Выживающие стратегии в модели рынка с континуальным числом агентов

Нина Бадулина   Дмитрий Шатилович

Аннотация

Ключевые слова и фразы: Evolutionary finance, Dynamic games, Stochastic games, Evolutionary game theory, Games of survival

1. Введение

В данной работе рассматривается модель финансового рынка, введенная в статье [2]. На эту модель можно смотреть как на игру конечного числа игроков (далее - агенты), на каждом раунде которой агенты распределяют капитал среди конечного числа активов. В конце каждого раунда только один случайно выбранный актив производит выплату, которая разделяется между игроками соразмерно вложениям. Игроки распределяют капитал, исходя из истории игры и информации, полученной к началу раунда.

Основные вопросы, связанный с этой игрой, состоят в построении выживающей и доминирующей стратегий распределения капитала. Под выживающей имеется в виду стратегия, используя которую агент не разорится, то есть доля его капитала всегда будет строго отделена от нуля с вероятностью 1 на всем бесконечном горизонте времени вне зависимости от того, какие еще стратегии присутствуют на рынке. Доминирующей же называется стратегия, используя которую агент асимптотически заберет весь капитал себе.

В работе [2] приводится пример доминирующей стратегии, а в статье [1] построено обобщение описанной нами модели и получена выживающая стратегия для новой. Кроме того, доказана единственность выживающей стратегии при некоторых дополнительных предположениях.

Во всех работах в данном направлении предполагается, что в модели рынка присутствует конечное число агентов. Однако интересен случай, когда множество агентов бесконечно и его можно снабдить структурой измеримого пространства. Цель нашей работы состояла в обобщении результатов статьи [2] на такую модель. В главе 2 приведено полное описание модели из работы [2]. В главе 3 определение доминирующей стратегии соответствующим образом распространено на случай бесконечного пространства агентов, а также построена такая стратегия.

2. Модель рынка с конечным числом агентов

Рассмотрим игру M агентов, которые на каждом раунде распределяют капитал среди N различных активов, торгующихся в начале раунда. В конце раунда выплата будет произведена лишь одним случайно выбранным активом. Обозначим за W_t^m капитал m-го агента после t раундов игры. Стратегии агентов имеют вид $\lambda^m = (\lambda_{t,1}^m, \ldots, \lambda_{t,N}^m)$, где $\lambda_{t,n}^m$ обозначает долю капитала, которую m-й игрок вкладывает в n-й актив на раунде t, так что его вложение в этот актив на раунде $t \geq 1$ имеет вид $v_{t,n}^m = \lambda_{t,n}^m W_{t-1}^m$. Будем предполагать, что агенты вкладывают все свои деньги, следовательно, $\sum_{n=1}^N \lambda_{t,n}^m = 1$. Отрицательные вложения (“short sales”) запрещены, то есть $\lambda_{t,n}^m \geq 0$. Таким образом, стратегии агентов являются векторами λ_t^m в стандартном N-симплексе,

$$\lambda^n \in \Delta^N := \{a \in \mathbb{R}_+^N : a_1 + \ldots + a_N = 1\}.$$

На каждом раунде все поставленные деньги разделяются между агентами пропорционально их ставкам на выигравший актив. Обозначим через $\mu_{t,n} = \sum_{i=1}^N v_{t,n}^i$ общее вложение в n-й актив на раунде t. Тогда если актив $n \in \{1, \ldots N\}$ выиграл на этом раунде, то выплата агенту m равна

$$\pi_t^m = \frac{v_{t,n}^m}{\mu_{t,n}} = \frac{\lambda_{t,n}^m W_{t-1}^m}{\sum_{l=1}^M \lambda_{t,n}^l W_{t-1}^l}. \tag{1}$$

Поскольку агенты ставят все свои деньги, капитал агента на следующем раунде равен выплате, которую он получил, то есть $W_t^m = \pi_t^m$. Без ограничения общности мы предполагаем, что в начальный момент времени капитал каждого агента строго положителен ($W_0^m > 0$ для каждого m) и общий капитал агентов равен 1, то есть $\sum_{m=1}^M W_0^m = 1$.

