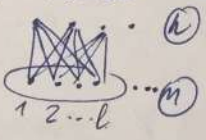
12.10.20. Дискр. матем. д/з от семинариста.

(1) Найти число неизоморфн. двудольных графов с m и n вершинами.

Решение: Группа $G = S_n \times S_m$ действует на мн-ве вершин и порождает перестановки рёбер графа $K_{n,m}$. $|G| = n!m!$

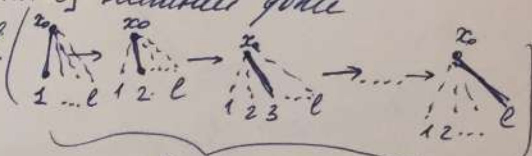
Рассм. на примерах, как действует такой элемент $g=(g_1; g_2)$, $g_1 \in S_n$, $g_2 \in S_m$ (для понимания)

а) Если $g = (e; (12\dots l))$, то



все рёбра, ведущие из любой вершины верхней доли в вершину $\in \{1\dots l\}$ нижней доли (а их $n \cdot l$), разбиваются на n орбит длины l.

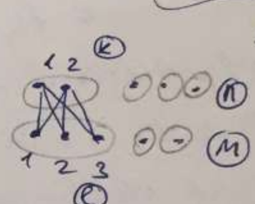
$\Rightarrow z_l^n \cdot z_1^{n(m-l)}$



1 орбита

б) Если $g = ((12\dots k); (12\dots l))$, то

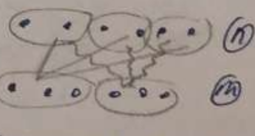
все рёбра, соединяющие вершины $\{12\dots k\}$ и $\{12\dots l\}$ (а их $k \cdot l$ штук), разбиваются на орбиты длины НОК(k,l).



$\Rightarrow$ кол-во орбит $= \frac{kl}{\text{НОК}(k,l)} = \text{НОД}(k,l)$ $\Rightarrow z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)} \cdot \underbrace{z_l^{n-k} \cdot z_k^{m-l}}_{\text{см. случай а)}} \cdot \underbrace{z_1^{(n-k)(m-l)}}_{\text{стоят на месте}}$

в) Если g = ((произведение циклов); (произведение циклов)),

то нужно (для каждой кучки из верхней доли) пройтись по всем кучкам из нижней доли, и домножить текущий цикловой индекс на моном, который получается для длин. верхней и длин. нижней кучки, а это см. пункт б)



То есть пусть цикловая структура элемента $g_1 \in S_n$ имеет вид: i_1 циклов длины 1, i_2 циклов длины 2 … i_n циклов длины n.

то есть $g_1 = \underbrace{(\cdot)\dots(\cdot)}_{N1\dots N i_1} \underbrace{(\cdot\cdot)\dots(\cdot\cdot)}_{N1\dots N i_2} \dots \underbrace{(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\dots(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)}_{N1\dots N i_n}$ ← "кучки"

А элемент $g_2 \in S_m$ имеет структуру: j_1 орбит длины 1, j_2 – длины 2 … j_m – длины m.

Тогда цикловой индекс элемента $g = (g_1; g_2)$ имеет вид $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)} \underbrace{i_k \cdot j_l}_{\text{сколько таких пар циклов с длинами k и l соотв.}}$

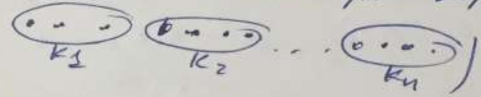
Чтобы подсчитать цикловой индекс группы, нам надо подсчитать для фикс. $i_1 i_2 \dots i_n\ j_1 \dots j_m$, сколько таких элементов.

Скольким способами можно разбить n на i_1 групп длины 1, на i_2 групп длины 2 … i_n групп длины n?

То есть на группы $\underbrace{①①\dots①}_{i_1} \underbrace{②②\dots②}_{i_2} ③\dots③ \dots ⓝ\dots ⓝ$? (элем)

~~…~~ Ну если мы хотим разбить n на группы размера $k_1 \dots k_n$ – (и $k_1 \dots k_n$ – разные)

то способов $\frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$ – т.к. порядок элем. внутри групп неважен. (ну ~~…~~ набираем посл-ть длины n, и считаем, что первые k_1 элем – это для 1-го мн-ва, следующие k_2 элем – для второго и т.д.

