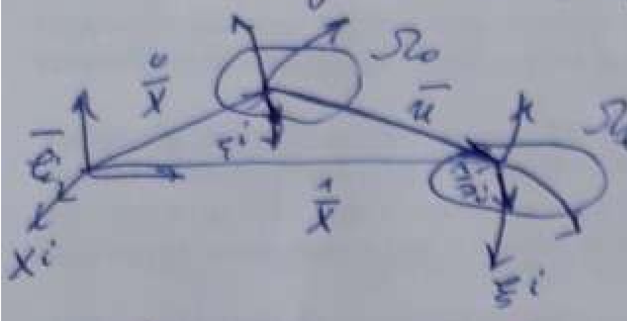
Теория деформаций



$$\bar{u} = \overset{\circ}{u}{}^i \overset{\circ}{\bar{\partial}}_i = \hat{u}^j \hat{\bar{\partial}}_j$$

$$\overset{\circ}{\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \, \overset{\circ}{\bar{\partial}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\bar{\partial}}{}^j$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}{}^k \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{u}_k \right)$$

т-р деф. Грина

В ДСК $(\xi^i = \overset{\circ}{x}{}^i)$ $\quad \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_k}{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}\frac{\partial \overset{\circ}{u}{}^k}{\partial \overset{\circ}{x}{}^j} \right)}$ (1)

$$\hat{E} = \varepsilon_{ij} \, \hat{\bar{\partial}}{}^i \otimes \hat{\bar{\partial}}{}^j$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_i \hat{u}_j + \hat{\nabla}_j \hat{u}_i - \hat{\nabla}_i \hat{u}^k \hat{\nabla}_j \hat{u}_k \right)$$

т-р деф. Альманзи

В ДСК $(\xi^i = \hat{x}^i)$ $\quad \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}^i} - \frac{\partial \hat{u}^k}{\partial \hat{x}^i}\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \hat{x}^j} \right)}$ (2)

В случае <u>малых относит-х смещений</u>:

(*) $\nabla_i u_j \ll 1$ $\quad$ ф-лы (1), (2) принимают вид (в ДСК)

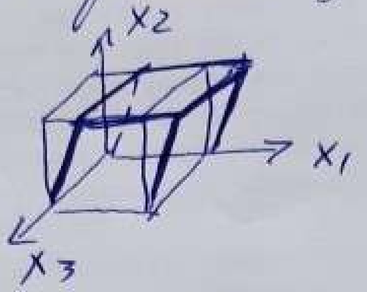
(3) $\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$ тр деф-й Коши (т-р малых деф-й)

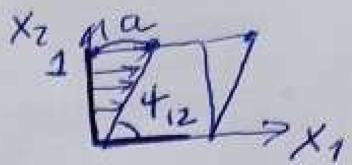
<u>Замеч</u>. При условии (*) не делают различий между лагранжевыми коорд-ми в отсчетной и актуальной конфиг-х: $\overset{\circ}{\bar{\partial}}_i \approx \hat{\bar{\partial}}_i$, $\overset{\circ}{x}{}^i \approx \hat{x}^i$, $\overset{\circ}{u}{}^i \approx \hat{u}^i$

Этот подход испол. при расчетах констр-й из металлов, дерева. Для резиноподобных матер-в – использ., как правило, нелин. ф-лы для деф-й

Задача 4.10.

(4) $\begin{cases} \hat{x}_1 = \overset{\circ}{x}_1 + a(t)\overset{\circ}{x}_2 \\ \hat{x}_2 = \overset{\circ}{x}_2 \\ \hat{x}_3 = \overset{\circ}{x}_3 \end{cases}$ – простой сдвиг в пл-ти Ox_1x_2





(5) $\begin{cases} u_1 = \hat{x}_1 - \overset{\circ}{x}_1 = a(t)\overset{\circ}{x}_2 = a(t)\hat{x}_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$

① введем м-цу $\hat{D} := \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial \overset{\circ}{x}_j}\right) \Rightarrow$

ф-лу (1) м. записать в виде:

$\hat{\varepsilon}_{ДСК} = \frac{1}{2}\left(\hat{D} + \hat{D}^T + \hat{D}^T\hat{D}\right)$ $\hat{D}$ - тензор дисторсии

$\hat{D} \overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{D}^T\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

