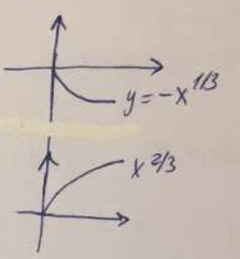
08.10.20. ВарОпт. ДЗ от семинара 5.

① а) привести пример: f, g – вып, но fg – не выпукл.



$f=-x^{1/3}$
$g=-x^{1/3}$ – выпукла (вниз), т.к $f''(x)=(-\frac{1}{3}x^{-2/3})'=\frac{2}{9}x^{-5/3}>0$

Но $fg=x^{2/3}$ – вогнута, т.к $(x^{2/3})''=(\frac{2}{3}x^{-1/3})'=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}<0.$

б) пример, когда f, g – выпуклые, но $f(g)$ – не выпуклая.

$f(x)=x^2$ – выпукла вниз
$g(x)=-x^{1/3}$ – выпукла вниз
$f(g)(x)=(-x^{1/3})^2=x^{2/3}$ – вогнута

в) пример выпуклой ф-ции, надграфик которой незамкнут

~~возьмем индикаторную ф-цию мн-ва всех строго полож. опр. матриц из S_n.~~

~~Докажем, что мн-во всех строго полож. опр. матриц из S_n – выпукло.~~

~~Ну для $\lambda\in[0,1]$: $\langle(\lambda X+(1-\lambda)Y)u,u\rangle=\lambda\underbrace{\langle Xu,u\rangle}_{>0}+(1-\lambda)\underbrace{\langle Yu,u\rangle}_{>0}>0.$~~

~~хотя бы один из них >0~~

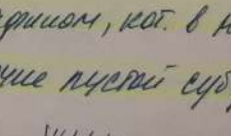
~~но предел полож. опр. матриц – не обязат. полож. опр. (типа $\frac{1}{n}E\to 0$)~~
~~$\Rightarrow$ это это мн-во незамкнуто.~~

Пусть f – индикаторная функция отрезка.

$$I_{(a,b)}=\begin{cases}0, & \text{если } x\in(a,b)\\ +\infty, & \text{если } x\notin(a,b)\end{cases}$$

но он не замкнут, т.к точка x_0 – предельная, но $\notin$ надграфику.

г) пример выпуклой ф-ции с замкн. надграфиком, кот. в некот. точке конечна, но имеет в этой точке пустой субдифференциал.



$f: [0;+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$
$f(x):=-\sqrt{x}$
Тогда субдифференциал $\partial f(0)=\varnothing$

Ну по опр субдифф: $\partial f(\hat{x})=\{x^*: \langle x^*, x-\hat{x}\rangle\le f(x)-f(\hat{x}), \forall x\in X\}$

Для $\hat{x}=0$. (причем x^* = умножение на число, т.к размерность $=1$)

$\Rightarrow \partial f(0)=\{x^*: x^*\cdot x\le-\sqrt{x}-0, \forall x>0\}$

$\Rightarrow x^*\le-\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{-1}{\sqrt{x}}, \forall x>0$

$\Rightarrow$ в пределе: $x^*\le-\infty$ – против.

$\Rightarrow \partial f(0)=\varnothing$

② а) Если $f_i : X \to \mathbb{R}$ и $c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,
выпуклые
то $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i$ — тоже выпуклая.

<u>Решение:</u> f — выпуклая, если $f(tx_1+(1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1)+(1-t)f(x_2)$, $\forall x_1; x_2 \in X; t \in [0,1]$

Пусть $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i$; $f_i(tx_1+(1-t)x_2) \leq t \cdot f_i(x_1)+(1-t)f_i(x_2)$

$$\Rightarrow f(tx_1+(1-t)x_2) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(tx_1+(1-t)x_2) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\left(t f_i(x_1)+(1-t)f_i(x_2)\right) =$$

$$= t \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x_1) + (1-t) \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x_2) = t f(x_1)+(1-t)f(x_2).$$ ч.т.д.

