27 Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

Теорема: Если есть 2 КВФ-и, одна из к-рых положительно определенная, то $\exists$ базис / полож. опр. КВФ $\rightsquigarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а 2-ая КВФ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Т.к. $I(v)$ - 1-ая КВФ полож. опред. $\Rightarrow$ в $\forall$-ой
$II(v)$ - 2-ая КВФ.

касат. плоскости $T_x M$ $\exists$ базис e_1, e_2 / для вектора $v = e_1 v^1 + e_2 v^2$: $I(v) = (v^1)^2 + (v^2)^2$
$II(v) = k_1 (v^1)^2 + k_2 (v^2)^2$

т.е. $I \rightsquigarrow I$ и $II \rightsquigarrow \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

Опр. k_1, k_2 - главные кривизны M в т. x
e_1, e_2 - главные направления пов-ти M в т. x

Зам: 1) k_1 и k_2 - корни ур-я $\det(B - \lambda G) = 0$ матр. II, матр. I
2) $k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ базис !-н с точностью до знака

Утв 1. Пусть M - гладкая пов-ть, $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^3$
Пусть в $\mathbb{R}^3$ x^1, x^2, x^3 - ортог. СК с началом в т. x_0 / первые два базисных в-ра совпадают с главными направлениями M в т. x_0

Тогда в окрестности т. x_0: M задаётся ур-ием
$$x^3 = f(x^1, x^2), \text{ где } f(x^1, x^2) = \frac{k_1 (x^1)^2 + k_2 (x^2)^2}{2} + \bar{\bar{o}}((x^1)^2 + (x^2)^2)$$

$\triangleright$ 1) $x^3 = 0$ - касат. плоскость к M в т. $x_0 \Rightarrow$ при $\forall$ регул. парам-ция $r(u^1, u^2)$ заданной в окр-ти т. x_0, т.е. 3-я координата в-ров r_{u^1} и r_{u^2} равна 0 в т. x_0 $\Rightarrow$ минор $\left(\frac{\partial r^i}{\partial u^j}\right)_{i,j=1,2} \neq 0 \Rightarrow$ в окрестности т. x_0 можно лок. взять координаты x^1, x^2 и лок. пов-ть представляется как $x^3 = f(x^1, x^2)$ гладкая ф-ция

2) т.к. $x^3 = 0 - T_{x_0}M$, то $f_{x^1}(0,0) = f_{x^2}(0,0) = 0$

(т.к. первые 2 оси координат направлены вдоль главных направлений и базис ортонорм., то

$$II_{x_0} = k_1 (dx^1)^2 + k_2 (dx^2)^2$$

$r = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$
$r_{u^1} = (1, 0, f_{u^1})$
$r_{u^2} = (0, 1, f_{u^2})$

С другой стороны, $b_{ij}(0,0) = (n, r_{u^i u^j})(0,0) =$

$= f_{x^i x^j}(0,0) \Rightarrow f_{x^1x^1} = k_1,\ f_{x^2x^2} = k_2,\ f_{x^1x^2} = 0$ в т. x_0

По ф-ле Тейлора $f(x^1, x^2) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{f_{x^1}(0,0)}_{=0} x^1 + \underbrace{f_{x^2}(0,0)}_{=0} x^2 + \bar{o}((x^1)^2 + (x^2)^2) +$

$+ \frac{1}{2}(f_{x^1x^1}(0,0)(x^1)^2 + 2f_{x^1x^2} x^1x^2 + f_{x^2x^2}(0,0)(x^2)^2) =$

$= \frac{k_1 (x^1)^2 + k_2 (x^2)^2}{2} + \bar{o}((x^1)^2 + (x^2)^2)$ ◭

Утв 2. (ф-ла Эйлера): Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - в-ры главных направл. пов-ти M в т. x_0

Пусть k_1, k_2 - соответств. главные кривизны пов-ти M в т. x_0.

Пусть $0 \neq \vec{v} \in T_{x_0}M$

$\Rightarrow k_v = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$, где $\varphi = \angle \vec{v}, \vec{e}_1$

◮ Пусть $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 \Rightarrow I(v) = (v^1)^2 + (v^2)^2$, $II(v) = k_1 (v^1)^2 + k_2 (v^2)^2$

$$\Rightarrow k_v = \frac{II(v)}{I(v)} = \frac{k_1 (v^1)^2 + k_2 (v^2)^2}{(v^1)^2 + (v^2)^2} = k_1 \underbrace{\left(\frac{v^1}{\sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}}\right)^2}_{=\cos^2\varphi} + k_2 \underbrace{\left(\frac{v^2}{\sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}}\right)^2}_{\sin^2\varphi}$$ ◭

Следствие из Утв 1: Пусть пов-ть M в окрестности т. x_0 / $k_1, k_2 \neq 0$ приближается с точностью до $\bar{o}(\Delta x^2)$ эллиптическим или гиперболическим параболоидом.

- Если $\underbrace{k_1 \cdot k_2}_{\text{гауссова кривизна}} > 0$, то эллиптическим, локально по одну сторону от касат. плоскости
- Если $K = k_1 k_2 < 0$, то гиперболическим, пов-ть пересекается с касат. плоскостью по паре дуг.