1 17. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

Определение. Кривые второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат на плоскости уравнением второй степени $F(x, y) = 0$, где

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0.$$

Определение. *Квадрикой* будем называть класс эквивалентности уравнений 2-ой степени относительно умножения на некоторый ненулевой множитель.

$$(F = 0) \sim (G = 0) \Leftrightarrow F = \lambda G, \lambda \neq 0.$$

При замене координат $(x, y) \to (x', y')$ квадрика $F(x, y) = 0$ переходит в квадрику $F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')) = 0$.

Далее будет доказано, что два уравнения второго порядка задают одну и ту же кривую, тогда и только тогда, когда они пропорциональны, при условии, что кривая состоит более, чем из одной точки. Т.о. для таких кривых соответствие квадрика $\leftrightarrow$ кривая является взаимно однозначным.

Теорема. Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих видов (называемых каноническими уравнениями квадрики):

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (a \geq 0, b > 0)$, эллипс;
(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1, (a \geq 0, b > 0)$, мнимый эллипс;
(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, (a \geq 0, b > 0)$, пара пересекающихся мнимых прямых;
(4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$, гипербола;
(5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0, (a \geq 0, b > 0)$, пара пересекающихся прямых;
(6) $y^2 = 2px, (p > 0)$, парабола;
(7) $y^2 - a^2 = 0, (a > 0)$, пара параллельных прямых;
(8) $y^2 + a^2 = 0, (a > 0)$, пара мнимых параллельных прямых;
(9) $y^2 = 0$, пара совпадающих прямых.
(уравнения 3 и 5 определены с точностью до ненулевого множителя).

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему прямоугольных координат и уравнение квадрики в ней. Доказательство основано на следующих двух леммах, соответствующих двум заменам координат, т.е.двум шагам приведения кривой к каноническому виду.

Лемма. Подходящим поворотом осей координат можно добиться того, что $a'_{12} = 0$, где штрих означает соответствующий коэффициент уравнения квадрики в новой системе координат.

Доказательство. Рассмотрим произвольный поворот:

$$\begin{pmatrix} (x \\ y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$F'(x', y') := F(x(x', y'), y(x', y')) = a_{11}(\cos\phi x' - \sin\phi y')^2 + 2a_{12}(\cos\phi x' - \sin\phi y')(\sin\phi x' + \cos\phi y') + a_{22}(\sin\phi x' + \cos\phi y')^2 +$линейн

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\phi\sin\phi + a_{12}(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + a_{22}\cos\phi\sin\phi = (a_{22} - a_{11})\frac{\sin 2\phi}{2} + a_{12}\cos 2\phi.$$

Мы хотим найти такое ϕ, чтобы $a'_{12} = 0$, т.е.

$$\operatorname{ctg} 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Задача разрешима, так как если бы $a'_{12} = 0$, то не требовалось бы никакого поворота. В повернутой системе координат многочлен F примет вид

$$F'(x', y') = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = 0.$$

□

Лемма. Многочлен указанного выше вида (строчка выше) параллельным переносом приводится к одному из следующих видов:
(1) $F'' = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau, (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$;
(2) $F'' = \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'', (\lambda_2, b_1 \neq 0)$;
(3) $F'' = \lambda_2 (y'')^2 + \tau, (\lambda_2 \neq 0)$.

