Задачи семинара

Интеграл Римана–Стилтьеса

Задача 1. При каких $a > 0$ функция $x \sin(x^{-a})$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$?

Задача 2. Пусть $g \in C[a, b]$ — функция ограниченной вариации. Докажите, что
(a) $Var_{[a,c]} g + Var_{[c,b]} g = Var_{[a,b]} g$ при $a < c < b$,
(b) функция $x \to Var_{[a,x]} g$ непрерывна.

Задача 3. Пусть $f \in C[a, b]$ и $g \in C^1[a, b]$. Докажите, что

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t)\, dt.$$

Задача 4. Предположим, что существует интеграл Римана–Стилтьеса $\int_a^b f(t)\, dg(t)$. Докажите, что существует интеграл Римана–Стилтьеса $\int_a^b g(t)\, df(t)$ и верно равенство

$$\int_a^b g(t)\, df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)\, dg(t).$$

Задача 5. Приведите пример функций f и g, для которых интеграл от f по dg существует на $[-1, 0]$ и на $[0, 1]$, но не существует на $[-1, 1]$.

Задача 6. Пусть $f, g \in C[a, b]$ и g — функция ограниченной вариации. Докажите, что при $a < c < b$

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^c f(t) dg(t) + \int_c^b f(t) dg(t).$$

Задача 7. Пусть $f, g \in C[a, b]$ и g — функция ограниченной вариации. Докажите, что функция

$$t \to \int_a^t f(s)\, dg(s)$$

непрерывна на $[a, b]$. Является ли эта функция функцией ограниченной вариации?

Задача 8. Пусть $F \in C^1(\mathbb{R})$ и $g \in C[a, b]$ — функция ограниченной вариации. Докажите, что

$$\int_a^b F'(g(t)) dg(t) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Задача 9. Пусть g – непрерывная функция ограниченной вариации на $[0, T]$ и $f(t, y)$ — непрерывная функция, причем

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|.$$

Придайте смысл уравнению

$$dy(t) = f(t, y(t)) dg(t)$$

и докажите теорему существования и единственности решения задачи Коши. Докажите, что функция $y(t) = y(0)e^{g(t)}$ является решением уравнения $dy(t) = y(t) dg(t)$.

Задача 10. Пусть f, g – непрерывные функции ограниченной вариации на $[0,T]$ Рассмотрим систему уравнений
$$dx = df, \quad dy = xdg.$$
Докажите, что пара $x(t) = f(t)$, $y(t) = \int_0^t f(s)dg(s)$ является решением. Существует ли непрерывное отображение $C[0,T] \times C[0,T] \to C[0,T]$, ограничение которого на функции ограниченной вариации имеет вид
$$(f,g) \mapsto \int_0^t f(s)\,dg(s)?$$

Винеровский процесс

Задача 11. Проверьте, что в определении винеровского процесса условия: $\mathbb{E}w_t = 0$, $\mathbb{E}w_t w_s = \min\{t,s\}$, вектор $(w_{t_1}, \ldots, w_{t_n})$ гауссовский, можно заменить на условия: $w_t - w_s \sim N(0, t-s)$ и при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ величины $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ независимы.

Задача 12. Пусть w_t — винеровский процесс. Докажите, что при $t > s$ величина $w_t - w_s$ независима от сигма-алгебры $\mathcal{F}_s = \sigma(w_\tau, \tau \le s)$.

Задача 13. Пусть w_t — винеровский процесс. Пусть $t_k = \frac{kT}{2^n}$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n$. Докажите, что почти наверное
$$\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 \to T.$$

Задача 14. Пусть $f \in C[0,T]$, $p > 1$, $\alpha > 0$. Докажите неравенство
$$|f(t) - f(s)|^p \le C(p,\alpha,T)|t-s|^{-1+p\alpha} \int_0^T \int_0^T \frac{|f(u) - f(v)|^p}{|u-v|^{1+p\alpha}}\,du\,dv.$$

Задача 15. Докажите, что почти наверное траектории винеровского процесса нигде не дифференцируемы.

