15.12.21. Богдан кр1. Токаева Александра 509 группа

(1) $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1, 2, \dots, n;\ u_0 = 0;\ \beta \in \mathbb{R}^1$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0;\ 0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

а) по наблюдениям $u_1 \dots u_n$ построить среднеквадр. оптимальный прогноз ненаблюдаемой сл. вел. $u_{n+k},\ k \in \mathbb{N}$. Обозначим этот прогноз u_{n+k}^*

б) пусть $\Delta_k = E(u_{n+k} - u_{n+k}^*)^2$ – ск ошибка прогноза.

Чему экв. Δ_k при $k \to \infty$ для $|\beta| < 1;\ |\beta| = 1;\ |\beta| > 1$?

Решение: а) напомним задачу построения оптим. с.к. прогноза:

надо найти борелевскую ф-цию φ, которая решает задачу:

$$E(u_{n+k} - \varphi(u_1 \dots u_n))^2 \xrightarrow[\substack{\varphi(u_1 \dots u_n) \\ E\varphi^2(u_1 \dots u_n) < \infty}]{} \min$$

Решение этой задачи мы знаем: $u_{n+k}^* = E(u_{n+k} \mid \underbrace{F_n}_{\sigma\{u_1 \dots u_n\}})$

Вычислим его:

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t = \beta(\beta u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = \beta^t \cdot \underbrace{u_0}_{0} + \beta^{t-1}\varepsilon_1 + \dots + \beta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \text{сл. вел. } \varepsilon_{t+1} \text{ и } \{u_t, u_{t-1} \dots u_1\} \text{ – независимы}$$

$$\Rightarrow u_{n+k} = \beta^k \cdot u_n + \beta^{k-1}\varepsilon_{n+1} + \dots + \beta\varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k}$$

$$\Rightarrow u_{n+k}^* = E(u_{n+k} \mid \sigma(u_1 \dots u_n)) = E(\beta^k u_n + \beta^{k-1}\varepsilon_{n+1} + \dots + \beta\cdot\varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} \mid \sigma(u_1 \dots u_n)) \underset{\varepsilon_{n+1} \dots \varepsilon_{n+k} \perp \sigma(u_1 \dots u_n)}{\overset{\text{поэтому}}{=}}$$

$$\underset{\substack{u_n \text{ – измеримо} \\ \text{относ. } \sigma(u_1 \dots u_n)}}{=} \beta^k \cdot u_n + \beta^{k-1} \cdot \underbrace{E\varepsilon_{n+1}}_{0} + \dots + \beta \cdot \underbrace{E\varepsilon_{n+k-1}}_{0} + \underbrace{E\varepsilon_{n+k}}_{0} = \beta^k u_n$$

б) посчитаем ск ошибку прогноза u_{n+k}^*:

$$\Delta_k = E(u_{n+k} - u_{n+k}^*)^2 = E(u_{n+k} - \beta^k \cdot u_n)^2 = E(\beta^{k-1}\varepsilon_{n+1} + \dots + \beta\varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k})^2 \overset{\text{т.к. } E\varepsilon_{n+i} = 0}{=}$$

$$= D(\beta^{k-1}\varepsilon_{n+1} + \dots + \beta\varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k}) \underset{\varepsilon_{n+i} \text{ – незав.}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} D(\beta^i \cdot \varepsilon_{n+k-i}) = \sigma^2(1 + \beta^2 + \dots + \beta^{2(k-1)}) = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2}, & \text{если } |\beta| \ne 1 \\ \sigma^2 \cdot k, & \text{если } |\beta| = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_k \underset{k \to \infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}, & \text{если } |\beta| < 1 \\ \sigma^2 \cdot k, & \text{если } |\beta| = 1 \\ \sigma^2 \cdot \dfrac{\beta^{2k}}{\beta^2 - 1} & \text{если } |\beta| > 1. \end{cases}$$

Ответ: а) $u_{n+k}^* = \beta^k \cdot u_n$

б) $$\Delta_k \underset{k \to \infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}, & \text{если } |\beta| < 1 \\ \sigma^2 \cdot k, & \text{если } |\beta| = 1. \\ \sigma^2 \cdot \dfrac{\beta^{2k}}{\beta^2 - 1}, & \text{если } |\beta| > 1 \end{cases}$$

(2) $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. $E\varepsilon_1 = \vartheta$; $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

Корни характеристич. ур-я по модулю меньше единицы.

