29.10.20. Вар.опт. д/з от семинара 8.

① Найти производную Фреше.

а) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $f(x) = \langle Ax, x\rangle$; $A$ - симм. матрица

$$f(\hat{x}+h) = \langle A(\hat{x}+h); \hat{x}+h\rangle = \langle A\hat{x} + Ah; \hat{x}+h\rangle = \underbrace{\langle A\hat{x}, \hat{x}\rangle}_{= f(\hat{x})} + \underbrace{\langle A\hat{x}, h\rangle + \underbrace{\langle Ah, \hat{x}\rangle}_{= \langle h, A^*\hat{x}\rangle = \langle h, A\hat{x}\rangle}}_{= 2\langle A\hat{x}, h\rangle} + \underbrace{\langle Ah, h\rangle}_{= \bar{o}(\|h\|)}$$

$$\Rightarrow f'(\hat{x})[h] = 2\langle A\hat{x}, h\rangle.$$

б) $f: H \to \mathbb{R}$; $f(x) = \langle x, x\rangle^3$; $H$ - гильб. пр-во.

$$f'(\hat{x})[h] = 3\cdot\langle x, x\rangle^2 \cdot \underbrace{\langle \hat{x}, \hat{x}\rangle'[h]}_{= 2\langle \hat{x}, h\rangle} = 6\langle \hat{x}, \hat{x}\rangle^2 \cdot \langle \hat{x}, h\rangle.$$

почему $\langle x, x\rangle'[h] = 2\langle x, h\rangle$?

ну $g(x) = \langle x, x\rangle$

$$\Rightarrow g(\hat{x}+h) = \langle \hat{x}+h; \hat{x}+h\rangle = \underbrace{\langle \hat{x}, \hat{x}\rangle}_{= g(\hat{x})} + \underbrace{2\langle \hat{x}, h\rangle}_{\text{лин. поh}} + \underbrace{\langle h, h\rangle}_{= \bar{o}(\|h\|)}$$

$$\Rightarrow g'(\hat{x})[h] = 2\langle \hat{x}, h\rangle.$$

в) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$.

$$f(\hat{x}+h) = \int_0^1 (\hat{x}(t) + h(t))\,dt = \underbrace{\int_0^1 \hat{x}(t)\,dt}_{= f(\hat{x})} + \underbrace{\int_0^1 h(t)\,dt}_{\text{линейно поh}}$$

$$\Rightarrow f'(\hat{x})[h] = \int_0^1 h(t)\,dt$$

г) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \int_0^1 x(t)a(t)\,dt$; $a \in C[0,1]$

$$f(\hat{x}+h) = \int_0^1 (\hat{x}+h)a\,dt = \underbrace{\int_0^1 \hat{x}a\,dt}_{= f(\hat{x})} + \underbrace{\int_0^1 h(t)a(t)\,dt}_{\text{линейно поh}}$$

$$\Rightarrow f'(\hat{x})[h] = \int_0^1 h(t)a(t)\,dt.$$

д) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \int_0^1 x^3(t)\,dt$

$$f(\hat{x}+h) = \int_0^1 (\hat{x}+h)^3\,dt = \int_0^1 (\hat{x}^3 + 3\hat{x}^2h + 3\hat{x}h^2 + h^3)\,dt = \underbrace{\int_0^1 \hat{x}^3\,dt}_{= f(\hat{x})} + \underbrace{3\int_0^1 \hat{x}^2h\,dt}_{\text{линейно поh}} + \underbrace{3\int_0^1 \hat{x}h^2\,dt + \int_0^1 h^3\,dt}_{= \bar{o}(\|h\|)}$$

$$\Rightarrow f'(\hat{x})[h] = 3\int_0^1 \hat{x}^2 h(t)\,dt.$$

е) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^3$

$$f'(\hat{x})[h] = 3\left(\int_0^1 \hat{x}^2(t)\,dt\right)^2 \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 \hat{x}^2(t)\,dt\right)'[h]}_{= 2\int_0^1 \hat{x}(t)h(t)\,dt} = 6\left(\int_0^1 \hat{x}^2(t)\,dt\right)^2 \cdot \int_0^1 \hat{x}(t)h(t)\,dt.$$

ж) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x(0)$

$f(\hat{x}+h) = (x+h)(0) = \underbrace{x(0)}_{= f(\hat{x})} + h(0)$

$\Rightarrow f'(\hat{x})[h] = h(0)$

з) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin x(0)$

$f'(\hat{x})[h] = \cos \hat{x}(0) \cdot \underbrace{(x(0))'[h]}_{= h(0)} = \cos \hat{x}(0) \cdot h(0)$