Задача 16. Пусть $\xi_n \sim N(0,1)$ — независимые величины. Проверьте, что для некоторой последовательности номеров N_k суммы
$$\frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{N_k} \xi_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nt}{n}$$
сходятся почти наверное равномерно и их предел является винеровским процессом.

Пространство Камерона–Мартина

Задача 17. Проверьте, что функции
$$\frac{t}{\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nt}{n}$$
являются ортонормированным базисом пространства Камерона–Мартина меры Винера на пространстве $C[0,\pi]$.

Задача 18. Пусть μ — конечная борелевская мера на $[0,T]$. Выразите общее решение уравнения $y'' = \mu$ через функцию распределения $f(t) = \mu([0,t])$.

Задача 19. Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что не существует вероятностной меры γ на H, у которой преобразование Фурье равно $\exp(-\|h\|^2/2)$.

Задача 20. Пусть H — гильбертово пространство и γ — центрированная гауссовская мера на H. Ковариационный оператор K определяется равенством

$$\langle Kx, y\rangle = \int \langle x, u\rangle\langle u, y\rangle\gamma(du).$$

Докажите, что K является компактным самосопряженным оператором. Найдите пространство Камерона–Мартина. Рассмотрите в качестве примера меру Винера на $L^2[0, 2\pi]$ и получите новое описание пространства Камерона–Мартина.

Задача 21. Докажите, что пространство Камерона–Мартина является пересечением линейных пространств полной меры.

Интеграл Ито

Задача 22. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, w_t — винеровский процесс и $\mathcal{F}_t$ — соответствующая фильтрация. Через $\mathbb{L}^2[0, T]$ обозначим пространство функций $\xi.\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, которые измеримы относительно $\mathcal{F} \times \mathcal{B}[0, T]$ и для каждого t величина ξ_t измеримы относительно $\mathcal{F}_t$, причем

$$\|\xi\|^2 = \mathbb{E}\int_0^T |\xi_t|^2\, dt < \infty.$$

Докажите, что в $\mathbb{L}^2[0, T]$ всюду плотно семейство функций вида

$$\sum_{k=0}^{n-1} \eta_k I_{(t_k, t_{k+1}]},$$

где $\{t_k\}$ — разбиение отрезка $[0, T]$, а случайная величина η_k измерима относительно $\mathcal{F}_{t_k}$.

Задача 23. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $\mathcal{F}_t$ — фильтрация. Докажите, что пространство квадратично интегрируемых почти наверное непрерывных мартингалов M_t на $[0, T]$ с нормой $\|M\| = \sqrt{\mathbb{E}|M_T|^2}$ является банаховым пространством.

Задача 24. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathcal{F}_t$ — фильтрация и M_t — непрерывный квадратично интегрируемый Мартингал на $[0, T]$, а $\langle M\rangle_t$ — его квадратичная вариация, то есть такой неубывающий непрерывный процесс, что процесс $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ является мартингалом. Докажите, что в среднем квадратичном

$$\sum_k \bigl(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\bigr)^2 \to \langle M\rangle_T$$

при $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$ и $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[0, T]$.

Задача 25. Пусть w_t — винеровский процесс. Проверьте, что $\xi_t = e^{w_t - \frac{t}{2}}$ является решением стохастического уравнения $d\xi_t = \xi_t\, dw_t$, $\xi_0 = 1$.

Задача 26. Пусть w_t — винеровский процесс. Докажите, что решение стохастического уравнения

$$d\xi_t = -\tfrac{1}{2}\xi_t\, dt + dw_t$$

задается формулой

$$\xi_t = e^{-t/2}\xi_0 + e^{-t/2}\int_0^t e^{s/2}\, dw_s.$$

Задача 27. Пусть b и σ — гладкие ограниченные функции на $\mathbb{R}$ с ограниченными производными, причем $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$. Предположим, что случайный процесс $w_{t,n}$ является кусочно-гладкой функцией по t и при каждом t почти наверное сходится к w_t. Пусть $x_{t,n}(\omega)$ при каждом ω является решением обычного дифференциального уравнения

$$dx_{t,n} = b(x_{t,n})\, dt + \sigma(x_{t,n})\, dw_{t,n}, \quad x_{t,n} = x_0.$$

Найдите предел $x_{t,n}$ при $n \to +\infty$.

