Поскольку $E[\hat{f}_n(\lambda) - f(\lambda)]^2 =$

$= D\hat{f}_n(\lambda) + [E\hat{f}_n(\lambda) - f(\lambda)]^2,$

надо рассмотреть дисперсию $D\hat{f}_n(\lambda)$.

Пусть $\nu(h, r, s) := E u_t u_{t+h} u_{t+r} u_{t+s}$

в предположении, что есть стац. 4-го порядка (усл. S).

Обозначим $\chi(h, r, s) := \nu(h, r, s) -$

$- [R(h)R(s-r) + R(r)R(h-s) + R(s)R(h-r)]$

$\chi(h, r, s)$ – семиинварианты 4-го порядка стац. случ. посл. $\{u_t\}$.

<u>Замечание</u>

Далее нам потребуется условие $\sum_{h,r,s} |\chi(h,r,s)| < \infty$

① Если $\{u_t\}$ – стац. гаусс. посл., то $\chi(h,r,s) = 0$.

② Если $u_t = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s v_{t-s}$, где $\sum_s |\gamma_s| < \infty$,

$\{v_t\}$ – н.о.р., $E v_1 = 0$, $E v_1^4 < \infty$, то $\sum |\chi(h,r,s)| < \infty$

(см. [Андерсон, Стат. врем. рядов, М., Мир, 1976, §8, §9])

Требование независимости можно ослабить!

Теорема 3

Пусть $\hat f_n(\lambda)$ — сглаж. оценка спектр. плотности.

Пусть выполнено условие (i), и $\sum\limits_{\tau=-\infty}^{\infty} |R(\tau)| < \infty$,

$\sum\limits_{t_1,t_2,t_3} |\chi(t_1,t_2,t_3)| < \infty$. Пусть $k_n \to \infty$, но $k_n/n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\frac{n}{k_n} D\hat f_n(\lambda) \to \begin{cases} 2f^2(0)\int_{-1}^{1} \varkappa^2(x)\,dx, & \lambda = 0,\\ 2f^2(\pi)\int_{-1}^{1} \varkappa^2(x)\,dx, & \lambda = \pm\pi,\\ f^2(\lambda)\int_{-1}^{1} \varkappa^2(x)\,dx, & \lambda \ne 0, \pm\pi. \end{cases}$$

Оптимальный выбор k_n

В силу теорем 2 и 3 при $\lambda \ne 0, \pm\pi$

$$E\left[\hat f_n(\lambda) - f(\lambda)\right]^2 = D\hat f_n(\lambda) + \left[E\hat f_n(\lambda) - f(\lambda)\right]^2 \sim$$

$$\sim \frac{k_n}{n} f^2(\lambda)\int \varkappa^2(x)\,dx + \frac{1}{k_n^{2q}} k^2 \left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau|^q R(\tau)\cos\tau\lambda\right\}^2.$$

Отсюда оптимальный порядок:

$$\frac{k_n}{n} \sim \gamma \frac{1}{k_n^{2q}}, \quad \gamma \text{ — конст.}$$

$$k_n \sim \gamma\, n^{\frac{1}{2q+1}}$$

При таком выборе k_n

$$E\left[\hat f_n(\lambda) - f(\lambda)\right]^2 \sim c\, n^{-\frac{2q}{2q+1}}$$

Заметим, $\frac{2q}{2q+1} < 1$!

Пусть есть два ядра $\mathcal{K}_1(x)$ и $\mathcal{K}_2(x)$ с

одинаковыми числами k_1, k_2 $\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-k(x)}{|x|^r} = k \right)$.

Пусть $\begin{cases} \int_{-1}^{1} \mathcal{K}_1^2(x)\,dx < \int_{-1}^{1} \mathcal{K}_2^2(x)\,dx \\ k_1^2 < k_2^2 \end{cases}$

Тогда 1-ая оценка асимптот. лучше второй.

В таблице таких нет!

Раздел 5. Метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов в авторегрессии.

AR(1)-модель

(1) $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t=1,2,\ldots;\ u_0 = 0,\ \beta \in R^1,$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в., $E\varepsilon_1 = 0,\ 0 < E\varepsilon_1^2 < \infty.$

Тогда $u_t = \beta(\beta u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} =$

$= \ldots = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta^{t-1}\varepsilon_1$

① Стационарный случай $|\beta|<1$.

