left(\sqrt{4+\pi^2 n^2}\, t\right)$

$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\sqrt{4+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}}\, t\right) + B_n \cdot \sin\left(\sqrt{4+\pi^2 n^2}\, t\right)\right) \sin\frac{\pi n x}{l}$

$u_t'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n \cdot \sqrt{4+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}} \cdot \sin\sqrt{4+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}}\, t + B_n \cdot \sqrt{4+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}} \cos\sqrt{4+\pi^2 n^2 t}\right) \sin\frac{\pi n x}{l}.$

$\Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} = x^2 - x$ – разложим в ряд Фурье

$u_t' = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sqrt{4+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}} \sin\frac{\pi n x}{l} = 0 \Rightarrow B_n = 0.$

Разложим $x^2 - x = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\cdot \sin \pi n x$,

где $q_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l (x^2-x)\sin \pi n x\, dx = 2\int_0^1 x^2 \sin \pi n x\, dx - 2\int_0^1 x \sin \pi n x\, dx =$

$= -\frac{2}{\pi n}\cdot x^2 \cdot \cos \pi n x\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x \cdot 2x\, dx + \frac{2}{\pi n}\cdot x \cdot \cos \pi n x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \underbrace{\cos \pi n x\, dx}_{0} =$

$= \cancel{-\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n} + \underbrace{\frac{4}{(\pi n)^2} x \sin \pi n x\Big|_0^1}_{0} - \frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^1 \sin \pi n x\, dx + \cancel{\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n} =$

$= \frac{+4}{(\pi n)^3}\cos \pi n x\Big|_0^1 = \frac{4}{(\pi n)^3}(\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{8}{(\pi n)^3}, & n = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} = x^2 - x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{(\pi n)^3} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}, \text{ при } n \text{ — нег.}$$

(4)

$$\Rightarrow A_n = \frac{-8}{(\pi n)^3} = \frac{-8}{(\pi(2k-1))^3}, \ k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{8}{(\pi(2k-1))^3} \cdot \cos t\sqrt{4 + \frac{\pi^2(2k-1)^2}{l^2}} \cdot \sin \pi(2k-1)x}$$ ответ

(20.15) 1) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x \\ u|_{t=0} = \sin 2x \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$ $, 0 < x < \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, & n \in \mathbb{N} \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Решение: $u = u_1 + u_2$.

Ищем u_1: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u|_{t=0} = \sin 2x \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$

$$T_n'' + a^2 \cdot \lambda_n \cdot T_n = 0.$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot \cos\frac{a\pi n}{l}t + B_n \cdot \sin\frac{a\pi n}{l}t$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cdot \cos\frac{a\pi n t}{l} + B_n \cdot \sin\frac{a\pi n t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l=\pi}$$

$$u_t'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n \cdot \frac{a\pi n}{l} \cdot \sin\frac{a\pi n t}{l} + B_n \cdot \frac{a\pi n}{l} \cdot \cos\frac{a\pi n}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Хотим: $\begin{cases} u|_{t=0} = \sin 2x \Rightarrow A_2 = 1, \text{ остальные } A_n = 0. \\ u_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow \text{все } B_n = 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow u_1(x,t) = \cos 2t \cdot \sin 2x$$

Ищем u_2 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x \\ u_t|_{t=0} = u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases}$

Разложим x: $x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$,

где $g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l x \cdot \sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot x \cdot \cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^l \cos nx\,dx}_{=0} =$

$$= -\frac{2}{\pi n} \cdot \pi \cdot \cos\pi n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Ищем T: $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow T_n''(t) + n^2 \cdot T_n(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3}$

$\Rightarrow \begin{cases} T_n = C_1 \cdot \cos nt + C_2 \cdot \sin nt + \underbrace{C_n}_{= \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n^3}} \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{n^3} \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow T_n = \frac{2}{n^3} \cdot \cos nt + \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{2}{n^3}\left((-1)^{n+1} + \cos nt\right)$

$\Rightarrow u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \cdot \left((-1)^{n+1} + \cos nt\right) \cdot \sin nx$

$\Rightarrow \boxed{u = u_1 + u_2 = \cos 2t \cdot \sin 2x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n^3} \left(1 - \cos nt\right) \sin nx}$ — ответ.

(20.16) 1) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t + 4x + 8e^t \cdot \cos x, & 0 < x < \pi/2 \\ u|_{t=0} = \cos x \\ u_t|_{t=0} = 2x \\ u_x|_{x=0} = 2t \\ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t \end{cases}$

Решение:

Уберем неоднородность из краевых усл:

$u = v + w$, где $v = 2tx$ $\left(\Rightarrow v|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t,\ v_x|_{x=0} = 2t\right)$

$\Downarrow v_{tt} = v_{xx} = 0.$

$v_t = 2x$

$\Rightarrow w = u - v$

$\begin{cases} \cancel{v_{tt}}^{0} + w_{tt} = \cancel{v_{xx}}^{0} + w_{xx} - \cancel{2v_t}^{=2x} - 2w_t + \cancel{4x} + 8e^t \cdot \cos x \\ w|_{t=0} = (u - v)|_{t=0} = \cos x - 0 = \cos x \\ w_t|_{t=0} = (u_t - v_t)|_{t=0} = 2x - 2x = 0. \\ w_x|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$

⑤

⇒ Задача:
$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} - 2w_t + 8e^t \cdot \cos x \\ w|_{t=0} = \cos x \\ w_t|_{t=0} = 0 \\ w_x|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{cases}$$

решаем однородное: ищем w_1:
$$\begin{cases} w_{1tt} = w_{1xx} - 2w_{1t} \\ w_1|_{t=0} = \cos x \\ w_{1t}|_{t=0} = 0 \\ w_x|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

$W(t,x) = X_n(x) \cdot T_n(t)$

$\Rightarrow X \cdot T'' = X'' \cdot T - 2X \cdot T'$.

$T'' = \frac{X''}{X} \cdot T - 2T'$

$\frac{T'' + 2T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$ $\Rightarrow$ ~~$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} = \sin \lambda$~~

- $\underline{\lambda < 0}$ $\Rightarrow X'' + \lambda X = 0$.

