

# Оптимальные стратегии в динамической модели эволюции

Куслина Кристина

Московский Государственный Университет им. М.В.  
Ломоносова,  
Механико-Математический факультет,  
кафедра Теории Вероятностей

Научные руководители: доцент, к.ф.-м.н. Житлухин М.В.,  
академик РАН Ширяев А.Н.

Москва  
2023 год

# Содержание

## 1 Предисловие

- Введение
- Связь с литературой

## 2 Описание модели

- Общая модель
- Уравнение динамики популяции
- Эволюционно оптимальная стратегия

## 3 Основные результаты

- Существование и единственность глобальной эволюционно оптимальной стратегии
- Достаточные условия существования эволюционно оптимальной стратегии
- Численное изучение теоремы о достаточных условиях существования эволюционно оптимальной стратегии

## 4 Заключение

- Заключение

# Введение

- Стохастическая модель, рассматривающая несколько сосуществующих популяций, между которыми предполагается взаимодействие.
- Будет в явном виде построена эволюционно оптимальная стратегия.
- Удастся численно продемонстрировать достаточные условия при которых стратегия, отличная от оптимальной, превосходит все остальные стратегии.
- Будет построен пример сосуществования нескольких стратегий.

# Связь с литературой

- R.Amir, I.V.Evstigneev, and K.R.Schenk-Hoppé (2013). Игры на выживание на рынке активов: синтез эволюционных и динамичных игр.
- T.J.Brennan and A.W.Lo. (2011). Происхождение поведения.
- N.Koduri and A.W.Lo. (2021). Происхождение сотрудничества.
- R.Zhang, T.J.Brennan, and A.W.Lo. (2014). Происхождение неприятия риска.

# Общая модель

- $M \geq 2$  популяций и  $N \geq 2$  действий.
- Задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , фильтрация порождена случайным количеством ресурсов  $X_t$ .
- Стратегия игроков в популяции  $m$  описывается вектором  $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$ .
- Целью популяции является максимизация количества потомков на бесконечном горизонте времени.

# Уравнение динамики популяции

- $S_t^m$  – размер популяции  $m$  в момент времени  $t$ .
- $X_{t,n}$  – объем ресурсов, имеющихся для производства потомства.
- Векторы  $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$  – векторы распределения вероятностей по  $N$  действиям для особи из популяции  $m$ .
- Размер потомства особей популяции  $m$ , которые выбрали действие  $n$ , равно

$$S_{t+1,n}^m = \frac{p_n^m S_t^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_t^i} X_{t+1,n}.$$

- Общая численность популяции  $m$  на следующем шаге равна

$$S_{t+1}^m = \sum_{n=1}^N S_{t+1,n}^m = \sum_{n=1}^N \frac{p_n^m S_t^m}{\sum_{i=1}^M p_n^i S_t^i} X_{t+1,n}.$$

# Эволюционно оптимальные стратегии

Профилем стратегий  $P = (p^1, \dots, p^M)$  будем называть набор стратегий  $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$  в конкретной игре.

## Определение

*Будем называть стратегию популяции  $m$  эволюционно оптимальной в заданном профиле стратегий  $P$ , если*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^m}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = 1 \text{ п.н.}$$

## Определение

*Будем называть стратегию  $p^*$  глобально эволюционно оптимальной, если она является оптимальной в любом профиле стратегий при любом положительном значении начальных численностей популяции.*

# Существование и единственность глобально эволюционно оптимальной стратегии

## Теорема

Стратегия  $p^* = (p_1^*, \dots, p_N^*)$  с компонентами

$$p_n^* = E \frac{X_{t,n}}{\sum_{k=1}^N X_{t,k}} \quad (1)$$

является единственной глобально эволюционно оптимальной стратегией.

Доказательство приводится в тексте работы.



# Достаточные условия существования эволюционно оптимальной стратегии

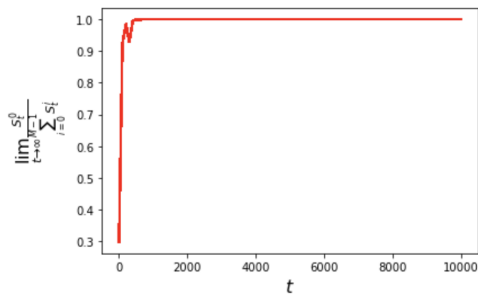
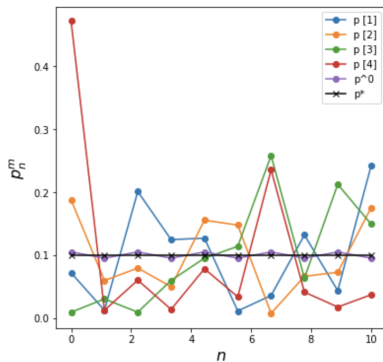
## Теорема

Пусть задан профиль стратегий  $P = (p^1, \dots, p^M)$ ,  $p^m = (p_1^m, \dots, p_N^m)$ . И  $p^1$  такое, что  $|p^1 - p^*| \leq C|p^m - p^*|$ , для любого  $m \neq 1$  и некоторой малой константы  $C > 0$ , тогда стратегия  $p^1$  будет эволюционно оптимальной в том смысле, что

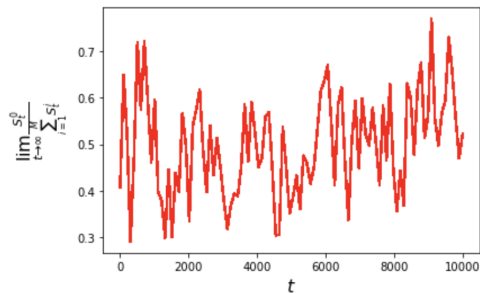
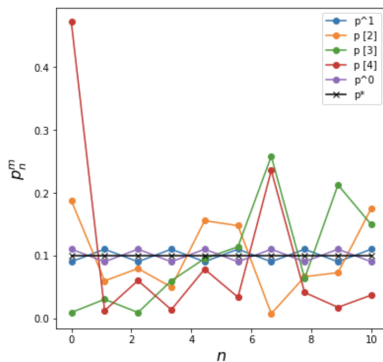
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t^1}{\sum_{i=1}^M S_t^i} = 1 \text{ п.н.}$$

Где  $|x - y| = \sum_{n=1}^N |x_n - y_n|$ .

# Пример 1



# Пример 2



# Заключение

- Была предложена модель динамики популяции, учитывающая взаимодействие между популяциями.
- Была найдена глобально эволюционно оптимальная стратегия в предложенной модели.
- Были численно построены примеры, показывающие достаточные условия существования эволюционно оптимальной стратегии.
- Дальнейший научный интерес представляет уточнение модели, изучение константы в теореме о достаточных условиях, а также расширение темы вплоть до моделирования поведения индивидов.

Спасибо за внимание!