Задачи на ОДУ

4 сентября 2022 г.

Уравнения с постоянными коэффициентами

См. Филиппов, стр. 49-52.

Как решать линейные диффуры с правой частью

ToDo

ODE-1

$$y'' + y = 4\cos(x) + (x^2+1)e^x$$

Решение.

Решаем однородное уравнение $y''+y=0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$, его корни $\lambda_{1,2}=\pm i$ – оба кратности 1. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_o(x)=C_1e^{ix}+C_2e^{-ix}$, что, в силу рациональности коэффициентов в левой части уравнения, можно переписать в виде $C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$.

Ищем частное решение уравнения $y''+y=4\cos(x)$. Так как $1\cdot i$ – корень характеристического уравнения кратности 1, то частное решение ищется в виде

$$x^1\cdot e^{0x}\cdot((A)\cos(x)+(B)\sin(x)) = x(A\cos(x)+B\sin(x)).$$

Ищем частное решение уравнения $y''+y=(x^2+1)e^x$. Так как 1 – не корень характеристического уравнения, частное решение имеет следующий вид:

$$y_2(x) = e^x(Cx^2+Dx+E).$$

Итак, общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+x(A\cos(x)+B\sin(x))+e^x(Cx^2+Dx+E).$$

Ответ: $y(x)=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+x(A\cos(x)+B\sin(x))+e^x(Cx^2+Dx+E)$.

ODE-2

$$y''' - y'' - 6y' = e^{3x} - \sin 3x$$

Решение.

Найдём сначала общее решение однородного уравнения $y''' - y'' - 6y' = 0$. Его характеристический многочлен $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda$ имеет три корня (и все они простые): $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Таким образом, общее решение имеет вид $y_{\text{оо}} = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы частных решений уравнений $y''' - y'' - 6y' = e^{3x}$ и $y''' - y'' - 6y' = -\sin 3x$. Для первого уравнения заметим, что 3 — корень характеристического многочлена кратности 1, а потом частное решение имеет вид Axe^{3x}. Для второго уравнения заметим, что $3i$ не является корнем характеристического многочлена, а потому частное решение имеет вид $B\sin 3x + D\cos 3x$. Итак, $y_{\text{чн}} = Axe^{3x} + B\sin 3x + D\cos 3x$.

Общее решение неоднородного уравнения, таким образом, имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + Axe^{3x} + B\sin 3x + D\cos 3x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + Axe^{3x} + B\sin 3x + D\cos 3x$.

ODE-3

$$y''' + y' = -\sin x + e^{2x}\sin 4x$$

Решение. Ищем однородное решение: $\lambda^3 + \lambda = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_3 = 0$. Это сумма косинусов, синусов и константа. $y_{\text{о}} = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3$.

$-\sin x = e^{0x}\sin x$, а i — это корень хар. уравнения, то первое частное решение можно искать в виде $y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$.

Для $e^{2x}\sin 4x$: $2 + 4i$ не корень хар. уравнения, то ищем в виде $y_2 = e^{2x}(D\cos 4x + E\sin 4x)$.

Итого общее решение неоднородного:

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 + x(A\cos x + B\sin x) + e^{2x}(D\cos 4x + E\sin 4x)$

ODE-4

$$y'' - 3y' = x + e^{3x}\sin(x)$$

Решение.

Решаем однородное уравнение $y'' - 3y' = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$ – оба кратности 1. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_o(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{3x}$.

Ищем частное решение уравнения $y'' - 3y' = x$. Так как $x = xe^{0x}$, и 0 – корень характеристического уравнения кратности 1, то частное решение ищется в виде $y_1(x) = (Ax + B)xe^{0x}$.

Теперь найдём частное решение уравнения $y'' - 3y' = e^{3x}\sin(x)$. $3+i$ – не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение таково: $y_2(x) = De^{3x}\sin(x) + Ee^{3x}\cos(x)$.