$u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} u_t^0 := \sum_{j\geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$, т.к.

$$E(u_t - u_t^0)^2 = E\Big(\sum_{j\geq t} \beta^j \varepsilon_{t-j}\Big)^2 = E\varepsilon_1^2 \sum_{j\geq t}\beta^{2j} = O(\beta^{2t}) = o(1),\ t\to\infty$$

② Критический случай (неустойчивая) автор. $|\beta|=1$

③ Взрывающаяся авторегрессия $|\beta|>1$.

$$Du_t = D\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j\varepsilon_{t-j} = E\varepsilon_1^2\sum_{j=0}^{t-1}\beta^{2j} = \frac{E\varepsilon_1^2(1-\beta^{2t})}{1-\beta^2} =$$

$= O(\beta^{2t}) \to \infty$ при $t\to\infty$ экспон. быстро.

Мы знаем: оптимальный с.к. прогноз u_{n+1} по $u_1, \ldots, u_n$ есть $\hat{u}_{n+1} = \beta u_n$.

Надо уметь оценивать β!

Пусть $\varepsilon_1 \sim g(x)$. Положим $\mathcal{E} := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T$,

$U = (u_1, \ldots, u_n)^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -\beta & \ddots & \\ 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда из (1) $\mathcal{E} = BU$,

(2) $\underline{U = B^{-1}\mathcal{E}}$

П.п. в. вектора $\mathcal{E}$ есть $g_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$.

Тогда пл. вер. вектора U есть в силу (2)

$$g_u(y, \beta) = \frac{1}{|\det(B^{-1})|} g_{\mathcal{E}}(By) = \left(By = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \beta y_1 \\ \ldots \\ y_n - \beta y_{n-1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \prod_{t=1}^{n} g(y_t - \beta y_{t-1}), \text{ где } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

О.м.п. для β – решение задачи

(3) $\ln g_u(U, \theta) = \sum_{t=1}^{n} \ln g(u_t - \theta u_{t-1}) \to \max\limits_{\theta \in R^1}$

Для гладкой g уравнение макс. правд.

(4) $$\sum_{t=1}^{n} u_{t-1} \frac{g'(u_t - \theta u_{t-1})}{g(u_t - \theta u_{t-1})} = 0.$$

<u>Пример 1.</u> $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$.

Тогда $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$, и задача (3) имеет вид $\sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_t - \theta u_{t-1})^2}{2\sigma^2}} \to \sup\limits_{\theta \in R^1}$

Последняя задача экв. следующей:

(5) $\sum_{t=1}^{n} (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min\limits_{\theta \in R^1}$

Решение (5) – о.м.п.

(6) $\hat{\beta}_{n,ML} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2$.

Если мы не предполагаем гаусс. ε_1, то решение задачи (5) есть о.н.к.

(7) $\hat{\beta}_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2$

Оценка $\hat{\beta}_{n,ML}$ – параметрическая, а $\hat{\beta}_{n,LS}$ – непараметрическая.

Пример 2. $\varepsilon_1 \sim Lap(\lambda)$.

Тогда $g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$.

Задача (5) имеет вид

$$\sum_{t=1}^{n} \ln \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u_t - \theta u_{t-1}|} \to \max_{\theta \in R^1},$$

что экв. задаче

(8) $$\sum_{t=1}^{n} |u_t - \theta u_{t-1}| \to \min_{\theta \in R^1}.$$

Решение (8) – о.м.п. $\hat{\beta}_{n,ML}$.

Если распр. ε_1 неизв., то реш. (8) – о.н.м. $\hat{\beta}_{n,LD}$.

Оценка $\hat{\beta}_{n,LD}$ не выписывается явно!

Рассмотрим случай гауссовских $\{\varepsilon_t\}$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

Пусть $d_n^2(\beta) := \begin{cases} \frac{n}{1-\beta^2}, & |\beta|<1, \\ n^2/2, & |\beta|=1, \\ \beta^{2n}/(\beta^2-1)^2, & |\beta|>1. \end{cases}$

Покажем, что $d_n^2(\beta) \sim J_n(\beta)$ при $n\to\infty$, где $J_n(\beta)$ – информация Фишера о парам. β, содержащаяся в $u_1,\dots,u_n$. Действительно, если $U=(u_1,\dots,u_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$, то пл. вер.

$$g_n(y,\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^n (y_t-\beta y_{t-1})^2},$$

а потому

$$J_n(\beta) = E_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln g_n(U,\beta)\right)^2 = E_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{t=1}^n (u_t-\beta u_{t-1})^2\right)\right)^2 = E_\beta\left(\sum_{t=1}^n u_{t-1}(u_t-\beta u_{t-1})\right)^2 =$$
$$= E_\beta\left(\sum_{t=1}^n u_{t-1}\varepsilon_t\right)^2 = \sum_{t=1}^n E_\beta u_{t-1}^2 = \sum_{t=1}^{n-1} E_\beta u_t^2.$$

