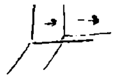
① Используя пр-е Лоренца для 4-скор-ти найти закон сложе-я 3-скор-й в релятив-й механике

$$u^\mu = (u^0, \vec{u}) \quad , \; u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \qquad ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} , \frac{\vec{v}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad ; \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{u'^\mu = \Lambda^\mu_\nu u^\nu} \iff \begin{cases} u'^0 = \gamma\left(u^0 - \frac{V}{c}u^1\right) \\ u'^1 = \gamma\left(u^1 - \frac{V}{c}u^0\right) \\ u'^2 = u^2 \\ u'^3 = u^3 \end{cases}$$

(частный случай, когда )

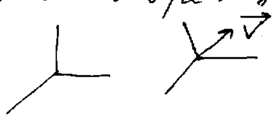
$$\vec{v}' = c\frac{\vec{u}'}{u'^0}$$

$$\Rightarrow v'_x = c\frac{u'^1}{u'^0} = c\frac{\gamma\left(u^1 - \frac{V}{c}u^0\right)}{\gamma\left(u^0 - \frac{V}{c}u^1\right)} = c\frac{u^1 - \frac{V}{c}u^0}{u^0 - \frac{V}{c}u^1} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

$$v'_y = c\frac{u'^2}{u'^0} = c\frac{u^2}{\gamma\left(u^0 - \frac{V}{c}u^1\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\; c\frac{u^2}{u_0}}{1 - \frac{V}{c}\frac{u^1}{u_0}} = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,v_y}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$$

$$v'_z = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,v_z}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$$

Пр-я Лоренца в общем случае:



$$\begin{cases} t' = \Gamma\left(t - \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{c^2}\right) \\ \vec{r}\,' = \Gamma(\vec{r} - \vec{V}t) + (\Gamma - 1)\left[(\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{n} - \vec{r}\right] \end{cases},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'}$$

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\cdot\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} = \left(\Gamma\left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V}\right) + \right.$$

$$\left. + (\Gamma - 1)\left[\left(\vec{n}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{n} - \frac{d\vec{r}}{dt}\right]\right)\cdot\left(\Gamma\left(1 - \frac{\vec{V}}{c^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\vec{v}-\vec{V}) + (\Gamma-1)\left[(\vec{n}\cdot\vec{v})\vec{n}-\vec{v}\right]}{\Gamma\left(1-\frac{\vec{V}}{c^2}\cdot\vec{v}\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{V}+\vec{v}\,' + \left(1-\frac{1}{\Gamma}\right)\left[(\vec{n}\cdot\vec{v}\,')\vec{n}-\vec{v}\,'\right]}{1+\frac{\vec{V}\cdot\vec{v}\,'}{c^2}}$$

↑ закон сложения скоростей.

(2) Показать, что 4-ускорение — пространственно-подобный 4-вектор.

т.е. $w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ надо пок-ть, что

$w\cdot w = w^\mu \cdot w_\mu < 0$

$w\cdot w = (w_0)^2 - \vec{w}^{\,2}$

Известно, что $u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow u^\mu \frac{du_\mu}{ds} = 0$

$\Rightarrow w^\mu \perp u^\mu \Rightarrow 0 = (w^0 u^0) - (\vec{w}\cdot\vec{u})$, т.е.

$(w^0\cdot u^0) = (\vec{w}\cdot\vec{u})$.

Выберем такую сист. отсчёта, в кот-й $\vec{v}=0 \Rightarrow u^\mu = (1,0)$

$\Rightarrow \{ w^0\cdot 1 = \vec{w}\cdot\vec{0}$

$\Rightarrow w^0 = 0$

$\Rightarrow w\cdot w = -\vec{w}^{\,2} < 0$

(3) Найти решение ур-я Гамильтона-Якоби для свободной релятив-й частицы.

$\vec{r} = (x, y, z)$

Для релятив. частицы $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{c^2}}$

$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}$

$$H = p\cdot\dot q - L \qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}}, \quad \dot q = \dot{\vec r}$$

$$H = \dot x p_x + \dot y p_y + \dot z p_z - L; \quad p_x = \frac{m\dot x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$H = \frac{m\dot x^2 + m\dot y^2 + m\dot z^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}; \quad \Rightarrow v^2\left(m^2 + \frac{p^2}{c^2}\right) = p^2$$

$$v^2 = \frac{c^2p^2}{m^2c^2+p^2}$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2c^2+p^2}}} = \frac{mc^2\sqrt{m^2c^2+p^2}}{\sqrt{m^2c^2}} = c\sqrt{m^2c^2+p^2}$$

$\vec p = \vec\nabla S$ $\qquad \frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m^2c^2 + (\vec\nabla S)^2} = 0$ - ур-е Г-Я

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = m^2c^2$$

будем искать реш-е раздел-ых переменных

$$S = T(t) + f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 - \left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 - \left(\frac{df_2}{dy}\right)^2 - \left(\frac{df_3}{dz}\right)^2 = m^2c^2$$

все произв-е - константы

$$\frac{dT}{dt} = -\mathcal{E} \qquad \frac{df_1}{dx} = \alpha_1 \quad \frac{df_2}{dy} = \alpha_2 \quad \frac{df_3}{dz} = \alpha_3$$

$$\Rightarrow S = -\mathcal{E}t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$

Связь на константы:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = m^2c^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = H \qquad \frac{\partial S}{\partial x} = p_x \Rightarrow \alpha_1 = p_x \ldots$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = c\sqrt{\vec\alpha^2 + m^2c^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x - t\cdot\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_1} = x - \frac{tc\alpha_1}{\sqrt{\vec\alpha^2 + m^2c^2}} = x - \frac{tc^2\alpha_1}{\mathcal{E}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \beta_1 + \frac{c^2}{\varepsilon}\alpha_1 t$$

аналог. $y = \beta_2 + \frac{c^2}{\varepsilon}\alpha_2 t$

$$z = \beta_3 + \frac{c^2}{\varepsilon}\alpha_3 t$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{\beta} + \frac{c^2}{\varepsilon}\vec{\alpha} t \quad ; \quad \vec{p} = \vec{\alpha}.$$

(5) Методом Гамильтона-Якоби найти закон движе-я релятив. частицы в постоянном однородном магнитном поле.

Для заряжен. частицы
$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} \quad , \text{где}$$

$$\Phi = \Phi(t, \vec{r})$$
$$\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{r})$$

$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi$ — напряже-ть электрич поля

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ — напряже-ть магнитн. поля.

