02.11.18. Мат. анализ. Лекция 17.

Теорема 2 Пусть $f \in C^{\infty}(x_0-R;x_0+R)$ для некоторого $R>0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$.

Тогда имеет место разложение в ряд Тейлора для $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \ \forall x \in (x_0-R;x_0+R) \iff$$

$$\boxed{r_k(x) := f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \ \forall x \in (x_0-R;x_0+R)}$$

(т.е $r_k \to 0$ поточечно)

$\blacktriangleright$ $f \in C^{\infty}(x_0-R;x_0+R) \Rightarrow \exists$ ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, $\forall x \in (x_0-R;x_0+R)$.
И мы хотим, чтобы этот ряд сходился к $f(x)$, т.е по опр. поточечной сходимости частичная сумма $S_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$. Но это то же самое, что $f(x) - S_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. А это и есть, что $r_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $\blacktriangleleft$

Пункт 2. Основные разложения: e^x; $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$; $\sin x$, $\cos x$; $\ln(1+x)$; $(1+x)^{\alpha}$

I. e^x Имеем: $f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

$\Rightarrow$ ряд Маклорена в данном случае имеет вид $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ (1)

Узнаем, где этот ряд сходится:
по Даламберу: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow R = \infty$.

(Заметим, что радиус сходимости ряда (1) $= \infty$, но он сход. равном. на $[-M;M]$, но не на всём $\mathbb{R}$, т.к положим $x_n := n$ и получим $\frac{n^n}{n!} \not\to 0$ $\frac{?}{?}$, т.е не выполнено необх. усл. сход. ряда: общий член $\not\to 0$).

Имеем: (по ф-ле Тейлора в форме Лагранжа)

$$\forall k \in \mathbb{N}: \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{k}\frac{x^n}{n!} + r_k(x), \text{ где } |r_k(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(k+1)!}\cdot|x|^{k+1} \le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, (*)}, \ \theta \in (0;1)$$

ничего не говорит про равном.

(*) почему $\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall x \geq 0$

- либо по ф-ле Стирлинга: $\frac{x^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\left(\frac{xe}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к $xe < n$, $\forall n > n_0$.
- либо так: рассмотрим ряд $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ – он сход. по Даламберу

$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – это необх. усл. сход. ряда.

В итоге: (см. теорема 2) $\boxed{e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!};\ x \in \mathbb{R}}$

II. $\operatorname{ch}x$; $\operatorname{sh}x$

а) Имеем: $\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+(-1)^n) = \boxed{\sum_0^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!};\ x\in\mathbb{R}}$

Зам. 1) Пусть $f \in C^{\infty}(-R;R)$ и f – чётная.

Тогда ряд Тейлора содержит только чётные степени, т.е имеет вид $\sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}\cdot f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$ (т.к все производные нечётных порядков – нечётные). Вспомним, что мы доказывали, что если f чётная, т.е $f(-x)=f(x)$, то $f'(x)$ – нечётная, т.е $f'(-x)=-f'(x)$

Имеем: $f'(x)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(-x-t)-f(-x)}{t}=-\lim\limits_{t\to0}\frac{f(-x-t)-f(-x)}{-t}=-f'(-x)$.

Аналогично для высших производных.

2) пусть $f\in C^\infty(-R;R)$ и f – нечётная.

Тогда ряд Тейлора имеет вид $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$.

Причём в обоих случаях мы не утверждаем, что этот ряд сход. или расход. Просто формальная сумма.

б) 1 способ $\operatorname{sh}x:=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac12\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{x^n-(-1)^nx^n}{n!}=\boxed{\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};x\in\mathbb R}$

2 способ $\operatorname{sh}x=(\operatorname{ch}x)'=\left(\sum\limits_0^\infty\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' \underset{\text{радиус сход. не изменяется}}{\overset{\text{теорема о дифф-и}}{=}} \sum\limits_0^\infty\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)'=\sum\limits_1^\infty\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\underset{k=n-1}{=}\boxed{\sum\limits_0^\infty\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};x\in\mathbb R}$

III $\cos x$; $\sin x$

а) $\cos x\in C^\infty(\mathbb R)$ => можно написать ф-лу Тейлора в форме Лагранжа:

$\forall x\in\mathbb R$: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n+r_n(x)$, где $|r_n(x)|=\frac{|\sin\theta x|}{(2n+1)!}\cdot|x|^{2n+1}\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

=> по теореме 2 $\boxed{\cos x=\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!};x\in\mathbb R}$

б) $\sin x=-(\cos x)'=-\Big(\underbrace{\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{ряд сход. на } \mathbb R \Rightarrow \text{ можно дифференцировать на } \mathbb R}\Big)'=-\sum\limits_1^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}\underset{n-1=k}{=}\boxed{\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!};x\in\mathbb R}$

IV $\ln(1+x)$

Имеем: $x\in(-1;1)$ $\ln(1+x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t}=\int\limits_0^x\Big(\underbrace{\sum\limits_{n=0}^\infty(-1)^nt^n}_{\text{разложение верно только при } t\in(-1;1)}dt\Big)=\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{n+1}=\boxed{\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n};x\in(-1;1)}$

$x\in(-1;1)$ вообще, это верно и при $x=1$, но нам дальше надо, что $x\in(-1;1)$

и нам важно, что $x\in(-1;1)$, т.к. была теорема, что если ряд сход. на $(-R;R)$, то можно интегрировать на отрезке $[-r;r]\subset(-R;R)$, где ряд сход. равном.

Посмотрим, где ещё, кроме $x\in(-1;1)$, может быть верно разложение. Точно не на $\mathbb R\setminus[-1;1]$, т.к. там вообще ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n}$ расход.

$x=1$. Уже есть, что $\ln(1+x)=\sum\limits_1^\infty(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$; $x\in(-1;1)$

переходим к lim при $x\to1^-$

=> $\underset{\text{т.к. } \ln\in C(2)}{\ln 2}=\underbrace{\sum\limits_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n}}$

т.к. $S\in C(1)$ по 2-й теореме Абеля, т.к. при $x=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n}$ сход (по Лейбницу)

$\underline{x=-1}$. ряд $\sum\limits_1^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$ – расход. $\Rightarrow$ при $x=-1$ разложение не верно.

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}\ ;\ x\in(-1;1]}$$

V. $(1+x)^{\alpha}$

- если $\alpha\in\mathbb{N}^*$ – то это прост ф-ла Бинома Ньютона.
- если $\alpha\notin\mathbb{N}^*$.

Пишем ф-лу Тейлора с остатком в интегральной форме:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+r_n(x),\ \text{где}\ r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt=$$

$$=\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}}_{=:A_n}\int_0^x(x-t)^n\cdot(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt=\boxed{A_n\cdot\int_0^x\underbrace{\left(\frac{x-t}{1+t}\right)}_{=:g(t)}^{n}\cdot(1+t)^{\alpha-1}\cdot dt}$$

Посмотрим, при каких x ряд Тейлора сходится, т.е есть шанс на разложение:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}\right|=\frac{n+1}{|\alpha-n|}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\Rightarrow \text{он сход. при } |x|<1.$$

Пусть $x\in(-1;1)$ – фикс.

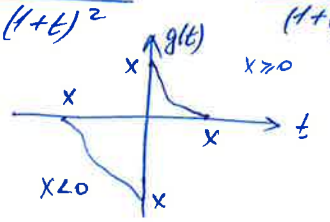
Рассмотрим функцию $g(t):=\frac{x-t}{1+t}$, где $\left[\begin{array}{l}t\in[0;x],\ \text{при } x>0\\ t\in[x;0],\ \text{при } x<0.\end{array}\right.$

Заметим, что:

1) $g\downarrow$ по t,

т.к $g'_t(t)=\frac{-1(1+t)-(x-t)}{(1+t)^2}=\frac{-1-t+x+t}{(1+t)^2}=\frac{-1-x}{(1+t)^2}<0$ (т.к $|t|<|x|<1$)

2) $\begin{cases}g(0)=x\\ g(x)=0\end{cases}$



$\Rightarrow |g(t)|\le|x|,\ \forall t$ такого, что $|t|<|x|<1$.

