ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Асимптотически оптимальные инвестиционные стратегии в многоагентной модели рынка с непрерывным временем

Выполнил студент
609 академической группы
Асылхузин Тимур Ринатович

____
подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. **Житлухин
Михаил Валентинович**

____
подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

1 Введение **3**

2 Модель рынка **5**

3 Рынок с большим и малым агентами **7**

4 Основные результаты **10**

5 Доказательства утверждений **12**

6 Заключение **17**

7 Список литературы **17**

1 Введение

Основным предметом исследования в этой работе является стохастическая модель финансового рынка с непрерывным временем, описывающая конкуренцию агентов (инвесторов) за распределение дивидендов нескольких активов. Основная цель работы – нахождение асимптотически оптимальной инвестиционной стратегии в частном случае модели рынка, в которой индивидуальный инвестор, имеющий достаточно малый капитал, пытается максимизировать свою доходность. Рынок здесь понимается под взвешенной суммой стратегий всех остальных индивидуальных инвесторов. Общая задача, побуждающая к такому исследованию, формулируется на основе множества эмпирических исследований в финансовой математике, подтверждающих наблюдение о том, что "рынок нельзя обыграть". Нельзя в том смысле, что с малым капиталом на длинном горизонте времени нельзя показывать доходность выше рыночной. Это обстоятельство привело к бурному развитию взаимных инвестиционных фондов и стратегий пассивного инвестирования, которые рекомендуют частным инвесторам вкладывать деньги в хорошо диверсифицированные фонды и не пытаться самостоятельно заниматься выбором активов для инвестиций.

Мы изучим, к каким результатам можно прийти, используя предположение о том, что рынок нельзя обыграть. В частности, нас будет интересовать, какому соотношению должны удовлетворять цены активов, чтобы это предположение выполнялось в заданной модели. Ввиду того, что цены активов определяются спросом и предложением, а спрос, в свою очередь, зависит от того каким стратегиям следуют агенты на рынке, это приводит к задаче описания стратегии рынка, которая была бы оптимальной в смысле достижения большей скорости роста капитала, чем любая другая стратегия. Оказывается, при определенных предположениях можно установить вполне конкретный вид оптимальной рыночной стратегии, и, соответственно, цен активов.

Модель, изучаемую в работе, в общих словах можно описать следующим образом. На рынке присутствуют 2 актива, выплачивающих дивиденды непрерывно во времени, а также множество агентов, которые могут покупать и продавать активы и получать выплачиваемые дивиденды. С течением времени капитал инвесторов изменяется за счет изменения цен акций в их портфелях, получения дивидендов и потребления части капитала. В целом, такая модель во многом схожа со стандартными моделями финансовой математики, с той лишь разницей, что мы будем предполагать, что цены акций определяются стратегиями инвесторов. А именно, считая, что предложение каждой акции фиксировано, цена должна быть такой, чтобы спрос инвесторов оказался равен предложению.

Рассмотрим агента, капитал которого в некотором смысле бесконечно мал по сравнению с капиталом всего рынка (далее такого агента будем называть "малым"). Весь остальной рынок, в свою очередь, будет отождествляться со вторым агентом, капитал которого велик по сравнению с капиталом первого. Цены на активы определяются стратегией второго агента посредством указанного выше равенства спроса и предложения. Будем говорить, что стратегия малого агента оптимальна, если логарифм отношения его капитала при любой другой стратегии к капиталу при оптимальной стратегии является супермартингалом. Оптимальной стратегией для большого агента назовём такую стратегию, при которой оптимальной для малого будет она же. Получается, что рынок может эволюционировать до такой степени (прийти к оптимальному распределению активов), что малый агент не сможет получить доходность выше него.

Основной результат работы состоит в явной конструкции оптимальной рыночной стратегии. Будем показано, что пропорция капитала, которую эта стратегия вкладывает в актив $n = 1, 2$, задается формулой

$$\lambda_t^n = E\Big(e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} X_s^n ds \Big| \mathcal{F}_t\Big),$$

где X_s^n – процесс относительной интенсивности дивидендов актива n, а ρ – коэффициент дисконтирования, связанный с интенсивностью потребления.

Эта задача является продолжением исследований в области теории оптимального роста. Первыми работами в этом направлении были [7], [4], где были найдены асимптотически оптимальные стратегии для моделей с дискретным временем. Далее эти результаты были значительно улучшены. Среди множества работ можно выделить [1], где была рассмотрена общая модель с дискретным временем, а также [5], где изучалась асимптотическая оптимальность для семимартингальной модели с непрерывным временем, а также исследовался вопрос о связи свойства существования стратегии оптимального роста и свойства безарбитражности рынка.

