Существование асимптотически оптимальных стратегий в моделях рынка с дискретным временем

Запольский Павел

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: Житлухин Михаил Валентинович

Москва, 2023 г.

Модель рынка

Рассмотрим модель, в которой есть один инвестор и активы, цены которых задаются случайными последовательности.

- Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Время в модели дискретно, $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Модель рынка

Рассмотрим модель, в которой есть один инвестор и активы, цены которых задаются случайными последовательности.

- Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Время в модели дискретно, $t = 0, 1, 2, \ldots$.
- Рынок состоит из N активов, цены которых задаются согласованными последовательностями $S^i = (S^i_t)_{t=0}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, N$. $S^i_t > 0$ п.н. для всех t, i.

Модель рынка

Рассмотрим модель, в которой есть один инвестор и активы, цены которых задаются случайными последовательности.

- Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Время в модели дискретно, $t = 0, 1, 2, \dots$.
- Рынок состоит из N активов, цены которых задаются согласованными последовательностями $S^i = (S^i_t)_{t=0}^{\infty}$, $i = 1, \dots, N$. $S^i_t > 0$ п.н. для всех t, i.
- Стратегией будем называть предсказуемую последовательность $h = (h_t)_{t=1}^{\infty}$, где $h_t = (h^1_t, \dots, h^N_t)$ является случайным вектором, задающим портфель инвестора на дату $t \geq 1$ и приобретаемый в момент $t-1$.

Модель рынка

Рассмотрим модель, в которой есть один инвестор и активы, цены которых задаются случайными последовательности.

- Задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Время в модели дискретно, $t = 0, 1, 2, \ldots$.
- Рынок состоит из N активов, цены которых задаются согласованными последовательностями $S^i = (S_t^i)_{t=0}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, N$. $S_t^i > 0$ п.н. для всех t, i.
- Стратегией будем называть предсказуемую последовательность $h = (h_t)_{t=1}^{\infty}$, где $h_t = (h_t^1, \ldots, h_t^N)$ является случайным вектором, задающим портфель инвестора на дату $t \geq 1$ и приобретаемый в момент $t - 1$.
- Агент обладает начальным капиталом $V_0 > 0$. Стоимостью портфеля стратегии в момент времени t будем называть величину $V_t^h = \sum_{i=1}^{N} h_t^i S_t^i = \langle h_t, S_t \rangle$.

Модель рынка

- Стратегия самофинансируема, $\langle h_t, S_t \rangle = \langle h_{t+1}, S_t \rangle$. То есть отсутствует приток или отток капитала из портфеля

Модель рынка

- Стратегия самофинансируема, $\langle h_t, S_t \rangle = \langle h_{t+1}, S_t \rangle$. То есть отсутствует приток или отток капитала из портфеля
- Обозначим $\lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^N)$ – вектор пропорций, в которых капитал портфеля распределяется между инвестициями в активы. $\lambda_t^i = \frac{h_t^i S_t^i}{V_t^h}$. При этом $\lambda_t^i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^N \lambda_t^i = 1$.

Модель рынка

- Стратегия самофинансируема, $\langle h_t, S_t \rangle = \langle h_{t+1}, S_t \rangle$. То есть отсутствует приток или отток капитала из портфеля
- Обозначим $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N)$ – вектор пропорций, в которых капитал портфеля распределяется между инвестициями в активы. $\lambda_t^i = \frac{h_t^i S_t^i}{V_t^h}$. При этом $\lambda_t^i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^N \lambda_t^i = 1$.
- Цены активов строго положительны, а короткие продажи запрещены, то есть для всех $t \geq 0$ выполняется $V_t > 0$ для любой стратегии.

Модель рынка

- Стратегия самофинансируема, $\langle h_t, S_t \rangle = \langle h_{t+1}, S_t \rangle$. То есть отсутствует приток или отток капитала из портфеля
- Обозначим $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N)$ – вектор пропорций, в которых капитал портфеля распределяется между инвестициями в активы. $\lambda_t^i = \frac{h_t^i S_t^i}{V_t^h}$. При этом $\lambda_t^i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^N \lambda_t^i = 1$.
- Цены активов строго положительны, а короткие продажи запрещены, то есть для всех $t \geq 0$ выполяется $V_t > 0$ для любой стратегии.
- Величины $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ представляют доходность активов $X_t^i = \frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}$.

