Задачи к билетам по курсу "Численные методы"
4 курс, II поток, 2013/2014 уч.г.

1. Найти $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^n \Phi_i(x)$, где $\Phi_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Есть такая задача: вычислить

$$a_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p\, \Phi_i(x) \text{ при } p = 0, \ldots, n.$$

из задачника БЛЧ (номер задачи 3.2). В этой задаче надо уметь сделать очевидный вывод: пусть N = 5 , тогда если по пяти точкам интерполировать какой-нибудь многочлен до четвертой степени, то его и получим.

А вот если по пяти точкам интерполировать многочлен 5-й степени, то получим....этот многочлен 5-й степени с "добавкой". Можно и более подробно: из многочлена 5-й степени X^5 вычтем многочлен 5-й степени вида $\prod\limits_{j=1}^{5}(X - x_j)$. Останется многочлен 4-й степени, который проинтерполируется точно, т.е. $a_5 = \sum\limits_{i=1}^{5}\left(x_i^5 - \left(\prod\limits_{j=1}^{5}(x_i - x_j)\right)\right)\Phi_i(X) = X^5 - \left(\prod\limits_{j=1}^{5}(X - x_j)\right)$, а в интерполяционной формуле этот многочлен можно убрать, поскольку во всех узлах он равен нулю.

2. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $-4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

Такая задача есть в БЛЧ (номер 3.6) и даже с решением. Которое, если поподробнее:

Оценка интерполяционного многочлена Лагранжа

$$\mathrm{f}(x) - L_n(x) = \frac{\left(\dfrac{d^n}{dx^n}\mathrm{f}(x)\right)\omega_n(x)}{n!}$$

Для конкретного случая дифференцируем f(x) четыре раза, получаем $\dfrac{4!}{(A^2 - x)^5}$. Т.е. надо оценить $\max\left(\dfrac{1}{|A^2 - x|^5}, x \in (-4 .. -1)\right)$, который достигается, разумеется, при $x = -1$, и оценить $\max(|(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)|, x \in (-4 .. -1))$. Для оценки последнего дифференцируем $\omega_4(x)$, получаем кубический многочлен $\dfrac{d}{dx}\omega_4(x) = 4x^3 + 30x^2 + 70x + 50$, у которого надо найти корни. Поскольку $\omega_4(x)$ симметрична относительно середины отрезка [-4, -1], то в середине этого отрезка у ее производной есть корень $x = -\dfrac{5}{2}$. Значит

$\dfrac{d}{dx}\omega_4(x) = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)(4x^2 + 20x + 20)$. Далее находим остальные корни

$\{x = -\frac{5}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\}$, $\{x = -\frac{5}{2} - \frac{1\sqrt{5}}{2}\}$. Теперь в одном из этих корней вычисляем $\omega_4(x)$:

$\omega_4\left(-\frac{5}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)$ = - 1. Получаем || $\omega_4(x)$ || = 1. Собирая все вместе получаем || $f(x) - L_4(x)$ || меньше или равно $\frac{1}{\left|A^2+1\right|^5}$. А последняя величина не будет превосходить $10^{(-5)}$, когда $9 \le A^2$, т.е. $3 \le |A|$.

3. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[0, b]$. При каком b многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по равноотстоящим узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \le 10^{-3}$?

Эта задача полный аналог предыдущей, если под равноотстоящими узлами понимать $0, \frac{1\,b}{3}, \frac{2\,b}{3}, b$. А то ведь равноотстоящими узлами могут быть и другие какие-нибудь. Увы, случается, что формулировка задачи недоработана. Оправдание очевидно - сформулировать задачу гораздо труднее, чем потом ее решить.

$\frac{d^4}{dx^4}\sin(x) = \sin(x)$, максимум модуля $\frac{\frac{d^4}{dx^4}f(x)}{4!}$ оценивается или $\frac{\sin(b)}{4!}$ при малых b, или $\frac{1}{4!}$,

$\omega_4(x) = x\left(x - \frac{1\,b}{3}\right)\left(x - \frac{2\,b}{3}\right)(x - b)$, $\frac{d^4}{dx^4}\omega_4(x) = 4x^3 - 6x^2 b + \frac{22\,x\,b^2}{9} - \frac{2\,b^3}{9}$, один корень в середине отрезка [0,b] , $\frac{d^4}{dx^4}\omega_4(x) = \left(x - \frac{1\,b}{2}\right)\left(\frac{4\,b^2}{9} - 4\,x\,b + 4\,x^2\right)$, остальные корни

$\frac{1\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)b}{3}, \frac{1\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)b}{3}$,

$\omega_4\left(\frac{1\left(\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)b}{3}\right) =$

$\frac{1\left(\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)b\left(\frac{1\left(\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)b}{3} - \frac{1\,b}{3}\right)\left(\frac{1\left(\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)b}{3} - \frac{2\,b}{3}\right)\left(\frac{1\left(\frac{3}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2}\right)b}{3} - b\right)}{3} =$

$-\frac{1\,b^4}{81}$,

$\omega_4\left(\frac{1\,b}{2}\right) = \frac{1\,b^4}{144}$, в этой точке $\frac{1\,b}{2}$ максимум модуля $\omega_4(x)$ не достигается, а достигается в точке $\frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)b}{3}$, остается найти b, для которого $\frac{\sin(b)\, 1\, b^4}{4!\, 81} \le 10^{(-3)}$, если b маленькое, или $\frac{1\,(1)\, b^4}{4!\, 81} \le 10^{(-3)}$, если b может быть больше $\frac{1\,\pi}{2}$, решение второго неравенства $b \le \frac{3\, 3^{\left(\frac{1}{4}\right)}\, 5^{\left(\frac{1}{4}\right)}}{5} =$ $1.180793803 < 1.570796327 = \frac{\pi}{2}$ обеспечивает выполнение первого неравенства, но такое решение может быть улучшено, если решить первое неравенство. Однако, решить его можно только численными методами: $b \le 1.201570842$.

4. Доказать следующее свойство многочленов Чебышева:

$$T_{2n}(x) = 2\,T_n^2(x) - 1\,;$$

Берем представление многочлена Чебышева в виде $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, остается доказать формулу $\cos(2\,\phi) = 2\cos(\phi)^2 - 1$, где $\phi = n \arccos(x)$.

5. Пусть $x^2 + y^2 = 1$. Доказать следующее свойство многочленов Чебышева: $T_{2n}(y) = (-1)^n T_{2n}(x)$.

Задача 4.21 из БЛЧ. Берем представление многочлена Чебышева в виде
$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$,

пусть $x = \cos(\phi)$; $y = \sin(\phi)$ - это условие задачи $x^2 + y^2 = 1$, используем $\sin(\phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$

$T_{2\,n}(y) = \cos\left(2\,n \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right)\right) = \cos\left(2\,n\left(\frac{1\,\pi}{2} - \phi\right)\right) = \cos(\pi\,n)\cos(2\,n\,\phi)$,

$T_{2\,n}(x) = \cos(2\,n \arccos(\cos(\phi))) = \cos(2\,n\,\phi)$. Остается доказать $\cos(\pi\,n) = (-1)^n$.

6. Найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$ среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1.

Эта задача есть в БЛЧ с решением под номером 4.5.
Перетаскиваем многочлен Чебышева с [-1 , 1] на [a , b] линейной заменой, получаем

$T_n\left(\frac{2\,x - a - b}{b - a}\right)$, который нормируем на коэффициент при старшей степени $\frac{T_n\left(\frac{2\,x - a - b}{b - a}\right)}{2^{(n-1)}\left(\frac{2}{b - a}\right)^n}$.

Норма в C такого многочлена будет $\frac{1}{2^{(n-1)}\left(\frac{2}{b - a}\right)^n}$.

7. Пусть $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Показать, что при любом выборе узлов $x_i \in [a, b]$ имеет место неравенство $\max\limits_{[a,b]} |\omega_n(x)| \ge (b - a)^n\, 2^{1-2n}$.

Это задача 4.6 из БЛЧ. В правой части стоит норма в C многочлена наименее уклоняющегося от нуля со старшим коэффициентом 1. См. предыдущую задачу.

8. Среди всех многочленов вида $a_2x^2+x+a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,1]$.

Задачка-шуточка. Здесь $a_2\,x^2 + a_0$ функция четная, и ею никак нельзя подправить нечетную функцию x. Следовательно $a_2 = 0$ и $a_0 = 0$.

9. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n=2$ для функции $f(x)=x^3$ на отрезке $[-1,1]$.

В БЛЧ задача 6.9.1. или 6.13. Простенькая задачка. Если $x^3 - Q_2(x)$ наименее уклоняющийся от нуля, то $Q_2(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения для x^3 . Значит $x^3 - Q_2(x)$ приведенный многочлен Чебышева. $Q_2(x) = \frac{3\,x}{4}$.

10. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n=3$ для функции $f(x)=\exp(x^2)$ на отрезке $[-1,1]$.

Задача 6.9.2 из БЛЧ. Эту задачу надо решать. В силу симметрии многочлен 3-й степени окажется многочленом второй степени. В силу той же симметрии одной из точек альтернанса будет середина отрезка, т.е. 0. Две точки альтернанса - концы отрезка, поскольку функция выпуклая. Еще две точки альтернанса X и $-X$ - внутренние, в которых функция и приближающий многочлен дифференцируемы. Всего получается 5 точек альтернанса. Ищем приближающий многочлен в виде $c\,x^2 + d$, составляем систему уравнений:

$1 - d = L$, $\mathbf{e} - c - d = L$, $\mathbf{e}^{(X^2)} - c\,X^2 - d = -L$, $2\,\mathbf{e}^{(X^2)}\,X - 2\,c\,X = 0$,

здесь первое уравнение - отклонение в нуле на L, второе - отклонение в конце отрезка тоже на L, третье - отклонение в точке альтернанса X на $-L$, четвертое - в точке альтернанса отклонение максимальное, значит у разности функции и приближающего многочлена производная обращается в 0. Решается эта система очень просто: из первого и второго находим c, четвертое сокращаем на $X \neq 0$, подставляем $c = \mathbf{e} - 1$ и находим X^2, который подставляем в третье и т.д. Ответ: $L = \frac{1\,\mathbf{e}\ln(\mathbf{e}-1)}{2} - \frac{1\ln(\mathbf{e}-1)}{2} - \frac{1\,\mathbf{e}}{2} + 1$,

$X = \mathrm{RootOf}(\_Z^2 - \ln(\mathbf{e}-1))$, $c = \mathbf{e} - 1$, $d = -\frac{1\,\mathbf{e}\ln(\mathbf{e}-1)}{2} + \frac{1\ln(\mathbf{e}-1)}{2} + \frac{1\,\mathbf{e}}{2}$. И поскольку про X и L вопросов не было, то $c = \mathbf{e} - 1$, $d = -\frac{1\,\mathbf{e}\ln(\mathbf{e}-1)}{2} + \frac{1\ln(\mathbf{e}-1)}{2} + \frac{1\,\mathbf{e}}{2}$.

11. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n=3$ для функции $f(x)=|x^2-7x+10|$ на отрезке $[3,4]$.

Получилось упрощение задачи 6.9.3 из БЛЧ. Многочлен под модулем имеет корни 2 и 5, т.е. на [3, 4] этот многочлен знак не меняет и остается отрицательным. Так что многочлен $-x^2 + 7\,x - 10$ - это такой ответ, что комар носа не подточит.

Если же здесь опечатка, и будет в билете задача 6.9.3 $\mathrm{f}(x) = 3\sin(10\,x)^2 - x^2 + 7\,x - 10$, то ответ получится такой: $\frac{3}{2} - x^2 + 7\,x - 10$. Поскольку $\sin(10\,x)^2$ много раз осцилирует на [3, 4], для приближения его многочленом достаточно высокой третьей степени сгодится $\frac{1}{2}$. Точек альтернанса хватит. Их будет 6. Кстати, концы отрезка в альтернанс не войдут!

12. Найти наилучшее приближение в $L_2(-1,1)$, где $\|f\|^2_{L_2(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$, для функции $f(x) = x^2$ алгебраическими многочленами $Q_1(x)$.

$x^2 - Q_1(x)$ - это будет многочлен Лежандра, отнормированный на коэффициент при x^2. Но можно и в соответствии с определением: ищем многочлен в виде $a\,x + b$. Смотрим на норму $\sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - a\,x - b)^2\, dx} = \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{2\,a^2}{3} - \frac{4\,b}{3} + 2\,b^2}$. Ее надо минимизировать по a и b.

Квадратный корень можно убрать, дальше дифференцируем по a и по b, приравниваем нулю производные, решаем, получаем. $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{2}{5} + \frac{2\,a^2}{3} - \frac{4\,b}{3} + 2\,b^2\right) = 0$; $\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{2}{5} + \frac{2\,a^2}{3} - \frac{4\,b}{3} + 2\,b^2\right) = 0$, т.е. $\frac{4\,a}{3} = 0, -\frac{4}{3} + 4\,b = 0$.

13. Найти для функции $\exp(x)$ наилучшее приближение многочленом нулевой степени в норме $L_1(0,1)$, где $\|f\|_{L_1(0,1)} = \int\limits_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$.

Задача 6.25 из БЛЧ. Выбираем $b \in [1, e]$ и расписываем интеграл, раскрывая модуль,

$$\int_0^1 |\mathbf{e}^x - b|\, dx = \int_0^{\ln(b)} -(\mathbf{e}^x - b)\, dx + \int_{\ln(b)}^1 \mathbf{e}^x - b\, dx = 1 - 3\,b + 2\,b\ln(b) + \mathbf{e},$$

дифференцируем $\frac{d}{db}(1 - 3\,b + 2\,b\ln(b) + \mathbf{e}) = 0$ -> $-1 + 2\ln(b) = 0$, решаем $b = \mathbf{e}^{\left(\frac{1}{2}\right)}$.