В умопянутых выше работах предполагалось, что цены активов заданы экзогенным образом. Среди моделей с эндогенными ценами, в которых изучались задачи, близкие к настоящей дипломной работе, выделим статью [3] – одну из первых, где рассматривались “выживающие” стратегии в модели рынка с дискретным временем и так называемыми активами Эрроу, имеющими весьма простую структуру дивидендов. Эта модель и результаты указанной статьи были обобщены в работе [2] на рынки с активами с произвольными дивидендами, но всё ещё с дискретным временем. Похожие модели в непрерывном времени рассматривались, например, в работе [8], однако в ней допускались только стратегии с абсолютно непрерывными траекториями (в то время как в нашей работе они могут быть процессами Ито). Модель с семимартингальными дивидендами рассматривалась в работе [9], но в ней предполагалось, что активы являются короткоживущими, что является упрощением стандартного понятия акции. Наконец, выделим работу [6], где исследовалось свойство “разнообразия”, заключающееся в том, что относительные цены являются мартингалами, и, следовательно, рыночная стратегия является стратегией оптимального роста. Однако ввиду особенностей формулировки модели, в ней существует множество оптимальных рыночных стратегий, в то время как в нашей модели оптимальная стратегия по сути единственна.

Дипломная работа организована следующим образом. В разделе 2 описывается общая модель рынка с эндогенными ценами. В разделе 3 из нее строится модель с эндогенными ценами, где присутствуют большой и малый агенты. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем в разделе 4. Раздел 5 содержит их доказательства.

2 Модель рынка

В данном разделе будет предложена общая модель рынка с произвольным числом агентов и активов. В дальнейшем, однако, будет рассматриваться только частный случай двух агентов и двух активов.

В модели финансового рынка присутствуют $M \geq 2$ агентов (инвесторов) и $N \geq 2$ активов, каждый из которых непрерывно выплачивает дивиденды. Размеры выплат пропорциональны доле вложенной инвестором в актив суммы относительно других инвесторов. Инвестиционная стратегия агента состоит в том, что в каждый момент времени он определяет, в какой пропорции следует распределить свой капитал между активами. Спрос на активы, порождаемый реализацией агентами их инвестиционных стратегий, приводит к установлению рыночных цен на активы.

С течением времени стоимость инвестиционного портфеля агента может изменяться по трём причинам: получение дивидендов, изменение цены активов и потребление. Мы будем предполагать, что каждый агент непрерывным образом осуществляет потребление капитала с постоянной интенсивностью ρ, одинаковой для всех агентов. Последнее предположение необходимо ввиду того, что цель работы состоит в нахождении стратегии, использование которой приводит к наибольшему росту стоимости портфеля. Если допустить разные интенсивности потребления, то стратегии с меньшим потреблением будут иметь очевидное преимущество. Другая интерпретация потребления состоит в том, что ρ является постоянной ставкой налога, который обязаны платить все агенты.

Для корректного определения процессов дивидендов, цен активов и стратегий агентов, будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Фильтрация характеризует общее состояние рынка в различные моменты времени и предполагается порождённой винеровским процессом B_t, то есть $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\ s \leq t)$.

С каждым активом связан процесс дивидендов $D^n(\omega) = (D^n_t(\omega))_{t\geq 0}$, где величина $D^n_t(\omega)$ равна суммарной выплате дивидендов за промежуток времени $[0, t]$, и процесс цены $S^n(\omega) = (S^n_t(\omega))_{t\geq 0}$, где $S^n_t(\omega)$ есть стоимость актива в момент времени t. Предполагается, что процессы $D^n(\omega)$ и $S^n(\omega)$ согласованы с фильтрацией $\mathbb{F}$, а $D^n_t(\omega)$ можно представить в виде

$$D^n_t(\omega) = \int\limits_0^t X^n_s(\omega)ds,$$

где $X_t^n(\omega)$ – непрерывные согласованные процессы, представляющие собой интенсивность выплаты дивидендов.

Что касается процессов цен $S_t^n(\omega)$, предполагается, что они являются процессами Ито. Само определение будет дано позднее, так как цены цены активов будут определены исходя из рыночного равновесия.

Сделаем также дополнительное предположение, что процессы $X_t^n(\omega)$ равномерно отделены от нуля, то есть для каждого n существует константа $\varepsilon_n > 0$, такая, что для всех $\omega \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}_+$

$$X_t^n(\omega) > \varepsilon_n.$$

Изменение капитала m'го агента описывается согласованным процессом $Y_t^m(\omega)$. Будем считать, что капиталы в начальный момент времени Y_0^m известны заранее, положительны и неслучайны, а дальнейшие изменения зависят лишь от действий инвестора. Стратегия инвестора состоит в выборе того, в каких пропорциях он распределяет весь свой имеющийся капитал между инвестициями в активы в каждый момент времени. Множество всевозможных вариантов распределения агентом капитала по N активам представляет собой стандартный N-симплекс

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda^1 + \dots + \lambda^N = 1,\ \forall n\ \lambda^n \geq 0\}.$$

Определение 1. *Инвестиционной стратегией* агента m называется процесс Ито $\lambda(\omega) = (\lambda_t(\omega))_{t\geq 0}$, где $\lambda_t(\omega) = (\lambda_t^1(\omega), \dots, \lambda_t^N(\omega))$, и $\lambda_t^n(\omega)$ имеет вид

$$d\lambda_t^n(\omega) = a_t^n(\omega)dt + b_t^n(\omega)dB_t(\omega),$$

принимающий значения в множестве Λ. Предполагается, что процессы $a_t^n(\omega)$ и $b_t^n(\omega)$ таковы, что соответствующие интегралы корректно определены.

Если нужно подчеркнуть, что данная стратегия используется агентом m, то будем использовать обозначение $\lambda_t^m = (\lambda_t^{m,1}, \dots, \lambda_t^{m,N})$.

