27.11.18. Мат. анализ. Лекция 24.

Пример Интеграл Дирихле.

Рассмотрим $\boxed{I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx}$ ← ответ: $\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$.

Хотим вычислить I (задача корректна, т.к. I сходится по Дирихле)

(1) Рассмотрим функцию $\boxed{F(y) := \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-xy}\frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)}\,dx}$; $y \geq 0$

Докажем, что $F \in C[0;+\infty)$

В самом деле, имеем:

а) $f \in C([0;+\infty) \times [\underset{0}{c};d]) \Rightarrow f \in C([0;+\infty) \times [0;+\infty))$ ← в нуле $e^{-xy} = 1$, $\frac{\sin x}{x} = 1$.

б) Интеграл $F(y)$ сход. равном на $y \in [0;+\infty)$ по признаку Абеля:

т.к.
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ – сход + не зависит от $y \Rightarrow$ сход. равном.
- $e^{-xy_0} \downarrow$ по x $\forall y_0 \in [0;+\infty)$
- $|e^{-xy}| \leq 1$, $\forall (x;y) \in [0;+\infty) \times [0;+\infty)$.

$\Rightarrow F \in C[0;+\infty)$

$\Rightarrow$ в частности, $F \in C(0) \Rightarrow \boxed{\exists \lim_{y \to 0^+} F(y) = F(0) = I}$

(2) Вычислим $F'(y)$ для $y>0$ (в принципе, $F'(y)$ может не существовать, но мы сейчас покажем, что она существует).

Хотим написать так: $F'(y) \overset{(*)}{=} \int_0^{+\infty} f'_y(x;y)\,dx = \int_0^{+\infty} (-\sin x)\, e^{-xy}\,dx$, для $y>0$.

Обоснуем переход $(*)$: используем теорему о дифф-ти несобств. интеграла от параметра из лекции 23:

- $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx$ – сход. хотя бы в одном y_0, т.к. он сход. $\forall y>0$ по Дирихле.
- $F'(y) = \int_0^{+\infty} (-\sin x)\, e^{-xy}\,dx =: G(y)$, для $y \in (0;+\infty)$.

Нам надо, чтобы $G(y)$ сход. равном на $(0;+\infty)$.

Но он не сход. равном. на $(0;+\infty)$!

Ну, возьмём на $[\varepsilon;+\infty)$.

Фиксируем произвольно $y_0>0$.

Тогда $\exists [c;d] \subset (0;+\infty) \mid y_0 \in [\underset{>0}{c};d]$

Тогда $G(y)$ сход. равном по y на $y \in [c;d]$ по признаку Вейерштрасса,

т.к. $|f'_y| \leq e^{-xc}$, а $\int_0^{+\infty} e^{-xc}\,dx$ – сход.

⇒ по теореме о диффер-ии несобств. интеграла по параметру

$\exists F'(y) = G(y), \forall [c;d] \Rightarrow$ в частности, $\exists F'(y_0) = G(y_0)$

⇒ поскольку y_0 – произвольно, то $\exists F'(y) = G(y) \ \forall y \in (0;+\infty)$

③ **Вычислим $G(y)$, $y>0$.**

$$\int_0^{+\infty} (-\sin x) e^{-xy} dx = \int_0^{+\infty} e^{-xy} d(\cos x) = \underbrace{e^{-xy} \cos x \Big|_0^{+\infty}}_{\text{формальная запись. Честно – это предел } e^{-By}\cos B \text{ при } B\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos x \, d(e^{-xy}) =$$

$$= -1 + y\int_0^{+\infty} \cos x \, e^{-xy} dx = -1 + y\int_0^{+\infty} e^{-xy} d(\sin x) =$$

$$= -1 + \underbrace{y \cdot e^{-xy} \sin x \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{y^2 \int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-xy} dx}_{= -y^2 G(y)}$$

$$\Rightarrow G(y) = -1 - y^2 G(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{G(y) = \frac{-1}{1+y^2} \text{; для } y>0}$$

④ **Вычислим $F(y)$ для $y>0$.**

Имеем: $F(y) = \int G(y) dy = \int -\frac{dy}{1+y^2} = -\text{arctg}\, y + C$, для $y>0$.

Найдём константу C.

Для этого посмотрим на F при $y \to +\infty$.

а) $F(y) \underset{\text{т.к. } \frac{\sin x}{x} \le 1}{\le} \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = -\frac{1}{y} e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0.$

б) С другой стороны, $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} (-\text{arctg}\, y + C) = -\frac{\pi}{2} + C.$

$\Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$

Итак, $\boxed{F(y) = -\text{arctg}\, y + \frac{\pi}{2}}$

⑤ **Вычислим I.**

Имеем: $I = F(0)$.

Но поскольку $F \in C(0)$ по пункту 1,

то $F(0) = \lim\limits_{y\to0^+} F(y) = \lim\limits_{y\to0^+} (-\text{arctg}\, y + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$

$\boxed{\text{Ответ: } I = \frac{\pi}{2}}$

Следствие $\boxed{I(\alpha) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;\ \alpha \in \mathbb{R}}$ ⟵ ответ: $\boxed{I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}}$.

Имеем: $\underline{\alpha = 0}$ $\Rightarrow I(0) = \int_0^{+\infty} 0\, dx = 0.$

$\underline{\alpha > 0}$. Замена: $\alpha x = t$

$$x = \frac{t}{\alpha}$$

$$dx = \frac{dt}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cdot \cancel{\alpha}}{t} \cdot \frac{dt}{\cancel{\alpha}} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$\underline{\alpha < 0}$. Функция I – нечётная

$$\Rightarrow I(\alpha) = -I(|\alpha|) = -\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{Ответ: } I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}}$

Зам. 1) $I(\alpha)$ сход. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ по Дирихле, но сход. неравном. на $\mathbb{R}$, т.к. f – непрер., а $I(\alpha) \notin C(0)$ – т.к. $\operatorname{sgn} \alpha \notin C(0)$.