Но $u_t = \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j \varepsilon_{t-j}$, и

$$E u_t^2 = E\left(\sum_{j=0}^{t-1}\beta^j\varepsilon_{t-j}\right)^2 = \sum_{j=0}^{t-1}\beta^{2j} = \begin{cases} \frac{1-\beta^{2t}}{1-\beta^2}, & |\beta|\neq 1, \\ t, & |\beta|=1 \end{cases}$$

Значит, $J_n(\beta) = \begin{cases} \frac{n-1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2(1-\beta^{2(n-1)})}{(1-\beta^2)^2}, & |\beta|\neq 1, \\ \frac{(n-1)(1+(n-1))}{2}, & |\beta|=1. \end{cases}$

Отсюда

$$J_n(\beta) \sim \begin{cases} \frac{n}{1-\beta^2}, & |\beta|<1, \\ n^2/2, & |\beta|=1, \\ \beta^{2n}/(\beta^2-1)^2, & |\beta|>1 \end{cases} = d_n^2(\beta).$$

Распределение Коши с пар. (0,1) обозн. $\mathcal{K}(0,1)$, т.е. $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть $W(s)$, $s \in [0,1]$, станд. вин. процесс. Обозначим $H(\beta)$, $|\beta|=1$, распред. сл. в.

$$\beta \frac{W^2(1)-1}{2^{3/2}\int_0^1 W^2(s)\,ds}.$$

<u>Теорема 1</u>

Пусть $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в., $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$. Тогда

$$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,mn} - \beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta|<1, \\ H(\beta), & |\beta|=1, \\ \mathcal{K}(0,1), & |\beta|>1, \end{cases}$$

при $n\to\infty$.

Док-во. $\hat\beta_{n,mn} = \sum_{t=1}^n u_{t-1}u_t \Big/ \sum_{t=1}^n u_{t-1}^2 =$

$= \sum_{t=1}^n u_{t-1}(\beta u_{t-1} + \varepsilon_t) \Big/ \sum_{t=1}^n u_{t-1}^2 = \beta + \sum_{t=1}^n \varepsilon_t u_{t-1} \Big/ \sum_{t=1}^n u_{t-1}^2$.

Положим для краткости

$$M_n := d_n^{-1}(\beta)\sum_{t=1}^n \varepsilon_t u_{t-1}, \quad V_n := d_n^{-2}(\beta)\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2.$$

Тогда $$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,mn} - \beta) = M_n/V_n.$$

Пусть $f_n(t,s)$ – совместная характеристическая функция M_n и V_n. Тогда (см. [Rao M.M. Ann.

Statist., 1978, v. 6, pp. 185-190])

$$(9)\quad f_n(t,s) \to f(t,s) = \begin{cases} \exp\{is - t^2/2\}, & |\beta|<1, \\ (1+t^2-2is)^{-1/2}, & |\beta|>1. \end{cases}$$

① $|\beta|<1$. Тогда $f(t,s)$ есть хар. ф-ия вектора $(\xi, 1)^T$, где $\xi \sim N(0,1)$. Действительно,

$$\varphi(t,s) = E e^{i(t\xi + s\cdot 1)} = e^{is}\cdot \varphi_\xi(t) = e^{is - t^2/2}.$$

Теорема о наследовании слабой сходимости.

Пусть случ. вектор $S_n \xrightarrow{d} S$, $n\to\infty$, $S_n, S \in R^k$, а $H: R^k \to R^1$ борелевская ф-ия, непрерывная на мн-ве A таком, что $P(S\in A)=1$.

Тогда $H(S_n) \xrightarrow{d} H(S)$, $n\to\infty$.

У нас в силу (9) $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi, 1)^T$. Если $H(x,y) = x/y$, то $H(x,y)$ непрерывна при $y>0$. Можно взять $A = \{y : y>0\}$, $P((\xi,1)^T \in A) = 1$. В силу теор. о наслед. слабой сходимости

$$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,mn} - \beta) = M_n/V_n = H(M_n, V_n) \xrightarrow{d} H(\xi, 1) = \xi.$$

ч.т.д.

② $|\beta|>1$. Тогда $f(t,s)$ есть хар. ф-ия вектора $(\xi\eta, \eta^2)^T$, где $\xi, \eta \sim N(0,1)$, ξ и η незав.

Действительно, $E e^{it(\xi\eta)+is\eta^2} =$

$$= E E\left(e^{it(\xi\eta)+is\eta^2} / \eta\right) = E e^{is\eta^2} E\left(e^{i(t\eta)\xi} / \eta\right) =$$

$$= E e^{is\eta^2} \cdot e^{-t^2\eta^2/2} = E e^{i(s+it^2/2)\eta^2} =$$

$$\left(E e^{il x_1^2} = (1-2il)^{-1/2}\right) = \left(1-2is+2t^2/2\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(1+t^2-2is\right)^{-1/2} = \varphi(t,s).$$

Значит, $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$,

$$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,mn} - \beta) = M_n / V_n \xrightarrow{d} \xi\eta/\eta^2 = \xi/\eta \sim \mathcal{K}(0,1)$$

ч.т.д.

