31.10.21. Шапошников. кр1. Ппанаева Александра 509 гр.

① Пусть Ω — открытое и ограниченное мн-во в $\mathbb{R}^n$.
Пусть $Lu = \Delta u + \langle b; \nabla u\rangle + cu$, где b, c — гладкие функции на Ω.
Предположим, что $\exists$ такая ф-ция w, что $\begin{cases} w > 0 \\ Lw \le 0. \end{cases}$
Докажите, что если $Lu \geq 0$, то u/w не может иметь неотрицат. максимум внутри Ω, кроме случая, когда u — постоянная ф-ция.

Док-во: нас интересует функция u/w.
обозначим её $f := \frac{u}{w} \Rightarrow u = fw$.
По условию, $Lu \geq 0$.
Распишем это:

$$\Delta g = \nabla(\nabla g)$$

$$Lu = L(fw) = \Delta(wf) + \langle b; \nabla(wf)\rangle + cwf =$$

$$= \nabla(\nabla(wf)) + \langle b; \nabla(wf)\rangle + cwf =$$

$$= \nabla(\nabla w \cdot f + w \cdot \nabla f) + \langle b; \nabla w \cdot f + w \cdot \nabla f\rangle + cwf =$$

$$= \Delta w \cdot f + 2\langle \nabla w; \nabla f\rangle + w \cdot \Delta f + \langle b, f \nabla w\rangle + \langle b, w \nabla f\rangle + cwf =$$

$$= f \cdot (\underbrace{\Delta w + \langle b, \nabla w\rangle + cw}_{= Lw}) + \langle 2\nabla w + bw; \nabla f\rangle + w \cdot \Delta f =$$

$$= f \cdot Lw + \langle 2\nabla w + bw; \nabla f\rangle + w \cdot \Delta f =$$

$$= w \cdot \left(\frac{Lw}{w} f + \langle 2\frac{\nabla w}{w} + b; \nabla f\rangle + \Delta f\right) \geq 0$$

↑т.к по усл. $Lu \geq 0$.

но $w > 0$ — тоже по усл.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{Lw}{w} f + \langle 2\frac{\Delta w}{w} + b; \nabla f\rangle + \Delta f}_{} \geq 0.$$

но это $= \tilde{L} f$, где $\tilde{L}$ — новый оператор, у которого $\tilde{A} = I \geq 0$.
$\tilde{c} = \frac{Lw}{w} \le 0$ ($Lw \le 0$ по усл., $w > 0$ по усл.)

то есть для $\tilde{L}$ выполнены условия задачи 2б из листка 1, которые гарантируют, что если $\begin{cases} \tilde{L}f \geq 0 \text{ - у нас так} \\ \tilde{A} \geq 0 \\ \tilde{c} \le 0 \text{ - у нас так} \end{cases}$ — то для f выполнен обычный принцип максимума: $\sup_{\Omega} f \le \sup_{\partial\Omega} u$.

А поскольку в док-ве строгого принципа максимума мы пользовались только тем, что для f выполнен обычный принцип максимума (+ лемма про производную по нормали) то для f выполнен строгий принцип максимума.

А он и утверждает нужное: если f достигла неотриц. максимума внутри Ω — то она константа. ч.т.д.

(2) Док-ть, что если граница $\partial\Omega$ ограниченной области Ω является гладкой (C^2) поверхностью, то построенное методом Перрона решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

, где $g \in C(\partial\Omega)$ – продолжается по непрер-ти до ф-ции $C(\bar\Omega)$ и на границе совпадает с ф-цией g.

<u>Док-во</u>: Для этого у нас есть теорема (см. в лекции 3, после самого метода Перрона):

T: если v – функция, построенная в т. Перрона, и если p – регулярная точка $\partial\Omega$, то $v(x) \to g(p)$ при $x \to p$,

т.е. если все точки границы регулярные, то v явл. решением $\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$

Итак, нам ~~[illegible]~~ достаточно док-ть, что все точки границы – регулярные. ~~[illegible] доказать~~

То есть $\forall p \in \partial\Omega$ нужно предъявить w – супергарм. в Ω (т.е. $\Delta w \geq 0$) такую, что:

$$\begin{cases} w(p) = 0 \\ w(x) > 0 \ \forall x \in \bar\Omega \setminus \{p\} \end{cases}$$

Для того, чтобы предъявить такую w, заметим, что из-за того, что граница $\in C^2$ – то в любой точке выполнено условие внешней сферы (сейчас мы ее докажем).

