(19) Линейное дифференциальное уравнение 2-ого порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное ур-ие.

Опр. Лин. дифф. ур-ие $n^{ого}$ порядка - это ур-ие вида:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (*)$$

где $y(x)$ - неизв. ф-ция, $a_i(x)$ - коэфф. ур-ия

Опр. Если $f(x)=0$, то ур-ие $(*)$ наз. однородным.

Теорема: Решения линейного ур-ия (системы) $\dot{x} = A(t)x + B(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, A и B - кусочно-непр. на I, продолженные на весь I, образуют n-мерное линейное пр-во при $B \equiv 0$, аффинное при $B \neq 0$.

1) Если $\dot{x} = A(t)x$, $\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x}$ ← 2 разл. решения - их можно склеить, т.е. $(\alpha x + \beta \tilde{x})^{\cdot} = A(t)(\alpha x + \beta \tilde{x})$
$\Rightarrow$ все аксиомы лин. пр-ва выполнены $\Rightarrow$ решение продолжается на I

2) Берём $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = x_{01} = x_1, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} = x_{0n} = x_n$ - эти решения в $t_0 \in I$ лин. независимы
$\Rightarrow$ лин. нез. в $\forall$ точке $\in I$
$\Rightarrow$ эти решения складываются с коэфф-тами $x_{01}, \dots, x_{0n}$ при $t = t_0$ дает нач. реш.
$\Rightarrow$! ЗК, т.к. это базис и всё выражается через них $\Rightarrow$ n-мерное пр-во.

Тогда общее решение для $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)$ - это

$$x(t) = X(t)C + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(u)B(u)\,du,$$ где $C = const$,

$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ - фундаментальная матрица, $x_{о.о.}(t) = X(t)C$ - общее решен. однородного ур-ия $\dot{x} = A(t)x$

Метод вариации постоянной: Нужно общее решение $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ $\Rightarrow$ Ищем решение в виде: $x(t) = X(t)C(t)$

$\Rightarrow \dot{X}(t)C(t) + X(t)\dot{C}(t) = A(t)X(t)C(t) + B(t) \Rightarrow$

$\underbrace{(\dot{X}(t) - A(t)X(t))}_{=0,\ \text{т.к. выбрали } X(t)} C(t) + X(t)\dot{C}(t) = B(t) \Rightarrow \dot{C}(t) = X^{-1}(t)B(t)$

$\exists$ ет, т.к. столбцы $X(t)$ лин. незав.

$\Rightarrow C(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(u)B(u)\,du + C_0$

$\Rightarrow x(t) = X(t)C_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(u)B(u)\,du$

Если $t = t_0$, то $x(t_0) = X^{-1}(t_0)C_0 + 0 \Rightarrow C_0 = X^{-1}(t_0)x(t_0)$.

$\exists$ есть n решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ однор. системы $\dot{x} = A(t)x$ и составим матрицу $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

Опр. $W(t) = \det X(t)$ - определитель Вронского решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.

Теорема (ф-ла Лиувилля-Остроградского):

Для системы $\dot{x} = A(t)x$, где $A(t)$ - непр. (кусочно-непр) определитель Вронского удовл. ур-ию: $\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t)$

В частности, $W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(u)\,du}$

$\Rightarrow W(t) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & \ldots & x_{n,1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{x_{1,n}(t)}_{X_1(t)} & \ldots & \underbrace{x_{n,n}(t)}_{X_n(t)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & \ldots & X_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$

тогда $\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ \dot{y}_n(t) \end{vmatrix}$

Рассмотрим $\dot{y}_1(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t)$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}(t)y_1(t) + \overbrace{a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t)}^{=0} \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t) \begin{vmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)W(t)$

$\Rightarrow \dot{W}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t) W(t) = tr(A(t)) W(t)$

$\Rightarrow \frac{dW(t)}{dt} = tr A(t) \cdot W(t) \Rightarrow \frac{dW}{W} = tr A(t) dt$ и $W(t) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} tr A(t) dt}$ ◺

Следствие: 1. Лин. независимость n решений $\dot{x} = Ax$, $\dim X = n$ - достаточно проверить в 1-ой точке

▷ Если $W(t_0) \neq 0$ в некот. точке, то $W(t) \neq 0$ всюду из ф-лы Лиувилля - Остроградского ◺

2. За время от t_0 до t объём в фазовом пр-ве системы $\dot{x} = A(t)x$ изменяется в $\exp\{\int_{t_0}^{t} tr A(u) du\}$ раз.

