Планирование инвестиций страховой компании

Новикова Александра Валерьевна
(науч. рук. – проф. Булинская Екатерина Вадимовна)

МГУ им. М.В.Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра теории вероятностей, 609 группа

Москва
4 мая 2022 г.

Цели и этапы работы

1. Получить удобную формулу для расчёта вероятности разорения страховой компании к определённому моменту времени в условиях гамма-распределения требований;
2. Исследовать результат на зависимость от параметров инвестиционной составляющей, распределения требований и горизонта оценки;
3. *Дополнительно.* Создать инструмент вычисления по получаемой формуле.

Модель риска с регулярными инвестициями. Определение

Фиксация баланса происходит в конце каждого фиксированного периода (недели, месяца, года).

Определение

Баланс страховой компании, регулярно инвестирующей фиксированную долю текущего капитала δ в **безрисковый** актив на m периодов с процентной ставкой β за период, выражается как

$$S_i = \min\{(1-\delta)S_{i-1}, S_{i-1}\} + c + b_m \delta S^{+}_{i-(m+1)} - X_i, i \geqslant 1;$$

$$S_0 = x.$$

где x – начальный капитал компании; c – сумма поступивших за период премий; δ – постоянная доля капитала, инвестируемая в актив; $b_m = (1+\beta)^m$; X_i – размер требований, поступивших за период i.

Упрощение модели

В данной работе изучаются независимые требования X_i, которые могут иметь разное распределение.

Упрощение модели

В данной работе изучаются независимые требования X_i, которые могут иметь разное распределение.

Определение

Моментом разорения страховой компании называют первый момент времени, когда её капитал перестаёт быть положительным, а именно

$$\tau = \inf\{n > 0, S_n \leqslant 0\}$$

Упрощение модели

В данной работе изучаются независимые требования X_i, которые могут иметь разное распределение.

Определение

Моментом разорения страховой компании называют первый момент времени, когда её капитал перестаёт быть положительным, а именно

$$\tau = \inf\{n > 0, S_n \leqslant 0\}$$

Тогда выражение для капитала компании можно упростить:

$$S_i = (1-\delta)S_{i-1} + c + b_m \delta S_{i-(m+1)} - X_i,$$

$$S_0 = x$$

Упрощение модели

Утверждение 2.1

Пусть $S_0 = x$. Тогда

$$S_i = f_i - \sum_{j=1}^{i} g_{i,j} X_j = f_i - (\mathbf{GX})_i, i \geqslant 1, \tag{1}$$

где $f_0 = x$ и

$$f_i = \begin{cases} (1-\delta)f_{i-1} + c, \; i = \overline{1,m}; \\ (1-\delta)f_{i-1} + b_m \delta f_{i-(m+1)} + c, \; i > m. \end{cases}$$

$$g_{i,j} = \begin{cases} (1-\delta)g_{i-1,j} + b_m \delta g_{i-(m+1),j}, \; j = \overline{1, i-(m+1)}; \\ (1-\delta)g_{i-1,j}, \; j = \overline{i-m, i-1}; \\ 1, \; j = i; \\ 0, \; \textit{иначе}. \end{cases}$$

Общая теорема

Для дальнейшего изучения пригодится следующий общий результат:

Теорема 2.1

Вероятность разорения компании к моменту окончания периода n равна

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant n) = 1 - \int\limits_0^{f_1} \cdots \int\limits_0^{f_n} \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(v_i(y_1, \ldots, y_n)) dy_1 \ldots dy_n, \tag{2}$$

где $v_i(y_1, \ldots, y_n) = \left(G_n^{-1}(y_1, \ldots, y_n)^T\right)_i$, а $p_{X_i}(y)$ – плотность распределения с.в. X_i.

Случай $Gamma(2, \lambda_i)$

Лемма 3.1

Пусть $X_i \sim Gamma(2, \lambda_i)$, т.е. $p_{X_i}(x) = \lambda_i^2 x e^{-\lambda_i x}$. Тогда

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (-1)^n \lambda_i^2 \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \ldots \partial \lambda_n} \int\limits_{l_1}^{f_1} \cdots \int\limits_{l_n}^{f_n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_i y_i} dy_1 \ldots dy_n,$$

где

$$l_p = \begin{cases} (1-\delta) y_{p-1} + b_m \delta y_{p-(m+1)}, & p = \overline{m+2, n}, \\ (1-\delta) y_{p-1}, & p = \overline{2, m+1}, \\ 0, & p = 1; \end{cases}$$

