11.12.18. Мат. анализ. Лекция 28

Глава 4. Ряды Фурье

Параграф 1. Ряды Фурье по ортогональной системе функций

Пункт 1. Ортогональная система функций.

Пусть задана система непрерывных функций $\{\varphi_n \in C[a;b];\ n \in \mathbb{N}\}^{(1)}$, где $[a;b]$ – отрезок в $\mathbb{R}$.

Опр 1. Система функций (1) $\boxed{\text{ортогональна}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\varphi_n \not\equiv 0$ на $[a;b]$, $\forall n$

2) $\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(x)\,dx = 0$, при $m \neq k$

Напоминание: ① Скалярное произведение в пр-ве $C[a;b]$:

$$\boxed{(f;g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx}$$

– проверить аксиомы скал. произв.

② Скалярное произведение порождает норму:

$$\boxed{\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}}$$

← причём по этой норме, в отличие от $\|f\|_\infty$, пр-во $C[a;b]$ не полно.

Пример (ортогональной системы функций)

$$\boxed{\varphi_n(x) := \sin nx \quad \text{на } [-\pi;\pi];\ n \in \mathbb{N}}$$

Имеем для $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\,dx \underset{\text{ф-ия чётная}}{=} 2\int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\,dx = \int_0^{\pi}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Полезное отступление:

① Пусть $f \in C[a;b]$.

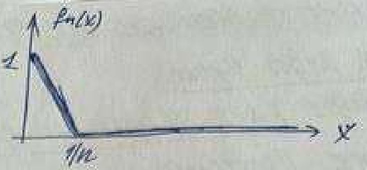
$$\boxed{\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \max_{[a;b]}|f_n - f| \\ \|f_n - f\|_2 &= \sqrt{\int_a^b (f_n - f)^2\,dx}\end{aligned}}$$

Тогда $\boxed{\|f_n - f\|_\infty \to 0 \ \underset{\text{в.2}}{\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}}\ \|f_n - f\|_2 \to 0}$

Действительно: ($\Rightarrow$) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow (f_n - f) \rightrightarrows 0$

А раз есть равном. сходимость, то в $\sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx}$ можно переходить к пределу под знаком интеграла и получить, что $\|f_n - f\|_2 \to 0$

например, $\boxed{f_n(x) = \begin{cases} -nx+1, & x\in[0;\frac{1}{n}] \\ 0, & x\in[\frac{1}{n};1] \end{cases}}$



имеем: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x=0 \\ 0, & \text{если } x\neq 0 \end{cases}$

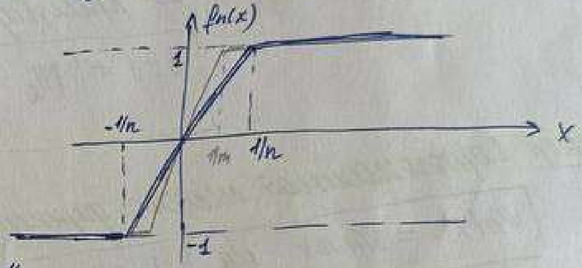
$$\|f_n(x)-0\|_2 = \sqrt{\int_0^{1/n} \underbrace{(1-nx)^2}_{\le 1} dx} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0. \Rightarrow f_n(x)\to 0 \text{ в норме } \|\cdot\|_2$$

но $f_n(0)=1\neq 0 \Rightarrow f_n(x)$ сходится, но к разрывной функции, поэтому равном[ерно не] сходится, т.е. сходится в $\|\cdot\|_\infty$ не мож[ет]

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$ не эквивалентно.

(2) пр-во $C[a;b]$ с $\|\cdot\|_2$ не является полным, т.е посл-ть функций может быть фундаментальной, а предела $\in C[a;b]$ по $\|\cdot\|_2$ нет (а $\|\cdot\|_\infty$-полное, см. л. ?

например, $\boxed{f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{если } |x|\le\frac{1}{n} \\ 1, & \text{если } x>1/n \\ -1, & \text{если } x<-\frac{1}{n} \end{cases}}$



1) Докажем, что она фундаментальная в $\|\cdot\|_2$

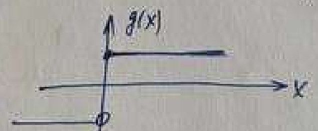
пусть $m>n$.

