16.10.18. Мат. анализ. Лекция 12.

Пункт 2. Свойства равномерно сходящихся рядов (перестановка пределов, интегрируемость и дифференцируемость)

Была теорема о перестановке пределов для функц. посл-тей:

$f_n \rightrightarrows f$ на X; $a \in X'$; $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} A$, $\forall n$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$

Теорема 1 (о перестановке предельных переходов у функц. рядов)

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X
- $a \in X'$
- $\exists \lim\limits_{x\to a} a_n(x) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a}\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)}_{\substack{\text{это } \exists \text{, т.к.} \\ \sum a_n(x) \text{ сход.} \\ \text{равном} \Rightarrow \text{сход.}}}\Big) \in \mathbb{R} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} a_n(x)\right)$ (т.е, в частности, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} a_n(x)\right)$ сход).

▶ перейдём к част. суммам и сведём всё к теореме для функц. посл-тей.

Имеем: • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. на X к $f(x)$ $\overset{\text{по опр.}}{\Longleftrightarrow}$ $f_n \rightrightarrows f$ на X, где $f_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$.

- $a \in X'$
- $\exists \lim\limits_{x\to a} a_k(x) \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to a} f_n = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lim\limits_{x\to a} a_k(x) \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ по теореме для функц. посл-тей:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\lim_{x\to a} f_n(x)}_{\substack{\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) = \\ = \sum\limits_{k=1}^{n}\lim\limits_{x\to a} a_k(x)}}\Big) = \lim_{x\to a}\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\text{это предел част. сумм при } n\to\infty\text{, т.е ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)}\Big)$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} a_n(x)\right)}$ ◀

Теорема 1.5 (о непрерывности предельного ряда) т.е $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) := f(x)$, $x \in X$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. к $f(x)$ на X, причём $a_n \in C(X)$, $\forall n$.

Тогда $f \in C(X)$.

▶ 1) если a — изолированная точка, то в ней любая функция непрерывна

2) если $a \in X'$, то надо проверить, что $f(a) \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to a} f(x)$

по теореме 1: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} a_n(x)\right) \underset{\substack{\text{т.к.} \\ a_n \in C(a)}}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a) = f(a)$. ◀

Была теорема об интегрируемости функц. посл-тей:

$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[a;b]$; $f_n \in R[a;b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда $f \in R[a;b]$ и $\underbrace{\int_a^x f_n(t)\,dt}_{\substack{\text{он } \exists\text{, т.к.} \\ f_n \in R[a;b] \\ \Rightarrow f_n \in R[\text{подотрезка}]}} \rightrightarrows \int_a^x f(t)\,dt$ на $[a;b]$

Теорема 2 (об интегрируемости функц. рядов)

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. на $[a;b]$

• $a_n \in R[a;b]$ $\forall n \in N$

Тогда $\exists \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x a_n(t)\,dt$, $\forall x \in [a;b]$,

причём сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x a_n(t)dt$ равномерная на $[a;b]$.

▶ перейдём к част. суммам и сведём всё к теореме для посл-тей.

Обозн: $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$

$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$.

Тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[a;b]$,

причём $f_n(x) \in R[a;b]$, т.к. $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, а $a_k(x) \in R[a;b]$ по усл.

$\Rightarrow$ по теореме для посл-тей: $f \in R[a;b]$,

$$\text{и } \underbrace{\int_a^x f_n(t)dt}_{\parallel} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\parallel}, \text{ на } [a;b]$$

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,dt = \qquad \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\right)dt$$

$$= \int_a^x a_1(t)dt + \ldots + \int_a^x a_n(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_a^x a_k(t)\,dt$$

В итоге ряд $\sum_{k=1}^{n} \int_a^x a_k(t)dt \rightrightarrows \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\right)dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x a_k(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\right)dt.$$ ◀

Была теорема о дифференцируемости функц. посл-тей:

$f_n : [a;b] \to R$;

• $\exists x_0 \in [a;b]$ / $\{f_n(x^0); n \in N\}$ сходится

• $\forall n \in N$: $f_n \in D[a;b]$

• $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ на $[a;b]$.

