Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 2

## 1. Показатель Гёльдера траектории винеровского процесса

**Теорема 1.** *Пусть $w_t$ — винеровский процесс на $[0,T]$ и $0<\gamma<1/2$. Тогда для почти наверное всех $\omega$ выполнено*

$$|w_t(\omega)-w_s(\omega)| \le N(\omega)|t-s|^{\gamma} \quad \forall t,s\in[0,T].$$

В доказательстве используем следующее полезное неравенство

**Лемма 1.** *Пусть $p>0$, $\alpha>0$ и $f$ — непрерывная функция на $[0,T]$. Тогда справедливо неравенство*

$$|f(t)-f(s)|^p \le N(p,\alpha)|t-s|^{p\alpha-1}\int_0^T\int_0^T \frac{|f(u)-f(v)|^p}{|u-v|^{p\alpha+1}}\,du\,dv.$$

Докажем теорему.

*Доказательство.* Найдем математическое ожидание

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \frac{|w_u-w_v|^p|}{|u-v|^{p\alpha+1}}\,du\,dv.$$

Положим

$$M(p)=\mathbb{E}|\xi|^p, \quad \xi\sim N(0,1).$$

Тогда математическое ожидание можно переписать в виде

$$M(p)\int_0^T\int_0^T \frac{1}{|u-v|^{p(\alpha-1/2)+1}}\,du\,dv =: C(p,\alpha,T).$$

Если $\alpha<1/2$, то $C(p,\alpha,T)<\infty$ По лемме

$$\mathbb{E}\Bigl(\sup_{t\neq s}\frac{|w_t-w_s|}{|t-s|^{\alpha-1/p}}\Bigr)^p \le N(p,\alpha)C(p,\alpha,T)) < \infty.$$

Следовательно, почти наверное

$$N(\omega)=\sup_{t\neq s}\frac{|w_t-w_s|}{|t-s|^{\alpha-1/p}}<\infty.$$

Параметры $\alpha<1/2$ и $p>1$ можно выбрать так, что $\alpha-1/p=\gamma$. □

В доказательстве теоремы показано, что $\mathbb{E}N(\omega)^p<\infty$.

Неверно, что показатель Гёльдера для винеровского процесса можно взять равным $1/2$ или больше. Это следует из закона повторного логарифма.

**Теорема 2.** (Хинчин) *Для всякого $t\in[0,T)$ почти наверное верно равенство*

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{w_{t+h}-w_t}{\sqrt{2h\ln\ln(\frac{1}{h})}}=1.$$

Кроме того, траектории винеровского процесса почти наверное нигде не дифференцируемы. Это трудно утверждение, но из закона повторного логарифма легко выводится более слабое утверждение, что почти наверное множество точек дифференцируемости винеровского процесса является множеством меры нуль по Лебегу. Пусть $E=\{(t,\omega)\colon\ w_s(\omega)\,\text{не имеет производной в точке}\,t\}$ и $I_E$ — индикатор $E$. Из закона повторного логарифма следует, что при фиксированном $t$ величина $I_E(t,\cdot)$ почти наверное равна нулю. По теореме Фубини получаем

$$\mathbb{E}\int_0^T I_E(t,\omega)\,dt = \int_0^T \mathbb{E}I_E(t,\omega)\,dt = 0.$$

Следовательно, почти наверное $\int_0^T I_E(t,\omega)\,dt = 0$, а это означает, что почти наверное множество точек дифференцируемости $w_t$ является множеством меры нуль по Лебегу.

**2. Мера Винера и пространство Камерона–Мартина**

Винеровский процесс задает вероятностную меру $P_W$ на $C[0,T]$ и даже на

$$C_0([0,T]) = \{x \in C[0,T]\colon\ x(0)=0\}$$

следующим образом

$$P_W(\{x\colon x_{t_1}\in B_1,\dots,x_{t_n}\in B_n\}) = P(\{\omega\colon w_{t_1}\in B_1,\dots,w_{t_n}\in B_n\}).$$

Мера $P_W$ называется мерой Винера.

