... неоднородный

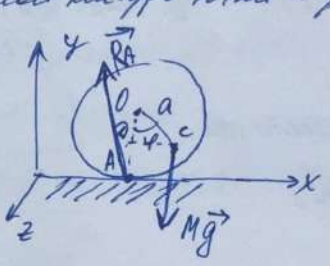
найти $\omega(\varphi)$

найти период колеб. вокруг полож. равнов.

Решение: 1) Тип движения - плоско-паралл.

$\Rightarrow$ нужно 3 коорд: 2 коорд. какой-нибудь точки и угол φ.

т.е x_c, y_c, φ.



но катится без проск. $\Rightarrow \vec{v_A} = 0$.

получим x_0, y_0, φ - а не x_c, y_c, φ.

т.к $y_0 \equiv r$.

$\vec{v_A} = 0$.

Но по ф-ле Эйлера: $\vec{v_0} = \overset{0}{\vec{v_A}} + [\vec{\omega}; \vec{AO}]$.

Здесь: $\vec{v_0} = \dot{x}_0 \vec{e_x}$

$\vec{AO} = r \cdot \vec{e_y}$; $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e_z}$

$\Rightarrow \dot{x}_0 \vec{e_x} = [\vec{\omega}; \vec{AO}] = [\dot{\varphi}\vec{e_z}; r\vec{e_y}] = -\dot{\varphi} r \cdot \vec{e_x}$

$\Rightarrow \dot{x}_0 = -\dot{\varphi} r$

Это дифференциальная связь.

можем превратить её в геом. связь: $x_0 = -\varphi r$

$\Rightarrow$ осталась одна коорд: φ.

2) Наша мех. система - это абс. тв. тело.

$\Rightarrow$ внутренние реакции - не учитываем.

$\Rightarrow$ есть только внешние заданные силы и внешние реакции.

Есть $\vec{Mg}$ в точке C

и $\vec{R_A}$ в точке A.

У нас движение без проск $\Rightarrow$ имеет смысл посмотреть на т. об изм. кин. энергии ~~о движении ц.м.~~

$$\frac{d}{dt}(T) = (\vec{Mg}; \vec{v_C}) + (\vec{R_A}; \overset{0}{\vec{v_A}})$$

Заданная сила $\vec{Mg}$ консервативна, а мощность реакции $(\vec{R_A}; \vec{v_A}) = 0$.

$\Rightarrow$ вып. ЗСЭ: $T + V = h$.

Ну $V = Mgy = Mg(r - a\cos\varphi)$

теперь считаем T (по ф-ле для плоско-пар. движения)

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$$

- $I_{Cz} = MK^2$ ~~...~~
- по ф-ле Эйлера: $\vec{v_C} = \vec{v_A} + [\underbrace{\vec{\omega}}_{=\dot{\varphi}\vec{e_z}}; \vec{AC}] = -\dot{\varphi}(r - a\cos\varphi)\vec{e_x} + \dot{\varphi} a \sin\varphi \vec{e_y}$

$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = (r - a\cos\varphi)\vec{e_y} + a\sin\varphi \cdot \vec{e_x}$

$$\Rightarrow (\vec{v_C})^2 = \dot{\varphi}^2 (r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) = \dot{\varphi}^2 (r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{M(\vec{v_c})^2}{2} + \frac{I_{cz}\omega^2}{2} = \frac{M}{2}\cdot\dot\varphi^2(r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2) + \frac{MK^2\dot\varphi^2}{2} + Mg(r - a\cos\varphi) = h.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{M\dot\varphi^2}{2}(r^2+a^2+k^2-2ar\cos\varphi) - Mga\cos\varphi = \tilde h} \quad (**)$$

Найдем h из нач. усл: $\dot\varphi(0)=0;\ \varphi(0)=\varphi_0 \Rightarrow \tilde h = -Mga\cos\varphi_0.$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi^2 = \frac{2ag(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi}} \quad (*)$$

Зам. Можно $|\vec{v_c}|^2$ найти так:

$\vec{v_c} = \vec{v_A} + [\vec\omega; \vec{AC}]$, $\vec{v_A}=0$.

$|\vec{v_c}| = |\vec\omega|\cdot|\vec{AC}|$, $|\vec\omega| = |\dot\varphi|$, $|\vec{AC}| = |\vec{AO}+\vec{OC}|$

$\Rightarrow |\vec{v_c}|^2 = \dot\varphi^2\cdot(AO^2 + OC^2 - 2ar\cos\varphi)$

3) Найти период малых колеб.

