04.12.20. ЭВМ. семинар 14.

Выбор τ для многошагового алгоритма.

$Ax=b \rightsquigarrow \frac{x-x}{\tau}+Ax=b.$

канон. форма

неизв. хороший

предобусл. B.

Считаем, что $A=A^T>0 \Rightarrow \underbrace{0<m}_{>0,\text{ т.к. } A>0} \le \lambda(A)\le M<\infty.$

Как найти λ_{min} — вопрос неясен, т.к. λ_{min} ищется за n^3, т.е. за время $\sim$ решения системы.

λ_{max} — через круги Гершгорина.

Для 1-шагового: $\tau_{опт}=\frac{2}{M+m}$

$$q_{опт}=\frac{M-m}{M+m}=\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}=\frac{1+cond_2^{-1}(A)}{1+cond_2^{-1}(A)}$$ — т.к. $cond_2(A)=M$. $cond_2(A)=\frac{1}{m}$.

Вопрос: а τ оптим. в каком смысле?

В таком: $Ax=b \rightsquigarrow \frac{x-x}{\tau}+Ax=b \longrightarrow \frac{x^{k+1}-x^k}{\tau}+Ax^k=b.$

канон. форма итер. процесса

$\Rightarrow \boxed{z^{k+1}=(I-\tau A)z^k}$ — ну вычесть $\begin{cases} x=(I-\tau A)x+\tau b \\ x^{k+1}=(I-\tau A)x^k+\tau b.\end{cases}$

Для анализа ошибки получим оценку: $\|z^{k+1}\|_2 \le \|I-\tau A\|_2\cdot\|z^k\|_2$

И $\inf_\tau \|I-\tau A\|_2 \rightsquigarrow ?$

Вот решение $\tau_{опт}$ — решение этой задачи

А норма-то какая? ну в $\|\cdot\|_2$!

Т.к. тогда: $\inf_\tau \|I-\tau A\|_2=\inf_\tau \max_{\substack{\lambda\in[m;M]\\ \lambda(A)}} |1-\tau\lambda|$! только в $\|\cdot\|_2$ умеем решать.

А теперь хотим решать оптим. задачу не за 1 шаг, а за несколько.

(т.е. разрешено менять парам. τ от шага к шагу).

$z^k \xrightarrow[\tau_1]{} z^{k+1} \xrightarrow[\tau_2]{} z^{k+2}$

Имеем: $z^0 \xrightarrow[\tau_1]{} z^1 \xrightarrow[\tau_2]{} z^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^1=(I-\tau_1 A)z^0 \\ z^2=(I-\tau_2 A)z^1\end{cases} \Rightarrow z^2=\underbrace{(I-\tau_2 A)(I-\tau_1 A)}_{\text{вообще-то они коммутируют, но так понятнее писать.}}z^0$$

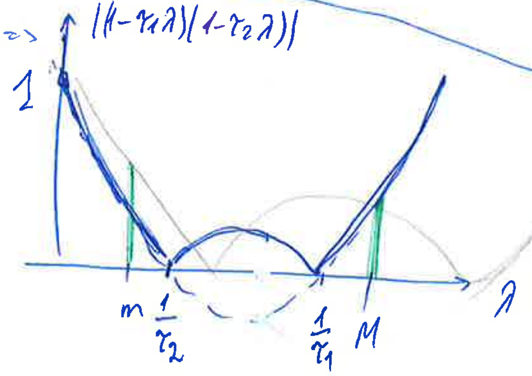
$\Rightarrow \|z^2\|_2 \le \|(I-\tau_2 A)(I-\tau_1 A)\|_2 \cdot \|z^0\|_2$

$$\inf_{\tau_1;\tau_2} \underbrace{\|(I-\tau_2 A)(I-\tau_1 A)\|_2}_{S''=S^T} = \inf_{\tau_1;\tau_2} \max_{\lambda\in[m;M]} |(1-\tau_1\lambda)(1-\tau_2\lambda)|$$

$Ae = \lambda e$

$\Rightarrow Se = (1-\tau_1\lambda)(1-\tau_2\lambda)e$. — т.е. у S собств. ф-ции не изменились, а собств. числа: $1-\tau_i\lambda$

$\Rightarrow$



$\tau_1;\tau_2$ – фикс.

$$\min_{\tau_1;\tau_2} \max_{\lambda\in[m;M]} \underbrace{|(1-\tau_1\lambda)(1-\tau_2\lambda)|}_{"P_2(\lambda)}$$

ну $P_2(\lambda)$ – полином на $\lambda\in[m;M]$ — ну наш наименее уклоняющийся от нуля многочл. 2 степени.

τ_1 и τ_2 – его коэф.

Такая задача – неправильная: $\inf\limits_{P_2(\lambda)} \|P_2(\lambda)\|_{C[m;M]} = 0$

У нас свободный член $= 1$!

$\Rightarrow$ надо $\inf\limits_{P_2(\lambda)=1+\dots} \|P_2(\lambda)\|_{C[m;M]}$ — но это не экв этому

почему не экв? ну потому что мы ще хотим полином, у которого есть 2 корня (может быть, одинаковых), а не абы-какой.

$\Rightarrow$ Хотим: $\inf \|P_2(\lambda)\|_{C[m;M]}$.
$\begin{cases} P_2(\lambda) = 1+\dots \\ P_2(\lambda) \text{ – имеет 2 корня} \end{cases}$

Знаем задачу: $\inf\limits_{P_2(\lambda)=1+\dots} \|P_2(\lambda)\|_{C[m;M]} \Rightarrow P_2^*(\lambda) = \dfrac{T_2\left(\frac{2\lambda-(m+M)}{M-m}\right)}{T_2\left(-\frac{m+M}{M-m}\right)}$

А почему решение этой задачи будет и решением нашей исх. задачи, у которой 2 корня?

Ну  – мы берем ~~...~~ inf даже по большему мн-ву, и ответ – лишь в исх. маленьком мн-ве – т.к. многочлен Чебышёва имеет 2 корня

$\Rightarrow \{\tau_1; \tau_2\} = \{ \frac{1}{\text{корень многоч.}} ; \frac{1}{\text{корень многоч.}} \}$

Ну на $[-1;1]$: $\cos(n \arccos x) = 0$.

$x_m = \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}\right)$; $m = 1 \dots n$

$T_0 = 1 \qquad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$

$T_1 = x$

$T_2 = 2x^2 - 1 = 2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

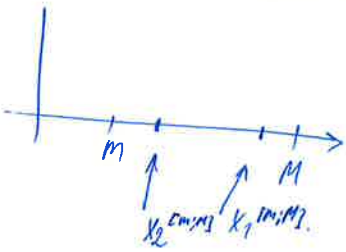
$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

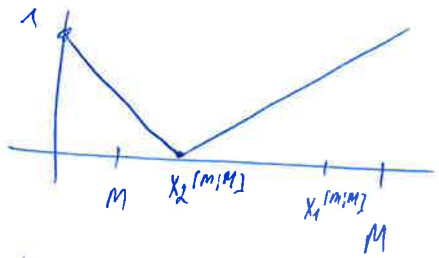
$\Rightarrow \{\tau_1; \tau_2\} = \left\{ \frac{1}{\frac{m+M}{2} + \frac{M-m}{2} x_1} ; \frac{1}{\frac{m+M}{2} + \frac{M-m}{2} x_2} \right\}$

И почему такой выбор парам. за 2 шага будет лучше, чем $\tau = \frac{2}{m+M}$.

Ну $z^1 = (I - \tau_1 A) z^0$

Пусть $\tau_1 = \frac{1}{x_2^{[m;M]}}$





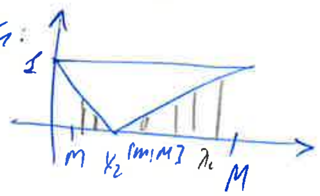
! x_1 – правее x_2, т.к. нумерация такая: $x_m = \cos\left(\frac{(2m-1)\pi}{2n}\right)$, $m = 1 \dots n$.

У оператора A есть: $e_1 \dots e_n$.

$m \le \lambda_1 \dots \lambda_n \le M$

Пусть $z^0 = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$ – у $A = A^T \Rightarrow$ собств. вектора A составляют базис

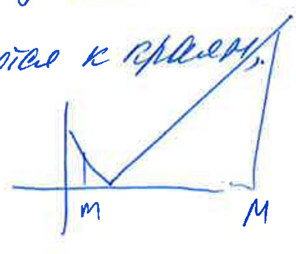
$\Rightarrow z^1 = (I - \tau_1 A) z^0 = \sum_{i=1}^{n} (1 - \tau_1 \cdot \lambda_i) d_i e_i$

При фикс τ_1: 

А с чего это все будут < 1?

Они были < 1, если мы точку ~~...~~ посередине брали!

А если $n = 300$, то корни сгущаются к краям, то получаем



Т.е. на 1-м шаге будут множители, которые > 1.

но зато на 2-м шаге эти множители умножаются на число почти = 0. => за n шагов всё будет < 1.

Ещё раз. $Ax=b$

$$\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = b.$$

Хотим: $\tau_1 \dots \tau_N$, чтобы за N шагов было лучше, чем с $\tau_{опт}$ N шагов сразу.

$z^1 = (I-\tau_1 A) z^0$

$\vdots$

$z^N = (I-\tau_N A) z^{N-1}$

$\Rightarrow \boxed{z^N = \underbrace{(I-\tau_N A)\dots(I-\tau_1 A)}_{\| \; S=S^T} z^0}$ — итер. процесс с точки зрения вектора ошибки.

$\|z^N\|_2 = \|S\cdot z^0\|_2 \le \|S\|_2 \cdot \|z^0\|_2.$

Хотим: $\min\limits_{\tau_1\dots\tau_N\in\mathbb{R}^1} \|S\|_2$; $S=S^T$, $\lambda(S) = \prod_{i=1}^{N} (1-\tau_i\lambda)$

$\| \; \min\limits_{\tau_1\dots\tau_N} \max\limits_{\lambda\in[m;M]} |(1-\tau_N\lambda)\dots(1-\tau_1\lambda)| = P_n^*(\lambda)$

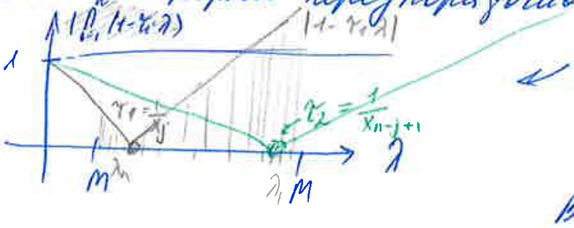
нормированный многочл. Чеб на $[m;M]$.

в классе $\begin{cases} P_N(\lambda) = 1 + \dots \\ \exists\, n \text{ корней} \end{cases}$

$\Rightarrow \{\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n\} = \left\{\frac{1}{x_1^{[m,M]}} \dots \frac{1}{x_n^{[m,M]}}\right\}$

не порядок, в котором корни берутся — не важен, главное, чтобы все λ шли эти подряд.

Стоит ли корни переупорядочивать?



← смотрим на 1 шаг.

$z^1 = (I-\tau_1 A) z^0$

$\tau_1 = \frac{1}{x_j}$ ← какое-то.

~~Возьмем τ_1 = таким~~, чтобы...

$z^0 = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$

$\Rightarrow z^1 = \sum_{i=1}^{n} (1-\tau_1\lambda_i) d_i \cdot e_i$

τ_1 — фикс. => множители $(1-\tau_1\lambda_i)$ — уже фикс.

в зависимости от x_j — свой вид галочки.

пока же не знаем настоящее λ_i — поэтому рисуем всю галочку.

Т.е. $\overset{\text{при фикс } x_j}{\text{часть}}$ λ_i — маленькие, а часть λ_i — очень большие.

Но потом, когда мы x_j поменяем (например, на x_{n-j+1}) — те λ_i, которые ~~были большие~~ домножались на огромные $(1-\tau_1\lambda_i)$, теперь станут домножаться на почти ноль.

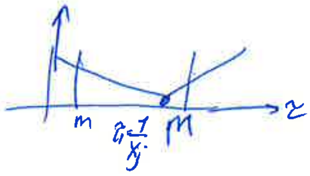
Вопрос: и в каком порядке x_j выбирать?

Упорядочивать надо, поскольку если взять все x_j либо близко к M, либо все близко к m — то будет очень большое/очень маленькое число, где почти ноль — и мы потеряем точность.

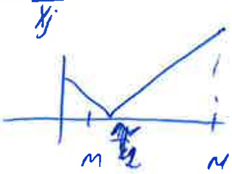
На 1-м шаге: $z^0 = e_n$

$z^1 = (I - \tau_1 A) e_N = (1 - \tau_1 \lambda_N) e_n$.

$\tau_1 = \frac{1}{x_j}$



на 2-м шаге:



За 50 шагов, если взять все галочки левее — то за 50 шагов получим нечто $\sim 10^{50}$. Большие числа лежат где-то — конечно, потом что это 10^{50} погасим. т.е. огромная абс. ошибка. т.к. $\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} \cdots \frac{1}{\varepsilon_{100}} \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{100} = 1$.

Но из-за вычисл. погр-ти всё к единице сбросится, но набранная абс. ошибка — останется.

Правильное упорядочивание: $\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} \cdots \varepsilon_{100} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{100}}$.

Для $N = 2^e$: $\{1, 2\}$

$\{1, 4, 2, 3\}$

$\{1, 8, 4, 5, 2, 7, 3, 6\}$

$2^e + 1$ — "перферирующий член".

Ну считаем, что $\tau_N < \tau_{N-1} < \dots < \tau_1$.

для 2: $(\overset{\tau_2}{2}, \overset{\tau_1}{1})$

для 4: $(\underset{4+1}{5}-2; 2; 5-1; 1) = (3; 2; 4; 1)$

для 8: $(9-3; 3; 9-4; 4; 9-1; 1) = (6; 3; 7; 2; 5; 4; 8; 1)$

Если так упорядочить корни, то $z = \sum_j \prod_{i=1}^{k} (1 - \tau_i \lambda_j) x_j e_i$ — на каждом шаге произведение множителей будет по mod < 1.

Есть алгоритм для $N = 2^k 3^m$.

Для $N = 12$ — уже без упорядочивания не будет сходиться.

Зам. порядок пар — влияет на итоговую погр-ть.

Вопрос: $\|S\| \to \min$

$$\max_{\lambda \in [m;M]} \left| \frac{T_N^{[m,M]}(\lambda)}{T_N^{[m;M]}(0)} \right| = \max_{\lambda \in [m;M]} \left| \frac{T_N\left(\frac{2\lambda - (m+M)}{M-m}\right)}{T_N\left(-\frac{m+M}{M-m}\right)} \right| = \frac{2}{q_1^N + q_1^{-N}},$$ где $q_1 = \frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}$ —

$$\frac{2}{q_1^N + q_1^{-N}} = \frac{2 q_1^N}{1 + q_1^{2N}} \le 2 q_1^N$$ — асимптотика при больших N.

т.е. было $\frac{M-m}{M+m}$,

а стало $2 \cdot \frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{cond}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{cond}}}$

Если $cond = 10^6$, т.е. обычный алгоритм — не сход.

$\Rightarrow \sqrt{cond} = 10^3 \Rightarrow$ уже будет сходиться.

При $N=1$: неверно писал оценку $2q_1^N$.

надо $\frac{2}{q_1^N + q_1^{-N}}$ писать.

И при $N=1$ — будет то же самое, что $\tau_0 = \frac{2}{m+M}$.

Задача Сравнить: 2 раза с τ_0

или τ_1, τ_2.

Если $\tau_0 = \frac{2}{M+m} \Rightarrow q_0 = \frac{M-m}{M+m} \Rightarrow$ за 2 шага: q_0^2

Если $\tau_1; \tau_2 \Rightarrow N=2 \Rightarrow \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{\sqrt{M}-\sqrt{m}}\right)^2}$ < И это будет $< q_0^2$ $\overset{"}{} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$.

можно $2q_1^N$, если $q_1^{2N} \ll 1$.

А если $q_1 = \frac{1}{10}$ — то неверно пренебречь.

27.11.20. ЧВМ. Семинар 13.

$Ax = b.$

A = исх. матрица с $p(x_k)$

B = матрица с $\bar{p}$

Матрица A: $\begin{cases} -u'' + p(x)\cdot u = f \\ \text{краевые усл,} \\ \text{e.g } u(0)=u(1)=0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p(x_k) & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p(x_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Хотим исп. метод Фурье, а не метод прогонки.

Но Фурье для A – не работает.

т.к для $\tilde{A} = \left(-\frac{1}{h^2}\ \frac{2}{h^2}\ -\frac{1}{h^2}\right)$ – знаем $\varphi_k^{(n)}$; $\lambda^{(n)}$

но для $A = \tilde{A} + \begin{pmatrix} p(x_k) & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ – не знаем ни φ, ни λ.

А как решать?

Ну итерац. процессом. $B\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b.$

Если $B=E$: $\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b.$

Для нее A – симм $\Rightarrow$ работает теория:

если $\operatorname{spec}(A) \in [m;M]$,

то $\tau_0 = \dfrac{2}{m+M}$; $q_0 = \dfrac{M-m}{M+m} \sim \dfrac{1+h^2}{1+4^2}$ – скорость сходимости ничтожная. ($\frac{4}{h^2} \approx 4$)

$\Rightarrow$ надо делать с B:

$B\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b.$

А как взять матрицу B?