Тогда, если y – это центр этой сферы – то в качестве w построим

$$w(x) := -\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{1}{|p-y|^{n-2}}$$

– т.к. 1) $w(p) = 0$ – очевидно

2) $\Delta w(x)$ – гарм $\Rightarrow$ субгарм в Ω, т.к. w – это фунд. решение оператора Лапласа, сдвинутое на константу и взятое с минусом, т.е $\Delta w = \delta(x-y)$, но поскольку $y \notin \bar\Omega$ – то в $\bar\Omega$ у нас $\Delta w = 0$.

3) $w(x) > 0 \ \forall x \in \bar\Omega \setminus \{p\}$ – т.к. точка p находится ближе к y, чем точки x – то есть $|p-y| < |x-y| \Rightarrow \Delta w > 0$, $\forall x \in \bar\Omega \setminus \{p\}$

Итак, регулярность любой точки $p \in \partial\Omega$ доказана, если мы умеем доказывать, что из условия что граница $\in C^2$ следует условие внешней сферы.

Ну докажем это:

Введем в окрестности точки p такие лок. коорд $\bar x$, чтобы $\begin{cases} x_n \text{ торчало вверх} \\ p \text{ было нулем.} \end{cases}$

Тогда по т. о неявной ф-ции, в некот. окр-ти, граница ~~[illegible]~~ задаётся так: $f(x_1 \ldots x_{n-1}) = x_n$

$\Rightarrow$ внутри Ω, у нас $f < x_n$. (стр. 2)

Смотрим на гессиан ф-ции f внутри (ну в точке p): $Hf(\bar{0})$. ← можем, т.к. граница $\in C^2$

Это матрица, её собств. значения — это кривизны.

Хотим шар какого-то радиуса r, чтобы он коснулся нашей точки.

Пусть $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ — кривизны, т.е собств. значения гессиана.

Выберем r такое, чтобы $\frac{1}{r} \geq \max(\lambda_i)$.

Тогда шар с центром $(0, \ldots 0; r)$ и радиусом r — влезет и ничего не заденет.

Только еще надо, чтобы было $r < \frac{\varepsilon}{2}$ (где ε - радиус окр-и, где представление локальное $f(x_1 \ldots x_{n-1}) = x_n$ — работает) — т.е если что, уменьшим r еще, чтобы это было выполнено — и тогда это точно шар. ч.т.д.

③ Пусть Ω — открытое и ограниченное мн-во в $\mathbb{R}^n$.
Пусть f — ограниченная липшицева ф-ция на $\mathbb{R}$, причем $f(0)=0$ и $f'(0) > \lambda_1$,
где λ_1 - главное собств. значение оператора Лапласа $-\Delta$ на Ω с нулевыми граничными значениями. Применяя метод суб-решений и суперрешений обоснуйте существование положительного внутри Ω решения задачи Дирихле $\begin{cases} -\Delta u \geq f(u) \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$

Решение: Для того, чтобы запустить метод суб и супер-решений ($\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq \overline{u}$) нам нужно найти субрешение $\underline{u}$ (т.е $-\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u})$), такое что $\underline{u}|_{\partial\Omega} \leq 0$, и суперрешение $\overline{u}$ (т.е $-\Delta \overline{u} \geq f(\overline{u})$), такое что $\overline{u}|_{\partial\Omega} \geq 0$.