14. Пусть P_2 — пространство алгебраических многочленов второй степени на отрезке $[-1,1]$ с нормой $\|p(x)\| = |p(-1)| + |p(0)| + |p(1)|$. Найти наилучшее приближение константой для функции $p(x) = x^2 \in P_2$.

Задача 6.26 из БЛЧ без решения и без ответа. Ищем константу $0 \le c$, $c \le 1$:

$\| x^2 - c \| = 2 - c$. На выбранном множестве минимум получается при $c = 1$, и этот минимум равен 1. А теперь ищем минимум

$\| x^2 - c \| = 3\,c - 2$ на множестве $1 \le c$. Получаем опять $c = 1$, и этот минимум равен 1. При отрицательных $c \le 0$ норма

$\| x^2 - c \| = 2 - 3\,c$ не меньше 2, т.е. там нет даже 1, которая при положительных c достигается при $c = 1$.

15. Рассмотреть формулы Ньютона – Котеса при $n = 1$ (прямоугольников) и $n = 2$ (трапеций) и сравнить оценки их погрешностей в случае гладких подынтегральных функций.

Задачи 8.1, 8.2 из БЛЧ.

Формула прямоугольников с центральным узлом $S_{pr}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{f}\left(\frac{1\,a}{2} + \frac{1\,b}{2}\right)(b - a)$, формула трапеций $S_{tr}(\mathrm{f}(x)) = \left(\frac{1\,\mathrm{f}(a)}{2} + \frac{1\,\mathrm{f}(b)}{2}\right)(b - a)$.

Обе они точны для многочленов нулевой и первой степени - проверяется непосредственно

подстановкой. Т.е. они являются квадратурами первого порядка точности. Получены путем интегрирования интерполяционного многочлена Лагранжа по одному двукратному узлу в формуле прямоугольников и двум некратным (однократным) узлам в формуле трапеций.
Погрешность n-точечной интерполяционной квадратуры $S_n(f)$ есть по определению величина
$R_n(f) = \int_a^b \mathrm{f}(x)\, dx - S_n(f)$. Оценивается величиной $\displaystyle\int_a^b \frac{(\mathrm{D}^{(n)})(f)(\xi)\, \omega_n(x)}{n!}\, dx$, полученной из
$\mathrm{f}(x) - L_n(x) = \dfrac{(\mathrm{D}^{(n)})(f)(\xi)\, \omega_n(x)}{n!}$ для многочлена Лагранжа.
Для формулы прямоугольников: если считать узел некратным, то оценка

$$\frac{|(\mathrm{D}^{(1)})(f)(\xi)| \displaystyle\int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx}{1!} = \frac{|(\mathrm{D}^{(1)})(f)(\xi)|\,(b-a)^2}{4}$$, если узел кратный, то

$$\frac{(\mathrm{D}^{(2)})(f)(\xi) \displaystyle\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx}{2!} = \frac{(\mathrm{D}^{(2)})(f)(\xi)\,(b-a)^3}{24},$$

Для формулы трапеций $-\dfrac{(\mathrm{D}^{(2)})(f)(\xi) \displaystyle\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx}{2!} = -\dfrac{(\mathrm{D}^{(2)})(f)(\xi)\,(b-a)^3}{12}$. Хуже, чем у $S_{pr}(\mathrm{f}(x))$ и с другим знаком.

16. Доказать, что для погрешности квадратурной формулы трапеций справедливо представление

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}\int_a^b (a-\xi)(b-\xi) f''(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Задача 8.4 из БЛЧ. Там предлагается по частям правую часть два раза. Первый раз
$\mathrm{u}(\xi) = (a-\xi)\,(b-\xi)$, $\mathrm{dv}(\xi) = \dfrac{d^2}{d\xi^2}\mathrm{f}(\xi)$,

$\mathrm{u}(b)\,\mathrm{v}(b) - \mathrm{u}(a)\,\mathrm{v}(a) - \displaystyle\int_a^b \mathrm{v}(\xi)\,\mathrm{du}(\xi)\, d\xi = -\int_a^b \left(\frac{d}{d\xi}\mathrm{f}(\xi) \right) (-b + 2\,\xi - a)\, d\xi$. Второй раз

$\mathrm{u}(\xi) = b - 2\,\xi + a$, $\mathrm{dv}(\xi) = \dfrac{d}{d\xi^1}\mathrm{f}(\xi)$,

$\mathrm{u}(b)\,\mathrm{v}(b) - \mathrm{u}(a)\,\mathrm{v}(a) - \int_a^b \mathrm{v}(\xi)\,(-2)\,d\xi = (a-b)\,(\mathrm{f}(b)+\mathrm{f}(a)) + 2\int_a^b \mathrm{f}(\xi)\,d\xi$. Остается поделить пополам, и заменить ξ на x в интеграле.

17. Оценить минимальное число разбиений N отрезка $[0,1]$ для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$, по составной квадратурной формуле прямоугольников, обеспечивающее погрешность не более 10^{-4}.

Задачи 17, 18, наверное, из какой-нибудь контрольной два варианта. Оценка для составной формулы прямоугольников

$\|(\mathrm{D}^{(2)})(f)(x)\|\dfrac{1\,(b-a)^3}{24\,N^2} = \dfrac{6\,\mathbf{e}}{24\,N^2}$. Решаем неравенство $\dfrac{1\,\mathbf{e}}{4\,N^2} \le .1\mathrm{e}{-3}$, получаем $82.43606354 < N$.

18. Оценить минимальное число разбиений N отрезка $[0,1]$ для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$, по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее погрешность не более 10^{-4}.

Задачи 17, 18, наверное, из какой-нибудь контрольной два варианта. Оценка для составной формулы трапеций

$\|(\mathrm{D}^{(2)})(f)(x)\|\dfrac{1\,(b-a)^3}{12\,N^2} = \dfrac{6\,\mathbf{e}}{12\,N^2}$. Решаем неравенство $\dfrac{1\,\mathbf{e}}{2\,N^2} \le .1\mathrm{e}{-3}$, получаем $116.5821991 < N$.

19. Пусть T — треугольник на плоскости, $s(T)$ — его площадь, A, B, C — середины сторон. Показать, что кубатурная формула

$$S(f) = \frac{1}{3}s(T)(f(A)+f(B)+f(C)) \approx \iint\limits_T f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $x=(x_1,x_2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$, точна для всех многочленов второй степени вида $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

В БЛЧ это задача 9.8. Есть там и указание, как ее решать.

В решении используются другие обозначения. Пусть треугольник A,B,C задан координатами $a1$, $a2$, $b1$, $b2$, $c1$, $c2$. Линейной заменой координат его можно перевести в равнобедренный прямоугольный треугольник с координатами (0, 0); (1, 0); (0, 1). В задаче не сказано, что такое преобразование надо написать, но для информации пусть здесь это будет.

Берем линейное преобразование координат $x1 = x\,\alpha 1 + y\,\beta 1 + \gamma 1$, $y1 = x\,\alpha 2 + y\,\beta 2 + \gamma 2$, составляем систему уравнений, чтобы этим преобразованием вершины треугольника $a1$, $a2$, $b1$, $b2$, $c1$, $c2$ переводились в (0, 0); (1, 0); (0, 1)

$a1\,\alpha 1 + a2\,\beta 1 + \gamma 1 = 0$, $a1\,\alpha 2 + a2\,\beta 2 + \gamma 2 = 0$, $b1\,\alpha 1 + b2\,\beta 1 + \gamma 1 = 1$, $b1\,\alpha 2 + b2\,\beta 2 + \gamma 2 = 0$, $c1\,\alpha 1 + c2\,\beta 1 + \gamma 1 = 0$, $c1\,\alpha 2 + c2\,\beta 2 + \gamma 2 = 1$ - шесть уравнений с шестью неизвестными, значит есть решение. Его находить не надо! Хотя увидеть, может быть, стоит

$$\{\alpha 1 = -\frac{a2 - c2}{a1\, b2 - a1\, c2 - a2\, b1 + a2\, c1 + b1\, c2 - b2\, c1},$$

$$\alpha 2 = \frac{a2 - b2}{a1\, b2 - a1\, c2 - a2\, b1 + a2\, c1 + b1\, c2 - b2\, c1},$$

$$\beta 1 = \frac{a1 - c1}{a1\, b2 - a1\, c2 - a2\, b1 + a2\, c1 + b1\, c2 - b2\, c1},$$

$$\beta 2 = -\frac{a1 - b1}{a1\, b2 - a1\, c2 - a2\, b1 + a2\, c1 + b1\, c2 - b2\, c1},$$

$$\gamma 1 = -\frac{a1\, c2 - a2\, c1}{a1\, b2 - a1\, c2 - a2\, b1 + a2\, c1 + b1\, c2 - b2\, c1},$$

$$\gamma 2 = \frac{a1\, b2 - a2\, b1}{a1\, b2 - a1\, c2 - a2\, b1 + a2\, c1 + b1\, c2 - b2\, c1}\}$$

Дальнейшие действия - только с треугольником (0, 0); (1, 0); (0, 1), поскольку квадратичная функция вида $f(x, y) = d_0 + d_1 x + d_2 y + d_{11} x^2 + d_{12} x y + d_{22} y^2$ после линейного преобразования переменных останется квадратичной и такого же вида.

Интеграл по треугольнику сводим к повторному. Пусть внешний интеграл по y, и внутренний по x

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1\, d_{11}}{12} + \frac{1\, d_{12}}{24} + \frac{1\, d_{22}}{12} + \frac{1\, d_2}{6} + \frac{1\, d_1}{6} + \frac{1\, d_0}{2}.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{1-y} f(x, y)\, dx = \frac{1\, d_{11} (1-y)^3}{3} + \frac{1\, (y\, d_{12} + d_1)(1-y)^2}{2} + d_{22}\, y^2 (1-y) + d_2\, y\, (1-y) + d_0 (1-y).$$

Теперь по кубатурной формуле: понадобится площадь треугольника $S = \frac{1}{2}$ - половина основания на высоту;

$$\frac{S\left(f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)}{3} = \frac{1\, d_{11}}{12} + \frac{1\, d_{12}}{24} + \frac{1\, d_{22}}{12} + \frac{1\, d_2}{6} + \frac{1\, d_1}{6} + \frac{1\, d_0}{2}.$$

20. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx$.

Задача 10.9.1 из БЛЧ. Правильный алгоритм построения квадратуры Гаусса - найти ортогональный многочлен второй степени с весом x^2, найти корни этого многочлена (кстати они будут симметричны относительно нуля, т.к. весовая функция и отрезок интегрирования симметричны), корни будут узлами квадратуры, а весовые коэффициенты можно найти методом неопределенных коэффициентов из условия точности квадратуры для многочленов наиболее высокой степени.

Квадратура будет иметь вид $C\, f(-x) + C\, f(x)$ - всего два неизвестных параметра. Можно их найти непосредственно:

$C + C = \int_{-1}^{1} x^2\,dx$; $C\,(-x)^2 + C\,x^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,x^2\,dx$. Получается система уравнений $C = \frac{1}{3}$, $C\,x^2 = \frac{1}{5}$, $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

21. Построить квадратуру Гаусса с тремя узлами для вычисления интегралов $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Задача 10.10 из БЛЧ. Правильный алгоритм построения квадратуры Гаусса - найти ортогональный многочлен третьей степени с единичным весом (это будет многочлен Лежандра), найти корни этого многочлена (кстати они будут симметричны относительно нуля, т.к. весовая функция и отрезок интегрирования симметричны), корни будут узлами квадратуры, а весовые коэффициенты можно найти методом неопределенных коэффициентов из условия точности квадратуры для многочленов наиболее высокой степени.

Квадратура будет иметь вид $C_1\,\mathrm{f}(-x) + C_2\,\mathrm{f}(0) + C_1\,\mathrm{f}(x)$ - всего три неизвестных параметра.

Функции x^k для метода неопределенных коэффициентов надо брать четные, т.к. в силу симметрии для нечетных степеней уравнения будут выполнены автоматически.

Многочлен Лежандра третьей степени имеет вид (можно найти с использованием процесса Грама-Шмидта)

$\frac{5\,x^3}{2} - \frac{3\,x}{2}$, его корни $\{x = 0\}$, $\{x = \sqrt{\frac{3}{5}}\}$, $\{x = -\sqrt{\frac{3}{5}}\}$. Остается составить два линейных уравнения и решить их

$C_1 + C_2 + C_1 = 2$, $C_1 \sqrt{\frac{3}{5}}^{\,2} + C_1 \sqrt{\frac{3}{5}}^{\,2} = \frac{2}{3}$, откуда $C_1 = \frac{5}{9}$, $C_2 = \frac{8}{9}$.

22. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

Одно из главных достоинств квадратур Гаусса. Квадратура Гаусса точна для многочленов до степени $2\,n - 1$, значит точны и для многочленов степени $2\,n - 2$. Надо не забывать, что весовая функция должна быть положительна (п.в.)!

<u>Лемма.</u> Коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

$$\triangleright \begin{matrix}(x_1, \ldots, x_n)\\(C_1, \ldots, C_n)\end{matrix} \quad \to \quad P^{(i_0)}_{2n-2}(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} (x - x_i)^2$$

$$\text{Тогда } \int_a^b \underbrace{p(x) P^{(i_0)}_{2n-2}(x) dx}_{>0} = S_n(P^{(i_0)}_{2n-2}) = \sum_{i=1}^{n} C_i P^{(i_0)}_{2n-2}(x_i) =$$

$$= C_{i_0} \cdot \underbrace{P^{(i_0)}_{2n-2}(x_{i_0})}_{>0} \quad \Rightarrow \quad \forall i \quad C_i > 0 \qquad \square$$

23. Найти матричную норму, подчиненную векторной норме $\|\cdot\|_1$.

См. следующую задачу.

24. Найти матричную норму, подчиненную векторной норме $||\cdot||_\infty$.

