06.10.21. Виноградов. ДЗ от семинара 4.

(1) Как найти q_1 и q_{a-1}? (Ответ: посмотреть на корни знаменателя)

Решение: Напомним, что происходит:

a – общий капитал в игре

q_n – вер-ть того, что I-й игрок разорится, если его начальный капитал n руб.

p – вер-ть выигрыша I-го игрока (в ~~каждой~~ любой из партий)

Введем произв. ф-цию:

$$Q(z) = q_1 z + \dots + q_{a-1} z^{a-1} + \underbrace{q_a z^a}_{=0} \qquad \left(\text{т.к. } q_0 = 1,\ q_a = 0\right)$$

$$q_1 = p q_2 + q \quad | z$$

$$q_2 = p q_3 + q q_1 \quad | z^2$$

$$\vdots$$

$$q_k = p q_{k+1} + q q_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$q_{a-2} = p q_{a-1} + q q_{a-3}$$

$$q_{a-1} = \cancel{p q_a}^{\,0} + q q_{a-2} \quad | z^{a-1}$$

$$\Rightarrow Q(z) = p(q_2 z + q_3 z^2 + \dots + q_{a-1} z^{a-2}) + q(z + q_1 z^2 + \dots + q_{a-2} z^{a-1}) =$$

$$= p(-q_1 + \underbrace{q_1 + q_2 z + \dots + q_{a-1} z^{a-2}}_{\frac{Q(z)}{z}}) + q(z + z \cdot Q(z) - z \cdot q_{a-1} z^{a-1}) =$$

$$= p\left(-q_1 + \frac{Q(z)}{z}\right) + qz(1 + Q(z) - q_{a-1} z^{a-1})$$

$$\Rightarrow z \cdot Q(z) = -p q_1 z + p Q(z) + q z^2 (1 - q_{a-1} z^{a-1}) + q z^2 \cdot Q(z)$$

$$\Rightarrow Q(z)(z - p - q z^2) = z(qz - q q_{a-1} z^a - p q_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(z) = \frac{z(qz - q q_{a-1} z^a - p q_1)}{z - p - q z^2}}$$

Вопрос: как найти q_1 и q_{a-1}?

Ответ: Заметим, что нули знаменателя должны совпадать с нулями числителя, т.к. иначе модуль многочлена $Q(z)$ в окр-ти этих точек будет неограниченным, что противоречит св-ву модуля многочлена быть ограниченным в любой конечной части плоскости z.

а) Если $p \neq q$:

Корни знаменателя:

$$z - p - qz^2 = 0$$

$$qz^2 - z + p = 0$$

$$D = 1 - 4pq \overset{p+q=1}{=} 1 - 4q(1-q) = 1 - 4q + 4q^2 = (1-2q)^2$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm (1-2q)}{2q}$$

$$z_1 = \frac{2-2q}{2q} = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q}$$

$$z_2 = \frac{2q}{2q} = 1$$

И когда 1 и $\frac{p}{q}$ являются корнями числителя?

$$z(qz - qQ_{a-1}z^a - pQ_1) = 0. \quad z \Rightarrow z(pz - pQ_{a-1}z^a - Q_1) = 0.$$

$$z=1: \ \left\{ q - q\underset{=y}{Q_{a-1}} - p\underset{=x}{Q_1} = 0 \right.$$

$$z=\frac{p}{q}: \ \left\{ \frac{p}{q}\left(p - q\underset{=y}{Q_{a-1}}\left(\frac{p}{q}\right)^a - p\underset{=x}{Q_1}\right) = 0. \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} px + qy = q \\ px + qy\left(\frac{p}{q}\right)^a = p. \end{cases} \qquad \text{Введем } \beta := \frac{q}{p}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \beta y = \beta \\ x + y\beta^{a+1} = 1. \end{cases} \qquad \cancel{\beta y + y\beta^{a+1} = 1+\beta \Rightarrow y = \frac{1+\beta}{\beta(1+\beta^a)}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \beta y = \beta \\ x\beta^{a-1} + y = \beta^{a-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \beta^{a-1}(1-x) \\ x + \beta^a(1-x) = \beta \end{cases} \Rightarrow x(1-\beta^a) = \beta - \beta^a \Rightarrow \overset{Q_1}{\overset{\shortparallel}{x}} = \frac{\beta(1-\beta^{a-1})}{1-\beta^a}$$

$$\Rightarrow y = \beta^{a-1}(1-x) = \beta^{a-1}\left(1 - \frac{(\beta - \beta^a)}{1-\beta^a}\right) = \frac{\beta^{a-1}(1-\beta)}{1-\beta^a}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{cases} Q_1 = x = \dfrac{\beta(1-\beta^{a-1})}{1-\beta^a} \\ Q_{a-1} = y = \dfrac{\beta^{a-1}(1-\beta)}{1-\beta^a} \end{cases}} \qquad \beta = \frac{q}{p}.$$

