Начало: 12:40

Контрольная работа

Сперанский Павел

409

№1.1.

Построить для уравнения $y'(x)=f(x)$ разностную схему с наивысшим порядком аппроксимации на решении $\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}$

Решение: для удобства $k \to k+1 \Rightarrow$

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = a_1 f_{k+1} + a_0 f_k + a_{-1} f_{k-1}$$

Хотим $\| L_h [y]_h - f_h \|_h \leq C h^p$

$\| [f]_h - f_h \| \to 0,\ h \to 0$

$y_k = y(x_k)$

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x_k) + O(h^5)$$

Также для $f(x_k + h)$

$$\frac{y(x_k+h) - y(x_k-h)}{2h} = a_1 f(x_k+h) + a_0 f(x_k) + a_{-1} f(x_k-h)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y(x_k) - y(x_k) + 2h y'(x_k) + \frac{h^3}{3} y'''(x_k) + O(h^5)}{2h} =$$

$$= (a_1 + a_0 + a_{-1}) f(x_k) + (a_1 - a_{-1}) h f'(x_k) + (a_1 + a_{-1}) \frac{h^2}{2} f''(x_k) + (a_1 - a_{-1}) \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + O(h^4)$$

$$\Rightarrow y'(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + O(h^4) =$$

$$= (a_1 + a_0 + a_{-1}) f(x_k) + (a_1 - a_{-1}) h f'(x_k) +$$

$$+ (a_1 + a_{-1}) \frac{h^2}{2} f''(x_k) + (a_1 - a_{-1}) \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + O(h^4)$$

Апр на решении $\Rightarrow$ имеем право $y'(x_k) = f(x_k)$

и $y'' = f'$, $y''' = f''$, $y^{IV} = f'''$

Коэф:
$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_0 + a_{-1} \\ a_1 - a_{-1} = 0 \\ \frac{1}{6} = \frac{a_1 + a_{-1}}{2} \\ a_1 - a_{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5/6 \\ a_1 = a_{-1} \\ a_1 = 1/6 \\ a_1 = a_{-1} \end{cases}$$

+

Ответ: $a_0 = \frac{5}{6}$, $a_1 = \frac{1}{6} = a_{-1}$, $p = 4$

№1.2

Исследовать устойчивость разностной схемы $\theta\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+(1-\theta)\frac{y_k-y_{k-1}}{h}=f_k$

$\theta\in[0;1]$

Решение: $y_k=\mu^k \Rightarrow \theta\mu^2-\theta\mu+(1-\theta)(\mu-1)=0$

При $\theta=0$ $\mu=1$ – верно

При $\theta\neq0$: $\theta\mu^2+(1-2\theta)\mu+\theta-1=0$

$$D=(1-2\theta)^2-4\theta(\theta-1)=1-4\theta+4\theta^2-4\theta^2+4\theta=1$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2}=\frac{-1+2\theta\pm1}{2\theta}=\left[\begin{array}{l}1\\ \frac{\theta-1}{\theta}\end{array}\right.$$

Проверим, принадлежит ли $\frac{\theta-1}{\theta}$ ед. кругу:

$$\left|\frac{\theta-1}{\theta}\right|\le1 \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{\theta}\right|\le1 \Leftrightarrow -1\le1-\frac{1}{\theta}\le1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{\theta}\le2 \Leftrightarrow \theta\ge\frac{1}{2}$$

+

Ответ: $\theta\in\{0\}\cup[\frac{1}{2};1]$

№1.3

Для задачи $y'=y$, $y(0)=1$ рассм. схему $\frac{y_{n+1}-y_n}{h}=\frac{y_{n+1}+y_n}{2}$, $y_0=1$, $k\ge0$. В разложении ошибки $y(x_N)-y_N=c_1h+c_2h^2\ldots$ найдите $c_1$ для $x_N=Nh=1$

