МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

Международный консорциум «Электронный университет»

Евразийский открытый институт

Асташова И.В., Никишкин В.А.

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области математических методов в экономике в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике» и другим экономическим специальностям.

Москва 2010

УДК 517.9
ББК 517.2

Р е ц е н з е н т — д-р физ.-мат. наук, проф. **А.В. Филиновский**
(кафедра высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Асташова И.В., Никишкин В.А.

Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения». Учебное пособие. Изд. 3-е, исправленное. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2010. – 94 с., ил.

В пособии приводятся краткие теоретические сведения, решения типовых задач и практические задания по основным разделам курса «Дифференциальные уравнения», читаемого студентам МЭСИ. Данное пособие может быть использовано как для самостоятельной подготовки студентов, так и для проведения домашних и аудиторных контрольных работ (по каждому из 24 разделов курса предлагается 30 вариантов заданий).

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемом сборнике содержатся задания по основным разделам курса «Дифференциальные уравнения», читаемого студентам МЭСИ, обучающимся по специальностям 351500 («Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»), 090105 («Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем») и 061800 («Математические методы в экономике»).

Данное пособие может быть использовано как для самостоятельной подготовки студентов, так и для проведения домашних и аудиторных контрольных работ (по каждому из 24 разделов курса предлагается 30 вариантов заданий).

Пособие может оказаться полезным для студентов МЭСИ, обучающихся по другим специальностям, при изучении раздела «Дифференциальные уравнения» в общих курсах «Высшая математика» и «Математический анализ».

Авторы пособия выражают глубокую благодарность аспирантам И.В. Горючкиной, А.В. Гридневу, Ю.В. Завгородней, Е.С. Карулиной за помощь в подготовке текста.

Программы для построения фазового портрета нелинейной динамической системы написаны А.В. Гридневым и И.Н. Лашиной.

Содержание

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА **5**
1.1. Уравнения с разделяющимися переменными 6
1.2. Однородные уравнения 8
1.3. Линейные уравнения, уравнение Бернулли 10
1.4. Уравнения в полных дифференциалах. 13

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА **15**

3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ **17**
3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами 17
3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида 19
3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью произвольного вида 23

4. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ **25**

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ **28**
5.1. Примеры некоторых экономических задач 28
5.2. Примеры некоторых физических и экологических задач 32

6. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ **39**
6.1. Решение систем линейных дифференциальных уравнений 39
6.1.1. Решение систем линейных дифференциальных уравнений методом исключения 39
6.1.2. Решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера 42
6.1.3. Решение линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида 50
6.1.4. Решение линейных неоднородных систем методом вариации произвольных постоянных 53
6.2. Исследование положения равновесия линейной однородной системы с постоянными коэффициентами 56
Таблица. Фазовые траектории положения равновесия линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 58
6.3. Построение фазового портрета динамической системы 60

7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ **67**
7.1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными 67
7.2. Метод Даламбера 70
7.2.1. Задача Коши для бесконечной струны. Формула Даламбера 70
7.2.2. Смешанная задача для полуограниченной струны с однородными граничными условиями 71
7.2.3. Смешанная задача для ограниченной струны с однородными граничными условиями 74
7.3. Метод Фурье 77
7.3.1. Решение смешанной задачи для волнового уравнения 77
7.3.2. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности 86

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ **96**

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка или просто дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x,\, y,\, y') = 0, \tag{1}$$

где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция аргумента x, $F(x,\, y,\, y')$ — заданная функция переменных x, y, $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Уравнение

$$y' = G(x,\, y) \tag{2}$$

называется *уравнением, разрешенным относительно первой производной.*

Решением дифференциального уравнения на интервале I называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, превращающая это уравнение в тождество на I.

График решения $y = \varphi(x)$ называется *интегральной кривой.*

Для уравнений (1) и (2) можно поставить следующую задачу: найти решение уравнения, удовлетворяющее *начальному условию*:

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Задача (1), (3) (задача (2), (3)) называется *задачей Коши.*

Общим решением уравнения (1) (уравнения (2)) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{4}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C, и такая, что

1. она удовлетворяет уравнению (1) (уравнению (2)) при любых допустимых значениях постоянной C;

2. каково бы ни было начальное условие (3), можно подобрать такое значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (3). При этом предполагается, что точка (x_0, y_0) принадлежит области, где выполняются условия существования и единственности решения.

Частным решением уравнения (1) (уравнения (2)) называется решение, получаемое из общего решения (4) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C.

Первым интегралом (*общим интегралом*) уравнения (1) (уравнения (2)) называется функция

$$\Phi(x, y) = C \quad \text{или} \quad \Psi(x, y, C) = 0, \tag{5}$$

при каждом C определяющая решение y уравнения (1) (уравнения (2)) как функцию от x.

Соотношения (4)–(5) определяют *семейство интегральных кривых* уравнения (1) (уравнения (2)).

Задача решения или интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении общего решения или общего интеграла данного дифференциального уравнения. Если дополнительно задано начальное условие, то требуется выделить частное решение или частный интеграл, удовлетворяющие поставленному начальному условию.

Так как с геометрической точки зрения координаты x и y равноправны, то наряду с уравнением $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ можно рассматривать уравнение $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}$ и считать, что его решения также определяют интегральные кривые уравнений (1) или (2). Таким образом, функции $x = \text{const}$, $x = \psi(y)$ также можно считать решениями уравнений (1), (2).

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y). \tag{6}$$

Умножая уравнение (6) на $\frac{dx}{g(y)}$, получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx, \tag{7}$$

так что коэффициент при dx будет зависеть только от x, а коэффициент при dy — только от y. Уравнение (7) называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*, а способ приведения уравнения (6) к виду (7) называется *разделением (отделением) переменных.* Общим интегралом дифференциального уравнения (7) является равенство

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx. \tag{8}$$

Если в уравнении (8) вычислим интегралы, то общее решение будет иметь вид $\Phi(x, y, C) = 0$. Если мы решим это уравнение относительно y (или x), то получим уравнение семейства интегральных кривых в *явной* форме:

$$y = \varphi(x, C), \quad (\text{или } x = \psi(y, C))\,,$$

где C — произвольная постоянная.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее y, возможна потеря решений, обращающих это выражение в нуль.

Уравнение вида $y' = f(ax + by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax + by + C$, где C — произвольная постоянная).

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^3yy' - 1 = x^2y + x^2 + y. \tag{9}$$

Р е ш е н и е. Приводим уравнение (9) к виду (7):

$$x^3y\frac{dy}{dx} = (x^2+1)(y+1), \quad x^3y\,dy = (x^2+1)(y+1)\,dx,$$

делим обе части уравнения на $x^3(y+1)$:

$$\frac{y}{y+1}\,dy = \frac{x^2+1}{x^3}\,dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{y}{y+1}\,dy = \int \frac{x^2+1}{x^3}\,dx; \quad y - \ln|y+1| = \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C.$$

При делении на $x^3(y+1)$ могли быть потеряны решения $y = -1$ и $x = 0$. Первое из них является решением уравнения (9), а второе нет. Добавим $y = -1$ к полученному общему решению

О т в е т: $y - \ln|y+1| = \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$, $y = -1$.

Контрольное задание 1

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $dy = \sqrt{4 - y^2}\, dx - x\, dy$.
2. $x^2\, dy = 2x\sqrt{y^2 + 4}\, dx - dy$.
3. $2xy^2\, dx - dy = x^2\, dy - 8x\, dx$.
4. $y\, dy + \sqrt{y^2 + 4}\, dx = 2x^2 y\, dy$.
5. $y^2\, dx - 2y\, dy = 2xy\, dy - 4\, dx$.
6. $dy = \sqrt{y^2 + 4}\, dx - x\, dy$.
7. $\sqrt{x^2 + 4}\, dy - dx = y\, dx$.
8. $y^2\, dx - 2xy\, dy = 4y\, dy - dx$.
9. $2x\sqrt{4 - y^2}\, dx - dy = x^2\, dy$.
10. $x^2\, dy = \sqrt{y^2 + 1}\, dx - 4\, dy$.
11. $2x\sqrt{y^2 + 1}\, dx - x^2\, dy = 4\, dy$.
12. $4\, dy - y\, dx = 2\, dx - x^2\, dy$.
13. $9\, dx - x\, dy = dy - y^2\, dx$.
14. $18x\, dx - x^2\, dy = 4\, dy - 2xy^2\, dx$.
15. $9\, dy = \sqrt{4 - y^2}\, dx - x^2\, dy$.
16. $\sqrt{9 - y^2}\, dx - 4\, dy = x^2\, dy$.
17. $\sqrt{y^2 + 1}\, dx - 2\, dy = x\, dy$.
18. $2x^2 y\, dy = \sqrt{y^2 + 1}\, dx + 8y\, dy$.
19. $4\, dy = 2x\sqrt{9 - y^2}\, dx - x^2\, dy$.
20. $\sqrt{y^2 + 4}\, dx - 9\, dy = x^2\, dy$.
21. $2\, dx = \sqrt{9 - x^2}\, dy - y\, dx$.
22. $dy - 2xy\, dx = 4x\, dx - x^2\, dy$.
23. $4\, dx = \sqrt{9 - x^2}\, dy - y^2\, dx$.
24. $y^2\, dx - x\, dy = 2\, dy - 4\, dx$.
25. $2xy^2\, dx = \sqrt{x^2 + 4}\, dy + x\, dx$.
26. $dx = 2y\sqrt{x^2 + 4}\, dy - y^2\, dx$.
27. $8y\, dy - dx = y^2\, dx - 2x^2 y\, dy$.
28. $dx = 2y\sqrt{4 - x^2}\, dy - y^2\, dx$.
29. $-y^2\, dx + \sqrt{x^2 + 1}\, dy = 4\, dx$.
30. $\sqrt{9 - y^2}\, dx - 2\, dy = x\, dy$.

1.2. Однородные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, если для всех k имеем

$$F(kx, ky, y') \equiv k^p F(x, y, y'). \tag{10}$$

Это уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение (11) или (10) будем решать методом *замены переменных.* Именно, вместо неизвестной функции y введем неизвестную функцию z, положив $z = \frac{y}{x}$.

Подставляя в уравнение (11) $y = zx$, с учетом того, что по правилу дифференцирования произведения $y' = z'x + zx' = z'x + z$, для новой неизвестной функции z получим дифференциальное уравнение

$$z'x + z = f(z),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ приводится к однородному с помощью замены $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, где ξ, η — новые переменные, (α, β) — точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $ax + by + c = 0$. Если эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y' = f(ax + by)$, которое рассматривалось в предыдущем пункте.

Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$. Чтобы найти число m, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. После замены найдем m, при котором выполняется уравнение (10). Если такого числа m не существует, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

П р и м е р. Найти решение уравнения

$$x(x^2 + y^2)\, dy = y(y^2 - xy + x^2)\, dx,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 1.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение — однородное. Полагаем $z = \frac{y}{x}$, $y = xz$. Тогда $dy = x\,dz + z\,dx$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$x(x^2 + x^2z^2)(x\,dz + z\,dx) = xz(x^2z^2 - x^2z + x^2)\,dx; \quad (1 + z^2)x\,dz = -z^2dx.$$

Разделив обе части уравнения на xz^3, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{1 + z^2}{z^2}dz = -\frac{dx}{x}; \quad z - \frac{1}{z} = -\ln|x| + C.$$

Заметим, что при делении могли быть потеряны решения $z = 0$ и $x = 0$. Но ни одно из них не удовлетворяет начальному условию, так как $z(1) = 1$. Возвращаясь к переменной y, получим

$$y^2 - x^2 = -xy(\ln|x| - C).$$

Из начального условия имеем

$$1 - 1 = -\ln 1 + C,$$

откуда $C = 0$.

О т в е т: $y^2 - x^2 = -xy\ln|x|$.

Контрольное задание 2

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $(2y^2 - xy)\,dx = (x^2 - xy + y^2)\,dy$.
2. $(4x^2 + 4xy + 5y^2)\,dx = 4x(x + y)\,dy$.
3. $(6y^3 + 2x^2y)\,dx = (5xy^2 + x^3)\,dy$.
4. $(x + 3y)\,dx = (3x - y)\,dy$.
5. $(4x^2 + 4xy + 3y^2)\,dx = (4x^2 + 2xy)\,dy$.
6. $y(x - y)\,dx - x^2\,dy = 0$.
7. $(6y^3 + 4x^2y)\,dx = (5xy^2 + 2x^3)\,dy$.
8. $xy' = y + (2x + y)(\ln(2x + y) - \ln x)$.
9. $(2x^2 + 4xy)\,dy = (x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx$.
10. $2x^2y' = y^2 + 5xy + 2x^2$.
11. $6y(x^2 + y^2)\,dx = (5xy^2 + 3x^3)\,dy$.
12. $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.
13. $(4x^2 + 6xy + 3y^2)\,dx = (6x^2 + 2xy)\,dy$.
14. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.
15. $(3x^2 + 2xy)\,dy = (x^2 + 3xy + 3y^2)\,dx$.
16. $2x^2\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$.
17. $x(3y^2 + x^2)\,dy = (4y^3 + 2x^2y)\,dx$.
18. $xy' = y + (x + 2y)(\ln(x + 2y) - \ln x)$.
19. $(4x - y)\,dy = (x + 4y)\,dx$.
20. $(6x - y)\,dy = (x + 6y)\,dx$.
21. $2xy' = 2y + x\operatorname{tg}\frac{2y}{x}$.
22. $x(3y^2 + 2x^2)\,dy = 4y(y^2 + x^2)\,dx$.
23. $x^2y' - xy + y^2y' = 0$.
24. $(x^2 + 2xy)\,dx + xy\,dy = 0$.
25. $(3x^2 + 4xy)\,dy = (x^2 + 3xy + 5y^2)\,dx$.
26. $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$.
27. $(x^2 + 2xy + 3y^2)\,dx = 2x(x + y)\,dy$.
28. $3x(y^2 + x^2)\,dy = (4y^3 + 6x^2y)\,dx$.
29. $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y$.
30. $(4x^2 + 6xy + 5y^2)\,dx = (6x^2 + 4xy)\,dy$.

1.3. Линейные уравнения, уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{12}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции.

Чтобы его решить, надо сначала найти решение уравнения

$$y' + p(x)y = 0$$

(это делается путем разделения переменных, см. пункт 1.1 настоящего параграфа) и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в уравнение (12) и найти функцию $C(x)$. Данный метод решения уравнения (12) называется *методом вариации произвольной постоянной*.

Обобщением линейного дифференциального уравнения (12) является *уравнение Бернулли*:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (m \neq 1). \tag{13}$$

Чтобы решить уравнение (13), необходимо обе его части разделить на y^m и сделать замену $z = y^{1-m}$. Так как $z' = (1-m)y^{-m}y'$, то уравнение (13) преобразовывается к уравнению вида (12).

П р и м е р 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2y = y^2 e^x. \tag{14}$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Бернулли. Поделим обе части уравнения на y^2 и сделаем замену $z = 1/y$. Тогда получим следующее уравнение:

$$-z' + 2z = e^x. \tag{15}$$

Решим это уравнение методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим однородное уравнение $-z' + 2z = 0$, являющееся уравнением с разделяющимися переменными. Его решение — $z = Ce^{2x}$. Будем искать решение уравнения (15) в виде: $z = C(x)e^{2x}$. Подставим это выражение в уравнение (15):

$$-C'(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = e^x,$$

откуда $C(x) = e^{-x} + C_1$. Таким образом, общее решение уравнения (15) есть

$$z = e^x + C_1 e^{2x}.$$

Возвращаясь к переменной y, получим решение исходного уравнения:

$$y \cdot (e^x + C_1 e^{2x}) = 1.$$

Кроме того, функция $y = 0$ также является решением исходного уравнения.

О т в е т: $y \cdot (e^x + C_1 e^{2x}) = 1, \quad y = 0.$

Для решения линейных уравнений и уравнения Бернулли можно использовать также *метод Бернулли*. Он заключается в следующем. Решение исходного уравнения (12) ищется в виде произведения двух неизвестных функций от x:

$$y = uv. \tag{16}$$

Подставим выражение (16) и его производную $y' = u'v + uv'$ в уравнение (12):

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u\,(v' + p(x)v) = q(x).$$

Так как функции u и v мы можем выбрать произвольными (лишь бы произведение uv удовлетворяло исходному уравнению), выберем функцию v таким образом, чтобы

$$v' + p(x)v = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) является уравнением с разделяющимися переменными. Возьмем его частное решение $v = c_0 e^{\int p(x)\,dx}$ (где $c_0 \neq 0$ — произвольное число, при котором v имеет максимально простой вид). При таком выборе v получим уравнение для функции u вида

$$\frac{du}{dx} v(x) = q(x),$$

откуда

$$du = \frac{q(x)}{v(x)}\,dx. \tag{18}$$

Осталось найти u и подставить u и v в соотношение (16).

П р и м е р 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Р е ш е н и е. Решим уравнение методом Бернулли. Сделаем замену $y(x) = u(x)v(x)$ и получим

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}. \tag{19}$$

За функцию v примем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения

$$v' + 2xv = 0. \tag{20}$$

При таком выборе v второе и третье слагаемые в левой части (19) исчезают. Для функции u имеем дифференциальное уравнение:

$$u'v = 2xe^{-x^2}. \tag{21}$$

Уравнение (20) является уравнением с разделяющимися переменными и его интеграл равен

$$\ln|v| + x^2 = C_1.$$

Здесь можно положить $C_1 = 0$ и взять частное решение $v = e^{-x^2}$. Далее подставляем найденное $v(x)$ в уравнение (21): $u' = 2x$, и находим $u = x^2 + C$. Производя обратную подстановку, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

О т в е т: $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$.

Контрольное задание 3

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

1. $y'x\ln x - y = 2y^{-1}\ln^6 x$.
2. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$.
3. $e^{2y}\,dy = 3x\,dy + \,dx$.
4. $y' - 3y\operatorname{tg} x = 3y^{-2}\operatorname{tg}^8 x$.
5. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$.
6. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.
7. $y'\operatorname{tg} x - y = 3y^{-1}\sin^8 x$.
8. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$.
9. $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$.
10. $y'x\ln x - y = 6y^2\ln^{-7} x$.
11. $xy' = \frac{y}{x+1} + x$.
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + a\sin 2y}$.
13. $xy' - y = 2x^9y^{-2}$.
14. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$.
15. $xy' - 2y = x^{-1}y^2\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x$.
16. $y' - y\operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$.
17. $y = xy' + y'\ln y$.
18. $xy' - y = 2x^3e^{4x}y^{-1}$.
19. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.
20. $(y^2+1)\,dx = (1-4xy)\,dy$.
21. $e^{x^2}\,dy - xye^{x^2}\,dx + y^3\,dx = 0$.
22. $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.
23. $xy' + y = y^2\ln x$.
24. $y'\operatorname{tg} x - y = y^{-1}\sin^4 x$.
25. $3y' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$.
26. $y'x - 4y = x^2\sqrt{y}$.
27. $xy' - y = x^6y^{-2}$.
28. $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$.
29. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.
30. $xy' - y = 3x^3e^{6x}y^{-1}$.

1.4. Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{22}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. Это имеет место в односвязной области, если

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Чтобы решить уравнение (22), надо найти функцию $U(x,y)$, полный дифференциал от которой $dU = U'_x\,dx + U'_y\,dy$ равен левой части уравнения (22). Т.к. $dU = 0$, то первый интеграл уравнения (22) можно записать в виде

$$U(x,y) = C, \quad \text{где } C \text{ — произвольная постоянная.}$$

П р и м е р. Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения

$$2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy = 0$$

выбрать ту, которая проходит через точку $(1,0)$.

Р е ш е н и е. Здесь $P(x,y) = 2x\cos^2 y$, $Q(x,y) = 2y - x^2\sin 2y$ и заданное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах вида:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

так как

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2x\sin 2y.$$

Из равенства частных производных следует, что существует такая функция $U(x,y)$, что

$$dU(x,y) = 2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)\,dy.$$

Т. к. $U'_y = Q(x,\,y)$, можем найти $U(x,y)$ с точностью до произвольной функции от x:

$$U(x,y) = \int Q(x,\,y)\,dy = \int (2y - x^2\sin 2y)\,dy + f(x),$$

$$U(x,y) = y^2 + \frac{x^2\cos 2y}{2} + f(x).$$

Чтобы найти $f(x)$, продифференцируем найденную функцию $U(x,y)$ по x: $U'_x = x\cos 2y + f'(x)$ и приравняем к известному значению $U'_x = 2x\cos^2 y$, т. е. $2x\cos^2 y = x\cos 2y + f'(x)$ или, $2x\cos^2 y = x(2\cos^2 y - 1) + f'(x)$. Отсюда $f'(x) = x$. Проинтегрировав, найдем $f(x) = x^2/2 + c_1$. Таким образом,

$$U(x,y) = y^2 + \frac{x^2\cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Уравнение семейства интегральных кривых имеет вид

$$y^2 + \frac{x^2\cos 2y}{2} + \frac{x^2}{2} = c.$$

Из этого семейства кривых выделим ту, которая проходит через начало координат. Полагая $x = 1$, $y = 0$, получим $c = 1$.

Уравнение искомой кривой

$$2y^2 + x^2\cos 2y + x^2 = 2 \quad \text{или} \quad y^2 + x^2\cos^2 y = 1.$$

О т в е т: $y^2 + x^2\cos^2 y = 1$.

Контрольное задание 4

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0.$
2. $\frac{(2x-y)\,dx+(2y+x)\,dy}{x^2+y^2} = 0.$
3. $4(x^3 - xy^3)\,dx + 6(y^5 - x^2y^2)\,dy = 0.$
4. $(x - y + 2)\,dx - (x - y - 3)\,dy = 0.$
5. $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0.$
6. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}\,dy = 0.$
7. $e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})\,dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0.$
8. $(2x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0.$
9. $(3x^2 + 2xy + 2xy^6)\,dx + (x^2 + 6x^2y^5)\,dy = 0.$
10. $(x - 2y)y' + x^2 + y = 0.$
11. $(e^x + y + \sin y)\,dx + (e^y + x + x\cos y)\,dy = 0.$
12. $3x^2(1 + y^5)\,dx + y^2(3 + 5x^3y^2)\,dy = 0.$
13. $(x + y - 1)\,dx + (e^y + x)\,dy = 0.$
14. $(3x^2 + y^2 + 6x^5y^2)\,dx + (2xy + 2x^6y)\,dy = 0.$
15. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$
16. $(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0.$
17. $(y^2 + 6x^5y^2)\,dx + (2xy + 3y^2 + 2x^6y)\,dy = 0.$
18. $(y^3 - 2xy)\,dx + (3xy^2 - x^2)\,dy = 0.$
19. $x(x + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$
20. $2(xy + xy^6)\,dx + (x^2 + 3y^2 + 6x^2y^5)\,dy = 0.$
21. $(x^3 + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0.$
22. $(2xy + y^2 + 4x^3y^4)\,dx + (x^2 + 2xy + 4x^4y^3)\,dy = 0.$
23. $(x - y)\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)\,dy = 0.$
24. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)\,dx + \frac{(x^2+y)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy = 0.$
25. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0.$
26. $(2x + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\,dy = 0.$
27. $(2xy - 1)\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0.$
28. $(\sin y + y^2\sin x)\,dx + (x\cos y - 2y\cos x)\,dy = 0.$
29. $(2x + 1)y' + 4x + 2y = 0.$
30. $(3x^2\sin y + y\sin x)\,dx + (x^3\cos y - \cos x)\,dy = 0.$

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Метод решения таких уравнений состоит в том, что в исходном уравнении порядка n, $n \geq 2$, делается такая замена $z(x)$ или $p(y)$, относительно которой получается уравнение более низкого порядка $m < n$.

