WorldQuant Math

стр 1

1. Знаем, что ~~[illegible]~~ если $n>m \Rightarrow R(n,m)$

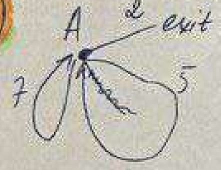
disprove: $n>m \Leftrightarrow R(n,m)$

хотим опровергнуть: $R(n,m) \Rightarrow n>m$

т.е. надо найти $\begin{cases} R(n,m) \\ n \le m \end{cases}$

$\exists\, n \le m : R(n,m)$ true

2.



τ – кол-во часов до выхода из точки A

$E\tau = E(\tau/1\text{ путь})\cdot P(1\text{ путь}) + E(\tau/2\text{ путь})\cdot P(2\text{ путь}) + E(\tau/3\text{ путь})\cdot P(3\text{ путь})$

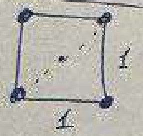
$E\tau = 2\cdot\frac{1}{3} + (5+E\tau)\frac{1}{3} + (7+E\tau)\cdot\frac{1}{3}$

$3x = 2 + (5+x) + (7+x)$

$3x = 14 + 2x$

$x = 14$

3.



~~$S = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v = 1$~~

~~$vt = S$~~

~~$\Rightarrow t = \frac{S}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$~~

расстояние между собаками было 1м

и сокращалось оно на 1м/мин

$\Rightarrow t = 1$ мин

4.

```
A = 0
B = 2
while (B < 30){
    if (B is a prime number){
        A = A + 81
    }
    B = B + 1
}
print(A)
```

2 30

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

$\Rightarrow A = 810$

Тут минус!

5. X и Y, вектора длины a_1 и a_2;

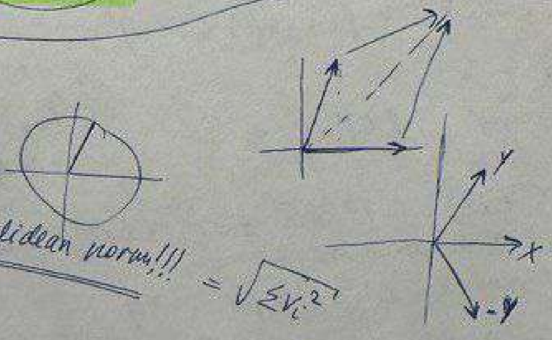
$\|X\| = a_1$, $\|Y\| = a_2$;

~~$|X\cdot Y| \le \sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2} = a_1\cdot a_2 \le C$~~

~~$\langle X, Y\rangle = \|X\|\,\|Y\|\cos\alpha \le C$~~

~~$\cos\alpha = 0.17$~~

$|V| =$ Euclidean norm!!! $= \sqrt{\sum v_i^2}$

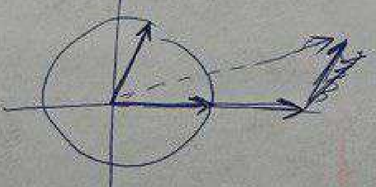


! $|X+Y|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\|X\|\cdot\|Y\|\cdot\cos\alpha$ ~~[illegible]~~

~~хотим $a_1 a_2 \cdot 0.17 \le C$~~

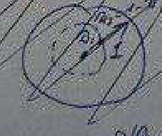
~~$a_1 a_2 \le \frac{C}{0.17} = C\cdot 5.88\ldots$~~

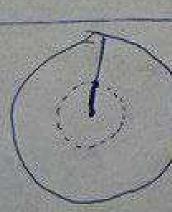
$C^2 \ge a_1^2 + a_2^2$



~~$X = a_1 e^{i\varphi_1}$, $Y = a_2 e^{i\varphi_2}$ $\Rightarrow XY = a_1 a_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$~~

6.





$D = \min(D_1, 1-D_1) = \min(D_1; D_2)$

$P(D_1 \le x) = \frac{\pi x^2}{\pi 1^2} = x^2$

$P(D_2 \le y) = P(1-D_1 \le y) = P(D_1 \ge 1-y) = 1 - P(D_1 \le 1-y) = 1-(1-y)^2$

$0 \le y \le 1$

~~$P(D_1 \le x; D_2 \le y)$~~ $P(\min(D_1, D_2) \le x) = P(D_1 \le x; D_2 > x) + P(D_1 > x; D_2 \le x) = 2\cdot P(D_1 \le x, x \le \frac{1}{2}) = 2\cdot x^2 = 2x^2$, $x \le \frac{1}{2}$

$0 \le x \le \frac{1}{2}$

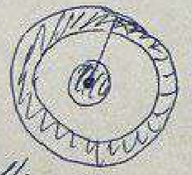
$P(D \le x) = 8x^2 \;;\; x \le \frac{1}{2}$

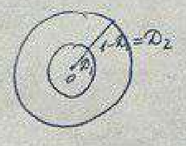
~~$\Rightarrow f_D(x) = 16x;\; x \le \frac{1}{2}$~~

~~Проверка: $\int_0^{1/2} 16x\,dx = 16\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} = 16\cdot\frac{1}{8} = 2$~~ $\Rightarrow$ что-то пошло не так

6. $P(\min(D_1, D_2) \le x) = \dfrac{\pi x^2}{\pi 1^2} + \dfrac{(\pi 1^2 - \pi(1-x)^2)}{\pi 1^2} = x^2 + 1 - (1-x)^2 = 2x$

$x \le 1/2$

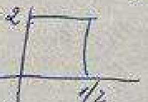




$\Rightarrow f_D(x) = 2;\; x \le 1/2$

Проверка: $\int_0^{1/2} 2\,dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$ всё ок.

