Учебно–методические материалы
по курсу "Численные методы"
4 курс, II поток

2020–2021 уч.г.

Вопросы по курсу "Численные методы"
4 курс, II поток

1. Погрешность метода и вычислительная погрешность. Пример неустойчивого алгоритма.
2. Алгебраическая интерполяция. Многочлен Лагранжа.
3. Константа Лебега интерполяционного процесса для равноотстоящих узлов.
4. Многочлены Чебышева и их свойства.
5. Интерполяционные сплайны. Конструкция и обоснование кубического сплайна.
6. Понятие об аппроксимационных сплайнах.
7. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве.
8. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве.
9. Дискретное преобразование Фурье. Идея быстрого дискретного преобразования Фурье.
10. Наилучшее равномерное приближение многочленами.
11. Квадратурные формулы интерполяционного типа.
12. Ортогональные многочлены и квадратуры Гаусса.
13. Составные квадратурные формулы. Правило Рунге для оценки погрешности.
14. Основные приемы для вычисления нерегулярных интегралов.
15. Метод прогонки для решения трехдиагональных систем. Корректность и устойчивость метода прогонки.
16. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Методы Гаусса и Холецкого.
17. Прямые методы решения систем линейных уравнений. Методы отражений и вращений.
18. Число обусловленности. Неравенства для ошибки и невязки.
19. Метод простой итерации решения систем линейных уравнений.
20. Оптимальный одношаговый итерационный метод.
21. Оптимальный циклический итерационный метод.
22. Обобщенный метод простой итерации.
23. Методы Якоби и Гаусса – Зейделя.
24. Метод верхней релаксации.
25. Метод наискорейшего градиентного спуска.
26. Линейная задача наименьших квадратов. Метод нормального уравнения.
27. Линейная задача наименьших квадратов. Методы QR-разложения и сингулярного разложения.

28. Общая идея и примеры проекционных методов.
29. Пространства Крылова. Понятие о методе сопряженных градиентов.
30. Частичная проблема собственных значений.
31. Полная проблема собственных значений. QR-алгоритм.
32. Метод простой итерации для нелинейных уравнений.
33. Метод Ньютона.
34. Явный метод Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Устойчивость. Локальная и глобальная ошибки.
35. Явные методы Рунге – Кутты.
36. Неявные одношаговые методы решения ОДУ.
37. Многошаговые методы решения ОДУ.
38. Основы метода конечных элементов: вариационная постановка задачи, метод Ритца, базисные функции.
39. Оценка точности приближения кусочно – линейными функциями.
40. Проекционная теорема в методе конечных элементов.
41. Система уравнений в методе конечных элементов.
42. Решение модельной задачи методом Фурье.
43. Исследование устойчивости модельной задачи методом Фурье.
44. Метод стрельбы для решения трехдиагональных систем.
45. Пример аппроксимации уравнения и краевых условий.
46. Определения аппроксимации и устойчивости.
47. Определение сходимости. Теорема А.Ф.Филиппова.
48. Интегро – интерполяционный метод.
49. Исследование устойчивости методом априорных оценок.
50. Метод конечных разностей для уравнения Пуассона.
51. Спектральный признак устойчивости и примеры его применения для аппроксимаций гиперболического уравнения.
52. Принцип замороженных коэффициентов.
53. Исследование устойчивости простейших схем для уравнения теплопроводности в равномерной метрике.
54. Исследование устойчивости схемы с весами для уравнения теплопроводности в интегральной метрике.

Пример содержания билета по курсу "Численные методы"

---

1. Обобщенный метод простой итерации.

2. *Пусть на множестве функций*

$$\Phi = \left\{ \varphi \in C^{(2)}[a,b] \,:\, \varphi(x_i) = f(x_i),\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \right\}$$

задан функционал энергии

$$E(\varphi) = \int\limits_a^b \left(\varphi''(x)\right)^2 dx\,.$$

Доказать, что естественный сплайн $S_3(x)$ *доставляет минимум функционалу энергии на множестве* Φ, *т.е.*

$$E(\varphi) \geq E(S_3) \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

причем неравенство строгое, если $\varphi \neq S_3$.

3. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0\,.$$

Структура билета на экзамене:

1. "стандартный"вопрос из программы курса,

2. несложное утверждение из курса для аккуратного доказательства,

3. типовая задача из заранее объявленного списка.

Задачи к билетам по курсу "Численные методы"
4 курс, II поток

1. Найти $\sum_{i=1}^{n} x_i^n \, \Phi_i(x)$, где $\Phi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

2. Доказать, что если узлы интерполяции расположены симметрично относительно некоторой точки c, а значения интерполируемой функции в симметричных узлах равны, то интерполяционный многочлен Лагранжа — функция, четная относительно точки c.

3. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[0, b]$. При каком b многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по равноотстоящим узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \leq 10^{-3}$?

4. Доказать следующее свойство многочленов Чебышева:

$$T_{2n}(x) = 2\, T_n^2(x) - 1\,;$$

5. Пусть $x^2 + y^2 = 1$. Доказать следующее свойство многочленов Чебышева: $T_{2n}(y) = (-1)^n T_{2n}(x)$.

6. Найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$ среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1.

7. Пусть $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Показать, что при любом выборе узлов $x_i \in [a, b]$ имеет место неравенство $\max_{[a,b]} |\omega_n(x)| \geq (b - a)^n \, 2^{1-2n}$.

8. Среди всех многочленов вида $a_2 x^2 + x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

9. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 2$ для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1, 1]$.

10. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 3$ для функции $f(x) = \exp(x^2)$ на отрезке $[-1, 1]$.

11. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 3$ для функции $f(x) = |x^2 - 7x + 10|$ на отрезке $[3, 4]$.

12. Найти наилучшее приближение в $L_2(-1, 1)$, где $\|f\|^2_{L_2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$, для функции $f(x) = x^2$ алгебраическими многочленами $Q_1(x)$.

13. Найти для функции $\exp(x)$ наилучшее приближение многочленом нулевой степени в норме $L_1(0,1)$, где $\|f\|_{L_1(0,1)} = \int\limits_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

14. Пусть P_2 — пространство алгебраических многочленов второй степени на отрезке $[-1,1]$ с нормой $||p(x)|| = |p(-1)| + |p(0)| + |p(1)|$. Найти наилучшее приближение константой для функции $p(x) = x^2 \in P_2$.

15. Рассмотреть формулы Ньютона – Котеса при $n = 1$ (прямоугольников) и $n = 2$ (трапеций) и сравнить оценки их погрешностей в случае гладких подынтегральных функций.

16. Доказать, что для погрешности квадратурной формулы трапеций справедливо представление

$$R_2(f) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (a-\xi)(b-\xi)f''(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

17. Оценить минимальное число разбиений N отрезка $[0,1]$ для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$, по составной квадратурной формуле прямоугольников, обеспечивающее погрешность не более 10^{-4}.

18. Оценить минимальное число разбиений N отрезка $[0,1]$ для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x$, по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее погрешность не более 10^{-4}.

19. Пусть T — треугольник на плоскости, $s(T)$ — его площадь, A, B, C — середины сторон. Показать, что кубатурная формула

$$S(f) = \frac{1}{3}\,s(T)\big(f(A)+f(B)+f(C)\big) \approx \iint\limits_T f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$, точна для всех многочленов второй степени вида $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

20. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов $I(f) = \int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

21. Пусть задан отрезок $[a,b]$. Доказать, что при $b > a \geq 0$ все коэффициенты ортогонального многочлена отличны от нуля.

22. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

23. Найти матричную норму, подчиненную векторной норме $||\cdot||_1$.

24. Найти матричную норму, подчиненную векторной норме $||\cdot||_\infty$.

25. Доказать, что модуль любого собственного значения матрицы не больше любой ее нормы.

26. Показать, что $\mathrm{cond}(A) \geq 1$ для любой матрицы A и любой матричной нормы.

27. Доказать неравенство $n^{-1} \leq \mathrm{cond}_1(A)/\mathrm{cond}_2(A) \leq n$ для квадратных невырожденных матриц размерности $n \times n$.

28. Получить неравенство $\mathrm{cond}(A) \geq |\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|$ для произвольной невырожденной матрицы A и любой матричной нормы.

