по статье Peter Bank, Antje Fruth „Optimal Order Scheduling for Deterministic Liquidity Patterns"

① Постановка задачи

1) Мы хотим купить x акций, где x - достаточно большое, то есть агент влияет на цену. Важно, что мы допускаем только монотонные стратегии (в отличие от доклада Саши)

2) Мы хотим купить эти x акций монотонно, причём так, чтобы минимизировать издержки (формула будет дана позднее) от своего импакта из-за покупки этих акций. Импакт от трейда бывает временной и постоянный: временной заключается в том, что на в момент трейда откусили кусок order-book, $\boxed{\text{bid}}$ $\boxed{\text{ask}}$ и этим подвинули цену, а постоянный - в том, что этот наш текущий трейд будет в будущем тоже влиять на цену (например, трейдеры увидели нашу заявку и тоже стали покупать, тем самым повышая цену)

3) То, как сильно наши трейды влияют на цену - определяется параметрами ликвидности рынка: глубиной δ_t и упругостью r_t. От них и будет зависеть наша стратегия. На самом деле, с глубиной рынка мы уже встречались в моделях Алмгрена-Криса, и там было два параметра: γ и λ. Так вот, $\frac{1}{\gamma}$ - это была глубина рынка, а при $\lambda=0$: упругость была $=\infty$ (т.к. i-й трейд влиял только на i-ю цену):

$$\begin{cases} S_0 = S_0^0 + \frac{\lambda+\gamma}{2}\xi_0 \\ S_1 = S_1^0 + \lambda\xi_0 + \frac{\lambda+\gamma}{2}\xi_1 \\ \vdots \\ S_k = S_k^0 + \lambda\xi_0 + \dots + \lambda\xi_{k-1} + \frac{\lambda+\gamma}{2}\xi_k. \end{cases}$$

4) В Обижаева-Ванг δ_t и r_t рассматривались постоянными, а у нас они будут зависеть от времени (но детерминированными). Если взять δ_t и r_t постоянными и применить полученную в нашей статье ф-лу для оптим. стратегии — то получится как раз ф-ла из Обижаевой-Ванга.

5) Ещё раз подчеркнём, что в отличие от статьи Саши, у нас рассматриваются (только) монотонные стратегии, вследствие чего задача сводится к задаче выпуклого анализа.

6) С помощью выпуклых оболочек и условий 1-го порядка (которые являются следствием выпуклости), мы находим явный вид решения.

② Обозначения

- $X=(X_t)_{t\geq 0}$ — непрер. справа возрастающий процесс с $X_{0-}=0$. (Он отвечает за то, какое у нас число акций в момент времени t)
- Время идёт с $0-$, чтобы разрешить в 0 делать скачок.
- Отклонение цены от "unaffected price" описывает процесс η_t:

(2.1) $$\boxed{\begin{cases} d\eta_t = \frac{dX_t}{\delta_t} - r_t\eta_t\,dt \\ \eta_{0-} = \eta_0 \geq 0 \end{cases}}$$ ← в лекциях у нас было $\begin{cases} dD_t = \gamma\,dX_t - \rho D_t\,dt \\ D_{0-} = d \end{cases}$

(2.2) Решение $\boxed{\eta_t = \dfrac{\eta_0 + \int_{[0,t]} \frac{\rho_s}{\delta_s}\,dX_s}{\rho_t}}$, где $\rho_t = e^{\int_0^t r_s\,ds}$

предположения относит. r_t и δ_t:

$r: [0,\infty) \to (0,\infty)$ - строго положит. и лок. интегр. по Лебегу

$\delta: [0,\infty) \to [0;\infty)$ - неотрицат, не тождеств. ноль, огранич, полунепр. сверху,

и ещё $\limsup_{t\uparrow\infty} \frac{\delta_t}{\rho_t} = 0$ - логичное условие

Хотим минимизировать:

(2.3) $$\boxed{C(X) = \int_{[0,\infty)} \left(\eta_{t-} + \frac{\Delta_t X}{2\delta_t}\right) dX_t \text{ по } X \in \mathcal{X}}$$ где $\mathcal{X} = \left\{ (X_t)_{t\geq 0} : \text{непр. справа, возрастающие} \; X_{0-} = 0;\ X_\infty = x;\ C(X) < \infty \right\}$

обозн. $\Delta_t X = X_{t+} - X_{t-}$;

$X_\infty = \lim_{t\uparrow\infty} X_t$.

