Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 8

**Теорема А.Н.Колмогорова**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Предположим, что для всех $\omega \in \Omega$ и $s, t \in [0, T]$, $s \le t$, определены $X^i_t(\omega)$ и $\mathbb{X}^{ij}_{st}(\omega)$ и выполнены соотношения Чена. Предположим также, что отображение $(\omega, t) \to (X^i_t(\omega), \mathbb{X}^{ml}_{0t}(\omega))$ является случайным процессом.

**Теорема 1.** *Если для некоторых чисел $q \ge 2$ и $\beta > \frac{1}{q}$ справедливы оценки*

$$\big(\mathbb{E}|X^i_{st}|^q\big)^{1/q} \le C|t-s|^\beta, \quad \big(\mathbb{E}|\mathbb{X}^i_{st}|^{q/2}\big)^{2/q} \le C|t-s|^{2\beta},$$

*то для всякого $\alpha \in (0, \beta - \frac{1}{q})$ найдутся такие модификации $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ процессов $X_t$ и $\mathbb{X}_{st}$, что почти наверное*

$$|X_{st}| \le K_\alpha |t-s|^\alpha, \quad |\mathbb{X}_{st}| \le \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha},$$

*и $\mathbb{E}|K_\alpha|^q < \infty$, $\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^{q/2} < \infty$.*

*Доказательство.* Пусть $T = 1$, то есть рассматриваем отрезок $[0, 1]$. Через $\mathbb{T}_n$ обозначим разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $t_k = k/2^n$.

Положим $K_n = \max_k |X_{t_k t_{k+1}}|$. Заметим, что

$$\mathbb{E}K_n^q \le \sum_k \mathbb{E}|X_{t_k t_{k+1}}|^q \le C^q 2^{-n(\beta q - 1)}.$$

Пусть $s < t$ — двоично рациональные точки, причем $2^{-m-1} < t - s \le 2^{-m}$. Существует такое разбиение $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$, что всякий отрезок $[u_k, u_{k+1}]$ принадлежит какому-то разбиению $\mathbb{T}_n$ с $n \ge m+1$ и для каждого такого $n$ в разбиении не более двух отрезков из $\mathbb{T}_n$. Найдем такие точки $a_1 \le s \le a_2$ и $b_1 \le t \le b_2$, что $a_1, a_2$ и $b_1, b_2$ — последовательные или совпадающие точки разбиения $\mathbb{T}_{m+1}$. Между $a_2$ и $b_1$ не более двух отрезков из $\mathbb{T}_{m+1}$. Теперь делим отрезки $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ пополам. Получившиеся после деления половины, которые лежат между $s$ и $t$ добавляем к уже имеющимся отрезкам из $\mathbb{T}_{m+1}$. Эта процедура добавляет не более двух отрезков из $\mathbb{T}_{m+2}$. Продолжая построение, получаем искомое разбиение.

Справедлива оценка

$$|X_{st}| \le \sum_k |X_{u_k u_{k+1}}| \le 2 \sum_{n=m+1} K_n.$$

Поскольку $2^{-m-1} < t - s \le 2^{-m}$, то

$$\frac{|X_{st}|}{|t-s|^\alpha} \le 2 \sum_{n=m+1} K_n 2^{\alpha(m+1)} \le 2 \sum_{n=m+1} K_n 2^{\alpha n} \le 2 \sum_{n=0} 2^{\alpha n} K_n =: K_\alpha.$$

По неравенству Минковского

$$\big(\mathbb{E}K_\alpha^q\big)^{1/q} \le 2 \sum_{n=0} 2^{\alpha n} \big(\mathbb{E}K_n^q\big)^{1/q} = 2 \sum_{n=0} 2^{-(\beta - q^{-1} - \alpha)n} < \infty.$$

Итак, для всех двоично рациональных $s, t$ и всех $\omega$с справедливо неравенство

$$|X_{st}(\omega)| \le K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha,$$

причем $\mathbb{E}K_\alpha^q < \infty$. Пусть $\Omega'$ — множество таких $\omega$, что $K_\alpha(\omega) < \infty$. На $\Omega'$ отображение $t \to X_t(\omega)$ непрерывно по Гёльдеру на двоично-рациональных $t$ для всех $\omega$.