- Ищем субрешение: берем $\begin{cases} \Phi_1 \text{ — собств. ф-ция } -\Delta u, \text{ соотв. собств. значению } \lambda_1 \\ \alpha \text{ — дост. маленькое число, такое, что во-первых, } \alpha\Phi_1 \text{ попадет в окр-ть, в которой } f'(0) > \lambda_1 \text{ (т.е } f(u) > \lambda_1 u), \\ \text{а во-вторых, } \alpha \text{ должно быть } < \beta, \text{ где } \beta \text{ - дост. большое, но будет выбрано позже.} \end{cases}$

~~Тогда~~ тогда, берем $\alpha\Phi_1$ — и это есть субрешение, т.к:

$$-\Delta(\alpha\Phi_1) \overset{\text{ф-ция собств.}}{=} \alpha\lambda_1\Phi_1 \underset{f'(0) > \lambda_1}{\leq} f(\alpha\Phi_1) \quad \Rightarrow \underline{u} := \alpha\Phi_1 \text{ — субрешение.}$$

$\left(\text{т.к } \begin{cases} -\Delta(\underline{u}) < f(\underline{u}), \\ \underline{u}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ — т.к. собств. ф-ция такая} \end{cases}\right)$

- Ищем суперрешение: берем $\overline{u} := \beta\Big(\Phi_1 - \underbrace{\tfrac{\varepsilon}{2}\big(x_1^2 - \max_{\partial\Omega} x_1^2\big)}_{\leq 0 \text{ на границе}}\Big)$

тогда: $\begin{cases} \overline{u}|_{\partial\Omega} \geq \Phi_1|_{\partial\Omega} = 0. \\ -\Delta(\overline{u}) = -\Delta\big(\beta(\Phi_1 - \frac{\varepsilon}{2}(x_1^2 - \max_{\partial\Omega} x_1^2))\big) = \beta(\lambda_1\Phi_1 - (-\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2)) = \beta(\lambda_1\Phi_1 + \varepsilon) \underset{\text{за счет выбора дост. большого } \beta}{>} K, \end{cases}$

где K — константа, которой ограничена f (см. усл).

Причем $\overline{u} = \beta\Phi_1 - \frac{\beta\varepsilon}{2} \cdot (\text{что-то} \leq 0) \geq \beta\Phi_1 > \alpha\Phi_1 = \underline{u}$ — т.е $\underline{u} \leq u_1 \leq \ldots \leq \overline{u}$ — т.е все работает. ч.т.д.

4. Используя метод характеристик, решите З.К:

$$\begin{cases} u u_{x_1} + u_{x_2} = 1 \\ u\big|_{x_2 = x_1} = \frac{x_1}{2} \end{cases}$$

Решение: Пишем ур-е на характеристики:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = 1 \\ \dot{u} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t + u_0 \\ x_2(t) = t + x_2^0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_1 = u = t + u_0 \Rightarrow x_1(t) = \frac{t^2}{2} + u_0 t + x_1^0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{t^2}{2} + u_0 t + x_1^0 \\ x_2(t) = t + x_2^0 \\ u(t) = t + u_0. \end{cases}$$

Мы хотим найти значение u в точке $x_1; x_2$.

Для этого надо из точки $(x_1; x_2)$ выпустить характеристику и по ней дойти до точки ~~(...)~~, которая лежит в мн-ве $\{x_2 = x_1\}$, т.е на котором u - известно.

Т.е условие того, что эта начальная точка $(x_1^0; x_2^0)$ - в нужном множестве - это что $x_2^0 = x_1^0$.

Причем тогда $u_0 = u(x_1^0; x_2^0) = u(x_1^0; x_1^0) = \frac{x_1^0}{2}$ - по усл.

$\Rightarrow$ теперь надо x_1^0 и t выразить через x_1 и x_2. (и подставим в выражение для u)

Из системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{2} + u_0 t + x_1^0 \quad (1) \\ x_2 = t + x_1^0 \quad (2) \\ u = t + \frac{x_1^0}{2} \quad (3) \end{cases}$$

из (2): $x_2 = t + x_1^0 \Rightarrow x_1^0 = x_2 - t.$

подставляем это в (1): $x_1 = \frac{t^2}{2} + \frac{(x_2 - t)}{2} \cdot t + \overset{x_2 - t}{\overset{\parallel}{x_1^0}} = \frac{x_2 t}{2} + x_2 - t.$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = t\left(\frac{x_2}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{x_1 - x_2}{\frac{x_2}{2} - 1} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_2 - 2}$$

