17.12.20. ЧМ. Кр3.

(1.) $d_k > 0;\ k = 1 \dots n.$

Оп-р: $\|x\|_* = \max\limits_k (d_k |x_k|)$ – векторная норма

найти подчиненную матричную норму.

Решение: $\|x\|_*$ – векторная норма, если:

1) $\|x\|_* = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – верно, т.к $\max\limits_i (d_i \cdot |x_i|) = 0 \Leftrightarrow$ все $x_i = 0$. $\uparrow d_i > 0$

$\|x\|_* > 0,\ \forall x \neq \bar{0}$ – верно, т.к если $\exists i: x_i \neq 0$, то $\max\limits_i (d_i |x_i|) \geq \underset{>0}{d_{i_0}} \underset{>0}{|x_{i_0}|} > 0$.

2) $\|\alpha x\|_* = |\alpha| \cdot \|x\|_*$ – верно, т.к $\|\alpha x\|_* = \max\limits_i (d_i \cdot |\alpha x_i|) = |\alpha| \cdot \underbrace{\max\limits_i (d_i |x_i|)}_{\|x\|_*}$

3) $\|x+y\|_* \leq \|x\|_* + \|y\|_*$ – верно,

т.к $\|x+y\|_* = \max\limits_i (d_i \cdot |x_i + y_i|) \leq \max\limits_i (d_i \cdot (|x_i| + |y_i|)) \leq \underbrace{\max\limits_i (d_i |x_i|) + \max\limits_i (d_i |y_i|)}_{\|x\|_* + \|y\|_*}$

Найдем подчинённую матр. норму.

$$\|Ax\|_* = \max_i \left(d_i \cdot \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j\right|\right) \leq \max_i \left(d_i \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \max\limits_j |x_j| \cdot \frac{d_j}{d_j}}\right) \leq \max_i \left(d_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{d_j}\right) \cdot \|x\|_*$$

$$\Rightarrow \|A\|_* = \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \leq \max_i \left(d_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{d_j}\right)$$

Докажем, что это достигается

пусть $\max\limits_i$ имеет место при $i = i_0$.

возьмем $\bar{x} := (\mathrm{sign}(a_{i_0 1}); \mathrm{sign}(a_{i_0 2}) \dots \mathrm{sign}(a_{i_0 n}))^T$.

тогда все н-ва обратятся в равенства

$$\Rightarrow \boxed{\|A\|_* = \max_i \left(d_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{d_j}\right)}$$ ответ.

(2.) Оценить $\mathrm{cond}_2(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ 0 & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: A – симм $\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{max}(A)$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}(A)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

Как найти $\lambda_{max}(A)$ и $\lambda_{min}(A)$?

У нас была матрица

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix} \qquad h = \frac{1}{n+1}$$

Её собств. числа: $\lambda_{(0)}^{(k)} = \frac{4}{h^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k h}{2}\right)$

но $A = h^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot B$

$\Rightarrow$ собств. числа матрицы A: $\cancel{h^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\cancel{h^2}} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k h}{2}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k h}{2}\right)$; $h = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ λ_{min} – будет при $k=1$: $\lambda_{min}(A) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$

λ_{max} – будет при $k=n$: $\lambda_{max}(A) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi n}{2(n+1)}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$

$\Rightarrow cond_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)} = ctg^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \approx \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)} \approx \frac{4(n+1)^2}{\pi^2}$

$\frac{\sin x}{x} \sim 1$ при $x \to 0$

$\boxed{\text{Ответ: } cond_2(A) = ctg^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \approx \frac{4(n+1)^2}{\pi^2}}$

3. Найти значения τ, для кот. итер. процесс

$x^{k+1} = (I - \tau A)x^k + \tau b$; $A = \begin{pmatrix} 5 & 0.8 & 3.2 \\ 2.5 & 2 & 0.8 \\ 2 & 0.8 & 4 \end{pmatrix}$ – сход. к решению $Ax=b$ с произв. x_0.

Решение: по теореме-критерию, будет сходимость с любого нач. приближения,

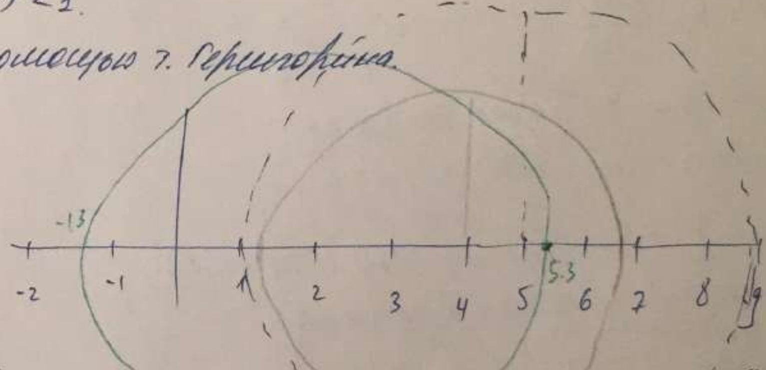
$\Leftrightarrow \lambda_i(I - \tau A) < 1$.

