05.11.20. ЧМ. Семинар 10. КР2. Токаева Александра 409.

① $\int_{-2}^{0} x^2 f(x)dx \approx c_1 f(0) + c_2 \cdot f(x_2)$ точную для многочл. max высокой степени.

Решение:
У нас 3 свободных параметра: $c_1, c_2; x_2$.

=> в лучшем случае она точна для $1, x, x^2$

$$f \equiv 1 \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^2 \cdot 1 dx = c_1 + c_2$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^2 \cdot x dx = \cancel{c_1 \cdot 0} + c_2 \cdot x_2$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^2 \cdot x^2 dx = \cancel{c_1 \cdot 0} + c_2 \cdot x_2^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3} \\ c_2 \cdot x_2 = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{16}{4} = -4 \\ c_2 \cdot x_2^2 = \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{(-32)}{5} = \frac{32}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{-4} = -\frac{8}{5} \in [-2; 0]$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-4}{x_2} = \frac{-4 \cdot 5}{-8} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{8}{3} - c_2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(f) = \frac{1}{6} f(0) + \frac{5}{2} f\left(-\frac{8}{5}\right)}$$

ответ.

② $\int_{a}^{b} f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + c_3 \cdot f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + c_4 f(b)$

Найти $c_1 \dots c_4$ и оценку погр-и.

Док-ть оценку погр-и для составной квадратуры.

Решение: Замена: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$; $t \in [-1; 1]$

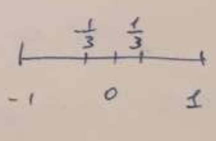
$$\Rightarrow t = \frac{2}{b-a} \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \ ; \ dx = \frac{b-a}{2} dt$$

$$\Rightarrow a \longmapsto \frac{2}{b-a}\left(a - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{2}{b-a} \cdot \frac{a-b}{2} = -1.$$

$$\frac{2a+b}{3} \longmapsto \frac{2}{b-a}\left(\frac{2a+b}{3} - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{2}{b-a} \cdot \left(\frac{a-b}{6}\right) = -\frac{1}{3}.$$

$$\frac{a+2b}{3} \longmapsto \frac{1}{3}$$

$$b \longmapsto 1$$



$$\Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right)}_{\text{степень } f \text{ относ. } t \text{ такая же, как относ. } \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t} dt \approx c_1 \cdot f(-1) + c_2 f\left(-\frac{1}{3}\right) + c_3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) + c_4 f(1)$$

=> ищем $c_1 \dots c_4$ так, чтобы квадратура была точна для $1, t, t^2, t^3$.

$$f \equiv 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1 dt = 2 \Rightarrow \frac{b-a}{2} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} 1 dt}_{=2} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$f(t) = t \Rightarrow \frac{b-a}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} t dt}_{=0} = -c_1 - c_2 \cdot \frac{1}{3} + c_3 \cdot \frac{1}{3} + c_4$$

$f(t)=t^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt}_{\frac{b-a}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}} = c_1 + c_2\cdot\frac{1}{9} + c_3\cdot\frac{1}{9} + c_4$

$f(t)=t^3 \Rightarrow \underbrace{\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} t^3 dt}_{\overset{\shortparallel}{0}} = -c_1 - \frac{1}{27}c_2 + \frac{1}{27}c_3 + c_4$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3+c_4 = b-a \\ -c_1 - \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{3} + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2\cdot\frac{1}{9} + c_3\cdot\frac{1}{9} + c_4 = \frac{b-a}{3} \\ -c_1 - \frac{1}{27}c_2 + \frac{1}{27}c_3 + c_4 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b-a \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 3(b-a) \\ -27 & -1 & 1 & 27 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 3(b-a) \\ 0 & -8 & -8 & 0 & -6(b-a) \\ 0 & 26 & 28 & 54 & 27(b-a) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 3(b-a) \\ 0 & 0 & 8 & 24 & 6(b-a) \\ 0 & 0 & -24 & -24 & -12(b-a) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 3(b-a) \\ 0 & 0 & 8 & 24 & 6(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 6(b-a) \end{array}\right) \quad \Rightarrow c_4 = \frac{b-a}{8}$$