Теорема 3.1 (главная)

пусть выполнены предп. относит. r_t и δ_t,

$\lambda_t := \frac{\delta_t}{\rho_t}$; $\tilde{\lambda}_t = \sup_{u\geq t} \lambda_u$,

(3.1) $L_t^* := \inf_{u>t} \frac{\tilde{\lambda}_u - \tilde{\lambda}_t}{\tilde{\lambda}_u/\rho_u - \tilde{\lambda}_t/\rho_t}$; $t \geq 0$

Тогда оптим. стратегия: (3.2) $$\boxed{X_t^* = \lambda_0 (y^* L_0^* - \eta_0)^+ + \int_{[0,t]} \lambda_s \, d \sup_{0\leq v\leq s} \{ (y^* L_v^*) \vee \eta_0 \};\ t \geq 0.}$$

Константа $y^* > 0$ - выбирается из того, чтобы $X_\infty^* = x$.

Это можно сделать, если прав. часть при $y^* = 1$ - огр. при $t \uparrow \infty$.

Иначе решения нет.

План док-ва:

предп. 3.2 Перепараметризацией сводим задачу минимизации $C(X)$ к задаче минимизации $K(Y)$.

предп 3.3 Условие на x, чтобы ф-л $K = K(Y)$ был выпуклым. (локально, K_t)

Теорема 3.4 Вводим выпуклую задачу $\tilde{K}(\tilde{Y})$, которая эквивалентна ~~~~ задаче с $K(Y)$, и причём при некот. условиях решение задачи $\tilde{K}(\tilde{Y})$ явл. решением $K(Y)$.

предп 3.5 Условие 1-го порядка, чтобы проверять, является ли какой-то $\tilde{Y}^*$ решением задачи $\tilde{K}(\tilde{Y})$.

Теорема 3.6 предъявляем $\tilde{Y}_t^* = (y \partial \hat{\Lambda}_{\tilde{K}_t}) \vee \eta_0$

предп 3.7 при некот. усл. можем выбрать $y^* > 0$ так, чтобы

$$\boxed{X_t^* = \lambda_0 (y^* \partial \hat{\Lambda}_{\tilde{K}_0} - \eta_0)^+ + \int_{[0,t]} \lambda_s \, d \{ (y^* \partial \hat{\Lambda}_{\tilde{K}_s}) \vee \eta_0 \}}$$ - похоже на 3.2, но ещё не совсем

Теорема 3.1 Вводим L_t^*, и ~~своду~~ из этого получаем (3.2)

предл 3.2 пусть вып. предп. относит. δ_t и r_t

$$\lambda = \frac{\delta}{\rho};\ K = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{\delta}{\rho^2}$$

$Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ – возрастающий и непрер. справа

$$\boxed{K(Y) = \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} K_t\, d(Y_t^2)}$$

Тогда (3.3) $\begin{cases} Y_t = \eta_0 + \int_{[0,t]} \frac{dX_s}{\lambda_s};\ Y_{0-} = \eta_0 \\ X_t = \int_{[0,t]} \lambda_s dY_s;\ X_{0-} = 0 \end{cases}$ $, t \geq 0$ – это вз. однозн. отобр. из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$,

где $\mathcal{Y} = \{(Y_t)_{t\geq 0}$ – непрер. справа, возрастают, $Y_{0-} = \eta_0;\ \int_{[0,\infty)} \lambda_t dY_t = x;\ K(Y) < \infty\}$

При этом: $\boxed{C(X) = K(Y)}$

Док-во: по X восстанавливается Y и наоборот,
при этом Y – возрастает (т.к $X_{0-} = 0$; X – возрастает по опр. $\mathcal{X}$) (и наоборот, если Y возр, то и X возр),
и Y – непрер. справа как интеграл по непрер. справа процессу X.
$Y_t = \rho_t \cdot \eta_t$ – по опр. η_t и Y_t. ; $dX = \lambda dY$ – из ф-л для X и Y.

