01.11.20. Спецкурс Бул. КР1.

① F_k – ф.р. $N(\mu_k; \sigma_k^2)$; $k=1,2$

$\left.\begin{array}{l}\mu_1 \le \mu_2\ ;\ \sigma_1^2 \le \sigma_2^2\end{array}\right\} \Rightarrow F_1 \underset{sc}{\le} F_2.$

Можно ли F_1 и F_2 упорядочить в смысле стохаст. порядка? (ответ: вообще нельзя, но можно, если дисперсии равны)

Решение: проверим сначала, можно ли F_1 и F_2 упорядочить в смысле $\underset{st}{\le}$

(т.к. если $F_1 \underset{st}{\le} F_2 \Rightarrow F_1 \underset{sc}{\le} F_2$)

$F_1 \underset{st}{\le} F_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} F_1(x) \ge F_2(x)\ \forall x$

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} dt = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_i}{\sigma_i\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} dy$$

$y = \frac{t-\mu_i}{\sigma_i\sqrt{2}}$

$dy = \frac{dt}{\sigma_i\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} dy - \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\mu_2}{\sigma_2\sqrt{2}}}^{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{2}}} \underbrace{e^{-y^2}}_{>0} dy$$

$\nearrow \ \ge 0$, если $\frac{x-\mu_2}{\sigma_2} \le \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

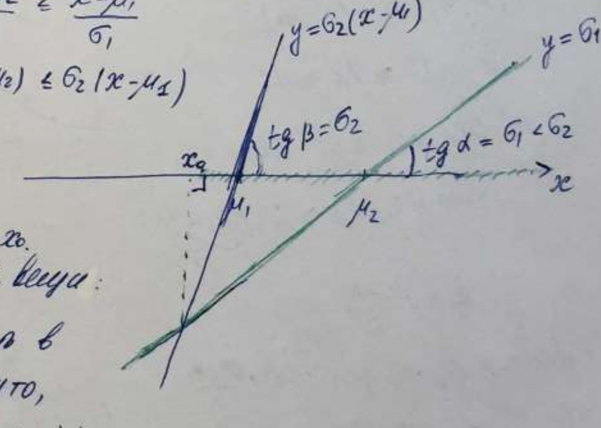
$\searrow \ \le 0$, иначе

Итак, $F_1(x) \ge F_2(x)$, если $\frac{x-\mu_2}{\sigma_2} \le \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

$\sigma_1(x-\mu_2) \le \sigma_2(x-\mu_1)$

$\mu_1 \le \mu_2$

$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$



т.е. $F_1(x) \ge F_2(x)$ только для $x \ge x_0$.

Отсюда мы сразу видим 2 вещи:

1) F_1 и F_2 нельзя упорядочить в смысле $\underset{st}{\le}$, т.к. неверно ни то, что $F_1(x) \ge F_2(x)\ \forall x \Rightarrow F_1 \underset{st}{\not\le} F_2$

ни то, что $F_1(x) \le F_2(x)\ \forall x \Rightarrow F_1 \underset{st}{\not\ge} F_2$

2) $F_1 \underset{sc}{\le} F_2$ по 1-й теореме о пересечении (см. теорема 12 на стр. 46 в книге или стр. 9 в лекции 5)

Теорема

Если риски X и Y удовл. условиям $EX \le EY$ и $\exists\, c \ge 0$ такое, что:

$\begin{cases} F_X(t) \le F_Y(t) \text{ при } t < c \\ F_X(t) \ge F_Y(t) \text{ при } t \ge c \end{cases}$, то $X \underset{sc}{\le} Y$.

Из картинки видно, что у нас именно так: $\begin{cases} F_1(x) \ge F_2(x) \text{ для } x \ge x_0 \\ F_1(x) \le F_2(x) \text{ для } x < x_0. \end{cases} \Rightarrow F_1 \underset{sc}{\le} F_2$. чтд.

