Рассматриваем случай двух игроков. Введем дополнительное предположение
$$\sum_i \lambda^i_{t-1,0} w^i_{t-1} = \alpha \sum_i \lambda^i_{t,0} w^i_t$$
Введем следующие обозначения
$$r^i_t = \frac{w^i_t}{w^1_t + w^2_t}$$
$$\xi_t = \frac{r^1_t}{r^2_t} = \frac{w^1_t}{w^2_t}$$
$$w^i_t = \alpha \sum_{k=1}^{K} X^i_{t-1,k}(D_{t,k} + p_{t,k}) + X^i_{t-1,0}$$
$$X^i_{t,k} = \frac{\lambda^i_{t,k} w^i_t}{p_{t,k}}, \qquad X_{t,0} = \lambda^i_{t,0} w^i_t$$
$$p_{t,k} = \sum_i \lambda^i_{t,k} w^i_t$$
$$W_{t,0} = \sum_i \lambda^i_{t,0} w^i_t$$

Лемма 1. *1)* $\sum\limits_i X^i_{t,k} = 1$

2) $\sum\limits_i w^i_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}|D_t|$

Доказательство.
$$1. \sum_i X^i_{t,k} = \sum_i \frac{\lambda^i_{t,k} w^i_t}{p_{t,k}} = \frac{p_{t,k}}{p_{t,k}} = 1$$

$$2. \sum_i w^i_t = \sum_i \left[\alpha \sum_{k=1}^{K} X^i_{t-1,k}(D_{t,k} + p_{t,k}) + X^i_{t-1,0}\right] =$$
$$\alpha \sum_{k=1}^{K} \sum_i X^i_{t-1,k}(D_{t,k}+p_{t,k}) + \sum_i X^i_{t-1,0} = \alpha \sum_{k=1}^{K}(D_{t,k}+p_{t,k}) + \sum_i X^i_{t-1,0} =$$
$$\alpha|D_t| + \alpha \sum_i (1-\lambda^i_{t,0}) w^i_t + \sum_i \lambda^i_{t-1,0} w^i_{t-1} = \alpha|D_t| + \alpha \sum_i w^i_t + \sum_i (\lambda^i_{t-1,0} w^i_{t-1} - \alpha \lambda^i_{t,0} w^i_t)$$

□

Предложение 1. $r^i_{t+1} = \alpha \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^i_{t,k} r^i_t}{\sum\limits_j \lambda^j_{t,k} r^j_t} \left(\frac{D_{t+1,k}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}|D_{t+1}|} + \sum\limits_j \lambda^j_{t+1,k} r^j_{t+1} \right) + \lambda^i_{t,0} r^i_t \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$

Доказательство.

$$w^i_{t+1} = \alpha \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^i_{t,k} w^i_t}{p_{t,k}} (D_{t+1,k} + p_{t+1,k}) + \lambda^i_{t,0} w^i_t =$$

$$\alpha \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^i_{t,k} w^i_t}{\sum\limits_j \lambda^j_{t,k} w^j_t} (D_{t+1,k} + \sum_j \lambda^j_{t+1,k} w^j_{t+1}) + \lambda^i_{t,0} w^i_t$$

Тогда

$$r^i_{t+1} = \alpha \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^i_{t,k} r^i_t}{\sum\limits_j \lambda^j_{t,k} r^j_t} \Big(\frac{D_{t+1,k}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}|D_{t+1}|} + \sum_j \lambda^j_{t+1,k} r^j_{t+1} \Big) + \lambda^i_{t,0} \frac{w^i_t}{\sum_j w^j_{t+1}} =$$

$$\alpha \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^i_{t,k} r^i_t}{\sum\limits_j \lambda^j_{t,k} r^j_t} \Big(\frac{D_{t+1,k}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}|D_{t+1}|} + \sum_j \lambda^j_{t+1,k} r^j_{t+1} \Big) + \lambda^i_{t,0} \frac{r^i_t \frac{\alpha}{1-\alpha}|D_t|}{\frac{\alpha}{1-\alpha}|D_{t+1}|}$$