Постоянное однор-е магнитн. поле означает, что $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Расс., например, $\Phi = 0$, $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, $\vec{A} = xB\bar{e}_y$.

$$\left(\vec{B} = B\bar{e}_z = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & xB & 0 \end{vmatrix} = \bar{e}_x\left(0 - \frac{\partial}{\partial z}xB\right) + \bar{e}_y\left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}0\right) + \bar{e}_z\left(-\frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial x}xB\right) = B\bar{e}_z \right)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

$$H = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} - L = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}}} + \cancel{\frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + e\Phi - \cancel{\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}} =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}} + e\Phi \quad ; \quad \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{m^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \; ; \; v^2 = \frac{c^2\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{m^2c^2 + \left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}$$

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\Phi$$
$$\vec{p} = \vec{\nabla}S$$

$$y = y_0 \pm R\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = z \pm \int \frac{-\alpha_3\, dx}{\sqrt{p_\perp^2 - \left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)^2}} = z \mp \alpha_3 \int \frac{dx}{\sqrt{p_\perp^2 - \left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)^2}}$$

$$= z \mp \alpha_3 \int \frac{dx}{\frac{eB}{c}\sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}} = z \mp \frac{c\alpha_3}{eB}\arccos\frac{x-x_0}{R} =$$

но $\arccos\frac{x-x_0}{R} = \omega t+\varphi$

$$= z \mp \frac{c\alpha_3}{eB}(\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow z = \beta_3 \pm \frac{c\alpha_3}{eB}(\omega t+\varphi)$$

$\Rightarrow$ винтовое движение

(4) Методом Гам.-Якоби найти закон движ-я релятив. заряж. частицы в постоян. однор. электрическом поле.

В этом случае $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi = E\cdot \vec{e}_z$

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = 0$

Возьмём, напр., $\vec{A} = 0$, $\Phi = -Ez$.

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - eEz\right)^2 - (\vec{\nabla} S)^2 - m^2c^2 = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - eEz\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - m^2c^2 = 0$$

$$S = -\varepsilon t + \alpha_1 x + \alpha_2 y + f(z)$$

$$\frac{1}{c^2}(\varepsilon + eEz)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \left(\frac{df}{dz}\right)^2 - m^2c^2 = 0$$

$$f'(z) = \pm\sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon + eEz)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - m^2c^2}$$

$$S = -\varepsilon t + \alpha_1 x + \alpha_2 y \pm \int\sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon + eEz)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - m^2c^2}\, dz$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x \mp \alpha_1 \int \frac{dz}{f'(z)}; \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = y \mp \alpha_2 \int \frac{dz}{f'(z)}$$

(продолжение 5)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\varphi = 0 \quad \text{или;}$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - e\varphi\right)^2 - \left(\vec{\nabla} S - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m^2c^2 \quad (*) \text{ - ур-е Г-Я}$$

В нашем случае ур-е Г-Я:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{e}{c}Bx\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2$$

$$\Rightarrow \quad S = -\mathcal{E}t + \alpha_2 y + \alpha_3 z + f(x)$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \left(\frac{df}{dx}\right)^2 - \left(\alpha_2 - \frac{eB}{c}x\right)^2 - \alpha_3^2 - m^2c^2 = 0$$

$$df(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \left(\alpha_2 - \frac{eB}{c}x\right)^2 - \alpha_3^2 - m^2c^2}\, dx$$

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \alpha_3 \qquad \mathcal{E}^2 = m^2c^4 + \bar{p}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \alpha_3^2 - m^2c^2 = p_\perp^2 \text{ - поперечная комп-та импульса}$$

$$S = -\mathcal{E}t + \alpha_2 y + \alpha_3 z \pm \int dx \sqrt{p_\perp^2 - \left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = -t \pm \int \frac{dx\left(\frac{2\mathcal{E}}{c^2}\right)}{2\sqrt{p_\perp^2 - \left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)^2}} = -t \pm \frac{\mathcal{E}}{c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{p_\perp^2 - \left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)^2}} =$$

$$\frac{\mathcal{E}}{ceB} = \frac{1}{\omega}; \; R = \frac{cp_\perp}{eB}; \quad x_0 = \frac{c\alpha_2}{eB}$$

$$= -t \pm \frac{1}{\omega}\int \frac{dx}{\sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}} \underset{\frac{x-x_0}{R} = u}{=} -t \pm \frac{1}{\omega}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= -t \pm \frac{1}{\omega}\arccos u \quad \Rightarrow \quad \arccos u = \pm\omega(t+\beta_1)$$

$$\frac{x-x_0}{R} = \cos\omega(t+\beta_1)$$

$$x = x_0 + R\cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \omega\beta_1$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = y \pm \int \frac{dx\left(+2\left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)\right)}{2\sqrt{p_\perp^2 - \left(\frac{eB}{c}x - \alpha_2\right)^2}} \underset{x - x_0 = u}{=} y \pm \int \frac{u\,du}{\sqrt{R^2 - u^2}} = y \pm \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}$$

$$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2, \quad y_0 = \beta_2$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = -t \pm \int \frac{\frac{1}{c^2}(\mathcal{E}+eEz)\,dz}{f'(z)} = -t \pm \frac{1}{c^2}\int \frac{\mathcal{E}+eEz}{f'(z)}dz =$$

$$= -t \pm \frac{1}{ceE}\sqrt{u^2-\mathcal{E}_\perp^2}$$, где $\mathcal{E}_\perp = ck$, $\frac{\mathcal{E}_\perp^2}{c^2} = \alpha_1^2+\alpha_2^2+m^2c^2$

$(u = \mathcal{E}+eEz)$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{c^2}(\mathcal{E}+eEz)^2-k^2}} = \frac{c}{eE}\int \frac{d\left(\frac{\mathcal{E}}{c}+\frac{e}{c}Ez\right)}{\sqrt{(\quad)^2-k^2}} \quad \frac{\mathcal{E}}{c}+\frac{e}{c}Ez = u$$

$$= \frac{c}{eE}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\mathcal{E}_\perp^2}} = \frac{c}{eE}\int \frac{\mathcal{E}_\perp \operatorname{sh}\psi}{\sqrt{\mathcal{E}_\perp^2\operatorname{ch}^2\psi-\mathcal{E}_\perp^2}}d\psi = \frac{c}{eE}\int \frac{\mathcal{E}_\perp \operatorname{sh}\psi}{\mathcal{E}_\perp \operatorname{sh}\psi}d\psi =$$

$$= \frac{c}{eE}\psi = \frac{c}{eE}\operatorname{arcch}\frac{u}{\mathcal{E}_\perp}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = +x \mp \alpha_1 \frac{c}{eE}\operatorname{arcch}\frac{u}{\mathcal{E}_\perp}$$

$$\beta_2 = y \mp \alpha_2 \frac{c}{eE}\operatorname{arcch}\frac{u}{\mathcal{E}_\perp}$$

$$(t+\beta_3)^2 = \frac{1}{(cEe)^2}(u^2-\mathcal{E}_\perp^2)$$

$$u^2 = (ceE(t+\beta_3))^2+\mathcal{E}_\perp^2$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{eE}\left(\pm\sqrt{(ceE(t+\beta_3))^2+\mathcal{E}_\perp^2}-\mathcal{E}\right)$$

Если $eE>0$; на бескон-ти частица очень быстрая

$$\Rightarrow \quad z \approx \frac{1}{eE}\left(\mathcal{E}_\perp\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{ceE(t+\beta_3)}{\mathcal{E}_\perp}\right)^2\right)-\mathcal{E}\right) =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_\perp-\mathcal{E}}{eE}+\frac{1}{2}\frac{c^2eE(t+\beta_3)^2}{\mathcal{E}_\perp}$$

$$\mathcal{E}_\perp \approx mc^2 \Rightarrow z \approx \frac{\mathcal{E}_\perp-\mathcal{E}}{eE} + \frac{eE(t+\beta_3)^2}{m} = z_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$

где $v_0 = a\beta_3$, $z_0 = \frac{\mathcal{E}_\perp-\mathcal{E}}{eE}+\frac{1}{2}a\beta_3$; $a = \frac{c^2eE}{\mathcal{E}_\perp}$

⑥ Методом Гамильтона-Якоби найти закон движ-я релятив. заряж. частицы в кулоновом поле.

