5. Неравенства для мартингалов

§ VIII. 3 11.11.2019

Т-ма 1 (нер-ва Дуба). Пусть $X_n \ge 0$ - субмарт. Тогда $\forall n \ge 0$

1) $\forall \lambda > 0 \quad P(\max_{k \le n} X_k \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda} E X_n$

2) $\forall p > 1 \quad \| \max_{k \le n} X_k \|_p \le q \| X_n \|_p$, где $q = \frac{p}{p-1}$, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Д-во 1) $P(\max_{k \le n} X_k \ge \lambda) = \frac{1}{\lambda} E \sum_{k=0}^{n} \lambda I(X_k \ge \lambda, X_{k-1} < \lambda, \dots, X_0 < \lambda) \le \frac{1}{\lambda} E \sum_{k=0}^{n} X_k I(\dots) \overset{\text{субмарт.}}{\le} \frac{1}{\lambda} E \sum_{k=0}^{n} X_n I(\dots) = \frac{1}{\lambda} E X_n I(\max_{k \le n} X_k \ge \lambda) \overset{X_n \ge 0}{\le} \frac{1}{\lambda} E X_n$

можно заметить, что только один $I(\dots)$ не равен 0

2) Обозн $X_n^* = \max_{k \le n} X_k$. Докажем, что $E X_n^p < \infty \Rightarrow E (X_n^*)^p < \infty$

По н-ву Йенсена: $E X_k^p \le E(E(X_n^p | \mathcal{F}_k)) = E X_n^p < \infty$

$\Rightarrow E(X_n^*)^p \le \sum_{k=0}^{n} E X_k^p < \infty$

Тогда $E(X_n^*)^p \underset{\text{по частям}}{=} p \int_0^\infty t^{p-1} P(X_n^* \ge t) dt \le p \int_0^\infty t^{p-2} E(X_n I(X_n^* \ge t)) \underset{\text{Фубини}}{=} p E\left(X_n \int_0^{X_n^*} t^{p-2} dt\right) = \frac{p}{p-1} E(X_n (X_n^*)^{p-1})$

$P(X_n^* \ge t) \le \frac{1}{t} E(X_n I(X_n^* \ge t))$ из д-ва 1)

$\Rightarrow$ (н-во Гельдера) $E(X_n^*)^p \le \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p \cdot \|(X_n^*)^{p-1}\|_q = q \|X_n\|_p (E(X_n^*)^p)^{\frac{1}{q}} \qquad | : (E(X_n^*)^p)^{\frac{1}{q}}$

$\Rightarrow \|X_n^*\|_p \le q \|X_n\|_p$

□

Сл-е 1 Пусть $X_n \ge 0$ - субмарт и $\sup_{n \ge 0} E X_n^p < \infty$ для нек $p > 1$

Тогда $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$ и

1) $P(\sup_{n \ge 0} X_n \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda} E X_\infty$

2) $\| \sup_{n \ge 0} X_n \|_p \le q \| X_\infty \|_p$

Д-во Раньше доказали $X_n \to X_\infty$ п.н. и в L^1

1) Следует из т. монот. сход и сход. в L^1

2) $\| \sup_{n \ge 0} X_n \|_p \underset{\text{мон. сход.}}{=} \lim_{n \to \infty} \| X_n^* \|_p \le q \lim_{n \to \infty} \| X_n \|_p \le q \sup_{n \ge 0} \| X_n \|_p < \infty$

Т.к. $|X_n - X_\infty| \le 2 \sup_{n \ge 0} X_n$, то $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$ (мажор. сход)

Тогда $\lim_{n \to \infty} \|X_n\|_p = \|X_\infty\|_p \Rightarrow \| \sup_{n \ge 0} X_n \|_p \le q \| X_\infty \|_p$

□

Сл-е 2 То же самое верно для мартингалов с заменой X_n на $|X_n|$ (т.к. тогда $|X_n|$ - неотр. субмарт)

Сл-е 3 (нер-во Колмогорова) Пусть ξ_n - нез. с.в, $E \xi_n = 0$, $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

Тогда $P(\max_{k \le n} |X_k| \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Var} X_n$

(усиление нер-ва Чебышёва для X_n)

Обозн: если X_n - март, $X_0 = 0$, то обозн. $[X]_n = \sum_{k=1}^{n} (\Delta X_k)^2$ - квадратическая вариация

Т-ма 2 (нер-во Буркхольдера - Дэвиса). $\forall p \ge 1 \ \exists A, B \in \mathbb{R}, A > 0$, т.ч. $\forall$ март X_n с $X_0 = 0$

$A \| \sqrt{[X]_n} \|_p \le \| \max_{k \le n} X_k \|_p \le B \| \sqrt{[X]_n} \|_p$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(без д-ва)

Д-во для $p = 2$ $\| \max_{k \le n} X_k \|_2 \underset{\text{н-во Дуба}}{\le} 2 \| X_n \|_2 \underset{\text{упр-е}}{=} 2 \| \sqrt{[X]_n} \|_2$, $\| \max_{k \le n} X_k \|_2 \ge \| X_n \|_2 = \| \sqrt{[X]_n} \|_2$ для кв. инт м-ла X_n.

□

(но наиболее важный случай - $p = 1$)