а) Выписать спектральную плотность стац. решения

б) Пусть $\bar{u}_n = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} u_t$. Сходится ли $\bar{u}_n$ в с.к.? Если да, то куда?

в) Пусть $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ при некот. $\delta > 0$, и $\exists$ плотность $g(x)$ у ε_1 по мере Лебега. Является ли $\bar{u}_n$ асимпт. гаус. норм. сл. вел? Если да, то каковы параметры асимпт. закона?

<u>Решение</u>: а) Нам дана авторегрессия с ненулевым средним, поэтому сделаем замену, как в лекциях, чтобы свести её к случаю нулевого среднего.

Пусть $\eta_t = \varepsilon_t - \vartheta \Rightarrow E\eta_t = 0;\ E\eta_t^2 = \sigma^2$. - н.о.р. с.в.

$\Rightarrow u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \vartheta + \eta_t$

Теперь найдем μ из условия $\vartheta = (1-\beta_1-\beta_2)\mu$, т.е. $\mu = \frac{\vartheta}{1-\beta_1-\beta_2}$

причем $1-\beta_1-\beta_2 \neq 0$, т.к. единица - не корень хар. ур-я (т.к. по усл. все корни < 1 по модулю)

$\Rightarrow u_t - \mu = \beta_1(u_{t-1}-\mu) + \beta_2(u_{t-2}-\mu) + \eta_t$

Обозн. $w_t := u_t - \mu$

$\Rightarrow$ получим: $\begin{cases} u_t = \mu + w_t \\ w_t = \sum_{j=1}^{2} \beta_j w_{t-j} + \eta_t \end{cases}$

Для w_t мы знаем стац. решение: $\sum_{j \geq 0} \delta_j \cdot \eta_{t-j}$

$\Rightarrow$ Для u_t - тоже знаем: $u_t = \mu + \sum_{j \geq 0} \delta_j \eta_{t-j}$; $Eu_t = \mu = \frac{\vartheta}{1-\beta_1-\beta_2}$

Поэтому $cov(u_t; u_{t+\tau}) = cov(w_t; w_{t+\tau})$ - т.е. после сдвига на константу ковар. ф-ция не изменилась.

$\Rightarrow$ и спектральная плотность не изменилась: $f_u(\lambda) = f_w(\lambda)$

А $f_w(\lambda)$ мы сейчас посчитаем:

$w_t = \sum_{j \geq 0} \delta_j \eta_{t-j} \Rightarrow f_w(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 \cdot \underbrace{\frac{\sigma^2}{2\pi}}_{f_\eta(\lambda)}$, где $\varphi(\lambda) = \sum_{j \geq 0} \delta_j e^{-i\lambda j}$

спектр. плотность белого шума

С другой стороны, $\eta_t = w_t - \beta_1 w_{t-1} - \beta_2 w_{t-2} \Rightarrow \underbrace{f_\eta(\lambda)}_{\frac{\sigma^2}{2\pi}} = |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \cdot f_w(\lambda)$, где $\tilde{\varphi}(\lambda) = 1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}$

$$\Rightarrow f_u(\lambda) = f_w(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot |\varphi(\lambda)|^2 = \frac{\frac{\sigma^2}{2\pi}}{|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{2\pi|1-\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|^2}}$$

стр 2

б) $\bar{u}_n = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t$

в разделе про оценивание среднего на лекциях мы выяснили, что $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{с.к.} Eu_t \Leftarrow F(\lambda)$ непрерывна в нуле.

но у нас $F(\lambda)$ даже просто непрерывна (а не только в нуле), т.к. в пункте а) мы нашли её плотность. $\Rightarrow n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{с.к.} Eu_t = \mu = \boxed{\frac{\vartheta}{1-\rho_1-\rho_2}}$

в) Условие $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ - намекает нам на ЦПТ для посл-тей с сильным перемешиванием.

