К/Р Шашис Татьяна 409₂

① Построить для $y'(x)=f(x)$ РС с наивысшим пор-м апр на решение:

$$\frac{y_k-y_{k-2}}{2h}=a_1 f_k+a_0 f_{k-1}+a_{-1}f_{k-2}$$

Решение:

Будем строить апр на решении.

$[y]_h=(y(x_k))\quad [f]_h=(f(x_k))\quad x_k=kh$

$$\|L_h[y]_h-f_h\|=\max_k\left|\frac{y(x_k)-y(x_k-2h)}{2h}-a_1f(x_k)-\right.$$
$$-a_0f(x_k-h)-a_{-1}f(x_k-2h)\Big|=\max_k\Big|\frac{y(x_k-h)+hy'(x_k-h)+\cancel{\frac{h^2}{2}y''(x_k-h)}-y(x_k-h)+y'(x_k-h)\cdot h-\cancel{\frac{h^2}{2}y''(x_k-h)}}{2h}-a_1(f(x_k-h)+hf'(x_k-h))$$
$$-a_0f(x_k-h)-a_{-1}\left(f(x_k-h)-hf'(x_k-h)\right)+O(h^2)\Big|=$$
$$=\max_k\Big|y'(x_k-h)+\frac{h^2}{6}y'''(x_k-h)-f(x_k-h)(a_1+a_0+a_{-1})-f'(x_k-h)(a_1-a_{-1})+\frac{h^2}{6}y'''(x_k-h)-\frac{f''}{2}(x_k-h)(a_1+a_{-1})+$$
$$+O(h^4)\Big|=O(h^4)$$

Получим систему:

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_{-1}=1\\ a_1-a_{-1}=0\\ \frac{1}{2}(a_1+a_{-1})=\frac{1}{6}\\ a_1-a_{-1}=0\end{cases}\Rightarrow\quad a_1=a_{-1}=\frac{1}{6}\quad a_0=\frac{2}{3}$$

Т.к. если добавить еще одно ур-е на козф., то система получится несовместной → пор-к максимальный

Получим $O(h^4)$.

Нормировка правой части: $\|[f]_h-f_h\|\to 0$

$\Rightarrow a_0+a_1+a_{-1}=1$ - верно.

+

② Исслед-ть на уст-ть.

$$\theta\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+(1-\theta)\frac{y_k-y_{k-1}}{h}=f_k \quad \theta\in[0,1]$$

Решение:

Исследуем на 0-уст-ть: 1) $\theta\neq 0$:

$$\theta(\mu^2-\mu)+(1-\theta)(\mu-1)=0$$

$$\theta\mu^2+(1-2\theta)\mu+(1-\theta)=0$$

$$D=(1-2\theta)^2+4\theta(1-\theta)=1$$

$$\mu_{1,2}=\frac{(2\theta-1)\pm 1}{2\theta}=\left[\begin{array}{l}1\\ \frac{\theta-1}{\theta}=1-\frac{1}{\theta}\end{array}\right.$$

Нужно, чтобы $|\mu_i|\leq 1$ и на границе корни кратности 1. $|\mu_1|=1$ - крат-1

$|\mu_2|\leq 1 \Rightarrow \left|1-\frac{1}{\theta}\right|\leq 1 \Rightarrow \begin{cases}1-\frac{1}{\theta}\leq 1\\ 1-\frac{1}{\theta}\geq -1\end{cases}$

(+)

$\Rightarrow \theta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

2) $\theta=0 \Rightarrow \mu-1=0 \Rightarrow \mu=1$ - 0-уст.

Ответ: при $\theta=0$ и $\theta\geq\frac{1}{2}$.

③ $\begin{cases}y'=y\\ y(0)=1\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=\frac{y_{k+1}+y_k}{2}\\ y_0=1\end{cases}$

Найти: c_1 : $y(x_N)-y_N=c_1h+c_2h^2+\dots$ $x_N=Nh=1$

Решение:

Явный вид решения $y(x)=e^x$

$y_{k+1}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{2}\right)=y_k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\right) \Rightarrow y_N=y_{N-1}\frac{(h+2)}{(2-h)}=$

$=y_0\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N$ (+)

$y(x_N)-y_N=e^1-\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{N=\frac{1}{h}}=e^1-e^{\frac{1}{h}(\ln(2+h)-\ln(2-h))}=$

$=e^1-e^{\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2}+O(h^2)+\frac{h}{2}\right)\cdot 1}=e\left(1-e^{O(h^2)}\right)=1(1-1+O(h^2))$

$=O(h^2) \Rightarrow c_1=0$ Ответ: $c_1=0$

(4) $\begin{cases} y'+5y=\sin 2x \\ y(0)=2 \end{cases}$ Построить двухточ. р.с. 2го пор. сх-ти.

