



Летний научный выезд Фонда "Институт "Веха"

## **Эволюционная модель с эндогенными аффинными выплатами**

Александра Токаева

Supervisors: Житлухин Михаил Валентинович

Vega Institute Foundation

24 июля 2023г



# Содержание

## Введение

- Введение: цель работы

## Описание модели рынка

- Общая модель рынка с эндогенными ценами

- Стратегии

- Выживающие стратегии

- Модель 1: Активы с взаимоисключающими дивидендами

- Модель 2: Активы с произвольными случайными дивидендами

- Модель 3: Активы с аффинными дивидендами

## Основные результаты

- Теорема 1: “выживающая” стратегия — неподвижная точка отображения

- Теорема 2: “выживающая” стратегия единственна

- Теорема 3: случай н.о.р. коэффициентов

- Численный пример

## Литература



## Введение

- Цель работы — построить стратегию, “выживающую” на рынке вне зависимости от стратегий других инвесторов.
- Рассматривается стохастическая модель рынка с дискретным временем, эндогенными ценами и аффинными дивидендами.
- Обобщается модель из статьи Amir R., Evstigneev I., and Schenk-Hoppé K. R. *Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games (2013)*.
- Необходимость рассмотрения такой модели указана в статье Evstigneev I., Hens T., and Schenk-Hoppé K. R. *Evolutionary behavioral finance (2016)*.
- Результаты работы изложены в статье Evstigneev I., Tokaeva A., Vanaei M., and Zhitlukhin M. *Survival strategies in an evolutionary finance model with endogenous asset payoffs (2023)*.
- Подход Evolutionary Behavioral Finance — уйти от Вальрасовской модели, где каждый участник максимизирует (ненаблюдаемые) utility functions, и позволить участникам рынка использовать любые стратегии, а рынку — отбирать те стратегии, которые хорошо себя показывают.



## Общая модель рынка с эндогенными ценами

- $N \geq 2$  агентов.
- $K \geq 2$  активов, активы “короткоживущие”.
- Каждый агент  $n$  в каждый момент времени  $t$  выбирает вектор долей  $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \dots, \lambda_t^{n,K})$ , в которых он вкладывает свой капитал  $W_t^n$  в каждый из  $K$  активов в момент времени  $t$ .
- Цены устанавливаются эндогенно из условия равенства спроса и предложения на каждый из активов.
- Активы платят случайные дивиденды  $A_t^k$ .

# Стратегии

- Стратегия  $n$ -го агента — это последовательность  $\Lambda^n = (\Lambda_t^n)_{t=0}^\infty$  измеримых векторнозначных функций

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$$

со значениями в стандартном  $K$ -симплексе

$$\Delta^K = \{(a^1, \dots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \dots + a^K = 1\}.$$

- $\bar{s}_t := (s_1, \dots, s_t)$  — история состояний случайного фактора.
- $\bar{W}_0 := (W_0^1, \dots, W_0^N)$  — вектор начальных капиталов.
- $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, \dots, \lambda_{t-1})$ , где  $\lambda_s = (\lambda_s^1, \dots, \lambda_s^N)$  — история игры.

# Выживающие стратегии

- Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой  $r_t^n := \frac{W_t^n}{\bar{W}_t}$ .

## Определение 1

Стратегия  $\Lambda^n$   $n$ -го агента называется “**выживающей**”, если для любого вектора начальных капиталов  $\bar{W}_0$  и любого профиля стратегий  $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$  с заданной стратегией  $\Lambda^n$  и произвольными стратегиями  $\Lambda^j$  агентов  $j \neq n$  выполняется неравенство  $W_t^n > 0$  п.н. для всех  $t \geq 0$  и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$



# Выживающая и лог-оптимальная стратегия

- Чтобы найти выживающую стратегию, мы будем искать *лог-оптимальную стратегию*.

## Определение 2

Стратегия  $\Lambda^n$  называется **лог-оптимальной**, если для любого вектора начальных капиталов  $\bar{W}_0$  и профиля стратегий  $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ , где  $\Lambda^n$  - данная стратегия, выполнено  $W_t^n > 0$  п.н. для всех  $t \geq 0$  и  $\ln r_t^n$  является субмартингалом.

## Утверждение

Любая лог-оптимальная стратегия является “выживающей”.



