24.09.20. ВарОпУ. д/з от семинара 3

① a)
$$\begin{cases} 2x^2-6x-6y-3z \to extr \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$$

$$\Lambda(x,y) = \lambda_0(2x^2-6x-6y-3z) + \lambda_1(x-y+z) + \lambda_2(5x+y-2z-1)$$

$$\Lambda'_x = \lambda_0(4x-6) + \lambda_1 + 5\lambda_2$$

$$\Lambda'_y = -6\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\Lambda'_z = -3\lambda_0 + \lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4x-6)\lambda_0 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 6\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_0 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\begin{cases} \lambda_1+5\lambda_2=0 \\ \lambda_1-\lambda_2=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \Rightarrow \bar{\lambda}=\bar{0}$ – не подх.

Если $\lambda_0 \neq 0$, положим $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = -1$.
для min, для max

Минимум
Если $\lambda_0 = 1$:
$$\begin{cases} 4x-6+\lambda_1+5\lambda_2=0 \\ 6+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ 3-\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$$
$\cancel{\lambda_2 = \frac{-4x+3}{7}}$ $\cancel{\Rightarrow \lambda_2=-9}$ $\cancel{\Rightarrow 4x-6+\lambda_1-45=0}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4&0&0&1&5&6 \\ 0&0&0&1&-1&-6 \\ 0&0&0&-1&2&-3 \\ 1&-1&1&0&0&0 \\ 5&1&-2&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&-1&1&0&0&0 \\ 0&4&-4&1&5&6 \\ 0&6&-7&0&0&1 \\ 0&0&0&1&-1&-6 \\ 0&0&0&-1&2&-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&-1&1&0&0&0 \\ 0&2&-2&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&3 \\ 0&0&-1&-\frac{3}{2}&-\frac{15}{2}&-8 \\ 0&0&0&1&-1&-6 \\ 0&0&0&0&1&-9 \end{array}\right)$$

$\cancel{\Rightarrow \lambda_2=-9}$
$\cancel{\lambda_1 = \lambda_2-6=-15}$
$\cancel{z = -\frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{15}{2}\lambda_2 + 8 = \frac{45}{2} + \frac{90+45}{2} + 8 = 98}$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -9$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 6 = -15$$

$$z = -\frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{15}{2}\lambda_2 + 8 = \frac{45}{2} + \frac{90+45}{2} + 8 = 98$$

$$y = \frac{2z - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{5}{2}\lambda_2 + 3}{2} = \frac{180+16+\frac{15}{2}+\frac{45}{2}+3}{2} = \frac{196+33}{2} = \frac{229}{2}$$

$$x = y - z = \frac{229-196}{2} = \frac{33}{2}$$

$$\Rightarrow A(x,y,z,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) = \left(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 98; 1; -9; -15\right)$$

Если $\lambda_0 = -1$ (для максимума)

$$\begin{cases} -4x+6+\lambda_1+5\lambda_2=0 \\ -6+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ -3-\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 9 \quad \lambda_1 = 15.$

$-4x+3+7\lambda_2=0.$

$\Rightarrow x = \frac{3+7\lambda_2}{4} = \frac{3+63}{4} = \frac{66}{4} = \frac{33}{2}.$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 9$

$\lambda_1 = \lambda_2 + 6 = 15$

$z = \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{15}{2}\lambda_2 + 8 = \frac{45+90+45}{2} + 8 = 90 + 8 = 98$

$y = \dfrac{2z + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{5\lambda_2}{2} - 3}{2} = \dfrac{196 + \frac{15+45}{2} + 3}{2} = \dfrac{196+33}{2} = \dfrac{229}{2}$

$x = y - z = \frac{229-196}{2} = \frac{33}{2}$

$\Rightarrow B(x, y, z, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96; -1; 15; 9\right)$

Считаем гессиан:

$\Delta''_{xx} = 4\lambda_0$

$\Delta''_{xy} = 0$; $\Delta''_{xz} = 0.$

Все остальные $= 0.$

$\Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 4\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

~~конус допустимых вариаций даже считать не надо, т.к. гессиан одного знака на всей плоскости.~~

(A.) $= \left(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96; 1; -15; -9\right)$

$\lambda_0 = 1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_{11} = 4$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$ $\Rightarrow$ гессиан $\geq 0.$

$\Rightarrow$ вып. необх. усл. loc min, но не вып. дост. усл. loc min

(B) $= \left(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96; -1; 15; 9\right)$

$\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_{11} = -4$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$ — не вып. Маф $\geq 0 \Rightarrow$ не вып. необх. усл. loc max.