По задачам 23, 24 см. БЖК стр. 251-252. По определению

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant m} |x_j|, \qquad (2)$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|, \qquad (3)$$

Ответ:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right), \qquad (5)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant m} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\right), \qquad (6)$$

Доказательство:

Приведем вывод этих соотношений для вещественного случая. Поскольку, согласно (2),

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j|\right) \leqslant \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right) \max_j |x_j|,$$

то

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leqslant \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right).$$

Пусть $\max\limits_i \left(\sum\limits_j |a_{ij}|\right)$ достигается при $i = l$; для вектора

$$\mathbf{x} = (\mathrm{sign}(a_{l1}), \ldots, \mathrm{sign}(a_{lm}))^T$$

имеем $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$,

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \geqslant \left|\sum_j a_{lj}x_j\right| = \sum_j |a_{lj}| = \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right) \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Из этих соотношений следует (5).

Точно так же для нормы вектора, определяемой по формуле (3), имеем

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \leqslant \Big(\max_j \sum_i |a_{ij}|\Big) \sum_j |x_j|,$$

т. е.

$$\frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \leqslant \max_j \Big(\sum_i |a_{ij}|\Big).$$

Пусть $\max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$ достигается при $j = l$. Для вектора $\mathbf{x}$, у которого лишь одна компонента x_l отлична от нуля, имеем

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_i \Big|\sum_i a_{ij}x_j\Big| = \sum_i |a_{il}|\,|x_l| = \Big(\sum_i |a_{il}|\Big)|x_l| =$$
$$= \Big(\max_j \sum_i |a_{ij}|\Big)\sum_j |x_j| = \Big(\max_j \sum_i |a_{ij}|\Big)\|\mathbf{x}\|_1;$$

отсюда следует (6).

25. Доказать, что модуль любого собственного значения матрицы не больше любой ее нормы.

Задача 13.6 в БЛЧ.

13.6. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \to \quad \|A\|\,\|\mathbf{x}\| \geq |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|.$ Такое решение может быть не принято.

В задачнике БКЧ имеется:

Р е ш е н и е. Зафиксируем произвольный собственный вектор $\mathbf{x}$ матрицы A и построим квадратную матрицу X, столбцами которой являются векторы $\mathbf{x}$. Получим равенство $\lambda X = AX$. Отсюда следует $|\lambda|\,\|X\| \leqslant \|A\|\,\|X\|$, т. е. $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

26. Можно ли утверждать, что если определитель матрицы мал, то матрица плохо обусловлена?

Из задачника БКЧ:

❑ **5.45.** Можно ли утверждать, что если определитель матрицы мал, то матрица плохо обусловлена?

Р е ш е н и е. Пусть дана диагональная матрица $D = \varepsilon I$, где $\varepsilon > 0$ — малое число и I — единичная матрица. Определитель $\det(D) = \varepsilon^n$ мал, тогда как матрица D хорошо обусловлена, поскольку

$$\operatorname{cond}(D) = \|D\|\,\|D^{-1}\| = \varepsilon\|I\|\varepsilon^{-1}\|I^{-1}\| = 1.$$

27. Существуют ли несимметричные матрицы, для которых справедливо: $\operatorname{cond}^2(A) = \operatorname{cond}(A^2) > 1$?

Следует отметить, что не указана норма матрицы. Число обусловленности, вообще говоря, как *выражаются* на вычмате, зависит от нормы.
Ответ: да. Из БКЧ (в других задачниках то же самое)

<u>Ответ:</u> примером такой матрицы является

$$A = \begin{pmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix},$$

$$\lambda(A^T A) \in \{10^6, 10^{-6}, 4{,}5 \pm \sqrt{4{,}25}\},$$

$$\operatorname{cond}(A^2) = \|A^2\|\,\|A^{-2}\| = 10^{12}, \quad \operatorname{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| = 10^6.$$

Какая-нибудь такая матрица тоже подойдет, наверное. Здесь можно брать только евклидову норму!

$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ с евклидовой нормой 10, обратная к ней будет $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ с евклидовой нормой $\frac{1\,2^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}$,

$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$ ее квадрат с евклидовой нормой 100, и обратная к квадрату

$\begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{100} \end{bmatrix}$ с евклидовой нормой $\frac{1}{2}$.

28. Доказать неравенство $n^{-1} \le \operatorname{cond}_1(A)/\operatorname{cond}_2(A) \le n$ для квадратных невырожденных матриц размерности $n \times n$.

Задача 14.8 в БЛЧ или 5.52 в БКЧ. Для начала надо посмотреть задачу 5.3 в БКЧ.

Затем уже можно посмотреть решение из БКЧ задачи 5.52. В БЛЧ решение имеет несколько иной вид.
Подробное свое решение может быть таким:

По определению $||x||_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = ||x||_1^2$.
По неравенству Коши-Буняковского
$||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 1\right)^{1/2} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = n^{1/2}||x||_2$.
Получили константы эквивалентности для векторных норм
$n^{-1/2}||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1$.
Пусть для x^* достигается $\sup \dfrac{||Ax^*||_1}{||x^*||_1}$.
Отнормируем его так, чтобы $||x^*||_1 = 1$.
Получим $||Ax^*||_1 = ||A||_1$ и $n^{-1/2}||Ax^*||_1 \leqslant ||Ax^*||_2$.
Далее $n^{-1/2}||A||_1 = n^{-1/2}||Ax^*||_1 \leqslant ||Ax^*||_2 \leqslant ||x^*||_2 \cdot \dfrac{||Ax^*||_2}{||x^*||_2}$
$\leqslant ||x^*||_2 \cdot \sup \dfrac{||Ax||_2}{||x||_2} \leqslant ||x^*||_1 \cdot ||A||_2 = ||A||_2$.
Получили $n^{-1/2}||A||_1 \leqslant ||A||_2$.
Теперь пусть для x^* достигается $\sup \dfrac{||Ax^*||_2}{||x^*||_2}$.
Отнормируем его так, чтобы $||x^*||_2 = 1$.
Получим $||Ax^*||_2 = ||A||_2$ и $||Ax^*||_2 \leqslant ||Ax^*||_1$.
Далее $||A||_2 = ||Ax^*||_2 \leqslant ||Ax^*||_1 \leqslant ||x^*||_1 \cdot \dfrac{||Ax^*||_1}{||x^*||_1}$
$\leqslant ||x^*||_1 \cdot \sup \dfrac{||Ax||_1}{||x||_1} \leqslant n^{1/2}||x^*||_2 \cdot ||A||_1 = n^{1/2}||A||_1$.
Получили $||A||_2 \leqslant n^{1/2}||A||_1$.
Итого: $n^{-1/2}||A||_1 \leqslant ||A||_2 \leqslant n^{1/2}||A||_1$.
Точно такое же неравенство справедливо для любой матрицы, в частности для A^{-1}.
$n^{-1/2}||A^{-1}||_1 \leqslant ||A^{-1}||_2 \leqslant n^{1/2}||A^{-1}||_1$.
Перемножая два неравенства для матричных норм получим
$n^{-1}||A^{-1}||_1||A||_1 \leqslant ||A^{-1}||_2||A||_2 \leqslant n||A^{-1}||_1||A||_1$.

Кстати, *"итого"* можно было бы записать в виде
Итого: $n^{-1/2}||A||_2 \leqslant ||A||_1 \leqslant n^{1/2}||A||_2$.
Т.е. наряду с неравенством из условия задачи можно доказать аналогичное
$\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\mathrm{cond}_1(A)}{\mathrm{cond}_2(A)} \leqslant n$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\mathrm{cond}_2(A)}{\mathrm{cond}_1(A)} \leqslant n$.

29. Получить неравенство $\mathrm{cond}(A) \geq |\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|$ для произвольной невырожденной матрицы A и любой матричной нормы, используемой при определении числа обусловленности.

Эта задача решается с использованием задачи 25 из данного списка (см.)

$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|Ax_{max}\|}{\|x_{max}\|} = |\lambda_{max}|$, где x_{max} с.в., соответствующий максимальному по модулю собственному числу A.

$\|A^{-1}\| = \sup \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup \frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \frac{1}{\inf \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$.

Далее

$\inf \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|Ax_{min}\|}{\|x_{min}\|} = |\lambda_{min}|$

где x_{min} с.в., соответствующий минимальному по модулю собственному числу A.

Следовательно $\frac{1}{\inf \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} \geqslant \frac{1}{|\lambda_{min}|}$.

Перемножая два полученных неравенства $\|A\| \geqslant |\lambda_{max}|, \|A^{-1}\| \geqslant \frac{1}{|\lambda_{min}|}$ получим результат для матричных норм в определении числа обусловленности, которые согласованы с векторными нормами.

30. Пусть элементы матрицы B имеют вид $b_{ij} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-|i-j|}$. Доказать, что система $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ имеет единственное решение и метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

Задача 15.1 в БЛЧ. Обе нормы $\|B\|_\infty; \|B\|_1$, т.е.

$$max_i\left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|\right) = \sum_{j=1}^{n} \left|b_{\frac{i}{2},j}\right|; max_j\left(\sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}|\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|b_{i,\frac{j}{2}}\right|$$

равны $\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} < 1$ меньше единицы - достаточное условие сходимости метода простой итерации.

31. Пусть матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Найти все α, β, при которых метод простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = B\,\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ сходится с произвольного начального приближения.

Задача 15.2 в БЛЧ. Здесь надо использовать необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации - все собственные значения матрицы перехода должны быть по модулю меньше единицы. Оценка этих с.з.

15.2. $\det(B-\lambda E) = (\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda-\sqrt{2}\beta)(\alpha-\lambda+\sqrt{2}\beta) = 0$, $|\alpha| < 1$, $|\alpha \pm \sqrt{2}\beta| < 1$.

32. Пусть матрица B в методе $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha, \beta < 1\,.$$

Показать, что величина ошибки $\mathbf{z}^k = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k$ в норме $\|\cdot\|_\infty$ начинает монотонно убывать лишь с некоторого номера итерации N. Оценить N при $\alpha = \beta \approx 1$.

Задача 15.4 в БЛЧ. В задачниках имеется только

Ответ: $N \approx 1/(1-\alpha)$.

Чтобы получить такой ответ надо проявить сияющую простотой наглость в выкладках. Берем такую матрицу:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 8\,\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}, B^4 = \begin{bmatrix} \alpha^4 & 16\,\alpha^3 \\ 0 & \alpha^4 \end{bmatrix}, B^8 = \begin{bmatrix} \alpha^8 & 32\,\alpha^7 \\ 0 & \alpha^8 \end{bmatrix}, B^{(2^k)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(2^k)} & c_{2^k} \\ 0 & \alpha^{(2^k)} \end{bmatrix},$$

здесь $c_{2^k} = \prod_{i=0}^{2^k} 2\,\alpha^{(2^i)}$ или $\dfrac{2^{(2^k+1)}\,\alpha^{\left(2^{(2^k+1)}\right)}}{\alpha}$.

Норма матрицы перехода будет $\alpha^{\left(2^{(2^k+1)}\right)} + \dfrac{2^{(2^k+1)}\,\alpha^{\left(2^{(2^k+1)}\right)}}{\alpha}$. Надо оценить, когда эта величина меньше единицы. Считаем, что $N = 2^{(2^k+1)}$ - очень большое число. Выбрасываем первое слагаемое, как совсем маленькое, а также и знаменатель во втором слагаемом, чтобы усилить неравенство, получаем неравенство $N\,\alpha^N < 1$. Дальше раскладываем α^N в единице (подробнее см. решение задачи 51 из этого списка)

$N\,\mathrm{series}(1 + N(\alpha - 1) + \mathrm{O}((\alpha - 1)^2), \alpha = -(-1), 2) < 1$, выбрасываем О-большое, получаем неравенство $N(1 + N(\alpha - 1)) < 1$, решение которого $\alpha < \dfrac{N^2 - N + 1}{N^2}$. Дальше выбрасываем единицу в числителе правой части, как очень маленькое по сравнению с тем, что останется: $\alpha < \dfrac{N-1}{N}$. Это уже требуемое решение, которое можно записать в виде: $\dfrac{1}{-\alpha + 1} < N$.

Поскольку все выкладки были грубыми, то и решение надо записать в некотором виде $\dfrac{C}{1-\alpha} < N$, где C некоторая константа.

33. Пусть все собственные значения матрицы A вещественные и положительные. Доказать сходимость метода $\mathbf{x}^{k+1} = (I - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau\mathbf{b}$ при $\tau = \|A\|^{-1}$ с любой матричной нормой.

Эта задача есть в БЛЧ с решением. Тут и разъяснять нечего. Надо только помнить, что для таких матриц максимальное собственное число не больше любой нормы матрицы.

15.5. Собственные значения оператора перехода $B = E - \tau A$ имеют вид $\lambda(B) = 1 - \|A\|^{-1}\,\lambda(A)$. Так как $0 < \lambda(A) \le \|A\|$, $0 \le \lambda(B) < 1$.

34. Пусть спектр матрицы A удовлетворяет условиям: $|\mathrm{Im}(\lambda(A))| \le 1$, $0 < \delta \le \mathrm{Re}(\lambda(A)) \le 1$. Найти область значений вещественного параметра τ, при которых итерационный метод $\mathbf{x}^{k+1} = (I - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau\,\mathbf{b}$ для системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ сходится с произвольного начального приближения.

