Токаева А.А. Билет 13.

① Существование инвар. мер на многообр. уровня 1-го интеграла систем. Теорема Якоби о последнем множителе.

② Канон. преобразования. Произв. ф-ция. Свободные канон. преобр. Произв. ф-ция расш. преобр.

---

① Пусть есть ОДУ $\dot{x} = V(x)$ (*)

Опр. Ф-ция $F(x)$ наз. первым интегралом системы (*), если $\forall x(t)$ – решения (*) выполнено: $F(x(t)) \equiv const \Leftarrow \frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\overset{V}{\dot{x}} = 0.$

=> Утв: $F(x)$ – первый интеграл ур-я (*) $\Leftrightarrow \langle \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{grad}; V \rangle \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Что такое M_C:

$M_C = \{x : F(x) = C\}$ – уровень первого интеграла.

Заметим, что если $x_0 \in M_C$, то $x(t)$ – тоже $\in M_C$, $\forall t$, где $x(t)$ – решение (*) с нач. усл. $x(0) = x_0$ – т.к. ~~уровень~~ значение F – сохраняется вдоль решения.

Т.е. если $dF|_{x_*} \neq 0$ – то $V(x_*)$ – касается M_C в точке x_*.

Т.е. получаем диф. ур-е на M_C. – на вект. поле $V(x)|_{M_C}$.

=> новое ур-е: $\dot{y} = V^*(y)$ – на 1 разм. меньше (и локально лок. коорд $y = (y_1 .. y_{n-1})$)

И оказывается, что если была инвар. мера у исх. ур-я в объемлющем пр-ве, то у нового ур-я – тоже будет.

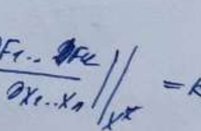
Пусть $F_1(x) .. F_k(x)$ – первые интегралы.

Опр. Они функц. незав. в точке x^* – если rank $\left(\frac{\partial F_1 .. \partial F_k}{\partial x_1 .. x_n}\right)\Big|_{x^*} = k$.

Опр (совм. уровень первых интегралов)

Пусть $C = (C_1 ... C_k) \in \mathbb{R}^k$

$M_C := \{x \in$ объемл. пр-ву: $F_i(x) = C_i; \ i = 1..k\}$



Зам. Если первые интегр. $F_1 ... F_k$ функц. незав на совм. уровне M_C, то M_C – гладкое многообр. – без док-ва.

Теорема. Пусть ур-е $\dot{x} = v(x)$ допускает инвар. меру с $\overset{\text{гладкой}}{\text{плотностью}}$ $\rho(x)$

и допускает первые интегралы $F_1(x) \dots F_k(x)$.

Если для $c = (c_1 \dots c_k) \in \mathbb{R}^k$: интегралы функц. незав. на

совм. уровне $M_c = \{x : F_i(x) = c_i;\ i = 1 \dots k\}$, то M_c — гладкое

многообр. и дифф. ур-е $\dot{y} = v^*(y)$ (сужение ур-я $\dot{x} = v(x)$ на M_c) —

допускает инвар. меру на всем многообр. M_c.

Док-во: Доказываем локально, и для $k = 1$ (дальше — по индукции)

Пусть $F(x)$ — один-единств. 1-й интеграл.

по усл: $dF(x) \neq 0$, если $x \in M_c = \{x : F(x) = c\}$.

Возьмем точку $x^* \in M_c$ и ее окр-ть U.

$dF(x^*) \neq 0 \Rightarrow \neq 0$ и в окр-ти U.

$\Rightarrow$ раз $dF(x^*) \neq 0$, то $\neq 0$ какая-то частная производная

считаем, что $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$ в U.