В дальнейшем зависимость величин от ω будем опускать.

Определение 2. *Процесс капитала* (стоимость портфеля) инвестора m определяется уравнением

$$dY_t^m = -\rho Y_t^m dt + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{m,n} Y_t^m}{S_t^n}(dS_t^n + X_t^n dt), \tag{1}$$

где *процессы цен* активов заданы соотношением

$$S_t^n = \sum_{m=1}^{M} \lambda_t^{m,n} Y_t^m. \tag{2}$$

Уравнение (1) следует понимать в интегральном смысле, а интеграл по процессам S_t^n понимается в смысле Ито. Будем предполагать, что процессы интенсивности дивидендов X_t^n и стратегии агентов λ_t^m таковы, что уравнения (1)–(2)

имеют единственное сильное решение. Стоит отметить, что вопрос существования и единственности решения этих уравнений достаточно труден и в работе не рассматривается.

Поясним смысл слагаемых в правой части уравнений (1)–(2). Изменение капитала m'го инвестора dY_t^m происходит за счёт изменения трёх составляющих. Прибыль от дивидендов и изменения цен на единицу актива n выражается формулой

$$dS_t^n + dD_t^n = dS_t^n + X_t^n dt,$$

а изменение капитала от потребления выражается формулой $-\rho Y_t^m dt$. Суммарная стоимость актива n у инвестора m составляет $\lambda_t^{m,n} Y_t^m$, следовательно количество этого актива у инвестора m равно $\lambda_t^{m,n} Y_t^m / S_t^n$. Отсюда следует уравнение (1).

В уравнении (2) предполагается (без ограничения общности модели), что количество актива n, доступное к торговле на рынке (т.е. объем предложения или количество акций в обращении) равно единице. Тогда для равенства спроса и предложения актива его цена должна быть равна полному объему инвестиций в этот актив со стороны всех агентов, что и приводит к уравнению (2).

Отметим, что формула (2) допускает, что стоимость актива может стать равной нулю, а в таком случае уравнение (1) становится некорректным. Чтобы избежать такой ситуации потребуем, чтобы для каждого актива n в любой момент времени t на рынке существовал инвестор с положительной компонентой стратегии λ_t^n. Это требование вместе с равномерно отделёнными от нуля процессами интенсивности выплат дивидендов даёт нам возможность считать, что цены активов всегда положительны, и формула (1) определена корректно.

3 Рынок с большим и малым агентами

Исследование решения и нахождение оптимальной стратегии для системы уравнений (1), (2) в общем случае является нетривиальной задачей. Капиталы инвесторов зависят от цен активов, которые в свою очередь определяются стратегиями инвесторов, что влечёт за собой появление сложных неявных уравнений. Однако удаётся упростить задачу в "предельной" постановке, где рассматриваются "малый" и "большой" агенты, и действия малого агента не влияют на цены активов.

Далее будем предполагать, что на рынке имеются всего два актива ($N = 2$) и два инвестора ($M = 2$), причём $Y_t^2/(Y_t^1 + Y_t^2) \approx 0$, то есть капитал второго агента бесконечно мал по сравнению с капиталом первого (все приближённые равенства используются для более ясного обоснования, чем порождены формулы в итоговой модели). Можно интерпретировать это как то, что первый инвестор олицетворяет собой весь рынок (большое количество агентов с усреднённой стратегией), а второй - небольшого индивидуального инвестора, действия которого не оказывают на рынок существенного влияния.

В таком случае, в рамках описанной ранее модели можно положить стоимость актива n равной сумме средств большого (первого) инвестора, вложенных в него,

$$S_t^n = \lambda_t^{1,n} Y_t^1, \qquad n = 1, 2, \tag{3}$$

то есть цены активов определяются только действиями большого инвестора. Суммируя по n, получаем

$$Y_t^1 = S_t^1 + S_t^2 := \overline{S}_t. \tag{4}$$

(здесь и далее, для краткости обозначений, черта сверху будет обозначать сумму компонент вектора).

Уравнение динамики капитала (1) большого инвестора в этом случае будет иметь вид

$$dY_t^1 = -\rho Y_t^1 dt + \sum_{n=1}^{2} \frac{\lambda_t^{1,n} Y_t^1}{S_t^n}(dS_t^n + X_t^n dt) = -\rho Y_t^1 dt + \sum_{n=1}^{2}(dS_t^n + X_t^n dt) =$$
$$= -\rho Y_t^1 dt + d\overline{S}_t + \overline{X}_t dt = -\rho Y_t^1 dt + dY_t^1 + \overline{X}_t dt.$$

Следовательно, получаем, что в этой модели

$$\overline{X}_t := X_t^1 + X_t^2 = \rho Y_t^1. \tag{5}$$

Определение 3. Будем называть инвестиционную стратегию $\hat{\lambda}_t^2$ малого инвестора с капиталом $Y_t = Y_t(\hat{\lambda}_t^2)$ *оптимальной* при зафиксированной стратегии большого инвестора, если для любой другой стратегии λ_t^2 малого инвестора

$$\ln \frac{Y_t^2(\lambda_t^2)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t^2)} \text{ -- супермартингал относительно фильтрации } \mathbb{F}, \text{ то есть}$$
$$\ln \frac{Y_s^2(\lambda_s^2)}{Y_s^2(\hat{\lambda}_s^2)} \geq E\Big(\ln \frac{Y_t^2(\lambda_t^2)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t^2)}\Big|\mathcal{F}_s\Big), \qquad 0 \leq s \leq t,$$

где $Y_t^2(\lambda_t^2)$, $Y_t^2(\hat{\lambda}_t^2)$ – процессы капитала малого инвестора при использовании соответствующих стратегий.

