No. 9

Date 2023 · 06 · 04

# Локальная устойчивость

Рассмотрим модель с 2 агентами, $\lambda^1 = \lambda^*$ - оптимальная

Хотим доказать:

$$\forall \lambda^2 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad W_0^1 \geq 1 - \delta \Rightarrow P\left(\lim_{t\to\infty} W_t^1 = 1\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Эквивалентно

$$\forall \lambda^2 \quad \underline{\exists \delta(\omega)} > 0 \text{ п.н.} \quad \forall \omega : \quad W_0^1 \geq 1 - \delta(\omega) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} W_t^1(\omega) = 1$$

<u>Замечание</u> $\delta(\omega)$ <u>не</u> $\mathcal{F}_0$-измеримы

2011

<u>Задание</u> проверить эквивалентность

① <u>Устойчивость динам. систем</u>

- $x \in X \subseteq \mathbb{R}^d$ (например, $x = (W^1, W^2)$, $X = \Delta^2$)
- $f(x, s) : X \times S \to X$ - измеримое отобр, $S$ - некоторое измер. пр-во
- Пусть $s_1(\omega), s_2(\omega), \ldots$ - н.о.р. сл-ты со значением в $S$
- Рассмотрим дин. с-му

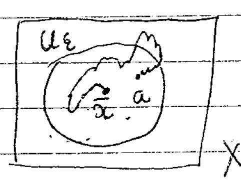
$$\begin{cases} x_0^a = a \in X & \text{(не случ.)} \\ x_t^a(\omega) = f(x_{t-1}^a(\omega), s_t(\omega)) \end{cases}$$

$$z_{t,k} = z_k(s_t(\omega))$$

- Равновесие

$\bar{x} \in X$ - равновесие, если $\bar{x} = f(\bar{x}, s)$ для любого $s \in S$

- Устойчивость




Равновесие $\bar{x}$ устойчиво, если

$$\forall \text{п.в. } \omega \in \Omega \quad \underline{\exists \varepsilon(\omega) > 0} \quad \forall a \in U_{\varepsilon(\omega)}(\bar{x}) \cap X : \lim_{t\to\infty} x_t^a(\omega) = \bar{x}$$

② Достаточное условие устойчивости

Теорема Пусть $\forall s \in S \;\; \exists\, \delta(s) > 0, L(s) \;\; \forall x \in U_{\delta(s)}(\bar{x}) \cap X \quad \rho(f(x,s), \bar{x}) \leq$
$\leq L(s)\rho(x, \bar{x})$

и $E|\ln L(s_1)| < \infty$, $E \ln L(s_1) < 0$, $E|\ln \delta(s_1)| < \infty$.

Тогда $\bar{x}$ - устойчивое равновесие

Д-во 1. Из УЗБЧ : $\frac{1}{t} \ln \prod_{u=1}^{t} L(s_u(\omega)) \xrightarrow{п.н.} E \ln L(s_1) < 0 \Rightarrow \prod_{u=1}^{t} L(s_t(\omega)) \xrightarrow{п.н.} 0$

Пусть $M'(\omega) = \sup\limits_{t \geq 1} \prod_{u=1}^{t} L(s_u(\omega)) < \infty$ п.н.

2. $\frac{1}{t} \ln \frac{\prod_{u=1}^{t} L(s_u(\omega))}{\delta(s_t(\omega))} \to E \ln L(s_1) < 0$ (т.к. $\frac{1}{t} \ln \delta(s_t) \xrightarrow{п.н.} 0$ - это следует из того, что $\frac{1}{t} \sum_{u=1}^{t} \ln \delta(s_t) \xrightarrow{п.н.} E \ln \delta(s_1)$ по УЗБЧ $\Rightarrow$
$\frac{1}{t} \ln \delta(s_t) = \frac{1}{t} \sum_{u=1}^{t} \ln \delta(s_u) - \frac{1}{t} \sum_{u=1}^{t-1} \ln \delta(s_u) \to 0$ )

$\Rightarrow \frac{1}{\delta(s_t)} \prod_{u=1}^{t} L(s_u) \xrightarrow{п.н.} 0$

Возьмем $M''(\omega) = \sup\limits_{t \geq 1} \frac{1}{\delta(s_t(\omega))} \prod_{u=1}^{t} L(s_u(\omega)) < \infty$

