Руднев Сергей

1.1 $y' = f(x)$

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}$$ наивысший пор-к аппр. на решении.

$$y(x_k) - y(x_k - 2h) = 2hy'(x_k) - \frac{\cancel{4}^{2} h^2}{\cancel{2}} y''(x_k) + \frac{\cancel{8}^{4} h^3}{\cancel{6}_{3}} y'''(x_k) - \frac{\cancel{16}^{2} h^4}{\cancel{24}_{3}} y^{IV}(x_k) + O(h^5)$$

$$+ \frac{\cancel{32}^{4}}{\cancel{120}_{15}} h^5 y^{V}(x_k)$$

$$\Rightarrow \frac{y(x_k) - y(x_k - 2h)}{2h} - a_1 f(x_k) - a_0 f(x_{k-1}) - a_{-1} f(x_{k-2}) =$$

$$= y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{2}{3}h^2 y'''(x_k) - \frac{1}{3}h^3 y^{IV}(x_k) + O(h^4) - a_1 f(x_k) - a_0 f(x_k - h) - a_{-1} f(x_k - 2h)$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - hf'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) - \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + O(h^4)$$
$$\frac{h^4}{24} f^{IV}(x_k)$$

$$f(x_k - 2h) = f(x_k) - 2hf'(x_k) + 2h^2 f''(x_k) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x_k) + O(h^4)$$
$$+\frac{2}{3}h^4 f^{IV}(x_k)$$

Приравниваем коэфф-ты:

h^0: $y'(x_k) = a_1 f(x_k) + a_0 f(x_k) + a_{-1} f(x_k)$ $\qquad y'(x_k) = f(x_k) \Rightarrow 1 = a_1 + a_0 + a_{-1}$

h^1: $-1 = -a_0 - 2a_{-1}$

h^2: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}a_0 + 2a_{-1}$ $\quad \Rightarrow -\frac{1}{2}a_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}$

Добились 3-го порядка аппр. на решении за счёт выбора 3-х коэффициентов. Проверим, не получится ли порядок ещё выше: для этого посмотрим на коэфф. при h^3: $-\frac{1}{3}y^{IV}(x_k) = -\frac{1}{6}f'''(x_k)a_0 - \frac{4}{3}f'''(x_k)a_{-1}$

$y^{IV}(x_k) = f'''(x_k) \Rightarrow$

$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} - \frac{\cancel{4}^{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{3}}$

$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9}$ верно.

$\Rightarrow$ получим 4-й порядок аппр. на реш. (т.к. в разности сократились элементы при h^3)

При h^4: $\frac{2}{15}y^{V}(x_k) = \frac{1}{24}f^{IV}(x_k)a_0 + \frac{2}{3}f^{IV}(x_k)a_{-1}$

$\frac{2}{15} = \frac{1}{\cancel{24}_{12}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} + \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{3}}$

$\frac{2}{15} = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$ $\varnothing$

+

$\Rightarrow \|L_h[y]_h - f_h\|_{F_h} = O(h^4)$

Ответ: $a_0 = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_{-1} = \frac{1}{6}$, $p = 4$

(1.2) $\theta \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + (1-\theta)\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k$ при $\theta \in [0,1]$

исследуем на α-устойчивость:

1) пусть $\theta = 0$

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k$$

$\mu^k - \mu^{k-1} = 0$ $\mu = 1, 0$ $|\mu| \le 1$ и нет кратных корней на границе $\Rightarrow$ α-уст.

2) $\theta \ne 0$

+

$$\frac{\theta y_{k+1} + (1-2\theta)y_k + (\theta-1)y_{k-1}}{h} = f_k$$

$\theta \mu^2 + (1-2\theta)\mu + \theta - 1 = 0$ $\quad\mu=0]$

$\mu_{1,2} = \frac{2\theta - 1 \pm \sqrt{4\theta^2 - 4\theta + 1 - 4\theta^2 + 4\theta}}{2\theta} \Rightarrow \mu = \left[\begin{array}{l}1\\ \frac{\theta-1}{\theta}\end{array}\right.$

$|1| \le 1$ в.