Вычислим преобразование Фурье меры Винера:

$$\int e^{il(x)}P_W(dx),\quad l\in (C_0[0,T])^*.$$

По теореме Рисса $l(x) = \displaystyle\int_0^T x(t)\mu(dt)$, где $\mu$ — конечная борелевская мера. Пусть $\mu = \sum_k c_k\delta_{t_k}$. Тогда

$$\int e^{il(x)}P_W(dx) = \int e^{i\sum_k c_k x(t_k)}P_W(dx) = \mathbb{E}e^{i\sum c_k w_{t_k}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k,m}c_k c_m\min\{t_k,t_m\}}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k,m}c_k c_m\min\{t_k,t_m\} = \int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds).$$

Приближая произвольную меру $\mu$ последовательностью мер вида $\sum_k c_k\delta_{t_k}$, получаем

$$\int e^{il(x)}P_W(dx) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T\min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds)\Big),\quad l(x) = \int_0^T x(t)\mu(dt).$$

Таким образом, мера $P_W\circ l^{-1}$ является гауссовской мерой с нулевым средним. Мера, у которой образ при отображении произвольным линейным непрерывным функционалом, является гауссовской мерой на прямой, называются гауссовской мерой. Напомним, что преобразование Фурье невырожденной гауссовской меры на $\mathbb{R}^d$ в подходящей системе координат имеет вид $\exp(-|y|^2/2)$. Попробуем записать в таком виде преобразование Фурье меры Винера. Для упрощения рассмотрим случай, когда $\mu = \varrho\,dx$. Заметим, что

$$\int_0^T\int_0^T\min\{t,s\}\varrho(t)\varrho(s)\,ds\,dt = \int_0^T\int_0^t s\varrho(s)\,ds\varrho(t)\,dt + \int_0^T\int_t^T\varrho(s)\,ds\varrho(t)t\,dt.$$

Используя равенство

$$\frac{d}{dt}\Big(-\int_t^T\varrho(s)\,ds\Big) = \varrho(t)$$

и интегрируя по частям, приходим к выражению

$$\int_0^T\Big(\int_0^t\int_s^T\varrho(\tau)\,d\tau\Big)\varrho(t)\,dt.$$

Вновь интегрируя по частям, получаем
$$\int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\varrho(t)\varrho(s)\,ds\,dt = \int_0^T \Big|\int_t^T \varrho(s)\,ds\Big|^2\,dt.$$
Таким образом, в этом случае можно преобразование Фурье меры Винера можно записать в виде
$$\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\|h'\|^2_{L^2[0,T]}\bigr),$$
где
$$h(t) = \int_0^t\int_s^T \varrho(\tau)\,d\tau\,ds,$$
то есть
$$h'' = -\varrho,\quad h(0)=0,\quad h'(T)=0.$$
Пусть теперь $x$ — дифференцируема функция и $x(0)=0$. Справедливы равенства
$$l(x) = \int_0^T x(t)\varrho(t)\,dt = -\int_0^T x(t)h''(t)\,dt = \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt = \langle x', h'\rangle_{L^2[0,T]}.$$
Неформально (понимая, что траектории винеровского процесса нигде не имеют производной) преобразование Фурье меры Винера можно записать в виде
$$<< \int e^{i\langle x',h'\rangle}P_W(dx) = e^{-\frac{1}{2}\|h'\|^2} >>$$
Эти вычисления являются мотивировкой для рассмотрения следующего гильбертова пространства $H = W_0^{1,2}[0,T]$, состоящего из таких абсолютно непрерывных функций $h$, что $h(0)=0$ и $h'\in L^2[0,T]$. Скалярное произведение на $H$ задается равенством
$$\langle h, g\rangle = \int_0^T h'(t)g'(t)\,dt.$$
Поскольку $\max_{[0,T]}|h| \le \sqrt{T}\|h\|_H$, то пространство $H$ непрерывно вложено в $C_0[0,T]$. Кроме того, несложно убедится, что $H$ всюду плотно в $C_0[0,T]$. Если $l\in C_0[0,T]^*$, то ограничение $l$ на $H$ является линейным непрерывным функционалом на $H$ и с помощью теоремы Рисса отождествляется с некоторым вектором $h\in H$:
$$l(x) = \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt.$$
Кроме того, $l$ задается мерой $\mu$ и справедливо равенство
$$\int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds) = \|h\|_H^2.$$
Действительно, при каждом $s$ функция $t\to\min\{t,s\}$ лежит в $H$ и
$$\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt) = \int_0^s h'(t)\,dt = h(s).$$
Следовательно,
$$\int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds) = \int_0^T h(s)\mu(ds) = \int_0^T |h'(s)|^2\,ds.$$

Будем говорить, что задано абстрактное пространство Винера $(B,H,\gamma)$, если заданы банахово пространство $B$, непрерывно и плотно вложенное в $B$ гильбертово пространство $H$ и вероятностная мера $\gamma$ на $B$, причем для всякого $l\in B^*$ верно равенство
$$\int e^{il(x)}\gamma(dx) = e^{-\frac{\|l\|_H^2}{2}}.$$

Гильбертово пространство $H$ называют пространством Камерона–Мартина.