$\Rightarrow R[0; \frac{1}{2}]$



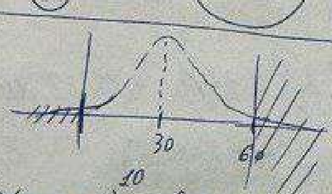
$P(D \le \frac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 2\,dx = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1/4\text{ м} = 25\text{ см}$

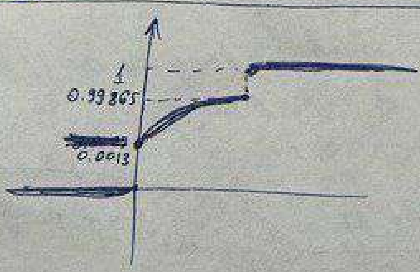
median distance

---

7. $\xi \sim N(30, 100)$

$\sigma = 10;\; 3\sigma = 30$





$P(\max(X_1 \dots X_{10}) \le x) = (P(X_i \le x))^{10} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ (P(X_i \le x))^{10} & x \in [0, 60] \\ 1, & x \ge 60 \end{cases}$

$\Rightarrow f_{\max(X_1 \dots X_n)}(x) = \{ 0,$

$P(\xi \le 60) = 0.99865 \Rightarrow P(\xi \ge 60) = 0.00134989$

пусть не truncated нормальное:

$P(\max(X_1 \dots X_{10}) | \xi \le x) = (P(X_i \le x))^{10}$

$f_{\max}(x) = 10 \cdot \varphi_{X_i}(x) \cdot (P(X_i \le x))^9$

II способ цена игры$(x) = \left(\dfrac{80-x}{61}\cdot(-2) + \dfrac{x}{61}\cdot(-1) + \dfrac{1000}{61}\right)\cdot 10 \to \max_x$

$f(x) = \dfrac{880+x}{61} \to \max_{x \in [0,60]}$ $\Rightarrow x = 60 \Rightarrow$ цена $= \dfrac{940}{61}\cdot 10 = 154.098$

---

8. $\xi \sim [0, 10]$

variance = дисперсия $= \sum (x_i - \bar{x})^2 \to \max$

$D_{\text{исп max}} \; \dfrac{(b-a)^2}{4} \Rightarrow \dfrac{10^2}{4} = 25$

Решение: $Dx = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \left(\int_a^b x f(x)\,dx\right)^2$

$x = y(b-a) + a$

$\int_0^1 y^2 g(y)\,dy \le \int_0^1 y\,g(y)\,dy$

$$\Rightarrow Dx = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \left(\int_a^b x f(x)\,dx\right)^2 =$$

$$= \int_a^b \underbrace{(y(b-a)+a)^2}_{\text{"x}} f(y(b-a)+a)\,(b-a)\,dy - \left(\int_0^1 (y(b-a)+a) f(y(b-a)+a)(b-a)\,dy\right)^2 \leq$$

$$z = \int_0^1 y f(y)(b-a)\,dy$$

$$\leq (b-a)^2 \cdot z + 2a(b-a)z + a^2 - ((b-a)z + a)^2$$

---

9. $EX_1 = 0.99 \cdot 1 + 0.01 \cdot (-100) = 0.99 - 1 = -0.01$

$\Rightarrow E(X_1 + \dots + X_{3500}) = -0.01 \cdot 3500 = -35$

10.

```
A = 167
B = 91
C = 0.
While A-2 > B:
    A -= 2
    C += 1
print(C)
```

$A > 93$ 167 165 ...... 95.

$C = 37$

---

11. 1) $tg\, n \overset{?}{>} \sin n$ — нет

2) $\sin x > \cos x$ — нет

3) $3^{3^{100.000}} > 4^{2^{100.000}} \Leftrightarrow 3^{3^{100.000}} > 2^{2^{100.001}}$ — да

4) $\log_{2^{1000}}(3^{100}) \overset{?}{<} \log_{3^{10000}}(2^{1000})$

$\frac{1}{1000} \cdot 100 \cdot \underbrace{\log_2 3}_{>1} \overset{?}{<} \frac{1000}{10000} \cdot \underbrace{\log_3 2}_{<1}$ — нет

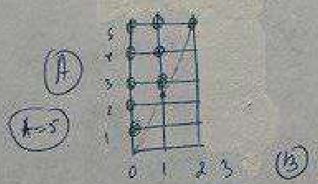
$C_n^k = C_n^{n-k}$

---

12. A: 2021 раз кидает

B: 1010 раз

P(у A нечётных > 2·B) = ?



