Введение в финансовую математику

Лекция 1: Модель Блэка–Шоулса

12 мая 2020

Активы и торговые стратегии

Рисковый и безрисковый активы

В модели присутствуют два актива:

- безрисковый актив (облигация): $dB_t = rB_t dt$,
- рисковый актив (акция): $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, где W_t – броуновское движение на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, P)$.

геом. бр.дв

Ито $df(t, W_t)$

Явное выражение:

$$B_t = B_0 e^{rt}, \qquad S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}.$$

$f(t, w) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w}$

Далее без ограничения общности будем считать $B_0 = 1$.

$df(t, W_t) = f'_t(t, W_t)dt + f'_w(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} f''_{ww}(t, W_t)dt$

$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t f'_t(s, W_s)ds + \int_0^t f'(s, W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{ww}(s, W_s)ds$

Торговые стратегии

Торговая стратегия ("портфель") – предсказуемый процесс (G_t, H_t), где

- G_t – количество единиц безрискового актива, м.б. $G_t \le 0$, $H_t \le 0$
- H_t – количество единиц рискового актива.

Стоимость портфеля:

$$V_t = G_t B_t + H_t S_t.$$

Условие самофинансируемости: $dV_t = G_t dB_t + B_t dG_t + H_t dS_t + S_t dH_t + dH_t dS_t$

$$dV_t = G_t dB_t + H_t dS_t$$

(нужно еще требовать, чтобы G_t и H_t были B_t– и H_t–интегрируемыми).

Отсюда следует, что самофинансируемая стратегия однозначно задается процессом H_t и величиной V_0.

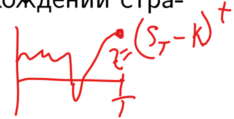
Задача хеджирования

Европейские платежные обязательства

Далее будем считать, что фильтрация $\mathscr{F}_t$ порождена W_t.

Европейские платежные обязательства отождествляются с $\mathscr{F}_T$-измеримыми величинами Z. Интерпретация: Z равен выплате, которую нужно сделать по некоторому контракту в момент T.

Задача хеджирования (воспроизведения) Z заключается в нахождении стратегия H_t такой, что



$$Z = V_T^H \text{ п.н.}$$

Стоимость начального портфеля хеджирующей стратегии V_0 будем называть ценой платежного обязательства и обозначать как $V(\cancel{X})$.

Z

Существование решения задачи хеджирования

Из теоремы о представлении мартингалов известно, что любой $\widetilde{Z} \in L^2(\mathscr{F}_T)$ можно представить в виде

$$\widetilde{Z} = E\widetilde{Z} + \int_0^T \widetilde{H}_s dW_s,$$

где $\widetilde{H}_t$ – предсказуемый процесс. Отсюда следует, что задача хеджирования имеет решения (для $Z \in L^2$), но теорема о представлении не конструктивна.

Решение для обязательств вида $Z = f(S_T)$

Будем далее рассматривать $Z = f(S_T)$, где $f(x)$ – детерминированная функция, и искать стратегию в виде

$$H_t = H(t, S_t), \qquad V_t = V(t, S_t),$$ $\Rightarrow G(t, S_t)$

где $H(t,x)$, $V(t,x)$ – детерминированные функции.

Уравнение для $H(t,x)$ и $V(t,x)$

$dt \cdot dt = 0$

$dt \cdot dW_t = 0$

$dW_t \cdot dW_t = dt$

Из формулы Ито находим

$$dV(t,S_t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,S_t)(dS_t)^2$$

$dS_t = a(t,S_t)dt + b(t,S_t)dW_t$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x} dW_t.$$

$\frac{\partial V}{\partial x}(t,S_t)$

А из условия самофинансирования и условия $G_t = e^{-rt}(V_t - H_t S_t)$ находим

$$dV_t = G_t r e^{rt} dt + H_t dS_t = (rV_t + (\mu - r)S_t H_t)dt + \sigma S_t H_t dW_t.$$

$G_t dB_t$ $\qquad$ $H(t,S_t)$

Приравнивая коэффициенты, получаем уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x) = H(t,x) \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \mu x \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\sigma^2}{2} x^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rV + (\mu - r)H + \mu x H \end{cases}$$

x

Задача Коши для $V(t,x)$

После упрощения и подстановки конечного условия $V(t,x) = f(x)$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + rs\dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x) + \dfrac{\sigma^2 s^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) = rV(t,x) \\ V(T,x) = f(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = C\,\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2}$$

Решив задачу Коши, можно найти хеджирующую стратегию:

$$H(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), \qquad G(t,x) = e^{-rt}(V(t,x) - H(t,x)x).$$

Замечание: видно, что стратегия не зависит от значения μ.

Цена как ожидание по мартингальной мере

Теорема (формула Фейнмана–Каца)

Пусть процесс X_t удовлетворяет уравнению

$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t.$$

Для детерминированных функций $f(x), g(t, x)$ определим функцию

$$V(t, x) = E\left(e^{-r(T-t)} f(X_T) + \int_t^T e^{-r(u-t)} g(u, X_u)du \;\middle|\; X_t = x\right).$$

$X_u = x + \int_t^u a(s, X_s)ds + \int_t^u b(s, X_s)dW_s$

$u \geq t$

Тогда $V(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \underbrace{a(t, x)}_{a = rx} \dfrac{\partial V}{\partial x}(t, x) + \underbrace{\dfrac{b^2(t, x)}{2}}_{b^2 = \sigma^2 x^2} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) + \underbrace{g(t, x)}_{= 0} = rV(t, x) \\ V(T, x) = f(x) \end{cases}$$

