Модель Блюма-Изли с беск. числом агентов

① Активы и агенты

- N активов

Векторы выплат $X_t = (X_{t,1},\dots,X_{t,N}) \in \{e_1,\dots,e_N\}$ н.о.р.

- Пр-во агентов

$(S, \mathcal{B}(S), \mu_t)$

$S = \Delta^N := \{ s \in \mathbb{R}^N_+ : s_1 + \dots + s_N = 1\}$

$\mu_t = \mu_t(\omega, A)$ - мера, задающая распр-е капитала в м-т t; $A \in \mathcal{B}(S)$

$\mu_t(S) = 1$ для всех t, ω; μ_0 - не случайная

② Динамика капитала

$$\mu_{t+1}(A) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_A s_n \mu_t(ds)}{\int_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n}$$

(обе части также зависят от ω)

<u>Утв.</u> Эта формула действительно задает меру ($\forall t, \omega$), т.е. выполнена счетная аддитивность.

$\forall \omega \quad A \mapsto \mu_{t+1}(\omega, A)$ - мера

$\forall A \quad \omega \mapsto \mu_{t+1}(\omega, A)$ - сл. вел.

③ Оптимальные стратегии

<u>Опр.</u> Стратегия $s^* \in S$ <u>эволюционно устойчива</u>, если

$\forall \mu_0$ т.ч. $s^* \in \operatorname{supp} \mu_0$ (носитель меры)

$\mu_t \xrightarrow{w} \delta_{s^*}$ п.н. где δ_{s^*} - мера Дирака в т. s^*

Более сильное свойство, чем выживаемость

<u>Утв.</u> Следующее опр. эквивалентно предыдущему:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_0(B_\varepsilon(s^*)) > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \mu_t(B_\varepsilon(s^*)) = 1$ п.н.

где $B_\varepsilon(s^*) = \{ s \in S : \|s - s^*\| \le \varepsilon \}$

$\mu_0 : \forall \varepsilon > 0 \ \mu_0(B_\varepsilon(s^*)) > 0$

$\Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \mu_t(B_\varepsilon(s^*)) \to 1$

?

<u>Т-ма</u> Стратегия

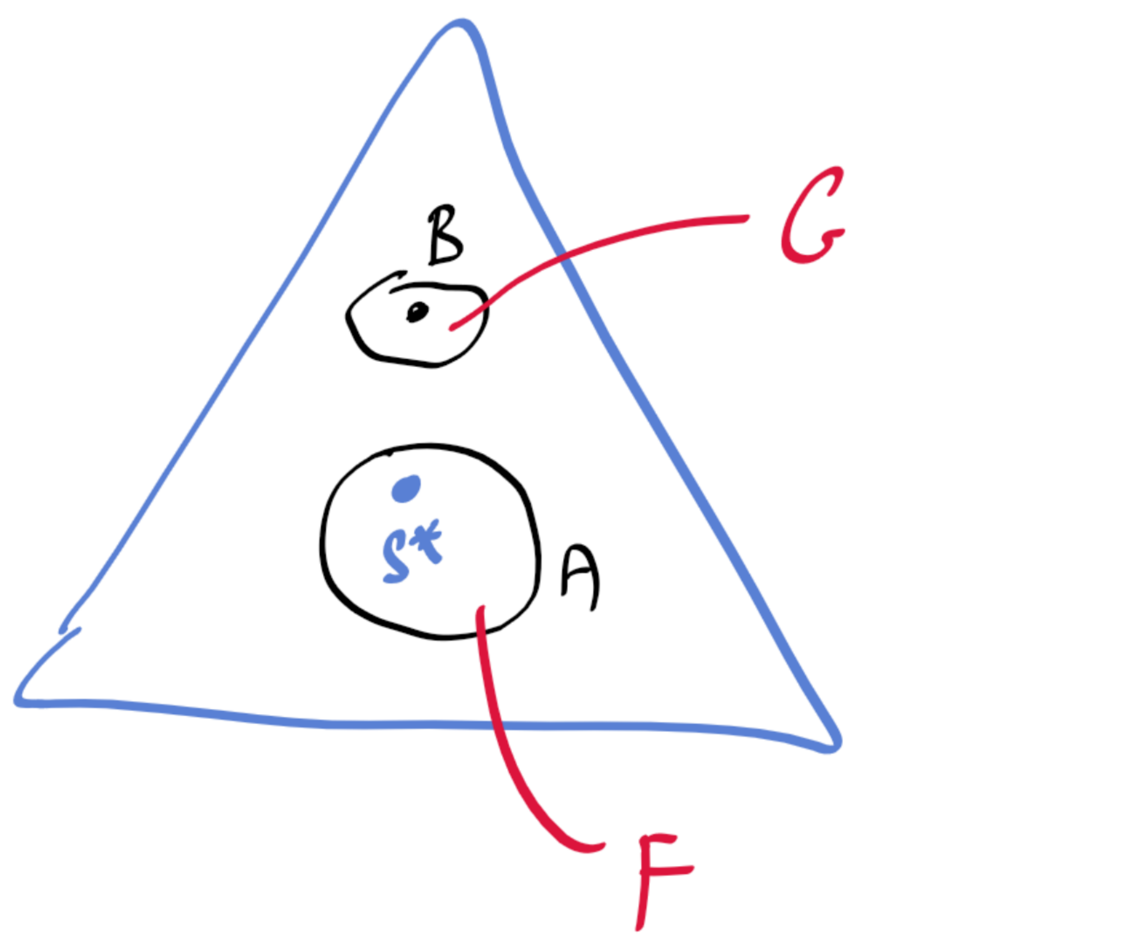
$$s^*_n = E X_{t,n} \ (= P(X_t = e_n))$$