$M(\omega) = \max(M'(\omega), M''(\omega))$

3. Возьмем $\varepsilon(\omega) = \frac{1}{M(\omega)}$

Тогда если $a \in U_{\varepsilon(\omega)}(\bar{x}) \cap X$, то $\rho(x_1^a(\omega), \bar{x}) \leq L(s_1(\omega))\, \rho(a, \bar{x})$
$\leq L(s_1(\omega))\, \varepsilon(\omega) \leq \delta(s_1(\omega))$

Аналогично $\rho(x_2^a(\omega), \bar{x}) \leq L(s_2(\omega))\, \rho(x_1^a(\omega), \bar{x}) \leq L(s_2(\omega)) L(s_1(\omega))\, \varepsilon(\omega)$
$\leq \delta(s_2(\omega))$

$\Rightarrow$ по индукции $x_t^a(\omega) \in U_{\delta(s_t(\omega))}(\bar{x})$

и $\rho(x_t^a(\omega), \bar{x}) \leq \prod_{u=1}^{t} L(s_u(\omega)) \cdot \varepsilon(\omega) \to 0$

$\square$

③ Применение к модели без б/р актива

2 агента $(N=2)$, $K$ активов

$$W_t^n = \alpha \sum_{k=1}^{K} x_{t-1,k}^n (D_{t,k} + p_{t,k}) \qquad D_{t,k} = D_k(s_t(\omega))$$

Докажем, что $\lambda^*$ - опт. страт., где (не зависит от $t, \omega$)

$$\lambda_k^* = E\left(\frac{D_k(s_1)}{\sum_i D_i(s_1)}\right) = E R_k(s_1) \qquad \text{где } R_k = \frac{D_k}{|D|}$$

Хотим д-ть, что если $\lambda^1 = \lambda^*$, $\lambda^2 \neq \lambda^*$ ($\lambda^2 = const$), то

$y = 1$ - равновесие, где $y$ соотв $\frac{W^1}{W^1+W^2}$ | $y$ вместо $x$, чтобы не путать с $x_{t-1,k}^n$

~~Дин. с-ма:~~

$$\cancel{y \in [0,1] \quad \left(\sim \frac{W_{t-1}^1}{W_{t-1}^1 + W_{t-1}^2}\right)}$$

$$\cancel{f(y,s) = \alpha\Big(\sum_k \underbrace{\frac{\lambda_k^1 y}{\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y)}}_{x_{t-1,k}^1 = \frac{\lambda_k^1 W_{t-1}^1}{p_{t-1,k}} = \frac{\lambda_k^1 W_{t-1}^1}{\lambda_k^1 W_{t-1}^1 + \lambda_k^2 W_{t-1}^2}} \underbrace{(Z_k(s)}_{\frac{D_{t,k}}{W_t^1+W_t^2}} +}$$

$$\cancel{\underbrace{\quad}_{\frac{W_t^1}{W_t^1+W_t^2}}}$$

Из основного ур-я

- $$\frac{W_t^1}{|W_t|} = \alpha \sum_k \frac{\lambda_k^1 W_{t-1}^1}{\lambda_k^1 W_{t-1}^1 + \lambda_k^2 W_{t-1}^2}\left(\frac{D_{t,k}}{|W_t|} + \frac{\lambda_k^1 W_t^1 + \lambda_k^2 W_t^2}{|W_t|}\right)$$

- $$|W_t| = \alpha \sum_k (D_{t,k} + p_{t,k})$$
$$= \alpha\left(|D_t| \cdot |W_{t-1}| + |W_t|\right) \Rightarrow |W_t| = \frac{\alpha}{1-\alpha}|D_t|$$

$$\Rightarrow Y_t = \alpha \sum_k \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}}{\lambda_k^1 Y_{t-1} + \lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} R_k(s_t) + \lambda_k^1 Y_t + \lambda_k^2(1-Y_t)\right)$$

$$Y_t = \frac{W_t^1}{|W_t|} = \frac{W_t^1}{W_t^1 + W_t^2}$$

$$\Rightarrow \quad Y_t\left(1+\alpha\sum_k \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\left(\lambda_k^2-\lambda_k^1\right)\right) = \sum_k \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\left((1-\alpha)R_k(S_t)+\alpha\lambda_k^2\right)$$