Итак, общее решение исходного уравнения $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_o(x)$, т.е. $y(x) = Ax^2 + Bx + De^{3x}\sin(x) + Ee^{3x}\cos(x) + C_1 + C_2e^{3x}$.
Ответ: $y(x) = Ax^2 + Bx + De^{3x}\sin(x) + Ee^{3x}\cos(x) + C_1 + C_2e^{3x}$.

ODE-5

$$y'' + 4y = x\sin(2x) - x^2$$

Решение.

Характеристическое уравнение таково: $\lambda^2 + 4 = 0$, его корни $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$ – оба кратности 1. Тогда общее решение однородного уравнения $y_o(x) = C_1e^{0x}\cos(2x) + C_2e^{0x}\sin(2x)$.

Ищем частное решение уравнения $y'' + 4y = x\sin(2x)$. Имеем: $x\sin(2x) = xe^{0x}\sin(2x)$, $0+2i$ – корень характеристического уравнения кратности 1, поэтому частное решение будет таким: $y_1(x) = x((Ax+B)e^{0x}\sin(2x) + (Dx+E)e^{0x}\cos(2x))$.

Теперь находим частное решение уравнения $y'' + 4y = -x^2$. Так как $-x^2 = -x^2e^{0x}$ и 0 – не корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид: $y_2(x) = (Fx^2 + Gx + H)e^{0x}$.

Общее решение исходного уравнения $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_o(x)$, т.е. $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + (Ax^2 + Bx)\sin(2x) + (Dx^2 + Ex)\cos(2x) + Fx^2 + Gx + H$.
Ответ: $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + (Ax^2 + Bx)\sin(2x) + (Dx^2 + Ex)\cos(2x) + Fx^2 + Gx + H$.

ODE-6

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + \cos 2x$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$. Значит, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x},$$

а частное (совпал корень $\lambda = 1$, а $\lambda = 2i$ – нет) –

$$y = xe^x(Ax + B) + D\cos 2x + E\sin 2x.$$

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + x(Ax+B)e^x + D\cos 2x + E\sin 2x$

ODE-7

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x} - x^2 \cos x.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеет корни $-1 \pm 2i$.
Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

Частные решения:

- $2xe^{-x}$.

  Частное решение имеет вид: $x^s Q_m(x) e^{-x}$. Кратность корня -1: $s = 0$, $\deg Q_m = 1$. Следовательно, частное решение имеет вид

  $$y_1 = (Ax + B)\, e^{-x}.$$

- $-x^2 \cos x$.

  Частное решение имеет вид: $x^s e^{0x}\,(P_m(x) \cos x + Q_m(x) \sin x)$. Кратность корня i: $s = 0$, $\deg P_m = \deg Q_m = 2$. Следовательно, частное решение имеет вид

  $$y_2 = \left(Cx^2 + Dx + E\right) \cos x + \left(Fx^2 + Gx + H\right) \sin x.$$

Общее решение:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 =$$
$$C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x + (Ax + B)\, e^{-x} + \left(Cx^2 + Dx + E\right) \cos x + \left(Fx^2 + Gx + H\right) \sin x.$$

Ответ:

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x +$$
$$(Ax + B)\, e^{-x} + \left(Cx^2 + Dx + E\right) \cos x + \left(Fx^2 + Gx + H\right) \sin x.$$

ODE-8

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + x^3 - 2x^2 + 10$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$.
корни: $-1 \pm i$

Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$ а частное —

$$xe^{-x}(A\cos x + B\sin x) + (Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)$$

первое слагаемое такое из-за того, что $-1+i$ корень характеристического уравнения степени 1, а второе слагаемое такое потому что $(x^3-2x^2+10) = (x^3-2x^2+10)e^{0x}$, а 0 не корень характеристического уравнения.

Ответ: $C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + xe^{-x}(A\cos x + B\sin x) + (Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)$

ODE-9

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 3y' + 2y = \cos 2x + x^3e^{2x}$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x},$$

а частное —

$$(A\cos 2x + B\sin 2x) + x(Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)e^{2x}$$

(первое слагаемое такое из-за того, что $2i$ — не корень характеристического уравнения; а второе слагаемое такое, потому что 2 — корень характеристического уравнения кратности 1).

