Решение 1 задачи. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Тогда

$$\int f(x,\mu_1)d\mu_2 = \int\int h(y, K*\mu_1(y))K(x-y)dyd\mu_2 = \int h(y, K*\mu_1(y))(K*\mu_2(y))dy$$

в силу теоремы Фубини и чётности функции $K(x)$. Таким образом,

$$0 \le \int (f(x,\mu) - f(x,\sigma))d(\mu - \sigma)$$

$$= \int (h(y, K*\mu(y)) - h(y, K*\sigma(y)))(K*\mu(y) - K*\sigma(y))dy \le 0.$$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна, из-за строгого убывания h получаем $K*\mu(y) = K*\sigma(y)$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$, а из этого следует, что $f(x,\mu) = f(x,\sigma)$. $\square$

Решение 2 задачи. Заметим, что

$$K(x) = e^{-|x|^2} = \int e^{-iw^T x}\Lambda(dw),$$

и $\Lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ соответствует многомерному нормальному распределению с нулевым средним и дисперсией вида $C\sigma I$, где I – единичная матрица $d \times d$, C – положительная константа (скорее всего, равна $\sqrt{2}$).

В силу первой задачи имеем $K*\mu(y) = K*\sigma(y)$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$. Таким образом,

$$0 = \int\int K(x-y)(\mu-\sigma)(dx)(\mu-\sigma)(dy)$$

$$= \int\int e^{iw^T y}\int e^{-iw^T x}(\mu-\sigma)(dx)(\mu-\sigma)(dy)\Lambda(dw)$$

$$= \int |\phi(\mu,w) - \phi(\sigma,w)|^2\Lambda(dw),$$

где $\phi(\mu,\cdot)$ – характеристическая функция распределения μ. Поскольку носитель Λ совпадает с $\mathbb{R}^d$, получаем $\phi(\mu,w) = \phi(\sigma,w)$ для всех $w \in \mathbb{R}^d$, а из этого следует равенство мер. $\square$

Решение 3 задачи. Пусть $\sigma = \frac{1}{n}\delta_b + \frac{n-1}{n}\mu$ для некоторого $b \in A$. Тогда

$$0 \le U(\sigma) - U(\mu) = \frac{1}{n}\int_0^1\int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \frac{s}{n}(\delta_b - \mu), a)(\delta_b - \mu)(da)ds$$

$$= \frac{1}{n}\int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \frac{\widehat{s}}{n}(\delta_b - \mu), a)(\delta_b - \mu)(da), \ \ \widehat{s} = \widehat{s}(n) \in [0, 1]$$

в силу теоремы о среднем ($\frac{\partial U}{\partial m}$ непрерывна по первому аргументу, а $\mu + s(\sigma - \mu)$ – по s). Значит,

$$0 \le \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \frac{\widehat{s}}{n}(\delta_b - \mu), a)(\delta_b - \mu)(da)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \frac{\widehat{s}}{n}(\delta_b - \mu), b) \ge \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \frac{\widehat{s}}{n}(\delta_b - \mu), a)\mu(da).$$

Сделав предельный переход по n, получаем требуемое.

$\square$

Решение 4 задачи. 1. Докажем, что из монотонности следует выпуклость. Пусть $t \in [0, 1]$, $\mu, \sigma \in \mathcal{P}(A)$. Тогда

$$U((1-t)\mu + t\sigma) - tU(\sigma) - (1-t)U(\mu)$$

$$= t(1-t)\int_0^1 \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + ts(\sigma - \mu), a)(\sigma - \mu)(da)ds$$

$$-t(1-t)\int_0^1 \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\sigma + s(1-t)(\mu - \sigma), a)(\sigma - \mu)(da)ds \le 0$$

из-за монотонности (для каждого $s \in (0, 1)$ его нужно применить к мерам $\mu + ts(\sigma - \mu)$ и $\sigma + s(1-t)(\mu - \sigma)$).

