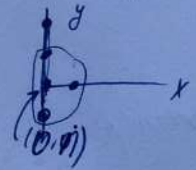
(1) (9.44) + устойчивость

Для ур-я $\Delta u = f$ построить аппрокс. на реш. с пор. $O(h^2)$ гранич. усл. $\frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha u = 0$ при $x_1 = 0$, исп. min кол-во узлов вдоль оси x_1.



$$u(1,n) = u(0,n) + h_x \cdot u'_x(0,n) + \frac{h_x^2}{2} \cdot u''_{xx}(0,n) + \dots$$

$$\Rightarrow u'_x(0,n) = \frac{u(1,n) - u(0,n)}{h_x} - \frac{h_x}{2} \cdot \underbrace{u''_{xx}(0,n)}_{= (f - u_{yy})|_{(0,n)} = f_{0,n} - \frac{u_{n-1,0} - 2u_{n,0} + u_{n+1,0}}{h_y^2}} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{u_{1,n} - u_{0,n}}{h_x} - \frac{h_x}{2}\left(f_{0,n} - \frac{u_{0,n-1} - 2u_{0,n} + u_{0,n+1}}{h_y^2}\right) - \alpha u_{0,n} = 0}$$

Устойчивость: в норме C или в норме L_2?

$$\max_{\Omega_h} |u_{mn}| \le \|f^h\| + \|\alpha^h\|$$

Мы же в норме L_{2h} проверяем устойчивость только по правой части?

Что такое тут α?

$$u_{mn}|_{\partial\Omega_h} = \alpha_{mn}$$

А тут по нач. данным надо?

А тут $\in$ границе $u_{0,n-1}$, $u_{0,n}$ и $u_{0,n+1}$?

② (9.61) с добавкой вида $-p(x)\,u(t,x)$

$$u_t = u_{xx} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \dfrac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} & ; 1 \le m \le M-1 \\ u_m^0 = u_0(mh) \end{cases}$$

$$u_0^n = u_M^n = 0,\ \forall n \ge 0.$$

определить порядок сход. решения к решению при различных $\rho = \frac{\tau}{h^2}$.

Решение: отрицание: $O(\tau + h^2)$.

Уст: $\max\limits_n \|u^n\| \overset{?}{\le} \|u^0\| + c\,\|f^n\| + \underbrace{\max\{\underset{0}{\|\alpha\|}, \underset{0}{\|\beta\|}\}}_{0}$

Из $u_m^{n+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) u_m^n + \frac{\tau}{h^2} u_{m-1}^n + \frac{\tau}{h^2} u_{m+1}^n$

Если $1 - \frac{2\tau}{h^2} \ge 0$, т.е $\tau \le \frac{h^2}{2}$

$\Rightarrow \|u^{n+1}\| \le \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right)\|u^n\| + \frac{2\tau}{h^2}\|u^n\| = \|u^n\|$

$\Rightarrow \|u^{n+1}\| \le \ldots \le \|u^0\|$. чтд.

Теперь для $u_t = u_{xx} + p \cdot u$.

$$\Rightarrow \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + p \cdot u_m^n.$$

$u_m^{n+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2} + p\cdot\frac{\tau}{h^2}\right) u_m^n + \frac{\tau}{h^2}\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n\right)$

Требуем $1 - \frac{2\tau}{h^2} + p\cdot\frac{\tau}{h^2} \ge 0$, т.е $1 - 2\rho + p\rho \ge 0$. т.е $1 - \rho(2-p) \ge 0$, т.е $0 \le \rho \le \frac{1}{2-p}$.

$\Rightarrow \|u^{n+1}\| \le \left(1 - \cancel{\frac{2\tau}{h^2}} + p\cdot\frac{\tau}{h^2} + \cancel{\frac{2\tau}{h^2}}\right)\cdot\|u_m^n\| = \left(1 + p\cdot\frac{\tau}{h^2}\right)\cdot\|u^n\|$.

и что, разве это $\overset{?}{\le} c\cdot\|u^n\|$?

? что делать если $p > 2$? или $p = 2$?