Если так: $A\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b$, обратили от A –

и $\tau = 1$ – то $Ax^{k+1} = b \Rightarrow x^{k+1} \equiv x.$

те метод сошёлся за 1 шаг.

но проблема в том, что мы A – не умеем обращать.

А какое тогда брать B?

Хочется: $B^{-1}A \approx I.$

Разумно взять B такой: $\begin{cases} -V'' + \bar{p}V = f \\ V(0)=0 \\ V(1)=0 \end{cases}$ – вот B – это матрица этой задачи.

А какое $\bar{p}$ взять?

Здорово, когда вып: $\tilde{m} \le \dfrac{(Ax,x)}{(Bx,x)} \le \tilde{M}.$

1) $p(x) = p_0$, $\bar{p} = p_0$ } сходится за 1 итерацию.

2) $p(x) = p_0$, $\bar{p} = \frac{p_0}{2}$ } сходится быстро но не за 1 итерацию. $\tau = \frac{2}{3}$. $q = \frac{1}{3}$ – скорость сход.

3) $= 1+x^2$. $p(x) \ge 0$ – разумное. $\bar{p} = \frac{\min + \max}{2}$

Когда остановка?

$\|b - Ax^k\|_{2,h}$ – по скал. произв $\sum u_i v_i h$.

$\varepsilon = 10^{-10}.$

Каким взять $\bar{p}$, чтобы оказалось, чтобы $\tilde{m} \approx 1$
$\tilde{M} \approx 1$.

Как тестировать?

1) $p(x) = const = \bar{p}_0$

$\bar{p} := \frac{p_{min} + p_{max}}{2}$

Тогда A совпадет с B $\Rightarrow \tilde{m} = \tilde{M} = 1$.

$\Rightarrow \tau = \frac{\tilde{m} + \tilde{M}}{2} = 1$ – метод сойдется за 1 шаг.

2) $\bar{p} = \frac{p_0}{2}$.

$\Rightarrow$ стало 2 задачи: $\begin{cases} -\underbrace{u_{xx}}_{=\Lambda} + p_0 u & (A) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -v_{xx} + \frac{p_0}{2} v & (B) \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$

Как оценить $\quad ? \le \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \le ?$

Если для $\overset{\Lambda =}{-u_{xx}}$: $\varphi_k^{(n)} = \sin \pi k h \cdot n$

$\lambda^{(n)} = \frac{4}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi n h}{2}$

$\Lambda \varphi^{(n)} = \lambda^{(n)} \varphi^{(n)}$

$(\varphi^{(n)}, \varphi^{(m)}) = 0$, если $m \ne n$.

Для $A = \Lambda + p_0 I$:

$\varphi_k^{(n)} = \sin \pi k \cdot n h$ – не изменились

$\lambda^{(n)}(A) = \lambda^{(n)} + p_0$.

Для $B = \Lambda + \frac{p_0}{2} I$:

$\varphi_k^{(n)} = \sin \pi n k h$

$\lambda^{(n)}(B) = \lambda^{(n)} + \frac{p_0}{2}$.

Берем и раскладываем $x = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n \varphi^{(n)}$

$A\bar{x} = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n \cdot (\lambda^{(n)} + p_0) \varphi^{(n)} \Rightarrow (Ax, x) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n^2 \cdot (\lambda^{(n)} + p_0)$

$B\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda^{(n)} + \frac{p_0}{2}) \varphi^{(n)} \Rightarrow (Bx, x) = \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n^2 \cdot (\lambda^{(n)} + \frac{p_0}{2})$.

min/max будет, когда только одно $\alpha_i \ne 0$.

ну $\frac{(Cx, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \lambda^{(n)} \alpha_n^2}{\sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n^2}$ $\to max = \lambda_{max}$, $\to min = \lambda_{min}$

т.к. $\frac{(Ax,x)}{(Bx,x)} = \frac{(Ax,x)}{(B^{1/2}x, B^{1/2}x)} = \frac{(B^{-1/2}AB^{-1/2}B^{1/2}x,\ B^{1/2}x)}{(B^{1/2}x,\ B^{1/2}x)} = \frac{(B^{-1/2}AB^{-1/2}y,y)}{(y,y)}$ $\to \lambda_{max}(B^{-1/2}AB^{-1/2})$, $\to \lambda_{min}(B^{-1/2}AB^{-1/2})$

Было: $B\varphi=\lambda\varphi$

$\Rightarrow B^{1/2}\varphi=\lambda^{1/2}\varphi \Rightarrow$ спектр. не изменился

$B^{-1/2}AB^{-1/2}\varphi = \frac{\lambda(A)}{\lambda^{1/2}(B)\cdot\lambda^{1/2}(B)} = \frac{\lambda(A)}{\lambda(B)}$ $\to$ max $\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(B)}$, $\to$ min $\frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(B)}$

$\lambda_n(A) = \frac{4}{h^2}\sin^2+p_0 \sim \frac{4}{h^2}$; $\lambda_n(B) = \frac{4}{h^2}\sin^2+\frac{p_0}{2} \sim \frac{4}{h^2}$

$=1.$ (или $\frac{4+p_0}{4+\frac{p_0}{2}}$)

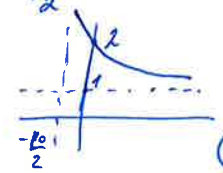
B > 0 ⇒ можно извлекать корень

т.к. $\lambda(B^{-1/2}AB^{-1/2}) = \frac{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi nh}{2}+p_0}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi nh}{2}+\frac{p_0}{2}}$ $n=1\dots N-1$ $= \frac{\pi^2n^2+p_0}{\pi^2n^2+\frac{p_0}{2}} \in [1;2]$.

$\Rightarrow \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi nh}{2} \rightsquigarrow n=1\dots N-1$

т.к. зам. предел: $\frac{\sin x}{x}\sim 1$.

$\frac{(\sin^2\frac{\pi nh}{2})\cdot 4}{\pi^2n^2\cdot h^2}\sim 1 \Rightarrow \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi nh}{2} \sim \pi^2n^2$



$p_0>0$

$$\boxed{\text{Ответ: } 1\le\frac{(Ax,x)}{(Bx,x)}\le 2}$$

при $\bar p=\frac{p_0}{2}$.

⇒ если в итер. процессе $B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau}+Ax^k=b$,

то оптим. парам: $\tau=\frac{2}{\bar M+\bar m}$.

И асимптотика ошибки: $\|z^k\|_B \le \left(\frac{\bar M-\bar m}{\bar M+\bar m}\right)^k\cdot\|z^0\|_B$.

можно посмотреть, что невязка ходит похоже (может быть, немонотонно)

Если $p(x)\neq const$: $p(x)>0$ по усл.

$A=A^T$; $\tilde A=(A+p(x)\cdot I)$ — есть теорема, что $\tilde A$ остается симм и полож. опр.

⇒ для него ∃ базис из собств. векторов.

правда, теперь $\psi^{(n)}$ — уже не $\varphi^{(n)}$ — собств ф-ции оператора A.

Мы знаем, что $\lambda_{min}(A)\le\frac{(Ax,x)}{(x,x)}\le\lambda_{max}(A)$

⇒ какой спектр у $\tilde A$?

Классная задача в 1 строчку! О.з. $\lambda_{max}(A)+\max(p)$ — нельзя улучшить

А у этого: $?\le\frac{((\Lambda+p(x)I)x,x)}{((\Lambda+\bar pI)x,x)}\le ?$

— будет в спец. сем. — но устойчивост[ь] плохая задач

а тут можно улучшить оценку $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

$$!\le\frac{(Ax,x)}{(Bx,x)}\le ?$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$B=B^T>0 \Rightarrow \exists B^{1/2} \Rightarrow B=B^{1/2}\cdot B^{1/2}$

$B = Q\,\mathrm{Diag}\,Q^T$

симм

$(\varphi^1 \dots \varphi^n)$ собств. вектора $(||||)$

$\begin{pmatrix}\varphi^1 \to \dots\\ \vdots\\ \varphi^{(n)} \to \dots\end{pmatrix}$ $(\equiv)$.

причем $B^{1/2}=(B^{1/2})^T$

$$B^{1/2}=Q\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^T$$

$\Rightarrow (Bx,x)=(B^{1/2}x, B^{1/2}x)$

$$(Ax,x) = (A\cancel{(B^{-1/2}B^{1/2})}x, B^{-1/2}B^{1/2}x) = (B^{-1/2}AB^{-1/2}\underbrace{B^{1/2}x}_{=y}; \underbrace{B^{1/2}x}_{=y})$$

! Если $B^{1/2}$ – симм, то $B^{-1/2}$ – тоже симм, т.к. обратная выражается через миноры.

20.11.20. ЭВМ. Семинар 12.

Решаем СЛУ с предобуславливателем:

$Ax = b$

Алгоритм: $B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b$

умеем хорошо обращать

Ускорение за счёт предобуславливателя — в сотни раз.

Исследуем сходимость итерац. процесса (пока без предобуславливателя)

$\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b$ ← при каких усл. он сходится?

Пусть x^k сошёлся к x^∞.

$\Rightarrow \frac{x^\infty - x^\infty}{\tau} + Ax^\infty = b$ — т.е. если он всё-таки сойдётся, то должен сойтись к решению.

Далее: $\begin{cases} \frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = b \\ \Leftrightarrow x^{k+1} = x^k - \tau A x^k + \tau b \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x-x}{\tau} + Ax = b \text{ — для точного решения} \\ \Leftrightarrow x = x - \tau A x + \tau b. \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{z^{k+1} = (I - \tau A) z^k}$, где $z^k = x - x^k$ — вектор ошибки.

закон перехода для вектора ошибки

$\Rightarrow \|z^{k+1}\| = \|(I-\tau A) z^k\| \le \|I - \tau A\| \cdot \|z^k\|$

подчинённая операторная норма

$\Rightarrow \|z^k\| \le \|I - \tau A\|^k \cdot \|z^0\|$

$\Rightarrow$ всё сходится при $\|I - \tau A\| < 1$.

Как это обеспечить?

Предположим, что $A = A^T$ и $A > 0$.

$\Rightarrow S := I - \tau A$ — тоже симм.

$\|S\|_2 = \max\limits_{\lambda_i(A)} |1 - \tau \cdot \lambda_i(A)| \overset{?}{<} 1.$

т.к. если $Ae = \lambda e$,

то $Se = (1 - \tau\lambda) e$

т.е. собств. вектор — не изменился

а собств. число — стало $1 - \tau\lambda$

$\Rightarrow \boxed{\text{Хотим: } \max\limits_{\lambda \in Spec(A)} |1 - \tau\lambda| \xrightarrow[\tau]{} \inf}$

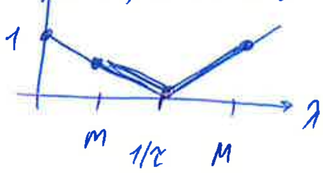
$A=A^T \Rightarrow spec(A)\in[m;M]$; $0<m\le M<\infty$.

$\Rightarrow$ какое τ обеспечивает $\max\limits_{\lambda\in spec(A)} \underbrace{|1-\tau\lambda|}_{} \to \inf\limits_{\tau}$

$$|1-\tau\lambda| = \begin{cases} 1-\tau\lambda, & \text{если } \lambda<\frac{1}{\tau} \\ \tau\lambda-1, & \text{если } \lambda>\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

Ну $f=f(\tau,\lambda)$.

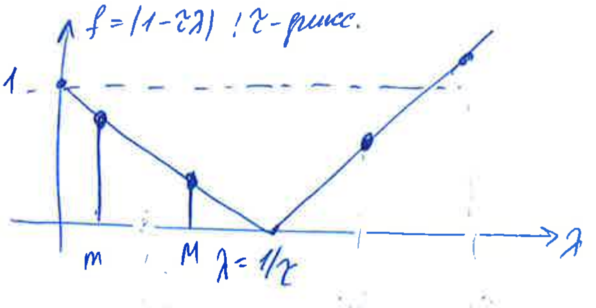
$f(\lambda)$ при τ-фикс.



$\Rightarrow \max\limits_{\lambda}|1-\tau\lambda| = \max\{|1-\tau m|; |1-\tau M|\}$.

Max будет — когда оба конца дают одно и то же.

(1)



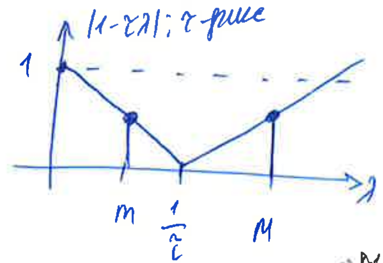
Хотим:

$\|S\| = \inf\limits_{\tau} \max\limits_{\lambda\in[m;M]} |1-\tau\lambda|$

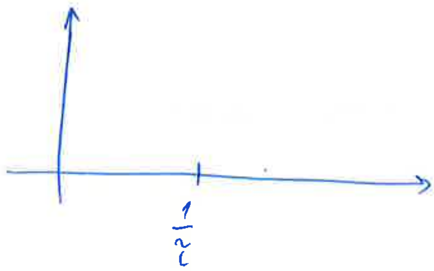
Чем меньше $\|S\|$ — тем лучше скорость сходимости.

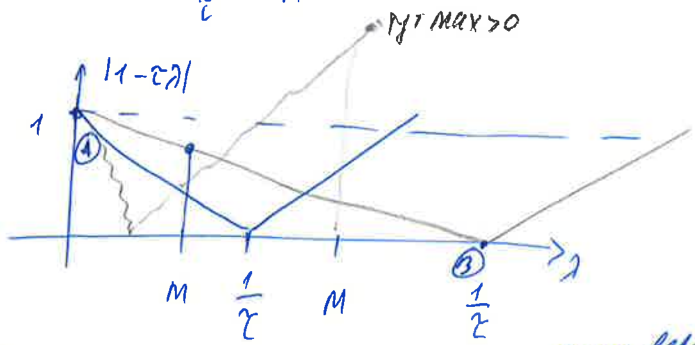
$\max|1-\tau\lambda| = 1$ — но это не очень хорошо, т.к. $f(0)$ — тоже $=1$.

(2)



(3)





Брать маленькие τ — хорошо, т.к. больше вер-ть что метод будет сходиться.

Но с другой стороны, чем меньше τ — тем медленнее сходится,

т.к. прямая $AB \parallel OX \Rightarrow f(A)\approx 1$. $\Rightarrow \|S\|\approx 1$ — очень медленно убывает.

Это если $\frac{1}{\tau} > [m;M]$

Если $\frac{1}{\tau}\in[m;M]$ — то оптимально, когда $\frac{1}{\tau}$ такое, что $|f(m)|=|f(M)|$.

Если $\frac{1}{\tau} < [m;M]$ — то max-ом >1 — вообще не подх.

$\Rightarrow |f(M)| = |f(m)|$

$\Rightarrow f(m) = -f(M)$.

$1 - \tau m = -(-\tau M + 1)$

$2 = \tau(m+M)$

$\Rightarrow \boxed{\tau_0 = \frac{2}{m+M}}$ – то τ, которое минимизирует норму.

оптимальный одношаговый параметр.

$$\|S(\tau_0)\|_2 = \max_{[m,M]} f(\lambda) = |f(m)| = |f(M)| = \left|1 - \frac{2m}{m+M}\right| = \left|\frac{m+M-2m}{m+M}\right| = \boxed{\frac{M-m}{M+m}}$$

А где обусловленность?

$$cond_2(A) = \underbrace{\|A\|_2}_{\lambda_{max} = M} \cdot \underbrace{\|A^{-1}\|_2}_{\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{1}{m}} = \frac{M}{m}$$

$$\Rightarrow \|S(\tau_0)\|_2 = \frac{M-m}{M+m} = \frac{1-(cond_2(A))^{-1}}{1+cond_2(A)^{-1}} = \frac{\varkappa(A)-1}{\varkappa(A)+1}$$ – ну да, оно <1.

Если $\varkappa(A) \sim 10^6$, то $q = \|S(\tau_0)\|_2 = \frac{1-10^{-6}}{1+10^{-6}}$ – очень-очень медленно скор.
И причем это оптим параметр.

Если $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \ddots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$ – т.е аппроксимирует $\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

$Sp(A) \in ?$

$\lambda^{(n)}(A) = \frac{4}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi h n}{2} \Rightarrow \lambda_{max} = 4.$

$\lambda_{min} = \frac{4}{h^2}$

$\Rightarrow Sp A \in [4; \frac{4}{h^2}]$

Если $h = \frac{1}{N}$ и $N = 10^3$ – то $h = 10^{-3} \Rightarrow Sp A \in [4; 4\cdot 10^6] \Rightarrow \varkappa(A) = 10^6$ – огромное число обусл
$\Rightarrow$ метод уже не сходится
(т.к $q = \|S\|_2 = 10^{-6}$.

Что делать?
ну ввести предобуславливатель:

$B \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = b.$

Если $x^k \to x^\infty$: $B \cdot \underbrace{\frac{x^\infty - x^\infty}{\tau}}_{=0} + Ax^\infty = b \Rightarrow$ если сойдется, то к точному решению.