Применение формулы Фейнмана–Каца к задаче хеджирования

Из формулы Фейнмана–Каца следует, что цена обязательства Z равна

$$V(Z) = Ee^{-rT} f(X_T), \qquad Z = f(S_T)$$

где процесс X_t удовлетворяет уравнению

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \qquad X_0 = S_0.$$

$$Q|_{\mathscr{F}_T} \sim P|_{\mathscr{F}_T}$$

Известно (из теоремы Гирсанова), что найдется мера Q на $(\Omega, \mathscr{F}, \cancel{P})$ относительно которой $\widetilde{W}_t = W_t - (r - \mu)t$ является броуновским движением. Тогда

$$W_t = \widetilde{W}_t + (r-\mu)t$$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \qquad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

и, значит,

$$V(Z) = E^Q e^{-rT} \underbrace{f(S_T)}_{Z}.$$

Мартингальные меры

Этот результат можно обобщить: цена любого (интегрируемого) платежного обязательства Z может быть найдена как

$$V(Z) = E^Q e^{-rT} Z.$$

Мера Q называется эквивалентной мартингальной мерой (э.м.м.), так как $Q \sim P$ и дисконтированная цена $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ рискового актива имеет вид

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t d\widetilde{W}_t,$$

и, значит, является мартингалом относительно Q.

цена Z

$d\dfrac{S_t}{B_t}$

$\tilde{V}_0^H = E^Q \tilde{V}_T^H = E^Q \dfrac{Z}{B_T}$

- $S_t,\ B_t$
- Q : $\dfrac{S_t}{B_t}$ – мартингал
- $\exists\, H_t \quad V_T^H = Z$ п.н.

- $\tilde{V}_t^H = \dfrac{V_t^H}{B_t}$

$d\tilde{V}_t^H = H_t\, d\tilde{S}_t$

- $\tilde{V}_T^H = \dfrac{Z}{B_T}$ – март

Цены форвардов и опционов

Форвардные контракты

Форвард – это контракт между двумя сторонами (покупателем и продавцом форварда), согласно которому покупатель должен купить, а продавец должен продать акцию в момент $t = T$ по цене F, назначенной в момент $t = 0$.

Справедливая форвардная цена, по определению, равна такой величине F, что платежное обязательство, равное прибыли покупателя

$$\underset{Z}{\cancel{X}} = S_T - F$$

имеет нулевую стоимость в момент $t = 0$ (так как все расчеты происходят только в момент T).

Переходя к ожиданию по э.м.м., находим

$$E^Q \frac{Z}{e^{rT}} = 0$$

$$F = e^{rT} S_0.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{E^Q \frac{S_T}{e^{rT}}}_{= S_0} - \frac{F}{e^{rT}} = 0$$

Эту цену можно получить и из другого соображения: хеджирующая стратегия для $Z = S_T - F$ имеет вид

$$G_t = -e^{-rt} F, \qquad H_t = 1$$

$$G_0 = -S_0$$

(взять деньги в долг и купить на них акцию).

$$S_T$$

Тогда F можно найти из условия $V_0 = 0$.

$$H_T = 1$$

$$G_T = -e^{rT} S_0 \qquad -\underbrace{e^{rT} S_0}_{F}$$

Европейские опционы

Европейский опцион колл/пут – это контракт между покупателем и продавцом опциона, дающий покупателю право купить/продать акцию у продавца в момент $t = T$ по цене K, назначенной в момент $t = 0$.

Справедливая цена опциона колл/пут по определению равна цене хеджирования платежного обязательства

страйк

$$Z = (S_T - K)^+ \quad \text{(для опциона колл)},$$
$$Z = (K - S_T)^+ \quad \text{(для опциона пут)}$$

момент исполнения

(это та сумма, которую нужно иметь продавцу в момент $t = T$, чтобы исполнить контракт).

Формула Блэка–Шоулса

Переходя к э.м.м., находим цены опционов колл C и пут P:

$$C = E^Q e^{-rT}(S_T - K)^+, \qquad P = E^Q e^{-rT}(K - S_T)^+.$$

$$= S_0 \exp\left(\sigma \widetilde{W}_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

Интегрируя по распределению S_T находим явное выражение (формула Блэка–Шоулса, 1973 г.):

$$C = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2), \quad P = e^{-rT}K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1),$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right).$$

Паритет цен опционов колл и пут

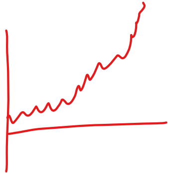
Справедливо равенство

$$C - P = S_0 - e^{-rT} K.$$

Доказательство: $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$.

$$E^Q \frac{(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+}{e^{rT}} = E^Q \frac{S_T - K}{e^{rT}}$$

Дополнение: модель Башелье



Исторически первая модель цен акций (Башелье, 1900 г.):

$$B_t \equiv 1, \qquad S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

Вводя $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu}{\sigma} t$, можно представить

$z = f(S_T)$

$$S_t = S_0 + \sigma \widetilde{W}_t.$$

$E^Q f(S_T)$

Тогда э.м.м. Q такова, что $\widetilde{W}_t$ является броуновским движением по Q.

Форвардные цены и цены опционов в модели Башелье

Форвардная цена:

$$F = S_0.$$

Цены опционов колл и пут:

$$C = (S_0 - K)\Phi(d) + \sigma\sqrt{T}\varphi(d), \qquad P = (K - S_0)\Phi(-d) + \sigma\sqrt{T}\varphi(d),$$

где

$$d = \frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Паритет цен опционов колл и пут:

$$C - P = S_0 - K.$$