③ <u>Пусть $\beta = 1$, случай $\beta = -1$ аналогичен.</u>

Тогда $M_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t u_{t-1}$,

$$V_n = \frac{2}{n^2} \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 .$$

Далее, $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t$.

Введем винеровский последовательный процесс

$$w_n(s) := n^{-1/2} \sum_{i \le ns} \varepsilon_i, \quad s \in [0,1],$$

$w_n(s) = 0$ при $0 \le s < 1/n$. Тогда

$$n^{-1/2} u_{t-1} = w_n\left(\frac{t-1}{n}\right).$$

Пусть $\Delta w_n\left(\frac{t}{n}\right) := w_n\left(\frac{t}{n}\right) - w_n\left(\frac{t-1}{n}\right) = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n}}$.

Тогда
$$M_n = \sqrt{2} \sum_{t=1}^{n} w_n\left(\frac{t-1}{n}\right) \Delta w_n\left(\frac{t}{n}\right),$$
$$V_n = 2 \sum_{t=1}^{n} w_n^2\left(\frac{t-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

Пусть $U_n := \left(w_n\left(\frac{1}{n}\right), w_n\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, w_n\left(\frac{n}{n}\right)\right)^T.$

Тогда $U_n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}, \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right)^T$ и

это есть гауссовский вектор со средним ноль,
$$\operatorname{cov}\left(w_n\left(\frac{i}{n}\right), w_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \frac{\min(i,j)}{n}.$$

Действительно
$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

для $i \le j$ $\operatorname{cov}\left(w_n\left(\frac{i}{n}\right), w_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) =$
$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_t \times \sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_i\right)^2 = \frac{i}{n} = \frac{\min(i,j)}{n}.$$

Введем вектор $U = \left(w\left(\frac{1}{n}\right), w\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, w\left(\frac{n}{n}\right)\right)^T,$

где $w(s)$ - стандартный винеровский.

Это гаусс. вектор со средним ноль, $\operatorname{cov}\left(w\left(\frac{i}{n}\right), w\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \frac{\min(i,j)}{n}$. Значит,

(10) $U_n \overset{d}{=} U$, и след., $\varphi(U_n) \overset{d}{=} \varphi(U)$

для любой бор. скал. φ.

Доказ., пусть $\xi \overset{d}{=} \eta$ для $\xi, \eta \in R^k$. Тогда $f(\xi) \overset{d}{=} f(\eta)$, т.к. $P(f(\xi) \in A) = P(\xi \in f^{-1}(A)) =$
$= P(\eta \in f^{-1}(A)) = P(f(\eta) \in A)$.

Пусть $$\overline{M_n} = \sqrt{2} \sum_{t=1}^{n} w\left(\frac{t-1}{n}\right) \Delta w\left(\frac{t}{n}\right),$$
$$\overline{V_n} = 2 \sum_{t=1}^{n} w\left(\frac{t-1}{n}\right) \frac{1}{n}.$$ ($\overline{M_n}, \overline{V_n}$ - бор. ф-ии от U)

Из (10) следует, что (M_n и V_n - бор. ф-ии от U_n),

$$(11) \quad \frac{M_n}{V_n} \overset{d}{=} \frac{\overline{M_n}}{\overline{V_n}}.$$

Но $$\overline{M_n} \xrightarrow{c.к.} \sqrt{2} \int_0^1 w(s)\, dw(s),$$
$$\overline{V_n} \xrightarrow{c.к.} 2 \int_0^1 w^2(s)\, ds.$$

Значит, $$(\overline{M_n}, \overline{V_n})^T \xrightarrow{d} \left(\sqrt{2} \int_0^1 w(s)\, dw(s), 2\int_0^1 w^2(s)\, ds\right)^T,$$

и, следовательно,

$$(12) \quad \frac{\overline{M_n}}{\overline{V_n}} \to \frac{\sqrt{2} \int_0^1 w(s)\, dw(s)}{2 \int_0^1 w^2(s)\, ds} = \frac{w^2(1) - 1}{2^{3/2} \int_0^1 w^2(s)\, ds}.$$

Поскольку
$$d_n(\beta)(\hat{\beta}_{n,мк} - \beta) = \frac{M_n}{V_n},$$ соотн. (11)-(12) влекут утв. Теор. ч.т.д.

Итак, $d_n(\beta)(\hat{\beta}_{n,MH}-\beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta|<1, \\ H(\beta), & |\beta|=1, \\ K(0,1), & |\beta|>1. \end{cases}$

Теорема 2.

