08.04.21. ЧМ. КР2. Тонаева Александра Ч09

(1.) Для ур-я $y'(x)=f(x)$ построить разност. схему с наив. пор. аппрокс на решении:

$$\frac{y_k-y_{k-2}}{2h}=a_1f_k+a_0f_{k-1}+a_{-1}f_{k-2}$$

Решение: $\|L_h[y]_h-f_h\|=\max\limits_k\left|\frac{y(x_k)-y(x_k-2h)}{2h}-a_1f(x_k)-a_0f(x_k-h)-a_{-1}f(x_k-2h)\right|=$

$$=\max_k\Big|\frac{1}{2h}\Big(y(x_k)-\Big(y(x_k)-2h\cdot y'(x_k)+\frac{(2h)^2}{2}y''(x_k)-\frac{(2h)^3}{6}\cdot y'''(x_k)+\frac{(2h)^4}{24}y^{(4)}(x_k)-\frac{(2h)^5}{120}y^{(5)}(x_k)+O(h^6)\Big)$$
$$-a_1f(x_k)$$
$$-a_0\Big(f(x_k)-h\cdot f'(x_k)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(x_k)-\frac{h^3}{6}f'''(x_k)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_k)+O(h^5)\Big)$$
$$-a_{-1}\Big(f(x_k)-2h\cdot f'(x_k)+\frac{(2h)^2}{2}f''(x_k)-\frac{(2h)^3}{6}f'''(x_k)+\frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(x_k)+O(h^5)\Big)=$$

$y'(x_k)=f(x_k)$, т.к. это решение

$$=\max_k\Big|y'(x_k)(1-a_1-a_0-a_{-1})$$
$$+h\cdot y''(x_k)(-1+a_0+2a_{-1})$$
$$+h^2\cdot y'''(x_k)\Big(\frac{4}{6}-\frac{a_0}{2}-2a_{-1}\Big)$$
$$+h^3\cdot y^{(4)}(x_k)\Big(\frac{-8}{24}+\frac{a_0}{6}+\frac{8}{6}a_{-1}\Big)$$
$$+h^4\cdot y^{(5)}(x_k)\Big(\frac{16}{120}-\frac{a_0}{24}-\frac{16a_{-1}}{24}\Big)\Big|=?$$

Требуем:
$$\begin{cases}a_1+a_0+a_{-1}=1\\ a_0+2a_{-1}=1\\ \frac{a_0}{2}+2a_{-1}=\frac{4}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{-1}=a_1\\ a_0+2a_{-1}=1\\ 3a_0+12a_{-1}=4\end{cases}\Rightarrow 6a_{-1}=1\Rightarrow\begin{cases}a_{-1}=a_1=\frac{1}{6}\\ a_0=1-2a_{-1}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

проверяем коэф. при h^3:
$$-\frac{8}{24}+\frac{a_0}{6}+\frac{8}{6}a_{-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4+2-6}{18}=0.$$

проверяем коэф. при h^4:
$$\frac{16}{120}-\frac{a_0}{24}-\frac{16}{24}a_{-1}=\frac{2}{15}-\frac{1}{24}\cdot\frac{2}{3}-\frac{16}{24}\cdot\frac{1}{6}=\frac{48-10-40}{24\cdot15}=-\frac{2}{24\cdot15}\neq0\Rightarrow O(h^4)$$

Ответ: $a_{-1}=a_1=\frac{1}{6}$
$a_0=\frac{2}{3}$
порядок аппрокс: $O(h^4)$

(2.) Исслед. устойчивость разност. схемы

$$\theta\cdot\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+(1-\theta)\frac{y_k-y_{k-1}}{h}=f_k;\quad\theta\in[0,1].$$

Решение: это ур-е 1 порядка
$\Rightarrow$ будем проверять α-устойчивость.

