26.10.20. Дискр. матем. ДЗ от семинара 8.

① т. Менгера о вершинах (max число вершинно-непересек. путей = min числу вершин в вершинном vw-раздел. мн-ве)
⇓
т. Менгера о рёбрах. (max число рёберно-непересек. путей = min числу рёбер в рёберном vw-раздел. мн-ве)

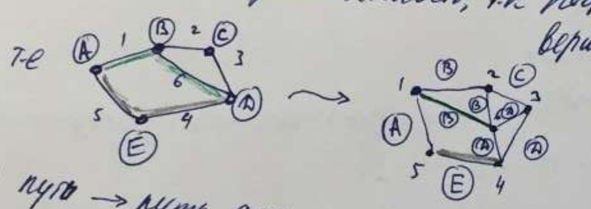
<u>Решение:</u> План такой: берём граф G, в котором мы хотим док-ть про рёбра, делаем из него новый граф $\tilde{G}$, к $\tilde{G}$ применяем т. о вершинах, и потом возвращаемся к G.

Как из G сделать $\tilde{G}$?

Превратим рёбра G в вершины $\tilde{G}$,
и вершины $\tilde{G}$ соединим рёбрами в $\tilde{G}$, если прообразы этих вершин (т.е. старые рёбра) — имели общую вершину.

Т.е это не совсем двойственное, т.к. ребро → вершина
вершина → рёбра в кол-ве = степень этой вершины

т.е



тогда путь → путь длины на 1 меньше.
причем если в исх. графе пути не пересек. по рёбрам — то в новом они не пересек. по вершинам. (и наоборот: если в новом — не пересек. по вершинам, то в старом — не пересек. по рёбрам)

Т.е рёберно непересек. пути в старом ⟺ вершинно-непересек. пути в новом.
А рёберное vw-разд. мн-во в старом ⟺ вершинное разд. мн-во. в новом
(т.к. вершины в вершинно-разделяющем мн-ве нового графа — это рёбра в рёберном-рассекающем мн-ве старого графа. <u>чтд.</u>)

<u>Зам.</u> Данное построение позволяет док-ть и в обратную сторону:
~~т. Менгера о рёбрах ⟹ т. Менгера о вершинах.~~
~~т.к. вершинно-непересек. пути в старом = рёберно-непересек. пути в новом.~~
~~(и наоборот: если в новом есть общее ребро ⟹ 2 общие вершины в новом ⟹ 2 смежных ребра в старом ⟹ общая вершина в старом)~~
~~А вершинное-разд. мн-во в старом = рёберно-раздел. мн-во в новом,~~
~~т.к. любая пара рёбер, проход. через вершину из верш-разд. мн-ва в старом графе — проходит через ребро (соотв. этой вершине) в новом.~~

Нет. т.к. тут — одно из рёбер, соотв. этой вершине. А если в рёберное мн-во добавить <u>все</u> рёбра, отходящие от вершины — то не будет соответствия по кол-ву.

② Док-ть т. Кёнига-Эгервари напрямую.

<u>Теорема</u> В произвольном двудольном графе максимальная мощность паросочетания (обозн. M) равна минимальной мощности вершинного покрытия (обозн. m)

Напоминание: паросочетание – мн-во рёбер, никакие два из которых не имеют общих вершин.

Вершинное покрытие – мн-во вершин такое, что каждое ребро графа имеет хотя бы одним из своих концов вершину данного мн-ва.

Док-во: а) очевидно, что $\underbrace{M \le m}$ в любом графе

Ну потому что для каждого из M рёбер, входящих в max паросочетание, хотя бы одну из его вершин нужно положить в вершинное покрытие, $\Rightarrow$ уже M вершин нужно а ещё ведь могут быть вершины, все рёбра которых не входят в max паросочетание. Такие вершины тоже придётся включить в вершинное покрытие

$\Rightarrow m = M +$ ещё-что-то.

(которое либо $=0$, либо >0)

$\Rightarrow m \ge M$.

б) Мы уже знаем, что $m \ge M$.