$\square$

Предложение 2. $\xi_{t+1} \geq \xi_t \frac{\sum\limits_{k=1}^K \frac{\lambda^1_{t,k}}{\lambda^1_{t,k}\xi_t + \lambda^2_{t,k}} \left[(1-\alpha) R_{t+1,k} + \alpha \lambda^2_{t+1,k} \right] + \lambda^1_{t,0} \frac{1}{r^2_t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}{\sum\limits_{k=1}^K \frac{\lambda^2_{t,k}}{\lambda^1_{t,k}\xi_t + \lambda^2_{t,k}} \left[(1-\alpha) R_{t+1,k} + \alpha \lambda^1_{t+1,k} \right] + \lambda^2_{t,0} \frac{1}{r^2_t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}$

Доказательство. Введем следующее обозначение

$$C^{ij}_{t,k} = \frac{\lambda^i_{t,k} r^i_t}{\lambda^i_{t,k} r^i_t + \lambda^j_{t,k} r^j_t}$$

Тогда

$$r^i_{t+1} = \alpha \sum_{k=1}^K C^{ij}_{t,k} \Big(\frac{D_{t+1,k}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}|D_{t+1}|} + \lambda^i_{t+1,k} r^i_{t+1} + \lambda^j_{t+1,k} (1 - r^i_{t+1}) \Big) + \lambda^i_{t,0} r^i_t \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$$

Введем еще несколько обозначений

$$B^{ij}_{t+1} = 1 + \alpha \sum_{k=1}^K C^{ij}_{t,k} (\lambda^j_{t+1,k} - \lambda^i_{t+1,k})$$

$$A^{ij}_{t+1} = \sum_{k=1}^{K} C^{ij}_{t,k}\Big[(1-\alpha)R_{t+1,k} + \alpha\lambda^{j}_{t+1,k}\Big] + \lambda^{i}_{t,0} r^{i}_{t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$$

Тогда

$$B^{ij}_{t+1} - B^{ji}_{t+1} = \alpha \sum_{k=1}^{K} (C^{ij}_{t,k} + C^{ji}_{t,k})(\lambda^{j}_{t+1,k} - \lambda^{i}_{t+1,k}) = \alpha(\lambda^{i}_{t+1,0} - \lambda^{j}_{t+1,0})$$

Пусть выполнено $\lambda^{1}_{t+1,0} - \lambda^{2}_{t+1,0} \leq 0$. Тогда $B^{12}_{t+1} \leq B^{21}_{t+1}$.

Таким образом

$$\frac{r^{i}_{t+1}}{r^{j}_{t+1}} = \frac{A^{ij}_{t+1}/B^{ij}_{t+1}}{A^{ji}_{t+1}/B^{ji}_{t+1}}$$

Тогда

$$\frac{r^{1}_{t+1}}{r^{2}_{t+1}} \geq \frac{B^{12}_{t+1}}{B^{21}_{t+1}} \frac{r^{1}_{t+1}}{r^{2}_{t+1}} = \frac{A^{12}_{t+1}}{A^{21}_{t+1}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} C^{12}_{t,k}\Big[(1-\alpha)R_{t+1,k} + \alpha\lambda^{2}_{t+1,k}\Big] + \lambda^{1}_{t,0} r^{1}_{t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}{\sum\limits_{k=1}^{K} C^{21}_{t,k}\Big[(1-\alpha)R_{t+1,k} + \alpha\lambda^{1}_{t+1,k}\Big] + \lambda^{2}_{t,0} r^{2}_{t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}$$

Заметим, что здесь вместо $\frac{B^{12}_{t+1}}{B^{21}_{t+1}}$ можно подставить подходящий процесс. Отсюда следует

$$\frac{r^{1}_{t+1}}{r^{2}_{t+1}} \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{1}_{t,k} r^{1}_{t}}{\lambda^{1}_{t,k} r^{1}_{t} + \lambda^{2}_{t,k} r^{2}_{t}}\Big[(1-\alpha)R_{t+1,k} + \alpha\lambda^{2}_{t+1,k}\Big] + \lambda^{1}_{t,0} r^{1}_{t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}{\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{2}_{t,k} r^{2}_{t}}{\lambda^{1}_{t,k} r^{1}_{t} + \lambda^{2}_{t,k} r^{2}_{t}}\Big[(1-\alpha)R_{t+1,k} + \alpha\lambda^{1}_{t+1,k}\Big] + \lambda^{2}_{t,0} r^{2}_{t} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}$$

