

# 1 Задачи с ГОСа 2011

Тут некоторые задачи, которые задавали в качестве довопросов в прошлом году и добрые люди выкладывали их в сеть. Я попытался немного это все структурировать. Вот, что получилось.

1. Пример неинтегрируемой ограниченной на  $(0, 1)$  функции. С доказательством.
2. Почему  $\mathbb{Z}_{13}$  циклическая?
3.  $y'' + y' + y = 0$  найти ФСР
4. Пример условно сходящегося ряда и перестановки порядка его членов, чтобы он стал расходиться.
5. Классифицировать особые точки  $z/\sin z$ .
6. Решить  $\cos z = 2$ .
7. Главные направления и кривизны цилиндра.
8. Определение дифференциала многих переменных.
9.  $\ddot{x} + \dot{x} = x \sin x$ .
10. Пусть функция  $f(x, y)$  определена на  $\mathbb{R}^2$  и существуют ее частные производные по  $x$  и по  $y$  для любых  $x, y$ . Верно ли, что  $f(x, y)$  непрерывна?
11.  $G : A = 2$  – что такое  $A$ ? Тут вроде нужно доказать, что она нормальная.
12. Чему равна сумма ряда  $\frac{1}{n(n+1)}$ ?
13. Чему равно  $2^{1699} \pmod{17}$ ?
14.  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{10}}$ .
15. Привести пример ненормальной подгруппы.
16.  $\ddot{\ddot{x}} - x = t$ .
17. Почему собственные числа самосопряженного оператора вещественны?
18. Конформно отобразить дополнение к отрезку  $[-1, 1]$  на верхнюю полуплоскость.
19. Написать матрицу проектора на вектор.
20. Привести пример последовательности непрерывных функций на отрезке, сходящихся в каждой точке, но не равномерно (то ли сходящихся к разрывной функции, но пример тот же годится).
21. Интеграл Коши.
22. Какого порядка бывают циклические подгруппы?
23.  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)}$
24.  $\ddot{x} + x = \cos t$ .
25. Даны 2 квадратичные формы в разных базисах:  $x^2 + y^2 - z^2$  и  $x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}z^2$ . Можно ли ортогональным преобразованием перевести одну в другую?
26. Привести пример функции, чей ряд Тейлора к ней не сходится.

27. Особые точки  $\sin(\frac{1}{z})$ .
28. Есть вертикальная прямая  $1 + it$ . Куда переведет правую полуплоскость преобразование  $z^2$ ?
29. Куда  $e^z$  переводит область  $\{x > 0, 0 < y < \pi\}$ ?
30. Существует ли группа порядка 13, элементы которой не коммутируют.
31.  $|G| = 10!$ . Какого порядка бывают циклические подгруппы у этой группы?
32. Что такое  $x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - yx$ ?
33. Сходится ли ряд  $(-1)^{n \frac{\sin^2 n}{n}}$ ?
34.  $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ .

Даешь всем пятерки за ГОС в этом году!