$\vec{E} = \frac{e_1}{r^3}\vec{r}$ - (закон Кулона)

$\overset{\parallel}{-\nabla\Phi} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{e_1}{r}, \quad \vec{A} = 0.$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} - e\Phi$$

Выберем полярную сист. к-т:

$x = r\cos\varphi \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$

$y = r\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)} - \frac{ee_1}{r} = -mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)} - \frac{\alpha}{r}$$

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L$$

$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}$; $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}} = L_z \equiv \ell$ - инт-л (т.к. нет завис-ти от φ)

$p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} = \frac{m^2(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}{1-\frac{(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}{c^2}} = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$; $\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m^2v^2$

$$v^2\left(m^2+\frac{1}{c^2}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)\right) = p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}$$

$v^2 = \frac{c^2\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)}{m^2c^2+p_r^2+p_\varphi^2}$ $\qquad 1-\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}}{m^2c^2+p_r^2+p_\varphi^2} = \frac{m^2c^2}{m^2c^2+p_r^2+p_\varphi^2}$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\alpha}{r} = \frac{mc^2}{mc}\sqrt{m^2c^2+p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}} + \frac{\alpha}{r}$$

Ур-е Г-Я: $\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m^2c^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2} + \frac{\alpha}{r} = 0.$

или: $\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\alpha}{r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 = m^2c^2$

$$S = -\varepsilon t + \ell\varphi + f(r)$$

$$\frac{1}{c^2}\left(-\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-\left(f'(r)\right)^2-\frac{\ell^2}{r^2}=m^2c^2$$

$$S=-\varepsilon t+\ell\varphi\pm\int dr\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-\frac{\ell^2}{r^2}-m^2c^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ell}=\varphi_0 \qquad \frac{\partial S}{\partial \ell}=\varphi\pm\int\frac{dr\left(-\frac{\ell}{r^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-\frac{\ell^2}{r^2}-m^2c^2}}$$

$$\varphi-\varphi_0=\pm\ell\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(-\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-\frac{\ell^2}{r^2}-m^2c^2}}$$

$$\frac{1}{r}=u$$
$$du=-\frac{1}{r^2}dr \quad ; \quad \varphi-\varphi_0=\mp\int\frac{du}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{\ell^2c^2}(-\varepsilon+\alpha u)^2-u^2-\frac{m^2c^2}{\ell^2}}_{F(u)}}}$$

$$F(u)=u^2\left(\frac{\alpha^2}{\ell^2c^2}-1\right)-\underbrace{\frac{2\varepsilon\alpha}{\ell^2c^2}}_{b}u+\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\ell^2c^2}-\frac{m^2c^2}{\ell^2}}_{a}$$

1. $\ell>\frac{|\alpha|}{c}=\ell_c \quad ; \quad k^2=1-\left(\frac{\ell_c}{\ell}\right)^2>0$

$$F(u)=a-2bu-k^2u^2$$

$$\varphi-\varphi_0=\mp\int\frac{du}{\sqrt{-k^2\left(u^2+\frac{2b}{k^2}u+\left(\frac{b}{k^2}\right)^2\right)+\left(\frac{b}{k}\right)^2+a}}\ \overset{x=u+\frac{b}{k^2}}{=\!=\!=}\ \mp\int\frac{dx}{\sqrt{-k^2x^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2+a}}$$

$$\mp k(\varphi-\varphi_0)=\int\frac{dx}{\sqrt{\underbrace{\frac{a}{k^2}+\left(\frac{b}{k^2}\right)^2}_{A^2}-x^2}}$$

$$\mp k(\varphi-\varphi_0)=\arccos\frac{x}{A} \qquad \varphi_0=0;$$

$$\frac{1}{r}+\frac{b}{k^2}=A\cos k\varphi \quad , \quad r=\frac{1}{A\cos k\varphi-\frac{b}{k^2}}=\frac{R}{B\cos k\varphi-\operatorname{sign}\alpha},$$

$$R=\frac{k^2}{|b|} \quad ; \quad B=\frac{k^2A}{|b|}$$

$\alpha<0 \Rightarrow r=\dfrac{R}{1+B\cos k\varphi}$ ← розеточная траект-я

(т.к. есть $k\varphi$, а если бы $k=1$, то эллипс)

2. $\ell < \frac{|\alpha|}{c} = \ell_c \Rightarrow \varkappa^2 = -1 + \left(\frac{\ell_c}{\ell}\right)^2 > 0$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{du}{\sqrt{a - 2bu + \varkappa^2 u^2}}$$

аналог, получаем $r = \frac{\operatorname{sign}\alpha \cdot R}{1 - B\operatorname{ch}\varkappa\varphi}$,

$B = \sqrt{a - \left(\frac{b}{\varkappa}\right)^2}$ $\alpha < 0 \Rightarrow r = \frac{R}{-1 + B\operatorname{ch}\varkappa\varphi}$

(эт. случай падения точки на центр $(\varphi \to 0 \Rightarrow r \to 0)$)

3. $\ell = \frac{|\alpha|}{c} = \ell_c \Rightarrow F(u) = a - 2bu$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int \frac{du}{\sqrt{a - 2bu}} = \pm\left(-\frac{1}{2b}\right) \cdot 2\sqrt{a - 2bu} = \mp \frac{1}{b}\sqrt{a - 2b}$$

$$b^2(\varphi)^2 = a - 2bu$$

$$u = \frac{a - b^2\varphi^2}{2b}$$

$$r = \frac{2b}{a - b^2\varphi^2} = \frac{\frac{2b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a}\varphi^2} = \frac{\operatorname{sign}\alpha \cdot R_1}{1 - k_1\varphi^2}, \text{ где}$$

$$k_1 = \frac{b^2}{a}; \quad R_1 = \frac{2|b|}{a}$$

(7) Найти явный вид генераторов гр. Лоренца

$\Lambda(\omega) = e^{\sum_{i=1}^{6} \omega^i X_i}$, $X_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega^i}\Big|_{\omega = 0}$ — генераторы гр. Лоренца

найдем их явный вид.

