Краткий конспект лекций по курсу «Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 9

Геометрические грубые траектории

Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Через $\mathfrak{C}_g^{0,\alpha}([0,T])$ обозначаем замыкание в пространстве грубых траекторий множества таких $(X,\mathbb{X})$, что X_t — гладкая кривая и

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \int_s^t X_{su}^i \, dX_u^j.$$

Элементы множества $\mathfrak{C}_g^{0,\alpha}([0,T])$ называются *геометрическими грубыми траекториями.* Далее используем обозначение

$$\operatorname{Sym} \mathbb{X}_{st}^{ij} = \frac{1}{2}\big(\mathbb{X}_{st}^{ij} + \mathbb{X}_{st}^{ji}\big).$$

Предложение 1. *Если X_t — гладкая кривая и*

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \int_s^t X_{su}^i \, dX_u^j,$$

то

$$\operatorname{Sym} \mathbb{X}_{st} = \frac{1}{2} X_{st} \otimes X_{st}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} + \mathbb{X}_{st}^{ji} = \int_s^t X_{su}^i \, dX_u^j + \int_s^t X_{su}^j \, dX_u^i = \int_s^t d(X_{su}^i X_{su}^j) = X_{st}^i X_{st}^j.$$

□

Грубые траектории $(X,\mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^\alpha([0,T])$, для которых выполнено равенство

$$\operatorname{Sym} \mathbb{X}_{st} = \frac{1}{2} X_{st} \otimes X_{st},$$

называют *слабо геометрическими грубыми траекториями*, а их множество обозначают через $\mathfrak{C}_g^\alpha([0,T])$.

Теорема 1. (P.Friz, N.Victoir) *Если $\frac{1}{3} < \alpha < \beta < \frac{1}{2}$, то*

$$\mathfrak{C}_g^\beta([0,T]) \subset \mathfrak{C}_g^{0,\alpha}([0,T]) \subset \mathfrak{C}^\alpha([0,T]),$$

причем все включения строгие.

Мы не будем обсуждать доказательство теоремы, но разберем подробно утверждение, которое является важнейшей частью этого доказательства и частично объясняет данный результат.

Теорема 2. *Пусть $(1,X,Y) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ и $\operatorname{Sym} Y = \frac{1}{2} X \otimes X$, то найдется такая гладкая кривая $X_t \colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$, что $X_0 = 0$, $X = X_1 - X_0$ и*

$$Y^{ij} = \int_0^1 X_t^i \, dX_t^j.$$

Предварим доказательство несколькими наблюдениями.

(A)

Множество $T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, состоящее из элементов $(1,b,c) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, образуют группу с операцией

$$(1,b,c) \otimes (1,h,g) = (1, b+h, c+g+b\otimes h).$$

Напомним, что b, h — векторы, а c, g — матрицы. Элемент $(1,0,0)$ является единицей группы, а обратный элемент к элементу $(1,b,c)$ задается равенством

$$(1,b,c)^{-1} = (1,-b,-c+b\otimes b).$$

(B)

Множество $G^{(2)}$, состоящее из элементов вида $(1,b,c+\frac{1}{2}b\otimes b)$, где $c^{ij}=-c^{ji}$, является подгруппой в $T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$. Действительно, единица принадлежит $G^{(2)}$, верно равенство

$$(1,b,c+\tfrac{1}{2}b\otimes b)\otimes(1,h,g+\tfrac{1}{2}h\otimes h) = (1,b+h,c+g+\tfrac{1}{2}(b\otimes h-h\otimes b)+\tfrac{1}{2}(b+h)\otimes(b+h)).$$

Если c, g — кососимметрические матрицы, то $c+g+\frac{1}{2}(b\otimes h-h\otimes b)$ — кососимметрическая матрица. Наконец заметим, что

$$(1,b,c+\tfrac{1}{2}b\otimes b)^{-1} = (1,-b,-c-\tfrac{1}{2}b\otimes b+b\otimes b) = (1,-b,-c+\tfrac{1}{2}b\otimes b).$$

(C)

Группа $G^{(2)}$ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}$ и отображения $(g_1,g_2)\to g_1\otimes g_2$ и $g\to g^{-1}$ являются гладкими, то есть $G^{(2)}$ — группа Ли.

Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}$, заданное равенством

$$\varphi(b,c) = (1,b,c+\tfrac{1}{2}b\otimes b),$$

является инъективным и гладким отображением максимального ранга $d+d^2$, причем дифференциал

$$d\varphi(\xi,\eta) = (0,\xi,\eta+\tfrac{1}{2}(\xi\otimes b+b\otimes\xi)).$$

По определению $G^{(2)}=\varphi(\Pi)$, где $\Pi=\{(\xi,\eta)\colon\ \eta^{ij}=-\eta^{ji}\}$. Элементы $(\xi,\eta)\in\Pi$ естественно принять за локальные координаты. Пусть $g_1=(1,\xi,\eta+\frac{1}{2}\xi\otimes\xi)$ и $g_1=(1,b,c+\frac{1}{2}b\otimes b)$. Тогда произведению $g_1\otimes g_2$ соответствуют локальные координаты $(\xi+b,\eta+c+\frac{1}{2}(\xi\otimes b-b\otimes\xi))$. Хорошо видно, что зависимость от координат (ξ,η) и (b,c) является бесконечно гладким отображением. Если $g=(1,\xi,\eta+\frac{1}{2}\xi\otimes\xi)$, то элементу g^{-1} соответствуют локальные координаты $(-\xi,-\eta)$ и отображение $g\to g^{-1}$ является бесконечно гладким.

(D)

Касательное пространство $T_1G^{(2)}$, где $1=(1,0,0)$, равно $d\varphi(\Pi)$ и состоит из элементов вида $(0,\xi,\eta)$, где $\eta^{ij}=-\eta^{ji}$. Важную роль в теории групп Ли играет экспоненциальное отображение, которое строится следующим образом. Вектору $v\in T_1G^{(2)}$ сопоставляется такая гладкая кривая γ, что $\gamma(0)=1$, $\dot\gamma(0)=v$, $\gamma(t)\in G^{(2)}$ и $\gamma(t+s)=\gamma(t)\otimes\gamma(s)$. По определению $\exp v=\gamma(1)$. Из свойств γ следует, что $\dot\gamma=\gamma\otimes v$. Пусть $v=(0,\xi,\eta)$. В локальных координатах (b,c) это уравнение имеет вид

$$\dot b=\xi,\quad \dot c+\frac{1}{2}(b\otimes\xi-\xi\otimes b)=\eta,$$

из которого с учетом условий $b(0)=0$, $c(0)=0$, выводим $b(t)=t\xi$, $c(t)=t\eta$. Таким образом, верно равенство

$$\exp((0,\xi,\eta)) = (1,\xi,\eta+\tfrac{1}{2}\xi\otimes\xi),$$

то есть $G^{(2)}=\exp\bigl(T_1G^{(2)}\bigr)$. В рассматриваемой ситуации экспоненциальное отображение устанавливает диффеоморфизм между касательным пространством в единице и группой Ли (чего в общем случае может и не быть).

(E)

Пусть $g\in G^{(2)}$. Рассмотрим отображение $L_g(h)=g\otimes h$. Это линейное отображение $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}$ и его дифференциал равен $dL_g(v)=g\otimes v$. Ограничение этого отображения на $G^{(2)}$ задает гладкий диффеоморфизм $G^{(2)} \to G^{(2)}$. Дифференциал dL_g устанавливает линейный изоморфизм $T_1G^{(2)} \to T_gG^{(2)}$ и для всякого $v \in T_1G^{(2)}$ дифференциал dL_g задает гладкое векторное поле $V(g) = dL_g(v)$.

Пусть M — гладкое многообразие, а V и W — гладкие векторные поля на M. Каждому векторному полю соответствует дифференцирование первого порядка на пространстве гладких функций, а именно $Vf(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}f(X_t(p))$, где $X_t(p)$ — фазовый поток, порождаемый векторным полем V. Верно и обратное, что всякому оператору дифференцирования первого порядка соответствует векторное поле. Коммутатор $[W, V]$ определяется равенством

$$[W, V]f = W(V(f)) - V(W(f))$$

и появляется в разложении по Тейлору:

$$f(Y_s(X_t(p))) - f(X_t(Y_s(p))) = st[W, V]f(p) + o(s^2 + t^2),$$

где $X_t(p)$ – фазовый поток векторного поля V, а $Y_t(p)$ – фазовый поток векторного поля W. В касательном пространстве T_pM отображение $(W(p), V(p)) \to [W, V](p)$ задает скобку Ли и структуру алгебры Ли.