имеем: $\|f_m-f_n\|^2 = \int_{-1}^{1} |\underbrace{f_n(x)-f_m(x)}_{\le 1}|^2 dx \le 2\int_0^{1/n} dx = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall m>n$

$\Rightarrow \{f_n; n\in\mathbb{N}\}$ – фунд. посл-ть в $\|\cdot\|_2$.

2) предположим, что $\exists f\in C[a;b] \,/\, \|f_n-f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

пусть $\boxed{g(x) := \begin{cases} 1, & x\ge 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}}$



очевидно, что $g\notin C[-1;1]$, т.к. $g\notin C(0)$

$\Rightarrow f\not\equiv g$ на $[-1;1]$

$\Rightarrow f\not\equiv g$ на $[-1;0]$ либо $f\not\equiv g$ на $[0;1]$

пусть, для определённости, $f\not\equiv g$ на $[0;1]$.

Заметим, что • $\|g-f_n\|_2^2 \le 2\int_0^{1/n} 1\,dx \le \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (*)

• $\|g-f\|_2^2 \ge \int_0^1 \underbrace{|1-f(x)|^2}_{\in C[0;1],\text{ причём } \exists x_0\in[0;1] / f(x_0)\neq g(x_0)} dx =: \underline{\underline{C>0}}$

$\Rightarrow$ есть окр-ть, где $1-f(x)\neq 0$

С другой стороны,

$$\|g-f\|_2 \le \underbrace{\|g-f_n\|_2}_{\substack{\to 0 \\ \text{при } n\to+\infty, \\ \text{сх. } (*)}} + \underbrace{\|f_n-f\|_2}_{\substack{\to 0 \\ \text{по предположению}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \|g-f\|_2 = 0$, т.к. мы уже выяснили, что $\|g-f\|_2^2$ = константе.
но $0 \ne \sqrt{c} > 0$. Противоречие.

Опр 2. Ортогональная система (1) называется $\boxed{\text{ортонормальной}}$
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

Пример. (ортонормальной системы)

$$\boxed{\varphi_n(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}};\ n\in\mathbb{N} \text{ на } [-\pi;\pi]}$$

Мы уже проверяли, что она ортогональная.
Проверим, что она ортонормальная.
Имеем: $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_0^{\pi} = 1.$

Зам. Система $(\varphi_n;\ n\in\mathbb{N})$ ортогональна $\Rightarrow \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} := \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_2} = 1.$

Пункт 2. Ортогональность и лин. независимость функций.

Опр. Система $(\varphi_n,\ n\in\mathbb{N})$ $\boxed{\text{лин. независима}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\forall m\in\mathbb{N}$ из тождества $\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k = 0$ на $[a;b]$ следует, что $c_k = 0,\ \forall k\le m$.

Теорема. Система $(\varphi_n;\ n\in\mathbb{N})$ — ортогональная.
Тогда эта система лин. независима.

▶ Пусть $m\ge 2$ произвольно,
и пусть $\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k(x) = 0,\ \forall x\in[a;b]$ для некоторых постоянных c_k.
Хотим док-ть, что $c_k = 0,\ \forall k$.
Фиксируем произвольно $k\in\{1,\dots,m\}$.
Имеем: $0 = \sum_{l=1}^{m} c_l\cdot\int_a^b\varphi_l(x)\varphi_k(x)\,dx \underset{\substack{\text{все нули,} \\ \text{кроме одного,} \\ \text{т.к. сист. ортог.}}}{=} c_k\cdot\underbrace{\int_a^b\varphi_k^2(x)\,dx}_{>0, \text{ т.к. } \varphi_k(x) \text{ непрерывна и отлична от тожд. нуля по опр.}} \Rightarrow c_k = 0.$ ◀

Зам. $(\varphi_n;\ n\in\mathbb{N})$ лин. независима $\not\Rightarrow$ $(\varphi_n;\ n\in\mathbb{N})$ ортогональна.
Например, система $(1; x; x^2, \dots x^n, \dots)$, $x\in[0;1]$ — лин. независима,
т.к. полином имеет только m корней $\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} c_k x^k \not\equiv 0$ на $[a;b] \Rightarrow c_k = 0$,
но $\int_0^1 1\cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ne 0 \Rightarrow 1$ и x не ортогональны.

