О НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСТИЦ

Исакова Альбина

Научный руководитель:
Манита Анатолий Дмитриевич

26 мая 2023

Введение

Модель C-S (Cucker-Smale)

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -L_x v, \end{cases}$$

где L_x - Лапласиан матрицы смежности A_x. Матрица A_x состоит из элементов $a_{ij} = a(\|x_i - x_j\|)$.

- F. Cucker and S. Smale (2007)
  On the mathematics of emergence.
  Japan J Math
- R. Erban, J. Haskovec, and Y. Sun (2015).
  A Cucker–Smale Model with Noise and Delay.
  SIAM Journal on Applied Mathematics
- F. Dalmao and E. Mordecki (2012).
  Hierarchical Cucker-Smale Model Subject to Random Failure.
  IEEE Transactions on Automatic Control

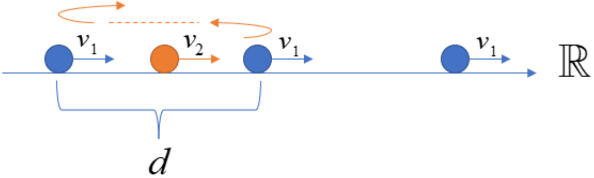
Введение

Модель Crescenzo-Martinucci
Движение на прямой описывается процессом $\{(X_t, V_t)\,;\, t \geq 0\}$ с пространством состояний $\mathbb{R} \times \{-v, c\}$.

- A. Crescenzo and B. Martinucci (2010).
  A Damped Telegraph Random Process with Logistic Stationary Distribution.
  Journal of Applied Probability
- A. Crescenzo, A. Iuliano, B. Martinucci, and S. Zacks (2013).
  Generalized Telegraph Process with Random Jumps.
  Journal of Applied Probability
- A. H. Hajiyev and T. S. Mammadov (2012).
  Mathematical Models of Moving Particles without Overtake and Their Applications.
  Theory of Probability & Its Applications

Описание модели

- Лидеры двигаются с постоянной скоростью v_1
- Участники двигаются со скоростью $v_2 > v_1$



Лидеры находятся на равном расстоянии d друг от друга.

В моменты, когда участник сталкивается с лидером, скорость участника меняется на противоположную.

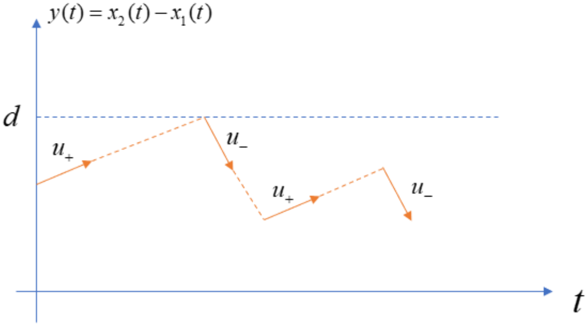
Описание модели

В условиях данной модели введем следующие обозначения:

- $x_1(t), x_2(t)$ - координаты лидера и участника соответственно
- $v_1(t), v_2(t)$ - скорости лидера и участника
- $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$ - расстояние между частицами
- $v(t) = v_2(t) - v_1(t)$ - относительная скорость
- $u_- = v_2 + v_1$ - скорость сближения лидера и участника
- $u_+ = v_2 - v_1$ - скорость отдаления

Описание модели

Предположим теперь, что в моменты скачков пуассоновского процесса Π_t с интенсивностью α мы разворачиваем скорость участника. Тогда траектория может принимать другие формы.



Постановка задачи

Рассмотрим двумерный стохастический процесс

$$\xi_t = \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} y(t) &= x_2(t) - x_1(t) \in [0, d] \\ v(t) &= v_2(t) - v_1(t) \in \{u_+, u_-\} \end{aligned}$$

Далее будем считать, что $\xi_t \in X := [0, d] \times \{u_+, u_-\}$.

Мы хотим установить, существует ли стационарное распределение процесса ξ_t и по возможности найти его явный вид.

Необходимая теория

Рассмотрим оператор P^t в пространстве $\mathbf{B}$ ограниченных функций такой, что для $f \in \mathbf{B}$

$$P^t f(x) = \int\limits_X f(z) P(x, t, dz) = E\left(f(\xi_t) | \xi_0 = x\right),$$

где $P(x, t, \Gamma)$ - переходная функция марковского процесса ξ_t.

