[illegible]

S_t – цена акции, она удовл ур-ю GBM: $dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dW_t$

C_t – цена опциона

$t=0$ мы продали 1 опцион и получили C_0 денег, на эти деньги купили Δ_0 единицу акций по цене S_0, т.е портфель $= \{ \underbrace{C_0 - \Delta_0 \cdot S_0}_{\text{money account}} ; \underbrace{\Delta_0}_{\text{кол-во акций (по цене } S_0)} ; \underbrace{-C_0}_{\text{стоимость опциона, который мы должны}} \}$ $\Rightarrow$ тек. стоимость $= C_0 - \Delta_0 \cdot S_0 + \Delta_0 \cdot S_0 - C_0 = 0.$

$t=t$ портфель $= \{ M_t ; \underbrace{\Delta_t}_{\text{акций по цене } S_t} ; \underbrace{-C_t}_{\text{стоимость 1 опциона, который мы должны}} \}$ $\Rightarrow$ тек. стоимость $= M_t + \Delta_t \cdot S_t - C_t.$

$t=t+dt$ портфель $= \{ M_{t+dt} ; \underbrace{\Delta_t}_{\text{акций по цене } S_{t+dt}} ; -C_{t+dt} \}$

$$M_{t+dt} = M_t \cdot e^{r_t dt} \approx M_t(1 + r_t dt) = M_t + M_t r_t dt$$

$$-C_{t+dt} = -C_t - dC_t = ?$$

$t=T$ портфель $= \{ M_T ; \underbrace{\Delta_T}_{\text{по цене } S_T} ; -C_T \}$, $\quad -C_T = -\varphi(S_T)$

Как найти dC_t? по ф-ле Ито для $C_t = f(S_t, t)$

$$\Rightarrow C_{t+dt} = C_t + dC_t = C_t + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 dt =$$

$$= C_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma dW_t$$

$$\Rightarrow \Pi_{t+dt} = M_{t+dt} + \Delta_t \cdot S_{t+dt} - C_{t+dt} =$$

$$= (M_t + M_t r_t dt) + \Delta_t(S_t + \underbrace{dS_t}_{=\mu dt + \sigma dW_t}) - \left(C_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma dW_t\right) =$$

$$= \Pi_t + \underbrace{\left(M_t r_t dt + \Delta_t \mu dt + \Delta_t \sigma dW_t - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma dW_t\right)}_{= d\Pi_t} =$$

$$= \Pi_t + \left(M_t r_t + \underbrace{\Delta_t \mu - \mu\frac{\partial f}{\partial S}}_{=0} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \sigma\underbrace{\left(\Delta_t - \frac{\partial f}{\partial S}\right)}_{=0}dW_t$$

Положим $\Delta_t := \frac{\partial f}{\partial S}$ $\Rightarrow$ портфель стал безрисковым $\Rightarrow$ он должен расти как $\Pi_t \cdot e^{r_t dt}$

$$\Rightarrow d\Pi_t = \left(M_t r_t - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt \overset{!}{=} \Pi_t(e^{r_t dt} - 1) \approx \Pi_t r_t dt$$

$\Rightarrow$ приравниваем: $M_t r_t - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \Pi_t r_t$, $\quad \Pi_t = M_t + \Delta_t \cdot S_t - C_t = M_t + \frac{\partial f}{\partial S}S_t - C_t$

$$\Rightarrow \cancel{\mu_t r_t} - \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = (\cancel{\mu_t} + \frac{\partial f}{\partial s} S_t - \underbrace{(c_t)}_{=f}) r_t$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = r_t \frac{\partial f}{\partial s} S_t - r_t f$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\sigma^2(S_t,t)}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = r_t f}$$ – ур-е BSM.

2 способ (Шипукин)

$Z = f(S_T)$ – обязательство в момент $t=T$.

B_t – безрисковый актив: $dB_t = rB_t dt$

S_t – акция: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

G_t – кол-во единиц B_t

H_t – кол-во единиц S_t

Стоимость портфеля: $\boxed{V_t = G_t B_t + H_t S_t}$

Условие самофинансируемости: $\boxed{dV_t = G_t dB_t + H_t dS_t}$ (т.к. $dV_t = G_t dB_t + \underbrace{B_t dG_t + H_t dS_t + S_t dH_t + dH_t dS_t}_{=0}$)

Ищем стратегию в виде $\begin{cases} H_t = H(t,S_t) \\ V_t = V(t,S_t) \end{cases}$

Из ф-лы Ито: $dV(t,S_t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial x}\underbrace{dS_t}_{=\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\sigma^2 S_t^2 dt =$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x} dW_t$$

С другой стороны, подставим условие, что $G_t = \frac{V_t - H_t S_t}{B_t} = e^{-rt}(V_t - H_t S_t)$ в условие самофинансирования:

$$dV_t = G_t dB_t + H_t dS_t = G_t e^{rt} r dt + H_t dS_t = e^{-rt}(V_t - H_t S_t)e^{rt}\cdot r dt + H_t \underbrace{dS_t}_{=\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t} =$$

$$= (rV_t + (\mu - r)S_t H_t)dt + \sigma S_t H_t dW_t$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = H \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \cancel{\mu x \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}}_{=H}} + \frac{\sigma^2}{2}x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rV + (\cancel{\mu} - r)xH \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + rxH + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rV}$$ – ур-е BSM.