Доказательство. 1: $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Тогда выделяем полные квадраты:

$$F'(x', y') = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 y'\hat{}2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = \lambda_1 \left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

где

$$x'' := x' + \frac{b_1}{\lambda_1}, y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

- формулы замены координат, обратной к искомой.
2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (если $\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$, то поменяем координаты местами). Возможны 2 случая.
а) Если $b_1 \neq 0$, то

$$F'(x', y') = \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_0 = \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_1 x' + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) = \lambda_2 (y'')^2 + 2b_1 x'',$$

где

$$x'' := x' + \frac{1}{2b_1} \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right), y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

- формулы замены координат, обратной к искомой.
б) Если $b_1 = 0$, то

$$F'(x', y') = \lambda_2 {y'}^2 + 2b_2 y' + b_0 = \lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2} \right) = \lambda_2 (y'')^2 + \tau,$$

где

$$x'' := x', y'' := y' + \frac{b_2}{\lambda_2},$$

- формулы замены координат, обратной искомой. Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы и разберем различные случаи уравнений из предыдущей леммы.
1). 1. λ_1 и λ_2 - одного знака, τ - противоположного. Получаем уравнение эллипса.
2. $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ - одного знака. Получаем уравнение мнимого эллипса.
3. λ_1, λ_2 - одного знака, $\tau = 0$. Пара пересекающихся мнимых прямых.
4. λ_1 и λ_2 - разных знаков, $\tau \neq 0$. Гипербола.
5. λ_1 и λ_2 - разных знаков, $\tau = 0$. Пара пересекающихся прямых.
2) 6. Парабола.
3) 7. $\tau < 0$. Пара параллельных прямых.
8. $\tau > 0$. Пара мнимых параллельных прямых.
9. $\tau = 0$. Пара совпадающих прямых. □

Следствие. Уравнение второй степени на плоскости задает одну из следующих кривых (как множество точек): эллипс; гипербола; парабола; пара пересекающихся прямых; пара параллельных прямых; пара совпадающих прямых; точка; пустое множество.

Определение. *Преобразованием* называется взаимно-однозначное отображение множества на себя.

Определение. Отображение плоскости (пространства) в себя называется *аффинным преобразованием*, если найдутся такие две аффинные системы координат, что координаты любой точки в одной из них являются координатами ее образа в другой.

Определение. Аффинное преобразование называется *изометрическим*, если оно сохраняет расстояние между точками.

Определение. Две квадрики *аффинно (соотв. метрически) эквивалентны*, если одна из них может быть переведена в другую афинным (соотв. изометрическим) преобразованием, т.е. уравнение первой кривой в некоторой системе координат совпадает (с точностью до ненулевого множителя) с уравнением второй кривой в соответствующей отображенной системе для некоторого аффинного (соотв. изометрического) преобразования.

Теорема. Две квадрики метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.

Доказательство. Достаточность. Всякая квадрика имеет в некоторой прямоугольной (канонической) системе координат каноническое уравнение одного из 9 типов, причем однозначно определенное. Пусть две квадрики имеют одинаковые канонические уравнения в двух системах. Тогда изометрия, переводящая первый репер во второй, переводит первую квадрику во вторую.

Необходимость. Рассмотрим две метрически эквивалентные квадрики. Рассмотрим каноническую систему Oxy для первой из них и ее образ $O'x'y'$ при данной изометрии. В первой системе квадрики имеют уравнения $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, причем F_1 - каноническое. Тогда вторая квадрика имеет 2 уравнения в новой системе координат: то же, что первая кривая имела в исходной системе, т.е. $F_1(x', y') = 0$ и то, что получается заменой координат, т.е. $F'_2(x', y') = F_2(x(x', y'), y(x', y')) = 0$. Т.о., $F_1(x', y') = 0$ - каноническое уравнение и для второй квадрики (с точностью до умножения на можитель). □

Лемма. Для любой квадрики существует аффинная система координат, в которой она имеет одно из следующих уравнений:
(1) $x^2 + y^2 = 1$, эллипс;
(2) $x^2 + y^2 = -1$, мнимый эллипс;
(3) $x^2 + y^2 = 0$, пара пересекающихся мнимых прямых;
(4) $x^2 - y^2 = 1$, гипербола;
(5) $x^2 - y^2 = 0$, пара пересекающихся прямых;
(6) $y^2 - 2x = 0$, парабола;
(7) $y^2 - 1 = 0$, пара параллельных прямых;
(8) $y^2 + 1 = 0$, пара мнимых параллельных прямых;
(9) $y^2 = 0$, пара совпадающих прямых.