Задача 28. Пусть f — гладкая функция с ограниченными производными. Найдите

$$\int_0^T f'(w_t) \circ dw_t.$$

Задача 29. Пусть f — гладкая функция с ограниченными производными на $\mathbb{R}^d$. Выразите интеграл

$$\int_0^T f(w_t^1, \dots, w_t^d) \circ dw_t^i$$

через интеграл Ито.

Задача 30. Пусть w_t^i — независимые винеровские процессы. Пусть g — неотрицательная гладкая функция с носителем в $[0,1]$ и равным единице интегралом. Положим $g_n(t) = ng(nt)$. Положим

$$w_{t,n}^i(\omega) = \int_0^{+\infty} w_{t+s}^i(\omega) g_n(s)\, ds.$$

Найдите предел при $n \to \infty$ выражения

$$\int_0^T w_{t,n}^i dw_{t,n}^j - \int_0^T w_{t,n}^j dw_{t,n}^i.$$

Задача 31. Пусть x_t — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что величина

$$\frac{1}{2}\int_s^t (x_\tau^1 - x_s^1)\, dx_\tau^2 - (x_\tau^2 - x_s^2)\, dx_\tau^1$$

выражает площадь (со знаком) между кривой и хордой, соединяющей точки (x_s^1, x_s^2) и (x_t^1, x_t^2).

Задача 32. Пусть $x_n(t) = \frac{1}{n}\cos n^2 t$, $y_n(t) = \frac{1}{n}\sin n^2 t$, где $t \in [0, 2\pi]$. Проверьте, что по гёльдеровой норме

$$\|f\|_\delta = \max_{[0,2\pi]} |f(t)| + \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\delta}, \quad 0 < \delta < 1/2$$

последовательности x_n и y_n стремятся к нулю. Найдите предел посследовательности

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x_n dy_n - y_n dx_n.$$

Сигнатура кривой

Задача 33. Найдите

$$\int_{0<u_1<t} dx_{u_1}^i, \quad \int_{0<u_1<u_2<t} dx_{u_1}^{i_1} dx_{u_2}^{i_2}, \quad \int_{0<u_1<u_2<u_3<t} dx_{u_1}^{i_1} dx_{u_2}^{i_2} dx_{u_3}^{i_3}$$

для кривой (x_t^1, x_t^2), где

$$(a)\, x_t^1 = a^1 + b^1 t, \quad x_t^2 = a^2 + b^2 t, \quad (b)\, x_t^1 = e^t, \quad x_t^2 = e^{2t}.$$

Задача 34. Докажите, что сигнатура гладкой кривой не меняется при параллельном переносе и гладкой возрастающей замене параметра.

Задача 35. Пусть $(x_t)_{t \in [0,T]}$ — гладкая кривая, причем $\max_{[0,T]} |x_t'| = M$. Докажите, что

$$\Big|\int_{0<u_1<\ldots<u_k<T} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k}\Big| \leq \frac{M^k}{k!}.$$

Задача 36. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — непрерывные функции на $[0, T]$ и $1 \leq i < m$. Докажите, что

$$\int_{0<u_1<\ldots<u_i<t} f_1(u_1)\cdots f_i(u_i)\,du_1\ldots\,du_i \cdot \int_{0<v_{i+1}<\ldots<v_m<t} f_{i+1}(v_{i+1})\cdots f_m(v_m)\,du_{i+1}\ldots\,du_m$$

является линейной комбинацией интегралов вида

$$\int_{0<u_1<\ldots<u_m<t} f_{i_1}(u_1)\cdots f_{i_m}(u_m)\,du_1\ldots\,du_m,$$

где $(i_1, \ldots, i_m)$ пробегает все перестановки элементов $\{1, 2, \ldots, m\}$. Проведите рассуждение по индукции, рассмотрев производную функции $g(t) =$

$$= \int_{0<u_1<\ldots<u_i<t} f_1(u_1)\cdots f_i(u_i)\,du_1\ldots\,du_i \cdot \int_{0<v_{i+1}<\ldots<v_m<t} f_{i+1}(v_{i+1})\cdots f_m(v_m)\,du_{i+1}\ldots\,du_m.$$