## Модель 1: Активы с взаимоисключающими дивидендами

- $\bar{A}_t = \bar{A}_t(s_t) \in \{e_1, \dots, e_K\}$  – вектор дивидендов от всех активов в момент времени  $t \geq 1$ .
- $e_i = (0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .
- $\lambda_t^n(s_t) \in \Delta^K = \{(a^1, \dots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \dots + a^K = 1\}$ .

### Теорема, Blume, Easley, 1992

Выживающей стратегией является константная стратегия  $\lambda^* = (\lambda^{*,1}, \dots, \lambda^{*,K})$ , где  $\lambda^{*,k} = P(A_t^k = 1)$ .

При этом стратегия  $\lambda^*$  является единственной выживающей стратегией в классе константных стратегий.

Кроме того, репрезентативная стратегия рынка стремится к стратегии  $\lambda^*$ .



## Модель 2: Активы с произвольными случайными дивидендами

- Рассмотрим ту же модель, но будем считать, что  $\bar{A}_t$  — последовательность произвольных н.о.р. случайных величин в  $R^K$  с условием  $P(A_t^k > 0) > 0$ .
- $\lambda_t^n(s_t) \in \Delta^K = \{(a^1, \dots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \dots + a^K = 1\}$ .

### Теорема, Amir, Evstigneev, 2013

Выживающая стратегия  $\lambda_t^* = (\lambda^{*,1}, \dots, \lambda^{*,K})$  задается равенством

$$\lambda_t^* = \frac{A_t^k}{A_t^1 + \dots + A_t^K}$$

Кроме того, если на рынке один из игроков использует стратегию  $\lambda^*$ , то для репрезентативной стратегии рынка  $\mu_t$  выполнено:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ п.н.},$$

## Модель 3: Активы с аффинными дивидендами

- $W_t = \sum_{n=1}^N W_t^n$  – полный капитал рынка в момент времени  $t$ .
- $\mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n$  – доля  $W_t$ , вложенная в  $k$ -й актив.
- $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  – дивиденды от единицы актива  $k$  в момент времени  $t \geq 1$ .
- Дивиденды аффинные:

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \beta_{t+1}^k \mu_t^k,$$

где  $\alpha_{t+1}^k$  и  $\beta_{t+1}^k$  – произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \quad (1)$$

$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \quad (2)$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными коэффициентами  $a_{t+1}^k, b_{t+1}^k$ .

## Динамика капитала

- $\bar{P}_t = (P_t^1, \dots, P_t^K)$  – вектор цен активов в момент времени  $t$ .
- $\bar{X}_t^n = (X_t^{n,1}, \dots, X_t^{n,K})$ , где  $X_t^{n,k} = \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k}$  – количество единиц актива  $k$  в портфеле.
- Из равенства спроса и предложения находим цены.

$$1 = \sum_{n=1}^N X_t^{n,k} = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} \Rightarrow P_t^k = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n$$

- Динамика капитала имеет вид

$$W_{t+1}^n = \sum_{k=1}^K X_{t-1}^{n,k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n} A_{t+1}^k$$



## Утверждение 2

- $g_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) = a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + \lambda^* b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})$ .
- Обозначим  $\bar{\chi}_t = (\bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$ .
- Введем отображение

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathbb{E}_t \left( \frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

## Утверждение 2 (продолжение)

### Proposition 1

Для любого  $t \geq 0$  существует измеримая функция  $\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$  со значениями в  $\Delta^K$  со следующими свойствами:

- для любого  $\bar{\chi}_t$  выполнено:

$$\mathbb{P}_t \left( \sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) = 0 \right) = 0 \text{ п.н.}, \quad (3)$$

$$\mathbb{E}_t \left( \frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4)$$

- $\Lambda_t^*$  — неподвижная точка отображения  $L_t$ , то есть для любого  $\bar{\chi}_t$  выполнено

$$L_t(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) \text{ п.н.}, \quad (5)$$

# Основная теорема (теорема 1)

## Теорема 1

Пусть  $\sum_{k=1}^K (a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})) > 0$ .

Тогда “выживающая” стратегия  $\Lambda_t^*$  существует.

