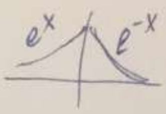
07.09.20. Спецкурс Булинская, дз 4 Токаева Александра 409

(1.) Пусть $f_X(x) = \dfrac{e^{-\left|\frac{x}{\theta}\right|}}{2\theta}$; $x\in(-\infty;+\infty)$; $\theta>0$



Найти распр. $Y = e^X$.

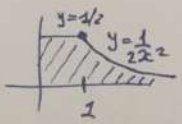
Решение: $F_Y(x) = P(Y\le x) = P(e^X\le x) = P(X\le \ln x) = F_X(\ln x)$

$$\Rightarrow f_Y(x) = F_X'(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{f_X(\ln x)}{x};\ x>0.$$

$\Rightarrow$ в нашем случае
$$f_Y(x) = \frac{f_X(\ln x)}{x} = \frac{e^{-\left|\frac{\ln x}{\theta}\right|}}{2x\theta} \underset{\substack{x>0\\ \theta>0\\ \text{(т.к. плотность}>0)}}{=} \frac{e^{\frac{\ln x}{\theta}}}{2x\theta}\cdot I(x\in(0,1)) + \frac{e^{-\frac{\ln x}{\theta}}}{2x\theta}\cdot I(x\ge 1) =$$

$$= \frac{x^{1/\theta}}{2x\theta}\cdot I(x\in(0,1)) + \frac{x^{-\frac{1}{\theta}}}{2x\theta}\cdot I(x\ge1) = \frac{1}{2\theta}\left(x^{\frac{1}{\theta}-1}\cdot I(x\in(0,1)) + x^{-\frac{1}{\theta}-1}\cdot I(x\ge 1)\right)$$

Например, для $\theta=1$:



(2.) Будет ли свёртка составных пуас. распр снова сост. пуас. распр?

Решение: что такое сост. пуас. распр:

$\tilde N = \sum_{k=1}^{N} M_k$, причём $N\sim Pois$

$P_{\tilde N}(z) = Ez^{\tilde N}$ – произв. ф-ция $\tilde N$

$P_N(z) = Ez^N$ – произв. ф-ция N, т.е. первичного распр.

$P_{M_k}(z) = Ez^{M_k}$ – произв. ф-ция M_k, т.е. вторичного распр.

Проверим, что $P_{\tilde N}(z) = P_N(P_{M_k}(z))$

Имеем:
$$P_{\tilde N}(z) = Ez^{\sum_{k=1}^{N} M_k} = E\left(z^{\sum_{k=1}^{N} M_k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}\{N=n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}E\left(z^{\sum_{k=1}^{N} M_k}\cdot\mathbb{1}\{N=n\}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}E\left(z^{\sum_{k=1}^{n} M_k}\cdot\mathbb{1}\{N=n\}\right) \underset{M_k\perp\!\!\!\perp N}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(Ez^{M_k}\right)^n\cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(P_{M_k}(z)\right)^n\cdot P(N=n) = P_N(P_{M_k}(z)).$$

Если $N\sim Pois(\lambda)$, то $P_N(z) = Ez^N = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\cdot\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$

$$\Rightarrow P_{\tilde N}(z) = e^{\lambda(P_{M_k}(z)-1)}$$

Рассм. свёртку 2-х составных. пуас. распр ~~[illegible]~~

$X = \sum_{i=1}^{N_1} X_i$; $Y = \sum_{i=1}^{N_2} Y_i$; где $N_1\sim Pois(\lambda_1)$

$N_2\sim Pois(\lambda_2)$

$\Rightarrow P_X(z) = P_{N_1}(P_{X_i}(z)) = e^{\lambda_1(P_{X_i}(z)-1)}$

$P_Y(z) = P_{N_2}(P_{Y_i}(z)) = e^{\lambda_2(P_{Y_i}(z)-1)}$

но $P_{X+Y}(z) = Ez^{X+Y} = E(z^X \cdot z^Y) \underset{X \perp Y}{=} Ez^X \cdot Ez^Y = P_X(z)\cdot P_Y(z) = e^{\lambda_1(P_{X_i}(z)-1)} \cdot e^{\lambda_2(P_{Y_i}(z)-1)} =$