Доказательство. Берем каноническое уравнение и растягиваем оси. □

Теорема. Две квадрики аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.

Доказательство. По лемме, аналогично теореме о метрической классификации, получаем, что квадрики одного названия аффинно эквивалентны.

Обратно, докажем, что квадрики с различными названиями аффинно неэквивалентны.

У коник никакие три точки не лежат на одной прямой, в отличие от остальных квадрик.

Поскольку при аффинных преобразованиях сохраняется условие числа точек пересечения и деления в днном отношении, то центр переходит в центр, а асимптотическое направление - в асимптотическое.

Так как у параболы нет центра, а у эллипса и гиперболы - есть, причем у эллипса нет асимптотических направлений, а у гиперболы - есть, то эллипс, гипербола и парабола аффинно неэквивалентны.

Пара прямых различаются геометрически.

Наконец, у мнимого эллипса нет асимптотических направлений, а у пары мнимых параллельных прямых - есть. □

Поверхности второго порядка

Поверхности второго порядка задаются в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

При этом требуется, чтобы квадратичная часть была отлична от 0.

Как и раньше будем называть *квадрикой* многочлен второй степени с точность до умножения на ненулевой множитель.

Теорема 8.1 (из курса линейной алгебры). *Пусть в некоторой прямоугольной системе координат задана квадратичная часть $q(x, y, z)$. Тогда найдется другая прямоугольная система координат с тем же началом, в которой квадратичная часть примет диагональный вид*

$$q'(x', y', z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные значения Q, т. е. корни характеристического многочлена

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = 0,$$

а новые базисные вектора $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ являются соответствующими собственными векторами. В частности, все собственные значения вещественны, а собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Лемма 8.2. *Для любого многочлена второй степени в пространстве существует прямоугольная система координат, в которой он принимает один из следующих пяти видов:*

(i) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \tau \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$;
(ii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z \qquad (\lambda_1\lambda_2 b_3 \neq 0)$;
(iii) $F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \tau \qquad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
(iv) $F = \lambda_1 x^2 + 2c_2 y \qquad (\lambda_1 c_2 \neq 0)$;
(v) $F = \lambda_1 x^2 + \tau \qquad (\lambda_1 \neq 0)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы можем найти такую прямоугольную систему, в которой квадратичная часть диагональна, т. е.

$$F = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + b_0 = 0.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

(i) При $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1\left(x+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(x+\frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2 +$$

$$+\left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2} - \frac{(b_3)^2}{\lambda_3}\right) = \lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+\tau.$$

(ii) При $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2\beta_3 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1\left(x+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_3z + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_3z + \tau = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2b_3\left(z+\frac{\tau}{2b_3}\right) =$$

$$= \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2b_3z'.$$

(iii) При $\lambda_3 = \beta_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ имеем

$$F = \lambda_1\left(x+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_1\left(y+\frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2)^2}{\lambda_2}\right) =$$

$$= \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \tau.$$

(iv) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ и хотя бы один из b_2 и b_3 не равен нулю. Тогда имеем

$$F = \lambda_1\left(x+\frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2b_2y + 2b_3z + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right) = \lambda_1(x')^2 + 2c_2y',$$

где

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b_1}{\lambda_1}, \qquad\qquad c_2 = \sqrt{(b_2)^2+(b_3)^2} \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2+(b_3)^2}}\left(b_2y + b_3z + \frac{1}{2}\left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1}\right)\right) \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{(b_2)^2+(b_3)^2}}\left(-b_3y + b_2z\right). \end{aligned}$$

Такая “нормировка” функций перехода гарантирует ортогональность соответствующей матрицы и, тем самым, что замена прямоугольная.

Если же $b_2 = b_3 = 0$, то мы сразу имеем выражение конечного вида.