B=2

$\# = \frac{9}{18} = 1/2$ центральная симметрия

Решение:

	вер-ть E_i	
E_1: у A_{2020} > чем 2 у B_{1010}	x	$\Rightarrow$ у A_{2021} > чем 2 у B
E_2: у A_{2020} = 2 у B_{1010}	$1-2x$	$\Rightarrow$ с вер-ью 1/2 у A_{2021} > чем 2 у B
E_3: у A_{2020} < 2 у B_{1010}	x	$\Rightarrow$ у A_{2021} < чем 2 у B_{1010}

$\Rightarrow P$(у A нечётных > 2B) $= x + \frac{1}{2}(1-2x) = x + \frac{1}{2} - x = 1/2$

13 Exp decay

$y = \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^x$ V

$y = (2k-1)^x$

$y = (2k+1)^x$

$y = \left(\frac{2k-1}{2k-2}\right)^x$ >1

14 $limit = 0.08 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{x}{4}\right]}$

4k

$car = 0.0015 \cdot (1.1)^n$

$0.08 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0.0015 (1.1)^{4k}$

$0.08 = 0.0015 \cdot (1.1)^{4k} \cdot 2^k$

$\frac{800}{15} = 0.0015 \cdot (2 \cdot 1.1^4)^k$

$(2 \cdot 1.1^4)^k = \frac{800}{15}$

$k = \log_{2.92}\left(\frac{800}{15}\right) = 4.559$ ⇒ 2 лет

t=16

K=4 : limit = 0.005
car = 0.006

$0.08 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.005$

$0.0015 \cdot (1.1)^{16} = 0.00689$ ⇒ 16 лет

15

```
s = 0.
for n in range(1, 101):
  if n%2 == 1:
    s += n
  else:
    s -= 2
print(s)
```

$S = 2400$

1... 100

100 чисел: 50 четных, 50 нечетных

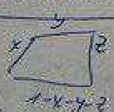
$\overbrace{1+3+\ldots+99}^{49+51} - (\underbrace{2 \cdot \#\text{четных}}_{2 \cdot 50 = 100})$

$(1+99)+(3+97)+\ldots+(49+51)$

1, 3, 5, 7 ... 49.

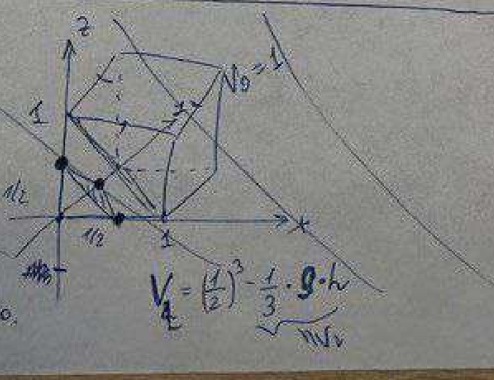
$\# = 48/2 + 1 = 25$ ⇒ $S = 25 \cdot 100 - 100 = 2400$

16



$$\begin{cases} x < y+z+1-x-y-z = 1-x \\ y < x+z+1-x-y-z = 1-y \\ z < x+y+1-x-y-z = 1-z \\ 1-x-y-z < x+y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1/2 \\ y < 1/2 \\ z < 1/2 \\ x+y+z > 1/2 \end{cases}$$

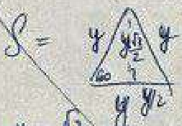
$x+y+z-\frac{1}{2} > 0.$



$V_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot S \cdot h}_{V}$

Ищем h: $x+y+z-\frac{1}{2}=0$, $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}$ стр 3

$T=(0,0,0)$ $h = \frac{|-0+0+0+\frac{1}{2}|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$S =$ 

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{y\sqrt{3}}{2}\cdot y = \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$

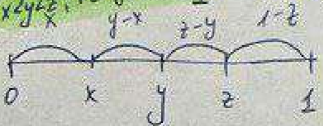
$y = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

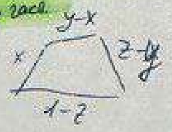
$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}\cdot S\cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{24\cdot 4}$

16 $\Rightarrow p = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{24\cdot 4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8\cdot 3\cdot 4} = \frac{11}{8\cdot 3\cdot 4}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

пусть $x<y<z$, т.е. у нас не все пр-во, а 1/6 его часть



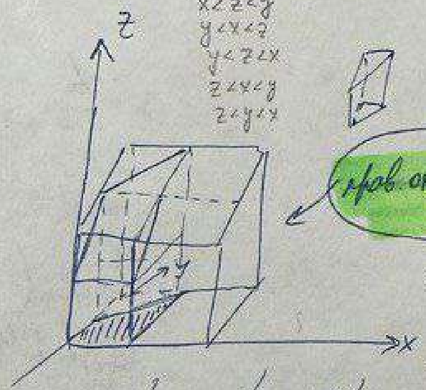


$x<y<z$
$x<z<y$
$y<x<z$
$y<z<x$
$z<x<y$
$z<y<x$

$$\begin{cases} x < (y-x)+(z-y)+(1-z) = 1-x \\ y-x < x+(1-z)+(z-y) = 1+x-y \\ z-y < x+(y-x)+(1-z) = 1+y-z \\ 1-z < x+(y-x)+(z-y) = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1/2 \\ y-x<1/2 \\ z-y<1/2 \\ z>1/2 \end{cases}$$

$y<1/2+x$

$z<1/2+y$



пров. от. 1/2

$x\cdot 6 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{4} - x = \frac{1}{12}$

$x = \frac{3}{12}\ \ \frac{1}{6}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2^4} =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$

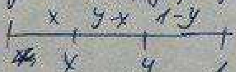
но в самом начале мы предположили, что $x<y<z$.

