02.10.18. Мат. анализ. Лекция 8.

пункт 4. Признаки сходимости Дирихле и Абеля

Лемма (тождество Абеля)

пусть $a_n \in \mathbb{C}$; $b_n \in \mathbb{R}$; $A_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$; $A_0 := 0$.

тогда $$\boxed{\sum_{n=k}^{m} a_n b_n = \sum_{n=k}^{m-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1} b_k, \ \forall k \geq 1; \forall m > k \ (1)}$$

▶ $\sum_{n=k}^{m} a_n b_n = \sum_{n=k}^{m} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=k}^{m} A_n b_n - \sum_{n=k}^{m} A_{n-1} \cdot b_n \overset{\text{замена индекса: } l=n-1}{=}$

$= \sum_{n=k}^{m} A_n b_n - \sum_{l=k-1}^{m-1} A_l b_{l+1} = \sum_{n=k}^{m} A_n b_n - \sum_{n=k-1}^{m-1} A_n b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1} b_k$ ◀

Теорема 1 (признак Дирихле)

пусть $a_n \in \mathbb{C}$; $b_n \in \mathbb{R}$ – монотонно стремится к нулю (3) (т.е. $b_n \downarrow 0$); $A_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$;

$\exists C > 0 \,/\, |A_k| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}$ (2) – т.е. C не зависит от k, т.е. частичные суммы A_k ограничены в совокупности.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

▶ Будем доказывать по критерию Коши.

Имеем: $\left|\sum_{n=k}^{m} a_n b_n\right| \overset{\text{см.(1) тожд. Абеля}}{=} \left|\sum_{n=k}^{m-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1} b_k\right| \leq$

$\leq \sum_{n=k}^{m-1} |A_n| \cdot \underbrace{(b_n - b_{n+1})}_{\geq 0, \text{ т.к. } b\downarrow, \text{ поэтому модуль убрали}} + \underbrace{|A_m|}_{\leq C} \cdot \underbrace{b_m}_{\geq 0} + \underbrace{|A_{k-1}|}_{\leq C} \underbrace{b_k}_{\geq 0} \leq$

$\leq C \cdot \left\{\sum_{n=k}^{m-1} (b_n - b_{n+1}) + b_m + b_k\right\} = C\{(b_k - b_{k+1}) - (b_{k+1} - b_{k+2}) + \ldots +$

$+ (b_{m-1} - b_m) + b_m + b_k\} = C\{(b_k - b_m) + b_m - b_k\} = 2Cb_k$.

В итоге, $\left|\sum_{n=k}^{m} a_n b_n\right| \leq 2C \cdot b_k$ и от m не зависит.

Но $b_k \to 0$ при $k \to \infty$ $\Rightarrow$ $2Cb_k$ можно сделать $< \varepsilon$, $\forall k > N$

$\Rightarrow$ по критерию Коши $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. ◀

Зам. Признак Лейбница – это частный случай признака Дирихле, т.к. частичные суммы A_k ограничены в совокупности: $\left|\sum_{i=1}^{k} (-1)^i\right| \leq 1$.

Примеры ① $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx) \cdot b_n, \text{ где } b_n \downarrow 0 \text{ – сход. по Дирихле}}$

надо док-ть, что частичные суммы $\sum_{i=1}^{k} |\sin ix|$ ограничены в совокупности.

пусть $A_k := \sum_{n=1}^{k} \sin nx$; $x \neq \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Имеем:

$A_k \cdot \sin\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{k} \sin nx \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left[\cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x\right] =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\Big] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$.

Итак, $|A_k| \le \frac{1}{2} \frac{|\cos\frac{x}{2}| + |\cos(k+\frac{1}{2})x|}{|\sin\frac{x}{2}|} \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} =: C(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)\cdot b_n$ сходится по Дирихле.

! Кажется, что C – не константа, т.к. она зависит от x, но при каждом фикс. x она – константа.
Но из-за этого $\frac{x}{2}$ этот ряд не будет равномерно сходиться:
он будет сход. равном. на $[\varepsilon; 2\pi-\varepsilon]$ и не будет равном. сход на $(0;2\pi)$.

② $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \text{ – сход. условно}}$

1. Он сход. условно по Дирихле
2. Докажем, что он абс. расход при $x \ne \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

В самом деле, $|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}$

$\Rightarrow \frac{|\sin nx|}{n} \geqslant \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n} \underline{\underline{\geqslant 0}} \Rightarrow$ можно применить мажорантный признак.

Имеем: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2nx}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n}}_{\text{сход. по Дирихле}} \Rightarrow$ расход.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}$ – расход. по мажорантному признаку.

Теорема 2 (признак Абеля)

Есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$; $a_n \in \mathbb{C}$; $b_n \in \mathbb{R}$.

Если
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится – более сильное ~~слабое~~ требование ~~условие~~, чем в Дирихле
- b_n монотонна и ограничена – более слабое ~~сильное~~ требование, чем в Дирихле, т.к. если бы b_n стремилась к нулю, т.е. имела предел, то она бы огранич.

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

Имеем: (b_n) монотонна и ограничена $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim b_n =: b \in \mathbb{R}$. При этом посл-ть $(b_n - b) \downarrow$

Имеем: b – число; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. по усл $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b a_n$ сход.

Имеем: $a_n b_n = a_n b + a_n(b_n - b)$

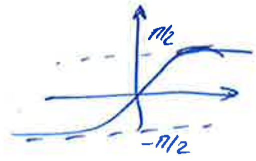
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ – сходится, только что разбирались

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ – сходится по Дирихле, т.к. посл-ть $(b_n - b)$ монотонно стремится к нулю, а частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} a_n$ ограничены, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по усл. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится ◀

Пример ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\cdot \operatorname{arctg} n$ — сход. по Абелю

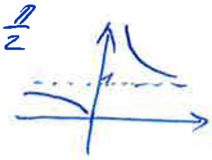
② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\cdot e^{1/n}$ — сход. по Абелю



Действительно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ — сход. по Дирихле,

а $\operatorname{arctg} n$ монотонно (возрастает) и ограничена: $-\frac{\pi}{2}\le \operatorname{arctg} n \le \frac{\pi}{2}$

и $e^{1/n}$ — монотонна и ограничена (начиная с некоторого n)



Глава 2. Функциональные ряды.

