24.09.20. ВарОПУ. д/з от семинара 3

① a) $\begin{cases} 2x^2-6x-6y-3z \to extr \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$

$\Lambda(x,y) = \lambda_0(2x^2-6x-6y-3z) + \lambda_1(x-y+z) + \lambda_2(5x+y-2z-1)$

$\Lambda'_x = \lambda_0(4x-6) + \lambda_1 + 5\lambda_2$

$\Lambda'_y = -6\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2$

$\Lambda'_z = -3\lambda_0 + \lambda_1 - 2\lambda_2$

$\Rightarrow \begin{cases} (4x-6)\lambda_0 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 6\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_0 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \vec{0}$ – не подх.

Если $\lambda_0 \neq 0$, положим $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = -1$.
для min для max

минимум

Если $\lambda_0 = 1$: $\begin{cases} 4x-6+\lambda_1+5\lambda_2=0 \\ 6+\lambda_1-\lambda_2=0 \\ 3-\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_2 = -9$

$\lambda_1 = \lambda_2 - 6 = -15$

$z = -\frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{15}{2}\lambda_2 + 8 = \frac{45}{2} + \frac{90+45}{2} + 8 = 98$

$y = \dfrac{2z - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{5}{2}\lambda_2 + 3}{2} = \dfrac{180+16+\frac{15}{2}+\frac{45}{2}+3}{2} = \dfrac{196+33}{2} = \dfrac{229}{2}$

$x = y - z = \dfrac{229-196}{2} = \dfrac{33}{2}$

$\Rightarrow A(x, y, z, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 98; 1; -9; -15\right)$

Если $\lambda_0 = -1$ (для максимума)

$$\begin{cases} -4x + 6 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ -6 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -3 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow -4x + 3 + 7\lambda_2 = 0.$

$\Rightarrow x = \frac{3+7\lambda_2}{4} = \frac{3+63}{4} = \frac{66}{4} = \frac{33}{2}.$

$\Rightarrow \lambda_2 = 9 \quad \lambda_1 = 15.$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 9$

$\lambda_1 = \lambda_2 + 6 = 15$

$z = \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{15}{2}\lambda_2 + 8 = \frac{45+90+45}{2} + 8 = 90 + 8 = 98$

$y = \dfrac{2z + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{5\lambda_2}{2} - 3}{2} = \dfrac{196 + \frac{15+45}{2} + 3}{2} = \dfrac{196+33}{2} = \dfrac{229}{2}$

$x = y - z = \frac{229-196}{2} = \frac{33}{2}$

$\Rightarrow B(x, y, z, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 98; -1; 15; 9)$

Считаем гессиан:

$\Delta''_{xx} = 4\lambda_0$

$\Delta''_{xy} = 0; \Delta''_{xz} = 0.$ $\Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 4\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Все остальные $= 0$.

~~конус допустимых вариаций даже считать не надо, т.к гессиан одного знака на всей плоскости.~~

(A.) $= (\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96; 1; -15; -9)$

$\lambda_0 = 1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_{11} = 4$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$ $\Rightarrow$ гессиан ≥ 0.

$\Rightarrow$ вып. необх. усл. locmin, но не вып. дост. усл. locmin

(B) $= (\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96; -1; 15; 9)$

$\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_{11} = -4$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 0$ — не вып. $M_{\alpha\beta} \geq 0 \Rightarrow$ не вып. необх. усл. locmax.

$\Rightarrow$ точка $(\frac{33}{2}; \frac{229}{2}; 96)$ — может быть locmin, но не факт.

считаем конус допустимых вариаций: (стр 2)

$f_1 = x-y+z \Rightarrow df_1 = (1;-1;1)$

$f_2 = 5x+y-2z \Rightarrow df_2 = (5;1;-2)$

$\Rightarrow \begin{cases} h_1 - h_2 + h_3 = 0 \\ 5h_1 + h_2 - 2h_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6h_1 = h_3 \\ h_2 = h_1 + h_3 = h_1 + 6h_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{h} = (h_1;\ 7h_1;\ 6h_1)$

$\Rightarrow$ в точке A: $\lambda_0 = 1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(кандидат на locmin)