При нахождении частного решения $y(x)$ исходного уравнения порядка n с заданными начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, удобно константы интегрирования c_1, c_2, …, c_n $(n \geq 2)$, возникающие в процессе нахождения сначала $z(x)$ (или $p(y)$), затем $y(x)$, определять при помощи начальных условий не из общего решения, а по мере их появления.

Укажем несколько наиболее распространенных случаев:

1. В уравнение не входит искомая функция y, т.е. уравнение имеет вид
$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$
Тогда порядок уравнения можно понизить с помощью замены $y^{(k)} = z(x)$.

2. В уравнение не входит независимая переменная x, т.е. уравнение имеет вид
$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$
Тогда порядок уравнения понижается с помощью замены $y' = p(y)$.

3. Уравнение однородно относительно y и его производных, т.е.
$$F(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$
Тогда порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где z — новая неизвестная функция.

4. Уравнение однородно относительно x и y в обобщенном смысле, т.е.
$$F(kx, k^m y, k^{m-1}y', k^{m-2}y'', \dots, k^{m-n}y^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$
Для этого уравнения делается замена $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, где $z = z(t)$ — новая неизвестная функция, а t — новая независимая переменная. Данная замена приводит к уравнению, не содержащему независимую переменную t. Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

П р и м е р. Решить уравнение
$$y^4 - y^3 y'' = 1 \quad \text{при условии} \quad y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Р е ш е н и е. Пусть $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{dp}{dy}y' = \dfrac{dp}{dy}p$. Тогда исходное уравнение примет вид:
$$y^4 - y^3 p\frac{dp}{dy} = 1, \quad p(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{5}{2}};$$
$$\int p\,dp = \int \frac{y^4 - 1}{y^3}\,dy, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + c_1, \quad c_1 = 0.$$
Итак,
$$p^2 = y^2 + \frac{1}{y^2}, \quad p = \pm\frac{\sqrt{y^4+1}}{y}.$$
Тогда
$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^4+1}}{y}; \quad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^4+1}} = \pm\int dx; \quad \frac{1}{2}\ln\left(y^2 + \sqrt{y^4+1}\right) = \pm x + c_2.$$
$$c_2 = \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}\right).$$

О т в е т: $\ln\left(y^2 + \sqrt{y^4+1}\right) = \pm 2x + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Контрольное задание 5

В вариантах 1–23 найти общее решение дифференциального уравнения, в вариантах 24–30 найти частное решение дифференциального уравнения

1. $x(y''-x)=y'$.
2. $y^3y''+1=0$.
3. $y''(x^2+1)-2xy'=0$.
4. $(y')^2=y''(y-1)$.
5. $\frac{(y')^2}{y''}=\frac{y-1}{2}$.
6. $yy''-(y')^2=y^4$.
7. $y'''+y''\operatorname{tg}x=\sin 2x$.
8. $y'''=\frac{24}{(x+2)^5}$.
9. $yy''=(y')^2-(y')^3$.
10. $xy^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}=0$.
11. $y''(e^x+1)+y'=0$.
12. $xy''+x(y')^2-y'=0$.
13. $2yy''=(y')^2+1$.
14. $xy''+y'-3=0$.
15. $x^2y'''=(y'')^2$.
16. $y'''-y''=2(1-x)$.
17. $y''\cos x+y'\sin x=1$.
18. $xyy''+x(y')^2-yy'=0$.
19. $y''=ae^{-y'}$.
20. $yy''=(y')^2+y'\sqrt{y^2+(y')^2}$.
21. $yy''=(y')^2$.
22. $y''y^{\mathrm{IV}}+(y''')^2=0$.
23. $yy'''-y'y''=0$.
24. $y''=\frac{y'}{x}\left(1+\ln\frac{y'}{x}\right),\quad y(1)=\frac{1}{2},\ y'(1)=1$.
25. $y''=2x(y')^2,\quad y(2)=3,\ y'(2)=-\frac{1}{4}$.
26. $y'y^2+yy''-(y')^2=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$.
27. $2y'+\left((y')^2-6x\right)y''=0,\quad y(1)=\sqrt{2},\ y'(1)=\sqrt{2}$.
28. $y''=\sqrt{1+(y')^2},\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.
29. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'},\quad y(2)=0,\ y'(2)=2\sqrt{2}$.
30. $xy''=\sqrt{1+(y')^2},\quad y(1)=0;\ y(e^2)=1$.

3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка n имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad \text{где } a_j = \text{const}, \ (j = 0, \ldots, n). \tag{23}$$

Чтобы его решить, необходимо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{24}$$

и найти все его корни: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (23) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_je^{\lambda_jx}$ для каждого простого корня λ_j уравнения (24) и слагаемых вида

$$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня λ кратности k уравнения (24). Здесь все C_j — произвольные постоянные.

Если все коэффициенты a_j уравнения (23) вещественные, то слагаемые, отвечающие комплексным корням $\lambda = \alpha \pm i\beta$ уравнения (24), можно записать в вещественной форме:

$$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и

$$P_{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1}, Q_{k-1} — многочлены от x степени $k-1$. Их коэффициенты — произвольные постоянные.

П р и м е р. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 4y'' + 5y' = 0$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 13$.

Р е ш е н и е. Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$. Общее решение дифференциального уравнения

$$y = c_1 + c_2e^{2x}\cos x + c_3e^{2x}\sin x.$$

Для того, чтобы воспользоваться начальными условиями, найдем y' и y'':

$$y' = 2c_2e^{2x}\cos x - c_2e^{2x}\sin x + 2c_3e^{2x}\sin x + c_3e^{2x}\cos x,$$

$$y'' = 3c_2e^{2x}\cos x - 4c_2e^{2x}\sin x + 3c_3e^{2x}\sin x + 4c_3e^{2x}\cos x.$$

Подставим в общее решение y, в y' и в y'' начальные условия и решим полученную систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5, \\ 2c_2 + c_3 = 7, \\ 3c_2 + 4c_3 = 13. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 3, \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

Подставив в общее решение полученные значения постоянных, получим частное решение

$$y = 2 + 3e^{2x}\cos x + e^{2x}\sin x.$$

О т в е т: $y = 2 + 3e^{2x}\cos x + e^{2x}\sin x$.

Контрольное задание 6

В каждом варианте найти частное решение линейного однородного уравнения с заданными начальными условиями:

1. $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0.$
2. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -3.$
3. $y''' - 5y'' = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 28,\ y''(0) = 125.$
4. $y''' + 4y' = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = -4.$
5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 3.$
6. $y''' + 9y' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 0.$
7. $y''' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 1.$
8. $y''' + 7y'' + 11y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -4.$
9. $y''' + 3y'' = 0, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = -15,\ y''(0) = 36.$
10. $y''' + 3y' = 0, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -3.$
11. $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 9,\ y'(0) = -13,\ y''(0) = 47.$
12. $y''' + 2y'' = 0, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = -7,\ y''(0) = 20.$
13. $y''' + 2y' = 0, \quad y(0) = 8,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -6.$
14. $y''' - y'' - 16y' - 20y = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 10.$
15. $y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ y''(0) = 1.$
16. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
17. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
18. $y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$
19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3.$
20. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6,\ y'(0) = 10.$
21. $y'' + 2ay' + a^2y = 0, \quad y(0) = a,\ y'(0) = 0.$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
23. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$
24. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3.$
25. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 2.$
26. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$
27. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15.$
28. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$
29. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1.$
30. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = 8.$

3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad \text{где } a_j = \text{const}, \ (j = 0, \ldots, n). \tag{25}$$

Если правая часть $f(x)$ состоит из сумм и произведений функций вида $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, e^{ax}, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, частное решение можно искать *методом неопределенных коэффициентов.*

Для уравнений с правой частью $f(x) = P_m(x) e^{ax}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, существует частное решение вида

$$y_1 = x^r Q_m(x) e^{ax}, \tag{26}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени m. Число $r = 0$, если a — не корень характеристического уравнения (24), а если a — корень, то r равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (26) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят $\cos bx$ и $\sin bx$, то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера. Если же коэффициенты a_j левой части уравнения (25) вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx) \tag{27}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^r e^{ax}(R_l(x) \cos bx + T_l(x) \sin bx), \tag{28}$$

где $r = 0$, если $a + ib$ не корень характеристического уравнения, и r равно кратности корня $a + ib$ в противном случае, а R_l и T_l — многочлены степени l, равной наибольшей из степеней m и n многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_l и T_l, надо подставить решение (28) в уравнение (25) и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида (27), то частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + f_2 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

П р и м е р 1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 5xe^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения y есть сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения y_1 и частного решения неоднородного уравнения y_2:

$$y = y_1 + y_2.$$

Найдем y_1. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_2 = x^r (Ax + B) e^{2x}.$$

Здесь $r = 1$, так как $a = \lambda_1 = 2$ — корень характеристического уравнения кратности 1. Для нахождения неизвестных коэффициентов A и B подставим выражение функции y_2 и ее производных в уравнение и, сократив на e^{2x}, сравним коэффициенты при одинаковых степенях x левой и правой частей. Получим

$$\begin{array}{r|l} 6 & y_2 = (Ax^2 + Bx)e^{2x} \\ -5 & y_2' = 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} + (2Ax + B)e^{2x} \\ 1 & y_2'' = 4(Ax^2 + Bx)e^{2x} + 4(2Ax + B)e^{2x} + 2Ae^{2x}. \end{array}$$

$$(6A - 10A + 4A)x^2 + (6B - 10B - 10A + 4B + 8A)x + (-5B + 4B + 2A) = 5x = 0x^2 + 5x + 0,$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & (6A - 10A + 4A) = 0 \\ x & (6B - 10B - 10A + 4B + 8A) = 5 \\ x^0 & (-5B + 4B + 2A) = 0. \end{array}$$

Откуда находим $A = -\frac{5}{2}$; $B = -5$, т.е. $y = x\left(-\frac{5}{2}x - 5\right)e^{2x}$.

О т в е т: Общее решение неоднородного уравнения $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x\left(-\frac{5}{2}x - 5\right)e^{2x}$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$y'' + y = 4\sin x.$$

Р е ш е н и е. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_1 = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с правой частью

$$f(x) = 4\sin x = e^{0x}(0\cdot\cos x + 4\cdot\sin x).$$

Имеем $a = 0$, $b = 1$, тогда $r = 1$, так как $a \pm bi = 0 \pm i$ — корни характеристического уравнения кратности 1; $n = 0$, $m = 0$, тогда $l = 0$, $R_l(x) = A$, $T_l(x) = B$.

Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_2 = e^{0x}\cdot x^1\cdot(A\cos x + B\sin x) = Ax\cos x + Bx\sin x.$$

Для нахождения коэффициентов A и B, подставим y_2 и его производные в исходное уравнение:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y_2 = Ax\cos x + Bx\sin x, \\ 0 & y_2' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x, \\ 1 & y_2'' = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x. \end{array}$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{array}{r|l} \sin x & Bx - 2A - Bx = 4, \\ \cos x & Ax - Ax + 2B = 0, \end{array}$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнений системы, находим $A = -2$, $B = 0$, и, подставляя в формулу для $y_2(x)$, получим $y_2(x) = -2x\cos x$, откуда

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x.$$

О т в е т: Общее решение уравнения: $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x$.

Контрольное задание 7

В каждом варианте найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.
2. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.
3. $y'' + y = \sin x$.
4. $y'' + 7y' + 10y = 2xe^{-2x}$.
5. $y'' + 6y' + 9y = 5e^{-3x} \sin x$.
6. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x$.
7. $y'' + 5y' + 6y = -5e^{-2x} \cos x$.
8. $y''' + 4y' = x^2$.
9. $y'' - 2y' = x^2 - x$.
10. $y'' + 9y = 3 \cos 3x$.
11. $y'' + 2y' + y = e^x(x + 3)$.
12. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$.
13. $y'' + 2y' = 4x^2 + 3$.
14. $y''' - y'' + y' - y = 2xe^x$.
15. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$.
16. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.
17. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.
18. $y''' - y'' - 6y' = 6x + 2$.
19. $y''' + y'' = -x$.
20. $4y''' + y' = 2 \sin \frac{x}{2}$.
21. $y''' - 4y' = x^2$.
22. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.
23. $y'' + 2y' = 4x^2 + 3$.
24. $y'' + 2y' = 2 \sin x$.
25. $y''' - 4y' = xe^{2x}$.
26. $y'' + y = -2e^{-x}$.
27. $y''' - 4y' = \sin x$.
28. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$.
29. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$.
30. $y'' + y' = x^2$.

Контрольное задание 8

В каждом варианте найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов):

1. $y''' + y'' = 2\cos^2 \frac{x}{2}$.
2. $y''' - y'' - 6y' = e^x - \sin 3x$.
3. $y'' + y' = -4\sin x + \sin 4x$.
4. $y'' - 3y' = \cos x + e^{3x} \sin x$.
5. $y'' + 4y = x \sin 2x - x^2$.
6. $y''' - 4y' = \sin x - (x^2 + 5)e^{4x}$.
7. $y'' - 4y' + 3y = xe^x + \cos 2x$.
8. $y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x} - x^2 \cos x$.
9. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + x^3 - 2x^2 + 10$.
10. $y'' + y' = \cos^2 x$.
11. $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x + x^3 e^{-2x}$.
12. $y''' + 4y'' = x - 1 + \cos 4x$.
13. $y'' - 3y' = x + \cos x$.
14. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x - 2x^2$.
15. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.
16. $y'' + y = x \sin x + \cos 2xe^x$.
17. $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$.
18. $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$.
19. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.
20. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x$.
21. $y'' + 9y = 2x \sin x + xe^{3x}$.
22. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x$.
23. $y'' - 9y = 3e^{3x} - \cos x$.
24. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x - x^2$.
25. $y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$.
26. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.
27. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$.
28. $y''' + 2y'' + 5y' = 4xe^{-x} - 68\cos 2x + x$.
29. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$.
30. $y^{\mathrm{V}} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$.

3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью произвольного вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (25) с непрерывной правой частью $f(x)$ произвольного вида решается *методом вариации произвольных постоянных*. Пусть найдено общее решение

$$y = C_1 y_1 + \ldots C_n y_n$$

соответствующего линейного однородного уравнения. Тогда решение уравнения (25) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_k(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0}, \end{cases}$$

где a_0 — коэффициент при старшей производной в уравнении (25).

П р и м е р. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + y'' = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению, есть

$$y_1 = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x.$$

Ищем общее решение исходного уравнения в виде:

$$y = C_1(x) + C_2(x)x + (C_3(x) + C_4(x)x)e^x. \tag{29}$$

Для нахождения неизвестных функций C_k запишем систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x + (C_3'(x) + C_4'(x)x)e^x &= 0, \\ C_2'(x) + (C_3'(x) + C_4'(x)(x+1))e^x &= 0, \\ (C_3'(x) + C_4'(x)(x+2))e^x &= 0, \\ (C_3'(x) + C_4'(x)(x+3))e^x &= \dfrac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$C_4'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5} e^{-x}, \quad C_3'(x) = -\frac{2x^3 + 16x^2 + 48x + 48}{x^5} e^{-x},$$
$$C_2'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}, \quad C_1'(x) = \frac{-2x^3 - 8x^2 + 48}{x^5}.$$

Интегрируя эти выражения, получим:

$$\begin{gathered} C_1(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^4} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C_2, \\ C_3(x) = \left(\frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) e^{-x} + C_3, \quad C_4(x) = \left(-\frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) e^{-x} + C_4. \end{gathered} \tag{30}$$

Подставляя эти выражения в (29), получим общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x + 1/x.$$

О т в е т: $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x + 1/x$.

Контрольное задание 9

В каждом варианте найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

1. $y^{\mathrm{IV}} - y = \dfrac{1}{\cos x}$.
2. $y''' - y' = \dfrac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$.
3. $y''' - 4y' = \dfrac{1}{2 - e^{-x}}$.
4. $y''' + y' = 2\operatorname{ctg} x$.
5. $y''' + 4y' = \dfrac{16}{\cos 4x}$.
6. $y^{\mathrm{V}} + 4y''' = \dfrac{9}{\sin 3x}$.
7. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}}$.
8. $y^{\mathrm{IV}} - 16y = \dfrac{4}{\sin 3x}$.
9. $y''' + y = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.
10. $y''' - y = (\sin x)^{-1}$.
11. $y''' + y'' = \dfrac{1}{\pi^2 \sin(x/\pi)}$.
12. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$.
13. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$.
14. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$.
15. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$.
16. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$.
17. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.
18. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$.
19. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.
20. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$.
21. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$.
22. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$.
23. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.
24. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^x}$.
25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.
26. $y'' + 2y' + y = \dfrac{5e^{-x}}{\sqrt[3]{x+1}}$.
27. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}\sqrt[3]{x}$.
28. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\sqrt{x+1}$.
29. $y'' - y = \dfrac{1}{5e^{-x} - 1}$.
30. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{e^{-2x}}{e^{2x} + 1}$.

4. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим задачу

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y, \quad x_0 < x < x_1, \tag{31}$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ — непрерывные функции,

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \tag{32}$$

$$\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0. \tag{33}$$

Собственным значением этой задачи называется такое λ, при котором существует нетривиальное решение задачи (31)–(33). Это решение называется *собственной функцией.*

Задача (31)–(33) носит название задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим частные случаи задачи Штурма–Лиувилля.

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(x_0) = y(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(x_0) = y(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y'(x_0) = y'(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, \\ y(x_0) = y'(x_1) = 0 \end{cases}$$

Каждая из этих задач имеет бесконечное (дискретное) множество собственных значений λ_n и бесконечное семейство собственных функций $y_n(x)$.

П р и м е р 1. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{34}$$

$$y'(1/2) = 0, \tag{35}$$

$$y(3/2) = 0. \tag{36}$$

Р е ш е н и е. Ищем общее решение уравнения (34). Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + \lambda = 0$, откуда $k^2 = -\lambda$, и $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (34) имеет вид

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Можно проверить, что оно не удовлетворяет условиям (35)–(36) при $C_1^2 + C_2^2 > 0$.

При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (34) имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x$$

и также не удовлетворяет условиям (35)–(36) ни при каких C_1, C_2, если $C_1^2 + C_2^2 > 0$.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (34) имеет вид

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{37}$$

Тогда $y' = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$. Из граничных условий (35)–(36) имеем систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$y'(1/2) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C_2\sqrt{\lambda}\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0,$$

$$y(3/2) = C_1\cos\frac{3\sqrt{\lambda}}{2} + C_2\sin\frac{3\sqrt{\lambda}}{2} = 0,$$

или

$$\begin{cases} -C_1 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C_2 \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0, \\ C_1 \cos \frac{3\sqrt{\lambda}}{2} + C_2 \sin \frac{3\sqrt{\lambda}}{2} = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Система (38) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее главный определитель равен 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} & \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \\ \cos \frac{3\sqrt{\lambda}}{2} & \sin \frac{3\sqrt{\lambda}}{2} \end{vmatrix} = -\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \sin \frac{3\sqrt{\lambda}}{2} - \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos \frac{3\sqrt{\lambda}}{2} = -\cos \sqrt{\lambda} = 0.$$

Отсюда $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда из уравнения (38)

$$C_2 = C_1 \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = C_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Подставляя это выражение в (37), получим

$$y = y_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x + (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x.$$

Отсюда при $n = 2k$:

$$y_{2k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)x, \tag{39}$$

а при $n = 2k + 1$:

$$y_{2k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)x. \tag{40}$$

О т в е т: Собственные числа: $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$; собственные функции определяются соотношениями (39) и (40).

Контрольное задание 10

В каждом варианте найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям (задача Штурма-Лиувилля):

1. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1 \le x \le 2, \\ y(1) = y'(2) = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/2 \le x \le 2, \\ y(3/2) = y'(2) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le \pi, \\ y(\pi/2) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/4 \le x \le \pi/2, \\ y(\pi/4) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/2 \le x \le 1, \\ y(1/2) = y'(1) = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/4 \le x \le 1, \\ y(3/4) = y'(1) = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi \le x \le 2\pi, \\ y(\pi) = y'(2\pi) = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le 3\pi/4, \\ y(\pi/2) = y'(3\pi/4) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1 \le x \le 3/2, \\ y(1) = y'(3/2) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/4 \le x \le 1/2, \\ y(1/4) = y'(1/2) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le 3\pi/2, \\ y(\pi/2) = y'(3\pi/2) = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/4 \le x \le 5/4, \\ y(3/4) = y'(5/4) = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/2 \le x \le 3/2, \\ y(1/2) = y'(3/2) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le 5\pi/4, \\ y(\pi/2) = y'(5\pi/4) = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi \le x \le 3\pi/2, \\ y(\pi) = y'(3\pi/2) = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3\pi/4 \le x \le 5\pi/4, \\ y(3\pi/4) = y'(5\pi/4) = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1 \le x \le 2, \\ y(2) = y'(1) = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/2 \le x \le 2, \\ y(2) = y'(3/2) = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le \pi, \\ y(\pi) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/4 \le x \le \pi/2, \\ y(\pi/2) = y'(\pi/4) = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/2 \le x \le 1, \\ y(1) = y'(1/2) = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/4 \le x \le 1, \\ y(1) = y'(3/4) = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi \le x \le 2\pi, \\ y(2\pi) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le 3\pi/4, \\ y(3\pi/4) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1 \le x \le 3/2, \\ y(3/2) = y'(1) = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 1/4 \le x \le 1/2, \\ y(1/2) = y'(1/4) = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le 3\pi/2, \\ y(3\pi/2) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/4 \le x \le 5/4, \\ y(5/4) = y'(3/4) = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi \le x \le 3\pi/2, \\ y(3\pi/2) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & \pi/2 \le x \le 5\pi/2, \\ y(5\pi/2) = y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Примеры некоторых экономических задач

П р и м е р 1. **Рост денежных вкладов.** Сумма A руб. положена в банк под r % в год. Найти закон изменения суммы при условии, что приращение начисляется непрерывно.