2) А на $[\varepsilon; +\infty)$ – сход. равном.

пункт 5 **Интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.**

$\Pi_\infty := [a; +\infty) \times [c; d]$.

Теорема 1 (интегрирование по конечному промежутку)

Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$ и интеграл $F(y) := \int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном. по y на $[c;d]$.

Тогда $F \in R[c;d]$, причём $\boxed{\int_c^d F(y)dy \left(= \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x;y)dx\right) = \int_a^{+\infty} dx \left(\int_c^d f(x;y)dy\right)}$

▶ ① Докажем, что $F \in R[c;d]$.

Действительно, $f \in C(\Pi_\infty)$ и $F(y)$ сход. равном. по y на $[c;d]$ по усл.

$\xRightarrow{\text{по теореме 2 после теоремы о предельном переходе}}$ $F \in C[c;d] \Rightarrow F \in R[c;d]$.

② Рассм. произвольную посл-ть $(b_n; n \in \mathbb{N})$ | $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, т.е. посл-ть Гейне для $+\infty$.

Положим $\boxed{\underbrace{F_n(y)}_{\text{функц. посл-ть}} := \int_a^{b_n} f(x;y)dx,\ \text{для } b_n > a}$

Заметим, что $F_n(y) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(y)$ на $[c;d]$, т.к. $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx = F(y)$ сход. равном. по y на $[c;d]$, а мы доказывали критерий Гейне

И ещё $f(x;y) \in C(\Pi_\infty)$.

$\Rightarrow$ по теореме об интегрировании функц. посл-тей

$$\boxed{\exists \lim_{n\to\infty} \int_c^d F_n(y)dy} = \int_c^d \left(\lim_{n\to\infty} F_n(y)\right)dy = \boxed{\int_c^d F(y)dy}$$

стр 10

$$\Rightarrow \int_c^d F(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_c^d dy\, F_n(y) = \lim_{n\to\infty} \int_c^d dy \left(\int_a^{b_n} f(x;y)dx\right) \overset{\text{переставляем пределы у собств.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} dx \left(\int_c^d f(x;y)dy\right) \overset{*}{=} \int_a^{+\infty} dx \left(\int_c^d f(x;y)dy\right)$$

Обоснуем (*): (b_n) – произвольная посл-ть Гейне для $+\infty$.

А несобств. интеграл сход. по опр., если для каждой посл-ти Гейне предел $\exists$ и равен одному и тому же (в нашем случае он равен $\int\limits_c^d F(y)dy$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{b_n} dx \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right) = \int\limits_a^{+\infty} dx \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right)$$

В итоге, $\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_a^{+\infty} dx \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right)$. ч.т.д. ◀

23.11.18. Мат. анализ. Лекция 23.

Пункт 3. Предельный переход в несобственном интеграле, зависящем от параметра.

Теорема (предельный переход в несобственном интеграле от параметра).

Пусть $f: [a;+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$; $y_0 \in Y'$, причём:

1) $f(x;y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ на $[a;b]$ $\forall b>a$ (1)

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$ сход. равном. на Y

Тогда $\exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, причём $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} (\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y))\,dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$

а) $\boxed{\text{Докажем, что } \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx.}$

Сначала убедимся, что $g \in R[a;b]$ $\forall b>a$.

Пусть $b>a$ произвольно.

По усл. $f(x;y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ на $[a;b]$ $\forall b>a$ $\underset{\substack{\text{по теореме}\\ \text{о предельном}\\ \text{переходе в}\\ \text{собств. интеграле}}}{\Longrightarrow}$ $g \in R[a;b]$.

А теперь собственно докажем, что $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$, по критерию Коши.

Имеем: $\underbrace{\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx}_{\substack{\text{он } \exists,\\ \text{т.к. } g\in R[a;b]\\ \Rightarrow \text{и на подотрезках}}} = \int\limits_{b_1}^{b_2} [g(x) - f(x;y)]\,dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx =: A_1 + A_2$. Надо оценить.

Заметим, что сначала надо разбираться с A_2, а потом с A_1,

т.к. если сначала с A_1, то для фикс. b_1 и b_2 $\exists\delta\ldots$, но не факт, что эти b_1 и b_2 подойдут для A_2, т.е. будут $>B$. А если сначала A_2, то мы выбрали произв. b_1 и $b_2 > B$, от y не зависит, и теперь для этих b_1 и b_2 находим δ и берём любой y из $\mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y$. При этом A_2 не испортится, т.к. там всё хорошо $\forall y\in Y$.

Итак, сначала A_2:

По усл. $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$ сход. равном. на Y

$\Rightarrow$ по критерию Коши $\exists B>a \mid |A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall b_1 > B$, $\forall b_2 > b_1$, $\underline{\forall y\in Y}$.

Фиксируем $\boxed{\text{произвольно}}$ $b_1 > B$ и $b_2 > b_1$.

По усл. $f(x;y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ на $[a;b]$, $\forall b>a$ $\Rightarrow$ и на $[b_1;b_2]$

$\Rightarrow \exists \underset{\substack{\text{зависит}\\ \text{от } b_1 \text{ и } b_2 \text{ и от } \varepsilon}}{\delta = \delta(\varepsilon; b_1; b_2)} > 0 \mid |f(x;y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b_2-b_1)}$, $\forall y\in \mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y$, $\forall x\in[b_1;b_2]$

$\Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid |A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall \mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y$; $\forall x\in[b_1;b_2]$.

Фиксируем $\boxed{\text{произвольное}}$ (одно) $y \in \mathring{O}_\delta(y_0) \cap Y$ — любой подходит отсюда.