имеем: • $\{w_t\}$ - строго стац. посл-ть, т.к. w_t - н.о.р.; $Ew_t = 0$; $Ew_t^2 = \sigma^2$ ($w_t = u_t - \mu$)

с сильным перемешиванием - да, см. результат Макарена, откуда мы знаем, что так, причем $\alpha(\tau) \le c\lambda^{\tau}$; $0<\lambda<1$.

• $E|w_1|^{2+\delta} = E|u_1-\mu|^{2+\delta} \le \frac{1}{2}\left(2|u_1|\right)^{2+\delta} + \frac{1}{2}\left(2|\mu|\right)^{2+\delta} < \infty$, т.к. $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$.

• $\sum_{\tau\ge1} \left(\alpha(\tau)\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$, т.к. $\alpha(\tau) \le c\lambda^{\tau}$, где $0<\lambda<1$, а ряд $\sum_{\tau\ge1} \lambda^{\tau\cdot\frac{\delta}{2+\delta}}$ - сход.

• $\Delta^2 := Ew_0^2 + 2\sum_{\tau\ge1} Ew_0 w_\tau = R(0) + 2\sum_{\tau\ge1} R(\tau) = 2\pi f_w(0)$ - но $f_w(0)$ мы нашли в пункте а)

см. теорему про $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} R(\tau)$

поэтому все усл. ЦПТ для посл-тей с сильным перемешиванием выполнены

$\Rightarrow n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \underbrace{w_t}_{u_t-\mu} \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2)$, где $\Delta^2 = 2\pi f_w(0) = \frac{\sigma^2}{|1-\rho_1-\rho_2|^2}$

$\Rightarrow n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{d} N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{|1-\rho_1-\rho_2|^2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n}(\bar{u}_n) \xrightarrow{d} N\left(\frac{\vartheta}{1-\rho_1-\rho_2}; \frac{\sigma^2}{|1-\rho_1-\rho_2|^2}\right)}$

Ответ: а) $f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi|1-\rho_1 e^{-i\lambda} - \rho_2 e^{-2i\lambda}|^2}$

б) Да, сходится в с.к. к $\frac{\vartheta}{1-\rho_1-\rho_2}$

в) Да, асимпт. гаус: $N\left(\frac{\vartheta}{1-\rho_1-\rho_2}; \frac{\sigma^2}{|1-\rho_1-\rho_2|^2}\right)$

3. $u_t = \varepsilon_t - \alpha\varepsilon_{t-1}$; $t=1,2..n$; $\varepsilon_0 = 0$;

$\{\varepsilon_t; t\ge1\}$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл. вел.

Выписать ур-е правдоподобия для оценки α методом макс. правдоподобия

Решение:

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \\ u_2 = \varepsilon_2 - \alpha\varepsilon_1 \\ u_3 = \varepsilon_3 - \alpha\varepsilon_2 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = u_1 \\ \varepsilon_2 = \alpha\varepsilon_1 + u_2 = \alpha u_1 + u_2 \\ \varepsilon_3 = \alpha\varepsilon_2 + u_3 = \alpha(\alpha u_1 + u_2) + u_3 = \alpha^2 u_1 + \alpha u_2 + u_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{= B^{-1}} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = B^{-1} u$$

$$u = B\varepsilon$$

причём совместную плотность ε_t - мы знаем, т.к. нор. с.в. $N(0,1)$

$$g_\varepsilon(\bar{x}) = \prod_{t=1}^{n} g(x_i)$$

$$\Rightarrow g_u(x_1 \dots x_n; \alpha) \overset{u = B\varepsilon}{=} \frac{g_\varepsilon(B^{-1}\bar{x})}{\underbrace{|\det B|}_{=1}} = \prod_{i=1}^{n} g(\alpha^{i-1}x_1 + \alpha^{i-2}x_2 + \dots x_i)$$