Тогда: 1) $f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$ (где f – какая-то функция)

2) $f \in D[a;b]$, причём $f'(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in [a;b]$,

$$f'(x) \overset{\text{(п. 1)}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \ \forall x \in [a;b]$$

Теорема 3. (о дифференцируемости функц. ряда)

$a_n : [a;b] \to R$

• $\exists x_0 \in [a;b]$ / $\sum_{1}^{\infty} a_n(x_0)$ сходится

• $\forall n \in N$: $a_n \in D[a;b]$

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сход. равном. на $[a;b]$.

Тогда: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. на $[a;b]$

2) $\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

~~переходим~~ к част. суммам и сведём всё к теореме для посл-тей.

Обозн: $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$; $f_n'(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k'(x)$

$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_n(x)$.

Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, причём:

- $\exists\, x_0 \in [a;b] \mid f_n(x_0)$ сходится
- $\forall n \in \mathbb{N}: f_n(x) \in \mathcal{D}[a;b]$, т.к. $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, а $a_n(x) \in \mathcal{D}[a;b]$ по усл.
- $f_n'(x)$ сход. равном. к $\varphi(x)$ на $[a;b]$.

Тогда по теореме для посл-тей:

1. f_n сход. равном. на $[a;b]$

$\overset{\|}{\sum_{k=1}^{n} a_k(x)}$

А раз част. суммы сход. равном $\overset{\text{на }[a;b]}{\Rightarrow}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном на $[a;b]$

2. $f'(x) = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'}_{\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right)'} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n'(x)}_{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k'(x)\right) \overset{\text{по опр.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(x)}$, $\forall x \in [a;b]$

Примеры, если попросят, можно соорудить из примеров для посл-тей, считая, что посл-ть $^{\{a_n\}}$ – это посл-ть част. сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(x) - a_{n-1}(x))$

Зам. $\boxed{a_n \in C[a;b];\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = f(x);\ f \in C[a;b] \overset{\text{В.2}}{\not\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сход. равном. на } [a;b]}$

И не путать это с теоремой Дини для рядов (там a_n должны быть непрерывны и неотрицательны, а не просто непрерывны).

Например, ряд $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ сходится к $1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x} \equiv 0. \in C(-1;1)$.

То есть
- $a_n \in C(-1;1)$
- $f \equiv 0 \in C(-1;1)$

но сходимость ряда $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ к нулю – неравномерная,

т.к. $S_k = x^k \longrightarrow 0$ неравномерно,

т.к. $\sup_{x\in(-1;1)} x^k = 1 \not\to 0 \Rightarrow$ по след. критерию равном. сходимости сходимость неравномерная.

Пункт 3. Признаки равномерной сходимости рядов.

Сейчас будет признак Вейерштрасса.

Во-первых, это признак, а не критерий.

Во-вторых, не путать его с признаком Вейерштрасса для знакопеременных $^{\text{числовых}}$ рядов:

Есть знакоперем. ряд $\sum a_n$, причём $|a_n| \le b_n$, $\sum b_n$ сход. ~~Тогда~~ $\sum a_n$ сход. абс.

Действительно, $\sum |a_n|$ и $\sum b_n$ – знакоположительные ряды, и для них можно применить мажорантный признак (не признак сравнения).

Теорема 1 (признак Вейерштрасса).

- $|a_n(x)| \le b_n$; $\forall x \in X$; $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X.

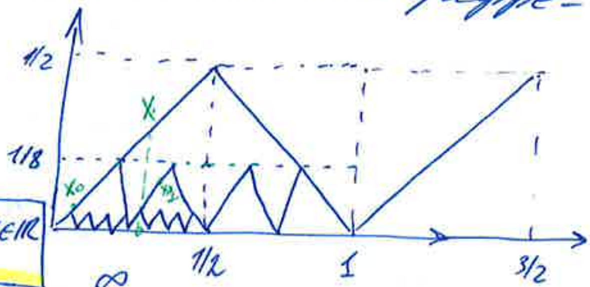
Куда сходится – непонятно $\Rightarrow$ будем доказывать равном. сход. по Коши.
Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.
Тогда, т.к. $\sum b_n$ сход, по критерию Коши для числовых рядов:
$\exists N \in \mathbb{N} \mid \left|\sum_{n=k}^{k+m} b_n\right| < \varepsilon$, $\forall k > N$, $\forall m \in \mathbb{N}$.
Поэтому, т.к. $|a_n(x)| \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\underline{\forall x \in X}$,
то $\left|\sum_{n=k}^{k+m} a_n(x)\right| \le \sum_{n=k}^{k+m} \underbrace{|a_n(x)|}_{\le b_n} \le \sum_{n=k}^{k+m} b_n < \varepsilon$, $\forall k > N$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\underline{\forall x \in X}$
$\Rightarrow$ по кр. Коши равном. сход. функц. ряда: $\sum a_n$ сход. равном. на X ◀

Пример Ван-дер-Вадена всюду непрерывной функции, но не дифференцируемой ни в одной точке.