Р е ш е н и е. Общая сумма P вклада в результате начисления процентов один раз в конце года составит

$$P = A\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Если проценты будут начисляться по истечении полугода, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{200}\right)^2,$$

если поквартально, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{400}\right)^4,$$

и если ежемесячно, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{12}.$$

В общем случае наращенная сумма в конце года составит

$$P = A\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^m$$

при r % годовых, начисляемых m раз в год (например, 365 раз в год, т.е. ежедневно).

По истечении t лет общая сумма составит

$$P = A\left(\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^m\right)^t.$$

Если число m начислений процентов в год будет беспредельно увеличиваться, то

$$P = \lim_{m\to+\infty} A\left(\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^m\right)^r = A \lim_{m\to+\infty}\left(\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{\frac{100m}{r}}\right)^{\frac{tr}{100}} = Ae^{\frac{tr}{100}}.$$

В течение короткого промежутка времени dt приращение суммы P составит

$$dP = d(Ae^{\frac{tr}{100}}) = \frac{r}{100}Ae^{\frac{tr}{100}}dt = \frac{r}{100}Pdt.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100}P.$$

П р и м е р 2. **Эффективность рекламы.** Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция B, о которой в момент времени $t = 0$ из числа потенциальных покупателей N знает лишь x человек. Предположим далее, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. Построить закон изменения $x(t)$.

Р е ш е н и е. С большой степенью достоверности можно сказать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции B пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало $\frac{N}{\gamma}$ человек, то приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \tag{41}$$

с начальным условием $x = \frac{N}{\gamma}$ при $t = 0$. В уравнении (41) коэффициент k — это положительный коэффициент пропорциональности. Интегрируя уравнение (41), находим

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N - x} = kt + C.$$

Полагая $C_1 = e^{NC}$, приходим к равенству

$$\frac{x}{N - x} = C_1 e^{Nkt},$$

отсюда

$$x = N \frac{C_1 e^{Nkt}}{C_1 e^{Nkt} + 1} = \frac{N}{1 + Pe^{-Nkt}}, \tag{42}$$

где $P = \frac{1}{c_1} = e^{-NC}$. В экономической литературе уравнение (42) обычно называют *уравнением логистической кривой*. Если учесть теперь начальные условия, то равенство (42) перепишется в виде

$$x = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}.$$

П р и м е р 3. **Спрос и предложение.** Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени крестьянин продает на рынке фрукты (например, яблоки), причем продает их после уборки урожая с недельными перерывами. Тогда при имеющихся у крестьянина запасах фруктов недельное предложение будет зависить как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается ее падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем. Составить дифференциальное уравнение, описывающее процесс формирования цены при условии равновесия между спросом и предложением.

Р е ш е н и е. Если обозначить через p цену на фрукты на наступающей неделе, а через p' — так называемую *тенденцию формирования цены* (производную цены по времени), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задается линейной зависимостью, математически описываемой соотношением

$$y = ap' + bp + c,$$

где a, b и c — некоторые вещественные постоянные. А тогда, если, например, в рассматриваемой задаче цена на фрукты составляла 1 условную единицу за 1 кг, через t недель она уже была $p(t)$ условных единиц за 1 кг, а спрос q и предложение s определялись соответственно соотношениями $q = a_1p' + b_1p + c_1$, $s = a_2p' + b_2p + c_2$, то для того чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо выполнение равенства

$$a_1p' + b_1p + c_1 = a_2p' + b_2p + c_2,$$

или

$$\alpha p' + \beta p + \gamma = 0,$$

где $\alpha = a_1 - a_2$, $\beta = b_1 - b_2$, $\gamma = c_1 - c_2$. Отсюда приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\alpha dp}{\beta p + \gamma} = -dt.$$

Интегрируя, находим

$$p = Ce^{\frac{\beta}{\alpha}t} - \frac{\gamma}{\beta}.$$

Если же учесть начальное условие $p = 1$ при $t = 0$, то окончательно получаем

$$p = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) e^{\frac{\beta}{\alpha} t} - \frac{\gamma}{\beta}. \tag{43}$$

Таким образом, если требовать, чтобы между спросом и предложением все время сохранялось равновесие, необходимо, чтобы цена изменялась в соответствии с формулой (43).

Если $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$, то получающееся дифференциальное уравнение $p' = -\frac{\gamma}{\alpha}$ имеет решение, выражающееся другой формулой: $p = C - \frac{\gamma}{\alpha} t$ или с учетом начального условия $p = 1 - \frac{\gamma}{\alpha} t$. В случае $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ и $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ цена будет убывать до нуля и при $t > \frac{\alpha}{\gamma}$ становится отрицательной, чего не может быть в реальности. Это противоречие говорит о применимости данной математической модели только в указанном случае при малых t.

Если $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, то имеем алгебраическое уравнение $\beta p + \gamma$, откуда $p = -\frac{\gamma}{\beta}$. Цена постоянна, что полностью соответствует отсутствию в уравнении фактора, изменяющего цену. Ставить какие-либо начальные условия в этом случае неправомерно.

П р и м е р 4. **Экономика.** Рассмотрим экономическую систему, в которой правительственные расходы G_0 постоянны. В каждый момент t в экономике существует спрос $D(t)$, определяющий желаемый уровень потребления и капиталовложений. Задача состоит в том, чтобы сбалансировать экономику таким образом, чтобы объем производства $Y(t)$ совпадал со спросом, т.е. $D(t) \equiv Y(t)$. Однако на практике производство не может мгновенно реагировать на изменение спроса. Существует запаздывание τ, которое связано со временем, необходимым для постройки нового завода и т.п.

Р е ш е н и е. Чтобы сбалансировать экономику при наличии запаздывания, необходимо составлять планы на будущее и строить производство так, чтобы удовлетворять прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = (1 - s)Y(t - \tau) + I(t) + G_0, \tag{44}$$

где $s > 0$ — предельная склонность к сбережению, $I(t)$ — уровень капиталовложений. В уравнении (44) считаем, что за время τ капиталовложения существенно не изменяются, т.е. $I(t - \tau) = I(t)$. Теперь, если учесть, что $Y(t-\tau) = Y(t) - \tau Y'(t) + \alpha(\tau)\tau^2$, где функция $\alpha(\tau)$ ограничена при $\tau \to 0$, то увидим, что уравнение (44) означает достижение баланса с точностью до величины первого порядка относительно τ при

$$(1 - s)\tau Y'(t) = -sY(t) + I(t) + G_0 \tag{45}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Хотя величина $I(t)$ за время порядка τ существенно не изменяется, она не является постоянной. Капиталовложения зависят от общей тенденции развития производства. Одна из возможных стратегий в области капиталовложения — «принцип акселератора», согласно которому желательно выполнение соотношения $I(t) \equiv aY'(t)$, $a > 0$. Это равенство не может точно выполняться с силу запаздывания, но можно приблизиться к нему, если взять

$$I'(t) = b(aY'(t) - I(t)), \qquad b > 0. \tag{46}$$

Уравнения (45) и (46) служат основой динамической модели экономики. Их можно привести к более привычному виду, найдя I' из (45), подставив I из (45) в (46) и приравняв I' из (45) и из (46):

$$(1 - s)\tau y'' + (s - ba + (1 - s)\tau b)y' + sby = 0, \tag{47}$$

где $y = Y - G_0/s$. Таким образом, разность между объемом производства и постоянной величиной G_0/s удовлетворяет уравнению

$$y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = 0,$$

$$\text{где} \quad k = \frac{s - ba + (1 - s)\tau b}{2\tau(1 - s)}, \qquad \omega_0^2 = \frac{sb}{\tau(1 - s)}.$$

П р и м е р 5. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его массе. Составить уравнение, позволяющее определить, во сколько раз увеличится эта масса в течение времени t.

Р е ш е н и е. Примем за аргумент время t, а за искомую функцию $N(t)$ — массу действующего фермента в момент времени t. Пусть $N(0) = N_0$. Быстрота прироста действующего фермента представляет собой скорость изменения функции $N = N(t)$ со временем t. С другой стороны, по условию задачи скорость изменения $N(t)$, т.е. dN/dt, пропорциональна массе действующего фермента, а именно,

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad \text{где} \quad k > 0 \text{ — коэффициент пропорциональности.}$$

Таким способом получается дифференциальное уравнение, описывающее процесс.

П р и м е р 6. **Макромодель роста**

К числу макромоделей роста относятся модель роста Харрода-Домара с фиксированными коэффициентами и неоклассическая модель, предполагающая переменные коэффициенты производства.

В каждой из этих моделей производственная функция $Y = F(K, L)$, где Y — национальный доход, K — капитал, L — труд, характеризуется неизменным эффектом масштаба, а в качестве центральной переменной выступает соотношение капитал/труд:

$$x = K/L \tag{48}$$

Если мы прологарифмируем обе части (48) по натуральному основанию, то получим

$$\ln x = \ln K - \ln L.$$

После чего продифференцировав это выражение по t, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \tag{49}$$

(здесь и далее $\dot{x} = dx/dt,\ \dot{K} = dK/dt,\ \dot{L} = dL/dt$).

Сначала, положив $y = Y/L$ и исходя из предположения о линейной однородности производственной функции, мы можем записать последнюю как $y = F(K/L, 1)$. Представив правую часть этого уравнения в виде $f(x)$, получим производственную функцию вида

$$y = f(x), \tag{50}$$

где $y = Y/L$ — производительность труда, $x = K/L$ — капиталовооруженность (фондовооруженность). Теперь примем следующие допущения:

1. Для каждого отрезка времени доля непотребленной части национального дохода, т.е. норма накопления, $s = (Y - C)/Y$, является постоянной, и для каждого отрезка времени увеличение накопленного капитала равно новому инвестиционному спросу, предъявленному на данном отрезке времени, а именно
$$I = \dot{K}. \tag{51}$$
2. Рост предложения труда является постоянной величиной, равной n, что формально может быть записано как
$$\dot{L}/L = n, \tag{52}$$
другими словами, n — темп прироста труда.

Исходя из сделанных допущений, выведем основное уравнение роста макроэкономики. С учетом допущения (2) уравнение (49) переписывается следующим образом:

$$\dot{x} = x\frac{\dot{K}}{K} - nx.$$

Поскольку составляющие национального дохода — потребление и накопление, т.е. $Y = C + I$, то, принимая во внимание (50), имеем

$$x\frac{\dot{K}}{K} = x\frac{I}{K} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{I}{Y} = sf(x),$$

откуда получаем

$$\dot{x} = sf(x) - nx. \tag{53}$$

П р и м е р 7. **Модель для описания простейших процессов макроэкономической динамики.**

Пусть $y = y(t)$ — объем производства некоторого производителя, реализованный к моменту времени t. Предположим, что цена на данный товар остается постоянной (в пределах рассматриваемого промежутка времени). Тогда функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y' = ky, \tag{54}$$

где $k = mpl$, m — норма инвестиций, p — продажная цена, l — коэффициент пропорциональности между величиной инвестиций и скоростью выпуска продукции.

П р и м е р 8. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}, \quad x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент $p = 9$.

Р е ш е н и е. Из условия равенства спроса и предложения имеем:

$$25 - 2p + 3\frac{dp}{dt} = 15 - p + 4\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$\frac{dp}{dt} = 10 - p,$$

т.е. получаем уравнение с разделяющимися переменными.

5.2. Примеры некоторых физических и экологических задач

Для решения некоторых задач электротехники можно пользоваться следующими законами теории электрических цепей.

Для каждого узла цепи сумма всех протекающих токов равна сумме вытекающих токов.

Алгебраическая сумма напряжений источников тока, содержащихся в любом замкнутом контуре цепи, равна алгебраической сумме падений напряжений на всех остальных участках этого контура.

Падение напряжения на сопротивлении R равно JR; падение напряжения на самоиндукции L равно $L\frac{dJ}{dt}$; падение напряжения на конденсаторе емкости C равно q/C, где $q = q(t)$ заряд конденсатора в момент t; при этом $\frac{dq}{dt} = J$; во всех трех случаях $J = J(t)$ — сила тока, протекающего через рассматриваемый участок цепи в данный момент времени t. В этих формулах J выражается в амперах, R — в омах, L — в генри, q — в кулонах, C — в фарадах, t — в секундах, напряжение — в вольтах.

П р и м е р 9. Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V\sin wt$, сопротивление R и емкость C. Найти силу тока в цепи при установившемся режиме[1].

Р е ш е н и е. Сила тока $J = J(t)$ на любом участке цепи одна и та же (по закону о последовательном соединении). Падение напряжения на сопротивлении равно RJ, а на емкости q/C. Следовательно,

$$RJ + \frac{q}{C} = V\sin wt.$$

Дифференцируя и пользуясь тем, что $\frac{dq}{dt} = J$, получим уравнение

$$R\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = Vw\cos wt. \tag{55}$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для отыскания установившегося режима найдем периодическое частное решение этого уравнения. Исходя из вида правой части уравнения, ищем решение в виде

$$J(t) = A_1\cos wt + B_1\sin wt. \tag{56}$$

[1] Установившимся режимом называется такой режим, при котором сила тока постоянна или меняется периодически

Подставляя $J(t)$ и $\frac{dJ}{dt}$ в (55) и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим систему двух уравнений, из которой можно найти коэффициенты A_1 и B_1. Но в электротехнике важнее знать не коэффициенты A_1 и B_1, а амплитуду изменения тока. Поэтому выражение (56) переписывают в виде

$$J(t) = A\sin(wt - \varphi). \tag{57}$$

Подставляя (57) в (55), переходя к тригонометрическим функциям углов wt и φ, приравнивая коэффициенты сначала при $\sin wt$, а затем при $\cos wt$, получим

$$\left.\begin{array}{l} RAw\sin\varphi + \frac{A}{C}\cos\varphi = 0 \\ RAw\cos\varphi - \frac{A}{C}\sin\varphi = Vw \end{array}\right\}.$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{RCw}, \quad A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (wC)^{-2}}}.$$

Поясним, почему найденное периодическое решение называется установившимся режимом. Общее решение уравнения (55) равно сумме найденного частного решения (57) и общего решения линейного однородного уравнения

$$R\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = 0. \tag{58}$$

Так как общее решение уравнения (58) $J = ke^{-t/(RC)}$ (k — произвольная постоянная) стремится к нулю при $t \to +\infty$, то любое решение уравнения (55) при $t \to +\infty$ неограниченно приближается к найденному периодическому частному решению (57).

П р и м е р 10. Колебательный контур, представляющий собой замкнутую электрическую цепь, обладает емкостью C, индуктивностью L и активным сопротивлением R. При переходе энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки (и обратно) часть энергии контура затрачивается на активных сопротивлениях, в результате чего величина напряжения на конденсаторе постепенно уменьшается. Найти закон изменения заряда конденсатора q (рис.1).

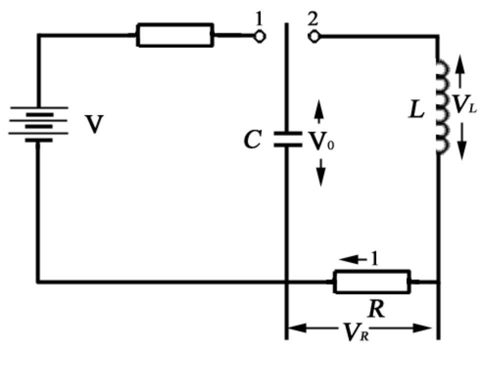


Рис. 1: к примеру 10

Р е ш е н и е. Ток в контуре определяется как частное от деления падения напряжения на сопротивлении на величину этого сопротивления:

$$J = \frac{V_R}{R} = \frac{V_C - V_L}{R}.$$

Здесь V_C — напряжение на конденсаторе, V_L — напряжение на катушке индуктивности, т.е.

$$V_L = L\frac{dJ}{dt}.$$

Проводим элементарные алгебраические преобразования и получим исходное дифференциальное уравнение цепи:

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ - V_C = 0.$$

Ток в контуре $J = -\dfrac{dq}{dt}$, где q — заряд конденсатора;

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}; \quad V_C = \frac{q}{C}.$$

Тогда уравнение цепи примет вид:

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \tag{59}$$

Для решения уравнения (59) составим характеристическое уравнение

$$m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0,$$

откуда

$$m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Для краткости введем обозначения:

$$\frac{1}{LC} = w_v^2, \quad \frac{R}{2L} = \alpha.$$

Тогда

$$m_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_v^2} = -\alpha \pm i\sqrt{w_v^2 - \alpha^2}.$$

Обозначая $\sqrt{w_v^2 - \alpha^2} = w_p$, получим

$$m_1 = -\alpha + w_p i,$$
$$m_2 = -\alpha - w_p i,$$

Заряд конденсатора выразится формулой:

$$q = e^{-\alpha t}(M\cos w_p t + N\sin w_p t). \tag{60}$$

Значения M и N находятся из начальных условий: при $t = 0$, $q = Q_{\max}$; при $t = 0$, $J = 0$, так как при $t = 0$ разряда конденсатора нет.

Таким образом, при $t = 0$ на конденсаторе максимальный заряд $q = Q_{\max}$, но по уравнению (60) при $t = 0$, $q = M$.

Следовательно,

$$q = e^{-\alpha t}(Q_{\max}\cos w_p t + N\sin w_p t), \tag{61}$$

$$J = -\frac{dq}{dt} = -e^{\alpha t}\left[(w_p N - \alpha Q_{\max})\cos w_p t - (w_p Q_{\max} + \alpha N)\sin w_p t\right]. \tag{62}$$

Из второго начального условия и уравнения (62) следует

$$N = Q_{\max}\frac{\alpha}{w_p}.$$

Подставляя значения N в уравнения (61), (62), получим:

$$q = Q_{\max}e^{-\alpha t}(\cos w_p t + \frac{\alpha}{w_p}\sin w_p t). \tag{63}$$

Уравнение (63) есть уравнение затухающих колебаний.

П р и м е р 11. **Модель "хищники и жертвы".**

Приведем пример модели, которая описывается системой дифференциальных уравнений.

При составлении уравнений, описывающих процесс биоценоза в животном мире, будем учитывать вполне реальные допущения:

- пища "жертвы" не ограничена средой обитания;
- "хищник" питается только "жертвой";
- прирост "жертв" пропорционален их численности;
- убыль "жертв" пропорциональна произведению числа "жертв" и "хищников";
- прирост "хищников" пропорционален произведению числа "хищников" и "жертв";
- убыль "хищников" пропорциональна произведению числа "хищников" и "жертв".

Модель такого биоценоза с учетом введенных допущений определяется следующей системой из двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_2 N_1 N_2, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 + \beta_1 N_1 N_2, \end{cases} \tag{64}$$

где — N_1 число особей "жертв"; N_2 — число особей "хищников"; α_1 — коэффициент естественного прироста "жертв"; α_2 — коэффициент естественной убыли "хищников"; β_1 — коэффициент уничтожения "хищниками" своих "жертв"; β_2 — коэффициент защиты "жертв" от "хищников".

Приведем уравнения (64) к нормированному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = Bx(1-y), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = y(x-1), \end{cases} \tag{65}$$

где $x = N_1\beta_1/\alpha_2$ — относительное число "жертв"; $y = N_2\beta_2/\alpha_1$ — относительное число "хищников"; $\tau = t\alpha_2$ — нормированное время; $B = \alpha_1/\alpha_2$ — коэффициент.

Контрольное задание 11

В каждом варианте составить дифференциальное уравнение и решить задачу:

1. Цепь с сопротивлением R и индуктивностью L внезапно замыкается накоротко. Найти закон изменения тока $J(t)$ в катушке, если до замыкания по цепи протекал постоянный ток J_0.

2. Население Ростова-на-Дону на 1 января 1995 г. составило 1 млн 23 тыс. человек. Какую численность города можно ожидать в 2000 г., если годовой прирост за 1994 год составил 0,22%? (Составить дифференциальное уравнение.)

3. Найти закон установления тока в цепи с сопротивлением R, индуктивностью L, включенной к источнику синусоидального напряжения $V = V_0 \sin(wt + \varphi)$.

4. Разность потенциалов на зажимах катушки равномерно падает от $V_0 = 2$ В до $V_1 = 1$ В в течение 10 с. Каков будет ток в конце десятой секунды, если в начале опыта он был $16\frac{2}{3}A$? Сопротивление катушки 0.12 Ом, коэффициент индуктивности 0.1 Гн.

5. В электрическую цепь с сопротивлением $R = 1.5$ Ом в течение 2 мин равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число генри в цепи равно числу, выражающему ток в амперах. Найти зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

6. Сила тока J в цепи с сопротивлением R, индуктивностью L и напряжением V удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = kt,$$
где k, L и R — постоянные. Найти J при начальных условиях $J|_{t=0} = J_0$.

7. Изолированному проводнику сообщен заряд $q_0 = 1000$ CGSE единиц. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t = 10$ мин, если за первую минуту потеряно 100 CGSE единиц?

8. Рост, выживание и деление клеток определяются потоком питательных веществ через оболочку клетки. Это означает, что на ранних стадиях клеточного роста увеличение массы клетки в момент времени t пропорционально квадрату радиуса клетки, а масса клетки пропорциональна его кубу. Вывести дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы клетки в зависимости от времени t, если начальная масса клетки равна a.

9. В цепи поддерживается напряжение $V = 300$ В. Сопротивление цепи $R = 150$ Ом. Коэффициент самоиндукции $L = 30$ Гн. За какое время с момента замыкания цепи возникающий в ней ток J достигнет 99% своей предельной величины?

10. Конденсатор емкостью C включается в цепь с напряжением V и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

11. Электрическая цепь состоит из последовательно включенного источника тока, дающего напряжение V, сопротивления R, конденсатора емкости C и выключателя, который включается при $t = 0$. Конденсатор до замыкания цепи не заряжен. Найти зависимость силы тока от времени (при $t > 0$).

12. Последовательно включены сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи при $t > 0$.

13. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $V(t) = V_0 \sin wt$, сопротивление R и самоиндукция L. Найти силу тока в цепи (установившийся режим).

14. Колебательный контур, представляющий собой замкнутую электрическую цепь, обладает емкостью C, индуктивностью L, активным сопротивлением R и источником самоиндукции $E = E(t)$. Найти дифференциальные уравнения, описывающие законы изменения силы тока и напряжения в цепи.

15. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источников тока с э.д.с. $E(t) = E_0 \sin wt$, индуктивности L, сопротивления R и емкости C, причем $R^2C - 4L < 0$, $w \neq \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Найти ток J в цепи как функцию t, если $J|_{t=0} = \frac{dJ}{dt}|_{t=0} = 0$.

16. Дрожжи в растворе сахара растут таким образом, что их масса увеличивается со скоростью $1,03^t \ln 1,03$, где t — время в часах. Пусть начальная масса дрожжей равна 1 г. Составить математическую модель процесса и найти массу дрожжей по истечении времени $t = 0,1$ ч.

17. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э.д.с. $E(t) = E_0 \sin(wt + \varphi)$, индуктивности L и емкости C, причем $w = 1/\sqrt{LC}$ (случай резонанса). Найти ток J в цепи как функцию времени t, если $J|_{t=0} = \frac{dJ}{dt}|_{t=0} = 0$.