Пусть $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл.в. Тогда

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}\,(\hat{\beta}_{n,MH}-\beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta|\neq 1, \\ \tilde{H}(\beta), & |\beta|=1. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{H}(\beta)$ - распр. сл. в.

$$\frac{W^2(1)-1}{2\sqrt{\int_0^1 W^2(s)ds}} = \frac{\int_0^1 W(s)dW(s)}{\sqrt{\int_0^1 W^2(s)ds}}$$

Док-во. $\sqrt{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}\,(\hat{\beta}_{n,MH}-\beta) = \dfrac{M_n}{\sqrt{V_n}}$,

где $M_n = d_n^{-1}(\beta)\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t u_{t-1}$, $V_n = d_n^{-2}(\beta)\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2$

① $|\beta|<1$. Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi, 1)^T$, значит $M_n/\sqrt{V_n} \xrightarrow{d} \xi/\sqrt{1} \sim N(0,1)$

② $|\beta|>1$. Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$, значит

$M_n/\sqrt{V_n} \xrightarrow{d} \dfrac{\xi\eta}{\sqrt{\eta^2}} = \xi \cdot \operatorname{sign}\eta \sim N(0,1)$

③ $\beta=1$. Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(W^2(1)-1), 2\int_0^1 W^2(s)ds\right)^T$.

Значит, $M_n/\sqrt{V_n} \xrightarrow{d} \dfrac{W^2(1)-1}{2\sqrt{\int_0^1 W^2(s)ds}}$. ч.т.д.

Об оценке наименьших квадратов в авторегр.

Если $\{\varepsilon_t\}$ в AR(1) ур-ии

(13) $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \; u_0 = 0, \; t = 1, 2, \dots, \; \beta \in R^1,$

есть н.о.р. $N(0,1)$ сл.в., то о.м.п. – реш. задачи

(14) $$\sum_{t=1}^{n} (u_t - \theta u_{t-1})^2 \Rightarrow \min_{\theta \in R^1}$$

Если же $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в. с неизв. распр., то задача (14) определяет о.н.к.

$$\hat{\beta}_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2.$$

О.н.к. $\hat{\beta}_{n,LS}$ – непараметрическая!

Теорема 3. Пусть $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \; |\beta| < 1, \; t \in Z$. Если $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0, \; 0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$, то

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 1-\beta^2), \; n \to \infty.$$

Замечание

(в схеме (13))

① Если $|\beta| = 1$, то при $E\varepsilon_1 = 0, \; 0 < E\varepsilon_1^2 < \infty, \; \{\varepsilon_t\}$ – н.о.р.,

$$d_n(\beta)(\hat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} H(\beta).$$

② Если $|\beta| > 1$, то в усл. п. ①

$$d_n(\beta)(\hat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} \frac{\sum_{j \geq 1} \beta^{-j} \varepsilon_{1-j}}{\sum_{j \geq 1} \beta^{-j} \varepsilon'_{1-j}}, \; \{\varepsilon_t\}, \{\varepsilon'_t\} \text{ – нез. посл. с н.о.р. комп.}$$

Док-во Теоремы 3 Предположим дополнительно, что $E|\varepsilon_1|^{2+\delta}<\infty$ при некотором $\delta>0$. Пусть еще существует пл. вер. $\varepsilon_1 \sim g(x)$ по мере Лебега.

При $|\beta|<1$ сущ. строго стационарное решение ур-ия AR(1), оно имеет вид $u_t=\sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$ и ряд ск. сходится (т.е. сход. в L^2). Покажем, что этот ряд сходится в $L^{2+\delta}$ и, значит, $E|u_1|^{2+\delta}<\infty$.

Справедливо нер-во Минковского:

если $E|\xi|^{2+\delta}<\infty$, $E|\eta|^{2+\delta}<\infty$ при $\delta>0$, то

$$\{E|\xi+\eta|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}\leq\{E|\xi|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}+\{E|\eta|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}$$

Рассмотрим частную сумму $S_n=\sum_{j=0}^{n}\beta^j\varepsilon_{t-j}$.

$$\{E|S_n-S_m|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}=\Big\{E\Big|\sum_{j=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}\beta^j\varepsilon_{t-j}\Big|^{2+\delta}\Big\}^{1/(2+\delta)}\leq$$

$$\leq\sum_{j=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}\{E|\beta^j\varepsilon_{t-j}|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}=E\{|\varepsilon_1|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}\sum_{j=(m,n)+1}^{\max(m,n)}|\beta|^j\to 0,$$

$m,n\to\infty$

Значит, посл. $\{S_n\}$ частных сумм фундамент., и ряд $u_t=\sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$ сход. в $L^{2+\delta}$, $E|u_1|^{2+\delta}<\infty$.