С другой стороны в пространстве счетно-аддитивных функций множеств $\mathbf{V}$ оператор P^t можно определить для $\nu \in \mathbf{V}$

$$\nu P^t(\Gamma) = \int\limits_X \nu(dx) P(x, t, \Gamma).$$

Необходимая теория

Инфинитезимальный оператора A определен на элементе $f \in \mathbf{B}$ и равен

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \left(P^t f(x) - f(x) \right),$$

если этот предел по норме существует и равномерен по x.

Аналогичным образом можно определить A на $\mu \in \mathbf{V}$

$$\mu A = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \left(\mu P^t - \mu \right),$$

в смысле сходимости по вариации.

Идея доказательства

Стационарным распределением называют вероятностную инвариантную меру, т. е. меру μ такую, что выполнено условие $\mu \equiv \mu P^t$, $t \geq 0$ и $\mu(X) = 1$.

Из $\mu P^t \equiv \mu$ следует, что $\mu A = 0$, и дело сводится к тому, чтобы найти ненулевое неотрицательное решение уравнения $\mu A = 0$ и пронормировать его, разделив на $\mu(X)$.

Будем считать, что функции $f(x) \in \mathbf{B}$ отображают множество $X = X_+ \bigsqcup X_-$ в $\mathbb{R}$, где $X_+ = [0, d) \times \{u_+\}$ и $X_- = (0, d] \times \{u_-\}$.

$$f(x) = \begin{cases} f_+(y) & , \; x = (y, u_+) \\ f_-(y) & , \; x = (y, u_-) \end{cases}$$

Основные результаты

Справедливы следующие результаты

Утверждение

Инфинитезимальный оператор полугруппы $P^h f$ действует на f

$$Af(x) =$$

$$\begin{cases} -u_- f'_-(y) - \alpha f_-(y) + \alpha f_+(y), & x = (y, u_-), \quad y \in (0, d) \\ u_+ f'_+(y) - \alpha f_+(y) + \alpha f_-(y), & x = (y, u_+), \quad y \in (0, d) \\ \dfrac{\alpha u_-}{u_- + u_+}(f_+(d-0) - f_-(d)) - u_- f'_-(d), & x = (d, u_-) \\ \dfrac{\alpha u_+}{u_- + u_+}(f_-(0+0) - f_+(0)) + u_+ f'_+(0), & x = (0, u_+) \end{cases}$$

Здесь $f_-(y) \in \mathrm{C}^{(1)}(0, d]$, $f_+(y) \in \mathrm{C}^{(1)}[0, d)$ и существуют конечные пределы $f_-(0+0)$ и $f_+(d-0)$ на границах $y = 0$ и $y = d$

Теорема. Существует инвариантная мера $\mu(\cdot)$ такая, что ее ограничения $\mu_+(\cdot)$ и $\mu_-(\cdot)$ на подмножества $X_+ = [0, d) \times \{u_+\}$ и $X_- = (0, d] \times \{u_-\}$ соответственно удовлетворяют следующим соотношениям:

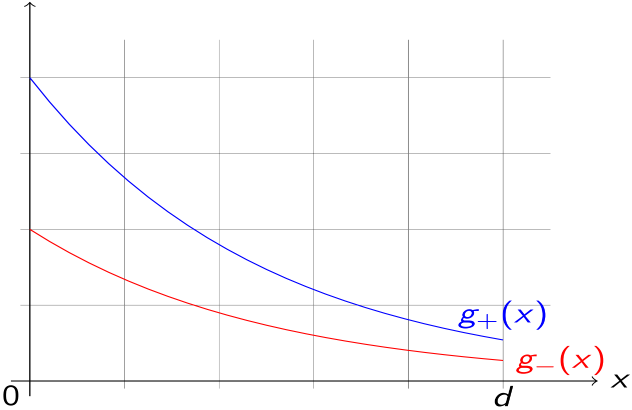
1. $\mu_+\{0\} = 0$
2. $\mu_-\{d\} = 0$
3. Меры $\mu_\pm(\cdot)$ имеют плотности $g_\pm(y)$ при $y \in (0, d)$, и верно

$$g_+(y) = \frac{C}{u_+} \cdot \rho(y), \quad x = (y, u_+) \in X$$
$$g_-(y) = \frac{C}{u_-} \cdot \rho(y), \quad x = (y, u_-) \in X.$$

Здесь

$$\rho(y) := \frac{\beta_0 e^{-\beta_0 y}}{1 - e^{-\beta_0 d}}, \quad y \in (0, d),$$

где $\beta_0 = \alpha \left(\frac{u_- - u_+}{u_+ u_-} \right) > 0$ и $C = \frac{u_+ u_-}{u_+ + u_-}$.