$\Rightarrow$ подставляем в (2): $\Rightarrow x_1^0 = x_2 - t = x_2 - \frac{2(x_1 - x_2)}{x_2 - 2} = \frac{x_2^2 - 2x_1}{x_2 - 2}$

$\Rightarrow$ теперь подставляем выражения для t и x_1^0 в выражение для u:

$$u = t + \frac{x_1^0}{2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_2 - 2} + \frac{1}{2}\frac{x_2^2 - 2x_1}{x_2 - 2} = \boxed{\frac{x_2^2 + 2x_1 - 4x_2}{2(x_2 - 2)}}$$

ответ

(5) Выясните, какие из следующих задач $\begin{cases} u_t + f'(u) u_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$ имеют гладкое решение на всей полуплоскости $t>0$, а какие — не имеют гладких решений ни в какой полосе $0<t<\tau$.

а) $f(u) = \cos u$
$u_0(x) = \sin x$.

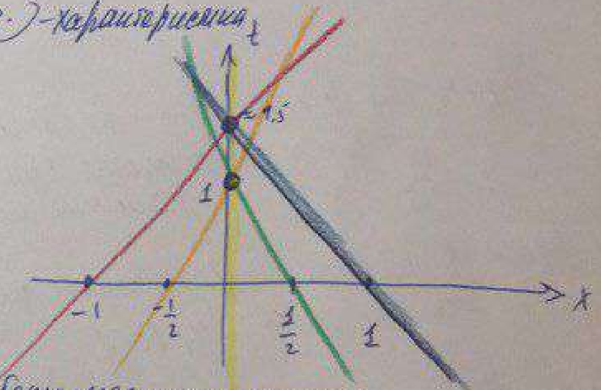
Ну на такую задачу рассматривали на лекции 4.
И там была теорема, что если $\tau > 0$ такого, что $q = \tau \cdot \sup|u_0'| \cdot \sup|f''| < 1$,
то тогда $\exists!$ решение З.К. $\begin{cases} u_t + f'(u) u_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$,
и оно задается ф-лой $u = u_0(x - f'(u) t)$ в полосе $\Pi_\tau = \mathbb{R} \times [0, \tau]$.

В нашем случае: $u_0(x) = \sin x \Rightarrow |u_0'(x)| \le 1$.
$f(x) = \cos x \Rightarrow |f''(x)| \le 1$. $\Rightarrow \tau < 1$.

То есть в полосе $0 < t < \tau^{-1}$ — у нас точно всё хорошо с решением.
А вдруг при $t \geq \tau^{-1}$ тоже всё хорошо?
Нет, т.к. начиная с $t=1$ — начинают пересекаться характеристики.
Действительно, ур-е характеристик:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = f'(u) = -\sin u \\ \dot{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \text{ — время} \\ u = u_0(x_0) \\ x = -\sin u_0\, t + x_0. \end{cases}$$

— характеристика ($u_0 = \sin x_0$).



Ну берем
$x_0 = -1 \Rightarrow x = 0.745t - 1$
$x_0 = -0.5 \Rightarrow x = 0.46t - 0.5$
$x_0 = 0 \Rightarrow x = 0.$
$x_0 = 0.5 \Rightarrow x = -0.46t + 0.5$
$x_0 = 1 \Rightarrow x = -0.745t + 1$

И мы видим, что если брать x_0 всё более удаленные от нуля — то точка пересечения характеристик будет ~~все~~ сколь угодно близко к $\tau = 1$, а если x_0 всё ближе к нулю — то точка пересечения уедет сколь угодно далеко в $t = +\infty$.
$\Rightarrow$ всё хорошо только в полосе $0<t<1$, а при $t \geq 1$ — всё плохо.

б) $\begin{cases} f(u) = u^4 \\ u_0(x) = x. \end{cases}$ $\Rightarrow |u_0'| = 1$
$|f''| = |12u^2|$ — не ограничена
$\Rightarrow$ теорема не работает
$\Rightarrow$ надо самим смотреть.

