СВИЯЗОВ ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ
ГЭК 5

ОДЕ-12. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x - 2x^2$$

Найдем общ. реш-е однор. ур-я

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-20} = 4 \pm 2i$$

$$y_{oo} = e^{4x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Найдем частное реш-е неоднор. ур-я

1) $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$

$4 \pm 2i$ — корни хар. ур-я

$$y_{чн1} = x^1 \cdot e^{4x} \cdot ((A+Bx)\cos 2x + (C+Dx)\sin 2x)$$

2) $y'' - 8y' + 20y = -2x^2$

0 — не корень хар. ур-я

$$y_{чн2} = Ex^2 + Fx + G$$

$$y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2}$$

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} = e^{4x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x) + xe^{4x}((A+Bx)\cos 2x + (C+Dx)\sin 2x) + Ex^2 + Fx + G$$

← ответ.

Князев Александр
Юрьевич
ГЭК-5

ODE-13. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициенты частных решений):

$$y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}\sin 2x$$

---

1. Решим однородное уравнение $y''+3y'-4y=0$

Запишем хар. мн-н: $\lambda^2+3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1\ ;\ \lambda_2=-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{o.o}=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}$; C_1, C_2 — произвольные константы.

2. Для правой части вида $e^{-4x}+xe^{-x}\sin 2x$ будем искать частное решение в виде суммы частных решений для уравнений:

$y''+3y'-4y=e^{-4x}$ и $y''+3y'-4y=xe^{-x}\sin 2x$

$\downarrow$

Частное решение имеет вид

$y_{ч.н.1}=a_1x\cdot e^{-4x}$

$\downarrow$

Частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.2}=a_2e^{-x}\cos 2x+a_3xe^{-x}\cos 2x+a_4e^{-x}\sin 2x+a_5xe^{-x}\sin 2x$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — неопределённые коэффициенты, которые по заданию вычислять необязательно.

Ответ: $y_{o.н.}=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}+a_1xe^{-4x}+a_2e^{-x}\cos 2x+a_3xe^{-x}\cos 2x+a_4e^{-x}\sin 2x+a_5xe^{-x}\sin 2x$

C_1, C_2 — произвольные постоянные ; $a_1,\dots,a_5$ — неопр. коэфф.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\quad}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\quad}{\cos^2 x}dx =$$

ODE-5. $y'' + 4y = x\sin 2x - x^2$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 2i}$

1) однородное : $y_{o.o.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

2) частное : y: $f_1(x) = x\sin 2x$ $\qquad b = 2;\ a = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{12} = \pm 2i}$

$y_{ч.н.} = x^1 e^{0x} \cdot [(A_1 x + B_1)\sin 2x + (C_1 x + D_1)\cos 2x] \Rightarrow r = 1$ – кратный корень

$\cancel{f_2(x) = -x^2}$

$\Rightarrow y_{ч.н.1} = x[(A_1 x + B_1)\sin 2x + (C_1 x + D_1)\cos 2x]$

$f_2(x) = -x^2 \qquad a = 0,\ b = 0$

$y_{ч.н.2} = A_2 x^2 + B_2 x + C_2$

$\Rightarrow y_{o.н.} = x[(A_1 x + B_1)\sin 2x + (C_1 x + D_1)\cos 2x] + A_2 x^2 + B_2 + C_2 +$

$+ C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$

ODE-11

$$y'' - 3y' = x + \cos 2x$$

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$$

$$y_{общ.одн.} = C_1 + C_2 e^{3x}$$

$$x = x \cdot e^{0x}$$

$$y_{ч.1} = x(Ax + B)$$

$$\cos 2x = e^{0x}(1 \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x)$$

$$y_{ч.2} = C\cos 2x + D\sin 2x$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + Ax^2 + Bx + C\cos 2x + D\sin 2x.$

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений)

$$y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+x^3-2x^2+10$$

Общее решение $Y=y_{однор}+y_{частное}$

Найдем $y_{однородн.}$

$y''+2y'+2y=0$

$\lambda^2+2\lambda+2=0$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2}=\dfrac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

$y_{однородное}=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x$

C_1, C_2 – константы

Найдем частное решение в виде суммы частных y_1 и y_2

$$\left[\begin{array}{l} y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x \quad \boxed{1} \\ y''+2y'+2y=x^3-2x^2+10 \quad \boxed{2} \end{array}\right.$$

$\boxed{1}$ $y_1=x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x)$ – в таком виде ищем частное решение y_1

$\alpha=-1$ $\beta=1$ $\alpha+\beta i$ – корень характеристического ур-ия $\Rightarrow s=1$ (равно кратности корня)

$y_1=xe^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$

$\boxed{2}$ $y_2=x^sQ_m(x)e^{\gamma x}$ – частное решение y_2 ищем в таком виде.