Для точного решения: $B\frac{x-x}{\tau} + Ax = b.$

$$\begin{cases} B\left(\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau}\right)+Ax^k=b \\ B\left(\dfrac{x-x}{\tau}\right)+Ax=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Bx^{k+1}=(B-\tau A)x^k+\tau b \\ Bx=(B-\tau A)x+\tau b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{k+1}=B^{-1}(B-\tau A)x^k+B^{-1}\tau b \\ x=B^{-1}(B-\tau A)x+B^{-1}\tau b. \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^{k+1}=x-x^{k+1}=B^{-1}(B-\tau A)\cdot(x-x^k)$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{k+1}=(I-\tau B^{-1}A)z^k}$$

– т.е с помощью преобуславливателя B мы можем попытаться улучшить спектр и норму матрицы $\tau B^{-1}A$.

Как подобрать B так, чтобы $\|B^{-1}A\|<\|A\|$?

Т.е ~~чтобы~~ $\begin{cases} Spec(B^{-1}A)\in[m;M] \\ B^{-1}A=(B^{-1}A)^T \end{cases}$

Имеем: $z^{k+1}=(I-\tau B^{-1}A)z^k$ $\qquad B=B^T\Rightarrow B=B^{1/2}\cdot B^{1/2}$

$$Bz^{k+1}=B(I-\tau B^{-1}A)z^k$$

$$\cancel{B^{1/2}}\cdot B^{1/2}\cdot z^{k+1}=\cancel{B^{1/2}}\cdot(I-\tau B^{-1/2}AB^{-1/2})B^{1/2}z^k$$

$$\Rightarrow \underbrace{B^{1/2}\cdot z^{k+1}}_{=y^{k+1}}=(I-\tau B^{-1/2}AB^{-1/2})B^{1/2}z^k$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{k+1}=(I-\tau\cdot B^{-1/2}AB^{-1/2})y^k}$$

– вот для этого вектора y^{k+1} мы исследуем сходимость

Исследуем на сход: $y^{k+1}=(I-\underbrace{\tau B^{-1/2}AB^{-1/2}}_{=C})y^k$; $y^k=B^{1/2}z^k$

Заметим, что $C=C^T$ – т.к $A=A^T$; $B=B^T$.

Итерац. процесс: $B\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau}+Ax^k=b$.

$B=B^T$ – не обязат.

Верно ли, что $C\cdot C^T$ полож. опр.?

$\boxed{\text{Дано, что } A=A^T>0,\ B=B^T>0}$ – это существенно.

Ну $(Cx,x)=(B^{-1/2}AB^{-1/2}x,x)=(A\underbrace{B^{-1/2}x}_{=y\neq0},\underbrace{B^{-1/2}x}_{y\neq0,\ \text{т.к } B>0})=(Ay,y)>0$ – т.к $A>0$.

Зам. Пусть $C = C^T > 0$.

Тогда $\inf\limits_x \frac{(Cx,x)}{(x,x)} = \lambda_{min}(C)$

$\sup\limits_x \frac{(Cx,x)}{(x,x)} = \lambda_{max}(C)$

Ну $x = \sum d_i e_i$, где e_i – собств. вектор: $Ce_i = \lambda_i e_i$

$\Rightarrow \frac{(Cx,x)}{(x,x)} = \frac{\sum d_i^2 \lambda_i}{\sum d_i^2}$ — его max $= \lambda_{max}$, его min $= \lambda_{min}$

Теперь у нас: $\frac{(Cx,x)}{(x,x)} = \frac{(B^{-1/2}AB^{-1/2}x,x)}{(B\cdot B^{-1/2}x, B^{-1/2}x)} = \frac{(AB^{-1/2}x, B^{-1/2}x)}{(B\cdot B^{-1/2}x, B^{-1/2}x)} = \frac{(Ay,y)}{(By,y)} \overset{?}{\in} [\tilde m; \tilde M]$ если мы это сумеем ограничить – то мы ограничим λ_{min} и λ_{max}

Теорема Пусть $A = A^T > 0$

$B = B^T > 0$.

Пусть $\tilde m \le \frac{(Ay,y)}{(By,y)} \le \tilde M$.

$Spec(C) \in [\tilde m; \tilde M]$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$

Тогда для итерационного процесса $B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tilde\tau_0} + Ax^k = b$ с $\tilde\tau_0 = \frac{2}{\tilde M + \tilde m}$

верна оценка: $\|y^k\|_2 \le \left(\frac{\tilde M - \tilde m}{\tilde M + \tilde m}\right)^k \cdot \|y^0\|_2$, где $y^k = B^{1/2}z^k$

Док-во: $y^{k+1} = (I - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2})y^k$

$\tilde\tau_0 = \frac{2}{\underbrace{\lambda_{min}(C)}_{\tilde m} + \underbrace{\lambda_{max}(C)}_{\tilde M}}$

$\tilde q = \frac{\tilde M - \tilde m}{\tilde M + \tilde m}$. ч.т.д.

Зам. Мы не хотели оценку для z^k, а для $y^k = B^{1/2}z^k$.

$\|y^k\|_2 = (y^k, y^k)^{1/2} = (B^{1/2}z^k; B^{1/2}z^k)^{1/2} = (Bz^k; z^k)^{1/2} = \underbrace{\|z^k\|_B}$ евкл. норма, порожд. оператором B.

$\Rightarrow \boxed{\|z^k\|_B \le \left(\frac{\tilde M - \tilde m}{\tilde M - \tilde m}\right)^k \cdot \|z^0\|_B}$

Мораль: $\|z^k\|_B \le \tilde{q}^k \cdot \|z^0\|_B \le \ldots \|z^k\|_2$

$\sim \|z^k\|_2$.

Хотим: $\|z^k\|_2 \le \tilde{q}^{\cdot} \cdot \|z^0\|_2$.

по сем. 11 чм: $\min\limits_i \sqrt{\lambda_i(B)} \cdot \|x\|_2 \le \|x\|_B \le \max\limits_i \sqrt{\lambda_i(B)} \cdot \|x\|_2$.

$$\Rightarrow \|z^k\|_2 \le \sqrt{\frac{\lambda_{max}(B)}{\lambda_{min}(B)}} \cdot \|z^0\|_2.$$

$$\boxed{\|z^k\|_2 \le \sqrt{\mathcal{X}(B)} \cdot \|z^0\|_2}$$

! $\|z\|_B = (Bz, z)^{1/2}$

$\|z\|_2 = (Bz, Bz)^{1/2}$! $(Bz, Bz)^{1/2} = \|Bz\|_2 \le \|B\| \cdot \|z\|_2$.

Как в нашей задаче выбрать τ?

$\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ — умеем быстро решать через Фурье. ~~Или про~~ $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \bar{p} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \bar{p} & -\frac{1}{h^2} \end{pmatrix}$

$By = f$

А хотим: $\begin{cases} -y''(x) + p(x) \cdot y(x) = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ — Фурье не работает, т.к. не знаем собств. рег. $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p(x_k) & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & & \\ & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p(x_k) & \end{pmatrix}$

$Ay = f$

Если $0 < p_{min} \le p(x) \le p_{max}$, то как получить оценку для $\frac{(Ax, x)}{(Bx, x)}$? ДЗ

Зам. Обе эти задачи можно решить прогонкой. (ну 1-мерную только) но 2-мерное и 3-мерное ур-я — уже ~~не~~ прогонка сложная и дорогая.

Мораль: Будем решать $\begin{cases} -y + \bar{p} y = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ — умеем решать через Фурье ($\bar{p}$ — конст.)

Итер. процесс: $B\left(\frac{y^{k+1} - y^k}{\tau}\right) + Ay^k = f$, где $\tilde{\tau} = \frac{2}{\tilde{m} + \tilde{M}}$

$$\boxed{\text{Берём } \bar{p} := \frac{p_{min} + p_{max}}{2}}$$

$$\begin{cases} -y'' + \bar{p}y = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

знаем собств. ф-ции и собств. знач.

Они помогут для этой задачи реализовать Фурье.

Для этого мы не решаем ур-е на собств. знач:

$Ay + \bar{p}y = f$ — как решать, зная, что $Ae = \lambda e$ — умеем решать.

Ищу $y = \sum \alpha_i e_i$

$f = \sum d_i e_i$ $\Rightarrow \alpha_i = \dfrac{d_i}{\lambda_i + \bar{p}}$ ← т.к. $(A + \bar{p} I) y = f$. λe

собств. ф-ции такие же, как у $Ae = \lambda e$,

~~только~~ а собств. числа: $\tilde{\lambda} = \lambda + \bar{p}$.

13.11.20. ЭВМ Семинар 11.

Задача 5.

Итерационный процесс с предобуславливателем.

$Ax=b$ – решаем: $B\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau_{k+1}}+Ax^k=b$

$x^0 \to \dots x^k \to \dots$

Т.е. $x^k \to r^k = b - Ax^k \xrightarrow[\text{сетчат}]{} By^{k+1} = r^k \to$ получаем y^{k+1}

если $\|r^k\|/\|x\| < eps$

Отсюда возвращаем x^{k+1}:

$\dfrac{x^{k+1}-x^k}{\tau_{k+1}} = y^{k+1} \Rightarrow x^{k+1} = x^k + \tau_{k+1} y^{k+1}$

В нашей конкретной задаче:

$-u_{xx} - u_{yy} + p(x,y)\cdot u = f$ на квадрате, как в 2-мерном преобр. Фурье.

$(A)_{\text{матрица}} u_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2} - \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + p_{ij} u_{ij} \stackrel{?}{=} f_{ij}$ – операция умножения матрицы A на u_{ij}

Для 1-мерной задачи:

$-u_{xx} + p(x)\cdot u(x) = f(x)$

$u(x)$ – искомая

$p(x), f(x)$ – заданы.

Сетка – как в своей задаче 1-мерной.

1-мерная сеточная аппроксимация:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2} + p_i u_i = f_i \\ f_i \sim f(x_i) \\ \quad -\frac{h}{2} + ih \text{ или } ih. \\ + \text{ Краевые усл: } u_0 = u_1 \\ \quad 2\dfrac{u_0 - u_1}{h^2} = f_0 + p_0 u_0. \end{cases}$$

$\Leftarrow\Rightarrow Au = f$. – она через Фурье не решается, т.к. не знаем собств-знач, т.к. диагональная добавка – не константа.

~~Метод Фурье не работает.~~

$B = -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + p_{const} u_i$ ← эту задачу легко решаем методом Фурье

↑ например, это медиана $p(x)$.

собств. ф-ции не изменились,

а собств. значения – прибавили p_{const}.

Берём $\tau_{k+1} = 1$, и считаем $B\dfrac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + Ax^k = b$. – итерационным методом.

! матрицу A – не хранить, матрицу B – тоже.

нам дост. просто уметь умножать A на x, и ~~знат~~ уметь брать её коорд.

Решаем $Bx = b$ методом Фурье, т.е. знаем $\varphi^{(n)}$, $\lambda^{(n)}$ и скал. произв. $(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})_h$.

$B = \tilde{A} + \begin{pmatrix} p_{const} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_{const} \end{pmatrix}$

Ищу $x = \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi^{(n)}$

$b = \sum_{n=1}^{m} d_n \varphi^{(n)}$, где $d_n = \dfrac{(b, \varphi^{(n)})}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})}$

$$Bx = \sum_{n=1}^{M} c_n \lambda^{(n)} \varphi^{(n)} \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{m} d_n \varphi^{(n)}$$

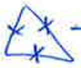
$\Rightarrow c_n = \dfrac{d_n}{\lambda^{(n)}}$! $\lambda^{(n)} = \tilde{\lambda}_{старое} + p_{const}$.

Как хранить триангуляцию: 

Например, так: хранить N_Δ; $N_{вершин}$; $N_{ребер}$.

Для интегрирования: $((x_1;y_1);(x_2;y_2);(x_3;y_3))$ — один Δ.

~~Так нельзя~~

по Δ:  — по серединкам по ρ не считаем.

Вершина хранил — можно, но плохо, т.к. вершина может принадлежать многим Δ.

Сделаем так: перечислим все вершины области.

$\Rightarrow$ каждый Δ — это 3 числа, номера вершин: $(n_1;n_2;n_3)$

Дано: n_x точек по оси x, n_y точек по оси y $\Big\} \to n_x \cdot n_y$ квадратиков — каждый квадратик на 2 Δ.

Файл: $N_{вершин}$, N_Δ, $N_{ребер}$

вершины
Δ.
ребра

06.11.20. ЭВМ. Семинар 10.

Надо решить $Ax=b$, причём $\det A \neq 0$.

Нас устраивают и итерационные методы, т.к. n большое, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $n \sim 10^4$

$Ax=b$ – это аппроксимация 2-мерной задачи ($n_y=100$, $n_x=100$)

$\Rightarrow$ матрица $10^4 \times 10^4$.

$\Rightarrow$ методу Гаусса надо 10^{12} действий на 1 шаг, а шагов ~ 100.

А произв. компа: 10^{10} $\Rightarrow$ 100 сек на 1 шаг

$\Rightarrow$ 10000 сек $\approx$ 17 сек нужно Гауссу.

$\Rightarrow$ Гаус долгий, нам нужен итерационный метод.

Типы: 1) с пост. парам τ и предобуславливателем.

2) вариационный с предобуславливателем

С τ: $\dfrac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = b$. – канон. ф-ла для итерационного процесса.

$x^0 \to \dots x^m \to z$.

Скорость сходимости – геом. прогр. с $q \sim \dfrac{1-\operatorname{cond}^{-1}A}{1+\operatorname{cond}^{-1}A}$ $\leftarrow$ обусловленность матрицы A, она $\sim \dfrac{1}{N_x^2+N_y^2}$

$\Rightarrow$ скорость сходимости $\sim \dfrac{1-10^{-4}}{1+10^{-4}}$ – очень медленно сходится.

Чтобы улучшить ситуацию, нужен предобуславливатель:

$$B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = b.$$

Ну было: $Ax=b$

$\Rightarrow B^{-1}Ax = B^{-1}b$ $\Rightarrow \dfrac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + B^{-1}Ax^n = B^{-1}b$.

$$\Rightarrow B\underbrace{\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}}_{\text{"}y^{n+1}\text{"}} = b - Ax^n.$$

И надежда, что матрицу B легче обращать, чем A.

И скорость сходимости улучшится, т.к. обусловленность $B^{-1}A$ сильно меньше, чем обусл. A.

! Матрицу A мы не храним.

Ну $A_{ij} = i+j-1$ – типа просто от i, j зависит.

Как решать?

$Ax=b$.

$Ax-b=0$.

$F(x)=0 \iff x = \varphi(x)$ $\leftarrow$ это должно быть сжимающим отображением.

$x^{n+1} = \varphi(x^n)$

$$x = \underbrace{x - F(x)}_{=:\varphi(x)}$$

Если F – плохое, то φ – не будет сжимающим.

Поэтому сделаем так: $B^{-1}F(x)=0$. (в т.ч. $B^{-1}=\frac{1}{\tau}\cdot E$) – тогда мы обеспечим сжимаемость φ.

$\Rightarrow \tau B^{-1}F(x)=0.$

$\Rightarrow x^{n+1}=x^n-\tau B^{-1}F(x)$

$\Rightarrow \boxed{B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=b.}$ — канон. вид.

на n-м шаге: по x^n считаем x^{n+1}.

1 Задача τ — переменная; $B=E$.

2 задача τ — пост; B — обращаем

! Не нж в-ть задач: $By=C$ — решить

$\neq$ найти B^{-1} и написать $y=B^{-1}C$.

Т.к. обычно $By=C$ — обычно устойчиво,

а B^{-1} — больше сложность (в N раз), и тем B^{-1} — вычисл. с большой погр-тью.

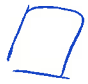
Итак: $B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=b.$

$r^n=b-Ax^n$ — невязка.

Решаем $By^{n+1}=r^n$ $\leftarrow$ там $y^{n+1}=\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}$ $\Rightarrow$ теперь считаем x^{n+1}, потом r^{n+1} и зацикливаемся. И так делаем, пока $\|r^n\| \ll eps$.

! причём B^{-1} мы не ищем, мы честно каждый раз решаем систему $By^{n+1}=r^n$!

Задача: $-u_{xx}-u_{yy}=f(x,y)$



краевое усл: $u|_{\partial\Omega}=0$.

Сетка м.б. смещённая и несмещённая.

Апроксимация Лапласа: $u_{ij}\sim u(x_i;y_j)$

$$-\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{h_x}-\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_y}=f_{ij}$$

Произв. справа на смещ. сетке: $u_{Nj}=u_{N-1,j}$

$u_{0j}=0$ — значение слева.

Метод Фурье для решения СЛУ:

$Ax=b$.

Пусть e_i — собств. вектора ортог: $(e_i;e_j)=\delta_{ij}$

$b=\sum_{i=1}^{N} d_ie_i$; $x=\sum c_ie_i$ $d_i=(b;e_i)$

$\Rightarrow Ax=b=\sum \lambda_ic_ie_i$

$\Rightarrow c_i=\frac{d_i}{\lambda_i}$

Реализовать f2u.

