$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$$

т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n+1}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

то и произведение пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Воспользуемся признаком Гаусса.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \cdot \frac{n+1}{\cos\frac{\pi}{n+1}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n+1}} + \frac{1}{n}\,\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$$

$$\frac{\cos \pi/n}{\cos \pi/(n+1)} = \frac{1+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\pi^2}{2}\,\frac{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{\pi}{n+1}} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim \frac{1}{n^3}$$

Отсюда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta}{n^{1+\varepsilon}}$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, ряд расходится

$\Rightarrow$ для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абс. сх. нет.

Изучим на условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$

Заметим, что для $n \geq 2$: $\cos\frac{\pi}{n} \geq \cos\frac{\pi}{n+1}$, и $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geq \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{n+1}$, и т.к. $\left|\cos\frac{\pi}{n}\right| \leq 1$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} = 0$.

Отсюда по признаку Лейбница ряд сходится.

Ответ: ряд условно сходится

Кононенко Александр
ГЭК-4

SER-10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$$

Воспользуемся логарифмическим признаком

[Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$ начиная с дост. больших $n > n_0^{\text{фикс.}}$ и сходится, если $\exists \alpha > 0, n_0 : \forall n > n_0$ $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$]

$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} > 0$ $(n \geq 3)$

$a_n^{-1} = (\ln n)^{\ln\ln n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = 0$ (поскольку $\ln^2 t \ll t$ при больших t), значит из определения предела при $\varepsilon = 1$: $\exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0 : \left|\frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n}\right| < 1$.

Значит, по логарифмическому признаку ряд расходится.

Ответ: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ расходится.

РЯДЫ

№1

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$$

Необходимое условие сходимости ряда: члены ряда должны стремиться к нулю

$$n(\sqrt[n]{2}-1) = n(e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1) = n(1+\tfrac{1}{n}\ln 2 +$$

$$+\overline{o}(\tfrac{1}{n})-1) = \ln 2 + \overline{o}(1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ члены ряда не стремятся к нулю

Ответ: расходится

№2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$$

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{e^{(n+\frac{1}{n})\ln n}}{e^{n\ln(n+1/n)}} = e^{(n+\frac{1}{n})\ln n - n(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n^2}))} =$$

$$= e^{n\ln n + \frac{1}{n}\ln n - n\ln n - n\ln(1+\frac{1}{n^2})} =$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln n - n(\frac{1}{n^2}+\overline{\overline{o}}(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{1}{n}(\ln n - \frac{1}{n} + \overline{\overline{o}}(\frac{1}{n}))} = e^{\overline{\overline{o}}(1)}$$

$\Rightarrow$ члены ряда не стремятся к нулю

Ответ: расходится

№3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$$

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \left(1-\frac{2}{2n^2+3}\right)^{-\frac{(2n^2+3)}{2}\cdot\frac{2n^2}{-(2n^2+3)}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ члены ряда не стремятся к нулю

Ответ: расходится

№4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^n}{e^n} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ члены ряда не стремятся к нулю

Ответ: расходится

Радикальный признак Коши:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

сходится, если начиная с некоторого номера выполнено $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, где $q < 1$

расходится, если начиная с некоторого номера выполнено $\sqrt[n]{a_n} > 1$

Признак Д'Аламбера:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

сходится, если начиная с некоторого номера выполнено $|a_{n+1}/a_n| \leq q$, где $q < 1$

расходится, если начиная с некоторого номера выполнено $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$

$\Rightarrow$

Признак Абеля:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполнено

1. $\{a_n\}$ монотонна с некоторого номера и ограничена

2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

Признак Дирихле:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполнено

1. последовательность частичных сумм $|b_1 + \ldots + b_n| \leq C$ ограничена

2. $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю с некоторого номера

№5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!(2n+3)!(3n)!}{(3n+3)!\,n!(2n+1)!} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \overset{\text{начиная с } n=3}{<}$$

$$< \frac{2n \cdot 3n \cdot 3n}{3n \cdot 3n \cdot 3n} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ имеется сходимость по пр. Д'Аламбера

Ответ: сходится

№6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n! \cdot 3^n}{(n+1)! \cdot 3^{n+1} \cdot n^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cancel{\to}$$

$\cancel{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{e}{3} <}$ ~~=> начиная с некоторого~~ $< \frac{e}{3} < 1$

=> имеется сходимость по пр. Д'Аламбера

Ответ: сходится

№7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2 \cdot 4^n}$$ – пусть это ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

все члены $a_n > 0$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ таков, что при чётных n члены $b_n = 0$, а при нечётных n члены $b_n = a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \Rightarrow$$

=> члены ряда не стремятся к нулю, ряд Σb_n расходится

по построению $a_n \geq b_n$ =>
по признаку сравнения ряд Σa_n тоже расх.

Ответ: расходится.