18. Колебательный контур, представляющий собой замкнутую электрическую цепь, обладает емкостью C, индуктивностью L и активным сопротивлением R. При переходе энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки (и обратно) часть энергии контура затрачивается на активном сопротивлении, в результате чего величина напряжения на конденсаторе постепенно уменьшается. Найти закон изменения тока в контуре J.

19. Последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи и частоту колебаний в том случае, когда разряд носит колебательный характер.

20. Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = E_0 \sin wt$, сопротивление R, самоиндукция L и емкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим). При какой частоте w сила тока наибольшая.

21. Скорость роста популяции насекомых в момент времени t (время выражено в днях) задается величиной $9000/(1 + t)^2$. Составить математическую модель процесса. Найти численность популяции насекомых в момент $t = 3$, если начальная популяция состояла из 1000 насекомых.

22. Стальная шаровая оболочка с внутренним радиусом 6 см и внешим 10 см находится в стационарном тепловом состоянии. Температура на внутренней ее поверхности равна 200^0 С, а на внешней 20^0 С. Найти температуру на расстоянии r от центра и количество теплоты, которое в 1 с шар отдает наружу (теплопроводность стали $k = 0,14$).

23. Скорость распада радия в каждый момент времени прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы m_0 радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия равен 1590 лет.

24. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

25. Судно водоизмещением 12000 тонн движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 36 тоннам при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет судно после остановки двигателя, прежде чем скорость станет равной 5 м/с? В какое время судно пройдет это расстояние?

26. Ракета выстрелена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 100$ м/с. Сопротивление воздуха замедляет ее движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, равное $-kv^2$ (где v — мгновенная скорость ракеты, а k — аэродинамический коэффициент). Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

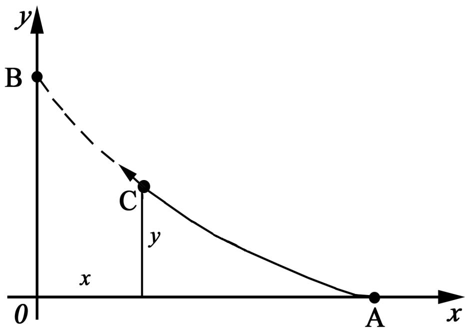


Рис. 2: к задаче 27

27. Судно выходит из точки O и с постоянной скоростью плывет по направлению оси OY (рис.2). В тот же момент времени (t=0) из точки A, расположенной на расстоянии $OA = a$ от судна, выходит вдогонку на пересечение катер, плывущий со скоростью, дважды превышающей скорость судна. Найти уравнение описанной катером кривой погони и минимальное время, необходимое ему для достижения судна.

28. Цепь длиной $l = 4$ м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент движения со стола свисал конец цепи длиной $a = 0.5$ м. Пренебрегая трением, найти время соскальзывания всей цепи со стола.

29. Пуля входит в брус толщиной 12 см со скоростью 200 м/с, а вылетает из него, пробив его, со скоростью 60 м/с. Брус задерживает движение пули, сила сопротивления которого пропорциональна квадрату скорости движения. Найти время движения пули через брус.

30. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

6. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Решение систем линейных дифференциальных уравнений

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{66}$$

называется *системой в нормальной форме* или системой, разрешенной относительно производных от неизвестных функций $x_i = x_i(t)$.

Решением системы уравнений (66) *на интервале* I называется совокупность дифференцируемых на I функций $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, таких что все уравнения системы (66) обращаются в тождества при любом значении t.

Система

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad \text{где} \quad \dot{X}(t) = \frac{dX}{dt} \tag{67}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор, A — постоянная квадратная матрица размера $n \times n$, называется *линейной однородной системой дифференциальных уравнений.*

Система

$$\dot{X}(t) = AX(t) + f(t), \tag{68}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор, A — постоянная квадратная матрица размера $n \times n$, $f(t)$ — вектор-функция с компонентами $f_i(t)$, называется *линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений.*

6.1.1. Решение систем линейных дифференциальных уравнений методом исключения

Самым простым методом интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений является метод сведения системы к одному уравнению. Этот метод называется *методом исключения.*

П р и м е р. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z, \\ y' = \frac{dy}{dt} = 6x - y - 6z, \\ z' = \frac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z. \end{cases} \tag{69}$$

Р е ш е н и е. Выражая z из первого уравнения

$$z = \frac{1}{5}(x' + 4x - 2y) \tag{70}$$

и дифференцируя его

$$z' = \frac{1}{5}(x'' + 4x' - 2y'),$$

подставляем эти выражения во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{5}(-6x' + 6x + 7y), \\ x'' = 5x' + 2y' - 4x - 3y. \end{cases} \tag{71}$$

Исключим отсюда y' и выразим y:

$$x'' = 5x' + \frac{2}{5}(-6x' + 6x + 7y) - 4x - 3y,$$

$$y = -5x'' + 13x' - 8x. \tag{72}$$

Дифференцируем (72):

$$y' = -5x''' + 13x'' - 8x', \tag{73}$$

и подставляем (72) и (73) в первое уравнение (71):

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0.$$

Это однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}.$$

Отсюда, учитывая уравнение (72), получаем

$$y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t}.$$

Наконец, подставляя выражения x и y в уравнение (70), находим

$$z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

О т в е т: Итак, общее решение системы (69)

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t}, \\ z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Контрольное задание 12

В каждом варианте решить систему дифференциальных уравнений методом исключения:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 7x - 8y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 13x - 3y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 7x - 9y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - 9y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = 2x + 5y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 13x - y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 5x + 9y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 3y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y, \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 4x - 9y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

6.1.2. Решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера

Однородная система уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{74}$$

или $\dot{X}(t) = AX(t)$ (матричная форма записи системы (74)). Здесь $\dot{x}$ означает $\dfrac{dx}{dt}$.

Эту систему можно решить *методом Эйлера*, т.е. сведя задачу к отысканию собственных чисел λ_j и собственных векторов ξ_j матрицы A. Общее решение $X(t)$ системы (74) есть сумма частных решений $X_j(t)$, соответствующих различным собственным числам λ_j.

1. *Собственное число λ_j является простым корнем характеристического уравнения матрицы A.* Тогда этому λ_j соответствует один линейно независимый собственный вектор ξ_j и частное решение будет иметь вид

$$X_j(t) = c_j\xi_j e^{\lambda_j t}, \tag{75}$$

где c_j — произвольная постоянная.

Если $\lambda_j = \alpha + \beta i$ — комплексное число, а все коэффициенты системы (74) вещественны, то $\overline{\lambda}_j = \alpha - \beta i$ также будет являться собственным числом и частное решение $X_j(t)$ можно выразить через вещественные функции:

$$X_j(t) = c_{j1}\,\mathrm{Re}\left(\xi_j e^{\lambda_j t}\right) + c_{j2}\,\mathrm{Im}\left(\xi_j e^{\lambda_j t}\right). \tag{76}$$

2. *Собственное число λ_j имеет кратность k.*

(a) Если собственному числу λ_j соответствует k линейно независимых собственных векторов $\xi_j^{(1)}, \ldots, \xi_j^{(k)}$, то соответствующее ему частное решение будет иметь вид:

$$X_j(t) = c_{j1}\xi_j^{(1)}e^{\lambda_j t} + \ldots + c_{jk}\xi_j^{(k)}e^{\lambda_j t}. \tag{77}$$

При этом комплексно-сопряженной паре собственных чисел кратности k соответствует частное решение

$$\begin{aligned} X_j(t) = c_{j1}\,\mathrm{Re}\left(\xi_j^{(1)}e^{\lambda_j t}\right) + \ldots + c_{jk}\,\mathrm{Re}\left(\xi_j^{(k)}e^{\lambda_j t}\right) + \\ + c_{j(k+1)}\,\mathrm{Im}\left(\xi_j^{(1)}e^{\lambda_j t}\right) + \ldots + c_{j2k}\,\mathrm{Im}\left(\xi_j^{(k)}e^{\lambda_j t}\right). \end{aligned} \tag{78}$$

(b) Если собственному числу λ_j соответствует $m < k$ линейно независимых собственных векторов, то соответствующее частное решение можно искать в виде

$$X_j(t) = \begin{pmatrix} c_{10} + c_{11}t + \ldots + c_{1,k-m}t^{k-m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n0} + c_{n1}t + \ldots + c_{n,k-m}t^{k-m} \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}, \tag{79}$$

где c_{ij} — некоторые постоянные, которые можно определить, подставив соотношение (79) в (74).

П р и м е р 1. Найти решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases} \tag{80}$$

Р е ш е н и е. Матрица A системы (80) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0.$$

Отсюда находим собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Все они являются вещественными и простыми, поэтому все частные решения будут иметь вид (75).

Для каждого λ_j найдем собственный вектор $\xi_j = \begin{pmatrix} \xi_{j1} \\ \xi_{j2} \\ \xi_{j3} \end{pmatrix}$, являющийся решением системы

$$(A-\lambda_j E)\xi_j = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} (1-\lambda_j)\xi_{j1} - \xi_{j2} + \xi_{j3} = 0, \\ \xi_{j1} + (1-\lambda_j)\xi_{j2} - \xi_{j3} = 0, \\ 2\xi_{j1} - \xi_{j2} - \lambda_j\xi_{j3} = 0. \end{cases}$$

Найдем вектор ξ_1, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -1$. Получим систему

$$\begin{cases} 2\xi_{11} - \xi_{12} + \xi_{13} = 0 \\ \xi_{11} + 2\xi_{12} - \xi_{13} = 0 \\ 2\xi_{11} - \xi_{12} + \xi_{13} = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Получили частное решение, соответствующее λ_1: $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}$. Аналогично находим

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Следовательно, общее решение системы (80) будет иметь вид

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + C_3X_3(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

О т в е т: Общее решение системы (80):

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t}, \\ y = -3C_1e^{-t} + C_2e^{t}, \\ z = -5C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{2t}. \end{cases}$$

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{откуда} \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Корни простые комплексные, поэтому решение, соответствующее λ_1 и $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ будет иметь вид (76). Найдем один собственный вектор для любого собственного числа, например, ξ_2 для $\lambda_2 = 2 - i$:

$$(A - \lambda_2 E)\xi_2 = 0, \qquad \begin{cases} (1+i)\xi_{21} + 2\xi_{22} = 0, \\ -\xi_{21} + (-1+i)\xi_{22} = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$. По формуле (76) находим частное решение для λ_2:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(2-i)t} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} (\cos t - i\sin t)e^{2t} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t + i(-\cos t - \sin t) \\ -\cos t + i\sin t \end{pmatrix} e^{2t}$$

Выделяем вещественную и мнимые части:

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^{2t} + i \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$X(t) = C_1 \operatorname{Re} X_2(t) + C_2 \operatorname{Im} X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

О т в е т: $\begin{cases} x = C_1(\cos t - \sin t)e^{2t} + C_2(\cos t + \sin t)e^{2t}, \\ y = -C_1 \cos t e^{2t} + C_2 \sin t e^{2t}. \end{cases}$

П р и м е р 3. Найти решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 5z - 3y + 3x. \end{cases} \qquad (81)$$

Р е ш е н и е. Матрица A системы (81) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

находим собственные числа матрицы A: $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 3$. Они являются вещественными и $\lambda = -1$ имеет кратность 2.

Найдем собственные векторы $\xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \end{pmatrix}$ для $\lambda_{1,2} = -1$. Получим систему

$$(A - \lambda_1 E)\xi_1 = 0, \qquad \begin{cases} -\xi_{11} + \xi_{12} - 2\xi_{13} = 0, \\ \xi_{11} - \xi_{12} + 2\xi_{13} = 0, \\ 3\xi_{11} - 3\xi_{12} + 6\xi_{13} = 0, \end{cases}$$

откуда получаем уравнение $\xi_{11} = \xi_{12} - 2\xi_{13}$.

1. При $\xi_{12} = 0$, $\xi_{13} = 1$ имеем $\xi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. При $\xi_{12} = 1$, $\xi_{13} = 0$ имеем $\xi_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\xi_1^{(1)}$ и $\xi_1^{(2)}$ линейно независимы, следовательно, частное решение для λ_{12} будет иметь вид (77):

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Собственный вектор ξ_3, соответствующий $\lambda_3 = 3$ получен так же, как и примере 1: $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

О т в е т: Общее решение системы (80):

$$\begin{cases} x = -2C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}, \\ y = C_2 e^{-t} - C_3 e^{3t}, \\ z = C_1 e^{-t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

П р и м е р 4. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y. \end{cases} \qquad (82)$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу коэффициентов правой части системы (82)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{Получим } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Таким образом, собственные числа вещественные кратные, кратности $k = 3$.

Будем искать собственные вектора $\xi^{(j)}$, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$.

$$(A - \lambda E)\xi^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \xi_2^{(j)} \\ \xi_3^{(j)} \end{pmatrix} = 0$$

Решая эту систему линейных уравнений получаем, что

$$\xi^{(j)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(j)} \\ \xi_2^{(j)} \\ \xi_3^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $m = 2$, где m — количество линейно независимых собственных векторов.

Решение системы (82) будем искать в виде произведения многочлена степени $k - m = 1$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \\ c_0 + c_1 t \end{pmatrix} e^t. \qquad (83)$$

Требуется найти коэффициенты $a_0, \ldots, c_1$. Для этого подставим решение (83) в систему (82):

$$\begin{cases} a_0 e^t + a_1 e^t + a_1 t e^t = 2(a_0 + a_1 t)e^t - (b_0 + b_1 t)e^t - (c_0 + c_1 t)e^t, \\ b_0 e^t + b_1 e^t + b_1 t e^t = 2(a_0 + a_1 t)e^t - (b_0 + b_1 t)e^t - 2(c_0 + c_1 t)e^t, \\ c_0 e^t + c_1 e^t + c_1 t e^t = -(a_0 + a_1 t)e^t + (b_0 + b_1 t)e^t + 2(c_0 + c_1 t)e^t. \end{cases} \qquad (84)$$

Перенесем правую часть системы (84) в левую и разделим обе части на e^t, таким образом получим систему

$$\begin{cases} -a_0 + a_1 + b_0 + c_0 + (-a_1 + b_1 + c_1)t = 0, \\ -2a_1 + b_1 + 2b_0 + 2c_0 + (-2a_1 + 2b_1 + 2c_1)t = 0, \\ a_0 - b_0 - c_0 + c_1 + (a_1 - b_1 - c_1)t = 0. \end{cases} \qquad (85)$$

Из системы (85) следует, что

$$\begin{cases} -a_0 + a_1 + b_0 + c_0 = 0, \\ -a_1 + b_1 + c_1 = 0, \\ -2a_0 + b_1 + 2b_0 + 2c_0 = 0, \\ -2a_1 + 2b_1 + 2c_1 = 0, \\ a_0 - b_0 - c_0 + c_1 = 0, \\ a_1 - b_1 - c_1 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы есть

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 \\ C_1 \\ C_3 \\ 2C_1 \\ C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix}, \text{ где } C_1,\ C_2,\ C_3 \text{ — произвольные постоянные.}$$

Подставив найденные значения $a_0, \ldots, c_1$ в решение (83), получим

О т в е т:

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 + C_3 + C_1 t)e^t, \\ y = (C_3 + 2C_1 t)e^t, \\ z = (C_2 - C_1 t)e^t. \end{cases}$$

Контрольное задание 13

В каждом варианте решить систему дифференциальных уравнений методом Эйлера:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 8y, \\ \dot{y} = -2z, \\ \dot{z} = 2x + 8y - 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = y - 2z - 3x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = -y - z, \\ \dot{z} = -z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 4y + z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = 4y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 5z, \\ \dot{y} = -2y + z, \\ \dot{z} = -3z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = z + x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = -x + z, \\ \dot{y} = -2y + z, \\ \dot{z} = y - 3z. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = x - 2y, \\ \dot{z} = x + 3y - z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + z, \\ \dot{y} = -2y - z, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = x - 2y + 2z. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y, \\ \dot{z} = x - y + z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - z, \\ \dot{y} = 2y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y - z, \\ \dot{y} = 4y - z, \\ \dot{z} = -y + 4z. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + 5y - z, \\ \dot{z} = x - 2y + 4z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - z, \\ \dot{y} = 2x + 2y - z, \\ \dot{z} = -2x + y + 4z. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -x + 2z. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y - z, \\ \dot{y} = 2x + 4y - z, \\ \dot{z} = -2x + y + 6z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 3y, \\ \dot{z} = 2y + z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + 5y - 2z, \\ \dot{z} = 3z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 6z, \\ \dot{y} = -2x + 5y - 2z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 13z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y - 4z, \\ \dot{y} = 3y, \\ \dot{z} = -2x + 2y + 7z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y - 2z, \\ \dot{y} = -2x + 5y - 2z, \\ \dot{z} = 9z. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 9x, \\ \dot{y} = 2x + 7y - 4z, \\ \dot{z} = 2x - 2y + 5z. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 13x + 2y - 2z, \\ \dot{y} = 6x + 9y - 6z, \\ \dot{z} = 2x - 2y + 5z. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = 2x - 2y + 3z. \end{cases}$

6.1.3. Решение линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Общее решение $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \qquad (86)$$

находится в виде суммы

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t), \qquad (87)$$

где $X_1(t)$ — общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (88)$$

а $X_2(t)$ — частное решение неоднородной системы (86).

Если функции $f_1(t), \dots, f_n(t)$ состоят из сумм и произведений многочленов $P_m(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$ и $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$, то частное решение $X_2(t)$ системы (86) можно искать методом неопределенных коэффициентов, подобно тому, как это делалось для линейного неоднородного дифференциального уравнения (см. 3.2).

Если $f_j(t) = P_{m_j}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_j}(t)$ — многочлен степени m_j, то частное решение $X_2(t)$ системы (86) ищется в виде

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} Q^1_{m+r}(t)e^{\gamma t} \\ \dots \\ Q^n_{m+r}(t)e^{\gamma t} \end{pmatrix}, \qquad (89)$$

где $Q^j_{m+r}(t)$ — многочлен степени $m+r$ с неопределенными коэффициентами, $m = \max\limits_j m_j$, $r = 0$, если γ не является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а если γ — корень, то r равно кратности этого корня.

Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки решения (89) в систему (86) и приравнивания коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_j(t)$ содержит произведение многочленов $P^j_{m_j}(t)$ и $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$.

П р и м е р 5. Решить линейную неоднородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решаем сначала однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Для корня $\lambda = 2i$ находим собственный вектор ξ:

$$\begin{pmatrix} 2 - 2i & -4 \\ 2 & -2 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\begin{cases} (2-2i)\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 - (2+2i)\xi_2 = 0, \end{cases}$$

что равносильно $(1-i)\xi_1 = 2\xi_2$, или $\xi_2 = \dfrac{1-i}{2}\xi_1$.

Положив $\xi_1 = 2$, получим

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

Получим частное решение

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{2it}. \tag{90}$$

Так как коэффициенты системы вещественны, второе решение, соответствующее корню $\lambda = -2i$, можно не искать, оно будет комплексно сопряженным с первым.

Выделяя в (90) действительную и мнимую часть, получим два линейно независимых решения:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2i \sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t + i(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_1(t) = C_1 \operatorname{Re} X(t) + C_2 \operatorname{Im} X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Переходим к нахождению частного решения исходной системы. Имеем

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $\gamma = -2$; $P_{m_1}(t) = 4$ — многочлен нулевой степени, откуда $m_1 = 0$, $P_{m_2}(t) = 0$ — также многочлен нулевой степени, откуда $m_2 = 0$.

Тогда $m = 0$, и частное решение $X_2(t)$ системы ищем в виде

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} Ae^{-2t} \\ Be^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\dot{X}_2(t) = \begin{pmatrix} -2Ae^{-2t} \\ -2Be^{-2t} \end{pmatrix}$, и, подставляя в исходную систему найденное решение, получаем:

$$\begin{cases} -2Ae^{-2t} = 2Ae^{-2t} - 4Be^{-2t} + 4e^{-2t}, \\ -2Be^{-2t} = 2Ae^{-2t} - 2Be^{-2t}. \end{cases}$$

$4B - 4A = 4$, $A = 0$, $B = 1$. Тогда

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

и из формулы (88) получим

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

О т в е т: $\begin{cases} x = 2C_1 \cos 2t + 2C_2 \sin 2t, \\ y = C_1(\cos 2t + \sin 2t) + C_2(\sin 2t - \cos 2t) + e^{-2t}. \end{cases}$

Контрольное задание 14

В каждом варианте решить систему неоднородных дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y + e^{-t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y + e^{3t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}\cos t, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 2e^t\cos 3t, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + 3\sin 2t, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 3e^{3t}, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2e^t, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + te^{-t}, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y + 4e^{2t}, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + te^{-2t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y - 3e^{-2t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 3e^t, \\ \dot{y} = -4x + y - 4te^t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y + e^{2t}, \\ \dot{y} = x + y + te^{2t}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + y - 2\sin 2t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{5t}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 4e^{3t}, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y + e^{-3t}, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y - 3e^{2t}\sin t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y - e^t\sin 3t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y - 5\cos 2t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y - e^{3t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y - 4e^t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y + 2te^{-t}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y - e^{2t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{-3t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y - te^{-3t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + te^t, \\ \dot{y} = -4x + y - e^t. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \cos t, \\ \dot{y} = -2x + 3y + \sin t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}\cos t, \\ \dot{y} = -2x + 3y - 3e^{2t}\sin t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t, \\ \dot{y} = -x + 4y + \sin t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + \cos 2t, \\ \dot{y} = x + y + t\sin 2t. \end{cases}$

6.1.4. Решение линейных неоднородных систем методом вариации произвольных постоянных

Решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{91}$$

можно найти методом вариации произвольных постоянных.

Определим сначала общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n. \end{cases}$$

Затем, как и в случае одного линейного неоднородного уравнения (см. п. 3.3), записываем вместо постоянных $c_1, \ldots, c_n$ в формуле общего решения однородной системы функции $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ и для определения этих функций подставляем $X(t)$ в систему (91).

П р и м е р. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^{3t}/(e^{2t}+1). \end{cases} \tag{92}$$

Р е ш е н и е. Решаем однородную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + 4y. \end{cases} \tag{93}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$.

Найдем собственные векторы.