Решение этой задачи есть в задачнике Корнев, Чижонков (2003) Часть II, задача 3.104. У матрицы A собственные числа имеют вид $u + i\,v$, следовательно у матрицы перехода итерационного метода $I - \tau\,A$собственные числа будут $1 - \tau\,u - \tau\,i\,v$, здесь u и v - действительные числа. Для сходимости необходимо и достаточно, чтобы $|1 - \tau\,u - \tau\,i\,v| < 1$, т.е. $(1 - \tau\,u)^2 + (\tau\,v)^2 < 1$ или $\tau^2\,u^2 + \tau^2\,v^2 - 2\,\tau\,u < 0$. Считая итерационный шаг τ положительным, сокращаем, решаем $\tau < \dfrac{2\,u}{v^2 + u^2}$. Полученное неравенство должно выполняться для любых v из условия задачи, в том числе и для максимально возможных $v^2 = 1$, т.е. должно выполняться $\tau < \dfrac{2\,u}{1 + u^2}$. Последнее неравенство должно выполняться для любых u из условия задачи $\delta \le u$, $u \le 1$, $0 < \delta$. Функция $\dfrac{2\,u}{1 + u^2}$ монотонно растет на $\delta \le u$, $u \le 1$, значит условие, обеспечивающее сходимость итерационного метода, будет иметь вид $\tau < \dfrac{2\,\delta}{1 + \delta^2}$.

Разумеется, уже предположено при решении задачи, что итерационный шаг τ положительный.

35. При каких условиях на спектр матрицы B итерационный метод $\mathbf{x}^{k+1} = (2B^2 - I)\mathbf{x}^k + 2(B + I)\mathbf{c}$ сходится быстрее метода простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$?

Задача 5.125 из БКЧ. Прежде всего надо показать, что эти методы, если они сходятся, то сходятся к одному и тому же решению. Пусть $B = I - A$, тогда метод простой итерации сходится к решению задачи $A\,x = c$. Другой метод приобретает вид $x_{k+1} - x_k = 2\,(B^2 - I)\,x_k + 2\,(B + I)\,c$, т.е. получаем решение задачи $-(B + I)\,x = c$. Тут все в порядке, задача одна и та же.

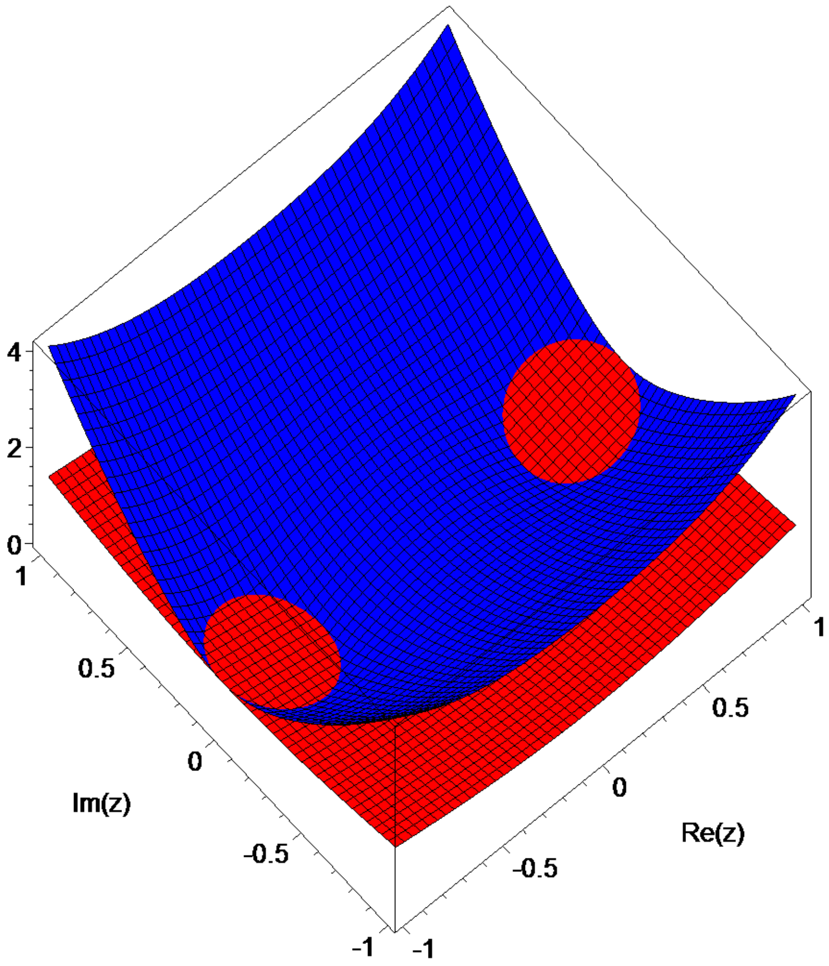
Теперь надо оценить собственные числа матриц перехода в обоих методах. У метода простой итерации матрица перехода B, а во втором методе $2\,(B^2 - I)$. Пусть собственное число B равно z, $|z| < 1$. Чтобы другой метод сходился быстрее надо, чтобы было $|2\,z^2 - 1| < |z|$. А может быть следовало бы учесть, что во втором методе количество операций на каждом шаге вдвое больше, чем в методе простой итерации? Тогда будет неравенство $|2\,z^2 - 1| < \dfrac{1|z|}{2}$, но ведь матрицу $2\,B^2 - I$можно вычислить всего один раз, и новый вектор $2\,(B + I)\,c$ тоже. А если матрица B ленточная? Тогда ширина ленты будет больше, и количество операций на шаге все же вырастет. А может быть собственные вектора матрицы B ортогональны? Такое бывает довольно часто. Тогда это неравенство должно быть выполнено только для тех собственных чисел, собственные вектора которых есть в разложении ошибки в начальном условии x_0. В общем - "тухлая" задача.

Ответ надо дать словами, как в задачнике:

этот итерационный метод сходится быстрее метода простой итерации, если спектр матрицы B расположен в подмножестве единичного круга комплексной плоскости, где функция $|2z^2 - 1|$ меньше функции $|z|$. В частности, если спектр матрицы B вещественный, то он должен принадлежать объединению интервалов $(-1, -1/2)$ и $(1/2, 1)$.

Синим нарисовано $|2\,z^2 - 1|$, а красным $|z|$. Там, где видны красненькие пятна, там должен быть спектр матрицы B, чтобы предложенный метод сходился быстрее метода простой итерации.

```
> restart;with(plots):
  a:=complexplot3d(abs(z),z = -1-1*I .. 1+1*I,axes =
  boxed,color=red):
  b:=complexplot3d(abs(2*z^2-1),z = -1-1*I .. 1+1*I,axes =
  boxed,color=blue):
  display(a,b);
```




```
>
```

36. Доказать, что для систем линейных уравнений второго порядка методы Якоби и Гаусса–Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

Задача 5.138 в БКЧ или 16.2 в БЛЧ. Надо вспомнить, как эти методы выглядят: решается задача $A\,x = b$

Пусть $A = L + \mathrm{D} + R$, где L - строго нижняя треугольная, D - диагональная, R - строго верхняя треугольная матрицы.

Методы Якоби и Гаусса-Зейделя имеют вид

$\mathrm{D}\,(x_{k+1} - x_k) + A\,x_k = b$, $(\mathrm{D} + L)\,(x_{k+1} - x_k) + A\,x_k = b$.

Для сходимости методов необходимо и достаточно, чтобы все с.з. матриц перехода $x_{k+1} = B_J\,x_k + c_J$, $x_{k+1} = B_{GZ}\,x_k + c_{GZ}$ были по модулю меньше единицы.

Р е ш е н и е. Запишем матричные представления операторов перехода

$$B_{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathrm{GZ}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем следующие формулы для собственных значений:

$$\lambda^{\mathrm{J}}_{1,\,2} = \pm\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}, \quad \lambda_1^{\mathrm{GZ}} = 0, \quad \lambda_2^{\mathrm{GZ}} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}},$$

приводящие к искомому утверждению.

37. Исследовать сходимость метода Гаусса – Зейделя, если матрица размерности $n \times n$ системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет элементы: $a_{ij} = 3^{-|i-j|}$.

Задача 16.4.1 из БЛЧ. Решение: метод сходится т.к. матрица A обладает свойством диагонального преобладания - следует из задачи 16.3.

16.3. Пусть невырожденная матрица A обладает свойством диагонального преобладания, т.е. для всех i справедливо

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \le q|a_{ii}|, \quad q < 1.$$

Тогда для ошибки в методе Гаусса — Зейделя имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_\infty \le q^k\, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty .$$

Отвратительная форма записи суммы, получившая распространение из-за лентяев. Надо писать

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}$$

В задачнике имеется подробное решение.

16.3. Обозначим вектор ошибки через $\mathbf{e}^k$. Для этого вектора имеет место соотношение (уравнение ошибки) $(D+L)\mathbf{e}^{k+1}+R\mathbf{e}^k=0$. Пусть $\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty=|e_l^{k+1}|$. Выпишем l-е уравнение

$$\sum_{j=1}^{l-1} a_{lj}\,e_j^{k+1}+a_{ll}\,e_l^{k+1}+\sum_{j=l+1}^{n} a_{lj}\,e_j^{k}=0$$

и разрешим его относительно e_l^{k+1} :

$$e_l^{k+1}=-\sum_{j=1}^{l-1}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\,e_j^{k+1}-\sum_{j=l+1}^{n}\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\,e_j^{k}.$$

Отсюда получим $\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty=|e_l^{k+1}|\le\alpha\,\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty+\beta\,\|\mathbf{e}^k\|_\infty$, где

$$\alpha=\sum_{j=1}^{l-1}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|,\quad \beta=\sum_{j=l+1}^{n}\left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|.$$

Найденное соотношение можно переписать в виде

$$\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty\le\frac{\beta}{1-\alpha}\|\mathbf{e}^k\|_\infty.$$

По условию $\alpha+\beta\le q<1$, следовательно,

$$\frac{\beta}{1-\alpha}\le\frac{q-\alpha}{1-\alpha}=q-\frac{\alpha(1-q)}{1-\alpha}\le q,$$

откуда и следует искомая оценка.

38. Пусть симметричная матрица A имеет собственные значения $\lambda(A)\in[m,M]$, $m>0$. Доказать, что при любом положительном значении итерационного параметра τ сходится метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k}{\tau}+A\left(\frac{\mathbf{x}^{k+1}+\mathbf{x}^k}{2}\right)=\mathbf{b}\,.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

Задача 16.6 в БЛЧ. Там же имеется подробное решение.

16.6. Используя форму записи метода

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)\mathbf{x}^{k+1}=\left(E-\frac{\tau}{2}A\right)\mathbf{x}^{k}+\tau\mathbf{b}$$

и общность системы собственных векторов матриц слева и справа, выразим собственные значения оператора перехода B через собственные значения исходной матрицы

$$\lambda(B)=\frac{1-\tau\lambda(A)/2}{1+\tau\lambda(A)/2}.$$

Теперь сходимость метода при $\tau>0$ очевидна, а для определения τ_{opt} рассмотрим следующую минимаксную задачу:

$$\min_{\tau>0}\ \max_{\lambda\in[m/2,M/2]}\frac{|1-\tau\lambda|}{1+\tau\lambda}.$$

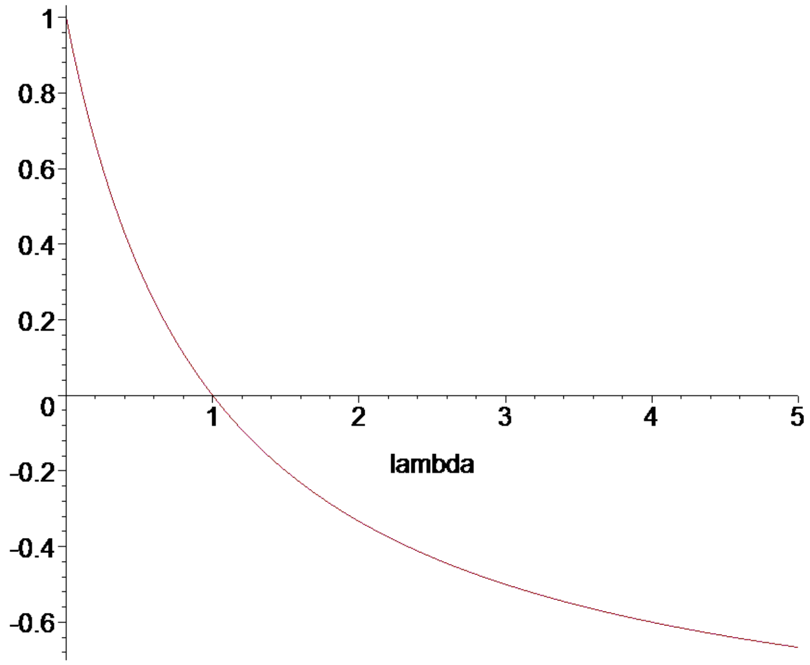
Функция $f(\lambda)=(1-\tau\lambda)/(1+\tau\lambda)$ при $\lambda>0$ и фиксированном $\tau>0$ является убывающей, поэтому максимальное значение функция $|f(\lambda)|$ достигает на границе отрезка: при $\lambda=m/2$ и/или при $\lambda=M/2$. Можно убедиться, что минимум по τ имеет место при равенстве

$$\left|f\left(\frac{m}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{M}{2}\right)\right|\ \Rightarrow\ \frac{1-\tau_{\text{opt}}m/2}{1+\tau_{\text{opt}}m/2}=-\frac{1-\tau_{\text{opt}}M/2}{1+\tau_{\text{opt}}M/2}\ \Rightarrow\ \tau_{\text{opt}}=\frac{2}{\sqrt{mM}}.$$

На экзамене фразы типа "можно убедиться" не проходят. Надо давать более развернутое решение

Функция $f(\lambda):=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ действительно убывает $\text{plot}(f(\lambda), \lambda=0..5)$

$$f(\lambda):=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$



и максимальное по модулю значение принимает на одном из концов. Если функция убывает с + на -, а не просто так, то минимальное значение у функции на всем отрезке будет при таком τ_{opt} , когда на обоих концах значения по модулю одинаковые

$$\mathrm{solve}\left(\left\{\frac{1-\frac{1\,\tau_{opt}\,m}{2}}{1+\frac{1\,\tau_{opt}\,m}{2}}=-\frac{1-\frac{1\,\tau_{opt}\,M}{2}}{1+\frac{1\,\tau_{opt}\,M}{2}}\right\},\{\tau_{opt}\}\right)_1;\ \mathrm{assign}(\%)$$

