26.05.2022 Модели стох. вол. кур. Докаева Александра

① $\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{u_t}\, S_t\, dW_t^1 & ; S_0 > 0 \\ du_t = \varkappa u_t(\theta - u_t) + \sigma u_t^{3/2} dW_t^2 & ; u_0 > 0 \end{cases}$ $W_t^1; W_t^2$ – корр. броун. движ.

Док-ть: $v_t = \frac{1}{u_t}$ – явл. CIR, т.е. $dv_t = \tilde{\varkappa}(\tilde{\theta} - v_t)dt + \tilde{\sigma}\sqrt{v_t}\, dW_t^2$, найти $\tilde{\varkappa}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}$.

Решение: по ф-ле Ито:

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f'_x = -\frac{1}{x^2}$; $f''_{xx} = \frac{2}{x^3}$

$$\Rightarrow dv_t = -\frac{1}{u_t^2} du_t + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\cancel{u_t^3}}\cdot\sigma^2 \cancel{u_t^3}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{u_t^2}\left(\varkappa u_t(\theta - u_t) + \sigma u_t^{3/2} dW_t^2\right) + \sigma^2 dt =$$

$$= \left(\left(-\frac{\varkappa\theta}{u_t} + \varkappa\right)dt - \frac{\sigma}{\sqrt{u_t}} dW_t^2\right) + \sigma^2 dt =$$

$$= (-\varkappa\theta v_t + \varkappa + \sigma^2)dt - \sigma\sqrt{v_t}\, dW_t^2 =$$

$$= \boxed{\varkappa\theta\left(\frac{1}{\theta} + \frac{\sigma^2}{\varkappa\theta} - v_t\right)dt - \sigma\sqrt{v_t}\, dW_t^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{\varkappa} &= \varkappa\theta \\ \tilde{\theta} &= \frac{1}{\theta} + \frac{\sigma^2}{\varkappa\theta} \\ \tilde{\sigma} &= -\sigma \end{aligned}}$$

ответ

② Найти предел по распред. процесса CIR: $dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\, dW_t$

Решение: Будет гамма-распределение с параметрами $k = \frac{2ab}{\sigma^2}$, $\theta = \frac{2a}{\sigma^2}$

Как это получить?

Ну плотность процесса $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$

удовл. ур-ю Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,t)p(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\sigma^2(x,t)}{2}p(x,t)\right]$$

У нас: $\mu(x,t) = a(b - x)$

$\sigma(x,t) = \sigma\sqrt{x}$.

Те ур-е FPK: $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[a(b-x)p\right] = \frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xp)$

Мы ищем стац. распр $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ – ну не должна плотность предельного процесса зависеть от времени.

=> ур-е FDK стало:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(b-x)p_\infty\right] = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x p_\infty)$$

Интегрируя его два раза и обозначая

$\alpha := \frac{2ab}{\sigma^2}$

$\beta := \frac{2a}{\sigma^2}$,

получаем, что $p_\infty \sim x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}$ – ~~..~~ знулает это ур-е.

Чтобы из этого сделать плотность, его нужно домножить на нормировочную констану (чтобы интеграл = 1)

$$\Rightarrow p_\infty = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x\beta} \cdot \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \text{ где } \Gamma(\alpha) \text{ – гамма-ф-ция} \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

А это же плотность гамма-распр-е параметрами α и β.

(4.) $X = F(B_{t_1}, \dots B_{t_n})$ – ф-ция от траекторий броун. движения.

Хотим EX по методу монте-карло.

Нужно считать $Y = X - \theta B_T$.
$\quad$ сопр.

Док-ть, что $EX = EY$ и найти θ, минимизирующее разброс значений Y

Решение: $EY = E(X - \theta B_T) = EX - \theta \cdot \underbrace{EB_T}_{0} = EX$.

Хотим уменьшить разброс Y => надо ~~...~~ минимизировать Var Y.

$DY = EY^2 - (EY)^2 = E(X-\theta B_T)^2 - (EX)^2 = EX^2 - 2\theta E(XB_T) + \theta^2 \cdot \underbrace{EB_T^2}_{T} - (EX)^2 =$

$= DX + \theta^2 T - 2\theta \cdot E(B_T \cdot X) \longrightarrow \min_\theta$

$= DX + \theta(\theta T - 2E(B_T \cdot X))$

$$\Rightarrow \boxed{\theta := \frac{2E(B_T \cdot X)}{T}}$$

А оценка для θ – это $\hat{\theta} := \frac{2}{T}\frac{\sum_{i=1}^{N}(B_T)^i \cdot X^i}{N}$ – ну оценим θ предварительно

5. Пальмин-процесс X_t, 1-мерное распр. которого совп. с 1-мерным распр. некот. мартингала. Приведем пример: пальмина, но не мартингала.

Решение: Берём $X_t := W_t \cdot \xi$, где $\xi = \begin{cases} 1, & p = 1/2 \\ -1, & p = 1/2 \end{cases}$; $\xi \perp\!\!\!\perp W_t$

$\Rightarrow X_t \sim W_t$, т.к. $P(X_t \le x) = P(X_t \le x \mid \xi = 1) \cdot P(\xi = 1) + P(X_t \le x \mid \xi = -1) P(\xi = -1) =$

$= P(W_t \le x) \frac{1}{2} + \underbrace{P(-W_t \le x)}_{= P(\tilde{W}_t \le x)} \cdot \frac{1}{2} = P(W_t \le x)$ (нужно $W_t \overset{d}{=} -W_t$)

но при этом X_t – не мартингал

т.к. $\underset{t \ge s}{E(X_t | F_s)} = E(W_t \cdot \xi | F_s) = E((W_t - W_s + W_s) \cdot \xi | F_s) =$

$= E((W_t - W_s) \cdot \xi | F_s) + E(W_s \cdot \xi | F_s) = \underbrace{E(W_t - W_s)}_{0} \cdot E\xi + EW_s \cdot \underbrace{E\xi}_{0} = 0 \ne X_s = W_s \cdot \xi \cdot \forall \xi$

3. Найти $\frac{\partial C}{\partial S_0}$ в модели Хестона. $\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \end{cases}$

Решение: $C(S_0, K, T) = e^{-rT} \cdot E^Q (S_T - K)^+$

$C(\lambda S_0, \lambda K, T) = e^{-rT} \cdot E^Q (\lambda S_T - \lambda K)^+ = \lambda C(S_0, K, T)$

Дифф. это по λ и подставляем $\lambda = 1$ – и должна получиться $C(S_0, K, T)$:

$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial S_0} S_0 + \frac{\partial C}{\partial K} K = \underbrace{C(S_0, K, T)}_{= S_0 \cdot P^{Q^S}(S_T \ge K) - K \cdot \overbrace{B_0(T)}^{= e^{-rT}} \cdot P^{Q^T}(S_T \ge K)}$

мера, где $\frac{dQ^S}{dQ} = \frac{S_T}{B_T S_0}$

Приравниваем коэф. при S_0 и K:

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial C}{\partial S_0} = \text{коэф. при } S_0 = P^{Q^S}(S_T \ge K)} = P^{Q^S}(\ln S_T \ge \ln K \mid S_0 = S_0; v_0 = v_0)$