Рассмотрим теперь поверхность $G^{(2)}$. Пусть $u, v \in T_1G^{(2)}$ и $U(g) = dL_g(u)$, $V(g) = dL_g(v)$. Найдем $[u, v] := [U(g), V(g)]$. Пусть $g = (1, b, c + \frac{1}{2}b \otimes b)$, $u = (0, \xi, \eta)$ и $v = (0, \alpha, \beta)$. Запишем $U(g)$ и $V(g)$ в локальных координатах:

$$U((b, c)) = (\xi, \eta + \tfrac{1}{2}(b \otimes \xi - \xi \otimes b)), \quad V((b, c)) = (\alpha, \beta + \tfrac{1}{2}(b \otimes \alpha - \alpha \otimes b)).$$

Фазовый поток X_t, порождаемый полем U, в локальных координатах имеет вид

$$b(t) = b(0) + t\xi, \quad c(t) = c(0) + (\eta + \tfrac{1}{2}(b(0) \otimes \xi - \xi \otimes b(0)))t.$$

Аналогично выписывается фазовый поток Y_t для V:

$$b(t) = b(0) + t\alpha, \quad c(t) = c(0) + (\beta + \tfrac{1}{2}(b(0) \otimes \alpha - \alpha \otimes b(0)))t.$$

Заметим, что

$$Y_s(X_t((b, c))) = (b + t\xi + s\alpha, c + (\eta + \tfrac{1}{2}(b \otimes \xi - \xi \otimes b))t + \beta s + \tfrac{1}{2}(b \otimes \alpha - \alpha \otimes b)s + \tfrac{1}{2}(\xi \otimes \alpha - \alpha \otimes \xi)st).$$

Следовательно,

$$Y_s(X_t((b, c))) - X_t(Y_s(b, c)) = st(0, \xi \otimes \alpha - \alpha \otimes \xi)$$

и мы получаем, что

$$[u, v] = u \otimes v - v \otimes u.$$

(F)

Пусть $X_t[0, 1] \to \mathbb{R}^d$ — гладкая кривая, причем $X_0 = 0$. Положим

$$\mathbb{X}_{0t}^{ij} = \int_0^t X_s^i \, dX_s^j.$$

Отображение $t \to (1, X_t, \mathbb{X}_{0t})$ является гладкой кривой в $G^{(2)}$ и в локальных координатах записывается в виде

$$b(t) = X_t, \quad c(t) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^t X_s^i \, dX_s^j - \int_0^t X_s^j \, dX_s^i\Big).$$

Следовательно,

$$\dot{b} = \dot{X}_t, \quad \dot{c}(t) = \frac{1}{2}\big(X_t^i \dot{X}_t^j - X_t^j \dot{X}_t^i\big).$$

Поскольку

$$(1, X_t, \mathbb{X}_{0t}) \otimes (0, \dot{X}_t, 0) = (0, \dot{b}, \dot{c} + \tfrac{1}{2}(\dot{b} \otimes b + b \otimes \dot{b})),$$

то вектор скорости кривой $t \to (1, X_t, \mathbb{X}_{0t})$ принадлежит пространству $dL_g(\{(0, \xi, 0)\})$.

Положим
$$\mathcal{H} = \{(0,\xi,0)\} \subset T_1G^{(2)}, \quad \mathcal{H}_g = dL_g(\mathcal{H}) \subset T_gG^{(2)}.$$

Предложение 2. *Если* $\gamma\colon [0,1] \to G^{(2)}$ *— гладкая кривая,* $\gamma(0) = 1$*, и для каждого* $t \in [0,1]$ *выполнено* $\dot\gamma(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$*, то*
$$\gamma(t) = (1, X_t^i, \int_0^t X_s^i\, dX_s^j).$$

Доказательство. Пусть в локальных координатах кривая задается в виде
$$\gamma(t) = (1, b(t), c(t)), \quad b(0) = 0, \quad c(0) = 0.$$
По условию для каждого $t \in [0,1]$ существует такой вектор $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$, что
$$\dot\gamma(t) = \gamma(t) \otimes (0, \xi(t), 0).$$
Следовательно, верны равенства
$$\dot b = \xi, \quad \dot c + \tfrac{1}{2}(\dot b \otimes b + b \otimes \dot b) = b \otimes \xi.$$
Заменяя во втором равенстве ξ на $\dot b$, получаем
$$\dot c = \tfrac{1}{2}(b \otimes \dot b - \dot b \otimes b).$$
По формуле Ньютона–Лейбница
$$b(t) \otimes b(t) = \int_0^t \dot b(s) \otimes b(s) + b(s) \otimes \dot b(s)\, ds.$$
Следовательно, справедливо равенство
$$c(t) + \tfrac{1}{2} b \otimes b = \int_0^t b(s) \otimes \dot b(s)\, ds.$$
Таким образом, в качестве кривой X_t можно взять $b(t)$. □

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать, что всякий элемент группы $G^{(2)}$ можно соединить с единицей гладкой кривой γ, у которой $\dot\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$.