$\left|\frac{\theta-1}{\theta}\right| \le 1$

$\theta \in (0,1] \Rightarrow \frac{\theta-1}{-\theta} \le 1 \Rightarrow$

$\theta - 1 \ge -\theta$

$\theta \ge \frac{1}{2}$

Ответ: при $\theta = 0$ и $\theta \ge \frac{1}{2}$

(1.3) $y' = y$, $y(0) = 1$

$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_{k+1} + y_k}{2}$, $y_0 = 1$, $k \ge 0$; $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$

Найти c_1 где $x_N = Nh = 1$

$y' = y \Rightarrow y(x) = e^x C$, $y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = e^x$, $y(x_k) = e^{x_k}$

$2(y_{k+1} - y_k) = h(y_{k+1} + y_k)$; $y_{k+1}(2-h) = y_k(h+2) \Rightarrow y_{k+1} = y_k \frac{2+h}{2-h} \Rightarrow$

$y_k = C\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^k$, $y_0 = C = 1 \Rightarrow y_k = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^k$

+

$y(x_N) - y_N = e^{x_N} - \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N = e - \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{\frac{1}{h}} = e - e^{\frac{1}{h}(\ln(2+h) - \ln(2-h))} =$

$= e - e^{\frac{1}{h}(\ln(1+\frac{h}{2}) - \ln(1-\frac{h}{2}))} = e - e^{\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} - \cancel{\frac{h^2}{4}} + \frac{h}{2} + \cancel{\frac{h^2}{4}} + O(h^3)\right)} = e - e^{1 + O(h^2)} =$

$= \cancel{e} - e(\cancel{1} + O(h^2)) = O(h^2) \Rightarrow c_1 = 0$ Ответ: 0

(1.4) $y' + 5y = \sin 2x$; $y(0) = 2$. Построить схему 2-го пор. сх-ти.

Возьмём схему $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = f_k$, где $f_k := \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$

$y_0 = 2$

Проверим аппрокс. на решении

$x_k = kh$

$$\frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + 5\frac{y(x_k+h) + y(x_k)}{2} - \frac{\sin 2x_k + \sin 2(x_k+h)}{2} =$$

$$= y'(x_k) + \frac{h}{2}y''(x_k) + O(h^2) + 5y(x_k) + \frac{5}{2}y'(x_k)\cdot h - \frac{\sin 2kh}{2} - \frac{\sin 2(k+1)h}{2} =$$

$$= \sin 2kh + \frac{h}{2}(y''(x_k) + 5y'(x_k)) - \frac{\sin 2kh}{2} - \frac{\sin 2h(k+1)}{2} = \frac{\sin 2kh}{2} + h\cos 2kh =$$

$y'(x_k) + 5y(x_k) = \sin 2x_k$

$y''(x_k) + 5y'(x_k) = 2\cos 2x_k$.

$$= -\frac{\sin 2h(k+1)}{2} + O(h^2) = \frac{\sin 2kh}{2} + h\cos 2kh - \frac{\sin 2kh\cos 2h + \sin 2h\cos 2kh}{2} +$$

$$+ O(h^2) = O(h^2) + \cancel{\frac{\sin 2kh}{2}} + \cancel{h\cos 2kh} - \frac{\sin 2kh}{2}(\cancel{1} + O(h^2)) - \frac{\cos 2kh}{2}(\cancel{2h} + O(h^3)) =$$

$$= O(h^2)$$

$$\Rightarrow \|L_h[y]_h - f_h\|_{F_h} = \max_k \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + 5\frac{y(x_k+h) + y(x_k)}{2} - f_k \right| = O(h^2)$$

$\|l_h[y]_h - \varphi_h\|_{\varphi_h} = 0$

(+)

д-м α-устойчивость: $\mu^{k+1} - \mu^k = 0 \Rightarrow \mu = 1{,}0 \Rightarrow \alpha$-уст-ть.

$\Rightarrow$ получаем 2-й пор-к сх-ти. в силу Т Филиппова

(1.5) $x_0 = 0$, $x_1 = h$ построить аппрок. на решении 2-го пор.

для $u'(0) - u(0) = 0$ для уравнение $u'' - 2u = \sin x - 1$

$$u(h) = u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2)$$

$u''(0) - 2u(0) = -1 \Rightarrow u''(0) = 2u(0) - 1 \Rightarrow$

$$u'(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0)-1) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow u'(0) - u(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0)-1) - u(0) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow u'(0) - u(0) - \frac{u(h)-u(0)}{h} + u(0)(1+h) - \frac{h}{2} = O(h^2) \Rightarrow$$ получили схему:

$$\frac{u_1-u_0}{h} - u_0(1+h) = -\frac{h}{2}$$

т. $\Rightarrow \| l_h[u]_h - \varphi_h \| =$

$$= \left\| \frac{u(h)-u(0)}{h} - u(0)(1+h) + \frac{h}{2} \right\| = \| \underbrace{u'(0)-u(0)}_{=0} + O(h^2) \| = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ получили аппр. на решении 2-го пор-ка.