$\Rightarrow$ Точка $\left(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96\right)$ — может быть loc min, и то не факт.

Считаем конус допустимых вариаций:

$f_1 = x-y+z \Rightarrow df_1 = (1;-1;1)$

$f_2 = 5x+y-2z \Rightarrow df_2 = (5;1;-2)$

$\Rightarrow \begin{cases} h_1-h_2+h_3=0 \\ 5h_1+h_2-2h_3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6h_1=h_3 \\ h_2=h_1+h_3=h_1+6h_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{h}=(h_1;7h_1;6h_1)$

стр2

$\Rightarrow$ в точке A: $\lambda_0=1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 4&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

(кандидат на locmin)

$\Rightarrow (h_1\ 7h_1\ 6h_1)\begin{pmatrix} 4&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1\\7h_1\\6h_1 \end{pmatrix} = (h_1\ 7h_1\ 6h_1)\begin{pmatrix} 4h_1\\0\\0 \end{pmatrix} = 4h_1^2 \geq 0$, причем >0, если $\bar{h}\neq\vec{0}$ (т.е $h_1\neq 0$)

$\Rightarrow \left(\frac{33}{2};\frac{229}{2};96\right)$ - locmin

в точке B: $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} -4&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

(кандидат на locmax)

$\Rightarrow (h_1\ 7h_1\ 6h_1)\begin{pmatrix} -4&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1\\7h_1\\6h_1 \end{pmatrix} = -4h_1^2 \leq 0$, $\Rightarrow$ не вып. усл. $\geq 0 \Rightarrow$ не locmax

$\Rightarrow \left(\frac{33}{2};\frac{229}{2};96\right)$ - locmin

причем он и globmin по следствию из т. Вейерштрасса,

т.к $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1 \end{cases}$ - это прямая, и если выразить отсюда y и z

и подставить в $2x^2-6x-6y-3z$, то будет $f(+\infty)=+\infty$. $\Rightarrow$ достигается globmax.

$S_{min} = 2\cdot\frac{1089}{4} - \underbrace{3\cdot 33}_{99} - \underbrace{3\cdot 229}_{687} - \underbrace{3\cdot 96}_{288} = 544{,}5 - 1074 = -529{,}5.$

Ответ: $\left(\frac{33}{2};\frac{229}{2};96\right) \in$ locmin, globmin

$S_{min} = -529{,}5.$

б) $\begin{cases} xy^2z^3 \to extr \\ x+y+z=1. \end{cases}$

$\Lambda(x,y,z) = \lambda_0(xy^2z^3) + \lambda_1(x+y+z-1)$

$\Lambda'_x = \lambda_0\cdot y^2z^3+\lambda_1$

$\Lambda'_y = \lambda_0\cdot 2xyz^3+\lambda_1$

$\Lambda'_z = \lambda_0\cdot 3xy^2z^2+\lambda_1$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 y^2z^3+\lambda_1=0 \\ \lambda_0\cdot 2xyz^3+\lambda_1=0 \\ \lambda_0\cdot 3xy^2z^2+\lambda_1=0 \\ x+y+z=1. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{0}$ – не подх.

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0 = 1$ $\begin{cases} y^2z^3 + \lambda_1 = 0 \\ 2xyz^3 + \lambda_1 = 0 \\ 3xy^2z^2 + \lambda_1 = 0 \\ x+y+z = 1. \end{cases}$ $(1)-(2)$: $yz^3(y-2x) = 0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \\ y=2x. \end{array} \right.$

Если $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ x+z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1-x \Rightarrow$ все точки $(t; 0; 1-t)$; $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$.