$\Lambda \in L$ - гр. Лор. $\Leftrightarrow \Lambda^T g \Lambda = g$ (следует из опр-я)

$\Lambda = I + \omega \cdot X + \underline{O}(\omega^2)$, $\omega \cdot X = \omega^a X_a$, $a = \overline{1,6}$

$(I + \omega X)^T g (I + \omega X) = g$

учитываем только лин. члены по ω:

$$(g + (\omega X)^T g)(I + \omega X) = g$$

$$g + \omega(gX + X^T g) = g$$

$$\Rightarrow \omega \cdot (gX + X^T g) = 0 \Leftrightarrow \omega^a (g X_a + X_a^T g) = 0$$

$\Leftrightarrow$ т.к. ω^a произв. $\quad g X_a + X_a^T g = 0$ $\quad \boxed{X_a^T g = -g X_a}$

В координ. записи:

$$(X_a^T)_\mu{}^\nu\, g_{\nu\lambda} = -g_{\mu\alpha}(X_a)^\alpha{}_\lambda$$

$$(X^T_a)_{\mu\lambda} = -(X_a)_{\mu\lambda}$$ – м-ца X_a кососимм-на

Сопоставим номер. $a \longrightarrow (\alpha\beta)$

:стр. $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ $\qquad X_{\alpha\beta} = -X_{\beta\alpha}$

$$\Rightarrow (X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(X_{\beta\alpha})_{\mu\nu} = -(X_{\alpha\beta})_{\nu\mu}$$

Ищем $(X_{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ в виде $(X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = C_1 g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + C_2 g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + C_3 g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}$

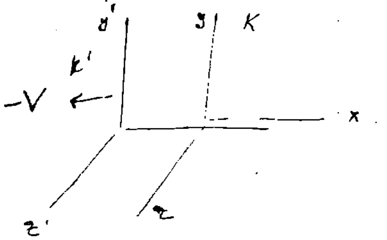
$$(X^T_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(X)_{\mu\nu} \qquad (g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu})^T = -$$

$C_1 = 0$ (т.к. $g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$ против. усл-ю антисимм-ти).

$C_2 = -C_3$ (усл-е антисимм-ти)

$$\Rightarrow (X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = C_2(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) = C_2(\delta^\mu_\alpha g_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta g_{\alpha\nu})$$

Найдем C_2. Для этого рассм. конкр-е преобр-е,



$$\begin{cases} ct' = \dfrac{ct + \frac{V}{c}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ x' = \dfrac{x + Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$\frac{V}{c} = \operatorname{th}\psi$ ← быстрота

Тогда
$$\begin{cases} x'^0 = x^0\operatorname{ch}\psi + x^1\operatorname{sh}\psi \\ x'^1 = x^0\operatorname{sh}\psi + x^1\operatorname{ch}\psi \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}$$

или:
$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$X_{10} = \frac{\partial \Lambda^{(10)}}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ задаёт вращ-е в пл-ти (10)

$(X_{10})^\mu{}_\nu$ – сим-на (но если спустить индекс, то кососим-на)

$(X_{10})^0{}_1 = 1$; подставим в (*):

$$1 = C_2(\delta^0_1 g_{01} - \delta^0_0 g_{11}) = C_2\cdot(-g_{11}) = C_2\cdot 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(X_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\alpha g_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta g_{\alpha\nu}}$$

(8) По теор. Нётер найти энергию и импульс компл. скал. поля.

$$J^\mu_i = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)}\frac{\bar\delta u^a}{\delta\omega^i} - \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^i}$$

Рассм. пр-е: $x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu$ – пост. в-р $\Rightarrow u'^a(x') = u^a(x)$

$x'^\mu = x^\mu + \delta^\mu_\nu\omega^\nu$ $\Rightarrow \delta u^a = 0$

$$\Rightarrow \bar\delta u^a = -(\partial_\mu u^a)\delta x^\mu$$

$$\Rightarrow J^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu u^a)}\partial_\lambda u^a \underbrace{\frac{\delta x^\lambda}{\delta\omega^\nu}}_{\delta^\lambda_\nu} - \mathcal L\underbrace{\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^\nu}}_{\delta^\mu_\nu}$$

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu u^a)}\partial_\nu u^a - \delta^\mu_\nu\mathcal L = T^\mu{}_\nu$$ – тензор энергии-имп.

(в этом сл-е $J^\mu_i = T^\mu{}_\nu$)

По теор. Нётер $\partial_\mu J^\mu_\nu = 0$

$P^\nu = \int d^3x\, T^{0\nu}$ – 4-х мерный импульс

P^0 – энергия ; P^ν, $\nu=\overline{1,3}$ – импульс

Для компл. скал. поля

$$\mathcal L = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial^\nu\varphi + \frac{\partial\mathcal L}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\partial^\nu\varphi^* - g^{\mu\nu}\mathcal L = (\partial^\mu\varphi^*)(\partial^\nu\varphi) + (\partial^\mu\varphi)(\partial^\nu\varphi^*) - g^{\mu\nu}\mathcal L$$

$T^{00} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + m^2\varphi^*\varphi + (\vec\nabla\varphi^*)(\vec\nabla\varphi)$ – плотность энергии

$P^0 = \int d^3x\, T^{00}$ – энергия поля

2,3 $T^{0k} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\partial^k\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\partial^k\varphi^*$; $P^k = \int d^3x\, T^{0k}$ – импульс

$$\partial^k = \frac{\partial}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\vec{P} = -\int d^3x \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi^* \right).$$

(9) По теор. Нётер найти момент колич. скал. поля

$$J^\mu_{\ i} = T^\mu_{\ \lambda} \frac{\delta x^\lambda}{\delta \omega^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \frac{\delta u^a}{\delta \omega^i} \quad \text{где } T^\mu_{\ \lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \partial_\lambda u^a - \delta^\mu_\lambda \mathcal{L}$$

$i \to (\alpha\beta)$

$$J^\mu_{\alpha\beta} = -J^\mu_{\beta\alpha}$$

По теор. Нётер $\frac{d}{dt} J_{\alpha\beta} = 0$.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu = [\delta^\mu_\nu + \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\alpha\beta} (X_{\alpha\beta})^\mu_{\ \nu}] x^\nu$$

$$\Rightarrow \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^{\alpha\beta}} = (X_{\alpha\beta})^\mu_{\ \nu} x^\nu = \delta^\mu_\alpha x_\beta - \delta^\mu_\beta x_\alpha$$

$$J^\mu_{\alpha\beta} = \underbrace{T^\mu_{\ \alpha} x_\beta - T^\mu_{\ \beta} x_\alpha}_{L^\mu_{\alpha\beta}} \underbrace{- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \cdot \frac{\delta u^a}{\delta \omega^{\alpha\beta}}}_{S^\mu_{\alpha\beta}}$$