$$c_3 = \frac{6(b-a) - 24c_4}{8} = \frac{6(b-a) - 3(b-a)}{8} = \frac{3(b-a)}{8}$$

$$c_2 = \frac{3(b-a) - 6c_4 - 4c_3}{2} = \frac{3(b-a) - \frac{3}{4}(b-a) - \frac{6(b-a)}{4}}{2} = \frac{3}{8}(b-a)$$

$$c_1 = (b-a) - c_4 - c_3 - c_2 = (b-a) - 2\cdot\frac{3}{8}(b-a) - \frac{b-a}{8} = \frac{b-a}{8}.$$

$$\Rightarrow \boxed{S^{[a,b]}(f) = \frac{b-a}{8}\cdot f(a) + \frac{3(b-a)}{8} f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{3(b-a)}{8} f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \frac{b-a}{8} f(b)}$$

Оценка погр-ти: у нас по постр. ф-ла точна для $m = 3$

$\Rightarrow$ по кошмарной формуле

$$|I(f) - S_n(f)| \le \frac{\|f^{(m+1)}\|}{(m+1)!}\Bigg(\underbrace{\int_a^b |p(x)|\,dx}_{\substack{\shortparallel\\ b-a,\\ \text{т.к. } p(x)\equiv 1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |c_i|}_{\substack{\shortparallel\\ b-a,\\ \text{т.к. } \Sigma c_i = b-a\\ \text{из-за точности}\\ \text{на } f\equiv 1}}\Bigg)\cdot\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1} \overset{m=3}{=}$$

$$= \frac{\|f^{(4)}\|}{4!}\cdot 2\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{(b-a)^4}{2^4} = \frac{\|f^{(4)}\|}{4!}\cdot\frac{(b-a)^5}{2^6} = \frac{\|f^{(4)}\|\cdot(b-a)^5}{1536}$$

Для составной ф-лы: $h = \frac{b-a}{N}$

$S^N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} S^{(k)}(f) \Rightarrow |R^N(f)| \le \sum_{k=0}^{N-1} |R^{(k)}(f)|$

на $[x_k; x_{k+1}] = [a + \frac{b-a}{N}\cdot k;\ a + \frac{b-a}{N}(k+1)]$: $|R^{(k)}(f)| \le \frac{\|f^{(4)}\|_{C[x_k;x_{k+1}]}\cdot\left(\frac{b-a}{N}\right)^5}{1536}$

$$\Rightarrow |R^N(f)| \le \sum_{k=0}^{N-1} |R^{(k)}(f)| = \frac{N\cdot\|f^{(4)}\|_{C[a,b]}\cdot\left(\frac{b-a}{N}\right)^5}{1536} = \boxed{\frac{\|f^{(4)}\|_{C[a,b]}\cdot(b-a)^5}{1536 N^4}}$$

ответ.

③ построить квадратуру Гаусса с 2 узлами: $\int_0^5 f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ (стр2)

найти оценку погр-ти.

Решение: Сначала найдём ортог. многочлен степени $n=2$ на $[0,5]$ с $p(x) \equiv 1$.

$\psi_0 = 1.$

$\psi_1 = x+a.$

$(\psi_1;\psi_0)=0 \Rightarrow \int_0^5 1\cdot(x+a)dx=0.$

$\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 + a\cdot 5 = 0.$

$\frac{25}{4} + 5a = 0 \Rightarrow \frac{5}{4} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \psi_1 = x - \frac{5}{4}$

$\psi_2 = x^2 + bx + c$

$(\psi_2;\psi_0)=0 \Rightarrow \int_0^5 1\cdot(x^2+bx+c)\,dx=0.$

$\frac{x^3}{3}\Big|_0^5 + b\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 + 5c = 0.$

$\frac{125}{3} + b\cdot\frac{25}{2} + 5c = 0.$

$(\psi_2;\psi_1)=0 \Rightarrow \int_0^5 (x-\frac{5}{4})(x^2+bx+c)dx=0.$

$\int_0^5 (x^3+bx^2+cx)dx - \frac{5}{4}\int_0^5 (x^2+bx+c)dx = 0$

$\frac{x^4}{4}\Big|_0^5 + b\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^5 + \frac{cx^2}{2}\Big|_0^5 - \frac{5}{4}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^5 + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^5 + 5c\right) = 0.$