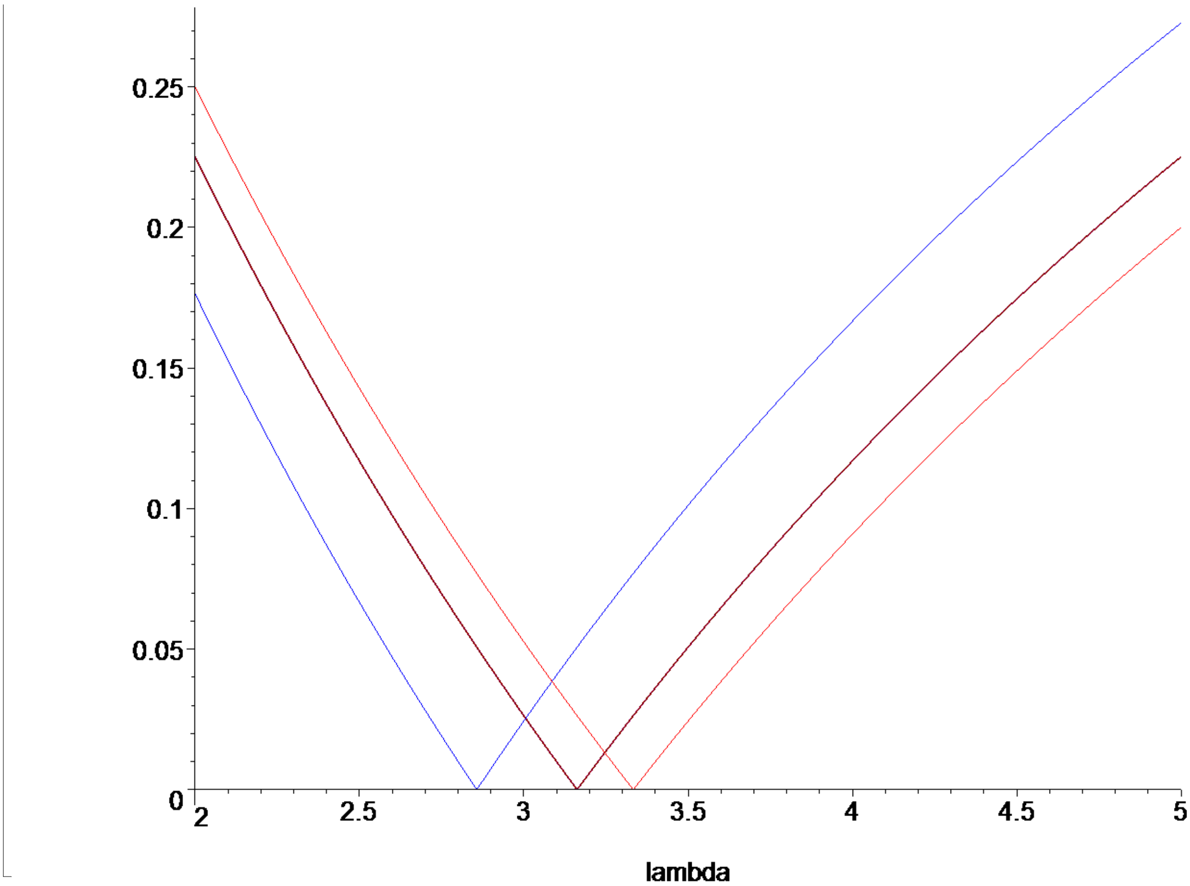
$$\{\tau_{opt}=\frac{2}{\sqrt{M\,m}}\}$$

Если последнее высказывание не очевидно, то следует посмотреть картинку: пусть m = 2,M = 5. График с оптимальным значением

τ_{opt} = .6324555320 черненький толстый. Красный - когда чуть меньше, синий, когда τ чуть больше оптимального

```
> with(plots):tau:=0.6:a:=plot(abs(1-tau*lambda/2)/(1+tau*lambda/2
  ),lambda=2..5,color=red):tau:=0.7:b:=plot(abs(1-tau*lambda/2)/(1
  +tau*lambda/2),lambda=2..5,color=blue):tau:=2/sqrt(2*5):evalf(%)
  ;c:=plot(abs(1-tau*lambda/2)/(1+tau*lambda/2),lambda=2..5,thickn
  ess=2):display(a,b,c);
```

$$0.6324555320$$



При таком выборе итерационного шага скорость сходимости итерационного метода определяется, как скорость сходимости со скоростью геометрической прогрессии с показателем *q*: $\dfrac{(m\,M)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - m}{(m\,M)^{\left(\frac{1}{2}\right)} + m}$

39. Пусть симметричная матрица A имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$. При каких $\alpha \in [0, 1]$ метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\alpha \mathbf{x}^{k+1} + (1-\alpha)\mathbf{x}^k\right) = \mathbf{b}$$

сходится при любом $\tau > 0$?

Задача 16.7 из БЛЧ с подробным решением

16.7. Используя идею предыдущей задачи, запишем условие сходимости метода

$$\left|\frac{1-\tau(1-\alpha)\lambda}{1+\tau\alpha\lambda}\right| < 1 \quad \forall\lambda > 0.$$

Ответы, указания, решения

Сделав замену $t = \tau\lambda > 0$, получим неравенство

$$|1 - t(1-\alpha)| < 1 + t\alpha.$$

Отметим, что неотрицательность выражения под модулем приводит к тривиальному, в силу условия задачи, неравенству $-(1-\alpha) < \alpha$. Поэтому содержательным является другой случай: $t(1-\alpha) - 1 < 1 + t\alpha$. Из этого неравенства имеем

$$-\frac{2}{t} < 2\alpha - 1,$$

что в силу $t > 0$ приводит к ответу $\alpha \geq 1/2$.

40. Найти все α, β, при которых метод Гаусса – Зейделя является сходящимся для системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Задача 5.152.3 из БКЧ или 16.16 в БЛЧ. В задачниках даны указания, как решать такую задачу.

Оператор перехода B в методе Зейделя имеет вид $B = -(D+L)^{-1}R$. Рассмотрим задачу на собственные значения $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Имеем

$$-(D+L)^{-1}R\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \ (\lambda L + \lambda D + R)\mathbf{x} = 0, \ \det(\lambda L + \lambda D + R) = 0.$$

Определитель матрицы $\begin{bmatrix} \alpha\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha\lambda & \beta\lambda & \beta \\ 0 & \beta\lambda & \alpha\lambda \end{bmatrix}$ равен $\alpha^2\beta\lambda^3 - \alpha^3\lambda^2 - \alpha\beta^2\lambda^2$. Приравниваем определитель нулю, решаем, получаем собственные значения $[\lambda = 0]$, $[\lambda = 0]$, $\left[\lambda = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right]$.

Для сходимости надо, чтобы модуль третьего с.ч. был бы по модулю меньше единицы. Не оценивается? - Значит сходимости нет.

41. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ для любого $x_0 \geq -2$.

42. Доказать, что итерационный процесс $x_{n+1} = \cos x_n$ сходится для любого начального приближения $x_0 \in \mathbf{R}^1$.

Достаточное условие сходимости метода простой итерации вида $x_{k+1} = \phi(x_k)$ - условие, обеспечивающее сжимаемость отображения $\phi(x)$, например, $\left|\frac{d}{dx}\phi(x)\right| < 1$, и чтобы x_k принадлежали отрезку, где это условие выполнено.

В задаче 41 все приближения будут неотрицательные, поскольку $-2 \leq x_0$. Функция $\phi(x) = \sqrt{x+2}$ удовлетворяет условию сжимаемости. Выполнено даже условие строгой сжимаемости на $[0, \infty]$, т.е. $\left|\frac{d}{dx}\phi(x)\right| \leq q$, $q < 1$, поэтому решение единственно, т.е. $x = 2$, к которому и сходится итерационная последовательность.

В задаче 42 все приближения будут на отрезке [-1,1], где выполнено условие строгой сжимаемости $\left|\frac{d}{dx}\phi(x)\right| \leq q$, $q < 1$ для функции $\phi(x) = \cos(x)$.

43. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - \, -2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

Задача 6.16 из БКЧ.

<u>Решение</u>. Уравнение $x = x^2 - 2x + 2$ имеет два корня $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$. Пусть $\varphi(x) = x^2 - 2x + 2$, тогда при $x \in (1/2, 3/2)$ имеем $\varphi(x) \in (1/2, 3/2)$, $|\varphi'(x)| < 1$. Поэтому при $x_0 \in (1/2, 3/2)$ приближения сходятся к z_1. Дальнейший анализ проводим аналогично решению 6.7, используя, в частности, эквивалентную запись итерационного метода в виде $x_{n+1} - x_n = (x_n - 2)(x_n - 1)$.

<u>Ответ</u>: метод сходится к $z_1 = 1$ при $x_0 \in (0, 2)$. Если $x_0 = 0$ или $x_0 = 2$, то метод сходится к $z_2 = 2$. Для остальных начальных приближений метод расходится.

44. Записать расчетную формулу метода Ньютона для системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.3x &= 0.1, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

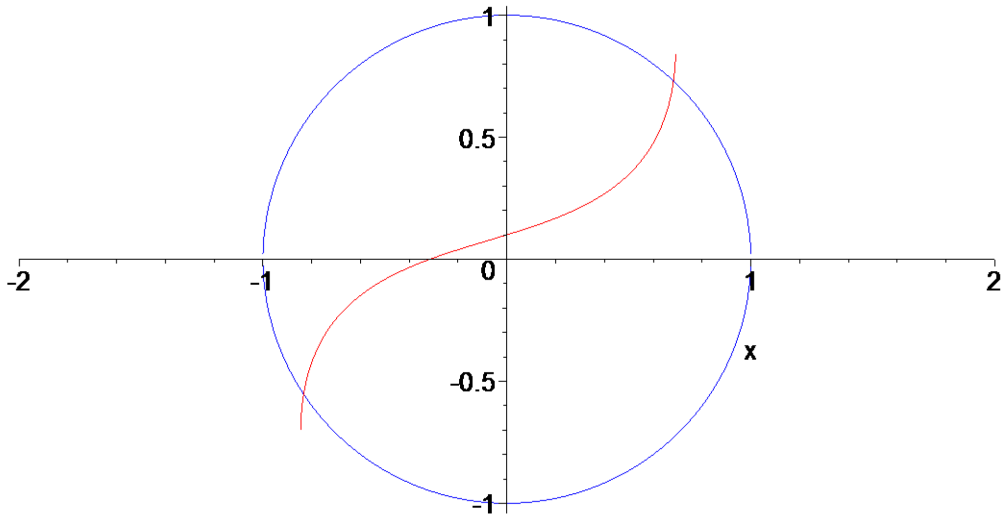
45. Записать расчетную формулу метода Ньютона для системы уравнений

$$\begin{cases} x^{10} + y^{10} &= 1024, \\ e^x - e^y &= 1. \end{cases}$$

Задача 44.

Решений у системы уравнений - два (там, где красная кривая пересекает синюю).

> $\operatorname{plot}\left(\left[-x + \arcsin(1.3\,x + .1), \sqrt{-x^2+1}, -\sqrt{-x^2+1}\right], x = -2\,..\,2, \mathit{color} = [\mathit{red}, \mathit{blue}, \mathit{blue}], \mathit{scaling} = \text{"constrained"}\right)$



Для системы из двух уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

последовательность метода Ньютона имеет вид (это очень распространенный дополнительный вопрос на экзамене по ЧМ-ам)

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_k, y_k) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x_k, y_k) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x_k, y_k) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}$$

Матрицу Якоби нетрудно вычислить, обратить матрицу 2*2, и всё!

С такого начального приближения $x, y := .1, .1$ метод Ньютона сходится за 30 шагов к положительному решению, а с такого $x, y := -.1, -.1$ - к отрицательному.

```
> print("Начальное условие");
  x, y := .1, .1;
  for k to 30 do
      det := (cos(x + y) - 1.3) 2 y - 2 x cos(y);
```

$$xnew := x - \frac{1\,(2\,y\,(\sin(x+y) - 1.3\,x - .1) - \cos(y)\,(x^2+y^2-1))}{det};$$

$$y := y - \frac{1\,(-2\,x\,(\sin(x+y) - 1.3\,x - .1) + (\cos(x+y) - 1.3)\,(x^2+y^2-1))}{det};$$

$x := xnew$

end do;

print("Решение");

x, y;

print("Проверка");

$\sin(x+y) - 1.3\,x - .1,\ x^2 + y^2 - 1$

"Начальное условие"

$x, y := 0.1, 0.1$

"Решение"

0.6827996789, 0.7306056382

"Проверка"

$0.,\ 0.1\ 10^{-9}$

С другого начального приближения получается:

"Начальное условие"

$x, y := -0.1, -0.1$

"Решение"

