16.09.21. Белоладжи. ДЗ 1.

1.8 (4,5) Ввести лагр. коорд., найти закон движения среды, линии тока и траект.

а) $\begin{cases} v_1 = \dfrac{Q(t)\,x_1}{2\pi r^2} \\ v_2 = \dfrac{Q(t)\,x_2}{2\pi r^2} \\ v_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \xi_3 \end{cases}$ $\quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\quad Q(t) > 0$.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{Q(t)\,x_1}{2\pi(x_1^2+x_2^2)} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{Q(t)\,x_2}{2\pi(x_1^2+x_2^2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_1}{x_1} \Rightarrow x_2 = C\cdot x_1$$

Траектория

но при $t=0$: $\xi_2 = C\cdot\xi_1 \Rightarrow C = \dfrac{\xi_2}{\xi_1} \Rightarrow$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}\,x_1 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{Q(t)\,x_1}{2\pi(x_1^2+x_2^2)} = \frac{Q(t)\,x_1}{2\pi\left(x_1^2 + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2 x_1^2\right)} = \frac{Q(t)}{2\pi x_1\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow x_1\,dx_1 = \frac{Q(t)\,dt}{2\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow x_1^2(t) = \frac{2\int_0^t Q(s)\,ds}{2\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2\right)} + C_1, \quad \text{при } t=0:\ \xi_1^2 = C_1 \Rightarrow C_1 = \xi_1^2 \Rightarrow \boxed{x_1^2(t) = \frac{\int_0^t Q(s)\,ds}{\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2\right)} + \xi_1^2}$$

$$\boxed{x_2^2 = \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2 x_1^2 = \frac{\int_0^t Q(s)\,ds}{\pi\left(1+\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2\right)} + \xi_2^2} \qquad \boxed{x_3 = \xi_3}$$

закон движения

линии тока: $x_2 = C\cdot x_1$

$x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}x_1$ — нет, тут C! т.к. $x_2(t) \neq \xi_2$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\lambda} = \dfrac{Q(t)\,x_1}{2\pi(x_1^2+x_2^2)} \\ \dfrac{dx_2}{d\lambda} = \dfrac{Q(t)\,x_2}{2\pi(x_1^2+x_2^2)} \\ \dfrac{dx_3}{0} = d\lambda \Rightarrow dx_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \xi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\lambda} = \dfrac{Q(t)}{2\pi x_1(1+C^2)} \\ \dfrac{dx_2}{d\lambda} = \dfrac{Q(t)}{\frac{1}{C^2}\cdot 2\pi x_2(1+C^2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{Q(t)}{(1+C^2)}\lambda + C_1 \\ x_2^2 = C^2 x_1^2 = \dfrac{C^2 Q(t)\,\lambda}{\pi(1+C^2)} + C^2 C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - C_1 = \dfrac{Q(t)}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(1+C^2)}\lambda \\ x_2^2 - C^2 C_1 = \dfrac{Q(t)}{\pi}\cdot\dfrac{C^2}{(1+C^2)}\cdot\lambda \end{cases}$$

варьируем λ и исключаем

$$\Rightarrow \frac{x_1^2 - C_1}{x_2^2 - C_1 C^2} = \frac{1}{C^2} \Downarrow$$

$$x_2^2 - C_1 C^2 = C^2 x_1^2 - C^2 C_1$$

$$\Rightarrow x_2 = C x_1$$

линии тока — это прямая!

Ответ: Траектории: $\begin{cases} x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}x_1 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$

закон движ.: $\begin{cases} x_1^2 = \dfrac{\int_0^t Q(s)\,ds}{\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2\right)} + \xi_1^2 \\ x_2^2 = \dfrac{\int_0^t Q(s)\,ds}{\pi\left(1+\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2\right)} + \xi_2^2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$

линии тока: $\begin{cases} x_2 = C x_1 \\ x_3 = C_2 \end{cases}$

(18б) $v_i = \dfrac{Q(t)\,x_i}{4\pi R^3}$; $i=1,2,3$; $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

$\Rightarrow \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = C\cdot x_1$ но при $t=0$: $\xi_2 = C\cdot\xi_1 \Rightarrow C = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}x_1 \\ x_3 = \dfrac{\xi_3}{\xi_1}x_1 \end{cases}$ – траектория.