Задача 37. Пусть x_t — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$, $x_0 = 0$. Выразите через сигнатуру величины

$$(a) \int_{0<u_1<u_2<T} dx^1_{u_1}dx^2_{u_2} \cdot \int_0^T dx^2_u, \quad \int_0^T (x^1_u)^2 x^2_u\,dx^1_u.$$

Задача 38. Пусть x_t — гладкая кривая в $\mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$. Положим $y_t = x_{T-t}$. Докажите, что

$$S(x) \otimes S(y) = 1.$$

Задача 39. («lead-lag embedding») По набору из четырёх значений (a_1, a_2, a_3, a_4) построили набор точек плоскости:

$$(a_1, a_1), \quad (a_1, a_2), \quad (a_2, a_2), \quad (a_2, a_3), \quad (a_3, a_3), \quad (a_3, a_4), \quad (a_4, a_4),$$

которые последовательно соединили отрезками. Получили плоскую кривую X_t, $t \in [0, T]$. Изобразите эту кривую в случае, когда $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 3$. Найдите

$$\int_{0<u_1<T} dx^i_{u_1}, \quad \int_{0<u_1<u_2<T} dx^{i_1}_{u_1}dx^{i_2}_{u_2}.$$

Задача 40. («cumulative lead-lag embedding») Пусть в условиях предыдущей задачи

$$a_1 = 0, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = b_1 + b_2, \quad a_4 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Выразите

$$\int_{0<u_1<T} dx^i_{u_1}, \quad \int_{0<u_1<u_2<T} dx^{i_1}_{u_1}dx^{i_2}_{u_2}$$

через b_1, b_2, b_3.

Мультипликативные функционалы и грубые траектории

Задача 41. Пусть $(1, X^{(1)}_{st}, \ldots, X^{(k)}_{st})$ — мультипликативный функционал, причем выполнено $(k+1)\alpha > 1$ и $|X^{(j)}_{st}| \leq C_j|t-s|^{\alpha j}$ при $j = 1, 2\ldots, k$. Положим $\widehat{X}_{st} = (1, \widehat{X}^{(1)}_{st}, \ldots, \widehat{X}^{(k)}_{st}, 0)$. Докажите, что существует предел

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \widehat{X}_{su_1} \otimes \widehat{X}_{u_1u_2} \otimes \ldots \otimes \widehat{X}_{u_{N-1}t}.$$

Задача 42. Пусть $(1, X^{(1)}_{st}, X^{(2)}_{st})$ — мультипликативный функционал степени 2 на $[0, T]$. Докажите, что для всякого разбиения $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ верно равенство

$$X^{(2)}_{st} = \sum_k \Big(X^{(2)}_{u_k u_{k+1}} + X^{(1)}_{su_k} \otimes X^{(1)}_{u_k u_{k+1}}\Big).$$

Задача 43. Пусть $(1, X^{(1)}_{st}, X^{(2)}_{st})$ — мультипликативный функционал степени 2 на $[0,T]$, причем $|X^{(1)}_{st}| \le K_1|t-s|^\alpha$ и $|X^{(2)}_{st}| \le K_2|t-s|^{2\alpha}$. Докажите, что для всякого $p>2$ справедливо неравенство

$$K_2 \le 2K_1^2 + N(p,\alpha)\Big(\int_0^T\int_0^v \frac{|X_{uv}|^p}{|u-v|^{2\alpha p+2}}\,du\,dv\Big)^{1/p}.$$

Задача 44. Используя приближение стохастического интеграла Стратоновича интегралом Римана–Стилтьеса и предыдущую задачу дать обоснование почти наверное непрерывности по Гёльдеру с показателем 2α, где $\alpha\in(1/3,1/2)$, интеграла

$$\int_s^t (w^i_\tau - w^i_s)\circ dw^j_\tau,$$

без ссылки на теорему Колмогорова для грубых траекторий.