И считаем невязку: $\|f-Au\|_*$ — возвращаем

Т.е $f_{ij} \longrightarrow d_{ij} \longrightarrow \dfrac{d_{mn}}{\lambda_{mn} = \lambda_m + \lambda_n} \longrightarrow u_{ij}$

Было раньше: $f_{ij} \longrightarrow C_{mn}$ – коэф. Фурье. $\longrightarrow \dfrac{C_{mn}}{\lambda_{mn}} \longrightarrow u_{ij}$.

Как тестировать: задать $u(x,y) \longrightarrow$ $f(x,y)$ – правая часть получена
$\sim$ профир. г. раза
удовл. краевым усл.

$\Rightarrow$ задача: $-u_{xx} - u_{yy} = f$.

найти u_{ij}.

и сравнить $u_{ij} \overset{?}{\simeq} u(x_i; y_j)$

и $\| u_{ij} - u(x_i; y_j) \|_h \sim C(h_x^2 + h_y^2)$

<u>2 задача</u> $-(k_1(x,y)u_x)_x - (k_2(x;y)\cdot u_y)_y + p(x,y)u = f$.

Т.е появились $k_1; k_2$ и диаг. добавки.

метод Фурье ломается – не ищет собств. знач.

(ну даже для 1-мерной задачи:

$((1+x^2)u_x)'_x \xrightarrow{\text{аппрокс.}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & 1 \end{pmatrix}$ – было

$u_0 = u(1) = 0$.

$\dfrac{1}{h}\left((1+(x_k+\frac{h}{2})^2)\cdot \dfrac{u_{k+1}-u_k}{h} - (1+(x_k-\frac{h}{2})^2)\dfrac{u_k - u_{k-1}}{h}\right)$ – стало

$\Rightarrow$ элементы матрицы зависят от номера строки.

У такой матрицы явно собств. знач. не ищутся.

Что делать: если k_1 и k_2 – пост – по старой алгоритм работает.

Матрица A – соотв. задаче с переменными коэф. $Ax = b$.

B – соотв. задаче с пост. коэф. $Bx = b$.

Т.е $\underline{Ax=b}$ (1') – получается как результат аппроксимации

$-(k_1(x,y)u_x)_x - (k_2(x,y)u_y)_y + p(x,y)u = f$ (1)

~~Иначе~~ без предобуславливателя – медленно сход.

С предобусл.: $B\dfrac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = b$.

$\Rightarrow$ ~~получим~~ хотим решать $-k_1\cdot u_{xx} - k_2\cdot u_{yy} + p\cdot u = g$ (2) – ей соотв. $\boxed{By=g}$

Т.е $-(k_1(x,y)u_x)_x - (k_2(x,y)u_y)_y + p(x,y)u = f \longrightarrow Ax+b \longrightarrow -k_1\cdot u_{xx} - k_2\cdot u_{yy} + p\cdot u = g$ –

решаем это методом Фурье $\longrightarrow$ решаем $B\dfrac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = b$.

В 1-мерном случае

$-(k(x)u_x)_x + p(x)\cdot u(x) = f(x)$, равном сетка => симусов.

Заменим $-(k(x)u_x)_x$ ~~[illegible]~~ ← по частям дифф-ть меньше и потом по частям аппроксимировать.

$$\sim -\frac{k(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{u(x_k+h)-u(x_k)}{h} - k(x_k-\frac{h}{2})\cdot\frac{u(x_k)-u(x_k-h)}{h}}{h}$$

(ну $-u_{xx} \sim -\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}$)

$p(x)u(x) \longrightarrow p(x_k)\cdot u(x_k)$

$$\Rightarrow -\frac{k(x_k+\frac{h}{2})\cdot\frac{u(x_k+h)-u(x_k)}{h} - k(x_k-\frac{h}{2})\cdot\frac{u(x_k)-u(x_k-h)}{h}}{h} + p(x_k)u(x_k) = f(x_k)$$

точность этой аппрокс $= O(h^2)$

Матрица:

$$A = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ -\frac{k(x_k-\frac{h}{2})}{h^2} & \frac{k(x_k+\frac{h}{2})+k(x_k-\frac{h}{2})}{h^2}+p(x_k) & & -\frac{k(x_k+\frac{h}{2})}{h^2} & \\ & 0 & & & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_0 \\ \\ u_N \end{array}$$

– фурье тут не работает т.к коэф. зависит от номера строки.

Можно решать методом прогонки.
Но в 2-мерном это сложно.
Методом фурье $Ax=b$ с этой матрицей – не умеем.

=> заменим $k(x)\approx k_0$; $p(x)\approx p_0$.

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} -\frac{k_0}{h^2} & k_0\cdot\frac{2}{h^2}+p & -\frac{k_0}{h^2} \end{matrix}\right] \Rightarrow \lambda = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n h}{2}$$

ну A – имеет собств. числ λ.
=> у $kA + pE$ – собств. число будет $k\lambda + p$.

=> $\lambda_{новое} = k_0\cdot\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n h}{2} + p$, а новые собств. ф-ции $\sin \pi n h_x$

(это для $By = g$).

Ес. решаем так:

$B\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau} + Au^k = b$.

обращаем матрицу для правых частей $b - Au^k$.

23.10.20. ЭВМ. Семинар 8.

Задача про интегрирование

Хотим: $\int_a^b f(x)dx = ?$

f и $[a,b]$ – заданы

1 подход. $\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1)+\ldots+c_n f(x_n)$ – по квадратурной ф-ле

Пример: $\int_0^1 e^{-x}\sin x\, dx = I(f)$ – руками посчитали.

И приближаем её Симпсоном: $\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$.

Она точна для $m=3$ => обещают оценку погр-ти: $\frac{\|f^{(4)}\|\cdot(b-a)^5}{1536}$ (или 2880)

$f^{(4)}$ – честно посчитали.

Можно даже не искать точную точку max, а $|\sin x|\le 1$ и $|e^{-x}|\le 1$.

Проверить и сравнить квадратуру Симпсона и Гаусса.

2) Составная квадратура

Если отрезок большой, то его разбивают (т.к. иначе оценка погр-ти $\le 10^5$ – много)

$$\int_a^b f dx = \sum_i \underbrace{\int_{a_i}^{b_i} f dx}_{\to S_3^{[a_i;b_i]}(f)} \approx S_3^N(f) = \sum_{i=1}^N S_3^{[a_i;b_i]}(f)$$

! Гаус. переигровает Симпсона.

$$|I(f)-S_3^N(f)| \le |R_3^N(f)| \le \sum_{i=1}^N R_3^{[a_i;b_i]}(f)$$

Хотим: $I^{[a,b]}(f) \longrightarrow S_3^{[a,b]}(f)$

$R_3^{[a,b]}(f) \le \frac{\|f^{(4)}\|_{C[a,b]}(b-a)^5}{1536}$ – для обычной ф-лы.

Для составной: $|R_3^N(f)| \le \sum_{i=1}^N \frac{\|f^{(4)}\|}{1536}\left(\frac{b-a}{N}\right)^5 \le \frac{\|f^{(4)}\|_{C[a,b]}}{1536}\cdot\frac{(b-a)^5}{N^5}\cdot N$

Задание 2:

проверить, что составная квадр. ф-ла ~~имеет~~ Гаусса лучшую асимптотику.

А задание 1: Сравнение квадр. ф-л Симпсона и Гаусса по 3 узлам на $[0,1]$.

! почему не надо пытаться поймать различие Симпсона и Гаусса на $\int_0^1 (x^3+x^2)dx$ – т.к. обе точны на этой f.

почему там $(b-a)^5$?

Ну квадратура Симпсона точна для $m=3$:

и по кошмарной ф-ле: $\frac{\|f^{(m+1)}\|}{(m+1)!}\, 2^{1-(m+1)}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1}\cdot\Big(\underbrace{\int_a^b |p(x)|dx + \sum|c_i|}_{1/2(b-a)}\Big) = (\ldots)\cdot(b-a)^5$

! Гаусс быстрее выходит на машинный ноль.

Если $N=10^4$, то Симпсон 10^{-16}

Если $N=10^3$, то его $\le 10^{-4}$

квадр. Гаусса точна для полиномов $2n-1=5$.

У Гаусса: $err \leq \frac{1}{N^7} \cdot N = \frac{1}{N^6}$

$\Rightarrow$ ловить асимптотику у сост. Гаусса для $N=10^3$ – бесполезно, т.к. $\frac{1}{N^5} = 10^{-15}$ – уже около машинного нуля.

Надо для $N = 100, 200, 300, 400$.

3) Функция с особенностью

$\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} ; \int_0^1 \sqrt{x}\,dx}_{\text{не получится ловить лучшую асимптотику}}$ – обе плохие ф-ции.

Почему? Ну т.к. $R(f) \leq \|f^{(m+1)}\|_C (b-a)^{m+2}$

неограниченная оценка!

И т.к. подынтегральная ф-ция $\notin$ классу C^{m+1} т.к. (ф-ция)$'$ уходит в ∞.

А должна быть $f^{(m+1)}$ непрер.

$\|f\|_C = \max_x |f(x)|$

$\Rightarrow$ не ловим лучшую асимптотику.

! $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ – по Симпсону нельзя считать, т.к. она края берёт в качестве узлов – концы.

А Гаусс не берёт концы в качестве узлов $\Rightarrow$ будет работать.

$\int_0^1 \underset{\text{весовая ф-ция}}{\underbrace{\sqrt{x}}}\, e^x dx \approx \underbrace{\sum_{j=1}^{N}}_{\text{сумма по подотрезкам}} \underbrace{(c_i \cdot f(x_i))}_{\text{любая квадратура по 2-м узлам}}$

! Для $\sqrt{x}e^x$ – есть проблема если её считать как f, и нет проблем, когда считаем её как р.f.

Ещё раз: $\int_a^b p(x) f(x)\, dx = I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} \underset{\text{зависят от веса } p}{c_i} f(x_i)$

например, $f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$

$\varphi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i - x_j)}$

$\Rightarrow \int_a^b p(x) L_n(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{\int_a^b p(x)\varphi_i(x)\, dx}_{\text{число } c_i = c_i(p),\ \text{считаем явно}}$

Мы выберем $p(x)$ так, чтобы это посчиталось.

Оценка погр-ти: $|I(f) - C_n(f)| \leq \frac{\|f^{(m)}\|_{C[a;b]}}{n!} \int_a^b |p(x)\omega_n(x)|\, dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \underset{\text{весовая}}{\underbrace{\sqrt{x}}}\, \underbrace{e^x}_{f(x)} dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$

x_1 и x_2 – любые, например 0 и 1.

Строим мног. Лагранжа по 2-м узлам.

и посчитаем $c_i = \int_a^b p(x)\varphi_i(x)\, dx$

то тогда оценка погр-ти будет

! $\int_a^b \sqrt{x}\, e^x f(x)\,dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b)$

$c_1 = \int_a^b p\varphi_1(x)dx$, $c_2 = \int_a^b p\varphi_2(x)$

И эту ф-лу превращаем в составную: $\int_0^1 \ldots \rightsquigarrow \sum \int_{a_i}^{b_i}$

А если без веса: $\int_a^b \sqrt{x}e^x dx = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \sqrt{x}e^x dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}(b_i-a_i)[f(a_i)+f(b_i)]$

сост. ф-ла ~~Гаусса~~ трапеций

Почему ф-ла Гаусса стала ф-лой трапеций?

1) Обычная ф-ла Симпсона и Гаусса по 3-м узлам и сравниваем

2) Составная ф-ла из Гаусса по 3-м узлам.

3) Вместо хорошей $f = e^x \sin x$ берем $e^x\sqrt{x}$ (т.е. у f' теперь

на ней по сост. ф-ле Гаусса асимпт. не выполняется

построим сост. квадр. ф-лу Гаусса с весом.

Но это сложно - т.к. Гаусс узлы корня.

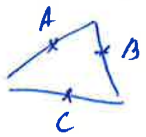
А мы построим сост. квадр. ф-лу Трапеций с весом.

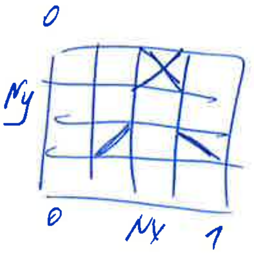
И да, нужная точность из заявленной оценки погр-и — будет.

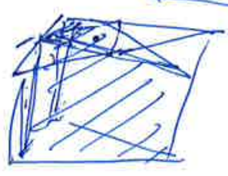
4) Двумерная задача.

$I(f) = \iint_\Delta f(x,y)dxdy \approx \frac{1}{3} \cdot$ площадь $\cdot (f(A)+f(B)+f(C))$

Как считать:







$\iint_\square f(x,y)dxdy = \sum \iint_{\Delta_i} f(x,y)dxdy \approx \sum_i S_{\Delta_i}(f)$

кваф

нарезаем Δ делаем это

Как строить квадратуру Гаусса

Теорема. Пусть $\psi_n(x)$ - ортог. многочлен для $[a,b]$ и веса ρ.

Пусть $x_1 \ldots x_n$ - его корни (все $x_i \in [a,b]$ - мы вчера доказали).

Пусть $\int_a^b \rho(x) f(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$ $\forall f(x) = P_{n-1}(x)$

Тогда $\int_a^b \rho f dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$, $\forall f = P_{2n-1}(x)$

Т.е ~~взяли узлы = корни орт. многочлена~~

Т.е если квадратура точна $\forall f(x) = P_{n-1}(x)$, то она точна $\forall f = P_{2n-1}(x)$.

Т.е квадратура Гаусса – это ищем орт. мног,
его корни.
Взяв эти корни в качестве узлов.
И найти через метод неопр. коэф / или интер. мног
ищем c_i: – чтобы было точно $\forall P_{n-1}(x)$.

И тогда она автоматически точна ~~на~~ для $2n-1$.

Зам. Мы строим $Ч_3$ $[-1;1]$ и потом переходим на $[0,1]$ или $[a,b]$.

Если узлы симм, то крайние коэф равны. (т.к $Ч_3$ – симм. относ. середины отрезка)
И ещё сумма всех коэф $= 1$. вес тоже симм.

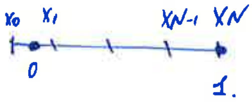
=> Останется найти 1 коэф. – типа для $f(x) = x^2$ и метод неопр. коэф.

$$\begin{cases} c_1 = c_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 = b - a \end{cases}$$

Задание 3

по x: 0101

по y: 0010



$$1+\frac{h}{2} = N\cdot h.$$

$$2 = h(2N-1) \Rightarrow h = \frac{2}{2N-1} = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0)=0 \\ y(1)=0. \end{cases}$$

- $y(1)=0 \Leftrightarrow y(x_N)=0.$
- $y(0)=0$: $\begin{cases} y\left(\frac{h}{2}\right) = y(0) + y'(0)\cdot\frac{h}{2} + O(h^2) \\ y\left(-\frac{h}{2}\right) = y(0) - y'(0)\cdot\frac{h}{2} + O(h^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{y\left(\frac{h}{2}\right)+y\left(-\frac{h}{2}\right)}{2} = y(0) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y(0)=0 \longleftrightarrow y\left(\frac{h}{2}\right)+y\left(-\frac{h}{2}\right)=0.$$

$$\Rightarrow y(x_0) = -y(x_1)$$

- $$y''(x) \approx \frac{\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h} = \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$$

$$\Rightarrow y''(x) = -\lambda y \longleftrightarrow \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k+1}}{h^2} = -\lambda y_k;\quad k=1\ldots N-1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k;\ k=1\ldots N-1 \\ y_0 = -y_1 \\ y_N = 0. \end{cases}$$

посмотрим на матрицу: $k=N-1$: $\frac{\overset{\parallel 0}{y_N} - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$

т.е. $\frac{-2y_{N-1}+y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$

$k=1$: $\frac{y_2 - 2y_1 + \overset{\parallel -y_1}{y_0}}{h^2} = -\lambda y_1$

$k=2$: $\frac{y_3-2y_2+y_1}{h^2} = -\lambda y_2.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 - \cdot\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Видим, что матрица симм.

$\Rightarrow$ скал. произв. $(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i$.

$y_0 = y_N = 0$ — фиктивные коэф.

Ищем собств. ф-ции задачи $\begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k; \ k=1\dots N-1 \\ y_0 = -y_1 \\ y_N = 0. \end{cases}$

Имеем: $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k; \ k=1\dots N-1$

$y_{k+1} + y_k(-2+\lambda h^2) + y_{k-1} = 0.$

$y_{k+1} - 2(1-\frac{\lambda h^2}{2})y_k + y_{k-1} = 0;$ $p = 1-\frac{\lambda h^2}{2}$

$y_{k+1} - 2py_k + y_{k-1} = 0.$

Хар. ур-е: $\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0.$

$D = 4p^2 - 4 = 4(p^2-1)$

$\Rightarrow \mu_{1;2} = \frac{2p \pm 2\sqrt{p^2-1}}{2} = p \pm \sqrt{p^2-1}$

$\left[\begin{array}{l} \text{если } p^2 \neq 1, \text{ то } y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k \\ \text{если } p^2 = 1, \text{ то } y_k = (c_1+kc_2)\mu^k \end{array}\right.$

пусть $p^2=1 \Rightarrow y_k = (c_1+kc_2)\mu^k$ $\Rightarrow \mu = -\frac{c_1}{c_1+c_2}$ ~~$\Rightarrow c_1(1+\mu) = -c_2\mu.$~~

$\mu_0 = -\mu_1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -(c_1+c_2)\mu \\ (c_1+Nc_2)\mu^N = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{N}c_1$
$\mu_N = 0$

$\Rightarrow \mu = -\frac{c_1}{c_1 - \frac{1}{N}c_1} = -\frac{N}{N-1}.$

но $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow \mu^2 = 1.$

но $\begin{cases} \mu^2 = 1 \\ \mu = -\frac{N}{N-1} \end{cases}$ — противоб.