Параграф 1. Функциональные последовательности

Пункт 1. Функциональные последовательности: поточечная и равномерная сходимость

Будем рассматривать посл-ти функций (т.е функциональные посл-ти) $f_n(x): X \to \mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

Опр 1. Функциональная посл-ть $(f_n: X\to\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N})$ **сходится поточечно на X** (к $f: X\to\mathbb{R}$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{R},\ \forall x\in X$, т.е $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon; x) \mid |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N,\ \forall x\in X$.

Пример $f_n(x) := \frac{x}{n};\ x\in\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}$

Тогда $f_n(x) \to 0$ при $n\to\infty$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Опр 2 Функциональная посл-ть $(f_n(x): X\to\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N})$ **сходится равномерно** на X к функции $f: X\to\mathbb{R}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N = \underset{\text{не зависит от } x}{N(\varepsilon)} \in\mathbb{N} \mid |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N,\ \forall x\in X$. Обозн. $f_n \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на X

Следствие Условие того, что посл-ть (f_n) не сходится равномерно к f на X:

$\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0 \mid \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N$ и $\exists x_n\in X \mid |f_n(x_n)-f(x_n)|\ge\varepsilon$, для выбранных n и x_n.

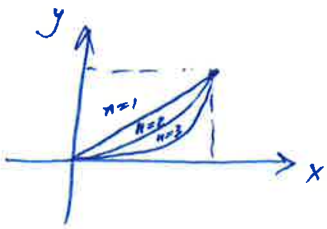
Примеры ① $f_n(x) := \frac{x}{n}$

Докажем, что $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} 0$ на $\mathbb{R}$. А на $[a;b]$ она сходится равномерно.

В самом деле, $\exists\varepsilon=1 \mid \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n=2N;\ x_n=n$: $|f_n(x_n)-f(x_n)| = \frac{|x|}{n} = \frac{n}{n} = 1 =: \varepsilon$

② $f_n(x) = x^n;\ n\in\mathbb{N};\ x\in[0;1]$

Имеем: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$



Докажем, что $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $[0;1]$.

В самом деле: • на $\{1\}$ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, т.к $|f_n(x)-f(x)| = x^n-1 = 1-1 = 0 < \varepsilon\ \forall n$.

• а на $[0;1)$ $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$, т.к. $\exists\ \varepsilon = 1/4;\ n=2N;\ x_n := 1-\frac{1}{n}$.

Тогда $|f_n(x)-f(x)| = x_n^n - 0 = \left(1-\frac{1}{2N}\right)^{2N} = e^{2N\cdot\ln\left(1-\frac{1}{2N}\right)} \to e^{-1} \Rightarrow > \frac{1}{4}$, начиная с некот. номера.

Итак, $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $\mathbb{R}$.

! $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ и на $[0;1)$ тоже. Но $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[0;a)$, $a<1$

т.к. $|f_n(x) - f(x)| = x^n < a^n < \varepsilon$, т.к. $|a|<1$. (так как $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$, начиная с некот. номера)

Зам. У нас скоро будет метод выяснения неравномерности сходимости:
$f_n \in C[0;1]$, но $f \notin C(1) \Rightarrow$ сход. неравном на $[0;1]$.

Пункт 2. Два критерия равномерной сходимости. Признак Дини

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости)

посл-ть $\{f_n(x): x\in X \to f_n(x) \in \mathbb{R}; n\in\mathbb{N}\}$ сход. равномерно на $X \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon) \mid |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall n,m>N,\ \forall x\in X.$ (1)

$\Rightarrow$ Имеем: $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \mid |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N,\ \forall x\in X$ — по усл.

$\Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \le \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f_m(x)-f(x)|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$

В итоге, $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon) \mid |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ \forall n,m>N;\ \forall x\in X$

$\Leftarrow$ Имеем: (1) $\Rightarrow \forall x\in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ — по критерию Коши для числовых посл-тей.

Теперь у нас есть $f(x)$ (т.е. мы знаем, что это такое)

Из условия (1): $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon) \mid |f_n(x) - \underbrace{f_m(x)}_{\to f(x) \text{ при } m\to\infty}| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x\in X,\ \forall n,m>N.$

$\Rightarrow$ переходя поточечно к lim при $m\to\infty$:

получим $|f_n(x)-f(x)| \overset{\text{н-во стало нестрогим, т.к. перешли к пределу}}{\le} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\underline{\underline{\forall x\in X}}$, $\forall n>N$

В итоге, $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon) \mid |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \underline{\underline{\forall x\in X}},\ \forall n>N$

$\Rightarrow f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на X ◄

28.09.18. Мат. анализ. Лекция 7.

Пример $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \doteq \ln 2.}$

Посчитаем сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; S_k – его част. сумма.

Рассмотрим функцию $f(x) := \ln(1+x)$

Имеем: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$

$\Rightarrow$ по формуле Тейлора $f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_k(x)$; $r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\theta x)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$

При $x_0 = 0$ имеем:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + r_k(x), \text{ где } r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}$$

$\Rightarrow$ при $x=1$ имеем: $\ln(2) = \underbrace{\ln 1}_{=0} + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{1^n \cdot n!} + r_k(1) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + r_k(1) = S_k + r_k(1)$

Оценим $r_k(1)$:

$$|r_k(1)| = \left| \frac{(-1)^k \cdot k!}{(1+\theta x)^{k+1}} \cdot \frac{1}{(k+1)!} \right| = \left| \frac{1}{(k+1)(1+\theta x)^{k+1}} \right| \le \frac{1}{(k+1)(1+\theta)^{k+1}} \le \frac{1}{k+1} \xrightarrow[\text{при } k \to \infty]{} 0. \quad \theta \in (0;1)$$

$\Rightarrow S_k \to \ln 2$ при $k \to \infty$.

Примеры (на теоремы Абеля и Мертенса)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$ – этот ряд сходится абсолютно

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ – этот ряд сходится условно

Тогда по теореме Мёртенса их произведение по Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = 2\ln 2.}$$

(2) Если оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся лишь условно, то их произведение по Коши может как сходиться, так и расходиться.