$p^2 = -\lambda > 0$

$\Rightarrow X(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

$X'(x) = \sqrt{-\lambda} c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 \cdot \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(\frac{\pi}{2}) = c_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}} = 0 \\ X'(0) = c_1 \cdot \cancel{e^{\sqrt{-\lambda}x}}^{1} - c_2 \cdot \cancel{e^{-\sqrt{-\lambda}x}}^{1} = 0. \end{cases}$$

$\Downarrow$ $c_1 = c_2 = 0$.

- $\underline{\lambda = 0}$ $X'' = 0$.

$X = c_1 x + c_2$

$X' = c_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(\frac{\pi}{2}) = c_1 \cdot \frac{\pi}{2} + c_2 = 0 \\ X'(0) = c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

- $\underline{\lambda > 0}$ $X'' + \lambda X = 0$.

$p^2 = -\lambda < 0 \Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow X(x) = c_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(x) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$$\begin{cases} X(\frac{\pi}{2}) = c_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} + \cancel{c_2}^{0} \cdot \sin\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0 \\ X'(0) = c_2 \cdot \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi + 2\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = 1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda_n = (1+2n)^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$

$\Rightarrow X(x) = c_1 \cdot \cos(1+2n)x$

Ищем T_n: $T'' + 2T' + \lambda_n T = 0$.

$$p^2 + 2p + \lambda_n = 0, \text{ где } \lambda_n = (1+2n)^2$$

$$D = 4 - 4\cdot\lambda_n = 4(1-(1+2n)^2) = 4(\cancel{1}-\cancel{1}-4n-4n^2) = -16n(n+1)$$

$$\Rightarrow p_{1\,2} = \frac{-2 \pm 4i\sqrt{n(n+1)}}{2} = -1 \pm 2i\sqrt{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow T(t) = A_n \cdot e^{-t} \cdot \cos 2\sqrt{n(n+1)}\,t + B_n \cdot e^{-t} \cdot \sin 2\sqrt{n(n+1)}\,t$$

$$\Rightarrow W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cdot e^{-t} \cdot \cos 2\sqrt{n(n+1)}\,t + B_n \cdot e^{-t} \cdot \sin\sqrt{n(n+1)}\,t \right) \cos(2n+1)x.$$

Хотим: $\begin{cases} W|_{t=0} = \cos x \\ W_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

но $W|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-t} \cdot \cos(2n+1)x = \cos x$

$$\Rightarrow A_0 = e^t; \text{ все ост. } A_n = 0.$$

$$\Rightarrow W(x,t) = \left(e^{-t} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot e^{-t} \cdot \sin\sqrt{n(n+1)}\,t\right)\cos(2n+1)x$$

$$\Rightarrow W'_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(-e^{-t}\cdot\sin\sqrt{n(n+1)}\,t + e^{-t}\cdot\sqrt{n(n+1)}\,\cos\sqrt{n(n+1)}\,t\right)\cos(2n+1)x \equiv 0.$$

$\Rightarrow$ все $B_n \equiv 0$.

$$\Rightarrow W_1(x,t) = e^{-t}\cdot\cos x$$

Ищем W_2: $\begin{cases} W_{tt} = W_{xx} - 2W_t + 8e^t \cos x \\ W|_{t=0} = W_t|_{t=0} = 0 \\ W|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ W_x|_{x=0} = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow$ при $n=0$:

$$T_0'' \cdot X_0 = T_0 \cdot X_0'' - 2T_0' \cdot X_0 + 8e^t \cdot X_0$$

$$T_0'' = T_0 \cdot \frac{X_0''}{X_0} - 2T_0' + 8e^t$$

$$\frac{T_0'' + 2T_0' - 8e^t}{T_0} = \frac{X_0''}{X_0} = -\lambda_0 = -1.$$

$$T_0'' + 2T_0' + T_0 = 8e^t$$

$$T_0 = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 2e^t$$

$+ \; T_0(0) = 0; \; T_0'(0) = 0.$

$T_0(0) = C_1 + 2 = 0. \Rightarrow C_1 = -2$

$T_0' = -e^{-t}(C_1 + C_2 t) + e^{-t}\cdot C_2 + 2e^t$

$\Rightarrow T_0'(0) = -C_1 + C_2 + 2 = 0 \Rightarrow C_2 = -4.$

$\Rightarrow W_2(x,t) = (-2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t)\cos x$

$$\begin{cases} W_1 = e^{-t}\cdot\cos x \\ W_2 = (-2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t)\cos x \end{cases}$$

$+ \; v = 2tx$

$$\Rightarrow \boxed{u = 2tx + (-e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t)\cos x}$$

Ответ

(3.37) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x \cdot \cos 5x \cdot \sin \omega t \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$ найти все ω : $\sup\limits_{Q} |u(x,t)| < +\infty$. (6)

$\Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} = \sin nx, n \in \mathbb{N} \\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Решение: $u = u_1 + u_2$.

u_1 – решение однородной, где $u_0 = u_1 = 0 \Rightarrow u_1 \equiv 0$.

Разложим $\sin x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\sin(x+5x) + \sin(x-5x)) = \frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x$ по $\{\sin nx\}$:

$$\sin x \cdot \cos 5x \cdot \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot \sin nx,$$

где $g_4 = -\frac{\sin \omega t}{2}$; $g_6 = \frac{\sin \omega t}{2}$; остальные $= 0$.

Ищем T: $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

при $n=4$: $T''(t) + 16 \cdot T = -\frac{\sin \omega t}{2} = \frac{\sin(-\omega)t}{2}$

$\lambda^2 + 16 = 0. \quad \lambda = \pm 4i \quad \Rightarrow T = C_1 \cdot \sin 4t + C_2 \cos 4t + T_{част}$.