Для $\lambda_1 = 2$ имеем

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -3\xi_{11} + 2\xi_{12} = 0, \\ -3\xi_{11} + 2\xi_{12} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} -2\xi_{21} + 2\xi_{22} = 0, \\ -3\xi_{21} + 3\xi_{22} = 0, \end{cases}$$

тогда

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (93) будет иметь вид

$$X_1(t) = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Ищем общее решение системы (91) в виде

$$X(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Имеем
$$\begin{cases} x(t) = 2c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^t, \\ y(t) = 3c_1(t)e^{2t} + c_2(t)e^t. \end{cases} \tag{94}$$
Откуда получим
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2c_1'(t)e^{2t} + 4c_1(t)e^{2t} + c_2'(t)e^t + c_2(t)e^t, \\ \dot{y}(t) = 3c_1'(t)e^{2t} + 6c_1(t)e^{2t} + c_2'(t)e^t + c_2(t)e^t. \end{cases}$$
Подставим $x(t)$ и $y(t)$, определяемые формулами (94), в систему (91)
$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2c_1'(t)e^{2t} + 4c_1(t)e^{2t} + c_2'(t)e^t + c_2(t)e^t &=& 6c_1(t)e^{2t} + 2c_2(t)e^t - 2c_1(t)e^{2t} - c_2(t)e^t, \\ 3c_1'(t)e^{2t} + 6c_1(t)e^{2t} + c_2'(t)e^t + c_2(t)e^t &=& 12c_1(t)e^{2t} + 4c_2(t)e^t - 6c_1(t)e^{2t} - 3c_2(t)e^t + \\ && + e^{3t}/(e^{2t}+1), \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^t = 0, \\ 3c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)e^t = e^{3t}/(e^{2t}+1), \end{cases} \begin{cases} c_2'(t) = -2c_1'(t)e^t, \\ c_1'(t) = e^t/(e^{2t}+1), \end{cases} \begin{cases} c_1(t) = \operatorname{arctg} e^t + C_1, \\ c_2(t) = -\ln(e^{2t}+1) + C_2. \end{cases}$$
Тогда
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\operatorname{arctg} e^t + C_1)e^{2t} + (-\ln(e^{2t}+1) + C_2)e^t \\ 3(\operatorname{arctg} e^t + C_1)e^{2t} + (-\ln(e^{2t}+1) + C_2)e^t \end{pmatrix}.$$

О т в е т: общее решение системы (91) есть
$$\begin{cases} x = 2(\operatorname{arctg} e^t + C_1)e^{2t} + (-\ln(e^{2t}+1) + C_2)e^t, \\ y = 3(\operatorname{arctg} e^t + C_1)e^{2t} + (-\ln(e^{2t}+1) + C_2)e^t. \end{cases}$$

Контрольное задание 15

В каждом варианте найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dot{y} = -x + y + 3t^2/2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + 1/\cos t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \cos t + \sin t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 2/(e^t - 1), \\ \dot{y} = 6x + 3y - 3/(e^t - 1). \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -5x + 4y + e^{2t}/\cos t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + 1/t^2 + \ln t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 1/t - 4\ln t, \\ \dot{y} = -x + y + 1/t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1/\cos t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\pi^2 x + \pi^2/\cos \pi t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -8x + 6y + 4/(1 + e^{-2t}). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 8\operatorname{ctg}^2 t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -18x + 9y + 9e^{3t}/(1 + e^{-3t}). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x/\pi^2 + 1/(\pi^2 \cos(t/\pi)). \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -8x + 6y + 4/(2 + e^{-2t}). \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -16x + 16/\cos 4t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -9x + 9/\cos 3t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x/4 - 1/4\operatorname{ctg}(t/2). \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + 3y + 1/(2 + e^{-t}). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x - 3y + e^{-t}/(1 + e^t). \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + 3y + e^t/(1 + e^{-t}). \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + 1/\sin t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -8x - 6y + 4e^{-2t}/(2 + e^{2t}). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -1x + 2\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2y + 4e^{-2t}/(1 + e^{-2t}). \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 16x + 16/\sin 4t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y + e^{-t}/(2 + e^{-t}). \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y + e^t/(2 + e^t). \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4/\cos 2t. \end{cases}$

6.2. Исследование положения равновесия линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Положением равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

где функции P и Q непрерывные, называется такая точка (x, y), в которой $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$.

Для однородных систем с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + gy, \end{cases} \tag{95}$$

точка (0,0) всегда является положением равновесия (но могут быть и другие положения равновесия, см. [8]). Ниже в этом пункте рассматривается точка (0,0). Для исследования положения равновесия системы (95) следует найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & g - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{96}$$

В зависимости от значений корней уравнения (96), положение равновесия имеет разные типы (см. таблицу на стр. 58).

Чтобы построить траектории (фазовые кривые) $\{(x(t), y(t)),\ t \in I \subset \mathbb{R}\}$ системы (95) на плоскости XOY в случае седла, узла и вырожденного узла, нужно сначала найти те фазовые кривые, которые лежат на прямых, проходящих через начало координат. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы A системы. В случае узла остальные фазовые кривые касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине значению λ.

Для определения направления движения по траекториям в окрестности особых точек следует определить направление касательного вектора к траектории в некоторой точке, достаточно близкой к особой точке, подставив ее координаты в систему (95), и далее (по непрерывности) определить направление движения по другим траекториям. При этом движение по фазовым траекториям происходит в направлении к устойчивым положениям равновесия и от неустойчивых положений равновесия.

П р и м е р 6. Исследовать положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1.$$

Числа λ_1, λ_2 одинаковые и положительные, поэтому положение равновесия — неустойчивый вырожденный узел (см. таблицу на стр. 58, п. 7).

О т в е т: Положение равновесия (0,0) исходной системы — неустойчивый вырожденный узел.

П р и м е р 7. Исследовать положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Числа λ_1, λ_2 комплексно-сопряженные и их действительные части меньше нуля. Следовательно положение равновесия — устойчивый фокус (см. таблицу на стр. 58, п. 6).

О т в е т: Положение равновесия (0,0) исходной системы — устойчивый фокус.

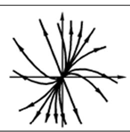
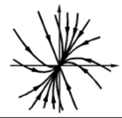
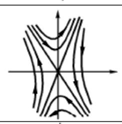
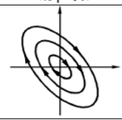
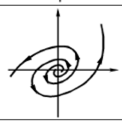
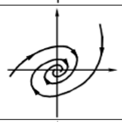
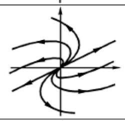
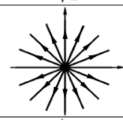
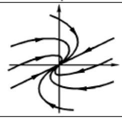
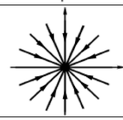
П р и м е р 8. Исследовать положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x, \\ \dot{y} = 5y. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Согласно п. 7а таблицы на стр. 58 положение равновесия — неустойчивый дикритический узел.

О т в е т: Положение равновесия (0,0) исходной системы — неустойчивый дикритический узел.

Таблица. Фазовые траектории положения равновесия линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

№	Корни характеристического уравнения	Точка покоя	Фазовый портрет	Устойчивость (неустойчивость) тривиального решения
1	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел		Неустойчиво
2	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел		Асимптотически устойчиво
3	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Седло		Неустойчиво
4	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Центр		Устойчиво по Ляпунову
5	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha > 0$	Неустойчивый фокус		Неустойчиво
6	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha < 0$	Устойчивый фокус		Асимптотически устойчиво
7	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$, искл. случай 7а	Неустойчивый вырожденный узел		Неустойчиво
7а	$\begin{cases} y' = ay \\ z' = az \end{cases}, \ a > 0$	Неустойчивый дикритический узел		Неустойчиво
8	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$, искл. случай 8а	Устойчивый вырожденный узел		Асимптотически устойчиво
8а	$\begin{cases} y' = ay \\ z' = az \end{cases}, \ a < 0$	Устойчивый дикритический узел		Асимптотически устойчиво

Контрольное задание 16

В каждом варианте исследовать положение равновесия данной системы дифференциальных уравнений и изобразить ее фазовые траектории на плоскости XOY

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 13x - 3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 7x - 9y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 9y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = 2x + 5y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 13x - y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 5x + 9y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 3y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 5y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y, \\ \dot{y} = 4x - 2y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 4x - 9y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 7x - 8y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

6.3. Построение фазового портрета динамической системы

Система
$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{97}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, называется динамической системой, а совокупность ее траекторий — фазовым портретом системы.

Траекториями системы (97) — фазовыми кривыми — могут являться точка (положение равновесия), замкнутая кривая (периодическое решение), незамкнутая кривая (непериодическое решение). Направление движения на фазовой кривой L — это направление движения точки $(x(t)$,$y(t))$ по L в сторону возрастания t.

Построить фазовый портрет системы — это значит выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на траектории, для чего надо найти особые точки (положения равновесия), предельные циклы (если они имеются) и изобразить траектории в окрестности этих точек, а затем "склеить" траектории по непрерывности.

Предельным циклом системы называется замкнутая фазовая кривая, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями, по которым точка неограниченно приближается к этой замкнутой кривой при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

При выяснении вопроса о существовании предельных циклов системы (97) можно воспользоваться, например, *принципом кольца*: если на фазовой плоскости можно указать такое кольцо $r^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$, что все решения системы (97), начинающиеся на границе кольца, входят внутрь кольца или все выходят из кольца, то внутри кольца имеется предельный цикл системы.

Координаты особых точек системы (97) находим из решения системы

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \tag{98}$$

Для исследования характера особых точек нелинейной системы (97) надо сделать замену переменных и перенести начало координат в рассматриваемую точку.

Таким образом, для особой точки $M_0(x_0, y_0)$ делаем замену

$$\begin{cases} x - x_0 = u, \\ y - y_0 = v, \end{cases} \tag{99}$$

откуда

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases}$$

и система (97) преобразуется в переменных u и v к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = P_1(u, v), \\ \dot{v} = Q_1(u, v). \end{cases} \tag{100}$$

Далее функции $P_1(u, v)$ и $Q_1(u, v)$ следует разложить в окрестности нуля по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка.

Тогда система (100) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv + \varphi(u, v), \\ \dot{v} = cu + dv + \psi(u, v). \end{cases} \tag{101}$$

Запишем линейную систему
$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv, \\ \dot{v} = cu + dv, \end{cases} \tag{102}$$

получаемую из системы (101) при $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = 0$.

Если вещественные части корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

отличны от нуля, то положение равновесия $x = x_0$, $y = y_0$ системы (97) имеет тот же тип, что и положение равновесия $u = 0$, $v = 0$ системы (102).

Если же для системы (102) особая точка $(0, 0)$ является центром, для системы (101) она может быть фокусом или центром. Для наличия центра достаточно, чтобы фазовые кривые имели ось симметрии, проходящую через исследуемое положение равновесия. Очевидно, ось симметрии существует, если уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

не меняется при замене x на $-x$ (или y на $-y$). Для наличия фокуса необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия было асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

Для определения направления движения по траекториям в окрестности особых точек следует определить направление касательного вектора к траектории в некоторой точке, достаточно близкой к особой точке, подставив ее координаты в формулу (97), и далее (по непрерывности) определить направление движения по другим траекториям. При этом движение по фазовым траекториям происходит в направлении к устойчивым положениям равновесия и от неустойчивых положений равновесия.

П р и м е р 9. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases} \tag{103}$$

Р е ш е н и е. Найдем особые точки системы:

$$\begin{cases} \ln(1 - y + y^2) = 0, \\ 3 - \sqrt{x^2 + 8y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - y + y^2 = 1, \\ 3 = \sqrt{x^2 + 8y}, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y = 0, \\ 9 = x^2 + 8y. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем 2 корня: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Подставим эти значения во второе уравнение и найдем соответствующие значения x:
а) при $y = 0 : x^2 = 9, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3;$
б) при $y = 1 : x^2 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$
Убедившись, что все корни удовлетворяют нашей системе, получили четыре особые точки:

$$A(3, 0),\ B(-3, 0),\ C(1, 1),\ D(-1, 1).$$

Исследуем особые точки на устойчивость и определим их тип.

1. Точка $A(3, 0)$.
Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} u = x - 3, \\ v = y, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = u + 3, \\ y = v. \end{cases}$$

Тогда система (103) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = \ln(1 - v + v^2), \\ \dot{v} = 3 - \sqrt{(u + 3)^2 + 8v}. \end{cases}$$

Разложим правые части уравнений полученной системы в ряд Тейлора [2].

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + v^2 + ..., \\ \dot{v} = -u - \frac{4}{3}v + 4\frac{uv}{9} + ... \end{cases}$$

Отбрасывая нелинейные слагаемые, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v, \\ \dot{v} = -u - \frac{4}{3}v. \end{cases}$$

[2]Разложение по формуле Тейлора функции $f(u, v)$ в окрестности точки (u_0, v_0) следует искать в виде $f(u, v) = f(u_0, v_0) + f'_u(u_0, v_0)(u - u_0) + f'_v(u_0, v_0)(v - v_0) + ...$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A системы (103):

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2+\frac{4}{3}\lambda-1=0, \quad 3\lambda^2+4\lambda-3=0,$$

$$\lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} < 0,$$

следовательно, точка $A(3,0)$ — седло.

Собственные векторы: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2-\sqrt{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2+\sqrt{13} \end{pmatrix}.$

2. Точка $B(-3,0)$.

Замена переменных

$$\begin{cases} u = x+3, \\ v = y, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = u-3, \\ y = v, \end{cases}$$

приводит систему (103) к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \ln(1-v+v^2), \\ \dot{v} = 3-\sqrt{(u-3)^2+8v}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = -v+v^2+..., \\ \dot{v} = -u-\frac{4}{3}v+4\frac{uv}{9}+... \end{cases}$$

И соответствующая линейная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = -v, \\ \dot{v} = u-\frac{4}{3}v. \end{cases}$$

Решая характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

находим корни

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}(2-\sqrt{5}i), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}(2+\sqrt{5}i).$$

Т.к. $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, точка $B(-3,0)$ — устойчивый фокус.

3. Точка $C(1,1)$.

Замена переменных

$$\begin{cases} u = x-1, \\ v = y-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = u+1, \\ y = v+1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u} = \ln(1-(v+1)+(v+1)^2), \\ \dot{v} = 3-\sqrt{(u+1)^2+8(v+1)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \ln(1+v+v^2), \\ \dot{v} = 3-\sqrt{(u+1)^2+8(v+1)} \end{cases}.$$

Разложим правые части уравнений системы в ряд Тейлора

$$\begin{cases} \dot{u} = v+v^2+..., \\ \dot{v} = -\frac{u}{3}-\frac{4}{3}v+\frac{4uv}{27}+..., \end{cases}$$

тогда соответствующая линейная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -\frac{u}{3}-\frac{4}{3}v. \end{cases}$$

Решая характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

находим корни

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = -1.$$

Т.к. $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, точка $C(1,1)$ — устойчивый узел.

Собственные векторы: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Точка $D(-1,1)$.

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases} u = x+1, \\ v = y-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = u-1, \\ y = v+1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u} = \ln(1+v+v^2), \\ \dot{v} = 3 - \sqrt{(u-1)^2 + 8(v+1)}, \end{cases}$$

при разложении правых частей уравнений системы в ряд Тейлора получим

$$\begin{cases} \dot{u} = v + v^2 + ..., \\ \dot{v} = \frac{u}{3} - \frac{4}{3}v + \frac{4vu}{27} + ... \end{cases}$$

Тогда соответствующая линейная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = \frac{u}{3} - \frac{4}{3}v, \end{cases} \qquad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} > 0, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} < 0,$$

следовательно, точка $D(-1,1)$ — седло.

Собственные векторы: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2+\sqrt{7} \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2-\sqrt{7} \end{pmatrix}$.

На рис. 3 показаны фазовые портреты в окрестностях особых точек исходной системы, общий фазовый портрет показан на рис. 4.

З а м е ч а н и е: Для построения фазового портрета системы (97) можно написать программу. Приведем ее алгоритм. Пусть требуется построить фазовый портрет системы (97) в области

$$\begin{aligned} x_{\min} < x < x_{\max}, \\ y_{\min} < y < y_{\max}. \end{aligned} \tag{104}$$

В каждой точке (x_0, y_0) плоскости вектор $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ определяет касательный вектор ξ к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Приложим начало вектора ξ к точке (x_0, y_0), а конец ξ обозначим через (x_1, y_1). Для точки (x_1, y_1) снова вычислим вектор $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ Q(x_1,y_1) \end{pmatrix}$ и приложим начало полученного вектора к точке (x_1, y_1). Продолжая этот процесс, мы получим, что либо построенная ломаная придет к устойчивой особой точке, либо выйдет из рассматриваемой области.

Чем меньше мы выберем длину касательного вектора, тем точнее построенная из касательных векторов ломаная будет приближать интегральную кривую.

Если внутри области все особые точки устойчивые или седла, то фазовый портрет системы можно построить, выбирая начальные точки (x_0, y_0), лежащими на границе области (см. рис. 5 слева).

Если же внутри области (104) есть неустойчивые точки, то внутри области следует рассмотреть произвольный прямоугольник и начальные точки выбирать на его границе. При построении фазового портрета в этом случае наряду с вектором ξ следует строить вектор $-\xi$ (см. рис. 5 справа). Программы построения фазового портрета можно найти на сайте:

http://portret.googlecode.com/files/Portret.rar

http://portret.googlecode.com/files/Portret_demo.rar

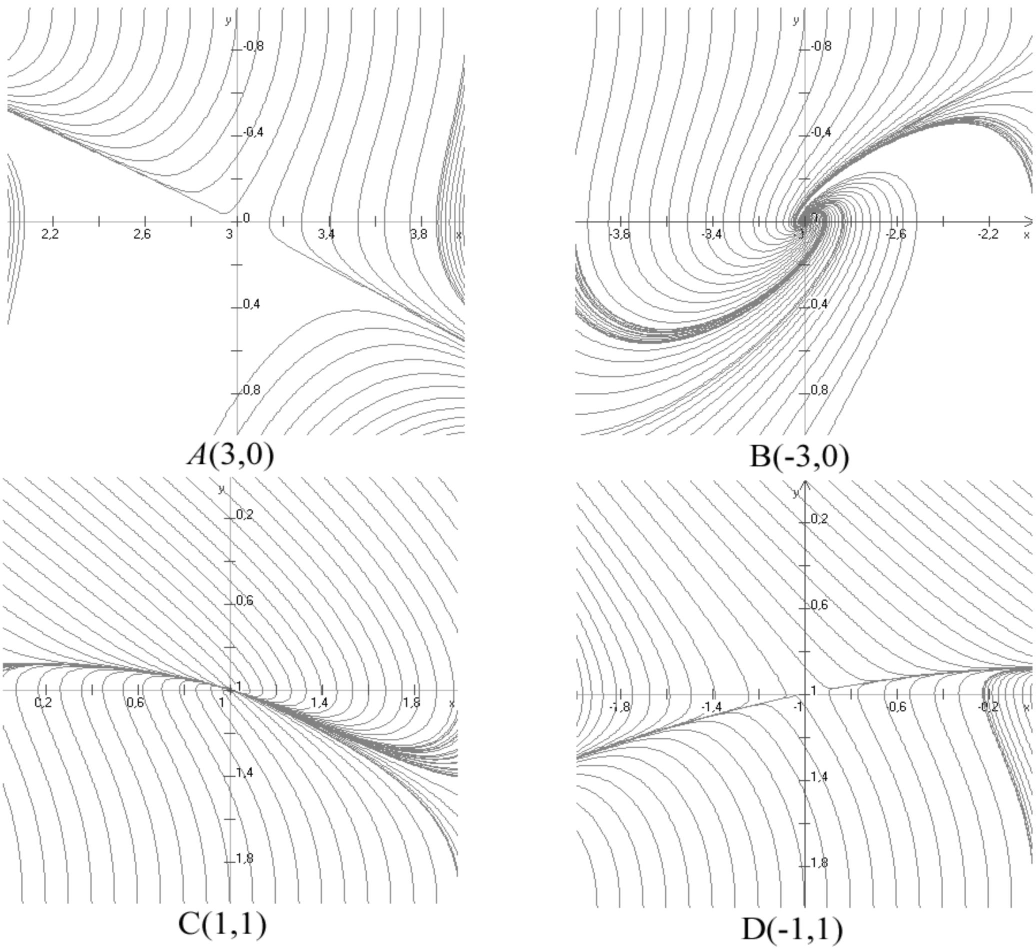


Рис. 3: к примеру 9. Фазовые портреты в окрестности особых точек системы (103)

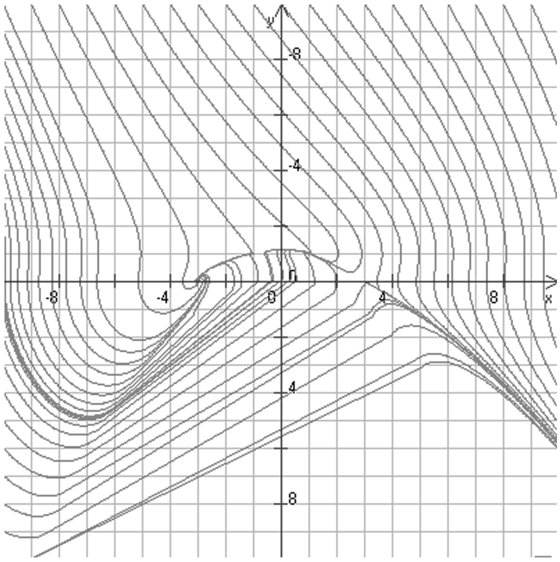


Рис. 4: к примеру 9. Общая картина фазового портрета системы (103)

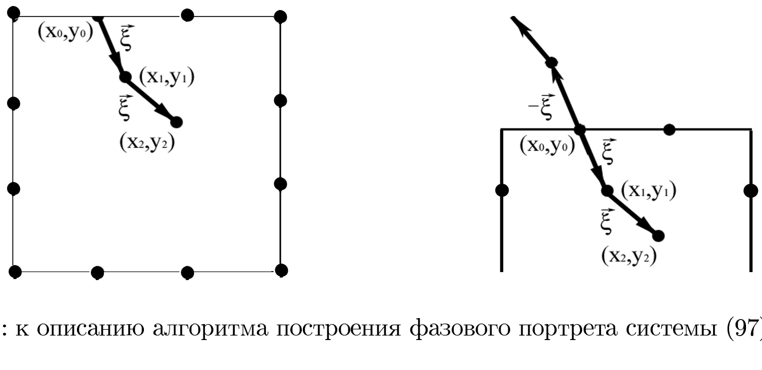


Рис. 5: к описанию алгоритма построения фазового портрета системы (97)

Контрольное задание 17

В каждом варианте построить фазовый портрет динамической системы:

1. $\begin{cases} \dot{x} = (x+y)^2 - 1, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2). \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 3), \\ \dot{y} = xy - 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 - x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y, \\ \dot{y} = x^2 - (y + 1)^2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x). \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln 1 - x + x^2 - \ln 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = (x - y)(x + 3), \\ \dot{y} = y - 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1, \\ \dot{y} = (x - 1)(x - 2y). \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = (y - 1)(y - x), \\ \dot{y} = x^2 + 3y + 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = xy - 4y - 3x^2 + 12x, \\ \dot{y} = x^2 - 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = xy - y - 2x^2 + 2x, \\ \dot{y} = (y - 1)(x + 3). \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = (x + y)(y - 2), \\ \dot{y} = x - 1. \end{cases}$

7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

7.1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

Линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu + f = 0, \tag{105}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f – заданные функции переменных x, y.