$\frac{625}{4} + \frac{125b}{3} + \frac{25c}{2} - \frac{5}{4}\left(\frac{125}{3} + \frac{25b}{2} + 5c\right) = 0.$

$\frac{625}{4} + \frac{125b}{3} + \frac{25c}{2} - \frac{625}{12} - \frac{125b}{8} - \frac{25c}{4} = 0$

$\frac{625}{6} + \frac{625}{24}b + \frac{25c}{4} = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{125}{3} + b\cdot\frac{25}{2} + 5c = 0 \\ \frac{625}{6} + \frac{625}{24}b + \frac{25c}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{3} + \frac{5b}{2} + c = 0 \\ \frac{25}{6} + \frac{25}{24}b + \frac{c}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 + 15b + 6c = 0 \\ 100 + 25b + 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow 10b + 50 = 0$

$b = -5$

$c = \frac{-50-15b}{6} = \frac{-50+75}{6} = \frac{25}{6}.$

$\Rightarrow \psi_2(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{6} = 0.$

$6x^2 - 30x + 25 = 0.$

$D = 900 - 600 = 300 = (10\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow x_{1|2} = \frac{30 \pm 10\sqrt{3}}{12} = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{3} = \frac{5}{2} \pm \frac{5}{2\sqrt{3}}$ – узлы квадратуры

Теперь, зная узлы, ищем c_1 и c_2 из точности квадратуры на 1 и x

$f \equiv 1 \Rightarrow \int_0^5 1dx = c_1 + c_2 = 5$

$f(x) = x \Rightarrow \underbrace{\int_0^5 x dx}_{=\frac{25}{2}} = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1\cdot\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) + c_2\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=5 \\ c_1\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)+c_2\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{25}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c_2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=5$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1+c_2)}_{=5}+\frac{1}{\sqrt{3}}(c_2-c_1)=5 \quad \Rightarrow c_1=c_2=\frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2(f)=\frac{5}{2}f\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)+\frac{5}{2}f\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\right)}$$

Найдём оценку погр-ти:

ф-ла Гаусса по постр. точна для $m=n-1$.

Но по теореме Гаусса (из-за того, что $P_{2n-1}(x)=Q_{n-1}(x)\cdot \omega_n(x)+r_{n-1}(x)$ и $\omega_n(x)$ – ортог. многочлен) – она точна и до $m=2n-1$ включительно.

У нас $n=2 \Rightarrow m=2n-1=3$

$\Rightarrow$ по комнатной ф-ле:

$$|I(f)-S_2(f)|\le \frac{\|f^{(m+1)}\|}{(m+1)!}\underbrace{\left(\int_a^b |p(x)|dx+\sum_{i=1}^{n}|c_i|\right)}_{=2(b-a)}\cdot\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1}=$$

$$=\frac{\|f^{(4)}\|}{4!}\cdot 2(b-a)\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^4=\frac{\|f^{(4)}\|\cdot(b-a)^5}{1536} \leftarrow \text{ответ}$$

④ Док-ть, что $S_3(f)=\frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ точна для $m=5$ для $I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1 способ

Надо проверить, что $S_3(f)$ точна на $f=1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$.

Для нечётных степеней (т.е. $f=x, x^3, x^5$) – она очев. верна, т.к. слева ноль и справа ноль.

Для $f\equiv 1$: $I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_0^1\frac{dp}{2\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-p}}=\int_0^1 (1-p)^{-1/2}\cdot p^{-1/2}dp=B\left(-\frac{1}{2}+1;-\frac{1}{2}+1\right)=$

$x^2=p$, $x=\sqrt{p}$, $dx=\frac{1}{2\sqrt{p}}dp$

$$=B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{1}=\pi.$$

$S_3(f)=\frac{\pi}{3}(1+1+1)=\pi$ – верно.