пусть $p^2 \neq 1 \Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$

$y_0 = -y_1 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = -(c_1\mu_1 + c_2\mu_2)$

$y_N = 0 \Rightarrow c_1\mu_1^N + c_2\mu_2^N = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1(1+\mu_1) = -c_2(1+\mu_2) \\ c_1\mu_1^N + c_2 \cdot \underset{\uparrow \text{ т.к. } \mu_1\mu_2=1}{(\mu_1)^{-N}} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow c_1\mu_1^{2N} = -c_2$

$\Rightarrow c_1(1+\mu_1) = c_1 \cdot \mu_1^{2N}(1+\underbrace{\mu_2}_{=1/\mu_1}) = c_1 \cdot \mu_1^{2N-1}(\mu_1+1).$

$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = 1 = e^{2\pi k i}$

$\Rightarrow \mu_{1,n} = e^{\pi i \cdot \frac{2n}{2N-1}}$ $n = 1\dots N-1$

$\mu_{2,n} = \overline{\mu_{1,n}} = e^{-\pi i \cdot \frac{2n}{2N-1}}$

~~$\Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N}\cdot\mu_2^k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N-k} = c_1\mu_1^N(\mu_1^{k-N} - \mu_1^{N-k}) =$~~

$\Rightarrow y_k = c_1 \cdot \mu_1^k + c_2 \cdot \mu_2^k \underset{\uparrow\, c_2 = -c_1\mu_1^{2N}}{=} c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N}\cdot\mu_2^k \underset{\uparrow\, \mu_1\mu_2=1}{=} c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N-k} = c_1\mu_1^N\cdot(\mu_1^{k-N} - \mu_1^{N-k}) = c_1\mu_1^N\cdot(\mu_1^{k-N} - \mu_2^{k-N}) =$

$= -c_1\mu_1^N\cdot(\mu_1^{N-k} - \mu_2^{N-k}) = -c_1\cdot e^{\pi i\cdot\frac{2nN}{2N-1}}\cdot\left(e^{\pi i\frac{2n}{2N-1}(N-k)} - e^{-\pi i\cdot\frac{2n}{2N-1}(N-k)}\right) = -c_1\cdot e^{\pi i\frac{n(2N-1)+n}{2N-1}}\cdot\sin\left(\frac{2n(N-k)}{2N-1}\right)$

Пусть $p^2 \neq 1 \Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$

$$y_0 = -y_1 \Rightarrow c_1\cdot 1 + c_2\cdot 1 = -(c_1\mu_1 + c_2\mu_2)$$

$$y_N = 0 \Rightarrow c_1\mu_1^N + c_2\mu_2^N = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(1+\mu_1) = -c_2(1+\mu_2) \\ c_1\mu_1^N + c_2\cdot\mu_2^N = 0. \end{cases} \Rightarrow c_2 = -\frac{c_1(\overset{\mu_1+\mu_2}{1}+\mu_1)}{1+\mu_2} = -\frac{c_1\cdot\mu_1(1+\mu_2)}{1+\mu_2} = -c_1\mu_1 \Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1\mu_2^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1\mu_2^k \\ y_N = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1\mu_1^N - c_1\mu_1\underset{\mu_1^{-N}}{\mu_2^N} = 0.$$

$$\Rightarrow c_1\mu_1^{2N} - c_1\mu_1 = 0.$$

$$\Rightarrow c_1\mu_1(\mu_1^{2N-1} - 1) = 0.$$

$$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = 1 = e^{2\pi i n}$$

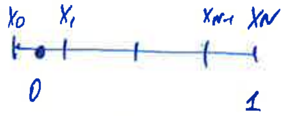
$$\Rightarrow \mu_{1,n} = e^{\frac{2\pi i n}{2N-1}} = e^{\frac{\pi i n}{N-\frac{1}{2}}};\ n = 1\ldots N-1$$

$$\Rightarrow \mu_{2,n} = \overline{\mu_{1,n}} = e^{-\frac{\pi i n}{N-\frac{1}{2}}};\ n = 1\ldots N-1$$

– компон. собств. вектора

$$\Rightarrow \underset{\text{координ}}{y_k^{(n)}} = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1\mu_2^k = c_1 e^{\frac{\pi i n k}{N-\frac{1}{2}}} - c_1\cdot e^{\frac{\pi i n}{N-\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{\pi i n k}{N-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \underbrace{c_1\cdot e^{\frac{1}{2}\frac{\pi i n}{N-\frac{1}{2}}}}_{\tilde{c}_1}\cdot\left(e^{\frac{\pi i n(k-\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}}} - e^{-\frac{\pi i n(k-\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}}}\right) = \tilde{c}_1\cdot \sin\frac{\pi n(k-\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}};\ n = 1\ldots N-1.$$



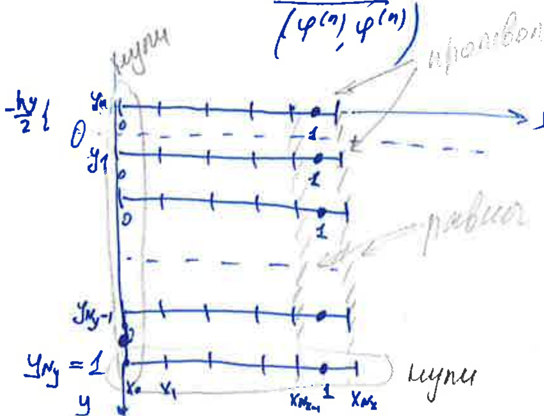
$$h = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}$$

$$x_k = kh - \frac{h}{2} = h\left(k-\frac{1}{2}\right) = \frac{k-\frac{1}{2}}{N-\frac{1}{2}} \Rightarrow y_k^{(n)} = \sin\frac{\pi n(k-\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}} = \sin \pi n x_k;\ n = 1\ldots N-1.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = c_1\underbrace{\begin{pmatrix} \sin \pi x_0 \\ \sin \pi x_1 \\ \vdots \\ \sin \pi x_{N-1} \\ \sin \pi x_N \end{pmatrix}}_{\varphi^{(1)}} + c_2\underbrace{\begin{pmatrix} \sin 2\pi x_0 \\ \sin 2\pi x_1 \\ \vdots \\ \sin 2\pi x_{N-1} \\ \sin 2\pi x_N \end{pmatrix}}_{\varphi^{(2)}} + \ldots + c_{N-1}\underbrace{\begin{pmatrix} \sin (N-1)\pi x_0 \\ \sin (N-1)\pi x_1 \\ \vdots \\ \sin (N-1)\pi x_{N-1} \\ \sin (N-1)\pi x_N \end{pmatrix}}_{\varphi^{(N-1)}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n\cdot\varphi^{(n)}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{(y, \varphi^{(n)})}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})}$$



$$u(x,y) \approx \sum_{\substack{m=1..N_x-1 \\ n=1..N_y-1}} c_{mn}\cdot \underbrace{\sin \pi(m-\tfrac{1}{2})x_k}_{\varphi^{(m)}}\cdot\underbrace{\sin \pi n y_k}_{\varphi^{(n)}}$$

$$u_{ij} = \sum_{m,n} c_{mn}\cdot\varphi_{ij}^{(m)(n)} = \sum_{m,n} c_{mn}\cdot\varphi_i^{(m)}\varphi_j^{(n)}$$

$$\Big(\underbrace{\sum_{m,n} C_{mn}\,\varphi_i^{(m)}\varphi_j^{(n)}}_{u_{ij}};\ \varphi_i^{(k)}\Big)_1 = \sum_{m,n} C_{mn}\cdot\varphi_j^{(n)}\underbrace{\big(\varphi_i^{(m)},\varphi_i^{(k)}\big)_1}_{\neq 0 \text{ при } m=k} = \sum_n C_{kn}\,\varphi_j^{(n)}\cdot\big(\varphi_i^{(k)},\varphi_i^{(k)}\big)_1$$

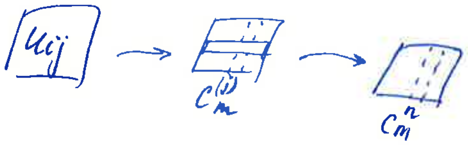
$$\Rightarrow \Big(\big(u_{ij},\varphi_i^{(k)}\big)_1;\ \varphi_j^{(l)}\Big)_2 = C_{kl}\cdot\big(\varphi_j^{(l)},\varphi_j^{(l)}\big)_2\cdot\big(\varphi_i^{(k)},\varphi_i^{(k)}\big)_1.$$

$$\Rightarrow C_{kl} = \frac{\left(\dfrac{\big(u_{ij};\varphi_i^{(k)}\big)_1}{\big(\varphi_i^{(k)},\varphi_i^{(k)}\big)};\ \varphi_j^{(l)}\right)_2}{\big(\varphi_j^{(l)};\varphi_j^{(l)}\big)_2}$$

$\varphi^{(m)} = \sin\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)x;\ m=1\ldots N_x-1$

$\varphi^{(n)} = \sin\pi n y;\ n=1\ldots N_y-1$

т.е



2-мерная задача:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_y^2} = -\lambda u_{ij}; & i=1\ldots N_x-1,\ j=1\ldots N_y-1 \\ u_{0j}=0;\ u_{N_x-1,j} = u_{N_x,j} \\ u_{i0} = -u_{i1}; \end{cases}$$

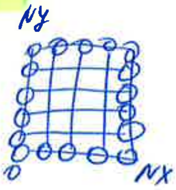
$$\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_y^2} = -\lambda u_{ij}\right)\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix}$$

Если j-фикс, а i-бегает, то компоненты рядом

Если i-фикс, а j-бегает, то не рядом

$$\begin{pmatrix} \underset{u_{i,j-1}}{\dfrac{1}{h_y^2}} \ldots 0 & \underset{u_{i-1,j}}{\dfrac{1}{h_x^2}} & \underset{u_{ij}}{\left(-\dfrac{2}{h_x^2}-\dfrac{2}{h_y^2}\right)} & \underset{u_{i+1,j}}{\dfrac{1}{h_x^2}} & 0\ldots 0 & \underset{u_{i,j+1}}{\dfrac{1}{h_y^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix}$$

16.10.20. ЭВМ. Семинар 7.



Несмещ. сетка, баз. синусов. ($u|_{\partial\Omega}=0$)

$h_x=\frac{1}{N_x}$ $\quad i=0\dots N_x$

$h_y=\frac{1}{N_y}$ $\quad j=0\dots N_y$

Теорема $\forall\, u_{ij}: u_{\partial\Omega}=0$, $\exists!$ коэф. C_{mn}: $u_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{N_y-1}\sum\limits_{m=1}^{N_x-1} C_{mn}\underbrace{\sin\pi m i h_x\cdot\sin\pi n j h_y}_{=\psi_{ij}^{mn}}$

$u_{ij}\in\mathbb{R}^{(N_x+1)(N_y+1)}$

на самом деле $u_{ij}\in\mathbb{R}^{(N_x-1)(N_y-1)}$, т.к при $n=0$ или $m=0$ или N_x+1, или N_y+1 — будет $0=0$.

Причем $(\psi_{ij}^{mn},\psi_{ij}^{\tilde m\tilde n})_h=0$, если $(m,n)\neq(\tilde m,\tilde n)$

$=\sum\limits_{ij}\psi_{ij}^{mn}\psi_{ij}^{\tilde m\tilde n}h_xh_y$

2 способа считать скал. произв.

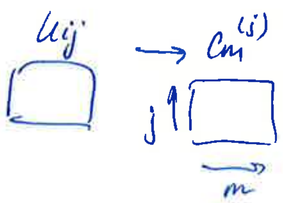
1) За $O(n^4)$: for($m=1\dots NX-1$)
for($n=1\dots Ny-1$)
$C_{mn}:=\frac{(u_{ij},\psi_{ij}^{mn})_h}{(\psi_{ij}^{mn},\psi_{ij}^{mn})_h}$ ← само считается за N^2.

2) За $O(n^3)$

$u_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{N_y-1}\sum\limits_{m=1}^{N_x-1} C_{mn}\cdot\sin\pi m i h_x\cdot\sin\pi n j h_y$

Зафикс j ⇒ u_{ij} — это 1-мерная функция от i.

⇒ $u_{ij}=\sum\limits_{m=1}^{N_x-1} C_m^{(\text{от } j)}\cdot\sin\pi m i h_x$



$u_{ij}\rightsquigarrow\{C_m^{(j)}\}$ — за N_x^2 действий — т.к $C_m=\frac{(u_{ij},\sin\pi m i h_x)_{\Sigma_i}}{(\sin\pi m i h_x,\sin\pi m i h_x)_{\Sigma_i}}$ и $m=1\dots N_x-1$. $\Big\}\Rightarrow O(N_x^2)$

⇒ итоговая сложность $=O(N_yN_x^2)$

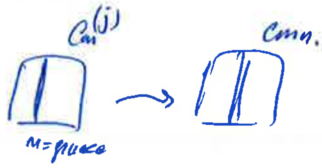
т.к для каждого j.

$(\overset{=0}{u_{0j}}\ u_{1j}\dots \overset{=0}{u_{N_xj}})\rightsquigarrow(0, C_1^{(j)}; C_2^{(j)}\dots C_{N_x-1}^{(j)}, 0)$

$$u_{ij} = \sum_{m=1}^{N_x-1} C_m^{(j)} \sin \pi m i h_x = \sum_{m=1}^{N_x-1}\left(\sum_{n=1}^{N_y-1} C_{mn} \sin \pi n j h_y\right) \sin \pi m i h_x$$

$$\parallel$$

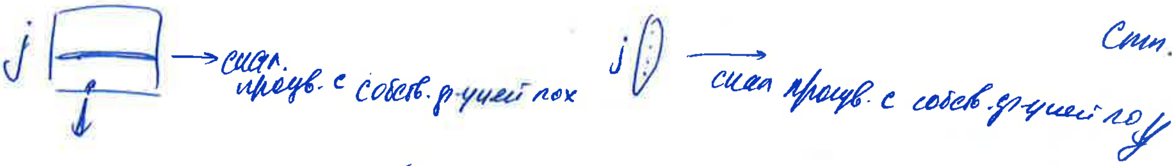
$$\sum_{n=1}^{N_y-1}\sum_{m=1}^{N_x-1} C_{mn} \sin \pi m i h_x \sin \pi n j h_y$$



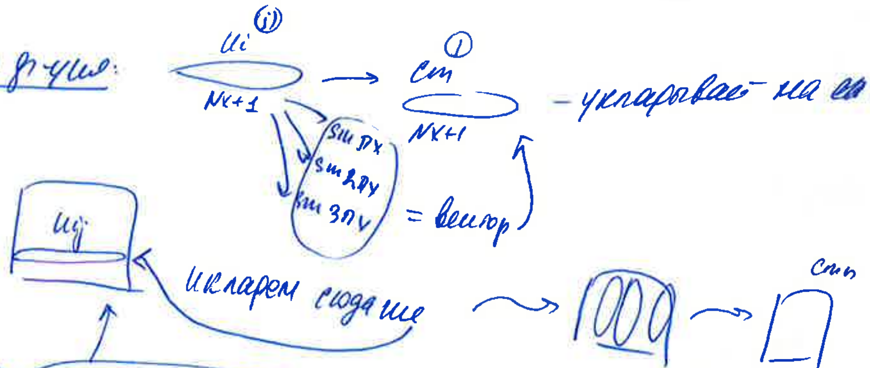
$$\Rightarrow \underset{\text{фикс.}}{C_{m}^{(j)}} = \sum_{n=1}^{N_y-1} C_{mn} \sin \pi n j h_y$$

$\Rightarrow$ отсюда находим c_{mn} — раскладываем $\sum_{n=1}^{N_y-1} c_{mn} \sin \pi n j h_y$ по $\sin \pi n j h_y$.

def f2c (0… f_i …) → (0, c_m … 0)



1-мерная ф-ция:



— укладываем на это же место.