(v) Пусть $\lambda_3 = \lambda_2 = b_2 = b_3 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$F = \lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1} \right)^2 + \left(b_0 - \frac{(b_1)^2}{\lambda_1} \right) = \lambda_1 (x')^2 + \tau.$$

Лемма доказана. □

Теорема 8.3. *Для любой квадрики существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих 17 видов:*

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ (*эллипсоид*);

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$ (*мнимый эллипсоид*);

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*однополостный гиперболоид*);

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*двуполостный гиперболоид*);

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*конус (второго порядка)*);

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*мнимый конус (второго порядка)*);

7) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $(p \geqslant q > 0)$ (*эллиптический параболоид*);

8) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $(p \geqslant q > 0)$ (*гиперболический параболоид*);

9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*эллиптический цилиндр*);

10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*мнимый эллиптический цилиндр*);

11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*две мнимые пересекающиеся плоскости*);

12) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a \geqslant b > 0)$ (*гиперболический цилиндр*);

13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $(a \geqslant b > 0)$ (*две пересекающиеся плоскости*);

14) $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ (*параболический цилиндр*);

15) $y^2 = a^2$, $(a > 0)$ (*две параллельных плоскости*);

16) $y^2 = -a^2$, $(a > 0)$ (*две мнимых параллельных плоскости*);
17) $y^2 = 0$, (*две совпадающих плоскости*).

Доказательство. Сначала применяем лемму, а потом для каждого из типов (i)–(v) рассматриваем все случаи. Например, возьмем (i). Возможны случаи:

Если все λ_i одного знака, а τ — противоположного, то делением на $-t$ и переменой осей уравнение приводится к виду 1) (эллипсоид).

Если все λ_i и τ одного знака, то делением на t и переменой осей уравнение приводится к виду 2) (мнимый эллипсоид).

Если все λ_i одного знака, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 6) (мнимый конус).

Если λ_i разных знаков, а $\tau = 0$, то переменой осей уравнение приводится к виду 5) (конус).

Если λ_i разных знаков, причем у одного тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 3) (однополостный гиперболоид).

Если λ_i разных знаков, причем у двух тот же знак, что и у τ, то переменой осей и делением на $-t$ уравнение приводится к виду 4) (однополостный гиперболоид).

Таким образом, случай (i) дает 1)–6). Аналогично с другими:

(i)	1, 2, 3, 4, 5, 6
(ii)	7, 8
(iii)	9, 10, 11, 12, 13
(iv)	14
(v)	15, 16, 17

□

Теорема 8.4. *Каноническое уравнение определено однозначно (для видов* $5, 6, 11, 13$ *— с точностью до множителя).*

Доказательство. Так же, как и в случае кривых, доказывается, что коэффициенты (в частности, определитель δ и след S) и корни λ_i характеристического многочлена матрицы Q являются ортогональными инвариантами, а также определитель Δ матрицы A. Также инвариантны ранги r и R матриц Q и A.

Тогда поверхность однозначно относится к одному из типов (i)–(v), так как

(i)	$r=3$; $R=3$ или $R=4$
(ii)	$r=2$, $R=4$
(iii)	$r=2$, $R=2$ или $R=3$
(iv)	$r=1$, $R=3$
(v)	$r=1$, $R=1$ или $R=2$

Внутри типа (i) λ_i — инварианты, а $\tau = \Delta/\delta$. Внутри типа (ii) λ_1, λ_2 — инварианты, а $(b_3)^2 = -\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}$.