Ответ: $C_1e^x + C_2e^{2x} + A\cos 2x + B\sin 2x + x(Dx^3 + Ex^2 + Fx + G)e^{2x}$

ODE-10

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y''' + 4y'' = x - 1 + \cos 4x$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda+4) = 0$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-4x},$$

а частное —

$$y = x^2(Ax + B) + (D\cos 4x + E\sin 4x)$$

(первое слагаемое такое, потому что 0 – корень характеристического уравнения кратности 2; а второе слагаемое такое из-за того, что $4i$ – не корень характеристического уравнения).

Ответ: $C_1 + C_2x + C_3e^{-4x} + x^2(Ax + B) + D\cos 4x + E\sin 4x$

ODE-11

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 3y' = x + \cos 2x$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{3x},$$

а частное –

$$y = x(Ax + B) + D \cos 4x + E \sin 4x$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x(Ax + B) + D \cos 4x + E \sin 4x$

ODE-13

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \sin 2x$$

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$. Значит общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

Найдем общий вид частного решения. Сначала подберем для e^{-4x}. Т.к. -4 — корень характеристического уравнения кратности один, то частное решение надо искать в виде

$$Axe^{-4x}.$$

Теперь подберем для $xe^{-x} \sin 2x$. Т.к. $-1 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение надо искать в виде

$$e^{-x}((B + Cx) \cos 2x + (D + Ex) \sin 2x)$$

Окончательно получаем

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + Axe^{-4x} + e^{-x}((B + Cx) \cos 2x + (D + Ex) \sin 2x)$

ODE-16

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + y = \sin(x) - 2e^{-x}$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)$. Значит, общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Ищем частное решение уравнения $y''+y=\sin(x)$. Так как i – корень характеристического уравнения кратности 1, то частное решение ищется в виде $y_1(x)=x(A\sin(x)+B\cos(x))$.

Теперь найдём частное решение уравнения $y''+y=2e^{-x}$. -1 – не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение таково: $y_2(x)=De^{-x}$.

Итак, общее решение исходного уравнения $y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_o(x)$, т.е. $y(x)=Ax\sin(x)+Bx\cos(x)+De^{-x}+C_1\cos x+C_2\sin x$.
Ответ: $y(x)=Ax\sin(x)+Bx\cos(x)+De^{-x}+C_1\cos x+C_2\sin x$

ODE-18

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 6y + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{-3x}\cos x$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2+6\lambda+10=(\lambda+3-i)(\lambda+3+i)$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0(x) = C_1e^{-3x}\cos x + C_2e^{-3x}\sin x$$

Ищем частное решение уравнения $y''+6y+10y=3xe^{-3x}$. Так как -3 – не корень характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде $y_1(x)=x^0(Ax+B)e^{-3x}=(Ax+B)e^{-3x}$.

Теперь найдём частное решение уравнения $y''+6y+10y=-2e^{-3x}\cos x$. $-3+i$ – корень кратности 1 характеристического уравнения, поэтому частное решение таково: $y_2(x)=x^1e^{-3x}(C\cos x+D\sin x)$.

Итак, общее решение исходного уравнения $y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_o(x)$, т.е. $y(x)=C_1e^{-3x}\cos x+C_2e^{-3x}\sin x+(Ax+B)e^{-3x}+xe^{-3x}(C\cos x+D\sin x)$.
Ответ: $y(x)=C_1e^{-3x}\cos x+C_2e^{-3x}\sin x+(Ax+B)e^{-3x}+xe^{-3x}(C\cos x+D\sin x)$

ODE-20

Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x - x^2$$

Решение.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - (1+2i))(\lambda - (1-2i))$. Значит, общее решение имеет вид

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),$$

а частное (совпал корень $\lambda = 1 + 2i$, а $\lambda = 0$ – нет) –

$$y = xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + Dx^2 + Ex + F.$$

Ответ: $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + xe^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + Dx^2 + Ex + F$