$= e^{\lambda_1 P_{X_i}(z) + \lambda_2 P_{Y_i}(z) - (\lambda_1+\lambda_2)} = e^{\left(\left(\frac{\lambda_1 P_{X_i}(z)+\lambda_2 P_{Y_i}(z)}{\lambda_1+\lambda_2}\right)-1\right)(\lambda_1+\lambda_2)}$

Возьмём $N_3 \sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$; $U := \sum_{i=1}^{N_3} U_i$

а U_i – незав $\perp N_3$, с произв. ф-цией $P_{U_i}(z) := \frac{\lambda_1 P_{X_i}(z)+\lambda_2 P_{Y_i}(z)}{\lambda_1+\lambda_2}$

Тогда $P_{X+Y}(z) = P_{U}(z) \Rightarrow$ является.

Аналогично, если свёртка n сост. пуас. распр.:

$S = S_1+S_2+\dots+S_n$, то S – сост. пуас. распр. с $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

$P_S(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i(x)}{\lambda}$

3. Проверить, что NB – это пуас-логарифм. распр.

Решение: $NB(m;p)$: $P(N=k) = C^k_{m+k-1}\, p^m \cdot (1-p)^k$; $k=0,1,2\dots$

$Pois(\lambda)$: $P(N=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $k=0,1,2\dots$

Логар.(β): $P(N=k) = \frac{\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k\ln(1+\beta)} = \frac{p^k}{-k\ln q}$; $k=1,2\dots$

Найдём произв. ф-ции каждого:

$P_{NB(m;p)}(z) = Ez^\xi = \sum_{k=0}^\infty z^k \cdot C^k_{m+k-1}\, p^m \cdot q^k = p^m \cdot \sum_{k=0}^\infty (zq)^k \cdot C^k_{m+k-1} = p^m \cdot (1-zq)^{-m} = \left(\frac{p}{1-zq}\right)^m = e^{m(\ln p - \ln(1-zq))}$

$P_{Pois}(z) = Ez^\xi = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$

$P_{логар}(z) = Ez^\xi = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k\ln(1+\beta)} = \frac{1}{\ln(1+\beta)}\sum_{k=1}^\infty \frac{\left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^k}{k} = \frac{-\ln\left(1-\frac{z\beta}{1+\beta}\right)}{\ln(1+\beta)} = \frac{\ln\left(1-\frac{z\beta}{1+\beta}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+\beta}\right)} = \frac{\ln(1-zp)}{\ln q}$

$p = \frac{\beta}{1+\beta}$, $q = \frac{1}{1+\beta}$

$\Rightarrow P_{Pois}(P_{логар.}(z)) = e^{\lambda\left(\frac{\ln(1-zp)}{\ln q}-1\right)} \underset{\lambda := -m\ln q}{=} e^{m(\ln q - \ln(1-zp))} = \left(\frac{q}{1-zp}\right)^m$ – это $NB(m;q)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{сумма } \sum_{i=1}^N X_i \sim NB(m;q), \text{ где } N \sim Pois(-m\ln q),\ X_i \sim Log(p)}$

чтд.

(4.) Доказать, что для сост. пуас. расп:

$$\boxed{g_n = \frac{\lambda}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} jf_j\cdot g_{n-j}}$$

(стр2)

Решение: $\tilde{N} = \sum_{i=1}^{N} M_i$

$g_n = P(\tilde{N}=n)$ $\qquad P_\xi(z) = Ez^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot P(\xi=n)$

$p_n = P(N=n)$ $\qquad P_{\tilde{N}}(z) = P_N(P_{M_i}(z)) = \sum_{k=0}^{\infty}(P_{M_i}(z))^k\cdot P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\cdot(P_{M_i}(z))^k$

$f_n = P(M_i=n)$

Мы знаем, что $P_{\tilde{N}}(z) = P_N(P_{M_i}(z))$

Сост. пуас. расп - это когда $N\sim Pois(\lambda)$.

$Pois(\lambda)\in$ классу$(a,b,0)$: $p_k = p_{k-1}\cdot\left(a+\frac{b}{k}\right); k\geq 1.$

Для $Pois(\lambda)$: $a=0$, $b=\lambda$.