Пусть $t_k \to t$ и $t_k$ — последовательность двоично рациональных чисел. Тогда последовательность $X_{t_k}(\omega)$ фундаментальная и имеет предел, который обозначим через $\widetilde{X}_t(\omega)$. Вне $\Omega'$ полагаем $\widetilde{X}_t(\omega) = 0$. Для каждого $\omega$ отображение $t \to \widetilde{X}_t(\omega)$ непрерывно по Гёльдеру на $[0, T]$ и выполнена оценка $|\widetilde{X}_{st}(\omega)| \le K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha$. Покажем, что $\widetilde{X}_t$ является модификацией $X_t$. Поскольку

$$\mathbb{E}|X_t - X_{t_k}|^q \le C^q|t-t_k|^{\beta q},$$

то $\mathbb{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^q = 0$ и $\widetilde{X}_t = X_t$ почти наверное.

Рассмотрим теперь $\mathbb{X}$. Положим $\mathbb{K}_n = \max_k |\mathbb{X}_{t_k t_{k+1}}|$. Имеем

$$\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2} \le \sum_k \mathbb{E}|\mathbb{X}_{t_k t_{k+1}}|^{q/2} \le C^{q/2}2^{-n(\beta q-1)}.$$

Пусть $s < t$ — двоично рациональные точки, причем $2^{-m-1} < t - s \le 2^{-m}$. Возьмем такое разбиение $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$, что всякий отрезок $[u_k, u_{k+1}]$ принадлежит какому-то разбиению $\mathbb{T}_n$ с $n \ge m+1$ и для каждого такого $n$ в разбиении не более двух отрезков из $\mathbb{T}_n$. Тогда

$$|\mathbb{X}_{st}| = |\sum_k \mathbb{X}_{u_k u_{k+1}} + X_{su_k} \otimes X_{u_k u_{k+1}}| \le \sum_k |\mathbb{X}_{u_k u_{k+1}}| + \bigl(\sum_k |X_{u_k u_{k+1}}|\bigr)^2.$$

В силу выбора разбиения точками $u_k$ верна оценка

$$|\mathbb{X}_{st}| \le 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{K}_n + \bigl(2\sum_{n=m+1}^{\infty} |X_{u_k u_{k+1}}|\bigr)^2.$$

Разделим правую и левую части на $|t-s|^{2\alpha}$. Получаем

$$\frac{|\mathbb{X}_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}} \le 2\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{K}_n 2^{2\alpha n} + K_\alpha^2 = \mathbb{K}_\alpha.$$

Применяя неравенство Минковского, выводим оценку

$$\bigl(\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^{q/2}\bigr)^{2/q} \le 2\sum_n \bigl(\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2}\bigr)^{2/q} + \bigl(\mathbb{E}\mathbb{K}_\alpha^q\bigr)^{2/q}.$$

Поскольку

$$\sum_n \bigl(\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2}\bigr)^{2/q} \le C\sum_n 2^{-2n(\beta - q^{-1} - \alpha)} < \infty,$$

то $\bigl(\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^{q/2}\bigr)^{2/q} < \infty$.

Пусть $\Omega'$ состоит из таких $\omega$, что $\mathbb{K}_\alpha(\omega) < \infty$, $K_\alpha(\omega) < \infty$ и для всех двоично рациональных $s < u < t$ выполняются соотношения Чена. Для $\omega \in \Omega'$ и всех двоично рациональных $s, t$ справедливы неравенства

$$|\mathbb{X}_{st}| \le \mathbb{K}_\alpha|t-s|^{2\alpha}$$

и

$$|\mathbb{X}_{0t} - \mathbb{X}_{0s}| \le \mathbb{K}_\alpha|t-s|^{2\alpha} + K_\alpha^2|t-s|^\alpha.$$

