## ① Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций

Опр. Ф-ция $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$. Тогда $f \in C(x_0)$, т.е. $f$ - непрерывна в т. $x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 /$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Опр*. Ф-ция $f \in C(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$

Опр. Ф-ция $f$ непр-на на мн-ве $X_0 \subset X$, если $\forall x \in X_0$ : ~~f(x)~~ $f$ - непр-на в т. $x$

Опр. Ф-ция $f$ назыв. равномерно непрерывной на мн-ве $X_0 \subset X$, если:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x_1, x_2 \in X, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Локальные св-ва непрерывных ф-ций:

1. $\exists f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$, $f \in C(a) \Rightarrow f$ - лок. огр. в т. $a$

$\triangleright \ \exists \varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} \Rightarrow -\varepsilon + f(a) < f(x) < f(a) + \varepsilon \ \triangleleft$

2. $\exists f, g: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$, $f, g \in C(a) \Rightarrow$ 1) $f + g \in C(a)$

2) $f \cdot g \in C(a)$

3) $f/g \in C(a)$, при $g \neq 0$ в т. $a$

2) $\triangleright \ |f(x)g(x) - f(a)g(a) \pm f(x)g(a)| \leq$

$\leq \underbrace{|f(x)|}_{const \text{ - лок. огр.}} \cdot \underbrace{|g(x) - g(a)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{|g(a)|}_{const} \ \triangleleft$

3) $\triangleright \ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right| = \left|\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x) \pm f(a)g(a)}{g(x)g(a)}\right| \leq$

$\leq \frac{|f(x) - f(a)||g(a)| + |f(a)||g(x) - g(a)|}{|g(x)||g(a)|} < \varepsilon \cdot \underbrace{\left(2\frac{|g(a)| + |f(a)|}{|g(a)|^2}\right)}_{const \neq 0}$

3. $\exists f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$, $f \in C(a)$ и $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$

$\Rightarrow \exists O(a) / f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$) $\forall x \in O(a) \cap X$

$\triangleright$ см $\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} \Rightarrow \ \triangleleft$

4. $\exists f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $f \in C(a)$, $g \in C(f(a))$

$\Rightarrow g \circ f \in C(a)$

$\triangleright$ $g \in C(f(a)) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$

$\forall y \in B$ и $|y - f(a)| < \delta$

Для $\delta > 0 \ \exists \gamma > 0 / |f(x) - f(a)| < \delta \quad \forall |x - a| < \gamma, \ \forall x \in A$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \,/\, |g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon \quad \forall x: |x-a|<\delta,\ x\in\Delta$

$\Rightarrow g\circ f \in C(a)$ ◀

**Теорема** (Коши о промежуточных значениях):

Пусть $f\in C[a,b]$, $f(a)<f(b)$ (или $f(a)>f(b)$) $\Rightarrow$

$\forall M \in \underbrace{(f(a), f(b))}_{\text{или } (f(b),\ f(a))}\ \exists c\in(a,b) \,/\, f(c)=M$

▶ Пусть $g(x)=f(x)-M$, где $M\in(f(a),f(b))$

Тогда $g\in C[a,b]$, $g(a)=f(a)-M<0$, $g(b)=f(b)-M>0$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b) \,/\, g(c)=0$ : Пусть $[a_1,b_1]=[a,b]$ и $g(a_1)g(b_1)<0$

Делим $[a_1,b_1]$ пополам, если $g\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0 \Rightarrow$ доказали

Пусть $g\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0 \Rightarrow$ Пусть $[a_2,b_2]$ – та половина $/\, g(a_2)g(b_2)<0$

Т.о., построим систему вложенных отрезков

$\{[a_n,b_n],\ n\in\mathbb{N} : g(a_n)g(b_n)<0\ \forall n\}$ $\Downarrow$ Т. Кантора о вложенных отрезках

Случаи: 1) $\exists n_0\in\mathbb{N} \,/\, g\left(\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}\right)=0$

2) $\nexists n_0\in\mathbb{N} \,/\, g\left(\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}\right)=0$

$\exists c\in[a_n,b_n]\ \forall n\in\mathbb{N}$

Имеем: $b_n-c\le b_n-a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 \Rightarrow b_n\to c,\ a_n\to c \quad n\to\infty$

$\Rightarrow$ {т.к. $\forall x_n\in X,\ n\in\mathbb{N} \,/\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $h\in C(a)$, то $h(x_n)\to h(a)$

Если $h\in C(a)$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists O(a)$ $|f(x)-f(a)|<\varepsilon\ \forall x\in O(a)\cap X$

и $x_n\to a \Rightarrow$ для $O(a)\ \exists \tilde{n}\in\mathbb{N} /$ $x_n\in O(a)\ \forall n>\tilde{n}$

$\Rightarrow |f(x_n)-f(a)|<\varepsilon\ \forall n>N$ }

$\Downarrow$ $g(b_n)\to g(c)$, $g(a_n)\to g(c)$ при $n\to\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{g(b_n)g(a_n)}_{\le 0} = \underbrace{g^2(c)}_{\ge 0}$

$\Rightarrow g(c)=0 \Rightarrow g(c)=f(c)-M=0$ ◀

Опр. Подмн-во $X \subseteq R$ назыв. компактным, если из $\forall$-ого его открытого покрытия можно выбрать конечное покрытие

Теорема (Лебега-Бореля)

$\forall$-ой отрезок $[a,b]$ - компакт.