Решение:

1) Рассмотрим схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + a y_k + b y_{k+1} = c f_k + d f_{k+1} \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Найдем пор-к апрокcим. на решении.

а) $[y]_h = (y(x_k))$, $[f]_h = (f(x_k))$

$\|L_h[y]_h - f_h\| = \max\limits_k \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + a y(x_k) + \right.$

$+ b(y(x_k) + h y'(x_k)) + O(h^2) - c f(x_k) - d f(x_k) - d h f'(x_k) \Big|$

$= \max\limits_k \Big| y'(x_k) + y''(x_k)\cdot\frac{h}{2} + y(x_k)(a+b) +$

$+ y'(x_k) h b - c f(x_k) - d f(x_k) - d h f'(x_k) + O(h^2) \Big| =$

$= O(h^2)$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ c+d=1 \\ b=\frac{5}{2} \\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad a=b=\frac{5}{2}, \quad c=d=\frac{1}{2}$$

б) $\| l_h [y]_h - \varphi_h \| = \max(y(0)-2) = 0$

в) $\| [f]_h - f_h \| = \max\limits_k \left| f(x_k) - \frac{1}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1})) \right| =$

Получим схему 2го пор-ка апр на реш:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + \frac{5}{2}(y_{k+1}+y_k) = \frac{1}{2}(f_{k+1}+f_k)$$

лучше $f(x_k+\frac{h}{2})$

2) Проверим ее на λ-уст-ть:

$\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow$ λ-уст $\Rightarrow$

Апроксим + λ-уст. $\rightarrow$ сход-ти 2го пор-ка б) (продолжение проверки норм. правой части)

$\max_k \left| \sin 2x_k - \frac{1}{2}\left(\sin 2x_k + \sin(2x_k + 2h)\right) \right| =$

$= \max_k \left| 2x_k - \frac{1}{2}\left(2x_k + 2x_k + 2h\right) + O(h^3) \right| =$

$= O(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$

⑤ Построить аппрокс. на реш. 2го пор. по $x_0 = 0$, $x_1 = h$

$$\begin{cases} u'(0) - u(0) = 0 \\ u'' - 2u = \sin x - 1 \end{cases}$$

Решение:

$[y]_h = (y(x_k))$ $\quad [f]_h = (f(x_k))$ $\quad x_k = kh$

Рассмотрим: $\frac{y(h) - y(0)}{h} - y(0) = \delta$

Аппрокс. на решение:

$\| L_h[y]_h - \varphi_h \| = \max_k \left| \frac{y(0) + hy'(0) + y''(0)\frac{h^2}{2} - y(0)}{h} \right.$

$\left. - y(0) + O(h^2) - \delta \right| = \left| \underbrace{y'(0)}_{y(0)} + y''(0)\frac{h}{2} - \delta + O(h^2) \right| - y(0)$

$\Rightarrow \delta := \frac{h}{2} y''(0) = (2y(0) - 1)\cdot\frac{1}{2}$

Это не есть ответ.

Получим: $\underbrace{\frac{y(h) - y(0)}{h} - \frac{1}{2}(2y(0) - 1) = 0}$

$\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{1}{2}(2y_0 - 1) = 0$

(6) Исслед-ть $\begin{cases} -u''(x) + p\,u(x) = f(x) \\ u(0) = a \\ u'(1) = b \end{cases}$ $\quad p = const$, $p > 0$

Р.С. 2го пор-ка сх-ми.

Решение:

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} + p\,y_k = f_k \\ y_0 = a \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = b + \sigma \end{cases}$$

1) Проверим аппрокс. на решении:

$[y]_h = (y(x_k))$ $\quad [f]_h = (f(x_k))$

$\| L_h[y]_h - f_h \| = \max\limits_k \left| -y''(x_k) + O(h^2) + p\,y(x_k) - f(x_k) \right| = \underline{\underline{O(h^2)}}$

$\| l_h[y]_h - \varphi_h \| = \max \left\{ |y(0) - a|, \left| \dfrac{y(1) - y(1-h)}{h} - b - \sigma \right| \right\} = \left| \underbrace{y'(1)}_{b} + y''(1)\dfrac{h}{2} - \sigma + O(h^2) \right| = O(h^2) \Rightarrow \sigma := y''(1)\dfrac{h}{2} = \underline{(f(1) - p\,y(1))\dfrac{h}{2}}$

$\Rightarrow$ краевое усл.: $\dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = b + \dfrac{h}{2}(f(1) - p\,y(1))$

Аппроксимация правых частей:

$\| [f]_h - f_h \| = \max\limits_k | f(x_k) - f_k | = \underline{0}$

2) ~~Пров~~ Исследуем на уст-ть.