$\Rightarrow (h_1\ 7h_1\ 6h_1)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ 7h_1 \\ 6h_1 \end{pmatrix} = (h_1\ 7h_1\ 6h_1)\begin{pmatrix} 4h_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4h_1^2 \geq 0$, причём >0, если $\bar{h} \neq \vec{0}$ (т.е. $h_1 \neq 0$)

$\Rightarrow \left(\frac{33}{2};\ \frac{229}{2};\ 96\right)$ – locmin

в точке B: $\lambda_0 = -1 \Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(кандидат на locmax)

$\Rightarrow (h_1\ 7h_1\ 6h_1)\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ 7h_1 \\ 6h_1 \end{pmatrix} = -4h_1^2 \leq 0$, $\Rightarrow$ не вып. усл. $\geq 0 \Rightarrow$ не locmax

$\Rightarrow \left(\frac{33}{2};\ \frac{229}{2};\ 96\right)$ – locmin

причём он и globmin по следствию из т. Вейерштрасса,

т.к. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 5x+y-2z=1 \end{cases}$ – это прямая, и если выразить отсюда y и z

и подставить в $2x^2-6x-6y-3z$, то будет $f(+\infty) = +\infty$. $\Rightarrow$ достигается globmax.

$S_{min} = 2 \cdot \frac{1089}{4} - \underbrace{3 \cdot 33}_{99} - \underbrace{3 \cdot 229}_{687} - \underbrace{3 \cdot 96}_{288} = 544{,}5 - 1074 = -529{,}5.$

Ответ: $\left(\frac{33}{2};\ \frac{229}{2};\ 96\right) \in$ locmin, globmin

$S_{min} = -529{,}5.$

б) $\begin{cases} xy^2z^3 \to extr \\ x+y+z=1. \end{cases}$

$\Lambda(x,y,z) = \lambda_0(xy^2z^3) + \lambda_1(x+y+z-1)$

$\Lambda'_x = \lambda_0 \cdot y^2z^3 + \lambda_1$

$\Lambda'_y = \lambda_0 \cdot 2xyz^3 + \lambda_1$

$\Lambda'_z = \lambda_0 \cdot 3xy^2z^2 + \lambda_1$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 y^2z^3 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_0 \cdot 2xyz^3 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_0 \cdot 3xy^2z^2 + \lambda_1 = 0 \\ x+y+z=1. \end{cases}$

Если $\lambda_0=0$, то $\lambda_1=0 \Rightarrow \bar{\lambda}=\bar{0}$ – неподх.
$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0=1$

$$\begin{cases} y^2z^3+\lambda_1=0 \\ 2xyz^3+\lambda_1=0 \\ 3xy^2z^2+\lambda_1=0 \\ x+y+z=1. \end{cases} \quad (1)-(2):\ yz^3(y-2x)=0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \\ y=2x. \end{array}\right.$$

Если $y=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow z=1-x \Rightarrow$ все точки $(t,0;1-t)$; $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$.

Если $z=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow y=1-x \Rightarrow$ все точки $(t;1-t;0)$ $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$.

Если $y=2x \Rightarrow \begin{cases} 4x^2z^3+\lambda=0 \\ \cancel{4x^2z^3+\lambda=0} \\ 12x^3z^2+\lambda_1=0 \\ 3x+z=1. \end{cases} \Rightarrow 4x^2z^2(z-3x)=0.$

Если $x=0$, то $z=1 \Rightarrow (0,0,1)$ $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$

Если $z=0$, то $x=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$ $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$.

Если $z=3x$, то $3x+3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{6} \Rightarrow \left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ $\lambda_0=1$, $\lambda_1=-\cancel{4}\cdot\frac{1}{36}\cdot\cancel{9}\cdot\frac{1}{6\cdot6\cdot6}=-\frac{1}{36\cdot6}$.

Пусть $\lambda_0=-1$

$$\begin{cases} -y^2z^3+\lambda_1=0 \\ -2xyz^3+\lambda_1=0 \\ -3xy^2z^2+\lambda_1=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow -yz^2(y-2x)=0.$$

$\Rightarrow$ все те же точки $(t,0;1-t)$
$(t;1-t;0)$
$(0,0,1)$ и $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$,
только $\lambda_0=-1$; $\lambda_1=0$.

Считаем конус и гессиан.