-0.8330888979, -0.5531391219

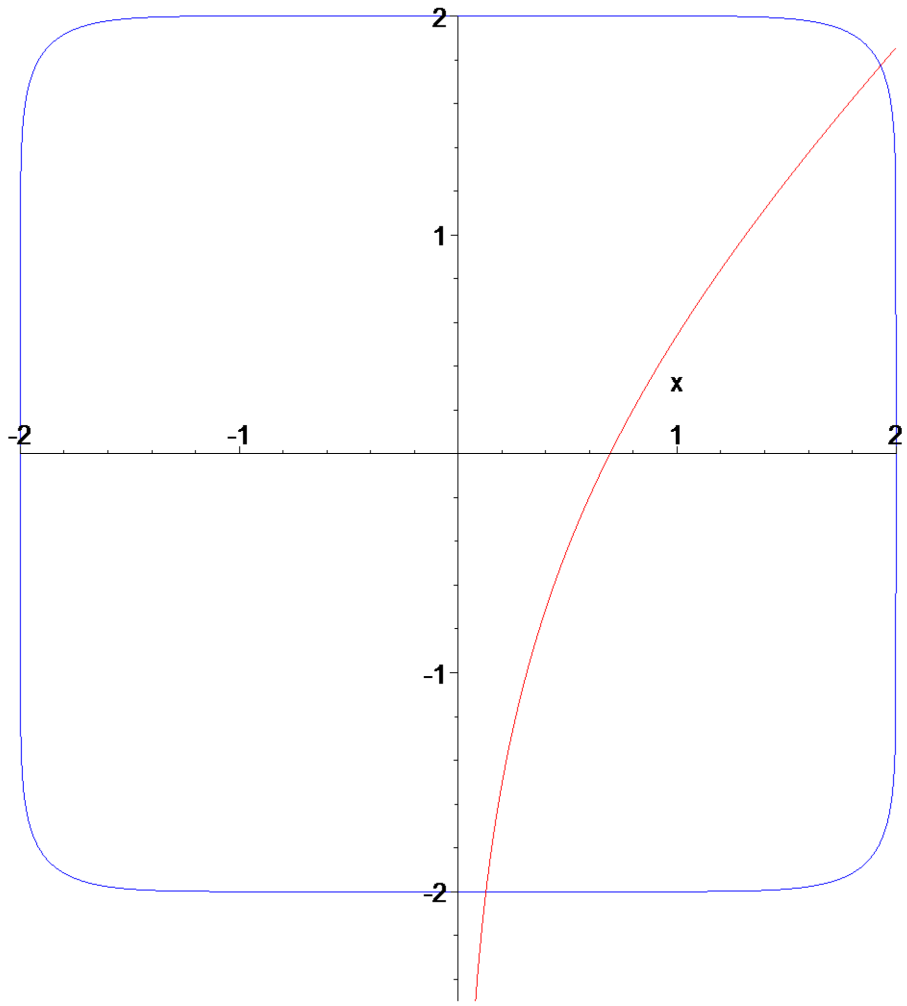
"Проверка"

$-0.5\ 10^{-9},\ 0.$

Задача 45. Здесь тоже имеется два решения у системы уравнений.

> unassign('x'); unassign('y')

> $\mathrm{plot}\left(\left[\log(\mathbf{e}^x - 1), (-x^{10} + 1024)^{\left(\frac{1}{10}\right)}, -(-x^{10} + 1024)^{\left(\frac{1}{10}\right)}\right], x = -2\,..\,2, color = [red, blue, blue], scaling = \text{"constrained"}\right)$



С такого начального приближения $x, y := 1., -2.$ метод Ньютона сходится к нижнему решению.

> print("Начальное условие");

$x, y := 1., -2.;$

for k **to** 30 **do**

$$det := 10\,x^9\,(-\mathbf{e}^y) - \mathbf{e}^x\,10\,y^9;$$

$$xnew := x - \frac{1\,((-\mathbf{e}^y)\,(x^{10} + y^{10} - 1024) - 10\,y^9\,(\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^y - 1))}{det};$$

$$y := y - \frac{1\,(-\mathbf{e}^x\,(x^{10} + y^{10} - 1024) + 10\,x^9\,(\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^y - 1))}{det};$$

$$x := xnew$$

end do;

print("Решение");

$x, y;$

print("Проверка");

$x^{10} + y^{10} - 1024,\ \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^y - 1$

"Начальное условие"

$x, y := 1., -2.$

"Решение"

0.1269280111, -2.000000000

"Проверка"

0.1085362342 10^{-8}, -0.2 10^{-9}

С другого начального условия метод Ньютона сходится к верхнему решению.

"Начальное условие"

$x, y := 1., 2.$

"Решение"

1.929938630, 1.773101053

"Проверка"

-0.8 10^{-6}, -0.2 10^{-8}

46. Для дифференциальной задачи

$$u'' = f(x), \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

построить разностную схему методом неопределенных коэффициентов на равномерной сетке.

Самый простой ответ: сами задаем N (больше 1000 не рекомендуется), дальше сетка, сеточная функция, система уравнений для сеточной функции...O(h^2), аппроксимация краевых условий с порядком O(h^∞) - ...

$x_n = n\,h,\ n \in [0\,..\,N],\ h = \dfrac{1}{N},\ y_n =$ "сеточна функц", $\dfrac{y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1}}{h^2} = f_n, f_n = \mathrm{f}(x_n),$

$n \in [1\,..\,N-1], y_0 = 0, y_N = 0.$

Метод неопределенных коэффициентов закопан там где-то, когда заменяли вторую производную на разностное отношение.

47. Дана дифференциальная задача

$$-u'' + c\,u = f(x), \ x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0, \quad c = \mathrm{const}.$$

При каких c для решения этой задачи можно применить метод конечных элементов?

Если храбрости хватает, то можно отвечать: - "при любых".

Вариант из БКЖ

❑ **7.7. Дана дифференциальная задача**

$$-u'' + cu = f(x), x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, c = \mathrm{const}.$$

При каких c для решения этой задачи можно применять метод Ритца?

<u>Ответ:</u> $c > -\pi^2$.

Объяснение ответа из задачника довольно простое: при таких "с" оператор левой части диффура является симметричным и положительно определенным (минимальное собственное число в задаче $-u'' = \lambda\, u$, $u(0)=u(1)=0$ равно π^2) . В этом варианте метод Ритца сходится. Соответственно, сходится и его сеточный аналог - метод конечных элементов.

Метод Ритца не применяют для задач с неположительными операторами. Однако, метод конечных элементов - это один из способов дискретизации задачи. Так ведь дискретизацию этим методом провести можно при любых "c". А потом решать СЛАУ с плохой матрицей. Но это ведь возможно.

.

48. Проверить, аппроксимирует ли разностная схема уравнение $y' = f(x, y)$ на равномерной сетке $x_k = x_0 + kh$, $k \geq 0$:

$$\frac{1}{8h}(y_k - 3y_{k-2} + 2y_{k-3}) = \frac{1}{2}(f_{k-1} + f_{k-2}), \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k)\,.$$

В левой части

$$\frac{.25\,(y_k - y_{k-2})}{2\,h} - \frac{.25\,(y_{k-2} - y_{k-3})}{h} = .25\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x_{k-1})\right) - .25\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}\left(x_{k-2} - \frac{h}{2}\right)\right) + \mathrm{O}(h^2)$$

(производные не круглые, а прямые), т.е. 0 + O(h), а в правой части $\mathrm{f}\left(x_{k-1} - \frac{h}{2}\right) + \mathrm{O}(h^2)$.

Ответ: не аппроксимирует.

49. Для задачи $y' + y = x + 1$, $y(0) = 0$ рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + y_k = kh + 1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0\,.$$

Каков порядок аппроксимации на решении данной схемы? Можно ли его улучшить?

Из БКЧ:

❑ **8.3. Для задачи $y' + y = x + 1$, $y(0) = 0$ рассматривается схема**

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + y_k = kh + 1,\ \ y_0 = 0,\ y_1 = 0.$$

Каков порядок аппроксимации на решении данной схемы? Можно ли его улучшить?

<u>О т в е т :</u> первый; можно, если положить $y_1 = h$, то порядок аппроксимации равен двум. В отличие от дифференциального случая, для разностной задачи необходимы два начальных условия. Поэтому аппроксимация решения в точке $x = h$ — часть формальной аппроксимации дифференциального оператора L.

Эта задача с очень тонким подвохом. Формально уравнение $y_1 = 0$ ничего не аппроксимирует в исходной задаче, и так бы оно и было, если бы диффур был бы каким-нибудь другим, например, $\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + \frac{1}{y} = x + 1$, или краевое условие было бы другим, а не $\mathrm{y}(0) = 0$. Но именно для данного в условии задачи диффура и условия $\mathrm{y}(0) = 0$ уравнение $y_1 = 0$ имеет порядок аппроксимации O(h), т.к. решение этой задачи Коши $\mathrm{y}(x) = x$ в точке $x = h$ есть

$y(h) = 0 + O(h)$.

Синее можно не смотреть. А если по-честному, то: строим аппроксимацию первого порядка диффура в точке $x = 0$

$\frac{y_1 - y_0}{h} + y_0 = 0\,h + 1$ => $y_1 = h$ => порядок аппроксимации O(h). Но для данного уравнения и граничного условия оказывается...

У следующей "заготовки" порядок аппроксимации второй:

$\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{\left(\frac{d^2}{dx^2} y(0)\right) h^2}{2} + y_0 = 0\,h + 1$ => (диффур можно дифференцировать: $y''+y' = 1$) =>

$\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{\left(\left(\frac{d}{dx} y(0)\right) - 1\right) h^2}{2} + y_0 = 0\,h + 1$ => $\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{(-y(0) + 0 + 1 - 1)\,h^2}{2} + y_0 = 0\,h + 1$ =>

$\frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{(-y_0)\,h^2}{2} + y_0 = 0\,h + 1$ => $\frac{y_1}{h} = 1$ => $y_1 = h$ => порядок аппроксимации O(h^2).

Можно и добавить! Порядок аппроксимации у уравнения $y_1 = h$ будет O(h^∞), поскольку $y(h) = h$.

Последнее предложение из Ответа задачника БКЧ следует воспринимать, как шутку юмора с вычмата, и "...рассматривается схема..."

Второй вопрос из формулировки задачи "можно?" или "не можно?" имеет своим ответом того, кто его спрашивает. Но если обстоятельства вынуждают к тому, что какой-то ответ надо дать, то вот такая "разностная схема" $y_k = k\,h$, $k = 0, 1, \ldots$ имеет бесконечный порядок аппроксимации и вообще является точной! Но если разностное уравнение

$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\,h} + y_k = k\,h + 1$ трогать нельзя, то выше второго порядка аппроксимации не будет. А если нельзя и начальные условия трогать, то что тогда спрашивать? Порядок аппроксимации разностной схемы можно увеличить, взяв другую разностную схему более высокого порядка аппроксимации. Надо бы уточнить формулировку задачи.

50. Для уравнения $y' = f(x, y)$ построить разностную схему

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k),$$

с наивысшим порядком аппроксимации p на решении.

В БЛЧ это задача 24.5. Там рекомендуется переписать задачу в виде

$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\,h} = a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x_{k+1})\right) + a_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x_k)\right) + a_{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x_{k-1})\right)$ (производные не круглые, а прямые).

Далее используем формулу Тейлора

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x_k)\right) + \frac{\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x_k)\right) h^2}{6} + O(h^4) = (a_1 + a_0 + a_{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x_k)\right) + (a_1 - a_{-1}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x_k)\right) h$$

$$+\frac{(a_1+a_{-1})\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\mathrm{y}(x_k)\right)h^2}{2}+\frac{(a_1-a_{-1})\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\mathrm{y}(x_k)\right)h^3}{6}+\mathrm{O}(h^4).$$

Аппроксимация будет четвертого порядка $\mathrm{O}(h^4)$, если

$a_1+a_0+a_{-1}=1,\ a_1-a_{-1}=0,\ \frac{a_1+a_{-1}}{2}=\frac{1}{6}.$

Ответ: $a_1=\frac{1}{6},\ a_0=\frac{4}{6},\ a_{-1}=\frac{1}{6}$. Порядок аппроксимации четвертый, $p=4$.

51. Для задачи $y'=y,\ y(0)=1$ рассмотреть схему

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=y_k,\quad y_0=1,\quad k\geq 0,$$

и в разложении ошибки $y(x_k)-y_k=c_1h+c_2h^2+\cdots$ найти постоянную c_1 для $x_k=1$.

Из условия задачи $x_k=1$ сразу следует $k\,h=1$. Решение задачи будет совсем глупым, если, например, $k=1$. Хотя и правильным. Но не надо такие шутки шутить - хуже будет. Поэтому сразу считаем, что шаг h в разностной схеме достаточно мал, соответственно, k - очень большое число.

Решение дифф задачи имеет вид $\mathrm{y}(x)=\mathbf{e}^x$, т.е. при $x=1$ получаем $\mathbf{e}$. Решение разностной схемы имеет вид $y_k=y_0\,(1+h)^k$, т.е. при $k\,h=1$ получаем $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

Если кто знаком с асимптотическими разложениями, то может сразу написать до какого-нибудь порядка

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\mathbf{e}-\frac{1\,\mathbf{e}}{2\,k}+\frac{11\,\mathbf{e}}{24\,k^2}-\frac{7\,\mathbf{e}}{16\,k^3}+\frac{2447\,\mathbf{e}}{5760\,k^4}-\frac{959\,\mathbf{e}}{2304\,k^5}+\frac{238043\,\mathbf{e}}{580608\,k^6}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)$, а тем, кто почему-то с этим не знаком, тот может взять в библиотеке задачник Арушанян, Корнев, Чижонков, посмотреть задачу 7.8 : $\mathrm{y}(1)-y_k=e-(1+h)^{\left(\frac{1}{h}\right)}$, $(1+h)^{\left(\frac{1}{h}\right)}=\mathbf{e}^{\left(\frac{1\ln(1+h)}{h}\right)}$, дальше разложить логарифм в единице по формуле Тейлора при малых h :

$\ln(1+h)=h-\frac{1\,h^2}{2}+\frac{1\,h^3}{3}-\frac{1\,h^4}{4}+\frac{1\,h^5}{5}+\mathrm{O}(h^6)$, затем разложить экспоненту

$\mathbf{e}^{\left(1-\frac{1\,h}{2}+\frac{1\,h^2}{3}-\frac{1\,h^3}{4}+\frac{1\,h^4}{5}+\mathrm{O}(h^5)\right)}$ при малых h :

$\mathbf{e}^{\left(1-\frac{1\,h}{2}+\frac{1\,h^2}{3}-\frac{1\,h^3}{4}+\frac{1\,h^4}{5}+\mathrm{O}(h^5)\right)}=\mathbf{e}+\left(-\frac{1\,\mathbf{e}}{2}\right)h+\frac{11\,\mathbf{e}\,h^2}{24}+\left(-\frac{7\,\mathbf{e}}{16}\right)h^3+\frac{2447\,\mathbf{e}\,h^4}{5760}+\mathrm{O}(h^5)$. Ответ: $c_1=\frac{1\,\mathbf{e}}{2},\ c_2=\left(-\frac{11}{24}\right)\mathbf{e}$, и т.д. Лишней работы можно не делать, поскольку спрашивается только про c_1.

52. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотреть схему

$$4\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 3\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = e^h, \quad k \ge 1,$$

и в разложении ошибки $y(x_k) - y_k = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянные c_1 и c_2 для $x_k = 1$.

Эта задачка для прогульщиков. Для тех, кто и на лекции, и на семинары не ходил. Такая разностная схема везде упоминалась, как пример неустойчивой схемы, т.е. указанное в условии задачи равенство $\mathrm{y}(1) - y_k = c_1\,h + c_2\,h^2 + \mathrm{O}(h^3)$ никак не может быть справедливым. Решать здесь нечего. Это просто подвох.

На этой задачке уже многие погорели!!! Надо же решение какое-нибудь написать! Например, составляем характеристическое уравнение, поскольку уравнение разностной схемы - это разностное линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$-\lambda^2 + (3 - h)\,\lambda - 2 = 0,$$

решаем его $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{1\,h}{2} + \frac{1\,\sqrt{h^2 - 6\,h + 1}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{1\,h}{2} - \frac{1\,\sqrt{h^2 - 6\,h + 1}}{2}$,

записываем решение (общее решение линейного однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами)

$$y_k = C_1\,\lambda_1^{\,k} + C_2\,\lambda_2^{\,k},$$

где константы C_i определяются из начальных условий: $y_0 = C_1 + C_2$, т.е. $C_1 + C_2 = 1$, и $y_1 = C_1\,\lambda_1 + C_2\,\lambda_2$, т.е. $C_1\,\lambda_1 + C_2\,\lambda_2 = \mathbf{e}^h$,

решаем эту систему уравнений

?,

и видим, что выражение $\mathrm{y}(1) - y_k = c_1\,h + c_2\,h^2 + \mathrm{O}(h^3)$ никак не может быть справедливым, поскольку для достаточно малых h=1/N, N - число шагов достаточно большое, получим

$\mathrm{y}(1) - y_k$

$$= e - \frac{1\left((h^2 - 6\,h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)} + h - 3 + 2\,\mathbf{e}^h\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1\,h}{2} + \frac{1\,(h^2 - 6\,h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^k}{2\,(h^2 - 6\,h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$- \frac{1\left(-(h^2 - 6\,h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)} + h - 3 + 2\,\mathbf{e}^h\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1\,h}{2} - \frac{1\,(h^2 - 6\,h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^k}{2\,(h^2 - 6\,h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$ при k=1/h.

Упрощаем это выражение (в уму) и видим $y_k = \left(\frac{-2\,\ln(h) + \ln(2)}{h^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{h^3}\right)\right)\mathbf{e}^h$.

Такое дикое решение представлено только для тех, кто в бюрократы собирается после мехмата. Разумеется, надо было сразу упростить выражения для λ_i с помощью формулы

Тейлора

$$(h^2 - 6h + 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \text{series}(1 - 3h + O(h^2), h, 2),$$

выкинуть О большое, тогда все гораздо проще. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + h$, тогда λ_2^k ведет себя как експонента, а λ_1 уносит решение разностной схемы в бесконечность.

Следует иметь в виду, что в тексте лекций ЕВЧ не было определения устойчивости, α-устойчивости, A-устойчивости, абсолютной устойчивости... Все это есть в задачнике, и изучалось на семинарских занятиях!

53. Имеется задача $u'' - 2u = \sin x - 1,\ u'(0) - u(0) = 0,\ u(1) = 0$. На сетке с шагом h для условия при $x = 0$ построить аппроксимацию второго порядка на решении.

Задача 25.20 в БЛЧ с ответом

$$\frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}(2u_0 - 1) - u_0 = 0\,.$$

Частный случай задачи 25.2

25.2. Используя значения функции u в двух точках x_0 и x_1, построить аппроксимацию второго порядка граничного условия $a\,u(0) + b\,u'(0) = c$ для уравнения

$$-u'' + p(x)\,u = f(x)\,.$$

для которой есть подробное решение

25.2. Из формулы Тейлора имеем

$$u(h) = u(0) + h\,u'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O\left(h^3\right),$$

откуда

$$u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \frac{h}{2}u''(0) + O\left(h^2\right).$$

Из исходного уравнения следует, что

$$-u''(0) = f(0) - p(0)\,u_0.$$

Таким образом,

$$a\,u(0) + b\left(\frac{u(h) - u(0)}{h} + \frac{h}{2}\left(f(0) - p(0)\,u(0)\right)\right) = c + O\left(h^2\right).$$

Искомая аппроксимация имеет вид

$$\left(a - \frac{h}{2}p_0\right)u_0 + b\,\frac{u_1 - u_0}{h} = c - \frac{h}{2}f_0.$$

54. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0.$$

Это разностная схема для уравнения переноса "неявная с центральной разностью". Для нее спектральный признак выполнен при любых τ и h. Задача 9.19 в БКЧ.

В качестве решения подставляем конструкцию $u_m^n = \lambda^n\,\mathbf{e}^{(i\,m\,\phi)}$. $\dfrac{\lambda - 1}{\tau} + \dfrac{a\,\lambda\,(\mathbf{e}^{(i\,\phi)} - \mathbf{e}^{(-i\,\phi)})}{2\,h} = 0$

В рассматриваемом случае СПУ формулируется следующим образом:

Для выполнения необходимого условия устойчивости разностной схемы должно быть выполнено неравенство

$|\lambda| \le 1$ *при всех* $\phi \in [0, 2\,\pi]$. *Или хотя бы* $|\lambda| \le 1 + C\,\tau$

После упрощений получаем

$$\lambda = \frac{1 - i\,a\,\sin(\phi)}{1 + a^2\,\sin(\phi)^2}$$

И видим, что $|\lambda| \le 1$ при любых τ и h.

55. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0.$$

Задача 9.20 в БКЧ. В качестве решения подставляем конструкцию $u_m^{\,n} = \lambda^n \mathbf{e}^{(i\,m\,\phi)}$, получаем $\lambda = -\dfrac{i\,a\,\tau\sin(\phi)}{h} + \cos(\phi)$ после упрощений. Надо вот так упростить

$$-\frac{1\left(\dfrac{(\mathbf{e}^{(\phi\,i)})^2\,a\,\tau}{h} - (\mathbf{e}^{(\phi\,i)})^2 - \dfrac{a\,\tau}{h} - 1\right)}{2\,\mathbf{e}^{(\phi\,i)}} = -\frac{i\,a\,\tau\sin(\phi)}{h} + \cos(\phi).$$

Дальше оценивается модуль $\sqrt{\left(\dfrac{a\,\tau}{h}\right)^2 \sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2}$. Условная устойчивость, спектральный признак выполнен при $\left(\dfrac{a\,\tau}{h}\right)^2 \le 1$

56. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0\,.$$

Задача 9.21 в БКЧ. В качестве решения подставляем конструкцию $u_m^{\,n} = \lambda^n \mathbf{e}^{(i\,m\,\phi)}$, получаем $\lambda = \dfrac{(\mathbf{e}^{(\phi\,i)})^2 + 1}{a\,\tau\,(\mathbf{e}^{(\phi\,i)})^2 + 2\,\mathbf{e}^{(\phi\,i)}\,h - a\,\tau}$, после упрощений получается $\lambda = \dfrac{\cos(\phi)\left(1 - \dfrac{i\,a\,\tau\sin(\phi)}{h}\right)}{1 + \left(\dfrac{a\,\tau}{h}\right)^2 \sin(\phi)^2}$.

Далее оценивается $|\lambda| = \dfrac{|\cos(\phi)|\sqrt{1 + \left(\dfrac{a\,\tau}{h}\right)^2 \sin(\phi)^2}}{1 + \left(\dfrac{a\,\tau}{h}\right)^2 \sin(\phi)^2}$, $|\lambda| = \dfrac{|\cos(\phi)|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a\,\tau}{h}\right)^2 \sin(\phi)^2}}$. Видно чтобы было сразу, что СПУ выполнен при любых шагах сетки.

57. При каком соотношении τ и h разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

имеет на решении порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$?

Задача 9.55 в БКЧ. Надо выписывать главные члены погрешности аппроксимации. Здесь надо понимать, что аппроксимируется уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial}{\partial t}u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u$, а не что-нибудь другое (непотребное). Подставляем в разностную схему решение диффура, получаем погрешности аппроксимаций по времени и по пространству в точке $t = n\,\tau$, $x = m\,h$ используя формулу Тейлора

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right)+\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\right)+O(\tau^2)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\right)+\frac{1}{12}h^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}u\right)+O(h^4)$$

В силу уравнения теплопроводности, которое конечно же можно дифференцировать, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=\frac{\partial^4}{\partial x^4}u$, и вторые слагаемые в правой и левой частях взаимно уничножаются при $\frac{1}{2}\tau=\frac{1}{12}h^2$.

58. Первая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности $u_t=u_{xx}$ аппроксимируется явной разностной схемой

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\frac{u_{m-1}^n-2u_m^n+u_{m+1}^n}{h^2},\ 1\le m\le M-1,$$
$$u_m^0=\varphi(mh),\quad u_0^n=u_M^n=0\ \forall n\ge 0\,.$$

Определить порядок сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи при различных $\rho=\tau/h^2$.

Задача 9.61 в БКЧ. Частью решения этой задачи является предыдущая задача. Однако, в этой задаче требуется провести исследование устойчивости, ибо только устойчивая схема сходится с порядком, равным порядку аппроксимации. В БКЧ такое исследование в равномерной метрике сделано в задаче 9.59, правда там есть правая часть. Но выкидывая эту букву *f, т.е. считая ее нулем*, будет что-то похожее на

Решение. Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau+h^2)$. Введем обозначение $\rho=\tau/h^2$ и перепишем схему в удобном для анализа виде

$$u_m^{n+1}=(1-2\rho)u_m^n+\rho(u_{m+1}^n+u_{m-1}^n)+\tau f_m^n.$$

Максимальные значения обеих частей равенства по m совпадают, поэтому при $\rho\leqslant 1/2$ имеем

$$\|u^{n+1}\|\leqslant(1-2\rho)\|u^n\|+2\rho\|u^n\|+\tau\|f^n\|=\|u^n\|+\tau\|f^n\|\leqslant$$
$$\leqslant\|u^{n-1}\|+\tau(\|f^n\|+\|f^{n-1}\|)\leqslant\ldots\leqslant\|u^0\|+\sum_{k=0}^{n}\tau\|f^k\|\leqslant$$
$$\leqslant\|u^0\|+(n+1)\tau\max_n\|f^n\|.$$

Следовательно, схема удовлетворяет определению устойчивости с постоянной $c=(n+1)\tau=t$ при условии $\tau/h^2\leqslant 1/2$.

В ответе надо четко прописать случай повышенного порядка аппроксимации при $\frac{1}{2}\tau=\frac{1}{12}h^2$

Ответ: сходимость имеет место только при выполнении условия устойчивости $\rho \leqslant 1/2$, при этом порядок сходимости $O(\tau + h^2)$ для $\rho \neq 1/6$ и $O(\tau^2 + h^4)$ для $\rho = 1/6$.

Особо въедливые бюрократы могут от себя добавить, что сходимость может быть порядка бесконечность, если начальное условие выбрано нулем, поскольку ноль - он и в Африке нуль! Можно было бы провести исследование устойчивости при помощи спектрального признака устойчивости. Подставляем $u_m^n = \lambda^n \mathbf{e}^{(i\,m\,\phi)}$, сокращаем, упрощаем, получаем $\lambda = \frac{1\,(2\,\tau\cos(\phi) - 2\,\tau + h^2)}{h^2}$, оцениваем модуль λ, надо чтобы он был не больше 1. Это сводится к решению неравенства $-1 \leq \frac{2\,\tau\cos(\phi) - 2\,\tau + h^2}{h^2}$ для любых ϕ, что дает ответ $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ при разумном предположении, что шаги сетки положительны, время течет туда, куда надо. Однако, СПУ это только необходимое условие устойчивости, достаточным не является, так что задача на экзамене будет зачтена не полностью.

Можно провести исследование в интерггральной метрике, как в задаче 60 этого списка.

59. Исследовать устойчивость разностной схемы по начальным данным в интегральной метрике

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2},\ 1 \leq m \leq M-1,\ u_0^n = u_M^n = 0\ \forall n \geq 1.$$

Это полностью неявная схема для уравнения теплопроводности. Она безусловно устойчива. Зачем вот только через только четные или только нечетные - непонятненько. Чтобы студентам было веселее, наверное.

Раз уж сказано, что в интегральной метрике, то и нечего пытаться подсунуть исследование при помощи СПУ или принципа максимума!

Устойчивость – это если справедливо неравенство

$$\max_{0\leq n\leq N} \|u^n\|_{L_{2,h}} \leq c\|u^0\|_{L_{2,h}},\ \text{где}\ \|u^n\|_{L_{2,h}} = \left(\sum_{m=1}^{M} h(u_m^n)^2\right)^{1/2}.$$

Множитель h в определении нормы требуется для выполнения *условия согласования норм.* Выбранная норма согласована с нормой пространства $L_2(0,l), \|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\int_0^l u^2(x)dx}$, $(0,l)$-отрезок, на котором рассматривается задача.