Ну характеристики: $\begin{cases} u = u_0(x_0) \\ x = 4u_0^3 t + x_0. \end{cases}$

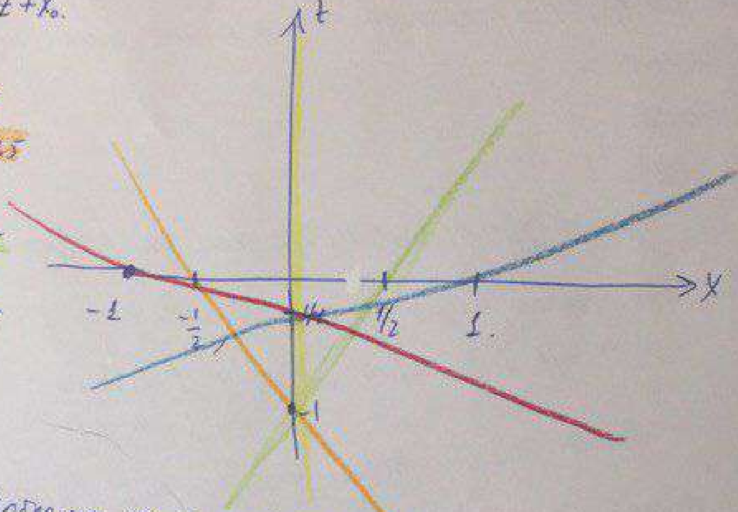
$x_0 = -1 \Rightarrow x = -4t - 1$

$x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -0.5t - 0.5$

$x_0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x_0 = 1/2 \Rightarrow x = 0.5t + 0.5$

$x_0 = 1 \Rightarrow x = 4t + 1$



Видим, что все проблемы из-за пересечения характеристик — они при $t \le 0$, то есть в полуплоскости $0 < t < \infty$ — всё хорошо.

в) $f(u) = u^4$
$u_0(x) = -x$

— ну характеристики: $\begin{cases} u = u_0(x_0) \\ x = 4u_0^3 t + x_0. \end{cases}$

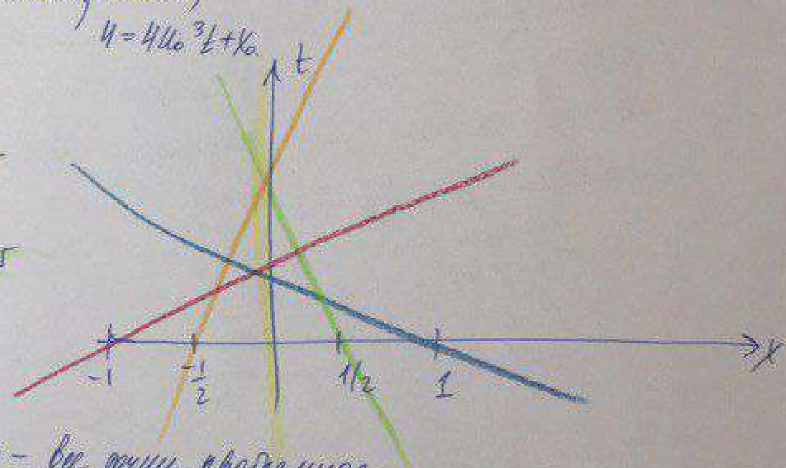
$x_0 = -1 \Rightarrow x = 4t - 1$

$x_0 = -0.5 \Rightarrow x = 0.5t - 0.5$

$x_0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x_0 = 0.5 \Rightarrow x = -0.5t + 0.5$

$x_0 = 1 \Rightarrow x = -4t + 1.$



Видим, что для $0 < t < \infty$ — все точки проблемные, в них пересекаются характеристики — то есть нет гладких решений ни в одной полосе $0 < t < \tau$.

⑥ Пусть Ω — открытое и ограниченное мн-во в $\mathbb{R}^n$ и на $\bar{\Omega}$ задана ф-ция
$u(x) = dist(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$

Док-ть, что u — вязкостное решение ур-я $|Du| = 1$ в Ω.