- Дин. с-ма

$y \in [0,1]$

$$f(y,s) = \frac{\sum_k \frac{\lambda_k^1 y}{\lambda_k^1 y+\lambda_k^2(1-y)}\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)}{1+\alpha\sum_k \frac{\lambda_k^1 y}{\lambda_k^1 y+\lambda_k^2(1-y)}\left(\lambda_k^2-\lambda_k^1\right)}$$

Хотим доказать, что $\bar{y}=1$ – равновесие

Проверка $f(\bar{y},s)=\bar{y}$:

$$f(1,s) = \frac{\sum_k\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)}{1+\alpha\sum_k(\lambda_k^2-\lambda_k^1)} = \frac{1-\alpha+\alpha}{1} = 1$$

Сжимаемость: найдем $f'(y)$

$$f'(y)\Big|_{y=1} = \Bigg\{\sum_k \frac{(\lambda_k^1)^2-\lambda_k^1(\lambda_k^1-\lambda_k^2)}{(\lambda_k^1)^2}\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)\cdot\left(1+\alpha\sum_k(\lambda_k^2-\lambda_k^1)\right) -$$

$$-\sum_k\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)\cdot\alpha\sum_k\frac{(\lambda_k^1)^2-\lambda_k^1(\lambda_k^1-\lambda_k^2)}{(\lambda_k^1)^2}(\lambda_k^2-\lambda_k^1)\Bigg\}\cdot\left(1+\alpha\sum_k(\lambda_k^2-\lambda_k^1)\right)^{-2}$$

$$=\sum_k\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1}\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)-\sum_k\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)\alpha\sum_k\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1}(\lambda_k^2-\lambda_k^1)$$

$$=\sum_k\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1}\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^2\right)-\alpha\sum_k\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1}(\lambda_k^2-\lambda_k^1)$$

$$=\sum_k\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1}\left((1-\alpha)R_k(s)+\alpha\lambda_k^1\right) =: L(s)$$

$E\,L(S_1)=1 \Rightarrow E\ln L(S_1)<0$ (если $R_k \neq const$)

Окрестность $\delta(s)$ можно взять любую ($\delta(s)=1$)

No. 9

Date . .

④ <u>Опт. стратегии с $S_{IP}$ активом</u> [см. Evstigneev et al. 2011 Math Fin Econ („risk-free")]

уже сделано в

$$\alpha E_{t-1}\left(\lambda^*_{t,k} + \frac{D_{t,k}}{W^*_t}\right) = \lambda^*_{t-1,k}$$

где $$W_t^* = \frac{\alpha |D_t| + \alpha W_{t-1}\lambda^*_{t-1,0}}{1-\alpha(1-\lambda^*_{t,0})}$$

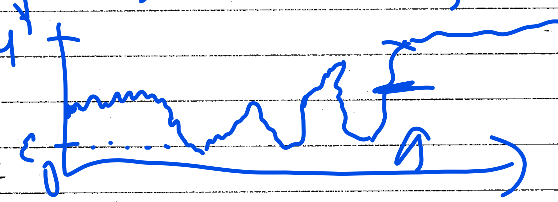
Предположим, что

$$\boxed{D_{t,k} = \lambda^*_{t-1,k} W^*_{t-1} Z_{t,k}}$$

$$\left(\sum_n \lambda^n_{t-1,k} W^n_{t-1}\right)\cdot Z_{t,k}$$

Тогда

$$|D_t| = W_{t-1}\sum_k \lambda^*_{t-1,k} Z_{t,k}$$




Пусть $Z_t$ - н.о.р., будем искать $\lambda^* = const$

⇓

$$\alpha E\left(\lambda^*_k + \frac{\lambda^*_k W_{t-1} Z_k \left(1-\alpha(1-\lambda^*_0)\right)}{\alpha W_{t-1}\sum_k \lambda^*_k Z_k + \alpha W_{t-1}\lambda^*_0}\right) = \lambda^*_k \qquad k=1,\dots,K$$

$$\lambda^*_k(|W_t|)$$

⇓

$$\alpha E\left(1 + \frac{Z_k\left(1-\alpha(1-\lambda^*_0)\right)}{\alpha\sum_k \lambda^*_k Z_k + \alpha\lambda^*_0}\right) = 1 \qquad k=1,\dots,K$$

⇓

$$\boxed{E\,\frac{Z_k\left(1-\alpha(1-\lambda^*_0)\right)}{\sum_{i=1}^{K} \lambda^*_i Z_i + \lambda^*_0} = 1-\alpha}$$

<u>Почему решение существует?</u>

(и существует ли?)