Проверим, что $K(Y) \overset{?}{=} C(X)$

$$\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} K_t\, d(Y_t^2) \qquad \int_{[0,\infty)} \left(\eta_{t-} + \frac{\Delta_t X}{2\delta_t}\right) dX_t$$

Для этого:
пишем ф-лу $AB = A_0B_0 + A_- \cdot B + B_- \cdot A + [A,B]$ для $A = B = Y$:

$$Y_t^2 = \eta_0^2 + 2\int_{[0,t]} Y_{t-} \cdot dY_t + [Y]_t$$

$$\Rightarrow d(Y_t^2) = 2Y_{t-} \cdot dY_t + d[Y]_t$$

$$[Y]_t = [Y_- + \Delta Y; Y_- + \Delta Y] = [Y_-; Y_-] + 2[Y_-; \Delta Y] + [\Delta Y; \Delta Y]$$

$[Y_-; Y_-] = 0$, т.к Y_- – непрер. (т.к Y_t – непрер. справа, а тут Y_t – взяли), Y_- – огр. вариации (т.к Y – монот. возр)

$[Y_-; \Delta Y] = 0$, т.к Y_- – непрер. ΔY – огр. вар.

$$[\Delta Y; \Delta Y] = \sum_{s\leq t} \Delta Y_s^2 = \sum_{s \leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{\lambda_s^2}$$

$$\Rightarrow d(Y_t^2) = 2Y_{t-} dY_t + d\left(\sum_{s\leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{\lambda_s^2}\right)$$

$$\Rightarrow K(Y) = \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} K_t\, d(Y_t^2) = \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} \underset{=\frac{\delta_t}{\rho_t^2}}{K_t} \cdot 2 \cdot \underset{=(\rho_t \eta_t)_- = \rho_t \cdot \eta_{t-}}{Y_{t-}} \underset{=\frac{dX_t}{\lambda_t} = \frac{dX_t \rho_t}{\delta_t}}{dY_t} + \frac{1}{2}\sum_{s\leq t} K_s \cdot \frac{(\Delta X_s)^2}{\lambda_s^2} =$$

т.к ρ_t – непрер.

$$= \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} 2\frac{\delta_t}{\rho_t^2} \cdot \rho_t \cdot \eta_{t-} \cdot \frac{dX_t \cdot \rho_t}{\delta_t} + \frac{1}{2}\sum_{s\leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{\delta_s} = \int_{[0,\infty)} \left(\eta_{t-} + \frac{\Delta_t X}{2\delta_t}\right) dX_t = C(X).$$ Чтд.

Предл. 3.3: Для полунепр. сверху κ, функционал $K=K(Y)$ явл. (строго) выпуклым для непр. справа Y с $Y_{0-}=\eta_0$
$\Longleftrightarrow$ κ (строго) положит. и (строго) убывает.

__Док-во:__ ($\Leftarrow$) пусть κ строго положит. и строго убывает.

$$\boxed{K(Y)=\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)}\kappa_t\,d(Y_t^2)} \text{ — по опр.}$$

но верна ф-ла:

$$\boxed{K(Y)=\frac{1}{2}\left(\kappa_\infty(Y_\infty^2-\eta_0^2)-\int_{[0,\infty)}(Y_t^2-\eta_0^2)\,d\kappa_t\right)}$$

Действительно:

$$(\kappa Y^2)_\infty=(\kappa Y^2)_0+(\kappa_-\cdot Y^2)_\infty+(Y_-^2\cdot\kappa)_\infty+[\kappa;Y^2]$$

$(\kappa Y^2)_0=\kappa_0\eta_0^2=\eta_0^2\left(\kappa_\infty-\int_0^\infty d\kappa_t\right)$

$(\kappa_-\cdot Y^2)_\infty=\int_{[0,\infty)}\kappa_t\,dY_t^2$, т.к. κ_t — непр. слева (т.к. κ_t — полунепр. сверху и убывает)

$(Y_-^2\cdot\kappa)_\infty=\int_{[0,\infty)}Y_{t-}^2\,d\kappa_t$

$[\kappa;Y^2]=[\kappa,Y_-^2]+[\kappa;\Delta Y^2]$, где $[\kappa,Y_-^2]=0$, т.к. $\kappa\in BV$ (т.н. конеч.), $Y_-\in C$ (т.к. Y_t — непр. справа); $[\kappa;\Delta Y^2]=\int_{[0,\infty)}\Delta Y_t^2\,d\kappa_t$

