(3) Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.

Опр. 1 Разбиением P отрезка $[a, b]$ называем мн-во упор. точек $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

Диаметр разбиения $P = d(P) = \max\limits_{k=\overline{1,n}} (x_k - x_{k-1})$

Отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ $k = \overline{0, n-1}$ - частичные отрезки P

Опр. 2 Пусть дано разбиение P для $[a, b]$, фиксир. пр-но $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$

Тогда разбиение P с меткой $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называв. размеченным разбиением (P, ξ)

Опр. 3 Пусть дано $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ и фикс. (P, ξ) отрезка $[a, b]$

Тогда число $\sigma(f, P, \xi) = \sigma(P, \xi) = \sum\limits_{k} f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{= \Delta x_k}$

называв. интегральной суммой ф-ции f отн-но разб. (P, ξ).

Опр. 4 Число $I \in \mathbb{R}$ называв. пределом интегральных сумм $\sigma(P, \xi)$ при $d(P) \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 / |\sigma(P, \xi) - I| < \varepsilon$
$\forall (P, \xi) \subset d(P) < \delta$

Пусть $\mathcal{B}$ - мн-во всех размеченных разбиений (P, ξ) определ. на $[a, b]$. На мн-ве $\mathcal{B}$ рассмотр. базу B из эл-тов $B_\delta = \{(P, \xi) \mid d(P) < \delta\}$, $0 < \delta \leq b - a$

Опр-ие корректно: $\cdot$ $B_\delta \neq \varnothing$ $\forall \delta \in (0, b-a]$

$\cdot$ $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, b-a) : \exists \delta_3 / B_{\delta_3} \subset B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$

$\Rightarrow$ Опр.* 4. : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_\delta \in B / |\sigma(P, \xi) - I| < \varepsilon$ $\forall (P, \xi) \in B_\delta$

$\Rightarrow I = \lim\limits_{B} \sigma(P, \xi)$, базу B обозн. $d(P) \to 0$.

Опр. 5 Пусть $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, тогда f интегрируема по Риману на $[a, b]$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{d(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) =: I \in \mathbb{R}$

где I называв. определенным $\int$-ем f на $[a, b]$

Обозн.: $I = \int_a^b f(x)dx$, а $f \in R[a,b]$ ← мн-во $\int$ых по Риману ф-ций на $[a,b]$

Теорема 1: $\forall f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /$
$|\sigma(P', \xi') - \sigma(P, \xi)| < \varepsilon\ \forall (P, \xi)$ с $d(P) < \delta$ и (P', ξ') с $d(P') < \delta$

▶ Критерий Коши по базе ◀

Теорема 2: $f, g \in R[a,b] \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R[a,b]\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

▶ Очев ◀

Теорема 3 (Необх. усл $\int$-ти): $f \in R[a,b] \Rightarrow f \in B[a,b]$

▶ От противного: $\exists f \in R[a,b]$ и $f \notin B[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)dx = I$
$\Rightarrow$ для $\varepsilon = 1\ \exists \delta > 0 / |\sigma(P, \xi) - I| < 1\ \forall (P, \xi)$ с $d(P) < \delta$

Фикс. пр-ное разб. $P^{(0)} = \{x_0^{(0)} = a < x_1^{(0)} < \dots < x_n^{(0)} = b\}$, $d(P^{(0)}) < \delta$
и $|\sigma(P^{(0)}, \xi)| \le |\sigma(P^{(0)}, \xi) - I| + |I| < 1 + |I|$
и т.к. $f \notin B[a,b] \Rightarrow \exists k_0 \in \{1, \dots, n\} / f \notin B[x_{k_0-1}^{(0)}, x_{k_0}^{(0)}]$

Р-им метку $\xi(u) = (x_1^{(0)}, \dots, x_{k_0-1}^{(0)}, u, x_{k_0+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$
$\Rightarrow \sigma(P^{(0)}, \xi(u)) = \sum_{k, k \ne k_0} f(\xi_k) \Delta x_k + f(u) \Delta x_{k_0} =: \sigma^* + f(u) \Delta x_{k_0}$.

f - не огр на $[x_{k_0-1}^{(0)}, x_{k_0}^{(0)}] \Rightarrow \exists u_0 \in [x_{k_0-1}^{(0)}, x_{k_0}^{(0)}] /$
$f(u_0) > \dfrac{1 + |I| + \sigma^*}{\Delta x_{k_0}} \Rightarrow |\sigma(P^{(0)}, \xi(u_0))| > |f(u_0)| \Delta x_{k_0} - |\sigma^*| > 1 + |I|$
$\Rightarrow$ ✗ ◀