Потому $|r_n(x)|\le|A_n|\cdot\left|\int_0^x|x|^n\cdot(1+t)^{\alpha-1}dt\right|=|A_n|\cdot|x|^n\cdot\underbrace{\left|\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}dt\right|}_{\text{собств. интеграл, т.к } t\neq-1,\ \text{т.к } |t|<|x|<1}=$

$=|A_n|\cdot|x|^n\cdot\underbrace{C(\alpha;x)}_{\text{не зависит от } n}\xrightarrow[\text{при } x\text{-фикс.}]{?}0$

Да, стремится, т.к $|A_n|\cdot|x|^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

В самом деле, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^n$

он сход. по Даламберу: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\cdot|x| \longrightarrow |x|<1$ ($|x|<1$ – по усл.).

$\Rightarrow$ его общий член $\to 0$ – т.к. это необх. усл. сходимости ряда.

Итак, $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поточечно, $\forall x \in (-1;1)$

$\Rightarrow$ справедливо разложение

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad |x|<1.}$$

А что происходит в $x=\pm1$ – зависит от α (может разложение и быть, и не быть – см. в Демидовича задачу).

30.10.18. Мат. анализ. Лекция 16

Пункт 4. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Зам. 1) Все эти теоремы <u>не переносятся</u> на комплексные ряды

2) У нас уже есть теоремы о дифференцировании и интегрировании функциональных рядов. Они работают, т.к. степенные ряды являются функциональными. Но есть и специальные теоремы, только для степенных рядов, а не для всех функциональных.

Лемма 1. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1) имеет радиус сходимости $R \in [0;+\infty)$ а степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (2) имеет радиус сходимости $R' \in [0;+\infty)$. Тогда $R = R'$.

▶ От противного. Предположим, что $R \neq R'$.

1) <u>Пусть $R' > R$</u>

Рассмотрим $x \in (R; R')$.

Имеем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1}$ сход. – т.к. $x < R'$, а внутри своего радиуса сходимости ряд сход. абс.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^n$ сход. (т.к. сход. ряд домножили на число)

Но $|a_n||x|^n \le n|a_n||x^n|$

$\Rightarrow$ по мажорантному признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сход. абс

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сход. абс (т.к. сходимость/расходимость не зависит от конечного числа членов) $\Rightarrow$ противоречие, т.к. $x > R$, поэтому ряд (1) должен расходиться.

2) <u>Пусть $R' < R$.</u>

Рассмотрим $x \in (R'; R)$.

Тогда $\exists \rho \in (0; R) \;/\; R' < x < \rho < R$.

Имеем: $\sum\limits_{0}^{\infty} |a_n|\rho^n$ сход., т.к. $\rho < R \Rightarrow |a_n|\rho^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – необх. усл. сход. ряда.

$\Rightarrow$ посл-ть $|a_n|\rho^n$ ограничена, т.к. она сходится.

$\Rightarrow \exists C > 0 \;/\; |a_n|\rho^n \le C, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Поэтому $n|a_n||x|^n = \underbrace{(|a_n|\cdot\rho^n)}_{\le C} \cdot n \cdot \underbrace{\left(\frac{|x|}{\rho}\right)}_{=:q}^n \le C \cdot n \cdot q^n$.

При этом $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{C\cdot n+1 \cdot q^{n+1}}{C\cdot n\cdot q^n} = \frac{n+1}{n}\cdot q \xrightarrow[n\to\infty]{} q < 1$ (Даламбера использовать можно, т.к. ряд $\sum C\cdot n\cdot q^n$ знакоположительный, т.к. $0 < q < 1$)

$\Rightarrow$ по Даламберу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C\cdot n\cdot q^n$ сходится

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n||x^n|$ сходится.

Но $x > R' \ge 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ на x можно поделить, не изменив радиус сходимости

$\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1}$ сход.

$\Rightarrow$ противоречие, т.к. $x > R'$, и ряд (2) не может сход. вне своего интервала, тем более абсолютно.

Следствие Ряды $\sum_0^\infty a_n x^n$ (1) и $\sum_0^\infty \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1}$ (3) имеют один и тот же радиус сходимости (т.к. (1) является продифференцированным рядом (3), а ряд и его продифференцированный ряд по лемме 1 имеют одинаковый радиус сходимости).

Вывод: ! $\sum_0^\infty a_n x^n$; $\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ и $\sum_0^\infty \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Теорема 1 (почленное дифференцирование степенного ряда).

Пусть $\sum_0^\infty a_n x^n$ (1) имеет радиус сходимости $R \in [0;+\infty]$, и $f(x) := \sum_0^\infty a_n x^n$; $x \in (-R;R)$.

Тогда $f \in C^\infty(-R;R)$ и $f^{(k)}(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ получается почленным дифференцированием (k-го порядка) ряда (1).

▶ Имеем: $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ (1)

положим $g(x) := \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ (2).

Ряды (1) и (2) по лемме 1 имеют один и тот же радиус сход. $R \in (0;+\infty]$.

Фиксируем произвольное $x \in (-R;R)$.

Тогда $\exists\, r \in (0;R) \,/\, x \in (-r;r)$.

Тогда:
- $\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ сход. равном. на $[-r;r]$
- $\sum_0^\infty a_n x^n$ сход. поточечно хотя бы в 1 точке $[-r;r]$, т.к. он сход. равном. на $[-r;r]$.
- $a_n x^n \in \mathcal{D}([-r;r])$, и $(a_n x^n)' = a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$.

$\Rightarrow$ по теореме о дифференцировании функц. рядов $\exists\, f'(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ в силу произвольности $x \in (-R;R)$ всё доказано.

Ведь для производных следующих порядков уже не надо доказывать, т.к. $g(x)$ – снова степенной ряд, причём с таким же радиусом сходимости, что и $f(x)$, поэтому теперь просто можно эту теорему применить к $g(x)$. ◀

Пример. $\boxed{\text{Найти сумму ряда } x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1}}$

1) сначала посчитаем радиус сходимости.

В ряду есть дырки, поэтому работает только ф-ла с верхним пределом.

Имеем: $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-1}\right)^{1/2n-1} = 1$.

$\Rightarrow R = \frac{1}{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1 \Rightarrow$ интервал сходимости $(-1;1)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} =: S(x)$, $x \in (-1;1)$.

2) по теореме о почленном дифференцировании степенных рядов:

$\exists\, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in (-1;1)$ ($\frac{1}{1+x^2}$ расходится даже при $x=\pm 1$, т.к. общий член $\not\to 0$).

$\Rightarrow S(x) = \underbrace{\int \frac{dx}{1+x^2}}_{\text{первообразная}} = \operatorname{arctg} x + C.$

3) Найдём константу:

из вида самого ряда: $S(0)=0$.

с другой стороны, $S(0) = \operatorname{arctg} 0 + C = C \Rightarrow C = 0$.

3) Итак, $S(x) = \boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1};\ x \in (-1;1)}$ (*)

Где верно это разложение для $\operatorname{arctg} x$?

Точно на $(-1;1)$. А в граничных точках надо исследовать.

Имеем: $\begin{cases} \text{при } x=1 \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1} \text{ сход. по Лейбницу.} \\ S \in C(1) \text{ – по 2-й теореме Абеля, т.к. в } x=1 \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1} \text{ сход.} \\ \operatorname{arctg} x \in C(1) \end{cases}$

И теперь в равенстве (*) переходим к пределу при $x \to 1$:

слева будет $\operatorname{arctg} 1$, т.к. $\operatorname{arctg} x \in C(1)$

справа будет $S(1)$, т.к. $S \in C(1)$.