$$\theta\cdot(\mu^2-\mu)+(1-\theta)(\mu-1)=0.$$

$$\theta\cdot\mu^2-\theta\cdot\mu+\mu-1-\theta\cdot\mu+\theta=0.$$

$\theta \cdot \mu^2 + \mu(1-2\theta) + (\theta-1) = 0.$

Пусть $\theta \neq 0 \Rightarrow$ это ур-е ~~линейное~~ квадратное

$\Rightarrow D = (1-2\theta)^2 - 4\theta(\theta-1) = \cancel{1} - \cancel{4\theta} + \cancel{4\theta^2} - \cancel{4\theta^2} + \cancel{4\theta} = 1.$

$\Rightarrow \mu_{1,2} = \dfrac{2\theta - 1 \pm 1}{2\theta}$

$\mu_1 = \dfrac{2\theta-2}{2\theta} = 1 - \dfrac{1}{\theta} \overset{?}{\in} [-1;1]$ – да, если $1 - \frac{1}{\theta} \geq -1.$

$\Downarrow \frac{1}{\theta} \leq 2$

$\Downarrow \theta \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \in [\frac{1}{2};1].$

$\mu_2 = \dfrac{2\theta}{2\theta} = 1 \in [-1;1]$. – всегда

Если $\theta = 0$: ур-е стало $\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = f_k$

$\Rightarrow \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1$ – подх.

Если $\theta = 1$: ур-е стало $\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k$

$\Rightarrow \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1$ – подх.

$\boxed{\text{Ответ: } \theta = \{0\} \cup [\frac{1}{2};1]}$

(3.) Для задачи $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ рассм. схему

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = \dfrac{y_{k+1} + y_k}{2}; \ k \geq 0. \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ найти c_1 для $x_N = 1$.

Решение: 1) $y' = y$

$\dfrac{dy}{dx} = y$

$\dfrac{dy}{y} = dx$

$\Rightarrow \ln y = x + \tilde{C} \Rightarrow y = C \cdot e^x$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = e^x$

2) $\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = \dfrac{y_{k+1} + y_k}{2}$

$2y_{k+1} - 2y_k = h \cdot y_{k+1} + h \cdot y_k$

$y_{k+1}(2-h) = y_k(2+h)$

$\Rightarrow y_{k+1} = y_k \cdot \dfrac{2+h}{2-h} = y_{k-1} \cdot \left(\dfrac{2+h}{2-h}\right)^2 = \ldots = \underset{h_1}{y_0} \cdot \left(\dfrac{2+h}{2-h}\right)^{k+1}$

$\Rightarrow y_N = \left(\dfrac{2+h}{2-h}\right)^{N = 1/h}$

$\Rightarrow y(x_N) - y_N = e^{2} - \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e - e^{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right)} = ?$ (стр 2)

$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

$f(x) = f(0) + h\cdot f'(0) + \frac{h^2}{2}\cdot f''(0) + \frac{h^3}{6}\cdot f'''(0) + \ldots$

$f(0) = \ln(1) = 0.$

$f'(x) = \frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{1\cdot(2-x)-(-1)\cdot(2+x)}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2+x)(2-x)} = \frac{4}{4-x^2} \Rightarrow f'(0) = 1.$

$f''(x) = \left(\frac{4}{4-x^2}\right)' = 4\cdot\left(-\frac{1}{(4-x^2)^2}\right)\cdot(-2x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0.$

$f'''(x) = \frac{8\cdot(4-x^2)^2 - 2(4-x^2)(-2x)\cdot 8x}{(4-x^2)^4} = \frac{8(4-x^2)((4-x^2)+4x^2)}{(4-x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = \frac{8\cdot 4}{4^3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right) = h + \frac{h^3}{6}\cdot\frac{1}{2} + \ldots$

$\Rightarrow \frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right) = 1 + \frac{h^2}{12} + \ldots$

$\Rightarrow ? = e - e^{1+\frac{h^2}{12}+\ldots} = e - e\cdot e^{\frac{h^2}{12}+\ldots} = e\left(1 - e^{\frac{h^2}{12}+\ldots}\right) = e\left(1 - \left(1+\frac{h^2}{12}+\ldots\right)\right) = e\cdot\frac{h^2}{12}+\ldots$

$\Rightarrow$ сход. при $h = 0$.