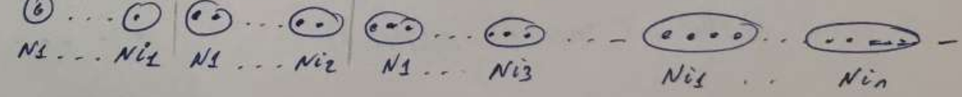


поэтому и делим на $k_i!$, т.к. порядок, в котором стоят в очереди элементы i-го мн-ва неважен – всё равно все получили одно и то же мн-во).

Из этого способа набора видно, что если среди k_i есть s одинаковых, то нужно ещё поделить на $s!$, т.к. если у нас набираются 2 цикла длины 3, и 1-й стоит впереди 2-го в этой цепочке – то надо делить на $2!$ – т.к. ~~…~~ нам важен лишь неупорядоч. набор $\{ \underset{N_1}{(\text{цикл длины } 3)}, \underset{N_2}{(\text{цикл длины } 3)} \}$ ~~…~~,

то есть …(abc)…(klm)… и …(klm)…(abc)…, которые явл. разными при ~~…~~ осуществлении ~~в~~набора элем. – для нас они одинаковые.

=> Если мы хотим число способов ~~…~~ разбить n на наборы



то их число $= \frac{n!}{\underbrace{1! \dots 1!}_{i_1 \text{ раз}} \underbrace{2! \dots 2!}_{i_2 \text{ раз}} \underbrace{3! \dots 3!}_{i_3 \text{ раз}} \dots \underbrace{n! \dots n!}_{i_n \text{ раз}}} \cdot \frac{1}{i_1! \, i_2! \dots i_n!}$

это из-за перестановок внутри набора

это из-за перестановок наборов одинаковой длины

А теперь вспомним, что мы набираем не набор мн-в, а набор циклов. Это значит, что из мн-ва размера k получим $\frac{k!}{k} = (k-1)!$ различных циклов (делим на k – т.к. (123), (231) и (312) – это один и тот же цикл, т.е. ~~…~~ все k ~~…~~ записей, полученных прокруткой записи исх. цикла "по циклу" – дают тот же самый цикл).

=> число разбиений ~~…~~ n вершин на i_1 орбит длины 1, i_2 орбит длины 2, … i_n орбит длины n —

равно $\frac{n!}{\underbrace{(1!\dots1!)}_{i_1\text{ раз}}\underbrace{(2!\dots2!)}_{i_2\text{ раз}}\dots\underbrace{(n!\dots n!)}_{i_n\text{ раз}}}\cdot\frac{1}{i_1!\,i_2!\dots i_n!}\cdot(i_1-1)!\dots(i_n-1)! = \frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1 i_2\dots i_n}$

$\Rightarrow$ цикловой индекс группы $= \frac{1}{n!\,m!}\sum\limits_{\substack{i_1\dots i_n\\ i_1+2i_2+\dots+ni_n=n}}\ \sum\limits_{\substack{j_1\dots j_m\\ j_1+2j_2+\dots+mj_m=m}}\frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1i_2\dots i_n}\cdot\frac{m!}{(1!)^{j_1}(2!)^{j_2}\dots(m!)^{j_m}}\cdot\frac{1}{j_1\dots j_m}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)}\cdot i_k\cdot j_l$

Чтобы узнать число неизом. 2-дольных графов с m и n вершинами — нужно вместо всех z подставить 2 — т.к. красим ребра в 2 цвета — видимый (ребро есть) и невидимый (ребра нет)

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ответ} = \frac{1}{n!\,m!}\sum_{\substack{i_1,\dots i_n\\ j_1,\dots j_m\\ i_1+2i_2+\dots+ni_n=n\\ j_1+2j_2+\dots+mj_m=m}}\frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1i_2\dots i_n}\cdot\frac{m!}{(1!)^{j_1}(2!)^{j_2}\dots(m!)^{j_m}}\cdot\frac{1}{j_1\dots j_m}\cdot\sum_{k,l=1}^{k=n;\ l=m}2^{\text{НОД}(k,l)}\cdot i_k\cdot j_l}$$

② Найти число ^неизом.^ ориент. графов с n вершинами 

Решение: на мн-ве вершин действует группа S_n и порождает перестановку рёбер полного ~~графа~~ ориентированного графа. В нем $n(n-1)$ рёбер