а) Приведём пример, когда расходится.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

Рассмотрим их произведение по Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \right)}_{=:c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}}}_{=:|c_n|}$$

Имеем: $c_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-(k-1)}}}_{n \text{ слагаемых}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ не выполнен необх. признак.

(поэтому мы имеем право группировать)

б) приведём пример, когда **сходится**.

пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Рассмотрим их произведение по Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k} \right)$

Имеем: $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k} = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{k(n+1-k)} =$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k+k}{k(n+1-k)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot 2H_n =$

$= (-1)^{n+1} \cdot \underbrace{\frac{2}{n+1} (\ln n + \gamma + \bar{o}(1))}_{=: d_n}$ при $n \to \infty$.

Имеем: • $d_n \to 0$ при $n \to \infty$

• d_n – монотонна, т.к. $d_{n+1} \overset{(*)}{=} d_n + \frac{1}{n+2} \left(\frac{2}{n+1} - d_n \right)$, а $d_n > \frac{2}{n+1}$ при $n > 1$.

$\Rightarrow$ по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot d_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

$(*)$: $d_{n+1} - d_n = \frac{2}{n+2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) +$

$+ \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{-1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{1}{n+2} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{2}{n+1} - d_n \right)$.

пункт 3. Знакочередующиеся ряды

Опр. а) Ряд $\sum a_n$ – $\boxed{\text{знакочередующийся}} \overset{def}{\iff} a_n \cdot a_{n+1} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ну или начиная с некоторого номера)

б) Ряд $\sum a_n$ – $\boxed{\text{ряд типа Лейбница}} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \bullet\ a_n \cdot a_{n+1} < 0 \\ \bullet\ |a_n| \text{ монотонно стремится к нулю} \end{cases}$

Теорема 1 (Признак Лейбница)

пусть $a_n > 0$; $n \in \mathbb{N}$; a_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

Тогда знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ сходится.

▶ Достаточно доказать, что $\exists \lim_{k\to\infty} S_{2k} \in \mathbb{R}$, т.к. $S_{2k+1} = S_{2k} + \underbrace{a_{2k+1}}_{\to 0}$

Рассмотрим посл-ть $(S_{2k} ; k \in \mathbb{N})$.

Докажем, что она монотонно возрастает и ограничена сверху.

Имеем:

а) (S_{2k}) монотонно возрастает,

т.к. $S_{2k} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2k-1} - a_{2k})}_{\geq 0}$, т.е. мы прибавляем с каждым разом неотрицательное число б) S_{2k} ограничена (сверху),

т.к. $S_{2k} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} \dots - \underbrace{a_{2k}}_{>0} \leq a_1, \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow S_{2k} \leq a_1, \forall k \in \mathbb{N}$

Итак, посл-ть $(S_{2k}; k \in \mathbb{N})$ монотонно возрастает и ограничена (сверху a_1, а снизу 0) $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} =: S \in \mathbb{R}$

Но $S_{2k+1} = S_{2k} + \underbrace{a_{2k+1}}_{\to 0} \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = S \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Ура!

Теорема 2 (оценка остатка ряда Лейбница)

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (1) выполнены условия теоремы 1, т.е. $a_n > 0$ и a_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

Тогда остаток $r_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ряда (1) обладает св-вами: $\begin{cases} \bullet\ |r_k| \leq a_{k+1} \\ \bullet\ \operatorname{sgn} r_k = (-1)^k \end{cases}$ (или 0, если все a_k одинаковы начиная с некот. номера)

Заметим, что $\begin{cases} r_{2k} = S - S_{2k} & (2) \\ r_{2k+1} = S - S_{2k+1} & (3) \end{cases}$, причём S существует — мы в теореме 1 это доказали

Рассмотрим посл-ть $(S_{2k+1}; k \in \mathbb{N})$

Имеем: $S_{2k+1} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2k} - a_{2k+1})}_{\geq 0}$

$\Rightarrow S_{2k+1}$ монотонно убывает $\Rightarrow S_{2k+1} \geq S$.

Аналогично, $S_{2k} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2k-1} - a_{2k})}_{\geq 0}$

$\Rightarrow S_{2k}$ монотонно возрастает $\Rightarrow S_{2k} \leq S$.

Итак, имеем: $\boxed{S_{2k} \underset{(4)}{\leq} S \underset{(5)}{\leq} S_{2p+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \forall p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}}$ т.е. любая чётная $\leq S \leq$ любой нечётной

- Рассмотрим $r_{2k} \overset{\text{см.(2)}}{=} S - S_{2k} \overset{\text{см.(5)}}{\geq} 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} r_{2k} = 1 = (-1)^{2k}$ (или $\operatorname{sgn} r_{2k} = 0$, если начиная с некоторого номера все a_k одинаковые)

  Кроме того, $|r_{2k}| = r_{2k} \overset{\text{см.(2)}}{=} S - S_{2k} \overset{\text{см.(5)}}{\leq} S_{2k+1} - S_{2k} = (-1)^{2k} a_{2k+1} = a_{2k+1}$

- Рассмотрим $r_{2k+1} \overset{\text{см.(2)}}{=} S - S_{2k+1} \overset{\text{см.(5)}}{\leq} 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} r_{2k+1} = -1 = (-1)^{2k+1}$

  Кроме того, $|r_{2k+1}| \overset{\text{см.(2)}}{=} S_{2k+1} - S \overset{\text{см.(4)}}{\leq} S_{2k+1} - S_{2k+2} = -(-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+2} = a_{2k+2}$

Зам. Условие монотонности не лишнее!

$\boxed{\text{т.е. } \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n \text{ — ряд}; \ a_n > 0; \ a_n \xrightarrow{\text{без монотонности}} 0 \ \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ сходится}}$

например, $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2 + (-1)^{n+1})}{n} \text{ — расход}}$,

т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2 + (-1)^{n+1})}{n} = \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{n}}_{\text{сход. по Лейбницу}} + \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расход}} \Rightarrow$ исходный ряд расход.

Однако, общий член $\to 0$:

Действительно, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2+1}{n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow |a_n| \le \frac{3}{n} \to 0.$

Примеры

① $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n} \text{ — сход. условно}}$

1. Абс. этот ряд расходится, т.к. $\frac{\ln^2 n}{n} > \frac{1}{n}$, а $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расход.
2. Докажем, что он усл. сходится по Лейбницу.

