Решение 1 задачи. Заметим, что уравнение $x(t) = \int_0^t \operatorname{sign} x(s) ds$ имеет три решения:

$$x(t) = 0, \ \ x(t) = t, \ \ x(t) = -t.$$

Таким образом, из принципа суперпозиции следует, что множество решений μ_t лежит в классе

$$\mu_t = p\delta_{-t} + q\delta_0 + (1-p-q)\delta_t$$

для некоторых $p, q \geq 0, \ p+q \leq 1$. В свою очередь, каждая кривая такого вида подходит, что проверяется по определению. □

Решение 3 задачи. Достаточно доказать ограниченность $spt\mu_t$ для $t \in (0, \tau)$ для некоторого τ. При этом, из принципа суперпозиции следует, что

$$spt\mu_t \subset \{x_t : \ x_t = y + \int_0^t b(x_s) ds, \ y \in spt\nu\}.$$

Предположим, что $\nu \subset [-R, R]$ для некоторого $R > 0$. Докажем, что существует $\tau > 0$, такое, что $\mu_t \subset [-2R, 2R]$ для всех $t \in (0, \tau)$.

Ограничение b на $[-2R, 2R]$ – непрерывная функция на компакте, поэтому $|b(x)| \leq C$ для всех $x \in [-2R, 2R]$ и некоторого $C > 0$. Положим $\tau := \frac{R}{2C}$. Тогда

$$|x_t| \leq R + tC < 2R,$$

что и требовалось. □

Решение 4 задачи. Функция $b(x, \mu)$ не зависит от x, поэтому такое уравнение Власова имеет единственное решение. Будем искать его в виде $\delta_{x(t)}$. Тогда $b(x, \mu) = x(t) =: b(t)$. Получили уравнение непрерывности, решение которого –

$$\delta_a \circ x_t^{-1} = \delta_{x_t(a)}, \ \ x_t(y) = y + \int_0^t b(s) ds.$$

Но $x_t(a) = x(t) = b(t)$, поэтому $x(t) = ae^t$. Такое решение, в свою очередь, подходит, что проверяется по определению. □

Решение 5 задачи. Очевидно, что

$$u(x, t) = \inf_\alpha \arctan(x + \int_t^T \alpha(s) ds) = \arctan(x + t - T),$$

что является непрерывно дифференцируемой функцией. □

Решение 6 задачи. 1. Вообщем говоря, такое решение – продукт метода исчезающей вязкости (мы проделывали это в прошлом семестре), а потому является вязкостным решением. Но это можно проверить и напрямую.

Будем пользоваться в дальнейшем тем, что для любых x и t существует $y = y(x,t)$, на котором достигается inf. Дело в том, что функция под inf является непрерывной и стремится к $+\infty$ при $|y| \to +\infty$.

Итак, пусть $\phi \in C^2(\mathbb{R} \times (0,T))$, и $u - \phi$ имеет локальный минимум в точке (x_0, t_0). Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$\phi(x_0,t_0) - \phi(x_0,t_0-\epsilon) \geq u(x_0,t_0) - u(x_0,t_0-\epsilon)$$

$$\geq |x_0 - y(x_0,t_0)|^2 \left(\frac{1}{2t_0} - \frac{1}{2(t_0-\epsilon)}\right) = -\epsilon \frac{|x_0 - y(x_0,t_0)|^2}{2t_0(t_0-\epsilon)}$$

$$\Rightarrow \phi_t \geq -\frac{|x_0 - y(x_0,t_0)|^2}{2t_0^2}.$$

Аналогично,

$$\phi(x_0+\epsilon,t_0) - \phi(x_0,t_0) \leq u(x_0+\epsilon,t_0) - u(x_0,t_0)$$

$$\leq \frac{|x_0 - y(x_0,t_0)|^2 + \epsilon}{2t_0} - \frac{|x_0 - y(x_0,t_0)|^2}{2t_0} = \epsilon \frac{2x_0 - 2y(x_0,t_0) + \epsilon}{2t_0},$$

$$\phi(x_0,t_0) - \phi(x_0-\epsilon,t_0) \geq u(x_0,t_0) - u(x_0-\epsilon,t_0)$$

$$\geq \frac{|x_0 - y(x_0,t_0)|^2}{2t_0} - \frac{|x_0 - y(x_0,t_0) - \epsilon|^2}{2t_0} = \epsilon \frac{2x_0 - 2y(x_0,t_0) - \epsilon}{2t_0}$$

$$\Rightarrow \phi_x = \frac{x_0 - y(x_0,t_0)}{t_0} \Rightarrow \phi_t + \frac{\phi_x^2}{2} \geq 0,$$

значит, $u(x,t)$ – суперрешение. Аналогичным образом проверяется, что $u(x,t)$ – субрешение.