орбит. мом-т — собств. момент

$$\partial_\mu J^\mu_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} - T_{\alpha\beta} + \partial_\mu S^\mu_{\alpha\beta}$$

$$\partial_\mu L^\mu_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} - T_{\alpha\beta}$$

$J_{\alpha\beta} = -\int d^3x\, J^0_{\alpha\beta}$ — инт-л движ-я. $(J_{ke} = -J_{ek})$

Сопоставим антисимм-му тензору в 3-м-м пр-ве вектор.

$$\vec{J} = (J_n) = \left(\tfrac{1}{2} \varepsilon_{nke} J_{ke}\right)$$ — 3-мерный в-р момента

$$J_n = -\tfrac{1}{2} \varepsilon_{nke} \int d^3x\, J^0_{ke} = L_n + S_n$$

$$L^\mu_{\alpha\beta} = T^\mu_{\ \alpha} x_\beta - T^\mu_{\ \beta} x_\alpha$$

$$L_n = -\tfrac{1}{2} \int d^3x\, \varepsilon_{nke} (T^0_{\ k} x_e - T^0_{\ e} x_k) = \int d^3x\, \varepsilon_{nke}\, x^k T^{0e}$$

$$\vec{L} = \int d^3x\, \vec{r} \times \vec{P}$$

$(T^{0e} = p^e$ — пл-ть имп.)

Для всякого скалярн. поля $\vec{S} \equiv 0$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi$$

$$(T^{0l}) = \vec{P} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\nabla\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\nabla\varphi^*$$

$$\vec{L} = \int d^3x\, \vec{r}\times\vec{p}$$

(10) По теор. Нётер найти заряд компл. скал. поля, связан-й с инв-ю лагранжиана отн. калибр-х преобр-й.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi.$$

Калибр-е пр-е: $x' = x \quad \varphi' = e^{i\alpha}\varphi, \; \varphi^{*\prime} = e^{-i\alpha}\varphi^*$

$$\mathcal{L}' = (\partial_{\mu'} e^{-i\alpha}\varphi^{*\prime})(\partial^{\mu'} e^{i\alpha}\varphi) - m^2 e^{-i\alpha}\varphi^* e^{i\alpha}\varphi = \mathcal{L}$$

(т.е. есть инвар-ть действия) =>

$$J^\mu_i = T^\mu{}_\lambda \frac{\delta x^\lambda}{\delta\omega^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)}\frac{\delta u^a}{\delta\omega^i}$$ — инт-лы движе-я

В нашем сл-е $\omega^i = \alpha$; $\frac{\delta x^\lambda}{\delta\alpha} = 0$

$$\Rightarrow J^\mu_i = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)}\frac{\delta u^a}{\delta\omega^i}, \quad \frac{\delta u^a}{\delta\omega^i} = \frac{\partial u'^a}{\partial\omega^i}\Big|_{\omega^i=0}$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{i\alpha}\varphi)\Big|_{\alpha=0} = i\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi^*$$

$$J^\mu = -i\varphi\cdot\partial^\mu\varphi^* + i\varphi^*\cdot\partial^\mu\varphi = i[\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\cdot\partial^\mu\varphi^*]$$ — ток Нётер

(индекс i опустили, т.к. группа пр-й одно парам-я)

$$Q = \int d^3x\, J^0 = i\int d^3x\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\cdot\varphi\right)$$ — заряд

по теор. Нётер $\frac{dQ}{dt} = 0$.

(11) Записать симм. ур-й Гам-на для вещ. скал. поля и пок-ть её эквивалентность ур-ю Лагранжа

В теории поля:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u^a, \partial_\mu u^a, x) \quad ; \quad \frac{\partial u^a}{\partial t} = \dot{u}^a$$

$$(\dot{u}^a, \bar{\nabla} u^a) \qquad (t, \bar{r})$$

канонич. импульс: $\pi_a(t,\bar{r}) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^a(t,\bar{r})}$

$$\dot{u}^a = \dot{u}^a(u^b, \pi_b, \bar{\nabla} u^b, t, \bar{r})$$

$$\mathcal{H} = \sum_a \pi_a \dot{u}^a - \mathcal{L}\Big|_{\dot{u}^a(u^b, \pi_b, \bar{\nabla} u^b, t, \bar{r})}$$

$$H[u^a, \pi_a] = \int d^3x\, \mathcal{H}$$

ф-я Гам-на

Ур-я Гам-на в теории поля:

$$\begin{cases} \dot{u}^a = \dfrac{\delta H}{\delta \pi_a} \equiv \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} - \bar{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\bar{\nabla} \pi_a)} \right) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \quad (\text{т.к. } \mathcal{H} \text{ не зав-т от } \bar{\nabla}\pi_a) \\ \dot{\pi}_a = -\dfrac{\delta H}{\delta u^a} \equiv -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^a} + \bar{\nabla} \left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\bar{\nabla} u^a)} \right) \end{cases}$$

Для скалярн. вещ. поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 = \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 - (\bar{\nabla} \varphi)^2 \right) - \frac{m^2}{2} \varphi^2$$

$(\Box + m^2)\varphi = 0$ — ур-е движ-я.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\delta H}{\delta \pi} \\ \dot{\pi} = -\dfrac{\delta H}{\delta \varphi} \end{cases} \qquad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = \pi \\ \dot{\pi} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \bar{\nabla} \left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = -m^2 \varphi + \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \varphi) = -m^2 \varphi + \bar{\nabla}^2 \varphi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\varphi} - \bar{\nabla}^2 \varphi + m^2 \varphi = 0$$

$$\Box \varphi + m^2 \varphi = 0$$

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 .$$

$\Rightarrow$ система ур-й Гамильтона экв-на ур-ю Лагранжа

(12) Вывести преобраз-я Лоренца для напряжённостей электромагнит. поля.

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$; $\vec{E} = (F^{k0})$ – напр-ть электр. поля

$\vec{B} = (-\frac{1}{2}\varepsilon_{ken} F^{en})$ – напр-ть магн. поля.

или: $F_{en} = -\varepsilon_{enm} B_m$

$\bar{B} \xrightarrow{\Lambda} \bar{B}'$, $\bar{E} \to \bar{E}'$

$A^\mu = (\underset{A^0}{\underset{\parallel}{\Phi}}, \bar{A})$; $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$

$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$

Рассм., ~~когда~~ пр-е Лоренца в общем виде

$F'^{k0} = \Lambda^k{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^k{}_n \Lambda^0{}_0 F^{n0} + \Lambda^k{}_0 \Lambda^0{}_n F^{0n} + \Lambda^k{}_n \Lambda^0{}_m F^{nm}$

($\alpha\beta = 0n$, $n0$, $0n = -0n$, $\alpha\beta = nm$).