$\Rightarrow \exists\, S(1) = \operatorname{arctg} 1$.

$\Rightarrow$ разложение для $\operatorname{arctg} x$ верно на $(-1;1]$.

4) при $x=-1$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ сход. по Лейбницу

$\Rightarrow$ проведя аналогичные рассуждения, получим, что разложение для $\operatorname{arctg} x$ верно и при $x=-1$.

$\Rightarrow$ в итоге: разложение для $\operatorname{arctg} x$ верно при $x \in [-1;1]$.

Ответ: $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1}$; разложение верно при $x \in [-1;1]$

Теорема 2 (почленное интегрирование степенного ряда).

Пусть ряд $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R \in (0;+\infty]$,

и $f(x) := \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$; $x \in (-R;R)$.

Тогда $\forall x \in (-R;R)$ $\boxed{\exists \int_0^x f(t)dt \overset{(3)}{=} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\ (4)}$

Заметим, что $f \in C(-R;R) \overset{?}{\Rightarrow} f \in R(-R;R)$, т.к. нужно, чтобы $f \in B(-R;R)$.

Но $f \in C(-R;R) \Rightarrow f \in R[-r;r]\ \forall r \in (0;R)$

$\Rightarrow \forall x \in (-R;R)\ \exists \int_0^x f(t)dt.$

1) если $x=0$, то равенство (3) очевидно, т.к слева 0 и справа 0 т.к f интегрируема

2) если $x>0$

Хотим применить теорему о почленном интегрировании функц. рядов. Это можно, т.к • $a_n x^n \in R[0;r]$ – т.к это моном

• $\sum_0^\infty a_n x^n$ сход равном на $[0;r]$, т.к $\exists r \in (-R;R) / x \in [0;r]$.

$\Rightarrow$ по теореме об интегрируемости функц ряда:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_0^\infty a_n t^n dt = \sum_0^\infty \underbrace{\int_0^x a_n t^n dt}_{=\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}} = (4) \Rightarrow$$ равенство (3) доказано для $x \in (0;R)$

3) если $x \in (-R;0)$

имеем: • на $[x;0]$ ряд $\sum_0^\infty a_n x^n$ сход. равном

• $a_n x^n \in R[x;0]$

$\Rightarrow$ по теореме об интегрировании функц. рядов

$$\exists \int_x^0 f(t)dt = \sum_0^\infty \int_x^0 a_n t^n dt = -\sum_0^\infty \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \exists \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt = \sum_0^\infty \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$ $\Rightarrow$ равенство (3) доказано для $x \in (-R;0)$

параграф 4. Ряд Тейлора.

пункт 1. Ряд Тейлора. Единственность разложения.

До сих пор нас интересовал вопрос сходимости ряда $\sum a_n x^n =: f(x)$; $x \in (-R;R)$ и его сумма. Кроме того, мы выяснили, что если $R \in (0;+\infty]$, то $f \in C^\infty(-R;R)$.

Теперь возникают такие вопросы: (как бы обратное)

① пусть $f \in C^\infty(-R;R)$. Хотим узнать: существует ли степенной ряд $\sum a_n x^n / \sum a_n x^n = f(x)$, $\forall x \in (-R;R)$? Ответ: нет.

② пусть $f \in C^\infty(-R;R)$ (в принципе, для степ. ряда, по-другому и не бывает (см. теорема 10 дифф-ти степ. ряда)) и $\exists \sum a_n x^n / f(x) = \sum a_n x^n$

Хотим узнать: единственно ли это разложение, т.е что если $\exists \sum b_n x^n = f(x)$, то $a_n = b_n$? Ответ: да.

Теорема 1 (единственность разложения)

пусть $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$; $x \in (-R;R)$.

Тогда $\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!};\ k \in N;\ 0! = 1}$ (1), т.е коэф. определены однозначно.

$k=0$. $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0 = \frac{a_0}{0!} \Rightarrow$ (1) верно для $k=0$.

$k \geq 1$. Имеем: по теореме о дифференцировании степ. ряда

$$f^{(k)}(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{d^k}{dx^k}(x^n)\right)\Big|_{x=0} = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \cdot \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}(x^n)}_{k>n \Rightarrow \equiv 0} + a_k \cdot \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}(x^k)}_{= k!} +$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\frac{d^k}{dx^k}(x^n)}_{=0,\ \text{т.к. } n>k}\Big|_{x=0} = a_k \cdot k!$$

$\Rightarrow a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow (1)$ доказано.

Опр 1. Пусть $f \in C^{\infty}(x_0 - R; x_0 + R)$. Тогда степенной ряд (2) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R)}$ называется **рядом Тейлора** для функции f.

Причём ряд Тейлора — это по-прежнему формальная сумма. т.е мы не утверждаем ни то, что он сходится, ни то, что он равен нашей функции. (мы сейчас покажем, что ряд Тейлора может расходиться во всех точках, кроме x_0, а может сходиться, но не равняться $f(x)$).

При $x_0 = 0$ ряд (2) называется **рядом Маклорена**.

Заметим, что если $f(x)$ раскладывается в ряд, то это будет именно ряд Тейлора. Но она не всегда раскладывается!

Зам. 1) **Ряд Тейлора, который расходится всюду, кроме $x=0$.**

(см. Гелбаум, Олмстед: „Контрпримеры в анализе"; стр. 91).

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot \cos(n^2 x)}$$

Имеем: $f(x)$ бесконечно дифференцируема, поскольку множители e^{-n}, которые присутствуют во всех рядах, получаемых почленным дифференцированием исходного ряда, обеспечивают равном. сход. продифференцированных рядов, а значит, применение теоремы о почленном дифф. исходного ряда.

Заметим, что ряд Маклорена этой функции содержит лишь члены чётной степени (т.к у нечётных — синусы, а $\sin 0 = 0$, а у чётных — косинусы, а $\cos 0 = 1$): $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot (-\sin(n^2 x)) \cdot n^2$; $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cdot (-\cos(n^2 x)) \cdot n^4 \ldots$

Имеем: пишем $2k$-ый член ряда Маклорена:

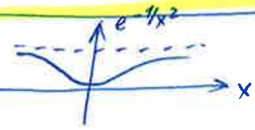
$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot (x-0)^{2k}\right| = \frac{e^{-n} \cdot n^{4k} \cdot x^{2k}}{(2k)!} > \frac{e^{-n} \cdot n^{4k} \cdot x^{2k}}{(2k)^{2k}} = \left(\frac{n^2 \cdot x}{2k}\right)^{2k} \cdot e^{-n} \quad (\text{для } x \neq 0,\ \forall n = 0,1,2\ldots)$$

Для $n = 2k$: $\left(\dfrac{n^2 \cdot x}{2k}\right)^{2k} \cdot e^{-n} = \left(\dfrac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1, \ \forall k > \left|\dfrac{e}{2x}\right|$

$\Rightarrow$ у ряда Маклорена общий член $\not\to 0 \Rightarrow$ он расходится $\forall x \neq 0$.

2) $\boxed{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}); \ \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ (3) \text{ сход. } \forall x \in \mathbb{R}. \ \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} \ f(x) = (3), \ \forall x \neq 0.}$

Например, $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}; & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Имеем: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

А в I семестре была теорема, что если функция непрерывна и есть предел производной, то производная в точке = этому пределу.

$\Rightarrow f'(0) = 0$.

Аналогично, $f^{(n)}(x) = \left(\text{многочлен от } \frac{1}{x}\right) \cdot e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ ряд Тейлора $\equiv 0$. А $f \neq 0, \forall x \neq 0$.