⑤ <u>Устойчивость</u> (+ уравнение для доли капитала)

$$y \sim \frac{W^1_{t-1}}{W^1_{t-1}+W^2_{t-1}}$$

$$Y_t \sim f(y,s) \qquad Y_t = \frac{W^1_t}{W^1_t + W^2_t}$$

$$\frac{W_t^1}{|W_t|} = \frac{\alpha}{|W_t|}\left(\sum_k \frac{\lambda_k^1 W_{t-1}^1}{\lambda_k^1 W_{t-1}^1+\lambda_k^2 W_{t-1}^2}\left(\left(\lambda_k^1 W_{t-1}^1+\lambda_k^2 W_{t-1}^2\right) z_{t,k} + \lambda_k^1 W_t^1 + \lambda_k^2 W_t^2\right) + \lambda_0^1 W_{t-1}^1\right)$$

$$z_{t,0}\equiv 1 \;\Big|\; = \frac{\alpha}{|W_t|}\left(\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 W_{t-1}^1 z_{t,k} + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}^1}{\lambda_k^1 Y_{t-1}^1+\lambda_k^2 Y_{t-1}^2}\cdot\left(\lambda_k^1 W_t^1+\lambda_k^2 W_t^2\right)\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{W_{t-1}^1}{|W_t|}\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 z_{t,k} + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}^1}{\lambda_k^1 Y_{t-1}^1+\lambda_k^2 Y_{t-1}^2}\left(\lambda_k^1 Y_t^1+\lambda_k^2 Y_t^2\right)\right)$$

$$= \alpha\left(Y_{t-1}^1\frac{|W_{t-1}|}{|W_t|}\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 z_{t,k} + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}^1}{\lambda_k^1 Y_{t-1}^1+\lambda_k^2 (1-Y_{t-1}^1)}\left(Y_t^1(\lambda_k^1-\lambda_k^2)+\lambda_k^2\right)\right)$$

$\Downarrow$ (не прямо, но можно и так)

$$Y_t\left(1-\alpha\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}(\lambda_k^1-\lambda_k^2)}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\right) = \alpha\left(Y_{t-1}\frac{|W_{t-1}|}{|W_t|}\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 z_{t,k} + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1\lambda_k^2 Y_{t-1}}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\right)$$

$$|W_t| = \alpha\left(\sum_{k=1}^K (D_{t,k}+p_{t,k}) + \lambda_0^1 W_{t-1}^1 + \lambda_0^2 W_{t-1}^2\right)$$

$$= \alpha\left(\sum_{k=0}^K \left(\lambda_k^1 W_{t-1}^1+\lambda_k^2 W_{t-1}^2\right) z_{t,k} + \sum_{k=1}^K\left(\lambda_k^1 W_t^1+\lambda_k^2 W_t^2\right)\right)$$

$$= \alpha\left(|W_{t-1}|\sum_{k=0}^K\left(\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})\right) z_{t,k} + |W_t|\sum_{k=1}^K\left(\lambda_k^1 Y_t+\lambda_k^2(1-Y_t)\right)\right)$$

$\Downarrow$

$$|W_t| = \frac{\alpha|W_{t-1}|\sum_{k=0}^K\left(\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})\right) z_{t,k}}{1-\alpha\sum_{k=1}^K\left(\lambda_k^1 Y_t+\lambda_k^2(1-Y_t)\right)}$$

$\Downarrow$

$$Y_t\left(1-\alpha\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}(\lambda_k^1-\lambda_k^2)}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\right) = \alpha\left(Y_{t-1}\cdot\frac{1-\alpha\sum_{k=1}^K\left((\lambda_k^1-\lambda_k^2)Y_t+\lambda_k^2\right)}{\alpha\sum_{k=0}^K\left(\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})\right) z_{t,k}}\cdot\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 z_{t,k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1\lambda_k^2 Y_{t-1}}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\right)$$

$$Y_t\left(1-\alpha\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^1 Y_{t-1}(\lambda_k^1-\lambda_k^2)}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})} + \alpha Y_{t-1}\frac{\sum_{k=1}^K(\lambda_k^1-\lambda_k^2)}{\sum_{k=0}^K\left(\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})\right) z_{t,k}}\cdot\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 z_{t,k}\right)$$