Замечание

В процессе доказательства теоремы, было установлено, в частности, что полученные плотности удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} g'_{+}(y) = \dfrac{\alpha}{u_{+}} \cdot \Big(g_{-}(y) - g_{+}(y)\Big), & y \in (0, d) \\ g'_{-}(y) = \dfrac{\alpha}{u_{-}} \cdot \Big(g_{-}(y) - g_{+}(y)\Big), & y \in (0, d) \end{cases} \tag{1}$$

Основные результаты

Следствие

Стационарное распределение скорости $v(t)$ *при* $t \geq 0$ *удовлетворяет*

$$P(v(t) = u_+) = \frac{u_-}{u_+ + u_-},$$

$$P(v(t) = u_-) = \frac{u_+}{u_+ + u_-}.$$

Доказательство. Поскольку мы уже знаем совместное стационарное распределение, то

$$P(v(t) = u_+) = \int_0^d g_+(y)dy = \frac{u_-}{u_+ + u_-},$$

$$P(v(t) = u_-) = \int_0^d g_-(y)dy = \frac{u_+}{u_+ + u_-}.$$

Описание модели с возмущением верхней границы

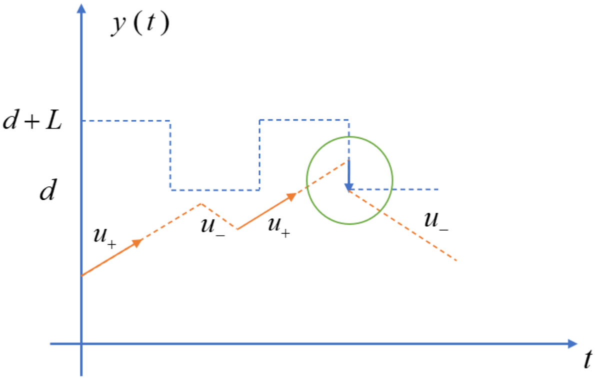
Пусть положение верхней границы $r(t)$ задается следующим марковским процессом

$$r(t) = r_t = (-1)^{\Pi_t(\gamma)} \cdot \frac{L}{2} + \left(d + \frac{L}{2}\right) \quad \in \quad \{d, d + L\},$$

где Π_t - есть пуассоновский процесс с интенсивностью γ.

Описание модели с возмущением верхней границы

Если частица находится в зоне $y(t) > d$ в момент времени, когда граница опускается до уровня d, то частица совершает скачок в точку $(d, u_-) \in X$.



Постановка задачи

Рассмотрим трехмерный стохастический процесс

$$
\begin{aligned}
\eta_t &= \Big(y(t), v(t), r(t)\Big)^{\mathsf{T}}, \\
y(t) &= x_2(t) - x_1(t) \in \mathbb{R}, \\
v(t) &= v_2(t) - v_1(t) \in \{u_+, u_-\}, \\
r(t) &\in \{d, d+L\}.
\end{aligned}
$$

Хотим установить, существует ли в рамках данной модели стационарное распределение η_t и исследовать его характеристики.

Постановка задачи

Будем рассматривать функции $f : Z \to \mathbb{R}$, где

$$Z = Z_{0,+} \bigsqcup Z_{1,+} \bigsqcup Z_{0,-} \bigsqcup Z_{1,-}$$

и

$$\begin{aligned}
Z_{0,+} &= [0, d) \times \{u_+\} \times \{d\}, \\
Z_{1,+} &= [0, d + L) \times \{u_+\} \times \{d + L\}, \\
Z_{0,-} &= (0, d] \times \{u_-\} \times \{d\}, \\
Z_{1,-} &= (0, d + L] \times \{u_-\} \times \{d + L\}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$f(z) = \begin{cases}
f_{0,+}(y), & z = (y, u_+, d), \quad y \in [0, d) \\
f_{0,-}(y), & z = (y, u_-, d), \quad y \in (0, d] \\
f_{1,+}(y), & z = (y, u_+, d + L), \quad y \in [0, d + L) \\
f_{1,-}(y), & z = (y, u_-, d + L), \quad y \in (0, d + L]
\end{cases}$$

Основные результаты I

В работе будет найден инфинитезимальный оператор марковского процесса η_t, что позволяет сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема.