29. Оценить $\mathrm{cond}_2(A)$ трехдиагональной $n \times n$ матрицы A с элементами $a_{ij} = \{2 \text{ для } i = j;\ -1 \text{ для } |i-j| = 1;\ 0 \text{ для остальных индексов}\}$.

30. Пусть элементы матрицы B имеют вид $b_{ij} = \dfrac{1}{2} \cdot 3^{-|i-j|}$. Доказать, что система $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ имеет единственное решение и метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

31. Пусть матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Найти все α, β, при которых метод простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = B\,\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ сходится с произвольного начального приближения.

32. Пусть матрица B в методе $\mathbf{x}^{k+1} = B\,\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha, \beta < 1\,.$$

Показать, что величина ошибки $\mathbf{z}^k = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k$ в норме $\|\cdot\|_\infty$ начинает монотонно убывать лишь с некоторого номера итерации N. Оценить N при $\alpha = \beta \approx 1$.

33. Пусть все собственные значения матрицы A вещественные и положительные. Доказать сходимость метода $\mathbf{x}^{k+1} = (I - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau\mathbf{b}$ при $\tau = \|A\|^{-1}$ с любой матричной нормой.

34. Пусть спектр матрицы A удовлетворяет условиям: $|\mathrm{Im}(\lambda(A))| \leq 1$, $0 < \delta \leq \mathrm{Re}(\lambda(A)) \leq 1$. Найти область значений вещественного параметра τ, при которых итерационный метод $\mathbf{x}^{k+1} =$

$(I - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau\,\mathbf{b}$ для системы $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ сходится с произвольного начального приближения.

35. При каких условиях на спектр матрицы B итерационный метод $\mathbf{x}^{k+1} = (2B^2 - I)\mathbf{x}^k + 2(B + I)\mathbf{c}$ сходится быстрее метода простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$?

36. Доказать, что для систем линейных уравнений второго порядка методы Якоби и Гаусса–Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

37. Исследовать сходимость метода Гаусса – Зейделя, если матрица размерности $n \times n$ системы $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет элементы: $a_{ij} = 3^{-|i-j|}$.

38. Пусть симметричная матрица A имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M],\ m > 0$. Доказать, что при любом положительном значении итерационного параметра τ сходится метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\frac{\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{x}^k}{2}\right) = \mathbf{b}\,.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

39. Пусть симметричная матрица A имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M],\ m > 0$. При каких $\alpha \in [0, 1]$ метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\alpha\mathbf{x}^{k+1} + (1 - \alpha)\mathbf{x}^k\right) = \mathbf{b}$$

сходится при любом $\tau > 0$?

40. Найти все $\alpha,\ \beta$, при которых метод Гаусса – Зейделя является сходящимся для системы уравнений $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

41. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ для любого $x_0 \geq -2$.

42. Доказать, что итерационный процесс $x_{n+1} = \cos x_n$ сходится для любого начального приближения $x_0 \in \mathbf{R}^1$.

43. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

44. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z кратности p, причем $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

45. Проверить, что $\mathbf{z} = (1,1,1)^T$ — одно из решений системы уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, где $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c} x_1 x_2^3 + x_2 x_3 - x_1^4 - 1 \\ x_2 + x_2^2 + x_3 - 3 \\ x_2 x_3 - 1 \end{array} \right].$$

Сходится ли метод Ньютона к $\mathbf{z}$ при достаточно близких начальных приближениях?

46. Для дифференциальной задачи

$$u'' = f(x)\,, \quad x \in [0,1]\,, \quad u(0) = u(1) = 0$$

построить разностную схему интегро – интерполяционным методом на равномерной сетке.

47. Дана дифференциальная задача

$$-u'' + c\,u = f(x)\,,\ x \in [0,1]\,, \quad u(0) = u(1) = 0\,, \quad c = \text{const}\,.$$

При каких c для решения этой задачи можно применить метод конечных элементов?

48. Проверить, аппроксимирует ли разностная схема уравнение $y' = f(x,y)$ на равномерной сетке $x_k = x_0 + kh$, $k \geq 0$:

$$\frac{1}{8h}(y_k - 3y_{k-2} + 2y_{k-3}) = \frac{1}{2}(f_{k-1} + f_{k-2}), \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k)\,.$$

49. Для задачи $y' + y = x + 1$, $y(0) = 0$ рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + y_k = kh + 1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0\,.$$

Каков порядок аппроксимации на решении данной схемы? Можно ли его улучшить?