№8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e = e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e =$$

$$= e\left(e^{(n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1} - 1\right) =$$

$$= e\left(e^{\frac{1}{2n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = e\left(1 + \frac{1}{2n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) =$$

$= \frac{e}{2 \cdot n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\frac{3}{2}} \sim \left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$
расходится при $p \leq 1$

Признак сравнения (эквивалентности)
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ таковы, что $u_n \geq 0$; $v_n \geq 0$
если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$ $(0 < K < \infty)$, то ряды сходятся либо расходятся одновременно

~~члены исходного ряда эквивалентны членам ряда~~

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится $\Rightarrow$ и исходный ряд сход. по признаку сравнения

Ответ: сходится

№9

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

// какая-то поебень, признак неочевидный

Логарифмический признак
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$
сходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1+\alpha$

применим признак:

$a_n^{-1} = (\ln n)^{\ln\ln n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = 0$$

значит с некоторого момента $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} < 1$

по логарифм. признаку имеем расходим.

Ответ: расходится

№12

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Интегральный признак Коши

$f(x) \geq 0$, невозрастающая, тогда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сход. или рас

$$f(x) := \frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = +\ln 2 \text{ — сход.}$$

значит по интегральному признаку исходный ряд сходится

Ответ: сходится

№13

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

где $a_n = \frac{\ln^{2020} n}{n}$, $b_n = (-1)^n$

a_n монотонно убывает к нулю с некоторого n

последовательность частичных сумм $B_n = b_1 + \ldots + b_n \leq 1$, но положительны $\Rightarrow$ $\Rightarrow |B_n| \leq 1$ - ограничены

по признаку Дирихле сходимость

Ответ: сходится

№14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

где $a_n = \frac{1}{\ln \ln n}$, $b_n = \cos 2n$

a_n монотонно убывают к нулю

$|B_n| = |b_1 + \ldots + b_n| = \cancel{\frac{\sin n \cos 2n + \sin n \cos 4n + \ldots}{\sin n}}$

$= \frac{1}{|\sin 1|} \cdot |\sin 1 \cdot \cos 2 + \sin 1 \cdot \cos 4 + \ldots + \sin 1 \cdot \cos 2n| =$

$= \frac{1}{2|\sin 1|} \left|\sin \frac{3}{2} - \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{5}{2} - \sin \frac{3}{2} + \ldots + \sin \frac{2n+1}{2} - \sin \frac{2n-1}{2}\right|$

$= \frac{1}{2 \sin 1} \left|\sin \frac{2n+1}{2} - \sin \frac{1}{2}\right| \leq \frac{2}{2 \sin 1} = \frac{1}{\sin 1}$

значит посл. частичных сумм B_n ограничена

по признаку Дирихле сходимость

Ответ: сходится

№10

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n$$

где $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$

$|a_n| = e^{\frac{\ln n}{n}} < e$ - ограничены, члены монотонно убыв. с нек. n

рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} c_n d_n$

где $c_n = \frac{1}{\ln n}$, $d_n = (-1)^n$

c_n монотонно убывают к нулю

$|D_n| = |d_1 + \ldots + d_n| \leq 1$ - ограничены

значит по пр. Дирихле $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ сход.

значит по пр. Абеля исходный ряд сход.

Ответ: сходится

№11

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\right)$$

рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^n$

он сходится по признаку Дирихле

рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, он расходится

при почленном суммировании сходящегося и расходящегося ряда получается расходящ.

Ответ: расходится

№15

Махмутова Полина Викторовна ГЭК 4

SER. 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,3^n}$$

Решение. Применим признак сх-ти рядов D'Аламбера.:

Если для чис. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ существует такое число q, $0<q<1$, что, начиная с некот номера ($\exists N: \forall n > N$) вып. нер-во:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, то ряд абс. сход., если же

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \Rightarrow$ расход.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,3^{n+1}} \cdot \frac{n!\,3^n}{n^n} = \lim \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{3\cdot\cancel{(n+1)}\,n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ряд сходится.}}$

SER-9.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{3/2}$ если $\forall n\geq 1 \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq e$

то $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{3/2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^{3/2}=e^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$

если $a_n=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ и $p>1$ то ряд сх-ся

$\frac{3}{2}>1\Rightarrow$ ряд $\sum\left(\frac{e}{n}\right)^{3/2}$ сх-ся

$\Rightarrow$ сх-ся ряд изначальный.

докажем что $\forall n\geq 1 \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq e$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

докажем что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ возраст. на $n\in[1;+\infty)$

$\left(e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)'=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-1}{n^2}\right)=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{>0}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$

докажем что $\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}}_{f(n)}\geq 0 \ \forall n\geq 1$ тогда производная >0 и ф-ия возраст. (если max в ∞ $=e$ то $\leq e$)

$f(\infty)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1-n}{n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ докажем что $f(n)$ убывает на $[1,+\infty)$

$f(n)'_n=\frac{1\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}-\frac{-1}{(n+1)^2}=\;=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}$ $n+1>n\Rightarrow<0$

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$

Необ. призн. сх-ти: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2n^2+3}\right)^{n^2} = 1^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n^2-1{,}5}\right)^{-n^2-1{,}5}\right)^{\frac{n^2}{-n^2-1{,}5}} =$

$\underset{\text{2замеч.}}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{n^2}{n^2+1{,}5}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$ исходный ряд расходится

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

Необх. призн. сх-ти: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} =$

$= \frac{0}{0} \underset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}} = \ln 2\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \ln 2 \neq 0$

Сл-но, ряд расходится.