Если не резонанс: (т.е. $\omega \neq \pm 4$)

$T_{част} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$T'' = -\omega^2 A \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t.$

$\Rightarrow \sin \omega t \cdot A(-\omega^2 + 16) + \cos \omega t \cdot B(-\omega^2 + 16) = -\frac{\sin \omega t}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A(-\omega^2 + 16) = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2(16-\omega^2)} \end{cases}$

$\Rightarrow T = C_1 \cdot \sin 4t + C_2 \cdot \cos 4t - \frac{1}{2(16-\omega^2)} \sin \omega t$

но $T_n(0) = T'(0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2(16-\omega^2)}$

$T' = 4C_1 \cdot \cos 4t - C_2 \cdot 4 \cdot \sin 4t - \frac{\omega}{2(16-\omega^2)} \cos \omega t$

$\Rightarrow T'(0) = 4C_1 - \frac{\omega}{2(16-\omega^2)} \Rightarrow C_1 = \frac{\omega}{8(16-\omega^2)}$

$\Rightarrow \boxed{T_4 = \frac{\omega}{8(16-\omega^2)} \cdot \sin 4t + \frac{1}{2(16-\omega^2)} \cos 4t - \frac{1}{2(16-\omega^2)} \sin \omega t}$ – если не резонанс

Если резонанс: $\omega = \pm 4$.

$$\Rightarrow T_{част} = t(A\cos 4t + B\sin 4t)$$

$$\Rightarrow T' = (A\cos 4t + B\sin 4t) + t(-A\cdot 4\cdot\sin 4t + 4B\cos 4t)$$

$$T'' = 2(-4A\sin 4t + 4B\cos 4t) - 16t(A\cos 4t + B\sin 4t)$$

Хотим: $T'' + 16T = -\frac{\sin 4t}{2}$

$$\sin 4t(-8A - \cancel{16Bt}) + \cos 4t(8B - \cancel{16At}) + \cancel{16At}\cos 4t + \cancel{16Bt\sin 4t} = -\frac{\sin 4t}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ -8A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = 1/16 \Rightarrow T_{част} = \frac{t}{16}\cos 4t$$ — частн. реш.

Аналогично, для $\omega = \pm 6$.

$$\boxed{\text{Ответ. } \omega \neq \pm 4, \pm 6}$$

3.38
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = ax \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = \sin at \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin \pi n x,\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение: Уберем неоднородность из краевого усл.:

$$u = v + w$$

$$v := \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l}x + \alpha(t) = \frac{\sin at - 0}{1}\cdot x + 0 = \sin at\cdot x. \Rightarrow v_t = a\cdot\cos at\cdot x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + \underbrace{v_{xx}}_{=0} - \underbrace{v_{tt}}_{=-a^2\sin at\, x} \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = 0 - 0 = 0 \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = \cancel{\sin at - ax}\ ax - ax = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = w_1 + w_2$$

$$w_1: \begin{cases} w_{tt} = w_{xx} \\ w|_{t=0} = 0 \\ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \Downarrow\ w_1 \equiv 0 \qquad w_2: \begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + a^2\cdot\sin at\cdot x \\ w|_{t=0} = 0 \\ w_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Разложим $x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\cdot\sin\pi n x$,

где $g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l x\cdot\sin\pi n x\,dx =$

$$= -\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\pi n}\cdot x\cdot\cos\pi n x\Big|_0^l + \frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\pi n}\underbrace{\int_0^l \cos\pi n x\,dx}_{=0} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}$$

$\Rightarrow$ ищем T_n: $T_n'' + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = g_n(t) = -\frac{2}{\pi n} = -\frac{2}{\pi n}\cdot a^2\sin at$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n\cdot\cos\pi n t + B_n\cdot\sin\pi n t + T_{част}(t)$$

$\Rightarrow (a \neq \pi n)$ — при них резонанс

18.11.19. УРЧП. семинар 12.

В явном виде собств. функции находятся только в этих 4 рассматриваемых краевых условиях. А в остальных — просто корни соотв. ур-я.

Будем решать неоднородную задачу: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \\ + \text{краевые усл.} \end{cases}$ $0 \le x \le l$.

e.g. $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$. -однородное.

Ищем $u = v + w$.

$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v|_{t=0} = u_0(x) \\ v_t|_{t=0} = u_1(x) \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(t,x) \\ w|_{t=0} = 0 \\ w_t|_{t=0} = 0 \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \end{cases}$

уже умеем решать

Найдем w: мы выбрали краевое усл. $w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0$.

$\Rightarrow$ собств. функции $X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$;

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Разложим $f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot X_n(x)$, где $g_n(t) = \dfrac{\int_0^l f(t,x) \cdot X_n(x)\, dx}{\int_0^l X_n^2(x)\, dx} = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) X_n(x) dx$.

коэф. Фурье f по X_n

$\int_0^l X_n^2(x)\,dx = l/2$

$\Rightarrow$ получаем задачу $\begin{cases} w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x) \\ w_{tt} = a^2 \cdot w_{xx} + f(t,x) \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \cdot X_n(x) = a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \cdot X_n(x)$

но вспомним ур-е на X_n: $X_n''(x) + \lambda_n^2 \cdot X_n(x) = 0$.

$\Rightarrow X_n''(x) = -\lambda_n^2 \cdot X_n(x)$ — подставим

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\cdot X_n(x) = -a^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cdot T(t)\cdot X_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\cdot X_n(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow T_n(t) = T_{\text{общ. одн.}}(t) + \underbrace{T_{\text{част. неодн.}}}(t)$

подбором, если sin, cos, const, e
иначе – метод вариации пост.

$\Rightarrow$ нашли T_n

$\Rightarrow W(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot X_n(x).$

20.6 a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2b_{\text{const}} \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$ $\quad 0 \le x \le l.$

Решение: 1) Краевое усл: $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \Rightarrow X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2;\ n\in\mathbb{N}$

но $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow v \equiv 0.$

2) Разложим $2b$ по синусам:

$2b = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}$

$\Rightarrow g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l 2b\,\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{4b}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{-4b}{l}\cdot\frac{l}{\pi n}\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l =$

$= \frac{-4b}{\pi n}(\cos\pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{8b}{\pi n}, & n = 2k-1 \end{cases};\ k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 2 серии ур-ий на T: $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

- $n = 2k \Rightarrow g_n(t) = 0 \Rightarrow T_n \equiv 0.$

②

• $n=2k-1 \Rightarrow T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = \frac{8b}{\pi n}$ — неоднор. ур-е

$\Rightarrow T_n(t) = C_{1n} \cdot \sin\frac{\pi n t}{l} + C_{2n} \cdot \cos\frac{\pi n t}{l}$ + част. реш.