1) $\hat\beta_{n,LS}=\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}u_t\Big/\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}^2\overset{п.н.}{=}\beta+\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}\varepsilon_t\Big/\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}^2,$

$$n^{1/2}(\hat\beta_{n,LS}-\beta)=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}\varepsilon_t\Big/\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}^2.$$

2) Ввиду рез-ов Моккадем (1988)

посл. $\{u_t\}$ удовл. усл. с.п. с коэффициентом $\alpha(\tau) \le C\lambda^{\tau}$, $0<\lambda<1$.

Посл. $\{\varepsilon_t u_{t-1} = (u_t - \beta u_{t-1}) u_{t-1} = f(u_t, u_{t-1})\}$ тоже уд. усл. с.п. с эксп. уб. коэфф. $\alpha'(\tau) \le C'\lambda^{\tau}$,

$$\sum_{\tau\ge 1} \left(\alpha'(\tau)\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \le \sum_{\tau \ge 1} \left(C'\lambda^{\tau}\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} = \frac{(C')^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{1-\lambda^{\frac{\delta}{2+\delta}}} < \infty$$

$E\varepsilon_t u_{t-1} = E\varepsilon_t E u_{t-1} = 0$; $E|\varepsilon_t u_{t-1}|^{2+\delta} = E|\varepsilon_1|^{2+\delta} E|u_1|^{2+\delta} < \infty$

В силу ц.п.т. для посл. с с.п.

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t u_{t-1} \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2),$$

где $\Delta^2 = E(\varepsilon_1 u_0)^2 + 2\sum_{\tau \ge 1} \overset{=0}{E(\varepsilon_1 u_0 \varepsilon_{1+\tau} u_\tau)} =$

$= E\varepsilon_1^2 \cdot E u_0^2$

4) $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 \xrightarrow{п.н.} E u_0^2$ в силу 3.6.4 для посл. с с.п.

5) Значит $n^{1/2}(\hat\beta_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} \frac{1}{Eu_0^2} N(0, E\varepsilon_1^2 E u_0^2)$.

Пред. дисп. есть $E\varepsilon_1^2 E u_0^2 / (E u_0^2)^2 = E\varepsilon_1^2 / E u_0^2 = 1-\beta^2$.

ч.т.д. Теор. 3 док.

Вот два важных вопроса:

① как построить непараметрические оценки, асимптотически гауссовские, с меньшей ас. дисперсией, чем у о.н.к.?

② Будет ли оценка н.к. $\hat\beta_{n,LS}$ ~~Как строить робастные оценки?~~ В-робастной!

Раздел 6. Введение в робастное оценивание

(Martin, Yohai [1986])

Схема засорений Мартина-Иохаи имеет вид:

$$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Здесь $\{u_t\}$ – "полезный сигнал" (временной ряд; $\{z_t^\gamma\}$ – н.о.р. сл.в., $z_1^\gamma \sim Bin(1, \gamma)$ с $0 \le \gamma \le 1$ (γ – уровень засорения);

$\{\xi_t\}$ – н.о.р. сл.в. – грубые выбросы, ξ_1 имеет распределение $\mu_\xi \in M_\xi$; распр. μ_ξ неизвестно, а мн-во M_ξ известно;

Последовательности $\{u_t\}, \{z_t^\gamma\}, \{\xi_t\}$ независимы между собой.

Пусть $y_1, \dots, y_n$ – наблюдения, и распределение вектора $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$ зависит от неизвестного параметра β. Пусть $\hat{\beta}_n$ – некоторая оценка β.

Основное предположение

При любом $0 \le \gamma \le 1$ существует предел

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma, \quad n \to \infty; \quad \theta_0 = \beta.$$

Δ. Если существует предел

$$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) := \lim_{\gamma \to +0} \frac{\theta_\gamma - \theta_0}{\gamma},$$ то

$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ называется функционалом влияния оценки $\hat{\beta}_n$.

Если ф-ал влияния существует, то

$$\theta_\gamma = \theta_0 + IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma + o(\gamma), \ \gamma \to +0,$$

т.е. $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ характеризует главный линейный по γ член в разложении по γ асимптотического смещения $\theta_\gamma - \theta_0 = \theta_\gamma - \beta$.

Δ. Величина $GES(\theta_\gamma, M_\xi) := \sup\limits_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)|$ называется чувствительностью оценки $\hat{\beta}_n$ к засорениям (выбросам).

Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то главный (по γ) член асимптотического смещения $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma$ равномерно по μ_ξ мал при малых γ.

Δ. Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то оценка $\hat{\beta}_n$ называется робастной по смещению, или B-робастной.

