23.09.21. Вопросики д/з от семинара 2.

2.14 а) Найти гл. оси и гл. комп.:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt3 & 0 \\ -\sqrt3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\sqrt3 & 0 \\ -\sqrt3 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left(-(1-\lambda^2)-3\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2. \end{array}\right.$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt3 & 0 \\ -\sqrt3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0,\ c \text{ — любое} \Rightarrow e_1 = (0;0;1)$$

$$\lambda = 2. \quad \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt3 & 0 \\ -\sqrt3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -b\sqrt3,\ c = 0 \Rightarrow e_2 = (-\sqrt3;1;0)$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt3 & 0 \\ -\sqrt3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = a\sqrt3,\ c = 0 \Rightarrow e_3 = (1;\sqrt3;0)$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1, & (ijk) = (132), (321), (213) \\ 0, & i=j \text{ или } j=k \text{ или } k=i \end{cases}$$

3.33 Док-ть:

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{pqr} = \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_r + \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_p + \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_q - \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_r - \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_q - \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_p$$

а) $\epsilon^{ijk}\epsilon_{pqk} \overset{?}{=} \delta^i_p\delta^j_q - \delta^i_q\delta^j_p$

ну $\epsilon^{ijk}\epsilon_{pqk} = \sum\limits_{k=1,2,3} \delta^i_p\delta^j_q\underbrace{\delta^k_k}_{3\text{шт}} + \delta^i_q\underbrace{\delta^j_k\delta^k_p}_{=\delta^j_p} + \underbrace{\delta^i_k\delta^j_p\delta^k_q}_{\delta^i_q} - \delta^i_q\delta^j_p\underbrace{\delta^k_k}_{3\text{шт}} - \delta^i_p\underbrace{\delta^j_k\delta^k_q}_{=\delta^j_q} - \underbrace{\delta^i_k\delta^j_q\delta^k_p}_{\delta^i_p} =$

$$= \boxed{\delta^i_p\delta^j_q - \delta^i_q\delta^j_p}$$

б) $\epsilon^{ikl}\epsilon_{pkl} =$

$$= \sum_{k,l} \delta^i_p\cdot 1\cdot 1 + \delta^i_q\underbrace{\delta^j_k\delta^k_p}_{=\delta^j_p,\ j=q\ =\delta^i_p} + \delta^i_k\delta^j_p\delta^k_q\ (\delta^i_q = \delta^i_p) - \delta^i_p\cdot 1 - \delta^i_p - \delta^i_p = \boxed{2\delta^i_p}$$

в) $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 27+3+3-9-9-9 = \boxed{6}$

3.34 Док-ть, что $a\times b = \epsilon^{ijk}a_ib_je_k = \epsilon_{pqr}a^pb^qe^r$

Решение: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} (a_2b_3 - a_3b_2;\ a_3b_1 - a_1b_3;\ a_1b_2 - a_2b_1)$

$\oplus 231$ $\ominus 321$ $312\ \oplus$ $132\ \ominus$ $123\ \oplus$ $213\ \ominus$ всё верно!

3.35 а) покажите, что:

$$a\cdot(b\times c) = e_{ijk}\, a^i b^j c^k$$

б) Выразите компонент $a\times(b\times c)$ через их компоненты.

Решение: а) $b\times c = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2;\ b_3c_1 - b_1c_3;\ b_1c_2 - b_2c_1)$

$$\Rightarrow a\cdot(b\times c) = \underset{\overset{123}{+}}{a_1b_2c_3} - \underset{\overset{132}{-}}{a_1b_3c_2} + \underset{\overset{231}{+}}{a_2b_3c_1} - \underset{\overset{213}{-}}{a_2b_1c_3} + \underset{\overset{312}{+}}{a_3b_1c_2} - \underset{\overset{321}{-}}{a_3b_2c_1}$$

Всё верно!

б) Из 3.34: $a\times b = \epsilon^{ijk} a_i b_j e_k = \epsilon_{pqr}\, a^p b^q e^r$

$$\Rightarrow b\times c = \epsilon^{ijk} b_i c_j e_k$$

$$\Rightarrow a\times(b\times c) = \epsilon^{xyz} a_x (b\times c)_y e_z = \boxed{\epsilon^{xyz} a_x \left(\epsilon^{sty} b_s e_t\right) e_z}$$