10.12.20 ВарОПУ. д/з от семинара 14.

① Решить задачи Лагранжа

а) $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr;\ \int_0^1 x\,dt = 1.$ – не упоребим, т.к. нет $x(0)$ и $x(1)$ №6.1 стр 155

$\mathcal{L} = \int_0^1 (\lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x)dt$

а) Ур-е Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$

$L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$

$L_x = \lambda_1 \quad \Rightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0$

б) Трансв. по x для терминанта $l = 0$:

$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = 0 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(1) = 0. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ – плохо.

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1 \quad \Rightarrow 2\ddot{x} = \lambda_1 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\lambda_1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 \quad ,\ \dot{x} = 2C_2 t + C_1 \\ \dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0 \\ \dot{x}(1) = 0 \quad \Rightarrow 2C_2 + C_1 = 0 \\ \int_0^1 x\,dt = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow C_0 = 1 \qquad \Rightarrow \hat{x}(t) \equiv 1.$

Доставляет ли она extr?

Берём h: $\int_0^1 h\,dt = 0$;

$\Rightarrow$ Поскольку функционал – квадр., а ограничение – линейное, то $J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = J(h) = \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq 0 \Rightarrow \hat{x}(t) \in absmin$

$S_{absmin} = \int_0^1 0\,dt = 0.$

$S_{absmax} = +\infty.$

Берём $x_n(\cdot) := \hat{x}(\cdot) + n \cdot h(\cdot)$; h такое, что $\int_0^1 h\,dt = 0$, e.g. $h(t) = \sin 2\pi t$.

$\Rightarrow J(x_n) = J(\hat{x} + nh) = J(\hat{x}) + J(nh) = J(\hat{x}) + n^2 \cdot \int_0^1 \dot{h}^2 dt \to +\infty.$

Ответ: $\hat{x} \equiv 1 \in absmin$

$S_{absmin} = 0$

$S_{absmax} = +\infty.$

б) $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to extr;\ x(0) = \dot{x}(0) = 0;\ x(1) = 1.$ – похожа на задачу со старшими произв., но нет $\dot{x}(1)$. см. Галеев стр

Решение: Замена: $x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}$

$\Rightarrow \int_0^1 \dot{x}_2^2 dt \to extr;\ \dot{x}_1 = x_2;\ x_1(0) = 0;\ x_2(0) = 0;\ x_1(1) = 1.$

$$\mathcal{L} = \int_0^1 (\lambda_0 \dot{x}_2^2 + p(t)(\dot{x}_1 - x_2))dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 (x_1(1) - 1)$$

Необх. усл:

а) ур-е Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 \dot{x}_2^2 + p(\dot{x}_1 - x_2)$

$$\begin{cases} L_{x_1} = 0 \\ L_{\dot{x}_1} = p \end{cases} \Rightarrow -\dot{p} = 0$$

$$\begin{cases} L_{x_2} = -p \\ L_{\dot{x}_2} = 2\lambda_0 \dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda_0 \ddot{x}_2 - p = 0.$$

б) Трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 (x_1(1) - 1)$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)} \\ L_{\dot{x}_1}(1) = -l_{x_1(1)} \\ L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)} \\ L_{\dot{x}_2}(1) = -l_{x_2(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = \lambda_1 \\ p(1) = -\lambda_3 \\ 2\lambda_0 \dot{x}_2(0) = \lambda_2 \\ 2\lambda_0 \dot{x}_2(1) = 0. \end{cases}$$ существ. условие: $\ddot{x}(1) = 0$

Если $\lambda_0 = 0$, то $p = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_3 = 0; \lambda_2 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{0}$ — плохо

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1.$

$\Rightarrow 2\ddot{x}_2 = p \Rightarrow 2\dddot{x}_2 = \dot{p} = 0 \Rightarrow x^{(4)} = 0$