Интерпретировать определение оптимальной стратегии малого инвестора можно так, что она выигрывает любую другую его стратегию, а именно, она в любой момент времени максимизирует условное математическое ожидание случайного процесса, равного логарифму отношения капиталов. Отсюда, в частности, следует, что математическое ожидание логарифма отношения капиталов со временем не увеличивается, то есть

$$E \ln \frac{Y_s^2(\lambda_s^2)}{Y_s^2(\hat{\lambda}_s^2)} \geq E \ln \frac{Y_t^2(\lambda_t^2)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t^2)}, \qquad 0 \leq s \leq t,$$

Определение 4. Инвестиционную стратегию $\hat{\lambda}_t^1$ большого инвестора будем называть *оптимальной*, если эта же стратегия будет являться оптимальной для малого инвестора, когда большой инвестор тоже её использует, то есть если $\hat{\lambda}_t^2 = \hat{\lambda}_t^1$ при зафиксированной стратегии $\hat{\lambda}_t^1$ большого инвестора.

В рамках этой работы нас будет интересовать только динамика капитала в заданной модели, а не его абсолютные значения. Произведём преобразования в формуле из определения оптимальной стратегии:

$$\ln \frac{Y_t^2(\lambda_t)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t)} = \ln \frac{Y_t^2(\lambda_t) / \sum\limits_{m=1}^{2} Y_t^m}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t) / \sum\limits_{m=1}^{2} Y_t^m}.$$

Следовательно, при исследовании стратегий вместо абсолютных значений можно работать с долями капиталов. Оптимальная стратегия в этом случае будет такой же. Положим $Y_t^1 + Y_t^2 = 1$ и будем в качестве капиталов рассматривать нормированные величины:

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \frac{Y_t^1}{Y_t^1 + Y_t^2} \approx 1, \\ Y_t^2 &= \frac{Y_t^2}{Y_t^1 + Y_t^2} \approx 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Чтобы более строго определить этот переход, потребуем, чтобы в общей модели выполнялось

$$X_t^1 + X_t^2 = \rho. \tag{7}$$

Тогда из уравнений (5), (7) следует, что $Y_t^1 = 1$, следовательно $Y_t^1 + Y_t^2 = 1$, так как капитал второго инвестора бесконечно мал по сравнению с капиталом первого. Это не ограничивает общности модели, так как мы всегда можем нормировать значения интенсивностей и начальные условия капиталов, и получить модель динамики, удовлетворяющую этому требованию.

В этом случае если капитал (доля) одного инвестора уменьшается, то у другого обязательно увеличивается.

На рынке всего 2 актива, так что будем считать, что стратегии имеют вид $(\lambda_t, 1-\lambda_t)$, $(\tilde{\lambda}_t, 1-\tilde{\lambda}_t)$ для малого и большого инвесторов соответственно.

Стратегию большого инвестора согласно определению можно представить как

$$d\lambda_t = a_t dt + b_t dB_t.$$

Уравнение динамики капитала (1) малого инвестора имеет вид

$$dY_t^2 = \frac{\tilde{\lambda}_t Y_t^2}{S_t^1}(dS_t^1 + X_t^1 dt) + \frac{(1-\tilde{\lambda}_t) Y_t^2}{S_t^2}(dS_t^2 + X_t^2 dt) - \rho Y_t^2 dt.$$

Из (3), (6) получаем

$$S_t^1 = \lambda_t Y_t^1 \approx \lambda_t,$$
$$dS_t^1 = d(\lambda_t Y_t^1) = \lambda_t dY_t^1 + d\lambda_t Y_t^1 + d\lambda_t dY_t^1 \approx \lambda_t \cdot 0 + d\lambda_t \cdot 1 + d\lambda_t \cdot 0 = d\lambda_t.$$

Из (4), (6) и уравнений выше получаем

$$S_t^2 = Y_t^1 - S_t^1 \approx 1 - \lambda_t,$$
$$dS_t^2 = d(Y_t^1 - S_t^1) \approx -d\lambda_t.$$

Из (7) получаем

$$X_t^2 = \rho - X_t^1.$$

С учётом всех предположений, сделанных выше, модель рынка с большим и малым агентами и двумя активами имеет следующий вид: уравнение динамики капитала первого (большого) инвестора остаётся таким же, как в общем случае, а уравнение динамики капитала второго (малого) инвестора и уравнения для цен активов задаются уравнениями

$$dY_t^2 = \frac{\tilde{\lambda}_t Y_t^2}{\lambda_t}(a_t dt + b_t dB_t + X_t^1 dt) + \frac{(1-\tilde{\lambda}_t)Y_t^2}{1-\lambda_t}(-a_t dt - b_t dB_t + (\rho - X_t^1)dt) - \rho Y_t^2 dt,$$

$$S_t^1 = \lambda_t Y_t^1, \qquad S_t^2 = (1-\lambda_t)Y_t^1, \qquad X_t^1 + X_t^2 = \rho,$$

где с помощью последнего предположения мы нормируем капиталы агентов.

