Занятие №2.

Разбор дом. задания

(1) $x_1 = \xi_1\left(1+\frac{t}{\tau}\right)$; $x_2 = \xi_2\left(1+\frac{2t}{\tau}\right)$; $x_3 = \xi_3\left(1+\frac{t^2}{\tau^2}\right)$

а) $\cancel{v_1 t \xi}$, $\bar{v}(\xi, t) = \left(\frac{\xi_1}{\tau}; \frac{2\xi_2}{\tau}; \frac{2t\xi_3}{\tau^2}\right)$

$\bar{a}(\xi, t) = \left(0; 0; \frac{2\xi_3}{\tau^2}\right)$

б) $t = \tau$

$a = 2\xi_1$, $b = 3\xi_2$, $c = 2\xi_3$

Находим лагр. к-ты частицы, кот. в момент $t=\tau$ находилась в точке (a, b, c):

$\xi_1 = \frac{a}{2}$; $\xi_2 = b/6$; $\xi_3 = \frac{c}{2}$

Эта частица в момент $t = 3\tau$ находится в точке с к-тами:

$x_1 = \frac{a}{2}(1+3) = 2a$; $x_2 = \frac{b}{3}(1+6) = \frac{7}{3}b$; $x_3 = \frac{c}{2}(1+9) = 5c$

(2) а) $x_1 = a(t)\xi_1$; $x_2 = b(t)\xi_2$; $x_3 = c(t)\xi_3$

$\bar{v}(\xi, t) = (\dot{a}\xi_1; \dot{b}\xi_2; \dot{c}\xi_3)$

$\bar{a}(\xi, t) = (\ddot{a}\xi_1; \ddot{b}\xi_2; \ddot{c}\xi_3)$

$\xi_1 = \frac{x_1}{a}$; $\xi_2 = \frac{x_2}{b}$; $\xi_3 = \frac{x_3}{c}$

$\bar{v}(x, t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}x_1; \frac{\dot{b}}{b}x_2; \frac{\dot{c}}{c}x_3\right)$

$\bar{a}(x, t) = \left(\frac{\ddot{a}}{a}x_1; \frac{\ddot{b}}{b}x_2; \frac{\ddot{c}}{c}x_3\right)$

б) $x_1 = \xi_1 + b(t)\xi_2$
$x_2 = \xi_2$
$x_3 = \xi_3$
$\Rightarrow$
$\xi_1 = x_1 - b(t)x_2$
$\xi_2 = x_2$
$\xi_3 = x_3$

$\bar{v} = (\dot{b}\xi_2; 0; 0) = (\dot{b}x_2; 0; 0)$

$\bar{a} = (\ddot{b}\xi_2, 0, 0) = (\ddot{b}x_2; 0; 0)$

(3)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t+\tau} \qquad x_1 = C_1(t+\tau) \qquad C_1 = \frac{\xi_1}{\tau}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2tx_2}{t^2+\tau^2} \qquad x_2 = C_2(t^2+\tau^2) \qquad C_2 = \frac{\xi_2}{\tau^2}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{3t^2x_3}{t^3+\tau^3} \qquad x_3 = C_3(t^3+\tau^3) \qquad C_3 = \frac{\xi_3}{\tau^3}$$

$$\bar{x}\Big|_{t=0} = \bar{\xi}$$

Занятие №2. Кинематика в Римановом пространстве.

① Траектории и линии тока.

Имеем $\bar v(\bar x, t)$.

Находим закон движения из системы:

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar x}{dt}=\bar v & (1).\\[2mm] \bar x\big|_{t=0}=\bar\xi\end{cases}$$

получим $\bar x(\bar\xi, t)$; для каждого $\bar\xi$ получим свою кривую, она называется траекторией. (1) – уравнение траекторий.

Линии, касательные к которым в каждой точке и в каждый момент времени t совпадают с направлением в-ра скорости $\bar v$ частицы, находящейся в этот момент в этой точке, называются линиями тока:

$$\frac{dx^1}{v^1}=\frac{dx^2}{v^2}=\frac{dx^3}{v^3}=d\lambda$$ – уравнения траекторий

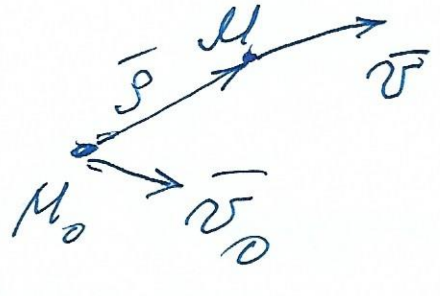
$$\frac{d\bar x}{d\lambda}=\bar v \quad (2)$$

В ур-ниях (1) t – переменная; в ур. (2) t – параметр.

Очевидно, что, если $\bar v$ не зависит от t (течение стационарно), то линии тока и траектории совпадают. Показать, что если $v_i = a(t)\,\bar v_i^0(\bar x)$ то линии тока и траектории совпадают.

(2) Тензор скоростей деформаций

Введём важнейшую характеристику движения - тензор скоростей деформации



Пусть в момент t частица, находящаяся в т. M_0 имеет скорость $\bar v_0$, а частица, находящаяся в т. M_1 (в окрестности) имеет скорость $\bar v$

$\bar v(\bar x, t)$ - непрерывная, дост. число раз дифференцируемая функция

$\bar\rho$ - малое. Тогда

$$(3)\quad \bar v = \bar v_0 + \frac{\partial \bar v}{\partial x^i}\rho^i$$ - 2 первых члена в разложении Тейлора

Если ввести вектор $\bar\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar v$ и функцию $\Phi = \frac{1}{2} v_{ij}\rho^i\rho^j$, где

$$v_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}),$$

то (3) можно записать так

$$\underbrace{\bar v = \bar v_0 + [\bar\omega, \bar\rho]}\ + \operatorname{grad}\Phi$$

это формула распределения скоростей (ф. Эйлера) для абсолютно твёрдого тела (при движении не меняются расстояния между точками)

значит, Φ связано с деформацией среды (с изменением расстояния между точек) поэтому

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (4)$$

называют тензором скоростей деформации, $v_{ij} = v_{ji}$, поэтому этот тензор можно привести к диагональному виду.