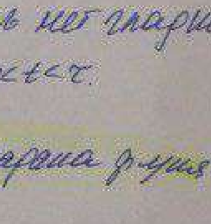
Решение: Надо просто проверить определение вязкостного ур-я:

1) если $u - \varphi$ в т. x_0 имеет лок. макс $\overset{?}{\Rightarrow} |Df| \le 1$.

2) если $u - \varphi$ в т. x_0 имеет лок. мин $\overset{?}{\Rightarrow} |Df| \ge 1$.

Ω — огранич. $\Rightarrow \exists\ y_0$ и y, в которых расстояние для x_0 и для x — достигается

а) проверим 1): т. x_0 — лок. макс $\Rightarrow u(x) - \varphi(x) \le u(x_0) - \varphi(x_0)$



$\Rightarrow \varphi(x) - \varphi(x_0) \ge u(x) - u(x_0).$

т.к. именно $u(x_0) = dist$, а не $x_0 y$.

по нер-ву Δ: $u(x) + |x - x_0| \ge |y - x_0| \ge u(x_0)$

$\Rightarrow \varphi(x) - \varphi(x_0) \ge -|x - x_0|$

с.4

Итак, $\psi(x)-\psi(x_0) \geq -\|x-x_0\|$

Рассм. направление $v \in B(0,1)$.

поскольку ψ - дифф. в x_0, то возьмем производную по направлению:

$$D_v\psi(x_0) \overset{def}{=} \langle \nabla\psi(x_0), v\rangle$$

$$\| def$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\psi(x_0+hv)-\psi(x_0)}{h} \geq \lim_{h\to 0^+}\frac{-\|x_0+hv-x_0\|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\|hv\|}{h} = -\|v\|$$

$\Rightarrow \langle\nabla\psi(x_0),v\rangle \geq -\|v\|$

Но по н-ву Коши-Буняковского: $-\|\nabla\psi(x_0)\|\cdot\|v\| \le \langle\nabla\psi(x_0);v\rangle \le \|\nabla\psi(x_0)\|\cdot\|v\|$.

$\Rightarrow \|\nabla\psi(x_0)\|\cdot\|v\| \geq \langle\nabla\psi(x_0);v\rangle \geq -\|v\|, \forall v$.

$\Rightarrow \|\nabla\psi(x_0)\|\cdot\|v\| \geq -\|v\|$.

$\Rightarrow \|\nabla\psi(x_0)\| \geq -1$.

$\Rightarrow \|\nabla\psi(x_0)\| \le 1$. ч.т.д.

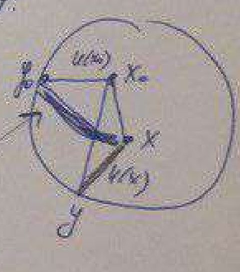
б) Проверим 2): пусть т. x_0 - точка лок. минимума ф-ции $u-\psi$.

$\Rightarrow u(x_0)-\psi(x_0) \le u(x)-\psi(x)$, если $x\ne x_0$.

по н-ву Δ:

$$\Rightarrow \psi(x)-\psi(x_0) \le u(x)-u(x_0) \le \|x-y_0\| - \underbrace{u(x_0)}_{\|x_0-y_0\|}$$

т.к. именно $u(x)=dist$, а не $(x-y_0)$.



Рассм. производную по направлению v:

$$\langle \nabla\psi(x_0);v\rangle = \lim_{h\to 0^+} \frac{\psi(x_0+hv)-\psi(x_0)}{h} \le \lim_{h\to 0^+} \frac{\|x_0+hv-y_0\|-\|x_0-y_0\|}{h} \overset{\text{по опр.}}{=} \langle\nabla f(x_0);v\rangle,$$

где $f(x)=\|x-y_0\|$

Но мы умеем считать, что $\nabla f(x_0)=\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$

$\Rightarrow \langle\nabla\psi(x_0);v\rangle \le \langle\nabla f(x_0);v\rangle = \langle\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|};v\rangle$.

~~Но $\forall v \in B(0,1)\setminus\{0\}$~~:

$\Rightarrow \langle\nabla\psi(x_0) - \frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|};v\rangle \le 0, \forall v\in B(0,1)\setminus\{0\}$.