и) $f: C[0,1] \to C[0,1]$. $f(x)(t) = \sin x(t) \cdot \cos x(0)$

$f'(\hat{x})[h] = \cos \hat{x}(t) \cdot \underbrace{(x(t))'[h]}_{= h(t)} \cdot \cos x(0) + \sin \hat{x}(t) \cdot (-\sin \hat{x}(0)) \underbrace{(x(0))'[h]}_{= h(0)} =$

$= \cos \hat{x}(t) h(t) \cdot \cos \hat{x}(0) - \sin \hat{x}(t) \cdot \sin \hat{x}(0) \cdot h(0)$

к) $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \int_0^1 \varphi(x(t))\,dt$; $\varphi \in C^1[0,1]$

$f'(\hat{x})[h] = \int_0^1 (\varphi(\hat{x}(t)))'[h]\,dt = \int_0^1 \varphi'_x(\hat{x}(t)) \cdot h(t)\,dt$

② а) Док-ть, что $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданная по полярных коорд $(r, \varphi)$ ф-лой $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r\cos 3\varphi$ – имеет в $(0,0)$ вариацию по Лагранжу и непрер, но не имеет произв. по Гато.

∃ Вариация по Лагранжу в т. $x_0$, если $\forall h \in X$ $\exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} =: f'_\Gamma(x_0)[h]$.

Если отобр. $h \mapsto f'_\Gamma(x_0)[h]$ – лин. непрер. оператор на $X$, то $f$ – дифф. по Гато в точке $x_0$.

Имеем: $\hat{x} = 0$

$h = (t\cos\alpha; t\sin\alpha)$ – произв. направление

$\Rightarrow \delta f(\hat{x}, h) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{\overset{= f(\lambda h)}{f(\hat{x}+\lambda h)} - \overset{=0}{f(\hat{x})}}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{\lambda t \cos 3\alpha}{\lambda} = t\cos 3\alpha$ – ф-я, предел ∃. ⇒ $f$ имеет вариацию по Лагранжу в $\hat{x} = (0,0)$

Покажем, что вариация по Лагранжу $\delta f(\hat{x}, h)$ не явл. линейным оператором по $h$. Действительно, возьмём 2 вектора

$h_1 = (1,0) = (\cos 0, \sin 0)$, т.е. $t = 1; \alpha = 0 \Rightarrow \delta f(\hat{x}, h_1) = t\cos 3\alpha = 1$

$h_2 = (0,1) = (\cos\frac{\pi}{2}; \sin\frac{\pi}{2})$, т.е. $t = 1; \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta f(\hat{x}, h_2) = t\cos 3\alpha = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

$\Rightarrow h_1 + h_2 = (1,1) = (\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$

но $\delta f(\hat{x}, h_1+h_2) = \sqrt{2}\cdot\cos 3\cdot\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot \overset{= -\frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = -1$.

$\neq \delta f(\hat{x}, h_1) + \delta f(\hat{x}, h_2) = 1 + \cos\frac{3\pi}{2} = 1$. ⇒ $f$ – не имеет произв по Гато в $\hat{x} = (0,0)$

А почему $f$-непрер?

$$\begin{cases} f(x,y) = r\cos 3\varphi = 4r\cos^3\varphi - 3r\cos\varphi = \dfrac{4x^3}{r^2} - 3x = \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} - 3x \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Хотим: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если $0 < |x - x_0| < \delta$.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{4x^3}{x^2+y^2} - 3x - 0 \right| = \left| \frac{4x^3 - 3x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| < |x| < \delta$$

$\Rightarrow \varepsilon := \delta$ – подх.

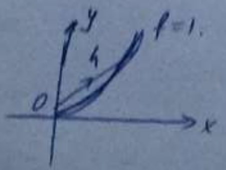
$\Rightarrow f$-непрер в т. $(0,0)$

б) Привести пример функции, диф. в некот. точке по Гато, но не по Фреше.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2;\ x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$x^1 = (0,0)$




Имеем: $\delta f(x^1; h) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\overset{0}{f(x^1 + \lambda h)} - \overset{0}{f(x^1)}}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{0}{\lambda} = 0$

при дост. маленьких $\lambda$: $f(\lambda h) = 0$

$\Rightarrow f'_\Gamma(x^1) = 0.$

С другой стороны, $f$ разрывна в точке $x^1 = (0,0)$, но функция дифф. по Фреше, должна быть непрер. в точке диф-и.

(т.к. $f(x^1 + h) = f(x^1) + f'(x^1)[h] + \bar{o}(\|h\|)$)