Конус: $f_1=x+y+z-1$
$df_1=(1;1;1) \Rightarrow$ конус: $h_1+h_2+h_3=0 \Rightarrow h_3=-h_1-h_2$
$\Rightarrow \bar{h}=(h_1;h_2;-h_1-h_2)$

Гессиан. $\Lambda''_{xx}=0$; $\Lambda''_{xy}=2\lambda_0 yz^3$ $\Lambda''_{xz}=3\lambda_0 y^2z^2$
$\Lambda''_{yy}=2\lambda_0 xz^3$ $\Lambda''_{yz}=6\lambda_0 xyz^2$
$\Lambda''_{zz}=6\lambda_0 xy^2z$

$$\Rightarrow \Gamma=\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda_0 yz^3 & 3\lambda_0 y^2z^2 \\ 2\lambda_0 yz^3 & 2\lambda_0 xz^3 & 6\lambda_0 xyz^2 \\ 3\lambda_0 y^2z^2 & 6\lambda_0 xyz^2 & 6\lambda_0 xy^2z. \end{pmatrix}$$

$\lambda_0 = 1$ точка $(0;0;1)$

$$\Rightarrow (h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=0$$

– вып. необх, но не дост. усл. locmin.
не явл locextr, т.к $xy^2z^3|_{(\varepsilon;\varepsilon;1)}=\varepsilon^3>0$
$xy^2z^3|_{(-\varepsilon;\varepsilon;1)}=-\varepsilon^3<0$.

точка $(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0)$

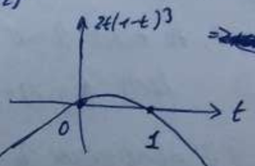
$$\Rightarrow (h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=0.$$

– тоже не вып. дост, но вып. необх
но не явл, т.к $xy^2z^3|_{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\varepsilon}=\frac{4}{27}\varepsilon^3>0$
$xy^2z^3|_{\frac{1}{3}\frac{2}{3}-\varepsilon}=-\frac{4}{27}\varepsilon^3<0$

точки $(t;0;1-t)$

$$(h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2t(1-t)^3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=(0;h_2\cdot 2t(1-t)^3;0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=h_2^2\cdot 2t(1-t)^3$$

– похоже на locmin
но ведь при $h_2=0$ будет $=0$?
при $t\in[0,1]$ – бывает и >0
и <0 при $t\notin[0,1]$
$\Rightarrow$ ~~не locmin~~ ⇓
при $t\notin[0,1]$ – не locmin.



точки $(t;1-t;0)$

$$(h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=0.$$

– тоже не вып. дост усл, но вып. необх усл.
$xy^2z^3|_{(t;1-t;0)}=0$.
но $xy^2z^3|_{(t;1-t;\varepsilon)}=t(1-t)\varepsilon$ и $xy^2z^3|_{(t;1-t;-\varepsilon)}$ – имеют разные знаки $\Rightarrow$ не locmin, не locmax

$\lambda_0 = -1$ точки $(t;0;1-t)$

$$(h_1;h_2;-h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2t(1-t)^3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=-2h_2^2\cdot \underbrace{t(1-t)^3}_{<0 \text{ при } t\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)}$$

– похоже на locmax

ещё точка $(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2})$

$\lambda_0 = 1$

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0 & 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{}{4} & 3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\\ \frac{1}{12} & 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} & 6\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{4}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{12}&\frac{1}{12}\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{24}&\frac{1}{12}\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{12}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

$$(h_1\ h_2\ -h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{12}&\frac{1}{12}\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{24}&\frac{1}{12}\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{12}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=\left(-\frac{h_1}{12};-\frac{h_1}{24};\frac{1}{36}(h_1+h_2)\right)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=-\frac{h_1^2}{12}-\frac{h_1h_2}{24}-\frac{1}{36}(h_1+h_2)^2=$$

$$=\frac{-6h_1^2-3h_1h_2-2h_1^2-4h_1h_2-2h_2^2}{72}=\frac{-8h_1^2-7h_1h_2-2h_2^2}{72}=$$

$$=\frac{-8(h_1+\frac{7}{16}h_2)^2-\frac{120}{256}h_2^2}{72}<0.$$

$\Rightarrow$ не locmin

$\lambda_0 = -1$

$$(h_1\ h_2\ -h_1-h_2)\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{12}&-\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12}&-\frac{1}{24}&-\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12}&-\frac{1}{12}&-\frac{1}{18}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-h_1-h_2\end{pmatrix}=\frac{8(h_1+\frac{7}{16}h_2)^2+\frac{120}{256}h_2^2}{72}>0, \text{ если } \bar{h}\neq 0$$

$\Rightarrow$ это locmax.