Оценим спектр A с помощью т. Гершгорина.

$i=1$: в 5 с $R=4$

$i=2$: в 2 с $R=3.3$

$i=3$: в 4 с $R=2.8$



1 способ

$\Rightarrow$ мы видим, что максимальное по модулю собств. значение – оценивается через правую границу на действ. оси.

(хотя л значения-то комплексные!)

Если $\tau > 0$ – то $1 - \tau\lambda < 1$ – и так верно.

$\Rightarrow$ надо $1 - \tau\lambda > -1 \Rightarrow \tau\lambda < 2 \Rightarrow \tau < \frac{2}{\lambda} < \frac{2}{M}$

$\Rightarrow$ метод сход для $\tau \in \left(0; \frac{2}{M}\right)$

У нас $M = 9 \Rightarrow \tau \in \left(0; \frac{2}{9}\right)$. $\boxed{\text{Ответ: } \tau \in \left(0; \frac{2}{9}\right)}$

2 способ

Или так: $|Im(\lambda)| \leq 4$; $\boxed{2 < Re(\lambda) \leq 9.}$ – ну корни найти.

объяснение этого см. в конце.

$\lambda(I - \tau A) = 1 - \tau u - i\tau v$; $|v| \leq 4$; $2 < Re(\lambda) \leq 9$.

$\Rightarrow |\lambda|^2 = (1 - \tau u)^2 + \tau^2 v^2 < 1$. – хотим.

$\Rightarrow \tau < \frac{2u}{u^2 + v^2}$

$\min\limits_{u,v} \frac{u}{u^2+v^2} = \min\limits_{u} \frac{u}{u^2+16} = \frac{2}{2+16} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

$\Rightarrow \tau \in \left(0; 2 \cdot \frac{1}{9}\right) = \left(0; \frac{2}{9}\right)$

продолжение к 3.

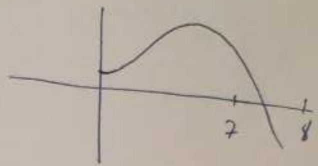
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0.8 & 3.2 \\ 2.5 & 2-\lambda & 0.8 \\ 2 & 0.8 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left((2-\lambda)(4-\lambda)-0.64\right)-0.8\left(2.5(4-\lambda)-1.6\right)+3.2\left(2.5\cdot 0.8-2(2-\lambda)\right)=$$

$$=(5-\lambda)(8-6\lambda+\lambda^2-0.64)-0.8(10-2.5\lambda-1.6)+3.2(2-4+2\lambda)=$$

$$=(5-\lambda)(7.36-6\lambda+\lambda^2)-0.8(8.4-2.5\lambda)+3.2(-2+2\lambda)=$$

$$=\underline{36.8}-30\lambda+5\lambda^2-7.36\lambda+6\lambda^2-\lambda^3-\underline{6.72}+2\lambda-\underline{6.4}+6.4\lambda=$$

$$=-\lambda^3+11\lambda^2-28.96\lambda+23.68.$$



по т. Виета: $x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a}=11$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}=28.96$

$x_1x_2x_3=\frac{-d}{a}=-23.68$

Если есть компл. ~~корни~~ корни — то они компл. сопр. — т.к. у хар. многоч. ~~в~~ вещ. значения.

$f(x)=-x^3+11x^2-28.96x+23.68$

$\left.\begin{array}{l} f(0)=23.68>0. \\ f(9)=-74.96 \end{array}\right\}$ ⇒ на $(0,9)$ — есть корень (он. вещ.) и он отделен от нуля.

$\left.\begin{array}{l} f(7)>0 \\ f(8)<0. \end{array}\right.$ ⇒ корень $\in[7;8]$.

И ещё 2 компл-сопр. корня: $a\pm ib$. $\Rightarrow x_1+x_2+x_3=\underbrace{x_1}_{>7}+2a=11.$ $\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1<8 \Rightarrow a>3/2 \\ 2a<4 \Rightarrow a<2. \end{array}\right.$

$\Rightarrow \frac{3}{2}<Re(\lambda)\le 9$ ⇒ $\underline{\text{2 способ точно работает.}}$

$\left(\text{где } |Im(\lambda)|\le 4;\ \frac{3}{2}<Re(\lambda)\le 9\right)$

4. Найти все α, β, при которых метод Гаусса-Зейделя сход. для $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

<u>Решение</u>: Метод Зейделя, это когда $A = B + C$, где $B = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

И сам процесс: $Bx^{n+1} + Cx^{n} = b$.

$\Rightarrow$ перейдем к погр-тям (т.е. вычтем $Bx + Cx = b$):

$\Rightarrow r^{n+1} = -B^{-1}Cr^{n}$.