В итоге, $\forall \varepsilon>0\ \exists B>a \ / \ \left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ \forall b_1>B,\ \forall b_2>b_1.$

$\Rightarrow$ по критерию Коши $\exists \int_a^{+\infty} g(x)dx.$

б) Докажем, что $\boxed{\exists \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x;y)dx \doteq \int_a^{b} \lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)dx = \int_a^{b} g(x)dx.}$

Имеем: $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx - \int_a^{+\infty} g(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x;y)dx - \int_b^{+\infty} g(x)dx + \int_a^{b}[f(x;y)-g(x)]dx =: A_1 - A_2 + A_3.$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно.

Сначала A_1, потом A_2, потом A_3.

Имеем: • $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном на Y

$\Rightarrow$ по спец. критерию про хвост от Дмитрия Викторовича

$\exists B_1 > a \ / \ |A_1| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall b > B_1;\ \underline{\forall y \in Y}.$

• мы уже доказали, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится,

поэтому по спец. критерию

$\exists B_2 > a \ / \ |A_2| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall b > B_2.$

• Положим $B := \max(B_1; B_2)$.

Пусть $b > B$ — фикс. произвольно. — $\underline{\text{одно}}$ (много нельзя, т.к. для каждого b будет своё δ).

Для A_3: $f(x;y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ на $[a;b]$, $\forall b>a$

$\Rightarrow \exists \underset{\substack{\text{зависит от } N,\\ \text{а } N \text{ — от } \varepsilon}}{\delta=\delta(\varepsilon;b)} > 0 \ / \ |f(x;y)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)},\ \forall y \in \mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y;\ \forall x\in[a;b].$

В итоге, $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 \ / \ \left|\int_a^{b}[f(x;y)-g(x)]dx\right| < \varepsilon,\ \forall y \in \mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x;y)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx.$ ◀

! В пункте б) 1 штука $b^{>B}$ и все $y \in \mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y$, и это идёт в ответ.
а в пункте а) 1 штука $y \in \mathring{O}_\delta(y_0)\cap Y$ и все b_1 и $b_2 > B$.

<u>**Теорема 2**</u>. Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$, где $\Pi_\infty := [a;+\infty)\times[c;d]$,

причём интеграл $F(y) := \int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном. по $y \in [c;d]$.

Тогда $F \in C[c;d]$.

▶ $F \in C[c;d] \overset{def}{\Longleftrightarrow} F \in C(y_0),\ \forall y_0 \in [c;d];$

Но заметим, что $y_0 \in ([c;d])'$, поэтому по критерию непрерывности в точке достаточно проверить, что $\exists \lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$.

Имеем: пусть $b > a$ произвольно.

по усл. $f \in C([a;b]\times[c;d])$, но $[a;b]\times[c;d]$ – компакт,

поэтому f равномерно непрерывна на $[a;b]\times[c;d]$. (см. лекции 2 семестр)

т.е $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{"\delta(\varepsilon)}{\delta > 0}$ / $|f(x_1;y_1) - f(x_2;y_2)| < \varepsilon$, $\forall (x_1;y_1);(x_2;y_2) \in [a;b]\times[c;d]$, с усл. $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \delta$.

$\Rightarrow f(x;y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} f(x;y_0)$ на $[a;b]$.

А ещё $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном по y на $y \in [c;d]$.

$\Rightarrow$ выполнены условия теоремы 1 о предельном переходе в несобств. интеграле.

$$\Rightarrow \exists \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\lim_{y\to 0} f(x;y)\right)dx \underset{\text{т.к } f \text{ непр}}{=} \int\limits_a^{+\infty} f(x;y_0)dx = F(y_0)$$

т.е $\exists \lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0) \Rightarrow F \in C[c;d]$ по критерию непрер-ти. ◀

Зам. В условиях теоремы 1 можно $y_0 \in Y'$ заменить на $(\pm)\infty$ (сами докажите)

Примеры. 1. $\boxed{F(y) := \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{e^{-x^2 y}\cos xy}_{f(x;y)}\,dx;\ y \in (0;+\infty)}$ – исследовать на непрер-ть. Да, непрер-ть есть.

по методу граничной точки

1) Заметим, что $F(y)$ сход. неравном по y на $(0;+\infty)$, т.к $F(0) = \int\limits_0^{+\infty} 1dx$ – расход

(а если бы $F(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2 y}\sin xy\,dx$, то отсутствие равном. сход. на $(0;+\infty)$ – по критерию Коши, т.к метод граничной точки не работает.

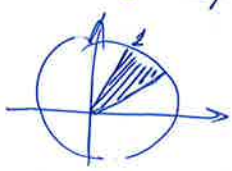
В самом деле, пусть $b_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $b_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $y = \frac{1}{(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)^2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)^2} \le xy \le \frac{1}{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}$

$? \le \sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)^2}\right) \le \sin xy \le \sin\frac{1}{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}$

$\Rightarrow \left|\int\limits_{\frac{\pi}{6}+2\pi k}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} e^{-x^2 y}\sin xy\right| \ge \frac{4\pi}{6}\cdot e^{-1}\ ?$



$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{y}}\cos t}{y}\,dt.$

$b_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$b_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $\Rightarrow \cos t \ge \frac{1}{2}$

$y := (\frac{\pi}{6} + 2\pi k)^2$

тогда $\frac{1}{y} \to 0$

2) Докажем, что, тем не менее, $F(y) \in C(0;+\infty)$

В самом деле, пусть $y_0 > 0$ произвольно. Докажем, что $F \in C(y_0)$.

Имеем: $\exists [c;d]$ / $c > 0$ и $y_0 \in [c;d]$.