Рассм. функцию: $f(x) := \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 1/2 \\ 1-x, & \text{если } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

и

$f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, т.е. период $= 1$.



Положим $\boxed{f_n(x) := \frac{f(4^n x)}{4^n}}$, а $\boxed{f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x); x \in \mathbb{R}}$

1. Почему $f \in C(\mathbb{R})$?
Имеем: $\forall n: |f_n(x)| \le \frac{1}{4^n}$, а $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ сход, т.к. $\frac{1}{4} < 1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сход. равном. на $\mathbb{R}$ по теореме Вейерштрасса.
Далее, $f_n \in C(\mathbb{R})$; $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сход. равном. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ по теореме 1.5 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in C(\mathbb{R})$.

2. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \notin D(x)$.
Фиксируем произвольно $x \in [0;1]$ (больше не надо, т.к. у неё период $= 1$).
Надо рассмотреть разностное отношение $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ и доказать, что $\nexists \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Достаточно найти посл-ть Гейне $(x_n \in [0;1] \setminus \{x\}; n \in \mathbb{N})$ с условием $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ такую, что по этой посл-ти предела не будет.
Построим посл-ть вложенных отрезков:
- $\underline{n=0}$. Точка $x \in \left[\frac{s_0-1}{2}; \frac{s_0}{2}\right]$ для $s_0 = 1$ или $s_0 = 2$. Положим $\Delta_0 :=$ та половина отрезка $[0;1]$, где x лежит.
- $\underline{n \ge 1}$. $x \in \left[\frac{s_n - 1}{2 \cdot 4^n}; \frac{s_n}{2 \cdot 4^n}\right]$ для некоторого $s_n \in \mathbb{N}$. Положим этот отрезок $:= \Delta_n \subset \Delta_{n-1}$.

Теперь выберем посл-ть $\{x_n\}$: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\exists x_n \in \Delta_n$ с усл. $\boxed{|x_n - x| = \frac{1}{4^{n+1}}}$
(т.е. такое x_n, которое лежит с x на том же кусочке на рассмотрении половина кусочка)
Поскольку $\Delta_n = \frac{1}{2 \cdot 4^n} \to 0$, то $x_n \to x$; причём $x_n \ne x \Rightarrow \{x_n\}$ – посл-ть Гейне.
Посмотрим на разностное отношение при $y = x_n$: $\boxed{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n - x}\right)}$
- если $0 \le k \le n$, то $\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \pm 1$ (т.к. эти точки лежат на одном линейном участке).
- если $k \ge n+1$, то период $f_k = \frac{1}{4^k} \le \frac{1}{4^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{4^{n+1}}$ – тоже период. Но $|x_n - x| = \frac{1}{4^{n+1}}$
$\Rightarrow f_k(x_n) = f_k(x)$, $\forall k \ge n+1$. $\Rightarrow$ в ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x}$ начиная с $k = n+1$ будут нули.

В итоге, $\boxed{\frac{f_k(x_n)-f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1}$ в непонятном порядке. $=: (*)$.

Докажем индукцией по n, что $(*)$ $\begin{cases} \text{нечётное, если } n \text{ - чётное} \\ \text{чётное, если } n \text{ - нечётное} \end{cases}$ $\Rightarrow \nexists \lim_{x_n \to x} (*)$. Ура!

Действительно: $\underline{n=0}$: $(*) = \pm 1$ – неч.
$\underline{n=1}$: $(*) = 0/2/-2$ – чёт.

Пусть верно для n $\Rightarrow$ [было чётное $\Rightarrow$ прибавим ± 1, станет нечётным; было нечётное $\Rightarrow$ прибавим ± 1, станет чётным

12.10.18. Мат. анализ. Лекция 11.

Параграф 2. Функциональные ряды.

Пункт 1. Равномерная сходимость функционального ряда.

Опр. 1) Мы рассматриваем ряды вида $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x);\ x\in X;\ a_n: X\to\mathbb{R}}$ (1), называемые функциональными рядами.