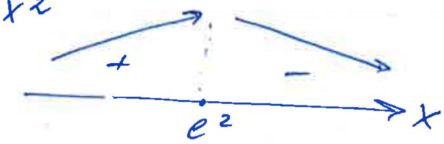
Надо проверить монотонность $\frac{\ln^2 n}{n}$

Положим $f(x) := \frac{\ln^2 x}{x}$; $x > x_0$

$$f'(x) = \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2} \le 0, \ \forall x \ge e^2$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$

т.е $2-\ln x < 0, \forall x > e^2$



$\Rightarrow f(x)$ монотонно убывает, $\forall n > e^2$, т.е $\forall n \ge 9$.

но конечное число членов не влияют на факт сходимости/расходимости $\Rightarrow$ исх. ряд сход. условно по Лейбницу

② $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n \text{ — сход. абс}}$

1. Он сход. абс, т.к. $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{2n+1} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сход. по радикальному признаку Коши.

! Если видим ряд Лейбница, то не надо сразу применять признак Лейбница, т.к ряд может сходится абсолютно.

③ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}}$ Очевидно, что этот ряд сход. абс. Надо: вычислить его сумму S с точностью до 0,01.

Имеем: это ряд Лейбница, поэтому $|S-S_k| = |r_k| \le \frac{1}{(k+1)^3+1} \le 0{,}01 \Rightarrow k=4$ — хватает просуммировать всего 4 члена

25.09.18. Мат. анализ. Лекция 6.

Пункт 2. Умножение рядов

Напоминание: мн-во пар $(a_m; a_n)$, где $m \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}$ счётно:

$(a_1;b_1) \to (a_1;b_2)$ $(a_1;b_3)$
$(a_2;b_1)$ $(a_2;b_2)$ $(a_2;b_3)$
$(a_3;b_1)$ $(a_3;b_2)$ $(a_3;b_3)$

Этот способ нумерации не единственный.

Опр 1. Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) и пусть задана нумерация (т.е биекция) $k \in \mathbb{N} \to (a_{m(k)}; b_{m(k)})$.

Тогда **произведением** рядов (1) и (2) называется ряд $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} h_k;\ h_k = a_{m(k)} \cdot b_{n(k)}}$

! Произведение двух рядов не единственно. При разных нумерациях разные произведения.

Теорема 1 (Абеля, о произведении абсолютно сходящихся рядов)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ сходится; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =: A$; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n =: B$ (A и B $\exists$, т.к. абс. сход ⇒ ряд. сход)

Тогда любое произведение рядов $\sum_1^{\infty} a_n$ и $\sum_1^{\infty} b_n$ сходится абсолютно и имеет сумму AB.

◀ 1) Докажем, что любое произведение рядов (1) и (2) сходится абсолютно.

Пусть задана произвольная биекция $k \in \mathbb{N} \to (a_{m(k)}; b_{n(k)})$

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$, где $h_k := a_{m(k)} \cdot b_{n(k)}$.

Обозн. $\hat{H}_r := \sum_{k=1}^{r} |h_k|$

$\hat{A}_r := \sum_{n=1}^{r} |a_n|$

$\hat{B}_r := \sum_{n=1}^{r} |b_n|$

Имеем: $\hat{H}_r = \sum_{k=1}^{r} |h_k| = \sum_{k=1}^{r} (|a_{m(k)}| \cdot |b_{n(k)}|) \overset{\text{просто добавили слагаемых}}{\le} \sum_{k=1}^{r} |a_{m(k)}| \cdot \sum_{k=1}^{r} |b_{n(k)}| = ?$

Положим $M(r) := \max_{k=1..r} m(k)$

$N(r) := \max_{k=1..r} n(k)$

Тогда $\hat{H}_r = ? \le \underbrace{\sum_{n=1}^{M(r)} |a_n|}_{=\hat{A}_{M(r)}} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N(r)} |b_n|}_{=\hat{B}_{N(r)}} = ??$

по критерию сходимости знакопостоянных рядов: $\hat{A}_{M(r)} \le C_A\ \forall r \in \mathbb{N}$, где $C_A > 0$ - некоторая постоянная, и $\hat{B}_{N(r)} \le C_B$, $\forall r \in \mathbb{N}$, где $C_B > 0$ - некоторая постоянная.

$\Rightarrow \hat{H}_r = ?? \le C_A \cdot C_B =: C\ \forall r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ по критерию сходимости знакоположительных рядов в обратную сторону: частичные суммы $\hat{H}_r$ ограничены $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$ сходится.

2) Рассмотрим произведение рядов (1) и (2) вида $\sum_{k=1}^{\infty} g_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)} \cdot b_{n(k)}$, где нумерацию задана так:

$(a_1;b_1) \to (a_1;b_2)$ $(a_1;b_3)$ $(a_1;b_4)$ ...
$(a_2;b_1) \leftarrow (a_2;b_2)$ $(a_2;b_3)$ $(a_2;b_4)$ ...
$(a_3;b_1) \leftarrow (a_3;b_2) \leftarrow (a_3;b_3)$ $(a_3;b_4)$ ...
$(a_4;b_1) \leftarrow (a_4;b_2) \leftarrow (a_4;b_3) \leftarrow (a_4;b_4)$ ...

Рассмотрим соответствующий этой нумерации абсолютно сходящийся (мы же доказали в пункте 1, что абсолютно сходится) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m(k)} \cdot b_{n(k)} =: G \in \mathbb{R}$

($G \in \mathbb{R}$, т.к. если ряд сходится абсолютно, то и просто сходится).

Нам надо док-ть, что посл-ть частичных сумм произведения с нашей специальной нумерацией сходится к AB. Для этого достаточно доказать, что хитренькая подпосл-ть частичных сумм нашего произведения сходится к AB, ведь подпосл-ть сходится туда же, куда и вся посл-ть, а именно к G, и если подпосл-ть сходится к AB, то $G = AB$.

Обозн. $G_n := \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$ – частичная сумма

Рассмотрим посл-ть $(G_{n^2} : n \in \mathbb{N})$. Это подпосл-ть G.

