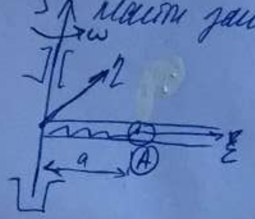
02.03.2021. Механика.

(2.53) Гладкая горизонт. трубка вращается с пост. угловой скоростью ω вокруг неподв. вертикальной оси, проход. через ее конец. В трубке – шарик массы m, прикрепл. к концу трубки пружиной жесткости k, длина которой в свободном состоянии $= a$. В нач. момент времени шарик находится на расстоянии a от оси вращения и его относ. скорость $= 0$. Найти закон относ. движения шарика и реакцию трубки.



Решение: полож. шарика относ. трубки задаем 1 коорд.: x. (т.к. ~~прямо~~ в относ. движении – прямолин. движ.)

$O\xi\eta\zeta$ – подв. с.к; $O\xi$ – вдоль трубки

$O\zeta \equiv Oz$ – неподв. ось вращения.

$\vec{OA} = \xi \cdot \vec{e_\xi}$

На точку действует $\underbrace{\vec{F}_{упр};\ m\vec{g}}_{заданные}$; $\underbrace{\vec{F}_{пер};\ \vec{F}_{кор}}_{\text{т.к. подв. с.к. это силы инерции}}$; $\vec{R}$ т.к. у точки есть ограничения: заключена в трубку (из связь)

$$\Rightarrow m\vec{a}_A^{\,отн} = \vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{F}_{пер} + \vec{F}_{кор} + \vec{R}$$

- $\vec{F}_{упр} = -k(\xi - a)\vec{e_\xi}$ – закон Гука.
- $m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$
- $\vec{R} = \underbrace{R_\xi \vec{e_\xi}}_{\substack{\text{кас. сост. реакции} \\ \text{она} = 0,\ \text{т.к.} \\ \text{трубка гладкая}}} + R_\eta \vec{e_\eta} + R_z \vec{e_z}$

ф-ла Ривальса

- $\vec{F}_{пер} = -m\vec{a}_A^{\,пер} = -m\Big(\underset{=0}{\vec{a}_O^{\,абс}} + \underbrace{[\underset{=\omega\vec{e_z}}{\vec{\omega}_{пер}}; [\underset{=\omega\vec{e_z}}{\vec{\omega}_{пер}}; \underset{=\xi\vec{e_\xi}}{\vec{OA}}]]}_{\substack{\omega\xi\vec{e_\eta} \\ \omega^2\xi(-\vec{e_\xi})}} + [\underset{=0}{\vec{\varepsilon}_{пер}}; \vec{OA}]\Big) = m\omega^2\xi\vec{e_\xi}$

- $\vec{F}_{кор} = -m\vec{a}_A^{\,кор} = -m \cdot 2[\vec{\omega}_{пер}; \vec{v}_A^{\,отн}] = -2m[\omega\vec{e_z}; \dot{\xi}\vec{e_\xi}] = -2m\omega\dot{\xi}\vec{e_\eta}$

- $\vec{a}_A^{\,отн} = \ddot{\xi}\vec{e_\xi}$

$$\Rightarrow m\ddot{\xi}\vec{e_\xi} = -k(\xi - a)\vec{e_\xi} - mg\vec{e_z} + m\omega^2\xi\vec{e_\xi} - 2m\omega\dot{\xi}\vec{e_\eta} + R_\eta\vec{e_\eta} + R_z\vec{e_z}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{\xi} = -k(\xi - a) + m\omega^2\xi \\ R_\eta = 2m\omega\dot{\xi} \\ R_z = mg \end{cases}$$

$\Rightarrow m\ddot{\xi} + \xi(k - m\omega^2) = ka$

$m\lambda^2 + (k - m\omega^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} + \omega^2$

$$m\ddot{\xi} + \xi(k - m\omega^2) = ka$$

$$m\lambda^2 + (k - m\omega^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} + \omega^2$$

Если $\lambda^2 > 0$, т.е $\omega^2 > \frac{k}{m}$, т.е $\sqrt{\frac{k}{m}} < \omega$, то $\xi = c_1 \cdot e^{\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t}$

Если $\lambda^2 = 0$, т.е $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$, то $\xi = (c_1 + c_2 t)e^{0t}$ (ЭТО)

Если $\lambda^2 < 0$, т.е $\sqrt{\frac{k}{m}} > \omega$, то $\xi = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$

Ищем частн. реш:

$$C \cdot (k - m\omega^2) = ka \Rightarrow C = \frac{ka}{k - m\omega^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = \text{(ЭТО)} + \dfrac{ka}{k - m\omega^2} \\ R_\eta = 2m\omega\dot{\xi} \\ R_z = 0 \end{cases}$$

Мораль: $R_\eta \neq 0 \Rightarrow$ совершает работу на абс. перемещ. точки (см. стр 546 Голубев)

Мех. энергия системы не сохр, хотя сила пружины, действ. на точку – потенциальна. Но имеет место обобщ. интеграл энергии Якоби.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

по т. о сложении скоростей:
по оси – подв. ск.
$\bar{v}_{отн} = \dot{x}\bar{e}_\xi$
$\bar{v}_{пер} = R\dot{\varphi} = x\omega$ и они $\perp$.

$$V = -\frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) + \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$ – не интеграл ур-я движения, т.к связи зав. от времени и реакции соверш. работу на действ. перемещ.

