Численные методы Лист 1
Контрольная работа

Савин Алексей 409

Задача 1.1

Постр для ур. $y'(x)=f(x)$ разн. схему с наивысш. пор. аппрокс на решении

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}$$

Решение:

Сменка ~~поправки~~ изменим нумерацию:

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = a_1 f_{k+1} - a_0 f_k + a_{-1} f_{k-1}, \quad f_k = f(x_k)$$

$$[y]_{y_h} = \begin{pmatrix} \vdots \\ y(x_k) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad [f]_{F_h} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f(x_k) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Распишем аппроксимацию на решении:

$$\|L_h[y]_h - f_h\|_{F_h} = \max_{x_k} \Big| \frac{y(x_k+h) - y(x_k-h)}{2h} - a_1 f(x_k+h) - a_0 f(x_k) - a_{-1} f(x_k-h) \Big|$$

Ряд Тейл:

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} y'''(x_k) \pm \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_k) + o(h^5)$$

$$f(x_k \pm h) = f(x_k) \pm h f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + o(h^4)$$

Тогда:

$$\|L_h[y]_h - f_h\|_{F_h} = \max_{x_k} \Big| y'(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + O(h^4) -$$

$$- \big((a_1 + a_0 + a_{-1}) f(x_k) + (a_1 - a_{-1}) h f'(x_k) + (a_1 + a_{-1}) h^2 \frac{f''}{2}(x_k) +$$

$$+ (a_1 - a_{-1}) \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + o(h^4)) \Big| =$$

$$= \max_{x_k} \Big| y'(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + o(h^4) - \Big( (a_1 + a_0 + a_{-1}) y'(x_k) +$$

$$+ (a_1 + a_{-1}) h y''(x_k) + (a_1 + a_{-1}) \frac{h^2}{2} y'''(x_k) + (a_1 + a_{-1}) \frac{h^3}{6} y^{IV}(x_k) + o(h^4) \Big) \Big|$$

Чтобы аппроксимация была наивысш. порядка, занулим коэффиц-ты при ~~ст~~ степенях $h$:

$$\begin{cases} 1 - (a_1 + a_0 + a_{-1}) = 0 & : h^0 \\ a_1 + a_{-1} = 0 & : h \\ \frac{1}{6} - \frac{a_1}{2} - \frac{a_{-1}}{2} = 0 & : h^2 \\ \frac{a_1 - a_{-1}}{6} = 0 & : h^3 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6}, \quad a_0 = \frac{2}{3}$$

Проверим: $\| [f]_h - f_h \| \xrightarrow{h \to 0} 0$:

$$\max_{x_k} \Big| f(x_k) - \Big( \frac{1}{6} f(x_k + h) + \frac{2}{3} f(x_k) + \frac{1}{6} f(x_k - h) \Big) \Big| =$$

$$= \max_{x_k} \Big| f(x_k) - \Big( \frac{1}{6} (f(x_k) + o(h)) + \frac{2}{3} (f(x_k)) + \frac{1}{6} (f(x_k) + o(h)) \Big) \Big| =$$

$$= \max_{x_k} |f(x_k)| \cdot \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\Big)}_{0} \to 0 \text{ при } h \to 0$$

$\boxed{\text{Значит } \underline{\text{Ответ:}} \text{ Схема } \frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = \frac{1}{6} f_k + \frac{2}{3} f_{k-1} + \frac{1}{6} f_{k-2} \text{ имеет макс порядок аппрокс. на решении, равный 4.}}$

+

Задача 1.2 Лист 2

Савин
409

Иссл. устойчивость разн. схемы

$$\theta \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + (1-\theta)\frac{y_k-y_{k-1}}{h} = f_k, \quad \theta \in [0,1]$$

Решение:

Характер. ур-е:

$$\theta(\mu^{k+1}-\mu^k) + (1-\theta)(\mu^k-\mu^{k-1}) = 0$$

$$\theta\mu^{k-1}(\mu^2-\mu) + (1-\theta)\cdot\mu^{k-1}(\mu-1) = 0 \quad \Big|:\mu^{k-1}$$

$$\theta(\mu^2-\mu) + (1-\theta)(\mu-1) = 0$$

$$\theta\mu^2 + (1-2\theta)\mu - (1-\theta) = 0$$

$$D = (1-2\theta)^2 + 4(1-\theta)\theta = 1$$

$$\mu_{1,2} = \frac{(2\theta-1)\pm 1}{2\theta} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 1-\frac{1}{\theta} \end{array}\right.$$

Нам нужно: $|\mu_{1,2}| \le 1$ $\quad \left|1-\frac{1}{\theta}\right| \le 1 \Leftrightarrow \theta \in [\frac{1}{2}; 1]$

Заметим, что при $\theta = 0$ имеем:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k$$

Хар ур: $\mu - 1 = 0 \Rightarrow |\mu| = 1 \le 1 \Rightarrow \theta = 0$ тоже подх.

