21) Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Пусть $z=(x,y)=x+iy\in\mathbb{C}$ - комплексное число

$\mathbb{C}$ - поле

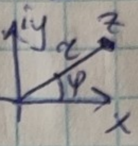
$x=\operatorname{Re}z$ - вещественная часть, $y=\operatorname{Im}z$ - мнимая часть

Опр. $z=r\underbrace{(\cos\varphi+i\sin\varphi)}_{=e^{i\varphi}}$ - полярная форма z

где $r=\sqrt{x^2+y^2}=:|z|$ - модуль z

$\varphi=\operatorname{Arg}(z)$ - аргумент z

$\operatorname{Arg} z=\{\arg z+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$



Св-ва:
$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
$\arg z_1z_2 = \arg z_1+\arg z_2$

Пусть $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ - пополнение

(норм. пр-во с нормой $\|z\|=|z|$

Опр. Пусть есть мн-во $M\subset\overline{\mathbb{C}}$. Если $\exists$ закон, по к-ому $\forall z\in M$ соответствует число $w\in\overline{\mathbb{C}}$, то говорят, что задана ф-ция f: $w=f(z)$

Опр. Пусть D - область $\overline{\mathbb{C}}$, $z\in D$, $w(z): D\to\mathbb{C}$, $z_0\in D$.

Тогда число $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0}\in\mathbb{C}$ назыв.

производной $=: w'(z_0)$. Ф-ция $w(z)$ - дифф-а в т. z_0 (если $\exists\lim$)

Примеры: 1. $f(z)=z^2$: $\forall z_0\in\mathbb{C}$:

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}(z+z_0)=2z_0$$

2. $f(z)=\bar z$: $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\bar h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$ - $\nexists$

$$\varphi(h)=\frac{\bar h}{h}=\underbrace{\frac{|h|}{|h|}}_{=1}\cdot\frac{e^{-i\varphi_0}}{e^{i\varphi_0}}=e^{-2i\varphi_0}$$ - зависит от угла $\varphi_0\Rightarrow\lim\nexists$

Утв. $w(z)$ - дифф-а в т. $z_0\Leftrightarrow w(z)=w(z_0)+A(z-z_0)+\bar{\bar{o}}(|z-z_0|)$ при $z\to z_0$, $A=w'(z_0)$

▷ $w(z)$ - дифф $\Leftrightarrow\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0}\to A=w'(z_0)\Leftrightarrow w(z)-w(z_0)=(z-z_0)(A+\bar{\bar{o}}(1))$ ◁

Теорема 1 (условия Коши-Римана):

Пусть $w(z)$ определена в обл. $D \ni z$, $z = x+iy$, $w = u+iv$ тогда в обл. $D \subset \mathbb{R}^2$ появляется две ф-ции $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - $\mathbb{R}$-дифференцируемы в D, тогда ф-ция $w(z)$ - $\mathbb{C}$-дифф-ма в $D \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$, $\forall z \in D$

Опр. $\mathbb{R}$-дифференцируемость ф-ции $w = u+iv \overset{def}{=}$ u и v - дифференцируемы (как вещ. ф-ции)

Опр. $\mathbb{C}$-дифференцируемость ф-ции $w = u+iv \overset{def}{=}$ w - $\mathbb{R}$-дифф-ма и $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$

▶ Запишем условие: $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - дифф-мы в т. z_0

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}\right)_{(x,y)\to(x_0,y_0)}$$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + C(x-x_0) + D(y-y_0) + \bar{o}\left(\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}\right)$$

где $A = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = u'_x(x_0,y_0)$, $B = u'_y(x_0,y_0)$, $C = v'_x(x_0,y_0)$, $D = v'_y(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow w(z) = w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = \underbrace{u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)}_{w(z_0)} +$$
$$+ (A+iC)(x-x_0) + (B+iD)(y-y_0) + \bar{o}(|z-z_0|)$$

Хотим проверить, что $w(z) = w(z_0) + (a+ib)(z-z_0) + \bar{o}(|z-z_0|) =$
$= w(z_0) + (a+ib)(x-x_0) + (-b+ia)(y-y_0) + \bar{o}(|z-z_0|)$

Если $\begin{cases} a+ib = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0) \\ -b+ia = u'_y(x_0,y_0) + iv'_y(x_0,y_0) \end{cases}$, то получим $\mathbb{C}$-дифф-ть и наоборот

$\Updownarrow$
$\begin{cases} a = u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ b = v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0) \end{cases}$ - Это условие Коши-Римана ◀

Зам: Дифф-ть w эквивалентна тому, что первый дифференциал $w = dw$ в декарт. координатах имеет матрицу вида: $dw = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Опр. Ф-ция f - голоморфна в т. z_0, если она дифф-ма в точке (т.е. ф-ция f определена в окр-ти т. z_0 и $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \in \mathbb{C}$)

Лемма: Пусть ф-ция f - определена в окр-ти т. z_0
$\exists f'(z_0) \Longleftrightarrow f$ - $\mathbb{C}$-дифференцируема в т. z_0

Теорема 2 (геометрический смысл модуля и аргумента производной)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - откр. мн-во, $w: D \to \mathbb{C}$ - $\mathbb{C}$-дифф. в т. $z_0 \in D$
$w'(z_0) \neq 0$.
Тогда dw - композиция поворота и растяжения/сжатия, причём $|w'(z_0)|$ - коэффициент растяжения
$\arg w'(z_0)$ - угол поворота.

w - $\mathbb{C}$-дифф в т. $z_0 \xRightarrow{\text{Усл. Коши-Римана}}$

$$dw = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{коэфф-т растяжения}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{матрица поворота}}$$

а) т.к. $w'(z_0)$ - производная по всем направлениям одинакова, т.е. не зависит от φ
то $w'(z_0) = (u'_x + i v'_x)\big|_{z_0} = a + ib$ - производная по направл. Ox
$\Rightarrow |w'(z_0)| = \sqrt{a^2+b^2}$

б) $\arg w'(z_0)$: $\cos \arg w'(z_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$

$\sin \arg w'(z_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ ◭