

**Задачи с государственного экзамена по математике на
механико-математическом факультете МГУ**

Данные задачи предлагались в качестве дополнительных задач на государственном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ в 2014 году. Задачи разбиты на группы в зависимости от их тематики.

1. Математический анализ

Задача 1.1 Сходится ли несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx ?$$

Задача 1.2 Сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} ?$$

Задача 1.3 Сходится ли несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln x)} ?$$

Задача 1.4 Пусть $f(x) = 1/(x^2 + x + 1)$. Найти $f^{(20)}(0)$.

Задача 1.5 Доказать, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Задача 1.6 Верно ли, что функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая счётное число точек разрыва на отрезке $[0, 1]$, интегрируема (по Риману) на этом отрезке?

Задача 1.7 Разложить функцию $f(x) = (\pi - x)/2$ в ряд Фурье внутри отрезка $[0, 2\pi]$.

Задача 1.8 Существует ли функция, непрерывная на отрезке, но не имеющая участков монотонности?

Задача 1.9 Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

2. Высшая алгебра

Задача 2.1 Найти все подгруппы групп \mathbb{Z}_{12} и S_3 .

Задача 2.2 Дан вектор-столбец \mathbf{x} . Найти собственные значения матрицы $A = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$.

Задача 2.3 Сколько существует подгрупп порядка 5 в группе \mathbb{Z}_{100} ? Сколько существует элементов порядка 10 в этой группе?

Задача 2.4 Можно ли установить взаимно однозначное соответствие между подгруппами циклической группы и натуральными делителями её порядка?

Задача 2.5 Верно ли, что для любых двух матриц A и B одинакового размера имеет место неравенство $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$?

Задача 2.6 Сколько существует подгрупп порядка 6 в группе A_4 ?

Задача 2.7 Описать все гомоморфизмы из группы S_3 в группу S_4 .

Задача 2.8 Привести пример недиагонализируемого линейного оператора.

Задача 2.9 Дана матрица A . Доказать, что ранг системы, составленной из её векторов-столбцов, равен рангу системы, составленной из её векторов-строк.

Задача 2.10 Описать группу $\text{Aut}(\text{Aut}(\mathbb{Z}_n))$.

Задача 2.11 Найти ядро естественного гомоморфизма из группы $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ в группу дробно-линейных преобразований (т.е. в группу $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C})$).

3. Аналитическая геометрия

Задача 3.1 Почему квадрики в \mathbb{R}^n , заданные соотношениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0$$

не являются эквивалентными (как квадрики в евклидовом точечном пространстве)?

Задача 3.2 Почему квадрики в \mathbb{R}^n , заданные соотношениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 2x_{r+1} = 0$$

не являются эквивалентными (как квадрики в евклидовом точечном пространстве)?

Задача 3.3 Описать всевозможные цилиндры в \mathbb{R}^3 , являющиеся квадриками.

Задача 3.4 Чем отличаются классификации квадратик над полем \mathbb{R} и над полем \mathbb{Z}_3 ?

Задача 3.5 Найти общий вид уравнений квадратик в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$.

4. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Задача 4.1 Определитель Вронского и его свойства.

Задача 4.2 Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = \cos x$.

Задача 4.3 Найти общее решение уравнения $y'' + y = \cos x$.

Задача 4.4 Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = e^x$.

Задача 4.5 При каких $a \in \mathbb{R}$ все решения уравнения $y'' + ay = 0$ ограничены?

Задача 4.6 Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$.

5. Комплексный анализ

Задача 5.1 Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

Задача 5.2 Привести пример функции комплексного переменного, у которой имеется
а) устранимая особая точка, б) полюс, в) существенно особая точка,
г) неизолированная особая точка.

Задача 5.3 Классифицировать особые точки функции $f(z) = \sin(1/z)$.

Задача 5.4 Классифицировать особые точки функции $f(z) = z/\sin(1/z)$.

Задача 5.5 Найти все точки комплексной плоскости, в которых функция $f(x) = z\bar{z}$ обладает производной.

Задача 5.6 Разложить функцию $1/(1-z)$ в ряд Лорана в области $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

6. Дифференциальная геометрия

Задача 6.1 Найти формулы для главных кривизн поверхности через коэффициенты первой и второй квадратичных форм этой поверхности.

Задача 6.2 Найти главные кривизны сферы в \mathbb{R}^3 .

Задача 6.3 Найти главные кривизны цилиндра в \mathbb{R}^3 .

Задача 6.4 Привести пример поверхности с отрицательной гауссовой кривизной.

Задача 6.5 Найти первую квадратичную форму для сферы и для плоскости.

Задача 6.6 Каков геометрический смысл второй квадратичной формы поверхности?

Систематизация задач: М.К.