$\Rightarrow x = c_3 t^3 + c_2 t^2 + \cancel{c_1 t} + \cancel{c_0}$; $\dot{x} = 3c_3 t^2 + 2c_2 t + c_1$

$x(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ $\qquad \ddot{x} = 6c_3 t + 2c_2$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x(1) = 1 \Rightarrow c_3 + c_2 = 1 \\ \ddot{x}(1) = 0 \Rightarrow 6c_3 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -3c_3 \end{array}\right\} \Rightarrow -2c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{2}$$

$$c_2 = -3c_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow \hat{x} = -\frac{t^3}{2} + \frac{3}{2}t^2$$

Доставляет ли она экст?

Берем h: $h(0) = h(1) = \dot{h}(0) = 0$.

Функционал — квадр, ограничения — линейные

$\Rightarrow \mathcal{Y}(\hat{x} + h) - \mathcal{Y}(\hat{x}) = \mathcal{Y}(h) = \int_0^1 \ddot{h}^2 dt \geq 0$

$\Rightarrow \hat{x} \in abs\min$

$S_{abs\min} = \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt = \int_0^1 (-3t+3)^2 dt = 3$

$S_{abs\max} = +\infty$.

Берем $x_n(\cdot) := \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot)$; $h(t) = t^2(t-1)$

$\Rightarrow \mathcal{Y}(x_n) = \mathcal{Y}(\hat{x} + nh) = \mathcal{Y}(\hat{x}) + \mathcal{Y}(nh) = \mathcal{Y}(\hat{x}) + n^2 \int_0^1 \ddot{h}^2 dt \to +\infty$.

Ответ: $\hat{x} = -\frac{t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} \in abs\min$

$S_{abs\min} = 3$

$S_{abs\max} = +\infty$

(6.) $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \int_0^T x dt = 1; \ x(0)=3$

(стр2)

$\mathcal{L} = \int_0^T (\lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x)dt + \lambda_2 \cdot (x(0)-3)$

а) Ур-е Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$

$L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$

$L_x = \lambda_1 \Rightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0.$

б) Трансв. по x для терминанта $l = \lambda_2(x(0)-3)$

$\begin{cases} L_{\dot{x}(0)} = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}(1)} = -l_{x(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_2 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(1) = 0. \end{cases}$ сущ усл

в) Стац. по подв. концам

$\lambda_0 (\dot{x}(T))^2 + \lambda_1 x(T) = 0.$

Если $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$ – плохо.

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1. \Rightarrow$ из а): $2\ddot{x} = \lambda_1$

$\Rightarrow x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0; \ \dot{x} = 2C_2 t + C_1; \ \ddot{x} = 2C_2 \stackrel{?}{=} \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 4C_2.$

$x(0) = 3 \Rightarrow C_0 = 3.$

$\dot{x}(1) = 0 \Rightarrow 2C_2 + C_1 = 0$

$\int_0^T x dt = 1 \Rightarrow C_2 \cdot \frac{T^3}{3} + C_1 \cdot \frac{T^2}{2} + C_0 T = 1.$

$(\dot{x}(T))^2 + \underset{4C_2}{\underset{\parallel}{\lambda_1}} x(T) = 0 \Rightarrow (2C_2 T + C_1)^2 + 4C_2 \cdot (C_2 T^2 + C_1 T + C_0) = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = 3 \\ 2C_2 + C_1 = 0. \quad \Rightarrow C_1 = -2C_2 \\ C_2 \cdot \frac{T^3}{3} + C_1 \cdot \frac{T^2}{2} + C_0 T = 1. \Rightarrow \overbrace{2C_2}^{=-C_1} \cdot T^3 + 3C_1 \cdot T^2 + 6C_0 T = 6 \\ (\underbrace{2C_2}_{=-C_1} T + C_1)^2 + \underbrace{2 \cdot 2C_2}_{=-2C_1} \cdot (\underbrace{2C_2}_{=-C_1} T^2 + 2C_1 T + 2C_0) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 T^2 (3 - T) + 6 \overset{3}{C_0} T = 6 \\ C_1^2 (1-T)^2 - C_1(-C_1 T^2 + 2C_1 T + 2C_0) = 0 \end{cases}$