Зам. F_1 и F_2 можно стохаст. упорядочить, если $\begin{cases} \mu_1 \le \mu_2 \\ \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$

Во-первых, это интересно само по себе, а во-вторых,

позволяет дать другое решение 1-й задачи (хотя и более длинное)

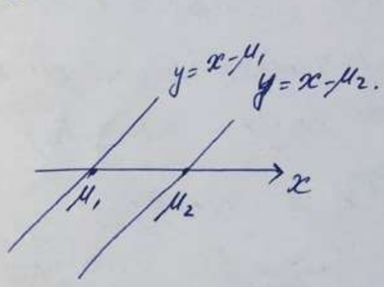
Итак, пусть $F_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2) \\ F_{2,1} \sim N(\mu_2; \sigma_1^2) \\ \mu_1 \le \mu_2 \end{array}\right\} \Rightarrow F_1 \le_{st} F_2$$

Это можно получить как непосредственно из того,

что $F_1(x) - F_2(x) \ge 0$, если $\dfrac{x-\mu_2}{\sigma_2} \le \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

но $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow x - \mu_2 \le x - \mu_1$



$\Rightarrow F_1(x) \ge F_2(x)\ \forall x$

$\Rightarrow F_1 \le_{st} F_2$ по опр.

А можно и по дост. условию (см. теорема 6 на стр. 34 книги)

<u>Теорема</u> пусть $\exists C$: $\begin{cases} dF_X(x) \ge dF_Y(x) \text{ при } x < c \\ dF_X(x) \le dF_Y(x) \text{ при } x > c \end{cases} \Rightarrow X \le_{st} Y$

В нашем случае: $dF_1(x) \overset{?}{\geq} dF_{21}(x)$

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \ge \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2}}$$

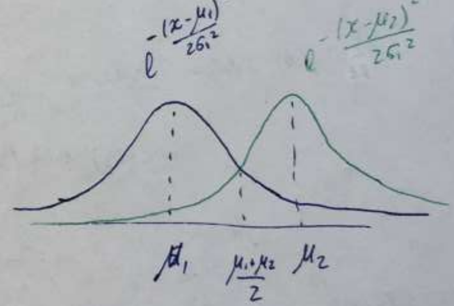
$$-(x-\mu_1)^2 \ge -(x-\mu_2)^2$$

$$(x-\mu_2)^2 \ge (x-\mu_1)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2x\mu_2 + \mu_2^2 \ge \cancel{x^2} - 2x\mu_1 + \mu_1^2$$

$$(\mu_2+\mu_1)\underbrace{(\mu_2-\mu_1)}_{>0} \ge 2x\underbrace{(\mu_2-\mu_1)}_{>0}$$

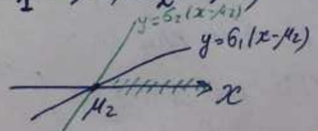
$$x \le \frac{\mu_1+\mu_2}{2}.$$



$$\Rightarrow \begin{cases} dF_1(x) \ge dF_{21}(x) \text{ при } x \le \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \\ dF_1(x) \le dF_{21}(x) \text{ при } x \ge \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \end{cases} \Rightarrow F_1 \le_{st} F_{21}.$$

Заметим также, что $\underset{N(\mu_2;\sigma_1^2)}{\underset{\wr}{F_{21}}} \le_{se} \underset{N(\mu_2;\sigma_2^2)}{\underset{\wr}{F_2}}$ — т.к. $F_{21}(x) - F_2(x) \ge 0$, если $\dfrac{x-\mu_2}{\sigma_2} \le \dfrac{x-\mu_2}{\sigma_1}$

$\sigma_1(x-\mu_2) \le \sigma_2(x-\mu_2)$



$$\Rightarrow \begin{cases} F_{21}(x) \ge F_2(x) \text{ при } x \ge \mu_2 \\ F_{21}(x) \le F_2(x) \text{ при } x < \mu_2 \end{cases} \Rightarrow F_{21} \le_{se} F_2$$

$$\Rightarrow \overset{\sim N(\mu_1;\sigma_1^2)}{F_1} \underset{\substack{\Downarrow \\ se}}{\le_{st}} \overset{\sim N(\mu_2;\sigma_1^2)}{F_{2,1}} \le_{se} \overset{\sim N(\mu_2;\sigma_2^2)}{F_2} \qquad \Rightarrow F_1 \le_{se} F_2 \quad \text{чтд.}$$

