No.

Date

Доказательство результата из статьи Evstigneev et al. 2002

Модель

$$W_{t+1}^m = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^{mn} W_t^m}{\sum_k \lambda^{kn} W_t^k} X_{t+1}^n$$

$n = 1, \dots, N$ – актив

$m = 1, \dots, M$ – агент

$X_t^1 + \dots + X_t^N = 1$ – н.о.р. векторы X_t

Пусть

$\lambda^1 = \lambda^* = (EX_t^1, \dots, EX_t^N)$

$\lambda^m \neq \lambda^*$ $m = 2, \dots, M$

а также выполнено условие лин. нез. X_t^n:

если $c_1 X_t^1 + \dots + c_N X_t^N = \text{const}$, то $c_1 = \dots = c_N$ $(*)$

Тогда $W_t^m \to 0$ для $m = 2, \dots, M$

Д-во **Шаг 1** Пусть $\mu_t^n = \sum_m \lambda^{mn} W_t^m$ – взвешенная стратегия

Докажем, что $\mu_t \to \lambda^*$.

Имеем

$$E(\ln W_{t+1}^1 | \mathcal{F}_t) - \ln W_t^1 \geq \frac{1}{2} |\mu_t - \lambda^*|^2 \quad (\text{Иенсен} + \text{Пинскер})$$

Следовательно $\ln W_t^1$ – субмартингал, $\Rightarrow \exists \lim_{t\to\infty} \ln W_t^1 > -\infty$ п.н.

$\Rightarrow$ компенсатор $\ln W_t^1$ сходится, т.е. $\sum_{t=1}^{\infty} |\mu_t - \lambda^*|^2 < \infty$ п.н.

$\Rightarrow \mu_t \to \lambda^*$

Шаг 2 Рассмотрим $\ln W_t^m$ $m \geq 2$

$$\ln W_t^m = \underbrace{\sum_{s=1}^{t} \left(\ln W_s^m - E(\ln W_s^m | \mathcal{F}_{s-1})\right)}_{\text{мартингал } X_t} + \sum_{s=1}^{t} \underbrace{\left(E(\ln W_s^m | \mathcal{F}_{s-1}) - \ln W_{s-1}^m\right)}_{D_{s-1}^m} + \ln W_0^m$$

По УЗБЧ $\frac{1}{t} X_t \to 0$. Тогда дост. д-ть, что $D_s^m \leq -\varepsilon < 0$ при $s \geq \tau$ (п.н.)

$$D_{t-1}^m = E\left(\ln \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^{mn}}{\mu_{t-1}^n} X_t^n \Big| \mathcal{F}_{t-1}\right) \xrightarrow{\text{п.н.}} E\left(\ln \sum_n \frac{\lambda^{mn}}{\lambda^{*n}} X^n\right) < \ln E \sum_n \frac{\lambda^{mn}}{\lambda^{*n}} X^n = 0$$

нужно обосновать аккуратно

т.к. ln строго вогнут и $\sum_n \frac{\lambda^{mn}}{\lambda^{*n}} X^n \neq \text{const}$ по условию $(*)$