причем $F(y)$ сход. равном по y на $y \in [c;d]$ по признаку Вейерштрасса:

$|f(x;y)| = |e^{-x^2 y}\cos xy| \le e^{-cx^2}$; а $\int\limits_0^{+\infty} e^{-cx^2}dx$ – сход.

$\Rightarrow$ по теореме 2 $F(y) \in C[c;d] \Rightarrow F(y) \in C(y_0)$. Ура!

② $\boxed{f(x;y) := \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 \le x \le y \\ 0, & x > y \end{cases} \quad ; y \in (0;+\infty)}$ — нет равном. сход.
и нет непрер. -и.

Имеем: $|f(x;y)| \le \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \Rightarrow f(x;y) \underset{y\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $x \in [0;+\infty)$

но $\int_0^{+\infty} f(x;y)dx = \frac{1}{y}\int_0^y dx = 1 + 0\int_0^{+\infty} 0dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. неравном. по y на $(0;+\infty)$.

Пункт 4. Дифференцирование несобств. интеграла от параметра.

Напоминание: (дифференцирование функц. посл-тей).

Дано: $(f_n(x); n\in\mathbb{N}; x\in[a;b])$ — функц. посл-ть, причем:

- $(f_n(x_0))$ сход. для некоторой точки $x_0 \in [a;b]$.
- $\forall n$: $f_n \in D[a;b]$, причем $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ на $[a;b]$.

Тогда: 1) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ $\forall x\in[a;b]$, причём эта сходимость равномерная.

2) $f \in D[a;b]$ и $f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x)$, $x\in[a;b]$

Теорема (о дифференцируемости несобств. интеграла от параметра)

Пусть f и $f_y' \in C(\Pi_\infty)$, где $\Pi_\infty := [a;+\infty)\times[c;d]$, причём:

- $\int_a^{+\infty} f(x;y_0)dx$ сход. для некоторой точки $y_0 \in [c;d]$
- $\int_a^{+\infty} f_y'(x;y)dx =: G(y)$ сход. равном по y на $[c;d]$.

Тогда: 1) $\overset{F(y)}{\overset{\parallel}{\int_a^{+\infty}}} f(x;y)dx$ сход. равном по y на $[c;d]$

и 2) $\exists \left(\int_a^{+\infty} f(x;y)dx\right)_y' = \int_a^{+\infty} f_y'(x;y)dx = G(y)$, $\forall y\in[c;d]$.

▶ ① Докажем, что $\boxed{\int_a^{+\infty} f(x;y)dx \text{ сход. равном по } y \text{ на } [c;d].}$

Имеем: по усл. $f_y' \in C(\Pi_\infty)$

$\Rightarrow \underset{\text{фикс}}{\forall x\in[a;+\infty)}$ $f(x;y) = \int_{y_0}^y f_y'(x;y)dy + f(x;y_0)$ — по формуле Ньютона-Лейбница

Далее: $f\in C(\Pi_\infty) \Rightarrow \int_{b_1}^{b_2} f(x;y)dx$ — существует

Будем доказывать по критерию Коши равном. сход.:

$$\forall b_2 > b_1: \int_{b_1}^{b_2} f(x;y)dx = \underbrace{\int_{b_1}^{b_2} dx\left(\int_{y_0}^{y} f_y'(x;y)dy\right)}_{=: A_1} + \underbrace{\int_{b_1}^{b_2} f(x;y_0)dx}_{=: A_2}$$

A_1 он собств. $\Rightarrow$ можно поменять местами пределы интегрирования

A_2 он сход. по усл.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно.

<u>Оценим A_2</u>: по усл. $\int\limits_0^{+\infty} f(x;y_0)dx$ сход, причём от y он вообще не зависит

$\Rightarrow$ по критерию Коши сходимости просто несобств. интеграла:

$\exists B_1>a \;/\; |A_2|<\frac{\varepsilon}{2}, \forall b_1>B_1 ; \forall b_2>b_1$

<u>Оценим A_1</u>: $A_1=\int\limits_{b_1}^{b_2} dx \left(\int\limits_{y_0}^{y} f'_y(x;y)dy\right)$

но $f'_y(x;y)\in C(\Pi_\infty)\Rightarrow C([b_1;b_2]\times[y_0;y])$

$\Rightarrow$ по теореме об интегрируемости собств. интеграла от параметра:

$A_1=\int\limits_{y_0}^{y} dy\left(\int\limits_{b_1}^{b_2} f'_y(x;y)dx\right)$

Но по усл. $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x;y)dx =: G(y)$ сход. равном по y на $[c;d]$

$\Rightarrow$ по критерию Коши равном. сход. несобств. интеграла от параметра:

$\exists B_2>a \;/\; \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f'_y(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}, \forall b_1>B_2, \forall b_2>b_1, \forall y\in[c;d]$

$\Rightarrow |A_1| \le \int\limits_c^d dy \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f'_y(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall b_1>B_2 ; \forall b_2>b_1 ; \forall y\in[c;d]$.

положим $B:=\max(B_1;B_2)$

В итоге: $\forall\varepsilon>0 \;\exists B>a \;/\; \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)dx\right|<\varepsilon, \forall b_1>B_2, \forall b_2>b_1, \forall y\in[c;d]$

$\Rightarrow$ по критерию Коши равном. сход. несобств. интеграла от параметра

$\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном. по y на $[c;d]$.

(2) Докажем, что $\exists F'(y) = \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx\right)' = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x;y)dx = G(y), \forall y\in[c;d]$.

положим $\boxed{F_n(y) := \int\limits_a^{n} f(x;y)dx ; n\in\mathbb{N}; n>a; y\in[c;d]}$

$F_n(y)$ – это функц. посл-ть.

проверим, что для неё выполнены условия теоремы о дифф-ти функциональной посл-ти.

