Асимптотически оптимальные инвестиционные стратегии в многоагентной модели рынка с непрерывным временем

Асылхузин Тимур

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
Механико-Математический факультет,
кафедра Теории Вероятностей

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Житлухин М.В.

Москва
2022 год

Содержание

Введение

- Стохастическая модель финансового рынка с непрерывным временем, описывающая конкуренцию инвесторов за распределение дивидендов нескольких активов.
- Будет сформулирован частный случай общей модели, построенный на идее конкуренции индивидуального инвестора против рынка, действия которого не влияют на цены активов.
- Удастся построить конкретный вид оптимальной рыночной стратегии.

Связь с литературой

- Теория оптимального управления.
- J.L.Kelly (1956), L.Breiman (1961) – поиск асимптотически оптимальных стратегий для моделей с дискретным временем.
- L.Blume, D.Easley, R.Amir, I.Evstigneev и др. – различные свойства моделей в дискретном времени.
- I.Karatzas, C.Kardaras (2007) – асимптотическая оптимальность для семимартингальной модели с **непрерывным** временем.

Общая модель

- $M \geq 2$ агентов и $N \geq 2$ активов.
- Задано $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$, фильтрация $\mathbb{F}$ порождена винеровским процессом.
- Агент выбирает пропорции капитала $(\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^N)$ для распределения по активам.
- Спрос на активы приводит к установлению рыночных цен на активы.
- Каждый агент осуществляет потребление капитала с постоянной интенсивностью $0 < \rho < 1$.

Активы

- $S_t^n(\omega)$ – процесс цены, равен стоимости актива в момент времени t.
- $D_t^n(\omega)$ – процесс накопленных дивидендов, равен суммарной выплате дивидендов за промежуток времени $[0, t]$
- Существует $X_t^n(\omega)$, такой, что

$$D_t^n(\omega) = \int_0^t X_s^n(\omega) ds.$$

- $X_t^n(\omega)$ – процесс интенсивности дивидендов.
- Предполагаем, что S_t^n являются процессами Ито, а X_t^n равномерно отделены от нуля.

Стратегии

Определение

Инвестиционной стратегией *агента m называется процесс $(\lambda_t(\omega))_{t\geq 0}$, где $\lambda_t(\omega) = (\lambda_t^1(\omega), \ldots, \lambda_t^N(\omega))$, и*

$$d\lambda_t^n(\omega) = a_t^n(\omega)dt + b_t^n(\omega)dB_t(\omega),$$

такой, что $\lambda^1 + \cdots + \lambda^N = 1$.

Предполагается, что процессы $a_t^n(\omega)$ и $b_t^n(\omega)$ таковы, что соответствующие интегралы корректно определены.

Уравнения динамики капитала (общий случай)

Процесс капитала (стоимость портфеля) m-го инвестора определяется уравнением

$$dY_t^m = -\rho Y_t^m dt + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{m,n} Y_t^m}{S_t^n} (dS_t^n + X_t^n dt), \tag{1}$$

где *процессы цен* активов заданы соотношением

$$S_t^n = \sum_{m=1}^{M} \lambda_t^{m,n} Y_t^m. \tag{2}$$

Предполагается, что количество актива n, доступное к торговле на рынке равно единице.

Рынок с большим и малым агентами

Упрощённая постановка, где рассматриваются “малый” и “большой” агенты, и действия малого агента не влияют на цены активов. Новая модель:

- На рынке имеются всего два актива ($N = 2$) и два инвестора ($M = 2$).
- Капитал второго инвестора бесконечно мал по сравнению с капиталом первого.
- Цены активов задаются только большим инвестором:

$$S_t^n = \lambda_t^{1,n} Y_t^1, \qquad n = 1, 2.$$

Оптимальная стратегия

Определение

Инвестиционную стратегию $\hat{\lambda}_t^2$ ***малого*** *инвестора будем называть* ***оптимальной*** *при зафиксированной стратегии большого инвестора, если для любой другой стратегии* λ_t^2 *малого инвестора*

$$\ln \frac{Y_t^2(\lambda_t^2)}{Y_t^2(\hat{\lambda}_t^2)} \quad - \quad \text{супермартингал относительно фильтрации } \mathbb{F},$$