Задача 45. Пусть $(1, X^{(1)}_{st,n}, X^{(2)}_{st,n})$ — мультипликативные функционалы степени 2 на $[0,T]$, причем $|X^{(1)}_{st,n}| \le K_1|t-s|^\alpha$ и $|X^{(2)}_{st,n}| \le K_2|t-s|^{2\alpha}$, где константы K_1, K_2 не зависят от n. Предположим, что $X^{(1)}_{st,n}\to X^{(1)}_{st}$ и $X^{(2)}_{st,n}\to X^{(2)}_{st}$ поточечно. Докажите, что $(1, X^{(1)}_{st}, X^{(2)}_{st})$ — мультипликативные функционал степени 2 на $[0,T]$. Докажите, что при $0<\beta<\alpha$ величина

$$\sup_{s\ne t}\frac{|X^{(1)}_{st}-X^{(1)}_{st,n}|}{|t-s|^\beta} + \sup_{s\ne t}\frac{|X^{(2)}_{st}-X^{(2)}_{st,n}|}{|t-s|^{2\beta}}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$.

Задача 46. Докажите, что пространство Гёльдера $C^\alpha[0,T]$ является полным, но не является сепарабельным.

Задача 47. Пусть $X\in C^\alpha[0,T]$. Докажите, что если

$$\lim_{\delta\to 0+}\sup_{|s-t|\le\delta}\frac{|X_{st}|}{|s-t|^\alpha} = 0,$$

то X можно приблизить в $C^\alpha[0,T]$ гладкими функциями.

Задача 48. Пусть $0<\alpha<1$. Проверьте, что функцию t^α нельзя в $C^\alpha[0,1]$ приблизить гладкими функциями.

Задача 49. Найдите замыкание бесконечно дифференцируемых функций в $C^1[0,T]$.

Задача 50. Пусть h — непрерывно дифференцируемая кривая $[0,T]\to\mathbb{R}^d$. Для всякой грубой траектории $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathcal{C}^\alpha[0,T]$ положим $T_h(\mathbf{X}) = (X^h, \mathbb{X}^h)$, где

$$X^h = X + h, \quad \mathbb{X}^h_{st} = \mathbb{X}_{st} + \int_s^t h_{sr}\otimes dX_r + \int_s^t X_{sr}\otimes dh_r + \int_s^t h_{sr}\otimes dh_r.$$

Докажите, что T_h — непрерывное отображение из $\mathcal{C}^\alpha[0,T]$ в $\mathcal{C}^\alpha[0,T]$.

Задача 51. Пусть $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathcal{C}^\alpha[0,T]$ и $(W,\mathbb{W})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу. Положим

$$Z_t = \begin{pmatrix} X_t \\ W_t \end{pmatrix}, \mathbb{Z}_{st} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_{st} & \int_s^t X_{sr}\otimes dw_r \\ \int_s^t w_{sr}\otimes dX_r & \mathbb{W}_{st} \end{pmatrix}$$

Докажите, что $(Z,\mathbb{Z})$ имеет модификацию, которая является грубой траекторией.

Задача 52. Пусть $(X, \mathbb{X})$ — геометрическая грубая траектория с показателем Гёльдера $\alpha = 1/2$. Докажите, что

$$\mathbb{X}^{ij}_{st} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} X^i_{su} X^j_{uv},$$

где $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[s, t]$.

Задача 53. Пусть w_t — многомерный винеровский процесс. Положим $X_t = \beta t + \sigma W_t$. Предложите грубую траекторию, соответствующую кривой X_t.

Задача 54. Пусть $(X, \mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^\alpha$ и $F^{ij}_{st} = \mathbb{X}^{ij}_{st} + \mathbb{X}^{ji}_{st} - X^i_{st} X^j_{st}$. Докажите, что

$$F_{st} = F_{su} + F_{ut}, \quad |F_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha}.$$

Задача 55. Покажите, что геометрическая грубая траектория $(X, \mathbb{X})$ не определяется однозначно своей первой компонентой X и приближая кривую X гладкими кривыми можно получить различные грубые траектории.