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} \lambda_i - (1-\delta)\lambda_{i+1} - b_m \delta \lambda_{i+m+1}, & i = \overline{1, n-(m+1)}, \\ \lambda_i - (1-\delta)\lambda_{i+1}, & i = \overline{n-m, n-1}, \\ \lambda_n, & i = n. \end{cases}$$

Случай $Gamma(2, \lambda_i)$

Теорема 3.1

Пусть $X_i \sim Gamma(2, \lambda_i)$, т.е. $p_{X_i}(y) = \lambda_i^2 y e^{-\lambda_i y}$. Тогда

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant n) = 1 - \mathsf{P}(\tau > n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \times \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{k_1+\ldots+k_n} \left(\prod_{p=1}^{n} \tilde{a}_p^k \right)^{-1} \exp\left(-\sum_{p=1}^{n} k_p \tilde{a}_p^k f_p \right) B_n^k, \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} B_1^k = k_1 f_1 + \frac{1}{\tilde{a}_1^k}, \\ B_i^k = \sum\limits_{p=1}^{i} \frac{\partial \tilde{a}_p^k}{\partial \lambda_i} \left(k_p f_p + \frac{1}{\tilde{a}_p^k} \right) B_{i-1}^k - \frac{\partial B_{i-1}^k}{\partial \lambda_i}, \; i \geqslant 1; \end{cases}$$

Случай $Gamma(2, \lambda_i)$

Теорема 3.1. Продолжение

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1^k \\ \vdots \\ \tilde{a}_n^k \end{pmatrix} = U_n^k \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{p=1}^{n} u_{1,p}^k \tilde{a}_p \\ \vdots \\ \sum\limits_{p=n}^{n} u_{n,p}^k \tilde{a}_p \end{pmatrix};$$

$$U_n^k = (u_{i,j}^k)_{i,j=1}^n = (E_n + (1-k_1)L_1)\dots(E_n + (1-k_n)L_n);$$

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} \lambda_i - (1-\delta)\lambda_{i+1} - b_m \delta \lambda_{i+m+1}, & i = \overline{1, n-(m+1)}, \\ \lambda_i - (1-\delta)\lambda_{i+1}, & i = \overline{n-m, n-1}, \\ \lambda_n, & i = n. \end{cases}$$

Случай $Gamma(2, \lambda_i)$

Теорема 3.1. Продолжение

$k_1, \ldots, k_n \in \{0, 1\}$ получаются из двоичного представления $k = \overline{k_n k_{n-1} \ldots k_2 k_1}$, E_n – единичная матрица порядка n, а

$$(L_i)_{st} = \begin{cases} b_m \delta, & \textit{если } (s,t) = (i-(m+1), i), \\ 1-\delta, & \textit{если } (s,t) = (i-1, i), \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Случай $Gamma(d_i, \lambda_i)$, $d_i \in \mathbb{N}$

Принцип подсчёта вероятности разорения к моменту окончания периода n можно обобщить.

Следствие 3.1

Пусть $X_i \sim Gamma(d_i, \lambda_i)$, т.е. $p_{X_i}(y) = \Gamma^{-1}(d_i)\,\lambda_i^{d_i}\,y^{d_i-1}e^{-\lambda_i y}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\tau \leqslant n) &= 1 - \mathsf{P}(\tau > n)\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{d_i}}{\Gamma(d_i)}\,(-1)^{\sum_{i=1}^{n} d_i - n} \frac{\partial^{\sum_{i=1}^{n} d_i - n}}{(\partial\lambda_1)^{d_1-1}\dots(\partial\lambda_n)^{d_n-1}}\\ &\quad\times \sum_{k=0}^{2^n-1}(-1)^{k_1+\ldots+k_n}\left(\prod_{p=1}^{n}\tilde{a}_p^k\right)^{-1}\exp\left(-\sum_{p=1}^{n} k_p\tilde{a}_p^k f_p\right).\end{aligned}$$

Полезные замечания

Напоминание:

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant n) = 1 - \lambda^{2n} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{k_1+\ldots+k_n} \left(\prod_{p=1}^{n} \tilde{a}_p^k \right)^{-1} e^{-\sum\limits_{p=1}^{n} k_p \tilde{a}_p^k f_p} B_n^k$$

1. При $\lambda = 0$ вероятность разорения равна 1 при любом горизонте оценки;
2. $\mathsf{P}(\tau \leqslant n)(\lambda) \sim \lambda^n e^{-c\lambda}$ при $\lambda \uparrow \infty$.