Мы также предположим, что на каждом раунде ставка на всякий исход строго положительна, то есть $\mu_{t,n} > 0$ для каждого n. Нетрудно видеть, что последнее требование выполняется, если предположить, что есть хотя бы один агент, стратегия которого не содержит нулевых долей $\lambda_{t,n}^m$, то есть агент вкладывает в каждый актив какую-то часть капитала (тогда капитал этого агента всегда остается строго положительным). В частности, оптимальная стратегия, которая будет определена ниже, обладает этимм свойством.

Предположение выше позволяет сказать, что общий капитал агентов равен 1 в каждый момент времени, то есть $\sum_{m=1}^M W_t^m = 1$ для всякого t. Следовательно, вектор ставок $\mu_t = (\mu_{t,1}, \ldots, \mu_{t,N})$ принадлежит Δ^N, и его также можно интерпретировать как *весовую стратегию* всех агентов, то есть распределение игрового капитала на данном раунде по активам.

Чтобы определить стохастическую динамику игры, рассмотрим некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. На каждом раунде сопоставим N случайным исходам индикатор $X_{t,n}(\omega)$, где $X_{t,n} = 1$, если на раунде t произошел случайных исход n и $X_{t,n} = 0$ иначе.

Предполагается, что векторы $X_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,N})$ независимы и одинаково распределены (н.о.р).

Последовательность капиталов, в общем случае, зависит от $\omega \in \Omega$, и мы будем относиться к ней как к последовательности случайных величин $W_t^m(\omega)$, заиндексированных временем. Следовательно, ставки $v_{t,n}^m(\omega)$ и $\mu_{t,n}(\omega)$ также зависят от ω. Без ограничения общности будем предполагать, что начальные капиталы агентов W_0^m не случайны. Тогда динамика изменения капиталов описывается следующим стохастическим рекурсивным соотношением:

$$W_{t+1}^m = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_{t,n}^m W_t^m}{\sum_{l=1}^{M} \lambda_{t,n}^l W_t^l} X_{t+1,n}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Нет необходимости разделять агентов, которые используют одну и ту же стратегию, поэтому далее считаем, что все агенты используют различные стратегии.

Нас интересует асимптотическое поведение капиталов агентов W_t^m при $t \to \infty$. Следующее определение вводит понятие асимптотически оптимальной стратегии в оговоренной модели.

Определение 1. Стратегия $\lambda^* \in \Delta^N$ называется *асимптотически доминирующей*, если в любом профиле $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^M)$, где $\lambda^1 = \lambda^*$, выполнено

$$\lim_{t\to\infty} W_t^1 = 1$$

(и, следовательно, $\lim_{t\to\infty} W_t^m = 0$ для всех $m \geq 2$).

Следующая теорема дает возможность явно построить асимптотически доминирующую стратегию.

Теорема 1 ([2]). *Стратегия* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$, *где*

$$\lambda_n^* = \mathrm{E}\, X_n \quad n = 1, \dots, N, \tag{3}$$

является асимптотически доминирующей.

3. Модель с континуумом агентов

Основной результат данной работы состоит в том, чтобы обобщить теорему 1 на случай, когда число агентов в модели бесконечно.

Важно отметить, что для проверки того, что стратегия является доминирующей, нет необходимости нумеровать агентов, а также не нужно знать, какую стратегию выбрал себе каждый из них. Достаточно понимать, какая часть агентов выбрала ту или иную стратегию, то есть какая часть общего капитала вложена в соответствующую стратегию. Поэтому далее будет удобнее работать не непосредственно с агентами, а с множеством всевозможных стратегией Δ^N, а также с распределением капитала по стратегиям.

Как и прежде, будем предполагать, что выплаты активов заданы последовательностью н.о.р. векторов X_t, у каждого из которых лишь одна компонента равна единице, а остальные равны нулю.

Распределением капитала на рынке в момент $t \geq 0$ будем называть последовательность случайных вероятностных мер $\mu_t(\omega)$ на $(\Delta^N, \mathcal{B}(\Delta^N))$. Начальное распределение капитала μ_0 предполагается неслучайным. В последующие моменты времени меры μ_t являются случайными элементами в борелевском пространстве вероятностных мер на Δ^N с метрикой слабой сходимости.

Интерпретация меры μ_t состоит в том, что $\mu_t(A)$, $A \in \mathcal{B}(\Delta^N)$, выражает богатство группы агентов, которые используют стратегии из множества A.