$\boxed{\text{Ответ: } e_1 = 0}$

4. Для задачи $\begin{cases} y' + 5y = \underbrace{\sin 2x}_{f(x)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ построить двухточечную разн. схему 2 пор. скорости.

Решение: подойдет такая:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\cdot\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = f_k := \frac{\sin(2h(k+1)) + \sin(2hk)}{2}. \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

$f_k = \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}$

Скорость = аппрокс + устойчивость.

- Аппрокс (на решении):

краевое усл: $\|L_h[y]_h - \varphi_h\| = \underset{2}{y(0)} - 2 = 0$ — точно аппроксимируется.

$\|L_h[y]_h - f_h\| = \max_k \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + 5\cdot\frac{y(x_k+h)+y(x_k)}{2} - \frac{\sin(2x_k+2h) + \sin(2x_k)}{2} \right| =$

$= \cancel{\max_k \left| y'(x_k) + \frac{h}{2}\cdot y''(x_k) + \frac{h^2}{6}\cdot y'''(x_k) + \ldots \right.}$

$\cancel{+ \frac{5}{2}\left(2y(x_k) + h\cdot y'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \ldots\right.} \cancel{- \frac{1}{2}\cdot 2\sin(2x_k+h)\cdot\sin h}$

$$= \max_k \left| \frac{1}{h}\left(\cancel{y(x_k+\tfrac{h}{2})} + \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot y'''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^4\cdot y^{(4)}(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \right)\right.$$

$$-\frac{1}{h}\left(\cancel{y(x_k+\tfrac{h}{2})} - \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''(x_k+\tfrac{h}{2}) - \frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot y'''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{1}{24}\left(\frac{h}{2}\right)^4 y^{(4)}(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \right)$$

$$+\frac{5}{2}\cdot\left(y(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h^2}{8} y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \right.$$

$$\left. + y(x_k+\tfrac{h}{2}) - \frac{h}{2}\cdot y'(x_k+\tfrac{h}{2}) + \frac{h^2}{8} y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \right.$$

$$\cancel{+\frac{3}{2}\sin(x_k+\tfrac{h}{2})\,h\,\sin x_k}$$

$$\cancel{-\frac{f(x_{k+1})+f(x_k)}{2}}$$

$$- \frac{f(x_k+\tfrac{h}{2}) + \cancel{f'(x_k+\tfrac{h}{2})\cdot\tfrac{h}{2}} + \overset{f''(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{h^2}{8}+\dots}{\cdots} + f(x_k+\tfrac{h}{2}) - \cancel{f'(x_k+\tfrac{h}{2})\cdot\tfrac{h}{2}} + f''(x_k+\tfrac{h}{2})\cdot\frac{h^2}{8} + \dots}{2} \Bigg| =$$

$$= \max_k \left| \begin{array}{ll} y'(x_k+\tfrac{h}{2}) & + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{8}\cdot y'''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \\ +5\,y(x_k+\tfrac{h}{2}) & + \frac{5}{2}\cdot\frac{h^2}{8}\cdot y''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \\ -f(x_k+\tfrac{h}{2}) & - \frac{h^2}{8}\cdot f''(x_k+\tfrac{h}{2}) + \dots \end{array} \right| = O(h^2)$$

$\| 0$, т.к решение

$\Rightarrow$ верно, что 2-й порядок аппрокс.

- Устойчивость: это ур-е 1 порядка $\Rightarrow$ проверяем α-усл.

$$\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \alpha\text{-усл.}$$

$\Rightarrow$ есть сходимость 2 порядка. ЧТД.

(5.) Построить аппрокс. на решении 2 порядка по $x_0 = 0$ и $x_1 = h$. краевого усл. $u'(0) - u(0) = 0$ для ур-я $u'' - 2u = \sin x - 1$.