По опр. уст-ти:

$$\begin{cases} Ay^{(1)} = f^{(1)} \\ Ay^{(2)} = f^{(2)} \end{cases} \Rightarrow A\underbrace{(y^{(1)} - y^{(2)})}_{y} = \underbrace{f^{(1)} - f^{(2)}}_{f}$$

И.Д.: $\|y\| \le const\, \|f\|$ при усл, что краевые усл. аппроксим. точно.

Ау $\|y\| \le \|A^{-1}\| \|f\|$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p & \\ & & & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\mu_{min}(A)}$$

Найдем с.з. матр A: $\bar{p} = 1 - \mu\frac{h^2}{2} - \bar{p}\frac{h^2}{2}$

$\Rightarrow \mu^2 - 2\bar{p}\mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \bar{p} \pm \sqrt{\bar{p}^2 - 1}$

Замечен на краевые усл: $c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$.

$\mu_1^{N-1} \mp \mu_2^{N-1} = \underbrace{\bar{p}}_{=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}} (\mu_1^N \mp \mu_2^N) \Rightarrow$ т.к. $\mu_1\mu_2 = 1$

$\mu_1^{N-1}(1-\mu_1^2) \mp \mu_2^{N-1}(1-\mu_2)^2 = 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^N = -1 \Rightarrow \mu_1^{2N} = -1 \Rightarrow \mu_{1,2} = e^{\pm\frac{\pi}{2N}(2m-1)} \Rightarrow$

$\mu^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(2m-1)}{4N} + p \Rightarrow \quad m = 1 \ldots N$

$|\mu^{(n)}| \ge \frac{4}{h^2}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi h}{4}\right)^2 = \underline{1} = const.$

$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 \le 1 = const. \Rightarrow \|y\|_2 \le const \cdot \|f\|_2$.

$\Rightarrow$ р.с. устойчива

Осталось согласовать норм. т.к. $\|A^{-1}\|_2 = \|A^{-1}\|_{2,h}$

$\Rightarrow \|y\|_{2,h} \le const\,\|f\|_{2,h}$, где $\|u\|_{2,h} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 h}$

3) По т. Филиппова:

$$(1)\ \begin{cases} Ly = f \\ ly = \varphi \end{cases}\ (2) \quad \leftarrow \quad \begin{cases} L_h y_h = f_h\ (3) \\ l_h y_h = \varphi_h\ (4) \end{cases}$$

Пусть
1) зад. (1,2) и (3,4) линейные
2) ∃! реш. зад (1,2)
3) р.с. аппрокс (1,2) на реш. с пор. р.
4) р.с. уст-ва
5) Тогда реш. (3,4) сх-ся к реш. (1,2) с пор. не ниже р

У нас $p=2$ и по т. Филиппова есть сх-ть пор-ка не ниже 2

⑦ Исследовать уст-ть методом априор. оц.

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p_iu_i=f_i & 1\le i\le N-1 \quad p_i\ge 0 \\ u_0=0 & \left(N-\frac{1}{2}\right)h=1 \\ u_N=u_{N-1} \end{cases}$$

Решение:

1) Умножим на u_i:

$$-\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)u_i+\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N-1}(u_i-u_{i-1})u_i=$$

$$=-\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})u_{i-1}+\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})u_i=$$

$$=\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})^2+\sum_{i=1}^{N-1}p_iu_i^2=\sum_{i=1}^{N-1}f_iu_i$$

2) $u_k=\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1}) \Rightarrow u_k^2\le\sum_{i=1}^{k}1^2\sum_{i=1}^{k}(u_i-u_{i-1})^2\le$

$\leq N \sum_{i=1}^{N} (u_i - u_{i-1})^2$

3) $\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \leq N^2 \sum_{i=1}^{N} (u_i - u_{i-1})^2 \leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N} (u_i - u_{i-1})^2$

$+ \sum_{i=1}^{N-1} p_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{N-1} f_i u_i \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} f_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 \right) \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 \leq \sum_{i=1}^{N-1} f_i^2 \Rightarrow \|u\|_{h,2} \leq \|f\|_{h,2}$ <u>2Бq</u>

(+) зач