11-12-21. [illegible] [illegible] Тюкова Александра

① Пусть $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ ax + x^2, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Найдите $\mathcal{J}^{2,+}u(0)$ для всех a.

Решение: по опр. $\mathcal{J}^{2,+}u(x_0) = \{(p;X) \in \mathbb{R}^n \times \underbrace{S(\mathbb{R}^n)}_{\text{симм. матрицы}} \mid u(x) \le u(x_0) + \langle p; x-x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-x_0); x-x_0 \rangle + \bar{o}(|x-x_0|^2)\}$ при $x \to x_0$

У нас $x \in \mathbb{R}^1$; $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \{(p,b) : u(x) \le p \cdot x + \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2)\} \text{ при } x \to 0}$$

Нам нужно выполнение условия $u(x) \le p \cdot x + \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2)$ и при $x > 0$, и при $x < 0$.

При $x \le 0$: $u(x) = 0$

$$\Rightarrow 0 \overset{?}{\le} px + \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow \textcircled{p \le 0}$$

При $x > 0$: $u(x) = ax + x^2$

$$\Rightarrow ax + x^2 \overset{?}{\le} px + \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow \textcircled{a \le p}$$

Итак, мы получили, что $\begin{cases} p \le 0 \\ p \ge a. \end{cases}$ (*)

Но a - это задано, мы его не можем менять.

⇒ • Если $a > 0$ — то (*) не выполняется ни для какого p → $\boxed{\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \emptyset}$

• Если $a = 0$, то из (*): $p = 0$, поэтому мы хотим:

$\begin{cases} \text{если } x \le 0, \text{ то } 0 \le \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow b \ge 0 \\ \text{если } x > 0, \text{ то } x^2 \le \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow b \ge 2 \end{cases}$ $\Rightarrow \textcircled{b \ge 2}$ - необх., но и дост. условие для выполнения обеих н-в.

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \{(0;b) : b \ge 2\}.}$$

• Если $a < 0$, тогда из (*): $a \le p \le 0$.

Все ли $p \in [a;0]$ - подходят?

→ если $p \in (a,0)$ - то подойдет любое $\textcircled{b \in \mathbb{R}}$

→ если $p = 0$, то хотим: $\begin{cases} \text{если } x \le 0, \text{ то } 0 \le \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow b \ge 0 \\ \text{если } x > 0, \text{ то } ax + x^2 \le \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow b \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\Rightarrow \textcircled{b \ge 0}$ - необх. и дост. усл.

→ если $p = a$, то хотим: $\begin{cases} \text{если } x \le 0, \text{ то } 0 \le ax + \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow \overset{\substack{a<0 \\ x<0}}{b \in \mathbb{R}} \\ \text{если } x > 0, \text{ то } ax + x^2 \le ax + \frac{1}{2}bx^2 + \bar{o}(x^2) \Rightarrow b \ge 2 \end{cases}$ $\Rightarrow \textcircled{b \ge 2}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \{(p,b) : p \in (a,0); b \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,b) : b \ge 0\} \cup \{(a,b) : b \ge 2\}}$$

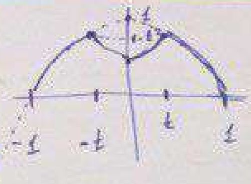
Ответ: Если $a > 0$, то $\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \emptyset$

Если $a = 0$, то $\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \{(0,b) : b \ge 2\}$

Если $a < 0$, то $\mathcal{J}^{2,+}u(0) = \{(p;b) : p \in (a,0); b \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,b) : b \ge 0\} \cup \{(a,b) : b \ge 2\}$

③ Покажите, что $\forall t \in [0,1]$ ф-ция $u_t(x) = \begin{cases} 1-x^2; & x\in[-1,-t] \\ x^2-1+2(1-t^2), & \text{при } |x|<t \\ 1-x^2; & \text{при } x\in(t,1] \end{cases}$

является вязкостным решением ур-я $\begin{cases} |u'(x)|-2|x|=0 \text{ на } (-1,1) \\ u(-1)=u(1)=0. \end{cases}$



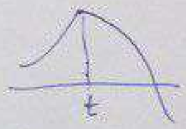
Решение: В точках гладкости это и так решение, поэтому усл. вязкостности нужно проверять для точек $x_0=\pm t$; $t\in(0,1)$