Решение:

$$u(h) = u(0) + u'(0)\cdot h + u''(0)\cdot\frac{h^2}{2} + u'''(0)\cdot\frac{h^3}{6} + \dots$$

$$\Rightarrow u'(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \underbrace{u''(0)}_{\substack{\| \\ 2u(0)+\underset{\|0}{\sin 0}-1}}\cdot\frac{h}{2} - u'''(0)\cdot\frac{h^2}{6} + \dots$$

т.к решение

$$\Rightarrow u'(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0)-1) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow u'(0) - u(0) = 0 \xrightarrow[\text{аппрокс. как}]{} \boxed{\frac{u_1-u_0}{h} - \frac{h}{2}(2u_0-1) - u_0 = 0}$$

Ответ:

(6.) Для задачи $\begin{cases} -u''(x)+p\cdot u(x)=f(x) \\ u(0)=a \\ u'(1)=b \end{cases}$; $p=const>0$.

(СР3)

построить на равномер. сетке схему и порядка сход.

Док-ть аппрокс, уст. по правой части, сформ. т. Филиппова (указав норму)

Решение:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+pu_i=f_i:=f(x_i) \quad ; x_i=ih; \\ u_0=a \\ \dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(pu_N-\underset{f(x_N)}{f_N})=b. \end{cases}$$

Для $u'(1)=b$: $\dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}=u'(1)+O(h)$ – не подх, т.к $O(h)$

$$u(1-h)=u(1)-h\cdot u'(1)+\frac{h^2}{2}\cdot \underset{pu(1)-f(1)}{u''(1)}+\dots$$

$$\Rightarrow u'(1)=\frac{u(1)-u(1-h)}{h}+\frac{h}{2}\cdot(pu(1)-f(1))+\dots$$

$\Rightarrow u'(1)=b$ – стало: $\boxed{\dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(pu_N-f_N)=b.}$

• Аппрокс: 1-е краевое усл – точно
2-е краевое усл: $O(h^2)$

оператор: $\|L_h[y]_h-f_h\|=\max\limits_k\left|-\left(u''(x_k)+\frac{h^2}{12}\cdot u^{(4)}(x_k)+\dots\right)+pu(x_k)-f(x_k)\right|=O(h^2)$

$=0$, т.к решение

• Сходимость: найдем λ_{min} и покажем, что $\lambda_{min}\geq const>0$.

тогда $\|A^{-1}\|$ – ограничена $\Rightarrow$ есть уст. по правой части

т.к у нас $y=A^{-1}f \Rightarrow \|y\|_*\leq \underbrace{\|A^{-1}\|_*}_{\leq const}\cdot\|f\|_*$

норма $\|\cdot\|_*=\|\cdot\|_{2,h}$,

т.е $\|u\|_{2,h}=\sqrt{\sum_i u_i^2\cdot h}$ – она согласована с непрер. нормой.

Итак, ищем собств. числа и собств. значения.

Заметим, что член $p\cdot u_i$ – можно убрать, т.к

если мы найдем $\lambda^{(1)}_{\text{нужного}}$ – то $\lambda^{(1)}_{\text{наш}}=\lambda^{(1)}_{\text{нужного}}+p$.

$\Rightarrow$ ищем собств. числа и собств. ф-ции задачи:

$$\boxed{\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}=\lambda y_k; \\ y_0=0 \\ \dfrac{2}{h^2}(y_N-y_{N-1})=\lambda y_N \end{cases}}$$

$\leftarrow$ мы могли $\dfrac{u_N-u_{N-1}}{h}+\dfrac{h}{2}(p\overset{0}{u_N}-\overset{=\lambda u_N}{f_N})=0. \Rightarrow \dfrac{2}{h^2}(u_N-u_{N-1})=\lambda u_N$

Хар-ур-е: $\mu^2 - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)\mu + 1 = 0.$

$\Rightarrow$ по т. Виета: $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = 1 - \frac{\lambda h^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda h^2}{2} = 1 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

$$\lambda h^2 = 2 - (\mu_1 + \mu_2)$$

$$\lambda = \frac{2}{h^2} - \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{h^2}$$