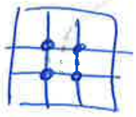
$\Rightarrow$ по сложности $N_y N_x^2$.
по памяти $2(N_x+1)$ — 2 доп. массива длины 2

по памяти $N_x N_y^2$
по памяти $2(N_y+1)$

1) ПС. $u_{ij} \to C_{mn}$
2) $C_{mn} \to u_{ij}$

$$u_{ij} = \sum_{m}\sum_{(n)} c_{mn} \varphi_i^m \cdot \varphi_j^n = \sum_{(n)} \underbrace{\left(\sum_m c_{mn}\varphi_i^m\right)}_{v_i^{(n)}} \varphi_j^n$$

Итог: $u(x,y) \xrightarrow[N_x, N_y]{} u_{ij} \to c_{mn} \to \tilde{u}(x_k, x_l)$



[illegible] узлов накидали и считаем $\max |u(x,y) - \tilde{u}(x,y)|$

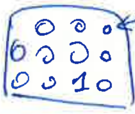
$$u_{ij} = \sum_m \sum_n c_{mn} \sin \pi m \overset{ih_x}{\tilde{x}} \sin \pi n \overset{jh_y}{\tilde{y}}$$

проверить на $u_{ij} = \sum\sum c_{mn} \sin \cdot \sin$

$c_{mn} = m+n$.

$N_x = 10$
$N_y = 10$

$u(x,y) = (x^2+y^2)\sin \pi x \cdot \sin \pi y$



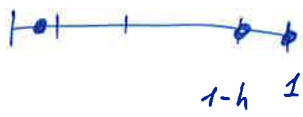
10^{-10}!

Бланк №

Дата Предмет Класс Номер комплекта бланков Страница из

1110

$y'(0)=y'(1)=0.$



$y'(1) = ?$

$$y(1-h) = y(1) - y'(1)\cdot h + y''(1)\cdot\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \frac{y(1-h)-y(1)}{h} = -\underbrace{y'(1)}_{=0} + \underbrace{y''(1)}_{=-\lambda y_N}\cdot\frac{h}{2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{y_{N-1}-y_N}{h} = -\lambda y_N\frac{h}{2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{2(y_{N-1}-y_N)}{h^2} = -\lambda y_N$$

Эту сторону бланка можно использовать как черновик.
Она не сканируется и не проверяется.

Эту сторону бланка можно использовать как черновик.
Она не сканируется и не проверяется.

09.10.20. ВЫЧ. семинар 6.

1-мерное преобр. Фурье: $y_k^{(n)}$ $k=0\ldots N$ ← коорд. У всех $y_k^{(n)}$ — $\lambda^{(n)}$ собств. знач.

$n=0\ldots N$ или $1\ldots N-1$ } номера ~~собств.~~ базисных ф-ций.

В отчёте: 1) вывод собств. ф-ций, док-во их ортогональности в выбранном скал. произв.

2) задаём любую ф-цию f, уровл. краевым усл.

$f \rightsquigarrow y_k$

$[y_k]_{k=0..N} \longrightarrow [C_n]_{n=\ldots}$

f2C
C2f

$y_k = \sum_n C_n \cdot y_k^{(n)}$

3) Что было бы в непрер. случае.

$y(x) \longrightarrow y_k = y(x_k) \longrightarrow [C_k]$.

$y(x) \approx \sum_0^N C_k\, y^{(n)}(x)$

т.е. с помощью спектра непрер. ф-ции можно приблизить как $y(x) \approx \sum C_k \cdot y^{(n)}(x)$

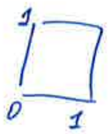
т.е. было $y_k^{(n)}$, а её непрер. аналог $y^{(n)}(x)$

т.е. потом посчитаем $\max\limits_{x_k} |y(x) - y^N(x)| = 0$. – т.к. в узлах мы точное равенство обеспечили

⇒ считаем $\max\limits_{[3x_k]} |y(x) - y^N(x)| = C \cdot h^{?}$; $h = 10^{-1} \ldots 10^{-4}$.

2-мерное преобр. Фурье

Дана ф-ция $u(x,y)$ на квадрате



Хотим: $u(x,y) \approx \sum_{m,n} C_{mn}\, \varphi^{(m,n)}(x,y)$

Если на границе везде ноль, то $u(x,y) = \sum_{m,n} C_{mn} \cdot \underbrace{\sin \pi m x \cdot \sin \pi n y}_{\varphi^{(m,n)}(x,y)}$

! По каждому измерению своя сетка.

т.е. может быть смещённая сетка по x и несмещённая по y.

$u_{ij} = \sum C_{mn} \cdot \varphi_{ij}^{(m,n)}$

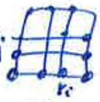
Писать 2 ф-ции: u2C
C2u.

$u(x,y) \underset{\approx}{\longrightarrow} u^{MN}(x,y) = \sum^{MN} C_{mn} \cdot \varphi^{(m,n)}(x,y)$

И найти $\|u - u^{MN}\|_{C[a,b]} \sim C(h_x^{p_1} + h_y^{p_2})$ $\max\limits_{\exists (x_i; y_i)}$

! $\varphi_{ij}^{(m,n)} = \varphi_i^{(m)} \cdot \varphi_j^{(n)}$

<u>пример</u> $u\big|_{\partial\Omega} = 0.$

неспец. сетка y_j 

$x_i = i \cdot h_x \quad i = 0 \dots M$

$y_j = j \cdot h_y \quad j = 0 \dots N$

! $C_{0m} = C_{n0} = 0$ – типа фиктивные.

<u>Задача Штурма-Лиувилля:</u>
$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = \lambda u \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi^{(m,n)}_{(x,y)} = \sin \pi m x \cdot \sin \pi n y$

$\lambda^{(mn)} = (\pi m)^2 + (\pi n)^2.$

полнота системы $\varphi^{(m,n)}(x,y)$ – вещь известная.

(**)
$$\begin{cases} \Rightarrow -\dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2} - \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = \lambda u_{ij}\,; \quad i = 1 \dots M-1, \; j = 1 \dots N-1. \\ \text{А неизвестных: } (M+1)(N+1) \\ \text{ур-я: } u_{ij}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

(*)

почему кол-во ур-й = кол-ву неизв?

ну 1-е ур-я – опр. на всех внутренних узлах, 2-е ур-я – на всех граничных $\Big\}$ $\Rightarrow$ кол-во ур-й = кол-ву неизв.

<u>Теорема</u> собств. ф-ции задачи (*) имеют вид:

$$\varphi^{(m,n)}_{ij} = \varphi_i^{(m)} \cdot \varphi_j^{(n)}, \text{ где } \varphi_i^{(m)} = \sin(\pi m \underbrace{i \cdot h_x}_{x_i})$$
$$\varphi_j^{(n)} = \sin(\pi n \underbrace{j h_y}_{y_j})$$

номера ф-ций

коорд

<u>Док-во:</u> Будем искать собств. ф-цию как произв. 2-х 1-мерных:

$\varphi_{ij}^{(m,n)} = \varphi_i^{(m)} \cdot \varphi_j^{(n)}$

подставим в ф-лу (**): $\Rightarrow -\varphi_i^{(m)}(\dots) - \varphi_j^{(n)}(\dots) = \lambda u_{ij}.$

и исп. ф-лу для 1-мерного случая.

т.е. $$\varphi_j^{(n)} \underbrace{\left(\frac{\varphi_{i+1}^{(m)} - 2\varphi_i^{(m)} + \varphi_{i-1}^{(m)}}{h_x^2} \right)}_{\text{т.к. собств. ф-ция } \sin(\pi m i h_x) \text{ с собств. знач } \lambda_m} + \varphi_i^{(m)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\varphi_{j+1}^{(n)} - 2\varphi_j^{(n)} + \varphi_{j-1}^{(n)}}{h_y^2} \right)}_{\text{т.к. } \sin(\pi n j h_y)} = \varphi_j^{(n)} \cdot \lambda_m \cdot \varphi_i^{(m)} + \varphi_i^{(m)} \cdot \lambda_n \cdot \varphi_j^{(n)} =$$
$$= (\lambda_m + \lambda_n) \cdot \varphi_j^{(n)} \cdot \varphi_i^{(m)} \quad \text{ч.т.д.}$$

почему базис ортогонален?

$\varphi_{ij}^{(m,n)}$ – решение системы $A\varphi_{ij}^{\overset{\text{фикс}}{(m,n)}} = \lambda^{(m,n)}\varphi_{ij}^{(m,n)}$

посмотрим, явл. ли симм. эта матрица.

φ_{ij}

вытягиваем $\varphi_{ij}^{(m,n)}$ в вектор.

Как вытянуть u_{ij} в вектор:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ -\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_x^2} - \frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_y^2} \ldots = \lambda u_{ij} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} \\ u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{n0} \\ u_{01} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{M1} \\ u_{02} \\ \vdots \\ u_{MN} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_{00} \\ u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{MN} \end{pmatrix}$$

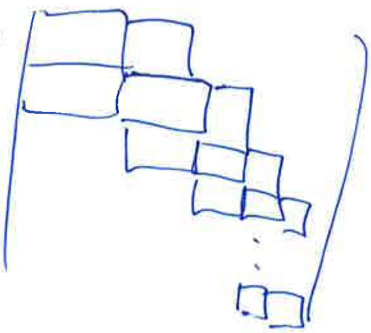
На границе: $u_{00}=0$, $u_{01}=0$ => все эти компоненты не вход. в матрицу.

=> вычёркиваем все u_{0j} и u_{i0}.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 & & \\ -\frac{1}{h_y^2} & 0 & 0 \;0 \ldots & -\frac{1}{h_y^2} & \left(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_x^2} & 0 \ldots 0 & 0 \ldots & -\frac{1}{h_y^2} \\ 0 & & 0 & & & & 0 & & \end{pmatrix}$$

=> 5-х диагональность.

=> структура:



Итак, $u_{ij} = \sum_m \sum_n c_{mn}\cdot\varphi_j^{(n)}\varphi_i^{(m)}$

$$\Rightarrow \Big(u_{ij}, \underbrace{\varphi_i^{(m)}\varphi_j^{(n)}}_{\varphi_{ij}^{(m,n)}}\Big)_* = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{M-1,N-1} u_{ij}\,\varphi_{ij}^{(m,n)} h_x h_y = c_{mn}\cdot\left(\varphi_{ij}^{(m,n)};\varphi_{ij}^{(m,n)}\right)$$

$(u_{ij}; \varphi_{ij}^{(m,n)})_?$

какое скал. произв? ~~[illegible]~~

$$u_{ij} = \sum_{m,n} c_{mn} \cdot \varphi_i^{(m)} \cdot \varphi_j^{(n)}$$

Возьмем скал. произв. с $\varphi_i^{(k)}$ относ. скал. произв. $\varphi_i^{(k)}$: $(\varphi_i^{(m_1)}, \varphi_i^{(m_2)})_1 = 0,\ \forall m_1 \neq m_2$.

2-е скал. произв: $(\varphi_j^{(n_1)}, \varphi_j^{(n_2)})_2 = 0$, для $n_1 \neq n_2$.

$$\Rightarrow \Big(u_{ij} = \sum_{m,n} c_{mn}\, \varphi_i^{(m)} \varphi_j^{(n)}; \varphi_i^{(k)}\Big)_1 = \sum_{m,n} c_{mn} \cdot \varphi_j^{(n)} \underbrace{(\varphi_i^{(m)}; \varphi_i^{(k)})_1}_{\text{тут не ноль, только если } n=k} = \sum_{n} c_{mn}\, \varphi_j^{(n)} (\varphi_i^{(k)}, \varphi_i^{(k)})_1$$

$$\Rightarrow \Big((u_{ij}, \varphi_i^{(k)})_1; \varphi_j^{(l)}\Big)_2 = c_{mn} \cdot \underbrace{(\varphi_j^{(l)}, \varphi_j^{(l)})_2 \cdot (\varphi_i^{(k)}, \varphi_i^{(k)})_1}_{\sum_i \sum_j \varphi_i^{(k)} \varphi_j^{(l)} = (\varphi_i^{(k)}\varphi_j^{(l)}, \varphi_i^{(k)}\varphi_j^{(l)})_{12}}$$

$\Rightarrow \varphi_{ij}^{(m,n)}$ орт. в скал. произв. 12.

$(\varphi_i^{(m_1)}, \varphi_j^{(m_2)})_1 ; (\varphi_j^{(n_1)}, \varphi_j^{(n_2)})_2$

$\varphi_{ij}^{(m_1,n_1)} = \varphi_i^{(m_1)} \cdot \varphi_j^{(n_1)}$

$\varphi_{ij}^{(m_2 n_2)} = \varphi_i^{(m_2)} \cdot \varphi_j^{(n_2)}$

Хотим: $(\varphi_{ij}^{(m_1,n_1)}; \varphi_{ij}^{(m_2;n_2)})_{12} \overset{def}{:=} \sum_i \sum_j \varphi_j^{(n_1)} \varphi_j^{(n_2)} \varphi_i^{(m_1)} \cdot \varphi_i^{(m_2)} = (\varphi_j^{(n_1)}; \varphi_j^{(n_2)})_2 \cdot (\varphi_i^{(m_1)}; \varphi_i^{(m_2)})_1$.

$$\Rightarrow \frac{(u_{ij}, \varphi_{ij}^{(m,n)})}{(\varphi^{mn}, \varphi^{mn})_{12}} = c_{mn}$$

или так: $\Big((u_{ij}, \varphi_i^{(m)})_1, \varphi_j^{(n)}\Big)_2$ ← сложность N^3

$\| \ (u_{ij}; \varphi_{ij}^{(m,n)})_{12}$ ← сложность N^4

```
for m...
  for n...
    скал: for i...
      for j:...
    cmn = (uij; φij^(m,n))
```

Для 1-мерного: $u_i = \sum c_n \cdot \varphi_i^{(n)}$

$c_n = (u_i, \varphi_i^{(n)})$ — всего $N \cdot N = N^2$ ← можно сэкономить за счёт быстрого преобр. Фурье.

Вариант 01 01 Задание 2

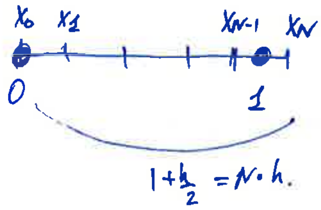
сетка смещена только ~~слева~~ справа
в левом конце - значение
в правом - производная.

$$\Rightarrow \begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0. \end{cases}$$

$x_0 = 0$

$x_N = 1+\frac{h}{2}$

$h = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}$ — т.к. $1+\frac{h}{2} = N\cdot h$ $\Rightarrow 1 = h(N-\frac{1}{2})$ $\Rightarrow h = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}$.



- $y(0)=0 \leftrightarrow y_0 = 0.$

- $$\begin{cases} y(1+\frac{h}{2}) = y(1) + y'(1)\cdot\frac{h}{2} + O(h^2) \\ y(1-\frac{h}{2}) = y(1) - y'(1)\cdot\frac{h}{2} + O(h^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y(1+\frac{h}{2}) - y(1-\frac{h}{2})}{h} = y'(1) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y'(1) = 0 \leftrightarrow \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0, \text{ т.е } y_N = y_{N-1}$$

- $$y''(x) \approx \frac{\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h} = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

$$\Rightarrow y''(x) = -\lambda y \leftrightarrow \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k \;;\; k = 1\ldots N-1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k ;\; k = 1\ldots N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

посмотрим на матрицу: $k = N-1$: $\frac{\overset{=y_{N-1}}{y_N} - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$

т.е $\frac{-y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}.$

$k=1$: $\frac{y_2 - 2y_1 + \overset{=0}{y_0}}{h^2} = -\lambda y_1$

$k=2$: $\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} = -\lambda y_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Видим, что матрица симм
$\Rightarrow$ скал. произв $(u,v)=\sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i v_i$

И видим, что $y_0 = y_N = 0$ – фиктивные коэф.

Теперь найдем собств. ~~[illegible]~~ ф-ции задачи $\begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \; k=1\ldots N-1 \\ y_0=0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$

Имеем: $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k;\; k=1\ldots N-1$

$$y_{k+1} + y_k(-2+\lambda h^2) + y_{k-1} = 0.$$

$$y_{k+1} - 2\left(1-\frac{\lambda h^2}{2}\right) y_k + y_{k-1} = 0. \qquad p = 1-\frac{\lambda h^2}{2}$$

$$y_{k+1} - 2p y_k + y_{k-1} = 0.$$

Хар-ур-е: $\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0.$

$D = 4p^2 - 4$

$\Rightarrow \mu_{1;2} = \frac{2p \pm 2\sqrt{p^2-1}}{2} = p \pm \sqrt{p^2-1}.$

$\left[\begin{array}{l} \text{Если } p^2 \neq 1, \text{ то } y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k \\ \text{Если } p^2 = 1, \text{ то } y_k = (C_1 + kC_2)\mu^k \end{array}\right.$

Пусть $p^2 \neq 1$ $\Rightarrow y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$

$y_0 = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1$

$y_N = y_{N-1} \Rightarrow C_1\mu_1^N + \underset{-C_1}{\underset{\parallel}{C_2}}\mu_2^N = C_1\mu_1^{N-1} + \underset{-C_1}{\underset{\parallel}{C_2}}\mu_2^{N-1}$

$\Rightarrow C_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = C_1(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})$

$\Rightarrow \mu_1^N - \mu_2^N = \mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1}$

$\Rightarrow \mu_1^{N-1}(\mu_1 - 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 - 1)$

$\Rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{N-1} = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1} = \frac{\mu_2 - (\mu_1\mu_2)}{\mu_1 - 1} = -\mu_2.$

$\Rightarrow \frac{\mu_1^N}{\mu_2^{N-1}} = -\mu_1\mu_2 = -1.$

$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = -1 = e^{-\pi i + 2\pi k i} = e^{\pi i(2k-1)}$

$\mu_1\mu_2 = 1$

$$\Rightarrow \mu_{1,n} = e^{\frac{\pi i(2n-1)}{2N-1}} \qquad n = 1 \ldots N-1$$

$$\Rightarrow \mu_{2,n} = \overline{\mu_{1,n}} = e^{-\frac{\pi i(2n-1)}{2N-1}}$$

$$\Rightarrow y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k = C_1\cdot\left(e^{\frac{k\pi i(2n-1)}{2N-1}} - e^{-\frac{k\pi i(2n-1)}{2N-1}}\right) = C_1\cdot\sin\left(\frac{k\pi(2n-1)}{2N-1}\right) \quad ; n = 1\ldots N-1.$$

и так уже система полная.
(т.е $N-1$ неизв, $N-1$ собств. ф-ция)

Пусть теперь $p^2 = 1 \Rightarrow y_k = (C_1 + kC_2)\mu^k$

$y_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y_N = y_{N-1} \Rightarrow N\cdot C_2\cdot\mu^N = (N-1)C_2\cdot\mu^{N-1}$

$\Rightarrow N\cdot\mu = N-1$

$\Rightarrow \mu = \frac{N-1}{N}$ но $\mu^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases}\mu = \frac{N-1}{N}\\ \mu^2 = 1\end{cases} \Rightarrow$ нет решений

~~$\Rightarrow y_k = C_2\cdot k\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^k$ это пишется?~~ $\Rightarrow$ этот случай не дал собств. ф-ций.