$E'_k = (\Lambda^k{}_m \Lambda^0{}_0 - \Lambda^k{}_0 \Lambda^0{}_n) E_n - \Lambda^k{}_n \Lambda^0{}_m \varepsilon_{nme} B_e$

найдем явн. вид $\Lambda^\alpha{}_\beta$

$\bar{r}' = \Gamma(\bar{r} - \bar{V}t) + (\Gamma - 1)[(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n} - \bar{r}]$

$t' = \Gamma(t - \bar{V}\cdot\bar{r})$

$x'^0 = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_n x^n = \Gamma x^0 - \Gamma V \cdot n^n x^n$

$x'^k = \Gamma(x^k - V n^k x^0) - (\Gamma - 1)[x^k - \sum_n n^n x^n \cdot n^k] = \Lambda^k{}_0 x^0 + \Lambda^k{}_n x^n$

$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 = \Gamma$; $\Lambda^0{}_n = -\Gamma V n^n$ $\Lambda^k{}_0 = -\Gamma V n^k$ $\Lambda^k{}_n = \delta^k_n + (\Gamma-1) n^n n^k$

$E'_k = \left[(\Gamma \delta^k_m + \Gamma(\Gamma-1) n^m n^k) + \Gamma V n^k \cdot \Gamma \cdot V n^m\right] E_m - \underbrace{(\delta^k_n + (\Gamma-1) n^n n^k)(-\Gamma V)}_{\Gamma V^n_m \varepsilon_{kme} B_e}$

$\cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{n^m \varepsilon_{nme}}} B_e =$

свёртка симм. тенз. с антисимм.

$\bar{E}' = \Gamma\vec{E} + \Gamma(\Gamma-1)(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} - \Gamma^2 V^2 (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} + \Gamma V \vec{n} \times \vec{B}$.

$(\Gamma(\Gamma-1) - \Gamma^2 V^2 = \Gamma^2(1 - V^2) - \Gamma = 1 - \Gamma)$

$$\begin{cases} \bar{E}' = \Gamma\vec{E} - (\Gamma-1)(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{n} + \Gamma\vec{V}\times\vec{B} \\ \vec{B}' = \Gamma\vec{B} - (\Gamma-1)(\vec{n}\cdot\vec{B})\vec{n} - \Gamma\vec{V}\times\vec{B} \end{cases}$$

Для $\vec{B}'$: ~~$(\vec{V} \to -\vec{V})$~~
$E \to B$, $B \to -E$

(13) Найти электромагн. поле неподвиж-ной заряжен. частицы

$$\begin{cases} \rho = e\,\delta(\vec r) \\ \vec j = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec B = 0 \\ \dfrac{\partial \bar E}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad \bar\nabla \cdot \bar E = \rho$$

$\bar E$ д. быть сферически симм-ч:

$$\bar E(\bar r) = E(r)\cdot \frac{\bar r}{r}, \quad r = |\bar r|.$$

интегр-м ур-е $\bar\nabla \cdot \bar E = \rho$

$$\oint_\Sigma \bar E \cdot \bar n \, d\Sigma = \int_V \rho \, d^3 x \quad Q$$

$$4\pi r^2 E(r) = \int e\,\delta^{(3)}(\vec r) = e$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{e}{4\pi r^2} \Rightarrow \bar E(\bar r) = \frac{e \bar r}{4\pi r^3}$$

Сист-ма ур-й Максв.:

$$\begin{cases} \bar\nabla \cdot \bar E = \rho \\ \bar\nabla \times \bar B = \frac{1}{c}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec E}{\partial t} \\ \bar\nabla \cdot \bar B = 0 \\ \bar\nabla \times \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar B}{\partial t} \end{cases}$$

(14) Найти электромагн. поле неподвижного равномерно заряженного шара.

$j^\mu = (\rho, \bar{j})$

$$\begin{cases} \bar\nabla \cdot \bar E = \rho \\ \bar\nabla \times \bar B = \bar j + \frac{\partial \bar E}{\partial t} \\ \bar\nabla \cdot \bar B = 0 \\ \bar\nabla \times \bar E = -\frac{\partial \bar B}{\partial t} \end{cases}$$

Рассм. $\rho = \rho(\bar r)$ $\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\partial \bar E}{\partial t} = 0,\ \bar B = 0$

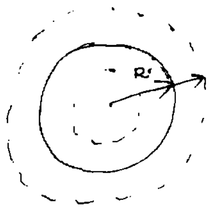
$\bar\nabla \cdot \bar E = \rho$

Пусть $\rho = \rho(r)$, $r = |\bar r|$

тогда $\bar E = E(r) \cdot \frac{\bar r}{r}$

инт-м $\bar\nabla \cdot \bar E = \rho$ по сфере:

$$\oint_\Sigma \bar E \cdot \bar n \, d\Sigma = \int \rho \, d^3x = Q \text{ — полный электр. заряд.}$$



$$4\pi r^2 E = q(r)$$

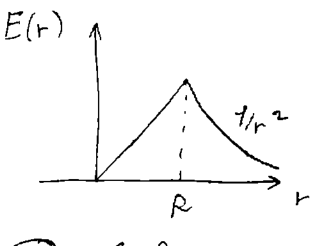
$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

1) $4\pi r^2 E(r) = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3$, $r \le R$

2) $4\pi r^2 E(r) = Q$, $r > R$

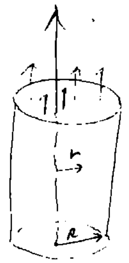
$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^3} r, & r \le R \\ \frac{Q}{4\pi r^2}, & r > R \end{cases}, \text{ т.е.}$$



(15) Найти магнитное поле бескон. прямого цилиндрич. пров-ка с пост. током.

$$\rho = 0,\ \frac{\partial \bar j}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar B}{\partial t} = 0 \\ \bar E = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar\nabla \cdot \bar B = 0 \\ \bar\nabla \times \bar B = \bar j \end{cases}$$



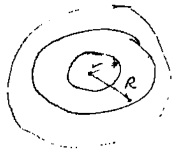
$\bar{j} = j(r)\,\bar{e}_z$

$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int (\bar{n}\cdot\bar{j})\,d\Sigma = J$ (*)

$J = j_0\cdot \pi R^2$

$j(r) = \begin{cases} j_0 = \frac{J}{\pi R^2}, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$

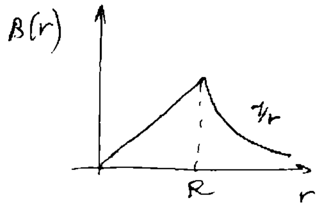
по части площади



из (*): $\begin{cases} 2\pi r\cdot B(r) = J\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^2, & r \le R \\ 2\pi r\, B(r) = J, & r > R \end{cases}$

по всей площади

$\Rightarrow\ B(r) = \begin{cases} \frac{J\cdot r}{2\pi R^2}, & r \le R \\ \frac{J}{(2\pi) r}, & r > R \end{cases}$



16. Найти электром. поле равном. движ-ся заряж. частицы исп-я преобраз-я Лоренца из сист. покоя частицы.