Тогда докажем, что $G_{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n)$. (3)

Действительно, докажем по индукции:

__база__: для $n = 1$: $G_1 = a_1 b_1$ – верно

__шаг__: пусть (3) верно для G_{n^2}. Докажем для $G_{(n+1)^2}$.

$$G_{(n+1)^2} = G_{n^2} + b_{n+1}(a_1 + \ldots + a_{n+1}) + a_{n+1}(b_1 + \ldots + b_n) =$$

$$= \underbrace{A_n \cdot B_n}_{\substack{G_{n^2} = A_n B_n \\ \text{по предп. инд.}}} + b_{n+1} \cdot A_n + b_{n+1} \cdot a_{n+1} + a_{n+1} \cdot B_n = (A_n + a_{n+1})(B_n + b_{n+1}) = A_{n+1} \cdot B_{n+1}.$$

Итак: $\begin{cases} G_{n^2} = A_n \cdot B_n \xrightarrow{n \to \infty} AB \\ G_p \xrightarrow[p \to \infty]{} G \ \forall p \end{cases} \Rightarrow G_p \to AB \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k = AB.$

3) Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ – произвольное произведение рядов (1) и (2).

Оно получается из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ перестановкой его членов.

Но мы в прошлый раз доказали, что сход. абс $\Rightarrow$ сход. безусловно, причём к той же сумме, что и исходный ряд.

А ещё мы сейчас доказали, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ сходится абсолютно, и один из переставленных рядов сходится к AB $\Rightarrow$ все $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ сходятся к AB.

Опр 2. Пусть даны ряды $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ (2).

Их $\boxed{\text{произведением по Коши}}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

или $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

где $\boxed{c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k+1} = a_1 b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.}$

$$\begin{matrix} (a_1; b_1) & (a_1; b_2) & (a_1; b_3) \\ (a_2; b_1) & (a_2; b_2) & (a_2; b_3) \\ (a_3; b_1) & (a_3; b_2) & (a_3; b_3) \end{matrix}$$

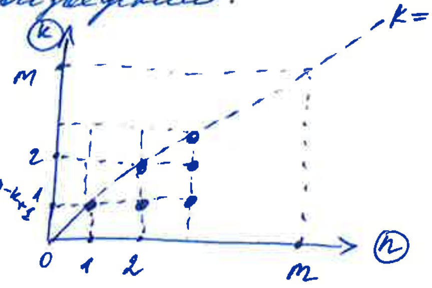
! Это не группировка членов ряда, просто удобная запись! Члены ряда – по-прежнему $a_i \cdot b_j$.

Теорема 2 (Мёртенса)

Пусть ряды $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ сходятся (один абсолютно, другой просто), и пусть $A := \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$; $B := \sum\limits_{1}^{\infty} b_n$. Тогда произведение по Коши рядов $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ сходится (не обязательно абсолютно), причём его сумма $= AB$.

III Рассмотрим частичную сумму нашего произведения:

$$U_m := \sum_{n=1}^{m} c_n = \sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n-k+1}\right) \overset{\text{замена порядка суммирования}}{=}$$



$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m} a_k \cdot b_{n-k+1}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cdot \sum_{n=k}^{m} b_{n-k+1}\right) \overset{\text{замена индекса: } l:=n-k+1}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cdot \sum_{l=1}^{m-k+1} b_l\right) = ?$$

Пусть $\alpha_r := \sum_{m=r+1}^{\infty} a_m$ — хвост 1-го ряда; $\alpha_r \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.к. ряд (1) сходится

$\beta_r := \sum_{m=r+1}^{\infty} b_n$ — хвост 2-го ряда; $\beta_r \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.к. ряд (2) сходится.

$A_r := \sum_{1}^{r} a_n$

$B_r := \sum_{1}^{r} b_n$.

Мы доказали, что $\begin{cases} A = A_r + \alpha_r \\ B = B_r + \beta_r \end{cases}$ (см. лекцию 1)

Имеем: $U_m = ? = \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cdot B_{m-k+1}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cdot (B - \beta_{m-k+1})\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot B - \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} = B \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} =$$

$$= B \cdot A_m - \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} = B \cdot (A - \alpha_m) - \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} = AB - \underbrace{\alpha_m \cdot B}_{(*)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1}}_{(**)}.$$

Докажем, что (*) и (**) $\to 0$ при $m \to \infty$.

Для (*): $\alpha_m \cdot B \to 0$ при $m \to \infty$, т.к. это беск. малая на константу.

Для (*): докажем, что $\sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} \to 0$ при $m \to \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

Тогда $\exists N_1 \in \mathbb{N} \mid |\beta_n| < \varepsilon,\ \forall n > N_1$, т.к. хвост сходящегося ряда $\to 0$.

Тогда: $$\sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} = \underbrace{\sum_{1 \le k \le \frac{m}{2}} a_k \cdot \beta_{m-k+1}}_{=\Sigma^{(1)}} + \underbrace{\sum_{\frac{m}{2} < k \le m} a_k \cdot \beta_{m-k+1}}_{=\Sigma^{(2)}}$$

Оценим $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ отдельно:

Для $\Sigma^{(1)}$: Выберем m такое, чтобы $\frac{m}{2} + 1 > N_1$, т.е. $m + 2 > 2N_1 \Leftrightarrow m > 2N_1 - 2$.

(нам же всё равно на конечное число членов посл-ти частичных сумм, они не влияют на факт сходимости/расходимости)

$$\Rightarrow |\Sigma^{(1)}| \le \sum_{k=1}^{m/2} |a_k| \cdot |\beta_{m-k+1}| < \underbrace{\sum_{k=1}^{m} |a_k|}_{\le C_1,\ \text{т.к. ряд } \sum a_n \text{ сход.}} \cdot \varepsilon \le \varepsilon \cdot C_1,\ \forall m > 2N_1 - 2$$

(все β_{m-k+1} стали $< \varepsilon$, т.к. самый маленький номер $m-k+1$ при $k \in [1; \frac{m}{2}]$ достигается при $\frac{m}{2}$ и равен $\frac{m}{2}+1$. Все остальные номера больше, потому

β с этими номерами попадут туда, где $|\beta_n| < \varepsilon$, если $m > 2N_1 - 2$).