б) Поточечный супремум конечного или беск. числа выпуклых ф-ций с общей обл. опр — тоже выпуклая ф-ция.

<u>Решение:</u> Если $f_i(tx_1+(1-t)x_2) \leq t \cdot f_i(x_1)+(1-t)f_i(x_2)$, $g = \sup\limits_i f_i$

то и $\sup\limits_i \{f_i(tx_1+(1-t)x_2)\} \leq \sup\limits_i \left(t f_i(x_1)+(1-t)f_i(x_2)\right) = t \cdot \sup\limits_i f_i(x_1)+(1-t)\sup\limits_i f_i(x_2)$

$\parallel$ $\quad\uparrow$ $\quad\parallel$

$g(tx_1+(1-t)x_2)$ $\quad$ т.к sup сохраняет нестрогие н-ва $\quad$ $t \cdot g(x_1)+(1-t)g(x_2)$

в) Если $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклые
— неубывающая $\Rightarrow f_2(f_1) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — тоже выпуклая.

<u>Решение:</u> $f_2(f_1(tx_1+(1-t)x_2)) \underset{\uparrow}{\leq} f_2(tf_1(x_1)+(1-t)f_1(x_2)) \underset{\uparrow}{\leq} t f_2(f_1(x_1))+(1-t) \cdot f_2(f_1(x_2))$ ч.т.д.

выпуклость f_2

т.к $f_1(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf_1(x_1)+(1-t)f_1(x_2)$ в силу выпуклости f_1

А f_2 — неубывающая

г) Выпуклая ф-ция, конечная на всей прямой, непрер.

Сделаем неск. шагов.

1) Если $f(x)-f(x_0) \leq C$ на непуст. шаре $B_r(x_0) \subset D$, $r>0$,
то и $|f(x)-f(x_0)| \leq C$ на $B_r(x_0)$.

▸ Ну считаем, что $x_0=0$, $f(x_0)=0$.

$$\Rightarrow \forall x \in B_r(0) : -x \in B_r(0) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq C \\ f(-x) \leq C. \end{cases}$$

Но $0 = \frac{x+(-x)}{2} \Rightarrow$ в силу выпуклости $0 = f(0) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x)+f(-x) \Rightarrow -f(x) \leq f(-x) \leq C \Rightarrow |f(x)| \leq C \text{ на } B_r(0).$$ ◀

2) пусть $f(x)-f(x_0)\le C$ на $B_r(x_0)\subset D$.

тогда $\forall \varepsilon\in[0,1], \forall x\in B_{\varepsilon r}(x_0): |f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon\cdot C$.

▶ Считаем $x_0=0;\ f(x_0)=0$.

$\forall z\in D: \varepsilon z=(1-\varepsilon)\cdot 0+\varepsilon\cdot z$

$\Rightarrow f(\varepsilon z)\le(1-\varepsilon)f(0)+\varepsilon\cdot f(z)=\varepsilon f(z)$

$z\in B_r(0)\Rightarrow x=\varepsilon z\in B_{\varepsilon r}(0)$

$\Rightarrow \forall x\in B_{\varepsilon r}(0): f(\underset{\varepsilon z}{x})\le\varepsilon\cdot f(z)\le\varepsilon C$

$\Rightarrow$ по п.1: $|f(x)|\le\varepsilon\cdot C$ на $B_{\varepsilon r}(0)$ ◀

3) $\forall x\in B_r(x_0)$ положим $\varepsilon:=\frac{|x-x_0|}{r}$

$\Rightarrow x\in B_{\varepsilon r}(x_0)$, т.к $|x-x_0|=\varepsilon r\le\varepsilon r$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon\cdot C=\frac{|x-x_0|}{r}C=\frac{C}{r}|x-x_0|,\ \forall x\in B_{\varepsilon r}(x_0)$

4) Если выпуклая f огр. сверху в некот. окр-ти, то f – непрер. в x_0.