част. реш $= const = A := \frac{8b}{\pi n} \cdot \left(\frac{l}{a\pi n}\right)^2 = \frac{8bl^2}{a^2(\pi n)^3}$

$\Rightarrow T_n(t) = C_{1n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) + C_{2n} \cdot \cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right) + \frac{8bl}{\underset{1}{\overset{\shortparallel}{a^2}}(\pi n)^3}$

Удовлетворим условие, что $T_n(0) = T_n'(0) = 0$:

$T_n(0) = C_{2n} + \frac{8bl^2}{(\pi n)^3} = 0 \Rightarrow C_{2n} = -\frac{8bl^2}{(\pi n)^3}$

$T_n'(t) = \frac{\pi n}{l} \cdot C_{1n} \cdot \cos\frac{\pi n t}{l} - \frac{\pi n}{l} \cdot C_{2n} \cdot \sin\frac{\pi n t}{l}$

$T_n'(0) = \frac{\pi n}{l} \cdot C_{1n} = 0 \Rightarrow C_{1n} = 0.$

$\Rightarrow T_n(t) = -\frac{8bl^2}{(\pi n)^3} \cdot \cos\frac{\pi n t}{l} + \frac{8b}{\pi n} \cdot \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 = \frac{8bl^2}{(\pi n)^3}\left(1 - \cos\frac{\pi n t}{l}\right)$

$$\boxed{\Rightarrow u(t,x) = 8bl^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{\pi(2k-1)t}{l}}{(\pi(2k-1))^3} \cdot \sin\frac{\pi(2k-1)x}{l}}$$ ← Ответ.

Пример 2

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2b \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}$$

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$; $\lambda_0 = 1$.

Разложим $2b = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\cos\frac{\pi n x}{l} = 2b \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos\frac{\pi n x}{l}$

$\Rightarrow g_0 = 2b$

$g_i = 0, \ \forall i > 0.$

Ищем T: $\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow$ при $n \geq 1$: $g_n = 0 \Rightarrow T_n \equiv 0$.

при $n = 1$: $T_0''(t) + 0 = \underset{2b.}{g_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_0(t) = 2b \cdot t^2 + C_{10} \cdot t + C_{20}.$$

НУ $T_n(0) = T_n'(0) = 0. \Rightarrow T_0(t) = b \cdot t^2$

$$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x) = 2bt^2 \cdot \cos 0 = \boxed{bt^2} \text{ ответ.}$$

пример 3
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin 2x \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \ n \in \mathbb{N}.$$

Разложим $f(t,x) = \sin 2x$ в ряд Фурье $\Rightarrow g_2 = 1$

$g_n = 0$ при $n \neq 2$.

Ищем T:
$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cdot T_n(t) = g_n(t) \\ T_n'(0) = T_n(0) = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ при $n \neq 2$: $T_n(t) \equiv 0$.

при $n = 2$: $T_2''(t) + 4 \cdot T_2(t) = 1$.

$$\Rightarrow T_2(t) = C_1 \cdot \sin 2t + C_2 \cdot \cos 2t + \frac{1}{4}$$

НУ $T_2(0) = T_2'(0) = 0 \Rightarrow T_2(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$

$$\Rightarrow \boxed{u(t,x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) \cdot \sin 2x} \text{ — ответ.}$$

Мы получили ограниченное решение

чтобы с помощью огранич. мат. силы получить неогр. реш — надо сделать резонанс

Пример 4. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin 2x \cdot \sin 2t \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$

$X_n(x) = \sin nx$

Разложим $f(t,x) = \sin 2x \cdot \sin 2t$.

$\Rightarrow g_2 = \sin 2t$

$g_n = 0,\ n \neq 2. \Rightarrow T_n \equiv 0$, при $n \neq 2$.

при $n = 2$: $T_n''(t) + 4T_2(t) = \sin 2t$.

ищем частн. реш. в виде $t^s \cdot e^{\alpha t}(\tilde{P}_m(t) \cdot \sin \beta t + \tilde{Q}_m(t) \cos(\beta t))$, $m = \max\{p, q\}$.

для $\sin 2t$: $\alpha + i\beta = 2i$

А хар. ур-е: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$\Rightarrow$ кратность $= 1$.

$\Rightarrow$ част. реш $= t \cdot (A \cdot \sin 2t + B \cdot \cos 2t)$ где A и B находятся из усл. того, что это решение.

~~частн решение = Asin2t + Bcos2t~~

$\Rightarrow u(t,x) = \{c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t + t \cdot (A \sin 2t + B \cos 2t)\} \sin 2x$

неогр. неуст. решения

Амплитуда ↑ со временем.

Пример 5. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = \alpha(t) \\ u|_{x=l} = \beta(t) \end{cases}$ ← неоднородность сидит в краевых усл.

Метод Фурье не работает.

Сделаем краевое усл. однородным: $u = v + w$ — удовл. неодн. краевым усл, любое нам виде.

$\Rightarrow w = u - v$.

Например, выберем $v = \frac{\beta(t)-\alpha(t)}{l}x + \alpha(t)$ — оно удовл. краевым усл.

$\Rightarrow$ раз $u = v + w \Rightarrow (v+w)_{tt} = a^2 \cdot (v+w)_{xx}$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot w_{xx} + a^2 \cdot v_{xx} - v_{tt} \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} \\ w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

— неоднородность переехала в 1-е ур-е.!

— неоднородность ушла из краевого усл.

(20.14) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4 \cdot u \\ u|_{t=0} = x^2 - x, \quad 0 \le x \le 1 \\ u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$ — это не $f(t,x)$!

Решение: $u = T(t) \cdot X(x)$ и подставим в исх. ур-е.

$T''(t) \cdot X = T \cdot X'' - 4T \cdot X$

$\Rightarrow \frac{T'' + 4T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

ищем X_n и λ_n — они не изменятся

ур-е на T изменилось.

Д/З. (Вл) 20.6(2)

20.9(1,2)

20.14(1) + (Ш): 3.37

20.15(1) 3.38.