Имеем: а) $F_n(y) \xrightarrow[\text{(даже равномерно. см. пункт (1))}]{} \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx = F(y), \forall y\in[c;d] \Rightarrow$ и для одного y_0 – тоже.

б) $\exists F'_n(y), \forall y\in[c;d]$ – по теореме о дифф-ти собств. интеграла.

в) $F'_n(y) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} G(y)=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x;y)dx$ на $[c;d]$ – по усл.

$\Rightarrow$ по теореме о дифф-ти функц. посл-тей:

$\exists F'(y) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} F'_n(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^n f'_y(x;y)dx = G(y), \forall y\in[c;d]$. ◀

Пункт 2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, с бесконечными пределами интегрирования.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса)

Пусть $f: [a;+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$; $g: [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ с условиями:

1) $|f(x;y)| \le g(x)$, $\forall x \in [a;+\infty)$; $\forall y \in Y$

2) $f(\cdot;y) \in R[a;b]$; $\forall b > a$; $\forall y \in Y$

3) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится (он знакоположительный)

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сходится равномерно по y на Y.

Имеем: $\int\limits_b^{+\infty} f(x;y)dx$ – существует, т.к. $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сходится поточечно $\forall y \in Y$

по признаку Вейерштрасса (сравнения?) для обычных несобств. интегралов.

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x;y)dx\right| \le \int\limits_b^{+\infty} |f(x;y)|dx \le \underbrace{\int\limits_b^{+\infty} g(x)dx}_{\text{не завис. от } y} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0, \text{ т.к. } \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \text{ сход. по усл.}$$

$\Rightarrow \int\limits_b^{+\infty} f(x;y)dx \underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на Y (по след. критерию из лекции 11)

Пример. $\boxed{I(y) := \int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot \sin yx}{x^2 - \cos x} dx;\ y \ge 0}$ – сход. равном. на $y \in [0;+\infty)$

Имеем: $|f(x;y)| = \left|\frac{e^{-\frac{y}{x}} \sin yx}{x^2 - \cos x}\right| \le \frac{1}{|x^2 - \cos x|} \underset{\text{т.к. } x \ge 2}{\le} \frac{1}{x^2 - \cos x} \le \frac{1}{x^2 - 1} \le \frac{2}{x^2}$

т.к. $x^2 - 1 \ge \frac{x^2}{2}$ – верно $\forall x^2 \ge 2$.

$\frac{x^2}{2} \ge 1$

$x^2 \ge 2$

А у нас $x^2 \ge 4$ $\Rightarrow$ точно верно.

А $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ – сходится, т.к. $2 > 1$.

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $I(y)$ сход. равном. на $y \in [0;+\infty)$

Напоминание: (2-я теорема о среднем)

Пусть $f \in R[a;b]$; $g \uparrow$ (или $\downarrow$) на $[a;b]$ ($\Rightarrow g \in R[a;b]$)

Тогда $\exists c \in (a;b)$ такое что $\boxed{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)dx}$

Обозн. $g \in M([a;b])$, где $a < b \le +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} g$ монотонна на $[a;b]$.

Теорема 2 (признак Дирихле равном. сход. несобств. интеграла от параметра)

Пусть $f, g: [a;+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, причём:

1) $f(\cdot;y) \in R[a;b]$, $\forall b > a$, $\forall y \in Y$

2) $F(b;y) := \int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ равномерно ограничена на $[a;+\infty) \times Y$,

т.е $\underset{\substack{\text{не}\\\text{зависит}\\\text{от } y}}{\exists c > 0} \;/\; \left|\int\limits_a^b f(x;y)dx\right| \le c,\ \forall b > a;\ \underline{\underline{\forall y \in Y}}$

3) $g(\cdot\,;y) \in M([a;+\infty))$; $\forall y \in Y$

4) $g(x;y) \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на Y

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сход. равном. на Y.

► пусть $b_2 > b_1 > a$ – произвольны.

Тогда по 2 теореме о среднем (в ней используем монотонность):

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)g(x;y)\,dx = g(b_1;y)\int\limits_{b_1}^{c} f(x;y)dx + g(b_2;y)\int\limits_{c}^{b_2} f(x;y)dx$$

где $c \in [b_1;b_2]$ – какое-то непонятное, причём c зависит от $b_1; b_2$ и y.

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)g(x;y)dx\right| \le \underbrace{|g(b_1;y)|}_{<\frac{\varepsilon}{4c}}\underbrace{\left|\int\limits_{b_1}^{c} f(x;y)dx\right|}_{\le C} + \underbrace{|g(b_2;y)|}_{<\frac{\varepsilon}{4c}}\underbrace{\left|\int\limits_{c}^{b_2} f(x;y)dx\right|}_{\le C} \quad (*).$$

пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

поскольку $g(x;y) \underset{x\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на Y,

то $\exists B > 0 \;/\; |g(b;y)| < \frac{\varepsilon}{4c}$, $\forall b > B$, $\forall y \in Y$.