$\gamma=0$ – не корень характеристического уравнения $\Rightarrow s=0$

$y_2=C_5x^3+C_6x^2+C_7x+C_8$

$y=y_{однор}+y_1+y_2$

Ответ: $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)+C_5x^3+C_6x^2+$
$+C_7x+C_8$

①

Балакин
Степан Иванович
РЭК-5

Условие:
Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференц. уравнения (не вычисляя коэф. частных решений)

$$y'' + 9y = 2x\sin 3x + xe^{3x}$$

$$y'' + 9y = 0$$

$$y = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

$$\lambda = \pm 3i$$

$$y = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix} = C_1(\cos(3x) + i\sin(3x)) +$$
$$+ C_2(\cos(3x) - i\sin(3x))$$

$$y = (C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\sin 3x =$$
$$= C_1\cos 3x + iC_2\sin 3x$$

$$y'' + 9y = xe^{3x}$$

$$y_{ч1} = a_1 e^{3x} + a_2 e^{3x} x$$

$$y'' + 9y = 2x\sin 3x$$

$$y_{ч2} = x(a_3\cos 3x + a_4 x\cos 3x + a_5\cos 3x + a_6 x\sin 3x)$$

Ответ: $y = C_1\cos 3x + iC_2\sin 3x + a_1 e^{3x} + a_2 e^{3x}x +$
$+ x(a_3\cos 3x + a_4 x\cos 3x + a_5\cos 3x + a_6 x\sin 3x)$

E-12

Найти общий вид решения линейного неоднородного дифф. уравнения

$$y'' - 8y' + 20y = 5x e^{4x} \sin 2x - 2x^2$$

$\boxed{1)}$ $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ $\cancel{D = 16 - 20 = -4}$

$\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i$ $D = 64 - 80 = -16$

Значит $y_{oo} = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x$

$\boxed{2)}$ $y'' - 8y' + 20y = 5x e^{4x} \sin 2x$

$y_{част_1} = x^s e^{\alpha x} (P(x) \cos\beta x + T(x) \sin\beta x)$

$\left\{\begin{array}{l} s\text{ - кратность корня } 4+2i \Rightarrow s = 1 \\ \deg P(x) = \deg T(x) = \deg(5x) = 1 \Rightarrow \\ \beta = 2 \end{array}\right.$ $y_{част_1} = x e^{4x} \cdot ((Ax+B)\cdot\cos 2x + (Cx+D)\cdot \sin 2x)$

$\boxed{3)}$ $y'' - 8y' + 20y = -2x^2$

$y_{част_2} = x^s Q(x) e^{\gamma x}$

$\left\{\begin{array}{l} s\text{-кратность } 0 \Rightarrow s = 0 \\ \deg Q(x) = \deg(-2x^2) = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow y_{част_2} = \tilde{A} x^2 + \tilde{B} x + \tilde{C}$

Ответ: $C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x +$

$+ x e^{4x} \cdot ((Ax+B)\cos 2x + (Cx+d) \sin 2x) +$

$+ \tilde{A} x^2 + \tilde{B} x + \tilde{C}$

second-order linear ordinary differential equation

Alternate forms:

$3\,y'(x) + x + \cos(2\,x) = y''(x)$

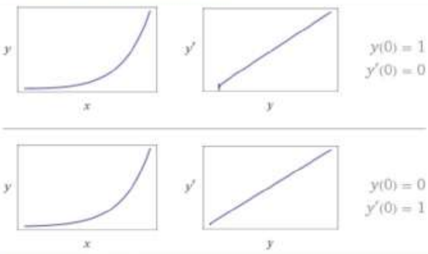
$y''(x) - 3\,y'(x) = x - \sin^2(x) + \cos^2(x)$

$y''(x) - 3\,y'(x) = x + \frac{1}{2}\,e^{-2\,i\,x} + \frac{1}{2}\,e^{2\,i\,x}$

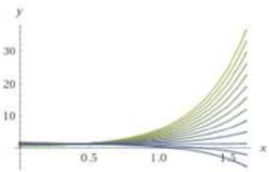
Differential equation solution: Approximate form | Step-by-step solution

$$y(x) = c_1\,e^{3\,x} + c_2 - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} - \frac{3}{26}\,\sin(2\,x) - \frac{1}{13}\,\cos(2\,x)$$