(+)

1.7 $$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + p_i u_i = f_i, \quad 1 \le i \le N-1,\ p_i \ge 0$$

$$u_0 = 0,\ u_N = u_{N-1}, \quad (N-\tfrac{1}{2})h = 1$$

умн. на u_i и просумм. от 1 до $N-1$

$$-\frac{1}{h^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i-u_i+u_{i-1})u_i}_{} + \sum_{i=1}^{N-1} p_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{N-1} f_i u_i$$

$$\| \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)u_i}_{} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}(u_i-u_{i-1})u_i}_{= \sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})u_i,\ \text{т.к. } u_N = u_{N-1}}$$

$$\| \quad \sum_{i=2}^{N}(u_i-u_{i-1})u_{i-1} = \sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})u_{i-1},\ \text{т.к. } u_0=0$$

получили: $$-\frac{1}{h^2}\left(\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})u_{i-1} - \sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})u_i\right) = +\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})(u_i-u_{i-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{N-1} p_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{N-1} f_i u_i$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{i}(u_k-u_{k-1}) = u_i - u_0^{\,0}$$

$$\Rightarrow u_i^2 = \left(\sum_{k=1}^{i}(u_k-u_{k-1})1\right)^2 \underset{\text{нер. К-Б.}}{\le} \sum_{k=1}^{i}(u_k-u_{k-1})^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{i}1}_{\le (N-1)} \le \sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2\cdot(N-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1}u_i^2 \le \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2\cdot(N-1) = (N-1)^2\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2 \le (N-\tfrac{1}{2})^2\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2$$

$$\| \quad \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(u_k-u_{k-1})^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1}u_i^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}p_i u_i^2}_{\ge 0} \;(=)$$

$$(=)\ \sum_{i=1}^{N-1} f_i u_i \underset{\text{н. К-Б}}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} f_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1}u_i^2} \underset{\text{нер-во для средних}}{\le} \frac{\sum_{i=1}^{N-1} f_i^2}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{N-1}u_i^2}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1}u_i^2 \le \sum_{i=1}^{N-1} f_i^2$$

$\Rightarrow \|u_h\|_2 \le \|f_h\|_2.$

умножим на h: $\sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 \cdot h \le \sum_{i=1}^{N-1} f_i^2 \cdot h$

$\Rightarrow \|u_h\|_{2,h} \le \|f_h\|_{2,h}$ $\Rightarrow$ д-ли устойчивость в норме $\| \ \|_{2,h}$

(1.6) $-u''(x)+pu(x)=f(x)$, $p=const>0$

$u(0)=a,\ u'(1)=b.$

Построить р. сх 2-го пор. сх-ти , равном. сетка

$x_k = kh.$

$$u''(x_k) = \frac{u(x_k+h)-2u(x_k)+u(x_k-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$\Rightarrow$ пусть схема имеет вид:

$$-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2} + pu_k = f_k, \quad k=1,\dots,N-1$$

$$\boxed{-\frac{2}{h^2} \quad \frac{2}{h^2}+p}$$

$u_0=a$

$\frac{u_N-u_{N-1}}{h} = b+\delta$

найдём δ:

$$\left|\frac{u(1)-u(1-h)}{h} - b - \delta\right| = \left|\cancel{u'(1)} - \frac{h}{2}u''(1) - \cancel{b} - \delta + O(h^2)\right| \Rightarrow \boxed{\delta = -\frac{h}{2}u''(1) = +\frac{h}{2}(f(1)-pu(1))}$$

$$u(1) - u(1-h) = \cancel{u(1)} + hu'(1) - \frac{h^2}{2}u''(1) + O(h^3)$$

аппр. на реш.

$$\max_k \left| -\frac{u(x_k+h)-2u(x_k)+u(x_k-h)}{h^2} + pu(x_k) - f_k \right| = |-u''(x_k) + O(h^2) + pu(x_k) - f_k| = O(h^2)$$

для краевого условия уже проверили $\Rightarrow$ д-ли аппр. 2-го порядка.

устойчивость по прав. части: $u_k := u_k^{(1)} - u_k^{(2)}$ $f_k := f_k^{(1)} - f_k^{(2)}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2}{h^2}+p \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

$u = A^{-1}f \Rightarrow \|u\|_2 \le \|A^{-1}\|_2 \|f\|_2.$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{|\lambda_{min}(A)|} = \frac{1}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2} + p} \le 4+p$$

$\sin\beta \ge \frac{2}{\pi}\beta$

$\Rightarrow$ д-ма уст-ть в $\| \|_2$.

Но $\|A\|_{2,h} = \|A\|_2 \Rightarrow$ верно и для нормы $\| \|_{2,h}$.

аппр. д-ма в норме $\| \|_C$, но

если $\|L_h[y]_h - f_h\|_C \le Ch^2$, то

$\left(\sum_{i=1}^{N-1} v_i^2 h\right)^{\frac{1}{2}} \le Ch^2 \sum_{i=1}^{N-1} h = Ch^2 \Rightarrow$ д-ма аппр. на решении в норме $\| \|_{2,h}$

$\Rightarrow$ по т. Филиппова д-ма сходимость в норме $\| \|_{2,h}$.

+/2