Лекция 3 (30.09.2021)

① Определение 4-скорости:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{\underbrace{d\tau}_{\text{собственное время}}}$$

используется в лекциях:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad \text{где} \quad ds = c\,d\tau$$

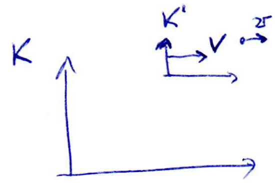
т.е. $v^\mu \to \frac{1}{c} v^\mu$, $a^\mu \to \frac{1}{c^2} a^\mu$ — немного меняется нормировка вектора.

$$v^\mu v_\mu = c^2 \longrightarrow v^\mu v_\mu = 1$$

② Задача ⑤:

$$a'^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ — ускор. постоянно в собств. сис-ме отсчёта

перейдём в ~~лаб.~~ лаб. ИСО:



$v = V$

$$\cancel{a_x = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)^3}}{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2} a'_x}$$

$$a_x = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}{\left(1+\frac{vV}{c^2}\right)^2} a'_x \; ; \quad V = v$$

$$a_x = \frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a'_x$$ — интегрируя:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \alpha \longrightarrow \left[\begin{array}{l} v(t) = \dfrac{\alpha t}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}} \\[2ex] x(t) = \dfrac{c^2}{\alpha}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2} - 1\right) \end{array}\right.$$

; $\boxed{v(t) \to c \text{ при } t \to \infty}$

$$a_x = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a'_x$$ — ускор. $\neq$ const

Динамика

Есть несколько подходов для описания системы:

Ур-ния Ньютона ← Ур. Лагранжа (+Гамильтонов формализм)

↓

закон движения

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \dots \\ \vec{v}(t) = \dots \end{cases}$$

① Введём обобщённые координаты:

$$\vec{r}(t) \longrightarrow q_i(t)$$
$$\vec{v}(t) \longrightarrow \dot{q}_i(t)$$

② Принцип наименьшего действия:

(грубо: частица движется так, чтобы энергия $= min$)

Введём действие:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\mathcal{L}(q;\dot{q};t)}_{\text{функция Лагранжа}}$$

функция Лагранжа:

③ Вариация: $\delta q(t)$ — „производная", но вместо переменной используется функция.

④ $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt = 0$ — принцип наим. действия

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$; интегр. по частям:

$$\delta S = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \bigg|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt = 0$$

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$$ — уравнения Лагранжа.

$\mathcal{L}$ — определена с точностью до производной:

$$\mathcal{L}'(q,\dot q,t) = \mathcal{L}(q,\dot q,t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

Далее $\mathcal{L}(q\dot q t)$ находится из условий ~~симм~~ инвариантности преобразований.

Например:

Преобр. Гал. + одн. пр-ва:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{m v^2}{2}}_{\text{кинет. эн.}} - \underbrace{U}_{\text{потенц. эн.}}$$

Тогда ур. Лагранжа:

$$m\frac{d\vec v}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec r} \iff m\vec a = \vec F$$ — ур. Ньютона.

З-ны сохранений:

1) Однор. времени:

Пусть $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(t)$, тогда (Л.Л. том 1):

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\dot q\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} - \mathcal{L}}_{const}\Big) = 0$$

$$\boxed{E = \sum_i \dot q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \mathcal{L}}$$ $E = \frac{m v^2}{2} + U$

2) Однор. пр-ва:

$\vec r \longrightarrow \vec r + \delta\vec r$, то $\mathcal{L} = inv$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}}_{const} = 0$$

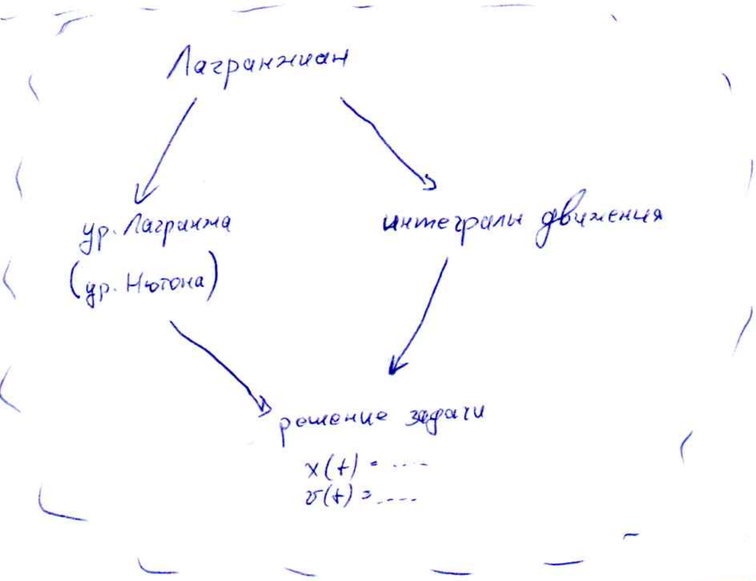
$$\boxed{P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}}$$ — обобщённый импульс.

$$\boxed{F_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}$$ — обобщённая сила

Законов сохранений может быть много.

Интегралы движения — сохраняющиеся величины.

<u>схема решения задач:</u>



Гамильтонов формализм

Было: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.

Хотим перейти $\dot{q}_i \to p_i$

— функция Гамильтона

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L},$$

<u>ур. Гамильтона:</u> (канонические ур-ния)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

канонические преобразования:

$$\begin{cases} q_i \to Q_i \\ p_i \to P_i \end{cases} \quad \text{такие, что} \quad \begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial Q_i} \end{cases}$$

Релятивистская динамика

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\, dt$$

Рассмотрим своб. частицу

Теперь S — должна быть инвар. отн. преобр. Лоренца.

$$S = \underbrace{-mc}_{\text{„подгонка" под ур. Ньютона}} \int \underbrace{ds}_{\text{инвариант } ds = c\,d\tau}$$

$$ds = c\,d\tau = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt \quad \text{, т.е.}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \boxed{E = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$v \ll c$:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-mc^2}_{\text{энергия покоя}} + \frac{mv^2}{2} \qquad \boxed{E = -mc^2}$$

Добавляя магн. поле $ISO(1,3)$ inv:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi \quad \text{, где}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \end{pmatrix}$$