Надо ур-е движения.
Для этого надо $\ddot\varphi$ выразить.
Можно либо $(**)$ дифференцировать, либо $(*)$.
Кого из них будем дифференцировать?
Они разные ответ дадут,
т.к. $(*)$ написано с учетом нач. усл $\Rightarrow$ мы $\ddot\varphi$ найдем для конкретных нач. усл.
а $(**)$ продиф- найдем $\ddot\varphi$ для любых нач. усл.
нам так и надо — т.к. само ур-е движения не исп. нач. усл.

$\Rightarrow$ дифф. $(**)$:

$$M\cdot\cancel{\dot\varphi}\ddot\varphi(r^2+a^2+K^2-2ar\cos\varphi) + \frac{M\dot\varphi^2}{2}(2ar\sin\varphi\cdot\dot\varphi) + Mga\sin\varphi\cdot\cancel{\dot\varphi} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\varphi(a^2+r^2+K^2-2ar\cos\varphi) + ar\sin\varphi\cdot(\dot\varphi)^2 + ga\sin\varphi = 0.} \text{ — ур-я движения} \quad (***)$$

полож. равнов: $\varphi \equiv const$

$\Rightarrow \dot\varphi = 0$

$\Rightarrow ga\sin\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases}\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ — верхнее, неустойчиво}\\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ — нижнее, устойчиво.}\end{cases}$

$\lambda = \sqrt{\frac{V''(\varphi_0)}{A(\varphi_0)}}$

$T = \frac{1}{2}A(\varphi)\dot\varphi^2$

общая ф-ла для частот малых колеб.

линеаризуем $(***)$:
оставляем только лин. слагаемые по $\dot\varphi, \varphi$.

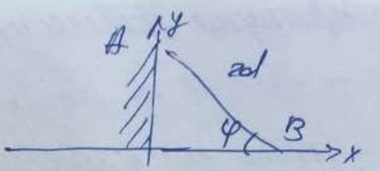
$$\Rightarrow \boxed{\ddot\varphi(a^2+r^2+k^2-2ar) + 0 + ga\varphi = 0.} \text{ — линеариз. ур-е движения (или ур-е малых колебаний)}$$

Это лин. ур-е с пост. коэф.

$\lambda^2((r-a)^2+K^2) + ga = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{ga}{(r-a)^2+K^2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{ga}{(r-a)^2+K^2}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi\sqrt{(r-a)^2+K^2}}{\sqrt{ga}}}$ ответ

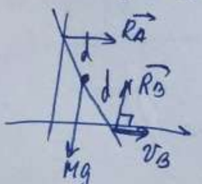
$\Rightarrow \varphi(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{ga}{(r-a)^2+K^2}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{ga}{(r-a)^2+K^2}}\,t\right)$

(2.98) $AB = 2d$.
M – масса
гладкий пол.



Найти: 1) ~~траектория~~ найти $\omega(\varphi)$, $R_A(\varphi)$, $R_B(\varphi)$
2) При каком φ оторвется от стены?

Решение: Движение плоск-пар ⇒ макс 3 коорд
Нижний только по гориз, верхний – только по вертик ⇒
⇒ только угол φ нужен.
У нас тв. тело ⇒ только внешние акт. силы и внешние реакции.



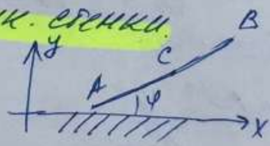
$\vec{R_B} \perp Ox$ – т.к пол гладкий
пол гладкий ⇒ пишем т. об изм. кин. энергии
Мощности $\vec{R_A}$ и $\vec{R_B} = 0$ – т.к $\vec{R_B} \perp \vec{v_B}$
А сила тяжести – консервативна ⇒ ЗСЭ
⇒ $\dot\varphi$ – найдём из т. ~~о движении ц.м.~~ об изм. кин. энергии.

$T + V = h$.
$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$, $V = Mg y_C$

2) $\vec{R_A}$ и $\vec{R_B}$ найдём из т. о движении ц.м.:
$$M\vec{a_C} = M\vec{g} + \vec{R_A} + \vec{R_B}$$
на осях: $M\ddot{x}_C = R_A$
$M\ddot{y}_C = -Mg + R_B$ – но $\vec{a_C}$ – найдём по ф-ле Ривальса, (зная $\dot\varphi$ из п.1)
(или просто через x и y и продифф. 2 раза)

3) Отрыв – когда R_A ~~= R_B~~ $= 0$ – возможная точка схода
(если в след. момент R_A стало < 0 – то это была точка схода)
Короче, просто $R_A(\varphi) = 0$ – и ~~…~~ проанализировав, когда она < 0.
Аналогично для R_B.

(2.99) То же самое, но нет вертик. стенки.



1) Траектория точки B.
2) $v_C(h_C)$
3) реакцию пола в точке A, если $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$; $v(0) = 0$.