Если же $tr A(t) = 0$, то V-м не меняется.

Как решить: $y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t) y = f(t)$.

↳ редукцией сведем к: $\dot{x} = A(t)x + B(t)$

где $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \ldots & & -a_1(t) \end{pmatrix}$; $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \end{matrix}$

и $a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ - непр. или кус-непр на I

Утв 1. Решения уравнения продолжаются на I

▷ Редукция + т. о продолжении решений СЛУ ◺

Утв 2. Продолженные решения однородного ур-ия образуют n-мерное линейное пр-во (над $\mathbb{R}$)

▷ Ур-ие сводится к $\dot{z} = A(t) z$, где $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$

и $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \ldots & & -a_1(t) \end{pmatrix}$

Решения $z' = A(t)z$ образуют n-мерное лин. пр-во по т. о продолжении СЛУ.

$\Rightarrow$ их 1-ые компоненты образуют лин. пр-во $\Rightarrow$ эти компоненты — решения исходного ур-ия

Т.е. если $\{z_1, \dots, z_n\}$ — фундаментальная система решений для $z' = Az$, то $\{z_{1,1}; \dots z_{n,1}\}$ — лин. независимы

От противного: $\exists\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \,/\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{i,1} = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 z_{11}' + \dots + \alpha_n z_{n1}' = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 z_{11}^{(n-1)} + \dots + \alpha_n z_{n1}^{(n-1)} = 0 \end{array}\right] \Rightarrow |z_1 \dots z_n| = 0 \Rightarrow ?$$

$\alpha \neq 0$ т.к. вектор нетрив.

Их n штук + $\forall$-ое другое решение исходного ур-ия выражается через них, т.к. $\{z_1, \dots z_n\}$ — ФСР

$\{z_{1,1}; \dots z_{n,1}\}$ — базис в пр-ве решений $y^{(n)} + \dots + a_n(x) y = 0$

называется ФСР (фундам. системой решений) для этого ур-ния

Пример: $y'' + y = 0$, $y_1(x) = \sin(x)$ и $y_2(x) = \cos(x)$ — лин. незав.

$\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ — ФСР этого ур-ия $\Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

общее решение

Опр. Для n решений $y_1, \dots y_n$ ур-ия $y^{(n)} + \dots + a_n(x) y = 0$

Определителем Вронского наз. $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

Утв 3. Определитель Вронского n решений ур-ия $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$ удовл. ур-ию: $\dot{W}(x) = -a_1(x) W(x)$ и, в частности,

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\, d\xi\right\}, \quad x, x_0 \in I.$$

см. редукцию

Пример: $y''+y=0$, $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$

$$W(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2x-\cos^2x=-1.$$

Для решения неодн. ур-ий $y^{(n)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)$ можно использовать метод вариации постоянной

$z'=A(x)z+F(x)$, $\{z_1(x),\ldots z_n(x)\}$ – ФСР

$(z_1\ldots z_n)=:Z(x)$ – соотв. матрица. $\Rightarrow$ Решение

неоднор. системы: $z(x)=Z(x)C(x)\Rightarrow \underbrace{Z'C}+ZC'=\underbrace{AZC}+F$

$\Rightarrow ZC'=F$, $z=\begin{pmatrix}y\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}$; $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ – ФСР однор. ур-ия

Общее решение: $y(x)=C_1(x)y_1(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)$ и

система $C'=\begin{pmatrix}C_1'\\ \vdots\\ C_n'\end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix}y_1(x) & \ldots & y_n(x)\\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'(x)\\ \vdots\\ C_n'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{pmatrix}$

т.к. фунд. система $\Rightarrow W\neq 0\Rightarrow$ матр. невырождена

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}C_1'(x)\\ \vdots\\ C_n'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1(x) & \ldots & y_n(x)\\ \ldots & & \ldots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{pmatrix}$$

Зам: $W(x)\equiv 0$ (для ф-ций) $\underset{в.г.}{\not\Rightarrow}$ ф-ции линейно зависимы

Зам: $\exists$ объект допускает заданные динамики $y_1(x),\ldots y_n(x)$ (класса C^n)

Тогда ДУ не для этого объекта: $\begin{vmatrix}y_1(x) & \ldots & y_n(x) & y\\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'\\ \ldots & & & \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}\end{vmatrix}=0$

Это линейное ДУ порядка n (если $W(x)\neq 0$), меньше y-ков взять нельзя, т.к. n-мерное пр-во.