$\Rightarrow$ функция f нигде, кроме $x=0$, не раскладывается в ряд Тейлора.

Но в другой она тоже не раскладывается, т.к. если бы раскладывалась, то это был бы ряд Тейлора (см. теорема 1).

$\Rightarrow f$ — вообще не раскладывается в ряд, $\forall x \neq 0$.

Опр2. $f: M \to \mathbb{R}$; $x_0 \in M_i$ (внутренняя точка).

Тогда f — **аналитическая в точке x_0** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, O_\varepsilon(x_0) \subset M \ / \ f(x) = \sum\limits_0^\infty a_n (x-x_0)^n, \ \forall x \in O_\varepsilon(x_0)$.

(т.е. f в некоторой окр-ти точки x_0 раскладывается в ряд Тейлора; именно Тейлора, т.к. по теореме 1 мы знаем, что если раскладывается, то $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$)

Зам. ① f - аналитическая в точке $x_0 \Rightarrow f \in C^\infty(O_\varepsilon(x_0))$, для некоторого $\varepsilon > 0$.

② $f \in C^\infty(O_\varepsilon(x_0)) \overset{б.2}{\not\Rightarrow} f$ аналитическая в точке x_0.

например, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}; & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Она не раскладывается в свой ряд Тейлора $\forall$ точки $x \neq 0$, потому и ни в какой другой ряд тоже не раскладывается.

26.10.18. Мат. анализ. Лекция 15.

Пункт 2. Равномерная сходимость степенного ряда. 2-я теорема Абеля.

Зам. $\boxed{\sum a_n x^n \text{ сход. абс. на } (-R;R) \overset{в.г}{\not\Rightarrow} \sum a_n x^n \text{ сход. равном. на } (-R;R)}$

Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$: интервал сходимости $=(-1;1) \Rightarrow$ он сход. абс на $(-1;1)$

но он сход. неравномерно на $(-1;1)$, т.к. не выполнено необх. усл. сходимости: $a_n \not\rightrightarrows 0$, т.к. $\sup\limits_{x\in(-1;1)} x^n = 1 \not\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 1 (Вейерштрасса) Пусть $R>0$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1).

Тогда $\forall r \in (0;R)$ ряд (1) сход. равном. на $[-r;r]$.

(случай $R=0$ не рассматриваем, т.к. при $R=0$ есть только числовой ряд, а функционального нету, поэтому неинтересно).

▶ Пусть $r\in(0;R)$ произвольно.

$\Rightarrow \begin{cases} \cdot \sum\limits_{0}^{\infty} |a_n|\cdot r^n \text{ сход.} \xleftarrow{\text{д/т модуль, т.к. } \forall r\in(-R;R) \text{ ряд } \sum a_n r^n \text{ сход. абс.}} \text{ — вот нужный нам мажорантный ряд.} \\ \cdot \forall x\in[-r;r]: |a_n|\,|x^n| \le |a_n|\cdot r^n. \end{cases}$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса равном. сходимости функц. ряда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сход. равном. на $[-r;r]$ ◀

! Частая ошибка на экзамене!

$\boxed{\text{ряд сход. равном на } [-r;r]\ \forall r \overset{в.г}{\not\Rightarrow} \text{ ряд сход. равном. на } (-R;R)}$

Интуитивно это следует из того, что для каждого отрезка $[-r;r]$ свой номер, когда сумма ряда станет $<\varepsilon$, и единый номер, в.г, нельзя выбрать. Но это не док-во. Док-во — это контрпример: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ на $(-1;1)$

Он сход. равном $\forall [-r;r]\subset(-1;1)$, по теореме 1 (Вейерштрасса), но нет равном. сход. на $(-1;1)$, т.к. не выполнено необх. усл. сход. общий член $\not\rightrightarrows 0$, действительно: $\sup\limits_{x\in(-1;1)} x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Теорема 2 (2-я теорема Абеля)

Ряд (1) имеет радиус сходимости $R\in(0;+\infty)$, причем $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n R^n$ сход.

$S(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x\in(-R;R]$.

Тогда $S\in C(-R;R]$.

▶ ① Докажем, что $S\in C(-R;R)$

! нельзя потом утверждать, что $S\in C(-R;R)$, что $S\in C$(каждый сегмент) почему?

Пусть $x_0\in(-R;R)$ — произвольно.

$\Rightarrow \exists r\in(0;R) \mid x_0\in[-r;r]$.

$\Rightarrow \begin{cases} \sum a_n x^n \text{ сход. равном. на } [-r;r] \text{ — см. теорему 1 (Вейерштрасса)} \\ a_n x^n \in C[-r;r] \text{ — т.к. это элементарная функция} \end{cases}$

$\Rightarrow S \in C[-r;r]$ по следствию из теоремы о перестановке предельных переходов $\Rightarrow S \in C(x_0),\ \forall x_0 \in (-R;R)$.

(2) Нам осталось проверить, что $S \in C(R)$.
Для этого достаточно проверить, что $\sum a_n x^n$ сход. равном. на $[0;R]$, а потом опять применить следствие из теоремы о перестановке предельных переходов.

Имеем: $a_n \cdot x^n = a_n \cdot R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$.

Проверим, что выполнены условия признака Абеля равном. сход:

- $\sum a_n R^n$ сход. равном — да, т.к. это вообще числовой ряд
- $\underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)}_{\text{"}q\text{", где } q\le 1}^{n}$ монотонна (non), $\forall$ фикс. x (не обязательно строго)
- $\left|\frac{x}{R}\right|^n \le 1,\ \forall n,\ \forall x \in [0;R] \Rightarrow$ посл-ть $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ равном. ограничена.

$\Rightarrow$ по признаку Абеля равном. сход. $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ сход. равном. на $[0;R]$.
Но $a_n x^n \in C([0;R]) \Rightarrow$ по следствию о перестановке предельных переходов $S \in C([0;R]) \Rightarrow S \in C(R)$.

Зам. Неправильное "док-во" части (2):

$\begin{cases} |a_n x^n| \le |a_n| \cdot R^n \\ \sum a_n R^n \text{ — сход} \end{cases} \overset{\text{по теореме Вейерштрасса}}{\not\Rightarrow} \sum a_n x^n$ сход. на $[0;R]$.

Так мы не можем написать, т.к. нам дано, что ряд $\sum\limits_0^\infty a_n R^n$ сходится, но никто не обещал, что абсолютно.

Следствия (из док-ва теоремы 2)

(1) $\sum a_n x^n$ сход. на $[-R;R] \Rightarrow \sum a_n x^n$ сход. равном. на $[-R;R]$.

(2) Если ряд сход. на $(-R;R)$, т.е. сход. равном $\forall [a;b] \subset (-R;R)$, и мы увидели, что этот ряд сход. в точке R, т.е. сход. на $(-R;R]$, то он будет сход. равном $\forall [a;b] \subset (-R;R]$

Обрати внимание: (1) $f_n \in C;\ f \in C \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f_n \rightrightarrows f$. И для рядов — тоже.

(2) Если ряд сход. равном на $[0;R)$, то числ. ряд будет сходиться в $x=R$ — по теореме о перестановке предельных переходов (действительно, на $[0;R)$ каждый $\sum a_n x^n$ сход. равном, и имеет предел в предельной точке $x=R \Rightarrow$ сходится ряд из пределов).

пункт 3. Сумма и произведение степенных рядов. Комплексные степенные ряды.

Теорема 1. Пусть ряд $\sum_0^\infty a_n x^n$ (1) имеет радиус сходимости R_1, ряд $\sum_0^\infty b_n x^n$ (2) – радиус сходимости R_2; сумма $\sum_0^\infty (a_n+b_n)x^n$ – радиус сходимости R_3; $\sum_0^\infty d_n x^n$ – радиус сходимости R_4 (где $\sum_0^\infty d_n x^n$ – произвольное произведение рядов (1) и (2) – они же оба абс. сход $\Rightarrow$ в произведении члены можно переставлять без ущерба для суммы ряда).