$\Rightarrow$ ответ $= 6\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

$0.125 = \frac{1}{8}$

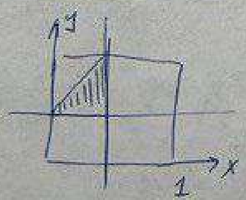
Для Δ:

пусть коорд. разрезов x, y



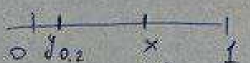
$$\begin{cases} x < (y-x)+(1-y) = 1-x \\ y-x < x+1-y \\ 1-y < x+y-x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1/2 \\ y-x<1/2 \\ y>1/2 \end{cases}$$

$x<y$



Для $y<x$: аналогично

$\Rightarrow p = \frac{1}{8}\cdot 2 = \frac{1}{4}$



17 $n = 300$

$\sum x_i = 1500$

$\sum x_i^2 = 9000$

~~Std? Var = $EX^2 - (EX)^2 = \frac{9000}{300} - \left(\frac{1500}{300}\right)^2 = 30 - 25 = 5$~~

σ^2 Var $= EX^2 - (EX)^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 = \frac{9000}{300} - \left(\frac{1500}{300}\right)^2 = 30 - 5^2 = 5 \Rightarrow$ std $= \sqrt{5}$

18 ~~EX~~ $= X \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 1.05\cdot X + \frac{1}{2}\cdot 0.95X = \frac{1}{2}\cdot X(1.05+0.95) = X$

19.
A) N^3
B) $\log N$
c) $\sqrt{N}$
d) $N\cdot\log N$
e) 2^N
f) N^N
g) $N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N$ H) $\log\log N$

H B C d A E G F

(20) Red | Blue: 30, 60

$E(|x-y| \mid \text{обе одного цвета}) = E(|x-y| \mid \text{обе } \cancel{\text{синие}}\ \text{красные}) \cdot \frac{1}{2} P(\text{обе красные}) + E(|x-y| \mid \text{обе } \cancel{\text{красные}}\ \text{синие}) \cdot \frac{1}{2} P(\text{обе синие})$

$\cancel{2\cdot\int_0^{30}\int_0^{y}(y-x)\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}\,dx\,dy\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2} \qquad \cancel{2\cdot\int_{30}^{60}\int_{30}^{y}(y-x)\frac{1}{60^2}\,dx\,dy\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

обе красные

$\cancel{\frac{1}{2\cdot 60^2}\int_0^{30}\left(\int_x^{30}(y-x)\,dy\right)dx}$

$\cancel{= \frac{(y-x)^2}{2}\Big|_x^{30} = \frac{(30-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}}$

$\cancel{= \frac{1}{2\cdot 60^2}\int_0^{30}\left(\frac{(x-30)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx =}$

$\cancel{= \frac{1}{2\cdot 60^2}\left(\frac{(x-30)^3}{6}\Big|_0^{30} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^{30}\right) =}$

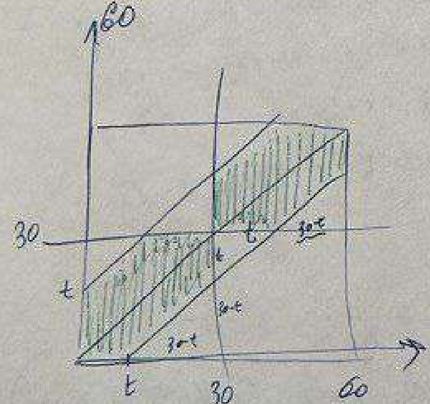
$\cancel{= \frac{1}{2\cdot 60^2}\left(\frac{30^3}{6} - \frac{30^3}{6}\right)}$

$= \frac{1}{2\cdot 60^2}\cdot\int_0^{30}\left(\int_0^{y}(y-x)\,dx\right)dy =$

$= \frac{1}{2\cdot 60^2}\int_0^{30}\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\Big|_0^{y}\,dy\right)dx$

$= \frac{1}{2\cdot 60^2}\int_0^{30}\frac{x^2}{2}\,dx =$

$= \frac{1}{2\cdot 30^2\cdot 4}\cdot\frac{30^3}{3} = \frac{30}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{5}{4}$



$\cancel{P(|x-y| \le t \mid \text{оба в одном квадрате})} = 2\cdot\frac{30^2 - 2\cdot\frac{1}{2}(30-t)^2}{2\cdot 30^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{30}\right)^2$

$\cancel{f(t) = -\left(1-\frac{t}{30}\right)\cdot\left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{1}{30}\cdot\left(1-\frac{t}{30}\right);\ t\in[0,30]}$

$\cancel{\text{проверка: } f(t) = \int_0^{30}\frac{1}{30}\left(1-\frac{t}{30}\right)dt = \frac{1}{30}\left(t-\frac{t^2}{60}\right)\Big|_0^{30} = \frac{1}{30}\left(30 - \frac{30\cdot 30}{2\cdot 30}\right) = \frac{1}{2}}$. Что-то не так

$F(|x-y| \le t) = \frac{900-(30-t)^2}{900} = 1 - \left(1-\frac{t}{30}\right)^2$

$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{30}\left(1-\frac{t}{30}\right)$

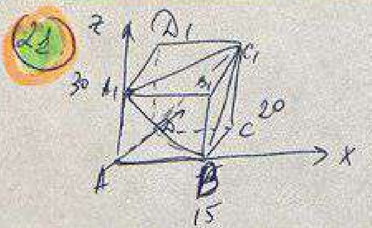
проверка: $\int_0^{30}\frac{2}{30}\left(1-\frac{t}{30}\right)dt = \frac{2}{30}\cdot\left(t-\frac{t^2}{2\cdot 30}\right)\Big|_0^{30} = \frac{2}{30}\left(30 - \frac{30\cdot 30}{2\cdot 30}\right) = 2-1 = 1.$