□

$$Y_t = -\ln r^{1}_{t}$$

$$Z_{t,k} = \ln\left(1 + \frac{r^{2}_{t}\lambda_{t,k}}{r^{1}_{t}\lambda^{*}_{t,k}}\right)$$

$$Z_t = \sum_{k=1}^{K} \lambda^{*}_{t,k} Z_{t,k}$$

$$U_t = Y_t - Z_t$$

Лемма 2. $U_t \geq \lambda^*_{t,0} \ln\Big(1 + \frac{r_t^2 \lambda_{t,0}}{r_t^1 \lambda^*_{t,0}}\Big)$

Доказательство.

$$Y_t - Z_t = \sum_{k=0}^{K} \lambda^*_{t,k} \ln \frac{1}{r_t^1} - \sum_{k=1}^{K} \lambda^*_{t,k} \ln\left(1 + \frac{r_t^2 \lambda_{t,k}}{r_t^1 \lambda^*_{t,k}}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{K} \lambda^*_{t,k} \ln \frac{\lambda^*_{t,k}}{r_t^1 \lambda^*_{t,k} + r_t^2 \lambda_{t,k}} + \lambda^*_{t,0} \ln\left(1 + \frac{r_t^2 \lambda_{t,0}}{r_t^1 \lambda^*_{t,0}}\right) \geq \lambda^*_{t,0} \ln\left(1 + \frac{r_t^2 \lambda_{t,0}}{r_t^1 \lambda^*_{t,0}}\right)$$

□

$$\zeta_t = \alpha Z_t + (1-\alpha) Y_t$$

Лемма 3. $\zeta_{t+1} \leq \sum_{k=1}^{K} \Big[\alpha \lambda^*_{t+1,k} + (1-\alpha) R_{t+1,k}\Big] Z_{t,k} + \Big[\lambda_{t,0} - \lambda^*_{t,0} \frac{\xi_t}{\xi_{t+1}}\Big] \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$

Доказательство.

$$\xi_{t+1} \geq \xi_t \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{\lambda^1_{t,k}}{\lambda^1_{t,k}\xi_t + \lambda^2_{t,k}} \Big[(1-\alpha) R_{t+1,k} + \alpha \lambda^2_{t+1,k}\Big] + \lambda^1_{t,0} \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}{\sum\limits_{k=1}^{K} \frac{\lambda^2_{t,k}}{\lambda^1_{t,k}\xi_t + \lambda^2_{t,k}} \Big[(1-\alpha) R_{t+1,k} + \alpha \lambda^1_{t+1,k}\Big] + \lambda^2_{t,0} \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^2_{t,k}}{\lambda^1_{t,k}\xi_t + \lambda^2_{t,k}} \Big[(1-\alpha) R_{t+1,k} + \alpha \lambda^1_{t+1,k}\Big] + \lambda^2_{t,0} \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|} \geq$$

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^1_{t,k}\xi_t}{\lambda^1_{t,k}\xi_t + \lambda^2_{t,k}} \Big[(1-\alpha) \frac{R_{t+1,k}}{\xi_{t+1}} + \alpha \frac{\lambda^2_{t+1,k}}{\xi_{t+1}}\Big] + \lambda^1_{t,0} \frac{\xi_t}{\xi_{t+1}} \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$$

Обозначим $y_{t,k} = \frac{\lambda_{t,k}}{\xi_t}, |y_t| = \sum\limits_{k=0}^{K} y_{t,k}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{y_{t,k}}{\lambda^*_{t,k} + y_{t,k}} \Big[(1-\alpha) R_{t+1,k} + \alpha \lambda^*_{t+1,k}\Big] + \lambda^2_{t,0} \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|} \geq$$