~~③ (9.74) не~~

9.74 Исслед. устойчивость и найти порядок аппрокс. схемы Дугласа – Рэкфорда. стр. 2

$$\frac{u^{n+\frac12}-u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+\frac12} + \Lambda_2 u^n$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (u^{n+1}-u^n) \Rightarrow u^{n+1/2} = u^{n+1} - \tau \cdot \Lambda_2 (u^{n+1}-u^n)$$

$$\Rightarrow \left(u^{n+1} - \tau\Lambda_2 (u^{n+1}-u^n)\right) - u^n = \tau\Lambda_1 \left(u^{n+1} - \tau\Lambda_2 (u^{n+1}-u^n)\right) + \tau\Lambda_2 u^n.$$

$$(u^{n+1}-u^n) - \tau\Lambda_2 (u^{n+1}-u^n) = \tau\Lambda_1 u^{n+1} - \tau^2 \Lambda_1\Lambda_2 (u^{n+1}-u^n) + \tau\Lambda_2 u^n.$$

$$(1-\tau\Lambda_1)(1-\tau\Lambda_2)(u^{n+1}-u^n) = \tau\Lambda_1 u^{n+1} + \tau\Lambda_2 u^n - \tau\Lambda_1 (u^{n+1}-u^n)$$

$$(1-\tau\Lambda_1)(1-\tau\Lambda_2)(u^{n+1}-u^n) = \tau\Lambda_2 u^n + \tau\Lambda_1 u^n = \tau(\Lambda_1+\Lambda_2) u^n.$$

$B_\alpha = I + \tau R_\alpha$; $R_1 = -\Lambda_1$; $R_2 = -\Lambda_2$

$$B = I + \tau \cdot \sum_\alpha R_\alpha = I - \tau\Lambda_1 - \tau\Lambda_2 = I - \tau(\Lambda_1+\Lambda_2)$$

схема $\underset{I-\tau(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\underset{\parallel}{B}} \dfrac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \tau(\Lambda_1+\Lambda_2) u^n$.

И как понять, устойчива ли эта схема?

(4) 9.32 ~~...~~

Найти порядок аппрокс. и методом разделения перем. усл. устойчив.

$u_t = u_{xx}$

для $\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = \theta \cdot \Lambda u_m^{n+1} + (1-2\theta)\Lambda u_m^n + \theta \Lambda u_m^{n-1} \\ u_m^0 = u_0(mh) \\ u_m^1 = v_0(mh) \\ u_0^{n+1} = u_M^{n+1} = 0. \end{cases}$

$$\Lambda u_m = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2}$$

$$-u''_{tt}(m,n) - \frac{\tau^2}{12} \cdot u^{(4)}_{tttt}(m,n) - \frac{\tau^4}{360} u^{(6)}_{tttttt} = \cancel{\theta\left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right) + (1-2\theta)\left(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n\right)}$$

$$\theta\left(-u''_{xx}(m,n+1) - \frac{h^2}{12} \cdot u^{(4)}_{xxxx}(m,n+1) + \cancel{O(h^4)} - \frac{h^4}{360} u^{(6)}_x(m,n+1) + O(h^6)\right)$$

$$+(1-2\theta)\left(-u''_{xx}(m,n) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{xxxx}(m,n) \cancel{+O(h^4)} - \frac{h^4}{360} u^{(6)}_x(m,n) + O(h^6)\right)$$

$$+\theta\left(-u''_{xx}(m,n-1) - \frac{h^2}{12} \cdot u^{(4)}_{xxxx}(m,n-1) \cancel{+O(h^4)} - \frac{h^4}{360} u^{(6)}_x(m,n+1) + O(h^6)\right)$$

$24 \cdot 5 = 120$
$6 = 720$

$$\text{прав.часть} = \theta\left(-u''_{xx}(m,n) - \cancel{u''_{xx} \cdot \tau \cdot u'''_{xxt}(m,n)} + O(\tau^2) - \frac{h^2}{12} \cdot u^{(4)}_{xxxx}(m,n) - \cancel{\frac{h^2}{12} \cdot u^{(5)}_{xxxxt}(m,n) \cdot \tau} + O(h^2\tau^2)\right)$$

$$(1-2\theta)\left(-u''_{xx}(m,n) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{xxxx}(m,n)\right) + O(h^2)$$

$$+\theta\left(-u''_{xx} + \cancel{u''_{xx} \cdot \tau \cdot u'''_{xxt}(m,n)} + O(\tau^2) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{xxxx}(m,n) + \frac{h^2}{12} \cdot u^{(5)}_{xxxxt}(m,n) \cdot \tau + O(h^2\tau^2)\right) =$$

$$= -2\theta \cdot \cancel{u''_{xx}(m,n)} - 2\theta \cdot \cancel{\frac{h^2}{12} \cdot u^{(4)}_{xxxx}(m,n)}$$

$$- u''_{xx}(m,n) - \frac{h^2}{12} \cdot u^{(4)}_{xxxx}(m,n) \qquad + O(\tau^2) + O(\cancel{h^2\tau^2}) + O(h^4)$$

