

## Числовые ряды. Теория

Оп.  $\sum a_n$  расходится, если  $S_n \rightarrow \infty$  или не существует

### 1) Необходимый признак сходимости

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то  $\sum a_n$  расходится

Собственно гармонический ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ : расходится при  $\alpha \leq 1$

сходится при  $\alpha > 1$

Признаки сравнения для положительных числовых рядов

### 2) Признак сравнения:

• Если  $\sum b_n$  сходится и, начиная с нек.  $N$ ,  $a_n \leq b_n$ , то  $\sum a_n$  тоже сходится

• Если  $\sum b_n$  расходится, начиная с нек.  $N$ ,  $a_n \geq b_n$ , то  $\sum a_n$  тоже расходится

// Подходит для многочленов, дробей с многочленами, целых только чисел

### 3) Предельный признак сравнения:

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$ , то  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  сходятся

или расходятся одновременно

// Подходит для многочленов, дробей с многочленами, целых только чисел

### 4) Логарифмический признак:

• Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1$ , то  $\sum a_n$  сходится

• Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$ , то  $\sum a_n$  расходится

### 5) Признак сходимости Даламбера:

• Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , то  $\sum a_n$  сходится

• Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , то  $\sum a_n$  расходится

// Подходит для чисел в степенях ( $2^n, 5^n, \dots$ ), факториалов, целых чисел (1, 3, 5, ..., (2n-1), ...)

### 6) Радиальный признак Коши:

• Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , то ряд сходится

• Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , то ряд расходится

// Подходит, если  $\sqrt[n]{\cdot}$  хорошо увеличивается

### 7) Интегральный признак Коши:

Если  $\exists \int_1^{\infty} a_n dx$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится

или расходится одновременно

// Подходит, когда  $a_n$  содержит какую-то ф-цию и ее производ. (тогда  $a_n$ )

Признаки сравнения для знакопеременных рядов

### 1) Признак Лейбница:

Числ. знакопеременного ряда монотонно убывает по модулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow$  ряд сходится

### 2) Признак Абеля:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится, если

1)  $\sum a_n$  сходится; 2)  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  - монотонно убывает

### 3) Признак Дирихле:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится, если

1)  $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$  ограничен в совокупности;

2)  $b_n$  монотонно  $\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$

Примеры: 1)  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\sin d}{d} = 1$  (1-й замеч.)

2)  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln(1+d)}{d} = 1$  (2-й замеч.)

3)  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{e^d - 1}{d} = 1$ ;  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{b^d - 1}{d} = \ln b$ ;  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln(1+d)}{d} = 1$

4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - 1}{x - 2} = e$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1+x)^k - 1}{x - 2} = k$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - 1}{x - 2} = e$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1+x)^k - 1}{x - 2} = k$

6) Правило Лопиталя для  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$

7) Таблица эквивалентностей бесконечно малых ф-ций:

$\sin dx \sim dx$	$1 - \cos(dx) \sim \frac{dx^2}{2}$
$\lg(dx) \sim dx$	$\ln(1+dx) \sim dx$
$\arcsin(dx) \sim dx$	$a^{dx} - 1 \sim dx \ln a$
$\arctg(dx) \sim dx$	$(1+dx)^p - 1 \sim p dx$

8) Ряды Маклорена:

•  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

•  $(1+x)^d = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{d}{n} x^n, |x| < 1$

•  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$