• Для $x_0=t$:

а) Если $\varphi\in C^2(-1,1)$ ф-ция $u_t-\varphi$ достигла в точке $x_0=t$ лок. макс,

то $u_t(t+\varepsilon)-\varphi(t+\varepsilon) \le u_t(t)-\varphi(t)$ (*)

$\Rightarrow u_t(t+\varepsilon)-u_t(t) \le \varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)$



$$\Rightarrow \frac{u_t(t+\varepsilon)-u_t(t)}{\varepsilon} \le \frac{\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)}{\varepsilon} \longrightarrow \varphi'(t)$$

$$\frac{u_t(t+\varepsilon)-u_t(t)}{\varepsilon} = \frac{1-(t+\varepsilon)^2-(1-t^2)}{\varepsilon} = \frac{-2t\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon} = -2t-\varepsilon$$

$\Rightarrow$ после перехода к пределу: $\boxed{-2t\le\varphi'(t)}$

~~[illegible]~~

Аналогично, $u_t(t-\varepsilon)-\varphi(t-\varepsilon) \le u_t(t)-\varphi(t)$

$\Rightarrow \varphi(t)-\varphi(t-\varepsilon) \le u_t(t)-u_t(t-\varepsilon)$

$$\Rightarrow \underset{\varphi'(t)}{\underset{\downarrow}{\frac{\varphi(t)-\varphi(t-\varepsilon)}{\varepsilon}}} \le \frac{u_t(t)-u_t(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$\frac{u_t(t)-u_t(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{(1-t^2)-\left((t-\varepsilon)^2-1+2-2t^2\right)}{\varepsilon} = \frac{\cancel{1}-\cancel{t^2}-\cancel{t^2}+2t\varepsilon-\varepsilon^2-\cancel{1}+\cancel{2t^2}}{\varepsilon} = 2t-\varepsilon$$

$\Rightarrow$ после перехода к пределу: $\boxed{\varphi'(t)\le 2t} \Rightarrow |\varphi'(t)|\le 2t \quad \Rightarrow |\varphi'(\overset{t}{x})|-2|\overset{t}{x}|\le 0$ – вып.

б) Если ф-ция $u_t-\varphi$ достигла в точке $x_0=t$ лок. min:

получаем $u_t(t+\varepsilon)-\varphi(t+\varepsilon) \ge u_t(t)-\varphi(t)$

$$\underset{-2t-\varepsilon}{\frac{u_t(t+\varepsilon)-u_t(t)}{\varepsilon}} \ge \frac{\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)}{\varepsilon}$$

$\boxed{-2t \ge \varphi'(t)} \longrightarrow$

А с другой стороны: $u_t(t-\varepsilon)-\varphi(t-\varepsilon) \geq u_t(t)-\varphi(t)$

$\Rightarrow \varphi(t)-\varphi(t-\varepsilon) \geq \underbrace{u_t(t)-u_t(t-\varepsilon)}_{\shortparallel \; 2t-\varepsilon}$

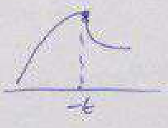
$\Rightarrow \boxed{\varphi'(t) \geq 2t}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2t \geq \varphi'(t) \\ \varphi'(t) \geq 2t \end{cases}$ – так не бывает $\Rightarrow$ таких φ нет.

Для $x_0 = -t$

а) Если $u_t-\varphi$ в точке $x_0=-t$ достигла лок. max, то:

$u_t(t+\varepsilon)-\varphi(t+\varepsilon) \leq u_t(t)-\varphi(t)$



$\Rightarrow \frac{u_t(t+\varepsilon)-u_t(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\varphi(t+\varepsilon)-\varphi(t)}{\varepsilon} \to \varphi'(t)$

$\shortparallel$

$\frac{(t+\varepsilon)^2-1+2-2t^2-(1-t^2)}{\varepsilon}$

$\shortparallel$

$\frac{\cancel{t^2}-2t\varepsilon+\varepsilon^2+\cancel{1}-\cancel{2t^2}-\cancel{1}+\cancel{t^2}}{\varepsilon}$

$\shortparallel$

$-2t+\varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{-2t \leq \varphi'(t)}$