$\Rightarrow \forall b_1 > B$, $\forall b_2 > b_1$ имеем: (см $*$):

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,g(x;y)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{4c}\cdot c + \frac{\varepsilon}{4c}\cdot c = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall b_1 > B;\ \forall b_2 > b_1 > B.$$

В итоге, $\forall \varepsilon > 0\ \exists B > 0$ такое что $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)g(x;y)dx\right| < \varepsilon$, $\forall b_1 > B; \forall b_2 > B;\ \underline{\forall y \in Y}$

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)\,dx$ сход. равном. на Y по критерию Коши. ◄

! <u>пример</u> (интеграл Дирихле)

$$\boxed{I(y) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}dx}$$

а) $I(y)$ сход. равном. по y на $y \in [\delta;+\infty)$ $\forall \delta > 0$

б) $I(y)$ сход. неравном. по y на $y \in (0;+\infty)$

<u>Док-во</u>: а) имеем: $I(y) = \int\limits_0^1 \frac{\sin xy}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx =: \underbrace{I_1(y)}_{\substack{\text{собств. интеграл}\\\text{т.к. подынтегральная}\\\text{функция непрерывна (доопределим в нуле по непр-и)}}} + I_2(y)$

Рассмотрим $I_2(y)$:

- $\left|\int\limits_1^b \sin xy\,dx\right| = \left|\frac{1}{y}\cos y - \frac{1}{y}\cos by\right| \le \frac{2}{y} \le \frac{2}{\delta} =: C(\delta)$

- $\frac{1}{x}$ монотонно $\to 0$ при $x \to +\infty$.

- $\frac{1}{x} \rightrightarrows 0$, т.к. не зависит от y.

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}dx$ сход. равном. на $y \in [\delta; +\infty)$.

б) Докажем, что нет равном. сход. на $(0; +\infty)$ по критерию Коши:

Имеем: $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin xy}{x}dx\right| \underset{\substack{\text{замена } xy=t \\ x=\frac{t}{y} \\ dx=\frac{dt}{y}}}{=} \left|\frac{1}{y}\int\limits_{b_1y}^{b_2y} y\frac{\sin t}{t}dt\right| = \left|\int\limits_{b_1y}^{b_2y}\frac{\sin t}{t}dt\right|$

Положим $y := \frac{1}{2b_1}$

$b_2 := 2b_1$

$\Rightarrow \left|\int\limits_{b_1y}^{b_2y}\frac{\sin t}{t}dt\right| = \underbrace{\left|\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\sin t}{t}dt\right|}_{\text{это интеграл Римана (т.е это какое-то число)}} =: \varepsilon$

В итоге, $\exists \varepsilon > 0 \,/\, \forall B > 0\ \exists b_1 := 2B;\ \exists b_2 := 2b_1;\ \exists y := \frac{1}{2b_1}$ с усл. $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin xy}{x}dx\right| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow$ по критерию Коши у $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ нет равном. сход.

Теорема 3 (признак Абеля)

пусть $f, g: [a; +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$; причём:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном на Y

2) $g(\cdot; y) \in M([a; +\infty))$, $\forall y \in Y$

3) $g(x;y)$ равномерно ограничена,
 т.е $\exists c > 0 \,/\, |g(x;y)| \le c$, $\forall x \geq a$; $\forall y \in Y$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сход. равном по y на Y.

▶ по 2-й теореме о среднем (в ней и используем монотонность)

$\Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)g(x;y)dx\right| \le \underbrace{|g(b_1;y)|}_{\le c}\underbrace{\left|\int\limits_{b_1}^{c} f(x;y)dx\right|}_{\text{по кр. Коши } < \frac{\varepsilon}{4c}} + \underbrace{|g(b_2;y)|}_{\le c}\underbrace{\left|\int\limits_{c}^{b_2} f(x;y)dx\right|}_{\text{по кр. Коши } < \frac{\varepsilon}{4c}}$

пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

Имеем: $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. равном. по y на Y

$\Rightarrow \exists B > a \,/\, \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4c}$, $\forall b_1 > B; \forall b_2 > b_1; \forall y \in Y$ — по критерию Коши равном. сход. несобств. интегралов от параметра.

$\Rightarrow \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,g(x;y)\,dx\right| \le C\cdot\frac{\varepsilon}{4C} + C\cdot\frac{\varepsilon}{4C} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall b_1 > B;\ \forall b_2 > b_1;\ \forall y \in Y$

$\Rightarrow$ по критерию Коши равном. сход. несобств. интегралов от параметра $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,g(x;y)\,dx$ сход. равном. по y на Y ◀

Пример. $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x+1}}\,dx\ ;\ y \geq 0}$

положим: • $f(x;y) := \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сход. по Дирихле $\Rightarrow$ сход. равном., т.к. не зависит от y

• $g(x;y) := e^{-\frac{y}{x+1}}$ – монотонна по x

• $|g(x;y)| \le 1 \Rightarrow$ равном. ограничена

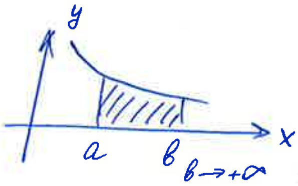
$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot e^{-\frac{y}{x+1}}\,dx$ сход. равном. по Абелю на $y \in [0;+\infty)$.

16.11.18. Мат. анализ. Лекция 21.

параграф 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

пункт 1. Несобственные интегралы на бесконечном промежутке интегрирования

Напоминание: (просто несобственный интеграл)



Пусть $f:[a;+\infty)\to\mathbb{R}$; $f\in R[a;b]\ \forall b>a$

Тогда если существует предел $\boxed{I:=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$,

то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а в противном случае — расходится.

Теперь рассмотрим $\boxed{F(y):=\int_a^{+\infty} f(x;y)\,dx}$ (1) — несобственный интеграл, зависящий от параметра y. Пусть он сходится $\forall y\in Y$. Это Y называется множеством сходимости несобств. интеграла, зависящего от параметра.

Опр 1. Интеграл (1) сходится равномерно на Y, если семейство функций $\Phi(y;b):=\int_a^b f(x;y)\,dx \underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows} F(y)$ на Y.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра).

$\int_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$ сходится равномерно на Y $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists M>a:\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon,\ \forall b_2>b_1>M;\ \forall y\in Y}$$

Ну действительно, мы просто написали критерий Коши равном. сходимости для семейства функций $\Phi(y;b):=\int_a^b f(x;y)\,dx$ при $b\to+\infty$ (см. лекция 19)

Зам. Если бы мы написали так: $\forall\varepsilon>0\ \forall y\in Y\ \exists M>a: \ldots.$, то есть M зависело бы от y, то это была бы поточечная сходимость.

