25.02.2023. Конгр.рам. Дз 3.

(24) (Ω, F, P) – вероятн. пр-во

F_t – фильтрация

M_t – непр. квадр. интегр. мартингал на $[0,T]$,

$\langle M \rangle_t$ – его квадратич. вариация, т.е. такой неубыв. непр. процесс, что процесс $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ явл. мартингалом.

Док-ть, что в с.к. $\sum_k (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \longrightarrow \langle M \rangle_T$ при $\lambda(\Pi) \to 0$.

<u>Решение</u>: на прошлой лекции мы это доказали для винер. процесса: что $\sum_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \xrightarrow{L^2} T$.

Теперь докажем, что если обозначить $T_t^{\Delta}(X) := \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2$, где $t_k \le t < t_{k+1}$, Δ – разбиение, то $\{T_t^{\Delta_n}\} \xrightarrow{L^2} \langle M, M \rangle_t$, и $M_t^2 - T_t^{\Delta}(M)$ – мартингал.

1). M – мартингал

$\Rightarrow$ для $t_i < s < t_{i+1}$:

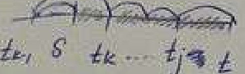
$$E[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | F_s] = E[(M_{t_{i+1}} - M_s + M_s - M_{t_i})^2 | F_s] = E[(M_{t_{i+1}} - M_s)^2 | F_s] +$$

$$+ 2E[\underbrace{(M_{t_{i+1}} - M_s)(M_s - M_{t_i}) | F_s]}_{=0,\ \text{т.к. } M_t - \text{мартингал}} + E[(M_s - M_{t_i})^2 | F_s] = E[(M_{t_{i+1}} - M_s)^2 | F_s] + (M_s - M_{t_i})^2.$$

измер.

измер.

$$\Rightarrow E[T_t^{\Delta}(M) - T_s^{\Delta}(M) | F_s] = E[(M_t - M_s)^2 | F_s] = E[M_t^2 - M_s^2 | F_s] \quad (*)$$



$\Rightarrow M_t^2 - T_t^{\Delta}(M)$ – мартингал

2) Фиксируем t и докажем, что если $\{\Delta_n\}$ – разбиения $[0,t]$ и $|\Delta_n| \to 0$, то $\{T_t^{\Delta_n}\}$ сход. в L^2.

- Если Δ и Δ' – два разбиения, то $\Delta\Delta'$ – их объединение.

Из $(*)$: $E[X_t^2] = E[(T_t^{\Delta} - T_t^{\Delta'})^2] = E[T_t^{\Delta\Delta'}(X)]$.

А поскольку $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$, то $T_t^{\Delta\Delta'}(X) \le 2\{T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}) + T_t^{\Delta\Delta'}(T)\}$

$\Rightarrow$ дост. док-ть, что $E[T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta})] \to 0$, когда $|\Delta| + |\Delta'| \to 0$.

- Пусть $s_k \in \Delta\Delta'$ и $t_l \le s_k < s_{k+1} \le t_{l+1}$

$$\Rightarrow T_{s_{k+1}}^{\Delta} - T_{s_k}^{\Delta} = (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 = (M_{s_{k+1}} - M_{s_k} + M_{s_k} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 =$$

$$= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}).$$

$$\Rightarrow T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta}) \leq \left(\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|^2\right) \cdot T_t^{\Delta\Delta'}$$

По н-ву Коши-Буняковского-Шварца:

$$E[T_t^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta})] \leq \underbrace{E\left[\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|^4\right]^{1/2}}_{\substack{\to 0 \text{ при } |\Delta|+|\Delta'|\to 0, \\ \text{т.к. } M_t \text{ - непрер.}}} \cdot E\left[(T_t^{\Delta\Delta'})^2\right]^{1/2}$$

$\Rightarrow$ дост. док-ть, что $E[(T_t^{\Delta\Delta'})^2]^{1/2}$ – ограничено константой, не зависящей от Δ и Δ'.

• т.к. $(T_{t_n}^{\Delta})^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2\right)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} (T_{t_n}^{\Delta} - T_{t_k}^{\Delta})(T_{t_k}^{\Delta} - T_{t_{k-1}}^{\Delta}) + \sum_{k=1}^{n} (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4$.

Из (*): $E[T_t^{\Delta} - T_{t_k}^{\Delta} | F_{t_k}] = E[(M_{t_n} - M_{t_k})^2 | F_{t_k}]$

$$\Rightarrow E[(T_{t_n}^{\Delta})^2] = 2\sum_{k=1}^{n} E[(M_{t_n} - M_{t_k})^2 (T_{t_k}^{\Delta} - T_{t_{k-1}}^{\Delta})] + \sum_{k=1}^{n} E[(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^4] \leq$$

$$\leq E\left[\left(2\sup_k |M_{t_n} - M_{t_k}|^2 + \sup_k |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^2\right) T_{t_n}^{\Delta}\right]$$

$\exists\, C$ – константа такая, что $|M| \leq C$ (т.к. M – непрер. мартингал на $[0, t_n]$)

$\Rightarrow E[T_{t_n}^{\Delta}] \leq 4C^2$

$\Rightarrow E[(T_{t_n}^{\Delta})^2] \leq 12C^2 \cdot E[T_{t_n}^{\Delta}] \leq 48C^4$.

$\Rightarrow \{T_t^{\Delta_n}\}$ сход. в L^2 к $\langle M, M\rangle_t$ при $|\Delta_n| \to 0$. ч.т.д.