

Стохастический анализ

Домашнее задание №1

Будем обозначать буквами $T, S, S_1, \dots, S_n, \dots$ марковские моменты (stopping times), а буквами $U, R, R_1, \dots, R_n, \dots$ — марковские моменты в широком смысле (wide-sense stopping times).

Требуется проверить все нижеперечисленные утверждения.

1. R является \mathcal{F}_{R-} - измеримой функцией; T является \mathcal{F}_{T-} - измеримой функцией.
2. $S \leq T \implies \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.
3. $R \leq U \implies \mathcal{F}_{R-} \subseteq \mathcal{F}_{U-}, \mathcal{F}_{R+} \subseteq \mathcal{F}_{U+}$.
4. $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$.
5. $A \in \mathcal{F}_{S \vee T} \implies A\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T, A\{S < T\} \in \mathcal{F}_T, A\{S = T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$.
6. $\mathcal{F}_S \vee \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \vee T} = \{A \cup B : A \in \mathcal{F}_S, B \in \mathcal{F}_T, AB = \emptyset\}$.
7. $A \in \mathcal{F}_{R+} \implies A\{R < U\} \in \mathcal{F}_{U-}$.
8. $A \in \mathcal{F}_\infty \implies A\{R = \infty\} \in \mathcal{F}_{R-}$.
9. $R \leq U$ и $R < U$ на множестве $\{R < \infty\} \implies \mathcal{F}_{R+} \subseteq \mathcal{F}_{U-}$ (ср. с п. 2).
10. $S \leq T$ и $S < T$ на множестве $\{T > 0\} \implies \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_{T-}$.
11. Если $R = \bigvee_n R_n$ и $U = \bigwedge U_n$, то

$$\mathcal{F}_{R-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{R_n-}, \quad \mathcal{F}_{U+} = \bigwedge \mathcal{F}_{R_n+}.$$

12. Если $S = \bigvee_n S_n$ и для каждого n выполнено $S_n < S$ на множестве $\{0 < S_n < \infty\}$, то

$$\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n}.$$