$$= \alpha\left(Y_{t-1}\cdot\frac{1-\alpha(1-\lambda_0^2)}{\alpha\sum_{k=0}^K\left(\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})\right) z_{t,k}}\cdot\sum_{k=0}^K \lambda_k^1 z_{t,k} + Y_{t-1}\sum_{k=1}^K\frac{\lambda_k^1\lambda_k^2}{\lambda_k^1 Y_{t-1}+\lambda_k^2(1-Y_{t-1})}\right)$$

$$f(y,s) = \frac{A}{B}$$ | поделим на $\alpha Y_{t-1}$

$$A = \frac{1-\alpha(1-\lambda_0^2)}{\alpha \sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y)) z_k} \cdot \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k + \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_k^1 \lambda_k^2}{\lambda_k^1 y + \lambda_k^2 (1-y)}$$

$$B = \frac{1}{\alpha y} - \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_k^1(\lambda_k^1 - \lambda_k^2)}{\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y)} + \frac{\sum_{k=1}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) \cdot \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k}{\sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y)) z_k}$$

$$A\Big|_{y=1} = \frac{1-\alpha(1-\lambda_0^2)}{\alpha} + 1 - \lambda_0^2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$B\Big|_{y=1} = \frac{1}{\alpha} + \lambda_0^1 - \lambda_0^2 + \lambda_0^2 - \lambda_0^1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$A_y'\Big|_{y=1} = -\frac{1-\alpha(1-\lambda_0^2)}{\alpha\left(\sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y)) z_k\right)^2} \sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) z_k \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k - \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_k^1 \lambda_k^2 (\lambda_k^1 - \lambda_k^2)}{(\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y))^2} \Bigg|_{y=1}$$

$$= -\frac{1-\alpha(1-\lambda_0^2)}{\alpha \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k} \sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) z_k - \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2)$$

$$B_y'\Big|_{y=1} = \frac{-1}{\alpha y^2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_k^1 (\lambda_k^1 - \lambda_k^2)^2}{(\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y))^2} - \frac{(\lambda_0^2 - \lambda_0^1) \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k \cdot \sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) z_k}{\left(\sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 y + \lambda_k^2(1-y)) z_k\right)^2} \Bigg|_{y=1}$$

$$= \frac{-1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{K} \frac{(\lambda_k^1 - \lambda_k^2)^2}{\lambda_k^1} - (\lambda_0^2 - \lambda_0^1) \cdot \frac{\sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) z_k}{\sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k}$$

$$f'(y,s)\Big|_{y=1} = \frac{A'B - B'A}{B^2} = \alpha(A' - B')$$

$$= \alpha\left( \frac{\sum_{k=0}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) z_k}{\sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k} \left(-\frac{1}{\alpha} + 1 - \lambda_0^2 + \lambda_0^2 - \lambda_0^1\right) - \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^1}(\lambda_k^1 - \lambda_k^2) + \frac{1}{\alpha} - \sum_{k=1}^{K} (\lambda_k^1 - \lambda_k^2) + \sum_{k=1}^{K} \frac{(\lambda_k^1 - \lambda_k^2)}{\lambda_k^1} \right.$$

$$= \alpha\left( \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{K} \lambda_k^2 z_k}{\sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k}\right)\left(-\frac{1}{\alpha} + 1 - \lambda_0^1\right) + \frac{1}{\alpha} + \lambda_0^1 - \lambda_0^2 \right)$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{K} \lambda_k^2 z_k}{\sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k} \left(1 - \alpha(1 - \lambda_0^1)\right) + \alpha(1 - \lambda_0^2)$$

Для оптимальной стратегии имеем

$$E\,\frac{z_i\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right)}{\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k} = 1-\alpha \qquad i=1,\dots,K$$

$$\Downarrow$$

$$E\,\frac{\sum_{k=1}^K z_k\lambda_k'\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right)}{\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k} = (1-\alpha)(1-\lambda_0')$$

$$\Downarrow$$

$$E\,\frac{\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right)}{\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k} = (1-\alpha)(1-\lambda_0') + E\,\frac{\lambda_0'\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right)}{\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k}$$

$$\Downarrow$$

$$1-\alpha(1-\lambda_0') = (1-\alpha)(1-\lambda_0') + \lambda_0'\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right) E\,\frac{1}{\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k}$$

$$\lambda_0' = \lambda_0'\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right) E\left(\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k\right)^{-1}$$

$$\boxed{\left(1-\alpha(1-\lambda_0')\right) E\left(\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k\right)^{-1} = 1} \Rightarrow E\left(\sum_{k=0}^K \lambda_k' z_k\right)^{-1} = \frac{1}{1-\alpha(1-\lambda_0')}$$

