# Задачи на интегралы

4 сентября 2022 г.

## Базовые правила интегрирования и табличные интегралы

**Табличные интегралы.**

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq 1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$, $(x < a)$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, $(x \neq a)$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Здесь перечислены базовые трюки для нахождения неопределенных интегралов.

**Интегрирование по частям.** Если функции $u$, $v$ гладкие, то

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Замена переменной и занесение под дифференциал.** Если на некотором промежутке $I_x$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

а $\varphi(t)$ – гладкое отображение $I_t \to I_x$, то на $I_t$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,$$

Т.е. можно производить замену $x = \varphi(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = [x = \varphi(t)] =$$
$$\int f(x)dx = F(x) + c = [x = \varphi(t)] = F(\varphi(t)) + c.$$

Прием можно использовать в обе стороны, вводя $\varphi$, либо избавляясь от него.

**Рациональные функции.** Если $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами и

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_l)^{k_l}(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_nx + q_n)^{m_n},$$

то существует единственное представление правильной дроби $P(x)/Q(x)$ (если дробь неправильная, надо добавить частное от деления):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + p_jx + q_j)^k}\right)$$

Интегрировать слагаемые справа мы умеем: первые интегрируются сразу же, а трехчлены сводятся к рекуррентным выражениям через интегрирование по частям.

Само разложение можно искать методом неопределенных коэффициентов (ну или выверты вроде подсчета в конкретных точках).

**Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла от правильной рациональной дроби.** Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь; $q(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но кратности 1, $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{q(x)}$.

Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{p(x)}{q(x)}dx,$$

где все дроби – правильные рациональные.

*P.S.* Кстати, находить $p(x)$ (и $q(x)$) легко (но это вроде над $\mathbb{C}$, хотя и для многочленов над $\mathbb{R}$ вроде в $\mathbb{R}$ и останемся).

- Найдите $\widetilde{p}(x) = gcd(P(x),\, P'(x))$, например, алгоритмом Евклида.
- $p(x) = \frac{P(x)}{\widetilde{p}(x)}$.

**Интегралы $\int R(\cos x, \sin x)dx$, где $R$ – рациональная функция.** В каком же вы отчаянии, раз дошли сюда. Делаем замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\\
\sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\\
dt &= \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}},\\
dx &= \frac{2dt}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

То есть:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

# Задачи

# INT-1

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3)}$$

**Решение:**

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3)} = \int \left(\frac{ax+b}{(x^2+1)} + \frac{cx+d}{(x^2-3)}\right) dx = \ \ldots$$

$a = c = 0, \ b = -\frac{1}{4}, \ d = \frac{1}{4}$, см. про рациональные многочлены $\frac{P}{Q}$.

$$\ldots \ = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(3-x^2)} = (\text{табличные}) =$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C =$$

$$\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C$$

**Ответ:**

$$\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C$$

# INT-2

$$\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

**Решение.**

$$\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2)}{\sqrt{x^2-2}} - 4\ln|x+\sqrt{x^2-2}| =$$

$$\sqrt{x^2-2} - 4\ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C.$$

Здесь мы воспользовались табличным интегралом $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$.
**Ответ:** $\sqrt{x^2-2} - 4\ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C$.

# INT-3

$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

**Решение.**

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{(Cx+D)}{x^2+1}\right) dx$$

Находим коэффициенты:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

$$\int \frac{1}{x^4-1} = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}\right) dx =$$
$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

**Ответ:** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ + C.

# INT-4

$$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}dx$$

**Решение.**

$$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}dx = \int \frac{e^x(1+e^x)}{1-e^x}dx \underset{y=e^x}{=} \int \frac{1+y}{1-y}dy =$$

$$= -\ln|1-y| - \int \frac{1-y-1}{1-y}dy = -\ln|1-y| - y - \ln|1-y| + C.$$

**Ответ:** $-e^x - 2\ln|e^x-1| + C$

## INT-5

$$\int (5^x - 2^x)^2 dx$$

**Решение.**

$$(5^x - 2^x)^2 = 25^x - 2 \cdot 10^x + 4^x,$$

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

**Ответ:** $\frac{25^x}{\ln 25} - \frac{2 \cdot 10^x}{\ln 10} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$

## INT-6

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

**Решение.** Воспользуемся тем, что

$$\operatorname{tg}' \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}},$$
$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y\right] = 2 \int \frac{dy}{1 - y^2} =$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| + C = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

Можно еще вспомнить

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Тогда

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

**Ответ:** $\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

**Решение покороче:**

$$\int \frac{dx}{\cos x} = (u = \sin x) = \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$$

**Ответ:** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$. Он эквивалентный, если что.

## INT-7

$$\int x(x-2)^5 dx.$$

**Решение.**

$$\int x(x-2)^5 dx = \int (x-2)^6 dx + 2\int (x-2)^5 dx = [t = x-2] = \int t^6 dt + 2\int t^5 dt =$$
$$\frac{t^7}{7} + 2\frac{t^6}{6} + C = [t = x-2] = \frac{(x-2)^7}{7} + \frac{(x-2)^6}{3} + C.$$

