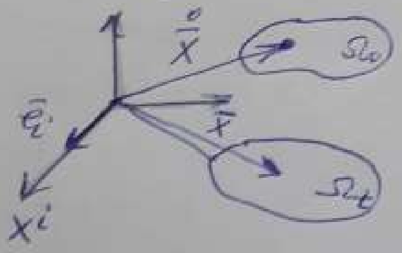
Эйлеров и лагранжев подход к описанию движения сплошной среды. Материальная производная. Линии тока. Траектории.

Движение С.С. рассматриваем в трехмерном евклидовом пространстве.



Ω_0 – отсчетная конфигурация – обл-ть пр-ва, занятая телом в мом t_0.

Ω_t – актуальная (текущая) конфигурац. тела

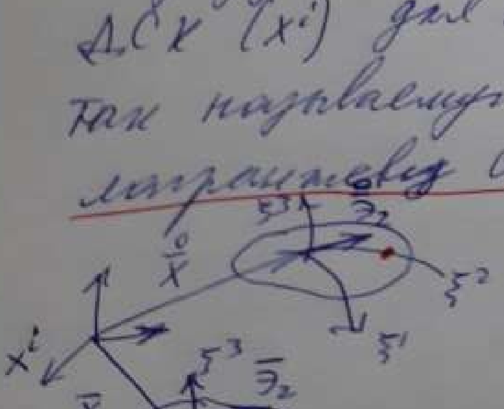
Def Если задана ф-я $\bar x = \bar f(\overset{\circ}{\bar x}, t)$ $\forall \overset{\circ}{\bar x} \in \Omega_0$, то задан закон движения С.С.

$\bar u = \bar x - \overset{\circ}{\bar x}$ – перемещение точки тела

$\bar v = \dfrac{d\bar u}{dt}$ – скорость т.т.

$\bar w = \dfrac{d^2\bar u}{dt^2}$ – ускорение т.т.

Наряду с фиксированной в пространстве неподвижной ДСК (x^i) для описания движения тел в МСС исп-т так называемую „вмороженную" в среду лагранжеву систему координат ξ^i с базисом



$\overset{\circ}{\bar э}_i = \dfrac{\partial \overset{\circ}{\bar x}}{\partial \xi^i}$ в отсч. конфиг.

и

$\bar э_i = \dfrac{\partial \bar x}{\partial \xi^i}$ в акт-й конфиг.

|| Лагранжевы к-ты точек среды не меняются со временем.

Возможен различный выбор лагр. с.к., например: $\xi^i = \overset{\circ}{x}{}^i$ или $\xi^i = x^i$. Наиболее часто исп-ся первое предположение

В МСС $\exists$ 2 подхода к описанию движ. спл. ср.

(Л) - следим за происходящим в точке среды: $\rho, T, \vec{v}, \hat{\sigma} \ldots |_{\xi, t}$

(Э) следим за происходящим в т. пр-ва: $\rho, T, \vec{v}, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon} \ldots |_{\vec{x}, t}$

З-н движ-я с.с. в лагр. описании

$$(1) \quad \vec{x} = \vec{x}(\xi, t)$$

Предполагается, что эти ф-ции вз. однозначны и обрат.

$$(2) \quad \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right) \neq 0$$

Оба подхода (Л) и (Э) эквивалентны, от эйлерова описания можно перейти к лагранжеву и наоборот.

З-н движение в эйлеровом описании:

$$(3) \quad \vec{v} = \vec{g}(\vec{x}, t)$$

Материальная (индивидуальная, полная) производная - скорость изменения какой-либо величины в данной частице среды

$$1) \quad A(\xi, t) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$2) \quad A(\vec{x}, t) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}\Big|_{\vec{x}=const}}_{\text{локальн. (местн.) скорость измен.}} + \underbrace{\frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t}}_{\text{конвективная (переносная) скорость}} = \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_{x=const} + \frac{\partial A}{\partial x^i} v^i \qquad (4)$$

Задачи № 1.5, 1.6а, 1.7 (Эглит)

Линией тока называется определенная в данный момент t_0 кривая, касательная к которой в каждой точке $\bar{x}$ имеет направление вектора скорости $\bar{v}(\bar{x}, t_0)$