Вместе с тем кин. энергия от времени явно не зав.

$\Rightarrow$ вып. обобщ. интеграл энергии Якоби:

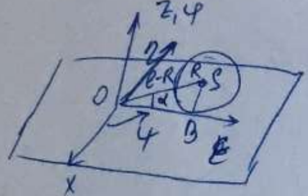
$$T_2 - T_0 = U + h$$

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 = h.$$

$T_2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2$

$T_0 = \frac{m}{2} x^2 \omega^2$

Задача 2) Мы её уже решали через ф-лу для тв. тела с неподв. точкой
А теперь — через ф-лу 4), для произв. движения
Нам надо $v_{ц.м}$, $\vec\omega$ и $\tilde{J}_{ц.м}$



$T, \vec{K_0} = ?$

$$T = \frac{m v_S^2}{2} + \frac{\overbrace{(\tilde{J}_S\vec\omega, \vec\omega)}^{\text{в главных осях}\ = I_{S\xi}\omega_\xi^2 + I_{S\eta}\omega_\eta^2 + I_{S\zeta}\omega_\zeta^2}}{2}$$

$\vec\omega = \dot\psi\frac{\sqrt{l^2-R^2}}{R}\vec e_\xi$ — через ф-лу Эйлера для точек S и B, записав другим способом скорость ц.м.

Точка S — движется по гориз. ~~...~~ окр-ти радиуса $(l-R)\cos\alpha$.
Положение точки на окр-ти — задаётся углом ψ.
$\Rightarrow \vec v_S = \dot\psi\sqrt{l^2-R^2}\,\vec e_\eta$

Теперь ищем оператор инерции шара относ. центра.
Он симм $\Rightarrow$ главные оси инерции ~~...~~ шара относ. центра масс. — это любые 3 ⊥ оси.
Т.е любая ось ~~инерции~~, проход. через ц.м шара — будет главной осью инерции.
$\Rightarrow$ в качестве репера — можно взять любой репер.
Мы выберем репер $\vec e_\xi; \vec e_\eta$ — т.к $\vec\omega$ — в базисе $\vec e_\xi, \vec e_\eta$.

$I_{S\xi} = I_{S\eta} = I_{S\zeta} = \frac{2}{5}mR^2$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\dot\psi^2\frac{(l^2-R^2)}{R^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\dot\psi^2\frac{(l^2-R^2)}{R^2}\right) = \frac{7}{10}\dot\psi^2 m(l^2-R^2)$$

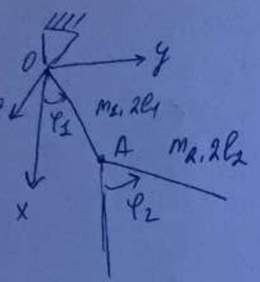
$$\vec{K_0} = \underbrace{\tilde{J}_S}_{I_{S\xi}\omega_\xi\vec e_\xi + I_{S\eta}\omega_\eta\vec e_\eta + I_{S\zeta}\omega_\zeta\vec e_\zeta}\vec\omega + [r_S\times m\vec v_S] = -\frac{2}{5}mR\dot\psi\sqrt{l^2-R^2}\,\vec e_\xi + m\left((l^2-R^2)\dot\psi\,\vec e_\zeta - \dot\psi R\sqrt{l^2-R^2}\right)\vec e_\xi$$

__Мораль__: ф-ла оператора инерции для произв. движения оказалась проще в данной задаче, т.к в точке S — все оси — главные оси инерции.
(т.е нам $\vec\omega$ не пришлось раскладывать по базису)

Для гвоздя:  в точке S: OS + 2 любые ⊥
в точке O: OS + 2 любые ⊥

Т.е поменяли шар на гвоздь — преимущества ф-лы 4 над 3 — закончились.

Задача 1) Двузвенный маятник.
1-ый стержень — вращение вокруг неподв. оси Oz.



$T = T_1 + T_2$

$T_1 = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega_1^2$ — т.к. 1-й стержень совершает вращ. вокруг неподв. оси.

$\overline{\omega_1} = \dot{\varphi}_1 \overline{e_z}$ — т.к. φ_1 — это угол поворота оси OA отн. оси OX.

$$I_{Oz} \underset{\substack{\text{ф-ла} \\ \text{Гюйг-} \\ \text{штейнера}}}{=} I_{S_1 z} + m_1 (OS_1)^2 = \frac{m_1 l_1^2}{3} + m_1 l_1^2 = \frac{4}{3} m_1 l_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{2}{3} m_1 l_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2}$$

2-й стержень совершает плоско-|| движение.