Тогда $R_3; R_4 \geq \min\{R_1; R_2\}$.

▶ • Когда $R = \min\{R_1; R_2\}$, то оба ряда (1) и (2) сход. абс на $(-R; R)$ $\Rightarrow$ и их сумма сход. абс. на $(-R; R)$ $\Rightarrow R_3 \geq \min\{R_1; R_2\}$ – ведь сумма может сходиться где-то ещё.

• когда $R = \min\{R_1; R_2\}$, то оба ряда (1) и (2) сход. абс. на $(-R; R)$, то их произведение сход. на $(-R; R)$ по теореме Абеля о произведении абсолютно сходящихся рядов. И, возможно, произведение сходится где-то ещё $\Rightarrow R_4 \geq \min\{R_1; R_2\}$ ◀

Теперь перейдём к степенным рядам с комплексными членами: рассмотрим степенной ряд $\boxed{\sum_{n=0}^\infty c_n \cdot z^n \ (3)}$, где $c_n \in \mathbb{C}$; $z \in \mathbb{C}$.

Перепишем (и увидим, что они там не переформулируются) уже doказанные теоремы про степенные ряды на случай ряда (3).

Теорема 2 (1-я теорема Абеля)

Пусть ряд (3) сход. в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$; $z_0 \neq (0;0)$.

Тогда ряд (3) сход. абс. в круге $\{|z| < |z_0|\}$. ▶ .... ◀

Теорема 3 ($\exists$ радиуса сходимости)

Для ряда (3) $\exists!$ число или символ $R \in [0; +\infty)$ такое что:

а) ряд (3) сход. абс в круге $\{|z| < R\}$

б) ряд (3) расход. на мн-ве $\mathbb{C} \setminus \{|z| \leq R\}$. ▶ ... ◀

Теорема 4 (вычисление R).

① $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, если этот предел $\exists$

② $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ – этот предел всегда $\exists$. ▶ .... ◀

Теорема 5 (Вейерштрасса)

Пусть $R \in [0; +\infty]$ – радиус сходимости ряда (3).

Тогда ряд (3) сход. равном (и абс) в круге $\{|z| \leq r\}$, $\forall r \in (0; R)$ ▶ ... ◀

Теорема 6 (2-я теорема Абеля)

1) Ряд (3) имеет радиус сходимости $R>0$.

2) $\exists\, z_0 = |z_0|\cdot e^{i\varphi_0} \in \{|z|=R\}$ / ряд $\sum\limits_0^{\infty} c_n z_0^{\,n}$ — сход.

3) $S(z) := \sum\limits_0^{\infty} c_n z^n$; где $z \in \{|z|<R\} \cup \{z_0\}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{\substack{z=|z|\cdot e^{i\varphi_0}\to z_0\\ |z|<R}} S(z) = S(z_0)$ — т.е. предел по направлению радиуса, а не абы какой. Д-во …

(мы будем использовать признак Абеля, но это ничего, т.к. там в усл. $a_n \in \mathbb{C}$; $b_n \in \mathbb{R}$.)

Теорема 7 (сложение и умножение степенных рядов).

$\sum c_n^{(1)} z^n$ — имеет радиус сходимости R_1

$\sum c_n^{(2)} z^n$ — радиус сходимости R_2.

Тогда $\sum (c_n^{(1)} + c_n^{(2)}) z^n$ — радиус сходимости R_3,

а $\sum d_n z^n$, где d_n — любое из произведений — радиус. R_4

Тогда $R_3; R_4 \geq \min\{R_1; R_2\}$.

23. 10.18. Мат. анализ. Лекция 14.

Теорема R (существование R) Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (2) $\exists!$ число или символ $R \in [0;+\infty]$ такое, что:

а) ряд (2) сход. абс для $x \in (-R;R)$

б) ряд (2) расход. на $\mathbb{R} \setminus [-R;R]$.

(что происходит в точках $x = \pm R$ — неизвестно.)

① **Существование R**

Положим $\boxed{M := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ряд (2) сходится в точке } x\}}$. (сход. абс?)

Заметим, что $M \neq \emptyset$, т.к. $0 \in M$.

Положим $\boxed{M^+ := \{y \in [0;+\infty) \mid y = |x| \text{ для } x \in M\}}$

Заметим, что $M^+ \neq \emptyset$, т.к. $0 \in M^+$.

Пусть $\boxed{R := \sup M^+}$ (3) (т.е R — это число, если M^+ огр. сверху и $+\infty$, если M не огр. сверху)

Докажем, что R — требуемое.

а) Докажем, что $\forall x \in (-R;R)$, где R из (3), ряд (2) сход. абс.

- Если $R = 0$ $\Rightarrow M = \{0\} \Rightarrow$ интервала $(-R;R)$ нет, поэтому про него верно всё, что угодно.

- Если $0 < R \le +\infty$ пусть $x \in (-R;R)$. Докажем, что ряд (2) сход. абс в точке x.

Имеем: $|x| < R$, но $R = \sup M^+$

$\Rightarrow \exists\, y \in M^+ \mid |x| < y \le R$ — по опр. точной верхней грани.

но по опр. мн-ва M^+ $\exists\, x_0 \in M \mid y = |x_0|$

$\Rightarrow |x| < |x_0|$, где $x_0 \in M$, т.е в точке x_0 ряд (2) сход.

$\Rightarrow$ по 1-теореме Абеля ряд (2) сход. абс. в точке x. $\Rightarrow x \in M$.

б) Докажем, что $\forall x$ такого, что $|x| > R$, ряд (2) расх.

- Если $R = +\infty$ $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus [-R;R] = \emptyset$, и для него верно всё, что угодно.

- Если $0 \le R < +\infty$ пусть $x \in \mathbb{R}$, причём $|x| > R$.

Докажем, что ряд (2) расход. в точке x.

От противного. Предположим, что ряд (2) сход. в точке x, т.е $x \in M$.

$\Rightarrow |x| \in M^+ \Rightarrow |x| \le \sup M^+ = R$ $\Rightarrow$ против. т.к по выбору $|x| > R$.

② **Единственность R.**

От противного. Пусть $\exists\, R_1 \neq R_2$, для которых верны условия теоремы.

Не ограничивая общности, $R_1 < R_2$.

Рассмотрим $x \in (R_1; R_2)$

Имеем: $\bullet\ |x| < R_2 \Rightarrow x \in M$
$\bullet\ |x| > R_1 \Rightarrow x \notin M$ $\Rightarrow$ против. $\Rightarrow R_1 = R_2$.

Зам. Ряд (2) в граничных точках $x = \pm R$ может как сходиться, так и расходиться. Это зависит от самого ряда.

Опр 2. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (4) существует число или символ $R \in [0; +\infty)$ такой что: $\begin{cases} \text{на интервале } (x_0-R; x_0+R) \text{ ряд (4) сход. абс.} \\ \text{на мн-ве } \mathbb{R} \setminus [x_0-R; x_0+R] \text{ ряд (4) расход.} \end{cases}$

Это R называется радиусом сходимости ряда (4), а интервал $(x_0-R; x_0+R)$ — называется интервалом сходимости.

! 1) Если дали ряд и просят исследовать на абс/усл. сход, то сначала ищем R и говорим, что сход. абс на $(-R; R)$, а потом в точках $x = \pm R$ исслед. на абс/усл. сход.

2) Если просят исследовать на равном. сход, то ищем R, и говорим, что сход. абс $\forall [a;b] \in (-R;R)$, а потом исследуем на сходимость (любую: усл или абс) ряд в точках $x = \pm R$. И если хотя бы в одной, например, ~~сход~~ $x = R$, сход, то сход равном $\forall [a;b] \subset (-R; R]$.