20.16(1)

20.1 1) $u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$

$u|_{t=0} = u_0(x) = A \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$

$u_t|_{t=0} = 0$

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$

Решение: $u(x,t) = T(t)\cdot X(x)$

$\Rightarrow T''(t)\cdot X(x) = a^2 \cdot T(t)\cdot X''(x)$

$\Rightarrow \frac{T''}{a^2 \cdot T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$

• $\lambda < 0$ $\Rightarrow X'' + \lambda X = 0.$

$p^2 = -\lambda > 0$

$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X(0) = C_1 + C_2 = 0$

$X(l) = C_1 \cdot e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2 \cdot e^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0$ $\rightarrow C_1 = C_2 = 0.$

• $\lambda = 0$ $X'' = 0$

$X = C_1 x + C_2$

$\Rightarrow X(0) = C_2 = 0$

$X(l) = C_1 l + C_2 = 0$ $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$

• $\lambda > 0$ $\Rightarrow X'' + \lambda X = 0.$

$p^2 = -\lambda < 0.$ $\Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x$

$X(0) = C_1 = 0$

$X(l) = C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$

$\Rightarrow l\sqrt{\lambda} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}_+$

$\rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow X(x) = \cancel{C_2}^{\,1} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$

Для T: $T'' + a^2 \lambda_n T = 0.$

$p^2 = -a^2 \cdot \lambda_n < 0 \Rightarrow p = \pm i a\sqrt{\lambda_n}$

$\Rightarrow T(t) = A_n \cos\left(a \cdot \frac{\pi n}{l} t\right) + B_n \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi n}{l} t\right)$, $n = 1, 2 \ldots$

$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(a \cdot \frac{\pi n}{l} t\right) + B_n \cdot \sin\left(a\frac{\pi n}{l} t\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{l}.$ $\cancel{\Rightarrow u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l} \overset{?}{=} A\sin\frac{\pi x}{l}}$

$u'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n \cdot \frac{a\pi n}{l}\cdot \sin\left(a\cdot\frac{\pi n}{l}t\right) + B_n \cdot \frac{a\pi n}{l}\cdot\cos\left(a\frac{\pi n}{l}t\right)\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \overset{?}{=} A \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} & \Rightarrow \begin{cases} A_n = A \\ \text{все остальные } A_k = 0. \end{cases} \\ u_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{l} \cdot B_k \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \overset{?}{=} 0 & \Rightarrow \text{все } B_k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \underbrace{A_n}_{A} \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi n t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = A \cdot \cos\left(\frac{a\pi n t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}$$ ← ответ:

20.2 1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$u|_{t=0} = 0$

$u_t|_{t=0} = v_0 = const,\ x \in [0, l]$.

$u|_{x=0} = 0$

$u|_{x=l} = 0.$

по 20.1 : $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cancel{A_k} \cdot \cos\left(\frac{a \cdot \pi k t}{l}\right) + B_k \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi k t}{l}\right)\right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \text{все } A_k = 0.$$

$$u_t'(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-A_k \cdot \frac{a\pi k}{l} \cdot \sin\left(\frac{a\pi k t}{l}\right) + B_k \cdot \frac{a\pi k}{l} \cos\left(a \cdot \frac{\pi k t}{l}\right)\right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$$u_t'|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{a\pi k}{l} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \overset{?}{=} v_0$$

найдем коэф. Фурье $B_k = \frac{2}{l} \int_0^l v_0 \cdot \frac{l}{a\pi k} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} dx =$

$$= \frac{2v_0}{a\pi k} \int_0^l \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{-2v_0}{a\pi k} \cdot \frac{l}{\pi k} \cdot \cos \frac{\pi k x}{l}\Big|_0^l =$$

$$= -\frac{2v_0 l}{a\pi^2 k^2} \cdot \underbrace{(\cos \pi k - 1)}_{\begin{cases} 0, \text{ если } k = 2n \\ -1, \text{ если } k = 2n+1 \end{cases}} = \frac{2v_0 l}{a\pi^2 (2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{2v_0 l}{a\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{l}\right)}$$ — ответ.

$$2)\quad u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$$

$$u|_{t=0} = 0$$

$$u_t|_{t=0} = \begin{cases} v_0, \text{ если } x \in [\alpha,\beta] \subseteq [0;\ell] \\ 0, \text{ если } x \notin [\alpha,\beta] \end{cases}$$

$$u|_{x=0} = 0$$

$$u|_{x=\ell} = 0.$$

по 20.1: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi k t}{\ell}\right) + B_k \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi k t}{\ell}\right)\right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{\ell}$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin \frac{\pi k x}{\ell} \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \text{все } A_k = 0.$$

$$u'_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{a\pi k}{\ell} \cdot \sin \frac{\pi k x}{\ell} \overset{?}{=} v_0 \cdot I_{[\alpha,\beta]}$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{\ell}{a\pi k} v_0 \cdot I_{[\alpha,\beta]} \cdot \sin \frac{\pi k x}{\ell}\, dx = \frac{2v_0}{a\pi k} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \frac{\pi k x}{\ell}\, dx =$$

$$= -\frac{2v_0}{a\pi k} \cdot \frac{\ell}{\pi k} \cdot \cos \frac{\pi k x}{\ell} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{2v_0 \ell}{a\pi^2 k^2}\left(\cos \frac{\pi k \alpha}{\ell} - \cos \frac{\pi k \beta}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{2v_0\ell}{a\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\cos \frac{\pi k \alpha}{\ell} - \cos \frac{\pi k \beta}{\ell}\right) \sin\left(a \cdot \frac{\pi k t}{\ell}\right) \sin \frac{\pi k x}{\ell}}$$ ответ.

