Модель Amir et. al. (2013) с беск. числом агентов

① Модель

- Активы (короткоживущие) : X_t^n, $\sum_{n=1}^N X_t^n = 1$, $X_t^n \geq 0$

  Предположение: $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ – н.о.р.

- Агенты – мера $\mu_t(\omega, ds)$ $\quad s \in \Delta^N$ – стратегия
- Ур-е капитала

$$\mu_{t+1}(A) = \sum_{n=1}^N \frac{\int_A s^n \mu_t(ds)}{\int_{\Delta^N} s^n \mu_t(ds)} X_{t+1}^n \qquad A \in \mathcal{B}(\Delta^N)$$

Удобное обозначение : $\bar{\lambda}_t^n(A) = \frac{1}{\mu_t(A)} \int_A s^n \mu_t(ds)$

$\bar{\lambda}_t(A) = (\bar{\lambda}_t^1(A), \dots, \bar{\lambda}_t^N(A))$ – „взвешенные стратегии"

Тогда ур-е капитала :

$$\boxed{\frac{\mu_{t+1}(A)}{\mu_t(A)} = \sum_{n=1}^N \frac{\bar{\lambda}_t^n(A)}{\bar{\lambda}_t^n(\Delta^N)} X_{t+1}^n}$$

② Оптимальная стратегия

$$\lambda_* = (\lambda_*^1, \dots, \lambda_*^N) \quad , \quad \lambda_*^n = E X_t^n$$

③ Условие случайности

Будем предполагать, что X_t имеет сл. св-во:

если $c_1 X_t^1 + \dots + c_N X_t^N = 0$, где $c_1, c_2, \dots, c_N = const$,

то $c_1 = \dots = c_N = 0$ $\quad$ (т.е. $X_t^n(\omega)$ – лин. незав. ф-ции) $\quad$ (R)

Сл-е $\forall c_1, \dots, c_N$ если $\exists i, j : c_i \neq c_j$, то $c_1 X_t^1 + \dots + c_N X_t^N \neq const$

Д-во $\sum_n c_n X_t^n = c \Rightarrow \sum_n (c_n - c) X_t^n = 0 \Rightarrow c_n = c$ для всех n.

④ Теорема

Пусть выпол. (R) и $B \subset \Delta^N$, $\lambda_* \notin B$, B - замкнутое, выпуклое

Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$, что для $A = U_\varepsilon(\lambda_*) := \{ s \in \Delta^N : |s - \lambda_*| \le \varepsilon \}$ выполнено

если $\mu_0(A) > 0$, то $\mu_t(B) \to 0$ п.н. при $t \to \infty$

⑤ Д-во теоремы

Лемма 1 $m := \min \left\{ E \ln \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n}{\mu^n} X^n \;\middle|\; \lambda \in B,\ \mu \in \bar{U}_\delta(B) \right\} < 0$ для любого $\delta > 0$

[Обозначения: • $X \overset{d}{=} X_t$

• $\bar{U}_\delta(B) = \{ s \in \Delta^N : d(s, B) \ge \delta \}$]

Д-во леммы 1

$\lambda \in B,\ \mu \in \bar{U}_\delta(B) \Rightarrow \sum_n \frac{\lambda^n}{\mu^n} X^n \not\equiv const$ из условие (R)

По н-ву Йенсена $E \ln \sum_n \frac{\lambda^n}{\mu^n} X^n < \ln E \sum_n \frac{\lambda^n}{\mu^n} X^n = \ln \sum_n \frac{\lambda^n}{\mu^n} \lambda_*^n =: \ln A$

т.к. ln-стр. вогнут

Покажем, что $A \le 1$

$f(\mu) := \sum_n \frac{\lambda^n}{\mu^n} \lambda_*^n$

⑤ Для начала попробовать доказать более простую версию.

В модели с M агентами, рассмотрим стратегии $\lambda_m = (\lambda_m^1, \dots, \lambda_m^N)$, $m = 1, \dots, M-1$,

где $\lambda_m \ne \lambda_*$ для всех $m = 1, \dots, M-1$. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \lambda_M \in U_\varepsilon(\lambda_*)$

зависит от λ_m, $m = 1, \dots, M-1$

и $\forall\, W_0^M > 0$ (начальное богатство) выполнено

$W_t^1 \to 0$ п.н. (и аналогично $W_t^m \to 0$ для $m = 1, \dots, M-1$)