$\tau^4 + h^4$,

$u_{tt} = u_{xx}$

$\Rightarrow u_{tttt} = (u_{xx})_{tt} = u_{xxxx}$

$$+\cancel{2\theta \cdot u''_{xx}} + 2\theta \cdot \frac{h^2}{12} \cdot \cancel{u^{(4)}_{xxxx}(m,n)}$$

$$- \frac{h^4}{360} u^{(6)}_{xxxxxx}(m,n) + \ldots$$

$$\rightarrow -\cancel{u_{tt}(m,n)} - \frac{\tau^2}{12} \cancel{u^{(4)}_{tttt}}(m,n) = -\cancel{u''_{xx}(m,n)} - \frac{h^2}{12} \cancel{u^{(4)}_{xxxx}}(m,n) + O(\tau^2 + h^2)$$

почему если $\theta = \theta_0 - \dfrac{h^2}{12\tau^2}$, то будет $O(\tau^2 + h^4)$?

?

Найдем усл. устойчивости: (стр3)

$u_m^n = \mu_k^n(k)\cdot \sin(\pi k m h)$

Требуем $|\mu_k| \le e^{c\tau} \to |\mu_k| \le 1$.

$$\Rightarrow \sin(\pi k m h)\mu^{n-1}\frac{\mu^2-2\mu+1}{\tau^2} = \frac{\theta}{\cancel{h^2}}\cdot\mu^{n+1}\left(\frac{\sin(\cdot)\left(-4\sin^2\left(\frac{\pi k h}{2}\right)\right)}{h^2}\right) + (1-2\theta)\cdot\mu^n\cdot\frac{\sin}{h^2}\left(-4\sin^2\frac{\pi k h}{2}\right) + \frac{\theta}{h^2}\cdot\mu^{n-1}(\sin\cdot)\left(-4\sin^2\frac{\pi k h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^2-2\mu+1}{\tau^2} = \left(\frac{\theta}{h^2}\mu^2 + \frac{(1-2\theta)\mu}{h^2} + \frac{\theta}{h^2}\right)\left(-4\sin^2\frac{\pi k h}{2}\right)$$

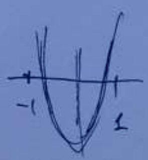
надо $\mu^2-2(1-\alpha)\mu+1=0$.

$\mu^2-2\mu+1 = -\tau^2\cdot\lambda_k\cdot(\theta\mu^2+\mu-2\mu\theta+\theta)$

$\mu^2(1+\tau^2\lambda_k\theta) - 2\mu + 1 + \tau^2\lambda_k\mu(1-2\theta) + \tau^2\lambda_k\theta.$

$\mu^2(1+\tau^2\lambda_k\theta) - 2\mu\left(1-\tau^2\lambda_k\left(\frac12-\theta\right)\right) + (1+\tau^2\lambda_k\theta)=0.$

$\mu^2(1+\tau^2\lambda_k\theta) - 2\mu\left((1+\tau^2\lambda_k\theta) - \frac{\tau^2}{2}\lambda_k\right) + (1+\tau^2\lambda_k\theta)=0.$



$\Rightarrow \mu^2 - 2\mu(1-\alpha)+1=0$, где $\alpha = \frac{\frac12\tau^2\lambda_k}{1+\tau^2\lambda_k\theta}$.

$-\frac{b}{2a} = \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha$; $\mu_1\mu_2 = 1$.

т.к один >1, другой <1 по модулю.

$|\mu_{1,2}| \le 1$ ~~если $D<0$~~, т.е $(1-\alpha)^2 - 1 < 0$.

$(1-\alpha)^2 < 1$

$\begin{cases} 1-\alpha \le 1 \\ 1-\alpha \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ge 0 \\ \alpha \le 2 \end{cases}$ ~~надо оценить~~

$0 < \frac12 \frac{\tau^2\lambda_k}{1+\tau^2\lambda_k\theta} < 2$

$\tau^2\lambda_k < 4+4\tau^2\lambda_k\theta. \Rightarrow \theta > -\frac{1}{4\tau^2\lambda_k} + \frac{\tau^2\lambda_k}{4\tau^2\lambda_k} = \frac14 - \frac{1}{\tau^2\lambda_k}$ ~~надо~~

но $\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k h}{2}\right) < \frac{4}{h^2}$

$\Rightarrow \theta \ge \frac14 - \frac{h^2}{4\tau^2}$ — условие уст.