4 Основные результаты

Первый основной результат работы – явный вид оптимальной стратегии для большого инвестора. Основываясь на множестве эмпирических исследований, можно предположить, что выигрывать должна стратегия, при которой капитал распределяется в соответствии с размерами ожидаемых выплат активов. Строго обосновать это интуитивное предположение получается следующим утверждением, в котором удаётся получить явный вид оптимальной стратегии.

Теорема 1. *В модели рынка с большим и малым агентами случайный процесс*

$$\hat{\lambda}_t = E\Big(e^{\rho t}\int_t^{\infty} e^{-\rho s} X_s^1 ds \Big| \mathcal{F}_t\Big) \tag{8}$$

является оптимальной стратегией для большого инвестора.

То есть наиболее оптимальным способом распределения капитала по активам является распределение в соответствии с дисконтированными ожидаемыми выплатами этих активов. Напомним, что оптимальная стратегия для большого инвестора является оптимальной и для малого.

В формуле для более общей модели на месте X^1_s должна была бы быть относительная выплата первого актива, но в модели с большим и малым агентами $X^1_s + X^2_s = \rho \equiv \mathrm{const}$, поэтому в формуле появляется именно математическое ожидание абсолютной величины, а не отношения.

Чтобы сформулировать второй основной результат, определим величину σ_t (она используется в доказательстве теоремы 1). Преобразуем $\hat{\lambda}_t$ из формулировки предыдущей теоремы

$$\hat{\lambda}_t = e^{\rho t}\Big(E\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\rho s} X^1_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) - \int\limits_0^t e^{-\rho s} X^1_s ds\Big).$$

По теореме о мартингальном представлении ([10], гл.VII, §3f, Теорема 2) первое слагаемое можно представить в виде

$$M_t = E\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\rho s} X^1_s ds\Big) + \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{9}$$

где σ_t некоторым образом отражает степень случайности траекторий процесса X^1_s. Например, если X^1_s не зависит от ω, то условное математическое ожидание совпадает с безусловным, и по формуле (9) $\sigma_s \equiv 0$.

Следующая теорема показывает, что если большой инвестор использует стратегию $\hat{\lambda}$, то оптимальная стратегия малого инвестора тоже должна быть равна $\hat{\lambda}$ (при условии, что $\sigma_t \neq 0$).

Теорема 2. *При фиксированной стратегии $\hat{\lambda}_t$ большого инвестора стратегия λ^*_t является оптимальной стратегией для малого инвестора тогда и только тогда, когда*

$$|\lambda^*_t - \hat{\lambda}_t|\sigma_t \overset{\text{п.н.}}{=} 0,$$

то есть оптимальная стратегия для малого инвестора при данной стратегии большого инвестора при $\sigma_t \neq 0$ единственна с точностью до равенства почти наверное.

Дополнительно поясним, какое значение имеет величина σ_t. В доказательстве теоремы 1 показывается, что для $\hat{\lambda}_t$ коэффициент b_t выражается как $e^{\rho t}\sigma_t$. Тогда если $\sigma_t = 0$, то по формуле (10) $dY^2_t = 0$. Получается, что на любых промежутках, где $\sigma_t = 0$, малый инвестор не может повлиять на динамику своего капитала с помощью изменения стратегии.

Пример. Чтобы проиллюстрировать основные результаты, приведем пример простой модели рынка и найдем в ней оптимальную стратегию. Предположим, что фильтрация $\mathbb{F}$ порождена броуновским движением B_t, и процессы интенсивности выплаты дивидендов имеют вид

$$dX_t^1 = aX_t^1(\rho - X_t^1)dB_t, \qquad X_t^2 = \rho - X_t^1,$$

с начальным условием $X_0^1 \in (0, \rho)$, где $a > 0$ – параметр. Из общей теории стохастических дифференциальных уравнений следует, что уравнение для X_t^1 имеет единственное сильное решение для любого начального условия $X_0^1 \in (0, \rho)$ и всегда остается в интервале $(0, \rho)$, т.е. $X_t^1 \in (0, \rho)$ п.н. для всех $t \geq 0$.

Процессы X_t^1 и X_t^2 являются квадратично интегрируемыми мартингалами, следовательно $E(X_s^m \mid \mathcal{F}_t) = X_t^m$. Отсюда следует, что первая компонента оптимальной стратегия принимает вид

$$\hat{\lambda}_t^1 = e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} E(X_s^1 \mid F_t) ds = \frac{X_t^1}{\rho}.$$

Таким образом, оптимальной стратегией является $\hat{\lambda}_t = (X_t^1/\rho, X_t^2/\rho)$, то есть необходимо инвестировать пропорционально интенсивностям выплаты дивидендов.

Если большой инвестор следует стратегии $\hat{\lambda}$, то цены активов будут иметь вид

$$S_t^n = \hat{\lambda}_t^n Y_t^1 = \frac{X_t^n}{\rho},$$

где мы воспользовались тем, что $Y_t^1 = \bar{X}_t/\rho = 1$. Таким образом, цены оказываются пропорциональны интенсивностям выплаты дивидендов.

