CA1 Коэф-т при z^6 ф-ии $\cos^2 z$ в 0

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

При z^6: $\frac{f^{(6)}(0)}{6!}$

$$f'(z) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$
$$f''(z) = -2\cos 2z$$
$$f'''(z) = 4\sin 2z$$
$$f^{IV}(z) = 8\cos 2z$$
$$f^{V}(z) = -16\sin 2z$$
$$f^{VI}(z) = -32\cos 2z$$

$$\Rightarrow -\frac{32}{6!} = -\frac{\cancel{32}^{\cancel{16}\,\cancel{4}\,2}}{\cancel{6}_3\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}} = -\frac{2}{45}$$

CA2 Найти ф-ю, задаваемую рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)' = \text{сумма геом. прогр.}$$

$$= z\cdot\left(\frac{z}{1-z}\right)' = z\cdot\frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\frac{i}{(1-i)^2} = \frac{i(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2} = \frac{i(1+2i-1)}{(1^2-i^2)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

CA3 радиус сходимости $\frac{1}{e^z+1}$ в 0

Особые точки: $e^z + 1 = 0$

$z = \pi i + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$

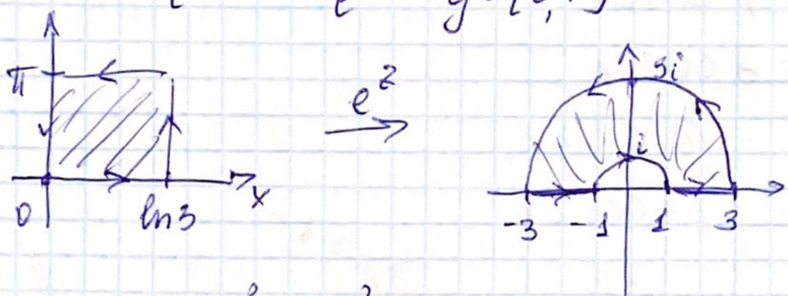
ближайшая к 0 – точка πi

$\Rightarrow$ ф-я голоморфна в круге радиуса π

CA4 Площадь образа $\{z = x+iy : x\in[0, \ln 3], y\in[0\pi]\}$ под действием e^z

границы: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$e^{x+i\cdot 0} = e^x \quad x\in[0, \ln 3]$$
$$e^{\ln 3+iy} = 3e^{iy} \quad y\in[0\pi] \Rightarrow$$
$$e^{x+\pi i} = -e^x, \quad x\in[0, \ln 3]$$
$$e^{0+iy} = e^{iy} \quad y\in[0,\pi]$$



$$S = \frac{\pi 3^2 - \pi 1^2}{2} = 4\pi$$

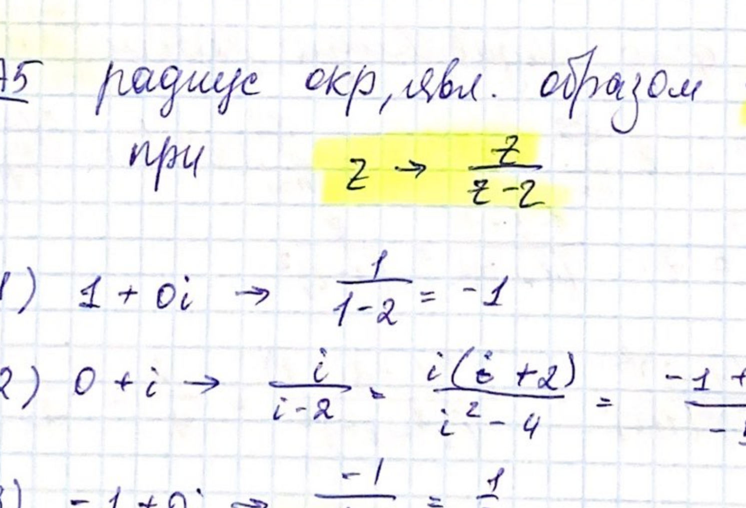
CA5 радиус окр, явл. образом $\{z: |z|=1\}$ при $z \to \frac{z}{z-2}$