(20.3.) 1) а)

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u|_{x=0} = 0$$

$$u_x|_{x=\ell} = 0.$$

Решение: $X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda} x \Rightarrow X'(x) = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X'(\ell) = \sqrt{\lambda} C_2 \cdot \cos \ell\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot \ell = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2\ell}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(2n+1)}{2\ell}, \ n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\Rightarrow X(x) = C_2 \cdot \sin \frac{\pi(2n+1)}{2\ell} x$$

$T'' + a^2\lambda_n T = 0 \Rightarrow T(t) = A_n \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2\ell} t\right) + B_n \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2\ell} t\right), \ n \in \mathbb{Z}_+$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{a \cdot \pi(2n+1)}{2\ell} t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{a \cdot \pi(2n+1)}{2\ell} t\right)\right) \cdot \sin \frac{\pi(2n+1) x}{2\ell}$$

Удовлетворим условия $u|_{t=0} = u_0(x)$

$u_t|_{t=0} = u_1(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(a\frac{\pi(2n+1)}{2l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2l} t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right)$$

$$\Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l} x \overset{?}{=} u_0(x) \Rightarrow A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x) \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\, dx$$

$$u_t'(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-A_n \cdot \frac{a\pi(2n+1)}{2l} \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2l} \cdot t\right) + B_n \cdot \frac{a\pi(2n+1)}{2l} \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2l} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right)$$

$$\Rightarrow u_t|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{a\pi(2n+1)}{2l} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right) \overset{?}{=} u_1(x)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{l} \cdot \frac{2l}{a\pi(2n+1)} \cdot \int_0^l u_1(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right) dx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4}{a\pi(2n+1)} \int_0^l u_1(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right) dx$$

б) $u_x|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$.

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\Rightarrow X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda} \cdot \sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda} \cdot \cos\sqrt{\lambda}x$$

Хотим: $\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X(l) = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow l\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi(1+2n)}{2}, \; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}\right)^2, \; n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow X(x) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} x\right), \; n \in \mathbb{N}_0$$

$$T'' + a\lambda_n T = 0 \Rightarrow T(x) = A_n \cdot \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) + B_n \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2l} t\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{a\pi(1+2n)}{2l} t\right) + B_n \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi(2n+1)}{2l} t\right)\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right)$$

Удовлетворим условие $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x)$

$$\Rightarrow u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} x\right) \overset{?}{=} u_0(x) \Rightarrow A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right) dx$$

③

$$u'(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}-A_n\cdot\frac{a\pi(1+2n)}{2l}\cdot\sin\left(\frac{a\pi(2n+1)}{2l}t\right)+B_n\cdot\frac{a\pi(2n+1)}{2l}\cdot\cos\left(\frac{a\pi(2n+1)}{2l}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)$$

$$\Rightarrow u'_t\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot\frac{a\pi(2n+1)}{2l}\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)\overset{?}{=}u_1(x)$$

$$\Rightarrow B_n\cdot\frac{a\pi(2n+1)}{2l}=\frac{2}{l}\int_0^l u_1(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)dx$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{4}{a\pi(2n+1)}\int_0^l u_1(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)dx.$$

2) $u'_x\Big|_{x=0}=u'_x\Big|_{x=l}=0$ – уже решили в классе, см. семинар 11, II.

3) $\begin{cases}u'_x\Big|_{x=0}=0\\ (u_x+h\cdot u)\Big|_{x=l}=0.\end{cases}$

$X''+\lambda X=0\Rightarrow X(x)=c_1\cdot\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\cdot\sin\sqrt{\lambda}x$

$X'(x)=-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$

$X'(0)=c_2\cdot\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow c_2=0$

$X'(l)+h\cdot X(l)=-c_1\sqrt{\lambda}\cdot\sin l\sqrt{\lambda}+h\cdot c_1\cdot\cos l\sqrt{\lambda}=0.$

$\Rightarrow\sqrt{\lambda}\cdot\sin l\sqrt{\lambda}=h\cos l\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow tg\, l\sqrt{\lambda}=\frac{h}{\sqrt{\lambda}}\quad\Rightarrow tg\, ly=\frac{h}{y}$ – ур-е для нахождения λ_n.

$\Rightarrow X(x)=c_1\cdot\cos x\sqrt{\lambda}.$

$T''+a\lambda_nT=0\Rightarrow T(x)=A_n\cdot\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)+B_n\cdot\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)\ ,\ n\in\mathbb{N}$ – при $\lambda\neq0$.

$$\Rightarrow u(x,t)=X(x)\cdot T(t)=\sum_{n=1}\left(A_n\cdot\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)+B_n\cdot\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)\right)\cos x\sqrt{\lambda_n}$$

Удовлетворим $u|_{t=0}=u_0(x)$; $u_t|_{t=0}=u_1(x)$

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos x\sqrt{\lambda_n}\overset{?}{=}u_0(x)$$

$$\Rightarrow A_n\cdot\underbrace{(X_n;X_n)}_{\cos x\sqrt{\lambda_n}}=\int_0^l u_0(x)\cdot\cos x\sqrt{\lambda_n}\,dx\Rightarrow A_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l u_0(x)\cos x\sqrt{\lambda_n}\,dx$$

где $\|X_n\|^2=\int_0^l\cos^2x\sqrt{\lambda}\,dx=\int_0^l\frac{1+\cos 2x\sqrt{\lambda_n}}{2}dx=\frac{l}{2}+\frac{l}{2}\frac{h}{2(\lambda_n^2+h^2)}$ ← откуда?

найдем B_n: $u'(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-A_n\cdot a\sqrt{\lambda_n}\cdot\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)+B_n\cdot a\sqrt{\lambda_n}\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)\big)\cos x\sqrt{\lambda_n}$

$$\Rightarrow u'_t\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot a\sqrt{\lambda_n} \cdot \cos x\sqrt{\lambda_n} \stackrel{?}{=} u_1(x)$$

$$\Rightarrow B_n \cdot a\sqrt{\lambda_n} \cdot \|X_n\|^2 = \int_0^l u_1(x) \cos x\sqrt{\lambda_n}\, dx$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2 \cdot a\lambda_n} \int_0^l u_1(x) \cos x\sqrt{\lambda_n}\, dx$$

11.11.19. УРЧП. Семинар 11.

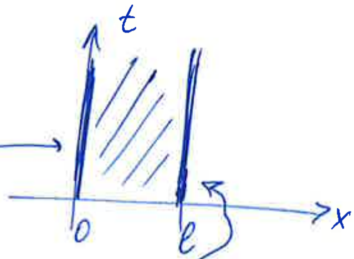
Раньше мы решали либо обычную з.к,
либо з.к. на полуоси $x\in[0;+\infty)$ с 1 граничным данным: $\left[\begin{matrix} u_x|_{x=0} = \dots \\ u|_{x=0} = \dots \end{matrix}\right.$

А теперь решаем з.к на отрезке $0\le x\le l$ с 2 граничными условиями:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + 0$

$u|_{t=0} = u_0(x)$

$u_t|_{t=0} = u_1(x)$ — $0\le x\le l$.