“Выживающая” стратегия  $\Lambda_t^*$  является неподвижной точкой отображения  $L_t$ , явный вид которого представлен в тексте работы:

$$L_t(\Lambda_t^*) = \Lambda_t^* \text{ п.н.} \quad (6)$$



## Основная теорема 2

### Теорема 2

Если в профиле стратегий  $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$  агент  $n$  использует стратегию  $\Lambda^*$ , то при  $t \rightarrow \infty$  выполнено

$$\|\lambda_t^n - \mu_t\| \rightarrow 0.$$

То есть выживающая стратегия в некотором смысле единственна.

## Основная теорема 2, подробнее

### Теорема 2

Пусть стратегия  $\Lambda^*$  удовлетворяет условиям теоремы 1 и некоторому более сильному условию на функции  $g_{t+1}^k$ : существует  $\epsilon > 0$  такой что для всех  $t \geq 0$  и  $\bar{\chi}_t$  выполнено

$$\mathbb{E}_t \left( \frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 - \epsilon \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (7)$$

Тогда, если в профиле стратегий  $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$  агент  $n$  использует стратегию  $\Lambda^*$ , то выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ п.н.},$$

В частности,  $\|\lambda_t^n - \mu_t\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .



## Основная теорема 3

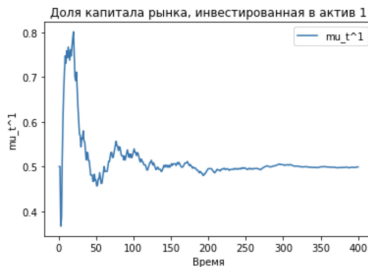
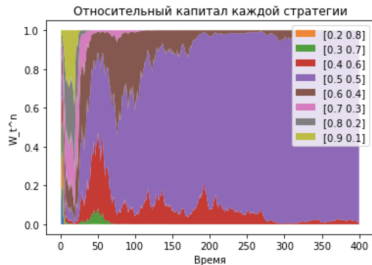
### Теорема 3

Пусть последовательность состояний случайного фактора  $s_t$ ,  $t \geq 1$  состоит из н.о.р. случайных величин, а коэффициенты  $\alpha_t^k, \beta_t^k$  зависят только от  $s_t$ , то есть  $\alpha_t^k = a^k(s_t), \beta_t^k = b^k(s_t)$ . Тогда:

- а) “Выживающая” стратегия существует и постоянна.
- б) Пусть дополнительно  $\mathbb{P}(\alpha_t^k > 0) > 0$  для всех  $k = 1, \dots, K$ . Тогда “выживающая” стратегия единственна в классе постоянных стратегий. При этом “выживающая” стратегия оказывается полностью диверсифицированной.
- в) “Выживающая” стратегия “захватывает” рынок. Другими словами,  $r_t^n \rightarrow 0$  п.н. при  $t \rightarrow \infty$  для любого агента  $n$ , который использует постоянную полностью диверсифицированную стратегию  $\Lambda^n \neq \Lambda^*$ .

## Численный пример

- Выплата каждого из двух активов равна либо  $1 + \mu_t^k$  с вероятностью  $p$ , либо нулю с вероятностью  $1 - p$ ,  $p = 2/3$ .
- “Выживающая” стратегия  $\Lambda^* = (1/2, 1/2)$ .
- На рынке есть 9 инвесторов со стратегиями  $\Lambda^n = (n/10, 1 - n/10)$ , где  $n = 1, 2, \dots, 9$ .





# Результаты

1. Исследована модель рынка с дискретным временем, эндогенными ценами и аффинными выплатами.
2. Доказаны существование и асимптотическая единственность “выживающей” стратегии.
3. Найдены условия, при которых “выживающая” стратегия захватывает рынок.



## Литература

- [1] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013).  
Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games.  
*Annals of Finance*, 9(2):121–144.
- [2] Blume L. and Easley D. (1992).  
Evolution and market behaviour. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40.
- [3] Evstigneev I., Tokaeva A., Vanaei M., and Zhitlukhin M.(2023).  
Survival strategies in an evolutionary finance model with endogenous asset  
payoffs. *Annals of Operations Research*.
- [4] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016).  
Evolutionary behavioral finance. In Haven, E. et al., editors, *The handbook of Post  
Crisis Financial Modelling*, 214-234. Palgrave Macmillan UK.