$\Rightarrow E|x-y| = \int_0^{30} t\,\frac{2}{30}\left(1-\frac{t}{30}\right)dt = \frac{2}{30}\cdot\int_0^{30}\left(t-\frac{t^2}{30}\right)dt = \frac{2}{30}\cdot\int_0^{30}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{90}\right)dt = \frac{2}{30}\left(\frac{30\cdot 30}{2} - \frac{30\cdot 30\cdot 30}{3\cdot 30}\right) = \frac{2}{30}\cdot\frac{30\cdot 30}{63} = 10$

$\Rightarrow$ ответ $= 10\cdot\frac{1}{2} + 10\cdot\frac{1}{2} = 10$

(7/14)

(21)



$B=(15;0;0)$

$A_1=(0;0;30)$

$D=(0;20;0)$

$C_1=(15;20;30)$

$A_1 \to C_1,\ A_1 \to D,\ A_1 \to B$

$\overline{A_1C_1}=(15;20;0)$

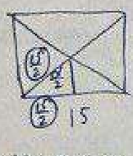
$\overline{A_1D}=(0;20;-30)$

$\overline{A_1B}=(15;0;-30)$

$$V=\begin{vmatrix} \cancel{15} & \cancel{20} & \cancel{0} \\ 0 & 20 & -30 \\ 15 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 15\cdot(-600)-20\cdot(30\cdot 15)+0=$$

$$=-15\cdot 6\cdot 100-6\cdot 15\cdot 100=-2\cdot 90\cdot 100$$

$$\Rightarrow \frac{V}{6}=2\cdot\frac{90}{6}\cdot 100=2\cdot 15\cdot 100=3000$$

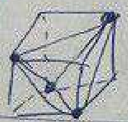


$$\frac{15\cdot 20\cdot 30}{3}=15\cdot 20\cdot 10=3000$$

$=\frac{24}{25}$

$$V=\frac{1}{2}\cdot diag_1\cdot diag_2\cdot h\cdot\frac{1}{3}\ \sin\alpha$$

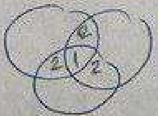
два скрещ. ребра тетраэдра



$$V=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 25\cdot 20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{25}=125\cdot 24=3000$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{25}=\frac{3}{5};\ \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}\ \Rightarrow \sin\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

(22)



7

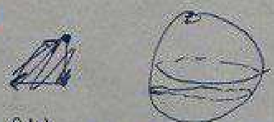
(23) $[1;1000]$ $n!\cdot(n+1)!\,(n+2)!\,(n+3)!=a^2$

$$(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot(n+2)(n+3)=b^2$$

$$(n+1)\cdot(n+3)=c^2$$

$$(n+2)^2-1$$

(24)



1 mile North, West, South, East $\Rightarrow$ infinitely many

(25) $f(3)\to 3.$ $f(3)=1+1+2+3=7$ # 3 сложения

$f(7)=1+1+2+3+4+5+6+7=29$ # 7 сложений $\Rightarrow$ 28 шт

$f(29)=1+1+2+\ldots+28$ # 29 сложения $\Rightarrow 3+7+29=39$

(26) $corr(X,Y)=0.5$

$corr(X,Z)=-0.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -\frac{1}{2} \\ 1/2 & 1 & x \\ -1/2 & x & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(1-x^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=(1-x^2)-\frac{1}{2}(1+x)=(1+x)\left(1-x-\frac{1}{2}\right)=(1+x)\left(\frac{1}{2}-x\right)\geq 0$$

$-\quad +\quad -$

$-1\quad 1/2$

$$\left[-1;\frac{1}{2}\right]$$

$\cos\theta=0.8$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=0.8^2-(0.6)^2=0.64-0.36=0.28$

27

$$x^3+ax^2+bx+c = (x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2) = (x-x_1^2)(x^2-x\cdot x_3^2-x\cdot x_2^2+x_2^2\cdot x_3^2) =$$

где $x_1; x_2; x_3$ – корни $x^3-2x-5=0$.

$$= x^3 - x^2\cdot x_3^2 - x^2\cdot x_2^2 + x\cdot x_2^2\cdot x_3^2 - x^2\cdot x_1^2 + x\cdot x_1^2\cdot x_3^2 + x\cdot x_1^2\cdot x_2^2 - x_1^2x_2^2x_3^2 =$$

$$= x^3 - x^2\underbrace{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}_{=4} + x\underbrace{(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)}_{4} - \underbrace{x_1^2x_2^2x_3^2}_{=25}$$

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 & \sigma_1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = -2 & \sigma_2 \\ x_1x_2x_3 = 5 & \sigma_3 \end{cases}$$

$\Downarrow$ сумма коэф $= 1-4+4-25 = -24$

$\bullet\ (x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = 0+4 = 4$

$\bullet\ \cancel{x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2 = x_1^2(x_2^2+x_3^2)+x_2^2x_3^2 = x_1^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1^2)+x_2^2x_3^2 = x_1^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2}$