Функция $u(x, y)$, дважды дифференцируемая в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$, обращающая равенство (105) в тождество, называется *решением* уравнения (105) в области D.

Имеет место следующая классификация. Уравнение (105) имеет

1. *гиперболический* тип, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
2. *эллиптический* тип, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
3. *параболический* тип, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{106}$$

называется *уравнением характеристик* для уравнения (105), а кривые, определяемые общими интегралами $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ уравнения (106), называются *характеристиками* уравнения (105). В каждом из этих трех случаев уравнение (105) заменой независимых переменных можно привести к *каноническому виду*. Приведем замену переменных и канонический вид в каждом случае:

1. Для гиперболического типа замена $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ приводит уравнение (105) к каноническому виду
$$u_{\xi\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0.$$
2. Для эллиптического типа замена $\xi = \operatorname{Re}\varphi(x, y)$, $\eta = \operatorname{Im}\varphi(x, y)$ (т.к. общие интегралы уравнения (106) будут комплексно-сопряженными) приводит уравнение (105) к каноническому виду
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0.$$
3. Для параболического типа замена $\xi = \varphi(x, y)$, η – любая функция, для которой $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$, т.е. линейно независимая с функцией ξ (т. к. в данном случае имеется только один независимый общий интеграл $\varphi(x, y) = C$) приводит уравнение (105) к каноническому виду
$$u_{\eta\eta} + F(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0.$$

Данный метод называется *методом характеристик.*

П р и м е р 1. Определить тип уравнения

$$9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0 \tag{107}$$

и методом характеристик привести его к каноническому виду.

Р е ш е н и е. $a_{12} = 3$, $a_{11} = 9$, $a_{22} = 1$. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, следовательно, уравнение (107) имеет параболический тип. Уравнение характеристик

$$9dy^2 - 6dxdy + dx^2 = 0$$

приводится к виду $(3dy - dx)^2 = 0$ или $3dy = dx$. Общий интеграл этого уравнения будет $3y - x = C$. Возьмем $\xi = 3y - x$, а η может быть любой функцией, удовлетворяющей условию $3\eta_y + \eta_x \neq 0$. Принимая $\eta = x$, находим

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = -u_\xi + u_\eta, \qquad u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = 3u_\xi,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = -3u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}, \qquad u_{yy} = 9u_{\xi\xi}.$$

Подставляя в (107), получаем канонический вид:

$$u_{\eta\eta} - u_\eta = 0.$$

О т в е т: Параболический тип, $u_{\eta\eta} - u_\eta = 0$.

П р и м е р 2. Определить тип уравнения и методом характеристик привести его к каноническому виду.

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0. \tag{108}$$

Р е ш е н и е. $a_{12} = 2$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$, следовательно, уравнение (108) принадлежит к эллиптическому типу. Разделим уравнение характеристик $dy^2 - 4dxdy + 5dx^2 = 0$ на dx^2 и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\frac{dy}{dx} + 5 = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = 2 \pm i.$$

Отсюда общие интегралы уравнения характеристик будут иметь вид $y - 2x \pm ix = C$. Выбираем за новые координаты $\xi = \mathrm{Re}\,(y - 2x + ix) = y - 2x$, $\eta = \mathrm{Im}\,(y - 2x + ix) = x$, тогда

$$u_x = -2u_\xi + u_\eta, \qquad u_y = u_\xi,$$

$$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = -2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \qquad u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

Подставляя в (108), получаем канонический вид:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

О т в е т: Эллиптический тип, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$.

П р и м е р 3. Определить тип уравнения и методом характеристик привести его к каноническому виду.

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0. \tag{109}$$

Р е ш е н и е. $a_{12} = -1$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = -3$. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0$, следовательно, уравнение (109) принадлежит к гиперболическому типу. Разделим уравнение характеристик $dy^2 + 2dxdy - 3dx^2 = 0$ на dx^2 и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0, \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} dy/dx & = & -3, \\ dy/dx & = & 1. \end{array} \right.$$

В качестве новых переменных ξ и η возьмем общие интегралы уравнения характеристик:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & y + 3x, \\ \eta & = & y - x. \end{array} \right.$$

Отсюда

$$u_x = 3u_\xi - u_\eta, \qquad u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставляя в (109), получаем канонический вид:

$$u_{\xi\eta} - \frac{3}{4}u_\xi - \frac{1}{4}u_\eta = 0.$$

О т в е т: Гиперболический тип, $u_{\xi\eta} - \frac{3}{4}u_\xi - \frac{1}{4}u_\eta = 0$.

Контрольное задание 18

Во всех вариантах определить тип данного уравнения и методом характеристик привести его к каноническому виду:

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 5u_y + u = 0.$
2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 3u_x + 4u_y - u = 0.$
3. $2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + 4u_y + 2u = 0.$
4. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + u_y + u = 0.$
5. $2u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - 2u_y - 2u = 0.$
6. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - 8u_x + 2u_y - 3u = 0.$
7. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y - 3u = 0.$
8. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - u_x - u_y - u = 0.$
9. $16u_{xx} - 8u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + 7u_y + u = 0.$
10. $u_{xx} - u_{xy} - 6u_{yy} + 2u_x + 5u_y + u = 0.$
11. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 5u_x + 3u_y + 3u = 0.$
12. $u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} - u_x + 3u_y - 9u = 0.$
13. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + 13u_y + 7u = 0.$
14. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 20u_x - 11u_y + u = 0.$
15. $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} + 13u_x + u_y + 6u = 0.$
16. $8u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} + 10u_x + 17u_y - 2u = 0.$
17. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 8u_x - 11u_y + 9u = 0.$
18. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 17u_x + 4u_y - 19u = 0.$
19. $5u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} - 5u_x + 10u_y - 16u = 0.$
20. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 13u_x - 14u_y + 10u = 0.$
21. $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} + 8u_x - 9u_y + 3u = 0.$
22. $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - u_x + 3u_y + 2u = 0.$
23. $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} - 7u_x + 5u_y + 6u = 0.$
24. $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_x + 5u_y - u = 0.$
25. $10u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 5u_x - u_y - 15u = 0.$
26. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 15u_x + u_y + 2u = 0.$
27. $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} - 4u_x - 9u_y - u = 0.$
28. $25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} - 12u_x + 3u_y + 16u = 0.$
29. $u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} + 3u_x + 33u_y - 5u = 0.$
30. $u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} - 9u_x + 10u_y + u = 0.$

7.2. Метод Даламбера

7.2.1. Задача Коши для бесконечной струны. Формула Даламбера

Задача Коши для бесконечной струны, не подвергающейся воздействию внешних сил, ставится следующим образом: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \tag{110}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x). \tag{111}$$

Решение этой задачи выражается формулой Даламбера

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds. \tag{112}$$

П р и м е р 4. Пусть $a = 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \in [0,\,1], \\ 1-x, & x \in [1,\,2], \\ 0, & x > 2, \end{cases}$ $\psi(x) = 0$. Изобразить профили струны при $t = 1/2$, $t = 1$, $t = 2$.

Р е ш е н и е. По формуле (112)

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-t) + \frac{1}{2}\varphi(x+t).$$

Это означает, что для того, чтобы изобразить профиль струны при $t = t_0$, график $\varphi(x)$ надо сначала сжать в 2 раза к оси Ox, затем сдвинуть вправо на t_0, влево на t_0 и результаты сдвигов сложить. Профиль струны при различных значениях t показан на рис. 6.

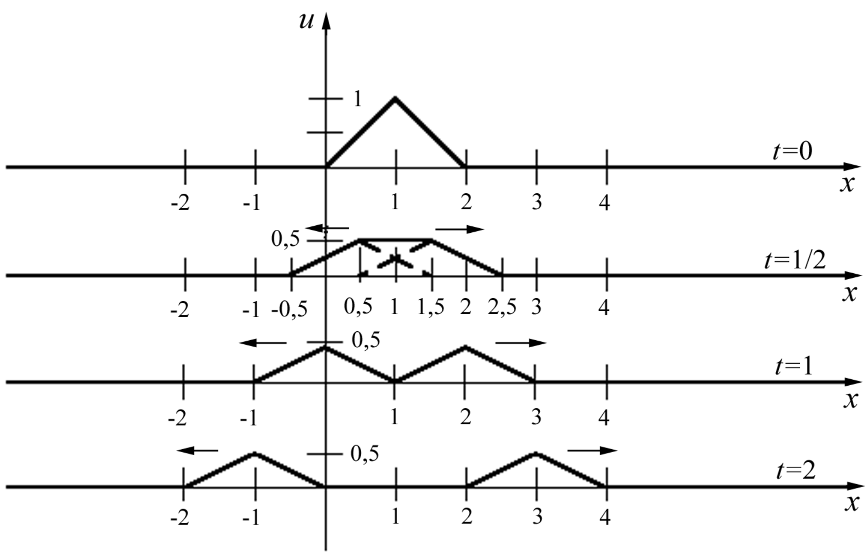


Рис. 6: к примеру 4

7.2.2. Смешанная задача для полуограниченной струны с однородными граничными условиями

Смешанная задача для полуограниченной струны с однородными граничными условиями ставится следующим образом: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{113}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x) \tag{114}$$

и граничному условию

$$u(0,\,t) = 0, \quad \text{(т.е. конец струны закреплен)} \tag{115}$$

или

$$u_x(0,\,t) = 0 \quad \text{(т.е. струна со свободным концом).} \tag{116}$$

Эта задача решается методом *четного (нечетного) продолжения* (см. примеры 5, 6).

П р и м е р 5. Для уравнения (113) при $a = 1$ с начальными условиями (114) при

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ x-1 & \text{при} \quad 1 \le x < 2, \\ 3-x & \text{при} \quad 2 \le x < 3, \\ 0 & \text{при} \quad 3 \le x, \end{cases} \qquad \psi(x) \equiv 0, \tag{117}$$

и граничным условием (115) начертить профиль полуограниченной струны ($x \ge 0$) для отрезка времени $[0;\,2,5]$ с шагом $\Delta t = \dfrac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Будем решать данную задачу методом *нечетного продолжения.* Рассмотрим решение $u_1(x,t)$ задачи Коши (110)-(111), (117) на всей оси с нечетно продолженной функцией $\varphi(x)$:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

и пусть $u_{1t}(x,\,0) = \psi_1(x) \equiv 0$, $-\infty < x < +\infty$.

Положим

$$u(x,t) \equiv u_1(x,t) \quad \text{при } x \ge 0.$$

Очевидно, u удовлетворяет уравнению (113) и начальным условиям (114), (117). Функция $u(x,t)$ является нечетной функцией x: $u(-x,t) = -u(x,t)$ при $t \ge 0$, следовательно, удовлетворяет граничному условию. Область $x < 0$ будем называть фиктивной или нефизической. Форма струны при $t = 0$ показана на рис. (7).

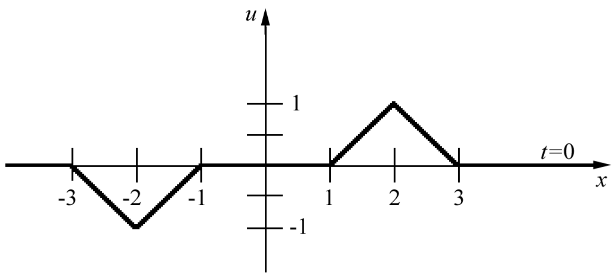


Рис. 7: к примеру 5

Построим $u_1(x,t)$ в остальные моменты времени. По формуле Даламбера

$$u_1(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x-t)}{2} + \frac{\varphi_1(x+t)}{2}, \tag{118}$$

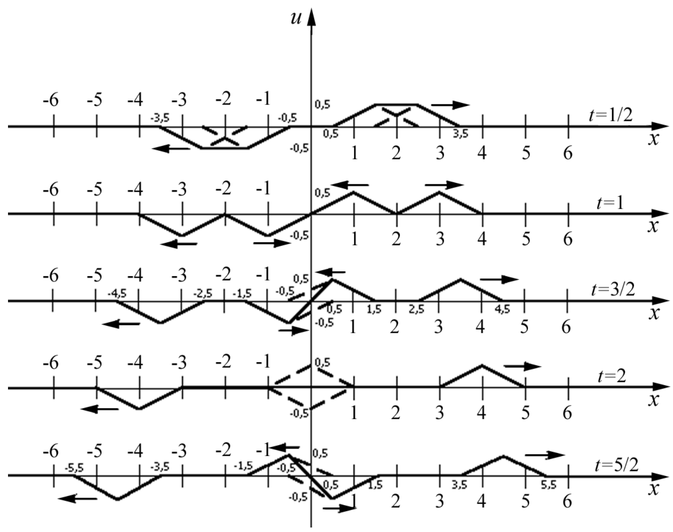


Рис. 8: к примеру 5

т.е. нужно $\varphi_1(x)$ разделить пополам, сдвинуть на t вправо, на t влево и результаты сложить. Полученную картину см. на рис. 8.

П р и м е р 6. Для уравнения (113) при $a = 2$ с начальными условиями (114) при

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad 3 < x, \end{cases} \tag{119}$$

и граничным условием (115) начертить профиль полуограниченной струны ($x \ge 0$) при $t = 1,\, 2$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим решение $u_1(x,t)$ задачи Коши (110)-(111), (119) на всей оси с нечетно продолженной функцией $\psi(x)$:

$$u_{1t}(x,0) = \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \ge 0, \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

и пусть $u_1(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv 0$, $-\infty < x < +\infty$. Положим

$$u(x,t) \equiv u_1(x,t) \quad \text{при } x \ge 0.$$

Очевидно, u удовлетворяет уравнению (113) и начальным условиям (114), (119). График функции $\psi_1(x)$ показан на рис. 9.

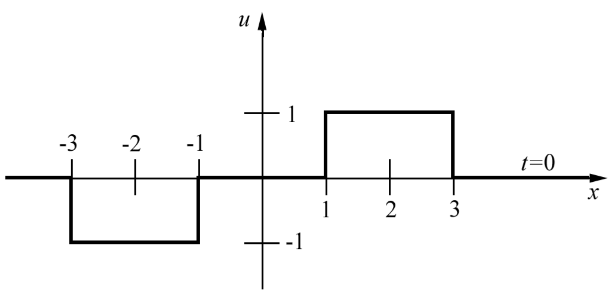


Рис. 9: к примеру 6

Построим $u_1(x,t)$ в остальные моменты времени. По формуле Даламбера

$$u_1(x,\, t) = \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} \psi_1(s)ds = \phi_1(x+2t) - \phi_1(x-2t), \quad \text{где} \quad \phi_1 \equiv \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{x} \psi_1(s)ds.$$

Построим функцию $\phi_1(x)$ (см. рис. 10).

$$x \in (-\infty,\, -3]: \quad \phi_1(x) = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{x} 0ds = 0;$$
$$x \in (-3,\, -1]: \quad \phi_1(x) = \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-\infty}^{-3} 0ds + \int\limits_{-3}^{x} (-1)ds\right) = -\frac{x}{4} - \frac{3}{4};$$
$$x \in (-1,\, 1]: \quad \phi_1(x) = \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-\infty}^{-3} 0ds + \int\limits_{-3}^{-1} (-1)ds + \int\limits_{-1}^{x} 0ds\right) = -\frac{1}{2};$$
$$x \in (1,\, 3]: \quad \phi_1(x) = \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-\infty}^{-3} 0ds + \int\limits_{-3}^{-1} (-1)ds + \int\limits_{-1}^{1} 0ds + \int\limits_{1}^{x} 1ds\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{4};$$
$$x \in (3,\, +\infty): \quad \phi_1(x) = \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-\infty}^{-3} 0ds + \int\limits_{-3}^{-1} (-1)ds + \int\limits_{-1}^{1} 0ds + \int\limits_{1}^{3} 1ds + \int\limits_{3}^{x} 0ds\right) = -2 + 2 = 0.$$

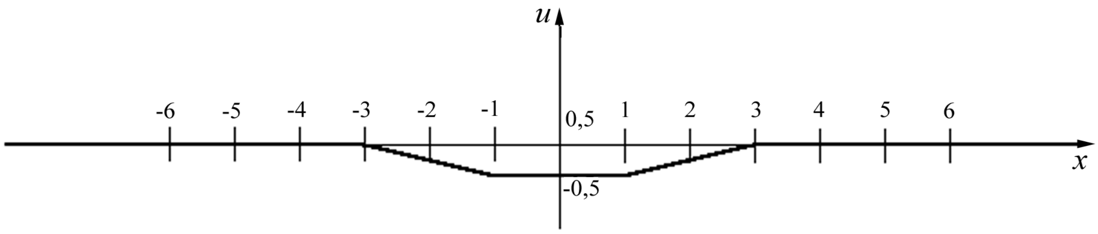


Рис. 10: к примеру 6. График функции $\phi_1(x)$

Для получения $u_1(x,\, t)$ график $\phi_1(x)$ нужно сдвигать влево на $2t$, график $-\phi_1(x)$ вправо на $2t$ и результаты складывать (рис. 11).

П р и м е ч а н и е 1: При граничном условии (116) задача решается аналогично методом *четного продолжения*. В нем рассматривается решение $u_1(x,t)$ задачи Коши (110)-(111) на всей оси с четно продолженными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad u_{1t}(x,0) = \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

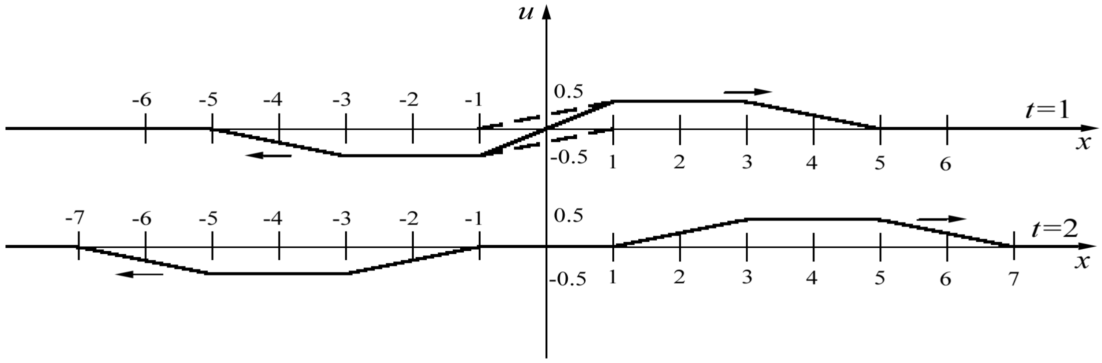


Рис. 11: к примеру 6. График функции $u_1(x,t)$

7.2.3. Смешанная задача для ограниченной струны с однородными граничными условиями

При решении смешанной задачи для ограниченной струны с однородными граничными условиями применяются методы нечетного и четного продолжения относительно концов отрезка в зависимости от типа граничного условия.

Для граничных условий
$$\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0 \end{cases}$$
применяется метод нечетного продолжения относительно левого и правого концов отрезка.

Для граничных условий
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0, \\ u(l,t)=0 \end{cases}$$
применяется метод четного продолжения относительно левого и нечетного продолжения относительно правого концов отрезка.

Для граничных условий
$$\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u_x(l,t)=0 \end{cases}$$
применяется метод нечетного продолжения относительно левого и четного продолжения относительно правого концов отрезка.

Для граничных условий
$$\begin{cases} u_x(0,t)=0, \\ u_x(l,t)=0 \end{cases}$$
применяется метод четного продолжения относительно левого и правого концов отрезка.

Контрольное задание 19

Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le c, \\ (2/c)x - 2 & \text{при} \quad c < x \le 3c/2, \\ -(2/c)x + 4 & \text{при} \quad 3c/2 < x \le 2c, \\ 0 & \text{при} \quad 2c < x, \end{cases} \quad , \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x < c, \\ 1 & \text{при} \quad c \le x \le 2c, \\ 0 & \text{при} \quad 2c < x, \end{cases} \tag{120}$$

Для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ начертить профиль полуограниченной струны ($0 \le x < \infty$) для отрезка времени $\left[0;\, \dfrac{c}{a}\right]$ с шагом $\Delta t = \dfrac{c}{8a}$ в следующих случаях:

1. $a = 1, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
2. $a = 1, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
3. $a = 1, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
4. $a = 1, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
5. $a = 4, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
6. $a = 4, \quad c = 2, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
7. $a = 4, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
8. $a = 4, \quad c = 2, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
9. $a = 2, \quad c = 3, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
10. $a = 2, \quad c = 3, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
11. $a = 2, \quad c = 3, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
12. $a = 2, \quad c = 3, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
13. $a = 3, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
14. $a = 3, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
15. $a = 3, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
16. $a = 3, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
17. $a = 1, \quad c = 4, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
18. $a = 1, \quad c = 4, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
19. $a = 1, \quad c = 4, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
20. $a = 1, \quad c = 4, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
21. $a = 2, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
22. $a = 2, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
23. $a = 2, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
24. $a = 2, \quad c = 4, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
25. $a = 1, \quad c = 3, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
26. $a = 1, \quad c = 3, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
27. $a = 1, \quad c = 3, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
28. $a = 1, \quad c = 3, \quad u_x(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
29. $a = 3, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = 0.$
30. $a = 3, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = 0, \quad u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$

Контрольное задание 20

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются уравнениями (120). Для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ начертить профиль ограниченной струны ($0 \le x \ge l$) для отрезка времени $\left[0;\, \dfrac{4l}{a}\right]$ с шагом $\Delta t = \dfrac{l}{2a}$ в следующих случаях:

1. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
2. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
3. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
4. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
5. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
6. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
7. $a = 1, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
8. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
9. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
10. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
11. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
12. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
13. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
14. $a = 2, \quad l = 6, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \psi(x).$
15. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
16. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
17. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
18. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
19. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
20. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
21. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 1, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
22. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
23. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
24. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
25. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x).$
26. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
27. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
28. $a = 1, \quad l = 8, \quad c = 2, \quad u_x(0,\, t) = u(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \psi(x).$
29. $a = 1, \quad l = 10, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u(l,\, t) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$
30. $a = 1, \quad l = 10, \quad c = 1, \quad u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = u(x,\, 0) = 0, \quad u(x,\, 0) = \varphi(x).$

7.3. Метод Фурье

7.3.1. Решение смешанной задачи для волнового уравнения

Рассмотрим задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{121}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{122}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \tag{123}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \tag{124}$$

$$u(l,t) = \nu(t). \tag{125}$$

Решим ее методом Фурье, предварительно сведя к задаче с однородными граничными условиями.

Введем вспомогательную функцию

$$w(x,t) = \mu(t) + (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l}. \tag{126}$$

Тогда

$$\begin{array}{l} w(0,t) = \mu(t) \\ w(l,t) = \nu(t). \end{array} \tag{127}$$

Решение задачи (121)-(125) ищем в виде суммы двух функций:

$$u = v + w,$$

где w определяется формулой (126) и удовлетворяет условиям (127), а v — новая неизвестная функция.