пункт 3. Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

$(\varphi_n; n\in\mathbb{N})$ — $\overset{\text{орт.}}{\text{система}}$, причём φ_n — непрерывна

f — функция, которую мы хотим разложить.

f — не непрерывна, но кусочно непрерывна.

опр 1. Функция $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ $\boxed{\text{кусочно непрерывна}}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

∃ разбиение $\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ такое что:

1) $f\in C((x_{i-1};x_i))$, $i=1\ldots n$
2) ∃ конечные пределы справа и слева в точках x_i; $i=0\ldots n$ (т.е. разрешён разрыв 1 рода)

пример (кусочно непрерывной функции):

$f(x)=[x]$

пусть $\{\varphi_1\ldots\varphi_n\}$ — ортогональная система функций на $[a;b]$;
f — кусочно-непрерывная функция на $[a;b]$.

опр 2. 1) числа $\boxed{c_n := \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx;\ n\in\mathbb{N}}$ называются $\boxed{\text{коэфф. Фурье}}$ для функции f.

2) Ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x);\ x\in[a;b]}$ называется $\boxed{\text{рядом Фурье}}$ для функции f.

(вообще это формальная сумма, т.е. ряд имеет право не сходиться)

Обозн. $\boxed{f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n}$ ← "равно" писать нельзя, т.к. это значит, что ряд сходится.

↑ явление рядом Фурье

Теорема 1 (Единственность разложения в ряд Фурье).

отсюда следует, что $f\in C[a;b]$, т.к. φ_n - непрер. и ряд сход. равн., поэтому непрер-ть f в условии требовать не надо.

$(\varphi_n; n\in\mathbb{N})$ — ортогональная система функций;
$f:[a;b]\to\mathbb{R}$; $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^*\cdot\varphi_n(x)$, причём сходимость ряда равномерная.
Тогда $c_n^*=c_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$.

▶ Фиксируем произвольно $k\in\mathbb{N}$.
Имеем:

$$\boxed{c_k}\overset{\text{обозн}}{=}\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx \overset{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^*\varphi_n(x)}{=} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{\infty}c_n^*\varphi_n(x)\Big)\varphi_k(x)\,dx \overset{\text{т.к. ряд сход. равном}}{=}$$

$$=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_a^b c_n^*\varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx\Big)}_{=\int_a^b c_k^*\varphi_k^2(x)\,dx,\ \text{т.к. система ортог}} = \frac{c_k^*}{\|\varphi_k\|^2}\cdot\int_a^b\varphi_k^2(x)\,dx=\boxed{c_k^*}$$ ◀

14.12.18. Мат. анализ. Лекция 29

Досрочный: 27.12 (четверг) 12.00; ауд. 15-05.

Теорема 2 (Н-во Бесселя)

$(\varphi_n;\ n\in\mathbb{N})$ – ортонормальная система на $[a;b]$

f – кусочно-непрерывная функция на $[a;b]$

$f\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$ (т.е. это её ряд Фурье)

Тогда $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2\leq\|f\|^2}$ (в частности, ряд из c_n^2 сходится, т.к. его частичные суммы ограничены)

▶ Пусть $S_k(x):=\sum\limits_{n=1}^{k}c_n\cdot\varphi_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье.

Пусть $j\leq k$.

Тогда
$$\int_a^b[f(x)-S_k(x)]\varphi_j(x)dx=\underbrace{\int_a^b f(x)\varphi_j(x)\,dx}_{=c_j}-\underbrace{\int_a^b S_k(x)\varphi_j(x)dx}_{=c_j}=0.$$

(вообще, надо еще на норму поделить, но она $=1$ т.к. система ортонорм)

(c_j, т.к. все остальные в сумме – нули, т.к. система ортогональна)

$$\Rightarrow\int_a^b[f(x)-S_k(x)]S_k(x)\,dx=0\quad(*)$$

Тогда
$$\|f\|^2=\int_a^b[f(x)]^2dx=\int_a^b[(f(x)-S_k(x))+S_k(x)]^2dx=$$
$$=\int_a^b[f(x)-S_k(x)]^2dx+2\underbrace{\int_a^b[f(x)-S_k(x)]S_k(x)\,dx}_{=0;\ \text{см}(*)}+\underbrace{\int_a^b S_k^2(x)\,dx}_{=\int_a^b\left(\sum\limits_{n=1}^{k}c_n\varphi_n\right)^2dx=\int_a^b\sum\limits_{n=1}^{k}c_n^2\cdot\varphi_n^2\,dx=\sum\limits_{n=1}^{k}c_n^2}$$