Если $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ x+y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1-x \Rightarrow$ все точки $(t; 1-t; 0)$ $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$.

Если $y = 2x \Rightarrow \begin{cases} 4x^2z^3 + \lambda_1 = 0 \\ \cancel{4x^2z^3 + \lambda_1 = 0} \\ 12x^3z^2 + \lambda_1 = 0 \\ 3x + z = 1. \end{cases} \Rightarrow 4x^2z^2(z - 3x) = 0.$

Если $x = 0$, то $z = 1 \Rightarrow (0,0,1)$ $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$

Если $z = 0$, то $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$ $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 0$.

Если $z = 3x$, то $3x + 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \Rightarrow \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -\cancel{4}\frac{1}{36}\cdot\cancel{8}\frac{1}{6\cdot 6\cdot 6} = -\frac{1}{36\cdot 6}$

Пусть $\lambda_0 = -1$ $\begin{cases} -y^2z^3 + \lambda_1 = 0 \\ -2xyz^3 + \lambda_1 = 0 \\ -3xy^2z^2 + \lambda_1 = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Rightarrow -yz^2(y-2x) = 0.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{все те же точки } (t,0;1-t),\ (t;1-t;0),\ (0,0,1) \vee (\tfrac{1}{3};\tfrac{2}{3};0), \text{ только } \lambda_0 = -1; \lambda_1 = 0.}$

Считаем конус и гессиан.

<u>Конус</u>: $f_1 = x+y+z-1$

$df_1 = (1,1;1) \Rightarrow$ конус: $h_1 + h_2 + h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = -h_1 - h_2$

$\Rightarrow \bar{h} = (h_1; h_2; -h_1 - h_2)$

<u>Гессиан</u>: $\Lambda''_{xx} = 0$; $\Lambda''_{xy} = 2\lambda_0 yz^3$ $\Lambda''_{xz} = 3\lambda_0 y^2z^2$

$\Lambda''_{yy} = 2\lambda_0 xz^3$ $\Lambda''_{yz} = 6\lambda_0 xyz^2$

$\Lambda''_{zz} = 6\lambda_0 xy^2z$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda_0 yz^3 & 3\lambda_0 y^2z^2 \\ 2\lambda_0 yz^3 & 2\lambda_0 xz^3 & 6\lambda_0 xyz^2 \\ 3\lambda_0 y^2z^2 & 6\lambda_0 xyz^2 & 6\lambda_0 xy^2z. \end{pmatrix}$$

$\lambda_0 = 1$ точка $(0;0;1)$

$$\Rightarrow (h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = 0$$ – вып. необх, но не дост. усл. locmin.

не явл locextr, т.к $xy^2z^3|_{(\varepsilon;\varepsilon;1)} = \varepsilon^3 > 0$
$xy^2z^3|_{(-\varepsilon;\varepsilon;1)} = -\varepsilon^3 < 0.$

точка $(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0)$

$$\Rightarrow (h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = 0.$$ – тоже не вып. дост, но вып. необх

но не явл, т.к $xy^2z^3|_{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\varepsilon} = \frac{4}{27}\varepsilon^3 > 0$

$xy^2z^3|_{\frac{1}{3}\frac{2}{3}-\varepsilon} = -\frac{4}{27}\varepsilon^3 < 0$

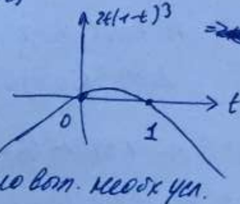
точки $(t;0;1-t)$

$$(h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t(1-t)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = (0;h_2\cdot 2t(1-t)^3;0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = h_2^2\cdot 2t(1-t)^3$$ – похоже на locmin но вдруг при $h_2 = 0$ будет $= 0$? при $t\in[0;1]$ – ~~больше~~ $u > 0$

$u < 0$ при $t\notin[0;1]$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Downarrow$

при $t\notin[0;1]$ – не locmin.