▶ Хотим: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ если $|x-x_0|<\delta$.

Ну $\exists r>0$: f огр. сверху на $B_r(x_0)$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)\le C$ на $B_r(x_0)$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\le\frac{C}{r}\cdot|x-x_0|,\ \forall x\in B_{\varepsilon r}(x_0)$

$\Rightarrow$ положим $\delta:=\frac{r}{C}$ $\Rightarrow$ f – непрер. по опр. ◀

5) Если f – выпукла и конечна на всей прямой, то она непрер. везде.

возьмём произв. $x_0\in\mathbb{R}$

▶ Надо найти окр-ть точки x_0, в кот. f огр. сверху.

Будем искать ее как внутренность куба.

Пусть M – произв. многогр. в $\mathbb{R}^n$, у кот. 0 – внутр. точка

(ну берем ∀ многогр. и помещаем начало коорд. в какую-то его внутр. точку)

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0: A_\varepsilon:=x_0+\varepsilon M$ – тоже многогр, и x_0 – его внутр. точка.

$x_0\in \mathrm{int}\,\mathbb{R}\Rightarrow A_\varepsilon\subset\mathbb{R}$ при дост. малых ε $\Rightarrow$ на всем A_ε: f – конечна.

Пусть $a_1\ldots a_N$ – мн-во вершин A_ε

Пусть $C=\max\limits_{1\le i\le N} f(a_i)\Rightarrow C<+\infty$

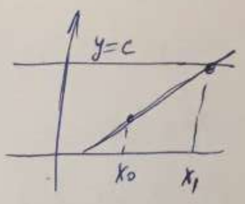
Но $\forall x\in A_\varepsilon: x=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i a_i$, где $\gamma_i\ge 0;\ \sum\gamma_i=1$,

то в силу выпуклости f: $f(x)\le\sum\gamma_i f(a_i)\le C$

$\Rightarrow \forall x\in A_\varepsilon: f(x)\le C$ $\Rightarrow$ это вып. на открытом мн-ве $\mathrm{int}\,A_\varepsilon$ $\Rightarrow$ вот эта окр-ть точки x_0, где f огр. сверху ◀

д) Выпуклая огранич. ф-ция, опред. на всей $\mathbb{R}$ – постоянна.

Решение: f–огр $\Rightarrow \exists C: f(x) < C, \forall x \in \mathbb{R}$.



поскольку $f \not\equiv const$, то $\exists x_0 : f'(x_0) \neq 0$.

касат. в точке x_0: $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

по выпуклости f: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) f(x_2)$

$\Rightarrow$ график ф-ции выше касат.

Найдём пересечение $y = C$ с $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{C - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + \frac{C - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$\Rightarrow f(x_1) \geq C$, т.к график выпуклой ф-ции лежит не ниже касат, проведённой в любой точке выпуклости.

Но по усл. $f(x) < C, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ против.

③. Исследовать на выпуклость.

а) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$f'_x = 2ax + 2by$

$f'_y = 2bx + 2cy \Rightarrow \left(\frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

но f выпукла (вниз) $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ неотриц. опр.

$\Leftrightarrow \boxed{a \geq 0,\ ac - b^2 \geq 0}$

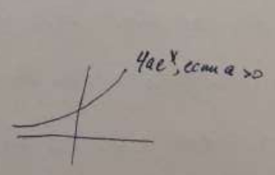
б) $f(x) = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^x + c$