Примеры. (1.) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}}$ — сход. на $[-1;1]$ равном. и абс,

т.к. при $|x| \le 1$: $|a_n| \le \frac{1}{n^2}$, а $\sum \frac{1}{n^2}$ сход $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n^2}\right|$ сход. по Вейерштрассу.

(2.) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}}$ — сход. на $(-1; +1]$: на $(-1;1)$ — абс, в $x = 1$ — усл. но неравном.

Имеем: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow$ сход. абс. на $(-1;1)$

в $x = 1$ — сход. усл по Лейбницу и расход. абс.

в $x = -1$ — расход. т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расход.

Но сходимость неравномерная на $(-1;1)$ т.к. ряд расход. в граничной точке. $x = -1$.

Действительно, пусть $\sum (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ сход. равном. на мн-ве $(-1; +1)$.

Заметим, что $-1 \in X'$, и $\exists \lim\limits_{x\to -1} b_n = -\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ по теореме о перестановке предельных переходов сходится ряд из пределов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ — но он расх $\Rightarrow$ нет равном. сход.

(3.) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};}$ — мн-во сход. $= [-1; 1)$. но сход. неравном.

Имеем: $R = 1 \Rightarrow$ сход. абс на $(-1;1)$

сход. усл. в $x = -1$; расход. в $x = 1$.

Но сход. неравном (т.к. расход. в $x = 1$). А будет сход. равном, если отступить от 1.

④ $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n}$ - мн-во сходимости $(-1;1)$, причём сход. абс, но не равном.

Имеем: в $x=\pm1$ - расход. ; на $(-1;1)$ сход. абс.
Но на $(-1;1)$ сход. неравном, т.к $\sup\limits_{x\in(-1;1)} x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

⑤ $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ - мн-во сходимости $(-\infty;+\infty)$, причём абс. сходимость.

Имеем: по Даламберу: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n} < 1 \Rightarrow$ сход $\forall x \in \mathbb{R}$.

Но он сход. неравном на $(-\infty;+\infty)$.
Докажем, что общий член $\rightrightarrows\!\!\!\!\!/\ 0$.
Действительно: $\sup\limits_{\mathbb{R}} \frac{|x|^n}{n!} \geq \frac{n^n}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\Rightarrow \forall x_0$ общий член сходится (точно?) к нулю, но неравномерно.
$\Rightarrow$ общий член $\rightrightarrows\!\!\!\!\!/\ 0 \Rightarrow$ нет равном. сход, т.к не выполнено необх. усл. сход.

⑥ $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n}$ - мн-во сходимости $=\{0\}$

т.к $\forall x\neq0$ ряд расход. по Даламберу:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)x \longrightarrow \infty$ (бук знака, т.е модуль $\to +\infty$).

Напоминание: (конец I семестра) ← 12 лекция, I семестр.

пусть $(a_n; n\in\mathbb{N})$ - ограничена.

- $S := \{$мн-во точек сгущения$\}$, т.е мн-во точек, в любой окр-ти которой лежит беск. число точек посл-ти.
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \max S$ (т.е мы извлекаем из ограниченной посл-ти сходящиеся подпосл-ть, и смотрим самый большой - т.е самую правую точку сгущения)
- (a_n) не ограничена сверху $\Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$, т.е всегда $\exists$ подпосл-ть $\to +\infty$, т.е в любой окр-ти $+\infty$ содержится беск. много точек.

Теорема (вычисление R)

① $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R}$, если этот предел $\exists$ (6)

② $\boxed{\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}} = R}$ (7) - этот предел всегда $\exists$, т.к если (a_n) ограничена, то $\exists \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$; а если (a_n) не ограничена, то она не ограничена сверху (почему?) $\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = +\infty$.

① $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ - докажем, что R, вычисленное так, удовл. теореме 2.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n x^n$

по признаку Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| \longrightarrow \begin{cases}\frac{|x|}{R}, \text{ если } 0<R<+\infty\\ \infty, \text{ если } R=0\\ 0, \text{ если } R=\infty.\end{cases}$$

если $x\neq 0$. А при $x=0$ – ряд и так сходится.

Имеем:

а) $0<R<+\infty$

проверим, что для $|x|<R$ ряд сход. абс, а для $|x|>R$ – расход.

Действительно,

• если $|x|<R$, то $\frac{|x|}{R}<1 \Rightarrow$ ряд сход. по Даламберу

• если $|x|>R$, то ряд расх, т.к. нарушено необх. усл. сходимости: $u_n\to 0$ (как в док-ве признака Даламбера – см. лекция 3)

действительно: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}<|x| \Rightarrow$ по св-вам посл-тей $\frac{a_n}{a_{n+1}}<|x|,\ \forall n\geq n_0.$

$\Rightarrow a_{n+1}>\frac{a_n}{|x|},\ \forall n\geq n_0$ ~~...~~

$\Rightarrow$ для ряда $\sum\limits_1^\infty a_nx^n$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|>1,\ \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow$ посл-ть $u_n\uparrow,\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ нарушен необх. признак сходимости

$\Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_nx^n$ расход.

б) $R=0$ проверим, что ряд $\sum\limits_1^\infty a_nx^n$ расход. $\forall x$.

Действительно: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\infty \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>|x|,\ \forall n\geq n_0.$

$\Rightarrow$ для ряда $\sum\limits_1^\infty a_nx^n$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|>1,\ \forall n\geq n_0.$

$\Rightarrow$ посл-ть $u_n\uparrow,\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow u_n\not\to 0 \Rightarrow$ нарушен необх. признак сходимости

$\Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_nx^n$ расход.

в) $R=\infty$ $\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}\to 0$, а $0<1 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_1^\infty a_nx^n$ сход. абс. по Даламберу

$\Rightarrow$ все 3 случая удовл. определению R (в смысле, что $\forall x\in(-R;R)$ – ряд сход абс, а $\forall x\in(-\infty;-R)\cup(R;+\infty)$ ряд расход) $\Rightarrow$ ф-ла (6) доказана.

(2) Докажем, что R, вычисленное по ф-ле (7), тоже удовл. определению R.

Обозн. $\rho:=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$

а) $\rho=0 \Rightarrow R=\infty$. Докажем, что ряд $\sum\limits_1^\infty a_nx^n$ сход. $\forall x$

Имеем: $\rho=0$; все $|a_n|\geq 0$, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, но $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ – самая правая точка сгущения, причём все $|a_n|\geq 0 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{|a_n|}=0.$

пусть $x \neq 0$ (в $x=0$ ряд и так понятно, что сходится).

Имеем: $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{q}{|x|}, \forall n>N$, где $q \in (0;1)$

$\Rightarrow |a_n|^{1/n} \cdot |x| < q, \forall n > N$

$|a_n| \cdot |x|^n < q^n, \forall n>N$.

А $\sum_1^\infty q^n$ сход, т.к. $q<1$ $\Rightarrow \sum a_n x^n$ сход. в точке x по мажорантному признаку (а то, что н-во $|a_n|\cdot|x|^n<q^n$ выполнено только $\forall n>N$, нам не мешает, т.к мы исследуем сходимость, а не сумму считаем).

б) $\rho=+\infty \Rightarrow R=0$. Докажем, что ряд $\sum_1^\infty a_n x^n$ расход. $\forall x$.

пусть $x\neq 0$

Имеем: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$

$\Rightarrow$ посл-ть $|a_n|^{1/n}$ не ограничена сверху

$\Rightarrow \exists$ подпосл-ть $(a_{n_k}; k\in\mathbb{N}) \mid |a_{n_k}|^{1/n_k} \to +\infty$

$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid |a_{n_k}|^{1/n_k} \geq \frac{1}{|x|}, \forall k \geq k_0$.

