$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2 \\ x_2 = \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$

29.09.21. ОМСС. д/з от семинара 3.

① Найти относ. удлинение волокна, кот. после деформации имело направл.
а) косинусы $\bar{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{l}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

б) определить угол, который был между ними до деформации.

Решение: а) $d\bar{\xi} \rightsquigarrow d\bar{x}$

Обозн. $\lambda = \dfrac{|d\bar{x}|}{|d\bar{\xi}|}$ – кратность удлинения

$e = \dfrac{|d\bar{x}| - |d\bar{\xi}|}{|d\bar{\xi}|} = \lambda - 1$ – относит. удлинение.

$d\bar{x} = \hat{A}\, d\bar{\xi}\ ;\ d\bar{\xi} = \hat{B}\, d\bar{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{|d\bar{\xi}|^2}{|d\bar{x}|^2} = \frac{\langle d\bar{\xi}; d\bar{\xi}\rangle}{|d\bar{x}|^2} = \frac{\langle \hat{B}\, d\bar{x}; \hat{B}\, d\bar{x}\rangle}{|d\bar{x}|^2} = \frac{(\hat{B}\, d\bar{x})^T \hat{B}\, d\bar{x}}{|d\bar{x}|^2} = \underbrace{\frac{(d\bar{x})^T}{|d\bar{x}|}}_{=\bar{l}^T} \hat{B}^T \hat{B} \underbrace{\frac{d\bar{x}}{|d\bar{x}|}}_{=\bar{l}} = \bar{l}^T \hat{B}^T \hat{B}\, \bar{l}$$

единичные вектора ‖ $d\bar{x}$.

нам нужна матрица $\hat{B}$.

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2 \\ x_2 = \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = x_1 - a(t)x_2 \\ \xi_2 = x_2 \\ \xi_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & -a(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{B}^T \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a(t) & 0 \\ -a(t) & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \sqrt{e_1^T \hat{B}^T \hat{B}\, e_1} = \sqrt{(1\,0\,0)\begin{pmatrix} 1 & -a(t) & 0 \\ -a(t) & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1\ -a(t)\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1.$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \Rightarrow \boxed{e_1 = \lambda - 1 = 0.}$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \sqrt{e_2^T \hat{B}^T \hat{B}\, e_2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ 0\right)\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-a; -a+a^2+1; 0)\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1-2a+a^2+1}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - a + 1}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - a + 1}} \Rightarrow \boxed{e_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - a + 1}} - 1.}$$

б) $$\cos\alpha_0 = \frac{\langle d\bar{\xi}_1 \cdot d\bar{\xi}_2\rangle}{|d\bar{\xi}_1|\ |d\bar{\xi}_2|} = \frac{d\bar{x}_1^T \hat{B}^T \hat{B}\, d\bar{x}_2}{|d\bar{\xi}_1| \cdot |d\bar{\xi}_2|} = \frac{d\bar{x}_1^T \hat{B}^T \hat{B}\, d\bar{x}_2}{|d\bar{x}_1| \cdot |d\bar{x}_2|} \cdot \frac{|d\bar{x}_1| \cdot |d\bar{x}_2|}{|d\bar{\xi}_1| \cdot |d\bar{\xi}_2|} = \bar{l}_1^T \hat{B}^T \hat{B}\, \bar{l}_2 \overbrace{(e_1+1)}^{=\lambda_1}\overbrace{(e_2+1)}^{=\lambda_2} =$$

$$= (1\,0\,0)\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - a + 1}} = (1\ -a\ 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{2} - a + 1}} = \boxed{\frac{1-a}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}}}$$

(2) $\begin{cases} x_1 = \xi_2 \\ x_2 = -(1+b)\xi_1 \qquad b = \mathrm{const} > -1. \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$

а) найти тензоры деформаций Грина и Альманси

б) Что произошло в результате деформации с волокнами, первоначально расп. ∥ коорд. осям? найти их удлинения.

в) После деформации 2 волокна ∥ осям. Что с ними было до деформации.