$f'_x = 2a \cdot e^{2x} + b \cdot e^x$

$f''_x = 4ae^{2x} + be^x \overset{?}{\geq} 0$

$\underbrace{e^x}_{\geq 0}(4ae^x + b) \overset{?}{\geq} 0, \forall x.$

$4ae^x \geq -b.$



$\boxed{a \geq 0, b \geq 0 - \text{подх.}}$

$a \geq 0, b < 0$ – не подх

$a < 0$ – не подх

в) $f(x,y,z) = e^{z^2+3x+4y}$

$f'_x = 3e^{z^2+3x+4y}$

$f'_y = 4e^{z^2+3x+4y}$

$f'_z = 2z\cdot e^{z^2+3x+4y}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 9e^{z^2+3x+4y} & 12e^{z^2+3x+4y} & 6ze^{z^2+3x+4y} \\ 12e^{z^2+3x+4y} & 16e^{z^2+3x+4y} & 8ze^{z^2+3x+4y} \\ 6ze^{z^2+3x+4y} & 8ze^{z^2+3x+4y} & (4z^2+2)e^{z^2+3x+4y} \end{pmatrix} \overset{?}{\geqslant} 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Хотим} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 6z \\ 12 & 16 & 8z \\ 6z & 8z & 4z^2+2 \end{pmatrix} \overset{?}{\geqslant} 0.$$

$M_{11} = 9$

$M_{12} = 9\cdot16 - 144 = 0$

$M_{13} = \cancel{9\cdot16\cdot(4z^2+2)} + 24\cdot48z^2 - 16\cdot36z^2 - \cancel{144(4z^2+2)} - 9\cdot64z^2 =$

$= (1152 - 576 - 576)z^2 = 0. \geqslant 0.$

$\Rightarrow f(x) = e^{z^2+3x+4y}$ – выпукла (вниз)

г) $f(x) = \min\{x_1^2 + x_2^2 \,/\, x_1 + x_2 = x\}$

Хотим: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \to \min \\ x_1 + x_2 = x. \end{cases}$

$\Lambda(x_1; x_2) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1 + x_2 - x)$

$\Lambda'_{x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1$

$\Lambda'_{x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1$ $\quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2\lambda_0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_0 x_2 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = x. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ – не подх

Если $\lambda_0 \neq 0$, то положим $\lambda_0 = 1$: $\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = x \end{cases} \Rightarrow -\lambda_1 = 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{x}{2}.$

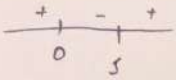
$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – положит. опр $\Rightarrow$ это min

$\Rightarrow f(x) = \min\{x_1^2 + x_2^2 \,/\, x_1 + x_2 = x\} = \frac{x}{2}$ – выпуклая.

④ Найти $\partial f(\hat{x})$:

а) $f(x) = 2|x-1| + |x|$

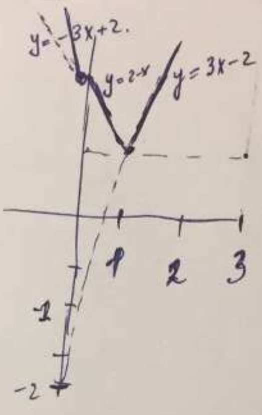
$\partial f(\hat{x}) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - \hat{x} \rangle \leqslant f(x) - f(\hat{x}) \; \forall x \in X\}.$



Если $x \geqslant 1$: $f(x) = 2(x-1) + x = 3x-2$

Если $x \in (0,1)$: $f(x) = 2-2x+x = 2-x$

Если $x < 0$: $f(x) = 2-2x-x = -3x+2$



~~Если~~ $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -3x+2, & x<0 \\ 2-x, & x\in(0,1) \\ 3x-2, & x \geqslant 1. \end{cases}$

Если $x > 1$: $x^*(x-x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) = 3x-2-(3x_0-2) = 3(x-x_0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x^* \leqslant 3, \text{ если } x > x_0 > 1 \\ x^* \geqslant 3, \text{ если } x_0 > x > 1 \end{cases} \Rightarrow x^* = 3$, если $x_0 > 1$.

Аналогично, если $x_0 \in (0,1)$, то $x^* = -1$

если $x_0 < 0$, то $x^* = -3$.

Если $x_0 = 1$: $x^*(x-1) \leqslant f(x) - 1.$, $\forall x \in X$.