$k \xrightarrow{e}$ $\bar{E}, \bar{B}$ − ? $\qquad \bar{v} = const$

k', $\bar{V} = \bar{v}$ $\qquad$ в k' част. покоится $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{E}' = \dfrac{e\bar{r}'}{4\pi r'^3} \\ \bar{B}' = 0 \end{array}\right\}$ это знаем из з. 13

$\begin{cases} \bar{E} = \gamma(\bar{E}' - \bar{V}\times\bar{B}') - (\gamma-1)(\bar{n}\cdot\bar{E}')\bar{n} \\ \bar{B} = \gamma(\bar{B}' + \bar{V}\times\bar{E}') - (\gamma-1)(\bar{n}\cdot\bar{B}')\bar{n} \end{cases}$ − по задаче 12.

$\bar{v}\ |\times \begin{cases} \bar{E} = \gamma\bar{E}' - (\gamma-1)(\bar{n}\cdot\bar{E}')\bar{n} \\ \bar{B} = \gamma\,\bar{v}\times\bar{E}' \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\bar{v}\times\bar{E} = \bar{B} - 0$, т.к. $\bar{n} = \frac{\bar{v}}{v}$

т.е. $\begin{cases} \bar{E} = \gamma\bar{E}' - (\gamma-1)(\bar{n}\cdot\bar{E}')\bar{n} \\ \bar{B} = \bar{v}\times\bar{E} \end{cases}$

подставим явный вид $\bar{E}'$:

$\bar{E} = \frac{e}{4\pi r'^3}\left[\gamma\bar{r}' - (\gamma-1)(\bar{n}\cdot\bar{r}')\bar{n}\right]$

из общей теории: $\bar{r}' = \gamma(\bar{r} - \bar{V}t) + (\gamma-1)[(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n} - \bar{r}]$

$(\bar{n}\cdot\bar{r}') = \gamma(\bar{n}\cdot\bar{r} - vt)$

$$\bar{E} = \frac{e}{4\pi r'^3}\left[\gamma^2(\bar{r}-\bar{v}t) + \gamma(\gamma-1)\left[(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}-\bar{r}\right] - (\gamma-1)\gamma(\bar{n}\cdot\bar{r}-\bar{v}t)\bar{n}\right] =$$

$$= \frac{e}{4\pi r'^3}\left[\gamma^2(\bar{r}-\bar{v}t) - \gamma(\gamma-1)\bar{r} + \gamma(\gamma-1)\bar{v}t\,\bar{n}\right] = \frac{e}{4\pi r'^3}\left[\gamma\bar{r}-\gamma\bar{v}t\right] =$$

$$= \gamma\frac{e}{4\pi r'^3}\left[\bar{r}-\bar{v}t\right]$$

Выразим r'^3: $\quad r'^3 = (r'^2)^{3/2}$

$$r'^2 = \bar{r}'^2_\perp + \bar{r}'^2_\parallel = \underbrace{\bar{r}^2_\perp}_{\text{поперечная к-та не преобраз-ся}} + \gamma^2(\bar{r}_\parallel - \bar{v}t)^2$$

$$r'^2 = (\bar{r}-(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n})^2 + \gamma^2((\bar{n}\cdot\bar{r}) - \bar{v}t)^2 = r^2 + r_\parallel^2 - 2r_\parallel^2 + \gamma^2(r_\parallel - v\cdot t)^2$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{\gamma e(\bar{r}-\bar{v}t)}{4\pi\left[r^2 - r_\parallel^2 + \gamma^2(r_\parallel - vt)^2\right]^{3/2}}, \quad r_\parallel = (\bar{n}\cdot\bar{r})$$

(17) Найти электром. поле равном. движ-ся заряж. частицы, интегрируя ур-я Максв.

$$(*)\begin{cases}\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0\end{cases} \qquad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \qquad \begin{cases}\rho(t,r) = e\,\delta(\bar{r}-\bar{v}t) \\ \vec{j} = \rho\vec{v}\end{cases}$$

Ур-я Максв. (*) сводятся к $\begin{cases}\partial_\mu A^\mu = 0 \\ \Box A^\mu = j^\mu\end{cases}$

$$A^\mu = (\Phi, \bar{A}), \quad \left.\begin{aligned}\bar{B} &= \bar{\nabla}\times\bar{A} \\ \bar{E} &= -\bar{\nabla}\Phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}\Box\Phi &= \rho \\ \Box\vec{A} &= \rho\vec{v}\end{aligned}\right\}, \ \bar{v} = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$\bar{A} = \bar{v}\cdot\Phi$ (так и выбираем)

значит, получим: $\Box\Phi = \rho$

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times(\bar{v}\cdot\Phi) \underset{v-\text{пост}}{=} -(\bar{v}\times\bar{\nabla})\Phi = \bar{v}\times(-\bar{\nabla}\Phi)$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\Phi - \bar{v}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \bar{B} = \bar{v}\times\bar{E}$$

получаем: $\begin{cases}\bar{E} = -\bar{\nabla}\Phi - \bar{v}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} \\ \bar{B} = \bar{v}\times\bar{E}\end{cases}$

$\Rightarrow$ надо найти Φ из ур-я $\Box\Phi = \rho(t,\bar{r})$

Исп-м метод Фурье.

$$\Phi(t,\bar r) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-i\omega t + i\bar k\cdot\bar r}\,\tilde\Phi(\omega,\bar k)$$

$$\rho(t,\bar r) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-i\omega t + i\bar k\cdot\bar r}\,\tilde\rho(\omega,\bar k).$$

$\Box\Phi = \rho \Rightarrow$ (с учётом полноты сист. $e^{i(\,)}$)

$$(-\omega^2+\bar k^2)\tilde\Phi = \tilde\rho$$

$$\Rightarrow \Phi(t,\bar r) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-i\omega t + i\bar k\bar r}\,\frac{\tilde\rho(\omega,\bar k)}{\bar k^2-\omega^2}$$

$$\tilde\rho(\omega,\bar k) = \int dt\, d^3x\, e^{i\omega t - i\bar k\bar r}\,\rho(t,\bar r).$$

Учтём, что $\rho(t,\bar r) = e\,\delta(\bar r - \bar v t)$

$$\tilde\rho(\omega,\bar k) = e\int dt\, d^3x\, e^{i\omega t - i\bar k\bar r}\,\delta(\bar r-\bar v t) = e\int dt\, e^{i(\omega-\bar k\bar v)t} =$$
$$= 2\pi\cdot e\,\delta(\omega - \bar k\bar v)$$

$$\Rightarrow \Phi(t,\bar r) = e\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\bar k\bar v t + i\bar k\bar r}}{\bar k^2 - (\bar v\cdot\bar k)^2} = e\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\bar k(\bar r-\bar v t)}}{\bar k^2-(\bar v\cdot\bar k)^2}$$

$\bar k = \bar k_\perp + \bar k_\parallel$, $\quad \bar k_\parallel = \underbrace{(\bar n\cdot\bar k)}_{k_\parallel}\bar n$ $\Big\} \Rightarrow$; $\bar k^2 - v^2 k_\parallel^2 = k_\perp^2 + \gamma^{-2}k_\parallel^2$

