Листок 4

Задача 1. Пусть $F(x,u,p)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^3$. Докажите, что вязкостное решение $u \in C^1((0,1))$ уравнения $u'' = F(x,u,u')$ на интервале $(0,1)$ принадлежит $C^2(0,1)$ и является классическим решением.

Задача 2. Пусть u является вязкостным решением уравнения $F(x,u,u',u'') = 0$ на $\mathbb{R}$ и дан гладкий возрастающий диффеоморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Положим $h = f^{-1}$. Докажите, что $v(y) = u(f(y))$ является вязкостным решением уравнения

$$F(f(y), v, h'(v)v', h''(v)(v')^2 + h'(v)v'') = 0.$$

Задача 3. Пусть u является вязкостным решением уравнения $F(x,u,u',u'') = 0$ на $\mathbb{R}$ и дан гладкий диффеоморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для какого уравнения функция $v = f(u)$ является вязкостным решением?

Задача 4. Докажите принцип сравнения для вязкостных решений уравнения

$$\lambda u + H(x, Du) = 0$$

на ограниченной области Ω, если $\lambda > 0$, H — непрерывная функция и $H(x,p) \to +\infty$ при $|p| \to +\infty$ равномерно по $x \in \overline{\Omega}$.

Задача 5. Уравнение

$$u + \frac{1}{2}|u'|^2 = 0$$

имеет классические решения $u \equiv 0$ и $u_s(x) = -\frac{1}{2}(x-s)^2$, где $s \in \mathbb{R}$. Докажите, что в классе ограниченных функций $u \equiv 0$ является единственным вязкостным решением.

Задача 6. Пусть симметричные матрицы X и Y таковы, что

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

Докажите, что для любых матриц B и C верно неравенство

$$\mathrm{tr}\big(BB^tX - CC^tY\big) \le 3\alpha|B-C|^2,$$

где $|Z|^2 = \mathrm{tr}\big(ZZ^t\big)$.

Задача 7. Предположим, что $F(x,u,p,X)$ удовлетворяет условию:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \Rightarrow F(y,u,\alpha(x-y),Y) - F(x,u,\alpha(x-y),X) \le \omega\big(|x-y|(1+\alpha|x-y|)\big)$$

для всех $\alpha > 1$. Здесь ω — неубывающая непрерывная функция, причем $\omega(0) = 0$. Докажите, что F удовлетворяет условию эллиптичности.