**Ответ:** $\frac{(x-2)^7}{7} + \frac{(x-2)^6}{3} + C$.

## INT-8

$$\int x\sqrt{1-2x}dx.$$

**Решение.**

$$\int x\sqrt{1-2x}dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)\sqrt{1-2x}dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2x}dx =$$
$$-\frac{1}{2}\int (1-2x)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2x}dx = \begin{bmatrix} y = -2x, \\ dx = -\dfrac{dy}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int (1+y)^{\frac{3}{2}} dy - \frac{1}{4}\int \sqrt{1+y}dy =$$
$$\frac{1}{4}\frac{(1+y)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\frac{(1+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = [y = -2x] = \frac{(1-2x)^{\frac{5}{2}}}{10} - \frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$$

**Ответ:** $\frac{(1-2x)^{\frac{5}{2}}}{10} - \frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{6} + C$.

## INT-9

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{3x+1}}dx$$

**Решение.**
Заметим, что $(\sqrt{3x+1})' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$, то есть $\frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}d(\sqrt{3x+1})$. Значит,

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{3x+1}}dx = \frac{2}{3}\int (2x-7)d(\sqrt{3x+1}) = \frac{2}{3}\int (\frac{2}{3}t^2 - \frac{23}{3})dt = \frac{4}{27}t^3 - \frac{46}{9}t + C =$$

$$= \left(\frac{4}{27}(3x+1) - \frac{46}{9}\right)\sqrt{3x+1} + C = \left(\frac{4}{9}x - \frac{134}{27}\right)\sqrt{3x+1} + C.$$

**Ответ:** $\left(\frac{4}{9}x - \frac{134}{27}\right)\sqrt{3x+1} + C$

## INT-10

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

**Решение**

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx =$$

$$= \arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

**Ответ:** $\arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$

## INT-11

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x(\ln^2 x+2)}$$

**Решение.**

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x(\ln^2 x+2)} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln^2 x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Здесь мы использовали табличный интеграл $\int \frac{\mathrm{d}\, t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C.$

**Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

## INT-12

$$\int \ln^2 x dx.$$

**Решение.**

Интегрируем по частям

$$\int \ln^2 x dx = \begin{bmatrix} u=\ln^2 x \\ dv = dx \end{bmatrix} = x\ln^2 x - \int x\frac{2\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx =$$

$$\begin{bmatrix} u=\ln x \\ dv = dx \end{bmatrix} = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

**Ответ:** $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$

## INT-13

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

**Решение.**

Воспользуемся тем, что

$$\operatorname{tg}' \frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}},$$
$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

**Ответ:** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

## INT-14

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx$$

**Решение.**

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

**Ответ:** $\operatorname{tg} x - x + C$.

## INT-15

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\operatorname{tg} x)}.$$

**Решение.** Воспользуемся тем, что

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\operatorname{tg} x)} = -\int \frac{d \operatorname{ctg} x}{1+\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} = [y = \operatorname{ctg} x] = -\int \frac{dy}{1+\frac{1}{y}} = -\int \frac{y dy}{y+1} =$$
$$-\left(\int dy - \int \frac{dy}{1+y}\right) = -y + \ln|1+y| + C =$$
$$[y = \operatorname{ctg} x] = -\operatorname{ctg} x + \ln|1+\operatorname{ctg} x| + C.$$

**Ответ:** $-\operatorname{ctg} x + \ln|1+\operatorname{ctg} x| + C$.

# INT-16

$$\int \frac{x^2}{1-x^2}dx.$$

**Решение.**

$$\int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \int \frac{x^2-1+1}{1-x^2}dx = -\int dx + \int \frac{dx}{1-x^2} = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

**Ответ:** $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

# INT-17

$$\int x \sin x dx.$$

**Решение** Интегрируем по частям: $dv = \sin x dx$.

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

**Ответ:** $-x \cos x + \sin x + C.$

# INT-18

$$\int \sqrt{2-x^2}dx$$

**Решение (I способ)**

Произведем замену $x = \sqrt{2}\sin(t)$
Тогда $dx = \sqrt{2}\cos(t)dt$
Интеграл после замены примет вид

$$\int 2\sin(t)\cos(t)dt = \int 2\cos^2(t)dt = \int (\cos(2t)+1)dt = \frac{1}{2}\sin(2t)+t+C =$$

$$= \sin(t)\cos(t)+t+C = \frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}})+C.$$

**Решение (II способ)** интегрируем по частям

$$\int \sqrt{2-x^2}dx = x\sqrt{2-x^2} - \int x d(\sqrt{2-x^2}) = x\sqrt{2-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$

[выделяем целую часть у дроби] $= x\sqrt{2-x^2} - \int \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$

$x\sqrt{2-x^2} - \int \sqrt{2-x^2}dx + 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

Переносим красные интегралы в левую часть равенства и делим всё на 2:

$$\int \sqrt{2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}})+C$$

**Ответ:** $\frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}})+C.$

# INT-19

$$\int x\cot^2 x dx$$

**Решение** Поскольку $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, имеем:

$$\int x\cot^2 x dx = \int \left(\frac{x}{\sin^2 x} - x\right) dx = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx - \frac{x^2}{2}.$$

Посчитаем оставшийся интеграл по частям. Пусть $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. Тогда $du = dx$ и $v = -\cot x$. Получим:

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$= -x\cot x + \int \frac{1}{\sin x}d(\sin x) = -x\cot x + \ln|\sin x|.$$

**Ответ:** $-x\cot x + \ln|\sin x| - \frac{x^2}{2} + C.$

## INT-20

$$\int \operatorname{arctg} x \; dx$$

**Решение** Интегрируем по частям

$$\int \operatorname{arctg} x \; dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

**Ответ:** $x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$