(система ортонорм.)

$$\Rightarrow\|f\|^2=\int_a^b[f(x)-S_k(x)]^2dx+\sum_{n=1}^{k}c_n^2$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{k}c_n^2\leq\|f\|^2,\ \forall k.$$

$\Rightarrow$ част. суммы ограничены, потому ряд сходится; переходим к $\lim\limits_{k\to+\infty}$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\leq\|f\|^2.$$ ◀

Следствия (1) Мы доказали, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2$ – сходится $\Rightarrow c_n\to0$, при $n\to+\infty$

(т.е. ряд Фурье может не сходиться, а коэф. всё равно $\to0$).

(2) Рассмотрим **произвольный** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$, где $(\varphi_n;\ n\in\mathbb{N})$ – ортонорм. систем[а]

! Но $\cancel{\overset{в.2}{\exists}}$ $\exists$ кусочно-непрерывная $f:[a;b]\to\mathbb{R}\ /\ f\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$

[а если есть кус-непрер. функция и ортонорм. система, то ряд Фурье автоматически есть (правда, формальный). А наоборот – нет].

А для степ. рядов: для $f\in C^\infty$ сразу есть ряд, и внутри интервала сходимости ряд сход. равном. к своей сумме]

А наобро[т] для вс[ех] ряда $\exists$…

например, для ряда $\boxed{\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}};\ x\in[-\pi;\pi]}$ функции нету.

От противного: пусть $\exists$ кус-непрер. $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}\ /\ \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ — её ряд Фурье.

Тогда по н-ву Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ сходится бы. но он не расходится.

Зам. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}};\ x\in[-\pi;\pi]$ сход. равном на $[-\pi+\xi;\pi-\xi]\ \forall\xi\in;\ \xi_2$ по по Дирихле

А как получить, что нет равном. сход $[-\pi;\pi]$?

От противного. пусть он сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$.

Тогда его сумма $f(x)$ является непрер. функцией на $[-\pi;\pi]$.

$\Rightarrow\ \exists$ кус-непрер. функция, а именно $f(x)$, у которой $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — коэф. ряда Фурье.

но мы же доказали, что так не бывает.

Параграф 2. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.

Пункт 1. Тригонометрические ряды Фурье.

Рассм. систему функций $\{1;\cos x;\sin x\dots\cos nx;\sin nx\dots\};\ x\in[-\pi;\pi]$ (1)

Докажем, что система (1) — ортогональная система.

В самом деле:

- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}((-1)^n-(-1)^n)=0.$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin kx\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}(\cos(n-k)-\cos(n+k))\,dx=0,\ \underline{n\neq k}$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}(\cos(n-k)+\cos(n+k))\,dx=0,\ \underline{n\neq k}$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin kx=0,\ \forall n,k$, т.к. $\cos nx\cdot\sin kx$ — нечётная функция.

Эта система ортогональная, но не ортонормальная. Посчитаем нормы.

- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\pi$
- $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx=\int\limits_{0}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx=\pi.$

Определим, какие коэф. Фурье по этой системе.
Пусть $f: [-\pi;\pi] \to \mathbb{R}$; f - кус. непрерывна на $[-\pi;\pi]$.
Её **коэф. Фурье** имеют вид:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}$$

А ряд Фурье для f имеет вид $\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2}\cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)}$ ← ряд имеет право не сходиться.

! Фурье считал, что любая непрер. функция может быть разложена в ряд Фурье. Но оказалось, что это **неправда**, т.к. есть непрер. функции, которые не удовлетворяют условию Дини.

Зам. f чётная $\Rightarrow b_n = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ (т.е. останутся только косинусы)

f нечётная $\Rightarrow a_n = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (т.е. останутся только синусы и $\frac{a_0}{2}$).

Пункт 2. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке.