$\bullet\ \underbrace{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2}_{=16} = \underbrace{x_1^4+x_2^4+x_3^4}_{=?\ 8} + 2\underbrace{(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)}_{=x}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$f(x_1;x_2;x_3) = x_1^4+x_2^4+x_3^4$

$$f(x_1;x_2;x_3) = \sigma_1^{4-0}\cdot\sigma_2^{0-0}\cdot\sigma_3^0 + A\cdot\sigma_1^{3-1}\cdot\sigma_2^{1-0}\cdot\sigma_3^0 + B\cdot\sigma_1^{2-2}\cdot\sigma_2^{2-0}\cdot\sigma_3^0 + C\cdot\sigma_1^{2-1}\cdot\sigma_2^{1-1}\cdot\sigma_3^1 =$$

$$= \sigma_1^4 + A\cdot\sigma_1^2\cdot\sigma_2 + B\cdot\sigma_2^2 + C\cdot\sigma_1\sigma_2 = F$$

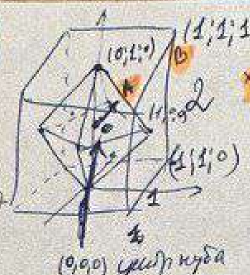
$$F = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = 0-0+2\cdot4+0 = 8$$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \quad (2;0;0)$

$\sigma_1^2 + A\cdot\sigma_1^0\cdot\sigma_2^1\cdot\sigma_3^0 = \sigma_1^2 + A\cdot\sigma_2$

$\Rightarrow x = \dfrac{16-8}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

28



$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$x+y+z=1$

$l_0 = 2$

$l_1 = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $V_1 = \frac{1}{27} \cdot V_0$

Точка A лежит на плоскости $x+y+z=1$

$d(O, \{x+y+z=1\}) = \frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow |OA| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$|OB| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ длина стороны куба уменьшилась в $\frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} = 3$ раза

$\Rightarrow$ объем в 27 раз.

29

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{3}} \cdot \cos x \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{3}} d(\sin x) = \cancel{e^{-\frac{x}{3}} \sin x \Big|_0^{+\infty}}^{\,0} + \int_0^{+\infty} \sin x \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}} dx = \ldots$$

$$\ldots = -\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{3}} d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \cdot \cos x \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \cos x \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$-\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \cdot \cos x \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} I$

$9I = 3 - I$

$10I = 3 \Rightarrow I = 0.3$

30

$p \sim R[0,1]$

0.6

Бросали монетку 10 раз, выпало 6 орлов. Какова оценка вер-ти выпадения орла?

Если тупо, то 0.6.

А если честно МАП сделать, то будет $\hat{\theta} = 0.6$, но $E\hat{\theta} = \frac{7}{12}$

<u>1 способ</u> (0.6)

$X_n = (X_1; X_2 \ldots X_n)$ — посл-ть из n бросков

$m = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$f(\theta | X_n) = \frac{f(X_n|\theta) \cdot f(\theta)}{f(X_n)}$$

Предположим, что $\theta \sim R[0,1]$, т.к. это по усл. сказано.

$\Rightarrow f(\theta|X_n) \propto f(X_n|\theta)$

$\Rightarrow$ MAP для θ — можно найти максимизируя $f(X_n|\theta)$, т.е. MLE.

Правдоподобие: $f(X_n|\theta) = \theta^m (1-\theta)^{n-m}$

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MLE}(X_n) = \arg\max_\theta f(X_n|\theta) = \arg\max_\theta (\log f(X_n|\theta))$

$\Rightarrow \log f(X_n|\theta) = \log(\theta^m (1-\theta)^{n-m}) = m \log\theta + (n-m)\log(1-\theta)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(X_n|\theta) = \frac{m}{\theta} - \frac{n-m}{1-\theta} = \frac{m(1-\theta) - \theta(n-m)}{\theta(1-\theta)} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \theta = \frac{m}{n}$

<u>2 способ</u> (7/12)

Для биномиального расп. сопряженное расп. — это beta-распределение

т.е. $\left.\begin{array}{l} \theta \sim Beta(a, b) \\ X|\theta \sim Bin(n; \theta) \end{array}\right\} \Rightarrow$ posterior density $\theta|x \sim Beta(a+x; b+n-x)$

В нашем случае:

$\theta \sim Beta(1;1)$

$n=10;\ X=6;\ \Rightarrow$ posterior $\theta|X \sim Beta(7;5)$

и апостериорная плотность $f_{\theta|X}(\theta) = 2310 \cdot \theta^6 \cdot (1-\theta)^4\, I(0<\theta<1)$

мода этого распределения $\hat\theta = \frac{3}{5} = 0.6 = MLE$

но $E[\theta|X] = \frac{a^*}{a^*+b^*} = \frac{7}{12}$

---

31 The Liar Sequon

	Truthteller	Liar	
a	$N_{T,\,winter}$	$N_{L,\,winter}$	e
b	$N_{T,\,spring}$	$N_{L,\,spring}$	f
c	$N_{T,\,summer}$	$N_{L,\,summer}$	g
d	$N_{T,\,autumn}$	$N_{L,\,autumn}$	h

$$\Rightarrow \begin{cases} 40 = a + \cancel{f} + \cancel{g} + h \\ 30 = b + \cancel{e} + \cancel{g} + h \\ 50 = c + \cancel{e} + \cancel{f} + h \\ 0 = \cancel{d} + \cancel{e} + \cancel{f} + \cancel{g} \\ a+b+c+\cancel{d+e+f+g}+h = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+h = 40 \\ b+h = 30 \\ c+h = 50 \\ a+b+c+h = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+3h = 120 \\ a+b+c+h = 100 \end{cases} \Rightarrow 2h = 20 \Rightarrow \begin{cases} h = 10 \\ a = 30 \\ b = 20 \\ c = 40 \end{cases}$$

---

32 Walk on the Cube

Муха идет из A в B.

