Контрольная работа 1

Задача 1. Пусть Ω – открытое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть
$$Lu = \Delta u + \langle b, \nabla u\rangle + cu,$$
где b, c — гладкие функции на Ω. Предположим, что существует такая функция w, что $w > 0$ и $Lw \leq 0$ на Ω. Докажите, что если $Lu \geq 0$, то u не может иметь неотрицательный максимум внутри Ω, кроме случая, когда u постоянная функция.

Задача 2. Докажите, что если граница $\partial\Omega$ ограниченной области Ω является гладкой (класса C^2) поверхностью, то построенное методом Перрона решение задачи Дирихле
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, u|_{\partial\Omega} = g,$$
где $g \in C(\partial\Omega)$, продолжается по непрерывности до функции $C(\overline{\Omega})$ и на границе совпадает с функцией g.

Задача 3. Пусть Ω – открытое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть f — ограниченная липшицева функция на $\mathbb{R}$, причем $f(0) = 0$ и $f'(0) > \lambda_1$, где λ_1 — главное собственное значение оператора Лапласа $-\Delta$ на Ω с нулевыми граничными значениями. Применяя метод субрешений и суперрешений обоснуйте существование положительного внутри Ω решения u задачи Дирихле $-\Delta u \geq f(u)$ в Ω и $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Задача 4. Используя метод характеристик решите задачу Коши
$$uu_{x_1} + u_{x_2} = 1, \quad u(x_1, x_1) = x_1/2.$$

Задача 5. Выясните, какие из следующих задач $u_t + f'(u)u_x = 0$, $u|_{t=0} = u_0$, имеют гладкое решение на всей полуплоскости $t > 0$, а какие – не имеют гладких решений ни в какой полосе $0 < t < \tau$: (a) $f(u) = \cos u$, $u_0(x) = \sin x$, (b) $f(u) = u^4$, $u_0(x) = x$, (c) $f(u) = u^4$, $u_0(x) = -x$.

Задача 6. Пусть Ω – открытое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ и на Ω задана функция
$$u(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y\in\partial\Omega} |x - y|.$$
Докажите, что u — вязкостное решение уравнения $|Du| = 1$ в Ω.

Задача 7. Докажите, что
$$u_s(x) = \tfrac{1}{4}\max\{0, s - |x|\}^2$$
для каждого $s \in [0, 1]$ является вязкостным решением уравнения $|Du| - \sqrt{u} = 0$ в шаре $|x| < 1$ и $u = 0$ при $|x| = 1$. Таким образом, задача Дирихле для данного уравнения имеет континуально много различных вязкостных решений.

Надо решить любые четыре задачи и прислать решения до первого ноября!