Ответ. $(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ – locmax
$(t;0;1-t)$ – locmin при $t\in[0,1]$
$(t;0;1-t)$ – locmax при $t\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

$S_{min}=-\infty$
$S_{max}=+\infty$

в) $\begin{cases} xy^2z^3 \to extr \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

$\Lambda(x,y,z) = \lambda_0(xy^2z^3) + \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)$

$\Lambda'_x = \lambda_0 y^2z^3 + 2\lambda_1 x$

$\Lambda'_y = 2\lambda_0 xyz^3 + 2\lambda_1 y$

$\Lambda'_z = 3\lambda_0 xy^2z^2 + 2\lambda_1 z$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 y^2z^3 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2\lambda_0 xyz^3 + 2\lambda_1 y = 0 \\ 3\lambda_0 xy^2z^2 + 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то либо $\lambda_1 = 0$ — не подх, т.к. тогда $\bar{\lambda} = (\lambda_0\ \lambda_1) = \bar{0}$

либо $(x,y,z) = (0,0,0)$ — не подх, т.к. тогда (x,y,z) не уровн. $x^2+y^2+z^2=1$.

Если $\lambda_0 \neq 0$, положим $\lambda_0 = 1$ ~~(а можно $\lambda_0 = -1$) но можно это и не делать, т.к. при $\lambda_0 = -1$ просто λ_1 поменяет знак, и гессиан тоже просто поменяет знак).~~

$\Rightarrow \begin{cases} y^2z^3 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2xyz^3 + 2\lambda_1 y = 0 \\ 3xy^2z^2 + 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$ $\Rightarrow 2y(xz^3+\lambda_1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ xz^3 = -\lambda_1 \end{array}\right.$

~~$\Rightarrow z(3xy^2z + 2\lambda_1) = 0.$~~

$\lambda_0 = -1$ можно и не класть, а проверять тогда ≤ 0 - эквивалентно

• Если $y=0$, то $\begin{cases} 2\lambda_1 x = 0 \\ 0=0 \\ 2\lambda_1 z = 0 \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0$; $z^2 = 1-x^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow (t; 0; \sqrt{1-t^2})$; $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0$

$(t; 0; -\sqrt{1-t^2})$; $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0$

• Если $xz^3 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -xz^3$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2z^3 - 2x^2z^3 = 0 \\ 0 = 0. \\ 3xy^2z^2 - 2xz^4 = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow z^3(y^2-2x^2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ y^2 = 2x^2. \end{array}\right.$

~~$\Rightarrow xz^2(3y^2-2z^2)=0.$~~

* Если $z=0$, то $\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow (t; \sqrt{1-t^2}; 0)$ $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0$

$(t; -\sqrt{1-t^2}; 0)$ $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0.$

* Если $y^2 = 2x^2$, то $\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 6x^3z^2 - 2xz^4 = 0 \\ 3x^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow 2xz^2(3x^2-z^2) = 0.$

✓ Если $x=0 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow$ $(0;0;1)$, $(0;0;-1)$ $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0.$

✓ Если $z=0$, то $x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0\right)$

$\lambda_1 = -xz^3$

✓ Если $3x^2 - z^2 = 0$, то $\begin{cases} 3x^2-z^2=0 \\ 3x^2+z^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow 6x^2 = 1 \Rightarrow$ $\left(x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}; y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; z = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)$ $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -xz^3$

$\left(\frac{1}{\sqrt6}; \frac{\sqrt2}{\sqrt6}; \frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$ $\lambda_1 = -xz^3 = -\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{3\sqrt3}{6\sqrt6} = \frac{-3\sqrt3}{36} = \frac{-\sqrt3}{12} = -\frac{1}{4\sqrt3}$ сл. 4