1) Если $\mu_1 = \mu_2$, то $y_k = (C_1 + C_2 k)\mu^k$

- $y_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y_k = C_2 k \cdot \mu^k$
- $\frac{2}{h^2}(y_N - y_{N-1}) = \lambda y_N$

$$\Rightarrow \frac{2}{h^2}\left(C_2 N \mu^N - C_2 (N-1)\mu^{N-1}\right) = \lambda \cdot C_2 \cdot N \cdot \mu^N$$

$$\Rightarrow \cancel{2C_2}(N\mu - (N-1)) = \lambda \cdot \cancel{C_2} \cdot h^2 \cdot N \cdot \mu$$

$$\Rightarrow 2N\mu - 2(N-1) = \lambda N \mu$$

$$\Rightarrow N\mu(2 - \lambda) = 2(N-1) \Rightarrow \mu = \frac{2(N-1)}{N(2-\lambda)}$$ – не удовл. усл $\mu \overset{?}{=} 1$.

2) Если $\mu_1 \neq \mu_2$, то $y_k = C_1 \mu_1^k + C_2 \mu_2^k$

- $y_0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \Rightarrow y_k = C_1(\mu_1^k - \mu_2^k)$
- $\frac{2}{h^2}(y_N - y_{N-1}) = \lambda y_N$

$$\Rightarrow \frac{2}{h^2}\cancel{C_1}\left(\mu_1^N - \mu_2^N - (\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})\right) = \lambda \cdot \cancel{C_1} \cdot (\mu_1^N - \mu_2^N)$$

$$\frac{2}{h^2}\left(\mu_1^N - \mu_2^N - (\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})\right) = \left(\frac{2}{h^2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{h^2}\right)(\mu_1^N - \mu_2^N)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{2}{h^2}(\mu_1^N - \mu_2^N)} - \frac{2}{h^2}(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1}) = \cancel{\frac{2}{h^2}(\mu_1^N - \mu_2^N)} - \frac{1}{h^2}(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1^N - \mu_2^N)$$

$$\Rightarrow 2(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1}) = (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1^N - \mu_2^N)$$

$$2(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1}) = \mu_1^{N+1} - \mu_1\mu_2^N + \mu_2\mu_1^N - \mu_2^{N+1}$$

$$2(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1}) = \mu_1^{N+1} - \mu_2^{N-1} + \mu_1^{N-1} - \mu_2^{N+1}$$

$$\Rightarrow \mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1} = \mu_1^{N+1} - \mu_2^{N+1}$$

$$\Rightarrow \mu_1^{N-1}(1 - \mu_1^2) = \mu_2^{N-1}(1 - \mu_2^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_1^{N-1}}{\mu_2^{N-1}} = \frac{1-\mu_2^2}{1-\mu_1^2} = \frac{\mu_2(\cancel{\mu_1-\mu_2})}{\mu_1(\cancel{\mu_2-\mu_1})} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \mu_1^N = -\mu_2^N$$

$$\Rightarrow \mu_1^{2N} = -1 = e^{-\pi i + 2\pi i n}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = e^{\frac{2\pi i(n-0.5)}{2N}} = e^{\frac{\pi i(n-0.5)}{N}}$$

$$\mu_2 = \overline{\mu_1} = e^{-\frac{\pi i(n-0.5)}{N}}$$

$$\Rightarrow y_k = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k) = \tilde{c}_1 \cdot \sin \frac{\pi(n-0.5)k}{N} = \tilde{c}_1 \cdot \sin \pi(n-0.5)x_k$$

$= x_k$

Ищем $\lambda^{(n)}_{бур}$:

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 2\sin \pi(n-0.5)x_k \cos \pi(n-0.5)h - 2\sin \pi(n-0.5)x_k = 2\sin \pi(n-0.5)x_k \cdot \left(-2\sin^2 \frac{\pi(n-0.5)h}{2}\right) =$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}_{бур} = \frac{4}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi(n-0.5)h}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)}_{ср} = \lambda^{(n)}_{бур} + p = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi(n-0.5)h}{2} + p.$$

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{4} + p \geq \frac{4}{h^2} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi h}{4}\right)^2 + p = 1 + p \geq const > 0$$

т.к $p = const > 0$.