$\Rightarrow$ по т. о неявной ф-ции:

$x_n = x_n(x_1 \dots x_{n-1}; \underset{F(x_1 \dots x_n)}{\overset{\shortparallel}{c}})$

Возьмем новые коорд: $\begin{cases} y_i = x_i;\ i = 1 \dots n-1 \\ y_n = F(x_1 \dots x_n) \end{cases}$

$\Rightarrow$ в новых коорд: $\begin{cases} \dot{y}_i = v_i(x);\ i = 1 \dots n-1 \\ \dot{y}_n = 0 \quad \text{— т.к. } F \text{ — 1-й интегр.} \end{cases}$

это ур-е в $\mathbb{R}^n$.

Оно допускает инвар. меру — т.к. это наше исх. ур-е, но в других коорд, а у исх.

$\Rightarrow \tilde{\rho}(y) = \rho(x(y)) \left| \frac{\partial x(y)}{\partial y} \right|$ — плотность инвар. меры ур-е инвар. мера была.

С модулем на усл. Лиувилля в новых коорд:

$0 = \operatorname{div}(\tilde{\rho}\tilde{v}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial y_i} + \underset{\uparrow \text{т.к. } \tilde{v}_n = 0, \text{ т.к. } \dot{y}_n = 0.}{0}$

$\rho^* := \tilde{\rho}|_{M_c}$

$v^* = v|_{M_c} \quad \Rightarrow \rho^*$ — инвар. мера на M_c.

опр. ур-е (*) интегр. в квадратурах, если используя конечное число допустимых операций, можно найти общее решение (*)

1) алгебр. опер.
2) опред. интегр. от известных ф-ций
3) разрешение функц. ур-й
4) можно исп. элем. ф-ции — полином. тригоном. $\sin x$, $\cos x$, e^x.

Утв. Пусть известно $(n-1)$ первых интегралов $F_1(x)\dots F_{n-1}(x)$.
Если они функц. незав. в окр-ти точки, т.е. ранг $\left\|\frac{\partial F_1\dots F_{n-1}}{\partial x_1\dots\partial x_n}\right\| = n-1$,
то система (*) $\dot x = v(x)$ — интегрируема в квадратурах.

Теорема (Якоби о последнем множителе)

Пусть ур-е $\dot x = v(x)$ (*) — допускает инвар. меру с гладкой плотностью (н/у $\rho(x)$) и имеет $n-2$ первых интеграла $F_1(x)\dots F_{n-2}(x)$.
Если в точке x_0: 1) $v(x_0)\neq 0$
2) интегралы $F_1\dots F_{n-2}$ — функц. незав., т.е. ранг $\left\|\frac{\partial F_1\dots F_n}{\partial x_1\dots\partial x_n}\right\|_{x_0} = n-2$.
то в некот. окр-ти точки x_0, система (*) интегрируема в квадратурах.

Док-во: Заметим, что $\exists$ окр-ть точки x_0, в кот. интегралы функц. незав.
$M_c = \{x_0 : F_i(x) = c_i;\ i=1\dots n-2\}$
$c=(c_1\dots c_{n-2})$
M_c — кусочек 2-мерной пов-ти (т.к. n коорд, $n-2$ ур-й)
На этом многообр. можно ввести крив. коорд. $y_1; y_2$

Вект. поле v — касается M_c — т.к. M_c — это пов-ть первых интегр.
$\Rightarrow$ ур-е (*): $\dot x = v(x)$ — порожд. ур-е $\begin{cases}\dot y_1 = f_1(y_1;y_2)\\ \dot y_2 = f_2(y_1;y_2)\end{cases}$
~~Но~~ раз у исх. ур-я есть инвар. мера, то и на M_c — тоже будет
$\Rightarrow$ есть ур-е от 2-х перем. и есть инвар. мера $\partial(y_1;y_2)$
$\Rightarrow$ ~~его~~ проинтегр. в квадр. — нужен 1 н-й интегр.

Для этого рассм. диф. форму:

$\omega_1 = \partial f_2 dy_1 - \partial f_1 dy_2$.

Заметим, что ω_1 — замкнута — т.к. $d\omega_1 = 0$.