Зависимость от λ в динамике по n

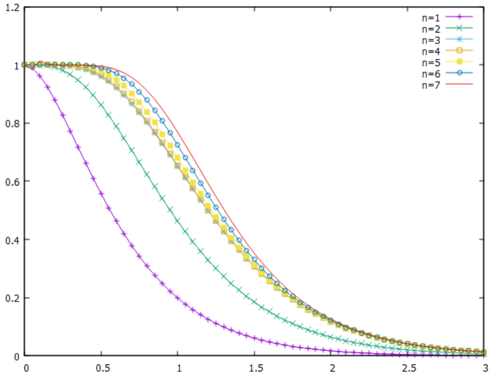
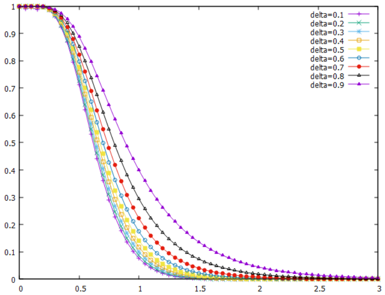
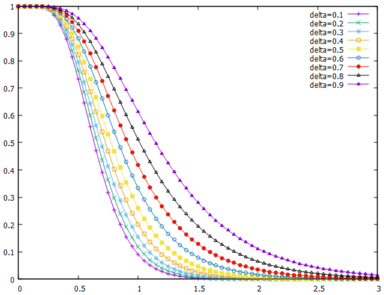


График $P(\tau \leqslant n)$ для $Gamma(2, \lambda)$ распределения требований в зависимости от λ, $m = 3$, $x = 5$, $c = 2$, $\beta = 5\%$, $\delta = 0.8$

Зависимость от λ в динамике по δ



$m = 1$



$m = 2$

График $P(\tau \leqslant n)$ для $Gamma(2, \lambda)$ распределения требований в зависимости от λ, $n = 4$, $x = 5$, $c = 2$, $\beta = 5\%$.

Зависимость от λ в динамике по β

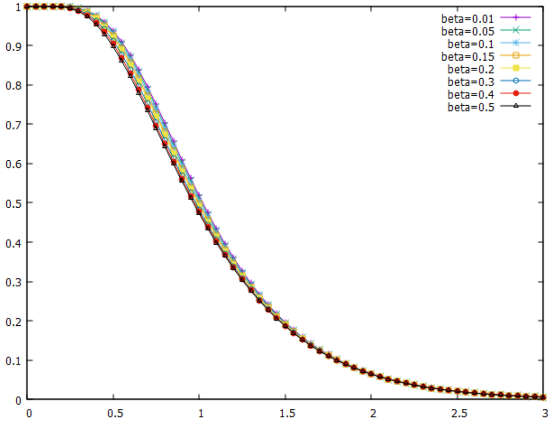


График $P(\tau \leqslant n)$ для $Gamma(2, \lambda)$ распределения требований в зависимости от λ, $n = 4$, $m = 2$, $x = 5$, $c = 2$, $\delta = 0.8$.

Результаты работы

1. Получена формула для вычисления $\mathsf{P}(\tau \leqslant n)$ и создан калькулятор для её реализации при условии $X_i \sim Gamma(2, \lambda_i)$;
2. Анализ подтверждает предположения о характере зависимости вероятности разорения к определённому моменту времени от различных параметров модели.

- E. V. Bulinskaya, A. D. Kolesnik. Reliability of a descrete-time system with investment, *Springer Book: Distributed Computer and Communication Networks, 365-376*, 2018
- E. V. Bulinskaya, B. Shigida. Discrete-time model of company capital dynamics with investment of a certain part of surplus in a non-risky asset for a fixed period, *Methodology and Computing in Applied Probability, 103-121*, 2021
- D. C. M. Dickson, H. R. Waters. The distribution of the time to ruin in the classical risk model, *Astin Bulletin 32(2), 299-313*, 2002
- H. U. Gerber. Mathematical fun with the compound binomial process, *Astin Bulletin: The journal of the IAA 18(2), 161-168*, 1988
- S. Li, Y. Lu, J. Garrido. A review of discrete-time risk models, *Revista de la Real Academia Ciencias Naturales. Serie A Matemáticas 103, 321–337*, 2009

Благодарю за внимание!