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{S_2 z} \omega_2^2}$$

$I_{S_2 z} = \frac{m_2 l_2^2}{3}$

φ_2 — угол поворота

$\Rightarrow \overline{\omega_2} = \dot{\varphi}_2 \overline{e_z}$

(1) v_S — посчитаем по ф-ле Эйлера.

$\overline{v_{S_2}} = \overline{v_A} + [\overline{\omega_2}; \overline{AS_2}]$ найти $\overline{v_{S_2}}$

$\overline{v_A}$ — либо как движение по окр-и, либо тоже по ф-ле Эйлера.

$\overline{v_A} = \overset{0}{\overline{v_O}} + [\overline{\omega_1}; \overline{OA}]$.

$\left.\begin{array}{l} \overline{OA} = 2l_1 \cos\varphi_1 \overline{e_x} + 2l_1 \sin\varphi_1 \overline{e_y} \\ \overline{AS_2} = l_2 \cos\varphi_2 \overline{e_x} + l_2 \sin\varphi_2 \overline{e_y} \end{array}\right\} \Rightarrow$ найти $\overline{v_A}$

$\Rightarrow$ найти $v_{S_2}^2$.

(2) v_S — как произв. радиус-вектора.

$$\begin{cases} x_{S_2} = 2l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \\ y_{S_2} = 2l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{S_2} = -2l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \\ \dot{y}_{S_2} = 2l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2 l_2 \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow v_S^2 = (\dot{x}_{S_2})^2 + (\dot{y}_{S_2})^2.$$

(3) v_S — через т. о сложении скоростей.

Свяжем подв. с.к. со стержнем OA.

$\Rightarrow$ с.к. вращается с $\overline{\omega_{пер}} = \dot{\varphi}_1 \overline{e_z}$

$$\overline{v_{S_2}}^{пер} = \overline{v_O}^{абс} + [\omega^{пер}; \overline{OS_2}] \; \underline{= \text{найти}}.$$

в базисе $O\xi; O\eta$.

S_2 относ. подв. с.к. — по окр-ти радиуса l_2 с центром в S_2.

положение на этой окр-ти: $\varphi_2 - \varphi_1$

$$\Rightarrow \overline{v_S}^{абс} = \overline{v_{S_2}}^{пер} + \overline{v_{S_2}}^{относ} = (\text{найти}) + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) l_2.$$

Или так: выберем в качестве подв. с.к.: $Ax'y'z$
(оси // неп. осям Oxy)

система движется поступательно $\Rightarrow \bar{\omega}_{пер} = 0$.

$\bar{\omega}_{пер} = 0 \Rightarrow \bar{v}_{S_2}^{\,пер} = \bar{v}_A^{\,абс} + [\overset{0}{\bar{\omega}^{пер}}, AS_2]$

точка A — движется по окр-ти радиуса $2l_1$, положение задаётся углом φ_1.

$\Rightarrow \bar{v}_A^{\,абс} = 2l_1\dot{\varphi}_1 \bar{e}_{\varphi_1}$

в подв. с.к.: S_2 — по окр-ти радиуса s_2,
и угол: φ_2 (а не $\varphi_2 - \varphi_1$).

$\Rightarrow \bar{v}_{S_2}^{\,от} = l_2\dot{\varphi}_2 \bar{e}_{\varphi_2}$

$\Rightarrow v_{S_2}^{абс} = \bar{v}_{S_2}^{\,пер} + \bar{v}_{S_2}^{\,от} = 2l_1\dot{\varphi}_1\bar{e}_{\varphi_1} + l_2\dot{\varphi}_2\bar{e}_{\varphi_2}$

$\Rightarrow v_{S_2}^2 = 4l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 4l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \underbrace{\langle \bar{e}_{\varphi_1}, \bar{e}_{\varphi_2}\rangle}_{=\cos(\varphi_2-\varphi_1)} + l_2^2(\dot{\varphi}_2)^2 =$

$e_{\varphi_1} = (-\sin\varphi_1; \cos\varphi_1)$

$e_{\varphi_2} = (-\sin\varphi_2; \cos\varphi_2)$

$= 4l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 4l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + l_2^2(\dot{\varphi}_2)^2$. Всё.

$\cancel{\Rightarrow T_2 = \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{S_2 z}\omega_2^2}$

$\Rightarrow T = T_1 + T_2 = \frac{2}{3}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{1}{2} I_{S_2 z}\omega_2^2 =$

$= \frac{2}{3}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2\left(4l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 4l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + l_2^2(\dot{\varphi}_2)^2\right)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_2 l_2^2}{3}\omega_2^2 = \ldots$ упрощаем.

! $T = T(q, \dot{q}, t)$

! $\dot{q}$ — обязательно входит в $T = (A\dot{q}, \dot{q})$ — [illegible]