Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 10

Геометрические грубые траектории

Теорема 1. *Пусть* $(1, X, Y) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ *и* $\operatorname{Sym} Y = \frac{1}{2} X \otimes X$, *то найдется такая гладкая кривая* $X_t \colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$, *что* $X_0 = 0$, $X = X_1 - X_0$ *и*

$$Y^{ij} = \int_0^1 X_t^i \, dX_t^j.$$

На прошлой лекции установили, что $G^{(2)} = \{(1, b, c + \frac{1}{2} b \otimes b) \colon c^{ij} = -c^{ji}\} \subset T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ является группой Ли, причем $T_1 G^{(2)} = \{(0, \xi, 0)\}$, $\exp\Big(T_1 G^{(2)}\Big) = G^{(2)}$, для всякого $g \in G^{(2)}$ отображение $L_g(h) = g \otimes h$ является диффеоморфизмом $G^{(2)} \to G^{(2)}$ и $dL_g(v) = g \otimes v$. Всякий вектор $v \in T_1 G^{(2)}$ определяет гладкое векторное поле $V(g) = dL_g(v)$ и для всяких $u, v \in T_1 G^{(2)}$ верны равенства $[U(g), V(g)](1) = [u, v] = u \otimes v - v \otimes u$.

Положим

$$\mathcal{H} = \{(0, \xi, 0)\} \subset T_1 G^{(2)}, \quad \mathcal{H}_g = dL_g(\mathcal{H}) \subset T_g G^{(2)}.$$

На прошлой лекции было доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Если* $\gamma \colon [0,1] \to G^{(2)}$ *— гладкая кривая,* $\gamma(0) = 1$, *и для каждого* $t \in [0,1]$ *выполнено* $\dot\gamma(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$, *то*

$$\gamma(t) = \Big(1, X_t^i, \int_0^t X_s^i \, dX_s^j\Big).$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить следующий результат из суб-римановой геометрии.

Теорема 2. (Рашевский–Чоу) *Пусть* M *— гладкое конечномерное связное многообразие, для каждого* $p \in M$ *в касательном пространстве* $T_p M$ *задано линейное подпространство* $\mathcal{H}_p$, *которое является линейной оболочкой гладких векторных полей в точке* p, *на* $\mathcal{H}_p$ *задано скалярное произведение* $\langle \ , \ \rangle_p$, *гладко зависящее от точки* p. *Предположим, что для каждого* p *линейная оболочка векторов* $[v_1, [v_2, [\ldots [v_{n-1}, v_n]] \ldots]]$, *где* $v_k \in \mathcal{H}_p$, *совпадает с* $T_p M$. *Тогда для всяких точек* $p, q \in M$ *существует такая гладкая кривая* $\gamma \colon [0,1] \to M$ *(называемая горизонтальной кривой), что* $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ *и* $\dot\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$.

Заметим, что

$$(0, \xi, 0) \otimes (0, \alpha, 0) = (0, 0, \xi \otimes \alpha - \alpha \otimes \xi)$$

и линейная оболочка векторов $(0, 0, \xi \otimes \alpha - \alpha \otimes \xi)$ равна пространству векторов $(0, \xi, \eta)$, где $\eta^{ij} = -\eta^{ji}$. Следовательно, линейная оболочка векторов из $\mathcal{H}$ и их коммутаторов совпадает с $T_1 G^{(2)}$. Поскольку $dL_g([u, v]) = [dL_g(u), dL_g(v)]$, то аналогичное наблюдение верно для $\mathcal{H}_g = dL_g(\mathcal{H})$ и $T_g G^{(2)}$. Таким образом, в рассматриваемой нами ситуации выполнены условия теоремы Рашевского–Чоу и для всякого $g \in G^{(2)}$ существует такая гладкая кривая $\gamma \colon [0,1] \to G^{(2)}$, что $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = g$ и $\dot\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$. По доказанному выше $\gamma(t) = \Big(1, X_t^i, \int_0^t X_s^i \, dX_s^j\Big)$.

Лемма о сшивке

Напомним, что $\Delta_T = \{(s, t) \colon 0 \le s \le t \le T\}$.

Теорема 3. *Пусть A_{st} — непрерывное отображение $\Delta_T \to \mathbb{R}^N$, причем для некоторых $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ и для всех $s \le u \le t$ справедливо неравенство*

$$\Big|A_{st} - A_{su} - A_{ut}\Big| \le M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Тогда существует такая непрерывная кривая $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^N$, что $\gamma_0 = 0$ и

$$\gamma_t - \gamma_s = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} A_{uv}, \quad \Big|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}\Big| \le C(\varepsilon)M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Доказательство. Для всех $s \le t$ и всякого n положим

$$A^n_{st} = \sum_{k=0}^{2^n-1} A_{t^n_k t^n_{k+1}}, \quad t^n_k = s + \frac{k(t-s)}{2^n}.$$