~~Спектр. уст:~~

5. 9.23 + СЛУ Для ур-я $u_t+u_x=0$ рассм.

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + \theta\frac{u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{h} + (1-\theta)\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h} = 0.$$

? какое опр. уст. использовал? сразу СЛУ?

при каких значениях $\theta\in[0,1]$ схема безусл. уст?

$u_m^n = \lambda^n \cdot e^{im\varphi}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \theta \cdot \lambda \frac{(1 - e^{-i\varphi})}{h} + (1-\theta)\frac{(1-e^{-i\varphi})}{h} = 0.$$

$$\lambda - 1 + \theta \frac{\lambda \tau}{h}(1 - e^{-i\varphi}) + (1-\theta)\frac{\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi}) = 0.$$

$$\lambda\left(1 + \frac{\theta\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi})\right) = 1 - (1-\theta)\frac{\tau}{h}\cdot(1 - e^{-i\varphi})$$

$$\lambda = \frac{1 - (1-\theta)\frac{\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi})}{1 + \theta\frac{\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi})} = \frac{1 + \theta\cdot\frac{\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi}) - \frac{\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi})}{1 + \theta\frac{\tau}{h}(1 - e^{-i\varphi})} = 1 - \frac{\tau}{h + \theta\tau}.$$

$$\begin{cases} \frac{\tau}{h+\theta\tau} > 0. \\ 1 - \frac{\tau}{h+\theta\tau} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau > h + \theta\tau \\ 2 \geq \frac{\tau}{h+\theta\tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta < \frac{\tau - h}{\tau} = 1 - \frac{h}{\tau} \\ h + \theta\tau \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

– ! вып. $\forall \tau, h$.

$$\theta \geq \frac{\frac{\tau}{2} - h}{\tau} = \frac{1}{2} - \frac{h}{\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

№ 44

Решим вспомогательную задачу

При каких c для решения задачи

$$\cancel{\frac{d^2u}{dx^2}} + u'' + cu = f(x) \quad x \in [0,1]$$
$$u(0) = u(1) = 0 \quad c = const$$

можно применить метод Ритца?

Решение: Нам нужна самосопряжённость и положительная определённость оператора

$Lu = -u'' - cu$,

1) $$(Lu, v) = \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} - cu\right) v = \left(-\frac{du}{dx} v\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx -$$
$$- c\int_0^1 uv\,dx = \left(-u\frac{dv}{dx}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2}dx - c\int_0^1 uv\,dx =$$
$= (u, Lv)$, т.е. оператор будет самосопряж. для $\forall c$.

2) Решение диф. задачи $u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \tilde{u}$ - огр. на отрезке $[0,1]$ ф-ия. Разложим её в ряд Фурье

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \pi k x + b_k \sin \pi k x)$$

В силу граничных условий $a_k = 0$ $\forall k$ и решение следует искать в виде:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \pi k x$$

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\pi^2 k^2 - c) \sin \pi k x$$

$$(Lu, u) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\pi^2 k^2 - c) \sum_{j=1}^{\infty} b_j \int_0^1 \sin \pi k x \sin \pi j x\, dx$$

т.к. $\int_0^1 \sin \pi k x \sin \pi j x = \delta_{j,k}$, то

$(Lu,u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\pi^2 k^2 - c)\, b_k^2$. т.к. коэф. ряда Фурье абс. интег. функции стремятся к нулю, то условие полож. опред: $c < \pi^2$

В нашем случае $c = 2\pi \Rightarrow$ метод применять можно.

№5

$-u'' - 2u = f(x)$ $\quad u(0) = u'(1) = 0$

Аналогично предыдущей задаче оператор Lu в ~~данно~~ данном случае самосопряжённый.

Проверим положительную определённость:

Хотим, чтобы $(Lu,u) \geq 0$ для u: $u(0) = u'(1) = 0$

Тогда

$$(Lu,u) = \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} - 2u\right) u\, dx = \int_0^1 -u \frac{d^2u}{dx^2} - \int_0^1 2u^2 dx$$

$-u'' - 2u = F(x)$

Аналогично предыдущей задаче оператор Lu в данном случае самосопряжённый

Про положит. опред:

Снова разложим решение в ряд Фурье:

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi k x + b_k \sin \pi k x$$

Из граничных условий $\frac{a_0}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad b_k = 0$