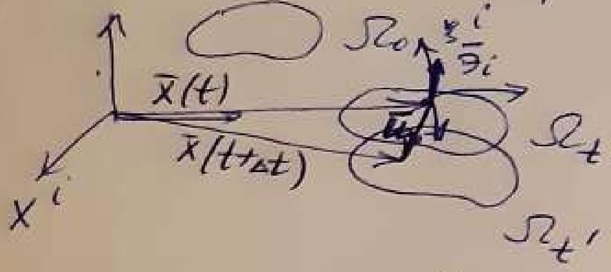
Тензор скорости деформации



$t' = t + \Delta t$

(1) $\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(g_{ij} - \mathring{g}_{ij})$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \tfrac{1}{2}(g_{ij}(t) - \mathring{g}_{ij}) \\ \varepsilon_{ij}(t+\Delta t) &= \tfrac{1}{2}(g_{ij}(t+\Delta t) - \mathring{g}_{ij}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

(2) $\Delta\varepsilon_{ij} := \varepsilon_{ij}(t+\Delta t) - \varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2}(g_{ij}(t+\Delta t) - g_{ij}(t))$

Вектор перемещения за время Δt:

(3) $\bar{u} = u^i \bar{э}_i = v_i \Delta t \cdot \bar{э}_i \Rightarrow$

(4) $\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k)$

Def $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \overset{(3)(4)}{=} \boxed{\frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) =: v_{ij}}$ — т-р скорости деформации

$\boxed{\omega_{ij} := \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j u_i)}$ — т-р вихря

$\boxed{\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v}}$ — в-р вихря (угловая скорость ω рассматриваемого бес. малого объема, как абс. тв. тела)

Распределение скоростей в малом объеме сп. ср, выраженное через тензор v_{ij} и в-р вихря $\bar{\omega}$:

$$\boxed{\bar{v}(x) = \bar{v}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\bar{e}_i + \bar{\omega} \times \bar{x} + \underline{o}(|\bar{x}|^2)}$$

ф-ла Коши-Гельмгольца [Седов МСС, т. II, §7] т. I

$\Phi(\bar{x}) := \frac{1}{2} v_{ij} x_i x_j$

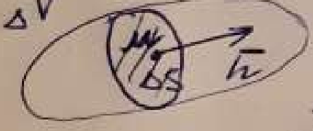
$O \xrightarrow{\bar{x}} O'$

N4.30 (э) б)

Геом. смысл компонент тенз. скорости деф-ции

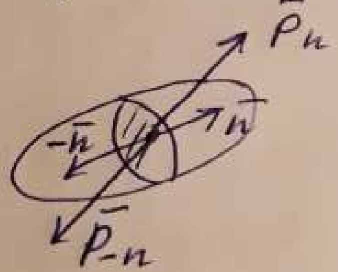
Тензор напряжений

(1) Выделим малый объем ΔV вокруг т. M
Рассмотрим площадку с нормалью $\bar n$, проходящую через т. M спл. среды.



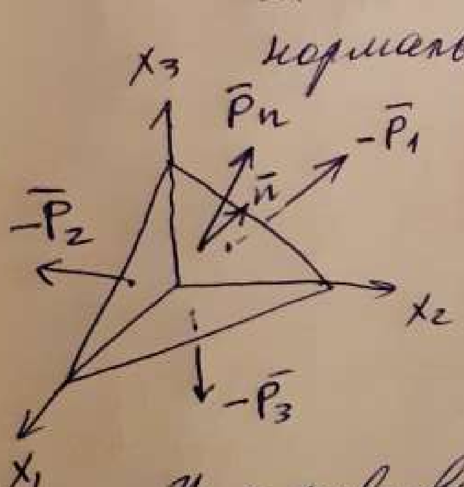
Со стороны окружающей среды (внешней по отношению к направлению нормали) на площадку ΔS действует сила $\Delta \bar f$.