Опр 1. $f: [a;b] \to \mathbb{R}$; $\alpha > 0$

Тогда **f удовлетворяет $\boxed{\text{условию Гёльдера}}$** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists C > 0\ \exists \alpha > 0 \ / \ |f(x_1) - f(x_2)| \le C|x_1 - x_2|^{\alpha},\ \forall x_1; x_2 \in [a;b]$.

Обозн. $f \in H^{\alpha}[a;b]$.

Зам. 1. **$f \in H^{\alpha}[a;b] \Rightarrow f$ равном. непрерывна на $[a;b]$**

Действительно: хотим: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ / \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,\ \forall x_1; x_2$ с усл. $|x_1 - x_2| < \delta$.

но $|f(x_1) - f(x_2)| \le C|x_1 - x_2|^{\alpha} < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - x_2| < \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{C}} \Rightarrow$ подойдёт $\delta := \frac{1}{2}\sqrt[\alpha]{\varepsilon/C}$

2. **$f \in H^{\alpha}[a;b]$; $\alpha > 1 \Rightarrow f \equiv \mathrm{const}$ на $[a;b]$.**

Действительно: пусть $\alpha > 1$.

Тогда $\left|\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right| \le \frac{C\cdot|\Delta x|^{\alpha}}{|\Delta x|} = C\cdot|\Delta x|^{\alpha - 1} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$, т.к. $\alpha - 1 > 0$.

$\Rightarrow \exists f' \equiv 0$ на $[a;b] \Rightarrow f \equiv \mathrm{const}$ на $[a;b]$.

3. **$f \in Lip[a;b]$** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f удовлетворяет условию Гёльдера с $\alpha = 1$.

Примеры 1. $\boxed{\begin{array}{l} f = |x|;\ x\in\mathbb{R}. \\ \text{Тогда } f \in Lip(\mathbb{R}) \end{array}}$, т.к. $|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \le |x_1 - x_2|$

(2) $\boxed{f(x) = |x|^\alpha \; ; 0<\alpha<1 \; | \; x \in [-1;1]. \quad \text{Тогда } f \in H^\alpha[-1;1].}$

← внутр. производная $=\infty$.

Действительно: не ограничивая общности, $0 \le x_1 < x_2$.

а) $|x_2 - x_1| < x_1$; $x_1 > 0$

б) $|x_2 - x_1| \geq x_1$.

а) $|x_2 - x_1| < x_1$.

Тогда $|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2^\alpha - x_1^\alpha| \overset{\text{т.к. } f \in C[0;1] \text{ и } \exists f' \text{ на } (0;1)}{\underset{\text{т. Лагранжа}}{=}} \left| \dfrac{\alpha \cdot |x_2 - x_1|}{[x_1 + \theta(x_2 - x_1)]^{1-\alpha}} \right|_{\theta \in (0;1)} \le \dfrac{\alpha \, |x_2 - x_1|}{x_1^{1-\alpha}} \le$

$\le \alpha |x_2 - x_1|^\alpha \cdot \dfrac{|x_2 - x_1|^{1-\alpha}}{x_1^{1-\alpha}} \le \alpha (x_2 - x_1)^\alpha$

б) $|x_2 - x_1| \geq x_1$.

Имеем: $f(x_2) - f(x_1) = x_2^\alpha - x_1^\alpha \le x_2^\alpha = [\underbrace{x_1}_{\le |x_2 - x_1|} + (x_2 - x_1)]^\alpha \le \big(2(x_2 - x_1)\big)^\alpha = 2^\alpha \cdot (x_2 - x_1)^\alpha.$

! **Опр2.** Пусть f — кус.-непрер. функция;

$f: [a;b] \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \in [a;b]$

Тогда **f удовлетворяет в точке x $\boxed{\text{условию Дини}}$**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\exists f(x+0)$ и $\exists f(x-0)$, т.е. $\exists$ конечные пределы $\lim\limits_{y \to x^-} f(x)$ и $\lim\limits_{y \to x^+} f(x)$;

(но если $x = a$ или $x = b$, то только один из них)

2) $\exists \varepsilon_1 > 0$ и $\exists \varepsilon_2 > 0$: $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_1} \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} dt$ — сход.

и $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_2} \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t} dt$ — сход.