точки $(t;1-t;0)$

$$(h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = 0.$$ – тоже не вып. дост усл, но вып. необх усл.

$xy^2z^3|_{(t;1-t;0)} = 0.$

но $xy^2z^3|_{(t;1-t;\varepsilon)} = t(1-t)\varepsilon$ и $xy^2z^3|_{(t;1-t;-\varepsilon)}$ – имеют разные знаки $\Rightarrow$ не locmin, не locmax

$\lambda_0 = -1$ точки $(t;0;1-t)$

$$(h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2t(1-t)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = -2h_2^2\cdot \underbrace{t(1-t)^3}_{<0 \text{ при } t\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)}$$ – похоже на locmax

ещё точка $(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2})$

$\lambda_0 = 1$
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{}{4} & 3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} & 6\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$(h_1\ h_2\ -h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{h_1}{12};-\frac{h_1}{24};\frac{1}{36}(h_1+h_2)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = -\frac{h_1^2}{12}-\frac{h_1h_2}{24}-\frac{1}{36}(h_1+h_2)^2 =$$

$$= \frac{-6h_1^2-3h_1h_2-2h_1^2-4h_1h_2-2h_2^2}{72} = \frac{-8h_1^2-7h_1h_2-2h_2^2}{72} =$$

$$= \frac{-8(h_1+\frac{7}{16}h_2)^2-\frac{120}{256}h_2^2}{72} < 0.$$

$\Rightarrow$ не locmin

$\lambda_0 = -1$
$$(h_1\ h_2\ -h_1-h_2)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -h_1-h_2 \end{pmatrix} = \frac{8(h_1+\frac{7}{16}h_2)^2+\frac{120}{256}h_2^2}{72} > 0, \text{ если } \bar{h}\neq 0$$

$\Rightarrow$ это locmax.

Ответ: $(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ – locmax

$(t;0;1-t)$ – locmin при $t\in[0;1]$

$(t;0;1-t)$ – locmax при $t\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

$S_{min} = -\infty$ ~~[illegible]~~

$S_{max} - +\infty$ ~~[illegible]~~

в) $\begin{cases} xy^2z^3 \to extr \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

$\Lambda(x,y,z) = \lambda_0(xy^2z^3) + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)$

$\Lambda'_x = \lambda_0 y^2z^3 + 2\lambda_1 x$

$\Lambda'_y = 2\lambda_0 xyz^3 + 2\lambda_1 y$

$\Lambda'_z = 3\lambda_0 xy^2z^2 + 2\lambda_1 z$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 y^2z^3 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2\lambda_0 xyz^3 + 2\lambda_1 y = 0 \\ 3\lambda_0 xy^2z^2 + 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то либо $\lambda_1 = 0$ – не подх, т.к. тогда $\bar{\lambda} = (\lambda_0\ \lambda_1) = \bar{0}$

либо $(x,y,z) = (0,0,0)$ – не подх, т.к. тогда (x,y,z) не уровл. $x^2+y^2+z^2=1$.

Если $\lambda_0 \neq 0$, положим $\lambda_0 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2z^3 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2xyz^3 + 2\lambda_1 y = 0 \\ 3xy^2z^2 + 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$ $\Rightarrow 2y(xz^3+\lambda_1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ xz^3 = -\lambda_1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cancel{z(3xy^2z+2\lambda_1)=0}.$

• Если $y=0$, то $\begin{cases} 2\lambda_1 x = 0 \\ 0=0 \\ 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0$; $z^2 = 1-x^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow (t;0;\sqrt{1-t^2})$; $\lambda_0=1$; $\lambda_1=0$

$(t;0;-\sqrt{1-t^2})$; $\lambda_0=1$; $\lambda_1=0$

• Если $xz^3+\lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_1 = -xz^3$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2z^3 - 2x^2z^3 = 0 \\ 0=0. \\ 3xy^2z^2 - 2xz^4 = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow z^3(y^2-2x^2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ y^2=2x^2. \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cancel{xz^2(3y^2-2z^2)=0}.$