С другой стороны, $u_t(t-\varepsilon)-\varphi(t-\varepsilon) \leq u_t(t)-\varphi(t)$

$\Rightarrow \frac{\varphi(t)-\varphi(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{u_t(t)-u_t(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$

$\swarrow$ $\varphi'(t)$

$\shortparallel \frac{(1-t^2)-(1-(t+\varepsilon)^2)}{\varepsilon}$

$\shortparallel \frac{\cancel{1}-\cancel{t^2}-\cancel{1}+\cancel{t^2}+2t\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}$

$\shortparallel \; 2t+\varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\varphi'(t) \leq 2t}$

$\Rightarrow \boxed{|\varphi'(-t)| \leq 2t}$

$\Downarrow$

$|\varphi'(\underset{-t}{x})|-2|\underset{-t}{x}| \leq 0$ - вып.

б) Если $u_t-\varphi$ в точке $x_0=-t$ достигла лок. min, то:

$u_t(-t+\varepsilon)-\varphi(-t+\varepsilon) \geq u_t(-t)-\varphi(-t)$

$\Rightarrow \frac{u_t(-t+\varepsilon)-u_t(-t)}{\varepsilon} \geq \frac{\varphi(\cancel{-t+\varepsilon})-\varphi(-t)}{\varepsilon} \to \varphi'(t)$ $\Rightarrow \boxed{-2t \geq \varphi'(t)}$

$\shortparallel$

$-2t+\varepsilon$

С другой стороны, $u_t(t-\varepsilon)-\varphi(-t-\varepsilon) \geq u_t(-t)-\varphi(-t)$

$\Rightarrow \frac{\varphi(-t)-\varphi(-t-\varepsilon)}{\varepsilon} \geq \frac{u_t(-t)-u_t(-t-\varepsilon)}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\varphi'(t) \geq 2t}$

$\downarrow$ $\varphi'(t)$

$\shortparallel \; 2t+\varepsilon$

$\Rightarrow$ таких φ не бывает.

$\Rightarrow$ Ч.Т.Д. (проверили вязкость решения u_t)

⑥. Выполняется ли второй пункт из структурного условия для операторов:

а) $\Delta_\infty u = \frac{1}{|Du|^2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} u_{x_i} u_{x_j}$

б) $\Delta_p u = -|Du|^{p-2}(\Delta u + (p-2)\langle D^2 u \frac{Du}{|Du|}; \frac{Du}{|Du|}\rangle); p>2.$

Решение: что такое структурное условие: (дано $F(x,u,p,X)$)

(1) $\lambda(u-v) \le F(x;u;p;X) - F(x,v;p;X)$; $\lambda>0; u \ge v$ – не надо проверять)

2) $\forall \alpha > 1$ из того, что $-3\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$ следует, что:

$$F(y,v,\alpha(x-y);Y) - F(x;v;\alpha(x-y);X) \le \omega(|x-y|(1+\alpha|x-y|)),$$ где ω – непрер. неубыв. и $\omega(0)=0$.

а) Оператору $\Delta_\infty u = \frac{1}{|Du|^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} u_{x_i} u_{x_j}$ соответствует ф-ция $F(x,u,p,X) = \frac{1}{|p|^2} \cdot \langle Xp; p\rangle$.

Приведем пример матриц X и Y, для которых 2-й пункт структ. условия не выполн.

пусть $\alpha > 1$; $X = 0$
$Y = 3\alpha I$

проверим:

- $-3\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{?}{\le} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3\alpha I \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3I \end{pmatrix} \overset{?}{\ge} \begin{pmatrix} -3I & 0 \\ 0 & -3I \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\ge} 0$ – выполнено, т.к. $\forall (u,v)$: $\langle \begin{pmatrix} 4I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle = 4u^2 \ge 0$

- $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3\alpha I \end{pmatrix} \overset{?}{\le} 3\alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3I & -3I \\ -3I & 3I \end{pmatrix} \overset{?}{\ge} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3I \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3I & -3I \\ -3I & 6I \end{pmatrix} \overset{?}{\ge} 0$ – выполнено, т.к. $\forall (u,v)$: $\langle \begin{pmatrix} 3I & -3I \\ -3I & 6I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle = \langle 3u-3v; -3u+6v; u+v \rangle =$

$= 3u^2 - 3uv - 3uv + 6v^2 = \left[\begin{array}{l} 3u^2 \ge 0, \text{ если } v=0 \\ 3(\frac{u}{v})^2 - 6\frac{u}{v} + 6 > 0, \text{ если } v \ne 0 \end{array}\right. \ge 0.$

$D = 36 - 18\cdot 4 < 0$

⇒ предпосылка выполнена.

