07.12.20. Дискр. матем. д/з от семинара 14 (продолжение)

(2 и 3) $F = \{ f, \|f\| = \frac{2^n}{n} \}$

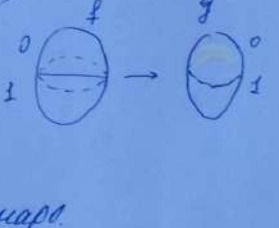
$F = \{ f, \|f\| = 2^{n/2} \}$ $\quad \max\limits_{f \in F} L(f) = ?$

Решение: применим трюк про применение лин. оператора $L: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ к мн-вам значений ф-ции $f$. (стр. 207 в книге)

$D_0 = \{ x \in D \mid f(x) = 0 \}$

$D_1 = \{ x \in D \mid f(x) = 1 \}$.

$|D_0| \geq |D_1|$ — в обоих случаях





положим $g(y) := \begin{cases} 0, & \text{если } \nexists x : L(x) = y;\ f(x) = 1 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

Если $g(\cdot) = 0$, то и $f(\cdot) = 0$ — тут уже ничего делать не надо.

Если $g(\cdot) = 1$, то мы ничего не можем сказать о $f(\cdot)$.

Можно несколько раз применить разные $g(\cdot)$.

пусть $N$ — число единиц у $f$. (в 2: $N = \frac{2^n}{n}$; в 3: $N = 2^{n/2}$)

$\Rightarrow$ размер области, в которой $L$ склеивает нули и единицы, $\leq \frac{\|f_0\| \cdot \|f_1\|}{2^m}$ (см. лемма 11.8 стр 206) $A = D_1$, $B = D_0$.

$\Rightarrow$ размер хорошей области, где мы определяем значение:

$2^n - N - \frac{\|f_0\| \cdot \|f_1\|}{2^m}$ — тут $g = 0 \Rightarrow f = 0$. $\Rightarrow$ размер хорошей области увеличился. Повторяем шаг, пока все хорошими не станут.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$k = \log_2 |D_1| + 1$

$m = \lceil \log_2 |D_0| + \log_2 |D_1| + 1 \rceil$ - целое

---

Нижняя оценка (по теореме 11.4): для $N = \frac{2^n}{n}$ и $N = 2^{n/2}$

$$\frac{\log |F|}{\log\log |F|} = \frac{\log_2 C_{2^n}^N}{\log\log C_{2^n}^N} = \frac{\log\left( \frac{2^n(2^n-1)\dots(2^n-N+1)}{N!} \right)}{\log\log\left( \frac{2^n(2^n-1)\dots(2^n-N+1)}{\underbrace{\mathrm{const}\cdot\left(\frac{N}{e}\right)^N}_{\approx 3{,}71}} \right)} \sim \frac{\log \frac{2^{nN}}{\left(\frac{N}{e}\right)^N}}{\log\log\left( \frac{2^{nN}}{\left(\frac{N}{e}\right)^N} \right)} \sim$$

$$\sim \frac{N \cdot \log_2\left( \frac{e \cdot 2^n}{N} \right)}{\log_2 N + \log\log\left( \frac{e \cdot 2^n}{N} \right)} \underset{N = \frac{2^n}{n}}{=} \frac{N \cdot \log_2\left( \frac{e \cdot 2^n}{2^n} \cdot n \right)}{\log\left(\frac{2^n}{n}\right) + \log\log_2(n \cdot e)} = \frac{N \cdot \log_2(e \cdot n)}{n - \log n + \log\log ne}.$$

$$N = 2^{n/2}: \quad = \frac{2^{n/2} \cdot \log_2\left( \frac{e \cdot 2^n}{\sqrt{2^n}} \right)}{\log 2^{n/2} + \log\log\left(e \cdot 2^{n/2}\right)} \asymp \frac{2^{n/2} \cdot n/2}{n/2 + \log n/2} \sim 2^{n/2}$$

Что-то нижние и верхние оценки слишком разные.