что нужно:

Цена опциона-колл $= e^{-rT}\cdot E(X_T-K)^+$, где X_t удовл. $dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t$,

поэтому $X_t = X_0\cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$

(а S_t удовл. ур-ю $dS_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$)

Раз $X_t = \overset{\parallel S_0}{X_0}\cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$,

то $X_T - K \geq 0 \Leftrightarrow S_0\cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T} \geq K$

$\Leftrightarrow (r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T \geq \ln\frac{K}{S_0}$

$W_T \geq \dfrac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}$

$$\Rightarrow e^{-rT}\cdot E(X_T-K)^+ = e^{-rT}\cdot\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}}^{+\infty}\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma x}-K\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2T}}dx =$$

$$= e^{-rT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\cdot S_0\cdot\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}+\sigma x+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}dx - e^{-rT}\cdot K\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\cdot\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}}dx =$$

$$= e^{-rT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}S_0\cdot\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}}^{+\infty} e^{\frac{-(x-T\sigma)^2+2rT^2}{2T}}dx - e^{-rT}\cdot K\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\cdot\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}}dx = \quad y = x - T\sigma$$

$$= \cancel{e^{-rT}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}S_0\cdot \cancel{e^{rT}}\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T-T\sigma^2}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2T}}dy - e^{-rT}\cdot K\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2T}}dy = \quad z=\frac{y}{\sqrt{T}} \Rightarrow dy = \sqrt{T}dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}S_0\cdot\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\sqrt{T}dz - e^{-rT}\cdot K\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int\limits_{\frac{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\sqrt{T}dz = \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$$

$$= S_0\cdot\left(1-\Phi(-d_1)\right) - e^{-rT}\cdot K\cdot\left(1-\Phi(-d_2)\right) = \boxed{S_0\cdot\Phi(d_1) - e^{-rT}\cdot K\cdot\Phi(d_2)}$$ — то, что надо!

$\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$

А надо $V^{call} = S_0\cdot\Phi(d_1) - e^{-rT}\cdot K\cdot\Phi(d_2)$

$V^{put} = e^{-rT}K\cdot\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$

$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})T\right)$, $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)$

Пусть цена акции задаётся ур-ем броун. движения

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t \Rightarrow S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$$

Стоимость портфеля-репликатора: $V_t = V_0 + \int_0^t H_u dS_u \Rightarrow dV_t = H_t dS_t$

Найдём, какому ур-ю удовлетворяет цена опциона, чтобы понять, как надо поменять тренд у ур-я для S_t, чтобы считать матожидание в реальной мере.

$\exists\, V_t = V(t,S_t)$ — предположим

Ну по ф-ле Ито:

$$dV_t = V'_t(t,S_t)dt + V'_S(t,S_t) + \frac{1}{2}V''_{SS}(t,S_t)\overbrace{(dS_t)^2}^{\sigma^2 dt} =$$

$$= \left(V'_t(t,S_t) + \mu V'_S(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}V''_{SS}(t,S_t)\right)dt + \sigma V'_S(t,S_t)dW_t$$

С другой стороны, из ур-я стоимости портфеля:

$$dV_t = H_t dS_t = \mu H_t dt + \sigma H_t dW_t$$

Приравнивая коэф. при dt и dW_t, получаем:

$$\begin{cases} H_t = V'_S(t,S_t) \\ V'_t(t,S) + \frac{\sigma^2}{2}V''_{SS}(t,S) = 0 \text{ — ур-е теплопроводности } (*) \\ V(T,S) = f(S) \end{cases}$$

Но у нас есть теорема-ф-ла Фейнмана-Каца:

Если X_t удовл. $dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,S_t)dW_t$,

и нам нужна $V(t,x) = E_{t,x} f(X_T)$,

то $V(t,x)$ удовл. ур-ю $V'_t(t,x) + \mu(t,x)V'_x(t,x) + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}V''_{xx}(t,x) = 0$.

Смотрим на наше ур-е теплопроводности (*)

$\Rightarrow$ нам нужен процесс $dX_t = \sigma dW_t$: там тренда вообще нет.

$$\Rightarrow C_0 = V(0,X_0) = E_{X_0} f(X_0 + \sigma W_T) = E(X_0 + \sigma W_T - K)^+ \overset{W_T \sim N(0,T)}{=}$$

$$= \int\limits_{X_0+\sigma x \geq K} (X_0 + \sigma x - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx = (X_0 - K)\int\limits_{x \geq \frac{K-X_0}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx + \sigma\int\limits_{x \geq \frac{K-X_0}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}x e^{-\frac{x^2}{2T}}dx \overset{y = \frac{x}{\sqrt{T}}}{=}$$

$$= (X_0 - K)\int\limits_{y \geq \frac{K-X_0}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x \geq \frac{K-X_0}{\sigma\sqrt{T}}} y e^{-\frac{y^2}{2}}dy = (X_0 - K)\left(1 - \Phi\left(\frac{K-X_0}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right) - \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{\frac{K-X_0}{\sigma\sqrt{T}}}^{+\infty} =$$

$$= \boxed{(X_0 - K)\cdot\Phi\left(\frac{X_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(K-X_0)^2}{2\sigma^2 T}}}$$