1) $1+0i \to \frac{1}{1-2} = -1$

2) $0+i \to \frac{i}{i-2} = \frac{i(i+2)}{i^2-4} = \frac{-1+2i}{-5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

3) $-1+0i \to \frac{-1}{-1-2} = \frac{1}{3}$

4) $0-i \to \frac{-i}{-i-2} = \frac{i}{i+2} = \frac{i(i-2)}{i^2-4} = \frac{-1-2i}{-5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$



$$R = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$$

СА6 $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z}\,dz$

$\frac{z+1}{z(z-1)}$ Особые точки: $z=0$, $z=1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z+1}{z^2-z} + \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z+1}{z^2-z}\right) =$$

- Если $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $a\neq\infty$ – ряд Лорана f в соотв. кольце, то $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$
- Если $a\neq\infty$ – полюс порядка $p\geq 1$ для f, то
$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)}$$
- Если $a\neq\infty$ и $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, $z\in B(a)$, $f_1, f_2\in A(B(a))$, $f_2(a)=0$, $f_2'(a)\neq 0$, $f_1(a)\neq 0$ (т.е. a – простой полюс f) $\rightarrow$
$$\operatorname*{res}_a f = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}$$

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{z+1}{z^2-z} = \frac{z+1}{(z^2-z)'}\Big|_0 = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} = \frac{z+1}{(z^2-z)'}\Big|_1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$= \operatorname*{res}_{z=0}\frac{z+1}{z^2-z} + \operatorname*{res}_{z=1}\frac{z+1}{z^2-z} = -1+2 = 1$$

СА7 Найти образ $\{z: |z|<1\}$ при $z\to\frac{z-i}{z+i}$

$1 \to \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$

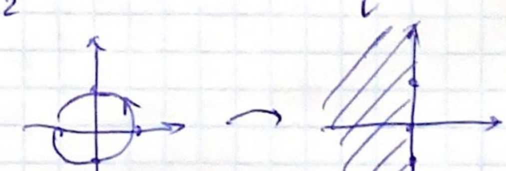
$-1 \to \frac{-1-i}{i-1} = -\frac{(1+i)(1+i)}{i^2-1} = \frac{-\cancel{1}-2i-\cancel{i^2}}{-2} = i$

$i \to \frac{i-i}{1+i} = 0$

$-i \to \frac{-i-i}{-i+i} = -\infty$

$0 \to -1$

$\{z: \operatorname{Re} z<0\}$



СА8 Коэф-т при z^{-2} ф-ии $2\sin\frac{z-1}{z}$ в $0<|z|<\infty$

$$\sin\frac{z-1}{z} = \sin\left(1-\frac{1}{z}\right) = \sin 1\cos\frac{1}{z} - \sin\frac{1}{z}\cos 1$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \dots$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

при z^{-2}: $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sin 1 = -\sin 1$

СА9 Ближайшие к 0 корни $\sin(z) = 2$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i\sin z \end{aligned} \Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2$$

$$e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0$$

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

$$D = (-4i)^2 + 4 = 16i^2 + 4 = -12$$

$$e^{iz} = \frac{4i \pm\sqrt{-12}}{2} = 2i \pm\sqrt{-3} = i(2\pm\sqrt{3})$$

$z = x+iy \Rightarrow e^{ix-y} = i(2\pm\sqrt{3})$

$$e^{-y}(\cos x + i\sin x) = i(2\pm\sqrt{3})$$

$$\begin{cases} e^{-y}\cos x = 0 \\ e^{-y}\sin x = 2\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \sin k = \pm 1 \\ e^{-y} = \pm(2\pm\sqrt{3}) \end{cases}$$

$e^{-y}>0$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ e^{-y} = 2\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

Наим. при $k=0$ т.к. $|z| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^2 + \ln^2(2 \pm \sqrt{3})}$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$

<u>САЮ</u> Найти $f(z)$: $\operatorname{Re} f(x,y) = y - xy$, $f(0)=0$
голоморфную

$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$

$\operatorname{Re} f = u(x,y) = y - xy$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow u(\ ,\ ) + i v(0,0) = 0$