Если $C_1 = 0$, то $T = \frac{1}{C_0} = \frac{1}{3}; \ C_0 = 3; \ C_1 = C_2 = 0.$

Если $C_1 \neq 0$, то $\begin{cases} C_1 T (3 - T) + 18T - 6 = 0. \\ C_1(1-T)^2 + C_1 T^2 - 2C_1 T - 6 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 T^2 + 3T(6 + C_1) - 6 = 0 \Rightarrow 4C_1 T^2 - 12T(6 + C_1) \\ 2C_1 T^2 - 4C_1 T + C_1 - 6 = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow T(-4C_1 + 36 + 6C_1) + C_1 - 18 = 0.$

$T \cdot (2C_1 + 36) + C_1 - 18 = 0.$

$C_1(2T + 1) + 36T - 18 = 0.$

$\Rightarrow C_1 = \frac{18(1-2T)}{2T+1} \leftarrow T = -\frac{1}{2}$ – не подх

$\Rightarrow \frac{18(1-2T)}{2T+1} \cdot T^2 - 3T\left(6 + \frac{18(1-2T)}{2T+1}\right) + 6 = 0.$

$$\frac{(18-36T)}{}T^2 - 3T\left(\frac{12T+6+18-36T}{}\right) + 12T + 6 = 0.$$

$$18T^2 - 36T^3 + 72T^2 - 72T + 12T + 6 = 0$$

$$-36T^3 + 90T^2 - 60T + 6 = 0$$

$$-6T^3 + 15T^2 - 10T + 1 = 0$$

$$6T^3 - 15T^2 + 10T - 1 = 0$$

$T=1$ – корень; $\;6T^3-15T^2+10T-1 \,\big|\, T-1$

$$\begin{array}{l|l} 6T^3-15T^2+10T-1 & T-1 \\ \cline{2-2} -\;\underline{6T^3-6T^2} & 6T^2-9T+1. \\ \quad -9T^2+10T-1 & \\ \quad -\;\underline{-9T^2+9T} & \\ \qquad\quad T-1 & \end{array}$$

$$6T^2 - 9T + 1 = 0$$

$$D = 81 - 24 = 57$$

$$T_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{12}$$ – оба >0, я не знаю, что с ними делать

$$T=1 \Rightarrow C_1 = \frac{18(1-2T)}{1+2T} = \frac{-18}{3} = -6. \quad \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}C_1 = 3$$

$$\Rightarrow x = C_2t^2 + C_1t + C_0 = 3t^2 - 6t + 3 = 3(t^2 - 2t + 1) = 3(t-1)^2$$

$\Rightarrow$ две допустимые экстремали (ещё две)
1) $\hat{\varepsilon} = (\hat{x} = 3;\ \hat{T} = \frac{1}{3})$
2) $\hat{\varepsilon} = (3(t-1)^2;\ \hat{T} = 1)$

Доставляют ли они экстремум?

2) $\hat{\varepsilon} = (3(t-1)^2;\ 1)$.

Берём допустимый элемент $\varepsilon = (3(t-1)^2; T)$

$$J(\varepsilon) = \int_0^T 6(t-1)^2\,dt \begin{cases} > J(\hat{\varepsilon}) = \int_0^1 6(t-1)^2\,dt & \text{при } T > \hat{T} \\ < J(\hat{\varepsilon}) = \int_0^1 6(t-1)^2\,dt & \text{при } T < \hat{T} \end{cases} \Rightarrow \hat{\varepsilon} \notin locextr.$$

1) $\hat{\varepsilon} = (3; \frac{1}{3})$.

