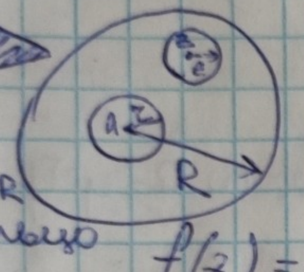
(24) Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{O}(S_{a,r,R})$, $S_{a,r,R} = \{r < |z-a| < R\}$ кольцо, где $0 \leq r < R \leq +\infty$.

Тогда f раскладывается в ряд Лорана в $S_{a,r,R}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{Z}, \; r < \rho < R$$



$S_{a,r,R}$ кольцо

Возьмём круг $\{|\xi - z| < \varepsilon\} = U_{z,\varepsilon} \subset S_{a,r,R}$, $z \in S$

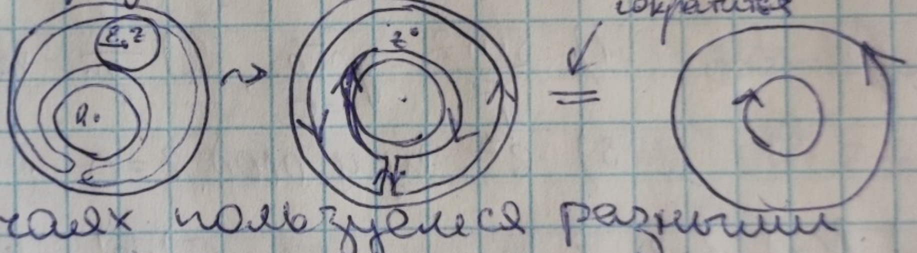
По формуле Коши: Т. Коши о гомот. путях

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z|=\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{|\xi-a|=r+\delta} + \oint_{|\xi-a|=R-\delta}\right)\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

превратим $\int$-л в ряд

$\int$-л по перегородке сократится

$|\xi - z| = \varepsilon \rightsquigarrow$



В этих случаях пользуемся разными разложениями:

1. $$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\xi - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \text{ — сход., если } \left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$$

внутри кольца; $\xi \in$ большой окружности

2. $$\frac{1}{\xi - z} = \frac{-1}{(z-a)\left(1 - \frac{\xi-a}{z-a}\right)} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n \text{ — сход., если } |z-a| > |\xi-a|$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{|\xi-a|=r+\delta} + \oint_{|\xi-a|=R-\delta}\right)\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int_{|\xi-a|=R-\delta}(\xi-a)^{-n-1}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}(z-a)^{-n}\int_{|\xi-a|=r+\delta}(\xi-a)^{n-1}\,d\xi$$

Теорема 2 (!-ть разложения): Пусть ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ - сход в некот. кольце $z \in S_{a,r,R}$, т.е. $r < R$, тогда его сумма $= f(z)$ голоморфна в $S_{a,r,R}$ и $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(\xi)(\xi-a)^{-n-1} d\xi \quad \forall \rho \in (r,R)$

Опр. Если $f \in \Theta(0<|z-a|<R)$ и $f \notin \Theta(|z-a|<R)$, то a - назыв. изолированной особой точкой однозначного характера (ИОТОХ)

Классификация ИОТОХ-ов:

Опр. Если f - огран. и в $\{0<|z-a|<R\}$, то a - устранима

Если $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} \infty$, то a наз. полюсом

Если $\nexists \lim\limits_{z\to a} f(z)$, то a наз. существенной

Пример: 1) $\frac{\sin z}{z}$ - устр. $z=0$, 2) $\frac{1}{z^n}$ - полюс в $z=0$

3) $e^{1/z}$ - сущ. особ. $z=0$: $e^{1/x} \to +\infty$, $x \to +0$; $\to 0$, $x \to -0$

4) $f(z) = tg z$, $z=\infty$ - не изол. 5) $\sqrt{z}$ - неоднозн. особ-ть $z=0$

Теорема 3: Пусть $f \in \Theta(0<|z-a|<R)$, тогда следующие усл-ия эквивалентны:

1. f - огран. при $z \to a$
2. $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$
3. $\exists A \in \mathbb{C} \,/\, f(a) := A$ - доопред. $\Rightarrow f \in \Theta(|z-a|<R)$
4. Ряд Лорана ф-ции f в т. a имеет вид $\sum_0^{\infty} c_n (z-a)^n$

лок.

$2 \Rightarrow 1$ - $\exists \lim \Rightarrow$ ограниченность

$4 \Rightarrow 3$ - ф-ция голоморфна $\Rightarrow \exists$ ряд Лорана

$3 \Rightarrow 2$ - ф-ция голоморфна $\Rightarrow$ непр-на $\Rightarrow \exists \lim$

Осталось док-ть $1 \Rightarrow 4$: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = f(z)$ - голом. в кольце + огран.