Меняя v на $-v$: $-\langle \nabla\psi(x_0)-\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|};v\rangle = \langle\nabla\psi(x_0)-\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|};-v\rangle \le 0 \Rightarrow \nabla\psi(x_0)=\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}$

а этот вектор имеет единичную длину

$\Rightarrow \|\nabla\psi(x_0)\|=1$. ч.т.д.

(7) Докажите, что $u_s(x)=\frac{1}{4}\max\{0; s-|x|\}^2$ для каждого $s\in[0,1]$ явл. вязкостным решением ур-я $|Du|-\sqrt{u}=0$ в шаре $|x|<1$. Таким образом, задача Дирихле для данного ур-я имеет континуально много различных вязкостных решений.

Решение: Проверим по опр., что если $u-\varphi$ имеет лок. макс — то $|D\varphi|\le\sqrt{\varphi}$, а если $u-\varphi$ имеет лок. мин — то $|D\varphi|\ge\sqrt{\varphi}$.

1) Заметим, что если x_0 — точка гладкости, то в ней $\begin{cases}u(x_0)=\varphi(x_0) & \text{— см. опр. вязкостного решения на лекции 6,}\\ u'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 & \text{— т.к. лок. mm.}\end{cases}$

но в ур-е $|D\varphi|\overset{?}{\le}\sqrt{\varphi}$ — там только φ' и φ используется, т.е надо проверить то же самое н-во для u — но для u оно верно, т.к. мы доказывали, что гладкие решения явл. вязкостными.

2) Осталось проверить для точек негладкости — т.е $x=0$; $x=\pm s$.

3) Пусть сначала $x=0$.

- Если $s=0$ — то $u_s(x)=\frac{1}{4}\max\{0;-|x|\}^2 \overset{\max=0}{=} 0$ — для нее верно всё, т.к. $0=0$.
- Если $s=1$ — то $u_s(x)=\dfrac{(1-|x|)^2}{4}$

а) $\exists x$ — точка лок. макс $u-\varphi$.

Вспомним, что $\underset{x_0=0}{u(x_0)}=\varphi(x_0)$ — по опр. вязкостного решения.

$\Rightarrow u(0)=\varphi(0)=\left.\dfrac{(1-|x|)^2}{4}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{4}$.

~~Если~~ поскольку $x=0$ — точка max ф-ции $u-\varphi$, то:

$$\begin{cases}u(-\delta)-\varphi(-\delta)\le u(0)-\varphi(0)=0\\ u(\delta)-\varphi(\delta)\le u(0)-\varphi(0)=0\end{cases}$$

но $\begin{cases}u(-\delta)=\dfrac{(1-\delta)^2}{4}\\ u(\delta)=\dfrac{(1-\delta)^2}{4}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(0)=\lim\limits_{\delta\to0^+}\dfrac{\varphi(\delta)-\varphi(0)}{\delta}\ge\lim\limits_{\delta\to0^+}\dfrac{u(\delta)-\frac{1}{4}}{\delta}=\lim\dfrac{\frac{(1-\delta)^2}{4}-\frac{1}{4}}{\delta}=-\dfrac{1}{2}\\ \varphi'(0)=\lim\limits_{\delta\to0}\dfrac{\varphi(0)-\varphi(-\delta)}{\delta}\le\lim\dfrac{\frac{1}{4}-u(-\delta)}{\delta}=\lim\dfrac{\delta(2-\delta)}{4\delta}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(0)\le\frac{1}{2}\\ \varphi'(0)\ge-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow|\varphi'(0)|\le\frac{1}{2}=\sqrt{\varphi(0)}=\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}.\ \text{чтд}$$

б) $\exists x^0$ — точка лок. min ф-ции $u-\varphi$.

$$\Rightarrow\begin{cases}u(-\delta)-\varphi(-\delta)\ge u(0)-\varphi(0)=0\\ u(\delta)-\varphi(\delta)\ge0\end{cases}$$