Инвариантная мера $\mu(\cdot)$ и ее ограничения $\mu_{0,+}(\cdot), \mu_{1,+}(\cdot)$ и $\mu_{0,-}(\cdot), \mu_{1,-}(\cdot)$ на подмножества
$Z_{0,+} = [0, d) \times \{u_+\} \times \{d\}$,
$Z_{1,+} = [0, d + L) \times \{u_+\} \times \{d + L\}$ и
$Z_{0,-} = (0, d] \times \{u_-\} \times \{d\}$,
$Z_{1,-} = (0, d + L] \times \{u_-\} \times \{d + L\}$ соответственно
удовлетворяют следующим соотношениям:

Основные результаты II

1. $\mu_{0,+}\{0\} = 0, \quad \mu_{0,-}\{d\} = 0$
2. $\mu_{1,+}\{0\} = 0, \quad \mu_{1,-}\{d+L\} = 0$
3. Меры $\mu_{\theta,\pm}(\cdot)$ имеют плотности $g_{\theta,\pm}(y)$ во внутренних точках y, и $g_{\theta,\pm}(y)$ являются решением следующих систем дифференциальных уравнений:

Основные результаты III

$$\begin{cases} g'_{1,+}(y) = \dfrac{1}{u_+}\left[\gamma g_{0,+}(y) + \alpha g_{1,-}(y) - (\alpha+\gamma) g_{1,+}(y)\right] \\ g'_{1,-}(y) = \dfrac{1}{u_-}\left[-\gamma g_{0,-}(y) - \alpha g_{1,+}(y) + (\alpha+\gamma) g_{1,-}(y)\right] \\ g'_{0,+}(y) = \dfrac{1}{u_+}\left[\gamma g_{1,+}(y) + \alpha g_{0,-}(y) - (\alpha+\gamma) g_{0,+}(y)\right] \\ g'_{0,-}(y) = \dfrac{1}{u_-}\left[-\gamma g_{1,-}(y) - \alpha g_{0,+}(y) + (\alpha+\gamma) g_{0,-}(y)\right] \end{cases}, y \in (0, d) \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} g'_{1,+}(y) = \dfrac{1}{u_+}\left[\alpha g_{1,-}(y) - (\alpha+\gamma) g_{1,+}(y)\right] \\ g'_{1,-}(y) = \dfrac{1}{u_-}\left[-\alpha g_{1,+}(y) + (\alpha+\gamma) g_{1,-}(y)\right] \end{cases}, \quad y \in (d, d+L) \tag{3}$$

Основные результаты

Заметим, что при $\gamma = 0$, то есть когда возмущения верхней границы нет, системы дифференциальных уравнений (2) и (3) в совокупности распадаются на две подсистемы. А именно, на

$$\begin{cases} g'_{0,+}(y) = \dfrac{\alpha}{u_+}\Big[g_{0,-}(y) - g_{0,+}(y)\Big] \\ g'_{0,-}(y) = \dfrac{\alpha}{u_-}\Big[g_{0,-}(y) - g_{0,+}(y)\Big] \end{cases}, \qquad y \in (0, d)$$

и

$$\begin{cases} g'_{1,+}(y) = \dfrac{\alpha}{u_+}\Big[g_{1,-}(y) - g_{1,+}(y)\Big] \\ g'_{1,-}(y) = \dfrac{\alpha}{u_-}\Big[g_{1,-}(y) - g_{1,+}(y)\Big] \end{cases}, \qquad y \in (0, d + L)$$

Как и следовало ожидать, эти две системы аналогичны тем, что мы видели в исходной упрощенной модели (1).

Заключение

- Рассмотрели 2 стохастические модели и получили результаты по описанию стационарного распределения в этих процессах.
- Результаты в модели с возмущением верхней границы позволяют приступить к поиску плотности явного вида.
- В дальнейшем результаты можно расширить на составные модели.

Список литературы

А. Д. Вентцель (1975).
Курс теории случайных процессов.
Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”.

А. В. Булинский, А. Н. Ширяев (2005).
Теория случайных процессов.
ФИЗМАТЛИТ.

R. Erban, J. Haskovec, and Y. Sun (2015).
A Cucker–Smale Model with Noise and Delay.
SIAM Journal on Applied Mathematics,
2015, v. 76

F. Dalmao and E. Mordecki (2012).
Hierarchical Cucker-Smale Model Subject to Random Failure.
IEEE Transactions on Automatic Control,
2012, v. 57, N. 7, p. 1789–1793.

A. H. Hajiyev and T. S. Mammadov (2012).
Mathematical Models of Moving Particles without Overtake and Their Applications.
Theory of Probability & Its Applications,
2012, v. 56, N. 4, p. 579–589.

A. Crescenzo and B. Martinucci (2010).
A Damped Telegraph Random Process with Logistic Stationary Distribution.
Journal of Applied Probability,
2010, v. 47, N. 1, p. 84–96.

A. Crescenzo, A. Iuliano, B. Martinucci, and S. Zacks (2013).
Generalized Telegraph Process with Random Jumps.
Journal of Applied Probability,
2013, v. 52, N. 2, p. 450–463.

Спасибо за внимание!