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi-a|=\rho} f(\xi)(\xi-a)^{-n-1} d\xi$, причём $\rho \in (0,R)$ $\forall \rho$

Устремим $\rho \to 0$:

Пусть $n \leq -1 \Rightarrow -n-1 \geq 0$ и $|f(\xi)| \leq M$

Но $|\xi - a|^{-n-1} = \rho^{-n-1} \Rightarrow |c_n| \leq \frac{1}{2\pi} M \rho^{-n-1} \int\limits_{|\xi-a|=\rho} |d\xi| =$

$= \frac{M\rho^{-n-\cancel{1}}}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi}\cancel{\rho} = M\rho^{-n} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ т.к. $-n \geq 1$

$\Rightarrow$ все $c_n = 0$ при $n \leq -1$ ◀

Теорема 4: Пусть $f \in \mathcal{O}(0<|z-a|<R)$, тогда следующие утв-ния эквивалентны:

1. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$
2. ~~2.~~ $\exists N \in \mathbb{N} \,/\, f(z)(z-a)^N$ – огр при $z \to a$, если $N' < N$: $f(z)(z-a)^{N'}$ – неогр
3. Ряд Лорана имеет вид: $f(z) = \sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n$

▶ $3 \Rightarrow 1$. $f(z) = \sum\limits_{-N}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $0<|z-a|<R$, $c_{-N} \neq 0$

$\Rightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^N}$, $\varphi(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_{k-N} (z-a)^k \in \mathcal{O}(|z-a|<R)$

$\varphi(a) = c_{-N} \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{\varphi(z) \to c_{-N} \neq 0}{(z-a)^N \to 0} \to \infty$, $z \to a$

$1 \Rightarrow 3$. $f \in \mathcal{O}(0<|z-a|<R)$ и $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Рассм. ф-цию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{O}(0<|z-a|<\varepsilon)$

$\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}(|z-a|<\varepsilon)$
φ-гол. в кольце + имеет lim $\Rightarrow a$ – устр для φ

и $\varphi(a) = 0$ – т.е. a – ноль $\varphi(z) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ – порядок нуля a / $\varphi(z) = (z-a)^N \psi(z)$, $\psi \in \mathcal{O}(|z-a|<\varepsilon)$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^{-N} \frac{1}{\psi(z)} = h(z)(z-a)^{-N}$ $\psi(a) \neq 0$

где $h \in \mathcal{O}(|z-a|<\varepsilon')$, $\varepsilon' < \varepsilon$

Если $\psi(z) = 0$, то $\varphi(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \infty \Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow h(z)$ – голоморфна $\Rightarrow h$ – раскладывается в ряд

$\Rightarrow h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $c_0 = h(a) = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_{n+N} (z-a)^n$ – ряд Лорана в ε-окр-ти

Но если ряд сход. в O_ε, то он и нужный и сойдётся в $\{0 < |z-a| < R\}$ $\triangleleft$

Вывод:

ф-ция
- имеет конечный lim $\Rightarrow$ устранимая особенность
- lim $= \infty$ $\Rightarrow$ полюс
- нет lim $\Rightarrow$ существенная особенность

Ряд Лорана
- нет отриц. степеней $\Rightarrow$ устранимая
- есть отриц. степени до N $\Rightarrow$ полюс N порядка
- и от $-\infty$ до $+\infty$ $\Rightarrow$ существенная особенность

Теорема 5 (Коши о вычетах):

$\exists$ D-область с простой границей, $\{a_j\}_{j=1}^m \in D$ – особ. f

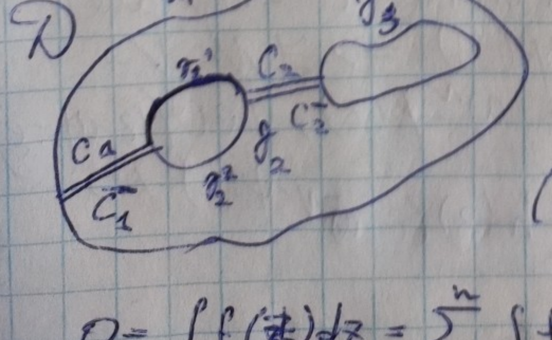
$\exists$ $f \in \mathcal{O}(G \setminus \{a_j\}_1^m)$, $G \supset D$

Тогда $\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{a_j} f$

где $\operatorname{res}_{a_j} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_j} f(z)dz$ – вычет ф-ции f в т. a_j

$c_j = \{|z-a_j| < r\}$, $\forall r < \varepsilon_j$, а ε_j / $f \in \mathcal{O}(0 < |z-a_j| < \varepsilon_j)$

$\blacktriangleright$ $\partial D = \gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_n$ – кус.-гл. жорданов контур