$\Rightarrow$ по теореме критерию: метод сход $\Leftrightarrow$ все $\lambda_i(B^{-1}C) < 1$.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det B = \alpha^3$

$$B^* = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B^*)^T = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -\alpha\beta & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot (B^*)^T = \frac{1}{\alpha^3} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -\alpha\beta & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha^2} & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha^2} & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Её собств. значения: $\lambda_{1,2} = 0$; $\lambda_3 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$

Все $|\lambda_i| < 1$, если $\left|\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right| < 1$, т.е $|\beta| < |\alpha|$.

$\boxed{\text{Ответ: при } |\beta| < |\alpha|.}$

(5.) пусть $A = A^T > 0$; $0 < m \le \lambda(A) \le M$.

Найти наилучший по скорости сходимости итер. процесс вида

$$x^{k+1} = x^k - P_1(A)(Ax^k - b); \quad P_1(t) = \alpha t + \beta.$$

Решение: $x^{k+1} = x^k - (\alpha A + \beta)(Ax^k - b) = x^k - (\alpha A^2 + \beta A)x^k + (\alpha A + \beta)b = (1 - \alpha A^2 - \beta A)x^k + (\alpha A + \beta)b.$

переходим к погр-сти:

$$r^{n+1} = \underbrace{(1 - \alpha A^2 - \beta A)}_{\text{многочлен } P(A)} r^n; \quad \|r^{n+1}\| \le \|1 - \alpha A^2 - \beta A\| \, \|r^n\|.$$

Мы знаем, что если λ - собств. знач. A — то $P(\lambda)$ - это собств. знач. $P(A)$

$$\Rightarrow \|1 - \alpha A^2 - \beta A\| = \max_{\lambda \in [m;M]} |1 - \alpha \cdot \lambda^2 - \beta \lambda|.$$

И мы хотим $\min\limits_{\alpha,\beta} \max\limits_{\lambda \in [m;M]} |1 - \alpha \cdot \lambda^2 - \beta\lambda|$

А такую задачу мы умеем решать - это будет многочлен Чебышёва на $[m, M]$, нормированный на младший коэф.

$T_2(t) = 2t^2 - 1$; $t \in [-1;1]$.

$x = \frac{m+M}{2} + \frac{M-m}{2} \cdot t$; $x \in [m;M]$.

$2x = m + M + t \cdot (M-m) \Rightarrow t = \frac{2x - (m+M)}{M-m}$

$$\Rightarrow T_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{2x - (m+M)}{M-m}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{4x^2}{(M-m)^2} - \frac{8x \cdot (m+M)}{(M-m)^2} + \frac{2 \cdot (m+M)^2}{(M-m)^2} - 1$$

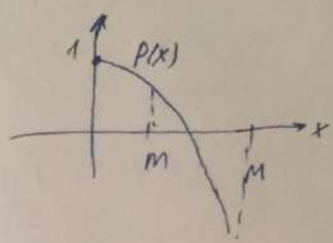
Делим его на своб. член:

$$\Rightarrow P(x) = \frac{\frac{8x^2}{(M-m)^2} - \frac{8(M+m)x}{(M-m)^2} + \frac{2(M+m)^2}{(M-m)^2} - 1}{\frac{2(M+m)^2}{(M-m)^2} - 1} \stackrel{?}{=} 1 - \alpha x^2 - \beta x$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-8}{2(M+m)^2 - (M-m)^2} = \boxed{\frac{-8}{M^2 + 6Mm + m^2}}$$

$$\beta = \frac{-(-8(M+m))}{2(M+m)^2 - (M-m)^2} = \boxed{\frac{8(M+m)}{M^2 + 6Mm + m^2}}$$

Но можно было и так: $1 - \alpha x^2 - \beta x$ – это парабола:



min будет, когда $|P(m)| = |P(M)|$

$$\Rightarrow 1 - \alpha m^2 - \beta m = -(1 - \alpha M^2 - \beta M)$$

т.е α и β – удовл. $\alpha(M^2 + m^2) + \beta(M+m) - 2 = 0.$

Дата Предмет Класс Бланк № Номер комплекта бланков Страница из

(6.)

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -0,5-\lambda & 1 & -0,5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0,5-\lambda & 1 & -0,5 & 0 \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \end{pmatrix} -$$

$\Rightarrow \Delta_n = (-0,5-\lambda)\cdot\Delta_{n-1}.$ — разложили по 1 столбцу.

$\Rightarrow \Delta_n = (-0,5-\lambda)^n$

$\Rightarrow \lambda = 0.5.$

Ищем собств. вектор: $\lambda = 0,5.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.5 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 = (1, 0 \dots 0)$ — собств.

$\Rightarrow$ Если взять $r^0 := e_1$

$\cancel{r^{n+1} = (I-\tau A) r^n, \Rightarrow r^{n+1} = (1-0.5\tau) r^n}$

Итер. процесс: $x^{n+1} = Ax^n$

$\Rightarrow r^{n+1} = Ar^n$

$r^0 = e_1$

$\Rightarrow r^k = (0,5)^k \cdot r^0 \longrightarrow 0.$

$\Rightarrow X_{\text{точное}} - X^0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — подх.

$$\Rightarrow X^0 := X_{\text{точное}} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

α — любое