Получим для нее уравнение, граничные и начальные условия, подставляя u в (121)–(125). Имеем

$$u_{tt} = v_{tt} + w_{tt} = v_{tt} + \mu''(t) + (\nu''(t) - \mu''(t))\frac{x}{l},$$

$$u_{xx} = v_{xx} + w_{xx} = v_{xx},$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + g_1(x,t),$$

где

$$g_1(x,t) = g(x,t) - \left(\mu''(t) + (\nu''(t) - \mu''(t))\frac{x}{l}\right).$$

Начальные условия для v, как следует из условий (122), (123), (126), имеют вид

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \varphi(x) - \left(\mu(0) + (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l}\right) = \varphi_1(x),$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = \psi(x) - \left(\mu'(0) + (\nu'(0) - \mu'(0))\frac{x}{l}\right) = \psi_1(x).$$

Граничные условия для v, как следует из условий (124), (125), (126), имеют вид

$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = \mu(t) - \mu(t) = 0,$$

$$v(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = \nu(t) - \nu(t) = 0.$$

Таким образом для функции $v(x,t)$ имеем задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + g_1(x,t), \tag{128}$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x), \tag{129}$$

$$v_t(x,0) = \psi_1(x), \tag{130}$$

$$v(0,t) = 0, \tag{131}$$

$$v(l,t) = 0. \tag{132}$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$v = v^{(1)} + v^{(2)}, \quad \text{где}$$

$v^{(1)}$ — решение задачи

$$v_{tt}^{(1)} = a^2 v_{xx}^{(1)} + g_1(x,t), \tag{133}$$

$$v^{(1)}(x,0) = 0, \tag{134}$$

$$v_t^{(1)}(x,0) = 0, \tag{135}$$

$$v^{(1)}(0,t) = 0, \tag{136}$$

$$v^{(1)}(l,t) = 0, \tag{137}$$

т.е. удовлетворяет неоднородному уравнению с нулевыми начальными и граничными условиями, а $v^{(2)}$ — решение задачи

$$v_{tt}^{(2)} = a^2 v_{xx}^{(2)}, \tag{138}$$

$$v^{(2)}(x,0) = \varphi_1(x), \tag{139}$$

$$v_t^{(2)}(x,0) = \psi_1(x), \tag{140}$$

$$v^{(2)}(0,t) = 0, \tag{141}$$

$$v^{(2)}(l,t) = 0. \tag{142}$$

Решение задачи (138)–(142) ищем *методом Фурье*. Решение ищется в виде

$$v^{(2)}(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (138) и, разделяя переменные, получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от t, значит, не зависит от x, а правая зависит только от x, значит, не зависит от t, а так как они равны между собой, то обе они не зависят ни от x, ни от t, и можно записать

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \text{ где } \lambda \text{ – константа, не зависящая от } x \text{ и } t,$$

откуда для функции $X(x)$ с учетом условий (141)–(142) получаем задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим собственные значения $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, и собственные функции

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad A_n \text{ — некоторая постоянная.}$$

Для функции $T(t)$ получим уравнение

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0,$$

откуда

$$T(t) = T_n(t) = \widetilde{C}_n \sin\frac{\pi n a}{l}t + \widetilde{D}_n \cos\frac{\pi n a}{l}t,$$

где $\widetilde{C}_n$, $\widetilde{D}_n$ — некоторые постоянные.

Тогда $v_n^{(2)}(x,t) = T_n(t)X_n(x)$ и

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(C_n \sin\frac{\pi n a}{l}t + D_n \cos\frac{\pi n a}{l}t\Big) \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{143}$$

где $C_n = A_n\widetilde{C}_n$, $D_n = A_n\widetilde{D}_n$.

Для определения постоянных C_n, D_n используем условия (139)–(140):

$$v^{(2)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi_1(x),$$

$$v_t^{(2)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\pi n a}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} = \psi_1(x),$$

откуда D_n и $\frac{\pi n a}{l}C_n$ — коэффициенты Фурье разложения функций $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ по $\sin\frac{\pi n x}{l}$:

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \tag{144}$$

$$C_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi_1(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{145}$$

Таким образом решение $v^{(2)}$ задачи (138)–(142) находится по формуле (143) с константами D_n и C_n, вычисленными по формулам (144)–(145).

Для решения задачи (133)–(137) будем использовать метод неопределенных коэффициентов и искать решение в виде ряда

$$v^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{146}$$

Для определения функций $T_n(t)$ подставляем функцию $v^{(1)}(x,t)$ в уравнение (133). Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \Big(\frac{\pi n a}{l}\Big)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{\pi n x}{l} = g_1(x,t). \tag{147}$$

Разложим функцию $g_1(x,t)$ как функцию от x в ряд Фурье по синусам:

$$g_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \text{где} \tag{148}$$

$$\tilde{g}_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g_1(\xi,t)\sin\frac{\pi n \xi}{l}d\xi. \tag{149}$$

Приравнивая (147) и (148), получим для T_n дифференциальные уравнения:

$$T_n''(t) + (\pi n a/l)^2\, T_n(t) = \tilde{g}_n(t), \quad n = 1,2,3,\dots \tag{150}$$

Из условий (134)–(135) имеем начальные условия для $T_n(t)$:

$$T_n(0) = 0, \tag{151}$$

$$T_n'(0) = 0. \tag{152}$$

Решение уравнения (150) при начальных условиях (151)–(152) имеет вид:

$$T_n(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \tilde{g}_n(\tau)\sin\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)d\tau,$$

где $\tilde{g}_n(t)$ определяются формулой (149). Тогда функция $v^{(1)}(x,t)$ определяется формулой (146).

З а м е ч а н и е: Если вместо граничных условий (141)–(142) в задаче (138)–(142) и вместо граничных условий (136)–(137) в задаче (133)–(137) рассмотреть граничные условия

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0, \\ v(l,t) = 0, \end{cases}$$

или условия

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0, \\ v_x(l,t) = 0, \end{cases}$$

или условия

$$\begin{cases} v(0,t) = 0, \\ v_x(l,t) = 0, \end{cases}$$

где $v = v^{(1)}$ для задачи (133)–(137) и $v = v^{(2)}$ для задачи (138)–(142), то решение соответствующих задач будет отличаться тем, что соответствующая задача Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$ будет иметь другой набор собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$, по которым следует раскладывать в ряд Фурье функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ в задаче (138)–(142) и функцию $g_1(x,t)$ в задаче (133)–(137).

Для задачи (121)–(123) с граничными условиями

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = \mu(t), \\ u(l,t) = \nu(t) \end{gathered}$$

вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде

$$w(x,t) = (x-l)\mu(t) + \frac{x^2}{l^2}\nu(t).$$

Для задачи (121)–(123) с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0,t) = \mu(t), \\ u_x(l,t) = \nu(t) \end{gathered}$$

вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде

$$w(x,t) = \mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t).$$

Для задачи (121)–(123) с граничными условиями

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = \mu(t), \\ u_x(l,t) = \nu(t) \end{gathered}$$

вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде

$$w(x,t) = \frac{x^2}{2l}\nu(t) - \frac{(x-l)^2}{2l}\mu(t).$$

П р и м е р 7. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 49u_{xx}, \tag{153}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{154}$$

$$u_t(x,0) = 28\pi\cos 4\pi x, \tag{155}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{156}$$

$$u_x(3,t) = 0. \tag{157}$$

Р е ш е н и е. Ищем решение в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляем в уравнение и, разделяя переменные, получаем

$$X(x)T''(t) = 49X''(x)T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{49T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Для функции $X(x)$ с учетом граничных условий (156)-(157) имеем следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X'(0) = 0, \tag{158}$$

$$X'(3) = 0, \tag{159}$$

Решаем задачу Штурма–Лиувилля:

1. при $\lambda > 0$ получим
$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$
Тогда
$$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x,$$
и с учетом граничных условий (158)–(159) имеем
$$X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0, \quad \text{откуда} \quad C_2 = 0.$$
$$X'(3) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin(3\sqrt{\lambda}) = 0, \quad \text{откуда} \quad \sin(3\sqrt{\lambda}) = 0.$$
$$3\sqrt{\lambda} = \pi n, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{3}, \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

2. при $\lambda = 0$ получим $X(x) = C_1 + C_2 x$, $X'(x) = C_2$ и с учетом граничных условий (156)-(157) имеем $X'(0) = X'(3) = C_2 = 0$ и тогда $X(x) = C_1$.

Таким образом, собственные функции можно записать в виде

$$X(x) = X_n(x) = A_n \cos\frac{\pi n}{3}x, \quad \text{где } A_n \text{ — произвольные постоянные}, \quad n = 0,\, 1,\, \ldots$$

Рассмотрим функцию $T(t)$:

1. при $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$, имеем уравнение
$$T''(t) + 49\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 T(t) = 0, \quad \text{или}$$
$$T''(t) + \left(\frac{7\pi n}{3}\right)^2 T(t) = 0.$$
Решая это уравнение, получим $T(t) = T_n(t) = \widetilde{C}_n \sin\frac{7\pi n}{3}t + \widetilde{D}_n \cos\frac{7\pi n}{3}t$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$

2. при $\lambda = 0$ для функции $T(t)$ имеем уравнение $T''(t) = 0$, откуда $T(t) = B_1 + B_2 t$.

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = B_1 + B_2 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \sin\frac{7\pi n}{3}t + D_n \cos\frac{7\pi n}{3}t\right)\cos\frac{\pi n}{3}x, \tag{160}$$

где $C_n = A_n\widetilde{C}_n$, $D_n = A_n\tilde{D}_n$.

Вычислим

$$u_t(x,t) = B_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7\pi n}{3}C_n \cos\frac{7\pi n}{3}t + \frac{7\pi n}{3}D_n \sin\frac{7\pi n}{3}t\right)\cos\frac{\pi n}{3}x. \tag{161}$$

Тогда, используя начальные условия (154)–(155) и подставляя в (160)-(161) $t=0$, получим

$$u(x,0) = B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\frac{\pi n}{3}x = 0, \quad \text{откуда} \quad B_1 = 0, \quad D_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$u_t(x,0) = B_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\pi n}{3} C_n \cos\frac{\pi n}{3}x = 28\pi\cos 4\pi x. \tag{162}$$

Разложим функцию $28\pi\cos 4\pi x$ в ряд Фурье по $\cos\frac{\pi n}{3}x$. Имеем

$$28\pi\cos 4\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{3}x + b_n \sin\frac{\pi n}{3}x,$$

откуда сразу видно, что $B_2 = 0$, $b_n = 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, $a_n = 0$ при $n \neq 12$, а при $n = 12$ имеем $a_{12} = 28\pi$.

Тогда из выражения (162) получим $28\pi C_{12} = a_{12}$ и $C_{12} = 1$.

И окончательно получаем

О т в е т: $u(x,t) = \sin 28\pi t \cos 4\pi x$.

П р и м е р 8. Решить задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 26e^{-3t}\cos x, \tag{163}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{164}$$

$$u_t(x,0) = 0, \tag{165}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{166}$$

$$u_x(\pi,t) = 0. \tag{167}$$

Р е ш е н и е. Решаем однородную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{168}$$

с однородными граничными условиями (166)–(167) методом Фурье. Ищем решение в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя в (168) и разделяя переменные, получим

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

откуда с учетом условий (166)-(167)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Решая эту задачу Штурма–Лиувилля, находим

1. при $\lambda > 0$

   $$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

   откуда

   $$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x,$$
   $$X'(0) = 0 = C_2, \quad X'(\pi) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0,$$

   откуда $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, $\sqrt{\pi} = \pi n$, $\lambda = \lambda_n = n^2$ и $X(x) = X_n(x) = C_n\cos nx$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$;

2. при $\lambda = 0$ находим $X(x) = B_1 + B_2 x$, откуда $X'(x) = B_2$. Тогда с учетом граничных условий (166)-(167) $X'(0) = X'(\pi) = B_2 = 0$ и $X(x) = X_0(x) = B_1$.

В общем случае собственные функции можно записать в виде:

$$X(x) = X_n(x) = C_n \cos nx, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Ищем решение исходной задачи $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos nx. \tag{169}$$

Для определения функций $T_n(t)$ подставим функцию $u(x,t)$ в уравнение (163):

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t) \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} -T_n(t) n^2 \cos nx + 26e^{-3t} \cos x.$$

Разложение функции $f(x,t) = 26e^{-3t} \cos x$ в ряд Фурье по $\cos nx$ состоит из одного члена с $n = 1$, а остальные равны 0. Откуда для $n = 1$ получим уравнение

$$T_1''(t) + T_1(t) = 26e^{-3t},$$

решая которое, найдем

$$T_1(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + 2,6e^{-3t}.$$

Для $n = 2,\ 3,\ \ldots$ имеем уравнение

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$T_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad n = 2,\ 3,\ \ldots$$

Для $n = 0$ ($\lambda = 0$) имеем уравнение

$$T''(t) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$T_0(t) = B_1 + B_2 t.$$

Подставляем найденные $T_n(t)$ в (169), получим:

$$u(x,t) = B_1 + B_2 t + (a_1 \cos t + b_1 \sin t + 2{,}6e^{-3t}) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \cos nx, \tag{170}$$

откуда

$$u_t(x,t) = B_2 + (-a_1 \sin t + b_1 \cos t - 7{,}8e^{-3t}) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} (-a_n n \sin nt + b_n n \cos nt) \cos nx.$$

При $t = 0$ получим

$$u(x,0) = B_1 + (a_1 + 2{,}6) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos nx = 0, \quad \text{откуда} \quad B_1 = 0, \quad a_1 = -2{,}6, \quad a_n = 0\ (n \geq 2);$$

$$u_t(x,0) = B_2 + (b_1 - 7{,}8) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n n \cos nx = 0, \quad \text{откуда} \quad B_2 = 0, \quad b_1 = 7{,}8, \quad b_n = 0\ (n \geq 2).$$

Таким образом, из (170) имеем

$$u(x,t) = (-2{,}6 \cos t + 7{,}8 \sin t + 2{,}6e^{-3t}) \cos x.$$

О т в е т: $u(x,t) = (-2{,}6 \cos t + 7{,}8 \sin t + 2{,}6e^{-3t}) \cos x$.

П р и м е р 9. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 81 u_{xx}, \tag{171}$$

$$u(x,0) = 25\sin 3\pi x - 5 + 2x, \tag{172}$$

$$u_t(x,0) = 0, \tag{173}$$

$$u(0,t) = -5, \tag{174}$$

$$u(3,t) = 1. \tag{175}$$

Р е ш е н и е. В этой задаче неоднородные краевые условия. Поэтому, согласно (126)–(127), определяем функцию

$$w(x,\,t) = w(x) = -5 + 2x. \tag{176}$$

Решение исходной задачи ищем в виде

$$u = v + w, \tag{177}$$

где w определяется формулой (176); тогда, подставляя

$$u_{tt} = v_{tt} + (-5+2x)_{tt} = v_{tt} \text{ и } u_{xx} = v_{xx} + (-5+2x)_{xx} = v_{xx}$$

в уравнение (171), получим

$$v_{tt} = 81v_{xx}.$$

Из условий (174)–(175) имеем

$$u(0,\,t) = v(0,\,t) + (-5+2x)|_{x=0} = v(0,\,t) - 5 = -5,$$

$$u(3,\,t) = v(3,\,t) + (-5+2x)|_{x=3} = v(3,\,t) + 1 = 1,$$

откуда $v(0,\,t) = 0$, $v(3,\,t) = 0$.

Из начальных условий (172)–(173) для $v(x,\,t)$ получим:

$$v(x,\,0) = u(x,\,0) - w(x,\,0) = 25\sin 3\pi x,$$

$$v_t(x,\,0) = u_t(x,\,0) - w_t(x,\,0) = -(5-2x)'_t = 0.$$

Таким образом, функция $v(x,\,t)$ является решением задачи

$$v_{tt} = 81v_{xx}, \tag{178}$$

$$v(x,0) = 25\sin 3\pi x, \tag{179}$$

$$v_t(x,0) = 0, \tag{180}$$

$$v(0,t) = 0, \tag{181}$$

$$v(3,t) = 0. \tag{182}$$

Решим задачу методом Фурье. Ищем решение в виде $v(x,\,t) = X(x)T(t)$.

$$X(x)T''(t) = 81X''(x)T(t),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{81T(t)} = -\lambda.$$

Тогда для определения функции $X(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0,$$

$$X(3) = 0,$$

собственные значения которой $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{3}\right)^2$, а собственные функции $X_n(x) = A_n \sin\dfrac{\pi n x}{3}$, $n = 1,\,2,\,\ldots$.

Тогда, решая уравнение

$$T''(t) + 81\lambda T(t) = 0,$$

которое при $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2$ принимает вид

$$T''(t) + 9(\pi n)^2 T(t) = 0,$$

и, записывая его решение в виде

$$T_n(t) = \tilde{a}_n \cos 3\pi nt + \tilde{b}_n \sin 3\pi nt,$$

получим формулу для $v(x,t)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos 3\pi nt + d_n \sin 3\pi nt) \sin \frac{\pi nx}{3}. \tag{183}$$

Тогда

$$v_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-3c_n \pi n \sin 3\pi nt + 3d_n \pi n \cos 3\pi nt) \sin \frac{\pi nx}{3}$$

и из начальных условий (179)–(180) получим

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi nx}{3} = 25 \sin 3\pi x, \tag{184}$$

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 3d_n \pi n \sin \frac{\pi nx}{3} = 0. \tag{185}$$

Из условия (184) следует, что $c_9 = 25$ и $c_n = 0$ $(n \neq 9)$, а из условия (185) находим, что $d_n = 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Тогда, подставляя c_n и d_n в формулу (183), получим

$$v(x,t) = 25 \cos 27\pi t \sin 3\pi x. \tag{186}$$

С учетом (176), (177) и (186) получим

О т в е т: $u(x,\ t) = -5 + 2x + 25 \cos 27\pi t \sin 3\pi x$.

7.3.2. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу:
$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{187}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{188}$$
$$u(0,t) = \mu(t), \tag{189}$$
$$u(l,t) = \nu(t). \tag{190}$$

Решим ее методом Фурье, предварительно сведя к задаче с однородными граничными условиями.

Введем вспомогательную функцию
$$w(x,t) = \mu(t) + (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l}. \tag{191}$$

Тогда
$$\begin{array}{l} w(0,t) = \mu(t) \\ w(l,t) = \nu(t). \end{array} \tag{192}$$

Решение задачи (187)-(190) ищем в виде суммы двух функций:
$$u = v + w,$$

где w определяется формулой (191) и удовлетворяет условиям (192), а v — новая неизвестная функция.

Получим для нее уравнение, граничные и начальные условия, подставляя u в (187)–(190). Имеем
$$u_t = v_t + w_t = v_t + \mu'(t) + (\nu'(t) - \mu'(t))\frac{x}{l},$$
$$u_{xx} = v_{xx} + w_{xx} = v_{xx}.$$

Тогда v удовлетворяет уравнению
$$v_t = a^2 v_{xx} + g_1(x,t),$$

где
$$g_1(x,t) = g(x,t) - \left(\mu'(t) + (\nu'(t) - \mu'(t))\frac{x}{l}\right).$$

Начальное условие для v, как следует из условий (188), (191), имеет вид
$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \varphi(x) - \left(\mu(0) + (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l}\right) = \varphi_1(x).$$

Граничные условия для v, как следует из условий (189), (190), (192), имеют вид
$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = \mu(t) - \mu(t) = 0,$$
$$v(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = \nu(t) - \nu(t) = 0.$$

Таким образом, для функции $v(x,t)$ имеем задачу
$$v_t = a^2 v_{xx} + g_1(x,t), \tag{193}$$
$$v(x,0) = \varphi_1(x), \tag{194}$$
$$v(0,t) = 0, \tag{195}$$
$$v(l,t) = 0. \tag{196}$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы
$$v = v^{(1)} + v^{(2)},$$

где $v^{(1)}$ — решение задачи
$$v_t^{(1)} = a^2 v_{xx}^{(1)} + g_1(x,t), \tag{197}$$

$$v^{(1)}(x,0) = 0, \tag{198}$$

$$v^{(1)}(0,t) = 0, \tag{199}$$

$$v^{(1)}(l,t) = 0, \tag{200}$$

т.е. удовлетворяет неоднородному уравнению с нулевыми начальными и граничными условиями, а $v^{(2)}$ — решение задачи

$$v_t^{(2)} = a^2 v_{xx}^{(2)}, \tag{201}$$

$$v^{(2)}(x,0) = \varphi_1(x), \tag{202}$$

$$v^{(2)}(0,t) = 0, \tag{203}$$

$$v^{(2)}(l,t) = 0. \tag{204}$$

Решение задачи (201)–(204) ищем методом Фурье. Решение ищется в виде

$$v^{(2)}(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (201) и, разделяя переменные, получаем

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда для функции $X(x)$ с учетом условий (203)–(204) получаем задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем собственные значения $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, и собственные функции

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad A_n \text{ — произвольные постоянные.}$$

Для функции $T(t)$ получим уравнение

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,$$

решая которое, найдем

$$T(t) = T_n(t) = \widetilde{C}_n e^{-(\pi n a/l)^2 t},$$

где $\widetilde{C}_n$ — произвольные постоянные.

Тогда $v_n^{(2)}(x,t) = T_n(t) X_n(x)$ и

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\pi n a/l)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{205}$$

где $C_n = A_n \widetilde{C}_n$ — некоторые постоянные.

Для определения постоянных используем условия (202):

$$v^{(2)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi_1(x),$$

откуда C_n — коэффициенты Фурье разложения функции $\varphi_1(x)$ по $\sin\frac{\pi n x}{l}$:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x) \sin\frac{\pi n x}{l} dx, \tag{206}$$

Таким образом решение $v^{(2)}$ задачи (201)–(204) находится по формуле (205) с константами C_n, вычисленными по формуле (206).

Для решения задачи (197)–(200) будем использовать метод неопределенных коэффициентов и искать решение в виде ряда

$$v^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \tag{207}$$

Для определения функций $T_n(t)$ подставляем функцию $v^{(1)}(x,t)$ в уравнение (197). Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{\pi n x}{l} = g_1(x,t). \tag{208}$$

Разложим функцию $g_1(x,t)$ в ряд Фурье по синусам:

$$g_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \text{где} \tag{209}$$

$$\tilde{g}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(\xi,t) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi. \tag{210}$$

Приравнивая (208) и (209), получим для T_n дифференциальные уравнения:

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = \tilde{g}_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{211}$$

Из условия (198) имеем начальные условия для $T_n(t)$:

$$T_n(0) = 0. \tag{212}$$

Решение уравнения (211) при начальном условии (212) имеет вид:

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-(\pi n a/l)^2 (t-\tau)} \tilde{g}_n(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{g}_n(t)$ определяются формулой (210). Тогда функция $v^{(1)}(x,t)$ определяется формулой (207).