$+\begin{cases}u(-\delta)=\dfrac{(1-\delta)^2}{4}\\ u(\delta)=\dfrac{(1-\delta)^2}{4}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(0)=\lim\dfrac{\varphi(\delta)-\varphi(0)}{\delta}\le\lim\dfrac{u(\delta)-\frac{1}{4}}{\delta}=\lim\dfrac{\frac{(1-\delta)^2}{4}-\frac{1}{4}}{\delta}=-\dfrac{1}{2}\\ \varphi'(0)=\lim\dfrac{\varphi(0)-\varphi(-\delta)}{\delta}\ge\lim\dfrac{\frac{1}{4}-u(-\delta)}{\delta}=\lim\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{(1-\delta)^2}{4}}{\delta}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ таких φ — нет! (т.к. несовместные ур-я).

• Если $s \in (0,1)$, то $u_s(x) = \frac{(s-|x|)^2}{4}$ $\Rightarrow u(0) = \varphi(0) = \frac{s^2}{4}$.

а) $\exists x$ – точка лок. макс ф-ции $u-\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(-\delta) \le \varphi(-\delta) \\ u(\delta) \le \varphi(\delta) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} u(\delta) = \frac{(s-\delta)^2}{4} \\ u(-\delta) = \frac{(s+\delta)^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(\delta)-\varphi(0)}{\delta} \ge \lim \frac{\frac{(s-\delta)^2}{4} - \frac{s^2}{4}}{\delta} = -\frac{s}{2}. \\ \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(0)-\varphi(-\delta)}{\delta} \le \lim \frac{\frac{1}{4} - \frac{(s+\delta)^2}{4}}{\delta} \le \frac{s}{2} \end{cases} \Rightarrow |\varphi'(0)| \le \frac{s}{2} = \sqrt{\varphi(0)}$$

б) $\exists x$ – точка лок. min ф-ции $u-\varphi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(-\delta) \ge \varphi(-\delta) \\ u(\delta) \ge \varphi(\delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(\delta)-\varphi(0)}{\delta} \le \lim \frac{u(\delta)-\varphi(0)}{\delta} = -\frac{1}{2} \\ \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(0)-\varphi(-\delta)}{\delta} \ge \lim \frac{\varphi(0)-u(-\delta)}{\delta} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{таких } \varphi \text{ нет.}$$

4) Если $x = s$: а) $\exists x$ – точка лок max ф-ции $u-\varphi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(s-\delta) \le \varphi(s-\delta) \\ u(s+\delta) \le \varphi(s+\delta) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} u(s-\delta) = \frac{\delta^2}{4} \\ u(s+\delta) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(s+\delta)-\varphi(s)}{\delta} = 0. \\ \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(s)-\varphi(s-\delta)}{\delta} \ge \lim -\frac{\delta}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(s) = 0.$$

б) $\exists x$ – точка лок. min ф-ции $u-\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(s-\delta) \ge \varphi(s-\delta) \\ u(s+\delta) \ge \varphi(s+\delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(s+\delta)-\varphi(s)}{\delta} \le 0. \\ \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(s)-\varphi(s-\delta)}{\delta} \ge -\frac{\delta}{4} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi'(s) = 0. \text{ чтд.}$$

5) Если $x = -s$: а) $\exists x$ – точка лок. max ф-ции $u-\varphi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(s-\delta) \le \varphi(s-\delta) \\ u(s+\delta) \le \varphi(s+\delta) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} u(-s-\delta) = 0 \\ u(-s+\delta) = \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = \frac{\varphi(-s+\delta)-\varphi(-s)}{\delta} \ge \frac{\delta}{4} \ge 0. \\ \varphi'(0) = \frac{\varphi(-s)-\varphi(-s-\delta)}{\delta} \le 0. \end{cases} \Rightarrow \varphi'(0) = 0.$$

б) $\exists x$ – точка лок. min ф-ции $u-\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(-s-\delta) \ge \varphi(-s-\delta) \\ u(-s+\delta) \ge \varphi(-s+\delta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(-s+\delta)-\varphi(-s)}{\delta} \le \delta/4 \le 0. \\ \varphi'(0) = \lim \frac{\varphi(-s)-\varphi(-s-\delta)}{\delta} \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \varphi'(0) = 0. \text{ чтд!}$$