$\bar{v}(\bar{x}, t_0)$ t_0 $\qquad \bar{\tau} = \frac{d\bar{x}}{d\lambda}$

$d\bar{x}$

(5) $\bar{v}(\bar{x}, t_0) = \varkappa\bar{\tau} = \varkappa\frac{d\bar{x}}{d\lambda} \Rightarrow$

$\bar{\tau}$

$\bar{x} = \bar{x}(\lambda)$

уравнение линии тока в мом. t_0

(6) $\frac{dx_1}{v_1(\bar{x}, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(\bar{x}, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(\bar{x}, t_0)}$

Траектория — геометрическое место положений частицы среды во все моменты времени. Может быть найдена из соотнош-я

(7) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}(\bar{x}, t)$

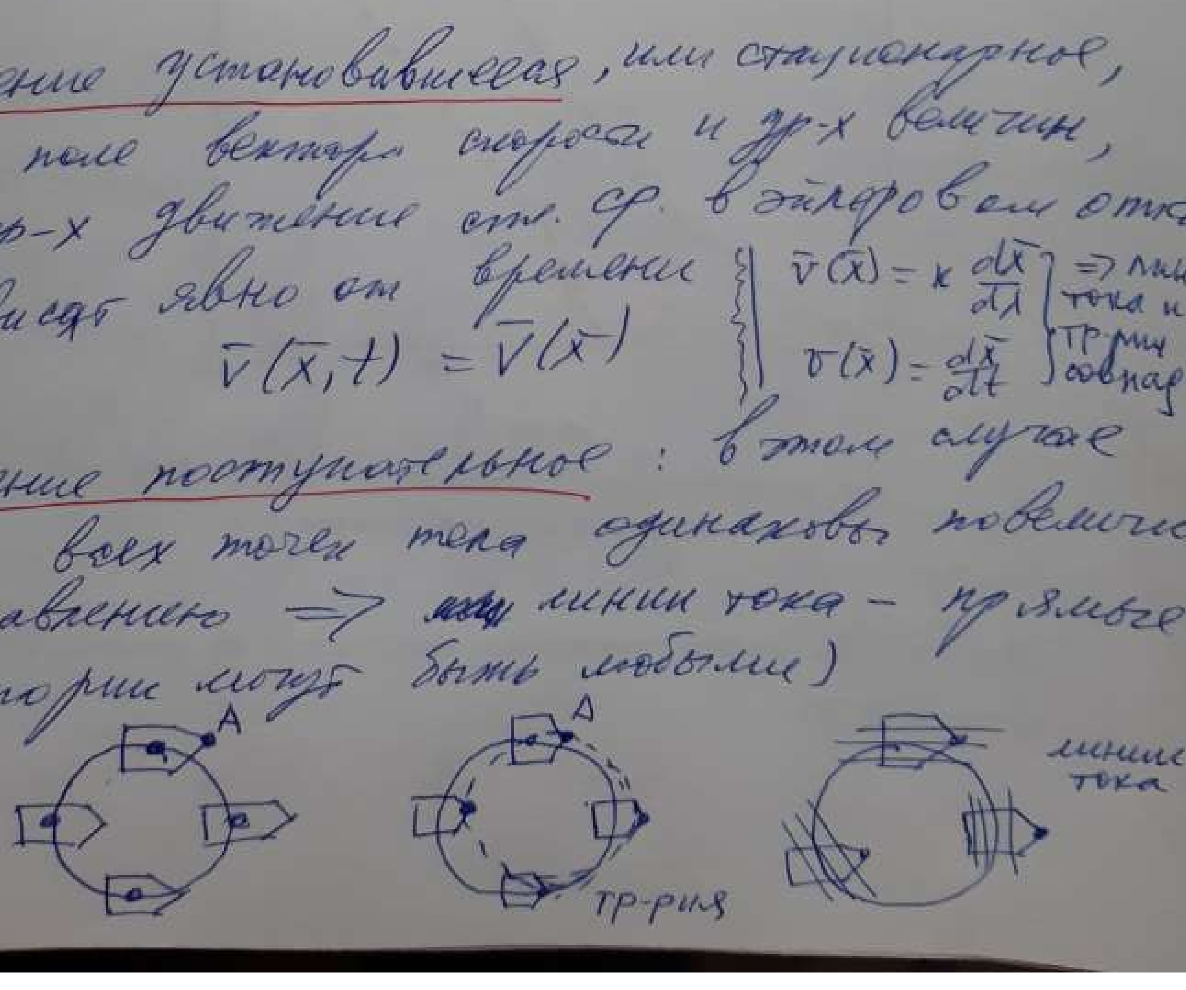
Движение установившееся, или стационарное, если поле вектора скорости и др-х величин, характер-х движение спл. ср. в эйлеровом описании не зависят явно от времени