$+\begin{cases} (\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=0} = 0 \\ (\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = 0 \end{cases}$ — ориор. условия, причем $\alpha_i^2+\beta_i^2=0$.

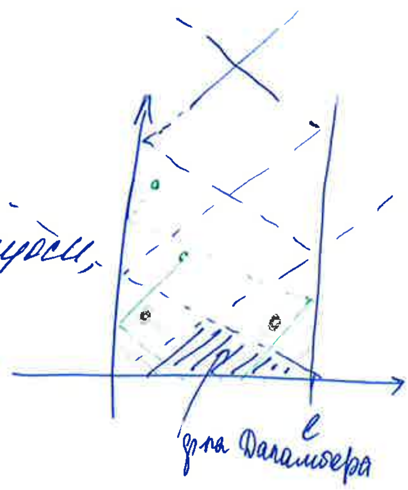
4 варианта граничных условий:

1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \beta_1$ и $\beta_2 \ne 0$.
т.е $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ — условие жёсткого закрепления обоих концов.

2) $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$ — оба конца свободны

3) $u_x|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

4) $u|_{x=0} = u_x|_{x=l}$



Как решать? Можно попытаться так же, как на полуоси, отражением нач. данных относ. 0 и l

Но процесс идёт вверх до бесконечности, и для произв. t мы так не выпишем (хотя выпишем, нужно просто нач. данные отразить относ 0 и относ l).

Лучше методом Фурье.

Метод Фурье

$u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$ — ищем нетрив. решение такого вида.

подставим в ур-е:

(I.) Граничное усл: $U|_{x=0} = U|_{x=\ell} = 0$.

$T''(t) \cdot X(x) = a^2 \cdot T(t) \cdot X''(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda} \quad (*)$$

– т.к слева функция от t, а справа – от x.

$\Rightarrow$ $X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0$. $+ \begin{cases} X(0)=0 \\ X(\ell)=0 \end{cases}$ – это краевая задача, её нетрив. решение не обязано $\exists$.

• пусть $\lambda < 0$

$\Rightarrow$ хар. ур-е: $p^2 + \lambda = 0$

$p^2 = -\lambda > 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} x}$

подставим граничное условие: $U|_{x=0} = U|_{x=\ell} = 0$

$\Rightarrow X(0) = 0;\ X(\ell) = 0$.

$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} \cdot \ell} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda} \cdot \ell} = 0 \end{cases}$

– это система 2-х лин. одн. ур-й, с матрицей $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix}$ – т.е $\det \neq 0$.

$\Rightarrow$ только нулевое решение: $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X \equiv 0. \Rightarrow u \equiv 0$.

• пусть $\lambda = 0$: $X''(x) + \cancel{\lambda X(x)}^{0} = 0$.

$\Rightarrow X''(x) = 0$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cdot x + C_2$

подставим граничное усл: $\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \cdot \underset{\neq 0}{\ell} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X \equiv 0$.

• пусть $\lambda > 0$: $\Rightarrow$ хар. ур-е $p^2 + \lambda = 0$.

$p^2 = -\lambda < 0$.

$\Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cdot e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{\lambda}x} = C_1(\cos\sqrt{\lambda}x + i\sin\sqrt{\lambda}x) + C_2(\cos\sqrt{\lambda}x - i\sin\sqrt{\lambda}x)$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cdot \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \cdot \sin x\sqrt{\lambda}$

подставим граничные усл: $\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(\ell) = C_2 \cdot \sin \ell\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \ell\sqrt{\lambda} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – без нуля, т.к $\ell \neq 0, \lambda \neq 0$.

$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}$ – нашли серию лямбд.

Эти лямбда наз. собственными значениями этой краевой задачи. ②

Найдя λ_n, мы нашли $X_n(x) = \underbrace{C_2}_{=:1} \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x$ – ортогональная (но не ортонорм.) система на отрезке $[0, \ell]$,

т.е $(X_n; X_m) = \int_0^\ell X_n X_m \, dx = 0$, при $n \neq m$.

Теперь, найдя λ_n, подставим их в (*) и найдем T_n:

$T_n''(t) + a^2 \lambda_n \cdot T_n(t) = 0$. ; $\lambda_n > 0$. ; $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$

$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cdot \cos (a \sqrt{\lambda_n} \cdot t) + B_n \sin (a \sqrt{\lambda_n} \cdot t) =$

$= A_n \cos \left(\frac{a \pi n}{\ell} t\right) + B_n \sin \left(\frac{a \pi n}{\ell} t\right)$

$\Rightarrow u_n(t, x) = T_n(t) \cdot X_n(x)$ – мы нашли n штук u_n, которые удовл. ур-ю $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ и граничному усл. $u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0$.

Но u_n ещё не удовл. нач. усл. $u|_{t=0} = u_0(x)$

$u_t|_{t=0} = u_1(x)$

Но наше ур-е – лин. однородное $\Rightarrow$ ряд из u_n – тоже решение.

Но $u_n(t, x) = T_n(t) \cdot X_n(x) = \left(A_n \cos \left(\frac{a \pi n}{\ell} t\right) + B_n \sin \left(\frac{a \pi n}{\ell} t\right)\right) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$

$$\Rightarrow u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \left(\frac{a \pi n}{\ell} t\right) + B_n \cdot \sin \left(\frac{a \pi n}{\ell} t\right)\right) \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$

Найдем A_n и B_n из условий $\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$

При $t=0$: $u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell} \stackrel{?}{=} u_0(x)$

$\Rightarrow A_n$ – коэфф. Фурье при разложении u_0 по системе $\sin \frac{\pi n x}{\ell}$.