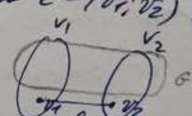
Докажем индукцией по $|E|$, что $\exists$ паросочетание мощности m

(тогда $M \ge m \Rightarrow \begin{cases} m \ge M \\ M \ge m \end{cases} \Rightarrow m = M$).

Если $|E|=0$, то рёбер в графе вообще нет, и $M=m=0$.

Пусть $|E|>0$ и утв. (что $\exists$ паросочетание мощности m) верно для всех графов, у которых число рёбер $< |E|$. Докажем его для графа G с числом рёбер $= |E|$. Рассм. 2 случая:

1) Любое min вершинное покрытие графа G содержит вершины только одной из долей. Возьмём любое ребро $e=(v_1;v_2)$ из E и рассм. граф $G' = G[V \setminus \{v_1; v_2\}]$.



Тогда min вершинное покрытие графа G' содержит $m(G') \ge m-1$ вершин,

(т.к. если бы $m(G') \le m-2$, то добавляя к вершинному покрытию G' вершины v_1 и v_2, мы получили бы вершинное покрытие графа G, содержащее не более m вершин и содержащее вершины обеих долей, что противоречит условию этого случая).

Очевидно, что $|E'|<|E|$ – т.к. мы выбросили ребро e.

$\Rightarrow$ в G' по индуктивному предп. $\exists$ паросочетание мощности $\ge m-1$.

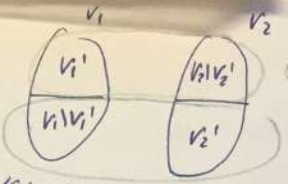
Добавляя к этому паросочетанию ребро $e=(v_1;v_2)$, получим в G паросочетание мощности $\ge m$, что и требовалось.

2) $\exists$ min вершинное покрытие S графа G, которое содержит вершины обеих долей. Пусть $S = V_1' \sqcup V_2'$, где $\varnothing \ne V_1' \subseteq V_1$, $\varnothing \ne V_2' \subseteq V_2$.

Рассм. графы $G_1 = G[V_1' \sqcup (V_2 \setminus V_2')]$

и $G_2 = G[V_2' \sqcup (V_1 \setminus V_1')]$.

Заметим, что между вершинами мн-в $V_1 \setminus V_1'$ и $V_2 \setminus V_2'$ рёбер нет –



(т.к. ни вершины из $V_1 \setminus V_1'$, ни из $V_2 \setminus V_2'$ – не принадлежат min вершинному покрытию.)

$\Rightarrow m(G_1) = |V_1'|$ – т.к. если бы в G_1 $\exists$ min верш. покрытие S_1' с $|S_1'| < |V_1'|$, то заменяя в S вершины из V_1' на вершины из S_1', мы получили бы вершинное покрытие графа G мощности $< m$, а это невозможно.

Аналогично, $m(G_2) = |V_2'|$.

В силу непустоты мн-в V_1' и V_2' имеем, что каждый из графов G_1 и G_2 имеет меньше рёбер, чем граф G $\Rightarrow$ к обоим графам применимо предп. индукции $\Rightarrow$ в G_1 $\exists$ паросочетание мощности $|V_1'|$, а в G_2 $\exists$ паросочетание мощности $|V_2'|$

Объединение этих паросочетаний дает паросочетание мощности m (т.к. $S = V_1' \sqcup V_2'$; $m = |S| = |V_1'| + |V_2'|$). чтд.

③ Т. Холла $\Rightarrow$ Т. Кёнига

Напоминание: Т. Холла: В двудольном графе $G = (V, E) = (V_1 \sqcup V_2; E)$ $\exists$ паросочетание мощности $|V_1|$ $\Leftrightarrow$ $|V'| \leq$ тени(V') $\forall V' \subseteq V_1$

Т. Кёнига: В двудольном графе max мощность паросочетания = min мощности вершинного покрытия.