$\quad\|\; 3x-2$, если $x>1$

$\quad 2-x$, если $x<1$

$\quad -3x+2$, если $x<0$.

$\Rightarrow \begin{cases} x^*\overbrace{(x-1)}^{>0} \leqslant 3x-2-1 = 3(x-1), \text{ если } x>1 \\ x^*\underbrace{(x-1)}_{<0} \leqslant 2-x-1 = 1-x = -1\underbrace{(x-1)}_{<0}, \text{ если } x\in(0,1) \\ x^*\underbrace{(x-1)}_{<0} \leqslant -3x+2-1 = \underbrace{-3x+1}_{<-2}, \text{ если } x<1. \end{cases}$

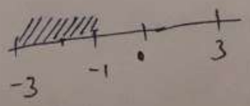
$\Rightarrow \begin{cases} x^* \leqslant 3 \\ x^* \geqslant -1 \\ x^*\underbrace{(1-x)}_{\geqslant 0} \geqslant -1+3x \Rightarrow x^* \geqslant \dfrac{3x-1}{1-x} = -\dfrac{3x-1}{x-1} \geqslant -3. \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x^* \in [-1; 3]}$

Если $x_0 = 0$: $\{\, x^* \cdot x \leqslant f(x) - 2, \forall x \in X$

$\Rightarrow \begin{cases} x^* \cdot x \leqslant 3x-2-2 = 3x-4, \text{ если } x>1. \\ x^* \cdot x \leqslant 2-x-2 = -x, \text{ если } x\in(0,1) \\ x^* \cdot x \leqslant -3x+2-2 = -3x, \text{ если } x<0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^* \leqslant 3 \\ x^* \leqslant -1. \\ x^*\underbrace{(-x)}_{>0} \geqslant -3\cdot\underbrace{(-x)}_{>0} \Rightarrow x^* \geqslant -3. \end{cases}$



$\Rightarrow \boxed{x^* \in [-3; -1]}$

б) $f(x) = \max\{x, 0\}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

$\partial f(x_0) = 1$, при $x_0 > 0$

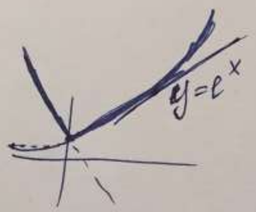
$\partial f(x_0) = 0$, при $x_0 < 0$.

$\partial f(0)$: $\quad x^* \cdot x \leq f(x) \ , \forall x \in X$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^* \cdot x \leq x, \text{ для } x > 0 \\ x^* \cdot \underset{<0}{\underbrace{x}} \leq 0, \text{ для } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* \leq 1. \\ x^* \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^* \in [0; 1]}$$

т.е $x^* \underset{\geq 0}{\underbrace{(-x)}} \geq 0$

в) $f(x) = \max\{e^x; 1-x\}$



при $x_0 < 0$: $\partial f(x_0) = -1$.

при $x_0 > 0$: ~~$x^*(x - x_0) \leq f(x) - e^{x_0} = e^x - e^{x_0} = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots) - (1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + \ldots) = (x - x_0) + (\frac{x^2 - x_0^2}{2}) + \ldots$~~

$$x^*(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \ldots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^* \leq f'(x_0) = e^{x_0}, \text{ при } x > x_0 \\ x^* \geq f'(x_0) = e^{x_0}, \text{ при } x < x_0 \end{cases} \Rightarrow x^* = f'(x_0) = e^{x_0}.$$

при $\boxed{x_0 = 0}$: $x^*(x - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_0}}) \leq f(x) - 1 \ , \forall x \in X$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^* \cdot x \leq e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \ x > 0 \\ x^* \cdot x \leq 1 - x - 1 = -x, \text{ при } x < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* \leq 1 \\ x^* \underset{\geq 0}{\underbrace{(-x)}} \geq -1 \cdot \underset{\geq 0}{(-x)} \Rightarrow x^* \geq -1. \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^* \in [-1; 1]}$$