$\Rightarrow 2\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt3}$

$$\text{гессиан} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 2\lambda_0 y z^3 & 3\lambda_0 y^2 z^2 \\ 2\lambda_0 y z^3 & (2\lambda_0 x z^3 + 2\lambda_1) & 6\lambda_0 x y z^2 \\ 3\lambda_0 y^2 z^2 & 6\lambda_0 x y z^2 & 6\lambda_0 x y^2 z + 2\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt3} & \cancel{2\frac{\sqrt2}{\sqrt6}\cdot\frac{3\sqrt3}{6\sqrt6}} & 3\cdot\cancel{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \cancel{\frac{2\cdot 1}{\sqrt6}\cdot\frac{3\sqrt3}{6\sqrt6} - \frac{1}{2\sqrt3}} \to 0 & \cancel{6}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt6}\cdot\frac{3}{\cancel{6}} \\ \frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & \cancel{6}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt6} - \frac{1}{2\sqrt3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac12 \\ \frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{2\sqrt3} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \frac{1}{2\sqrt3} < 0$

$M_{12} = -\frac{1}{6} < 0$

$M_{13} > 0$

$\Rightarrow$ матрица не знакоопр. на всей плоскости. Но на конусе она знакоопр!

конус: $df_1 - (2x; 2y; 2z)$

$\Rightarrow h_1 x + h_2 y + h_3 z = 0.$

$\Rightarrow h_1 + \sqrt2 h_2 + \sqrt3 h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = -\frac{h_1}{\sqrt3} - \frac{\sqrt2}{\sqrt3} h_2$

$\Rightarrow h = \left(h_1; h_2; -\frac{h_1}{\sqrt3} - \frac{\sqrt2}{\sqrt3} h_2\right)$

$$\Rightarrow \left(h_1; h_2; -\frac{h_1}{\sqrt3} - \frac{\sqrt2}{\sqrt3}h_2\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac12 \\ \frac{1}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{2\sqrt3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -\frac{h_1}{\sqrt3} - \frac{\sqrt2}{\sqrt3}h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{h_1}{2\sqrt3} + \cancel{\frac{h_2}{\sqrt6}} - \frac{h_1}{2\sqrt3} - \cancel{\frac{1}{\sqrt6}h_2}; \cancel{\frac{h_1}{\sqrt6}} - \cancel{\frac{h_1}{\sqrt6}} - \frac{h_2}{\sqrt3}; \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{\sqrt2} - \frac{h_1}{6} - \frac{h_2}{3\sqrt2}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -\frac{h_1}{\sqrt3} - \frac{\sqrt2}{\sqrt3}h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{h_1}{\sqrt3}; -\frac{h_2}{\sqrt3}; \frac{h_1}{3} + \frac{\sqrt2}{3}h_2\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -\frac{h_1}{\sqrt3} - \frac{\sqrt2}{\sqrt3}h_2 \end{pmatrix} = -\frac{h_1^2}{\sqrt3} - \frac{h_2^2}{\sqrt3} - \frac{1}{\sqrt3}\cdot\left(\frac{h_1}{\sqrt3} + \frac{\sqrt2}{\sqrt3}h_2\right)^2 \le 0,$$

причем < 0, если $\bar h \ne \bar 0$.

$\Rightarrow$ это – locmax.

Это и absmax, т.к огр. обл $= \{x^2+y^2+z^2=1\}$ – компакт.

Так же надо посчитать действие гессиана на конусе для оставшихся 7 точек. Можно сразу для всех попробовать посчитать, в общем виде.

восьми точек $\left(\pm\frac{1}{\sqrt6}; \pm\frac{\sqrt2}{\sqrt6}; \pm\frac{\sqrt3}{\sqrt6}\right)$

$h_1 x + h_2 y + h_3 z = 0 \Rightarrow h_3 = -\frac{x}{z}h_1 - \frac{y}{z}h_2$

$\Rightarrow h = \left(h_1; h_2; -\frac{x}{z}h_1 - \frac{y}{z}h_2\right)$

$\lambda_1 = -xz^3$

$$\Rightarrow \bar h^T \Gamma \bar h^* = \left(h_1, h_2, -\frac{x}{z}h_1 - \frac{y}{z}h_2\right)\begin{pmatrix} -2xz^3 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \\ 2yz^3 & \cancel{2xz^3 - 2xz^3} \to 0 & 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 & 6xyz^2 & 6xy^2z - 2xz^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -\frac{x}{z}h_1 - \frac{y}{z}h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-2xz^3h_1 + 2yz^3h_2 - 3xy^2zh_1 - 3y^3zh_2; 2yz^3h_1 + 0 - 6x^2yzh_1 - 6xy^2zh_2; 3y^2z^2h_1 + 6xyz^2h_2 + (6xy^2z - 2xz^3)\left(-\frac{x}{z}h_1 - \frac{y}{z}h_2\right)\right) \times \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$z^2 = \frac{3}{6}; y^2 = \frac{2}{6}$