Опр 2. Интеграл (1) сходится неравномерно на Y, если:

1) $\forall y\in Y$ он сходится (поточечно)

2) семейство $\Phi(y;b) \underset{b\to+\infty}{\not\rightrightarrows} F(y)$ на Y

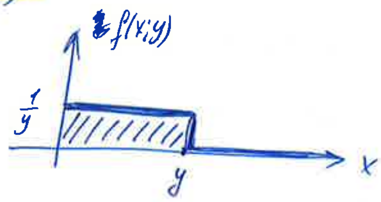
Теорема 1 (специальный критерий равном. сходимости несобств. интеграла, зависящего от параметра).

Интеграл (1) сход. равном. на мн-ве $Y \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} 1)\ \text{он сход. поточечно } \forall y\in Y. \\ 2)\ \text{остаток } \int_b^{+\infty} f(x;y)\,dx \underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows} 0 \text{ на } Y \end{cases}}$

(Ну действительно: $\int_b^{+\infty} f(x;y)\,dx = F(y)-\Phi(y;b)\underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows}0 \Longleftrightarrow \Phi(y;b)\underset{b\to+\infty}{\rightrightarrows}F(y)$, т.е. интеграл (1) сход. равном на Y по опр.)

Пример (неравномерной сходимости)

$$\boxed{f(x;y) := \begin{cases} \frac{1}{y}; & \text{при } 0 \le x \le y \\ 0; & \text{при } x > y \end{cases}}$$



Площадь всегда 1, но мы не можем сказать, что это собств. интеграл, т.к. у собств. интеграла верхний предел — фикс. число.

Имеем: $F(y) := \int_0^{+\infty} f(x;y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{y}\,dx = 1, \ \forall y>0$

Поэтому условие 1) из теоремы 1 выполнено: $\forall y>0$ интеграл $F(y)$ сходится и $=1$.

Проверим выполнение условия 2):

Оно не выполнено, т.к. при $y=2b$:

$$\int_b^{+\infty} f(x;y)\,dx \underset{y=2b}{=} \int_b^{+\infty} f(x;2b) = \int_b^{+\infty} \frac{dx}{2b} = \frac{1}{2b}\int_b^{2b} dx = \frac{1}{2} > 0.$$

Итак, $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ такое что $\forall M>0\ \exists b>M$ и $\exists y=2b \in (0;+\infty)$ со св-вом:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx \right| = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon$$

Таким образом, по теореме 1 $\int_0^{+\infty} f(x;y)\,dx$ сход. неравном. на $(0;+\infty)$.

Аналогично определяется равном. сходимость интеграла $\boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x;y)\,dx, \text{ где } y \in Y}$ (2)

Опр. Интеграл (2) сход. равном. на $Y \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ семейство $\Phi(y;b) := \int_b^a f(x;y)\,dx \underset{b\to-\infty}{\rightrightarrows} F(y)$ на Y

Теорема (критерий Коши равном. сход. несобств. интеграла от параметра)

Интеграл (2) сход. равном на $Y \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon\ \exists M<a$ такое что $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx \right| < \varepsilon, \ \forall b_1 < b_2 < M, \ \forall y \in Y.$

Теорема (спец. критерий равном. сход. несобств. интеграла от параметра).

Интеграл (2) сход. равном на $Y \Longleftrightarrow$ 1) $\forall y \in Y$ он сход. поточечно

2) остаток $\int_{-\infty}^{b} f(x;y)\,dx \underset{b\to-\infty}{\rightrightarrows} 0$ на Y.

Опр. Интеграл (2) сход. неравномерно на $Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall y \in Y$ он сходится поточечно, а равномерной сходимости нет, т.е. $\Phi(y;b) \underset{b\to-\infty}{\not\rightrightarrows} F(y)$ на Y.

Пример. (сходится поточечно; равномерно на $[\varepsilon;+\infty)$; неравном. на $(0;+\infty)$).

$$\boxed{F(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2}\,dx}$$

т.е. $f(x;y) := e^{-yx^2}$

1. Докажем, что он сходится $\forall y>0$ (поточечно).

Имеем: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-yx^2}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-yx^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-yx^2}dx$ – т.к. функция чётная (по x).

Исследуем $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-yx^2}dx = \underbrace{\int\limits_{0}^{1} e^{-yx^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-yx^2}dx}_{I_2}$

I_1 сходится, т.к. это собственный интеграл по конечному промежутку, не содержащему особых точек.

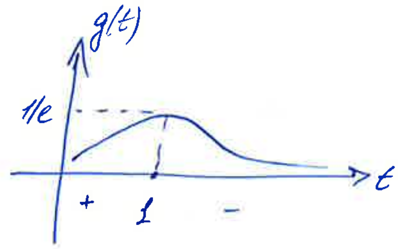
А I_2 сходится, т.к. $|f(x;y)| \le \frac{c_1}{yx^2} =: \frac{c(y)}{x^2}$

Действительно, $e^{-yx^2}\cdot yx^2 \le c_1$, $\forall x>1$; $\forall y>0$.

Почему? потому что лог < степ < показ.

Но можно и строго: замена: $yx^2=t$.

$\Rightarrow$ исследуем $g(t):=te^{-t}$



$$g'(t)=e^{-t}-te^{-t}=e^{-t}(1-t)$$

$\Rightarrow g(t)\le \frac{1}{e}$, $\forall t>0$

$\Rightarrow yx^2\cdot e^{-yx^2}\le c_1=\frac{1}{e}$, $\forall x>1; \forall y>0$.