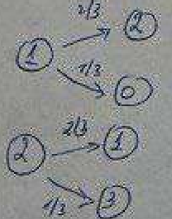
Если она вдруг возвращается в A – то она failed.

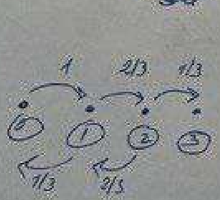
найти E(число шагов | она достигла 3) = ~~…~~

$P(\text{успех}) = P(\text{успех на 3-м шаге}) + P(\text{успех на 5-м}) + P(\text{успех на 7-м}) + \ldots$

$$\underset{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{} \qquad \underset{\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}}{} \qquad \underset{\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{3}}{}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{9}\cdot\frac{9}{5} = \frac{2}{5} = \text{знаменатель}$$





$E(\text{ч.ш.} \cap \text{успех}) = 3\cdot P(\text{на 3-м шаге}) + 5\cdot P(\text{на 5-м шаге}) + \ldots =$

$$= 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} + 7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{3} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^k}_{\frac{4/9}{(1-4/9)^2} = \frac{36}{25}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{5} = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow E(\text{ч.ш.} \cap \text{успех}) = \frac{36}{25} + \frac{2}{5} = \frac{46}{25} = \text{числитель}$

$\Rightarrow$ ответ $= \frac{46/25}{2/5} = \frac{46}{25}\cdot\frac{5}{2} = \frac{23}{5} = 4.6$

(33) Random game

Каждый из 4-х человек пишет своё имя на листочке, потом листочки перемешивают
2021 раунда в игре
Найти корреляцию между points scored by two different players by the end of the game
$X_1^{(i)}; X_2^{(i)}; X_3^{(i)}; X_4^{(i)}$ – score каждого игрока в одном раунде
$Y_1; Y_2; Y_3; Y_4$ – score каждого игрока за всю игру

$$corr(Y_1;Y_2) = corr\left(X_1^{(1)}+\ldots+X_1^{(2021)};\ X_2^{(1)}+\ldots+X_2^{(2021)}\right) = \frac{cov\left(X_1^{(1)}+\ldots+X_1^{(2021)};\ X_2^{(1)}+\ldots+X_2^{(2021)}\right)}{\sqrt{D\left(X_1^{(1)}+\ldots+X_1^{(2021)}\right)}\cdot\sqrt{D\left(X_2^{(1)}+\ldots+X_2^{(2021)}\right)}} =$$

$X_1^{(i)}$ и $X_2^{(j)}$ – незав.

$$= \frac{2021\cdot cov\left(X_1^{(1)};X_2^{(1)}\right)}{\sqrt{2021\cdot D(X_1^{(1)})}\cdot\sqrt{2021\cdot D(X_2^{(1)})}} = corr\left(X_1^{(1)};X_2^{(1)}\right) = \frac{1/48}{\sqrt{\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{1}{48}\cdot\frac{16}{3} = \frac{1}{9}$$

$EX_1 = P(\text{вытянул своё}) = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$

$EX_1X_2 = 1\cdot(\text{2 чела получили своё}) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{3\cdot4} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow cov(X_1;X_2) = EX_1X_2 - EX_1EX_2 = \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4\cdot3} - \frac{1}{4\cdot4} = \frac{1}{4\cdot4\cdot3} = \frac{1}{48}$

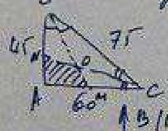
$DX_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = 1\cdot\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

$\Rightarrow corr(X_1^{(1)};X_2^{(1)}) = \frac{cov(X_1;X_2)}{\sqrt{DX_1}\cdot\sqrt{DX_1}} = \frac{1/48}{\sqrt{\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{1}{48}\cdot\frac{16}{3} = \frac{1}{9}$

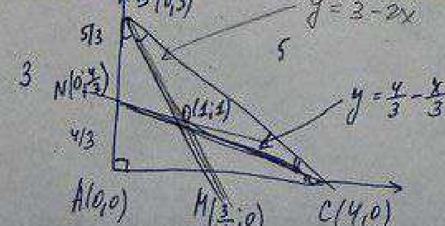
---

(34) Point in the Triangle

$AB = 45$; $AC = 60$; $BC = 75$;
Точка D – рандомная внутри Δ
Найти вер-ть того, что largest perpendicular distance from point D to the triangle's three sides is the distance to side BC?



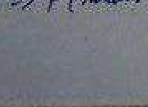
нам нужна площадь ANOM
Биссектриса делит сторону пропорционально прилежащим сторонам



1) Ищем точку O: $3-2x = \frac{4}{3}-\frac{x}{3}$
$9-6x = 4-x \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1$ $(1;1)$

2) $S_{\Delta ANC} = \frac{4}{9}\cdot S_{\Delta ABC} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3\cdot4}{2} = \frac{8}{3}$

3) $S_{\Delta OMC} = ?$



$\vec{MO} = (-\frac{1}{2};1)$
$\vec{MC} = (\frac{5}{2};0)$
$\Rightarrow [\vec{MO};\vec{MC}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0;0;-\frac{5}{2})$

$\Rightarrow S_{\Delta OMC} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

4) $\Rightarrow S_{ANOM} = S_{ANC} - S_{OMC} = \frac{8}{3} - \frac{5}{4} = \frac{32-15}{12} = \frac{17}{12}$

5) $\Rightarrow P(\text{попасть в } ANOM) = \frac{17/12}{S_{\Delta ABC}} = \frac{17/12}{6} = \frac{17}{72}$

35. Powers of Two

$x@y = \frac{xy}{x+y}$; найти $(((1024@512)@256)@\dots@4)@2$?