5 Доказательства утверждений

Доказательство теоремы 1. Согласно определению оптимальности стратегий, необходимо доказать, что если большой инвестор будет следовать этой стратегии, оптимальной стратегией для малого будет она же.

Будем искать зависимость капитала малого инвестора от стратегии большого. Как было показано выше, уравнение динамики капитала (1) для малого инвестора в заданной модели имеет вид

$$dY_t^2 = \frac{\tilde{\lambda}_t Y_t^2}{\lambda_t}(a_t dt + b_t dB_t + X_t^1 dt) + \\ + \frac{(1-\tilde{\lambda}_t)Y_t^2}{1-\lambda_t}(-a_t dt - b_t dB_t + (\rho - X_t^1)dt) - \rho Y_t^2 dt.$$

Будет удобно прологарифмировать это уравнение, чтобы упростить структуру коэффициентов.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$d\ln Y_t^2 = \Big(\lambda_t(1-\lambda_t)(\tilde\lambda_t-\lambda_t)(a_t+X_t^1-\rho\lambda_t) - \frac{(\tilde\lambda_t-\lambda_t)^2(b_t)^2}{2}\Big)\frac{dt}{\lambda_t^2(1-\lambda_t)^2} + \\ + \frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}b_t dB_t.$$

Доказательство. Преобразуем уравнение для dY_t^2.

$$dY_t^2 = \Big(\frac{\tilde\lambda_t Y_t^2}{\lambda_t}(a_t+X_t^1) + \frac{(1-\tilde\lambda_t)Y_t^2}{1-\lambda_t}(-a_t+(\rho-X_t^1)) - \rho Y_t^2\Big)dt + \\ + \Big(\frac{\tilde\lambda_t Y_t^2}{\lambda_t}b_t + \frac{(1-\tilde\lambda_t)Y_t^2}{1-\lambda_t}\cdot(-b_t)\Big)dB_t = \\ = \Big(\frac{\tilde\lambda_t}{\lambda_t}(a_t+X_t^1) + \frac{(1-\tilde\lambda_t)}{1-\lambda_t}(-a_t+\rho-X_t^1) - \rho\Big)Y_t^2 dt + \\ + \Big(\frac{\tilde\lambda_t}{\lambda_t} - \frac{(1-\tilde\lambda_t)}{1-\lambda_t}\cdot\Big)b_t Y_t^2 dB_t.$$

Отсюда получаем

$$dY_t^2 = \frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}(a_t+X_t^1-\rho\lambda_t)Y_t^2 dt + \frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}b_t Y_t^2 dB_t = \alpha_t' dt + \beta_t' dB_t. \qquad (10)$$

Далее воспользуемся формулой Ито. Если процесс H_t является процессом Ито, то есть представляется в виде $dH_t = \alpha_t dt + \beta_t dB_t$, а $F(x)$ - заданная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция из класса C^2, то

$$dF(H_t) = \frac{\partial F}{\partial x}\alpha_t dt + \frac{\partial F}{\partial x}\beta_t dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\beta_t^2 dt.$$

Тогда для $F(x) = \ln x$ справедливо

$$d\ln H_t = \frac{1}{H_t}\alpha_t dt + \frac{1}{H_t}\beta_t dB_t - \frac{1}{2H_t^2}\beta_t^2 dt. \qquad (11)$$

Теперь можем воспользоваться формулой (11) для Y_t^2:

$$d\ln Y_t^2 = \frac{1}{Y_t^2}\alpha_t' dt + \frac{1}{Y_t^2}\beta_t' dB_t - \frac{1}{2(Y_t^2)^2}(\beta_t')^2 dt = \frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}(a_t+X_t^1-\rho\lambda_t)dt + \\ + \frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}b_t dB_t - \frac{1}{2}\Big(\frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}b_t\Big)^2 dt = \\ = \Big(\lambda_t(1-\lambda_t)(\tilde\lambda_t-\lambda_t)(a_t+X_t^1-\rho\lambda_t) - \frac{(\tilde\lambda_t-\lambda_t)^2(b_t)^2}{2}\Big)\frac{dt}{\lambda_t^2(1-\lambda_t)^2} + \\ + \frac{\tilde\lambda_t-\lambda_t}{\lambda_t(1-\lambda_t)}b_t dB_t,$$

что и доказывает лемму.

$\square$

В качестве следствия этой леммы также получаем, что при выполнении условия

$$a_t + X_t^1 - \rho\lambda_t = 0$$

динамика логарифма капитала малого инвестора всегда будет иметь неположительный снос. Причём равен нулю он будет лишь при использовании малым инвестором той же стратегии.

Подставим $a_t = \rho\lambda_t - X_t^1$ в уравнение для $d\lambda_t$

$$d\lambda_t = (\rho\lambda_t - X_t^1)dt + b_t dB_t. \tag{12}$$

Лемма 2. *Случайный процесс $\hat{\lambda}_t$, заданный формулой*

$$\hat{\lambda}_t = E\Big(e^{\rho t}\int\limits_t^\infty e^{-\rho s} X_s^1 ds\Big|\mathcal{F}_t\Big),$$

является решением уравнения вида (12).