$\Rightarrow |a_{n_k}|^{1/n_k}\cdot|x| > 1, \forall k>k_0$

$\Rightarrow |a_{n_k}|\cdot|x|^{n_k} > 1, \forall k>k_0$

$\Rightarrow \exists$ подпосл-ть, которая $\not\to 0 \Rightarrow a_n \cdot x^n \not\to 0$ при $n\to\infty$

$\Rightarrow$ нарушено необх. усл. сходимости $\Rightarrow \sum a_n x^n$ расх. $\forall x\neq 0 \Rightarrow R$ действительно $=0$.

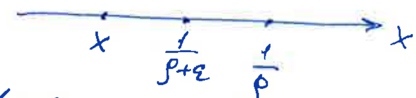
в) $0<\rho<+\infty \Rightarrow 0<R<+\infty$

1) пусть $x \in (-\frac{1}{\rho}; \frac{1}{\rho})$ и $x\neq 0$ (т.к в $x=0$ и так знаем, что ряд сход. абс).

Докажем, что $\sum_0^\infty a_n x^n$ сход. абс. в точке x_0.

Имеем: $|x| < \frac{1}{\rho+\varepsilon}$, для некоторого $\varepsilon>0$ (иначе $|x|\geq\frac{1}{\rho+\varepsilon}$ $\forall\varepsilon>0 \xRightarrow{\text{переходя к пределу}} |x| \geq \frac{1}{\rho}$).

$\Rightarrow |x|\cdot(\rho+\varepsilon) < 1$ (*).



поскольку $\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ = самая правая точка сгущения,

то $\exists N\in\mathbb{N} \mid |a_n|^{1/n} < \rho+\varepsilon, \forall n>N$ (иначе $\exists$ точка сгущения $\geq \rho+\varepsilon>\rho$, что невозможно)

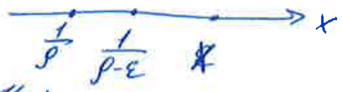
$\Rightarrow |x|\cdot|a_n|^{1/n} < |x|\cdot(\rho+\varepsilon), \forall n>N$

$\Rightarrow |a_n|\cdot|x^n| < \underbrace{(\rho+\varepsilon)^n\cdot|x|^n}_{=:q^n}$ но $0<q<1$ (см *) — мы так ε выбрали

$\Rightarrow \begin{cases} \sum_1^\infty q^n \text{ сходится} \\ |a_n x^n| < q^n \end{cases} \Rightarrow \sum_0^\infty |a_n x^n|$ сход. по теореме Вейерштрасса.

2) пусть $|x| > \frac{1}{\rho}$. Докажем, что $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ расход. в точке x.

Имеем: $\exists \varepsilon > 0 \ / \ |x| > \frac{1}{\rho - \varepsilon}$



но ρ – точка сгущения посл-ти $(|a_n|^{1/n})$

$\Rightarrow \exists$ подпосл-ть $(|a_{n_k}|^{1/n_k}; k \in \mathbb{N}) \ / \ |a_{n_k}|^{1/n_k} \to \rho$.

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} \ / \ |a_{n_k}|^{1/n_k} > \rho - \varepsilon, \ \forall k > K$.

$\Rightarrow |x| \cdot |a_{n_k}|^{1/n_k} > |x| \cdot (\rho - \varepsilon) > 1, \ \forall k > K$

$\Rightarrow |a_{n_k}| \cdot |x|^{n_k} > 1, \ \forall k > K$

$\Rightarrow a_{n_k} \cdot x^{n_k} \underset{k\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow a_n x^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum a_n x^n$ расход. в точке x,

т.к. не выполнено необх. усл. сходимости. ◄

пример $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k^2} \cdot x^{k^2}}$ – сход. на $(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$.

Имеем: $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k^2} \cdot x^{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$, где $a_n = \begin{cases} 5^n, & \text{если } n = k^2 \\ 0, & \text{если } n \neq k^2 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ нету, т.к. в посл-ти a_n есть дырки.

но зато есть верхний предел.

Имеем: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} (5^{k^2})^{1/k^2} = 5$.

$\Rightarrow R = \frac{1}{5} \Rightarrow$ интервал сходимости $= (-\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$

в точке $x = \frac{1}{5}$ $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ – расход.

в точке $x = -\frac{1}{5}$ $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k^2} \cdot \frac{(-1)^{k^2}}{5^{k^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k^2} = (-1) + 1 + (-1) + 1 \dots$ – расход.

Пункт 2. Равномерная сходимость степенного ряда. 2-я теорема Абеля.

Зам. $\boxed{\sum a_n x^n \text{ сход. абс. на } (-R;R) \overset{в.2}{\not\Rightarrow} \sum a_n x^n \text{ сход. равном. на } (-R;R)}$

Например, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. интервал сходимости $= (-1;1)$. И там он сход. абс.

но $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сход. неравном. на $(-1;1)$,

т.к. не выполнено необх. усл: $x^n \not\rightrightarrows 0$, т.к. $\sup_{x\in(-1;1)} x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Теорема 1. пусть $R > 0$ – радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1)

Тогда $\forall r \in (0;R)$ ряд (1) сход. равном. на $[-r;r]$.

Случай $R = 0$ не рассматриваем, т.к. при $R = 0$ есть только числовой ряд, а функцион

19.10.18. Мат. анализ. Лекция 13.

Напоминание: **тождество Абеля** (см. лекция 8)

$a_n \in \mathbb{C}$; $b_n \in \mathbb{R}$; $A_0 := 0$.

Тогда
$$\boxed{\sum_{n=k}^{m} a_n b_n = \sum_{n=k}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1}\cdot b_k, \ \forall m > k \quad (1)}$$

Теорема 2 (признак Дирихле равномерной сходимости функц. рядов)

Пусть $a_n : X \to \mathbb{C}$; $b_n : X \to \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ и выполнены условия:

1) $\exists C > 0 \ / \ \left|\sum_{n=1}^{k} a_n(x)\right| \le C, \ \forall k \in \mathbb{N}; \ \forall x \in X$ – частичные суммы равномерно ограничены.

2) $b_n(x)$ монотонно убывает (возрастает) по n, $\forall x \in X$.

3) $b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сход. равном. на X.

◄ Не ограничивая общности, $b_n \downarrow$.

Будем доказывать равном. сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ по критерию Коши.

Имеем: $\left|\sum_{n=k}^{m} a_n(x) b_n(x)\right| \overset{\text{см. тождество Абеля}}{=} \left|\sum_{n=k}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1}\cdot b_k\right| \le$

$$\le \sum_{n=k}^{m-1} \underbrace{|A_n(x)|}_{\le C} \underbrace{(b_n(x) - b_{n+1}(x))}_{\substack{\ge 0, \text{ т.к. } b\downarrow, \\ \text{поэтому модуль} \\ \text{убрали}}} + \underbrace{|A_m(x)|}_{\le C} \cdot \underbrace{b_m}_{\substack{\ge 0, \text{ т.к. } b\downarrow, \\ \text{и } b \to 0 \\ \text{поэтому модуль} \\ \text{убрали}}} + \underbrace{|A_{k-1}(x)|}_{\le C} \cdot \underbrace{b_k}_{\ge 0} \le$$

$$\le C\left\{\left[(b_k(x) - b_{k+1}(x)) + \ldots + (b_{m-1}(x) - b_m(x))\right] + b_m(x) + b_k\right\} = 2 b_k(x) \cdot C \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \ \text{(равномерно по } x \in X)$$

В итоге:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \ 0 \le b_k(x) < \frac{\varepsilon}{2C}, \ \forall k > N, \ \forall x \in X$ (т.к. $b_k \rightrightarrows 0$ по усл.)