③ Скалярная характеристика $\rho(\bar{x}, t)$ – плотность среды. Она удовлетворяет уравнению неразрывности (ур. сохранения массы объёма среды)

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{v}) = 0 \quad \left(или \ \frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \bar{v} = 0\right)$$

<u>Задача</u>

Дано $v_1 = a(t) x_2$, $v_2 = v_3 = 0$ (простой сдвиг). Найти $\bar{\omega}$; v_{ij}; ρ; изменение плотности; $u(\xi, t)$.

Решение

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} rot\, \bar{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a x_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; -a(t))$$

$v_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$; $v_{12} = \frac{1}{2} a(t)$; $v_{13} = 0$; $v_{22} = 0$; $v_{33} = 0$; $v_{23} = $

$$v_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}a(t) & 0 \\ \frac{1}{2}a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 0 = 0 \quad \rho = \rho_0$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(t) x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \quad \bar{x}|_{t=0} = \bar{\xi} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \left(\int_0^t a(t)dt\right)\xi_2 + \xi_1 \\ x_2 &= \xi_2 \\ x_3 &= \xi_3 \end{aligned} \qquad (*) \quad \begin{aligned} u_1(\xi, t) &= \int_0^t a(t) \\ u_2(\xi, t) &= 0 \\ u_3(\xi, t) &= 0 \end{aligned}$$

Задача 2.

$v_1 = -V\sin\omega t;\quad v_2 = V\cos\omega t;\quad v_3 = 0$

Найти линии тока и траектории.

1) л. тока:

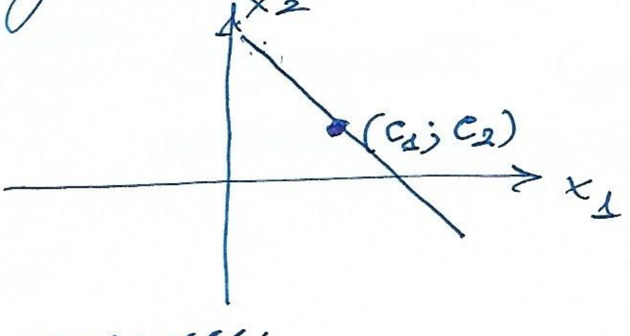
$$\frac{dx_1}{-V\sin\omega t} = \frac{dx_2}{V\cos\omega t} = d\lambda$$ (плоское движение)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -v\sin\omega t\cdot\lambda + c_1 \\ x_2 &= v\cos\omega t\cdot\lambda + c_2 \end{aligned}\right\}$$ исключим λ

$$\frac{x_1 - c_1}{x_2 - c_2} = -\operatorname{tg}\omega t$$

$$x_1 - c_1 = -\operatorname{tg}\omega t\cdot(x_2 - c_2)$$

В каждый момент t_0 — это прямая



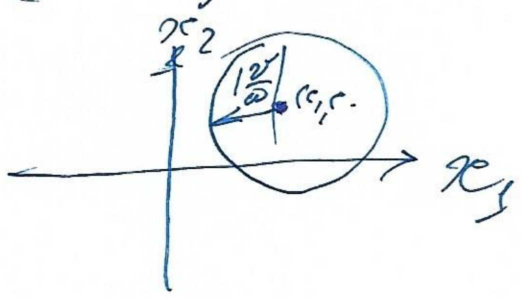
$\cancel{(c_1 = 0;\ c_2 = 0)}$

2) траектории:

$\frac{dx_1}{dt} = -v\sin\omega t \qquad x_1 = +\frac{v}{\omega}\cos\omega t + c_1$

$\frac{dx_2}{dt} = v\cos\omega t \qquad x_2 = \frac{v}{\omega}\sin\omega t + c_2$

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$ — ур. окружности с ц. (c_1, c_2) рад $\left|\frac{v}{\omega}\right|$



Доска.

① Дано: $v_1 = kx_2$; $v_2 = kx_1$; $v_3 = 0$ (чистый сдвиг)
Найти: $\bar{\omega}$; v_{ij}; изменение плотности, вектор перемещения $\bar{u}(\xi, t)$; $\bar{a}(\xi, t)$, $\bar{a}(\bar{x}; t)$.

② Дано: $u_1 = \xi_1(e^{k_1 t} - 1)$, $u_2 = \xi_2(e^{k_2 t} - 1)$,
$u_3 = \xi_3(e^{k_3 t} - 1)$.
Найти: $\bar{v}(\bar{x}, t)$; v_{ij}; линии тока и траектории.

③ Поле скоростей в эйлеровых пер-х имеет вид:

$$v_1 = \frac{bc}{a}(x_2 - x_3);\quad v_2 = \frac{ca}{b}(x_3 - x_1);\quad v_3 = \frac{ab}{c}(x_1 - x_2)$$

(a, b, c – постоянные). Доказать, что траектории частиц плоские.

④ Поле скоростей:

$$v_1 = cx_2 - bx_3;\quad v_2 = ax_3 - cx_1;\quad v_3 = bx_1 - ax_2$$

(a, b, c – постоянное)
Показать, что движение среды происходит по окружностям.
(4.