Итак, $\underset{\uparrow\text{коорд.}}{y_k^{(n)\text{ номер}}} = C_1\cdot\sin\left(\frac{k\pi(2n-1)}{2N-1}\right) = C_1\sin\frac{k\pi(2n-1)}{\underbrace{2\left(N-\frac{1}{2}\right)}_{\Vert\, kh}} = C_1\cdot\sin\pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\underbrace{kh}_{\Vert\, x_k} = C_1\cdot\sin\pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)x_k$

$n = 1\ldots N-1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{N-1}\\ y_N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0\\ 0 & \sin\frac{\pi}{2}x_1 & \sin\frac{3\pi}{2}x_1 & \ldots\\ & \ldots & & \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2}x_{N-1} & \sin\frac{3\pi}{2}x_{N-1} & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0\\ C_1\\ \vdots\\ C_{N-1}\\ C_N\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}\sin\frac{\pi}{2}x_1\\ \sin\frac{\pi}{2}x_2\\ \vdots\\ \sin\frac{\pi}{2}x_{N-1}\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\sin\frac{3\pi}{2}x_1\\ \sin\frac{3\pi}{2}x_2\\ \vdots\\ \sin\frac{3\pi}{2}x_{N-1}\end{pmatrix} + \ldots + C_{N-1}\underbrace{\begin{pmatrix}\sin\pi\left(N-\frac{3}{2}\right)x_1\\ \vdots\\ \sin\pi\left(N-\frac{3}{2}\right)x_{N-1}\end{pmatrix}}_{\Vert\,\varphi^{(i)}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N-1} C_n\cdot\varphi^{(n)}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{(y, \varphi^{(n)})}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})}$$

02.10.20. ЧВМ. Семинар 5.

$$\begin{cases} -y''(x) = \lambda y \\ y'(0)=0;\ y(1)=0 \end{cases}$$ ← код этих условий: $\underline{10}\ \underline{00}$

в левом конце произв. — сетка

на правом — значение ф-ции

Хотим на сетке аналог: $y'(0)=0$.

$y_1 \dots y_n$ — ~~...~~ значения

$y(x_k) \sim y_k$.

$y(1)=0 \longleftrightarrow y_N=0$.

$y'(0)=0 \longleftrightarrow \frac{y(h)-y(0)}{h}=0$.

Насколько такая имитация внесла погр-ть:

$$y(h) = y(0)+y'(0)h+y''(0)\cdot\frac{h^2}{2}+\underline{O}(h^3)$$

$$\Rightarrow \frac{y(h)-y(0)}{h} = \underbrace{y'(0)}_{0}+y''(0)\cdot\frac{h}{2}+\underline{O}(h^2)=0.$$

$\Rightarrow$ замена $y'(0)=0 \leftrightarrow \frac{y(h)-y_0}{h}$ — дает погр-ть $\underline{O}(h)$.

А y'' — аппроксимируется как $\underline{O}(h^2)$

$\Rightarrow$ вся y_k будет отличаться от f — как $\underline{O}(h)$.

А это грустно, т.к. у нас везде $O(h^2)$ и в целом. точнее $\underline{O}(h)$.

Ну тогда не будем выбрасывать 2-й член:

$$\frac{y(h)-y(0)}{h} = \underbrace{y'(0)}_{0}+y''(0)\cdot\frac{h}{2}+\underline{O}(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{y_1-y_0}{h} = \underbrace{y''(0)\cdot\frac{h}{2}}_{= -\lambda y_0 \cdot \frac{h}{2}} \text{ — тогда погр-ть будет } \underline{O}(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{2(y_1-y_0)}{h^2} = -\lambda y_0.$$

$\Rightarrow$ сеточная задача стала:

А было: $$\begin{cases} y''(x) = -\lambda y \\ y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$ непрер. задача

$\rightsquigarrow$ на несмещ. сетке

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2} = -\lambda y_n \\ 2\frac{y_1-y_0}{h_1} = -\lambda y_0 \\ y_N = 0 \end{cases}$$

Т.к. $$y''(x) = \frac{\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h}$$

$\approx y'(x)$

мы сами выбрали, что [illegible] берём.

Возьмем сдвинутую сетку, тогда не будет проблем с 1 произв:

$$\frac{y(\frac{h}{2})-y(-\frac{h}{2})}{h}=y'(0)+\underline{O}(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{y(0+h)-y(0)}{h}=y'(0)+\underline{O}(h)$$ — на не сдвинутой сетке

$$\frac{y(\frac{h}{2})-y(-\frac{h}{2})}{h}=y'(0)+\underline{O}(h^2)$$ — на сдвинутой

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}=-\lambda y_n;\ n=1\ldots N-1 \\ \frac{y_1-y_0}{h}=0,\ \text{т.е. } y_1=y_0. \\ y_N=0. \end{cases}$$

$1 0 \underline{1} 0$

смещенная слева
несмещенная справа.

А если сетка и справа тоже смещенная?

Тогда $y_N=0$ — не подх.

но $$\frac{y(1+\frac{h}{2})+y(1-\frac{h}{2})}{2}=y(1)+\underline{O}(h^2)$$

$\Rightarrow$ условие $y(1)=0$ стало: $\frac{y_N+y_{N-1}}{2}=0.$

$\Rightarrow y_N=-y_{N-1}.$ Это код 1011.

Теперь ищем собств. ф-ции полученной задачи, и берём их в качестве базиса. (это хорошо - т.к. решим потом методом Фурье $\begin{cases} -y''(x)=f(x) \\ y'(0)=0 \\ y(1)=0. \end{cases}$

А почему собств. ф-ции будут ортог?

<u>Теорема</u> пусть $A=A^T$ — т.е A — симм.

Тогда собств. векторы с разными собств. знач — они $\perp$.

$(e_i;e_j)=0.$

если $\begin{cases} Ae_i=\lambda_i e_i \\ Ae_j=\lambda_j e_j \end{cases} \Rightarrow \lambda_i\neq\lambda_j$

$(Ax,y)=(x,Ay)$
$(\lambda x,y)$ $(x,\lambda_2 y)$
$\lambda_1(x,y)$ $\lambda_2(x,y)$
$\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)(x,y)=0$ $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow x\perp y$

<u>Сперва</u> пусть $A:\ (Ax,y)_*=(x,Ay)_*$ $\forall x,y$
* какое-то скал. произв

Если была такая задача: $\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k \quad ; k=1,2\ldots N-1. \\ y_1 = y_0 \\ y_N = 0. \end{cases}$

Пишем её в матричной форме: $-\dfrac{\overset{\shortparallel 0}{y_N}-2y_{N-1}+y_{N-2}}{h^2} = \lambda y_{N-1}$ — для $k=N-1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \ldots & 0 \\ & \frac{1}{h^2} \;\; \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 \ldots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \lambda$$

Для y_1: $-\dfrac{y_2 - \overset{\shortparallel -2y_0}{2y_1} + y_0}{h^2} = \lambda y_1$

$\Rightarrow$ видим, что матрица A — симм $\Rightarrow$ её собств. знач-они⊥.

! $(y,v)_* := \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i v_i$ — т.к. именно на $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$ матрица будет симм.

Т.е. такое скал. произв. обеспечивает нам ортогональность.

<u>Зам.</u> В постановке 1000:

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k \quad ; k=1\ldots N-1. \\ -2\dfrac{y_1-y_0}{h^2} = \lambda y_0 \\ y_N = 0. \end{cases}$$

Тут вектора $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$ — т.к. при $k=N-1$: будет y_N, но $y_N=0$.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ 0 \ldots & & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

при $k=1$: $-\dfrac{y_2-2y_1+y_0}{h^2} = \lambda y_1$

Матрица не симм!!

Ортогональность не будет относ евкл. скал. произв.!

И что делать?

такое скал. произв: $(u,v)_* = \dfrac{v_0 \cdot u_0}{2} + \sum\limits_{i=1}^{N-1} v_i u_i$

тогда собств. вектора орт, т.к. $(Au,v)_* = (u,Av)_*$

$\shortparallel$

$(\tilde{A}u,v)_2$, где $\tilde{A}$ — это A, у которой 1-ая строка поделена на 2.

$= (u,\tilde{A}v)_2$ — т.к. $\tilde{A}$ — уже симм

$= (u,Av)_*$

$f_k = \sum C_n \cdot \varphi_k^n$

$\frac{(f, \varphi^n)_*}{(\varphi^n, \varphi^n)_*} = C_n$. ← тут такое скал. произв: $(u,v)_* = \frac{u_0 v_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$

Для такого варианта:

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k \\ -2\left(\frac{y_1 - y_0}{h^2}\right) = \lambda y_0 \\ 2\left(\frac{y_N - y_{N-1}}{h^2}\right) = \lambda y_N. \end{cases}$$

— меняю. сетка и на концах обе произв: 1100.

скал. произв $(u,v)_* = \frac{u_0 v_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i + \frac{u_N v_N}{2}$

и вектор полный: $y_0 \dots y_N$.

Теперь ищем сами собств. ф-ции.

$-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1} - \lambda h^2 y_k = 0.$

$y_{k+1} - 2y_k\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right) + y_{k-1} = 0.$

$y_{k+1} - 2p y_k + y_{k-1} = 0$; $p = 1 - \frac{\lambda h^2}{2}$

$\mu_k = \mu^k$

$\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0.$

$\mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{если } p^2 \neq 1, \text{ то } y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k \\ \text{если } p^2 = 1, \text{ то } y_k = c_1\mu^k + c_2 k \mu^k \end{cases}$ — по аналогии с $y'' + y = 0$

$y(x) = e^{\lambda x}$

$x e^{\lambda x}$

Замыкаем эти найденные решения на нач-усл.

$-2y_1 + 2y_0 - \lambda h^2 y_0 = 0.$ $\quad 2y_N - 2y_{N-1} - \lambda h^2 y_N = 0.$

$\Rightarrow y_1 = p y_0.$ $\quad y_{N-1} = p y_N$

$\Rightarrow$ подставим $y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$ в эти

$\Rightarrow$ для $y_1 = p y_0$: $c_1\mu_1^1 + c_2\mu_2^1 = p(c_1 + c_2)$

по т. Виета из ур-я $\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0$: $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = p$. ~~...~~

$\Rightarrow c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}(c_1 + c_2)$

$\Rightarrow c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = \frac{\mu_1 c_1}{2} + \frac{\mu_2}{2}c_1 + \frac{\mu_1 c_2}{2} + \frac{\mu_2 c_2}{2}.$

$\Rightarrow \frac{\mu_1}{2}c_1 + \frac{\mu_2}{2}c_2 = \frac{\mu_2}{2}c_1 + \frac{\mu_1}{2}c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$

теперь подставляем $\begin{cases} y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow y_k = C_1(\mu_1^k + \mu_2^k)$

в $y_{N-1} = p y_N$

$$\Rightarrow C_1(\mu_1^{N-1} + \mu_2^{N-1}) = \underset{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}{p} C_1(\mu_1^N + \mu_2^N)$$

$$\Rightarrow 2\mu_1^{N-1} + 2\mu_2^{N-1} = \mu_1^{N+1} + \mu_1^N\mu_2 + \mu_1\mu_2^N + \mu_2^{N+1}$$

но $\mu_1\mu_2 = 1$ – по т. Виета.

$$\Rightarrow 2\mu_1^{N-1} + 2\mu_2^{N-1} = \mu_1^{N+1} + \mu_1^{N-1} + \mu_2^{N-1} + \mu_2^{N+1}$$

$$\mu_1^{N-1} + \mu_2^{N-1} = \mu_1^{N+1} + \mu_2^{N+1}$$

$$\Rightarrow \mu_1^{N-1}(\underbrace{\mu_1^2 - 1}_{\mu_1\mu_2}) = \mu_2^{N-1}(\underbrace{1 - \mu_2^2}_{\mu_1\mu_2})$$

$$\mu_1^N(\mu_1 - \mu_2) = \mu_2^N(\mu_1 - \mu_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\mu_1 - \mu_2)}_{\neq 0}(\mu_1^N - \mu_2^N) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1^N = \mu_2^N$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^N = 1.$$

Итак: $\begin{cases} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^N = 1 = e^{2\pi i m} \\ y_k = C(\mu_1^k + \mu_2^k) \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} = e^{\frac{2\pi i}{N} m}$ но $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1 \Rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu_1^2 = e^{\frac{2\pi i m}{N}} \Rightarrow \mu_{1,2} = e^{\pm\frac{\pi i m}{N}}$

$\underbrace{m = 0 \ldots N-1}_{N \text{ штук}}$

$$\Rightarrow y_k = C \cdot \left(e^{\frac{\pi i m \cdot k}{N}} + e^{-\frac{\pi i}{N} m \cdot k}\right) = \hat{C} \cdot \cos\frac{\pi m k}{N}.$$

$h = \frac{1}{N} \Rightarrow y_k = \hat{C}\cos\pi m \underbrace{(kh)}_{x_k} = \hat{C} \cdot \cos\pi m x_k.$

$\Rightarrow$ собств. ф-ции дискр. задачи – это $\cos\pi m x_k$.

! А для непрер. задачи это были $\cos\pi m x$ – всё ок.

но у нас $m = 0 \ldots N-1$ – только N штук.

А размерность $(y_0 \ldots y_{N-1}) = N+1$.

Ну мы потеряли когда $\mu_1 = \mu_2$

$$y_k = c_1 \mu^k + c_2 \cdot k \mu^k.$$

! $\cos \frac{\pi m k}{N} = \varphi_k^{(m)}$

Как найти собств. знач λ_k:

1 способ $\quad \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k \Rightarrow$ получим λ_m.

2 способ $\quad$ Т. Виета: $\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \rho = \left(1 + \frac{\lambda h^2}{2}\right)$

знаем знаем знаем

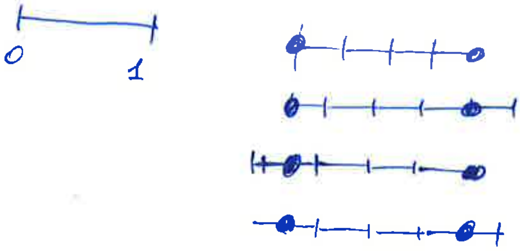
$\Rightarrow$ находим $\lambda^{(m)}$

Зам. Если 1001: т.е сетка смещена вправо.

$$\frac{y\left(1+\frac{h}{2}\right) + y\left(1-\frac{h}{2}\right)}{2} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{y(1)} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{y_N + y_{N-1}}{2} = 0. \quad \Rightarrow y_N = -y_{N-1}$$

26.09.20. ЧВМ. Семинар 4.



4 варианта сетки.

Даны $\{f_i\}$; $i=0\dots N$

$f_i \approx \sum_{m=\dots}^{\dots} C_m \varphi_i^{(m)}$.

Это задача Штурма – Лиувилля.
$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ 1)\ y(0)=y(0)=0 \\ 2)\ y'(0)=y(1)=0 \\ 3)\ y(0)=y'(1)=0 \\ 4)\ y'(0)=y'(1)=0. \end{cases}$$

Как искать систему собств. функц. $\underbrace{\text{для сетки N2, краевых условий N3.}}_{}$ $\nearrow$ 0101

сетка: $\dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2} = -\lambda y_k$; $k=1\dots N-1$.

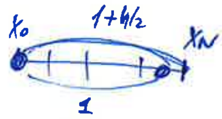
$y(0)=0 \Rightarrow y_0=0$

$y'(1)=0 \Rightarrow y_N = y_{N-1}$.

$y(1) \rightsquigarrow y_N = -y_{N-1}$.

$\begin{cases} y'(0)=0 \\ \text{инесиму. сетка} \end{cases} \Rightarrow 2\dfrac{y_0-y_1}{h^2} = -\lambda y_0$.