т.е $p_k = p_{k-1}\cdot\frac{\lambda}{k}$

$\Rightarrow k\cdot p_k = p_{k-1}\cdot\lambda \quad ; k\geq 1$

Умножим обе части на $(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)$ и просуммируем по $k\geq 1$:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k\cdot(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)}_{=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p_k\cdot(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z) = (P_{\tilde{N}}(z))'} = \underbrace{\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}\cdot(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)}_{\overset{k-1=t}{=}\ \lambda\cdot P_{M_i}'(z)\cdot\sum_{t=0}^{\infty} p_t\cdot(P_{M_i}(z))^t = \lambda\cdot P_{M_i}'(z)\cdot P_{\tilde{N}}(z)}$$

$= \sum_{n=0} n\cdot z^{n-1}\cdot g_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot f_n \qquad \sum_{n=0} z^n\cdot g_n$

$$\Rightarrow (P_{\tilde{N}}(z))' = \lambda\cdot P_{M_i}'(z)\cdot P_{\tilde{N}}(z)$$

Разложим обе части по степеням z и приравняем коэф. при z^{n-1}:

$$n\cdot g_n = \lambda\cdot\sum_{j=0}^{n} jf_j\cdot g_{n-j} = \lambda\cdot\sum_{j=1}^{n} j\cdot f_j\cdot g_{n-j}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_n = \frac{\lambda}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} j\cdot f_j\cdot g_{n-j}} \quad \text{чтд.}$$

(5.) Если первичное расп. $N\in$ классу $(a,b,1)$, то $g_n = \dfrac{[p_1-(a+b)p_0]f_n + \sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{bj}{n}\right)f_j\cdot g_{n-j}}{1-af_0}$.

Решение: $p_k = p_{k-1}\cdot\left(a+\frac{b}{k}\right)$; $k\geq 2$.

$\Rightarrow kp_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1}$. ; $k\geq 2$

Умножим обе части на $(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)$ и просуммируем по $k\geq 1$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\cdot p_k\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z) = a\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_{k-1}\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}P_{M_i}'(z) + (a+b)\cdot\sum_{k=2}^{\infty}p_{k-1}\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)$$

Нам не хватает слагаемых при $k=1$:

$t=k-1$ $= P_{M_i}'(z)\cdot\sum_{t=0}^{\infty} t\cdot p_t\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{t-1}\cdot P_{M_i}'(z)$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)}_{=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p_k\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)} - p_1\cdot P_{M_i}'(z) = a\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_{k-1}\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z) - 0\right) + (a+b)\left(\sum_{k=1}^{\infty}p_{k-1}\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}P_{M_i}'(z) - p_0 P_{M_i}'(z)\right)$$

$=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot g_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot f_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}\cdot f_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot g_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot f_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}\cdot g_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1}\cdot f_n$

$$\Rightarrow \left(P_{\tilde N}(z)\right)' - p_1\cdot P_{M_i}'(z) = a\cdot P_{M_i}(z)\left(P_{\tilde N}(z)\right)' + (a+b)\left(P_{M_i}'(z)\cdot P_{\tilde N}(z) - p_0 P_{M_i}'(z)\right)$$

Ищем коэф. при z^{n-1}:

$$n\cdot g_n - p_1\cdot n\cdot f_n = a\cdot\sum_{j=0}^{n} f_j\cdot(n-j)g_{n-j} + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{n} j\cdot f_j\cdot g_{n-j} - p_0\cdot n\cdot f_n\right)$$

Выделим в правой части слагаемые с $j=0$:

$$n\cdot g_n - \underline{p_1\cdot n\cdot f_n} = a f_0 n g_n + a\sum_{j=1}^{n} f_j(n-j)g_{n-j} + (a+b)\sum_{j=1}^{n} j f_j g_{n-j} - \underline{(a+b)p_0 n f_n}$$

$$\Rightarrow n g_n(1-af_0) = n f_n\left(p_1-(a+b)p_0\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(a(n-j)+(a+b)j\right)f_j\cdot g_{n-j}$$

$$\Rightarrow g_n(1-af_0) = f_n\left(p_1-(a+b)p_0\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{b\cdot j}{n}\right)f_j\cdot g_{n-j}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_n = \frac{f_n\left(p_1-(a+b)p_0\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{bj}{n}\right)f_j\cdot g_{n-j}}{1-af_0}}$$

чтд.