$\gamma^{-2} = 1 - v^2$

$$\bar k\cdot(\bar r - \bar v t) = \bar k_\perp\cdot r_\perp + \bar k_\parallel\cdot\bar r_\parallel - v\,\bar k_\parallel t = \bar k_\perp\cdot\bar r_\perp + \bar k_\parallel(\bar r_\parallel - v$$

Замена пер-х: $\bar k'_\parallel = \gamma^{-1}\bar k_\parallel$, $\bar k'_\perp = \bar k_\perp$ $\Rightarrow$ знам-ль: $\bar k'^2$

$d^3k = \gamma\, d^3k'$

$$\Phi(t,\bar r) = \gamma e\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\bar k'\cdot\bar r'}}{\bar k'^2} = \delta(\,) \qquad \varphi' = \frac{e}{4\pi r'}$$

$$\Phi(t,\bar r) = \frac{\gamma e}{4\pi r'}, \quad r' = \gamma(r_\parallel - v t) + \bar r_\perp$$

Далее подставим в $\bar E = -\bar\nabla\Phi - \bar v\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ и получим ту же ф-лу, что и в пред-й задаче.

(18) Показать, что ур-я Максв. без источников имеют реш-е в виде плоских электромагн. волн.

$$\left.\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu}&=0\\ \partial_\mu \tilde F^{\mu\nu}&=0\end{aligned}\right\}\text{ - ур-е Максв. без источн-в.}$$

$$\begin{cases}\Box A^\mu = 0\\ \partial_\mu A^\mu = 0 \text{ — усл-е калибровки}\end{cases}$$

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \tilde{A}^\mu(k)$$

$$\Box A^\mu = 0 \iff -k^2 \tilde{A}^\mu(k) = 0$$

реш-е $\tilde{A}^\mu(k) = C^\mu(k)\cdot\delta(k^2)$

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} C^\mu(k)\delta(k^2)$$

$A^\mu(x)$ – вещ-о $\Rightarrow A^\mu(x) = \overset{*}{A}{}^\mu(x)$

$$\Rightarrow \int \ldots \overset{*}{C}{}^\mu(k) e^{ikx} = \int \ldots C^\mu(k) e^{-ikx}$$

$k \to -k \quad \Rightarrow \quad C^{*\mu}(k) = C^\mu(-k) \quad (*)$

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^4} dk_0\, C^\mu(k)\delta(k_0^2 - \vec{k}^2) \qquad \omega = |\vec{k}|$$

$$\delta(k_0^2 - \omega^2) = \frac{1}{2\omega}[\delta(k_0+\omega) + \delta(k_0-\omega)]$$

$$k\cdot x = (k_0 t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4\cdot 2\omega} e^{i\vec{k}\vec{r}} [\underbrace{C^\mu(-\omega,\vec{k}) e^{i\omega t}}_{\vec{k}\to-\vec{k}} + C^\mu(\omega,\vec{k}) e^{-i\omega t}]$$

используя $(*)$, перепишем, сделав в 1-м инт-ле замену

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4\cdot 2\omega} [\underbrace{C^\mu(\omega,\vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \overset{*}{C}{}^\mu(\omega,\vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{\text{вещ-е выраж-е}}]$$

$$\frac{C^\mu(\omega,\vec{k})}{2\pi\cdot\omega} = a^\mu(\vec{k})\, e^{-i\varphi(k)}$$

представ-е комп. ф-ции

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^\mu(\vec{k}) \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi(\vec{k}))$$

монохроматич. волны.

$$\begin{cases} \vec{E} = (F_{0k}) = -\vec{\nabla}\Phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases}$$

за счёт выбора калибровки м. добиться, чтобы $A^0 = \Phi = 0$.

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \iff \frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0.$$

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \quad \text{и} \quad \partial_\mu A'^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\Phi \end{cases} \Rightarrow \Box f = 0. \quad \text{– эта сист. разрешима}$$

$\Rightarrow$ т. очевидно, что $\Phi = 0$, $\bar\nabla \cdot \bar A = 0$.

В этой калибровке $\begin{cases} \bar E = -\dfrac{\partial A}{\partial t} \\ \bar B = \bar\nabla \times \bar A \end{cases}$

$$\bar A(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \bar a(\bar k) \cos(\omega t - \bar k \cdot \bar r + \varphi(\bar k))$$

$$\Rightarrow E = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \bar a(\bar k)\,\omega \cdot \sin(\omega t - \bar k \cdot \bar r + \varphi(\bar k))$$

$$\bar\nabla \times \vec a f(\bar r) = \bar\nabla f \times \vec a \qquad \bar\nabla \times (\ \ ) = (\bar k \times \bar a)\sin\theta$$

поэт.,
$$\bar B = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, (\bar k \times \bar a) \sin(\omega t - \bar k \cdot \bar r + \varphi(\bar k))$$

$$\bar E(t, \bar r) = \vec E_0 \cdot \sin(\omega t - \bar k \cdot \bar r) \quad ; \quad \bar k = \frac{\omega}{c}\vec n$$

$$\Rightarrow \bar B(t, \bar r) = \bar n \times \vec E$$

(19) Найти мощность излуч-я заряжен. релятив. частицы, движ-ся в пост. однор. электр. поле (20 - магнитном поле)

$$W = -\frac{e^2}{6\pi}\omega^2 \quad , \quad \omega^2 = \omega_\mu \omega^\mu$$

заряд движ-ся во внешнем поле описыв-ся ур-м: $m\omega^\mu = e F^{\mu\nu} u_\nu$,

$$\omega^\mu = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{e}{m} f^\mu$$

$$f^0 = F^{0k} u_k = F^{k0} u^k = E^k u^k = \gamma(\bar v \cdot \bar E)$$

$$f^k = F^{k0} u_0 + F^{kn} u_n = E_k \cdot \gamma + \gamma \cdot \varepsilon_{knl} v_n B_l$$

$$\vec f = \gamma(\vec E + \vec v \times \vec B)$$

$$W = \frac{e^4}{6\pi m^2}(\vec f^2 - f_0^2) \quad ; \quad W = \frac{e^4}{6\pi m^2}\gamma^2\left[(\bar E + \bar v \times \bar B)^2 - (\bar v \cdot \bar E)^2\right]$$

19): электрич. поле $\Leftrightarrow B = 0$.

$$W = \frac{e^4}{6\pi m^2}\gamma^2\left[\bar E^2 - (\bar v \cdot \bar E)^2\right]$$

если $v \parallel E$, то $W = \dfrac{e^4}{6\pi m^2}\bar E^2$

20) : магнит. поле $\Leftrightarrow \bar{E}=0$

$$\bar{W} = \frac{e^4\gamma^2}{6\pi m^2}(\bar{v}\times\bar{B})^2$$

если $v \perp B \Rightarrow$ $W = \dfrac{e^4\gamma^2}{6\pi m^2} v^2 t$