21.10.21. Винокуров. ДЗ 6.

① Предположим, что моменты наступления страховых случаев $\tau_1, \tau_2 \ldots$ образуют пуассоновский поток П с параметром $\lambda>0$. Фиксируем некоторый момент времени $t>0$. Один из полуинтервалов $[0;\tau_1)$; $[\tau_1;\tau_2)$ ... накроет момент t, т.е. будет выполнено одно из несовместных событий $0 \le t < \tau_1$; $\tau_1 \le t < \tau_2$ ... Найти плотность длины того полуинтервала, который накрывает точку t и вычислить $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x,t) = f(x)$

Решение: Пусть $f(x,t)$ – искомая плотность.

Положим $\delta(u) = \begin{cases} 1, u \ge 0 \\ 0, u < 0 \end{cases}$

Исходя из того, что интервалы между соседними точками независимы и имеют показательное распределение, нетрудно вывести, что $f(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$f(x,t) = \underbrace{\underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{p(\tau_1 = x)} \underbrace{\delta(x-t)}_{\mathbb{1}\{x \ge t\}}}_{\text{т.е. вер-ть того, что } x \ge t \text{ и что первый интервал накрыл } t} + \underbrace{\int_0^t f(x, t-u) \lambda e^{-\lambda u} du}_{x \text{ попало в окр-ти } u\text{, причем } u \in [0,t]}$$

Т.е. 1-е слагаемое соотв. случаю, когда первый страховой случай наступит после момента t в окр-ти точки x. 2-е слагаемое соотв. случаю, когда первый страховой случай наступит до момента t в окр-ти точки u.

Положим $f^*(s,x) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t,x) dt$ – преобр. Лапласа.

После применения преобразования Лапласа к обеим частям интегр. ур-я, получим:

$$f^*(x,s) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{1-e^{-sx}}{s} + \frac{\lambda}{s+\lambda} f^*(x,s)$$

$$\Rightarrow f^*(x,s)\left(1 - \frac{\lambda}{s+\lambda}\right) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-sx})}{s}$$

$$\Rightarrow f^*(x,s) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-sx})}{s^2}$$

$\Rightarrow$ исп. таблицу преобр. Лапласа, получаем $f(x,t) = \begin{cases} \lambda(1+\lambda t) e^{-\lambda x}; x > t \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}; x \le t \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{t \to +\infty} f(x,t) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

② Вычислить $m(t)$ – математическое ожидание длины этого полуинтервала.

Решение: $m(t) = \int_0^{+\infty} x f(x,t) dx = \int_0^t \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx + \lambda(1+\lambda t) \int_t^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\lambda \int_0^t x^2 d(e^{-\lambda x}) - (1+\lambda t) \int_t^{+\infty} x d(e^{-\lambda x}) =$

$= -\lambda x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^t + 2\lambda \int_0^t x e^{-\lambda x} dx - (1+\lambda t) \cdot x \cdot e^{-\lambda x} \Big|_t^{+\infty} + (1+\lambda t) \int_t^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\lambda t^2 e^{-\lambda t} - 2x e^{-\lambda x} \Big|_0^t + 2 \int_0^t e^{-\lambda x} dx + (1+\lambda t) t e^{-\lambda t} -$

$- \frac{1+\lambda t}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_t^{+\infty} = -\lambda t^2 e^{-\lambda t} - 2t e^{-\lambda t} - \frac{2}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1) + t e^{-\lambda t} + \lambda t^2 e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + t e^{-\lambda t} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{2}{\lambda} = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$ ← ответ.