Доказательство. Преобразуем выражение для $\hat{\lambda}_t$ к виду

$$\hat{\lambda}_t = e^{\rho t}\Big(E\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\rho s} X_s^1 ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) - \int\limits_0^t e^{-\rho s} X_s^1 ds\Big).$$

По теореме о мартингальном представлении ([10], гл.VII, §3f, Теорема 2), первое слагаемое можно представить в виде

$$M_t := E\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\rho s} X_s^1 ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) = E\Big(\int\limits_0^\infty e^{-\rho s} X_s^1 ds\Big) + \int_0^t \sigma_s dB_s, \tag{13}$$

где σ_t - процесс, предсказуемый относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Тогда для $d\hat{\lambda}_t$ справедливо следующее:

$$d\hat{\lambda}_t = \rho\hat{\lambda}_t dt + e^{\rho t}(dM_t - e^{-\rho t} X_t^1 dt) = (\rho\hat{\lambda}_t - X_t^1)dt + e^{\rho t}\sigma_t dB_t \quad (= a_t dt + b_t dB_t).$$

Следовательно, существует уравнение вида (12) со случайным коэффициентом $b_t = e^{\rho t}\sigma_t$, для которого $\hat{\lambda}_t$ является решением. Лемма доказана.

$\square$

При использовании большим инвестором такой стратегии, уравнение динамики логарифма капитала малого инвестора с произвольной стратегией $\tilde{\lambda}_t$ имеет вид

$$d\ln Y_t^2(\tilde{\lambda}_t) = -\frac{1}{2}\Big(\frac{(\tilde{\lambda}_t - \hat{\lambda}_t)e^{\rho t}\sigma_t}{\hat{\lambda}_t(1-\hat{\lambda}_t)}\Big)^2 dt + \frac{\tilde{\lambda}_t - \hat{\lambda}_t}{\hat{\lambda}_t(1-\hat{\lambda}_t)} e^{\rho t}\sigma_t dB_t. \qquad (14)$$

Проверим стратегию $\hat{\lambda}_t$ на оптимальность. Подставим $\tilde{\lambda}_t = \hat{\lambda}_t$ в уравнение (14):

$$d\ln Y_t^2(\hat{\lambda}_t) = 0.$$

Ноль здесь получается не случайно. Оба инвестора следуют одной и той же стратегии, и доли капиталов на рынке не изменяются. В таком случае

$$d\ln\frac{Y_t^2(\tilde{\lambda}_t)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t)} = d\ln Y_t^2(\tilde{\lambda}_t) - d\ln Y_t^2(\hat{\lambda}_t) = d\ln Y_t^2(\tilde{\lambda}_t) =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\frac{(\tilde{\lambda}_t - \hat{\lambda}_t)e^{\rho t}\sigma_t}{\hat{\lambda}_t(1-\hat{\lambda}_t)}\Big)^2 dt + \frac{\tilde{\lambda}_t - \hat{\lambda}_t}{\hat{\lambda}_t(1-\hat{\lambda}_t)} e^{\rho t}\sigma_t dB_t,$$

$$\ln\frac{Y_t^2(\tilde{\lambda}_t)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t)} = \ln\frac{Y_0^2}{Y_0^2} - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{(\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds + \int_0^t \frac{\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)} e^{\rho s}\sigma_s dB_s.$$

Для произвольного $u : 0 \le u \le t$ проверим определение супермартингала.

$$E\Big(\ln\frac{Y_t^2(\tilde{\lambda}_t)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t)}\Big|\mathcal{F}_u\Big) = -E\Big(\frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{(\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds\Big|\mathcal{F}_u\Big) + E\Big(\int_0^t \frac{\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)} e^{\rho s}\sigma_s dB_s\Big|\mathcal{F}_u\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^u \Big(\frac{(\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds - E\Big(\frac{1}{2}\int_u^t \Big(\frac{(\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds\Big|\mathcal{F}_u\Big) +$$

$$+ \int_0^u \frac{\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)} e^{\rho s}\sigma_s dB_s + E\Big(\int_u^t \frac{\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)} e^{\rho s}\sigma_s dB_s\Big|\mathcal{F}_u\Big).$$

Условное математическое ожидание от интеграла Ито равно нулю. Он определён корректно в силу равномерной отделимости процессов интенсивности, а следовательно и оптимальной стратегии, от нуля. В итоге имеем

$$E\Big(\ln\frac{Y_t^2(\tilde{\lambda}_t)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t)}\Big|\mathcal{F}_u\Big) = \ln\frac{Y_u^2(\tilde{\lambda}_u)}{Y_u^2(\hat{\lambda}_u)} - E\Big(\frac{1}{2}\int_u^t \Big(\frac{(\tilde{\lambda}_s - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds\Big|\mathcal{F}_u\Big) \le \ln\frac{Y_u^2(\tilde{\lambda}_u)}{Y_u^2(\hat{\lambda}_u)}. \qquad (15)$$

Тем самым мы доказали, что стратегия $\hat{\lambda}_t$ является оптимальной для большого инвестора. $\square$

Доказательство теоремы 2. В доказательстве предыдущей теоремы было получено мартингальное неравенство (15), в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда $\ln \frac{Y_t^2(\tilde{\lambda}_t)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t)}$ - мартингал.