$\int_{[0,\infty)}Y_{t-}^2\,d\kappa_t+\int_{[0,\infty)}\Delta Y_t^2\,d\kappa_t=\int_{[0,\infty)}Y_t^2\,d\kappa_t$

$$\Rightarrow(\kappa Y^2)_\infty=\eta_0^2\kappa_\infty-\int_0^{+\infty}\eta_0^2\,d\kappa_t+\underbrace{\int_{[0,\infty)}\kappa_t\,d(Y_t^2)}_{=2K(Y)}+\int_{[0,\infty)}Y_t^2\,d\kappa_t$$

$$\Rightarrow K(Y)=\frac{1}{2}\left(\kappa_\infty(Y_\infty^2-\eta_0^2)-\int_{[0,\infty)}(Y_t^2-\eta_0^2)\,d\kappa_t\right)$$

И теперь пользуясь этим представлением, докажем, что $K(Y)$ — выпукло по Y, если κ — строго убывает:

$$\alpha K(X)+(1-\alpha)K(Y)\overset{?}{\geq}K(\alpha X+(1-\alpha)Y), \text{ для } X,Y\in\mathcal{Y}$$

подставляем, что $K(Y)=\frac{1}{2}\left(\kappa_\infty(Y_\infty^2-\eta_0^2)-\int_{[0,\infty)}(Y_t^2-\eta_0^2)\,d\kappa_t\right)$

$\Rightarrow$ хотим:

$$\frac{\alpha}{2}\left(\kappa_\infty(X_\infty^2-\eta_0^2)-\int_{[0,\infty)}(X_t^2-\eta_0^2)\,d\kappa_t\right)+\frac{(1-\alpha)}{2}\left(\kappa_\infty(Y_\infty^2-\eta_0^2)-\int_{[0,\infty)}(Y_t^2-\eta_0^2)\,d\kappa_t\right)\overset{?}{\geq}\frac{1}{2}\left(\kappa_\infty((\alpha X+(1-\alpha)Y)_\infty^2-\eta_0^2)-\int_{[0,\infty)}((\alpha X+(1-\alpha)Y)_t^2-\eta_0^2)\,d\kappa_t\right)$$

$\bigcirc+\bigcirc\geq\bigcirc$, т.к. $f(x)=x^2$ — выпуклая (вниз) ф-ция

$\Rightarrow$ осталось:

$$-\frac{\alpha}{2}\int_{[0,\infty)}(X_t^2-\cancel{\eta_0^2})\,d\kappa_t+\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{[0,\infty)}(Y_t^2-\cancel{\eta_0^2})\,d\kappa_t\overset{?}{\geq}-\int_{[0,\infty)}((\alpha X+(1-\alpha)Y)_t^2-\cancel{\eta_0^2})\,d\kappa_t$$

$\Rightarrow$ хотим:

$$\int_{[0,\infty)}(\alpha X+(1-\alpha)Y)_t^2\,d\kappa_t\overset{?}{\geq}\alpha\int_{[0,\infty)}X_t^2\,d\kappa_t+(1-\alpha)\int_{[0,\infty)}Y_t^2\,d\kappa_t$$

$\leq$

Верно, т.к. $\bigcirc\leq\bigcirc$, т.к. $f(x)=x^2$ — выпуклая, а κ_t — строго убывает $\Rightarrow d\kappa_t<0$.

($\Rightarrow$) пусть $K(Y)$ — выпукл. Докажем, что κ — убывает.

Рассм. $Y:=\eta_0+a\mathbb{1}[s;+\infty)+b\mathbb{1}[t;+\infty)$; $0\leq s<t<\infty$

$$\Rightarrow K(Y)=\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)}\kappa_t\,d(Y_t^2)=\frac{1}{2}\left(\kappa_s(a+\eta_0^2)-\eta_0^2)+\kappa_t((a+b+\eta_0)^2-(a+\eta_0^2)\right)=\frac{1}{2}\kappa_s a^2+\kappa_t ab+\frac{1}{2}\kappa_t b^2+\eta_0(a\kappa_s+b\kappa_t)$$

выпукло по a, b

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}\kappa_s & \kappa_t\\ \kappa_t & \kappa_t\end{pmatrix}\overset{?}{\geq}0$

$\kappa_t(\kappa_s-\kappa_t)\geq0$

$\Rightarrow \kappa_s\geq\kappa_t\geq0$. ч.т.д.