Пример. (выборочное среднее)

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t \end{cases}, \quad t = 1, \dots, n,$$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в., $E\varepsilon_1 = 0$ (тогда $Eu_t = a$), $E|\xi_1| < \infty$

Возьмем оценкой a эмп. среднее $\bar{y} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} y_t$.

Тогда $\bar{y} \xrightarrow{P} E(u_1 + z_1^\gamma \xi_1) = a + \gamma E\xi_1 = \theta_\gamma^{ks}$

ф-ия θ_γ определена при всех γ,

$\frac{d\theta_\gamma}{d\gamma} = E\xi_1 = IF(\theta_\gamma^{ks}, \mu_\xi)$. Если M_1 - класс распределений с конечным первым моментом, то

$$GES(\theta_\gamma^{ks}, M_1) = \sup_{\mu_\xi \in M_1} |E\xi_1| = \infty !$$

Оценка $\bar{y}$ не B-робастна!

Пример (выборочная медиана)

Пусть $u_t = a + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $\varepsilon_1 \sim G(x)$, $t = 1, \dots, n$

$G(0) = 1/2$. Тогда ф.р. u_t есть $F(x) = G(x - a)$ и $F(a) = 1/2$. Значит, a есть медиана F, а ноль медиана G

Если ε_1 имеет симметричное относительно нуля распред. ($\varepsilon_1 \stackrel{d}{=} -\varepsilon_1$) и $G(x)$ непр. внуле, то $E\varepsilon_1 = 0$, $Eu_t = a$, a - мед. F, ноль - медиана

Пусть $u_{(1)} \le u_{(2)} \le \dots \le u_{(n)}$ - вариац. ряд.

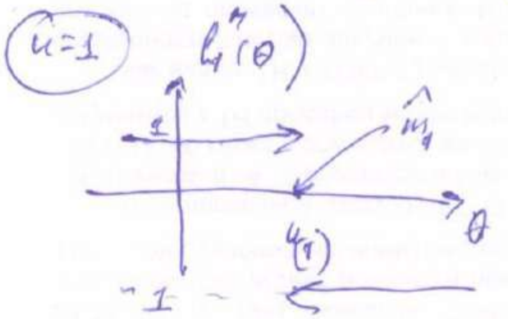
Д. Величина $\hat m_n = \begin{cases} u_{(k+1)}, & n=2k+1\ (k=0,1,\dots),\\ \dfrac{u_{(k+1)}+u_{(k)}}{2}, & n=2k\ (k=1,2,\dots) \end{cases}$

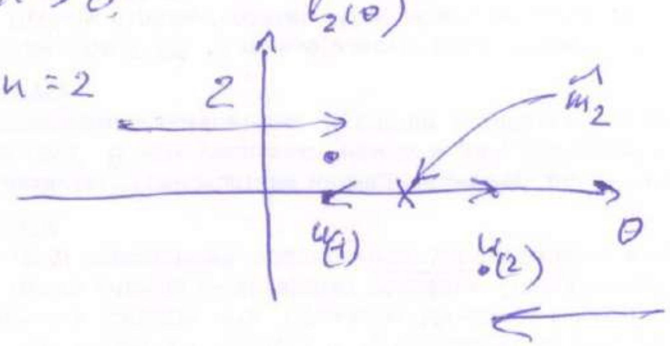
называется выборочной медианой.

Выбор. медиана - один из корней уравнения

$$l_n^m(\theta)=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\operatorname{sign}(u_t-\theta)=0,$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0. \end{cases}$$





Пусть теперь $\begin{cases} y_t = u_t + z_t^{\gamma}\xi_t \\ u_t = a + q_t \end{cases}$, $t=1,\dots,n,$

$\hat m_n^y$ построена по $\{y_t\}$. Тогда

$$l_n^{my}(\theta)=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\operatorname{sign}(y_t-\theta)\xrightarrow{P} E\operatorname{sign}(y_1-\theta)=: \Lambda^m(\theta)$$

Пусть существ. $g(x)=G'(x)$, $\sup\limits_x g(x)<\infty$,

$g(0)>0$. g непрерывна

Тогда $\Lambda_M(\gamma,\theta) = E(1 - 2I(y_1 - \theta \le 0)) =$
$= 1 - 2EI(\varepsilon_1 \le \theta - a - z_1^\gamma \xi_1) = 1 - 2EG(\theta - a - z_1^\gamma \xi_1)$
$(\operatorname{sign} x = 1 - 2I(x<0),\ x \ne 0)$

<u>Упражнение</u>

Если ξ и η нез. сл.в., η - дискретна, то

$E\varphi(\xi,\eta) = \sum_k E\varphi(\xi,\eta_k) P(\eta = \eta_k) = \sum_k E(\varphi(\xi,\eta)/H_k) \times$
$\times P(H_k)$, где $H_k = (\omega: \eta = \eta_k)$.