2. Докажем, что из выпуклости следует монотонность. Пусть $\mu, \sigma \in \mathcal{P}(A)$. Тогда для любого $t \in (0, 1)$ выполнено

$$(1-t)(U(\mu + t(\sigma - \mu)) - U(\mu)) \le t(U(\sigma) - U(\mu + t(\sigma - \mu)))$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + st(\sigma - \mu), a)(\sigma - \mu)(da)ds$$

$$\le \int_0^1 \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + (t + s(1-t))(\sigma - \mu), a)(\sigma - \mu)(da)ds.$$

Устремив t к нулю, а затем к единице, получим

$$\int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu, a)(\sigma - \mu)(da) \le U(\sigma) - U(\mu) \le \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\sigma, a)(\sigma - \mu)(da),$$

что и соответствует монотонности.

$\square$

Решение 5 задачи. (a) Пусть $\mu, \overline{\mu} \in \mathcal{P}(A)$, $m, \overline{m}$ – соответствующие вектора. Пользуясь формулой Тейлора и теоремой о среднем, получаем

$$\langle \nabla G(m), \overline{m} - m \rangle + o(|\overline{m} - m|) = G(\overline{m}) - G(m) = U(\overline{\mu}) - U(\mu)$$

$$= \langle \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \widehat{s}(\overline{\mu} - \mu), \cdot), \overline{m} - m \rangle, \;\; \widehat{s} = \widehat{s}(n) \in [0,1]^N, \; \overline{m} \to m.$$

При этом,

$$\langle \frac{\partial U}{\partial m}(\mu, \cdot) - \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \widehat{s}(\overline{\mu} - \mu), \cdot), \overline{m} - m \rangle = o(|\overline{m} - m|), \; \overline{m} \to m,$$

в силу неравенства КБШ и непрерывности $\frac{\partial U}{\partial m}$. Таким образом, $\frac{\partial U}{\partial m}(\mu, i) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(m), \; i = \overline{1, N}$.

(b) Из формулы Тейлора и определения слабой сходимости следует, что

$$F\left(\int_A g \; d\overline{\mu}\right) - F\left(\int_A g \; d\mu\right) = F'\left(\int_A g \; d\mu\right) \int_A g \; d(\overline{\mu} - \mu) + o\left(\int_A g \; d(\overline{\mu} - \mu)\right)$$

при $\overline{\mu} \to \mu$. С другой стороны,

$$U(\overline{\mu}) - U(\mu) = \int_A \frac{\partial U}{\partial m}(\mu + \widehat{s}(\overline{\mu} - \mu), a)(\overline{\mu} - \mu)(da).$$

Таким образом, вновь из-за непрерывности $\frac{\partial U}{\partial m}$ получаем, что

$$\frac{\partial U}{\partial m}(\mu, a) = F'\left(\int_A g \; d\mu\right) g(a).$$

□

Решение 6 задачи. Поскольку b – гладкое векторное поле с компактным носителем, можно воспользоваться принципом суперпозиции. Соответственно, $\mu_t = \nu \circ x_t^{-1}$ – единственное решение уравнения непрерывности, где $x_t(y)$ – решение задачи Коши с начальным условием $x_0(y) = y$, а $\nu = \mu_0$.

По определению $\frac{d}{dt} U(\mu_t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(U(\mu_{t+\epsilon}) - U(\mu_t))$. При этом,

$$U(\mu_{t+\epsilon}) - U(\mu_t) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial U}{\partial m}(\mu_{t+s\epsilon}, x)(\mu_{t+\epsilon} - \mu_t)(dx) ds$$

$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial U}{\partial m}(\mu_{t+s\epsilon}, x_{t+\epsilon}(y)) - \frac{\partial U}{\partial m}(\mu_{t+s\epsilon}, x_t(y)) \right) \nu(dy) ds$$