* Если $z=0$, то $\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow (t;\sqrt{1-t^2};0)$ $\lambda_0=1$; $\lambda_1=0$

$(t;-\sqrt{1-t^2};0)$ $\lambda_0=1$; $\lambda_1=0.$

* Если $y^2=2x^2$, то $\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 6x^3z^2 - 2xz^4 = 0 \\ 3x^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow 2xz^2(3x^2-z^2)=0.$

✓ Если $x=0 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow (0;0;1)$, $(0;0;-1)$ $\lambda_0=1$; $\lambda_1=0.$

✓ Если $z=0$, то $x^2=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};0)$ $\lambda_1 = -xz^3$

$\vee$ Если $3x^2-z^2=0$

$$\begin{cases}3x^2-z^2=0\\ 3x^2+z^2=1\end{cases} \Rightarrow 6x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt6};\ y=\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\ z=\pm\frac{\sqrt3}{\sqrt6}.$$ ещё 6 точек.

$\lambda_0=1;\ \lambda_1=-xz^3$

Считаем конус и гессиан:

<u>конус</u> $f_1=x^2+y^2+z^2-1.$

$df_1=2(x,y,z) \Rightarrow h_1x+h_2y+h_3z=0.$

<u>гессиан</u>
$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 2\lambda_0 yz^3 & 6\lambda_0 y^2z^2\\ 2\lambda_0 yz^3 & (2\lambda_0 xz^3+2\lambda_1) & 6\lambda_0 xyz^2\\ 6\lambda_0 y^2z^2 & 6\lambda_0 xyz^2 & 6\lambda_0 xy^2z+2\lambda_1\end{pmatrix}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt6};\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$; $\lambda_1=-xz^3=-\frac{3\sqrt3}{6\cdot 6\cdot 2}=-\frac{\sqrt3}{12}=\frac{-1}{4\sqrt3} \Rightarrow 2\lambda_1=-\frac{1}{2\sqrt3}$

$h_1+\sqrt2 h_2+\sqrt3 h_3=0.$ − конус − ~~он в принципе~~

гессиан $=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{2\cdot\sqrt2\cdot3\sqrt3}{36} & 6\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2\cdot3\sqrt3}{36}-\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{6\cdot\sqrt2\cdot3}{36}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{6\cdot2\sqrt3}{36}-\frac{1}{2\sqrt3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & 1\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{\sqrt3}{6}-\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{2\sqrt3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & 1\\ \frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ 1 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{2\sqrt3}\end{pmatrix}$

$M_1=-\frac{1}{2\sqrt3}$

$M_{12}=0-\frac{1}{6}<0$ но дальше для abs max

$M_{13}=>0.$

$\left(\frac{1}{\sqrt6};-\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ гессиан $=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} & 1\\ -\frac{1}{\sqrt6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2}\\ 1 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{2\sqrt3}\end{pmatrix}$

$M_1=\frac{-1}{2\sqrt3}<0$

$M_{12}=-\frac{1}{6}<0$

$M_{13}=0{,}67\ldots>0.$

$M_{13}=\frac{1}{\sqrt6}\left(-\frac{1}{2\sqrt3\sqrt6}+\frac{1}{\sqrt2}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{2\sqrt6}+\frac{1}{\sqrt6}\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt6}\left(-\frac{1}{6\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{3}{2\sqrt6}=\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{5}{6\sqrt2}+\frac{3}{4\sqrt3}=\frac{5}{12\sqrt3}+\frac{3}{4\sqrt3}=\frac{14}{12\sqrt3}>0$

$\left(-\frac{1}{\sqrt6};\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ ~~гессиан~~ $M_1>0$, $M_2<0$, $M_{13}<0.$

$\left(-\frac{1}{\sqrt6};\frac{\sqrt2}{\sqrt6};-\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ $M_1<0$, $M_{12}<0$, $M_{13}>0.$

$\left(-\frac{1}{\sqrt6};-\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ $>,<,<$

$\left(-\frac{1}{\sqrt6};-\frac{\sqrt2}{\sqrt6};-\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ $<,<,>$

