Листок 1

Задача 1.

(a) Приведите пример, показывающий, что на неограниченной области принцип максимума для гармонической функции не выполняется.

(b) Покажите, что для ограниченного решения u уравнения $\Delta u - \lambda u = f$ на $\mathbb{R}^d$, где $\lambda > 0$ и f – ограниченная функция, выполняется неравенство

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |u| \le \lambda^{-1} \sup_{\mathbb{R}^d} |f|.$$

(c) Пусть к условиям пункта (b) дополнительно известно, что $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha$, где $C > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Докажите, что

$$|u(x) - u(y)| \le \lambda^{-1} C|x-y|^\alpha.$$

Задача 2. Пусть $Lu = \mathrm{tr}(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu$, где $A \ge 0$, $c \le 0$.

(a) Докажите, что в точке x_0 максимума функции u выполнено неравенство $Lu(x_0) \le 0$.

(b) Пусть $a^{11} > 0$, коэффициенты ограничены и Ω – ограниченная область. Предположим, что $Lu \ge 0$. Докажите, что $\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u$.

(c) Приведите пример, показывающий, что в пунктах (a) и (b) нельзя отказаться от условия $c \le 0$.

Задача 3. В условиях предыдущей вместо условия $c \le 0$ предположим, что $LV \le 0$ для некоторой положительной функции V. Пусть $a^{11} > 0$ и Ω – ограниченная область. Докажите, что если $Lu \ge 0$ в Ω и $u \le 0$ на $\partial\Omega$, то $u \le 0$ в Ω.

Задача 4. Пусть u — положительная гармоническая функция на Ω. Применяя метод Бернштейна к функции $\ln u$ докажите неравенство Харнака:

$$\sup_B u \le C \inf_B u,$$

где B – замкнутый шар в Ω, а константа C зависит лишь от B и Ω, но не зависит от u.

Задача 5. Пусть $L\colon C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$, где $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$ — множество вещественнозначных функций. Предположим, что L — линейное отображение и $Lu(x_0) \le 0$, если x_0 — точка локального максимума функции u. Докажите, что $Lu = \mathrm{tr}(AD^2u) + \langle b, \nabla u\rangle + cu$, где $A \ge 0$, $c \le 0$.

Задача 6. Пусть $\Delta u + H(x, \nabla u) - \lambda u = f$ на $\mathbb{R}^d$, где функция H — липшицева, $H(x,0) = 0$, $\lambda > 0$ и f — ограниченная функция. С помощью принципа максимума оцените $\sup|u|$ для ограниченного решения u. Предполагая, что $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|$, получите аналогичную оценку для u.

Задача 7. Скажем, что $u \in C(\overline{\Omega})$ является субгармонической функцией в обобщенном смысле, если

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx \ge 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \quad v \ge 0.$$

Докажите, что это определение эквивалентно определению, данному на лекции: для всякого шара B в Ω и всякой гармонической функции v на B из неравенства $u \le v$ на ∂B следует неравенство $u \le v$ на B.