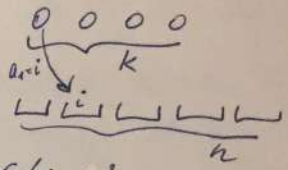
13.09.20. Дискр. матем. д/з от семинара 2 Токаева Александра 409

① Найти число способов размещения k элем. по n ящикам.

а) элементы различимы, ящики различимы



Будем обозначать результат раскладывания как $(a_1 \dots a_k)$, где $a_i \in \{1 \dots n\}$,
т.е каждому элементу (их k штук) присвоили номер ящика (т.е число от 1 до n)

★ Если ящики безразмерные, т.е в них влезает сколько угодно элементов,
то ответ $= n^k$, т.к каждому из k элементов можно присвоить любой из n ящиков.

★★ Если ящик вмещает ≤ 1 элемента, то ответ $= n(n-1) \dots (n-k+1) = A_n^k$,
т.к ящик для 1-го шара мы выбираем n способами, потом ящик для 2-го шара мы выбираем из $n-1$ оставшихся (т.е $n-1$ способом) и т.д.

б) элементы неразличимы, ящики различимы

Опять обозначим результат выбора как $(a_1 \dots a_k)$, где $a_i \in \{1 \dots n\}$

★ Если ящик вмещает ≤ 1 элемента, то ответ $= C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$, поскольку мы мы сначала считаем, что шары различимы, получаем ответ из задачи 1а★, а потом замечаем, что каждому размещению с неразличимыми шарами соответствует $k!$ размещений с различимыми шарами (т.е когда набор из k номеров $\{a_1 \dots a_k\}$ один и тот же, но числа a_i стоят в разном порядке).
⇒ в случае с неразличимыми шарами получим в $k!$ раз меньше способов, т.е $\frac{A_n^k}{k!} = C_n^k$

★★ Если ящик безразмерный, то ответ $= C_{n+k-1}^k$.
У нас есть k шаров, между которыми надо поставить $n-1$ перегородку
(и это интерпретируется так: всё что левее 1-й перегородки — лежит в 1-м ящике,
то что между 1-й и 2-й перегородкой — лежит во 2-м ящике и т.д)
Всего у нас $k+(n-1) = n+k-1$ мест, из которых нужно выбрать k мест для шаров)
⇒ ответ $= C_{n+k-1}^k$.

в) элементы различимы, ящики неразличимы

Ящики неразличимы — значит, нас интересует только ~~…~~ ~~…~~ мн-во наборов из содержимых ящиков (содержимое — с номерами), но не важен порядок ящиков, в котором эти наборы лежат. Т.е $\underset{\text{в 1-м ящике}}{\{1\}} + \underset{\text{во втором ящике}}{\{23\}}$
то же самое, что $\underset{\text{в 1-м ящике}}{\{23\}} + \underset{\text{во 2-м ящике}}{\{1\}}$

★ Если вместимость ≤ 1, ~~то ответ = 1 …~~ то ответ $= 1$ при $n \geq k$ и 0 при $n < k$ –

т.к просто положили все шары по-одному и всё (и то, если ящиков хватило на все шары, т.е кол-во ящиков $n \geq$ кол-ва шаров k).

** Заметим сначала, что если ящиков больше, чем шаров, то мы просто сможем реализовать все возможные разбиения на мн-ва набора $\{1 \dots k\}$.
т.е в этом случае ответ $\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left\{ {k \atop i} \right\}}_{\text{кол-во разбиений набора } \{1\dots k\} \text{ ровно на } i \text{ непустых подмн-в.}}$; $k \leq n$ — т.е просто число Белла B_k

А если $k > n$ — то число мн-в не может быть $> n$, т.е ответ $= \sum_{i=1}^{n} \left\{ {k \atop i} \right\}$

В итоге получается, что ответ $= \sum_{i=1}^{\min(n,k)} \left\{ {k \atop i} \right\}$

2) шары неразличимы, ящики неразличимы

* Если вместимость ≤ 1 — то опять ответ 1 при $k \leq n$ и 0 при $k > n$.

** Если вместимость бесконечная, то мы число k хотим разбить на n слагаемых. (от пункта в) ** , т.е. от случая ~~шары~~ различны, ~~шары~~ ящики одинаковы. Это отличается тем, что $\{1,2,3\} = \begin{cases} \{1,2\} + \{3\} \\ \{1,3\} + \{2\} \\ \{2,3\} + \{1\} \end{cases}$ — это разные варианты в задаче в) **, но один вариант в этой задаче: $3 = 1+2$.
Каждое разбиение характеризуется тем, сколько единиц в разбиении, сколько двоек, сколько троек и т.д.
$\Rightarrow$ если $p(n)$ — искомое число разбиений, то произв. ф-ция для $p(n)$ имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$

Ответ:

	вмест. ≤ 1	вместимость беск.
шары разл. ящики разл	A_n^k	n^k
шары нераз. ящики разл	C_n^k	C_{n+k-1}^k
шары разл. ящики нераз	1, если $k \leq n$; 0, если $k > n$	$\sum_{i=1}^{\min(n,k)} \left\{ {k \atop i} \right\}$
шары нераз. ящики разл	1, если $k \leq n$; 0, если $k > n$	$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$

2. $\boxed{\left[{n+1 \atop k+1} \right] = \sum_{i=k}^{n} n^{\underline{n-i}} \left[{i \atop k} \right]}$

1 способ. Докажем комбинаторно:
$\left[{n+1 \atop k+1} \right]$ — кол-во элем. из S_{n+1}, которые раскладываются ровно в $k+1$ непересек. циклов.
Разобьём все такие перестановки на группы по числу i элементов, которые не

стоят в цикле (одном) с выделенным (например, первым) элементом. (их $\geq k$ штук)

Т.е есть цикл из {1-го элем + ещё $n-i$ элементов} и ещё оставшиеся i элементов разбиты на k циклов (это делается $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k}$ способами).
А добрать $(n-i)$ элементов к выделенному - это $n(n-1)\ldots(n-(n-i)+1) = n^{\underline{n-i}}$ способов (потому что порядок важен, т.к (123) и (132) — разные циклы)

2 способ

База $n=k$ $\Rightarrow \underbrace{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+1}{k+1}}_{=1} \overset{?}{=} \sum_{i=k}^{k} k^{\underline{k-i}} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} = \underbrace{k^{\underline{0}}}_{=1} \cdot \underbrace{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{k}{k}}_{=1} = 1.$

$\Rightarrow$ верно

Шаг Исп. ф-лу $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} + n \cdot \underbrace{\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k+1}}_{= \sum_{i=k}^{n-1} (n-1)^{\underline{n-1-i}} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k}}$ — по предп. индукции.

$$\Rightarrow \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n+1}{k+1} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} + n \cdot \sum_{i=k}^{n-1} (n-1)^{\underline{n-1-i}} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} + \sum_{i=k}^{n-1} n^{\underline{n-i}} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} n^{\underline{n-i}} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} \text{ ч.т.д.}$$

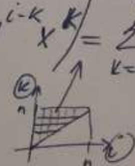
(3) $\boxed{\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-i}{k}}$

1 способ Докажем комбинаторно.
$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n+1}{k+1}$ — кол-во способов разбить $n+1$-элементное мн-во на $k+1$ непустых подмн-в.
Разделим всех их на классы по кол-ву i элементов, которые лежат в мн-ве вместе с выделенным элементом (например, 1-м). Эти элементы выбираются C_n^i способами, причём $i \leq n-k$, т.к иначе осталось $<k$ элементов, и из них уже k непустых подмн-в не сделать.
И потом оставшиеся $(n-i)$ элементов как-то разбиваем на k непустых подмн.
Это можно сделать $\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n-i}{k}$ способами.

(4) Док-ть: $\boxed{\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i+k} \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{i} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} = \delta(k,n)}$

напомним, что
$$\begin{cases} x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{i} x^i \ ; \quad x^n = \sum_{i=0}^{n} \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{i} x^{\underline{i}} \\ x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{k} (-1)^{n-k} x^k \end{cases}$$
— см. стр. 15.

$$\Rightarrow x^n = \sum_{i=0}^{n} \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{i} x^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^{n} \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{i} \cdot \left(\sum_{k=0}^{i} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} (-1)^{i-k} x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \cdot \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{n}{i} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{i}{k} \right)}_{=\delta(k,n)}$$



$\delta(k,n)$ — т.к все коэф ~~равные~~ при $k \neq n$ должны быть $=0$.

Осталось заметить, что $(-1)^{k} = (-1)^{-k}$. ч.т.д.

(5.) Найти число p_n перестановок π из S_n таких, что $\pi(i) \neq i$ для $i = 1 \dots n$.

Решение: Будем ассоциировать перестановки с предметами, а i-е св-во – это если перестановка оставила i-й элем. на месте.
Нас интересует мн-во перестановок, не обладающих ни одним из св-в, т.е $E|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$
по ф-ле включения-исключения $E|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$,
где S_k - мн-во предметов, обладающих хотя бы k св-вами.
В данной задаче $S_k = (n-k)!\, C_n^k$ – т.к k-элементное мн-во индексов, которые останутся на месте, мы выбираем C_n^k способами, а оставшиеся n-k элементов можно переставить как угодно.

$$\Rightarrow p_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot (n-k)!\, \underbrace{C_n^k}_{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

Вспомним, что $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\Rightarrow e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{e} - \frac{p_n}{n!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right| < \frac{1}{(n+1)!}$$ – оценили хвост знакопеременного убывающего по абс. величине ряда его первым членом

$$\Rightarrow \left|\frac{n!}{e} - p_n\right| = n! \left|\frac{1}{e} - \frac{p_n}{n!}\right| < \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow p_n$ – ближайшее к $\frac{n!}{e}$ целое число

$$\Rightarrow \boxed{p_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor}$$