б) Если $p = q = \frac{1}{2}$, то корни знаменателя:

$z - p - qz^2 = 0$

$qz^2 - z + p = 0$

$D = 1 - 4pq = 1 - 4\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0.$

$z_{1,2} = \frac{1 \pm 0}{2q} = 1$ — кратность 2.

$\Rightarrow z = 1$ — корень числителя дроби и ее производной.

числитель: $z(qz - qq_{a-1}z^a - pq_1) = 0$

$\beta = \frac{q}{p}$

$x = q_1$

$y = q_{a-1}$

$\Rightarrow z(z - \beta y z^a - x) = 0$

$z^2 - \beta y z^{a+1} - zx = 0$. $\Rightarrow f'(z) = 2z - (a+1)\beta y z^a - x$

$f(1) = 0$: $1(1 - \beta y - x) = 0$

$f'(1) = 0$: $2 - (a+1)\beta y - x = 0$. $\beta = \frac{q}{p} = 1$.

$\Rightarrow \begin{cases} x + \overset{1}{\beta} y = 1 \\ x + (a+1)\beta y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 - \overset{1}{\beta} y = 2 - (a+1)\overset{1}{\beta} y$

$\Rightarrow 1 - y = 2 - (a+1)y$

$\Rightarrow y(-1 + a + 1) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{a} \Rightarrow x = 1 - y = \frac{a-1}{a}$ ответ.

2. Док-ть, что если $\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$, и выполнено $P\{\xi \geq m+n \mid \xi \geq m\} = P\{\xi \geq n\}$ ($\Leftrightarrow P\{\xi \geq m+n\} = P\{\xi \geq m\} \cdot P\{\xi \geq n\}$), то ξ — имеет геом. распр.

<u>Док-во</u>: обозн. $a_n := P\{\xi = n\}$

$b_n := P\{\xi \geq n\}$

тогда по усл.: $b_{n+m} = b_n \cdot b_m$, $\forall m, n \geq 0$.

положим $m = 1 \Rightarrow b_{n+1} = b_n \cdot b_1 \Rightarrow b_n = (b_1)^n$

но $a_n = b_n - b_{n+1} \Rightarrow a_n = (b_1)^n - (b_1)^{n+1} = (b_1)^n(1 - b_1)$

Обозн. $b_1 := p$; $1 - b_1 := q \Rightarrow$ вот геом. распр. ч.т.д.

③ Док-ть: $P(z,t) = z \cdot \int_0^t P(z, t-y)\, dA(y) + 1 - A(t)$,

где $P(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k$

$p_k(t) = P\{\nu(t) = k\}$

ν - число восстановлений на $[0,t]$

$A(t) = P\{\xi_k < t\}$ - ф.р. ξ_k,

ξ_k - длина жизни лампочки.

Док-во: $p_0(t) = P\{\nu(t) = 0\} = P\{\xi_1 > t\} = 1 - A(t)$

Далее, $p_n(t) = \sum P\{$1-я точка в окр-ти y, в ост. время было $n-1$ точка$\}$ $\ast_1$

$$\Rightarrow p_n(t) = \int_0^t p_{n-1}(t-y)\, dA(y)$$

Умножаем на z^n и суммируем:

$$\Rightarrow P(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\int_0^t p_{n-1}(t-y)\, dA(y) \right)}_{= z \cdot \int_0^t \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} p_{n-1}(t-y)}_{= P(z,t-y)} dA(y)} + \underbrace{p_0(t)}_{= 1 - A(t)} \ast$$

$$\Rightarrow P(z,t) = z \cdot \int_0^t P(z, t-y)\, dA(y) + (1 - A(t)).$$ ч.т.д.