~~…~~

Если ребро $(u\,v)$ соединяет вершины u и v из циклов длин k и l соотв, ~~…~~ то цикловой индекс этого элем. будет $z_{\text{НОК}(k,l)}$, ~~и всего таких элем будет~~ и все $k\cdot l$ рёбер, соединяющие (k шт, l шт) порождается на $\frac{kl}{\text{НОК}(k,l)} = \text{НОД}(k,l)$ орбит. $\Rightarrow$ цикловой индекс этого элем. $= z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)}$

Ещё есть $k-1$ орбит длины $C_k^2/k-1 = k$ — внутри циклов длины k, $k\geq2$.

Если $g\in S_n = \{i_1$ циклов длины 1, i_2 циклов длины 2 … i_n циклов длины $n\}$,

то цикловой индекс $g = \sum\limits_{k,l=1}^{n} z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)}\cdot i_k\cdot j_l + \sum\limits_{k=2}^{n} \underbrace{i_k}_{\text{сколько таких циклов}}\cdot \underbrace{z_{k-1}^{k}}_{\text{ребра внутри цикла}}$

~~…~~

А в ① мы посчитали, что всего элем. с цикловой структурой $i_1\dots i_n$ существует $\frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1i_2\dots i_n}$ штук.

$$\Rightarrow P_G = \frac{1}{n!}\sum_{i_1+2i_2+\dots+ni_n=n}\frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1i_2\dots i_n}\left(\sum_{k,l=1}^{n} z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)} + \sum_{k=2}^{n} i_k\cdot z_{k-1}^{k}\right)$$

И теперь надо вместо всех z_i поставить 2 — т.к. красим в 2 цвета: есть ребро и нет ребра.

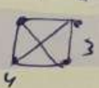
~~ребро вида 1 — цвет №1~~
~~ребро вида 2 — цвет №2~~
~~ребро вида 3 — цвет №3~~
~~ребро вида 4 = бесцветный цвет~~

$$\Rightarrow \underline{\text{ответ}} = \frac{1}{n!}\sum_{i_1+2i_2+\ldots+ni_n=n} \frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\cdots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1 i_2\ldots i_n}\left(\sum_{k,l=1}^{n} 2^{\text{НОД}(k,l)\cdot i_k\cdot j_l} + \sum_{k=1}^{n} i_k\cdot 2^k\right) =$$

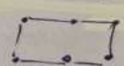
$$= \boxed{\frac{1}{n!}\sum_{i_1+2i_2+\ldots+ni_n=n} \frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\cdots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1 i_2\ldots i_n}\cdot\left(\sum_{k,l=1}^{n} 2^{\text{НОД}(k,l)\, i_k\cdot j_l} + \sum_{k=1}^{n} i_k\cdot 2^k\right)}$$

③ Число неизом. направл. графов на n вершинах

Решение: Тут S_n порождает действие на $\frac{n(n-1)}{2}$ ребрах неориент. графа. И красить мы будем в 3 цвета: $\overrightarrow{\ }$ цвет 1, $\overleftarrow{\ }$ цвет 2, $\cdot$ цвет 3.
Но проблема в том, что ребра, которые внутри цикла длины k, уже будут образовывать другие орбиты. Там не все орбиты будут длины k. (т.к. если $\frac{k(k-1)}{2}$ — нечетное, то ребер не хватит)

например, для k = 4: 

6 ребер
1 орбита длины 4
2 орбиты длины 2.

для k=6: 

$\frac{k(k-1)}{2} = 15$ ребер
2 орбиты длины 6
1 орбита длины 3.

~~Если $\frac{k(k-1)}{2}$ ... — не будет k/2 орбит длины k.~~

$k=2$ $\quad \frac{2\cdot1}{2} = 1 \not\vdots k$
$k=3$ $\quad \frac{3\cdot2}{2} = 3 \vdots k$
$k=4$ $\quad \frac{4\cdot3}{2} = 6 \not\vdots k$
$k=5$ $\quad \frac{5\cdot4}{2} = 10 \vdots k$
$k=6$ $\quad \frac{6\cdot5}{2} = 15 \not\vdots k$
$k=7$ $\quad \frac{7\cdot6}{2} = 7\cdot3 \vdots k$
$k=8$
$k=9$
$k=10$ $\quad \frac{10\cdot9}{2} \not\vdots k$.