Вводим оператор $Au = -\frac{u_{m+1} - 2\,u_m + u_{m-1}}{h^2}$. Это симметричный положительно определенный оператор в пространстве векторов с нулями на границах. Сам от тоже равен нулю на границах. Именно так его и вводим этот оператор. Собственные числа этого оператора к экзамену надо знать наизусть! Это $\frac{4\sin\left(\frac{\pi\,k}{2\,M}\right)^2}{h^2}$, k=1,2,...,M-1. Собственные функции

$\sin\left(\frac{\pi\, k\, m}{2\, M}\right) = \sin\left(\frac{\pi\, k\, h}{2\, l}\right)$.

Записываем разностную схему в операторном виде

$$(E + 2\tau A)u^{n+1} = u^{n-1}$$

Откуда немедленно следует $\|u^{n+1}\| \leqslant \|u^{n-1}\| \leqslant \ldots$, что и означает устойчивость.

60. Исследовать устойчивость разностной схемы по начальным данным в интегральной метрике

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m+1}^{n-1}}{h^2},\ 1 \le m \le M-1,\ u_0^n = u_M^n = 0\ \forall n \ge 1.$$

См. предыдущую задачу, а потом...

Записываем разностную схему в операторном виде $u^{n+1} = (E - 2\tau A)u^{n-1}$

Устойчивость вида $\|u^{n+1}\| \leqslant \|u^{n-1}\| \leqslant \ldots$ будет, если

$$-E \leqslant (E - 2\tau A) \Leftrightarrow \tau A \leqslant E \Leftarrow \frac{4\tau}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi(M-1)}{2M}\right) \leqslant 1$$

Получается условная устойчивость. Условие $\tau \le \frac{h^2}{4}$. В задаче чуть-чуть заценено поверху максимальное собственное число A.

Тонкий момент. Возможна устойчивость при $\frac{h^2}{4} < \tau$? Да возможна. Но вот при

$\frac{h^2}{4\sin\left(\frac{\pi(M-1)}{2M}\right)^2} < \tau$ уже никак невозможна.

61. Построить аппроксимацию оператора Лапласа и оценить ее погрешность на шаблоне "крест":

$$\Delta^h u(x_1, x_2) = h^{-2}[a_{0,0}u(x_1, x_2) + a_{1,0}u(x_1 + h, x_2) +$$
$$a_{-1,0}u(x_1 - h, x_2) + a_{0,1}u(x_1, x_2 + h) + a_{0,-1}u(x_1, x_2 - h)]\,,$$

где коэффициенты $a_{i,j}$ не зависят от h.

На экзамене надо писать подробное решение. Хотя все знают, что аппроксимация имеет вид $\frac{u_{i+1,j} - 2\, u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2\, u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$ и имеется второй порядок аппроксимации O(h^2).

Этого не достаточно для экзамена. Надо составить систему уравнений и решить ее.

Разлагаем входящие в уравнения функции $u(x_1+h, x_2)$, $u(x_1-h, x_2)$, $u(x_1, x_2+h)$, $u(x_1, x_2-h)$ в точке x_1, x_2 по формуле Тейлора до четвертого порядка по степени h, составляем разность $\Delta u(x_1, x_2) - \Delta^h u(x_1, x_2)$, получим погрешность аппроксимации

$$\Delta u(x_1, x_2) - \Delta^h u(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1, x_2)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1, x_2)\right) - \Bigg(a_{0,0}\, u(x_1, x_2)$$

$$+ a_{1,0}\left(u(x_1, x_2) + h\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2)\right) + \frac{1\, h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1, x_2)\right)}{2} + \frac{1\, h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} u(x_1, x_2)\right)}{6} + O(h^4)\right)$$

$$+ a_{-1,0}\left(u(x_1, x_2) - h\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2)\right) + \frac{1\, h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1, x_2)\right)}{2} - \frac{1\, h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} u(x_1, x_2)\right)}{6} + O(h^4)\right)$$

$$+ a_{0,1}\left(u(x_1, x_2) + h\left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2)\right) + \frac{1\, h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1, x_2)\right)}{2} + \frac{1\, h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} u(x_1, x_2)\right)}{6} + O(h^4)\right)$$

$$+ a_{0,-1}\left(u(x_1, x_2) - h\left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2)\right) + \frac{1\, h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1, x_2)\right)}{2} - \frac{1\, h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} u(x_1, x_2)\right)}{6} + O(h^4)\right)\Bigg) \Big/ (h^2)$$

вот её и будем "оптимизировать"

$a_{0,0} + a_{1,0} + a_{-1,0} + a_{0,1} + a_{0,-1} = 0$ - чтобы изничтожить $u(x_1, x_2)$ в правой части,

$a_{1,0} - a_{-1,0} = 0$ - чтобы изничтожить $\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2)$ и $\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} u(x_1, x_2)$ в правой части,

$\frac{1\, a_{1,0}}{2} + \frac{1\, a_{-1,0}}{2} = 1$ - чтобы изничтожить $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1, x_2)$ в правой части,

по второй координате - аналогично. Получаем СЛАУ для $a_{k,l}$, решаем, получаем ответ. 6 уравнений всего. Их двух последних $a_{1,0} - a_{-1,0} = 0$, $\frac{1\, a_{1,0}}{2} + \frac{1\, a_{-1,0}}{2} = 1$ ясно, что

$a_{1,0} = 1$, $a_{-1,0} = 1$,

по другой координате точно так же $a_{0,1} = 1$, $a_{0,-1} = 1$. Тогда из первого уравнения $a_{0,0} = 4$.

62. Построить аппроксимацию оператора Лапласа и оценить ее погрешность на шаблоне "косой крест":

$$\Delta^h u(x_1, x_2) = h^{-2}[a_{0,0}u(x_1, x_2) + a_{1,1}u(x_1 + h, x_2 + h) + a_{1,-1}u(x_1 + h, x_2 - h) + a_{-1,1}u(x_1 - h, x_2 + h) + a_{-1,-1}u(x_1 - h, x_2 - h)],$$

где коэффициенты $a_{i,j}$ не зависят от h.

Эта задача полностью аналогична предыдущей. Оператор Лапласа инвариантен относительно любого поворота, в том числе и на $\frac{\pi}{4}$. Тогда величина шага увеличивается в $\sqrt{2}$ раз. Искомая аппроксимация будет

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2\,u_{i,j} + u_{i-1,j-1}}{2\,h^2} + \frac{u_{i-1,j+1} - 2\,u_{i,j} + u_{i+1,j-1}}{2\,h^2}.$$

Этого на экзамене недостаточно, надо действовать по схеме предыдущей задачи. Громоздко? Да! Но надо...

$$\Delta\,\mathrm{u}(x_1, x_2) - \Delta^h\,\mathrm{u}(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}\mathrm{u}(x_1, x_2)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}\mathrm{u}(x_1, x_2)\right) - \Bigg(a_{0,0}\,\mathrm{u}(x_1, x_2) + a_{1,1}\Bigg(u_{i,j}$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h + \left(\frac{\partial}{\partial x2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h + \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2} + \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x2^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x2\,\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2 + \mathrm{O}(h^3)\Bigg) + a_{1,-1}\Bigg(u_{i,j} + \left(\frac{\partial}{\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h - \left(\frac{\partial}{\partial x2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h$$
$$+ \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2} + \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x2^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x2\,\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2 + \mathrm{O}(h^3)\Bigg) + a_{-1,1}\Bigg(u_{i,j}$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h + \left(\frac{\partial}{\partial x2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h + \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2} + \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x2^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2}$$
$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial x2\,\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2 + \mathrm{O}(h^3)\Bigg) + a_{-1,-1}\Bigg(u_{i,j} - \left(\frac{\partial}{\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h - \left(\frac{\partial}{\partial x2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h$$
$$+ \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2} + \frac{1\left(\frac{\partial^2}{\partial x2^2}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2}{2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x2\,\partial x1}\mathrm{y}(x1, x2)\right)h^2 + \mathrm{O}(h^3)\Bigg)\Bigg) \Big/ (h^2).$$

В силу симметрии $\frac{\mathrm{O}(h^3)}{h^2}$ превратится в $\mathrm{O}(h^2)$ после составления и решения СЛАУ для $a_{k,l}$.

Но можно и по-честному, взять больше членов в разложении и провести "оптимизацию медицины, образования и т.д.", как в предыдущей задаче. Есть и получше способ решения. Без громоздкостей. Это ведь всё не навязывается.

63. Для уравнения $\Delta u = f$ построить аппроксимацию на решении с порядком $O(h^2)$ граничного условия $\partial u/\partial x_1 - \alpha u = 0$ при $x_1 = 0$, используя минимальное количество узлов вдоль оси x_1.

Задача 9.44 в БКЧ. Там и ответ имеется: $\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_1} - \frac{1}{2}h_1\,(f_{0,j} - \Lambda_2(u_{0,j})) - \alpha\,u_{0,j} = 0,$

$$\Lambda_2(u_{0,j}) = \frac{u_{0,j+1} - 2\,u_{0,j} + u_{0,j-1}}{h_2^{\,2}}.$$

Однако, такой ответ не является всеобъемлющим. Задача, можно сказать, немножко упрощена предположением, что

точка сетки $[\,0\,h_1, j\,h_2\,]$ расположена на участке границы задачи, причем точки $[\,0\,h_1, (j+1)\,h_2\,]$ и $[\,0\,h_1, (j-1)\,h_2\,]$ также входят в разностную схему либо как расчетные точки, где аппроксимируется уравнение Пуассона, либо как граничные точки, в которых могут быть заданы граничные условия, и даже отличающиеся от $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u\right) - \alpha\,u = 0$.

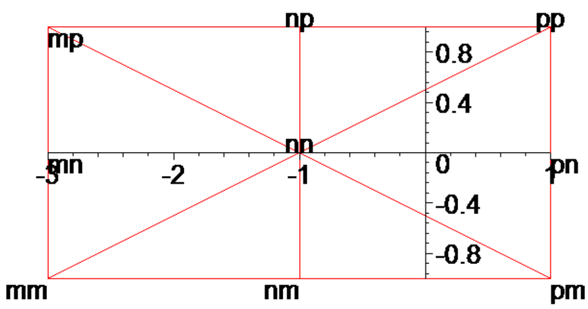
И в формулировке задачи не сказано, что уравнение Пуассона в двумерной области. Может ведь быть и в трехмерной и более мерной. Пусть все-таки в двумерной, чтобы не загромождать. Главная мысль задачи: можно аппроксимировать вторую производную по x_1 за счет уравнения $\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} u = f - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}} u\right)$ разностным отношением по направлению x_2.

Минимальное количество узлов вдоль оси x_1 - это 2 узла, поскольку для аппроксимации производной $\frac{\partial}{\partial x_1} u$ одного узла мало.

Пусть сетка равномерная и ортогональная (хотя на криволинейных неортогональных сетках все интереснее). Ось x_1 направлена вправо, ось x_2 вверх.

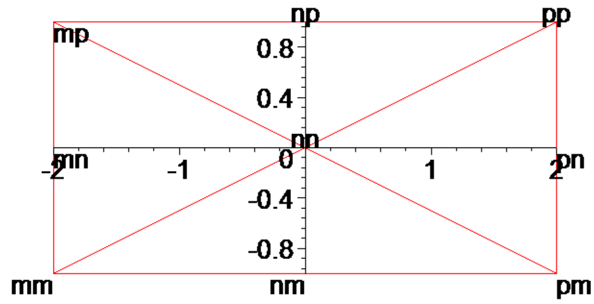
Пусть точка, в которой строится аппроксимация имеет нумерацию nn. Другие ближайшие точки сетки pn -сдвиг на h_1вправо, mn - сдвиг на h_1 влево, pp - сдвиг на h_1 вправо и на h_2 вверх и т.д.

Если ось x_2 проходит между точками nn и pn строго посередине, а расчетная область справа от этой точки nn, т.е точка pn является расчетной точкой схемы, то появляется симметрия расчетных точек относительно точки, в которой ставится граничное условие (шаги по сеткам $h_1, h_2 = 2, 1$)

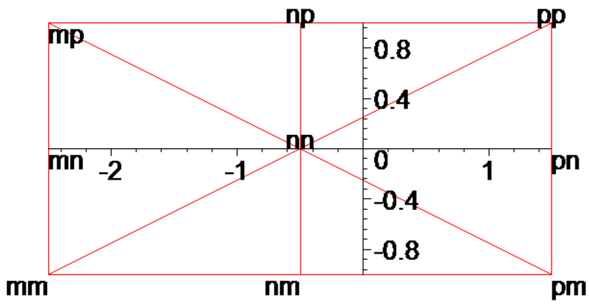


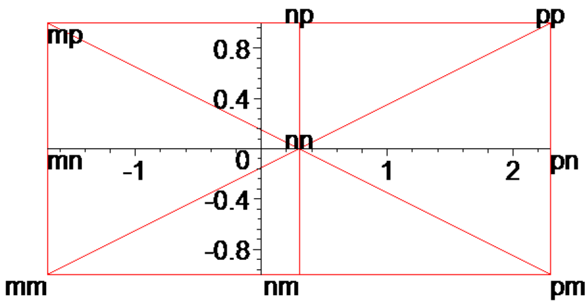
В этом случае точка nn не попадает в область исходной задачи, но это вполне допустимо. Зато граничное условие упрощается и выглядит вот так $\frac{u_{p,n}-u_{n,n}}{h_1}-\frac{\alpha\,(u_{p,n}+u_{n,n})}{2}=0.$

Ответ из задачника соответствует такой картинке



в предположении, что точки np и nm являются расчетными (или граничными) точками разностной схемы.
Вот это надо бы добавить в ответе на экзамене.
Хотя можно добавить гораздо больше, например, когда вот так или вот эдак





,

или когда какая-то точка из nm и np не является расчетной или граничной точкой схемы, тогда можно сделать сдвиг для аппроксимации $\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}u$. Тогда и формулы поизменяются и загромоздятся. Пусть ка экзаменаторы поищут ошибочки.
Но лучше не связываться. Может не хватить времени на экзамене. А экзаменаторы ошибочку любую найдут, без сомнений!