Опр. 6. $\tilde{P}$ измельчение $P \overset{def}{\iff} \tilde{P} \supset P$

Опр. 7. $\forall f \in B[a,b] \Rightarrow$ Колебание ф-ции f на $[a,b]$
это $0 \le \omega(f; [a,b]) := \sup\limits_{x', x'' \in [a,b]} |f(x') - f(x'')|$

Зам: 1) $P = \{x_k, k = \overline{0,n}\} \Rightarrow \tilde{P} = \{x_{kl}, k = \overline{0,n}, l = \overline{0, m_k}\}$
2) $P = P^{(1)} \cup P^{(2)}$, т.е. P - измельчение как $P^{(1)}$, так и $P^{(2)}$
3) $f \in B[a,b] \Rightarrow 0 \le \omega(f; [a;b]) \le 2M$, где

$f \in B[a,b]$, т.е. $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

4) $f \in B[a,b] \Rightarrow \omega(f;[a,b]) = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$

▷ Пусть $M := \sup\limits_{[a,b]} f$, $m := \inf\limits_{[a,b]} f$

1. Д-м, что $\omega(f;[a,b]) \leq M - m$

$-(M-m) = m - M \leq f(x') - f(x'') \leq M - m \quad \forall x', x'' \in [a,b]$

$\Rightarrow \sup\limits_{x',x'' \in [a,b]} |f(x') - f(x'')| \leq M - m$

2. Д-м, что $\omega(f;[a,b]) \geq M - m$

$\exists x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \in [a,b] \,/\, f(x_n^{(1)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$ и $f(x_n^{(2)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} m$

$\Rightarrow \omega(f;[a,b]) = \sup\limits_{x',x'' \in [a,b]} |f(x') - f(x'')| \geq |f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| \xrightarrow[n\to\infty]{} M - m$ ◁

Пусть $\mathcal{B}^* = \{B^*_\delta, 0 < \delta \leq b-a\}$, $B^*_\delta = \{P$ отр. $[a,b] \,/\, d(P) < \delta\}$ – без метки

Пусть $\Omega(P) = \Omega(f,P) := \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f;[x_{k-1},x_k])\Delta x_k$

Опр. 8. $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,/\, |\Omega(P)| < \varepsilon \quad \forall P \in B^*_\delta$

Теорема 4 (Дост. усл. R-ти). Пусть $f \in B[a,b]$ и $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \Rightarrow f \in R[a,b]$

▷ Д-во по Кр. Коши: 1) Пусть P – разб $[a,b]$, $\tilde{P}$ – измел. P

$\Rightarrow |\sigma(P,\xi) - \sigma(\tilde{P},\tilde{\xi})| \leq \Omega(P)$ (*)

верно, т.к. $|\sigma(P,\xi) - \sigma(\tilde{P},\tilde{\xi})| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\ell=1}^{m_k} f(\xi_{k\ell})(x_{k\ell} - x_{k\ell-1}) -\right.$

$\left.- \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\ell=1}^{m_k} \underbrace{(f(\xi_{k\ell}) - f(\xi_k))}_{|\cdot| \leq \omega(f,\Delta x_k)} \cdot (x_{k\ell} - x_{k\ell-1})\right| \leq$

$\leq \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k) \sum\limits_{\ell=1}^{m_k} |\Delta x_{k\ell}| = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k)\Delta x_k = \Omega(P)$

2. Пусть $\varepsilon > 0$ – пр-но, т.к. по усл. $\Omega(P) \to 0$, то $\exists \delta > 0 \,/$

$0 \leq \Omega(P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall P \in B^*_\delta$ (т.е. $d(P) < \delta$)

Д-им разбиения (P',ξ'), $(P'',\xi'') \in B_\delta$, с $d(P) < \delta$

$\tilde{P} = P' \cup P''$ – измельч. P' и P''

$$|\sigma(P', \xi') - \sigma(P', \xi'')| \le |\sigma(P', \xi') - \sigma(\tilde{P}, \tilde{\xi})| + |\sigma(P'', \xi'') - \sigma(\tilde{P}, \tilde{\xi})| \le$$
$$\le \Omega(P') + \Omega(P'') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacktriangleleft$$

Классы интегр. ф-ций:

Теорема 5: $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

$\blacktriangleright$ $f \in C[a,b] \overset{\text{Т. Кантора}}{\Rightarrow} f$ – р/м непр на $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 /$
$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow \omega(f, \Delta x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ если $\Delta x_k < \delta$
$\Rightarrow$ для $P \in B^*_\delta$: $0 \le \Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\omega(P; [x_{k-1}, x_k])}_{< \varepsilon / b-a} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}$
$\Rightarrow \Omega(P) \to 0$ при $d(P) \to 0 \Rightarrow$ по Т4: $f \in R[a,b] \quad \blacktriangleleft$