Задача 56. Пусть $G^{(2)}$ — подгруппа в $T^{(2)}_1(V)$, состоящая из элементов $(1, b, c + \frac{1}{2} b \otimes b)$, где $c^{ij} = -c^{ji}$. Пусть $(X, \mathbb{X})$ — грубая геометрическая траектория. Проверьте, что $g_t = (1, X_t, \mathbb{X}_{0t}) \in G^{(2)}$ и найдите $g_s^{-1} \otimes g_t$ для $s < t$.

Интегрирование по грубой траектории

Задача 57. Обоснуйте лемму о сшивке с помощью рассуждений, которые использовались при обосновании существования предела в задаче 41.

Задача 58. Докажите для интеграла Юнга формулу Ньютона–Лейбница

$$F(x_t) - F(x_s) = \int_s^t F'(x_\tau)\, dx_\tau,$$

где x_t — кривая класса C^α, функция F непрерывно дифференцируема и $F' \in C^\beta$, причем $\alpha(\beta + 1) > 1$.

Задача 59. Докажите для интеграла Юнга формулу интегрирования по частям

$$X_T Y_T = X_0 Y_0 + \int_0^T X_u\, dY_u + \int_0^T Y_u\, dX_u.$$

Задача 60. Пусть $Y, Z \in C^\beta[0, T]$, $X \in C^\alpha[0, T]$ и $\alpha + \beta > 1$. Положим

$$U_t = \int_0^t Z_s\, dX_s.$$

Обоснуйте равенство

$$\int_0^T Y_t\, dU_t = \int_0^T Y_t Z_t\, dX_t.$$

Задача 61. Найдите производную Губинелли относительно $X_t = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $t \in [0, 1]$, у кривых (a) $Y_t = t$, (b) $Y_t = t^\beta$, (c) $Y_t = \cos(t^\beta)$.

Задача 62. Верно ли, что производная Губинелли определена единственным образом? Докажите, что если для всякого ненулевого вектора v выпонено

$$\overline{\lim}_{t\to s+}\frac{|\langle X_{st},v\rangle|}{|t-s|^{2\alpha}}=\infty,$$

то производная Губинелли Y'_s определена однозначно. Убедитесь, что производная Губинелли относительно винеровского процесса определена однозначно.

Задача 63. Обоснуйте правило Лейбница для контролируемых траекторий: если (Y,Y') и (Z,Z') — контролируемые траектории относительно X, то $(YZ,Y'Z+YZ')$ — контролируемая траектория относительно X.

Задача 64. Пусть $(Y,Y')\in\mathcal{D}^{2\alpha}_X$, $(X,\mathbb{X}),(\widetilde{X},\widetilde{\mathbb{X}})\in\mathfrak{C}^\alpha$, причем $\widetilde{X}_t=X_t$ и $\widetilde{\mathbb{X}}_{st}=\mathbb{X}_{st}+F_t-F_s$. Докажите, что

$$\int_0^T Y_u\,d\widetilde{X}_u=\int_0^T Y_u\,dX_u+\int_0^T Y'_u dF_u.$$

Задача 65. Покажите, что интеграл по грубой траектории действительно зависит от производной Губинелли.

Задача 66. Пусть f — гладкая функция с ограниченными производными до третьего порядка включительно и $(X,\mathbb{X})\in\mathfrak{C}^\alpha$. Предположим, что $(X,\mathbb{X})$ — геометрическая грубая траектория. Докажите, что

$$\int_0^T Df(X_u)\,dX_u=f(X_T)-f(X_0).$$

Верно ли это утверждение, если $(X,\mathbb{X})$ не является геометрической грубой траекторией? Можно ли в этом утверждении контролируемую кривую $(Df(X_t),D^2f(X_t))$ заменить на $(Df(X_t),Y'_t)$ с какой-то производной Губинелли Y'?