(2) Ф-ции полезности: $U(x)=x$

$U(x)=-(b-x)^2$

$U(x)=\ln(\alpha+x)$

$U(x)=-\alpha e^{-\alpha x}$

Можно ли их представить в виде $U(x,\alpha,\beta)=\dfrac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}$ с $\alpha+\beta x>0;\ \beta\neq0;\ \beta\neq1$ или как их предел при $\beta\to0$, $\beta\to1$? Найти соотв. значение коэф. неприятия риска $a(x)$.

$$a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Решение: • При $\alpha:=b$, $\beta:=-1$ $\quad U(x,\alpha,\beta)=\dfrac{(b-x)^2}{-2}=-\frac{1}{2}(b-x)^2$ – квадратичная ф-ция полезности

(у нас получился коэф. $\frac{1}{2}$, но заметим, что линейное преобразования ф-ции полезности дают те же самые решения, поэтому на самом деле, ф-ция полезности определена с точностью до варьирования $U(0)$ и $U'(0)$).

• при $\alpha=1;\ \beta\to0$: $\quad U(x,\alpha,\beta)=\dfrac{(1+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=\dfrac{\overbrace{(1+\beta x)}^{\to1}\cdot(1+\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}}{\underbrace{(\beta-1)}_{\to-1}}\xrightarrow[\beta\to0]{}-e^{-x}$ => эксп. ф.р.

• при $\alpha>1;\ \beta\to0$:

$$\lim_{\beta\to0}U(x,\alpha,\beta)=\lim_{\beta\to0}\frac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=\lim_{\beta\to0}-\alpha\cdot(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}=\lim_{\beta\to0}\frac{-\alpha}{(\alpha+\beta x)^{1/\beta}}\underset{\gamma=\frac{1}{\beta}}{=}\lim_{\gamma\to\infty}\frac{-\alpha}{(\alpha+\frac{x}{\gamma})^{\gamma}}\ \begin{matrix}\xrightarrow[\gamma\to+\infty]{}0\\ \xrightarrow[\gamma\to-\infty]{}\infty\end{matrix}$$

• при $\alpha<1$, $\beta\to0$

$$\lim_{\beta\to0}U(x,\alpha,\beta)=\lim_{\gamma\to\infty}\frac{-\alpha}{(\alpha+\frac{x}{\gamma})^{\gamma}}\ \begin{matrix}\xrightarrow[\gamma\to+\infty]{}0\\ \searrow\lim\limits_{\gamma\to-\infty}-\alpha\cdot\alpha^{\gamma}\cdot e^{\frac{x}{\alpha}}=0.\end{matrix}$$

• при $\beta\to1$: $\quad\lim\limits_{\beta\to1}\dfrac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=\infty$

• при $\beta\to\infty$: $\quad\lim\limits_{\beta\to\infty}U(x,\alpha,\beta)=\lim\limits_{\beta\to\infty}\dfrac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=x$ => лин. ф-ция полезности.

Итог перебрали все возможности => $U(x)=\ln(\alpha+x)$ – нельзя получить.

$U(x)=x \Rightarrow a(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}=\dfrac{0}{1}=0$

$U(x)=-(b-x)^2\Rightarrow a(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}=\dfrac{2}{2(b-x)}=\dfrac{1}{b-x}$

$U(x)=\ln(\alpha+x)\Rightarrow a(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}=\dfrac{-\frac{-1}{(\alpha+x)^2}}{\frac{1}{\alpha+x}}=\dfrac{1}{\alpha+x}$

$U(x)=-\alpha\cdot e^{-\alpha x}\Rightarrow a(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}=\dfrac{\alpha^3\cdot e^{-\alpha x}}{\alpha^2\cdot e^{-\alpha x}}=\alpha.$

③ Для распр. Вейбулла: $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t^{\alpha_k}}$; $0 \le t < \infty$; $k=1,2$,

если мат. ожидания равны, то из $\alpha_1 \ge \alpha_2$ следует $F_1 \underset{sc}{\le} F_2$.