Стратегия оптимального роста

Опредление

Супермартингал - это случайный процесс X_1, X_2, X_3, ..., *удовлетворяющий следующим свойствам:*

- $\mathbf{E}\left(|X_t|\right) < \infty$
- $\mathbf{E}\left(X_t\right) - \mathcal{F}_t$*-измеримо*
- $\mathbf{E}\left(X_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \leq X_t$

Опредление

Будем называть стратегию λ *с начальным капиталом* $V_0^\lambda > 0$ *стратегией оптимального роста, если для любой другой стратегии* μ *верно, что*

$$\frac{V_t^\mu}{V_t^\lambda} \text{ является супермартингалом.}$$

Свойства стратегия оптимального роста

Свойство (асисптотическая оптимальность)

Если λ *является стратегией оптимального роста, то для любой стратегии* μ *существует случайная величина с такая, что*

$$\sup_{t \geq 0} \frac{V_t^{\mu}}{V_t^{\lambda}} < c \text{ п.н.}$$

Свойство

Если λ *является стратегией оптимального роста, то для любой стратегии* μ *с таким же значением начального капитала* ($V_0^{\lambda} = V_0^{\mu}$) *и любого момента времени* $T > 0$ *выполнено*

$$\mathrm{E} \ln V_T^{\lambda} \geq \mathrm{E} \ln V_T^{\mu}.$$

Величина $U(\lambda, T) = \mathrm{E} \ln V_T^{\lambda}$ представляет собой ожидаемую логарифмическую полезность портфеля стратегии в момент T.

Литература

Основные работы на тему оптимальной стратегии роста активов

- Kelly J.L. (1956) ”A new interpretation of information rate”, Bell System Technical Journal 35(7), 917-926.
- Breiman L.(1961), ”Optimal gambling systems for favorable games”, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 65-78
- Algoet P.H., Cover T.M. (1988) ”Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment”, Annals of Probability, 16(2), 876-898.
- Kazatzas I., Kardaras C. (2007) "The numéraire portfolio in semimartingale financial models"Finance Stoch (2007) 11: 447–493

Стратегия с неинтегрируемым логарифмом

Опредление

Назовем стратегию $\widehat{\lambda}$ *лог-оптимальной если*

$$\widehat{\lambda}_t(\omega) \in \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} E\left(\ln\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n X_t^n\right) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)(\omega)$$

В литературе известно о существовании $\widehat{\lambda}$ в случае неограниченных доходностей. Однако проблема заключается в явном построении такой стратегии роста.

Существование стратегии оптимального роста

Чтобы решить проблему неинтегрируемости логарифма, я предлагаю следующее решение

Лемма

Пусть $R_t^n = \frac{X_t^n}{X_t^1 + .. + X_t^N}$. *Тогда для любого* t *существует такая* F_{t-1}*-измеримая* $\widehat{\lambda}$: $\widehat{\lambda}_t(\omega) \in \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} E\left(\ln\left(\sum_{n=1}^N \lambda_t^n R_t^n\right) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)(\omega)$

Теорема

Пусть $\widehat{\lambda}_t(\omega) \in \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} \mathrm{E}\left(\ln\left(\sum_{n=1}^N \lambda_t^n R_t^n\right) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)(\omega)$, *тогда* $\widehat{\lambda}_t$ *- стратегия оптимального роста*

Доказательство существования

Для существования стратегии оптимального роста необходимо показать, что $\frac{V_t^{\mu}}{V_t^{\widehat{\lambda}}}$ – супермартингал, что равносильно тому, что

$$E\left(\frac{\sum_n \mu_t^n X_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n X_t^n} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \leq 1 \text{ или } E\left(\frac{\sum_n \mu_t^n R_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n R_t^n} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \leq 1$$

Заметим, что для любой стратегии μ_t^n функция

$$\mathrm{E}\left(\ln\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\mu_t^n \cdot \varepsilon + \widehat{\lambda}_t^n(1-\varepsilon)\right) R_t^n\right) \mid F_{t-1}\right), \text{ где } \varepsilon \in [0,1]$$

достигает максимума на $\varepsilon = 0$. Тогда $E\left(\frac{\sum_n(\mu_t^n - \widehat{\lambda}_t^n)R_t^n}{\sum_n \widehat{\lambda}_t^n R_t^n} \mid F_{t-1}\right) \leq 0$

Единственность стратегии оптимального роста

Теорема

Предположим, что в рассматриваемой модели для каждого $t \geq 1$ *доходности* X_t^i *не являются линейно зависимыми, т.е. из равенства* $\sum c_i X_t^i = c_0$ *с некоторыми константами* c_i *следует, что* $c_1 = \cdots = c_N = 0$. *Тогда стратегия оптимального роста п.н. единственна, т.е. если* $\widetilde{\lambda}$ *– другая стратегия оптимального роста, то* $\widehat{\lambda}_t = \widetilde{\lambda}_t$ *п.н. для всех* $t \geq 1$.