$\left(\frac{1}{\sqrt6};\frac{\sqrt2}{\sqrt6};-\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ $>,<,<$

$\left(\frac{1}{\sqrt6};-\frac{\sqrt2}{\sqrt6};-\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ $>,<,<$

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt3};\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt3};0\right)$ гессиан $\equiv 0$ — но они не loc extr, т.к. $\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2};\frac{1-\varepsilon^2}{2};\varepsilon\right)$ — будет >0

$\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2};\frac{1-\varepsilon^2}{2};\varepsilon\right)$ — будет <0

Точка $(0,0,1)$ $\lambda_0=1;\lambda_1=0$. гессиан $=0$

Точка $(0,0,-1)$ $\lambda_0=1;\lambda_1=0$ — гессиан $\equiv 0$.

точки $(t;0;\sqrt{1-t^2})$ и $(t;0;-\sqrt{1-t^2})$ т.е $(x_1;0;x_3)$: $x_1^2+x_3^2=1$.

гессиан $=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&x_1x_3^3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{?}{>}0$ на конусе $\Rightarrow$ loc min при $x_1x_3>0$, loc max при $x_1x_3<0$.

точки $(x_1;x_2;0)$ $\lambda_0=1;\lambda_1=1$ гессиан $\equiv 0$ — но они $\notin$ loc extr, т.к $\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2};\frac{1-\varepsilon^2}{2};\varepsilon\right)$ — будет >0

$\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2};\frac{1-\varepsilon^2}{2};-\varepsilon\right)$ — будет <0.

Ответ: $(x_1;0;x_3)\in$ loc min при $x_1x_3>0$ и $x_1^2+x_3^2=1$

$(x_1;0;x_3)\in$ loc max при $x_1x_3<0$ и $x_1^2+x_3^2=1$.

$\left(\frac{1}{\sqrt6};\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt6};-\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt6};\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)\in$ abs min ← достигается, т.к $x^2+y^2+z^2=1$ — компакт

$\left(\frac{1}{\sqrt6};\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt6};\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ и $\left(\frac{-1}{\sqrt6};\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt6};-\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)\in$ abs max. так у Галеева, но у меня не так.

2. а) $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}\le\frac1n\sum_{i=1}^n x_i$; $n\in\mathbb N$; $\forall i=1\ldots n$; $x_i\ge0$.

Хотим: $\begin{cases}(x_1\ldots x_n)^{1/n}\to extr\\ \sum_{i=1}^n x_i=c\end{cases}$

$\Rightarrow \Lambda(x_1\ldots x_n)=\lambda_0(x_1\ldots x_n)^{1/n}+\lambda_1\left(\sum_{i=1}^n x_i-c\right)$

$\Lambda'_{x_i}=\frac{\lambda_0}{n}\cdot(x_1\ldots x_n)^{\frac1n-1}\cdot\frac{x_1\ldots x_n}{x_i}+\lambda_1=\frac{\lambda_0}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}{x_i}+\lambda_1=0.$

Если $\lambda_0=0$, то $\lambda_1=0\Rightarrow$ не подх

Если $\lambda_0\ne0$, то положим $\lambda_0=1$.

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}{nx_1}+\lambda_1=0\\ \ldots\\ \frac{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}{nx_n}+\lambda_1=0\\ \sum_{i=1}^n x_i=c\end{cases}$ $\Rightarrow\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}=-\lambda_1nx_1=-\lambda_1nx_2=\ldots=-\lambda_1nx_n.$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2=\ldots=x_n\\ \sum_{i=1}^n x_i=c\end{cases}$ $\Rightarrow x_i=\frac cn=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}=\frac cn=\frac{\sum x_i}{n}$ чтд.

Стр 5

б) $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, где $x_i; y_i \in \mathbb{R}$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $p>1$.