} из-за нуля эти интегралы несобственные / могут быть

! **Бывают непрерывные функции, которые не удовлетворяют условию Дини.**

Примеры. (0) **$f \in Lip[a;b] \Rightarrow f$ удовл. условию Дини.**

Действительно: $|f(x+t) - f(x+0)| \le C \cdot t$, а $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_1} \frac{C \cdot t}{t} dt = \int_0^{\varepsilon_1} C dt$ — сход.

(1) **$f \in H^\alpha[a;b] \Rightarrow f$ удовл. условию Дини $\forall x \in [a;b]$,**

т.к. $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_1} \frac{t^\alpha}{t} dt = \int_0^{\varepsilon_1} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ — несобств., но сход., т.к. $1 - \alpha < 1$, $\alpha > 0$.

(2) **Если f и $f': [a;b] \to \mathbb{R}$ — кусочно непрерывны, то f удовл. условию Дини $\forall x \in [a;b]$.**

Действительно: пусть $x_0 \in [a;b]$ произвольно.

Тогда $\exists \varepsilon > 0$: $\underset{\text{продолженная по непрер-ти } f}{\bar{f}} \in C[x_0; x_0 + \varepsilon]$, где $\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) \; ; \; x \in (x_0; x_0 + \varepsilon] \\ f(x_0 + 0) \; ; \; x = x_0 \end{cases}$

и $\overline{f'} \in C[x_0; x_0+\varepsilon]$, где $\overline{f'} = \begin{cases} f'(x); & x \in (x_0; x_0+\varepsilon] \\ f'(x_0+0); & x = x_0. \end{cases}$

но раз $\overline{f'}$ непрерывна, то она ограничена, т.е. $\overline{f'} \in B[x_0; x_0+\varepsilon]$

Но если производная ограничена, а сама функция непрерывна, то она липшицева. (франц. т. Лагранжа)

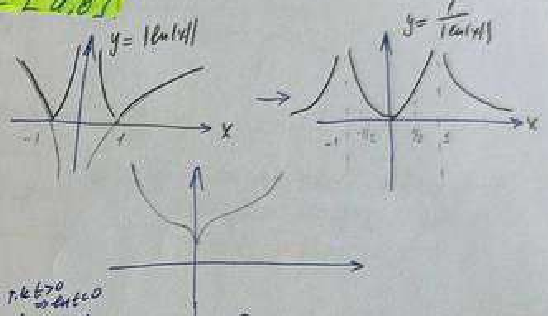
$\Rightarrow \overline{f} \in Lip[x_0; x_0+\varepsilon]$.

$$\Rightarrow \int_0^{\varepsilon_1} \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t}\,dt = \int_0^{\varepsilon_1} \frac{|\overline{f}(x+t) - \overline{f}(x+0)|}{t}\,dt \text{ — сход., т.к. } \overline{f} \in Lip[x_0; x_0+\varepsilon].$$

$\Rightarrow$ выполнено условие Дини справа. Аналогично слева.

3) $f \in C[a;b] \overset{\text{в.2}}{\not\Rightarrow} f$ удовл. условию Дини $\forall x \in [a;b]$.

например, $\boxed{f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|\ln|x||}, & 0 < |x| \le 1/2 \\ 0, & x = 0 \end{cases}}$



Тогда f определена и непрерывна на $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Но она не Дини в $x_0 = 0$ (слишком клюв)

Действительно: $$\int_{\delta>0}^{\varepsilon} \frac{f(0+t) - f(0)}{t}\,dt = \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{1}{|\ln|t||\cdot t}\,dt \overset{\text{т.к. } t>0,\ \ln t<0}{=} -\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{dt}{t\ln t} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{d(\ln t)}{\ln t} =$$

$= \ln\ln\varepsilon - \ln\ln\delta \to +\infty$ (ну $\int_0^{\varepsilon} \frac{dy}{y}$ - расход.)

$\Rightarrow \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t|\ln t|}$ расход. $\Rightarrow f$ не удовл. условию Дини в точке $x_0 = 0$.

4) $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{|\ln x|^{\alpha}}}$ тогда $0 < \alpha \le 1$ - не удовл. усл. Дини

$\alpha > 1$ - удовл. усл. Дини.

18.12.18. мат. анализ. Лекция 30.