1) $1024@512 = \frac{2^{10}\cdot 2^9}{2^{10}+2^9} = \frac{2^{19}}{2^9\cdot 3} = \frac{2^{10}}{3} = \frac{2^{10}}{2^2-1}$

2) $\frac{2^{10}}{3}@2^8 = \frac{2^{10}\cdot 2^8}{3\left(\frac{2^{10}}{3}+2^8\right)} = \frac{2^{10}\cdot 2^8}{2^{10}+3\cdot 2^8} = \frac{2^{10}}{2^2+3} = \frac{2^{10}}{7} = \frac{2^{10}}{2^3-1}$

3) $\frac{2^{10}}{7}@2^7 = \frac{2^{10}\cdot 2^7}{7\left(\frac{2^{10}}{7}+2^7\right)} = \frac{2^{10}\cdot 2^7}{2^{10}+7\cdot 2^7} = \frac{2^{10}}{2^3+2^2-1} = \frac{2^{10}}{2^4-1}$

4) $\dots@2^6 \to \frac{2^{10}}{2^5-1}$

$2^5 \to \frac{2^{10}}{2^6-1}$

$2^4 \to \frac{2^{10}}{2^7-1}$

$2^3 \to \frac{2^{10}}{2^8-1}$

$2^2 \to \frac{2^{10}}{2^9-1}$

$2^1 \to \frac{2^{10}}{2^{10}-1} = \frac{1024}{1023} = 1.00097752 \approx 1.001$

36. Quicksort

Average time complexity $O(N\cdot \log N)$, worst-case $O(N^2)$

37. Inverse matrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A^{-1}) = ?$

$\det A = 1\cdot 0 - 2\cdot(2-1) + 2\cdot(4-2) = -2+4 = 2 \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1/2$

38. $Z \sim N(0,1)$

$g(x) = P(Z>x)$. Найти асимптотику $g(x)$. Ответ: $\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$

Решение: $P(Z>x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{(t^2-x^2)}{2}}dt =$

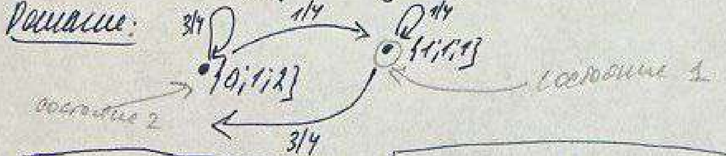
$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_x^{+\infty} e^{-\frac{(t-x)(t+x)}{2}}dt \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_x^{+\infty} e^{-(t-x)x} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\underbrace{\int_x^{+\infty} e^{-tx}dt}_{= \underbrace{-\frac{1}{x}\cdot e^{-tx}\Big|_x^{+\infty}}_{=\frac{1}{x}\cdot e^{-x^2}}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot x}$$

39. Three dollar

У каждого 1$. По звонку каждый передаёт свою монету кому-то из двух оставшихся. Найти вер-ть, что после 2021 раунда у всех будет по 1$.

Note: чел без денег из игры не выбывает.

Решение:



$\{0;1;2\} \xrightarrow{LL} \{1;1;1\}$
$\xrightarrow{LR} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{RL} \{0;1;2\}$
$\xrightarrow{RR} \{1;0;2\}$

$\{1;1;1\} \xrightarrow{LLL} \{1;1;1\}$
$\xrightarrow{LLR} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{LRL} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{LRR} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{RLL} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{RLR} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{RRL} \{2;0;1\}$
$\xrightarrow{RRR} \{1;1;1\}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1;0) \to (1;0)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) \to \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16};\frac{3}{16}+\frac{9}{16}\right) = \left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ это стац. распр. $\Rightarrow$ $\boxed{P(\text{перейти в состояние 1}) = 1/4}$

40. Knapsack problem

Тут ответ 61

N = 18 - вместимость рюкзака

i	w_i	p_i
1	3	10
2	4	12
3	5	18
4	4	19
5	7	20
6	8	19
7	5	12

$\sum w_i = 18$
$\sum v_i = 61$

Метод динамич. программирования:

```
for j from 0 to W:              # m[i;W] = макс. ценность предметов, полученных из первых j предметов, с весом ≤ W.
    m[0;j] = 0
for i from 1 to n:
    for j from 0 to W:
        if w[i] > j:
            m[i;j] = m[i-1;j]
        else:
            m[i;j] = max(m[i-1;j]; m[i-1;j-w[i]]+v[i])
```

Как сгенерировать все подмн-ва массива из n элем.:

```
w = np.array([3;4;5;4;7;8;5])
p = np.array([10;12;18;19;20;19;12])
maxp = 0
for x in range(1; 2^8):
  mas = np.zeros(7)
  for i in range(0,7):
    mas[i] = int(bool(x & (int(2**i))) (это типа i-й бит)
  mask = (mas == 1)
  tekw = sum(w[mask])
  tekp = sum(p[mask])
  if tekw <= 18 and tekp > maxp:
      maxp = tekp
```