<u>Оценим $\Sigma^{(2)}$:</u> • $\beta_n \to 0 \Rightarrow |\beta_n| \le C_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, для некоторой константы $C_2 > 0$

• по критерию Коши для сходящегося ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ / \sum_{\frac{m}{2} < k \le m} |a_k| < \varepsilon, \ \forall m > N_2.$$

$$\Rightarrow |\Sigma^{(2)}| = \Bigl| \sum_{\frac{m}{2} < k \le m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} \Bigr| \overset{|a+b| \le |a|+|b|}{\le} \sum_{\frac{m}{2} < k \le m} |a_k| \cdot \underbrace{|\beta_{m-k+1}|}_{\le C_2} \le C_2 \cdot \sum_{\frac{m}{2} < k \le m} |a_k| < C_2 \cdot \varepsilon$$

В итоге, полагая $N := \max\{N_2; 2N_1 - 2\}$ получаем:

$$\Bigl| \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} \Bigr| = |\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}| \le |\Sigma^{(1)}| + |\Sigma^{(2)}| \le \varepsilon(C_1 + C_2), \forall m > N.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

$$\Rightarrow M_m = AB - \alpha_m \cdot B - \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \beta_{m-k+1} \longrightarrow AB. \ \blacktriangleleft$$

21.09.18. Мат. анализ. Лекция 5.

Пример $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$ – сходится, но не абсолютно

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится $\Rightarrow$ абс. расходится
- условно сходится по признаку Лейбница (докажем его позднее)

Теорема 1 Ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \alpha_n + i\beta_n$; $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится и $\sum\limits_{1}^{\infty} |\beta_n|$ сходится.

▶ ($\Rightarrow$) пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Но $|\alpha_n| \le \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n| \xRightarrow{\text{по признаку сравнения}} \sum\limits_{1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится.

Аналогично, $\sum\limits_{1}^{\infty} |\beta_n|$ тоже сходится.

($\Leftarrow$) пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} |\alpha_n|$ сходится и $\sum\limits_{1}^{\infty} |\beta_n|$ сходится.

Тогда $\sum\limits_{1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|)$ тоже сходится (т.к. сход + сход = сход)

Но $|a_n|^2 = |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \le (|\alpha_n| + |\beta_n|)^2$

$\Rightarrow |a_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| \Rightarrow$ по признаку сравнения $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ сходится ◀

Зам. 1) Если мы исследуем просто сходимость ряда с комплексными членами, то она эквивалентна $\overset{\text{просто}}{\text{сходимости}}$ каждого компонента.

2) Поэтому в следующих теоремах мы будем считать, что $a_n \in \mathbb{R}$, т.к. комплексные $\overset{\text{подр.}}{\text{ведут}}$ себя так же, как вещественные, просто там две компоненты.

Теорема 2 пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Тогда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ тоже сходится

(т.е. если сходится абсолютно, то просто сходится)

▶ пусть $\sum |a_n|$ сходится.

Тогда по критерию Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} |a_n| \right| = \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} |a_n| < \varepsilon, \forall k > N, \forall m \in \mathbb{N}$.

А мы хотим док-ть про $\left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} a_n \right|$

Имеем: $\left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| \le \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} |a_n| < \varepsilon, \ \forall k > N, \forall m \in \mathbb{N}$.

В итоге: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ / \ \left| \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| < \varepsilon, \forall k > N, \forall m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ по критерию Коши в обратную сторону $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сходится ◀

Зам. 1) $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ сход $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сход.

2) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ сход $\overset{\text{в.с.}}{\not\Rightarrow} \sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ сход. Например, для $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ это неправда.

Пример $\boxed{\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{b^n};\ b > 0}$ – сход. абс. при $b > \sqrt{10}$ и расход при $0 < b \le \sqrt{10}$.

1. Абс. сходимость. $|a_n| = \left| \frac{n \cdot (\sqrt{3^2+1^2})^n}{b^n} \right| = n \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{b}\right)^n$

Применим Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{b}\right)^{n+1}}{n\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{b}\right)^n} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{b}\right) \to \frac{\sqrt{10}}{b} \Rightarrow \text{сход. при } \frac{\sqrt{10}}{b} < 1 \Leftrightarrow b > \sqrt{10}.$$

Итак, $\sum|a_n|$ сходится, если $b>\sqrt{10}$, а иначе расходится.

2. Усл. сходимость. (нас интересует $0<b\le\sqrt{10}$)

$|a_n| = n\cdot\underbrace{\left(\frac{\sqrt{10}}{b}\right)^n}_{\ge 1} \ge n \to \infty \Rightarrow a_n \not\to 0$ при $n\to\infty$, т.к если бы $a_n\to 0$, то $|a_n|$ бы $\to 0$ при $n\to\infty$.

$\Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости $\Rightarrow \sum a_n$ расходится.

$\boxed{\text{Ответ}}$: ряд сход. абс при $b>\sqrt{10}$ и расход. при $0<b\le\sqrt{10}$.

Теорема 3 (о перестановке членов абс. сходящегося ряда)

Пусть $\sum\limits_1^\infty |a_n|$ сходится.

Тогда сумма ряда $S := \sum\limits_1^\infty a_n$ не зависит от перестановки его членов.

Зам. 1) Во-первых, $S := \sum\limits_1^\infty a_n \in \mathbb{R}$, т.к. если $\sum\limits_1^\infty |a_n|$ сход, то и $\sum\limits_1^\infty a_n$ сход.

2) ~~Теор~~ Во-вторых, теорема не утверждает, что переставленный ряд сходится абсолютно, но мы это докажем.

3) В-третьих, если переставлять члены условно сходящегося ряда или расходящегося, то они вообще никому ничего не обязаны.

① Докажем, что ряд, полученный перестановкой, сходится. Более того, он сходится абсолютно.

Пусть дана перестановка, т.е биекция: $n\in\mathbb{N} \to \underbrace{p(n)}_{=:p_n} \in\mathbb{N}$

Надо док-ть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty a_{p_n}$ сходится.

Обозначим: $S_k := \sum\limits_{n=1}^k a_n$

$\hat{S}_k := \sum\limits_{n=1}^k |a_n|$

$T_k := \sum\limits_{n=1}^k a_{p_n}$

$\hat{T}_k := \sum\limits_{n=1}^k |a_{p_n}|$

Докажем более сильное утверждение: что $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_{p_n}|$ сходится.