эволюционно устойчива

<u>Д-во</u> $A = B_\varepsilon(s^*)$, ε „достаточно малое"

Возьмем $B \subset S$ выпуклое и такое, что для некоторого $\delta > 0$

$$\min_{s \in B} \|s - s^*\| \ge \max_{s \in A} \|s - s^*\| + \delta$$



Нужно показать, что

$$\frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B)} \to \infty \text{ п.н.} \left(\text{или } Z_t := \ln \frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B)} \to \infty \right)$$

Имеем

$$Z_t = Z_0 + \sum_{u=0}^{t-1}\left(Z_{u+1} - Z_u\right) = Z_0 + \sum_{u=0}^{t-1}\left(E_u Z_{u+1} - Z_u\right) + \underbrace{\sum_{u=0}^{t-1}\left(Z_{u+1} - E_u Z_{u+1}\right)}_{\text{мартингал}}$$

$$\frac{1}{t} Z_t \to \ldots > 0$$

Пусть $D_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$:

$$D_{t+1} = \ln \frac{\mu_{t+1}(A)}{\mu_t(A)} - \ln \frac{\mu_{t+1}(B)}{\mu_t(B)} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\frac{1}{\mu_t(A)} \int_A s_n \mu_t(ds)}{\frac{1}{\mu_t(B)} \int_B s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n}$$

Тогда

$$E_t D_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\frac{1}{\mu_t(A)} \int_A s_n \mu_t(ds)}{\frac{1}{\mu_t(B)} \int_B s_n \mu_t(ds)} s_n^* =: \sum_{n=1}^{N} s_n^* \ln \frac{F_n}{G_n}$$

В силу выпуклости A, B имеем

$$F \in A, \quad G \in B$$

Тогда

$$E_t D_{t+1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} s_n^* \ln \frac{s_n^*}{G_n}}_{\text{нер-во Пинскера}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} s_n^* \ln \frac{s_n^*}{F_n}}_{\text{обр. нер-во Пинскера}} \geq \frac{1}{2}|s^* - G|^2 - \frac{|s^* - F|^2}{2 \min_n F_n}$$

Здесь $|\cdot|$ – L^1-норма, т.е. $|x| = \sum_{n=1}^{N} |x_n|$

Теперь выбором ε и δ можно сделать правую часть > 0 для любых F и G

(при условии $s_n^* > 0$ для всех $n \Rightarrow \min_n F_n > 0$)