2) $M := \{x\in X$: ряд (1) сходится$\}$ называется "областью" сходимости ряда (1) (мы не имеем в виду, что область – это открытое связное мн-во)

3) Сходимость функц. ряда (1) эквивалентна сходимости функц. посл-ти его частичных сумм: $\left(S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x);\ n\in\mathbb{N};\ x\in X\right)$

Опр. Говорим, что функц. ряд (1) сходится равномерно на M $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ функц. посл-ть $(S_N(x))$ сходится равномерно на M.

Зам. (необходимое условие равном. сходимости ряда)

$\boxed{\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сход. равном. на } M \Rightarrow a_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \text{ на } M.}$

▶ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. на $M \Rightarrow$ по опр. посл-ть $(S_n(x))$ его част. сумм сход. равном. на M, т.е $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon) \mid |S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall n>N,\ \forall x\in M.$

А мы хотим: $a_n \rightrightarrows 0$ на M, т.е $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon) \mid |a_n(x)-0|<\varepsilon,\ \forall n>N,\ \forall x\in M.$

Имеем: $|a_n(x)-0| = |a_n(x)| = |S_{n+1}(x)-S_n(x)| = |S_{n+1}(x)-S_n(x)+S(x)-S(x)| =$

$= \left|[S_{n+1}(x)-S(x)]-[S_n(x)-S(x)]\right| \le |S_{n+1}(x)-S(x)|+|S_n(x)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall n>N,\ \forall x\in M.$

$\Rightarrow$ по опр. равном. сход. функц. посл-ти $a_n \rightrightarrows 0$ на M. ◀

! Абсолютная и равномерная сходимость – абсолютно разные вещи. Они друг из друга не следуют.

Примеры. ① $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+\ln(1+n)};\ x\in\mathbb{R}}$ – он абсолютно расходится, но сходится равномерно.

а) $|a_n(x)| = \frac{1}{x^2+\ln(1+n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1+n)} \geqslant \frac{c}{n}$. А $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n}$ расходится

$\Rightarrow$ по мажорантному признаку $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ – ряд типа Лейбница, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится условно, $\forall x\in\mathbb{R}$.

в) исследуем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ на равномерную сходимость.

Это ряд типа Лейбница, поэтому легко оценить остаток ряда:

$|S(x)-S_n(x)| = |r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+\ln(2+n)} \le \frac{1}{\ln(2+n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow r_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. на $\mathbb{R}$

② $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \ ;\ x\in(-1;1)}$ – он сход. абсолютно, но не равномерно.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ – сход. абс. $\forall x\in(-1;1)$, т.к $|x|<1$.

б) Докажем, что нет равном. сходимости.
Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ сход. равном на $(-1;1)$
тогда было бы выполнено необх. условие: $|x|^{n-1} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.
Но это не верно, т.к $\sup\limits_{x\in(-1;1)} |x^{n-1}| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.
$\Rightarrow$ необх. усл. равном. сход. не выполнено $\Rightarrow$ нет равном. сход.

③ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \ ;\ |x|\le q<1}$ – он сход. и абсолютно, и равномерно.

Вообще, равном. сходимость сразу следует из признака Вейерштрасса равном. сходимости, но его пока нет, поэтому оценим остаток ряда.

$|r_n(x)| = |S(x)-S_n(x)| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}\right| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \le \frac{q^n}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.к. $|q|<1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup r_n(x) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ сход. равном. на $[-q;q]$.

Теорема 1 (критерий Коши равном. сходимости функц. рядов)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном. на $X \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ / \ \left|\sum_{n=k}^{k+m} a_n(x)\right| < \varepsilon,\ \forall k>N; \forall m\in\mathbb{N}; \forall x\in X$$

$\blacktriangleright$ по опр., ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сход. равном на $X \Leftrightarrow$ посл-ть его част. сумм сход. равном на М. А для функц. посл-тей у нас есть критерий Коши (см. лекция 8): посл-ть $(S_n(x))$ сход. равном. на $X \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon) \ / \ |\underbrace{S_n(x)-S_m(x)}_{=\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)}| < \varepsilon,\ \forall n,m>N,\ \forall x\in X.$$

т.е $\forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon) \ / \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon,\ \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}; \forall x\in X$ $\blacktriangleleft$