Введение в финансовую математику

Лекция 4: Модель локальной волатильности

9 июня 2020

Идея модели локальной волатильности

Воспроизведение рыночных цен опционов

Мы построим модель, в которой цены европейских опционов в точности равны рыночным ценам (т.е. она воспроизводит поверхность волатильности).

Будем искать модель с детерминированной ставкой r и ценой акции

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t),$$

где μ_t – некоторый процесс (нам будет не важно как он задан), $\sigma(t, x)$ – функция, которую нужно найти.

Обозначения:

- $\overline{C}(T, K)$ – рыночные цены опционов колл,
- $C(T, K)$ – цены опционов колл, вычисленные в модели,
- T – время экспирации, K – страйк, и S_0 фиксировано.

Мартингальная мера

По теореме Гирсанова (если функция $\sigma(t,x)$ хорошая) существует мартингальная мера Q, относительно которой дисконтированная цена $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ является мартингалом, и, значит,

$$d\widetilde{S}_t = \sigma(t, S_t)d\widetilde{W}_t,$$

где $\widetilde{W}_t$ – броуновское движение по Q.

Тогда цены опционов можно вычислить по формуле

$$C(T,K) = e^{-rT}E^Q(S_T - K)^+.$$

Отсюда возникает идея, как найти $\sigma(t,x)$:

цены $\overline{C}(T,K) \Rightarrow$ плотность S_T относительно $Q \Rightarrow$ функция $\sigma(t,x)$.

Вычисление плотности распределения цен

Предположения:

1. $r = 0$ (не ограничивает общности),
2. S_t имеет "хорошую" плотность распределения $f(t, x)$ относительно Q.

Теорема (формула Бридена–Литценбергера). Выполнено равенство

$$f(t, x) = \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}\bigg|_{\substack{K=x\\T=t}}$$

Доказательство:

$$C(T, K) = E^Q(S_T - K)^+ = \int_K^\infty (x - K) f(T, x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial K}(T, K) = -\int_K^\infty f(T, x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = f(T, K)$$

Прямое и обратное уравнения Колмогорова

Теорема. Пусть $f(s, x, t, y)$ – переходная плотность процесса X_t вида

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Тогда f удовлетворяет уравнениям

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = \mu(s, x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(s, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{(обратное уравнение),}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t, y)f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(t, y)f) \qquad \text{(прямое уравнение).}$$

(Далее нам потребуется только прямое уравнение Колмогорова; оно также называется уравнением Фоккера–Планка.)

Схема доказательства обратного уравнения (для $\mu = 0$)

Пусть $h(x)$ – произвольная функция. Для $s < t$ определим

$$V(s,x) = E(h(X_t) \mid X_s = x) = \int_{\mathbb{R}} h(y) f(s,x,t,y) dy. \qquad (*)$$

По формуле Фейнмана–Каца

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Подставляя $(*)$, получаем

$$-\int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{\partial f}{\partial s} dy = \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dy.$$

Обратное уравнение Колмогорова следует отсюда в силу произвольности h.

Схема доказательства прямого уравнения (для $\mu = 0$)

Для $s \leqslant t \leqslant T$ определим $V(s, x) = E(h(X_T) \mid X_s = x)$. Согласно марковскому свойству,

$$V(s, x) = E(V(t, X_t) \mid X_s = x) = \int_{\mathbb{R}} V(t, y) f(s, x, t, y) dy.$$

Следовательно,

$$0 = \frac{\partial V(s, x)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} V(t, y) + f \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} \right) dy = [\text{Фейнман–Кац}] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} V(t, y) - \frac{f}{2} \sigma^2(t, y) \frac{\partial^2 V(t, y)}{\partial y^2} \right) dy = [\text{по частям}] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f \sigma^2(t, y)) \right) V(t, y) dy$$

Возьмем $T = t$, тогда $V(T, y) = h(y)$, и воспользуемся произвольностью h.

Вычисление коэффициента диффузии

Теорема (формула Дюпира, $r = 0$). Для процесса цен S_t, относительно Q удовлетворяющего уравнению

$$dS_t = \sigma(t, S_t) S_t d\widetilde{W}_t, \qquad \sigma^2(t,x) = \frac{2\,\frac{\partial \overline{C}(T,K)}{\partial T}}{K^2\,\frac{\partial^2 \overline{C}(T,K)}{\partial K^2}}\Bigg|_{\substack{K=x\\T=t}},$$

выполнено $C = \overline{C}$.

Замечание: если $r \neq 0$, то формула изменится следующим образом:

$$\sigma^2(t,x) = \frac{2\,\frac{\partial \overline{C}(T,K)}{\partial T}}{K^2\,\frac{\partial^2 \overline{C}(T,K)}{\partial K^2}} + r\,\frac{\frac{\partial \overline{C}(T,K)}{\partial K}}{K\,\frac{\partial^2 \overline{C}(T,K)}{\partial K^2}}\Bigg|_{\substack{K=x\\T=t}}$$

Доказательство

Пусть $f(t,y)$ – плотность S_t. Тогда

$$\frac{\partial C(t,K)}{\partial t} = \int_K^\infty (y-K)\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}dy = \text{[прямое уравнение Колмогорова]}$$

$$= \frac{1}{2}\int_K^\infty \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2 y^2 f)(y-K)dy = \text{[по частям]}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_K^\infty \frac{\partial}{\partial y}(\sigma^2 y^2 f)dy$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(t,K)K^2 f(t,K) = \text{[формула Бридена–Литценбергера]}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(t,K)K^2\frac{\partial^2 C(t,K)}{\partial K^2}.$$

Формула Дюпира в терминах предполагаемой волатильности

Введем новую параметризацию:

$$y(K) = \ln \frac{K}{S_0}, \qquad w(T, y) = \widehat{\sigma}^2(S_0, T, K(y))T,$$

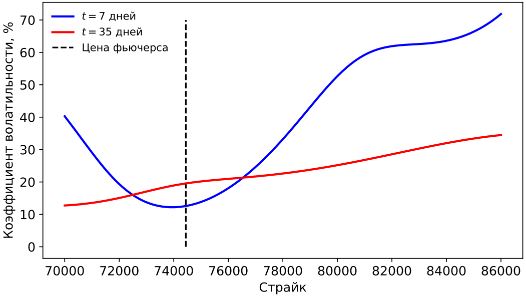
где $\widehat{\sigma}$ – предполагаемая волатильность из модели Блэка–Шоулса.

Тогда формулу Дюпира можно записать в виде

$$\sigma^2(t, x) = \left. \frac{\frac{\partial w}{\partial T}}{1 - \frac{y}{w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4}(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \frac{y^2}{w^2})(\frac{\partial w}{\partial y})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \right|_{\substack{T=t \\ y=\ln(x/S_0)}}$$

Пример

Локальная волатильность для опционов на фьючерс на курс доллара (данные из лекции 2).



Замечания о модели локальной волатильности

- Трудность – нужно интерполировать и/или экстраполировать рыночные цены опционов (сложнее это сделать по переменной t, т.к. различных дат экспираций мало).

- Модель является “не случайной” и не учитывает того, что волатильность может изменяться не только в зависимости от изменения цен.

- Ее удобно применять для вычисления цен экзотических опционов (зависящих не только от цены в последний момент) .