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{Q(t)\,x_1}{4\pi\left(x_1^2+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2x_1^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2x_1^2\right)} = \frac{Q(t)}{4\pi x_1\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow x_1\,dx_1 = \frac{Q(t)\,dt}{4\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow x_1^2 = \frac{\int_0^t Q(s)\,ds}{2\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)} + C_1,\quad C_1=\xi_1^2.$$

$$\Rightarrow x_2^2 = \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2\cdot x_1^2 = \frac{\int_0^t Q(s)\,ds}{2\pi\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2+1+\left(\frac{\xi_3}{\xi_2}\right)^2\right)} + \xi_2^2$$ – закон движения.

$$x_3^2 = \left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2 x_1^2 = \frac{\int_0^t Q(s)\,ds}{2\pi\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}\right)^2+\left(\frac{\xi_2}{\xi_3}\right)^2+1\right)} + \xi_3^2$$

линии тока: $x_1\,dx_1 = \dfrac{Q(t)\,d\lambda}{4\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)}$ $\Bigg\} \Rightarrow \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}x_1.$

$$dx_2 = \frac{Q(t)\,d\lambda\,x_2}{x_1^2\cdot 4\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)} = \frac{Q(t)\,d\lambda\,x_2}{\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2\cdot x_2^2\cdot 4\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{Q(t)\lambda}{2\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)} + C_1 \\ x_2^2 = \dfrac{Q(t)\lambda}{\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2\cdot 2\pi\left(1+\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2+\left(\frac{\xi_3}{\xi_1}\right)^2\right)} + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2-C_1}{x_2^2-C_2} = \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 \Rightarrow x_1^2 = \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}x_2\right)^2 + C_1 - \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 C_2$$ – линии тока

~~[illegible]~~ прямые!

Опять почему-то сбились. И куда делись C_1 и C_2? И надо выражать через ξ_1 и ξ_2?

(1.11) **Найти линии тока и траектории.**

а) $\begin{cases} v_1 = -\omega x_2 \\ v_2 = \omega x_1 \quad u = const \\ v_3 = u \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\omega x_2 \Rightarrow \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega^2 x_1 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow x_1 = c_1\cos\omega t + c_2 \sin\omega t. \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \omega x_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = \omega c_1 \cos\omega t + \omega c_2 \sin\omega t. \end{cases}$

$\Rightarrow x_2 = -c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t + C$ ещё? Вообще да, но как ее находить?

$C = 0$, т.к. $\dot{x}_1 = -\omega x_2$

но при $t=0$? $\begin{cases} \xi_1 = c_1 \\ \xi_2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \xi_1 \cos\omega t + \xi_2 \sin\omega t \\ x_2 = -\xi_1 \sin\omega t + \xi_2 \cos\omega t \\ x_3 = ut + \xi_3 \end{cases}$ — траектории — спирали.

Линии тока: — вообще они должны ~~совпасть с траекториями~~, т.к. движение установившееся

$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{-\omega x_2} = d\lambda \\ \dfrac{dx_2}{\omega x_1} = d\lambda \\ \dfrac{dx_3}{u} = d\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{-\omega x_2} = \lambda + c_1 \\ \dfrac{x_2}{\omega x_1} = \lambda + c_2 \\ x_3 = u\lambda + c_3 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{x_1}{-\omega x_2} - c_1}{\dfrac{x_2}{\omega x_1} - c_2} = 1 \Rightarrow$

$-\omega x_1^2 - c_1 \omega^2 x_1 x_2 = \omega x_2^2 - c_2 \omega^2 x_1 x_2$

линии тока —

Тут 2 константы а тут одна? И что делать с константой?