Решение: $y_{k+1}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{2}\right)=y_k\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)$

$$y_{k+1}=y_k\,\frac{\frac{1}{h}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{h}-\frac{1}{2}}=\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}$$

$$\Rightarrow y_N=y_{N-1}\cdot\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}=y_0\left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)^N$$

$$\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}\Rightarrow y(x)=e^x$$

Т.о. $y(x_N)-y_N=e-e^{\frac{1}{h}\ln\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}}$

$$\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{h}{2}\right)=\frac{h}{2}-\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3-\cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4}+\underline{O}(h^5)+$$

$$+\frac{h}{2}+\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3+\cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4}+\underline{O}(h^5)=$$

$$=h+\frac{2}{3}\cdot\frac{h^3}{8}+\underline{O}(h^5)\Rightarrow$$

$$y(x_N)-y_N=e-e^{1+\frac{h^2}{12}+\underline{O}(h^4)}=$$

$$=e\left(1-e^{\frac{h^2}{12}+\underline{O}(h^4)}\right)=e\left(1-1-\frac{h^2}{12}+\underline{O}(h^4)\right)=$$

$$=-\frac{eh^2}{12}+\underline{O}(h^4)\Rightarrow c_1=0$$

+

N 1.4

Для задачи $y'+5y=\sin 2x$, $y(0)=2$ - построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости

Решение: сетка $x_k = kh$ и р. схема:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + 5\,\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = f_k,\ \text{где}$$

$$f_k = \frac{f(x_{k+1})+f(x_k)}{2} = \frac{\sin(2h(k+1))+\sin(2kh)}{2}$$

1) Проверим аппр. на решении:

сеткой $y(x_k)=y_k$ и

$$\frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h} + 5\,\frac{y(x_k+h)+y(x_k)}{2} \overset{\text{Т. } x_k+\frac{h}{2}}{=} \frac{y(x_k+\frac{h}{2})+\frac{h}{2}y'(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8}y''(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^3) - y(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h}{2}y'(x_k+\frac{h}{2}) - \frac{h^2}{8}y''(x_k+\frac{h}{2})}{h} + 5\,\frac{2y(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{4}y''(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^3)}{2} =$$

$$= y'(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^2) + 5y(x_k+\frac{h}{2}) = f(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^2)$$

Т.о. $\underbrace{y'(x_k+\frac{h}{2}) + 5y(x_k+\frac{h}{2})}_{=f(x_k+\frac{h}{2})} = f(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^2)$ $\Rightarrow$ аппр. на реш. с пор. $O(h^2)$

2) проверим ~~устойчивость~~

$$y^k = \mu^k \Rightarrow \boxed{\frac{\mu-1}{h}} = 0 \quad \frac{\mu-1}{h} + \frac{5}{2}\mu - \frac{5}{2} = 0$$

$$\mu\left(\frac{1}{h}+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{h} + \frac{5}{2} \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \text{устойчив.}$$

№1.5

Построить аппроксимацию на решениях второго порядка по точкам $x_0 = 0$ и $x_1 = h$ краевого условия $u'(0) - u(0) = 0$ для уравнения

$u'' - 2u = \sin x - 1$

Решение: вся $\frac{u_1 - u_0}{h} - u_0 = \delta$

Хотим: $l_h[u]_h - \varphi_h = O(h^2)$

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} - u(0) - \delta = O(h^2)$$

$$u(h) = u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O(h^2)$$

Т.о.

$$u'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) - u(0) - \delta = 0$$

$$u'(0) - u(0) = 0 \Rightarrow \delta = \frac{h}{2}u''(0)$$

Подст. $u'' - 2u = \sin x - 1$

$u'' = 2u + \sin x - 1$

$u''(0) = 2u(0) - 1 \Rightarrow \delta = \frac{h}{2}(2u(0) - 1)$

Тогда $\boxed{\frac{u_1 - u_0}{h} - u_0 = \frac{h}{2}(2u_0 - 1)}$ и $l[u]_h - \varphi_h = 0 - hu_0 - \frac{h}{2} \underset{h \to 0}{\to} 0$

Ответ ↑

№1.6.

Решение: хотим $\|L_h[y]_h - f_h\| =$

$= \max\limits_h |-y''(x_k) + \underline{O}(h^2) + p\,y(x_k) - f(x_k)| =$
$= O(h^2)$

Имеем $\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p y_k = f_k \\ y_0 = a \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = b + \delta \end{cases}$

$+$

хотим $\|l_h[y]_h - g_h\| = \max\{|y(0) - a|,$

$|\dfrac{y(1) - y(0)}{h} - b - \delta|\}$

Конец. 14:35