$\boxed{24.04.2023}$

Как найти оптимальную стратегию?

① Модель с безрисковым активом

$$W_t^n = \alpha \left(\sum_{k=1}^{K} x_{t-1,k}^n \left(D_{t,k} + p_{t,k} \right) + x_{t-1,0}^n \right)$$

n - агент $\quad$ k - актив $\quad$ $k=0$ - б/р актив

где

$$x_{t-1,k}^n = \frac{\lambda_{t-1,k}^n W_{t-1}^n}{p_{t-1,k}} \qquad x_{t-1,0}^n = \lambda_{t-1,0}^n W_{t-1}^n$$

$$\lambda_{t,k}^n \geq 0 \qquad \sum_{k=0}^{K} \lambda_{t,k}^n = 1 \qquad \lambda_{t,0}^n \text{ - пропорция в б/р актив}$$

Цены

$$p_{t,k} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_{t,k}^n W_t^n \qquad (\text{предложение каждого актива} = 1)$$

② Идея

Если $\underbrace{\text{все агенты}}$ используют λ^*, то цены с поправкой на дивиденды должны быть мартингалами (или лок. март.) (см. условие далее)

$\Rightarrow$ можно считать $N=1$ $\quad \lambda^1 = \lambda^*$

$\Downarrow$

$$W_t = \alpha \left(\sum_{k=1}^{K} \underbrace{x_{t-1,k}}_{=1} \left(D_{t,k} + p_{t,k} \right) + x_{t-1,0} \right) = \alpha \left(\sum_{k=1}^{K} \left(D_{t,k} + p_{t,k} \right) + \lambda_{t-1,0} W_{t-1} \right)$$

$$= \alpha \left(\sum_{k} \left(D_{t,k} + W_t \lambda_{t,k} \right) + \lambda_{t-1,0} W_{t-1} \right) = \alpha |D_t| + \alpha W_t \left(1 - \lambda_{t,0}\right) + W_{t-1} \lambda_{t-1,0}$$

$|x| := x_1 + \dots + x_K$

$$\Rightarrow \boxed{W_t = \frac{\alpha |D_t| + W_{t-1} \lambda_{t-1,0}}{1 - \alpha \left(1 - \lambda_{t,0}\right)}}$$

Потребуем:

$$\alpha E_{t-1} \left(\frac{p_{t,k} + D_{t,k}}{W_t} \right) = \frac{p_{t-1,k}}{W_{t-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha E_{t-1} \left(\lambda_{t,k} + \frac{D_{t,k}}{W_t} \right) = \lambda_{t-1,k}$$

- Почему решение существует?
- Как его найти?

В модели Amir et al. (2011): $\lambda_{t,0} = 0$

$$W_t = \frac{\alpha}{1-\alpha} |D_t|$$

$$\alpha E_{t-1} \left(\frac{p_{t,k} + D_{t,k}}{W_t} \right) = \frac{p_{t-1,k}}{W_{t-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha E_{t-1} \left(\lambda_{t,k} + \frac{D_{t,k}}{\frac{\alpha}{1-\alpha} |D_t|} \right) = \lambda_{t-1,k}$$

$$\Updownarrow$$

$E_{t-1} \left(\alpha \lambda_{t,k} + (1-\alpha) R_{t,k} \right) = \lambda_{t-1,k}$ - опт. стратегия из Amir (2011)

Простой случай

$D_{t,k} = W_t z_{t,k}$ exogenous

лучше

$D_{t,k} = W_{t-1} z_{t,k} \Rightarrow \frac{W_t}{D_{t,k}}$

③ Объяснение Требования

Капитал „малого" агента

$$V_t = \alpha\left(\sum_{k=1}^{K} \frac{\mu_{t-1,k} V_{t-1}}{P_{t-1,k}} \left(P_{t,k} + D_{t,k}\right) + \mu_{t-1,0} V_{t-1}\right)$$

Тогда

$\dfrac{V_t}{W_t}$ д.б. мартингалом $\forall$ стратегии μ (или супермартингалом ???)

- Возьмем $\mu_{t-1,k} = 1$ $\quad k = 1, \dots, K$

$$\Downarrow$$

$$V_t = \alpha \frac{V_{t-1}}{P_{t-1,k}} \left(P_{t,k} + D_{t,k}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$E_{t-1}\left(\frac{V_t}{W_t}\right) = \frac{V_{t-1}}{W_{t-1}} \iff \alpha E_{t-1}\left(\frac{P_{t,k} + D_{t,k}}{W_t}\right) = \frac{P_{t-1,k}}{W_{t-1}} \qquad (*)$$

- Возьмем $\mu_{t-1,0} = 1$

$$\Downarrow$$

$$V_t = \alpha V_{t-1}$$

$$E_{t-1}\left(\frac{V_t}{W_t}\right) = \frac{V_{t-1}}{W_{t-1}} \iff E_{t-1}\left(\frac{\alpha}{W_t}\right) = \frac{1}{W_{t-1}} \iff E_{t-1} \frac{W_{t-1}}{W_t} = \frac{1}{\alpha} \qquad (**)$$

Если сложить $(*)$ по k, то получим $(**)$:

$$\alpha E_{t-1}\left(\frac{\sum_{k=1}^{K}(P_{t,k} + D_{t,k})}{W_t}\right) = \alpha E_{t-1}\left(\frac{1}{W_t}\left(\frac{W_t}{\alpha} - \lambda_{t-1,0} W_{t-1}\right)\right) = \alpha E_{t-1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\lambda_{t-1,0} W_{t-1}}{W_t}\right) = 1 - \alpha E_{t-1} \frac{\lambda_{t-1,0} W_{t-1}}{W_t}$$

а также

$$\frac{\sum_{k=1}^{K} P_{t-1,k}}{W_{t-1}} = 1 - \lambda_{t-1,0}$$

Тогда

$$1 - \alpha E_{t-1} \frac{\lambda_{t-1,0} W_{t-1}}{W_t} = 1 - \lambda_{t-1,0} \iff \alpha E_{t-1} \frac{W_{t-1}}{W_t} = 1 \iff E_{t-1} \frac{W_{t-1}}{W_t} = \frac{1}{\alpha}$$

$\Rightarrow$ $(**)$ выполн. автоматически