Если k — неч — то $z_k^{\frac{k-1}{2}}$

Если k — четное, то одна орбита длина $\frac{k}{2}$,
и еще $\dfrac{\frac{k(k-1)}{2}-\frac{k}{2}}{k} = \frac{k-2}{2}$ орбит длины k. $\Rightarrow z_k^{\frac{k-2}{2}}\, z_{\frac{k}{2}}$

$$\Rightarrow P_G = \frac{1}{n!}\sum_{i_1+2i_2+\dots+ni_n=n} \frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1 i_2\dots i_n}\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} z_{\text{НОК}(k,l)}^{\text{НОД}(k,l)\, i_k j_l} + \sum_{\substack{k=1\\ k\vdots 2}}^{n} z_k^{\frac{k-2}{2}} z_{\frac{k}{2}} + \sum_{\substack{k=1\\ k\not\vdots 2}}^{n} z_k^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

(стр3)

каждое ребро 2 раза считаем

И теперь подставляем вместо всех z_i число 3.

$$\boxed{\Rightarrow \cancel{P_G} = \frac{1}{n!}\sum_{i_1+2i_2+\dots+ni_n=n} \frac{n!}{(1!)^{i_1}(2!)^{i_2}\dots(n!)^{i_n}}\cdot\frac{1}{i_1 i_2\dots i_n}\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} 3^{\text{НОД}(k,l)\, i_k j_l} + \sum_{k=2,4,6,8\dots}^{n} 3^{\frac{k-2}{2}}\cdot 3 + \sum_{k=1,3,5\dots}^{n} 3^{\frac{k-1}{2}}\right)}$$

4. Число неизом. плоских корневых деревьев с n вершинами

Решение: пусть $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, где f_n - число плоских корневых деревьев с n вершинами

вес дерева = кол-во вершин.

Пусть ~~A~~ [illegible] мн-во деревьев [illegible] т.к дерево - это корень, из которого торчит $k=0,1,2\dots$ новых деревьев.

$$\Rightarrow A = (\underbrace{\text{корневая вершина}}_{=\text{дерево с 1 вершиной}})\cdot A^*$$

$$\Rightarrow F(x) = x(1+F(x)+F^2(x)+\dots) = \frac{x}{1-F(x)}$$

$$F(1-F)=x$$

$$F^2-F+x=0.$$

$$D = 1-4x$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$$

чтоб в нуле раскладывалось в ряд - выбираем знак минус

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

$\Rightarrow$ нас интересует коэф. при x^n у $F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ ~~коэф. при x^n у $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$~~

$\sum C^{k}_{1/2}(-4x)^k$

(т.к. n вершин $\Rightarrow$ n-1 ребро)

но
$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n\right)(-4x)^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1(-1)(-3)\dots(-2n+1)\cdot(-2)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,(-1)^{n-1}\cdot 2^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,2^n\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,(2n)!!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\,n!\,(n+1)}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}x^{n}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}}$ ← с n вершинами (n-1 ребром)

⑤ Число бинарных деревьев с n ~~вершин рёбрами~~ вершинами

<u>Решение:</u> как и в ④, только $k=0$ или 2, т.е. корень $\cdot$ ($\varnothing$ или $k=2$)

пусть f_n – кол-во бин. деревьев с n вершинами

$$\Rightarrow F(x) = x\left(1+F^2(x)\right) \quad \text{– т.к } A = \text{корень}\cdot(\varnothing \text{ или } A^2)$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

$$F = \cancel{x} + x\cdot F^2$$

$$x\cdot F^2 - F + \cancel{x} = 0.$$

$$D = 1-4x^2$$

$$F_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

чтоб в нуле расклад. в ряд – берём знак минус

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} = -\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n)(-4x^2)^{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot(-1)(-3)\ldots(-2n+1)\cdot(-2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot x^{2n+2} =$$

$$= \ominus\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}\cdot x^{2n+2}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot 2^n\cdot x^{2n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot(2n)!!\, x^{2n+1}}{(n+1)!\, n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{(n+1)\, n!\, n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{n+1}\cdot x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}}_{f_{2n-1}}\cdot x^{2n-1}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } f_{2n-1} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n} \qquad f_{2n} = 0}$$