2. Достаточно доказать принцип сравнения для частного случая $H(x,t,p) = -\frac{p^2}{2}$. В доказательстве приходим к неравенству

$$0 < 2\lambda \leq H\left(y_\epsilon, s_\epsilon, -2\epsilon y_\epsilon + \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}\right) - H\left(x_\epsilon, t_\epsilon, 2\epsilon x_\epsilon + \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}\right)$$

$$= 2(x_\epsilon + y_\epsilon)(x_\epsilon - y_\epsilon)(1 + 2\epsilon^2) \to 0, \;\; \epsilon \to 0,$$

поскольку

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| = o(\sqrt{\epsilon}), \;\; |x_\epsilon| + |y_\epsilon| = O(\epsilon^{-\frac{1}{2}}), \;\; \epsilon \to 0.$$

Остальные части доказательства совпадают с версией из лекций.

3. Пусть

$$g(y) = \begin{cases} 0, \ y \le 0, \\ y, \ y \in (0, N], \\ N, \ y > N \end{cases}$$

Тогда $u(x,t) = 0$ при $x \le 0$. В свою очередь, при $x > 0$ и достаточно малом t получаем $u(x,t) = x - \frac{t}{2}$, а такая функция не дифференцируема в нуле.

$\square$

Решение 7 задачи. Запишем эквивалентное условие:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \le \frac{\partial G}{\partial x_j} \ \ \forall j.$$

В свою очередь, это эквивалентно тому, что $m_i \neq 0$ только при минимальном значении $\frac{\partial G}{\partial x_i}$. А это уже эквивалентно тому, что m – точка локального минимума функции G (вытекает из формулы Тейлора). $\square$

Решение 8 задачи. Запишем эквивалентное условие:

$$\int_A -a \int_A x\mu(dx)\mu(da) \le -b \int_A x\mu(dx) \ \ \forall b \in A$$

$$\Leftrightarrow b \int_A x\mu(dx) \le \left(\int_A x\mu(dx) \right)^2 \ \ \forall b \in A.$$

Если $\int_A x\mu(dx) = 0$, то $\mu = \delta_0$, иначе $\int_A x\mu(dx) = 1 \Rightarrow \mu = \delta_1$. Оба решения подходят.

В дискретной версии игры равновесие Нэша – δ_1 в силу строгой монотонности $F(a_k, \mu)$ по a_k, что сходится к первому решению непрерывной версии (вообще говоря, совпадает с ним). $\square$

Решение 9 задачи. Если $G_N(\mu_a^N) < g_N(\mu_a^N)$, то существует $b \in [0,1]^N$:

$$g_N(b) + C_2 d_{KR}(\mu_a^N, \mu_b^N) < g_N(a) \Rightarrow g_N(a) - g_N(b) > C_2 d_{KR}(\mu_a^N, \mu_b^N),$$

а это противоречит условию. Значит, $G_N(\mu_a^N) = g_N(\mu_a^N)$.

Пусть $\nu, \sigma \in \mathcal{P}([0,1])$. Тогда

$$|G_N(\nu) - G_N(\sigma)| \le C_2 \sup_{a \in [0,1]^N} (d_{KR}(\nu, \mu_a^N) - d_{KR}(\sigma, \mu_a^N)) \le C_2 d_{KR}(\nu, \sigma).$$

Кроме того,
$$|G_N(\mu)| \leq C_1 + 2C_2$$
для всех N и $\mu \in \mathcal{P}([0,1])$. Таким образом, семейство функций $\{G_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ из $C(\mathcal{P}([0,1]),\mathbb{R})$ является равностепенно непрерывным и равномерно ограниченным, а, значит, и предкомпактным в силу теоремы Арцела-Асколи. Значит, существует сходящаяся подпоследовательность $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ к некоторой функции G:
$$0 = \lim_{k\to+\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{P}([0,1])} |G(\mu) - G_{N_k}(\mu)|$$
$$\geq \lim_{k\to+\infty} \sup_{a\in[0,1]^N} |G_{N_k}(\mu_a^{N_k}) - G(\mu_a^{N_k})| = \lim_{k\to+\infty} \sup_{a\in[0,1]^N} |g_{N_k}(a) - G(\mu_a^{N_k})|,$$
что и требовалось. □