Решение: а) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varepsilon^{кг} = \frac{1}{2}(\hat{A}^T\hat{A} - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -(1+b) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I \right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} (1+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b^2+2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{-x_2}{1+b} \\ \xi_2 = x_1 \\ \xi_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{1+b} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{A} = \frac{1}{2}(I - \hat{B}^T\hat{B}) = \frac{1}{2}\left(I - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1+b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{1+b} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}\left(I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+b)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+b)^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б) $\overset{\circ}{e}_1 \rightsquigarrow \hat{A}\overset{\circ}{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1+b) \\ 0 \end{pmatrix}$ — стал ∥ e_2

$\overset{\circ}{e}_2 \rightsquigarrow \hat{A}\overset{\circ}{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — стал ∥ e_1.

$\overset{\circ}{e}_3 \rightsquigarrow \hat{A}\overset{\circ}{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — перешёл в себя

$$\lambda^2 = \frac{|d\bar{x}|^2}{|d\bar{\xi}|^2} = \frac{(A\delta\bar{\xi})^T A\delta\bar{\xi}}{|d\bar{\xi}|^2 \cdot |d\bar{\xi}|^2} = \overset{\circ}{e}^T \hat{A}^T \hat{A} \overset{\circ}{e} \qquad \hat{A}^T\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -(1+b) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1+b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{(1 0 0) \begin{pmatrix} (1+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = |1+b|$$

$$\lambda_2 = \sqrt{(0 1 0) \begin{pmatrix} (1+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1.$$

$$\lambda_2 = \sqrt{(0 0 1) \begin{pmatrix} (1+b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1.$$

Найдём изменения углов:

$$\cos\alpha_{12} = \frac{\langle d\bar{x}_1; d\bar{x}_2\rangle}{|d\bar{x}_1|\cdot|d\bar{x}_2|} = \frac{d\bar{\xi}_1^{\,T}\hat{A}^T\hat{A}\,d\bar{\xi}_2}{|d\xi_1|\underbrace{(1+e_1)}_{=\lambda_1}|d\bar{\xi}_2|\underbrace{(1+e_2)}_{=\lambda_2}} = \frac{2\bar{e}_1^{\,T}\cdot\varepsilon^{kr}\bar{e}_2 + \overset{=0}{\cos\alpha_{0,12}}}{\lambda_1\lambda_2} =$$

$$\Rightarrow \cos\alpha_{12} = \frac{\bar{e}_1^{\,T}\hat{A}^T\hat{A}\bar{e}_2}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{(1\,0\,0)\begin{pmatrix}(1+b)^2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{|1+b|\cdot 1} = 0 \quad \left(\text{т.к. было } \begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix} \to \text{стало} \begin{pmatrix}-(1+b)e_2\\ e_1\end{pmatrix}\right)$$

$$\cos\alpha_{13} = \frac{(1\,0\,0)\begin{pmatrix}(1+b)^2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{|1+b|\cdot 1} = 0$$

$$\cos\alpha_{23} = \frac{(0\,1\,0)\begin{pmatrix}(1+b)^2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{1\cdot 1} = 0.$$

в) после деформации 2 волокна $\parallel$ осям. Что они с ними было до деформации?

Ну вообще мы знаем, что $\begin{matrix} e_1 \to -(1+b)e_2 \\ e_2 \to e_1 \\ e_3 \to e_3\end{matrix}$, т.е. если стали $\parallel$ осям — то и были $\parallel$ осям, но, возможно, другим :)

Но можно посчитать и честно:

$$\cos\alpha^0_{12} = \left\langle \frac{d\bar{\xi}_1}{|d\xi_1|}, \frac{d\bar{\xi}_2}{|d\xi_2|}\right\rangle = \frac{d\bar{x}_1^{\,T}\hat{B}^T\hat{B}\,d\bar{x}_2}{|d\bar{x}_1|\cdot|d\bar{x}_2|}\cdot\frac{|d\bar{x}_1|\cdot|d\bar{x}_2|}{|d\bar{\xi}_1|\cdot|d\bar{\xi}_2|} = \bar{e}_1^{\,T}\hat{B}^T\hat{B}\bar{e}_2\,\lambda_1\cdot\lambda_2.$$

$$\hat{B}^T\hat{B} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{-1}{1+b} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{1+b} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+b)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha^0_{12} = (1\,0\,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+b)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot|1+b|\cdot 1 = 0$$

$$\cos\alpha^0_{13} = (1\,0\,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+b)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot|1+b|\cdot 1 = 0.$$

$$\cos\alpha^0_{23} = (0\,1\,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+b)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot 1\cdot 1 = 0.$$