Листок 2

Задача 1. Нарисуйте характеристики и решите уравнения

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

(b) $3\dfrac{\partial u}{\partial x} - 5\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1.$

Задача 2. Пусть b — постоянное векторное поле на $\mathbb{R}^n$, причем $b_n \neq 0$. Используя метод характеристик выпишите формулу решения задачи Коши

$$\langle b, \nabla u(x)\rangle + u(x) = f(x), \quad u|_{x_n=0} = g(x_1, \dots x_{n-1}).$$

Задача 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Найдите характеристики.

(b) Пусть $\alpha = 4$. Найдите u, удовлетворяющее условию $u = 1$ на $x^2 + y^2 = 1$.

(c) Пусть $\alpha = 2$. Найдите u, удовлетворяющие условию $u(x, 0) = x^2$, $x > 0$.

(d) Какое условие теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши нарушается в пункте (c).

Задача 4. Найдите характеристики для уравнения эйконала $|\nabla u|^2 = 1$ и найдите решения с начальными условиями:

$$(a)\ u|_{x_1} = 0, \quad (b)\ u|_{x_1} = x_2/2, \quad (c)\ u|_{|x|=1} = 0.$$

Задача 5. Найдите характеристики для уравнения $u_{x_1}u_{x_2} = u$ и найдите решение с начальным условием $u|_{x_1=0} = x_2^2$.

Задача 6. Найдите характеристики для уравнения $u_{x_1} + u_{x_2}^2/2 = 1$ и найдите решение с начальным условием $u|_{x_1=0} = x_2^2/2$.

Задача 7. Существует ли непостоянная непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $u_y + uu_x = 0$ на $\mathbb{R}^2$?