$\bar{v}(\bar{x}, t) = \bar{v}(\bar{x})$

$\left.\begin{array}{l} \bar{v}(\bar{x}) = \varkappa\frac{d\bar{x}}{d\lambda} \\ \bar{v}(\bar{x}) = \frac{d\bar{x}}{dt} \end{array}\right\}$ ⇒ лин. тока и тр-рии совпад-т

Движение поступательное: в этом случае скорости всех точек тела одинаковы по величине и направлению ⇒ линии тока — прямые (траектории могут быть любыми)

2.3.
1.6б
1.16
1.11в



1.5 В момент t рассматриваются функции

$$\xi_\alpha = g_\alpha(x_1, x_2, x_3, t), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

обратные закону движения

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Каков смысл их значений? Чему равны индивидуальные производные $d\xi_\alpha/dt$?

1.6 Найти поля скорости и ускорения в лагранжевом и эйлеровом описаниях, если движение среды происходит по закону

а) трехосное растяжение тела:

$$x_1 = a(t)\xi_1, \quad x_2 = b(t)\xi_2, \quad x_3 = c(t)\xi_3;$$

б) простой сдвиг:

$$x_1 = \xi_1 + b(t)\,\xi_2, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3;$$

в) однородная деформация при одновременном вращении тела с закрепленной точкой:

$$x_i = A_{i1}(t)\xi_1 + A_{i2}(t)\xi_2 + A_{i3}(t)\xi_3, \quad \det\|A_{ij}\| \neq 0.$$

1.7 Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения среды, если оно происходит с полем скорости

$$v_1 = \frac{x_1}{t+\tau}, \; v_2 = \frac{2tx_2}{t^2+\tau^2}, \; v_3 = \frac{3t^2x_3}{t^3+\tau^3}, \; \tau = \mathrm{const} > 0.$$

1.8 Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения сплошной среды, линии тока и траектории, если поле скорости имеет вид

а) $v_1 = \dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x_1}{r^2}, \; v_2 = \dfrac{Q(t)}{2\pi}\dfrac{x_2}{r^2}, \; v_3 = 0, \;\; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \;\; Q(t) > 0;$

б) $v_i = \dfrac{Q(t)}{4\pi}\dfrac{x_i}{R^3}, \; i = 1, 2, 3, \;\; R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3}, \;\; Q(t) > 0;$

в) $v_1 = -Ax_1, \; v_2 = Bx_2, \; v_3 = 0, \; A = \mathrm{const} > 0, \; B = \mathrm{const} > 0.$

1.9 Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения сплошной среды, если оно происходит с полем скорости

$$v_1 = -A(t)x_1, \; v_2 = B(t)x_2, \; v_3 = 0, \quad A(t) > 0, \; B(t) > 0.$$

Найти линии тока и сравнить их с линиями тока для частного случая A, $B = \text{const}$, задача **1.8** в). Привести пример функций $A(t)$ и $B(t)$, при которых линии тока и траектории частиц не совпадают.

1.10 а) Можно ли по известным траекториям частиц среды найти закон ее движения?

б) Можно ли по известным в данный момент линиям тока найти мгновенное поле скорости?

1.11 Найти линии тока и траектории, если движение среды происходит с полем скорости

а) $v_1 = -\omega x_2, \; v_2 = \omega x_1, \; v_3 = u, \quad \omega, u = \text{const};$

б) $v_1 = -Ax_2, \; v_2 = Bx_1, \; v_3 = 0, \; A = \text{const} > 0, \; B = \text{const} > 0;$

в) $v_1 = -V\sin\omega t, \; v_2 = V\cos\omega t, \; v_3 = 0, \quad \omega, V = \text{const}.$

1.12 Могут ли частицы среды двигаться ускоренно, если

а) скорости всех частиц одинаковы?

