Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 3

1. Интеграл Ито от ступенчатого процесса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, w_t — одномерный винеровский процесс, $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, s \le t)$ — порождаемая процессом w_t естественная фильтрация.

Через $\mathbb{L}^2[0,T]$ обозначим пространство процессов $\xi_t(\omega)$ из $[0,T]\times\Omega$ в $\mathbb{R}$, которые измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}[0,T]\otimes\mathcal{F}$, для каждого $t\in[0,T]$ величина ξ_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$ (это свойство называется согласованностью процесса ξ_t с фильтрацией $\mathcal{F}_t$) и

$$\|\xi\|_2^2 = \mathbb{E}\int_0^T |\xi_s|^2\,ds < \infty.$$

Далее полезно иметь ввиду, что у всякого $\xi\in\mathbb{L}^2[0,T]$ есть прогрессивно измеримая модификация, то есть такой процесс $\widetilde{\xi}\in\mathbb{L}^2[0,T]$, что для всякого $t\in[0,T]$ величина $(s,\omega)\to\xi_s(\omega)$ измерима относительно $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t$ и $\xi_t=\widetilde{\xi}_t$ с вероятностью единица.

Отметим, что если $t\to\xi_t$ непрерывны слева и процесс ξ_t согласован с $\mathcal{F}_t$, то процесс ξ_t прогрессивно измерим.

Утверждение о существовании прогрессивно измеримой модификации достаточно трудно доказывается. Поэтому часто рассматривают только прогрессивно измеримые процессы или меньшую сигма-алгебру, порожденную всеми непрерывными слева согласованными процессами (процессы, измеримые относительно такой сигма-алгебры называют предсказуемыми).

Предложение 1. *Всякий процесс $\xi\in\mathbb{L}^2[0,T]$ можно по норме $\|\ \|_2$ приближается процессами вида*

$$\zeta_t(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$ — разбиение отрезка $[0,T]$, а η_k измеримы относительно $\mathcal{F}_{t_k}$. Процессы такого вида называем ступенчатыми или простыми.

Это трудное утверждение становится простым для почти наверное непрерывных по t процессов ξ_t, для которых $|\xi_t(\omega)|\le\Phi(\omega)$ и $\mathbb{E}\Phi^2<\infty$. При $\lambda(\mathbb{T})\to 0$ процессы

$$\zeta_t(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_{t_k}(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

сходятся к ξ_t. Действительно, для всякого ω

$$\int_0^T|\xi_t(\omega)-\zeta_t(\omega)|^2\,dt=\sum_k\int_{t_k}^{t_{k+1}}|\xi_t(\omega)-\xi_{t_k}(\omega)|^2\,dt\to 0$$

при $\lambda(\mathbb{T})\to 0$ из-за непрерывности $t\to\xi_t(\omega)$. Кроме того,

$$\int_0^T|\xi_t(\omega)-\zeta_t(\omega)|^2\,dt\le 4T\Phi(\omega)^2$$

и по теореме Лебега

$$\mathbb{E}\int_0^T|\xi_t(\omega)-\zeta_t(\omega)|^2\,dt\to 0$$

при $\lambda(\mathbb{T})\to 0$.

Таким образом, трудность обоснования предложения состоит в приближении произвольного процесса ξ_t из $\mathbb{L}^2[0,T]$ непрерывными.

Для ступенчатого процесса

$$\zeta_t(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t)$$

по определению

$$\int_0^t \zeta_s\,dw_s=\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k(\omega)\bigl(w_{t_{k+1}\wedge t}-w_{t_k\wedge t}\bigr).$$

Напомним, что процесс M_t называется мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, если $\mathbb{E}|M_t|<\infty$, процесс M_t согласован с $\mathcal{F}_t$ и для всякого $t\in[0,T]$ верно равенство

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s)=M_s,\quad t>s.$$

Таким образом, $M_t=\mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$ и мартингал по сути является семейством проекций случайной величины M_T.