Теорема 6: $f \in M[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

$\blacktriangleright$ Б.О.О. $f \uparrow$ и $f(a) < f(b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – пр-во, $\delta := \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$
зная, что:
$$\omega(f; [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) - f(x_{k-1})$$
$\Rightarrow \forall P \in B^*_\delta$: $0 \le \Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f; [x_{k-1}; x_k]) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))} \sum_{k=1}^{n} \omega(f; \Delta x_k)$
$= \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))} \cdot (f(x_1) \underbrace{- f(x_0)}_{= -f(a)} + \ldots + \underbrace{f(x_n)}_{= f(b)} - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \blacktriangleleft$

Теорема 7: Пусть $f \in R[a,b]$, $f \in C(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$,
$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b] \Rightarrow \Phi \in D(x_0)$, причём $\Phi'(x_0) = f(x_0)$

$\blacktriangleright$ $f \in C(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall t \in O_\delta(x_0) \cap [a,b]$.
Имеем: $\left| \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \underbrace{\left(\int_a^x - \int_a^{x_0} \right)}_{\int_{x_0}^x} f(t)dt - \underbrace{f(x_0)}_{\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt} \right| =$
$= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \underbrace{(f(t) - f(x_0))}_{|\cdot| < \varepsilon} dt \right| < \varepsilon \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon \quad \blacktriangleleft$

Теорема 8: Пусть $f \in R[a,b]$, $f \in C(x_0)$, $\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt \Rightarrow$
$\Psi \in D(x_0)$, причём $\Psi'(x_0) = -f(x_0)$

$\blacktriangleright$ $\Psi(x) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \Phi(x) \Rightarrow \Psi'(x_0) = -\Phi'(x_0) \quad \blacktriangleleft$

Теорема 9: $\exists f \in C(a,b) \Rightarrow \exists \Phi \in D(a,b) / \Phi'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

т.е. $\Phi(x)$ – первообразная для f на (a,b)

▷ ~~Теорема~~ Пусть $\Phi(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)\,dt$, $x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ по Т. 8 V Т9 $\exists \Phi'(x) = f(x)$ ◁

Теорема 10: $\exists f \in C[a,b]$ $\exists \Phi \in D[a,b] / \Phi'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

← доопред.

$\Rightarrow \Phi$ – п/образная для f на (a,b)

▷ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ ◁

Теорема 11 (ф-ла Ньютона-Лейбница):

$\exists f \in R[a,b]$, $\exists \tilde{\Phi} \in C[a,b] \vee \tilde{\Phi}$ – первообразная f на (a,b)

$\Rightarrow$ 1) $\int_a^b f(x)\,dx = \tilde{\Phi}(b) - \tilde{\Phi}(a) = \tilde{\Phi}(x)\Big|_a^b$

2) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ – обладает св-ми: $F \in C[a,b]$, F – п/обр. f на (a,b)

▷ (1) $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \left|\sigma(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ $\forall (P, \xi) \subset d(P) < \delta$

Имеем:

$\tilde{\Phi}(b) - \tilde{\Phi}(a) = (\tilde{\Phi}(x_1) - \tilde{\Phi}(x_0)) + \ldots + (\tilde{\Phi}(x_n) - \tilde{\Phi}(x_{n-1})) =$

$= \sum_{k=1}^{n} (\tilde{\Phi}(x_k) - \tilde{\Phi}(x_{k-1})) \underset{\text{т. Лагранжа}}{=} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\Phi}'(\xi_k)\Delta x_k$, $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$

Получили что для $\forall P$ с $d(P) < \delta$ $\exists$ метка ξ

и

$0 \leq \left|\tilde{\Phi}(b) - \tilde{\Phi}(a) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)\,dx\right| =$

$= \underbrace{\left|\sigma(f, P, \xi) - \int_a^b f\,dx\right|}_{=:A} < \varepsilon$

$=: A$ и $0 \leq A < \varepsilon \xRightarrow{\text{переходим к пределу}} 0 \leq A \leq 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow 1)$

(2) Р-им $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b] \Rightarrow F \in C[a,b]$:

$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \leq M|x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

$M \leftarrow$ огр.

и по п. (1): $F(x) = \tilde{\Phi}(x) - \tilde{\Phi}(a)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow F'(x) = \tilde{\Phi}'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow F$ – первообразная f на (a,b) ◁