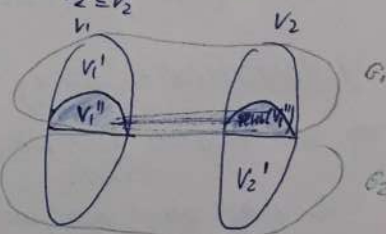
Док-во: пусть $G = (V, E) = (V_1 \sqcup V_2; E)$ – двудольный граф, мощность min вершинного покрытия в котором $= m$.

Всегда выполнено, что $m \geq M$.

Докажем, что в G $\exists$ паросочетание мощности m (и тогда $M \geq m$ $\Rightarrow \begin{cases} m \geq M \\ M \geq m \end{cases} \Rightarrow m = M$.

Пусть $V_1' \sqcup V_2'$ – min вершинное покрытие графа G; $\begin{cases} V_1' \subseteq V_1 \\ V_2' \subseteq V_2 \end{cases}$

Рассм. графы $G_1 = G[V_1' \sqcup (V_2 \setminus V_2')]$ и $G_2 = G[V_2' \sqcup (V_1 \setminus V_1')]$.



Ничего страшного, если какой-то из них не содержит рёбер.

Если в графах G_1 и G_2 найдутся паросочетания, мощность которых $= |V_1'|$ и $|V_2'|$ соотв, то объединение этих паросочетаний даёт в G паросочетание требуемой мощности $m = |V_1'| + |V_2'|$.

Пусть это не так, т.е. например в графе G_1 нет паросочетания мощности V_1'.

$\Rightarrow$ по т. Холла $\exists$ $V_1'' \subseteq V_1'$: $|V_1''| >$ тени(V_1'').

Но тогда мн-во $(V_1' \setminus V_1'') \sqcup$ тень$(V_1'') \sqcup V_2'$ мощности меньшей m, будет вершинным покрытием графа G (т.к. изначально все рёбра имели конец либо в V_1', либо в V_2'! Те рёбра, концы которых лежали в $V_1' \setminus V_1''$ – не пострадают; а те рёбра, концы которых $\in V_1''$ – мы заберем их левые концы, но зато добавим правые концы – а правые концы все $\in$ тени(V_1'')). Противоречие. чтд.

Случай, когда в G_2 $\exists$ паросочетания мощности V_2' – аналогичен.

(4) Т. Дилуорса ⇒ Т. Кёнига

Напоминание: Т. Дилуорса: Min число непересек. цепей, которыми можно покрыть конечное частично упорядоченное мн-во = max числу попарно несравнимых элем. этого мн-ва.

Т. Кёнига: В двудольном графе max мощность паросочетания = min мощности вершинного покрытия.

Док-во: Образуем из нашего 2-дольного графа частично упорядоченное мн-во таким образом:
• элементы этого мн-ва – это все вершины графа
• элементы сравнимы ⟺ между ними есть ребро (т.е они из разных долей и между ними есть ребро).

Тогда $\begin{cases} \text{min число непересек. цепей (покрывающих это мн-во)} = \text{max мощность паросочетания} \\ \text{max число попарно несравн. элем} = \text{min мощности верш. покрытия.} \end{cases}$

Почему?

а) Ну про цепи и паросочетания:
Цепи – они длины либо 1 (1 точка), либо 2 (2 точки и ребро между ними).
Причем непересек. цепи длины 2 – это и есть паросочетания.

И если мы уменьшаем число непересек. цепей (т.е из 2-х цепей длины 1 делаем одну цепь длины 2) – это значит, что мы добавили одну цепь длины 2, т.е добавили одно паросочетание (непересек. сост).
⇒ чем меньше ∃ непересек. цепей – тем больше мощность паросочетания.
⇒ min число непересек. цепей = max числу паросочетаний

б) про несравнимые элем и вершинное покрытие.
Пусть $S \subset V$ – вершинное покрытие.
т.е все ребра (имеющиеся) имеют хотя бы один из своих концов в S.
⇒ в $V \setminus S$ любые 2 вершины – несравнимы, т.к ребра между ними нет.

Т.е дополнение к мн-ву несравнимых элем – образует вершинное покрытие.
⇒ чем больше попарно несравнимых элем – тем меньше вершинное покрытие.
⇒ max число попарно несравнимых = min мощности верш. покрытия.