Ясно, что $(s,t) \to A_{st}$ — непрерывное отображение. Пусть $u^n_k = (t^n_k + t^n_{k+1})/2$. Тогда

$$A^n_{st} - A^{n+1}_{st} = \sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(A_{t^n_k t^n_{k+1}} - A_{t^n_k u^n_k} - A_{u^n_k t^n_{k+1}}\Big)$$

и справедлива оценка

$$\Big|A^n_{st} - A^{n+1}_{st}\Big| \le \sum_{k=0}^{2^n-1} M|t-s|^{1+\varepsilon}2^{-n-\varepsilon n} = M|t-s|^{1+\varepsilon}2^{-\varepsilon n}.$$

В частности,

$$\sup_{\Delta_T}\Big|A^n_{st} - A^{n+1}_{st}\Big| \le MT^{1+\varepsilon}2^{-\varepsilon n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_n |A^n_{st} - A^{n+1}_{st}|$ сходится на Δ_T равномерно и поэтому сходится равномерно A^n_{st} к некоторому непрерывному отображению Γ_{st}. Более того, верна оценка

$$\Big|\Gamma_{st} - A_{st}\Big| \le C(\varepsilon)M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Пусть теперь $s < u < t$ — двоично рациональные точки. Тогда для достаточно больших n выполнено равенство

$$A^n_{st} = A^n_{su} + A^n_{ut},$$

которое в пределе дает равенство $\Gamma_{st} = \Gamma_{su} + \Gamma_{ut}$. В силу непрерывности последнее равенство верно для всех $s \le u \le t$. Положим $\gamma_t = \Gamma_{0t}$. Имеем $\gamma_t - \gamma_s = \Gamma_{st}$ и

$$\Big|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}\Big| \le C(\varepsilon)M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Для всякого разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[s,t]$ на отрезки $[u,v]$ выполнено

$$\Big|\gamma_t - \gamma_s - \sum_{[u,v]} A_{uv}\Big| \le \sum_{[u,v]}\Big|\gamma_v - \gamma_u - A_{uv}\Big| \le C(\varepsilon)M\sum_{[u,v]}|u-v|^{1+\varepsilon} \le C(\varepsilon)M|t-s|\lambda(\mathbb{T})^{\varepsilon}.$$

Следовательно, верно равенство

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]} A_{uv} = \gamma_t - \gamma_s.$$

□

Интеграл Юнга

В качестве применения леммы о сшивке построим интеграл Юнга.

Пусть $X_t \in C^\alpha[0,T]$, $Y_t \in C^\beta[0,T]$ и $\alpha+\beta>1$. Положим $A_{st} = Y_s X_{st}$. Тогда

$$A_{st} - A_{su} - A_{ut} = Y_s X_{st} - Y_s X_{su} - Y_u X_{ut} = Y_s X_{ut} - Y_u X_{ut} = Y_{su} X_{ut}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\Big|A_{st} - A_{su} - A_{ut}\Big| \le \|X\|_\alpha \|Y\|_\beta |t-s|^{\alpha+\beta},$$

позволяющая применить лемму о сшивке. Соответствующую непрерывную кривую γ_t обозначаем через

$$\int_0^t Y_u\, dX_u$$

и называем интегралом Юнга. Выполнены следующие свойства:

$$\int_s^t Y_u\, dX_u = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]} Y_u X_{uv}, \qquad \Big|\int_s^t Y_u\, dX_u - Y_s X_{st}\Big| \le C(\alpha,\beta)\|X\|_\alpha \|Y\|_\beta |t-s|^{\alpha+\beta}.$$

Контролируемые траектории

Пусть $X_t \in C^\alpha[0,T]$. Пара (Y_t, Y'_t) называется контролируемой относительно X_t траекторией, если Y_t, Y'_t — гёльдеровы с показателем α и для всех $s \le t$

$$Y_{st} = Y'_s X_{st} + R_{st}, \quad |R_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha}.$$

Кривая Y'_t называется производной Губинелли. Надо иметь ввиду, что производная Губинелли в общем случае не определена единственным образом.

Рассмотрим важный пример контролируемой траектории.

Пусть $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ и $X_t \in C^\alpha[0,T]$. Тогда

$$f(X_t) - f(X_s) = \int_0^1 f'(X_s + \tau X_{st})\, d\tau X_{st} = f'(X_s) X_{st} + R_{st},$$

где

$$R_{st} = \int_0^1 \big(f'(X_s + \tau X_{st}) - f'(X_s)\big)\, d\tau X_{st}.$$

Поскольку $|R_{st}| \le \max|f''||X_{st}|^2 \le C|t-s|^{2\alpha}$, то $(f(X_t), f'(X_t))$ — контролируемая траектория относительно X_t.

Пространство $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ контролируемых относительно X_t траекторий (Y_t, Y'_t) является банаховым пространством относительно нормы

$$\|(Y, Y')\| = |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_\alpha + \|R\|_{2\alpha}.$$