$$J(\hat{\varepsilon}) = \int_0^{1/3} 0\,dt = 0.$$

$$J(3+\varepsilon; \tfrac{1}{3}+\tau) = \int_0^{1/3+\tau} (\dot{\varepsilon})^2\,dt > 0,$$ т.к. τ должно быть близко к $\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon} = (3; \tfrac{1}{3}) \in absmin$$

$S_{absmin} = 0.$

$S_{absmax} = +\infty$. Берём $T_n = n$; $x_n = a\sqrt[3]{t} + 3$

$$\int_0^n (a\sqrt[3]{t}+3)\,dt = a\frac{3n^{4/3}}{4} + 3n = 1 \Rightarrow a = \frac{4-12n}{3n^{4/3}}$$ } допустимый элемент

$$\Rightarrow J(x_n(\cdot); T_n) = \int_0^n a^2\,dt = n \cdot a^2 = n \cdot \left(\frac{4(1-3n)}{3n\cdot\sqrt[3]{n}}\right)^2 \sim c \cdot n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \to +\infty.$$

Ответ: $\hat{\varepsilon} = (\hat{x} = 3;\ \hat{T} = \frac{1}{3}) \in absmin$; $S_{absmin} = 0$
$\hat{\varepsilon} = (\hat{x} = 3(t-1)^2;\ \hat{T} = 1) \notin locextr$
$S_{absmax} = +\infty$

② Найти все допустимые экстремали и исследовать их на слабый и сильный экстремум.

а) $\int_0^{\pi/4}(\dot x^2-4x^2)\,dt \to extr;\ x(0)=0;\ x(\frac{\pi}{4})=1.$ — простейшая задача вар. исчисл.

Решение: $L=\dot x^2-4x^2$

№1.2 стр 228

$L_{\dot x}=2\dot x$

$L_x=-8x \Rightarrow -2\ddot x-8x=0.$

$\ddot x=-4x$

$\lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

$\Rightarrow x(t)=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)$

$x(0)=0 \Rightarrow C_1=0$

$x(\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow C_2\cdot \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1}=1 \Rightarrow C_2=1.$

$\Rightarrow \hat x(t)=\sin 2t$

~~$L_{\dot x\dot x}=2>0$ => вып. усиленное усл. Лежандра~~

$L_{\dot x\dot x}=2>0 \Rightarrow$ вып. усил. усл. Лежандра.

$L_{\dot x x}=0$

$L_{xx}=-8$

$\Rightarrow K(h)=L_{\dot x\dot x}\dot h^2+2L_{x\dot x}\dot h h+L_{xx}h^2=2\dot h^2-8h^2$

ур-е Якоби: $K_{\dot h}=4\dot h$, $K_h=-16h$ $\Rightarrow -4\ddot h-16h=0.$

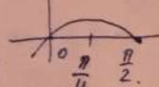
$\Rightarrow \ddot h=-4h$

$\lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

$\Rightarrow h(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t;\ \dot h=-2C_1\sin 2t+2C_2\cos 2t$

нач. усл: $h(0)=0 \Rightarrow C_1=0$

$\dot h(0)=1 \Rightarrow 2C_2=1 \Rightarrow \hat h(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$



Усл. Якоби вып. — т.к $\hat h(t)$ — не имеет нулей на $(0;\frac{\pi}{4}]$

И усиленное усл. Якоби — выполнено.

необх. усл. wlocmin вып. ($L_{\dot x\dot x}>0$ + усл. Якоби)

дост. усл. wlocmin вып (т.к усил. усл. Лежандра + усил. усл. Якоби) $\}\Rightarrow \hat x\in$ wlocmin

Доставляет ли $\hat x$ strlocmin?

Дост. усл. сильного экстр: дост. усл. слабого экстр + L выпукло по $\dot x$. $\}\Rightarrow \hat x\in$ strlocmin

$L=\dot x^2-4x^2$ — выпукло по $\dot x$

$\boxed{\text{Ответ: } \hat x=\sin 2t\in strlocmin}$ А с глобальным что?