$$= \left(-xzh_1(\underbrace{2z^2+3y^2}_{=2}) + yzh_2(\underbrace{2z^2-3y^2}_{=0}); 2yzh_1(\underbrace{z^2-3x^2}_{=0}) - 6xy^2zh_2; 3y^2z^2h_1 + 6xyz^2h_2 - (6xy^2z - 2xz^3)\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right)\right) =$$

$$= \left(-2xzh_1; -6xy^2zh_2; 3y^2z^2h_1 + 6xyz^2h_2 - (6xy^2z - 2xz^3)\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -\frac{x}{z}h_1 - \frac{y}{z}h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2xzh_1^2 - 6xy^2zh_2^2 - \Big(\underbrace{3y^2 \overset{=3x^2}{z^2} h_1 + \overset{=3xy\cdot(2z^2)=3y^2}{6xyz^2 h_2}}_{} - (6xy^2z - 2xz^3)\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right)\Big)\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right) =$$

но $3x^2 = z^2$, $2z^2 = 3y^2$

$$\| \quad 9x^2y^2h_1 + 9xy^3h_2$$

$$\| \quad 9xy^2(xh_1 + yh_2)$$

$$\| \quad 9xy^2z\left(\frac{xh_1}{z} + \frac{yh_2}{z}\right)$$

$$= -2xzh_1^2 - 6xy^2zh_2^2 - \left(9xy^2z\left(\frac{xh_1}{z} + \frac{yh_2}{z}\right) - (6xy^2z - 2xz^3)\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right)\right)\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right) =$$

$$= -2xzh_1^2 - 6xy^2zh_2^2 - \underbrace{(3xy^2z + 2xz^3)}_{=xz(\underbrace{3y^2+2z^2}_{=2})}\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right)^2 =$$

$$= -2xzh_1^2 - 6xy^2zh_2^2 - 2xz\left(\frac{x}{z}h_1 + \frac{y}{z}h_2\right)^2 \quad \begin{cases} \le 0, \text{ если } xz > 0 \\ \ge 0, \text{ если } xz < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ от знака y ничего не зависит, а зависит от знака xz.

Если $xz > 0$, то будет locmax $\Rightarrow \left(\frac{1}{6}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \in$ locmax (и absmax, т.к. $x^2+y^2+z^2=1$ - компакт)

Если $xz < 0$, то будет locmin $\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \in$ locmin (и absmin тоже.)

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; 0\right)$ гессиан $\equiv 0$, но они не locextr, т.к.

$(0,0,1)$ $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0$ - гессиан $\equiv 0$, не locextr

$(0,0,-1)$ $\lambda_0 = 1$; $\lambda_1 = 0$ - гессиан $\equiv 0$, не locextr

(т.к. значение целевой ф-ции в этих точках $= 0$, но шевелением нулевых коорд. можно это значение сделать и >0, и <0.)

$t; 0; \sqrt{1-t^2}$
$t; 0; -\sqrt{1-t^2}$ т.е. $(x_1; 0; x_3)$ при усл. $x_1^2 + x_3^2 = 1$.

$$\text{гессиан} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h^T \Gamma h = x_1x_3^2h_2^2 \overset{?}{>} 0 \Rightarrow \text{locmin при } x_1x_3 > 0, \text{ locmax при } x_1x_3 < 0.$$

но ведь при $h_2 = 0$, $h_1 \ne 0$ - может быть $= 0$, хотя $\bar{h} \ne \bar{0}$?

$t; \sqrt{1-t^2}; 0$
$t; -\sqrt{1-t^2}; 0$ т.е. $(x_1; x_2; 0)$ при усл. $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

гессиан $\equiv 0$, но не locextr

<u>Ответ:</u> $(x_1; 0; x_3) \in$ locmin при $x_1x_3 > 0$ и $x_1^2 + x_3^2 = 1$

$(x_1; 0; x_3) \in$ locmax при $x_1x_3 < 0$ и $x_1^2 + x_3^2 = 1$.

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \in$ absmin (т.к. locmin + $x^2+y^2+z^2=1$ - компакт)

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) \in$ absmax