Лемма 1. Пусть $A_k(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos kx$

Тогда $\boxed{A_k(x) = \dfrac{\sin\frac{(2k+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}}$; $-\pi \leq x \leq \pi$ (а $A_k(0) = \frac{2k+1}{2}$). (1)

▶ Имеем: $A_k(x) \cdot 2\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} + 2\cos x \cdot \sin\frac{x}{2} + \ldots + 2\cos kx \cdot \sin\frac{x}{2} =$

$= \sin\frac{x}{2} + [\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}] + \ldots + [\sin\frac{(2k+1)}{2}x - \sin\frac{(2k-1)x}{2}] = \frac{\sin(2k+1)x}{2}$ ◀

Опр. Ядро Дирихле: $\boxed{D_k(x) := \frac{1}{\pi}\, \dfrac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}}$; $x \in [-\pi;\pi]$; $k \in \mathbb{N}^*$ (а $D_k(0) = \frac{2k+1}{2\pi}$).

Зам. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f – кусочно-непрерывна $\forall x \in [a;b]$,

тогда $\forall x \in [a;b]$ $\exists f(x+0) \in \mathbb{R}$ и $\exists f(x-0) \in \mathbb{R}$ (может быть, $f(x+0) = f(x)$, если f непрерывна)

Тогда точка $x \in [a;b]$ – $\boxed{\text{регулярная}}$ $\overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Примеры: 1. f непрерывна $\Rightarrow$ все точки регулярные

2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ – разрывен в нуле, но все точки регулярные.

Лемма 2 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f – кусочно-непрерывна на $[-\pi;\pi]$, f – 2π-периодическая.

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; $x \in [-\pi;\pi]$. (где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$)

$S_k(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Тогда $\boxed{S_k(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \int_0^{\pi}[f(x-t)-f(x-0)]D_k(t)\,dt + \int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]D_k(t)\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ (2)

▶ Предварительно заметим, что $\int_0^{\pi} D_k(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. (3)

Аналогично, $\int_{-\pi}^{0} D_k(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

Имеем: $S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(\cos nx \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt + \sin nx \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right) =$

$= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 1 + \sum_{n=1}^{k}[\underbrace{\cos nt \cdot \cos nx + \sin nt \cdot \sin nx}_{=\cos n(t-x)}]\right\}dt \overset{\text{см.(1)}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(t-x)\,dt \overset{\text{т.к. } f \text{ - } 2\pi\text{-периодич, то интегр… не измен…}}{=}$

$\underset{\substack{\text{замена: } t-x=z \\ dt = dz}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_k(z)\,dz = \int_{-\pi}^{0} f(x+z)D_k(z)\,dz + \int_0^{\pi} f(x+z)D_k(z)\,dz$

$\Rightarrow S_k(x) - \frac{f(x-0)}{2} - \frac{f(x+0)}{2} \overset{\text{см.(3)}}{=} \underbrace{\int_{-\pi}^{0}[f(x+z) - f(x-0)]D_k(z)\,dz}_{\text{замена } \tilde{z} := -z \text{ дает } \int_0^{\pi}[f(x-\tilde{z})-f(x-0)]D_k(\tilde{z})\,d\tilde{z}} + \int_0^{\pi}[f(x+z)-f(x+0)]D_k(z)\,dz$ ◀

Лемма 3. Пусть $\varphi: [a;b] \to \mathbb{R}$; φ - кусочно-непрерывна на $[a;b]$.

Тогда $\boxed{\int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \longrightarrow 0, \text{ при } \lambda \to +\infty \ (\forall)}$

▶ ① Пусть $\varphi \in C^1[a;b]$.

Тогда интегрируем по частям:

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx = -\frac{1}{\lambda}\int_a^b \varphi(x)\, d(\cos \lambda x) = -\frac{\varphi(x)\cos\lambda x}{\lambda}\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos \lambda x}{\lambda} dx$$

но φ и $\varphi' \in C[a;b]$

$\Rightarrow \exists M>0 \ / \ |\varphi(x)|$ и $|\varphi'(x)| \le M, \ \forall x \in [a;b]$.

$$\Rightarrow \left|\int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx\right| \le \frac{2M}{\lambda} + \frac{M(b-a)}{\lambda} = \frac{const}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

② Пусть $\varphi \in C[a;b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

Тогда $\exists \ \varphi_\varepsilon \in C^1[a;b] \ / \ \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

(например, многочлен (он $\exists$ по теореме Вейерштрасса) он $\in C^\infty \Rightarrow \in C^1$.)