Plots of sample individual solutions:



Sample solution family: Enlarge | Customize | Plain Text



(sampling $y(0)$ and $y'(0)$)

Possible Lagrangian:

$$\mathcal{L}(y', y, x) = \frac{1}{2}\left(e^{-3\,x}\,(y')^2 + 2\,e^{-3\,x}\,y\,(x + \cos(2\,x))\right)$$

Коллерова Светлана Эдуардовна

Коллерова Светлана Эдуардовна

ГЭК 5

ODE-13 Найти вид общего решения линейного ~~урав~~ неодн. уравнения (не вычисляя коэффициентов частного решения)

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}\sin 2x$$

$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}\sin 2x$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$\lambda_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$\lambda_2 = -\frac{3-5}{2} = -4$

$y_{oo} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$

$f_1 = e^{-4x}$ $a = -4$ - корень $\Rightarrow r = 1$, $m = 0 \Rightarrow$

$y_1 = x^r Q_m(x) e^{ax} = x(A)e^{-4x} = Axe^{-4x}$

$f_2 = e^{-x} x \sin 2x = e^{-x}(x\sin 2x + 0\cdot\cos 2x)$.

$r = 0$, $m = 1$, $n = 0 \Rightarrow l = 1$

$y_2 = x^r e^{ax}(R_l(x)\cos bx + T_l(x)\sin bx) = e^{-x}((A_1 x + B_1)\cos 2x +$

$+ (C_2 x + D)\sin 2x)$

$y = y_{oo} + y_1 + y_2$

Ответ: $C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} + Axe^{-4x} + e^{-x}A_1 x\cos 2x +$

$+ e^{-x}B_1\cos 2x + e^{-x}Cx\sin 2x + e^{-x}D\sin 2x$

ДИФФУРЫ

№1

$y'' + y = 4\cos x + (x^2+1)e^x$

$\lambda^2 + 1 = 0$ – хар. уравнение

$\lambda = \pm i$

$y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$$y = c_1\cos x + c_2 \sin x + x(A\cos x + B\sin x) + \\ + (Cx^2 + Dx + E)e^x$$

№2

$y''' - y'' - 6y' = e^{3x} - \sin 3x$

$\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$

$y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x} + Axe^{3x} + B\cos 3x + C\sin 3x$

№3

$y'' - 3y' = x + e^{3x}\sin x$

$\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$

$y = c_1 + c_2 e^{3x} + x(Ax + B) + e^{3x}(C\cos x + D\sin x)$

№4

$y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x} - x^2\cos x$

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$\lambda=-1\pm 2i$$

$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+e^{-x}(Ax+B)+$$
$$+(Cx^2+Dx+E)\cos x+(Fx^2+Gx+H)\sin x$$

№5

$$y''-8y'+20y=5xe^{4x}\sin 2x-2x^2$$

$$\lambda^2-8\lambda+20=0$$

$$\lambda=4\pm 2i$$

$$y=e^{4x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+Ax^2+Bx+C+$$
$$+xe^{4x}((Dx+E)\cos 2x+(Fx+G)\sin 2x)$$

Махмутова Полина Викторовна ГЭК-4

ODE-15. Найти вид общего реш-я линейного неоднородного дифференц. ур-а (не вычис. коэф. част. реш-й):

$$y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$$

<u>Решение</u> Решаем однородное ур-е:

$y'' + 4y = 0.$

$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad y_{однор.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$

Найдем частное реш-е. $\quad y'' + 4y = f(x).$

1-я часть $f(x) = 2\sin 2x - 3\cos 2x$; 2-я $_{част.} = 1$

т.к. $\lambda = \pm 2i \Rightarrow$ реш-е хар. ур-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y_{1\text{-я част.}} = A_1 x \cdot \sin 2x + A_2 x \cos 2x$

$y_{2\text{-я част.}} = B_1.$

<u>Ответ.</u>

$$\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + A_1 x \sin 2x + A_2 x \cos 2x + B_1,}$$

где C_1, C_2 - произв. величины,

A_1, A_2, B_1 - фиксир. коэф.