Решение: Используем теорему 12 на стр 46 в книге (это стр. 9 в лекции 5):

Если риски X и Y удовл. условиям $EX \le EY$ и $\exists\, c \ge 0$ такое что:

$$\begin{cases} F_X(t) \le F_Y(t) \text{ при } t < c \\ F_X(t) \ge F_Y(t) \text{ при } t \ge c \end{cases}, \text{ то } X \underset{sc}{\le} Y.$$

Когда $F_1(t) \ge F_2(t)$

$$1 - e^{-\lambda_1 t^{\alpha_1}} \ge 1 - e^{-\lambda_2 t^{\alpha_2}}$$

$$e^{-\lambda_2 t^{\alpha_2}} \ge e^{-\lambda_1 t^{\alpha_1}}$$

$$-\lambda_2 t^{\alpha_2} \ge -\lambda_1 t^{\alpha_1}$$

$$\lambda_1 t^{\alpha_1} \ge \lambda_2 t^{\alpha_2}$$

$$t^{\alpha_1 - \alpha_2} \ge \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{т.к. } \lambda_k > 0).$$

$$t \ge \sqrt[\alpha_1-\alpha_2]{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(t) \le F_2(t) \text{ при } t < c = \sqrt[\alpha_1-\alpha_2]{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ F_1(t) \ge F_2(t) \text{ при } t \ge c = \sqrt[\alpha_1-\alpha_2]{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \end{cases} \Rightarrow F_1 \underset{sc}{\le} F_2 \text{. ч.т.д.}$$

④ Док-ть: $IFR \subset IFRA \subset NBU \subset NBUE$

F-IFR, если для $0 \le x_1 < x_2 < \infty$: $F_{x_2} \underset{st}{\le} F_{x_1}$

$\Leftrightarrow F_{x_2}(t) \ge F_{x_1}(t)\ \forall t$

$\Leftrightarrow \bar F_{x_2}(t) \le \bar F_{x_1}(t)\ \forall t$

$\Leftrightarrow \ln \bar F(t)$ – вогнутая

$\Leftrightarrow \lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar F(t)} = -\frac{d}{dt} \ln \bar F(t)$ – монот. возрастает по t.

почему?

ну по усл. $F_x \underset{st}{\ge} F_{x+\delta}$

т.е $\bar F_x(t) \ge \bar F_{x+\delta}(t)$

$$\bar F_x(t) = e^{-\int_x^{x+t} \lambda(y)dy} \ge e^{-\int_{x+\delta}^{x+\delta+t} \lambda(y)dy} = \bar F_{x+\delta}(t)$$

$$-\int_x^{x+t} \lambda(y)dy \ge -\int_{x+\delta}^{x+\delta+t} \lambda(y)dy$$

$$\int_{x+\delta}^{x+\delta+t} \lambda(y)dy \ge \int_x^{x+t} \lambda(y)dy \quad y=z$$

$y = z+\delta$

$$\int_x^{x+t} \lambda(z+\delta)dz \ge \int_x^{x+t} \lambda(z)dz$$

$\Rightarrow \lambda(z+\delta) \ge \lambda(z) \Rightarrow \lambda(z)$ возр. по z.

F-IFRA, если $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ возр. по t

F-NBU, если $F_x \underset{st}{\le} F\ \forall x \ge 0$

т.е $\bar F_x(t) \le \bar F(t)\ \forall x \ge 0$

т.е $\frac{\bar F(t+x)}{\bar F(x)} \le \bar F(t)\ \forall x \ge 0,\ \forall t \ge 0.$

F-NBUE, если $\begin{cases} EX < \infty \\ ET_x \le EX \end{cases}$

остаточное время жизни

Решение: IFR => IFRA

Дано: $\lambda(t)$ монот. возрастает по t

Хотим: $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ возрастает по t

Имеем: $\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \ln \bar F(t)$

$$\Rightarrow \bar F(t) = e^{-\int_0^t \lambda(y)dy}$$

$$\Rightarrow \ln \bar F(t) = -\int_0^t \lambda(y)dy$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln \bar F(t)}{t} = \frac{\int_0^t \lambda(y)dy}{t}$$ – возрастает по t?