Теперь вместо x_i подставляем наблюдения u_i, вместо α – подставляем θ.
И берём логарифм, чтобы произведение перевести в сумму:

$$\Rightarrow \ln g_u(u_1 \dots u_n; \theta) = \sum_{t=1}^{n} \ln g(u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2}u_2 + \theta^{t-1}u_1) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2}u_2 + \theta^{t-1}u_1)^2}{2}} \longrightarrow \max_{\theta \in \mathbb{R}}$$

Это экв. $\sum_{t=1}^{n} (u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2}u_2 + \theta^{t-1}u_1)^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}}$

Продиф. по θ: $\sum_{t=1}^{n} 2(u_{t-1} + \dots + (t-2)\theta^{t-3}u_2 + (t-1)\theta^{t-2}u_1)(u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2}u_2 + \theta^{t-1}u_1) = 0.$

Ответ: $\sum_{t=1}^{n} 2(u_{t-1} + \dots + (t-2)\theta^{t-3}u_2 + (t-1)\theta^{t-2}u_1)(u_t + \theta u_{t-1} + \dots + \theta^{t-2}u_2 + \theta^{t-1}u_1) = 0.$
Корень этого ур-я – и есть оценка для α

4) $\begin{cases} u_t = \theta + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\delta \xi_t;\ t = 1 \dots n \end{cases}$

$\{\varepsilon_t\}$ – нор; $E\varepsilon_t = 0$; ε_t имеет ф.р. $G(x)$ и $\exists\, g(x) = G'(x)$, причём $g(x) = g(-x)$

Сл. вел. $\{\xi_t\}$ – нор. с неизв. распр. μ_ξ

$\{z_t^\delta\}$ – нор. $Br(\delta)$

Посл-ти $\{u_t\}; \{z_t^\delta\}; \{\xi_t\}$ – незав.

Пусть F – любая непр. строго возр. симм. относ. нуля (т.е. $F(x) + F(-x) = 1$) ф.р.

Ур-е для оценивания θ: $\sum_{t=1}^{n} [F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}] = 0.$

а) Сколько решений у этого ур-я?

б) Есть ли решение, которое робастно? Если есть, то найти ф-я влияния и чувствительность.

Решение: а) У нас F - строго возрастает и непрерывна

$\Rightarrow \sum_{t=1}^{n}\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right)$ - строго убывает и непрерывно

причем при $\theta\to+\infty$: $\sum_{t=1}^{n}\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right)\to-\infty$

при $\theta\to-\infty$: $\sum_{t=1}^{n}\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right)\to+\infty$

$\Rightarrow \exists!$ корень.

б) найдем ф-п влияния и чувствительность.

Для $\{u_t\}$ вып. усл. сильн. перемешивания $\Rightarrow$ для y_t - тоже вып.

$\Rightarrow$ в силу ЗБЧ для посл-тей с сильным перемешиванием:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{p} E\left(F(\underset{\varepsilon_1+a+z_1^\delta\xi_1}{\underset{\shortparallel}{y_1}}-\theta)-\frac{1}{2}\right)=:\Lambda(\delta,\theta)$$

по ф-ле полной вер-ти:

$$\Lambda(\delta,\theta)=EF(y_1-\theta)-\frac{1}{2}=EF(\varepsilon_1+a+z_1^\delta\xi_1-\theta)-\frac{1}{2}=(1-\delta)EF(\varepsilon_1-(\theta-a))+\delta EF(\varepsilon_1-(\theta-a)+\xi_1)-\frac{1}{2}$$

• $\Lambda\big|_{(0,a)}=E\left(F(\varepsilon_1)-\frac{1}{2}\right)=0$, т.к. $\varepsilon_1\sim g(x)$ - четная,
а $\left(F(x)-\frac{1}{2}\right)+\left(F(-x)-\frac{1}{2}\right)=0$ - нечетная

• $\frac{\partial\Lambda}{\partial\delta}\Big|_{(0,a)}=E\left(F(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}\right)-\underbrace{E\left(F(\varepsilon_1)-\frac{1}{2}\right)}_{\shortparallel\, 0}=EF(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}$ — по модулю ≤ 1, т.к. $|F|\leq 1$.

