04.10.20. Дискр. матем. д/з от семинара 5.

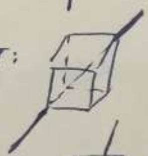
(1) Грани кубика в 3 цвета, одновременно вершины – в 2 цвета. Сколько раскрасок?

Решение: посчитаем цикловой индекс действия группы G симметрий кубика при действии на мн-во $\{$вершины $\cup$ грани$\}$, причем z_i – для граней, w_j – для вершин.

1шт: e $\quad z_1^6 w_1^8$

3·2шт: 90 и 270  $z_1^2 z_4 (w_4)^2$

3шт: 180°  $z_1^2 z_2^2 (w_2)^4$

2·4шт:  $(z_3)^2 (w_1)^2 (w_3)^2$

6шт:  $(z_2)^3 (w_2)^4$

$$\Rightarrow P_G = \frac{1}{24}\left(z_1^6 w_1^8 + 6 z_1^2 z_4 (w_4)^2 + 3 z_1^2 z_2^2 (w_2)^4 + 8 (z_3)^2 (w_1)^2 (w_3)^2 + 6 (z_2)^3 (w_2)^4\right)$$

Чтобы посчитать кол-во раскрасок, присвоим каждому из цветов вес $=1$, тогда вместо всех z_i надо подставить по т. Пойа $\Sigma(\text{весов})^i = 1^i+1^i+1^i = 3$, а вместо всех w_i – подставим 2.

$$\Rightarrow \sum_F w(F) = \frac{1}{24}\left(3^6\cdot 2^8 + 6\cdot 3^3\cdot 2^2 + 3\cdot 3^4\cdot 2^4 + 8\cdot 3^2\cdot 2^4 + 6\cdot 3^3\cdot 2^4\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{24}}_{24 = 3\cdot 2^3}\left(3^6\cdot 2^8 + 3^4\cdot 2^3 + 3^5\cdot 2^4 + 3^2\cdot 2^7 + 3^4\cdot 2^5\right) =$$

$$= 3^5\cdot 2^5 + 3^3 + 3^4\cdot 2 + 3\cdot 2^4 + 3^3\cdot 2^2 = \underbrace{3^5\cdot 2^5 + 3\cdot 2^4}_{=3\cdot 2^4(81\cdot 2+1)} + \underbrace{3^3\cdot 5 + 3^4\cdot 2}_{=3^3\cdot 11} = 48\cdot 163 + 27\cdot 11 =$$

$$= 7824 + 297 = 8121$$

(2) Правильный $2n$-угольник в 3 цвета. Сколько раскрасок? (только повороты)

Решение: ~~[illegible]~~

$\alpha = \frac{2\pi}{2n}$

Группа преобразований правильного $2n$-угольника – состоит из $2n$ поворотов, каждый на угол $\beta = i\cdot\alpha$.

Если поворот на $i \cdot \alpha$, то орбита длины $\frac{НОК(2n, i)}{i} = \frac{2n \cdot i / НОД(2n,i)}{i} = \frac{2n}{НОД(2n,i)}$,

а кол-во орбит равно $\frac{2n}{\text{длина орбит}} = НОД(2n, i)$

Всего поворотов с такими же св-вами столько же, сколько $\exists j: 1 \le j \le 2n$: $НОД(2n, i) = НОД(2n, j)$, то есть $\varphi\left(\frac{2n}{НОД(2n,i)}\right)$

$$\Rightarrow P_G = \frac{1}{2n} \sum_{d|2n} \varphi\left(\frac{2n}{d}\right) \left(z_{\frac{2n}{d}}\right)^d$$

подставляем вместо каждого z_i: $1^i + 1^i + 1^i = 3$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_F W(F) = \frac{1}{2n} \sum_{d|2n} \varphi\left(\frac{2n}{d}\right) \cdot (2n)^d}$$

3. Сколько ожерелий из $n = 15$ камней стоимости 30 у.е, если красный - стоит 1 у.е, синий - 2, зеленый - 3.

Решение: Ожерелье можно поворачивать (15 поворотов) и еще симметрии. (15 симметрий)

поворот: $\alpha = \frac{2\pi}{15}$

e : $(z_1)^{15}$

α : z_{15} — их кол-во $= \varphi(15) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$

1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14

3α : $(z_5)^3$

3, 6, 9, 12

5α : $(z_3)^5$

5, 10

Симметрии: 15 штук (через вершину и противоп. ребро) : $z_1 \cdot (z_2)^7$

$$\Rightarrow P_G = \frac{1}{30} \left(z_1^{15} + 8 z_{15} + 4(z_5)^3 + 2(z_3)^5 + 15 z_1 (z_2)^7 \right)$$

Поскольку нам не важно, сколько именно камней каждого цвета, а важно только, что их в сумме 15 — то переменная будет одна (ну пусть x), а поскольку стоимость камней разных цветов различается — то красному соотв x, синему — x^2, зеленому — x^3 $\Big\} \Rightarrow z^i \longmapsto z^i + z^{2i} + z^{3i}$

$$\Rightarrow \sum_F W(F) = \frac{1}{30} \left((x + x^2 + x^3)^{15} + 8(x^{15} + x^{30} + x^{45}) + 4 \cdot (x^5 + x^{10} + x^{15})^3 + 2(x^3 + x^6 + x^9)^5 + \right.$$
$$\left. + 15 (x + x^2 + x^3)(x^2 + x^4 + x^6)^7 \right)$$

0 15 0   7 1 7   0 3 0   1 1 1   0 5 0   1 3 1   2 1 2   0 7 0   3 1 3

Нам нужен коэф. при x^{30}. (стр 2)

Заметим, что в каждой скобке только средний коэф. чётный, то чтобы в сумме получилось 30 – нужно, чтобы самое правое и самое левое слагаемое были выбраны одинаковое число раз.