=> Хотим: $$\frac{\int_0^t \lambda(y)dy}{t} \overset{?}{\le} \frac{\int_0^{t+\delta} \lambda(y)dy}{t+\delta}$$

$$\Rightarrow \cancel{t\int_0^t \lambda(y)dy} + \delta\cdot\int_0^t \lambda(y)dy \overset{?}{\le} t\cdot\int_0^{t+\delta} \lambda(y)dy = \cancel{t\cdot\int_0^t \lambda(y)dy} + t\cdot\int_t^{t+\delta}\lambda(y)dy$$

$$\Rightarrow \delta\cdot\int_0^t \lambda(y)dy \overset{?}{\le} t\cdot\int_t^{t+\delta} \lambda(y)dy$$

Но $$\delta\int_0^t \lambda(y)dy \underset{\lambda(y)\le\lambda(t)}{\le} \delta\cdot t\cdot\lambda(t) \underset{\lambda(t)\le\lambda(y)}{\le} t\cdot\int_t^{t+\delta}\lambda(y)dy$$ => верно

IFRA => NBU

Дано: $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ возр. по t

Хотим: $\bar F(t+x) \le \bar F(t)\cdot \bar F(x)$ $\forall t\ge 0, \forall x \ge 0$.

т.е. $\ln \bar F(t+x) \le \ln \bar F(t) + \ln \bar F(x)$

Если $0 \le t \le x \le x+t$

Но $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ – возрастает по t => $\frac{\ln \bar F(t)}{t} \ge \frac{\ln \bar F(x)}{x} \ge \frac{\ln \bar F(x+t)}{x+t}$

$$\Rightarrow \ln \bar F(x+t) \le \frac{x+t}{x}\cdot \ln \bar F(x) = \ln \bar F(x) + \frac{t}{x}\underbrace{\ln \bar F(x)}_{\le \frac{x}{t}\ln \bar F(t)} \le \ln \bar F(x) + \frac{\cancel{t}}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{t}}\ln \bar F(t) = \ln \bar F(x) + \ln \bar F(t)$$

Если $0 \le x \le t \le x+t$ => $\frac{\ln \bar F(x)}{x} \ge \frac{\ln \bar F(t)}{t} \ge \frac{\ln \bar F(x+t)}{x+t}$

$$\Rightarrow \ln \bar F(x+t) \le \frac{x+t}{t}\ln \bar F(t) = \ln \bar F(t) + \frac{x}{t}\cdot\underbrace{\ln \bar F(t)}_{\le \frac{t}{x}\ln \bar F(x)} \le \ln \bar F(t) + \frac{\cancel{x}}{\cancel{t}}\cdot\frac{\cancel{t}}{\cancel{x}}\ln \bar F(x) = \ln \bar F(t) + \ln \bar F(x)$$

чтд.

NBU => NBUE   Дано: $F_x \underset{st}{\le} F \ \forall x \geq 0$, т.е. $\frac{\bar F(t+x)}{\bar F(x)} \le \bar F(t) \ \forall x \geq 0; \forall t \geq 0.$ (*)

Хотим: $ET_x \le EX \ \forall x$, т.е. $\frac{\int_0^{+\infty} \bar F(t+x)\,dt}{\bar F(x)} \le EX = \int_0^{+\infty} \bar F(t)\,dt$ (**)

И верно, что из (*) сразу следует (**). => чтд.

Или можно так:

$X \underset{st}{\le} Y \Rightarrow Eh(X) \le Eh(Y) \ \forall$ неубыв. выпуклой f

В частности, $EX \le EY$

но T_x – имеет ф.р. F_x

X – имеет ф.р. F

=> раз $F_x \underset{st}{\le} F$, то $ET_x \le EX$ чтд.