Задача №1

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \ldots, n$; $u_0 = 0$, $\beta \in R^1$;

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

① По наблюдениям $u_1, \ldots, u_n$ построить оптимальный с.к. прогноз ненаблюдаемой величины u_{n+k}, $k \in N$.

Обозначим этот прогноз u^*_{n+k}.

② Пусть $\Delta_k = E\left(u^*_{n+k} - u_{n+k}\right)^2$ - с.к. ошибка прогноза.

Чему эквивалентна Δ_k при $k \to \infty$ для $|\beta| < 1$, $|\beta| = 1$, $|\beta| > 1$?

Задача 2

$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, $t \in Z$,

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = \nu$, $0 < D\varepsilon_1 = \sigma^2 < \infty$

корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы

① Выписать спектральную плотность $f(\lambda)$ стационарного решения.

② Пусть $\bar{u}_n = n^{-1} \sum\limits_{t=1}^{n} u_t$. Сходится ли $\bar{u}_n$ в с.к.? Если „да", то куда?

③ Пусть $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$. Будет ли величина $n^{1/2}(\bar{u}_n - m)$ асимптотически нормальной?

Если „да", то каковы m и параметры предельного гауссовского закона?

Задача 3.

$u_t = \varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, n$; $\varepsilon_0 = 0$,

$\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$ – н.о.р. $N(0,1)$ сл.в.

Выписать экстремальную задачу для оценивания α по наблюдениям $u_1, \dots, u_n$ методом максимального правдоподобия.

Задача 4.

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t, \quad t = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Здесь $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в.; $E\varepsilon_1 = 0$; ε_1 имеют ф.р. $G(x)$ и $g(x) = G'(x)$ существует;

$g(x) = g(-x)$, $g(x)$ непрерывна и ограничена

$\{\xi_t\}$ – н.о.р. с распределением μ_ξ;

$\{z_t^{\gamma}\}$ – н.о.р. по закону $Bin(1, \gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 1$.

Посл. $\{u_t\}$, $\{z_t^{\gamma}\}$, $\{\xi_t\}$ независимы.

Пусть $F(x)$ – любая непрерывная и симметричная (т.е. $F(x) + F(-x) = 1$) ф-ия распределения.

Уравнение для оценивания a:

$$\sum_{t=1}^{n} \left[F(y_t - \theta) - \frac{1}{2} \right] = 0.$$

1. Сколько решений у этого уравнения?
2. Есть ли решение $\hat{a}_n$, которое B-робастно? Найти функционал влияния $\hat{a}_n$ и чувствительность.

Задача 5.

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$; $|\beta| < 1$;

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$;

ε_1 имеет функцию распределения $G(x)$, которая дифференцируема в нуле, и $g(0) = G'(0) > 0$.

По $u_0, \ldots, u_n$ надо оценить параметр $\theta = \beta^2$. Берем две оценки:

$\hat{\theta}_{1n} = \hat{\beta}^2_{n,LD}$, $\hat{\theta}_{2n} = \hat{\beta}^2_{n,LS}$,

$\hat{\beta}_{n,LS}$, $\hat{\beta}_{n,LD}$ - о.н.к. и о.н.м. соответственно.

Найти АОЭ $e_{1,2}$ оценки $\hat{\theta}_{1n}$ относительно $\hat{\theta}_{2n}$.

В каждой задаче в конце написать слово „Ответ:", и дать ответы по пунктам.