$$\int \varphi\, \mu_{t+1}(ds) = \frac{\int \varphi(s) s_{n_{t+1}(\omega)}\, \mu_t(ds)}{\int s_{n_{t+1}(\omega)}\, \mu_t(ds)} = \frac{\int \varphi(s) s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)} \frac{\mu_{t-1}(ds)}{\int s_{n_t(\omega)}\, \mu_{t-1}(ds)}}{\int s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)} \frac{\mu_{t-1}(ds)}{\int s_{n_t(\omega)}\, \mu_{t-1}(ds)}} = \frac{\int \varphi(s) s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)}\, \mu_{t-1}(ds)}{\int s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)}\, \mu_{t-1}(ds)}.$$

Значит, можно явно выразить меру μ_t через начальное распределение μ_0 :

$$\mu_t = \frac{s_{n_t(\omega)} \dots s_{n_1(\omega)}\, \mu_0}{\int s_{n_t(\omega)} \dots s_{n_1(\omega)}\, \mu_0(ds)}.$$

Введем случайную величину ξ, которая принимает значения из множества $\{1, \dots, N\}$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - н.о.р.с.в, причем $\xi_i = \xi$ по распределению. Тогда меру μ_t можно записать, используя $\xi_1, \xi_2, \dots$:

$$\mu_t = \frac{s_{\xi_1(\omega)} \dots s_{\xi_t(\omega)}\, \mu_0}{\int s_{\xi_1(\omega)} \dots s_{\xi_t(\omega)}\, \mu_0(ds)}.$$

Ранее использовался, случайный вектор $X_1, \dots, X_N$, все координаты которого равнялись нулю, кроме одной, которая равнялась единице. Как связаны случайная величина ξ и случайный вектор X?

$$X_i = 1 \iff \xi = i.$$

Отсюда следует, что можно переписать доминирующую стратегию s^* в терминах случайной величины ξ :

Лемма 1. $s^* = \big(P(\xi = 1), \dots, P(\xi = N)\big)$.

Доказательство.

$$s^* = \big(\operatorname{E} X_1, \dots, \operatorname{E} X_N\big) = \big(P(X_1 = 1), \dots, P(X_N = 1)\big) = \big(P(\xi = 1), \dots, P(\xi = N)\big)$$

□

Расммотрим случай $N = 2$. В данном случае произведение $s_{\xi_1(\omega)} \dots s_{\xi_t(\omega)}$ можно переписать в более удобном виде. Для этого будем считать, что $\eta = 0$, если выпало значение 1, и $\eta = 1$, если выпало значение 2. Тогда

$$s_{\xi_1} \dots s_{\xi_t} = s_2^{\eta_1 + \dots + \eta_t} s_1^{t - (\eta_1 + \dots + \eta_t)}$$

Учитывая, что $\eta = \xi - 1$, получим $s^* = \big(P(\eta = 0), P(\eta = 1)\big) = \big(1 - \operatorname{E}\eta, \operatorname{E}\eta\big)$.

Формально применим ЗБЧ:

$$s_2^{\eta_1+\ldots+\eta_t} s_1^{t-(\eta_1+\ldots+\eta_t)} \approx s_2^{t\,\mathrm{E}\,\eta} s_1^{t(1-\mathrm{E}\,\eta)} = (1-s_1)^{t\,\mathrm{E}\,\eta} s_1^{t(1-\mathrm{E}\,\eta)}$$

Тогда меру μ_t можно записать следующим образом

$$\mu_t(A) = \frac{\displaystyle\int_A \left[(1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta} s_1^{(1-\mathrm{E}\,\eta)}\right]^t \mu_0(ds)}{\displaystyle\int \left[(1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta} s_1^{(1-\mathrm{E}\,\eta)}\right]^t \mu_0(ds)}$$

Значит, предельная мера для последовательности μ_t сидит на том множестве, где выражение $\left[(1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta} s_1^{(1-\mathrm{E}\,\eta)}\right]$ достигает своего максимального значения (примерно как предел дроби $(a/b)^t$, где $a < b$). Найде максимум этого выражения:

$$\left[(1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta} s_1^{(1-\mathrm{E}\,\eta)}\right]'_{s_1} = -\,\mathrm{E}\,\eta(1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta-1} s_1^{(1-\mathrm{E}\,\eta)} + (1-\mathrm{E}\,\eta) s_1^{(-\,\mathrm{E}\,\eta)} (1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta} =$$

$$(1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta-1} s_1^{(-\,\mathrm{E}\,\eta)}(-\,\mathrm{E}\,\eta s_1 + (1-\mathrm{E}\,\eta)(1-s_1)) = (1-s_1)^{\mathrm{E}\,\eta-1} s_1^{(-\,\mathrm{E}\,\eta)}(1-\mathrm{E}\,\eta - s_1)$$

Последнее выражение равно нулю $\iff$ $s_1 = 1-\mathrm{E}\,\eta = P(\eta=0)$. А это равносильно тому, что $s^* = (P(\eta=0), P(\eta=1)) = (\mathrm{E}\,X_1, \mathrm{E}\,X_2)$.