Т.е max мощность паросочетания в старом = min кол-ву непересек. цепей покрытия в новом = max число попарно несравнимых в новом = min мощности верш. покрытия в старом. ч.т.д.

(5) Т. Форда-Фалкерсона ⇒ Т. Холла

Напоминание: Т. Форда-Фалкерсона: величина max потока = пропускной способности min разреза

Т. Холла: В 2-дольном графе $G=(V_1 \cup V_2, E)$ ∃ паросочетание мощности $|V_1|$ ⟺ $|V'| \le$ тени(V') $\forall V' \subseteq V_1$.

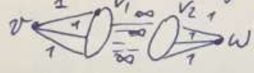
<u>Док-во:</u> сначала по 2-дольному графу строим сеть: (стр3)

добавим исток и сток, соединим исток со всеми вершинами из V_1,

сток — со всеми вершинами из V_2.

Дополнительным рёбрам поставим пропускную способность $=1$,

а старым $=\infty$.



Тогда max поток просто равен

мощности max паросочетания (просто ко всем рёбрам паросочетания

слева добавляем ребро в исток, а справа — в сток и будет поток)

(⇐) пусть $|V'| \le$ тени(V') $\forall V' \subseteq V_1$. Докажем, что $\exists$ паросочетание мощности $|V_1|$.

От противного. Пусть $\nexists$ паросочетания мощности $|V_1|$.

Т.е max паросочетание имеет мощность $|V_1'| < |V_1|$.

Благодаря вз.-одноз. соотв. между max потоком и max паросочетанием,

это значит, что величина max потока $= |V_1'| < |V_1|$.

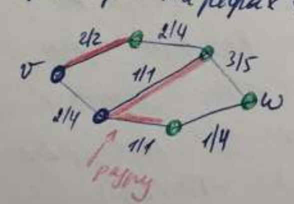
Но по т. Форда-Фалкерсона: величина max потока = пропускной способности min разреза.

$\Rightarrow$ пропускная способность min разреза $= |V_1'| < |V_1|$.

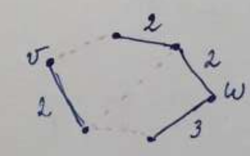
А пропускная способность разреза = сумме пропускных способностей рёбер, которые мы полностью удалили для того, чтобы поток прекратился

(т.е те рёбра, которые мы выкинули полностью в алгоритме Форда-Фалкерсона, чтобы остаточная сеть стала несвязной).

Ну пример: на рёбрах ч/ф.



Остаточная сеть:

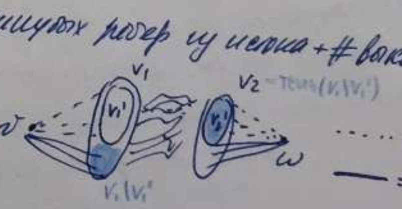


В случае нашего графа, поскольку пропускная способность рёбер в сток и в исток $=1$,

то пропускная способность разреза = # выкинутых рёбер из истока + # выкинутых рёбер в сток.

Пусть # выкинутых рёбер из истока $= V_1'$

выкинутых рёбер в сток $= V_2'$



..... = выкинутые рёбра

—— = ещё работающие рёбра.

По т. Форда Фалкерсона мы получили,

что пропускная способность min разреза $= |V_1'| + |V_2'| < |V_1|$.

$\Rightarrow |V_1'| + |V_2'| < |V_1|$

$\Rightarrow |V_1 \setminus V_1'| > |V_2'|$.

Но заметим, что тень$(V_1 \setminus V_1') = V_2'$ — т.к если есть ребра из $V_1 \setminus V_1'$ в $V_2 \setminus V_2'$,

значит, граф ещё связен,

т.е это был не разрез.

$\Rightarrow \begin{cases} |V_1 \setminus V_1'| > |V_2'| \\ \text{тень}(V_1 \setminus V_1') = V_2' \end{cases} \Rightarrow$ мы нашли мн-во $\in V_1$, которое больше своей тени.