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^*_{t,k}}{\lambda^*_{t,k} + y_{t,k}} \Big[(1-\alpha) R_{t+1,k} |y_{t+1}| + \alpha y_{t+1,k}\Big] + \lambda^1_{t,0} \frac{\xi_t}{\xi_{t+1}} \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$$

То есть

$$\alpha\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda^*_{t,k}y_{t+1,k}-\lambda^*_{t+1,k}y_{t,k}}{\lambda^*_{t,k}+y_{t,k}}+(1-\alpha)\sum_{k=1}^{K}R_{t+1,k}\frac{\lambda^*_{t,k}|y_{t+1}|-y_{t,k}}{\lambda^*_{t,k}+y_{t,k}}+ \\ \Big[\lambda^*_{t,0}\frac{\xi_t}{\xi_{t+1}}-\lambda_{t,0}\Big]\frac{1}{r_t^2}\frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}\le 0$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda^*_{t,k}y_{t+1,k}-\lambda^*_{t+1,k}y_{t,k}}{\lambda^*_{t,k}+y_{t,k}}\ge Z_{t+1}-\sum_{k=1}^{K}\lambda^*_{t+1,k}Z_{t,k}$$

$$\sum_{k=1}^{K}R_{t+1,k}\frac{\lambda^*_{t,k}|y_{t+1}|-y_{t,k}}{\lambda^*_{t,k}+y_{t,k}}\ge Y_{t+1}-\sum_{k=1}^{K}R_{t+1,k}Z_{t,k}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha Z_{t+1}+(1-\alpha)Y_{t+1}\le\sum_{k=1}^{K}\Big[\alpha\lambda^*_{t+1,k}+(1-\alpha)R_{t+1,k}\Big]Z_{t,k}+\Big[\lambda_{t,0}-\lambda^*_{t,0}\frac{\xi_t}{\xi_{t+1}}\Big]\frac{1}{r_t^2}\frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}$$

□

Следствие 1. $\mathbb{E}_t\zeta_{t+1}+(1-\alpha)U_t\le\zeta_t+\mathbb{E}_t\Big[(\lambda_{t,0}-\lambda^*_{t,0}\frac{\xi_t}{\xi_{t+1}})\frac{1}{r_t^2}\frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}\Big]$

Доказательство.

$$\mathbb{E}_t\zeta_{t+1}\le\sum_{k=1}^{K}\lambda^*_{t,k}Z_{t,k}+\mathbb{E}_t\Big[(\lambda_{t,0}-\lambda^*_{t,0}\frac{\xi_t}{\xi_{t+1}})\frac{1}{r_t^2}\frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}\Big]$$

Тогда

$$\mathbb{E}_t\zeta_{t+1}+(1-\alpha)U_t\le Z_t+(1-\alpha)Y_t-(1-\alpha)Z_t+\mathbb{E}_t\Big[(\lambda_{t,0}-\lambda^*_{t,0}\frac{\xi_t}{\xi_{t+1}})\frac{1}{r_t^2}\frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}\Big]= \\ \zeta_t+\mathbb{E}_t\Big[(\lambda_{t,0}-\lambda^*_{t,0}\frac{\xi_t}{\xi_{t+1}})\frac{1}{r_t^2}\frac{|D_t|}{|D_{t+1}|}\Big]$$

□

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{E}_t \zeta_{t+1} \leq \zeta_t + \mathbb{E}_t \Big[(\lambda_{t,0} - \lambda^*_{t,0} \frac{\xi_t}{\xi_{t+1}}) \frac{1}{r_t^2} \frac{|D_t|}{|D_{t+1}|} \Big] - (1-\alpha)\lambda^*_{t,0} \ln\Bigg(1 + \frac{r_t^2 \lambda_{t,0}}{r_t^1 \lambda^*_{t,0}}\Bigg)$$

Замечание 1. *В доказательстве мы считали, что*

$$\mathbb{E}_t \Big[\alpha \lambda^*_{t+1,k} + (1-\alpha) R_{t+1,k} \Big] = \lambda^*_{t,k}$$