② Аналогично: $\hat{H} := \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial \hat{x}_j}\right)$

$\boxed{\hat{E}_{ДСК} = \frac{1}{2}\left(\hat{H} + \hat{H}^T - \hat{H}^T\hat{H}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

③ Т-р малых деф-й

(6) $\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\hat{D} + \hat{D}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right) = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \psi_{12} = a$

(можно получить этот рез-т из геом. соображ-й:
$tg\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \psi_{12} = a$)

№ 4.11 При простом сдвиге найти

а) относит. удлинение матер-х элем-в || осям Ox_1, Ox_2, Ox_3

б) всевозможные матер-е эл-ты, для которых относит. удлинение в мом. t равно 0.

$$e = \frac{|\delta \overset{1}{x}| - |\delta \overset{0}{x}|}{|\delta \overset{0}{x}|} = \sqrt{1 + \overset{0}{l}{}^{T} \cdot 2\overset{1}{\varepsilon}\, \overset{0}{l}} - 1, \quad \overset{0}{l} = \frac{\delta \overset{0}{x}}{|\delta \overset{0}{x}|}$$

Д/з Найти ориентацию волокон, которые при сдвиге $a(t)$ останутся ортогональными в момент t.

Гл. значения и гл. направления тензора деф-ции

$\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$

М-цу (ε_{ij}) можно привести к диаг. виду $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

ε_i - гл. значения тенз. деф-ции. Они находятся из условия

(7) $\det(\varepsilon^i_{\cdot j} - \lambda\delta^i_j) = 0$

Гл. направл-е ξ находится из условия:

(8) $(\varepsilon^i_{\cdot j} - \lambda\delta^i_j)\xi^j = 0.$

Ур-е (7) имеет вид:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon^i_{\cdot i} = \varepsilon_{ij}g^{ji} \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}(I_1^2 - \varepsilon^i_{\cdot j}\varepsilon^j_{\cdot i}) \\ I_3 &= \det(\varepsilon^i_{\cdot j}) \end{aligned}\right\} \text{ инв-ты преобр-я с.к.}$$

$$dV = dV_0\sqrt{g} \approx dV_0(1 + I_{1\varepsilon}) \Rightarrow$$

$$\theta := \frac{dV - dV_0}{dV_0} \approx I_{1\varepsilon}$$

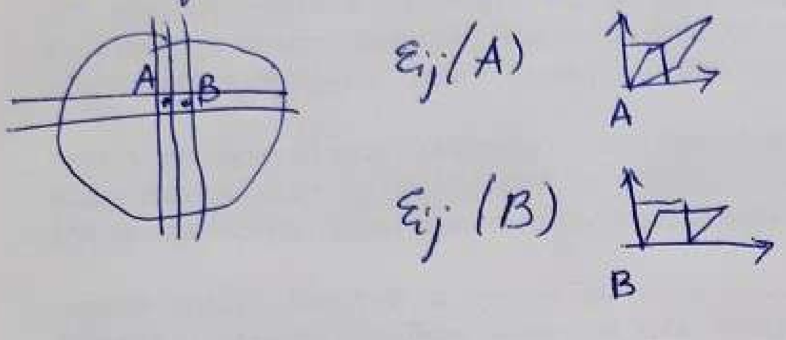
Замечание. Гл. оси остаются ортогональными и после деф-ции.

N $\varepsilon_{11} = Ax_2^2$, $\varepsilon_{ij} = 0$ при $ij \neq 11$

Деф-ции малые. Найти поле перемещений.

Условия совместности тензора деформ-ии

Может ли произвольное поле $\varepsilon_{ij}(\bar{x})$ задавать деформацию среды?



При произвольных ф-х $\varepsilon_{ij}(\bar{x})$ из деформированных элементов, возможно, уже не „склеить" сплошную среду

Другой подход:

$\varepsilon_{ij} \sim (u_i)$ – 6 ур-й для 3 неизв-х ф-ций u_i

$\Rightarrow$ должны $\exists$ усл-я разрешимости 6 ур-й отн-но $3^{-х}$ неизв-х, т-е должны $\exists$ усл-я совм-ти тензора деформ-ий.

Они могут быть получены из усл-я евкл-ти пр-ва $R_{ijkl} = 0$ (т-р кривизны Римана-Кр-ля).