Ну $d\omega_1 = \frac{\partial(\partial f_2)}{\partial y_1} \underbrace{dy_1 \wedge dy_1}_{0} + \frac{\partial(\partial f_2)}{\partial y_2} dy_1 \wedge dy_2 - \frac{\partial}{\partial y_1}(\partial f_1) dy_2 \wedge dy_1 - \frac{\partial}{\partial y_2}(\partial f_1) \underbrace{dy_2 \wedge dy_2}_{0} =$

$= \left(\frac{\partial(\partial f_2)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\partial f_1)}{\partial y_2} \right) dy_1 \wedge dy_2 = 0$

$\| \ \operatorname{div}(\partial f) = 0$.

⇒ ω_1 — замкнута

⇒ по т. Пуанкаре — она лок. точна

т.е ∃ локал. ф-ция $F(y_1; y_2)$: $dF = \omega_1 = \partial f_2 dy_1 - \partial f_1 dy_2$

$\| \ \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2$,

т.е $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_1} = \partial f_2 \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} = -\partial f_1 \end{cases}$

покажем, что F — это 1-й интеграл новой системы:

Ну $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} f_2 = (\partial f_2) f_1 + (-\partial f_1) f_2 = 0$. ч.т.д.

Зам где мы исп., что $v(x) \not\equiv 0$?

Ну для того, чтобы $dF \not\equiv 0$ ⇒ одна из $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ или $\frac{\partial F}{\partial y_2} \not\equiv 0$

⇒ применимо утв, что для $n = 2$ нужно $n-1 = 1$ незав. первых интегр. — а 1 1-й интегр. незав, тогда $dF \not\equiv 0$.

Зам $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_1}{f_2}$ ⇒ домножим на ∂, и ур-е станет полным диф ⇒ ∂ — это интегрир. множ.

② Канон. преобр. Произв. ф-ции своб. канон. преобр

Произв ф-ция танг. канон. преобр

~~[illegible]~~

Стр3

Опр Замена коорд. $Q = Q(q,p,t)$
$P = P(q,p,t)$ наз. канонической,
$T = T(q,p,t)$

если при этой замене канон. форма сохр. в искр. плоскости:

$$dp \wedge dq - dH \wedge dt = dP \wedge dQ - d\tilde{H} \wedge dT \quad (\text{т.е. } \exists\, \tilde{H} \text{ - такая})$$

Утв. Если преобр. коорд. канонич, то ур-е Гам. сохр. по форме:

было $\begin{cases} \dot{q} = H_p \\ \dot{p} = -H_q \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ стало $\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial P} \\ \dot{P} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} \end{cases}$

Ну форма одна и та же → аннулятор один и тот же,
⇒ интегр. кривые одинаковые

Если t - фикс, то канон. преобр - когда $dp \wedge dq = dP \wedge dQ$, $\forall t$.

Итак: $\begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \hookrightarrow \begin{matrix} Q \\ P \end{matrix}$

q_1	Q_1
$\vdots$	$\vdots$
q_n	Q_n
p_1	P_1
$\vdots$	$\vdots$
p_n	P_n

новые коорд.

старые коорд

Опр Если можно (q,Q) взять в качестве новых коорд,
т.е можно выразить $\begin{cases} Q = Q(q,p,t) \\ P = P(q,p,t) \end{cases} \to p = p(q,Q,t)$ - то это наз. "свободное" канон. преоб.

Вопрос: а когда можно?

ну если $\left|\dfrac{\partial Q}{\partial p}\right| \neq 0$ - то по т. о неявной ф-ции: $p = p(q,Q,t)$

⇒ подставим p в $P = P(q,p,t)$

⇒ получим $\begin{cases} P = P(q,Q,t) \\ p = p(q,Q,t) \end{cases}$

Т.е для всех канон. преобр - можно замену записать как $\begin{cases} Q = Q(q,p,t) \\ P = P(q,p,t) \end{cases}$,
а для свободных - можно ещё так