Остальные поверхности, являясь цилиндрическими, имеют канонические уравнения, не содержащие z. Допустим, имеется замена прямоугольных координат, переводящая одно из таких уравнений в другое. Тогда x и y не зависят от z' (и поэтому доказательство сводится к доказанному двумерному случаю). Покажем это, например, для уравнения вида $\lambda x^2 + \mu y^2 + \tau = 0$. Пусть $x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + c_1$ и $y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' + c_2$, а результирующее выражение не зависит от z'. Тогда

$$\begin{array}{rcl}
\lambda c_{11}c_{31} & = & -\mu c_{12}c_{32} \\
\lambda c_{21}c_{31} & = & -\mu c_{22}c_{32} \\
\lambda c_{31}c_{31} & = & -\mu c_{32}c_{32} \\
\lambda c_{1}c_{31} & = & -\mu c_{2}c_{32},
\end{array}$$

в частности, если хотя бы одно из c_{31} и c_{32} отлично от 0, то две первые строки матрицы перехода линейно зависимы и получаем противоречие.

Уравнения распадающихся поверхностей (11, 13, 15, 16, 17) определяются однозначно также из геометрических соображений (теория плоскостей). $\square$

Определение аффинной и метрической эквивалентности квадрик в пространстве полностью аналогично случаю плоскости.

Теорема. Две квадрики в пространстве метрически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый канонический вид.

Теорема 8.42. *Две квадрики в пространстве аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые названия.*

Доказательство теорем дословно повторяет случай кривых, за исключением доказательства аффинной неэквивалентности поверхностей с разными названиями. Проведем его.

Прежде всего заметим, что ранги r и R являются аффинными, а не только ортогональными инвариантами. Поэтому надо доказать неэквивалентность лишь в пределах каждого из классов (i)–(v).

Точка (мнимый конус), прямая (пара мнимых пересекающихся плоскостей), пара параллельных, пересекающихся или совпадающих плоскостей, очевидно, аффинно неэквивалентны ни друг другу, ни другим поверхностям. Для пустых множеств: мнимый эллиптический цилиндр имеет 1 асимптотическое направление, мнимый эллипсоид не имеет асимптотических направлений, пара мнимых параллельных плоскостей имеет целую плоскость асимптотических направлений.

Кроме того, эллипсоид ограничен в отличие от других нерассмотренных поверхностей. В типе (ii) остался один конус. Для оставшихся имеем

Тип	Название	Наличие центров	Прямолин. образующие
(i)	однополостный гиперболоид	1	есть
	двуполостный гиперболоид	1	нет
	эллиптический параболоид	нет	нет
	гиперболический параболоид	нет	есть

Тип	Название	Наличие центров	Асимптот. направления
(iii)	эллиптический цилиндр	прямая	одно
	гиперболический цилиндр	прямая	две плоскости
	параболический цилиндр	нет	

Теорема доказана. □

Проективная классификация кривых

Определение. *Пополненная плоскость* - это плоскость, к которой присоединены некоторые "бесконечно удаленные"элементы (точки) - несобственные точки. Несобственный пучок (параллельные прямые) пересекается в несобственной точке, собственный пучок - в собственной. Объединение всех несобственных точек называется *несобственной прямой.*

Если забыть о том, что некоторые точки несобственные, т.е. присоединенные, то переходим к понятию *проективной плоскости.*

Почему так сложно вводилось и в чем разница между пополненной и проективной плоскостью? В пополненной выделяются несобственные точки (и то, что они отличаются от собственных), в проективной все "равнозначы".

Определение. Точка называется *инцидентной* прямой, если точка лежит на этой прямой. Прямая называется *инцидентной* точке, если она проходит через эту точку.

Аксиомы на проективной плоскости:
A1. Для любых двух различных точек существует единственная прямая, инцидентная им.
A2. Для любых двух различных прямых существует единственная точка, инцидентная им.

Принцип двойственности. Если верно какое-то общее утверждение о точках, прямых и инцидентности между ними на проективной плоскости, то верно и двойственное утверждение, в котором точки и прямые меняются местами.

Отметим, что на обычной плоскости принцип двойственности не выполняется: аксиома A1 верна, а A2 - нет (параллельные прямые).