50. Для уравнения $y' = f(x,y)$ построить разностную схему

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k),$$

с наивысшим порядком аппроксимации p на решении.

51. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотреть схему

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad k \geq 0\,,$$

и в разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянную c_1 для $x_N = Nh = 1$.

52. Для задачи $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотреть схему

$$4\,\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 3\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = e^h\,, \quad k \geq 1,$$

и в разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots$ найти постоянную c_1 для $x_N = Nh = 1$.

53. Имеется краевая задача $u'' - 2u = \sin x - 1$, $u'(0) - u(0) = 0$, $u(1) = 0$. На сетке с шагом h построить разностную схему с аппроксимацией второго порядка на решении.

54. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0\,.$$

55. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0\,.$$

56. Исследовать устойчивость разностной схемы с постоянным коэффициентом a с помощью спектрального признака

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0\,.$$

57. При каком соотношении τ и h разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

имеет на решении порядок аппроксимации $O\left(\tau^2 + h^4\right)$?

58. Первая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ аппроксимируется явной разностной схемой ($Mh = 1$)

$$\begin{aligned}
&\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}\,,\ 1 \le m \le M-1,\\
&u_m^0 = \varphi(mh), \quad u_0^n = u_M^n = 0\ \forall n \ge 0\,.
\end{aligned}$$

Определить порядок сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи при различных $\rho = \tau/h^2$.

59. Исследовать устойчивость разностной схемы по начальным данным в интегральной метрике ($Mh = 1$)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2},\ 1 \le m \le M-1,\ u_0^n = u_M^n = 0\ \forall n \ge 1.$$

60. Исследовать устойчивость разностной схемы по начальным данным в интегральной метрике ($Mh = 1$)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m+1}^{n-1}}{h^2},\ 1 \le m \le M{-}1,\ u_0^n = u_M^n = 0\ \forall n \ge 1.$$

61. Построить аппроксимацию оператора Лапласа и оценить ее погрешность на шаблоне "крест":

$$\Delta^h u(x_1, x_2) = h^{-2}[a_{0,0}u(x_1, x_2) + a_{1,0}u(x_1 + h, x_2) +$$
$$a_{-1,0}u(x_1 - h, x_2) + a_{0,1}u(x_1, x_2 + h) + a_{0,-1}u(x_1, x_2 - h)]\,,$$

где коэффициенты $a_{i,j}$ не зависят от h.

62. Построить аппроксимацию оператора Лапласа и оценить ее погрешность на шаблоне "косой крест":

$$\Delta^h u(x_1, x_2) = h^{-2}[a_{0,0}u(x_1, x_2) + a_{1,1}u(x_1 + h, x_2 + h) +$$
$$a_{1,-1}u(x_1 + h, x_2 - h) + a_{-1,1}u(x_1 - h, x_2 + h) + a_{-1,-1}u(x_1 - h, x_2 - h)]\,,$$

где коэффициенты $a_{i,j}$ не зависят от h.

63. Для уравнения $\Delta\, u = f$ на равномерной сетке с шагом h построить аппроксимацию на решении с порядком $O\,(h^2)$ граничного условия $\partial u/\partial x_1 - \alpha\, u = 0$ при $x_1 = 0$, используя минимальное количество узлов вдоль оси x_1.

Литература по курсу "Численные методы"
4 курс, II поток

1. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. „Численные методы. Решения задач и упражнения“. – 2-е изд. – М.: Лаборатория Знаний, 2016.

2. Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. „Начала численного анализа“. – М.: ТОО „Янус“, 1995.

3. Марчук Г.И. „Методы вычислительной математики“. – М.: Наука, 1980.

4. Самарский А.А. „Теория разностных схем“. – М.: Наука, 1977.

5. Стренг Г., Фикс Дж. „Теория метода конечных элементов“. – М.: Мир, 1977.

6. Тыртышников Е.Е. „Методы численного анализа“. – М.: Издательский центр „Академия“, 2007.

7. Чижонков Е.В. „Численные методы. Конспект лекций. “ – Эл. версия.