по опр. канон. преобр: оно сохр ω_2, те $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$:

$$dp\wedge dq - dH\wedge dt = dP\wedge dQ - d\tilde{H}\wedge dt.$$

$\omega_2 = d\omega_1$

но если $\underset{d\omega_1}{\underset{\parallel}{\omega_2}} = \tilde{\omega}_2$, то $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 + d\Pi$.

$$\Rightarrow p\,dq - H\,dt = P\,dQ - \tilde{H}\,dt + d\Pi.$$

Зададим Π в коорд. q, Q, t и назовём её $S(q,Q,t)$ — произв. ф-ция

$\Rightarrow$ наше соотн: $\omega_1 = p\,dq - H\,dt = P\,dQ - \tilde{H}\,dt + dS$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial Q}dQ + \frac{\partial S}{\partial t}dt$$

dq, dQ, dt — незав. дифференциалы

$\Rightarrow$ приравниваем коэф:

$dq: \; p = \frac{\partial S}{\partial q}$

$dQ: \; P + \frac{\partial S}{\partial Q} = 0$

$dt: \; -H = -\tilde{H} + \frac{\partial S}{\partial t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial S}{\partial Q} \\ \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} \end{cases} + \left|\frac{\partial Q}{\partial p}\right| \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial p}{\partial Q}\right| \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial Q}\right| \neq 0.$$

т.к. $\left|\frac{\partial Q}{\partial p}\right| = \left|\frac{\partial p}{\partial Q}\right|^{-1}$

__Мораль:__ если мы возьмём любую ф-цию $S(q,Q,t)$ с усл. $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial Q}\right| \neq 0$,

то она породит свобод. канон. преобр

$$\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} = f(q,Q,t) \xRightarrow{\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q\partial Q}\right| \neq 0} Q = Q(q,p,t) \\ P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = g(q,Q,t) \end{cases}$$

подставим $\Rightarrow P = \tilde{g}(q,p,t)$.

__Проблема:__ своб. канон. преобр — не группа,

т.к. тожд. преобр-ние не лежит.

ну $\begin{cases} Q = q \\ P = p \end{cases}$ — тут $\frac{\partial Q}{\partial p} = 0 \Rightarrow$ из 1-го ур-я мы не выразим p через Q.

что делать? взять другие коорд:

$$pdq - Hdt = \underset{\substack{\parallel \\ d(PQ) - QdP}}{PdQ} - \tilde H dt + d\Pi$$

$\Rightarrow pdq - Hdt = -QdP - \tilde H dt + d\tilde\Pi$, где $\tilde\Pi = \Pi + PQ$

$$\Rightarrow \begin{matrix} q & Q \\ p & P \end{matrix}$$ — возьмем их в качестве коорд

$$\Rightarrow \begin{cases} Q = Q(q,p,t) \\ P = P(q,p,t) \Rightarrow p = p(q,P,t) \end{cases}$$ ← подставим — так можно, если $\left|\frac{\partial P}{\partial p}\right| \neq 0$.

$\Rightarrow$ Ищем $\tilde\Pi = S(q,P,t)$

Подставим: $pdq - Hdt = -QdP - \tilde H dt + \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial P}dP + \frac{\partial S}{\partial t}dt$

независ. дифференциала: dq, dP, dt

$\Rightarrow dq: \; p = \frac{\partial S}{\partial q}$

$dP: \; -Q + \frac{\partial S}{\partial P} = 0$

$dt: \; -H = -\tilde H + \frac{\partial S}{\partial t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar p = \frac{\partial S}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} \\ \tilde H = H + \frac{\partial S}{\partial t} \end{cases}$$ + усл. невыр.: $\left|\frac{\partial \bar P}{\partial p}\right| \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial \bar p}{\partial P}\right| \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P}\right| \neq 0}$

т.е. если это вып, то S можно считать произв. ф-цией

Какое пр S?

$S = qP$ + const

произв. ф-ция определена с точностью до конст.

И оно удовл. усл. невыр.: $\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial p}\right| = |E| = 1 \neq 0.$