Но, по пункту 1, $\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin\lambda x \, dx \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \ \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin \lambda x \, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall \lambda > N.$$

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \ /$

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \sin\lambda x\, dx\right| \le \underbrace{\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx}_{\le \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} + \underbrace{\left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin \lambda x \, dx\right|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon.$$

③ Пусть φ - кусочно-непрерывна на $[a;b]$ $\quad$ $x_0 = a, \ x_1, \ \dots, \ x_n = b$

Положим $\varphi_i(x) := \begin{cases} \varphi(x); & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi(x_{i-1}+0); & x = x_{i-1} \\ \varphi(x_i - 0); & x = x_i \end{cases} \quad i = 1 \dots n$

Имеем: $\varphi_i \in C[x_{i-1}; x_i]$

$$\Rightarrow \text{по пункту 2} \quad \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx = \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \sin \lambda x\, dx}_{\to 0 \text{ при } \lambda \to +\infty} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0 \quad ◀$$

т.к. конечное число слагаемых

интеграл Римана не заменит, если поменять значения в конечном числе точек

Теорема (достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке).

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1) f – 2π периодическая
2) f – кусочно-непрерывна
3) f удовлетворяет условию Дини в точке $x \in \mathbb{R}$ (например, достаточно, чтобы f и f' были кусочно-непрерывны)

Тогда ряд Фурье функции f в точке x $\boxed{\text{сходится к } \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}}$ (т.е. его сумма в этой точке = этому)

▶ По лемме 2: $S_k(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \underbrace{\int_0^\pi [f(x-z)-f(x-0)] D_k(z)\,dz}_{=:I_1} + \underbrace{\int_0^\pi [f(x+z)-f(x+0)] D_k(z)\,dz}_{=:I_2}$

Хотим: $I_1 + I_2 \to 0$ при $k \to +\infty$.

1) Рассмотрим I_1.

$$I_1(x) = \int_0^\pi \underbrace{\overbrace{\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z} \cdot \frac{z}{\pi \cdot 2\sin\frac{z}{2}}}^{=:\varphi(z)} \cdot \sin\frac{(2k+1)z}{2}}_{=:g_k(z)}\,dz$$

Пусть $\varepsilon > 0$.

Имеем: а) $|g_k(z)| \le \left|\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z}\right| \cdot \frac{const}{\pi}$, $\forall z \in [-\pi;\pi] \setminus \{0\}$,

а мы знаем, что $\int_0^\pi \frac{|f(x-z)-f(x-0)|}{z} dz$ сходится – это условие Дини.

$\Rightarrow \int_0^\pi |g_k(z)|\,dz$ сходится

$\Rightarrow \exists\ \underset{\text{не зависит от } k}{\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ (<\pi)}\ /\ \underbrace{\int_0^\delta |g_k(z)|\,dz}_{\text{хвост несобств. интеграла}} < \frac{\varepsilon}{2},\ \underline{\underline{\forall k}}$

б) Рассмотрим $\int_\delta^\pi g_k(z)\,dz = \int_\delta^\pi \underbrace{\varphi(z)}_{\text{кус-непрер. на } [\delta;\pi]} \cdot \sin\frac{2k+1}{2}z\,dz$

$\Rightarrow$ по лемме 3 для $\begin{matrix} a := \delta \\ b := \pi \end{matrix}$ получаем: $\int_\delta^\pi \varphi(z) \sin\frac{2k+1}{2}z\,dz \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \exists N = N(\delta)\ /\ \left|\int_\delta^\pi \varphi(z) \sin\frac{2k+1}{2}z\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall k > N.$

Витоге, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\delta) \in \mathbb{N}\ /\ |I_1| \le \left|\int_0^\delta g_k(z)\,dz\right| + \left|\int_\delta^\pi g_k(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ ◀

2) I_2 рассматривается аналогично.

Пример. (график суммы ряда Фурье)

$f(x) = x$ на $[-\pi;\pi]$ – разложить в ряд и построить график суммы этого ряда.

x = ряд ; $x \in (-\pi;\pi)$

А в точках $x = \pm\pi$ сумма ряда = полусумме периодически продолженной с $[-\pi;\pi]$ функции $= 0$.