Знаем, что для $f \in \mathcal{O}(\tilde{D})$, $\tilde{D}$-обл $/ \tilde{D} \supset D$

тогда $\left(\int_{\gamma_1} + \ldots + \int_{\gamma_n}\right) f(z)dz = 0$

где D – обл. с простой границей

(т.к. $\gamma = \partial D = \gamma_1 \sqcup C_1 \sqcup \gamma_2^1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_{n-1}^1 \sqcup C_{n-1} \sqcup \gamma_n \sqcup C_{n-1}^- \sqcup \ldots \sqcup \gamma_2^2 \sqcup C_1^-$, C_j – разрезы

$0 = \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f dz + \int_{C_j} f dz - \underbrace{\int_{C_j} f dz}_{= \int_{C_j^-} f dz}$)

Рассмотрим $D \setminus \bigsqcup_{j=1}^{m} \{|z-a_j| \le \varepsilon_j\} = D' \Rightarrow \partial D' = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n \cup C_1^- \cup \ldots \cup C_m^-$

$$\Rightarrow \int_{\partial D'} f(z)dz = 0 = \int_{\partial D} f(z)dz + \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j^-} f(z)dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \oint_{C_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{a_j} f$$

Замечание: Пусть a - ИОТОХ ф-ции f, тогда $\operatorname{res}_a f = c_{-1}$ коэфф в р Лорана в $\{0 < |z-a| < \varepsilon\}$

Действительно, $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz =$$

$$= c_{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = c_{-1}$$

Опр. Пусть $f \in \mathcal{O}(|z| > R)$, тогда $\operatorname{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z)dz$ $\forall r > R$.

Замечание: $\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}$

Следствие (Т Коши о полной сумме вычетов):

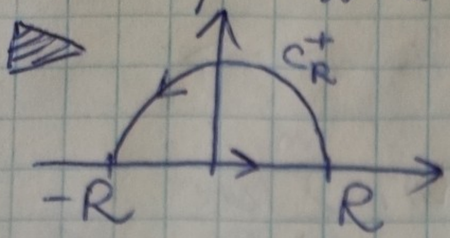
Если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_j\}_{j=1}^{m})$, то $\sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_\infty f = 0$

Пусть R - большое / $f \in \mathcal{O}(|z| > R)$

$$\text{Пусть } r > R \Rightarrow \oint_{|z|=r} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{res}_\infty f$$

$$= \oint_{\partial\{|z|<r\}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{a_j} f$$

Пример 1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \operatorname{res}_{i} \frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2z}\Big|_{z=i} = \pi$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{-R}^{R} + \int_{C_R^+}}_{\text{по замкн. контуру}} - \underbrace{\int_{C_R^-} f(z)\,dz}_{\to 0} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_j>0} \operatorname{res} f$$

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\,dz\right| \le \pi R \cdot \underbrace{M}_{\max|k|} \cdot \frac{1}{R^2} = \dots = \frac{\pi M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Пример 2: $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2 t+4} = \left| \begin{matrix} \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ z=e^{it},\ dz = e^{it}\, i\, dt\end{matrix}\right| =$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{-iz^{-1}\,dz}{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2+4} = \int_{|z|=1}\frac{-i\,dz}{\left(\frac{z^2-2+z^{-2}}{-4}+4\right)z} =$$

$$= \int_{|z|=1}\frac{4i\,dz}{z\left(z^2+\frac{1}{z^2}-18\right)} = 4i\cdot 2\pi i\left(\operatorname{res}_{0} f + \operatorname{res}_{\sqrt{9-\sqrt{80}}} f + \operatorname{res}_{-\sqrt{9-\sqrt{80}}} f\right)$$

Особые точки: $z=0$, $z^2+\frac{1}{z^2}-18=0 \Rightarrow z_{1,2}^2 = 9\pm\sqrt{80}$

$\frac{D}{4} = 81-1$

$\Rightarrow z=0$, $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{9\pm\sqrt{80}}$ ← две из них в круге $|z|=1$

устранимая

$\Rightarrow \operatorname{res}_{0} = 0$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)+\dots}{(z-a)\psi'(a)+\dots} = \frac{\varphi(a)}{(z-a)\psi'(a)} + \dots = \frac{c_{-1}}{z-a}+\dots$$

для т. a – полюс 1-ого порядка

$$\Rightarrow c_{-1} = \frac{z}{(z^4-18z^2+1)'}\Big|_{z_0} = \frac{z}{4z^3-36z}\Big|_{z_0} = \frac{1}{4(z^2-9)}\Big|_{z_0}$$

$$c_{-1} = \frac{1}{4(9-\sqrt{80}-9)} = \frac{-1}{4\sqrt{80}} = \frac{-1}{16\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2 t+4} = -8\pi\left(0+2\cdot\frac{-1}{4\sqrt{80}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}$$