Задача 67. Докажите, что интеграл Стратоновича почти наверное совпадает с интегралом по соответствующей грубой траектории.

Задача 68. В условии задачи 50 ослабим ограничения на h до $h\in C^{2\alpha}[0,T]$, а интегралы будем понимать как интегралы Юнга. Проверьте, что $(X^h_t,\mathbb{X}^h)$ является грубой траекторией. Найдите $[X^h]_t$.

Задача 69. Пусть (Y,Y') и (Z,Z') — две контролируемые относительно X кривые. Докажите, что существует предел

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}\Big(Y_uZ_{uv}+Y'_uZ'_u\mathbb{X}_{uv}\Big),$$

который обозначаем через $\displaystyle\int_s^t Y_u\,dZ_u$.

Задача 70. Пусть $(Y,Y'),(Z,Z')$ — контролируемые траектории относительно X. Проверьте равенство

$$\int_0^T Y_t\,dU_t=\int_0^T Y_tZ_t\,dX_t,\quad U_t=\int_0^t Z_s\,dX_s,$$

где интегралы в правой части равенства и в определении U являются интегралами по грубым траекториям, а интеграл в левой части понимается в смысле задачи 69 (напомним, что (U,Z) — контролируемая траектория).

Задача 71. Пусть (Z,Z') — контролируемая траектория. Понимая интеграл как в задаче 69 положим

$$\mathbb{Z}_{st}=\int_s^t Z_{su}\otimes dZ_u.$$

Проверьте, что $(Z, \mathbb{Z})$ является грубой траекторией, причем грубый интеграл по Z совпадает с интегралом из задачи 69.

Задача 72. Пусть $Y, Z, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$ и

$$\max\{\|Y\|_{\mathcal{D}}, \|Z\|_{\mathcal{D}}, \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}, \|\widetilde{Z}\|_{\mathcal{D}}\} \leq M.$$

Докажите, что

$$\Big|\int_0^T Y\,dZ - \int_0^T \widetilde{Y}\,d\widetilde{Z}\Big| \leq C(M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|Z - \widetilde{Z}\|_{\mathcal{D}}\big).$$

Задача 73. Пусть $(X, \mathbb{X})$ — грубая траектория, (Y, Y') — контролируемая траектория относительно X. Пусть $Z_t = \displaystyle\int_0^t Y_s\,dX_s$, а $(Z, \mathbb{Z})$ — соответствующая грубая траектория. Докажите, что

$$[Z]_t = \int_0^t Y_s \otimes Y_s\,d[X]_s.$$

Задача 74. Пусть

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Z_u dX_u + F_t,$$

где $F_t \in C^{2\alpha}$, $(X, \mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^\alpha$, $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$. Для гладкой функции f обоснуйте равенство

$$f(Y_T) - f(Y_0) = \int_0^T Df(Y_u)Z_u\,dX_u + \int_0^T Df(Y_u)dF_u + \frac{1}{2}\int_0^T D^2f(Y_u)(Z_u \otimes Z_u)\,d[X]_u.$$

Задача 75. Решите грубое дифференциальное уравнение

$$dY = YZdX,$$

где $(X, \mathbb{X})$ — грубая траектория, (Z, Z') — контролируемая относительно X траектория.

Задача 76. Распространите теорему существования и единственности на грубое дифференциальное уравнение вида

$$dY = g(Y)\,dt + f(Y)\,dX,$$

где $(X, \mathbb{X})$ — грубая траектория, а g, f — трижды дифференцируемые функции с ограниченными производными.

(Указание: увеличить размерность и свести к уравнению $dY = f(Y)\,dX$)

Задача 77. Рассмотрим грубое дифференциальное уравнение $dY = f(Y)\,dX$, где f — гладкая **ограниченная** функция с ограниченными производными. Докажите, что в этом случае теорема существования верна не только на малом отрезке $[0, \tau] \subset [0, T]$, но и на всем отрезке $[0, T]$.

(Указание: немного поменять метрику в доказательстве теоремы существования и убедиться, что построенное τ не зависит от начальной точки)