- Найдем A_m: $\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell}; X_m}_{\text{ненулевое – одно слагаемое, из-за ортогональности}}\right) = (u_0(x), X_m)$

$\Rightarrow A_n \cdot \underbrace{\int_0^\ell X_n^2 \, dx}_{=\ell/2} = \int_0^\ell u_0(x) \underbrace{X_n}_{\sin \frac{\pi n}{\ell} x} dx \Rightarrow \boxed{A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{\ell} \, dx}$

$\int_0^\ell X_n^2 \, dx = \int_0^\ell \sin^2 \frac{\pi n x}{\ell} \, dx = \int_0^\ell \frac{1 - \cos \frac{2 \pi n x}{\ell}}{2} \, dx = \frac{\ell}{2}$

• Найдём B_n: $u'_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \cdot \frac{a\pi n}{l} \cdot \sin\frac{a\pi n}{l}t + B_n \cdot \frac{a\pi n}{l}\cos\frac{a\pi n}{l}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$

$$\Rightarrow u'_t(0;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n \cdot \frac{a\pi n}{l}}_{\text{коэф. Фурье ф-и } u_1} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \stackrel{?}{=} u_1(x)$$

$$\Rightarrow B_n \cdot \frac{a\pi n}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l u_1(x) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l u_1(x)\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx}$$

Вывод: Для $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с граничными усл. $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$

$$\boxed{\begin{gathered} u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cdot \cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{a\pi n}{l}\right)t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \\ \text{где } A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \\ B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l u_1(x)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \end{gathered}}$$

II. Граничные усл. $u'_x|_{x=0} = u'_x|_{x=l} = 0$.

Ищем $u(t,x) = T(t)\cdot X(x)$

$$\Rightarrow \frac{T''}{a^2 \cdot T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\Rightarrow X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0$$

• пусть $\lambda > 0$: $p^2 + \lambda = 0$.

$p^2 = -\lambda < 0$

$\Rightarrow p = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(x) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\cdot x)$

Г~~раничные ус~~ $\Rightarrow X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\cdot\sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(0) = \sqrt{\lambda}\cdot C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$

$X'(l) = -C_1\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sin(l\sqrt{\lambda}) = 0.$

$\Rightarrow X_n(x) = C_1 \cdot \cos\frac{\pi n x}{l}.$

$\Rightarrow l\sqrt{\lambda} = \pi n$

$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n\in\mathbb{N} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, n \in \mathbb{N}}$

3

• Пусть $\lambda = 0$ $\quad p^2+\lambda=0$, $p^2=-\lambda=0$. $\Rightarrow X''(x)=0$.

$$X(x)=C_1x+C_2$$

$$\Rightarrow X'(x)=C_1.$$

$$\begin{cases} X'(0)=C_1=0 \\ X'(l)=C_1=0 \end{cases} \Rightarrow X(x)=C_2=:1$$

• $\lambda<0$ $\quad p^2+\lambda=0$

$p^2=-\lambda>0$

$\Rightarrow p=\pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow X(x)=C_1\cdot e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$X'(x)=\sqrt{-\lambda}\cdot C_1\cdot e^{\sqrt{-\lambda}x}-\sqrt{-\lambda}\cdot C_2\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X'(0)=\sqrt{-\lambda}\cdot C_1-\sqrt{-\lambda}\cdot C_2=0 \Rightarrow C_1-C_2=0.$$

$$X'(l)=\sqrt{-\lambda}\left(C_1\cdot e^{l\sqrt{-\lambda}}-C_2\cdot e^{-l\sqrt{-\lambda}}\right)=0$$

– СЛАУ лин. однор. система с невыр. матрицей $\Rightarrow C_1=C_2=0$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_n=\frac{\pi n}{l} \mid n\in\mathbb{N} \Rightarrow X_n(x)=\cos\frac{\pi n x}{l} \\ \lambda_0=0 \Rightarrow X_n(x)=1 \end{array}\right.$$

– заметим, что при $n:=0$: $X_n(x)=\cos 0=1$.

$\Rightarrow \lambda_0=0$ – просто частный случай 1-го случая: $\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$.

$$\Rightarrow \lambda_n=\frac{\pi n}{l} \Rightarrow X_n(x)=\cos\frac{\pi n x}{l};\ n=0,1,2\ldots$$

– система косинусов вместе с единицей – тоже ортонорм. система.

Для T ур-е (*) не поменялось

$$\Rightarrow T_n(x)=A_n\cdot\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)+B_n\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)$$

$$\Rightarrow u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)+B_n\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\cos\frac{\pi n x}{l}=$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos\frac{a\pi n}{l}t+B_n\cdot\sin\left(\frac{a\pi n}{l}t\right)\right)\cos\frac{\pi n x}{l}.$$

А теперь удовлетворим нач. усл. $\begin{cases} u(0,x)=u_0(x) \\ u'_t(0,x)=u_1(x) \end{cases}$

Но $u(0,x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}$

посчитаем A_0: $(u_0;X_0)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_nX_n;X_0\right)=A_0\cdot\int_0^l X_0^2dx=l\cdot A_0.$

$$\Rightarrow \boxed{A_0=\frac{1}{l}\int_0^l u_0(x)\cdot 1dx}$$

Найдём остальные A_n: $(u_0(x), X_m) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n; X_m\right) = A_m \cdot \underbrace{\int_0^l X_m^2 dx}_{l/2}$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} dx}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Для B_n ничего не поменялось: $\boxed{B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l u_1(x) \cos\frac{\pi n x}{l} dx}$

Зам. Увеличивая гладкость u_0 и u_1, мы увеличиваем скорость стремления коэф. Фурье к нулю $\Rightarrow$ ряд Фурье быстро сход. $\Rightarrow R_{сход} \uparrow$.

Если $u_0 \in C^3$
$u_1 \in C^2$ — то решение можно почленно дифф.

Зам. Если вместо ур-я $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

у нас $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda}$$

тут ничего не изменилось

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi n x}{l}, \ n \in \mathbb{N}$$

а часть для T — изменилась:

$$T'(t) + a\lambda_n \cdot T(t) = 0. \qquad p = -a\lambda_n$$

$$\Rightarrow T(t) = C \cdot e^{-a\lambda_n t} = C \cdot e^{-a \cdot \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot t}$$

Д/З. Вл: 20.1(1)
20.2(1,2)
20.3(1, 2, 3)

1) $u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$

2) $u_x|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$.

сделали

$u_x + h \cdot u|_{x=l} = 0$ — читать Шамаев, §1, пример 3.