Определение. *Связкой* прямых и плоскостей с центром в в трехмерном пространстве называется множество всех прямых и плоскостей, проходящих через данную точку O. Прямая связки инцидентна плоскости, если она в ней содержится, плоскость связки инцидентна прямой, если она через нее проходит.

Определение. *Перспективное соответствие* осуществляет взаимно однозначное отображение пополненной плоскости на связку, т.е. отображение точек пополненной плоскости на множество прямых связки, определяемое следующим образом.

Рассмотрим пополняемую плоскость π как лежащую в трехмерном пространстве. Пусть точка O не принадлежит π и определяет связку. Каждой собственной точке π поставим в соответствие единственную прямую связки O, проходящую через нее. Каждой несобственной точке π, т.е. направлению или пучку на π, поставим в соответствие единственную прямую свзки, имеющую то же направление.

Очевидно, что при перспективном соответствии прямые переходят в плоскости и сохраняется отношение инцидентности. Поэтому прямые связки называют "точками а плоскости - "прямыми"данной модели проективной плоскости.

Определение. Если аффинное преобразование пространства оставляет центр связки на месте, то оно отображает прямые, проходящие через O, в некоторые другие прямые, проходящие через O. Возникающее таким образом отображение связки в себя называют *проективным.*

Кривая второго порядка на проективной плоскости определяется как однородное уравнение второго порядка в некоторой однородной системе координат:

$$q(x) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}(x_2)^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}(x_3)^2 = 0.$$

Очевидно, что при проективном преобразовании она перейдет в кривую второго порядка, и что определение корректно, т. е. не зависит от умножения тройки однородных координат на ненулевой множитель.

По той же теореме из линейной алгебры, которой мы пользовались, когда говорили о поверхностях, существует такая проективная замена координат, что в новой системе уравнение примет вид

$$q'(x') = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2 = 0.$$

В зависимости от знаков λ_i возможны пять случаев:

$\boxed{1}$ λ_1 и λ_2 одного знака, а λ_3 — противоположного, заменой базиса уравнение приводится к виду $(x''_1)^2 + (x''_2)^2 - (x''_3)^2 = 0$.

$\boxed{2}$ все λ_i одного знака, уравнение приводится к виду

$$(x''_1)^2 + (x''_2)^2 + (x''_3)^2 = 0.$$

$\boxed{3}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 разных знаков, тогда $(x''_1)^2 - (x''_2)^2 = 0$.

$\boxed{4}$ $\lambda_3 = 0$, а λ_1 и λ_2 одного знака, тогда $(x''_1)^2 + (x''_2)^2 = 0$.

$\boxed{5}$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тогда $(x''_1)^2 = 0$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.28. *Существует система однородных координат, в которой данная кривая второго порядка имеет один из следующих видов:*

$\boxed{1}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0$	(овал)
$\boxed{2}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$	(мнимый овал)
$\boxed{3}$	$(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0$	(пара различных прямых)
$\boxed{4}$	$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$	(пара мнимых прямых)
$\boxed{5}$	$(x_1)^2 = 0$	(пара совпавших прямых)

Теорема 9.29. *Существует ровно пять указанных классов эквивалентности кривых второго порядка относительно проективных преобразований.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы нужно только показать, что кривые из разных классов неэквивалентны. Это следует сразу из того, что прямые переходят в прямые и что ранг матрицы сохраняется. □

Замечание 9.30. Как мы уже видели, аффинное преобразование — это проективное, переводящее несобственную прямую в несобственную, и ограниченное на собственные точки. Таким образом, проективные классы могут содержать несколько аффинных. Именно, овал — это эллипс, гипербола и парабола, мнимый овал — мнимый эллипс, различные прямые — параллельные или пересекающиеся прямые, аналогично для мнимых. При этом эллипс — овал, не пересекающий несобственную прямую, гипербола — овал, пересекающий несобственную прямую, парабола — овал, касающийся несобственной прямой.