Evolutionary Finance с беск. числом агентов (идеи) Семинар 5

① Модель

- Активы (short-lived) X_t^n, $\sum_n X_t^n = 1$ н.о.р.
- Агенты (стратегии) мера μ_t на $(S, \mathcal{B}(S))$, $S = \{ s \in \mathbb{R}_+^N : \sum_n s^n = 1 \}$
- Капитал:

$$\mu_{t+1}(A) = \sum_n \frac{\int_A s^n \mu_t(ds)}{\int_S s^n \mu_t(ds)} X_{t+1}^n \quad \text{где } A \in \mathcal{B}(S)$$

Если у μ_t есть плотность, то

$$f_{t+1}(s) = \sum_n \frac{s^n f_t(s)}{\int_S s^n f_t(s)\, ds} X_{t+1}^n$$

② Хотим доказать

$$\mu_t \xrightarrow{w} \delta_{s_*} \text{ п.н.} \qquad \text{где } s_*^n = E X_t^n, \quad \delta \text{ - мера Дирака}$$

Достаточно доказать

$$\mu_t \xrightarrow{W_1} \delta_{s_*} \qquad W_1 \text{ - метрика Вассерштейна}$$

③ Метрика Вассерштейна ?

(μ, ν - меры на S, $|x-y| = \sum_n |x^n - y^n|$)

$$W_1(\mu, \nu) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int_{S^2} |x-y| \, \gamma(dx, dy) \quad \text{где } \Gamma(\mu,\nu) = \{ \gamma : \int_S \gamma(dx, A) = \nu(A), \ \int_S \gamma(A, dy) = \mu(A) \}$$

- Двойственное представление:

$$W_1(\mu,\nu) = \sup \{ \int_S f(x) (\mu - \nu)(dx) \mid f \text{ - непр}, \ Lip(f) \le 1 \}$$

- Для дискретных мер ($\operatorname{supp} \mu = \{x_0\}$)

$$W_1(\mu, \nu) = \int_S |x - x_0| \, \nu(dx)$$

No. 1

Date 2023.05.01

④ Сходимость μ_t в W_1 (?)

$$W_1(\mu_{t+1}, \delta_{s_*}) = \int_S |s-s_*| \mu_{t+1}(ds) = \int_S |s-s_*| f_{t+1}(s)\, ds$$

$$= \int_S |s-s_*| \sum_n \frac{s^n f_t(s)}{\int_S u^n f_t(u)\, du} X^n_{t+1}\, ds \xrightarrow{?} 0 \text{ п.н.}$$

Не понятно, как это доказывать.

⑤ Сходимость взвешенной стратегии (?)

Определим $\bar{s}_t = \int_S s \mu_t(ds) \in S$

$\bar{s}_t$ - взвеш. стратегия всех агентов

Докажем $\bar{s}_t \to s_*$ в каком-то смысле

$$\bar{s}^i_{t+1} = \int_S s^i \sum_n \frac{s^n \mu_t(ds)}{\int_S u^n \mu_t(du)} X^n_{t+1} = \int_S s^i \sum_n \frac{s^n \mu_t(ds)}{\bar{s}^n_t} X^n_{t+1} = \sum_n \frac{X^n_{t+1}}{\bar{s}^n_t} \int_S s^i s^n \mu_t(ds) \xrightarrow{?} s^i_*$$