Тогда $E f' = -\frac{1-\alpha(1-\lambda_0')}{\alpha(1-\lambda_0')}(\lambda_0^2-\lambda_0') - \alpha\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k'}(\lambda_k'-\lambda_k^2) -$

$$-\left(-1+\alpha\sum_{k=1}^K\frac{(\lambda_k'-\lambda_k^2)^2}{\lambda_k'} - \alpha(\lambda_0^2-\lambda_0')\right)\left(\sum_{k=1}^K\frac{(\lambda_k'-\lambda_k^2)\cdot(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\lambda_0')} + \frac{\lambda_0'-\lambda_0^2}{\alpha(1-\lambda_0')}\right)\cancel{(1+\alpha(\lambda_0'-\lambda_0^2))}$$

$$= \frac{\lambda_0'-\lambda_0^2}{\alpha(1-\lambda_0')} + \lambda_0^2-\lambda_0' - \alpha(1-\lambda_0^2) + \alpha\sum_{k=1}^K\frac{(\lambda_k^2)^2}{\lambda_k'} + 1 + \alpha(\lambda_0'-\lambda_0^2)$$

$$-\alpha\left(1+\alpha(\lambda_0'-\lambda_0^2)\right)\left(1-\lambda_0'-2(1-\lambda_0^2)+\sum_{k=1}^K\frac{(\lambda_k^2)^2}{\lambda_k'}\right)$$

$$+\alpha(\lambda_0^2-\lambda_0')\left(1+\alpha(\lambda_0'-\lambda_0^2)\right)\left(\frac{(\lambda_0^2-\lambda_0')(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\lambda_0')}+\frac{\lambda_0'-\lambda_0^2}{\alpha(1-\lambda_0')}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^K\frac{(\lambda_k^2)^2}{\lambda_k'}\cdot\alpha^2(\lambda_0^2-\lambda_0') + (\lambda_0^2-\lambda_0')\left(1-\alpha+\alpha^2\left(1-\lambda_0'-2(1-\lambda_0^2)\right)\right) + \left(\alpha+\alpha^2(\lambda_0'-\lambda_0^2)\right)\left(\frac{(\lambda_0^2-\lambda_0')(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\lambda_0')}+\frac{\lambda_0'-\lambda_0^2}{\alpha(1-\lambda_0')}\right)$$

$$-\alpha\left(1-\lambda_0'-2(1-\lambda_0^2)\right) - \alpha(1-\lambda_0^2)+1+\frac{\lambda_0'-\lambda_0^2}{\alpha(1-\lambda_0')}$$

No. 9

Date

$$E f' = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^2 (1-\alpha) + \frac{\lambda_0^2 (1-\alpha(1-\lambda_0^1))}{1-\alpha(1-\lambda_0^1)} + \alpha(1-\lambda_0^2)$$

$$= (1-\lambda_0^2)(1-\alpha) + \lambda_0^2 + \alpha(1-\lambda_0^2) = 1-\lambda_0^2+\lambda_0^2 = 1$$

Тогда $E \ln f' < 1$ (при невырожденности)

⑥ Рост богатства в равновесии

При $Y_t \equiv 1$

$$\frac{|W_t|}{|W_{t-1}|} = \frac{\alpha \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_{t,k}}{1-\alpha \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^1} = \frac{\alpha \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k}{1-\alpha(1-\lambda_0^1)}$$

$$\Rightarrow \frac{|W_{t-1}|}{|W_t|} = \frac{1-\alpha(1-\lambda_0^1)}{\alpha \sum_{k=0}^{K} \lambda_k^1 z_k} \Rightarrow E \frac{|W_{t-1}|}{|W_t|} = \frac{1-\alpha(1-\lambda_0^1)}{\alpha(1-\alpha(1-\lambda_0^1))} = \frac{1}{\alpha}$$

$\Rightarrow$ Богатство $|W_t|$ в среднем убывает $\Rightarrow$ не естественная модель