Def $\boxed{\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \bar f}{\Delta S}=\bar P_n}$ вектор напряжения в данной точке тела M на площадке с нормалью $\bar n$

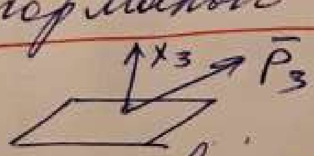


На площадке с нормалью $-\bar n$ действ-т ~~сила~~ в-р напряж-я $\bar P_{-n}$
III з-н Ньютона $\Rightarrow \boxed{\bar P_{-n}=-\bar P_n}$

(2) Рассмотрим коорд-й тетраэдр, построенный на осях ДСК с наклонной гранью с нормалью $\bar n$.



Вектор напряж-я на площадке с нормалью $\bar n=\bar e_i$ обозн. $\bar P_i$



Какие в-ры напряж-я действ-т на гранях тетраэдра? ($\bar n_i=-\bar e_i$)

Ур-е равновесия тетраэдра под действ. массовых сил $\bar F$ и напряжений:

(5) $\bar F\rho dV+\bar P_n dS-\bar P_1 dS_1-\bar P_2 dS_2-\bar P_3 dS_3=0$

(5') $(\rho \bar f h+\bar P_n-\bar P_1 n_1-\bar P_2 n_2-\bar P_3 n_3)\cancel{dS}=0$

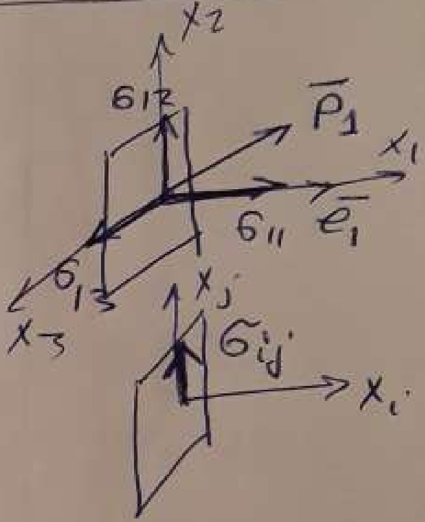
$dS_i=dS\cdot n_i$
$dV=\frac{1}{3}h\cdot dS$
$\bar n=n_i\bar e_i$

$$\lim_{h\to 0} \Rightarrow \boxed{\bar P_n = \sum_i \bar P_i n_i} \quad ! \quad (6)$$

Вектор напряжения $\bar P_n$ на $\forall$ наклонной грани, проходящей через данную точку, выражается через три в-ра напр-й на коорд-х площадках

Разложим $\bar P_i$ в б-се $\bar e_i$:

(7) $\bar P_i = \sigma_{ij} \bar e_j$

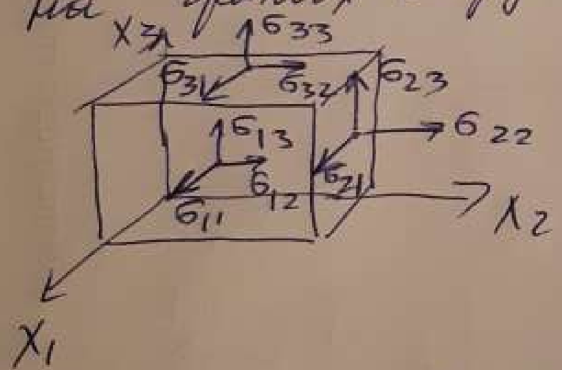


Def (σ_{ij}) – тензор напряжений

(6),(7) $\Rightarrow$ $\boxed{\bar P_n = \sigma_{ij} n_i \bar e_j}$ (8)

$\boxed{\bar P_n = \hat\sigma \cdot \bar n}$ (8')

Как направлены комп-ты тензора напр-й на гранях коорд-ого параллелепипеда?

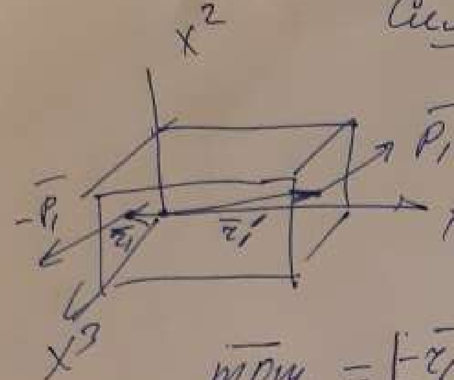


Задача. Дан т-р напр-й в некот-й точке

(Мейз, 2.5, с. 89) $\hat\sigma \sim \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}$ a, b, c – const.