• $\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\Big|_{(0,a)}=(EF(\varepsilon_1))'$

$$\Rightarrow IF(\theta_\delta;\mu_\xi)=\frac{EF(\varepsilon_1-\xi_1)-\frac{1}{2}}{(EF(\varepsilon_1))'}\ ;\ \mu_\xi \text{ - любое}$$

$\Rightarrow GES(\theta_\delta;\mu_\xi)<\infty$ (т.к. $EF(\varepsilon_1+\xi_1)$ - ограничено, т.к. $|F|\leq 1$) $\Rightarrow$ ч.т.д.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ответ: а) Один корень}\\ \text{б) } IF=\dfrac{EF(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}}{EF'(\varepsilon_1)}\\ GES(\theta_\delta;\mu_\xi)<\infty.\end{array}}$$

(5) $u_t=\beta u_{t-1}+\varepsilon_t$; $|\beta|<1$; $\beta\neq0$; $\{\varepsilon_t\}$ - нор. св; $E\varepsilon_1=0$; $0<E\varepsilon_1^2<\infty$.

Наблюдаем $y_t=u_t+z_t^\delta\xi_t$; $t=-1,0\ldots n$; $E\xi_1^2<\infty$.

Оцениваем β - решение ур-я $\sum_{t=1}^{n}y_{t-2}(y_t-\theta y_{t-1})=0$.

найти IF и GES.

Решение: В силу ЗБЧ для посл-тей с сильным перемешиванием,

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_{t-2}(y_t - \theta y_{t-1}) \xrightarrow{P} E y_{-1}(y_1 - \theta y_0) =: \Lambda(\gamma, \theta)$$

Тогда по ф-ле полной вер-ти:

$$\Lambda(\gamma,\theta) = (1-\gamma)^3 E u_{-1}(u_1 - \theta u_0) + \gamma(1-\gamma)^2 E(u_{-1} + \xi_{-1})(u_1 - \theta u_0) + \gamma(1-\gamma)^2 E u_{-1}(u_1 - \theta u_0 - \theta\xi_0) +$$
$$+ \gamma(1-\gamma)^2 E u_{-1}(u_1 + \xi_1 - \theta u_0) + \gamma^2(1-\gamma) E(u_{-1} + \xi_{-1})(u_1 - \theta u_0 - \theta\xi_0) + \gamma^2(1-\gamma) E(u_{-1} + \xi_{-1})(u_1 + \xi_1 - \theta u_0) +$$
$$+ \gamma^2(1-\gamma) E u_{-1}(u_1 + \xi_1 - \theta u_0 - \theta\xi_0) + \gamma^3 E(u_{-1} + \xi_{-1})(u_1 + \xi_1 - \theta u_0 - \theta\xi_0)$$

Отсюда • $\Lambda(0,\beta) = E u_{-1}\varepsilon_1 = E u_{-1} E\varepsilon_1 = 0.$

• $\dfrac{\partial\Lambda(0,\beta)}{\partial\gamma} = -3E u_{-1}\varepsilon_1 + E(u_{-1} + \xi_{-1})\varepsilon_1 + E u_{-1}(\varepsilon_1 - \beta\xi_0) + E u_{-1}(\varepsilon_1 + \xi_1)$

$\Rightarrow$ поскольку $E u_{-1}\varepsilon_1 = 0$, то $\dfrac{\partial\Lambda(0,\beta)}{\partial\gamma} = E\xi_{-1}\varepsilon_1 + E u_{-1} E(\xi_1 - \beta\xi_0)$

• $\dfrac{\partial\Lambda(0,\beta)}{\partial\theta} = E u_{-1} u_0$

$$\Rightarrow IF(\theta_\gamma; \mu_\xi) = \frac{E\xi_{-1}\varepsilon_1 + E u_{-1} E(\xi_1 - \beta\xi_0)}{E u_{-1} u_0.}$$

$\Rightarrow GES(\theta_\gamma; \mu_\xi) = \infty$

Ответ: $IF(\theta_\gamma; \mu_\xi) = \dfrac{\overset{=0}{E\xi_{-1}\varepsilon_1} + E u_{-1} E(\xi_1 - \beta\xi_0)}{E u_{-1} u_0}$

$GES = \infty$