$\Rightarrow \left|\sum_{n=k}^{m} a_n(x) b_n(x)\right| < \varepsilon, \ \forall k > N, \ \forall m > k, \ \forall x \in X$

$\Rightarrow$ по критерию Коши равном. сход. рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сход. равном. на X ►

Примеры: 1. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}; \ x \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]; \ \varepsilon \in (0; \frac{\pi}{2})}$ – сходимость равномерная.

Имеем: • $|A_k(x)| = \left|\sum_{n=1}^{k} \sin nx\right| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \le \frac{1}{|\sin \frac{\varepsilon}{2}|} =: C(\varepsilon)$

т.к. $\frac{x}{2} \in [\frac{\varepsilon}{2}; \pi - \frac{\varepsilon}{2}]$

• $\frac{1}{n}$ монотонно стремится к 0, причём $\frac{1}{n}$ не зависит от $x \Rightarrow$ сходимость равномерная

$\Rightarrow$ по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сход. равном. на $x \in [\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$.

② $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};\ x\in(0;2\pi)}$ – нет равном. сход.

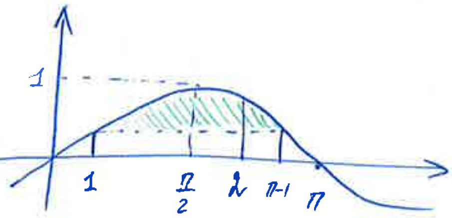
Докажем, что этот ряд сход. неравном. на $x\in(0;2\pi)$.

Отрицание критерия Коши равном. сход:

$\exists\varepsilon>0 \mid \forall N\in\mathbb{N}: \exists k>N; \exists m\in\mathbb{N}; \exists x_n\in(0;2\pi)$ с усл. $\left|\sum_{n=k}^{k+m}\frac{\sin n x_n}{n}\right|\geq\varepsilon$.

положим:
- k – любое число $>N$
- $m=k$
- $x_n := \frac{1}{k}$

$\Rightarrow$ при $n\in[k;2k]$ $\sin n\cdot x_n \in \sin[1;2] \geq \sin 1$



$$\Rightarrow \left|\sum_{n=k}^{2k}\frac{\sin n\cdot\frac{1}{k}}{n}\right| = \left|\underbrace{\frac{\sin 1}{k}+\frac{\sin\frac{k+1}{k}}{k+1}+\dots+\frac{\sin 2}{2k}}_{k+1 \text{ слагаемое}}\right| \geq \frac{k+1}{2k}\cdot\sin 1 \geq \frac{\sin 1}{3} =: \varepsilon$$ $\Rightarrow$ нет равном. сход.

Теорема 3 (признак Абеля равномерной сходимости функц. рядов)

$a_n: X\to\mathbb{C};\ b_n: X\to\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}$, причём выполнены условия:

1) $\sum a_n(x)$ сход. равном на X
2) $b_n(x)\downarrow$ (или $\uparrow$) по n, $\forall x\in X$
3) $\exists c>0 \mid |b_n(x)|\leq c,\ \forall n\in\mathbb{N};\ \forall x\in X$

тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сход. равном. на X.

▲ Будем доказывать по критерию Коши равном. сход.

пусть $\varepsilon>0$ произвольно.

по усл. $\sum a_n(x)$ сход. равном на X

$\Rightarrow \exists N=N(\varepsilon) \mid \left|\sum_{n=k}^{k+m-1}a_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3c},\ \forall k>N;\ \forall m\in\mathbb{N};\ \forall x\in X$.

сделаем замену индекса: $l:=n-k+1$
$\Rightarrow n=l+k-1$

$$\Rightarrow \exists N=N(\varepsilon)\mid \left|\underbrace{\sum_{l=1}^{m} \underbrace{a_{l+k-1}(x)}_{=:\tilde a_l(x)}}_{=:\tilde A_m(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{3c},\ \forall k>N;\ \forall m\in\mathbb{N};\ \forall x\in X.$$

Имеем: $\left|\sum_{n=k}^{m} a_n(x)b_n(x)\right| \overset{(m>k)}{=}$ (замена: $l:=n-k+1$ $\Rightarrow n=l+k-1$) $\left|\sum_{l=1}^{m-k+1}\underbrace{a_{l+k-1}(x)}_{=:\tilde a_l(x)}\underbrace{b_{l+k-1}(x)}_{=:\tilde b_l(x)}\right|$ $\underline{\underline{\text{см. тождество Абеля}}}$

$$= \left|\sum_{l=1}^{m-k}\tilde A_l(x)\underbrace{(\tilde b_l(x)-\tilde b_{l+1})}_{\geq 0} + \tilde A_{m-k+1}(x)\cdot\tilde b_{m-k+1}(x) - \underbrace{\tilde A_0}_{=0}\cdot b_1\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\tilde A_l(x)|}_{<\varepsilon/3c}\left|\left\{(\tilde b_1-\tilde b_2)(x)+\dots+(\tilde b_{m-k}-\tilde b_{m-k+1})(x)+|\tilde b_{m-k+1}(x)|\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{3c}\Big(\underbrace{|\tilde b_1|}_{\leq c}+2\underbrace{|\tilde b_{m-k+1}|}_{\leq 2c}\Big)(x)<\varepsilon,$$ $\forall k>N,\ \forall m\in\mathbb{N};\ \forall x\in X$

Пример $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{x}{n}};\ x\in[\varepsilon; 2\pi-\varepsilon];\ \varepsilon\in(0;\pi)}$ — сход. равном.

Имеем: • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ — сход. равном. по Дирихле

• $e^{-x/n}$ — монотонно (убывает) по n

• $|e^{-\frac{x}{n}}| \le 1$ => равном. ограничена

=> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \cdot e^{-x/n}$ сход. равном. на $[\varepsilon; 2\pi-\varepsilon]$ по признаку Абеля.

Параграф 3. Степенные ряды

Пункт 1. Радиус и интервал сходимости.

Опр. 1 Функциональный ряд $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n;\ x\in\mathbb{R}\ (1)}$ называется **степенным рядом**. Точка x_0 называется **центром** этого ряда.

Зам. 1) Этот ряд — формальная сумма, т.е. он не обязан сходиться

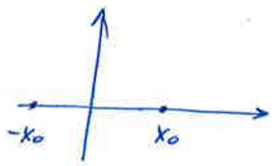
2) Ряд (1) всегда сходится в точке $x=x_0$

3) Заменой $y:=x-x_0$ ряд (1) приводится к виду $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n}$

Поэтому мы будем исследовать только ряды с центром в нуле.

Теорема 1. (1-я теорема Абеля)

Пусть ряд $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \ne 0$.



Тогда этот ряд сходится абсолютно $\forall x\in(-|x_0|;|x_0|)$

(именно на интервале, а не на отрезке, т.к. в x_0 он точно сходится, а в $-x_0$ — непонятно).

◀ Имеем: $\sum_{0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится $\xRightarrow{\text{необх. усл. сход}}$ $a_n \cdot x_0^n \to 0,\ n\to\infty$

но если посл-ть сходится, то она ограничена $\Rightarrow \exists C>0 \mid |a_n x_0^n| \le C$.

Пусть x такое, что $|x|<|x_0|$

Тогда $|a_n \cdot x^n| = \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \cdot |a_n \cdot x_0^n| \le q^n \cdot C$, где $|q| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Поскольку $|q|<1$, то $\sum_{0}^{\infty} q^n C$ сход. (т.к. геом. прогрессия сход. при $|q|<1$)

=> по мажорантному признаку $\sum_{0}^{\infty} a_n x_0^n$ сход. абсолютно $\forall x\in(-|x_0|;|x_0|)$ ▶

Зам. А если отступить на ε от границ, т.е. $x\in(-|x_0|+\varepsilon_1; |x_0|-\varepsilon_2)$, то этот ряд будет равном. сход. по Вейерштрассу. Но нас про это не спрашивали.