(2.) $\begin{cases} dX_t = -\frac{1}{2} \cdot X_t \, dt + dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$

Решение: ищем такую замену, чтобы в правой части X_t не было, и мы смогли проинтегрировать.

а) Пусть $Y_t = f(x,t) = e^{\frac{t}{2}} \cdot x$

$\Rightarrow f'_t = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot x$

$f'_x = e^{t/2}$

$f''_{xx} = 0.$

$$\Rightarrow dY_t = f'_t \cdot dt + f'_x \cdot dX_t + \cancel{\frac{1}{2} \cdot f''_{xx} \cdot (dX_t)^2}^{\,0} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot e^{t/2} \cdot x \right) dt + e^{t/2} \left(-\frac{1}{2} X_t \, dt + dW_t \right) =$$

$$= \cancel{\left(\frac{1}{2} \cdot e^{t/2} \cdot X_t - \frac{1}{2} \cdot e^{t/2} \cdot X_t \right)}^{\,0} dt + e^{t/2} dW_t = e^{t/2} dW_t.$$

$$\Rightarrow d(e^{t/2} \cdot X_t) = e^{t/2} dW_t$$

$$\Rightarrow e^{t/2} X_t - e^{0} \cdot \underbrace{X_0}_{=0} = \int_0^t e^{s/2} dW_s$$

$$\Rightarrow X_t = \int_0^t e^{\frac{(s-t)}{2}} dW_s = e^{-t/2} \cdot \int_0^t e^{s/2} dW_s.$$

б) покажите, что $X_{\ln(t+1)} \sqrt{t+1}$ – винер. процесс б) показать, что $Z_t = X_{\ln(t+1)}\sqrt{t+1}$ – винер. процесс

Ну $Z_t = \sqrt{t+1}\cdot X_{\ln(t+1)} = \sqrt{t+1}\cdot e^{-\frac{\ln(t+1)}{2}} \int\limits_0^{\ln(t+1)} e^{s/2}\,dW_s = \int\limits_0^{\ln(t+1)} e^{u/2}\,dW_u$

Пусть $s<t$

тогда $Z_t - Z_s$ – гаус. процесс, т.к Z_t – гаус. процесс как предел. гаус. сл. вел

при этом:

$E(Z_t - Z_s) = 0.$

$$E(Z_t - Z_s)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{изометрия Ито}}}{=} \int\limits_{\ln(s+1)}^{\ln(t+1)} e^u\,du = e^u\Big|_{\ln(s+1)}^{\ln(t+1)} = (t+1)-(s+1) = t-s.$$

$\Rightarrow Z_t - Z_s \sim N(0, t-s)$

$\Rightarrow Z_t$ – винер. процесс.

в) найти $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}}$.

Имеем: $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ п.н. – т.к. закон повторного логарифма

$W_t = X_{\ln(t+1)}\cdot\sqrt{t+1} \Rightarrow W(e^t-1) = X_{\ln(e^t)}\cdot\sqrt{e^t} = X_t\cdot e^{t/2}$

$\Rightarrow X_t = \frac{W(e^t-1)}{e^{t/2}}$

$\Rightarrow$ нужно найти:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W(e^t-1)}{\sqrt{t}\cdot e^{t/2}} \underset{\substack{\uparrow \\ s=e^t-1 \\ e^t=s+1 \\ t=\ln(s+1)}}{=} \limsup_{s\to\infty} \frac{W_s}{\sqrt{\ln(s+1)}\cdot\sqrt{s+1}} = \limsup_{s\to\infty} \frac{W_s}{\sqrt{2s\ln\ln s}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{2s\ln\ln s}{(s+1)\ln(s+1)}}}_{\to 0} = 0$$

Ответ: $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} = 0.$