Для $f=x^2$: $I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_0^1 p\cdot\frac{dp}{2\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-p}}=\int_0^1(1-p)^{-\frac{1}{2}}\cdot p^{1/2}dp=$

$x^2=p$
$x=\sqrt{p}$
$dx=\frac{1}{2\sqrt{p}}dp$

$=B\left(-\frac{1}{2}+1;\frac{1}{2}+1\right)=B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{1!}=\frac{\pi}{2}.$

$S_3(f)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\pi}{2}$ – верно.

Для $f=x^4$: $I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_0^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_0^1\frac{p^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{p}}\cdot dp}{\sqrt{1-p}}=\int_0^1(1-p)^{-\frac{1}{2}}\cdot p^{3/2}dp=$

$x^2=p$
$x=\sqrt{p}$
$dx=\frac{1}{2\sqrt{p}}dp$

$=B\left(-\frac{1}{2}+1;\frac{3}{2}+1\right)=B\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2!}=\pi\cdot\frac{3}{8}$

$S_3(f)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{9}{16}+0+\frac{9}{16}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{9}{8}=\pi\cdot\frac{3}{8}$ – верно.

2 способ Достаточно заметить, что $-\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}$ – корни ортог. многочлена 3-й степени на $[-1;+1]$ => раз квадратура точна для $f=x^{n-1}=x^2$ – то она точна и для $f=x^{2n-1}=x^5$. чтд.

как мог так быстро найти ортог. многочлен?
ну вот отрезок $=[-1;+1]$; вес $=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
=> это многочлены Чебышёва 1-го рода, только нормированные на старший коэф:

$T_0=1$
$T_1=x$
$T_2=2x\cdot x-1=2x^2-1$
$T_3=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$ => $\omega_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x=0.$

$x(x^2-\frac{3}{4})=0$ => $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

(5.) Для $I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ построить квадр. ф-лу

$S_n(f)=c_1\cdot f(-1)+\sum_{i=2}^{n}c_i\cdot f(x_i)$, точную для $m=2n-2$.

Решение: Вес $p(x)\equiv1\overset{\text{п.в}}{>}0$
=> можно строить ортог. многочлены, только надо вес поменять.

Как поменять вес?

$P_{2n-2}(x)=P_{n-2}(x)\cdot\omega_n(x)+r_{n-1}(x)$ – просто поделили с остатком на $\omega_n=(x-\overset{-1}{\overset{\shortparallel}{a}})\underbrace{\prod_{i=2}^{n}(x-x_i)}_{=\omega_{n-1}(x)}$

=> $I(P_{2n-2})=\int_{-1}^{1}P_{n-2}(x)\omega_n(x)dx+\int_{-1}^{1}r_{n-1}(x)dx\overset{?}{=}\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot P_{2n-2}(x_i)$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P_{n-2}(x)\boxed{(x+1)}\,\omega_{n-1}(x)\,dx + \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)\,dx \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i\Big(P_{n-2}(x_i)\underbrace{\omega_n(x_i)}_{\forall 0} + P_{n-1}(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i P_{n-1}(x_i)$$

новый вес >0 п.в.

левая часть - не зав от $P_{n-2}(x)$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} P_{n-2}(x)(x-a)\,\omega_{n-1}(x)\,dx \equiv 0, \ \forall P_{n-2}$$

$\Rightarrow \omega_{n-1}(x)$ - ортог. многочлен <u>степени $n-1$</u>

на $[-1;1]$ с новым весом: $\tilde{p}(x) = 1\cdot(x+1) \overset{п.в.}{>} 0$

Алгоритм

$\Rightarrow$ Узлы: $\underset{-1}{\overset{\parallel}{x_1}}\ \underbrace{x_2 \dots x_n}$ корни $\omega_{n-1}(x)$ - ортог. мног. на $[-1;1]$ с весом $\tilde{p}(x) = (x-a) = (x+1)$

~~Алгоритм~~

А коэф. $c_1 \dots c_n$ – ищем методом неопр. коэф.

из условия точности на $1, x \dots x^{n-1}$ (т.е. из условия точности для $m = n-1$.)

И <u>по постр.</u> данная квадратура будет точна для $m = 2n-2$. чтд.