▶ $\exists$ $\exists$-ет откр. покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - нельзя выбрать конечное покрытие $[a,b]$

$\exists$ $[a_1, b_1] = [a,b]$ - не допускает

$\exists$ $[a_2, b_2]$ - та половина $[a_1, b_2]$, к-ая не допускает и $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow \{[a_n, b_n], n \in N : b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ и не допускают конечного покрытия $\}$

$\Rightarrow \exists\, c \in R \,/\, c \in [a_n, b_n]\ \forall n \in N \Rightarrow c \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, (\alpha, \beta) \in \{U_\alpha\} \,/\, c \in (\alpha, \beta)$

$\exists$ $\min\{c-\alpha, \beta - c\} =: \varepsilon \Rightarrow \exists\, k \in N / b_k - a_k < \varepsilon$

но $c \in [a_k, b_k] \Rightarrow [a_k, b_k] \subset (\alpha, \beta)$ - покрыли 1-м интервалом $\Rightarrow$ ⊘ ◀

Теорема (1-ая Т. Вейерштрасса)

$\exists$ $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in B[a,b]$, т.е. $f$ - огр. на $[a,b]$

▶ $\forall x_0 \in [a,b] : f \in C(x_0) \Rightarrow f$ - лок. огр в т. $x_0$

$\Rightarrow \exists\, O(x_0)\ \exists\, M(x_0) \,/\, |f(x)| < M(x_0)\ \forall x \in O(x_0) \cap [a,b]$

$\Rightarrow \{O(x), x \in [a,b]\}$ - откр. покрытие $[a,b] \Rightarrow$

$\exists$ конечное п/покрытие $\Rightarrow \{O(x_1), \ldots, O(x_m)\} \,/\, [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} O(x_i)$

Пусть $M = \max\limits_{i=\overline{1,m}} M(x_i) \Rightarrow \forall x \in [a,b]\ \exists k \in \{1,\dots,m\} /$
$x \in O(x_k) \Rightarrow f(x) \le M(x_k) \le M \Rightarrow f$ - огр на $[a,b]$

Теорема (2-ая Т. Вейерштрасса)
Пусть $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b] / f(x_1) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$
$f(x_2) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

Д-м для max, с min аналогично. $\sup\limits_{[a,b]} f$
От противного: $\forall x \in [a,b]$ $f \in B[a,b]$ и $f(x) < M$
$\Rightarrow$ Рассм-им $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \in C[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists B > 0 / 0 < g(x) \le B$, т.е. $0 < (M-f)^{-1} \le B \Leftrightarrow M - f \ge \frac{1}{B}$
$\Leftrightarrow f(x) \le M - \frac{1}{B} = M' < M$. Итак $f \le M'$ на $[a,b] \Rightarrow$ верхняя грань
$M$ не sup на $[a,b]$ (наим.) $\Rightarrow$ противоречие

Теорема (Кантора): $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ - р-но непр на $[a,b]$
От противного: Пусть $f$ - не р/м непр на $[a,b] \Rightarrow$
$\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in [a,b]: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$
В частности $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \alpha_n, \beta_n \in [a,b] / |\alpha_n - \beta_n| < \delta$
и $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \ge \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$. Рассм-им посл-ть $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$.
$a \le \alpha_n \le b$ — огран.
$\Rightarrow \exists$ п/посл-ть $\alpha_{n_k} / \alpha_{n_k} \to \alpha$ при $k \to \infty$ и рассм-им $(\beta_{n_k}, k \in \mathbb{N})$
Имеем: $\beta_{n_k} = \beta_{n_k} - \alpha_{n_k} + \alpha_{n_k} \Rightarrow \beta_{n_k} = \underbrace{(\beta_{n_k} - \alpha_{n_k})}_{\to 0} + \alpha_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 + \alpha$,
(т.к. $|\beta_{n_k} - \alpha_{n_k}| \le \frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$) и заметим, что $\alpha \in [a,b] \Rightarrow f \in C(\alpha)$
$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(\alpha_{n_k}) \to f(\alpha) \\ f(\beta_{n_k}) \to f(\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon \le |f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow 0 \le \varepsilon < 0$
$\Rightarrow$ противоречие