(а для скобки $15(x+x^2+x^3)(x^2+x^4+x^6)^7$ – из скобки $(x+x^2+x^3)$ надо брать x^2, т.к. если взять x или x^3 – то из чётных степеней x^2, x^4 и x^6 – мы не получим x^{27} или x^{29}).

~~[illegible]~~

Например, для $(x+x^2+x^3)^{15}$:

0 15 0
1 13 1
2 11 2
3 9 3
4 7 4
5 5 5
6 3 6
7 1 7
~~8 x 8~~

$$\Rightarrow a_{30} = \frac{1}{30}\left(\sum_{i=0}^{7} C_{15}^{(i;15-2i;i)} + 8 + 4\left(\sum_{i=0}^{1} C_{15}^{(i;3-2i;i)}\right) + 2\cdot\left(\sum_{i=0}^{2} C_{5}^{(i;5-2i;i)}\right) + 15\cdot\sum_{i=0}^{3} C_{7}^{(i;7-2i;i)}\right) =$$

$$C_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$

$$= \frac{1}{30}\Big(\underbrace{C_{15}^{0,15,0}}_{=1} + \underbrace{C_{15}^{1,13,1}}_{=210} + \underbrace{C_{15}^{2,11,2}}_{=8190} + \underbrace{C_{15}^{3,9,3}}_{=100100} + \underbrace{C_{15}^{4,7,4}}_{450450} + \underbrace{C_{15}^{5,5,5}}_{756756} + \underbrace{C_{15}^{6,3,6}}_{420420} +$$

$$+ \underbrace{C_{15}^{7,1,7}}_{51480}\Big) + 8 + 4\Big(\underbrace{C_3^{0,3,0}}_{=1} + \underbrace{C_3^{1,1,1}}_{=6}\Big) + 2\Big(\underbrace{C_5^{0,5,0}}_{=1} + \underbrace{C_5^{1,3,1}}_{=20} + \underbrace{C_5^{2,1,2}}_{=30}\Big) +$$

$$+ 15\Big(\underbrace{C_7^{0,7,0}}_{=1} + \underbrace{C_7^{1,5,1}}_{=42} + \underbrace{C_7^{2,3,2}}_{=210} + \underbrace{C_7^{3,1,3}}_{=140}\Big)\Big) = 59788$$

4. Таблица 3x3:
Вращать на 90, 180, 270, 360.
В каждую клетку – число $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Сколько ∃ неэкв. табличек: $\begin{cases} \sum n_i = n \\ \sum \text{чётных чисел} = \sum \text{нечётных} \end{cases}$

Решение: Прежде всего, посчитаем цикловой индекс группы G симметрий доски: там e, повороты на 90, 180 и 270° ~~и ещё 4 осевых симметрии~~,
~~[illegible]~~

$e: (z_1)^9$
$90, 270: z_1\cdot(z_4)^2$
$180: z_1\cdot(z_2)^4$
~~осевые симм.: $(z_1)^3(z_2)^3$~~

$$\Rightarrow P_G = \frac{1}{4}\left((z_1)^9 + 2z_1(z_4)^2 + z_1(z_2)^4\right)$$ ~~[illegible]~~

Теперь сопоставим ~~четным~~ клетке с четным числом n_i вес x^{n_i},

а клетке с нечетным числом n_i – вес y^{n_i}

$$\Rightarrow \sum \text{весов} = \sum_{n_i \,\vdots\, 2} x^{n_i} + \sum_{n_i \not\vdots\, 2} y^{n_i} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} y^{2k+1} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{веса}} (\text{вес})^i = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2ki} + \sum_{k=0}^{\infty} y^{(2k+1)i} = \frac{1}{1-x^{2i}} + \frac{y^{2i}}{1-y^{2i}}$$

(на самом деле, все суммы обрубаются на $k=n$ (т.к. поскольку все $n_i \geq 0$ и $\sum n_i = n$, то все $n_i \leq n$), но нам не мешают степени $\geq n$, т.к. мы всё равно на них не смотрим, а ищем коэф. при $x^{\frac{n}{2}} \cdot y^{\frac{n}{2}}$.

То есть подставив вместо z_i: $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2ki} + \sum_{k=0}^{\infty} y^{(2k+1)i}$ – ~~получим~~ в цикловой индекс группы – мы получим произв. ф-цию.

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{y^2}{1-y^2}\right)^9 + 2\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{y^2}{1-y^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^8} + \frac{y^8}{1-y^8}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{y^2}{1-y^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4} + \frac{y^4}{1-y^4}\right)^4\right)$$

И у этого надо найти коэф. при $x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}$ – это будет ответ.