Модель Blume-Easley (1992)

N игроков

M исходов $\quad p = (p_1, \dots, p_M) \qquad p_m > 0$

Y_t^n - капитал игрока n , $\lambda^n = (\lambda^{n,1}, \dots, \lambda^{n,N})$ - стратегия $\sum\limits^{\geq 0} = 1$ - ставят всё

базис.

$X_t^m \in \{0, 1\}$ -индикатор $\qquad X_t = (X_t^1, \dots, X_t^M) \in \{e_1, \dots, e_M\}$

$$\boxed{Y_{t+1}^n = \sum_{m=1}^M \frac{\lambda^{n,m} Y_t^n}{\sum_i \lambda^{i,m} Y_t^i} X_{t+1}^m}$$

$\sum\limits_{j=1}^N Y_t^j$

Теорема $\lambda^* = (p_1,\dots,p_M)$ используется игроком 1 (B. E '92)

1) $\inf\limits_{t\ge 0} R_t^1 > 0$ п.н. survival $\qquad R_t^n = \dfrac{Y_t^n}{\sum_{i=1}^N Y_t^i}$

2) если $\lambda^n \ne \lambda^*$, тогда

$\lim\limits_{t\to\infty} R_t^n = 0$ п.н.

Замеч. • $\sum_{i=1}^N Y_t^i = 1$ $\quad t\ge 2$, можно считать $\sum_{i=1}^N Y_0^i = 1 \Rightarrow R_t^n = Y_t^n$

Д-во 1) Докажем $Z_t = \ln Y_t^1$ – субмартингал („обобщенный") Ш. „Вероятность"

$$E(Z_{t+1}|\mathcal{F}_t) \ge Z_t$$

$$E(Z_{t+1}-Z_t|\mathcal{F}_t) = E\left(\ln \sum_{m=1}^M \frac{\lambda^{*,m}}{\sum_i \lambda^{i,m} Y_t^i}\cdot X_{t+1}^m \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = E\left(\sum_m X_{t+1}^m \cdot \ln \underbrace{\frac{p_m}{\sum_i\lambda^{i,m}Y_t^i}}_{\mathcal{F}_t\text{-изм}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \sum_m p_m \ln \frac{p_m}{\underbrace{\sum_i \lambda^{i,m} Y_t^i}_{g_m}} = \sum_m p_m \ln\frac{p_m}{g_m} \ge 0 \quad \text{нер-во Гиббса}$$

$g_m > 0$, $\sum g^m = 1$

Дальше по т-ме о сходимости огр сверху субмартингала

$$\exists \lim_{t\to\infty} Z_t = Z_\infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} Y_t^1 = e^{Z_\infty} > 0 \text{ п.н.} \Rightarrow \inf_{t\ge 0} Y_t^1 > 0$$

2) $\lambda^n \ne \lambda^*$ $\quad n\ge 2$

Нужно $\ln\dfrac{Y_t^1}{Y_t^n} \to \infty \qquad \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac1t \ln\dfrac{Y_t^1}{Y_t^n} > 0$

$$\frac1t\ln\frac{Y_t^1}{Y_t^n} = \underbrace{\frac1t \ln\frac{Y_0^1}{Y_0^n}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac1t\sum_{s=1}^t \big(D_s - E(D_s|\mathcal{F}_{s-1})\big)}_{\text{обобщ. март. } M_t} + \underbrace{\frac1t\sum_{s=1}^t E(D_s|\mathcal{F}_{s-1})}_{A_t} \qquad D_t = \ln\frac{Y_t^1}{Y_t^n} - \ln\frac{Y_{t-1}^1}{Y_{t-1}^n}$$

Пусть $\forall n,m$ $\lambda^{n,m} > 0$ $\qquad$ Упрощение

$$C := \ln\frac{\min_{m,n}\lambda^{m,n}}{\max_{m,n}\lambda^{m,n}} \le D_t \le \ln\frac{\max_{m,n}\lambda^{m,n}}{\min_{m,n}\lambda^{m,n}} =: C$$

$\Rightarrow M_t$ имеет огр. прир. $\Rightarrow$ УЗБЧ для март $\dfrac{M_t}{t} \to EM_t = 0$

Покажем $E(D_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq \varepsilon > 0$

$$D_t = \sum_{m=1}^{M} \ln\left(\frac{\lambda^{1,m}}{\lambda^{n,m}}\right) \cdot X_t^m$$

$$E(D_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = ED_t = \sum_{m=1}^{M} \ln \frac{p_m}{\lambda^{n,m}} \cdot p_m = \varepsilon > 0$$

нер-во Гиббса

Обобщение

1) $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^M)$ - сл. вектор $X_t^m \geq 0$ (можно считать $\sum_m X_t^m = 1$)

$$\lambda^{*,m} = E \frac{X_t^m}{\sum_k X_t^k} \qquad \left(\text{В общем } \lambda_t^{*,m} = E\left(\frac{X_{t+1}^m}{\sum_k X_{t+1}^k} \,\Big|\, \mathcal{I}_t \right) \right)$$

X_t н.о.р. $\qquad \inf_{t \geq 0} R_t^1 > 0 \qquad$ Amir, Evstigneev, ... 2013 Коротко-живущие Short-lived

нет 2-го рез-та

Доказать

Нина

2) Long-lived $\qquad$ Amir, Evstigneev 2011