В общем случае эти соотн-я нелинейны, но в случае малых деф-й имеют вид:

$$(9)\quad \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \xi_j \partial \xi_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial \xi_i \partial \xi_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = 0}$$

$$R_{1212}\quad (9')\quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi_2^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

$$R_{1213}\quad (9'')\quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

см. з-ку (N) стр 5.4.

произошло одноосное растяжение, см. задачу **4.1**. Чему ра
но относительное удлинение материального элемента с начало
в заданной точке, который до деформации был паралле
оси x_1? Вычислить тензор деформаций Грина. Указать част
цы, в малой окрестности которых деформация не происходит

4.8 В результате перемещения из начального состояния ч
стицы среды $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ оказались в точках с координатами

$$x_i = \xi_i + a\xi_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad a = \text{const} > -1$$

относительно пространственной декартовой системы координа

Показать, что относительное удлинение всех материальны
элементов одинаково, поэтому такая деформация называется вс
сторонним растяжением или сжатием. При каких значениях
происходит растяжение, при каких — сжатие?

4.9 Простым сдвигом называется деформация сплошной ср
ды, отвечающая закону движения

$$x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3,$$

где (x_i) — пространственная декартова система координа
(ξ_α) — лагранжева система координат; $a(t)$ — функция времен
причем $a(0) = 0$. Считая функцию $a(t)$ заданной, найти тензор
деформаций Грина и Альманси. Найти их главные компонент
и главные оси. Упростить формулы в случае $|a(t)| \ll 1$.

4.10 Найти компоненты поля перемещения в лагранжевом
эйлеровом описании при простом сдвиге, см. задачу **4.9**. Опре
делить компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси
выразив их через производные поля перемещения. Найти тен
зор малых деформаций.

4.11 При простом сдвиге, см. задачу **4.9**, найти

а) относительное удлинение материальных элементов с началом во всевозможных частицах ξ и до деформации параллельных осям x_1, x_2 и x_3;

б) всевозможные материальные элементы, для которых относительное удлинение в момент t равно нулю.

4.12 Найти относительное изменение величины малого объема среды при простом сдвиге, см. задачу **4.9**. Провести вычисления двумя способами — используя инварианты тензора Грина и инварианты тензора Альманси.

4.13 В некоторой точке среды, в которой произошла малая деформация, тензор малых деформаций в декартовой системе координат имеет следующую матрицу компонент

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.03 & 0 \\ 0.03 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Найти наибольшее и наименьшее относительчое удлинение материальных элементов в этой точке. Найти направление материальных элементов, которые испытали

а) наибольшее относительное удлинение;

б) наименьшее относительное удлинение.

Вычислить относительное изменение объема в этой точке.

4.14 Двойным сдвигом называется деформация сплошной среды, отвечающая закону движения

$$x_1 = \xi_1 + b(t)\xi_2, \quad x_2 = \xi_2 + b(t)\xi_3, \quad x_3 = \xi_3,$$

где (x_i) — пространственные декартовы и (ξ_α) — лагранжевы координаты; $b(t)$ — функция времени, причем $b(0) = 0$. Считая функцию $b(t)$ заданной, найти тензоры деформаций Грина и Альманси.

4.15 Найти компоненты поля перемещения в эйлеровом описании при двойном сдвиге, см. задачу **4.14**. Найти тензор малых деформаций.

(2) $\xi^i = \hat{x}^i$

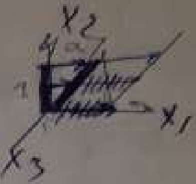
$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(D + D^T - D^T D\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) тензор малых деформаций

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(D + D^T\right) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right)$

$\frac{\pi}{2} - \psi_{12} = 2\varepsilon_{12} = a$



№4.11

$$e_\xi = \sqrt{\mathring{l}^T 2\mathring{\varepsilon}\,\mathring{l} + 1} - 1$$

а) $\bar{l} \parallel \bar{e}_1$

$$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow e_1 = 0$$

$$(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a\ \ a^2\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a^2$$

$e_2 = \sqrt{1+a^2} - 1$

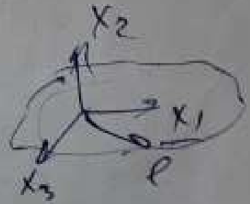
$e_3 = 0$.