где $Y_t^2(\lambda_t^2)$, $Y_t^2(\hat{\lambda}_t^2)$ *– процессы капитала малого инвестора при использовании соответствующих стратегий.*

Оптимальная стратегия

Определение

*Инвестиционную стратегию $\hat{\lambda}_t^1$ **большого** инвестора будем называть **оптимальной**, если эта же стратегия будет являться оптимальной для малого инвестора, когда большой инвестор её использует.*

Уравнения динамики капитала (частный случай)

- Уравнение капитала первого (большого) инвестора остаётся неизменным
- Уравнение динамики капитала второго (малого) инвестора и уравнения для цен активов задаются уравнениями

Модель рынка с малым и большим агентами

$$dY_t^2 = \frac{\lambda_t^2 Y_t^2}{\lambda_t^1}(a_t dt + b_t dB_t + X_t^1 dt) + \\ + \frac{(1-\lambda_t^2)Y_t^2}{1-\lambda_t^1}(-a_t dt - b_t dB_t + (\rho - X_t^1)dt) - \rho Y_t^2 dt,$$

$$S_t^1 = \lambda_t^1 Y_t^1, \qquad S_t^2 = (1-\lambda_t^1)Y_t^1, \qquad X_t^1 + X_t^2 = \rho.$$

Оптимальная стратегия

Теорема

В модели рынка с большим и малым агентами случайный процесс

$$\hat{\lambda}_t^1 = E\left(e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho s}X_s^1 ds \middle| \mathcal{F}_t\right) \quad (3)$$

является оптимальной стратегией для большого инвестора.

– распределение в соответствии с дисконтированными ожидаемыми выплатами активов.

Доказательство приводится в тексте работы.

Единственность оптимальной стратегии

Определим величину σ_t. Верно представление

$$\hat{\lambda}_t^1 = e^{\rho t}\left(E\Big(\int_0^\infty e^{-\rho s} X_s^1 ds \Big| \mathcal{F}_t\Big) - \int_0^t e^{-\rho s} X_s^1 ds\right).$$

Первое слагаемое является мартингалом, поэтому его можно представить в виде

$$E\Big(\int_0^\infty e^{-\rho s} X_s^1 ds\Big) + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

Единственность оптимальной стратегии

Если большой инвестор использует стратегию $\hat{\lambda}$, то оптимальная стратегия малого инвестора тоже должна быть равна $\hat{\lambda}$.

Теорема

При фиксированной стратегии $\hat{\lambda}_t$ большого инвестора стратегия λ_t^* является оптимальной стратегией для малого инвестора тогда и только тогда, когда

$$|\lambda_t^* - \hat{\lambda}_t|\sigma_t \overset{\text{п.н.}}{=} 0.$$

Пример

Пусть фильтрация порождена броуновским движением B_t, и процессы интенсивностей выплат задаются как

$$dX_t^1 = aX_t^1(\rho - X_t^1)dB_t, \qquad X_t^2 = \rho - X_t^1,$$

с начальным условием $X_0^1 \in (0, \rho)$, где $a > 0$ – параметр.

- У этого уравнения существует единственное сильное решение при данном начальном условии.
- $E(X_s^m \mid \mathcal{F}_t) = X_t^m$, следовательно

$$\hat{\lambda}_t^1 = e^{\rho t} \int\limits_t^{\infty} e^{-\rho s} E(X_s^1 \mid F_t) ds = \frac{X_t^1}{\rho}.$$

- Получаем, что оптимальной стратегией является

$$\hat{\lambda}_t = (X_t^1/\rho, X_t^2/\rho).$$

Спасибо за внимание!