б) в каждой точке пространства скорость не изменяется со временем?

1.13 Плотность каждой индивидуальной частицы несжимаемой среды остается постоянной. Может ли в какой-нибудь точке пространства происходить изменение плотности со временем?

1.14 Найти поле ускорений, если движение среды происходит с полем скорости

а) указанным в задаче **1.7**;

б) имеющим компоненты $v_1 = A(t)x_2, \; v_2 = B(t)x_1, \; v_3 = 0$.

1.15 При движении среды, происходящем с полем скорости

$$v_1 = -\omega x_2,\ v_2 = \omega x_1,\ v_3 = 0,\ \omega = \text{const},$$

в пространстве создается (при помощи подходящим образом распределенных источников тепла) поле температуры

$$T = T_0 e^{-\frac{t}{\tau} - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{c}\right)^2}, \quad T_0,\ \tau,\ a,\ b,\ c = \text{const}.$$

Найти скорость изменения температуры в индивидуальной частице в момент t_0, если она находится в этот момент в точке пространства с координатами $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$.

1.16 Движение среды происходит с полем скорости

$$v_1 = kx_1,\ v_2 = -kx_2,\ v_3 = 0, \quad k = \text{const}$$

и полем плотности

$$\rho = \rho_0 + Ax_2 e^{kt}, \quad \rho_0,\ A = \text{const}.$$

Найти скорость изменения плотности в каждой из частиц среды.

1.17 Положение индивидуальной частицы (ξ_1, ξ_2, ξ_3) в каждый момент t описывается соотношениями

$$x_i = f_i(\xi_1 + Ut, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad U = \text{const}.$$

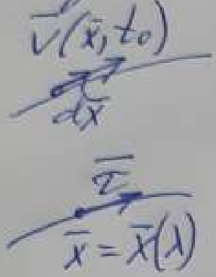
Показать, что а) движение установившееся; б) линиями тока являются кривые, параметрические уравнения которых имеют вид

$$x_i = f_i(\tau, \xi_2^0, \xi_3^0), \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

где τ — параметр вдоль кривой, ξ_2^0, ξ_3^0 для каждой из кривых — фиксированные числа.

1.18 Движение среды происходит так, что траектории всех частиц лежат на лучах, исходящих из точки O, а величина скорости v и плотность среды ρ зависят только от момента t и расстояния r до точки O. При изучении такого (сферически симметричного) движения в качестве одной из лагранжевых координат ξ материальной точки часто используют величину массы среды, которая заключена в момент $t = 0$ внутри проходящей через эту точку сферы с центром в точке O.

Линией тока называется определенная в данный момент t_0 кривая, касательная к которой в каждой точке $\bar{x}$ имеет направление в-ра скорости $\bar{v}(\bar{x}, t_0)$.



$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{x}}{d\lambda}$$

(5) $\bar{v}(\bar{x}, t_0) = \varkappa \bar{\tau} = \varkappa \frac{d\bar{x}}{d\lambda} \Rightarrow$

уравнение линии тока в мом. t_0

(6) $\frac{dx_1}{v_1(\bar{x}, t_0)} = \frac{dx_2}{v_2(\bar{x}, t_0)} = \frac{dx_3}{v_3(\bar{x}, t_0)}$

Траектория – геометрическое место положений частицы среды во все моменты времени. Может быть найдена из соотнош-я

(7) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}(\bar{x}, t)$

Движение установившееся, или стационарное, если поле вектора скорости и др-х величин, характер-х движение спл. ср. в эйлеровом описании не зависят явно от времени

$$\bar{v}(\bar{x}, t) = \bar{v}(\bar{x})$$

$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}(\bar{x}) = \varkappa \frac{d\bar{x}}{d\lambda} \\ \bar{v}(\bar{x}) = \frac{d\bar{x}}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow$ линии тока и тр-рии совпад-т

Движение поступательное: в этом случае скорости всех точек тела одинаковы по величине и направлению $\Rightarrow$ линии тока – прямые (траектории могут быть любыми)