А выполнено ли следствие?

Ну $F(y,v,\alpha(x-y);\underset{3\alpha I}{\underset{\parallel}{Y}}) - F(x;v;\alpha(x-y);\underset{0}{\underset{\parallel}{X}}) = \frac{1}{\alpha^2|x-y|^2} \langle (\overset{3\alpha I}{\overset{\parallel}{Y}} - \overset{0}{\overset{\parallel}{X}})\alpha(x-y); \alpha(x-y) \rangle = 3\alpha \ne \omega(|x-y|(1+\alpha|x-y|))$,

т.к. $\underset{\omega(0)}{\underset{\parallel}{\lim_{x\to y}}} 3\alpha = 3\alpha$, но $\omega(0) = 0$ по усл ⇒ ω – не непр. ⇒ это не вып.

⇒ 2-й пункт структ. усл. не вып.

б) Для оператора $\Delta_k u = -|Du|^{k-2}(\Delta u + (k-2)\langle D^2 u \frac{Du}{|Du|}; \frac{Du}{|Du|}\rangle)$: ← p заменили так, т.к p - это Du у нас

ему соответствует ф-ция $F(x,u,p,X) = -|p|^{k-2}(\mathrm{tr} X + (k-2)\langle X\frac{p}{|p|}; \frac{p}{|p|}\rangle)$

Докажем, что 2-й пункт структ. условия выполнен.

Пусть выполнено, что $-3\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le 3\alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$

но мы на лекции 3 доказывали важное замечание, что из этого н-ва следует, что $X \le Y$.

~~Мы хотим: $F(y,v,\alpha(x-y);Y) - F(x,v,\alpha(x-y);X) \le \omega(\alpha|x-y|^2 + |x-y|)$~~

Следовательно, $F(y,v,\alpha(x-y);Y) - F(x;v,\alpha(x-y);X) =$

$$= -|\alpha(x-y)|^{k-2}\Big(\mathrm{tr} Y + (k-2)\langle Y\frac{\alpha(x-y)}{|x-y|}; \frac{\alpha(x-y)}{|x-y|}\rangle\Big) + |\alpha(x-y)|^{k-2}\Big(\mathrm{tr} X + (k-2)\langle X\frac{\alpha(x-y)}{|x-y|}; \frac{\alpha(x-y)}{|x-y|}\rangle\Big) =$$

$$= \alpha^{k-2}|x-y|^{k-2}\Big(\underbrace{\mathrm{tr} X - \mathrm{tr} Y}_{\le 0,\ т.к\ X \le Y} + (k-2)\alpha^2\underbrace{\langle (X-Y)(x-y); x-y\rangle}_{\le 0,\ т.к\ X\le Y}\Big) \le 0$$ => 2-й пункт структ. условия выполнен.

② Док-ть, что u явл. вязкостным решением ур-я $|Du(x)| = f(x)$

$\Leftrightarrow$ $v = -e^{-u}$ явл. вязкостным решением ур-я $|Dv(x)| + v(x)f(x) = 0$.

Решение: ⇒ По опр. вязкостное решение ур-я $|Du(x)| = f(x)$ - это если ф-ция $u-\varphi$ в т. x_0 достигает лок. max (min), то $|D\varphi(x)| \le f(x)$. $(|D\varphi(x)| \ge f(x))$.

Тогда пусть u - вязкостное решение ур-я $|Du(x)| = f(x)$,

Пусть $\psi(x) \in C^2$ - такая ф-ция, что $v - \psi = e^{-u} - \psi$ имеет в точке x_0 лок. экстремум, и $v(x_0) = -e^{-u(x_0)} = \psi(x_0)$ (мы говорили, что ψ можно всегда считать таким)

но $v(x_0) = -e^{-u(x_0)} < 0$ - отрицательное

=> $\psi(x) = -e^{-\varphi(x)}$ для некоторой ф-ции $\varphi \in C^2$.