Для этого достаточно док-ть, что посл-ть частичных сумм $(\hat{T}_k; k\in\mathbb{N})$ ограничена (сверху)

Имеем: $\hat{T}_k = |a_{p_1}| + |a_{p_2}| + \ldots + |a_{p_k}|$

Пусть $q_k := \max\{p_1; p_2 \ldots p_k\}$

$\Rightarrow \hat{T}_k \le \sum\limits_{n=1}^{q_k} |a_n| = \hat{S}_{q_k} \le M$, для некоторой постоянной $M>0$ и $\forall k\in\mathbb{N}$ -

т.к ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится => послед-ть его частичных сумм ограничена числом M.

Итак, $\exists M>0 \,/\, \hat{T}_k \le M \;\forall k\in\mathbb{N}$

=> $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{p_n}|$ сходится.

(2) Докажем, что $\sum_1^{\infty} a_{p_n} =: T = S$ (сумма ряда $\sum_1^{\infty} a_{p_n}$ существует, т.к мы уже доказали, что $\sum_1^{\infty}|a_{p_n}|$ сход => $\sum_1^{\infty} a_{p_n}$ сход)

Заметим, что $\forall N\in\mathbb{N}\;\exists L=L(N)\in\mathbb{N},\; L(N)\ge N \,/\, \{a_{p_1}; a_{p_2} \dots a_{p(L(N))}\} \supset \{a_1 \dots a_N\}$
(все члены исходного ряда задействованы, поэтому первые N членов после скольких-то L(N) шагов будут задействованы, причём $L(N)\ge N$, т.к за 1 шаг мы берём ровно 1 член)

Поэтому имеем:

$$T_{L(N)} = \sum_{n=1}^{N} a_n + {\sum_{n>N}}' a_n = S_N + \underbrace{{\sum_{n>N}}' a_n}_{=:\rho_N} \qquad (**)$$

Заметим, что: а) $L(N)\to+\infty$, если $N\to+\infty$, т.к $L(N)\ge N$ – по выбору L

б) $|\rho_N| \le \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| =: \hat{r}_N$, где $\hat{r}_N$ – остаток ряда $\sum_1^{\infty}|a_n|$

но $\sum_1^{\infty}|a_n|$ сходится => $\hat{r}_N\to 0$ при $N\to\infty$ – как остаток сходящегося ряда.

Итак, $\hat{r}_N \to 0$ при $N\to\infty$

=> $\forall\varepsilon>0\;\exists N_0\in\mathbb{N} \,/\, |\rho_N|<\varepsilon,\;\forall N>N_0$

Поэтому (см. **) : $|\underset{\to T}{T_{L(N)}} - \underset{\to S}{S_N}| = |\rho_n| < \varepsilon,\;\forall N>N_0$

мы уже заметили, что $L(N)\to\infty$ при $N\to\infty$ => $T_{L(N)}\to T$ при $N\to\infty$.

=> переходя к пределу (при $N\to\infty$) в последнем неравенстве,
получаем: $|T-S|\le\varepsilon,\;\forall\varepsilon>0$

переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем $T=S$. Ура!

Опр 3. Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится безусловно $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ любой ряд, полученный из этого ряда перестановкой его членов, сходится (в том числе, сам ряд $\sum a_n$ сходится)

Теорема 4 Ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow \sum_1^{\infty} a_n$ сходится безусловно.

(=>) см. теорему 3

(<=) см. Камынин, том 2, стр. 46

пусть $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится безусловно.

Тогда, в частности, $\sum_1^{\infty} a_n$ сходится (как минимум условно)

=> надо док-ть, что если ряд сходится только условно, а абсолютно не сходится, то он не может сходится безусловно.

т.е мы доказываем (<=) от противного: пусть $\sum_1^{\infty} a_n$ абсолютно не сходится. Тогда покажем, что $\sum_{1}^{\infty} a_n$ безусловно сходиться не может, т.е покажем, как переставить его члены, чтобы переставленный ряд расходился.

Итак, пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

Это значит, что а) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, т.к. он не сходится абсолютно

б) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ – необходимое условие сходимости

Пусть α_k есть k-й по порядку положительный член исходного ряда, а β_l есть l-й по порядку отрицательный член.

Имеем: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k = 0 \\ \lim\limits_{l\to+\infty} \beta_l = 0\end{array}\right\}$ – необходимое условие

$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = +\infty \\ \sum\limits_{l=1}^{+\infty} \beta_l = -\infty\end{array}\right\}$ кто-то из них $= \pm\infty$, иначе бы $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \neq +\infty$. Но $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, поэтому частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены $\Rightarrow$ α_k и β_l друг друга компенсируют, поэтому если один из них $\to \pm\infty$, то и второй – в обратную бесконечность.

Теперь алгоритм генерирования расходящегося ряда:
Выберем из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ все подряд k_1 положительных членов так, чтобы $S_{k_1} = \sum_{s=1}^{k_1} \alpha_s > 1$. Затем добавим первый отрицательный член $\beta_1 < 0$. После этого из оставшихся положительных членов выберем подряд k_2 штук так, чтобы $S_{k_2+1} = S_{k_1} + \beta_1 + \sum_{s=k_1+1}^{k_2} \alpha_s > 2$ (это возможно, т.к. $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k = +\infty$). Затем добавим второй отрицательный член $\beta_2 < 0$ и вновь наберём столько (а именно k_3) положительных членов, чтобы $S_{k_3+2} = S_{k_2+1} + \beta_2 + \sum_{s=k_2+1}^{k_3} \alpha_s > 3$.

На n-ом шаге получим:

$$S_{k_n+(n-1)} = \sum_{s=1}^{k_1} \alpha_s + \beta_1 + \sum_{s=k_1+1}^{k_2} \alpha_s + \beta_2 + \ldots + \sum_{s=k_{n-1}+1}^{k_n} \alpha_s > n$$

$$S_{k_n+n} = S_{k_n+(n-1)} + \beta_n$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty} S_{k_n+n} = \lim_{n\to\infty} S_{k_n+(n-1)} = +\infty$.

Поэтому ряд $\sum_{s=1}^{k_1} \alpha_s + \beta_1 + \ldots + \sum_{s=k_{n-1}+1}^{k_n} \alpha_s + \beta_n + \ldots$, полученный перестановкой из $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, расходится.