Доказательство единственности

Применим неравенство Йенсена, при этом строгое неравенство будет выполнятся только для неконстантной случайной величины a

$$\mathrm{E}\left[\ln \frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid F_{t-1}\right] = \ln\left(\mathrm{E}\left[\frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} \mid F_{t-1}\right]\right) \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{V_t^{\widetilde{\lambda}}}{V_t^{\widehat{\lambda}}} = a \mid F_{t-1}\right) = 1.$$

Учитывая, что X_t^i – линейно независимы, верно что

$$\mathrm{P}(V_t^{\widetilde{\lambda}^n} - aV_t^{\widehat{\lambda}^n} = 0 \mid F_{t-1}) = 1 \text{ или } \mathrm{P}\left(\sum_n \left(\widetilde{\lambda}^n - a\widehat{\lambda}^n\right) X_t^n = 0 \mid F_{t-1}\right) = 1.$$

Численные симуляции

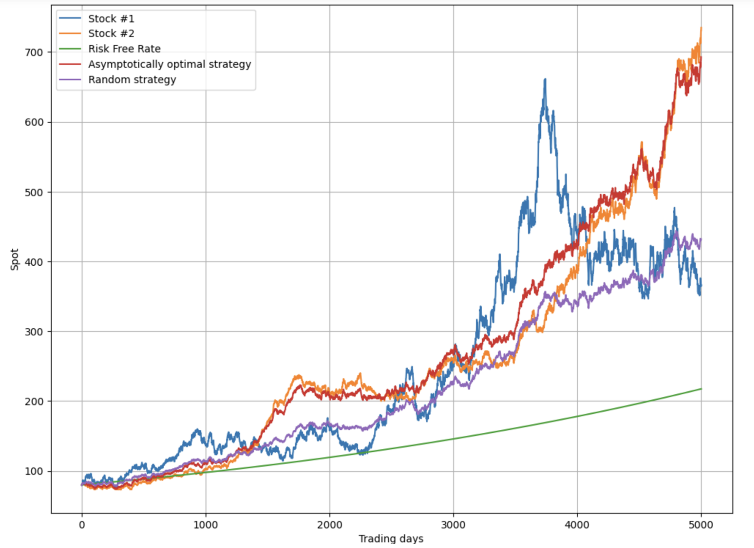

Рис.: Доходность портфеля на 80$

Численные симуляции

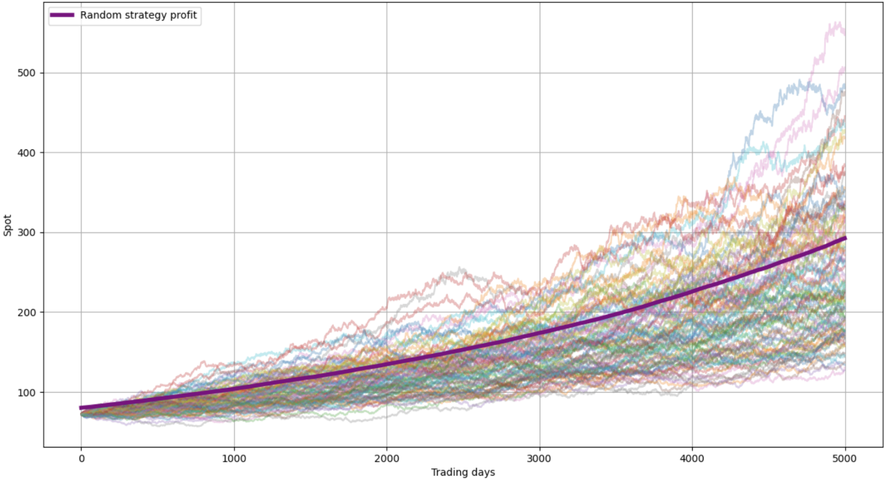

Рис.: Симуляция доходностей для стратегии аллокации в равных долях

Численные симуляции

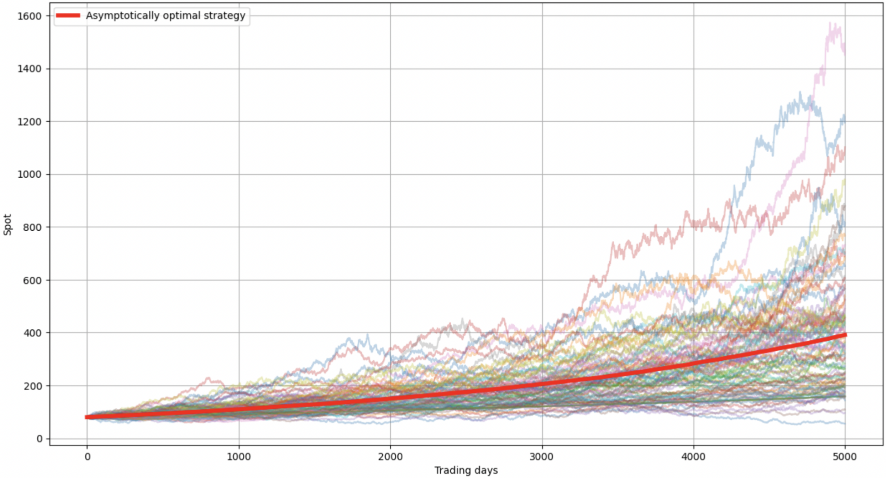

Рис.: Симуляция доходностей для лог-оптимальной стратегии

Спасибо за внимание!