б) $\mathring{l}^T \mathring{\varepsilon}\,\mathring{l} = 0$.

$$(l_1\ l_2\ l_3)\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = (a l_2\ \ \ a^2 l_2 + a l_1\ \ \ 0)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = 0$$

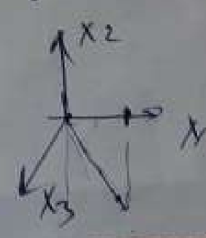
$$a l_2 l_1 + a^2 l_2^2 + a l_1 l_2 = 0$$

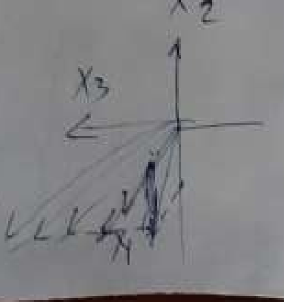
$$l_2\left(2a\, l_1 + a^2 l_2\right) = 0.$$



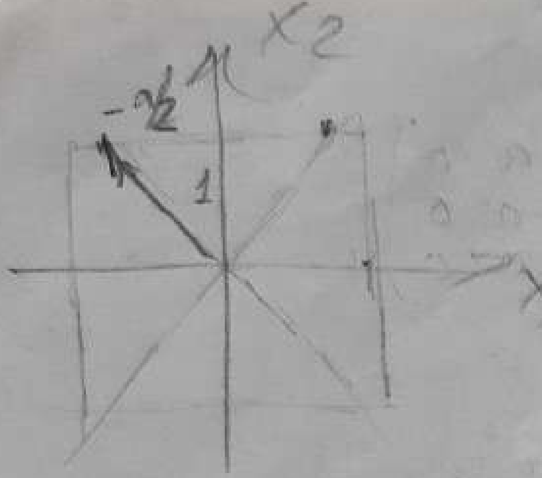
1) $l_2 = 0$, $l_3, l_1 - \forall$

2) $l_2 = -\frac{2}{a} l_1$, $l_1, l_3 - \forall$



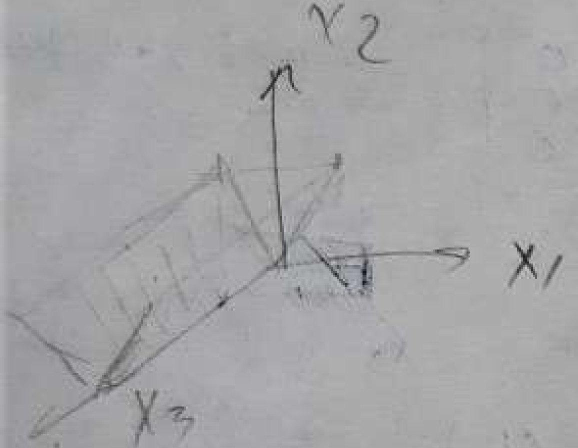


ан. образом стр. -9.1-



Если длина волокна при сдвиге не уменьшилась, оно приняло симметричное отн-но оси OX_2 положение. Сдвиг на a вдоль OX_1

Это и соответств. рав-ву

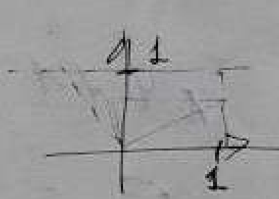


$$\frac{2}{a} l_1 + l_2 = 0, \quad l_1 + \frac{a}{2} l_2 = 0$$

$$l_1^2 + l_2^2 = 1$$

$$\bar{l} = \{l_1, l_2\} \perp \{1, \frac{a}{2}\}$$

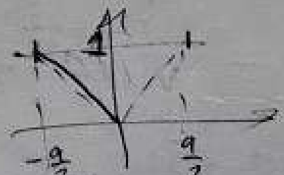
$$\Rightarrow \bar{l} = \{-\frac{a}{2}, 1\}$$



$$\frac{2}{a} l_1 + \sqrt{1 - l_1^2} = 0$$

$$\frac{4}{a^2} l_1^2 = 1 - l_1^2$$

$$1 = \left(\frac{4}{a^2} + 1\right) l_1^2 \qquad l_1 < 0$$



$$l_1^2 = \frac{a^2}{4 + a^2} = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)}$$

$$l_2^2 = 1 - \frac{a^2}{4 + a^2} = \frac{4}{4 + a^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{4}}$$