З а м е ч а н и е: Если вместо граничных условий (203)–(204) в задаче (201)–(204) и вместо граничных условий (199)–(200) в задаче (197)–(200) рассмотреть граничные условия

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0, \\ v(l,t) = 0, \end{cases}$$

или условия

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0, \\ v_x(l,t) = 0, \end{cases}$$

или условия

$$\begin{cases} v(0,t) = 0, \\ v_x(l,t) = 0, \end{cases}$$

где $v = v^{(1)}$ для задачи (197)–(200) и $v = v^{(2)}$ для задачи (201)–(204), то решение соответствующих задач будет отличаться тем, что соответствующая задача Штурма–Лиувилля для функции $X(x)$ будет иметь другой набор собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$, по которым следует раскладывать в ряд Фурье функцию $\varphi_1(x)$ в задаче (201)–(204) и функцию $g_1(x,t)$ в задаче (197)–(200).

Для задачи (187)–(188) с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \mu(t), \\ u(l,t) &= \nu(t) \end{aligned}$$

вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде

$$w(x,t) = (x-l)\mu(t) + \frac{x^2}{l^2}\nu(t).$$

Для задачи (187)–(188) с граничными условиями

$$u(0,t) = \mu(t),$$
$$u_x(l,t) = \nu(t)$$

вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде

$$w(x,t) = \mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t).$$

Для задачи (187)–(188) с граничными условиями

$$u_x(0,t) = \mu(t),$$
$$u_x(l,t) = \nu(t)$$

вспомогательная функция $w(x,t)$ может быть найдена в виде

$$w(x,t) = \frac{x^2}{2l}\nu(t) - \frac{(x-l)^2}{2l}\mu(t).$$

П р и м е р 10. Решить смешанную задачу

$$u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 10\sin 3t \sin 6x, \tag{213}$$

$$u(x,0) = 31\sin 24x + \pi + x, \tag{214}$$

$$u(0,t) = \pi, \tag{215}$$

$$u(\pi,t) = 2\pi. \tag{216}$$

Р е ш е н и е. Определим функцию $w(x,t)$:

$$w(x,t) = \pi + (2\pi - \pi)\frac{x}{\pi} = \pi + x.$$

Тогда

$$w(0,t) = \pi,$$

$$w(\pi,t) = 2\pi.$$

Решение задачи (213)–(216) ищем в виде $u = v + w$.
Подставляя функцию u в (213)–(216), получим задачу для v:

$$v_t = \frac{1}{36}v_{xx} + 10\sin 3t \sin 6x,$$

$$v(x,0) = 31\sin 24\pi x + \pi + x - (\pi + x) = 31\sin 24x,$$

$$v(0,t) = 0,$$

$$v(\pi,t) = 0.$$

Решение этой задачи ищем в виде суммы двух функций $v = v^{(1)} + v^{(2)}$, где $v^{(1)}$ — решение задачи

$$v_t^{(1)} = \frac{1}{36}v_{xx}^{(1)} + 10\sin 3t \sin 6x, \tag{217}$$

$$v^{(1)}(x,0) = 0, \tag{218}$$

$$v^{(1)}(0,t) = 0, \tag{219}$$

$$v^{(1)}(\pi,t) = 0, \tag{220}$$

а $v^{(2)}$ — решение задачи

$$v_t^{(2)} = \frac{1}{36}v_{xx}^{(2)}, \tag{221}$$

$$v^{(2)}(x,0) = 31\sin 24x, \tag{222}$$

$$v^{(2)}(0,t) = 0, \tag{223}$$

$$v^{(2)}(\pi,t) = 0. \tag{224}$$

Решим сначала задачу (221)–(224) методом Фурье. Решение ищем в виде

$$v^{(2)}(x,t) = X(x)T(t),$$

откуда для функции $X(x)$ получаем задачу Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0,$$

решая которую, находим собственные значения $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\pi}\right)^2 = n^2$, $n = 1, 2, \ldots,$ и соответствующие им собственные функции

$$X(x) = X_n(x) = A_n \sin nx.$$

Для функции $T(t)$ получим уравнение

$$T'(t) + \frac{1}{36}\lambda T(t) = 0, \quad \text{т. е.}$$

$$T'(t) + \frac{n^2}{36}T(t) = 0,$$

решая которое, найдем

$$T(t) = T_n(t) = \widetilde{C}_n e^{-n^2 t/36}.$$

Тогда

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t/36}\sin nx, \tag{225}$$

где $C_n = A_n\widetilde{C}_n$ — некоторые постоянные. Для определения C_n используем уравнение (222)

$$v^{(2)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx = 31\sin 24x,$$

откуда следует, что $C_{24} = 31$ и $C_n = 0$ при $n \neq 24$.

Таким образом, из формулы (225) получим

$$v^{(2)}(x,t) = 31e^{-16t}\sin 24x.$$

Решение задачи (217)–(220) найдем методом неопределенных коэффициентов. Будем искать решение $v^{(1)}$ в виде ряда

$$v^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx. \tag{226}$$

Для получения уравнения для $T_n(t)$ определим коэффициенты Фурье $\tilde{g}_n(t)$ функции $10\sin 3t\sin 6x$. Имеем $\tilde{g}_6(t) = 10\sin 3t$, $\tilde{g}_n(t) = 0$ при $n \neq 6$. Таким образом, для функции $T_n(t)$ получим уравнение:

$$T_n'(t) + \left(\frac{n}{6}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \neq 6, \tag{227}$$

$$T_6'(t) + T_6(t) = 10\sin 3t \quad \text{при } n = 6. \tag{228}$$

Решая уравнение (227) как уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 t/36}, \quad n \neq 6.$$

Так как из условия (218) $T_n(0) = 0$, получим $T_n(t) = 0$, $n \neq 6$.

Решаем уравнение (228) методом вариации произвольной постоянной. Ищем решение в виде

$$T_6(t) = C(t)e^{-t} \tag{229}$$

Подставляя $T_6(t)$ в уравнение (228), получим

$$C'(t) = 10e^t \sin 3t,$$

откуда с помощью интегрирования по частям[3] получим

$$C(t) = 10 \int e^t \sin 3t dt = e^t \sin 3t - 3e^t \cos 3t + c_1.$$

Тогда, подставляя в (229), получим

$$T_6(t) = \sin 3t - 3 \cos 3t + c_1 e^{-t}.$$

Используя условие (218), имеем $T_6(0) = 0$, откуда $c_1 = 3e^0 \cos 0 = 3$, и

$$T_6(t) = \sin 3t - 3 \cos 3t + 3e^{-t}.$$

Подставляя $T_6(t)$ в формулу (226), с учетом того, что все $T_n(t) = 0$ при $n \neq 6$, получим

$$v^{(1)}(x,t) = (\sin 3t - 3 \cos 3t + 3e^{-t}) \sin 6x.$$

Тогда

$$v = v^{(1)} + v^{(2)} = (\sin 3t - 3 \cos 3t + 3e^{-t}) \sin 6x + 31e^{-16t} \sin 24x,$$

и, следовательно,

$$u = v + w = (\sin 3t - 3 \cos 3t + 3e^{-t}) \sin 6x + 31e^{-16t} \sin 24x + \pi + x.$$

О т в е т: $u = (\sin 3t - 3 \cos 3t + 3e^{-t}) \sin 6x + 31e^{-16t} \sin 24x + \pi + x.$

[3]Вычислим, интегрируя по частям, $I = \int e^t \sin 3t\ dt$. Пусть $\sin 3t = u$, $e^t dt = dv$. Тогда $du = 3 \cos 3t\ dt$, $v = e^t$. Поэтому

$$I = e^t \sin 3t - 3I_2, \quad \text{где } I_2 = \int e^t \cos 3t dt.$$

Также, интегрируя по частям, вычислим I_2. Здесь положим $\cos 3t = u$, $e^t\ dt = dv$. Тогда $du = -3 \sin 3t\ dt$, $v = e^t$. Получим

$$I_2 = e^t \cos 3t + 3 \int e^t \sin 3t\ dt = e^t \cos 3t + 3I.$$

Из выше приведенных рассуждений следует

$$I = e^t \sin 3t - 3e^t \cos 3t - 9I, \quad \text{т.е.}$$

$$I = \frac{1}{10}(e^t \sin 3t - 3e^t \cos 3t) + C.$$

Контрольное задание 21

В каждом варианте решить смешанную задачу:

1. $u_t = 9u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 31\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(9,t) = 0$.
2. $u_t = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 28\sin 2\pi x + 5\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
3. $u_t = 6u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 25\sin 2\pi x$; $\quad u(0,t) = u(6,t) = 0$.
4. $u_t = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 22\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
5. $u_t = 3u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 19\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(3,t) = 0$.
6. $u_t = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 16\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(8,t) = 0$.
7. $u_t = 8u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 13\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
8. $u_t = 5u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 10\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
9. $u_t = 5u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 7\sin 2\pi x$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
10. $u_t = 2u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 4\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
11. $u_t = 3u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 30\cos 2\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
12. $u_t = 3u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 27\cos 2\pi x + 28\cos 3\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$.
13. $u_t = 7u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 24\cos 2\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
14. $u_t = 6u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 21\cos 3\pi x + 22\cos 4\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
15. $u_t = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 18\cos 3\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$.
16. $u_t = 3u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 14\cos 5\pi x$; $\quad u_x(0,t) = 0$; $\quad u(1.5,t) = 0$.
17. $u_t = 6u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 7\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = 0$; $\quad u_x(4.5,t) = 0$.
18. $u_t = u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 12\cos 7\pi x$; $\quad u_x(0,t) = 0$; $\quad u(1.5,t) = 0$.
19. $u_t = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 5\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = 0$; $\quad u_x(2.5,t) = 0$.
20. $u_t = 5u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 18\cos 3\pi x$; $\quad u_x(0,t) = 0$; $\quad u(3.5,t) = 0$.
21. $u_t = 5u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 7\sin 3\pi x - 4 - 5x$; $\quad u(0,t) = -4$; $\quad u_x(1,t) = -9$.
22. $u_t = 3u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 3 - 2x$; $\quad u(0,t) = 3$; $\quad u_x(2,t) = -1$.
23. $u_t = 7u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 3\sin 2\pi x - 6 + 2x$; $\quad u(0,t) = -6$; $\quad u_x(3,t) = 0$.
24. $u_t = 8u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7 - 5x$; $\quad u(0,t) = 7$; $\quad u_x(2,t) = -3$.
25. $u_t = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 9\sin 3\pi x - 1 - 2x$; $\quad u(0,t) = -1$; $\quad u_x(1,t) = -3$.
26. $u_t = 7u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 6\sin 3\pi x + 3 + 2x$; $\quad u(0,t) = 3$; $\quad u_x(2,t) = 7$.
27. $u_t = 5u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 3\sin 3\pi x - 6 + 4x$; $\quad u(0,t) = -6$; $\quad u_x(3,t) = 6$.
28. $u_t = 3u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 4\sin 5\pi x + 9 - 4x$; $\quad u(0,t) = 9$; $\quad u_x(3,t) = -3$.
29. $u_t = 8u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 7\sin 2\pi x - 7 + 3x$; $\quad u(0,t) = -7$; $\quad u_x(3,t) = 2$.
30. $u_t = 6u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 8\sin 4\pi x + 4 - 5x$; $\quad u(0,t) = 4$; $\quad u_x(2,t) = -6$.

Контрольное задание 22

В каждом варианте решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности:

1. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 4e^{-5t}\sin 2x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
2. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 4x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + e^{-2t}\sin 2x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
4. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 3x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
5. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + e^{-2t}\sin 4x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
6. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 5\sin 2t\sin 3x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
7. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\sin 3t\sin 4x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
8. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\sin 2t\sin 2x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
9. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2\sin t\sin 3x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
10. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 2\sin t\sin 4x; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 0.$
11. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 10\sin 3t\sin 4x; \quad u(x,0) = 31\sin 8x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
12. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\sin 4t\sin 6x; \quad u(x,0) = 29\sin 18x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
13. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\sin 5t\sin 3x; \quad u(x,0) = 27\sin 12x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
14. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 17\cos 4t\sin 5x; \quad u(x,0) = 30\sin 20x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
15. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t\sin 4x; \quad u(x,0) = 28\sin 8x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
16. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\cos 6t\sin 6x; \quad u(x,0) = 25\sin 12x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
17. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 37\sin 6t\sin 2x; \quad u(x,0) = 26\sin 6x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
18. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 26\sin 5t\sin 5x; \quad u(x,0) = 24\sin 20x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
19. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26\cos 5t\sin 4x; \quad u(x,0) = 23\sin 12x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
20. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 17\sin 4t\sin 3x; \quad u(x,0) = 22\sin 6x; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
21. $u_t = \frac{1}{25}u_{xx} + 17\cos 4t\sin 5x; \quad u(x,0) = 30\sin 20x - \pi + x; \quad u(0,t) = -\pi; \quad u(\pi,t) = 0.$
22. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 26\cos 5t\sin 3x; \quad u(x,0) = 28\sin 15x - 2\pi + 2x; \quad u(0,t) = -2\pi; \quad u(\pi,t) = 0.$
23. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\cos 6t\sin 6x; \quad u(x,0) = 26\sin 18x - 3\pi + 6x; \quad u(0,t) = -3\pi; \quad u(\pi,t) = 3\pi.$
24. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 10\sin 3t\sin 6x; \quad u(x,0) = 31\sin 24x + \pi + x; \quad u(0,t) = \pi; \quad u(\pi,t) = 2\pi.$
25. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 17\sin 4t\sin 4x; \quad u(x,0) = 29\sin 20x + \pi - x; \quad u(0,t) = \pi; \quad u(\pi,t) = 0.$
26. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 26\sin 5t\sin 2x; \quad u(x,0) = 27\sin 10x + 2\pi - 6x; \quad u(0,t) = 2\pi; \quad u(\pi,t) = -4\pi.$
27. $u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 5\sin 2t\sin 6x; \quad u(x,0) = \sin 12x + \pi + 3x; \quad u(0,t) = \pi; \quad u(\pi,t) = 4\pi.$
28. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5\cos 2t\sin 2x; \quad u(x,0) = 2\sin 6x - \pi + 2x; \quad u(0,t) = -\pi; \quad u(\pi,t) = \pi.$
29. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10\sin 3t\sin 3x; \quad u(x,0) = 3\sin 12x + 2\pi - x; \quad u(0,t) = 2\pi; \quad u(\pi,t) = \pi.$
30. $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t\sin 4x; \quad u(x,0) = 4\sin 8x - 2\pi + x; \quad u(0,t) = -2\pi; \quad u(\pi,t) = -\pi.$

Контрольное задание 23

В каждом варианте решить смешанную задачу:

1. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 31\sin\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u(0,t) = u(8,t) = 0$.
2. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 29\sin 2\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u(0,t) = u(7,t) = 0$.
3. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 27\sin 3\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u(0,t) = u(6,t) = 0$.
4. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 25\sin 4\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
5. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 23\sin 5\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u(0,t) = u(4,t) = 0$.
6. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 14\pi\sin 7\pi x$; $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$.
7. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 27\pi\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(4,t) = 0$.
8. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 28\pi\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(3,t) = 0$.
9. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 25\pi\sin 5\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
10. $u_{tt} = 9u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 18\pi\sin 6\pi x$; $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$.
11. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 31\sin\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 4\pi\sin\pi x$; $\quad u(0,t) = u(8,t) = 0$.
12. $u_{tt} = u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 28\sin 3\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 3\pi\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
13. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 25\sin 4\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 28\pi\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
14. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 22\sin 6\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 24\pi\sin 6\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
15. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 20\sin 7\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 14\pi\sin 7\pi x$; $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0$.
16. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 17\sin 3\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 24\pi\sin 3\pi x$; $\quad u(0,t) = u(5,t) = 0$.
17. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 14\sin 5\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 25\pi\sin 5\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
18. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 11\sin 6\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 12\pi\sin 6\pi x$; $\quad u(0,t) = u(2,t) = 0$.
19. $u_{tt} = 4u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 8\sin 4\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 8\pi\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(3,t) = 0$.
20. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 5\sin 3\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 20\pi\sin 4\pi x$; $\quad u(0,t) = u(3,t) = 0$.
21. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 4\pi\cos\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0$.
22. $u_{tt} = 81u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 28\cos 3\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$.
23. $u_{tt} = u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 3\pi\cos\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.
24. $u_{tt} = 49u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 26\cos 4\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$.
25. $u_{tt} = 64u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 32\pi\cos 4\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
26. $u_{tt} = 25u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 24\cos 5\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0$.
27. $u_{tt} = 16u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 24\pi\cos 6\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$.
28. $u_{tt} = u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 20\cos 7\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$.
29. $u_{tt} = u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 0$; $\quad u_t(x,0) = 5\pi\cos 5\pi x$; $\quad u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$.
30. $u_{tt} = u_{xx}$; $\quad u(x,0) = 10\cos 5\pi x$; $\quad u_t(x,0) = 0$; $\quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$.

Контрольное задание 24

В каждом варианте решить смешанную задачу:

1. $u_{tt} = 81u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 9\pi \sin \pi x; \quad u(0,t) = 0; \quad u_x(2.5,t) = 0.$
2. $u_{tt} = 81u_{xx}; \quad u(x,0) = 30 \cos 5\pi x; \quad u_t(x,0) = 0; \quad u_x(0,t) = 0; \quad u(1.5,t) = 0.$
3. $u_{tt} = 64u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 24\pi \cos 3\pi x; \quad u_x(0,t) = 0; \quad u(4.5,t) = 0.$
4. $u_{tt} = 64u_{xx}; \quad u(x,0) = 26 \cos 3\pi x; \quad u_t(x,0) = 0; \quad u_x(0,t) = 0; \quad u(3.5,t) = 0.$
5. $u_{tt} = 49u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 63\pi \sin 9\pi x; \quad u(0,t) = 0; \quad u_x(2.5,t) = 0.$
6. $u_{tt} = 36u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 42\pi \cos 7\pi x; \quad u_x(0,t) = 0; \quad u(4.5,t) = 0.$
7. $u_{tt} = 25u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 15\pi \sin 3\pi x; \quad u_x(0,t) = 0; \quad u(2.5,t) = 0.$
8. $u_{tt} = 25u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 25\pi \sin 5\pi x; \quad u(0,t) = 0; \quad u_x(2.5,t) = 0.$
9. $u_{tt} = 16u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 28\pi \sin 7\pi x; \quad u_x(0,t) = 0; \quad u(0.5,t) = 0.$
10. $u_{tt} = 9u_{xx}; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x; \quad u(0,t) = 0; \quad u_x(3.5,t) = 0.$
11. $u_{tt} = 4u_{xx}; \quad u(0,t) = -1; \quad u(2,t) = 5; \quad u(x,0) = 31 \sin 2\pi x - 1 + 3x; \quad u_t(x,0) = 0.$
12. $u_{tt} = 81u_{xx}; \quad u(0,t) = -7; \quad u(3,t) = 2; \quad u(x,0) = 27 \sin 2\pi x - 7 + 3x; \quad u_t(x,0) = 0.$
13. $u_{tt} = 64u_{xx}; \quad u(0,t) = 2; \quad u(3,t) = -7; \quad u(x,0) = 2 - 3x; \quad u_t(x,0) = 24\pi \sin 3\pi x.$
14. $u_{tt} = 49u_{xx}; \quad u(0,t) = -2; \quad u(3,t) = -5; \quad u(x,0) = 17 \sin 3\pi x - 2 - x; \quad u_t(x,0) = 0.$
15. $u_{tt} = 36u_{xx}; \quad u(0,t) = 4t; \quad u(4,t) = 8t; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 24\pi \sin 4\pi x + 4 + x.$
16. $u_{tt} = 25u_{xx}; \quad u(0,t) = -5; \quad u(1,t) = 1; \quad u(x,0) = 11 \sin 3\pi x - 5 + 6x; \quad u_t(x,0) = 0.$
17. $u_{tt} = 16u_{xx}; \quad u(0,t) = 3; \quad u(2,t) = 7; \quad u(x,0) = 3 + 2x; \quad u_t(x,0) = 12\pi \sin 3\pi x.$
18. $u_{tt} = 9u_{xx}; \quad u(0,t) = -8; \quad u(2,t) = 2; \quad u(x,0) = \sin 6\pi x - 8 + 5x; \quad u_t(x,0) = 0.$
19. $u_{tt} = 4u_{xx}; \quad u(0,t) = 9; \quad u(3,t) = -3; \quad u(x,0) = 9 - 4x; \quad u_t(x,0) = 10\pi \sin 5\pi x.$
20. $u_{tt} = 9u_{xx}; \quad u(0,t) = 7; \quad u(1,t) = 2; \quad u(x,0) = 7 - 5x; \quad u_t(x,0) = 12\pi \sin 4\pi x.$
21. $u_{tt} = \frac{1}{25}u_{xx} + 80 \sin 9t \sin 5x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
22. $u_{tt} = \frac{1}{16}u_{xx} + 2e^{-t} \sin 4x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
23. $u_{tt} = \frac{1}{9}u_{xx} + 63 \cos 8t \sin 3x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
24. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} + 63 \sin 8t \sin 2x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
25. $u_{tt} = \frac{1}{49}u_{xx} + 10e^{-3t} \sin 7x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
26. $u_{tt} = \frac{1}{36}u_{xx} + 35 \cos 6t \sin 5x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
27. $u_{tt} = \frac{1}{25}u_{xx} + 35 \sin 6t \sin 5x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
28. $u_{tt} = \frac{1}{16}u_{xx} + 17e^{-4t} \sin 4x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
29. $u_{tt} = \frac{1}{9}u_{xx} + 24 \cos 5t \sin 3x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
30. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} + 24 \sin 5t \sin 2x; \quad u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$

Список литературы

[1] А.И. Комеч. "Практическое решение уравнений математической физики". Механико-математический факультет МГУ, 1993.

[2] Н.С. Кошляков, Э.Б. Глиннер, М.М. Смирнов. "Уравнения в частных производных математической физики". М.: "Высшая школа", 1970.

[3] Л.А. Кузнецов. "Сборник заданий по высшей математике". М.: "Высшая школа", 1994

[4] Н.М. Матвеев. "Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений". Л.: Издательство ЛГУ, 1955.

[5] А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, А.В. Босов. "Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах". М.: "Высшая школа", 2001.

[6] И.Г. Петровский. "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений". М.: Издательство МГУ, 1984.

[7] А.К. Пономаренко, В.Ю. Сахаров, Т.В. Степанова, П.К. Черняев. "Учебные и контрольные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям". СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2000.

[8] Л.С. Понтрягин. "Обыкновенные дифференциальные уравнения". М.: "Наука", 1974.

[9] А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи". Учеб. пособие. М.: "Высшая школа", 1989.

[10] В.С. Владимиров (ред.) "Сборник задач по уравнениям математической физики" М. "Физматлит", 2001.

[11] А.Ф. Филиппов. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям". Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.

[12] В.Ф. Чудесенко. "Сборник задач по специальным курсам высшей математики". М.: "Высшая школа", 1983.

[13] Л.Е. Эльсгольц. "Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление". М.: "Наука", 1969.