И $\hat{\lambda}_t$, и λ_t^* являются оптимальными стратегиями малого инвестора. По определению оптимальной стратегии

$$\frac{Y_t(\hat{\lambda}_t)}{Y_t(\lambda_t^*)} \text{ и } \frac{Y_t(\lambda_t^*)}{Y_t(\hat{\lambda}_t)} \text{ – супермартингалы.}$$

Следовательно, обе величины являются мартингалами, и из неравенства (15) получаем, что для любых $t, u : 0 \leq u \leq t$ выполняется

$$E\Big(\frac{1}{2}\int\limits_u^t \Big(\frac{(\lambda_s^* - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds\Big|\mathcal{F}_u\Big) = 0.$$

Значение интеграла Римана от неотрицательной функции всегда будет неотрицательным. Следовательно, в данном случае не только условное математическое ожидание интеграла, но и сам интеграл равен нулю.

$$E\Big(\int\limits_u^t \Big(\frac{(\lambda_s^* - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds\Big|\mathcal{F}_u\Big) = \int\limits_u^t \Big(\frac{(\lambda_s^* - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 ds = 0.$$

Интеграл неотрицательной функции равен нулю тогда и только тогда, когда подынтегральная функция равна нулю на всём промежутке интегрирования, за исключением множества меры ноль. Итак, $\forall s \in [u,t] \setminus \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ – множество меры ноль,

$$\Big(\frac{(\lambda_s^* - \hat{\lambda}_s)e^{\rho s}\sigma_s}{\hat{\lambda}_s(1-\hat{\lambda}_s)}\Big)^2 = 0.$$

Рассмотрим множители по-отдельности. Экспонента $e^{\rho s}$ никогда не равна нулю, $\hat{\lambda}_s$ и $(1-\hat{\lambda}_s)$ не равны нулю по построению $\hat{\lambda}_s$.

Следовательно, $\forall s \in [u,t] \setminus \mathfrak{B} : (\lambda_s^* - \hat{\lambda}_s)^2\sigma_t^2 = 0$. В силу произвольности выбранных u и t, окончательно получаем, что

$$|\lambda_s^* - \hat{\lambda}_s|\sigma_s \overset{\text{п.н.}}{=} 0, \qquad s \in \mathbb{R}_+.$$

Все выполненные переходы справедливы в обе стороны, поэтому следствие в обратную сторону тоже верно.

□

6 Заключение

В работе была сформулирована модель финансового рынка, который состоит из малого и большого инвесторов, а также предложено понятие оптимальности инвестиционной стратегии. Простыми словами идею оптимальности можно выразить следующим образом. Если большой инвестор следует оптимальной стратегии, то для того, чтобы стратегия малого инвестора была стратегией оптимального роста в смысле стандартного определения финансовой математики, она должна совпадать со стратегией большого инвестора.

Такая равновесная постановка позволяет найти оптимальную стратегию в явном виде. Было показано (формула (8)), что инвестор должен распределять свой капитал между активами пропорционально ожидаемым дисконтированным будущим дивидендам акций. Эмпирически, такое правило инвестирования хорошо известно на практике, но достоинство полученного результата в том, что оно было установлено в математически строго сформулированной модели.

Можно выделить несколько дальнейших направлений исследования, относящихся к результату данной работы. Во-первых, было бы интересно обобщить эту модель на случай произвольного числа активов. Можно ожидать, что форма оптимальной стратегии должна остаться такой же – ожидание дисконтированных дивидендов. Во-вторых, представляет интерес рассмотрение более общей структуры фильтрации – порожденной не одномерным броуновским движением, а хотя бы многомерным, или еще более общим процессом. Наконец, можно рассмотреть менее строгое определение оптимальности, где, например, допускается отклонение от супермартингального свойства на "небольшую величину" (чтобы существовал процесс, в каком-либо смысле ограниченный, при добавлении которого к капиталу стратегии выполнялось бы сформулированное определение оптимальности), и описать класс оптимальных стратегий для такого определения.

7 Список литературы

[1] Algoet, P.H., Cover, T.M. (1988). Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *Annals of Probability* 16(2), 876–898.

[2] Amir, R., Evstigneev, I. V., Hens, T., and Xu, L. (2011). Evolutionary finance and dynamic games. *Mathematics and Financial Economics* 5(3), 161–184.

[3] Blume, L. and Easley, D. (1992). Evolution and market behavior. *Journal of Economic Theory* 58(1), 9–40.

[4] Breiman, L. (1961). Optimal gambling systems for favorable games. In: *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, pages 63–68.

[5] Karatzas, I., Kardaras, C. (2007). The numéraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics* 11(4), 447–493.

[6] Kardaras, C. (2007). Balance, growth and diversity of financial markets. *Annals of Finance* 4(3), 369–397.

[7] Kelly, Jr, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal* 35(4), 917–926.

[8] Palczewski, J., Schenk-Hoppé, K.R. (2010). Market selection of constant proportions investment strategies in continuous time. *Journal of Mathematical Economics* 46(2), 248–266.

[9] Zhitlukhin, M. (2022). A continuous-time asset market game with short-lived assets. *Finance and Stochastics*, to appear.

[10] Ширяев, А.Н. (1998). Основы стохастической финансовой математики, том 2. Москва: ФАЗИС.