④ Неявные функции. Т-ма, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Опр. $\forall F: O(x^0,y^0)\to\mathbb{R}$, $O(x^0,y^0)\subset\mathbb{R}^2$, $F(x^0,y^0)=0$

Если $\exists\, O(x^0)$ и $\exists\, f: O(x^0)\to\mathbb{R}$ / $F(x,f(x))=0\ \forall x\in O(x^0)$,

то говорят, что F задаёт неявно ф-цию f.

Теорема: $\forall F: O(x^0,y^0)\to\mathbb{R}$ / 1) $F(x^0,y^0)=0$

2) $F\in C^1(O(x^0,y^0))$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$

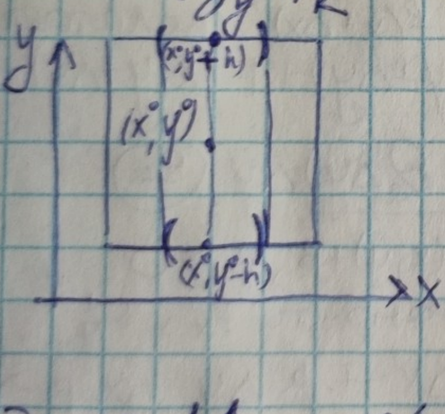
$\Rightarrow \forall\, O(x^0)$ и $\exists!\, f: O(x^0)\to\mathbb{R}$ / 1. $f(x^0)=y^0$

2. $F(x,f(x))=0\ \forall x\in O(x^0)$

▶ а) БОО $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0,y^0)>0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}\in C(O(x^0,y^0))$ (т.к. $F\in C^1(O(x^0,y^0))$)

непр. ф-ция $\Longrightarrow$ с сохр. знака $\exists$ замкн. куб $K\subset O(x^0,y^0)$:

$\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_K>0$, K — с центром (x^0,y^0), ребра $\parallel$-ы осям и длиной $2h$, h — мало



б) Δ-им ф-цию $\varphi(y):=F(x^0,y)$

$y\in[y^0-h,y^0+h]$

$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y)>0$ на $[y^0-h,y^0+h]$

$\varphi(y^0)=F(x^0,y^0)=0$

$\Rightarrow \varphi\uparrow\uparrow$, $\varphi(y^0+h)>0$ и $\varphi(y^0-h)<0$

в) $\Rightarrow F(x^0,y^0+h)>0$ и $F(x^0,y^0-h)<0 \Rightarrow$ (т.к. $F\in C(K)$ р/м непр.)

$\exists\,\delta_1>0$ / $F(x,y^0+h)>0$ при $|x-x^0|<\delta_1$ $\qquad \delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

$\exists\,\delta_2>0$ / $F(x,y^0-h)<0$ при $|x-x^0|<\delta_2$

г) Для $\forall$-ого фикс. $x\in O_\delta(x^0)$ рассмотрим

$\psi(x,\cdot): [y^0-h,y^0+h]\to\mathbb{R}$ / $F(x,y)=\psi(x,y)$

фикс

Для $\forall x \in O_\delta(x^0)$ имеем: $\psi(x,\cdot) \in C[y^0-h, y^0+h]$
$\psi(x, y^0-h) < 0$ и $\psi(x, y^0+h) > 0$

Т. о промеж. значениях $\Rightarrow$ $\exists! \leftarrow (\frac{\partial\psi}{\partial y} > 0 \Rightarrow \psi\uparrow\uparrow)$ $y = y(x) \,/\, \psi(x, y(x)) = 0.$

$\Rightarrow \forall x \in O_\delta(x^0) \; \exists! \; y(x) = f(x) \,/\, \psi(x, f(x)) = F(x, f(x)) = 0$

Кроме того, $\psi(x^0, f(x^0)) \Rightarrow f(x^0) = y^0$ в силу !

Зам.: 1. усл. $\frac{\partial F}{\partial x} \in C(O(x^0))$ — не использовали

2. Усл. Теоремы $\Rightarrow f \in C^1(O_{\delta^*}(x^0))$ для некот. $\delta^* > 0$

1) Надо $f \in C(O_{\delta^*}(x^0))$, т.е. $\forall \tilde{x} \in O_{\delta^*}(x^0): \forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0 \,/\, |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{=y} - \underbrace{f(\tilde{x})}_{=\tilde{y}}| < \varepsilon \quad (f \in C(\tilde{x}))$

$|f(x) - f(\tilde{x})| \le |\underbrace{f(x) - f(x^0)}_{=y \in [y^0-h, y^0+h]}| + |f(x^0) - f(\tilde{x})| \le 2h < \varepsilon$ (для дост. малого h, $h < \varepsilon/2$)

2) Р-им $\Delta F(x,y) = F(x+\Delta x, \underbrace{y+\Delta y}_{=f(x+\Delta x)}) - F(x,y) = 0 - 0 = 0$ (полагаем)

$0 = \Delta F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y+\Delta y) - F(x,y) =$

Т. Лагр.
$= \underbrace{F_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}_{= F_x'(x,y) + \alpha,\ \alpha \to 0,\ \Delta x, \Delta y \to 0}\Delta x + \underbrace{F_y'(x, y+\theta_2\Delta y)}_{= F_y'(x,y) + \beta,\ \beta \to 0}\Delta y \;(=)$

в силу непр-ти F_x' и F_y'

$(=)\; F_x'(x,y)\Delta x + F_y'(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, $\alpha, \beta \to 0$, $\Delta x, \Delta y \to 0$

3) $\Delta x \to 0$: $y_x' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x'(x,y) \in C(O_\delta(x^0))}{\underbrace{F_y'(x,y)}_{\ne 0}} \in C(O_\delta(x^0))$

$F_y'(x,y) \in C(O_\delta(x^0))$ ◁

Теорема (неявная ф-ция для с-мы ур-ий)

Пусть $F, G: O(\underbrace{x^0, y^0, z^0}_{\in \mathbb{R}^3}) \to \mathbb{R}$ /

1) $F(x^0, y^0, z^0) = G(x^0, y^0, z^0) = 0$

2) $F, G \in C^1(O(x^0, y^0, z^0))$

3) Якобиан $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x^0,y^0,z^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x^0,y^0,z^0)} \ne 0$

$\Rightarrow \exists O(x^0) \; \exists! \; f, g: O(x^0) \to \mathbb{R}$
$F(x, f(x), g(x)) = G(x, f(x), g(x)) = 0 \quad \forall x \in O(x^0)$
$f(x^0) = y^0$ и $g(x^0) = z^0$

▷ ~~◁~~