Диф.ур. Решения

(1) Найти вид общего решения ЛНДУ (не вычисляя коэф-ты част. реш.)

$$y''' + y' = -4\sin x + e^{2x}\cdot\sin 4x$$

Решение:

1. Ищем общее решение соотв. однородн. ур-я $y''' + y' = 0$: (1)

2. Составляем характ. ур-е для (1):

$\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i$

$\Rightarrow Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{0}\cdot(C_2\cos x + C_3\sin x)$, $\lambda_1 = 0$

$Y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$

3. Ищем частное решение $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ неоднородн. ур-я:

$\tilde{y}_1 = (A_1\cos x + B_1\sin x)x = A_1 x\cos x + B_1 x\sin x$

$\tilde{y}_2 = e^{2x}(A_2\cos 4x + B_2\sin 4x)\cdot\cancel{x} = A_2\cancel{x}e^{2x}\cos 4x + B_2\cancel{x}e^{2x}\sin 4x$

$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = A_1 x\cos x + B_1 x\sin x + A_2\cancel{x}e^{2x}\cos 4x + B_2\cancel{x}e^{2x}\sin 4x$

Ответ: $y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + A_1 x\cos x + B_1 x\sin x + A_2 e^{2x}\cos 4x + B_2 e^{2x}\sin 4x$

(2) $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\cdot\sin 2x - 2x^2$

1) $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$

$D = 64 - 4\cdot 20 = 16\cdot(4-5) = -16$

$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 4i}{2} = 4 \pm 2i$

Сл-но, $Y = e^{4x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = C_1 e^{4x}\cos 2x + C_2 e^{4x}\sin 2x$

2) $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$

$\tilde{y}_1 = e^{4x}((Ax+B)\sin 2x + (Cx+D)\cos 2x)\cdot x$

$\tilde{y}_2 = Ex^2 + Fx + G$

Ответ: $y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{4x}\cos 2x + C_2 e^{4x}\sin 2x + x(Ax+B)e^{4x}\sin 2x + x(Cx+D)e^{4x}\cos 2x + Ex^2 + Fx + G$

(3) $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$

1) $\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda = \pm 2i \Rightarrow Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

2) $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$: $\tilde{y}_1 = (A\cos 2x + B\sin 2x)\cdot x$

$\tilde{y}_2 = C$

Отв: $y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + Ax\cos 2x + Bx\sin 2x + C$

(4) $y'' - 2y' + 5y = e^{x}\cos 2x - x^2$

1) $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$D = 4 - 20 = -16$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \Rightarrow Y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

2) $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$; $\tilde{y}_1 = e^{x}(A\sin 2x + B\cos 2x)\cdot x$

$\tilde{y}_2 = Cx^2 + Dx + E$

Ответ: $y = C_1 e^{x}\cos 2x + C_2 e^{x}\sin 2x + e^{x}\cdot x\cdot A\sin 2x + Bxe^{x}\cos 2x + Cx^2 + Dx + E$.

(5) $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{-3x}\cos x$

1. $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$, $D = 36 - 40 = -4$

~~$\lambda = \ldots = 0$~~

$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i \Rightarrow Y = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

2. $\tilde{y}_1 = e^{-3x}\cdot(Ax+B)\cdot$; $\tilde{y}_2 = e^{-3x}(C\cos x + D\sin x)\cdot x$

Отв: $y = C_1 e^{-3x}\cos x + C_2 e^{-3x}\sin x + Axe^{-3x} + Be^{-3x} + Cx\cos x\, e^{-3x} + Dxe^{-3x}\sin x$

(6) $y'' - 9y = 3e^{3x} - \cos x$

$\lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda = \pm 3 \Rightarrow y_{\text{общ одн}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$

$\tilde{y}_1 = Axe^{3x}$, $\tilde{y}_2 = B\cos x + C\sin x$

$\Rightarrow$ **Отв**: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + Axe^{3x} + B\cos x + C\sin x$

⑦ $y'' - 3y' = x + \cos 2x$

1. $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 3) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3\end{array}\right. \Rightarrow Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{3x}$

2. $\tilde{y} = x(Ax + B) + C\cos 2x + D\sin 2x$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + Ax^2 + Bx + C\cos 2x + D\sin 2x$

⑧ $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x + x^3 e^{2x}$

1. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda = 1 \\ \lambda = 2\end{array}\right. \Rightarrow Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

2. $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x + x(Cx^3 + Dx^2 + Ex + F)e^{2x}$

Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + A\cos 2x + B\sin 2x + Cx^4 e^{2x} + Dx^3 e^{2x} + Ex^2 e^{2x} + Fxe^{2x}$