Можно рассмотреть более общую ситуацию, когда на банаховом пространстве $X$ задана центрированная гауссовская мера $\gamma$. Тогда пространство Камерона–Мартина определяется следующим образом: $H \subset X$ состоит из таких векторов $h$, для которых

$$\|h\|_H := \sup\{l(h)\colon \ \int_X |l(x)|^2\,\gamma(dx) \le 1,\ l \in X^*\} < \infty.$$

Пространство $H$ является (как и выше) гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в $X$. В общем случае нельзя считать, что $H$ плотно вложено в $X$.

В случае абстрактного пространства Винера из вида преобразования Фурье немедленно выводится равенство

$$\int |l(x)|^2\gamma(dx) = \|l\|_H^2.$$

Пусть $\sup\{l(x)\colon \ \|l\|_H \le 1\} < \infty$. Всякий линейный непрерывный функционал на $H$ продолжается до линейного непрерывного функционала на $B$ (причем единственным образом). Отображение $l \to l(x)$ является непрерывным линейным функционалом на $H^*$. Тогда существует такой вектор $h \in H$, что $l(x) = \langle h, v\rangle$, где вектор $v$ соответствует функционалу $l$. Следовательно, $l(h) = l(x)$ для всякого непрерывного линейного функционала $l$. Имеем $x = h$ и $\sup\{l(x)\colon \ \|l\|_H \le 1\} = \|h\|_H$.

**Теорема 3.** *Пусть $\gamma$ — гауссовская мера на банаховом пространстве $X$ и $H$ — её пространство Камерона–Мартина.*

(i) *Для всякого $h \in H$ мера $\gamma(\,\cdot - h)$ абсолютно непрерывна относительно $\gamma$.*

(ii) *Пространство $H$ является пересечением всех линейных пространств $L$, у которых $\gamma(L) = 1$.*

(iii) *Если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $H$ и $\xi_n \sim N(0,1)$ — последовательность независимых случайных величин на некотором вероятностном пространстве, то ряд $\sum_n \xi_n e_n$ сходится в $X$ почти наверное, причем сумма ряда имеет распределение $\gamma$.*

### 3. Невозможность продолжения интеграла Римана–Стилтьеса

**Теорема 4.** (T.Lyons, 1991) *Не существует такого сепарабельного банахова пространства $X \subset C[0,\pi]$, что траектории винеровского процесса принадлежат $X$ почти наверное и билинейная форма*

$$(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(t)\,dg(t)$$

*с гладких функций продолжается до непрерывной билинейной формы на $X$.*

**Лемма 2.** *Наборы функций*

$$\Big\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(nt)}{n}\Big\}, \quad \Big\{\frac{t}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(nt)}{n}\Big\}$$

*являются ортонормированными базисами в $W_0^{1,2}[0,\pi]$ (пространство Камерона–Мартина меры Винера).*

Докажем теорему.

*Доказательство.* Предположим, что такое пространство $X$ существует. Тогда верно включение $W_0^{1,2}[0,\pi] \subset X$. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем $\xi_k \sim N(0,1)$. Положим

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi_n \frac{\sin(nt)}{n}, \quad g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi_n \frac{1-\cos(nt)}{n}.$$

Почти наверное $f_N$ и $g_N$ сходятся в пространстве $X$. Кроме того, верно равенство

$$\int_0^\pi f_N(t) g_N'(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n^2}{n}.$$

Остается заметить, что почти наверное

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^2}{n} = +\infty.$$

Имеем

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n^2}{n}} = \Pi_{n=1}^{N} \mathbb{E} e^{-\frac{\xi_n^2}{n}} \le \Pi_{n=1}^{N} \left(\mathbb{E} e^{-\xi_n^2}\right)^{1/n} = q^{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}},$$

где $q = \mathbb{E} e^{-\xi^2} < 1$, $\xi \sim N(0,1)$. Получаем равенство

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n}} = 0,$$

из которого следует, что почти наверное $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^2}{n} = +\infty$.

$\square$