Семинар 6

Ур-ния Максвелла

1) Уравнения в вакууме.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} div = \vec{\nabla}\vec{a} \\ \vec{\nabla}\times \;= rot\,\vec{a} \\ \vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right)$$

Хевисайд: $\frac{1}{c}$ сирова

Гауссова: $\rho \to 4\pi\rho$; $j \to 4\pi j$

формула Остроградского - Гаусса:

$$\iiint\limits_V \vec{\nabla}\vec{a}\, dV = \iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})\, dS$$ — интеграл от дивергенции = потоку вектора через S

~~гр~~ теорема Стокса:

$$\int\limits_\Sigma \vec{\nabla}\times\vec{a}\cdot ds = \int\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l}$$

Ур-ния в инт. форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \\ \oint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \\ \oint\limits_l \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \\ \oint\limits_l \vec{B}\, d\vec{l} = I + \frac{d}{dt}\int\limits_S \vec{E}\, d\vec{s} \end{cases}$$

Статика: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Вывод волновых уравнений.

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянная

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \ldots = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \ldots = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$ аналогично: $\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Продолжаем про статику:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$; $E = -\vec{\nabla} \varphi$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\rho$$

$\alpha\, \delta(\cancel{x})\, \delta(y)$

Введём функцию Грина:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \longrightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3x'$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int \frac{\rho(\vec{r}') d^3x'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}}$$