Хотим: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \to extr \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = c_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{q=1-\frac{1}{p}} = c_2 \end{cases}$

$$\Lambda(x_1 y_1 \dots x_n y_n) = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) + \lambda_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p - c_1\right) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\frac{1}{p}} - c_2\right)$$

$$\Lambda'_{x_i} = \lambda_0 y_i + \lambda_1 \cdot x_i^{p-1} = 0$$

$$\Lambda'_{y_i} = \lambda_0 x_i + \lambda_2 \cdot y_i^{\frac{1}{p}} = 0.$$

$\lambda_0 = 1$ т.к. $\lambda_0 = 0$ - не подх.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + \lambda_1 \cdot x_1^{p-1} = 0 \\ \vdots \\ y_n + \lambda_1 x_n^{p-1} = 0 \\ x_1 + \lambda_2 y_1^{1/p} = 0 \\ \vdots \\ x_n + \lambda_2 x_n^{1/p} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = c_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{1-\frac{1}{p}} = c_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_i = -\lambda_1 \cdot x_i^{p-1}$

$\Rightarrow x_i + \lambda_2 \cdot (y_i)^{1/p} = 0.$

$x_i + \lambda_2 \cdot (-\lambda_1 \cdot x_i)^{\frac{p-1}{p}} = 0.$

$\Rightarrow \lambda_2 \cdot (-\lambda_1)^{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{x_i}{x_i^{1-\frac{1}{p}}} = x_i^{1/p}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dots = x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = c_1 \end{cases} \Rightarrow n \cdot x^p = c_1 \Rightarrow x = \left(\dfrac{c_1}{n}\right)^{1/p}$

Аналогично, $y = \left(\dfrac{c_2}{n}\right)^{\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p}}$

$$\Rightarrow \sum x_i y_i = n \cdot \left(\frac{c_1}{n}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{c_2}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{n \cdot c_1^{1/p} \cdot c_2^{1/q}}{n^{\frac{1}{p}+1-\frac{1}{p}}} = c_1^{1/p} \cdot c_2^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$ ч.т.д.

в) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$; $x_i; y_i \in \mathbb{R}$; $p>1$.

Хотим: $\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \to extr \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^p = c_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i)^p = c_2 \end{cases}$

$$\Lambda(x_1 y_1 \dots x_n y_n) = \lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p - c_1\right) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^p - c_2\right)$$

$$\begin{cases} \Lambda'_{x_i} = \lambda_0 \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}-1} \cdot p \cdot (x_i + y_i)^{p-1} + \lambda_1 \cdot p \cdot (x_i)^{p-1} \\ \dots \\ \Lambda'_{y_i} = \underbrace{\lambda_0 \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}-1} \cdot p \cdot (x_i + y_i)^{p-1}}_{R(x,y)} + \lambda_2 \cdot p \cdot (y_i)^{p-1} \end{cases}$$

$\lambda_0 = 0$ – не подх

$\lambda_0 = 1$:
$$\begin{cases} R(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_1 p\cdot (x_1)^{p-1} = 0 \\ \ldots \\ R(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_1 p\cdot (x_n)^{p-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = \left(\frac{C_1}{n}\right)^{1/p}$$
$$\begin{cases} R(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_2 p (y_1)^{p-1} = 0 \\ \ldots \\ R(\bar{x},\bar{y}) + \lambda_2 p (y_n)^{p-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \ldots = y_n = \left(\frac{C_2}{n}\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} = \left(n\cdot\left(\left(\frac{C_1}{n}\right)^{1/p}+\left(\frac{C_2}{n}\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p} = \left(\left(C_1^{1/p}+C_2^{1/p}\right)^p\right)^{1/p} = C_1^{1/p}+C_2^{1/p} = \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum y_i^p\right)^{1/p}.\ \text{ч.т.д.}$$

(3.) Найти Δ вписанный в окр-ть с наиб. суммой квадратов сторон.