б) $\int_0^{3\pi/4}(\dot x^2-4x^2)\,dt\to extr;\ x(0)=0;\ x(\frac{3\pi}{4})=-1.$ №1.3 стр 228

Решение: $L=\dot x^2-4x^2$

$L_{\dot x}=2\dot x \Rightarrow -2\ddot x-8x=0$

$L_x=-8x$ $\quad \ddot x=-4x$

$\lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2i$

$\Rightarrow x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$

$x(0)=0 \Rightarrow C_1=0$

$x(\frac{3\pi}{4})=-1 \Rightarrow C_2\cdot\sin(\frac{3\pi}{2})=-1 \Rightarrow C_2\cdot(-1)=-1 \Rightarrow C_2=1 \Rightarrow \hat x=\sin 2t.$

$L_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0 \Rightarrow$ вып. усил. усл. Лежандра

$L_{x\dot{x}} = 0$

$L_{xx} = -8$

$\Rightarrow K(h) = L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2 + 2L_{x\dot{x}} h\dot{h} + L_{xx} h^2 = 2\dot{h}^2 - 8h^2$

$K_{\dot{h}} = 4\dot{h}$

$K_h = -16h$ $\Rightarrow -4\ddot{h} - 16h = 0.$

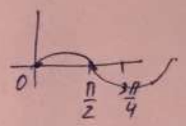
$\ddot{h} = -4h$

$\lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$

$\Rightarrow h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$h(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\dot{h}(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$ $\Big\} \Rightarrow h(t) = \sin 2t;$



$h(t)$ – имеет нуль на $(0; \frac{3\pi}{4})$

$\Rightarrow$ не вып. усл. Якоби

$\Rightarrow$ не вып. необх. усл. wlocmin $\Rightarrow \hat{x} \notin$ wlocmin

$\Rightarrow \hat{x} \notin$ strlocmin.

$\boxed{\text{Ответ: } \hat{x} = \sin 2t \notin \text{wlocmin} \notin \text{strlocmin}}$

в) $\int_0^1 \sin \dot{x}\, dt \to extr;\ x(0) = 0;\ x(1) = \frac{\pi}{2}.$

Решение: $L = \sin \dot{x}$

$L_{\dot{x}} = \cos \dot{x}$

$L_x = 0$ $\Rightarrow -\frac{d}{dt} \cos \dot{x} = 0 \Rightarrow \cos \dot{x} = C_0$

$\Rightarrow \dot{x} = \arccos C_0.$

$\Rightarrow \dot{x} = const$

$\Rightarrow x = c_1 t + c_0.$

$x(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

$x(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{x} = \frac{\pi}{2} t$

$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = -\sin \dot{x} \overset{\hat{\dot{x}} = \frac{\pi}{2}}{=} -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0.$

$\Rightarrow$ вып. усил. усл. Лежандра для max

$\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$

$\hat{L}_{x\dot{x}} = 0$

$\hat{L}_{xx} = 0$

$\Rightarrow K(h) = -\dot{h}^2$

$K_{\dot{h}} = -2\dot{h}$

$K_h = 0$ $\Rightarrow -2\ddot{h} = 0$

$\Rightarrow h = c_1 t + c_2$

$h(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\dot{h}(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$ $\Rightarrow \hat{h}(t) = t$ – не имеет нулей на $(0; 1]$

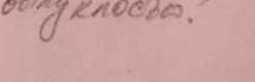
$\Rightarrow$ вып. усил. усл. Якоби.

$\Rightarrow \hat{x} = \frac{\pi}{2} t \in$ wlocmax.

Дост. усл. strmax: L вогнутый по $\dot{x}$.

$L(\dot{x}) = \sin \dot{x}$

$L(y) = \sin y$



Что с вогнутостью?