Полагаем $\widetilde{\mathbb{X}}_{0t} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{X}_{0t_k}$, где $t_k$ — последовательность двоично рациональных чисел, сходящаяся к $t$. Вне $\Omega'$ полагаем $\widetilde{\mathbb{X}}_{0t} = 0$. Как и выше проверяется, что процесс $\widetilde{\mathbb{X}}_{0t}$ является модификацией $\mathbb{X}_{0t}$. Положим

$$\widetilde{\mathbb{X}}_{st} = \widetilde{\mathbb{X}}_{0t} - \widetilde{\mathbb{X}}_{0s} - \widetilde{X}_{0s} \otimes \widetilde{X}_{st}.$$

Заметим, что отображение $(s, t) \to \widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ непрерывно и на двоично рациональных $s, t$ совпадает с $\mathbb{X}_{st}$. Следовательно, верна оценка $|\widetilde{\mathbb{X}}_{st}| \le \mathbb{K}_\alpha|t-s|^{2\alpha}$. Остается заметить, что для $\widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ выполнены соотношения Чена. $\square$

**Пространство Гёльдера**

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Через $C^\alpha[0,T]$ обозначаем пространство таких непрерывных отображений $x.\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$, что

$$\|x\|_\alpha = \sup_{s\neq t} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

**Предложение 1.** *Пространство $C^\alpha[0,T]$ с нормой $|x_0| + \|x\|_\alpha$ является банаховым пространством.*

Отметим, что пространство $C^\alpha[0,T]$ не является сепарабельным. Действительно, для всяких $0 < a < b < T$

$$\|(\max\{0, t-a\})^\alpha - (\max\{0, t-b\})^\alpha\|_\alpha \geq 1.$$

Через $C^{0,\alpha}[0,T]$ обозначим замыкание в $C^\alpha[0,T]$ множества непрерывно дифференцируемых отображений.

**Предложение 2.** *Отображение $x_t$ принадлежит пространству $C^{0,\alpha}[0,T]$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_{|s-t|<\delta} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} = 0.$$

*Доказательство.* Обоснуем только необходимость данного условия. Пусть $y_t$ — непрерывно дифференцируемое отображение и $|y'_t| \leq C$. Имеем

$$\sup_{|s-t|<\delta} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} \leq \|x-y\|_\alpha + C\delta^{1-\alpha}.$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ находим такое отображение $y_t$, что $\|x-y\|_\alpha < \varepsilon$, а затем выбираем $\delta$ столь малым, что $C\delta^{1-\alpha} < \varepsilon$. Получаем для таких $\delta$ оценку

$$\sup_{|s-t|<\delta} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} \leq 2\varepsilon.$$

$\square$

В качестве следствия получаем для $0 < \beta < \alpha < 1$ строгие включения:

$$C^\beta[0,T] \subset C^{0,\alpha}[0,T] \subset C^\alpha[0,T].$$

Напомним, что $\Delta_T = \{(s,t)\colon\ 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Через $C^\alpha_{\Delta_T}$ обозначим пространство непрерывных отображений $x.\colon \Delta_T \to \mathbb{R}^{d^2}$, для которых

$$\|x\|_\alpha = \sup_{s\neq t} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

**Предложение 3.** *Пространство $C^\alpha_{\Delta_T}$ с нормой $\|x\|_\alpha$ является банаховым пространством.*

**Пространство грубых траекторий**

Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Пространством грубых траекторий $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ называем подмножество пространства $C^\alpha[0,T] \times C^{2\alpha}_{\Delta_T}$, состоящее из пар $(X, \mathbb{X})$, для которых выполнены соотношения Чена.

**Предложение 4.** *Пространство грубых траекторий $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ с метрикой*

$$d((X,\mathbb{X}),(Y,\mathbb{Y})) = |X_0 - Y_0| + \|X = Y\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\|_{2\alpha}$$

*является полным метрическим пространством.*

*Доказательство.* Поскольку соотношения Чена — поточечные равенства, то $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ является замкнутым подмножеством полного пространства $C^\alpha[0,T] \times C^{2\alpha}_{\Delta_T}$. $\square$