$(E\varphi(\xi,\eta) = E(\varphi(\xi,\eta) \sum_k I(\eta = \eta_k)) = \ldots)$

Значит, $\Lambda_M(\gamma,\theta) = 1 - 2(1-\gamma) G(\theta - a) -$
$- 2\gamma EG(\theta - a - \xi_1)$. $(H_1 = (z_1^\gamma = 0),\ H_2 = (z_1^\gamma = 1))$.

По теореме о неявной ф-ии (все усл. выполн.!)

ур-ие $\Lambda_M(\gamma,\theta) = 0$

имеет реш. θ_γ^m при $|\gamma| < \delta$,
$|\theta - a| < \varepsilon$, $\theta_0^M = a$,

$$\left.\frac{d\theta_\gamma}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = -\left(\frac{\partial \Lambda_M(0,a)}{\partial \theta}\right)^{-1} \frac{\partial \Lambda(0,a)}{\partial \gamma} =$$
$$= \frac{1 - 2EG(-\xi_1)}{2g(0)}.$$

$\Lambda(0,a) = 0$,
$\frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \theta}$
сущ. и непр.
$\left.\frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\gamma=0,\ \theta=a} = -2g(0) \ne 0$.

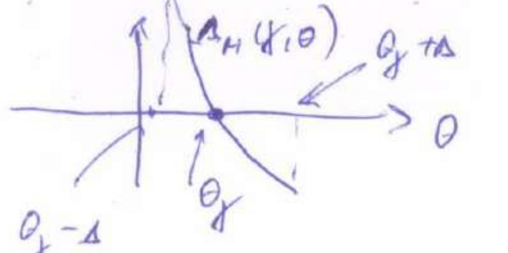
Покажем, что $\hat{m}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, $n \to \infty$, γ - мало.
Тогда

$$IF(\theta_\gamma^M, \mu_\xi) = \frac{1-2E\,G(-\xi_1)}{2g(0)},$$

$$GES(\theta_\gamma^M, M_\xi) = \sup_{\mu_\xi \in M_\xi} \left|IF(\theta_\gamma^M, \mu_\xi)\right| = \frac{1}{2g(0)} < \infty.$$

↑ все распр.

$$\frac{\partial \Lambda_M(\gamma,\theta)}{\partial \theta} = -2(1-\gamma)\, g(\theta-a) - 2\gamma E\, g(\theta-a-\xi_1) < 0$$



$$\begin{cases} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma - \Delta) > 0 \\ \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma + \Delta) < 0 \end{cases}$$

Значит, $\begin{cases} l_n^{M\gamma}(\theta_\gamma - \Delta) \xrightarrow{P} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma - \Delta) > 0, \\ l_n^{M\gamma}(\theta_\gamma + \Delta) \xrightarrow{P} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma + \Delta) < 0, \end{cases}$ $n \to \infty$.

Значит, с вер. сколь угодно близкой к един. при дост. больших n, все корни уравнения $l_n^{M\gamma} = 0$ (и медиана!) лежат в инт. $(\theta_\gamma - \Delta, \theta_\gamma + \Delta)$. Но Δ — любое, т.е.

$$\hat{m}_n^\gamma \xrightarrow{P} \theta_\gamma, \quad n \to \infty.$$

ч.т.д.

Выб. мед. $\hat{m}_n$ — B-робастна при любых μ_ξ

Как находить функционалы влияния в общей ситуации

Пусть оценка $\hat{\beta}_n$ ищется как корень уравнения

$$(1) \quad l_n(\theta) := n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) = 0.$$

Пусть выполнены следующие условия.

(i) $l_n(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma,\theta)$ при всех $|\theta-\beta|<\delta$, $0\le\gamma<\gamma_0$.

(ii) $\Lambda(0,\beta)=0$.

(iii) Пусть $\Lambda(\gamma,\theta)$ можно продолжить на отр. малые γ так, что при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ существуют и непрерывны по паре аргументов (γ,θ) частные производные $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$

(iv) Пусть $\lambda(\beta) := \frac{\partial\Lambda(0,\beta)}{\partial\theta} \neq 0.$

Теорема 1 Пусть вып. усл. (i)-(iv), и ф-ии $\varphi_t(y_n,\theta)$ непр по θ. Тогда ур-ие (1) с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, имеет при дост. малых γ такое решение $\hat{\beta}_n$, что соответствующая оценка $\tilde{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, $\theta_0=0$, и существует функционал влияния

$$\boxed{IF(\theta_\gamma,\mu_\xi) = -(\lambda(\beta))^{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\Lambda(0,\beta).}$$