Ответ: $\Rightarrow$ устойчивость будет при $\theta \in [\frac{1}{2}; 1] \cup \{0\}$

## Задача 1.3

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Рассм. схему: $\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = \dfrac{y_{k+1} + y_k}{2}$, $y_0 = 1$, $k \geq 0$

В разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$

Найти пост. $c_1$ для $x_N = h \cdot N = 1$

Решение:

$$y_{k+1}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\right) = y_k\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k \cdot \frac{\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{h} - \frac{1}{2}} = y_k \cdot \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}\right)$$

$$y_N = y_{N-1} \cdot \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}\right) = y_0 \cdot \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}\right)^N = \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}\right)^N$$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \to y(x) = e^x$$

$$y(x_N) - y_N = e^1 - \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - h/2}\right)^N \overset{N = \frac{1}{h}}{=} e - \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - h/2}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= e - e^{\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{h}\ln\left(1 - \frac{h}{2}\right)}$$

$$\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4} + o(h^5) +$$

$$+ \frac{h}{2} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4} + o(h^5) = h + \frac{2}{3}\frac{h^3}{8} + o(h^5) =$$

$$= h + \frac{h^3}{12} + o(h^5)$$

лист 3

Савин 409

$$y(x_N) - y_N = e - e^{1+\frac{h^2}{12}+o(h^4)} =$$

$$= e\left(1 - e^{\frac{h^2}{12}+o(h^4)}\right) = e\left(1 - 1 - \frac{h^2}{12} + o(h^4)\right) =$$

$$= \cancel{e} - \frac{eh^2}{12} + o(h^4) \Rightarrow$$

+

$\Rightarrow$ $e_1 = 0$ (т.к перв член при $h^2$)

$\boxed{\text{Ответ: } e_1 = 0}$

Задача 1.4.

$$\begin{cases} y' + 5y = \sin 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Построить двухточ. разн-схему второго пор-ка сх-ти

Решение:

Хотим воспользоваться теор. Филиппова

Значит, попробуем показать, что есть аппрокс. на решении 2-го пор-ка + $\alpha$ уст.

Берём разностную схему:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\,\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = \frac{f_{k+1} + f_k}{2}, \text{ где } f_k = f(x_k) =$$

$$y_0 = 2 \qquad = \sin 2x_k$$

Операторы проектирования стандартные

Рассмотрим аппроксимацию на решении:

$$\|L_h[y]_h - f_h\| = \max_{x_k}\left|\frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} + 5\,\frac{y(x_k+h)+y(x_k)}{2} - \frac{f(x_k+h)+f(x_k)}{2}\right|$$

Раскладываем:

$$y(x_k+h) = y\left(x_k+\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{24}y''\left(x_k+\frac{h}{2}\right)$$

$$y(x_k) = y\left(x_k+\frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8}y''\left(x_k+\frac{h}{2}\right)$$

Аналогично раскладываем для $f$

Итого: $\max\limits_{x_k}\left|y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right)+o(h^2)+5y\left(x_k+\frac{h}{2}\right)+o(h^2) - \left(f\left(x_k+\frac{h}{2}\right)+o(h^2)\right)\right| = o(h^2)$

$= y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right)+5y\left(x_k+\frac{h}{2}\right)$

$= f(x_k)+o(h)$

$$\|[f]_h - f_h\| = \max_{x_k}\left|f(x_k) - \frac{f(x_k+h)+f(x_k)}{2}\right| = o(h) \to 0$$

при $h\to 0$

Нач условия в точности совпадают

Значит, имеем аппроксимацию на решении 2-го порядка

Осталось проверить $\propto$ устойчивость $+$ лучше $f\left(x_k+\frac{h}{2}\right)$

Пишем характ. ур-е: $\mu - 1 = 0 \Rightarrow |\mu| \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \propto$ устойчива

$\Rightarrow$ Ответ: Разн. схема со вторым порядком сх-ти:

$$\begin{cases}\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h} + \dfrac{5}{2}\,\dfrac{y_{k+1}+y_k}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sin(2kh)+\sin(2(k+1)h)\right)\\ y(0)=2\end{cases}$$

Савин
409

Задача 1.5 Лист 4

Постр аппрокс на реш второго порядка по точкам $x_0=0$ и $x_1=h$ краевого усл $u'(0)-u(0)=0$ для ур $u''-2u=\sin x-1$