Дальше нам нужны две технические леммы для док-ва теоремы 3.4.

Обозн. $\{dz>0\} = \{t \geq 0 : z_{t-} < z_u \ \forall u > t\}$ – для возрастающих z

$\{dz<0\} = \{d(-z)>0\}$ – для убывающих z.

Лемма 5.1 Для полунепрер. сверху огранич. $\lambda : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ имеем:

а) $\tilde{\lambda}_t = \sup\limits_{u \geq t} \lambda_u$ – непрер. слева и убывает

б) $\{d\tilde{\lambda}<0\} \subset \{\tilde{\lambda} = \lambda\}$

в) $\boxed{\mathbb{R} = \{d\tilde{\lambda}<0\} \cup \bigcup\limits_{n\in N_1} [l_n;r_n) \cup \bigcup\limits_{n\in N_2} (l_n;r_n)}$, где $(l_n;r_n); n\in\mathbb{N}$ – накрывают $\mathbb{R}\setminus \operatorname{supp} d\tilde{\lambda}$,

$N_1 = \{n\in\mathbb{N} : l_n \geq 0; \Delta_{l_n}\tilde{\lambda} = 0\}$

$N_2 = \mathbb{N}\setminus N_1$

Док-во: а) убывание $\tilde{\lambda}_t$ – очев

непрер-ть слева – доказывается в лоб, используя полунепрер-ть слева

б) почему $\{d\tilde{\lambda}<0\} \subset \{\tilde{\lambda} = \lambda\}$:

у нас $\tilde{\lambda}$ – непрер. слева получнизу, поэтому в опр. $\{dz<0\}$: $\tilde{\lambda}_{t-} = \tilde{\lambda}_t$.

$\Rightarrow \{d\tilde{\lambda}<0\} = \{t\geq 0 : \underset{\sup_{s\geq t}}{\tilde{\lambda}_t} > \underset{\sup_{s\geq u > t}}{\tilde{\lambda}_u} \ \forall u>t\} \subset \{\tilde{\lambda}_t = \lambda_t\}$

т.к раз $\tilde{\lambda}_t > \tilde{\lambda}_u \ \forall u > t$, то sup достигся в t.

в) $\{d\tilde{\lambda}<0\} \subset \operatorname{supp} d\tilde{\lambda}$

$\Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{d\tilde{\lambda}<0\} \supset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (l_n;r_n)$

и дальше замечаем, что правые концы все же порк, а левые порк. только некоторые.

Лемма 5.2. При усл. теоремы 3.4,

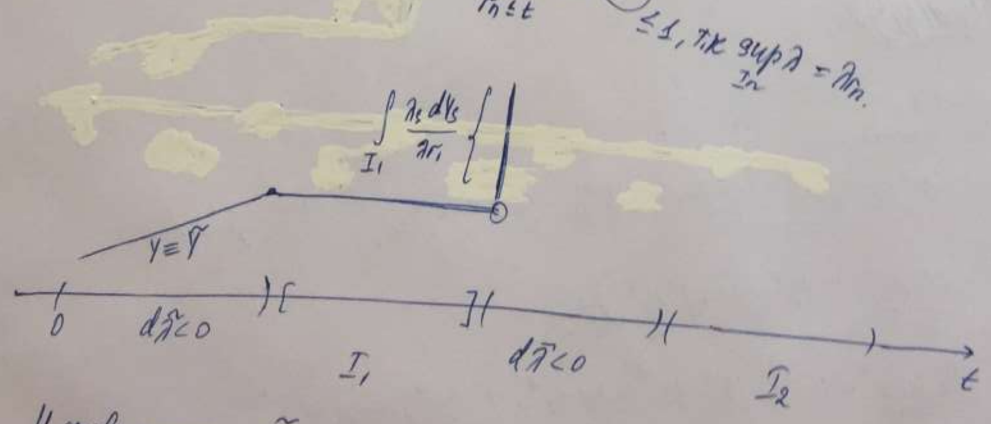
для непрер. справа возрастающего $Y \geq \eta_0$ мы можем найти