Решение: 1) Сколько коорд. задают положение:
из 2: x и φ
↑ уровне задавать положение точки A
(но подойдёт любая точка)
2) Силы: $M\vec{g}$ – заменим на экв систему сил, приложим к ц.м.
$\vec{R_A}$ – она ⊥ полу, т.к гладкий пол.
3) Просят найти реакцию ⇒ нужна т. об изм. импульса (= т. о движении ц.м.)
$$\frac{d}{dt}(\vec{P}) = M\vec{g} + \vec{R_A}$$
$$\vec{P} = M\vec{v_C}.$$
$$\Rightarrow M \cdot \frac{d\vec{v_C}}{dt} = \underbrace{M\vec{g} + \vec{R_A}}_{\text{они} \parallel \vec{e_y}}$$ ⇒ в проекции на Ox:
$$M\left(\frac{d\vec{v_C}}{dt}; \vec{e_x}\right) = 0 \Rightarrow M \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{v_C}; \vec{e_x}\right) = 0 \Rightarrow (M\vec{v_C}; \vec{e_x}) = 0$$

итак, $(\vec{v_C}; \vec{e_x}) = const$ – т.е гориз. проекция скорости ц.м $= const$.

нач. усл: стержень покоится $\Rightarrow \vec{v_C}(0) = 0 \Rightarrow (\vec{v_C}; \vec{e_x}) \equiv 0$.

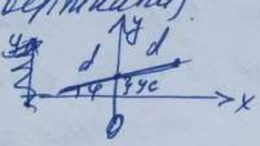
! этот вывод (что $(\vec{v_C}; \vec{e_x}) \equiv 0$) – только для нашего конкр. движения (из-за таких нач. усл. нас)

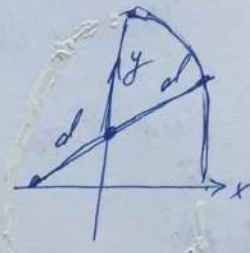
$\Rightarrow$ для нашего конкретного движения: ось $O\vec{y}$ можно провести через ц.м.

(т.к ц.м движется только по вертикали)

$\Rightarrow$ дост. только одной коорд: φ.

$y_C = d\sin\varphi$





4) Хотим траекторию точки B:

если мы знаем φ, то $\begin{cases} x_B = d\cos\varphi \\ y_B = 2d\sin\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x_B^2}{d^2} + \frac{y_B^2}{(2d)^2} = 1$ – это эллипс.

5) $\vec{v_C}(y_C) = ?$

ну пол гладкий $\Rightarrow$ см. на т. об изм. энергии

$\frac{d}{dt}(T) = (M\vec{g}; \vec{v_C}) + \underbrace{(\vec{R_A}; \vec{v_A})}_{\text{т.к они} \perp}{}^{=0}$

$M\vec{g}$ – консерв $\Rightarrow$ будет ЗСЭ:

$T + V = h$.

- $V = Mgy_C\ (= Mgd\sin\varphi)$
- $T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$ – т.к плоско-пар. движение.

$\vec{\omega} = \dot\varphi\vec{e_z}$ – нужно найти $\dot\varphi$ через $\dot y_C$

~~$|\vec{v_C}| = \dot x_B^2 + \dot y_B^2 = (d\cos\varphi)^2 + (2d\sin\varphi)^2 = d^2\cos^2\varphi + 4d^2\sin^2\varphi = d^2 + 3d^2\sin^2\varphi$~~

$\vec{v_C} = \dot x_C\vec{e_x} + \dot y_C\vec{e_y}$.

при наших нач. усл: $\dot x_C = 0$.

ищем $\dot y_C$: $y_C = d\sin\varphi$

$\Rightarrow \dot y_C = d\cos\varphi\cdot\dot\varphi = d\sqrt{1 - \frac{y_C^2}{d^2}}\,\dot\varphi = \sqrt{d^2 - y_C^2}\cdot\dot\varphi$. $\quad I_{Cz} = \frac{ml^2}{12} = \frac{Md^2}{3}$

$\Rightarrow \vec{v_C} = \dot y_C\vec{e_y} = \sqrt{d^2 - y_C^2}\cdot\dot\varphi\vec{e_y} \Rightarrow \dot\varphi = :$

$\Rightarrow T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2} = \frac{M\dot y_C^2}{2} + \frac{Md^2}{6}\cdot\frac{\dot y_C^2}{(d^2 - y_C^2)^2}$

$\Rightarrow T + V = h$: $\boxed{\frac{M}{2}\dot y_C^2\left(1 + \frac{d^2}{3(d^2 - y_C^2)}\right) + Mgy_C = h = Mgy_0}$ – ЗСЭ для нашего движения с a ртн не нашего.