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$

Необ. призн. сх-ти: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\right)^{n}\cdot \underbrace{n^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1/n}{n+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^{n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n^2-1}\right)^{-n^2-1}\right)^{\frac{n}{-n^2-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-n^2-1}} = e^{0} = 1 \neq 0$

Сл-но, исходный ряд расходится.

④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^{n}}$

Необх. призн. сх-ти: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\bar{\bar{o}}(n^2)\right)}}{e^{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} e^{\cancel{n}-\frac{1}{2}+n^2\bar{\bar{o}}(n^2)-\cancel{n}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

Сл-но, ряд расходится.

⑤ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}$

Признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n+3)!}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} =$

$= \frac{2}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)} =$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} = \frac{4}{27} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

⑥ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{n!\,3^{n}}$

Признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,3^{n+1}}\cdot\frac{n!\,3^{n}}{n^{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3\cdot n^{n}} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n}}{n^{n}} = \frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходится.

⑦ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Необх. усл. сх-ти: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 3^{n} e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{-n-1}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 3^{n}\cdot e^{n^2\cdot\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+\bar{\bar{o}}((n+1)^2)\right)} = \infty \neq 0$

Сл-но, ряд расходится

⑧ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{3/2}$

Признак сравнения:

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)-e \underset{}{\overset{\text{2ой зам. пр.}}{\leq}}$

$\leq e\left(\frac{1}{n}+1\right)-e = \frac{e}{n}$

Сл-но, $a_n \leq \left(\frac{e}{n}\right)^{3/2} = b_n$

2) Рассм. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3/2}}{n^{3/2}}$ – сходящ.

Сл-но, исходный ряд также сходится

⑨ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

Логарифмический признак:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln\ln n\frac{1}{\ln n}\cancel{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}} =$

$= 2\lim\limits_{n\to\infty}\ln\ln n\cdot\frac{1}{\ln n} = \frac{\infty}{\infty} =$

$= 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}\cdot\cancel{\frac{1}{n}}}{\cancel{\frac{1}{n}}} = \frac{2}{\infty} = 0 < 1,$

т.е. ряд расходится

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Логарифм. признак: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \cdot \ln\ln n}{\ln n} = \infty > 1 \Rightarrow$ сходится

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ Интеграл. признак: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow$ сходится

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2 + 4^n}$ Рассмотрим подряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{2k-1}}{(2k-1)^2 \cdot 4^{2k-1}}$

Признак Даламбера: $\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{6^{2k+1} \cdot (2k-1)^2 \cdot 4^{2k-1}}{(2k+1)^2 \cdot 4^{2k+1} \cdot 6^{2k-1}} = \frac{36}{16} > 1$

Сл-но, раз подряд полож. числового ряда расход., то и сам ряд расходится

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n}$ Знакочередующ. ряд

I. Признак Дирихле:

1.) $A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k < 2$

2.) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{2020} n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{лопиталь}}{=} \ldots = 2020! \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (монотонно к нулю) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n}$ сходится

II. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{2020} n}{n}$

$\frac{\ln^{2020} n}{n} \geq \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расх. $\Rightarrow$ по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится

Отв: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n}$ условно сходится

14. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ I. Признак Лейбница: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}}{\ln n} = 0$, монотонно к нулю

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ сходится

II. Рассмотрим $\sum |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$

$\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} \geq \frac{1}{\ln n}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ – расходящ. ряд $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ – расход. по признаку сравнения

Отв. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ сходится условно.

15. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$ – Знакочеред. ряд.

I. Признак ~~Лейбница~~ Дирихле:

1. $A_k = \sum_{n=4}^{k} \cos 2n \leq \sin(k+1) \cdot \frac{\sin k}{\sin 1}$ – ограничены

$\sum_{n=1}^{k} \cos 2n = \sin(k+1) \cdot \frac{\sin\left(\frac{k \cdot 2}{2}\right)}{\sin 1}$

2.) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln n} = 0$, монотонно к нулю

Сл-но, $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$ сходится (абсол. или условно?)

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \bar{o}\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right) = \underset{(1)}{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - \underset{(2)}{\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}} + \underset{(3)}{\sum_{n=2}^{\infty} \bar{o}\left(n^{-3/2}\right)}$

(1): $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, монотонно к нулю.

Сл-но, (1) сход. по Лейбницу

(2): $-\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходящ. ряд (гармонич.)

(3): $\sum_{n=2}^{\infty} \bar{o}(n^{-3/2})$ сходящ. по признаку сравнения

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ расходится.

SER-7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}.$$

SER-20. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}.$$