Предложение 2. *Отображение*

$$(t,\omega)\to\int_0^t \zeta_s\,dw_s$$

является непрерывным мартингалом относительно $\mathcal{F}_t$ *и*

$$\mathbb{E}\int_0^t \zeta_s\,dw_s=0,\quad \mathbb{E}\Bigl|\int_0^t \zeta_s\,dw_s\Bigr|^2=\mathbb{E}\int_0^t|\zeta_s|^2\,ds.$$

Доказательство. Пусть $s<t$ и $t_m\le s<t_{m+1}$, $t_j\le t\le t_{j+1}$. Можно считать, что $t_{j+1}=t$. Имеем

$$\mathbb{E}\Bigl(\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k(\omega)\bigl(w_{t_{k+1}\wedge t}-w_{t_k\wedge t}\bigr)|\mathcal{F}_s\Bigr)=\mathbb{E}\Bigl(\sum_{k=0}^{m-1}\eta_k(\omega)\bigl(w_{t_{k+1}}-w_{t_k}\bigr)|\mathcal{F}_s\Bigr)+$$

$$+\mathbb{E}\bigl(\eta_m(\omega)\bigl(w_s-w_{t_m}\bigr)|\mathcal{F}_s\bigr)++\mathbb{E}\bigl(\eta_m(\omega)\bigl(w_{t_{m+1}}-w_s\bigr)|\mathcal{F}_s\bigr)+\sum_{k=m+1}^{j}\mathbb{E}\bigl(\eta_k(\omega)\bigl(w_{t_{k+1}}-w_{t_k}\bigr)|\mathcal{F}_s\bigr).$$

Так как величина w_τ измерима относительно $\mathcal{F}_s$ при $\tau\le s$, то

$$\mathbb{E}\Bigl(\sum_{k=0}^{m-1}\eta_k(\omega)\bigl(w_{t_{k+1}}-w_{t_k}\bigr)|\mathcal{F}_s\Bigr)++\mathbb{E}\bigl(\eta_m(\omega)\bigl(w_s-w_{t_m}\bigr)|\mathcal{F}_s\bigr)=\int_0^s\zeta_\tau\,dw_\tau.$$

Так как $w_{\tau_2}-w_{\tau_1}$ не зависит от $\mathcal{F}_s$ при $s\le\tau_1<\tau_2$ и $\mathbb{E}\bigl(w_{\tau_2}-w_{\tau_1}\bigr)=0$, то

$$\mathbb{E}\bigl(\eta_m(\omega)\bigl(w_{t_{m+1}}-w_s\bigr)|\mathcal{F}_s\bigr)+\sum_{k=m+1}^{j}\mathbb{E}\bigl(\eta_k(\omega)\bigl(w_{t_{k+1}}-w_{t_k}\bigr)|\mathcal{F}_s\bigr)=0.$$

Итак, при $t>s$

$$\mathbb{E}\Bigl(\int_0^t\zeta_\tau\,dw_\tau|\mathcal{F}_s\Bigr)=\int_0^s\zeta_\tau\,dw_\tau.$$

Проверим теперь равенство

$$\mathbb{E}\Bigl|\int_0^t \zeta_s\,dw_s\Bigr|^2=\mathbb{E}\int_0^t|\zeta_s|^2\,ds$$

Имеем

$$\mathbb{E}\Bigl|\int_0^t \zeta_s\,dw_s\Bigr|^2=\sum_{k,i}\mathbb{E}\eta_k\eta_i(w_{t_{k+1}\wedge t}-w_{t_k\wedge t})(w_{t_{i+1}\wedge t}-w_{t_i\wedge t})=$$

$$\sum_k \mathbb{E}\eta_k^2(w_{t_{k+1}\wedge t}-w_{t_k\wedge t})^2=\sum_{k\le j-1}\mathbb{E}\eta_k^2(t_{k+1}-t_k)+\mathbb{E}\eta_j^2(t-t_j)=\mathbb{E}\int_0^t \zeta_\tau^2\,d\tau.$$

Аналогично проверяется равенство нулю математического ожидания. □

2. Интеграл Ито в общем случае

Используя неравенство Дуба для квадратично интегрируемых непрерывных мартингалов

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t|^2\le C\mathbb{E}|M_T|^2,$$

можно показать, что пространство $\mathcal{M}_c^2$ непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов M_t на $[0,T]$ (фильтрация $\mathcal{F}_t$) с нормой $\|M\|=\sqrt{\mathbb{E}|M_T|^2}$ является полным пространством.

