Стохастический анализ

⊙ $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ $\quad B, W \quad (\mathcal{F}_t)$ – BM

$$B_t W_t = \int_0^t B_s \, dW_s + \int_0^t W_s \, dB_s \; + [B,W]_t \quad \text{(инт. по частям)}$$

Возьмём $B = W$:

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s \, dW_s + t \quad / \; E(\cdot)$$

$$t = E(W_t^2) \neq 2E\left[\int_0^t W_s \, dW_s\right] = 0$$

⊙ $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ $\quad W \quad (\mathcal{F}_t)$ – BM

$H = (H_t)$ прогр изм процесс т.ч.

$$\int_0^t H_s^2 \, ds < \infty \text{ п.н.} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Тогда $\left(\int_0^t H_s \, dW_s\right)_{t \in [0,\infty)}$ опр-не.

Вопрос: верно ли, что $E\left[\int_0^t H_s \, dW_s\right] = 0$?

Ответ: $E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < \infty \Longrightarrow$ верно;

в общем случае — нет.

Св-во: • Если $E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty$, то

$\left(\int_0^t H_s \, dW_s\right)_{t \in [0,T]}$ квадр инт мартингал,

кот выходит из нуля,

$$\left.\begin{aligned} &E\left[\int_0^t H_s \, dW_s\right] = 0 \\ \text{(изометрия)} \quad &E\left[\left(\int_0^t H_s \, dW_s\right)^2\right] = E\int_0^t H_s^2 \, ds \end{aligned}\right\} t \in [0,T]$$

- Если только $\int_0^T H_s^2\, ds < \infty$ п.н., то

$\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)_{t\in[0,T]}$ непрер. локальный мартингал, выходит из нуля, с квадратичной вариацией

$$\left[\int_0^{\cdot} H_s\, dW_s\right]_t = \int_0^t H_s^2\, ds, \quad t\in[0,T].$$

<u>Задача</u> Приведите пример процесса (H_t) т.ч. $\int_0^\infty H_s\, dW_s$ определён, но

$$E\left(\int_0^\infty H_s\, dW_s\right) \text{ определено и } \neq 0,$$
$$E\left[\left(\int_0^\infty H_s\, dW_s\right)^2\right] \neq E\int_0^\infty H_s^2\, ds$$