Обобщая (2), будет предполагать, что динамика капитала задается следующим образом: для любого множества $A \in \mathcal{B}(\Delta^N)$ выполнено

$$\mu_{t+1}(A) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int_A \lambda_n \mu_t(d\lambda)}{\int_{\Delta^N} \lambda_n \mu_t(d\lambda)} X_{t+1,n}.$$

Определение 2. Стратегия λ^* называется асимптотически доминирующей, если для любого начального распределения капитала μ_0 такого, что $\lambda^* \in \operatorname{supp}(\mu_0)$ выполнено

$$\mu_t \xrightarrow{w} \delta_{\lambda^*} \text{ п.н. при } t \to \infty,$$

где δ_{λ^*} является мерой Дирака с носителем в точке λ^*.

Заметим, что в случае конечного числа агентов (то есть $\operatorname{supp} \mu_0$ состоит из конечного числа точек), если стратегия является асимптотически доминирующей в смысле 2, то она также является асимптотически доминирующей в смысле 1.

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 2. *Стратегия λ^*, заданная в 1, является асимптотически доминирующей в модели с континуумом агентов.*

4. Доказательство теоремы

Сперва сформулируем вспомогательное неравенство, которое будет играть важную роль в доказательстве. Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ через $|x|$ обозначим его L^1 норму: $|x| = \sum_{n=1}^{N} |x^n|$.

Лемма 1. *Пусть $x, y \in \Delta^N$ - векторы со строго положительными координатами. Тогда*

$$\frac{|x-y|^2}{2} \leq \sum_{n=1}^{N} x_n \ln \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{|x-y|^2}{2\min_n x_n}. \tag{4}$$

Левая часть неравенства (4) известна как *неравенство Пинскера*, правая часть известна как *обратное неравенство Пинскера*. Данные результаты хорошо известны и их доказательства могут быть найдены во многих учебниках и статьях. [1]

Следующее утверждение показывает, что для любых t и ω μ_t действительно задает меру.

Лемма 2. *Для любых $t \geq 1$ и $\omega \in \Omega$ для μ_t выполнена счетная аддитивность.*

Доказательство. Пусть $\{A_i\}$ - счетный набор непересекающихся множеств. Докажем, что $\mu_{t+1}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu_{t+1}(A_i)$:

$$\mu_{t+1}(\bigcup_i A_i) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int \sum_i I_{A_i}(\lambda)\lambda^n \mu_t(d\lambda)}{\int \lambda^n \mu_t(d\lambda)} X_{t+1}^n = \sum_i \sum_{n=1}^{N} \frac{\int I_{A_i}(\lambda)\lambda^n \mu_t(d\lambda)}{\int \lambda^n \mu_t(d\lambda)} X_{t+1}^n = \sum_i \mu_{t+1}(A_i)$$

Здесь мы воспользовались абсолютной сходимостью ряда. Тем самым лемма доказана. □

Лемма, приведенная далее, позволяет переписать определение 2 в более удобном для проверки виде.

Введем обозначение $B_\varepsilon(\hat{\lambda}) = \left\{\lambda \in \Delta^N \middle| |\hat{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\right\}$. Здесь используется та же топология, что и в (4). Потребуем, чтобы мера μ_0 была такова, что для любого $\varepsilon > 0$ $\mu_0(\partial B_\varepsilon(\lambda^*)) = 0$. Тогда аналогичное свойство будет выполняться для всех μ_t.

Лемма 3. *Определение 2 эквивалентно следующему: если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu_0(B_\varepsilon(\lambda^*)) > 0$, то почти наверное для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(B_\varepsilon(\lambda^*)) = 1$$

Доказательство. Хорошо известно, что $\lambda^* \in \operatorname{supp}(\mu_0)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu_0(B_\varepsilon(\lambda^*)) > 0$. Поэтому при доказательстве эквивалентности можно считать, что $\lambda^* \in \operatorname{supp}(\mu_0)$.

[1] Доказательство обратного неравенства Пинскера с константой 2 в знаменателе можно найти в [3], где доказана оценка несколько лучше, чем приводится здесь.

Сначала докажем, что из определения 2 следует определение, введенное в лемме. Учитывая ограничение, наложенное на μ_0, применим теорему А. Д. Александрова об эквивалентности условий слабой сходимости мер. Получим, что $\mu_t(B_\varepsilon(\lambda^*)) \to \delta_{\lambda^*}(B_\varepsilon(\lambda^*)) = 1$.