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 \leq const$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_{2,h} \leq const$$ $\Rightarrow$ есть уст. по правой части.

<u>Т. Филиппова:</u> (в норме $\|\cdot\|_{2,h}$):

1) задачи (1,2) и (3,4) – линейно-зд
2) $\exists!$ решение задачи (1,2) для произв. правых частей. – да, мы умеем решение находить.
3) Разн. схема аппрокс. исх. задачу на решении с порядком r:

$$\|L_h[y]_h - f_h\|_C \leq c \cdot h^2.$$

! не страшно, что нут C, а не $\|\cdot\|_{2,h}$ – т.к если в C-норме $\leq c \cdot h^2$, то и в $L_{2,h}$-норме $\leq c \cdot h^2$ –

т.к $\left(\sum v_i^2 \cdot h\right)^{1/2} \leq c \cdot h^2 \cdot \left(\underbrace{\sum 1 \cdot h}_{\to 1}\right)^{1/2} \leq \tilde{c} \cdot h^2.$

(а нормы $L_{2,h}$ и $\|\cdot\|_{2,h}$ – эквив.)

4) Разностная схема устойчива – да, в норме $\|\cdot\|_{2,h}$:
$\|A^{-1}\|_{2,h} \leq const$ – проверили.

$\Rightarrow$ по т. Филиппова <u>есть</u> <u>сход.</u> порядка $O(h^2)$ в $\|\cdot\|_{2,h}$! ч.т.д.

7) Исслед. методом априорных оценок устойчивость:

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p_iu_i=f_i \\ u_0=0 \end{cases}$$

$u_N=u_{N-1}$; $(N-\frac{1}{2})h=1$.

Решение: $-\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1}-y_k-y_k+y_{k-1})+\sum_{k=1}^{N-1}p_ky_k^2=\sum_{k=1}^{N-1}f_ky_k$.

1)

$$\| $$

$$-\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N-1}(y_{k+1}-y_k)y_k+\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k-y_{k-1})y_k$$

$u_0=0$, $u_N=u_{N-1}$

$$=-\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}(y_{k+1}-y_k)y_k+\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{k=1}^{N}(y_k-y_{k-1})y_k$$

$$\overset{j=i+1}{=}-\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{j=1}^{N}(y_j-y_{j-1})y_{j-1}+\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{k=1}^{N}(y_k-y_{k-1})y_k=$$

$$=\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(-y_{i-1}(y_i-y_{i-1})+y_i(y_i-y_{i-1})\right)$$

$$\| \ \frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(-2y_iy_{i-1}+(y_{i-1})^2+(y_i)^2\right)$$

$$\| \ \frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}(y_i-u_{i-1})^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i-y_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{N-1}p_iy_i^2=\sum_{i=1}^{N-1}f_iy_i} \quad (*)$$

– интегр. пост. (аналог $\int_0^1(u')^2dx+\int_0^1pu^2dx=\int_0^1fudx$

2) Докажем сеточный аналог про $\int_0^1u^2dx\le\int_0^1(u')^2dx$

Для этого: $u_k=\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})$

$$\Rightarrow \forall 1\le k\le N-1:\ u_k^2=\left(\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})\right)^2\le\sum_{i=1}^{k}1^2\cdot\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})^2\le N\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2$$

Суммируя по k:

$$\sum_{k=1}^{N-1}u_k^2\le N^2\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2\le\frac{1}{h^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{N-1}p_iu_i^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}f_iu_i\le\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N-1}f_i^2+\sum_{i=1}^{N-1}u_i^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1}u_i^2\le\sum_{i=1}^{N-1}f_i^2$$

=> вот априорная оценка в норме $\|u_h\|_h^2:=h\cdot(u_h,u_h)$: $\|u_h\|_h\le\|f_h\|_h$.

=> схема устойчива. ч.т.д.