$u(0,0) = 0 \rightarrow v(0,0) = 0$

голоморфная $\Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$$\begin{cases} v_y = -y \\ v_x = -1 + x \end{cases}$$

$v = \int v_y \, dy = \int -y \, dy = -\frac{1}{2} y^2 + C_1(x) + C_2$

$v_x = C_1'(x) = -1 + x$

$C_1(x) = \int C_1'(x)\, dx = \int (x-1)\, dx = \frac{x^2}{2} - x + C_3$

$\Rightarrow v(x,y) = -\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2 - x + C$

$v(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$f(x,y) = y - xy + i\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - x\right) = y - ix +$

$+ \frac{1}{2}\left(ix^2 - 2xy - iy^2\right) = y - ix + \frac{1}{2} i \left(x^2 + 2ixy - y^2\right) =$

$= -i(x+iy) + \frac{i}{2}(x+iy)^2 = -iz + \frac{i}{2} z^2$

CA11 $17\,tg\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$

$$17\,tg\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right) = 17\,\frac{tg\frac{\pi}{4} - tg(i\ln 2)}{1 + tg\frac{\pi}{4}\,tg(i\ln 2)} =$$

$$= 17\,\frac{1 - tg(i\ln 2)}{1 + tg(i\ln 2)} \; =$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$tg z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = i\,\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$tg(i\ln 2) = i\,\frac{e^{-i^2\ln 2} - e^{i^2\ln 2}}{e^{i^2\ln 2} + e^{-i^2\ln 2}} = i\,\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{-\ln 2} + e^{\ln 2}} =$$

$$= i\,\frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{3}{5}i$$

$$= 17\,\frac{1 - \frac{3}{5}i}{1 + \frac{3}{5}i} = 17\,\frac{\left(1 - \frac{3}{5}i\right)^2}{1 + \frac{9}{25}} =$$

$$= \cancel{17}\,\frac{1 - \frac{6}{5}i - \frac{9}{25}}{\frac{\cancel{34}\,2}{25}} = \frac{25 - 30i - 9}{2} = 8 - 15i$$

CA12 Кривая – образ $\{z : |z| = 2\}$ под действ. ф-ии Жуковского $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Положим $z = 2e^{i\varphi}$ $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$z \to \frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right) = e^{i\varphi} + \frac{1}{4}e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi +$$

$$+ \frac{1}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}i\sin\varphi = \frac{5}{4}\cos\varphi + \frac{3}{4}i\sin\varphi$$

$\Rightarrow$

Это эллипс с полуосями $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15\pi}{16}$$

Или по ф-ле площади, огр. кривой $\left(\frac{5}{4}\cos t, \frac{3}{4}\sin t\right)$

$$S = -\int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt = -\int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\sin t \cdot \frac{5}{4}(-\sin t)\, dt =$$

$$= \frac{15}{16}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2t - 1)dt =$$

$$= \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{15}{16}\pi$$

<u>CA13</u> В каких точках $f(z) = \bar{z}^2 + 2i\bar{z}$ имеет производную?

$z = x + iy$

$$f(z) = (x-iy)^2 + 2i(x-iy) = x^2 - 2ixy - y^2 + 2ix + 2y$$

$$= 2y + x^2 + y^2 + i(2x - 2xy)$$

$$u(x,y) = \cancel{(x+y)}^2 = x^2 + 2y - y^2$$

$$v(x,y) = 2x(1-y) = 2x - 2xy$$

Условие Коши-Римана:

$$f \text{ диффер. в точке} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2x \\ 2 - 2y = -2 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{диффер. в точке } z = i$$

CA14 Образ прямой $\{z = x+iy : y = 1\}$ при $z \to z^2$

$z = t + i \quad \to \quad t^2 + 2it - 1$

$\Rightarrow \quad \begin{matrix} x = t^2 - 1 \\ y = 2t \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{4} - 1$

$y^2 = 4x + 4$

CA15 $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} (2\bar{z} + 1)\, dz$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} (2\bar{z}+1)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} 2\, \frac{|z|^2}{z}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} dz = \frac{1}{\pi i} \cdot 2\pi i \underbrace{\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z}}_{=1} + 0 = 2$$

CA16 ближайший к единице полюс $f(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1} + \frac{i}{z}$

$e^{iz} - 1 = 0$ при $z_k = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

При $z \neq z_k$ f является аналитической $\Rightarrow$ z_k изолирован.