Но $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{c(y)}{x^2}dx$ – сходится

$\Rightarrow$ по признаку сравнения $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-yx^2}dx$ тоже сходится (поточечно) $\forall y$

(признак сравнения можно применять, т.к. обе подынтегральные функции ≥ 0).

$\Rightarrow F(y)$ сходится поточечно $\forall y>0$.

2. Докажем, что $F(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-yx^2}dx$ сход. равном. на $[y_0;+\infty)$ $\forall y_0>0$.

Действительно: $\left|\int\limits_{b}^{+\infty}e^{-yx^2}dx\right| \le \int\limits_{b}^{+\infty}e^{-y_0x^2}dx \longrightarrow 0$ при $b\to+\infty$.

А именно в y_0 достигается $\sup\limits_{y\in[y_0;+\infty)}\left(\int\limits_{b}^{+\infty}e^{-yx^2}dx\right)$, т.к. подынтегральная функция >0,

а $(e^{-yx^2})'_y = e^{-yx^2}\cdot(-x^2) < 0$. $\Rightarrow$ sup на $[y_0;+\infty)$ достигается в y_0.

Итак, если $g(y;b):=\int\limits_{b}^{+\infty}e^{-yx^2}dx$, то $\sup\limits_{y\in[y_0;+\infty)} g(y;b)\longrightarrow 0$ при $b\to+\infty$

$\Rightarrow$ по след. критерию $F(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-yx^2}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-yx^2}dx$ сход. равном. на $[y_0;+\infty)$

(мы получили, что $g(y;b)\to 0$, но он $\rightrightarrows 0$, т.к. не зависит от y).

③ Докажем, что $F(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx^2}dx$ — сход. неравном. на $Y=(0;+\infty)$.

Заметим, что он сход. поточечно $\forall y>0$ по пункту ①.

Докажем, что нет равном. сход. на $(0;+\infty)$.

У нас подозрения, что y надо устремлять к нулю, чтобы испортить.

По след. критерию докажем отсутствие равном. сход. на $(0;+\infty)$

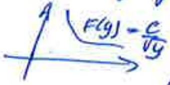
$$\int\limits_b^{+\infty} e^{-yx^2}dx \underset{\substack{\text{замена:}\\ x\sqrt{y}=t\\ dx=\frac{dt}{\sqrt{y}}}}{=} \frac{1}{\sqrt{y}}\int\limits_{b\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{\substack{\text{положим}\\ y:=\frac{1}{b^2}}}{=} b\underbrace{\int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}dt}_{\text{число } c} = cb \not\to 0 \text{ при } b\to+\infty.$$

Итак, $\exists \varepsilon=1>0 \,/\, \forall M>0 \ \exists b=M+\frac{1}{c}>M$ и $\exists y=\frac{1}{b^2}\in Y$ со св-вом:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} e^{-yx^2}dx\right| = c\cdot b = c\left(M+\frac{1}{c}\right) > 1 =: \varepsilon.$$

⇒ по след. критерию для $F(y)$ нет равном. сход. на $(0;+\infty)$.

Зам. ① $F(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx^2}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{y}} = \frac{c_0}{\sqrt{y}}$, где $\underset{\overset{\|}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}}{c_0} = \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt}_{\text{интеграл Эйлера–Пуассона}} > 0$

② Равномерная сходимость - только достаточное условие для непрерыв., дифф-ти и т.д., т.к. для $F(y)=\frac{c}{\sqrt{y}}$, например, нет равном. сход. на $(0;+\infty)$ , но она непрерывна и беск. дифференцируема.

Утв. (метод граничной точки)

Пусть $f\in C([a;+\infty)\times[c;d])$, а $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сходится при всех $y\in(c;d)$ и расходится при $y=c$ или $y=d$.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ сход. неравном. на $(c;d)$.

Док-во: по критерию Коши:

при $y=c$ $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ — расходится по усл,

т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x;c)dx$ — расходится

⇒ по отрицанию критерия Коши для обычного несобственного интеграла:

$\exists \varepsilon>0 \,/\, \forall M>a \ \exists b_2>b_1>M$ с усл.: $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;c)dx\right| \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\Phi(y) := \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx$.

Заметим, что $\Phi(y) \in C[c;d]$ – по теореме о непр-ти собств. интеграла от параметра.

$\Rightarrow$ В частности, $\Phi(y) \in C(c)$

$\Rightarrow$ по св-вам непрер. функций, если $\Phi(c) > \frac{\varepsilon}{2}$, то ~~он~~ $\Phi(y) > \frac{\varepsilon}{2}$ в некоторой окр-ти:

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ / \ |\Phi(y)| = \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx\right| > \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall y \in [c; c+\delta)$

Значит, $\exists \varepsilon > 0$ такой что $\forall M > a \ \exists b_2 > b_1 > M$ такие что $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x;y)\,dx\right| > \frac{\varepsilon}{2}, \forall y \in [c; c+\delta)$.

$\Rightarrow$ по критерию Коши равном. сход. несобств. интеграла от параметра $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)\,dx$ сход. неравном на $(c; c+\delta) \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ и на $(c;d)$ тоже.

Это называется метод граничной точки.

Примеры. ① $\boxed{\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx^2}\,dx \text{ – сход. неравном. на } (0;+\infty),}$

т.к при $y=0$ получаем $\int\limits_0^{+\infty} 1\,dx$ – расходится.

② $\boxed{\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ – сход. неравном на } \alpha \in (1;+\infty),}$

т.к при $\alpha = 1$ получаем $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ – расходится.

③ $\boxed{\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ – сход. равном на } \alpha \in [1+\delta_0; +\infty)}$

по признаку сравнения: $\frac{1}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^{1+\delta_0}}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta_0}}$ сход, т.к $1+\delta_0 > 1$.