Остановимся отдельно лишь на одном моменте обоснования полноты. Пусть процессы M_t^n — фундаментальная последовательность. Тогда найдется подпоследовательность номеров n_k, для которой $\|M^{n_{k+1}}-M^{n_k}\|\le 2^{-k}$. В силу неравенства Дуба имеет место оценка

$$\mathbb{E}\sum_k\sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}}-M_t^{n_k}|\le\sum_k\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}}-M_t^{n_k}|\le$$

$$\le\sum_k\Bigl(\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}}-M_t^{n_k}|^2\Bigr)^{1/2}\le\sum_k C^{1/2}2^{-k/2}<\infty.$$

Следовательно, почти наверное ряд

$$\sum_k\sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}}-M_t^{n_k}|$$

сходится и последовательность $M_t^{n_k}$ сходится равномерно.

Пусть $\xi_t\in\mathbb{L}^2[0,T]$. Интеграл Ито от ξ_t определяется равенством

$$\int_0^t\xi_s\,dw_s=\lim_{n\to\infty}\int_0^t\zeta_s^n\,dw_s,$$

где ζ_t^n — последовательность простых процессов, которые приближают ξ_t, то есть

$$\mathbb{E}\int_0^T|\xi_t-\zeta_t^n|^2\,dt\to 0,\quad n\to\infty.$$

Пусть $\xi_t\in\mathbb{L}^2[0,T]$, почти наверное отображение $t\to\xi_t$ непрерывно, $|\xi_t(\omega)|\le\Phi(\omega)$ и $\mathbb{E}\Phi^2<\infty$. Тогда в качестве приближающего простого процесса можно взять

$$\zeta_t(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_{t_k}(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

где $\{t_k\}$ — разбиение $\mathbb{T}$ отрезка $[0,T]$. Тогда существует такая последовательность разбиений $\mathbb{T}_n$, что $\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0$ и почти наверное равномерно на $[0,T]$

$$\int_0^t\xi_s\,dw_s=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_{t_k}\bigl(w_{t_{k+1}\wedge t}-w_{t_k\wedge t}\bigr).$$

В более специальном случае это утверждение можно уточнить.

Предложение 3. *Пусть ξ_t — согласованный с $\mathcal{F}_t$ процесс, причем*

$$|\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega)| \le N(\omega)|t-s|^\gamma, \quad \mathbb{E}N^2 < \infty.$$

Пусть $t_k = Tk/2^n$. Тогда почти наверное равномерно по $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \xi_s\,dw_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{t_k}\bigl(w_{t_{k+1}\wedge t} - w_{t_k\wedge t}\bigr).$$

Доказательство. Положим

$$\zeta_t^n(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_{t_k}(\omega) I_{(t_k,t_{k+1}]}(t).$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}\int_0^T |\xi_t - \zeta_t^n|^2\,dt = \sum_k \mathbb{E}\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\xi_t - \xi_{t_k}|^2\,dt \le C\mathbb{E}N^2 2^{-2\gamma n}.$$

Следовательно, $\mathbb{E}\sup_{[0,T]} |\xi_t - \zeta_t^n|^2 \le C' 2^{-2\gamma n}$ и ряд $\sum_n \sup_{[0,T]} |\xi_t - \zeta_t^n|^2$ сходится почти наверное, в частности почти наверное ζ_t^n сходится равномерно к ξ_t. □

3. Формула Ито

Поучим аналог формулы Ньютона–Лейбница для стохастического интеграла.