$\lim\limits_{\substack{z \to 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \setminus 0}} f(z) = \infty \quad \Rightarrow \quad \{2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$ - полюса

Посмотрим что происх. в т. 0

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{e^{iz} - 1} + \frac{i}{z} = \lim \frac{z + ie^{iz} - i}{z(e^{iz} - 1)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\cancel{z} + i\left(\cancel{1} + \cancel{iz} - \frac{z^2}{2} + \bar{o}(z^2)\right) - \cancel{i}}{z\left(\cancel{1} + iz + \bar{o}(z) - \cancel{1}\right)} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{-\frac{i}{2} z^2 + i\,\bar{o}(z^2)}{i z^2 + \bar{o}(z^2)} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ в т. 0 f имеет устранимую особенность. Ответ: 2π

CA17 $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \sin\frac{z+1}{z}\,dz$

Особая точка $z=0$

$$\sin\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{i(1+\frac{1}{z})} - e^{-i(1+\frac{1}{z})}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i}}{2i}e^{\frac{i}{z}} - \frac{e^{-i}}{2i}e^{-\frac{i}{z}} = \frac{e^{i}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i}{z}\right)^n}{n!} - \frac{e^{-i}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-i}{z}\right)^n}{n!}$$

ряд Лорана

$\Rightarrow z=0$ - существенно особая точка

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left(\sin\frac{z+1}{z}\right) = C_{-1} = \frac{e^{i}}{2i}\cdot i - \frac{e^{-i}}{2i}(-i) =$$

$$= \frac{e^{i}-e^{-i}}{2} = \cos 1$$

по Th Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\sin\frac{z+1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\sin\frac{z+1}{z}\right) = \cos 1$$

CA18 Найти голом. в окр. 0 ф-ю, удовлетвор.

$$f(z) = 2f(iz) + 3z^6$$

$f(z)$ и $f(iz)$ голом. в окр. 0 $\Rightarrow$ аналитические в окр. 0. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (iz)^n + 3z^6$$

Сравним коэф-ты справа и слева

$n=6$: $C_6 = -2c_6 + 3 \Rightarrow C_6 = 1$

$n=4k$ $\quad C_n = 2C_n \Rightarrow C_n = 0$

$n=4k+1$ $\quad C_n = 2iC_n \Rightarrow C_n = 0$

$n=4k+2$ $\quad C_n = -2C_n \Rightarrow C_n = 0$

$n=4k+3$ $\quad C_n = -2iC_n \Rightarrow C_n = 0$

$f(z) = z^6$

СА19 Найти рациональную ф-ю, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, простой полюс в −1 с вычетом −1, не имеющую других полюсов и =0 в 0

$$f(z) = \frac{z \cdot g(z)}{(z-1)(z+1)} \quad g(z) - \text{без полюсов}$$

$g(z) = az+b$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z(az+b)}{z+1} = \frac{a+b}{2} = 1$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{z(az+b)}{z-1} = \frac{-a+b}{2} = -1$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ b-a=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \quad f(z) = \frac{2z^2}{z^2-1}$$

СА20 Конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг, удовл. условиям $f(i)=0,\ f'(i)=\frac{1}{2}$

Дробно-лин. отобр. на единичный круг имеет вид $f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$

$f(i)=0 \Rightarrow z_0 = i$

$$\frac{1}{2} = f'(i) = e^{i\alpha}\cdot\left(\frac{z-i}{z+i}\right)'\Bigg|_{z=i} = e^{i\alpha}\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=i} =$$

$$= e^{i\alpha}\frac{2i}{4i^2} = -e^{i\alpha}\frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha} = -\frac{1}{i} = i$$

$$\Rightarrow f(z) = i\,\frac{z-i}{z+i} = \frac{iz+1}{z+i}$$