$\Rightarrow \dot y_C^2\left(1 + \frac{d^2}{3(d^2 - y_C^2)}\right) + 2gy_C = Mgy_0$ – отсюда находим $\dot y_C^2(y_C)$ ещё $\frac{M\dot v_C^2}{2}$ ...

$\Rightarrow \vec{v_C} = \dot y_C\vec{e_y}$.

c) Реакцию в точке пола A:

реакция $\Rightarrow$ исп. т. о движении ц.м:

$M\frac{d\vec{v_C}}{dt} = M\vec{g} + \vec{R_A}$; $\vec{R_A} = R_A\vec{e_y}$.

на ось x: $M\ddot x_C = 0$. – мы его в п.3 уже исп.

на ось y: $M\ddot y_C = -Mg + R_A$

$\Rightarrow R_A = M\ddot y_C + Mg = M(\ddot y_C + g)$

но мы уже в п.5) нашли $\dot y_C$, для нашего движения:

$\dot y_C^2 = f(y_C)$

$\Rightarrow 2\dot y_C\cdot\ddot y_C = f'(y_C)\cdot\dot y_C \Rightarrow \ddot y_C = \frac{f'(y_C)}{2} \Rightarrow$ всё; нашли R_A.

ОЗ: 2.99 – решал. 2.85

Эту сторону бланка можно использовать как черновик.
Она не сканируется и не проверяется.

2.105

1) $T+V=h.$

$T=\frac{Mv_C^2}{2}+\frac{I_{Cz}\omega^2}{2}$, $\omega^2=\dot\varphi^2$

$\begin{cases}x_C=d\cos\varphi\\ y_C=d\sin\varphi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot x_C=-d\sin\varphi\cdot\dot\varphi\\ \dot y_C=d\cos\varphi\cdot\dot\varphi\end{cases}$

$\Rightarrow v_C^2=d^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi+d^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi=\dot\varphi^2 d^2$

$I_{Cz}=\frac{Ml^2}{12}=\frac{Md^2}{3}$

$\Rightarrow T+V=\frac{M\dot\varphi^2 d^2}{2}+\frac{Md^2}{6}\cdot\dot\varphi^2+Mgd\sin\varphi=h=Mgd\sin\varphi_0.$

В нач. момент: $\varphi=\varphi_0$
$\dot\varphi=0.$

[illegible] $\omega=\sqrt{\frac{3g}{4d}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}$

$\Rightarrow 3\dot\varphi^2 d^2+\dot\varphi^2 d^2+6gd\sin\varphi=6gd\sin\varphi_0.$

$\Rightarrow 4\dot\varphi^2 d^2=6gd(\sin\varphi_0-\sin\varphi)$ (*)

$\Rightarrow \dot\varphi^2=\frac{6g(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}{4d}$ $\Rightarrow \omega=\dot\varphi e_z=\sqrt{\ldots}\,e_z$

2) Т. о движении ц.м.:

$M\bar a_C=M\bar g+\bar R_A+\bar R_B$

$\begin{cases}M\ddot x_C=R_A\\ M\ddot y_C=-Mg+R_B\end{cases}$ но $\begin{cases}\ddot x_C=-2d\cos\varphi(\dot\varphi)^2-2d\sin\varphi\cdot\ddot\varphi\\ \ddot y_C=-d\sin\varphi\,\dot\varphi^2+d\cos\varphi\cdot\ddot\varphi\end{cases}$

Как найти $\ddot\varphi$: (*)

$\Rightarrow 2\cdot\cancel{4}\,\dot\varphi\ddot\varphi d\,(\ +4)=-6g\cos\varphi\,\cancel{\dot\varphi}$

$\Rightarrow \ddot\varphi=-\frac{3g\cos\varphi}{d(\ +4)}$

$\Rightarrow R_A=M\ddot x_C=-\frac{2Md\cdot\cos\varphi\cdot 6g(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}{d(\ +4)}+\frac{M6gd\sin\varphi\cos\varphi}{d(\ +4)}=$

$=\frac{-12Mgd\sin\varphi_0\cdot\cos\varphi+12Mgd\sin\varphi\cos\varphi+6Mgd\sin\varphi\cos\varphi}{d(\ +4)}=$

$=\frac{6Mgd\cos\varphi(-2\sin\varphi_0+3\sin\varphi)}{d(\ +4)}\overset{?}{=}0\Rightarrow \sin\varphi^*=\frac{2}{3}\sin\varphi_0$

Эту сторону бланка можно использовать как черновик.
Она не сканируется и не проверяется.

при $\varphi<\varphi^*$:
$-2\sin\varphi_0+3\sin\varphi<0$
$\Rightarrow$ это точка схода