Усл:
$$\begin{cases} (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2 \to extr \\ x_1^2+y_1^2=1 \\ x_2^2+y_2^2=1 \\ x_3^2+y_3^2=1. \end{cases}$$

$$\Lambda(x_1x_2x_3y_1y_2y_3) = \lambda_0\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2\right)+$$
$$+\lambda_1(x_1^2+y_1^2-1)+\lambda_2(x_2^2+y_2^2-1)+\lambda_3(x_3^2+y_3^2-1)$$

$\Lambda'_{x_1} = \lambda_0(2(x_1-x_2)+2(x_1-x_3))+2\lambda_1 x_1 = 0.$

$\Lambda'_{x_2} = \lambda_0(-2(x_1-x_2)+2(x_2-x_3))+2\lambda_2 x_2 = 0$

$\Lambda'_{x_3} = \lambda_0(-2(x_2-x_3)-2(x_1-x_3))+2\lambda_3 x_3 = 0.$

$\Lambda'_{y_1} = \lambda_0(2(y_1-y_2)+2(y_1-y_3))+2\lambda_1 y_1 = 0$

$\Lambda'_{y_2} = \lambda_0(-2(y_1-y_2)+2(y_2-y_3))+2\lambda_2 y_2 = 0$

$\Lambda'_{y_3} = \lambda_0(-2(y_2-y_3)-2(y_1-y_3))+2\lambda_3 y_3 = 0.$

$\lambda_0 \neq 0$ – т.к. иначе либо $\lambda_1 = 0$, либо все $x_i; y_i = 0$ $\Rightarrow$ не уровн. $x_i^2+y_i^2=1$.

($\lambda_0 = 1$)
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+2\lambda_1 x_1=0 \\ 2x_2-x_1-x_3+2\lambda_2 x_2=0 \\ 2x_3-x_1-x_2+2\lambda_3 x_3=0 \\ 2y_1-y_2-y_3+2\lambda_1 y_1=0 \\ 2y_2-y_1-y_3+2\lambda_2 y_2=0 \\ 2y_3-y_1-y_2+2\lambda_3 y_3=0. \\ x_1^2+y_1^2=1 \\ x_2^2+y_2^2=1 \\ x_3^2+y_3^2=1. \end{cases}$$

$\cancel{\ldots \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=0.}$

4.) $P_i = (a_{i1} \dots a_{in})$

а) Найти $P_0 = (x_1 \dots x_n)$: $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i |P_0 P_i|^2 \to \min$

т.е $f = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \left((a_{i1}-x_1)^2 + (a_{i2}-x_2)^2 + \dots + (a_{in}-x_n)^2\right) \to extr$

$f'_{x_k} = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \cdot -2(a_{ik}-x_k) = 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \cdot (a_{i1}-x_1) = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{N} w_i (a_{in}-x_n) = 0. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i a_{i1}}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \\ &\dots \\ x_n &= \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i a_{in}}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \end{aligned}}$$

т.е $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \dots a_{Nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

б) Та же задача, при условии, что $P_0 \in$ единичной окр-ти.

т.е $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \left((a_{i1}-x_1)^2 + \dots + (a_{in}-x_n)^2\right) \to extr \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1. \end{cases}$

$\Lambda(x_1 \dots x_n) = \lambda_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i ((a_{i1}-x_1)^2 + \dots + (a_{in}-x_n)) \right)^2 + \lambda_1 (x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1).$

$\Lambda'_{x_k} = \lambda_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} w_i \cdot -2(a_{ik}-x_k) + 2\lambda_1 x_k.$

$\lambda_0 \neq 0$ - т.к иначе все $x_k = 0$, или $\lambda_1 = 0$.

$\Rightarrow \lambda_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} w_i a_{i1} - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1\right) x_1 = 0. \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{N} w_i a_{in} - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1\right) x_n = 0. \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow x_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i a_{ik}}{\sum_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{i1}\right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{in}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1\right)^2$$

$$\left[\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1 &= \left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{i1}\right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{in}\right)^2 \\ \sum_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1 &= -\left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{i1}\right)^2 - \dots - \left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{in}\right)^2 \end{aligned} \right.$$

гессиан $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ чтоб для loc max, нужно $\lambda_1 < 0$.

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} w_i - \lambda_1 = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i a_{i1}\right)^2 + \dots + \left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i a_{in}\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i a_{ik}}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{i1}\right)^2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_{in}\right)^2}}$$