В самом деле, если бы он сходился, то $\lim_{m\to+\infty} S_m = S$, где S_m – m-я частичная сумма переставленного ряда. Поскольку (S_{k_n+n}) и (S_{k_n+n-1}) – подпосл-ти посл-ти (S_m), то имело бы место следующее:

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_{k_n+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{k_n+n-1} = S$, что противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{k_n+n} = +\infty$.

И вообще, из оценок $k_{n-1}+n-1 \le m \le k_n$ и $S_{k_{n-1}+n-1} \le S_m \le S_{k_n+n-1}$ имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_m = +\infty$. Итак, если ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится не абсолютно, то $\sum\limits_1^\infty a_n$ не может сходиться безусловно $\Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_n$ сходится абсолютно.

Зам. Основной элемент док-ва теоремы 4 ($\Leftarrow$) составляет док-во утв: если ряд $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится условно, то $\exists$ ряд $\sum\limits_1^\infty b_n$, полученный из него перестановкой членов, такой что $\sum\limits_1^\infty b_n = +\infty$

Имеет место более общее утверждение.

Теорема 5 (Римана)

Пусть $\sum\limits_1^\infty a_n$ сходится условно.

Тогда $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ (т.е. либо $S \in \mathbb{R}$, либо $S = \pm\infty$) $\exists$ ряд $\sum\limits_1^\infty b_n$, полученный из ряда $\sum\limits_1^\infty a_n$ перестановкой его членов, такой что $\sum\limits_1^\infty b_n = S$

см. Архипов, Садовничий, Чубариков, стр. 374

① Если $S = \pm\infty$, то делаем как в теореме 4 ($\Leftarrow$)

② Если $S \in \mathbb{R}$. Назовём $A := S$.

Для простоты будем считать, что $a_n \neq 0$ при всех n. Сначала в ряде $\sum a_n$ выделим все положительные слагаемые p_k и отрицательные слагаемые $-q_e$, нумеруя их индексами k и e в порядке следования в ряде $\sum a_n$. Затем начинаем составлять перестановку $\sum b_n$ ряда $\sum a_n$ так:

в качестве b_1 берём p_1, если $A \ge 0$, и $-q_1$, если $A < 0$. Подчеркнём, что все p_k и q_e положительны. Далее мы добавляем в общую сумму $\sum\limits_{m=1}^n b_m$ очередное слагаемое по следующему правилу: если сумма не превышает A, то добавляем очередное положительное слагаемое $b_{n+1} = p_{k_1}$, а если она превосходит A, то добавляем очередное отрицательное слагаемое $b_{n+1} = -q_{e_1}$. В результате сумма всё время колеблется вокруг значения A, причём размах колебаний постепенно убывает до нуля, и в пределе для суммы ряда $\sum b_n$ мы получим требуемое значение A.

Для того, чтобы док-во теоремы было полным, достаточно обосновать некоторые моменты.

• Докажем, что оба ряда $\sum p_k$ и $\sum(-q_e)$ расходятся. Действительно, если бы они оба сходились, то исходный ряд $\sum a_n$ сходился бы абсолютно, а если бы один ряд расходился, а другой сходился, то $\sum a_n$ бы расходился, как сумма сход+расход, что неверно.

• $p_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $-q_e \to 0$ при $e \to \infty$, т.к. $\{p_k\}$ и $\{-q_e\}$ являются подпосл-ти $\{a_n\}$, а $a_n \to 0$ – необходимое условие сходимости.

• Для определённости будем считать, что $A>0$. Тогда по построению ряд $\sum b_n$ имеет такую структуру: $\sum b_n = \underbrace{p_1 + \ldots + p_{k_1}}_{P_1} - \underbrace{q_1 - \ldots - q_{l_1}}_{Q_1} +$

$$+ \underbrace{p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2}}_{P_2} - \underbrace{q_{l_1+1} - \ldots - q_{l_2}}_{Q_2} + \ldots$$

Здесь числа $P_1 P_2 \ldots Q_1 Q_2$ обозначают сумму подряд идущих слагаемых одного знака в ряде $\sum b_n$. Кол-во групп слагаемых одинакового знака в этой сумме бесконечно, т.к. в противном случае ряд $\sum b_n$ отличался бы от $\sum p_k$ или от $\sum(-q_l)$ лишь конечным числом членов, и тогда он бы расходился к $+\infty$ или $-\infty$. Но это не имеет места, т.к. по построению величина частичной суммы S_n ряда $\sum b_n$ на каждом шаге изменяется в направлении приближения к числу A, если только $S_n \neq A$. В силу этого, в сумму $\sum b_n$ войдут все числа p_k и $-q_l$, а следовательно, и все a_n, т.е $\sum b_n$ – действительно перестановка ряда $\sum a_n$.

• Теперь оценим разность $r_n = S_n - A$. При всяком n член ряда b_n в зависимости от своего знака попадает в одну из сумм P_m или Q_m. Следовательно, мы имеем одно из равенств: $b_n = p_k$ или $b_n = -q_l$.

По построению ряда величина r_n меняет знак, если $b_n = p_{k_m}$ или $b_n = -q_{l_m}$. Тогда в обоих случаях $|r_n| = |S_n - A| \leq |b_n|$

Для всех прочих n при добавлении очередного слагаемого разница $|r_n|$ убывает, поэтому тогда справедливо н-во $|r_n| < |r_{n-1}|$

Следовательно, всегда имеем $|r_n| = |S_n - A| \leq p_{k_m} + p_{k_{m-1}} + q_{l_m} + q_{l_{m-1}}$. может, проще $p_{k_m} + q_{l_m}$? И почему не 1 слагаемое?

Здесь номер m можно рассматривать как монотонно стремящуюся к бесконечности функцию от n, и поэтому для посл-ти d_n, где $d_n = p_{k_m} + q_{l_m} + q_{l_{m-1}} + p_{k_{m-1}}$ в силу того, что $p_k \to 0$ и $q_l \to 0$ при k и $l \to \infty$ имеем: $d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда при $n \to \infty$ получаем $r_n = S_n - A \to 0 \Rightarrow S_n \to A$. Что доказали.