Вопрос: а почему если поделить, т.е. $\dfrac{dx_1}{-\omega x_2} = \dfrac{dx_2}{\omega x_1}$,

то будет $\omega x_1^2 = -\omega x_2^2 + C$, т.е. $\begin{cases} x_1^2 = -x_2^2 + \tilde{C}\,? \\ x_3 = \lambda u + c_3 \end{cases}$ — окр-ть } спираль

б) $\begin{cases} v_1 = -Ax_2 \\ v_2 = Bx_1 \\ v_3 = 0 \end{cases}$ $\quad A = const > 0$, $\quad B = const > 0$

Траект: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -Ax_2 \\ \dot{x}_2 = Bx_1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x}_1 = -ABx_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \overset{\xi_1}{c_1} \cos\sqrt{AB}\,t + \overset{(\xi_2)}{c_2} \sin\sqrt{AB}\,t \\ x_2 = -\dfrac{\dot{x}_1}{A} = c_1\sqrt{\dfrac{B}{A}} \sin\sqrt{AB}\,t - c_2\sqrt{\dfrac{B}{A}}\cos\sqrt{AB}\,t \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$ — траектории.

Линии тока: $\dfrac{dx_1}{-Ax_2} = \dfrac{dx_2}{Bx_1} = \dfrac{dx_3}{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Bx_1^2}{2} = -\dfrac{Ax_2^2}{2} + C_1 \\ x_3 = C_3 \end{cases}$ — это эллипс.

в) $\begin{cases} v_1 = -V\sin\omega t \\ v_2 = V\cos\omega t \\ v_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \omega, V = const$

Траект: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -V\sin\omega t \\ \dot{x}_2 = V\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{V}{\omega}\cos\omega t + \underset{\xi_1 - \frac{V}{\omega}}{C_1} \\ x_2 = \dfrac{V}{\omega}\sin\omega t + C_2 = \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$ ~~$x_2 - c_2 = -\mathrm{tg}\,\omega t\,(x_1 - c_1)$~~ $\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{V}{\omega}\cos\omega t + \left(\xi_1 - \dfrac{V}{\omega}\right) \\ x_2(t) = \dfrac{V}{\omega}\sin\omega t + \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$ — Траект.

Линии тока: $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\mathrm{ctg}\,\omega t = const \Rightarrow$ это прямая! Но почему-то опять 2 константы :(

Другой способ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\lambda} = -V\sin\omega t \\ \dfrac{dx_2}{d\lambda} = V\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -V\lambda\sin\omega t + c_1 \\ x_2 = V\lambda\cos\omega t + c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2 - c_2}{x_1 - c_1} = -\operatorname{ctg}\omega t$$ – прямые!

но что за константы?

1.19 а)
$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 \\ x_2 = \xi_2\left(1+\frac{t}{\tau}\right) \\ x_3 = \xi_3 \cdot \dfrac{1}{1+\frac{t}{\tau}} \end{cases} ; \quad \tau = \text{const}$$

а) найти поля скорости и ускорения.

Решение: $\bar{v}(\xi,t) = \dfrac{d\bar{x}(\xi,t)}{dt} = \left(0;\ \dfrac{\xi_2}{\tau};\ \xi_3\cdot\left(\dfrac{-1}{\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\tau}\right)\right) = \left(0;\ \dfrac{\xi_2}{\tau};\ -\xi_3\cdot\dfrac{\tau}{\tau^2+t^2}\right)$

$\bar{a}(\xi,t) = \dfrac{d\bar{v}(\xi,t)}{dt} = \left(0;0;\ -\xi_3\cdot\tau\cdot\left(\dfrac{-1}{\tau^2+t^2}\right)\cdot 2t\right) = \left(0;0;\ \dfrac{2t\tau\xi_3}{\tau^2+t^2}\right).$