Предложение 4. *Пусть $f \in C^3(\mathbb{R})$, причем производные второго и третьего порядка ограничены. Почти наверное справедливо равенство*

$$f(w_T) - f(w_0) = \int_0^T f'(w_t)\,dw_t + \frac{1}{2}\int_0^t f''(w_t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $t_k = kT/2^n$. Применяя разложение Тейлора, получаем

$$f(w_T) - f(w_0) = \sum_k \bigl(f(w_{t_{k+1}}) - f(w_{t_k})\bigr) = A_n + B_n + C_n,$$

где

$$A_n = \sum_k f'(t_k)\bigl(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\bigr),$$

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_k f''(t_k)\bigl(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\bigr)^2,$$

$$C_n = \frac{1}{6}\sum_k f'''(t_k)\bigl(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\bigr)^3.$$

Последовательность A_n почти наверное сходится к стохастическому интегралу от $f'(w_t)$. Запишем последовательность B_n немного в другом виде:

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_k f''(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2}\sum_k f''(t_k)\Bigl(\bigl(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\bigr)^2 - (t_{k+1} - t_k)\Bigr).$$

Первое слагаемое стремится к

$$\frac{1}{2}\int_0^T f''(w_t)\,dt.$$

Второе слагаемое стремится к нулю. Действительно, верна цоенка

$$\mathbb{E}\Bigl(\sum_k f''(t_k)\Bigl(\bigl(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\bigr)^2 - (t_{k+1} - t_k)\Bigr)\Bigr)^2 =$$

$$= \sum_k \mathbb{E}|f''(t_k)|^2 \Big(\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2 - (t_{k+1} - t_k) \Big)^2 \le C2^{-n},$$

из которой следует, что с вероятностью единица выражение

$$\sum_k f''(t_k) \Big(\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2 - (t_{k+1} - t_k) \Big)$$

стремится к нулю. Так как последовательности A_n и B_n сходятся, то последовательность C_n сходится. Проверим, что ее предел почти наверное равен нулю, а это немедленно следует из оценки $\mathbb{E}|C_n| \le C2^{-n/2}$. □

Доказанное равенство является частным случаем формулу Ито.

Для формулировки формулы Ито нам потребуется многомерный винеровский процесс. В многомерном случае винеровский процесс w_t задается вектором $(w_t^1, \dots, w_t^d)$ из d независимых винеровских процессов.

Естественная фильтрация: $\mathcal{F}_t = \sigma\big(w_s^1, \dots, w_s^d,\ s \le t\big)$.

Интеграл Ито

$$\int_0^t \xi_s \, dw_s = \sum_i \int_0^t \xi_s^i \, dw_s^i,$$

где одномерные интегралы определяются как и выше.

Предположим, что

$$x_t^i = x_0^i + \int_0^t B_s^i \, ds + \int_0^t \Sigma_s^{ij} \, dw_s^j.$$

Тогда для всякой функции $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ с ограниченными вторыми производными справедливо равенство (формула Ито)

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t Lf \, ds + \sum_{i,j} \int_0^t f_{x_i}(x_s) \Sigma_s^{ij} \, dw_s^j,$$

где

$$Lf = \langle B_s, \nabla f(x_s) \rangle + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\big(\Sigma_s \Sigma_s^T D^2 f(x_s)\big).$$

4. Теоремы Wong-Zakai

Обсудим приближения стохастического интеграла интегралом Римана–Стилтьеса.

Пусть f — гладкая функция с ограниченными производными.

Предположим, что $B_n(t)$ — кусочно гладкие процессы, которые при каждом t почти наверное сходятся к w_t при $n \to \infty$. Тогда

$$\int_0^T f(B_n(t)) dB_n(t) = F(B_n(t)) - F(B_n(0)), \quad F'(x) = f(x).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T f(B_n(t)) dB_n(t) = F(w_T) - F(w_0).$$

По формуле Ито

$$F(w_T) - F(w_0) = \int_0^T F'(w_s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^T F''(w_s) \, ds.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T f(B_n(t)) dB_n(t) = \int_0^T f(w_s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^T f'(w_s) \, ds.$$

В многомерном случае ситуация существенно сложнее.