Решение:

$$u(h)=u(0)+hu'(0)+\frac{h^2}{2}u''(0)+o(h^3)$$

$$u'(0)=\frac{u(h)-u(0)}{h}-\frac{h}{2}u''(0)+o(h^2)$$

Согласно усл зад имеем:

$$u''(0)-2u(0)=\sin(0)-1=-1$$

$$\Rightarrow u''(0)=2u(0)-1$$

Тогда:

$$u'(0)=\frac{u(h)-u(0)}{h}-\frac{h}{2}u''(0)+o(h^2)=$$

$$=\frac{u(h)-u(0)}{h}-\frac{h}{2}(2u(0)-1)+o(h^2)$$

$$u'(0)-u(0)=\frac{u(h)-u(0)}{h}-\frac{h}{2}(2u(0)-1)-u(0)+o(h^2)$$

Обозначим $u(0)=u(x_0)=u_0$

$u(h)=u(x_1)=u_1$

И тогда, получаем, что

уравнение: $\frac{u_1-u_0}{h}-\frac{h}{2}(2u_0-1)-u_0=0$

аппроксимирует краевое условие $u'(0)-u(0)$ с точн. $o(h^2)$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2}(2u_0 - 1) - u_0 = 0.}$

Задача 1.6

$-u''(x) + pu(x) = f(x)$, $p = const > 0$

$u(0) = a,\ u'(1) = b$ Постр. на неск. слоях разн. схему II-го пор. ск-ти

Решение:

~~Б~~ Рассмотрим схему:

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + py_k = f_k \\ y_0 = a \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = b + \delta \end{cases}$$

~~Расс.~~ Распишем аппроксимацию на решении: $-y''(x_k) + py(x_k)$

$$\| L_h [y]_h - f_h \| = \max_{x_k} \left| -y''(x_k) + O(h^2) + py(x_k) - f(x_k) \right| = O(h^2)$$

$$\| l_h [y]_h - \varphi_h \| = \max_{x_k} \left\{ |\overset{=0}{y(0) - a}|, \left| \frac{y(1) - \overset{y(1) - hy'(1) + y''(1)\frac{h^2}{2} + O(h^3)}{y(1-h)}}{h} - b - \delta \right| \right\} =$$

$$= \left| y'(1) + y''(1)\frac{h}{2} - \delta - b + O(h^2) \right|$$

Берём $\delta = y''(1)\frac{h}{2} = (f(1) - py(1))\frac{h}{2}$

~~Итого схема:~~

Итого схема:

Лист 5

Савин
Алексей
409

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+py_k=f_k \\ y_0=a \\ \dfrac{y_n-y_{n-1}}{h}=b+\dfrac{h}{2}\left(f(1)-py(1)\right) \end{cases}$$

$\| A_h - f_h \| = 0$

Проверяем устойчивость:

Необходимо д-ть, что:

$\| y^1 - y^2 \| \le c \cdot \| f^1 - f^2 \|$, $y^1, y^2$ решения зад

1) $A y^1 = f^1$

2) $A y^2 = f^2$

1-2: $A(y^1-y^2) = f^1 - f^2$ (разн-ть тоже удовл сист. ур-й)

$Ay = f$

То есть надо д-ть, что $\|y\| \le c \cdot \|f\|$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & 0 \cdots 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} \quad 0 \\ & \ddots & \\ 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p \end{pmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\lambda_{min}(A)}$

Собств зн матр А:

$\lambda_{min}(A) = \dfrac{4}{h^2} \sin^2 \dfrac{\pi h}{2} + p \geq \dfrac{4}{\cancel{h^2}} \cdot \dfrac{4}{\pi^2} \dfrac{\cancel{\pi^2 h^2}}{\cancel{4}} + p$

т.к $\sin \beta > \frac{2}{\pi} \beta$ ~~€~~ от 0 до $\frac{\pi}{2}$

Если $Ay = f$, то $y = A^{-1} f \Rightarrow \|y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot f$,

а оценка сверху на $\|A^{-1}\|$ у нас есть т.к $\lambda_{min}(A) \geq 4+p$

• Согласованность норм!

Возьмём $\|u\|_{2,h} = (\Sigma u_i h)^{\frac{1}{2}}$ +

$\|A^{-1}\|_2 \overset{\leq c}{=} \|A^{-1}\|_{2,h}$

$\Rightarrow \|y\|_{2,h} \leq c \cdot \|f\|_{2,h}$

Значит, по Т-И Филиппова: $Ly = f$ (1) $\quad L_h y_h = f_h$ (3)

$ly = \varphi$ (2) $\quad l_h y_h = \varphi_h$ (4)

реш 3-4 сх-ся к реш 1-2 с порядком не ниже чем 2, т.е $\|[y]_h - y_h\| \leq c \cdot h^2$

так как выполняются все необх усл:

1) 1-2 и 3-4 линейны

2) $\exists!$ реш 1-2

3) Есть аппрокс на реш с пор 2

4) Разн сх устойч