Докажем обратное утверждение. Извстно, что $\mu_t \to \delta_{\lambda^*}$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F выполнено $\delta_{\lambda^*}(F) \geq \limsup\limits_{t\to\infty} \mu_t(F)$. Проверим это свойство.

Пусть $\lambda^* \notin F$. Тогда

$$\limsup_{t\to\infty} \mu_t(F) \leq 1 - \liminf_{t\to\infty} \mu_t(B_\varepsilon(\lambda^*)) = 0.$$

Если $\lambda^* \in F$, то утверждение очевидно, так как меры μ_t вероятностные. Лемма доказана. □

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы. Для этого достаточно проверить определение из предыдущей леммы при

$$\lambda_n^* = \mathrm{E}\, X^n \quad n = 1, \ldots, N.$$

Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu_t(\Delta^N \setminus B_\varepsilon(\lambda^*)) \to 0$. Достаточно рассмотреть случай $\varepsilon \in (0,1)$. Обозначим $A = B_\delta(\lambda^*)$, где δ будет выбрана позднее. Заметим, что в силу компактности замыкания множества $B_\varepsilon(\lambda^*)$ можно выбрать конечный набор $\lambda_i \in \overline{B}_\varepsilon(\lambda^*)$ таких, что $\overline{B}_\varepsilon(\lambda^*) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon/2}(\lambda_i)$. Для краткости обозначим $B_i = B_{\varepsilon/2}(\lambda_i)$. Достаточно показать, что для любого i имеет место сходимость $\mu_t(B_i) \to 0$.

Для доказательства последнего покажем, что при некотором выборе δ выполнено $\frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)} \to \infty$. Обозначим $Z_t = \ln \frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)}$. Представим Z_t в более удобном виде:

$$Z_t = Z_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(Z_{u+1} - Z_u) = Z_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(\mathbb{E}_u Z_{u+1} - Z_u) + \sum_{u=1}^{t-1}(Z_{u+1} - \mathbb{E}_u Z_{u+1}).$$

Здесь используется сокращение $\mathbb{E}_u(\,\cdot\,) = E(\,\cdot\,|\mathcal{F}_u)$.

Заметим, что последнее слагаемое в силу усиленного закона больших чисел для мартингалов при делении на t стремится к 0. Положим $D_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$. Тогда

$$\mathbb{E}D_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\frac{1}{\mu_t(A)} \int_A \lambda_n \, \mu_t(d\lambda)}{\frac{1}{\mu_t(B_i)} \int_{B_i} \lambda_n \, \mu_t(d\lambda)} \lambda_n^* = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^* \ln \frac{F}{G}.$$

Здесь для краткости обозначили

$$F_n = \frac{1}{\mu_t(A)} \int_A \lambda_n \, \mu_t(d\lambda) \text{ и } G_n = \frac{1}{\mu_t(B_i)} \int_{B_i} \lambda_n \, \mu_t(d\lambda).$$

Отметим, что в силу выпуклости множеств A и B_i выполнено $F = (F_1, \dots F_N) \in A$ и $G = (G_1, \dots G_N) \in B_i$.

Следовательно, применяя прямое и обратное неравенство Пинскера, получим:

$$\mathbb{E}D_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^* \ln \frac{\lambda_n^*}{G_n} - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^* \ln \frac{\lambda_n^*}{F_n} \geq \frac{|\lambda^* - G|^2}{2} - \frac{|\lambda^* - F|^2}{2 \min_n F_n} > \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\delta^2}{\min_n \lambda_n^*}$$

Последнее неравенство выполнено при $\delta < \frac{1}{2} \min_n \lambda_n^*$. Отсюда следует, что при достаточно малом δ имеет место оценка $\mathbb{E}D_{t+1} > \frac{\varepsilon^2}{16}$. Значит, $\lim_{t \to \infty} \frac{Z_t}{t} > \frac{\varepsilon^2}{16}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, and L. Xu. Evolutionary finance and dynamic games. *Mathematics and Financial Economics*, 5(3):161–184, 2011.

[2] L. Blume and D. Easley. Evolution and market behavior. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40, 1992.

[3] I. Sason. On reverse Pinsker inequalities. *arXiv:1503.07118*, 2015.