непрер. справа возрастающий $\tilde{Y} \geq \eta_0$ такой что

$$\begin{cases} \tilde{Y} \leq Y \\ \text{(i)} \int_{[0,\infty)} \lambda_t \, dY_t = \int_{[0,\infty)} \lambda_t \, d\tilde{Y}_t \\ \text{(ii)} \{d\tilde{Y}>0\} \subset \{d\tilde{\lambda}<0\} \\ \text{(iii)} K(Y) \geq K(Y) = \tilde{K}(Y) \end{cases}$$

Док-во: Просто предъявляем $\tilde{Y}_t$:

$$\tilde{Y}_t = \eta_0 + \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{d\tilde{\lambda}<0\}}(s)\, dY_s + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N};\\ r_n \leq t}} \int_{I_n} \underbrace{\frac{\lambda_s}{\lambda_{r_n}}}_{\leq 1,\ \text{т.к } \sup_{I_n}\lambda = \lambda_{r_n}} dY_s$$



И очевидно, что $\tilde{Y} \leq Y$.

(i) – проверяется в лоб; (ii) очев, т.к прыжки в r_n, а $r_n \in \{d\tilde{\lambda}<0\}$ (iii) – проверяется используя лемму 5.1

Теорема 3.4 Пусть $\lambda = \frac{\delta}{\rho}$; $k = \frac{\delta}{\rho^2}$

Тогда задача (3.4) имеет то же оптим. значение функционала, что и выпуклая задача

(3.5) minimize $\tilde{K}(\tilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} \tilde{k}_t \, d(\tilde{Y}_t^2)$ по $\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{Y}}$, где $\tilde{k}_t = \frac{\tilde{\lambda}_t}{\rho_t}$

$\tilde{\lambda}_t = \sup_{u \geq t} \lambda_u$; $t \geq 0$

$\tilde{\mathcal{Y}} = \left\{ (\tilde{Y}_t): \text{непрер. справа, возрастает; } \tilde{Y}_{0-} = \eta_0; \int_{[0,\infty)} \tilde{\lambda}_t \, d\tilde{Y}_t = x; \tilde{K}(\tilde{Y}) < \infty \right\}$

Более того, если $\tilde{Y}^*$ — решение (3.5) с $\{d\tilde{Y}^* > 0\} \subset \{\tilde{\lambda} = \lambda\}$ — то это решение (3.4).

Док-во: $\begin{cases} \tilde{K}(Y) \geq K(Y), \text{ очев, т.к. } \tilde{k} = \sup k \Rightarrow \inf \tilde{K} \geq \inf K \\ \forall Y \,\exists \tilde{Y}: K(Y) \geq K(\tilde{Y}) = \tilde{K}(\tilde{Y}) \text{ — из леммы 5.2} \Rightarrow \inf K \geq \inf \tilde{K} \end{cases} \Rightarrow \inf K = \inf \tilde{K}$.

Более того, если $\tilde{Y}^* \in \tilde{\mathcal{Y}}$ доставляет inf, то применяем лемму 5.2 к $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{k}$ (вместо λ и k), и получаем другой оптим. (т.к. ф-л меньше чем $K(\tilde{Y}^*)$ уже быть не может, а $K(\tilde{Y}^{**}) \leq K(\tilde{Y}^*) \Rightarrow$ они равны) $\tilde{Y}^{**} \subset \tilde{\mathcal{Y}}$, который удовлетворяет условию $\{d\tilde{Y}^{**} > 0\} \subset \{d\tilde{\lambda} < 0\}$.

А по лемме 5.1: $\{d\tilde{\lambda} < 0\} \subset \{\lambda = \tilde{\lambda}\} = \{k = \tilde{k}\} \Rightarrow \tilde{Y}^{**} \in \mathcal{Y} \Rightarrow \tilde{Y}^{**}$ — оптим. в (3.4). ч.т.д.

Предл. 3.5 (проверялка)

Для $\tilde{k}, \tilde{\lambda} \geq 0$ как в теореме 3.4:

$\tilde{Y}^* \in \tilde{\mathcal{Y}}$ — решение (3.5).