Определить a, b, c так, чтобы в-р напр-й на площадке с $\bar n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar e_1 + \bar e_2 + \bar e_3)$ равнялся 0.

Симметрия тензора напряжений



$$\bar P_1 + \frac{\partial \bar P_1}{\partial x_1} dx_1 = \bar P_1'$$

$$\bar r_1' = \bar r_1 + \bar e_1 dx_1$$

$$\overline{mom}_1 = [-\bar r_1 \times \bar P_1 + \bar r_1' \times \bar P_1'] dx_2 dx_3 =$$

$$= [-\bar r_1 \times \bar P_1 + (\bar r_1 + \bar e_1 dx_1) \times (\bar P_1 + \frac{\partial \bar P_1}{\partial x_1} dx_1)] dx_2 dx_3 =$$

$$= [+\bar r_1 \times \frac{\partial \bar P_1}{\partial x_1} dx_1 + \bar e_1 dx_1 \times \bar P_1 + \bar e_1 \times \frac{\partial \bar P_1}{\partial x_1} dx_1^2] dx_2 dx_3$$

$$[\underbrace{\bar r_1}_{\frac{1}{2}(dx_2 \bar e_2 \times dx_3 \bar e_3)} \times \frac{\partial \bar P_1}{\partial x_1} + \bar e_1 \times \bar P_1 + \bar e_1 \times \frac{\partial \bar P_1}{\partial x_1} dx_1] dv$$

Моменты массовых сил: $\overline{mom}_f = \bar r_f \times \rho \bar f \cdot dv$, $\bar r_f = \frac{1}{2}\{dx_1 dx_2 dx_3\}$

$$\lim_{dx_i \to 0} \frac{\Sigma\, mom}{dv} = \sum_i \bar e_i \times \bar P_i = 0 = \sum_{i,j} \bar e_i \times \sigma_{ij} \bar e_j =$$

$$\bar P_i = \sigma_{ij} \cdot \bar e_j \qquad = \sum_{i,j} (\bar e_i \times \bar e_j) \sigma_{ij} =$$

$$= \sum_{i<j} \sigma_{ij} \bar e_i \times \bar e_j + \underbrace{\sum_{i>j} \sigma_{ij} \bar e_i \times \bar e_j}_{i \leftrightarrow j}$$

$$\underbrace{\sum_{i<j} \sigma_{ji} \bar e_j \times \bar e_i}_{=}$$

$$-\sum_{i<j} \sigma_{ji} \bar e_i \times \bar e_j =$$

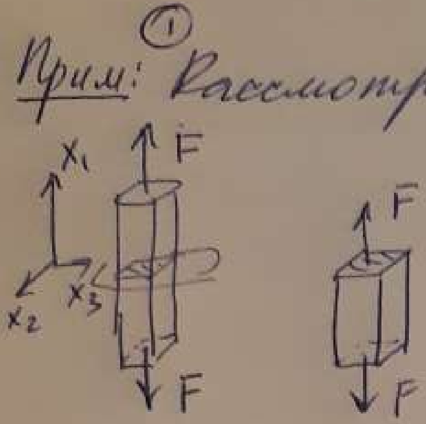
$$= \sum_{i<j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) \bar e_i \times \bar e_j = 0.$$

1 2 3
3 1 2
2 3 1

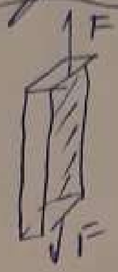
$$(\sigma_{12} - \sigma_{21}) \underbrace{\bar e_1 \times \bar e_2}_{\bar e_3} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \underbrace{\bar e_2 \times \bar e_3}_{\bar e_1} + (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \underbrace{\bar e_1 \times \bar e_3}_{-\bar e_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$$

<u>Прим</u>: ① Рассмотрим одноосное растяжение стержня



$\bar{P}_1 = \dfrac{F \cdot \bar{e}_1}{S}$



$\bar{P}_2 = \bar{P}_3 = 0$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Д/з №28 27 Э