но тогда $u - \varphi$ имеет в x_0 лок. экстремум того же типа (max или min соотв.) (что и $v-\psi$)

(т.к $v - \psi = -e^{-u(x)} + e^{-\varphi(x)} = \underbrace{e^{-u(x)}}_{>0} \cdot (-1 + e^{u(x)-\varphi(x)})$,

и поскольку $v(x_0) = \psi(x_0) \Leftrightarrow u(x_0) = \varphi(x_0)$,

то если $v(x) - \psi(x) \le 0$ - то $u(x) - \varphi(x) \le 0$, и наоборот

а если $v(x) - \psi(x) \ge 0$ - то $u(x) - \varphi(x) \ge 0$, и наоборот)

А именно, если экстремум - максимум, то поскольку u - вязкостное решение ур-я $|Du(x)| = f(x)$, то в т. x_0: $|D\varphi(x_0)| \le f(x_0)$

$$\Rightarrow |D\psi(x_0)| = e^{-\varphi(x_0)} \cdot |D\varphi(x_0)| \le e^{-\varphi(x_0)} \cdot f(x_0) = -\psi(x_0) \cdot f(x_0)$$

=> $|D\psi(x_0)| + \psi(x_0) f(x_0) \le 0$ => v - вязк. решение ур-я $|Dv(x)| + v(x)f(x) = 0$.

А если экстремум минимум, то из-за того, что u - вязк. решение ур-я $|D\varphi(x_0)| = f(x_0)$,

имеем: $|D\varphi(x_0)| \geq f(x_0)$

$$\Rightarrow |D\psi(x_0)| = e^{-\varphi(x_0)} \cdot |D\varphi(x_0)| \geq e^{-\varphi(x_0)} \cdot f(x_0) = -\psi(x_0) \cdot f(x_0)$$

$$\Rightarrow |D\psi(x_0)| + \psi(x_0) f(x_0) \geq 0$$ $\Rightarrow v$ - вязк. решение ур-я $|Dv(x)| + v(x) f(x) = 0$, ч.т.д.

$\Leftarrow$ пусть $v(x) = -e^{-u(x)}$ - вязкостное решение ур-я $|Dv(x)| + v(x) f(x) = 0$,

Проверим, что u - вязкостное решение ур-я $|Du(x)| = f(x)$.

Для этого берем ψ такое, что $u - \varphi$ в т. x_0 имеет лок max или min.

$\Rightarrow$ $v - \psi$ в точке x_0 достигает такого же лок экстр (max или min соотв)

- Если $v - \psi$ достигло в т. x_0 лок. max, то из-за того, что v - вязк. решение ур-я $|Dv(x)| + v(x) f(x) = 0$, то

$$\underset{\overset{\parallel}{|De^{-\varphi(x)}|}}{|D\psi(x)|} \leq \underbrace{-\psi(x) f(x)}_{\overset{\parallel}{e^{-\varphi(x)} f(x)}}$$

$$\Rightarrow \overset{\parallel}{e}^{-\varphi(x_0)} \cdot |D\varphi(x_0)| \leq e^{-\varphi(x_0)} \cdot f(x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{|D\varphi(x_0)| \leq f(x_0)}$$ $\Rightarrow u$ - вязк. решение ур-я $|Du(x)| = f(x)$

- Если $v - \psi$ достигло в т. x_0 лок. min, то из-за того, что v - вязк. решение ур-я $|Dv(x)| + v(x) f(x) = 0$, то

$$\underset{\overset{\parallel}{|De^{-\varphi(x_0)}|}}{|D\psi(x_0)|} \geq \underset{\overset{\parallel}{e^{-\varphi(x_0)} f(x_0)}}{-\psi(x_0) f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \overset{\parallel}{e}^{-\varphi(x_0)} \cdot |D\varphi(x_0)| \geq e^{-\varphi(x_0)} \cdot f(x_0)$$

$$\Rightarrow |D\varphi(x_0)| \geq f(x_0)$$ $\Rightarrow u$ - вязк. решение ур-я $|Du(x)| = f(x)$. ч.т.д.