$\Leftrightarrow \exists y > 0$: $\boxed{-\int_{[t;\infty)} \tilde{Y}_u^* \, d\tilde{k}_u \geq y\, \tilde{\lambda}_t \quad \forall t \geq 0,}$ причем равенство iff $dY_t^* > 0$.

Док-во: ($\Rightarrow$) необходимость:

$\tilde{K}(Y) = \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} \tilde{k}_t \, d(Y_t^2)$ — по опр.

Из ф-лы в предл. 3.3 и из того, что $\tilde{k}_\infty = 0$ имеем представление:

$\tilde{K}(Y) = -\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} (Y_t^2 - \eta_0^2)\, d\tilde{k}_t$

Далее, $\forall Y \in \tilde{\mathcal{Y}}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$:

т.к. Y^* — минимизирует $\tilde{K}(Y)$ по усл.

$0 \leq \tilde{K}(\varepsilon Y + (1-\varepsilon)Y^*) - \tilde{K}(Y^*) = -\frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} \left((\varepsilon Y + (1-\varepsilon)Y^*)_t^2 - \cancel{\eta_0^2}\right) d\tilde{k}_t + \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} (Y_t^{*2} - \cancel{\eta_0^2})\, d\tilde{k}_t =$

$= \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} (Y_t^{*2} - \varepsilon^2 Y^2 - 2\varepsilon(1-\varepsilon) Y_t Y_t^* - (1-\varepsilon)^2 Y_t^{*2})\, d\tilde{k}_t =$

$= \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)} (\cancel{Y_t^{*2}} - \varepsilon^2 \cdot Y_t^2 - 2\varepsilon Y_t Y_t^* + 2\varepsilon^2 \cdot Y_t \cdot Y_t^* - \cancel{Y_t^{*2}} + 2\varepsilon Y_t^{*2} - \varepsilon^2 \cdot Y_t^{*2})\, d\tilde{k}_t =$

$= -\varepsilon \int_{[0,\infty)} Y_t^*(Y_t - Y_t^*)\, d\tilde{k}_t - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{[0,\infty)} (Y_t - Y_t^*)^2\, d\tilde{k}_t$

стр. 4

Делим на ε, устремляем $\varepsilon \to 0$,

получаем $-\int_{[0,\infty)} (Y_t^*)^2 d\tilde{K}_t \le -\int_{[0,\infty)} Y_t^* Y_t \, d\tilde{K}_t$.

$\Rightarrow Y^*$ – решение (5.5) minimize $\boxed{-\int_{[0,\infty)} Y_t^* Y_t \, d\tilde{K}_t}$ по $Y \in \tilde{\mathcal{Y}}$

но это равно (5.6) minimize $\boxed{\int_{[0,\infty)} \left(-\int_{[t;\infty)} Y_u^* d\tilde{K}_u\right) dY_t}$

Действительно: $\int_{[0,\infty)} \left(-\int_{[t;\infty)} Y_u^* d\tilde{K}_u\right) dY_t = -\int_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} Y_u^* d\tilde{K}_u \, dY_t + \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\underbrace{\int_{[0,t]} Y_u^* d\tilde{K}_u}_{= Z_{t-}}\Big) dY_t$

$\int_{[t;\infty)} = \int_{[0,\infty)} - \int_{[0,t)}$

Для $Z = Y^* \cdot \tilde{K}$, $t \ge 0$; $Z_{0-} = 0$:

$(ZY)_\infty = \underbrace{(ZY)_{0-}}_{=0} + \int_{[0,\infty)} Z_{t-} dY_t + \int_{[0,\infty)} Y_{t-} Y_t^* d\tilde{K}_t + [Z, Y]_\infty$

$[Z,Y]_\infty = [Z; \Delta Y]_\infty + [Z; Y_-]_\infty$, $\quad [Z; \Delta Y]_\infty = \int_{[0,\infty)} \Delta Y_t Y_t^* d\tilde{K}$, $\quad Z \in BV$, $Y_- \in C$, $[Z; Y_-]_\infty = 0$

$\Rightarrow \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[t,\infty)} Y_u^* du\right) dY_t = \int_{[0,\infty)} Y_t Y_t^* d\tilde{K}_t$

А теперь минимизируем (5.6):

$\int_{[0,\infty)} \Big(\underbrace{-\int_{[t;\infty)} \frac{Y_u^* d\tilde{K}_u}{\tilde{\pi}_t}}_{= f_t}\Big) \tilde{\pi}_t \, dY_t \longrightarrow \min_{Y_t}$, причем Y_t^* – решение

$\int_{[0,\infty)} \tilde{\pi}_t \, dY_t = x$.