$y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^{x}$

1. $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i \Rightarrow Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\tilde{y} = x(A\cos x + B\sin x) + (Cx^2 + Dx + E)e^{x}$

Отв: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(A\cos x + B\sin x) + e^{x}(Cx^2 + Dx + E)$

⑩ $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}\sin 2x$

1. $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda = 1 \\ \lambda = -4\end{array}\right. \Rightarrow Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$

2. $\tilde{y} = Ae^{-4x} + (Bx + C)e^{-x} \cdot (D\sin 2x + E\cos 2x)$

Отв: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} + Ae^{-4x} + (Bx + C)e^{-x} \cdot (D\sin 2x + E\cos 2x)$

⑪ $y''' + 4y'' = x - 1 + \cos 4x$

1. $\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_{12} = 0 \\ \lambda_3 = -4\end{array} \Bigg| \Rightarrow Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$

$Y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-4x}$

2. $\tilde{y} = (Ax + B)x^2 + C\cos 4x + D\sin 4x$

Отв: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-4x} + Ax^3 + Bx^2 + C\cos 4x + D\sin 4x$

⑫ $y'' + y = x\sin x + e^{x}\cos 2x$

1) $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i \Rightarrow Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. $\tilde{y} = ((Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x)x + e^{x}(E\sin 2x + F\cos 2x)$

Отв: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (Ax^2 + Bx)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x + e^{x}(E\sin 2x + F\cos 2x)$

⑬ $y''' - y'' - 6y' = e^{3x} - \sin 3x$

1. $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = -2$

$\Rightarrow Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$

$Y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x}$

2. $\tilde{y} = Ae^{3x} \cdot x + B\cos 3x + C\sin 3x$

Отв: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x} + Ae^{3x} \cdot x + B\cos 3x + C\sin 3x$

⑭ $y'' - 3y' = x + e^{3x}\sin x$

1. $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 3) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda = 0 \\ \lambda = 3\end{array}\right. \Rightarrow Y = C_1 + C_2 e^{3x}$

2. $\tilde{y} = x(Ax + B) + e^{3x}(C\sin x + D\cos x)$

Отв: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + Ax^2 + Bx + e^{3x}(C\sin x + D\cos$

15 $y'' + 4y = x\sin 2x - x^2$

1. $\lambda^2 + 4 = 0$, $\lambda = \pm 2i \Rightarrow Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

2. $\tilde{y} = \big((Ax+B)\sin 2x + (Cx+D)\cos 2x\big)x + Ex^2 + Fx + G$

Отв. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + (Ax^2 + Bx)\sin 2x +$
$+ (Cx^2 + Dx)\cos 2x + Ex^2 + Fx + G$

16 $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$

1. $\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda = \pm i \Rightarrow Y = C_1\cos x + C_2\sin x$

2. $\tilde{y} = x(A\cos x + B\sin x) + e^{-x} \cdot C$

Отв. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x + Ce^{-x}$

Кононенко Александр
ГЭК-4

ODE-20. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x - x^2$$

$\boxed{y_{о.о}}$ $y''_{о.о} - 2y'_{о.о} + 5y_{о.о} = 0$

Хар. многочлен $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = -4$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda - 1 = 2i \\ \lambda - 1 = -2i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 + 2i \\ \lambda = 1 - 2i \end{array}\right.$

$y_{о.о.} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$

$\boxed{y_{ч.н.1}}$ $y''_{ч.н.1} - 2y'_{ч.н.1} + 5y_{ч.н.1} = e^x \cos 2x$

Ищем его в виде:

т.к. ф-ция в правой части попала на корень хар.ур. кратности 1.

$y_{ч.н.1} = x(a \cos 2x + b \sin 2x)e^x \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{y_{ч.н.2}}$ $y''_{ч.н.2} - 2y'_{ч.н.2} + 5y_{ч.н.2} = -x^2$

Ищем его в виде ($-x^2 = -x^2 e^0$ ← не корень хар.ур.)

$y_{ч.н.2} = dx^2 + fx + g \quad ; d, g, f \in \mathbb{R}$

Т.к. $y_{о.н.} = y_{о.о} + y_{ч.н.} = y_{о.о.} + (y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2})$, то:

Ответ: $y(x) = c_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x +$
$+ x(a \cos 2x + b \sin 2x)e^x +$
$+ dx^2 + fx + g$

$c_1, C_2 \in \mathbb{R}$ – произвольные; $a, b, d, f, g \in \mathbb{R}$ – фиксир.