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \langle D_x \frac{\partial U}{\partial m}(\mu_{t+s\epsilon}, x_t(y)), x_{t+\epsilon}(y) - x_t(y)\rangle \nu(dy)ds + \int_{\mathbb{R}^d} o(\|x_{t+\epsilon}(y) - x_t(y)\|)\nu(dy)$$

$$= \epsilon \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \langle D_x \frac{\partial U}{\partial m}(\mu_{t+s\epsilon}, x_t(y)), b(x_t(y), t)\rangle \nu(dy)ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} o(\epsilon) + o(\|x_{t+\epsilon}(y) - x_t(y)\|)\nu(dy), \quad \epsilon \to 0.$$

Поскольку x_t – дифференцируемая функция с ограниченной производной (b непрерывно на компакте),

$$\frac{1}{\epsilon} o(\|x_{t+\epsilon}(y) - x_t(y)\| = o(1), \quad \epsilon \to 0.$$

В свою очередь, D_x непрерывна и ограничена, поэтому к скалярному произведению под интегралом применима теорема Лебега. Значит, разделив выражение на ϵ и устремив ϵ к нулю, получим

$$\frac{d}{dt} U(\mu_t) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle D_x \frac{\partial U}{\partial m}(\mu_t, x), b(x,t)\rangle \mu_t(dx),$$

что и требовалось.

□

Решение 7 задачи. 1. Докажем существование. Принадлежность процесса, удовлетворяющего СДУ, пространству $L^2(\Omega, C[0,T])$ следует из ограниченности b. Построим его итерационным методом. Пусть $X_t^0 := X_0$,

$$X_t^{n+1} = X_0 + W_t + \int_0^t B(X_s^n, \mu_s^n)ds, \quad n \geq 0,$$

где $\mu_s^n = P \circ (X_s^n)^{-1}$. Имеет место следующее неравенство:

$$|X_t^{n+1} - X_t^n| \leq \int_0^t |B(X_s^n, \mu_s^n) - B(X_s^{n-1}, \mu_s^{n-1})|ds$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega |b(X_s^n, X_s^n(\omega)) - b(X_s^{n-1}, X_s^{n-1}(\omega))|P(d\omega)ds$$

$$\leq C \int_0^t |X_s^n - X_s^{n-1}|ds + C \int_0^t \mathbb{E}|X_s^n - X_s^{n-1}|ds$$

$$\leq C \int_0^t \sup_{u\in[0,s]} |X_u^n - X_u^{n-1}|ds + C \int_0^t \mathbb{E} \sup_{u\in[0,s]} |X_u^n - X_u^{n-1}|ds.$$

Переходя к супремуму в левой части и математическому ожиданию, получаем
$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{n+1}-X_s^n|\le\int_0^t\mathbb{E}\sup_{u\in[0,s]}|X_u^n-X_u^{n-1}|ds.$$
Итерируя неравенство, получаем
$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,T]}|X_s^{n+1}-X_s^n|\le\frac{C^n}{n!}.$$
Из такой оценки и неравенства Маркова следует, что ряд
$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(\sup_{s\in[0,T]}|X_s^{n+1}-X_s^n|\le 2^{-n})$$
сходится. Значит, по лемме Бореля-Кантелли X_t^n сходится равномерно к непрерывному процессу X_t с вероятностью 1. Переходя к пределу по n в итерационной формуле, получаем существование.

2. Докажем единственность. Пусть $X_t,\ Y_t$ – два решения. Тогда
$$|X_t-Y_t|\le\int_0^t\int_\Omega|b(X_s,X_s(\omega))-b(Y_s,Y_s(\omega))|P(d\omega)ds$$
$$\le C\int_0^t|X_s-Y_s|ds+C\int_0^t\mathbb{E}|X_s-Y_s|ds.$$
Взяв математическое ожидание и использовав лемму Гронуолла, получаем $\mathbb{E}|X_t-Y_t|\le 0\Rightarrow X_t=Y_t$ почти наверное, что и требовалось.

□

Решение 8 задачи. □