Но это против. условию, что $|V'| \le$ тени(V') $\forall V' \subseteq V_1$.

$\Rightarrow$ в сторону (⇐) доказана т. Холла.

$\Leftarrow$ Пусть $\exists$ паросочетание мощности $|V_1|$. (т.е max поток $= |V_1| \Rightarrow$ ~~величина~~ min разреза $= |V_1|$).
пропускная способность

Докажем, что $|V'| \le$ тени(V') $\forall V' \subseteq V_1$.

От противного. Пусть $\exists V_1' \subseteq V_1 : |V_1'| > |$тени$(V_1')|$

т.е $|V_1 \setminus (V_1 \setminus V_1')| > |$тени$(V_1')|$

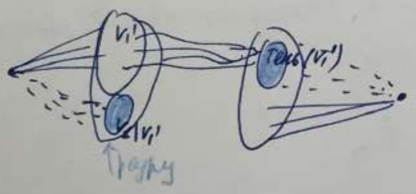
т.е $|V_1| - |V_1 \setminus V_1'| > |$тени$(V_1')|$

т.е $|V_1 \setminus V_1'| + |$тени$(V_1')| < |V_1|$.

но $\begin{cases} (V_1 \setminus V_1'; \text{ тень}(V_1')) \text{ — разрез} \\ \text{его пропускная способность} = |V_1 \setminus V_1'| + |\text{тени}(V_1')| < |V_1|. \end{cases}$

Это противоречит тому, что по усл $\exists$ паросочетание мощности $|V_1|$, т.е max поток $= |V_1|$
$\Rightarrow$ по т. Форда–Фалкерсона пропускная способность min разреза $= |V_1|$.
но мы только что нашли разрез с меньшей пропускной способностью. против. ч.т.д.

<u>Зам.</u>
А почему $(V_1 \setminus V_1'; \text{ тень}(V_1'))$ — разрез?
т.е почему если выключить все трубы из истока до $V_1 \setminus V_1'$ и трубы от тени(V_1') до стока, то граф станет несвязным?



Ну потому что работают трубы из истока только в V_1', а из V_1' все трубы идут в тень(V_1'), но из тени в сток — трубы выключены.
$\Rightarrow$ действительно пути нет, граф несвязен
$\Rightarrow V_1 \setminus V_1' +$ тень(V_1') — это разрез.

6. $\chi'(K_n) = ?$

<u>Ответ</u>: $\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ — неч} \\ n-1, & \text{если } n \text{ — четно.} \end{cases}$

<u>Док-во</u>: по т. Визинга $n-1 \le \chi'(K_n) \le n$.
Осталось понять, $\chi'(K_n) = n$ или $n-1$.

а) Пусть n — неч. Допустим, что $\chi'(K_n) = n-1$. $\Rightarrow$ из каждой вершины торчит $n-1$ ребер, все цвета разные. А всего ребер $\frac{n(n-1)}{2}$
$\Rightarrow$ кол-во ребер каждого фикс цвета $= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n}{2}$ — но $n \not\vdots 2$ против.
$\Rightarrow \chi'(K_n) = n$, если n — неч.

б) Пусть n — четно. Покажем, как раскрасить все ребра в $n-1$ цвет.
Удалим ~~первую~~ n-ю вершину вместе с ребрами, получим граф K_{n-1}, где $n-1$ — неч.
$\Rightarrow$ по сказанному выше этот K_{n-1} можно раскрасить в $n-1$ цвет.
Теперь рассм. по очереди все вершины графа K_n. Каждая его вершина в графе K_{n-1} соединена с $n-2$ вершинами, а цветов $n-1 \Rightarrow$ есть отсутствующий цвет — в него и красим ребро от текущей вершины до ~~все~~ n-й (которую мы выбрасывали).

<u>Зам</u>. Вот явный алгоритм:

	A	B	C	D	E	F
A	X	2	3	4	5	1
B	2	X	4	5	1	3
C	3	4	X	1	2	5
D	4	5	1	X	3	2
E	5	1	2	3	X	4
F	1	3	5	2	4	X

Кто без пары — тот играет с последним.