Как решать собств. задачу на собств. знач.
$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k; \ k=1\dots N-1 \\ y_0=0;\ y_N=y_{N-1}. \end{cases}$$



$1+\frac{h}{2} = N\cdot h \Rightarrow h = \dfrac{1}{N-\frac{1}{2}}$.

Есть дискр. функция: $y_0; y_1; \dots y_N$.

$\Rightarrow y_{k+1} - 2y_k + 2\dfrac{\lambda h^2}{2} y_k + y_{k-1} = 0$.

$\Rightarrow y_{k+1} - 2p y_k + y_{k-1} = 0$.

Будем искать $y_k = \mu^k$ – в таком виде.

$\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0$.

$\mu_{1;2} = p \pm \sqrt{p^2-1}$.

$\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow \begin{cases} y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k \\ y_0 = 0 \quad \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2 \quad \Rightarrow y_k = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k) \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$

$y_N = y_{N-1} \Rightarrow \cancel{c_1}(\mu_1^N - \mu_2^N) = \cancel{c_1}(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})$

$\Rightarrow \mu_1^{N-1}(\mu_1 - 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 - 1)$

$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{N-1} \cdot \frac{\mu_1 - 1}{\mu_2 - 1} = 1.}$

$\cancel{\text{но } \mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu_1 \cdot \mu_2 = 1}$

$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{N-1} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_1\mu_2}{\mu_2 - 1} = 1.}$

$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{N-1} \cdot (-\mu_1) = 1.}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{\mu_1^N}{\mu_2^{N-1}} = -1.}$

$\Rightarrow \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{N-1} = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1} = \frac{\mu_2 - \mu_1\mu_2}{\mu_1 - 1} = -\mu_2$

$\Rightarrow \frac{\mu_1^N}{\mu_2^{N-1}} = -\mu_1\mu_2 = -1.$

$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = -1. = e^{\pi i + 2\pi n \cdot i} = e^{(2n+1)\pi \cdot i}$

$\Rightarrow (\mu_1)_{(n)} = e^{\frac{(2n-1)\pi \cdot i}{2N-1}}$

$\mu_{2(n)} = \overline{\mu_{1(n)}} = e^{-\frac{(2n-1)\pi i}{2N-1}}$

$\Rightarrow y_k = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k) = \boxed{c_1 \cdot \sin \frac{(2n-1)}{2N-1} \cdot k \cdot \pi}$ $n = 1 \ldots N-1$

система собств. ф-ций.

0 1 . . . N-1 N

это равносильно – ну подест. k=0

эти 2 совпадают и так. ну подставить n = N-1 и N

$\varphi_k^{(n)} = c \cdot \sin \frac{\pi(2n-1)}{2N-1} k = c \cdot \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} \underbrace{kh}_{x_k} \approx \sin \pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)x.$

$h = \frac{1}{N - \frac{1}{2}}$

похожа на правильную гармонику из непрер. случая

$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$ $y_k = \sin \pi\left(\frac{2n-1}{2}\right)x.$

Для $\varphi_k^{(n)} = \sin \pi n \cdot \underbrace{kh}_{x_k}$ и m

$k = 0, \ldots, N$

Скал. произв $= \sum_{k=1}^{N-1} \sin \pi n(kh) \cdot \sin \pi m(kh) =$

$\sin a \cdot \sin b =$

$\sum_{k=1}^{N-1} \sin \underbrace{\pi n kh}_{\varphi} = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{N-1} e^{ik\varphi}\right) \underset{\text{гом. прогр.}}{=} \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi}\left(\frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}\right)\right)$

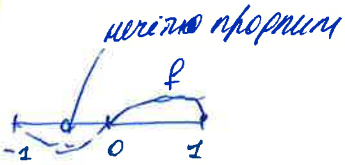
понятно, что нечётные гармоники:

нет синуса нарочно

четный синус не подх

18.09.20~~23~~24. Семинар 3.

2-е задание по прогр.



Её аналог в непрер. случае:

Если $f(0)=f(1)=0$, и f — гладкая, то $\boxed{f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x)}$ — ну · ряд ~~Тейлора~~ Фурье

Косинусов нет, т.к. мы с $[0;1]$ продолжили на $[-1;0]$ неч. образом. А ряд Фурье для неч. ф-ции — он только из синусов.

$$c_n = \frac{\int_0^1 f(x) \sin \pi n x \, dx}{\int_0^1 \sin^2 \pi n x \, dx}$$ — т.к. синусы ортог.

В дискр. случае: $f_0 = 0$; $f_N = 0$.

$f_0 \, f_1 \ldots f_N$.

$x_0 = 0 \;\ldots\; x_n = 1$.

$x_k = kh$ — равноотст. узлы.

$f_k \approx f(x_k)$

$$f_k \approx \sum_{n=1}^{N-1} c_n \sin(\pi n k h)$$

Теорема. Набор $\left\{ \{\sin \pi n k h\}_{k=0}^{N} \right\}_{n=1 \ldots N-1}$ — это базис в $\mathbb{R}^{N+1}$, при $f_0 = f_N = 0$.

! $$\begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \underbrace{c_1 \left(\varphi^{(1)} \right) + \ldots + c_{N-1} \left(\varphi^{(N-1)} \right)}_{\text{тут } N-1 \text{ слагаемое}}$$ ($N-1$ своб. парам, т.к. $f_0 = f_N = 0$ — 2 соотношения).

$\varphi_k^{(n)} = \sin \pi n k \cdot h$ — базисные ф-ции. Они $=0$ на краях

! $(\varphi^{(n)}, \varphi^{(m)}) = 0$, при $m \neq n$

Т.к. базисные ф-ции ортог. в скал. произв. $(p, q)_h = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} p_k q_k h}_{\downarrow \int_0^1 fg\,dx}$ длина отрезочка до след. точки.

$$\Rightarrow c_n = \frac{(f, \varphi^{(n)})_h}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})_h}$$

$$\Rightarrow f_k = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \cdot \varphi_k^{(n)}$$

А почему ортогональность? Ну через компл. числа.

`f2c(double *c, double *f, int N);` — она по f настраивает c.

`c2f` — наоборот.

$c_n \in \mathbb{R}^{n+1}$; $c_0 = c_N = 0$.

$$\begin{cases} f(x) \in C^{\infty}[0,1] \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \xrightarrow{N\text{-фикс}} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N-1} C_n \cdot \underbrace{\varphi_K^{(n)}}_{= \sin \pi n x_k = \sin \pi n k h}$$

$\Rightarrow$ есть надежда, что $f(x) \propto \overbrace{\sum_{n=1}^{N-1} C_n \cdot \sin \pi n x}^{g(x)}$

отель вблизи по 2 точки из узла.

$\max\limits_j |f(x_j) - g(x_j)|$ – и поделим на $h, h^2, h^3 \ldots$ чтоб узнать, какого это порядка: Ch^p.

Или так: $\max\limits_j |\text{отклонение}| = C \cdot h^p$

$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(h)$, $h = \frac{1}{N}$ $= \varepsilon_{rr}(N) \sim C \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^p$

$\Rightarrow \ln(\max\limits_j \text{откл}) = \underbrace{p \ln C}_{= \text{конст.}} + p \ln h.$

Как поймал p: $N = 10, 100, 1000$

$Err(10), Err(100), Err(1000)$

$\ln(Err(N)) \sim \ln \tilde{C} + p \ln\left(\frac{1}{N}\right)$

$\ln(Err^{-1}(N)) \sim \ln C^{-1} + p \ln N$

должна быть прямая.

Угол наклона прямой – это интересующее нас p.

11.09.20. ЭВМ. Семинар 2.

Задача 1

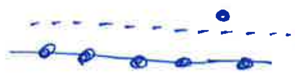
Если даны $x_1 \dots x_n$, $f_1 \dots f_n$ — то $\exists!\, L_n(x)$: $L_n(x_i) = f_i$; $i = 1 \dots n$.

Задача 1.5

А теперь: $x_1 \dots x_N$, $f_1 \dots f_N$ — хотим $L_n(x)$, причем $n \le N$ (т.е. хотим провести через 3 точки, например).

Т.е. хотим $\inf\limits_{L_n(x)} \max\limits_{i=1\dots N} |f_i - L_n(x_i)|$ — т.е. хотим полином, который минимизирует отклонение в норме C.

Пример.



← это в норме C

← в среднеквадр.

Решение: считаем сначала, что $x_1 \dots x_N$; $N = n+1$, $f_1 \dots f_{n+1}$.

И хотим строить $L_n(x)$ (т.е. провести по 3-м точкам)

Теорема Искомый $P^*_{n-1}(x)$ (это [illegible]) должен удовлетворять $\left\{ f_i - \underbrace{P^*_{n-1}(x_i)}_{\text{искомый полином}} = (-1)^i \cdot h \right.$; $i = 1 \dots n+1$

т.е. h, h, h, h, h

! т.е. если дана одна лишняя точка, то искомый полином — такой

Строим полином: $P^*_{n-1} = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$$\Rightarrow f_1 - [a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1}] = h$$
$$f_2 - (a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_2^{n-1}) = -h$$
$$\vdots$$
$$f_{n+1} - (\dots a_{n-1} x_{n+1}^{n-1}) = (+1)^{n+1} h.$$

$a_0, \dots a_{n-1}$; h — это $n+1$ неизв.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & +1 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & -1 \\ - & - & - & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

Дз

посмотреть на чеб. узлах, как влияет рост n на h (типа $n\uparrow, h\downarrow$)

! кол-во точек на 2 больше степени многочлена.

$f_i - P_{n-1}(x)$

h
$-h$
h
$-h$

← должно быть так. проверять на $y = |x|$.

$n = 10, 20, 30, 40, 50$
т.е. вычисл. погрешности при $n > 50$ [illegible] [illegible].

Зам. А что делать, когда $n \ll N$ (много меньше)

Т.е. 10000 точек и мы хотим многочлен 8 степени.

Сводим к задаче, когда ровно 1 лишняя точка.

Выбираем $n+2$ рандомные точки, по ним строим L_n.

Этот L_n зависит от выбранного набора.

Смотрим на столбик разностей $f_i - L_n(\sigma^{(1)})$.

В узлах (т.е. в наборе $\sigma^{(1)}$) это будет $= \pm h$.

Если $\max\limits_{\substack{\{x_1 \dots x_n\} \\ \text{все точки}}} |f_i - L_n(\sigma^{(1)})| = \max\limits_{\sigma^{(1)}} |f_i - L_n(\sigma^{(1)})|$, (т.е. на остальных точках отклонение $\le$),

то $L_n(\sigma^{(1)})$ — искомый. $\sigma^i = \{x_1^i \dots x_{n+1}^i\}$.

Вопрос: а как найти этот оптимальный набор σ?

Мы не перебирали же все наборы C_n^{N+1} — это экспоненциальный рост кол-ва шагов перебора.

Мы просто выкидываем из текущего базиса какую-то точку x, и вместо x включили точку A, где отклонение больше, чем h. А что брать в качестве x — теорема гласит, что из двух соседей точки A выкидываем ту, у кого отклонение того же знака, что и отклонение в точке A.

Есть S-алгоритм и R-алгоритм

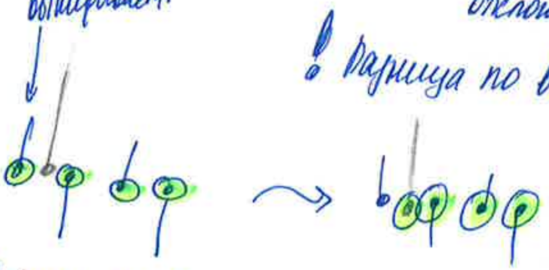
S-алгоритм: включает одну точку с отклонением

R-алгоритм: пытается включить ~~все, кого больше~~ побольше точек с отклонениями большими по модулю!

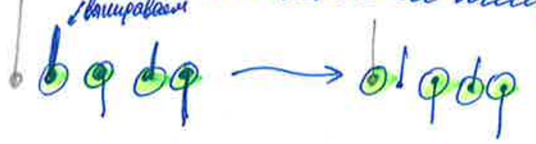
! Разница по включённым узлам должна менять знак (при переходе от точки к точке). Это необх. условие того, чтобы док-ть, что выбранный набор был оптимален.

Зам. ⊙ — это точки, входящие в набор σ.

1)



2) А если наиб. отклонение не между двумя узлами, а самой левой?



3) А если так:

Задача 2

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N$

$f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} x_1^n \\ \vdots \\ x_N^n \end{pmatrix}$$

1 — 1; x — [illegible]; x^n — [illegible]

04.09.20. ЭВМ. Семинар 1.

1 задание: построить многочлен Лагранжа.

нужно быстро менять f (которая генерит входные данные). И n тоже нужно менять.

вход: n

$x_1 \dots x_n$

$y_1 \dots y_n$

выход: $P_{n-1}(x): P_{n-1}(x_i) = y_i$

$P(\text{double } x, \longleftarrow)$. массив коэф. передав. или внутри их искать.

P внутри решает систему СЛУ для нахождения коэф.

Результат: график/таблица значений

x	$P(x)$	$f(x)$	$\Delta = P(x) - f(x)$
x_1			
$x_1 + h_1$			
$x_1 + 2h_1$ $\quad h_1 = \frac{x_2 - x_1}{3}$			
x_2			
...			
x_3			
...			
x_n			

Сравнить $P(x)$ и $f(x)$ в этих точках.

gnuplot.

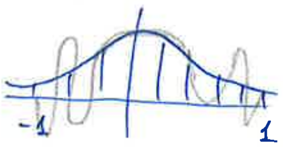
$f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$ — ф-ция Рунге.

$n = 2 \dots 20$

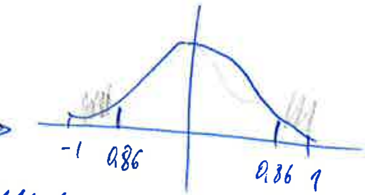
отрезок $= [-1;1]$;

$x_i = x_{i-1} + h$. — равном. набросаны точки.

Строим для неё интерп. многочлен Лагранжа.



при $n = 15, \dots 25$.



при увеличении n

всё равно в концах болтанка, увелич. амплитуда болтанки, но область болтанки - всё такая же.

Правильные узлы — они одинаковы для всех ф-ций класса C^∞.

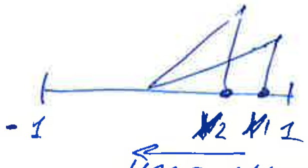
Пусть $f \in C^\infty[-1;1]$.

Тогда интерп. полином по узлам Чебышёва сход. к f в $C[-1;1]$ (норме) при $n \to \infty$.

причём $\|f - L_n\|_C \le const \cdot q^n$, где $q < 1$.

Узлы Чебышёва: $x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$; $i = 1 \dots n$.

нули многочлена Чебышёва



Узлы нумеруются справа налево.

норм. нумерация, когда $x_{n+1-i} = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$

Узлы Чебышёва сгущаются к концам.

2) Подменяем равноотст. узлы на узлы Чебышёва и демонстрируем улучшение на ф-ции Рунге. $f(x)=1+x^{n-2}$

3) Дальше в норме C по многочл. Чебышёва ~~на~~ смотрим, приблизится ли ф-ция $f(x)=|x|$.

II. Пробем. отличие $p_{n-1}(x)=\sum a_i x^i$

$L_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$

они не экв. с точки зрения выч. мат.

Подменяем p_{n-1} на L_n, и смотрим, можно ли за счёт этого увеличить n.

! У L_n — тоже проблемы.

$$\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_i)\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_n)}$$

пусть $n\sim 25$; $[a,b]=[-1;1]$.

$\Rightarrow$ шаг $\sim\frac{2}{25}$.

И мы перемножаем много маленьких чисел, делим на много маленьких — будет большое. мал. число

порядок перемножения — имеет значение.

$\Rightarrow$ интерп. мног. ≥ 20 — уже не строится

Рисую p_{n-1}
Рисую $L_n(x)$
$x_i=x_{i-1}+h$
Чебыш. узлы.
Для $f=Q_{n-1}(x)$; $|x|$; $\frac{1}{25x^2+1}$.

должно показывать разницу между ~~разница~~ многочл. по коэф. и интерп. мног. Лагр.

Теорема Фабера

$\forall$ таблицы узлов интерполяции $\exists f\in C[a,b]$: $\|f-L_n\|\not\to 0$ при $n\to\infty$.
(а под конкретную ф-цию — можно подобрать норм. узлы.)

! А узлы Чебышёва — работают для ф-ции $\in C^\infty[a,b]$

gnuplot
bin директория
wgnuplot.exe
demo директория
dem.all
>load 'dem.all'
~~рисует~~ отрабатывает, рисует всё что там.

gnuplot
```
>plot x*x
>set xrange [0:10]
>plot x*x, sin(x*10)
>plot 'a.txt' - просто точки
>plot 'a.txt' with lines, 'a.txt' using 1:3 with points ps 7, 1/(25*x*x+1)
```
using 1:2

pointsize

pwd в какой я директории говорит.

a.txt
$x_1\ y_1$
$x_2\ y_2$
...

set out 'a.png'
set term png

после этого рисование возвратится на экран

иначе вариант кирдык.

set term win (x11)
set out

reset — всё сбрасывает