Видно, что $\int_{[0,\infty)} f_t \tilde{\pi}_t \, dY_t \ge \inf_t f_t \cdot \underbrace{\int_{[0,\infty)} \tilde{\pi}_t \, dY_t}_{= x}$,

причем min (5.6) a значит (5.5) достигается, $\Leftrightarrow$ $dY_t^* > 0$ iff $-\frac{\int Y_u^* d\tilde{K}_u}{\tilde{\pi}_t}$ достигает inf по $\{\lambda > 0\}$

т.е доказали необходимость: если Y^* – решение (5.5), то это ↑ вып.

($\Leftarrow$) Достаточность:

$\tilde{K}(Y) - \tilde{K}(Y^*) \overset{\text{ф-ла } K(Y) = -\frac{1}{2}\int (Y_t^2 - Y_0^2) d\tilde{K}_t}{=} -\frac{1}{2} \int_{[0,\infty)} (Y_t^2 - Y_t^*)^2 d\tilde{K}_t \overset{?}{\ge} -\int_{[0,\infty)} Y_t^* (Y_t - Y_t^*) d\tilde{K}_t \overset{?}{\ge} 0$.

$\Updownarrow$

$-\frac{1}{2} \int_{[0,\infty)} (Y_t + Y_t^*)(Y_t - Y_t^*) d\tilde{K}_t \overset{?}{\ge} -\int_{[0,\infty)} Y_t^* (Y_t - Y_t^*) d\tilde{K}_t$

$\Updownarrow$

$\int_{[0,\infty)} \left(-\frac{Y_t}{2} - \frac{Y_t^*}{2} + Y_t^*\right)(Y_t - Y_t^*) d\tilde{K}_t \overset{?}{\ge} 0$

$\Updownarrow$

$-\frac{1}{2} \int_{[0,\infty)} (Y_t - Y_t^*)^2 d\tilde{K}_t \overset{?}{\ge} 0$ – верно, т.к $d\tilde{K}_t < 0$, т.к $\tilde{K}_t$ – убывает

$\Rightarrow \tilde{K}(Y) - \tilde{K}(Y^*) \overset{?}{\ge} 0 \Leftarrow Y^*$ – решение (5.5) (ну $-\int Y_t^* Y_t d\tilde{K}_t \overset{?}{\ge} -\int Y_t^* d\tilde{K}_t$)

т.е если Y^* – решение 5.5 (что экв. $dY_t^* > 0$ iff $-\frac{\int Y_u^* d\tilde{K}_u}{\tilde{\pi}_t}$ достиг. inf) – то $\tilde{K}(Y) \ge \tilde{K}(Y^*)$. ч.т.д.

Теорема 3.6 Пусть вып. предп. относ. δ_t и r_t.

рассм. $\tau_k = \inf\{t \geq 0 : \tilde{k}_t \leq k\}$ (ну $\tilde{k}_t$ – убывает)

$\tilde{\Lambda}_k := k \cdot \rho_{\tau_k}$; $k \in (0; \tilde{k}_0]$; $\tilde{\Lambda}_0 := 0$.

Тогда • $\tilde{\Lambda}$ – непрер. возрастающее отобр. на $[0; \tilde{k}_0]$.

• Его выпуклая оболочка $\hat{\Lambda}$ абс. непрер. с непрер. слева убыв. плотностью (из-за выпуклости)
$$\partial\hat{\Lambda} = (\partial\hat{\Lambda}_k)_{0<k\leq\tilde{k}_0} \geq 0.$$

• Более того, дополнив $\partial\hat{\Lambda}_0 = \partial\hat{\Lambda}_{0+}$,

мы имеем $\forall y > 0$ и $\eta_0 > 0$: $\tilde{Y}^*_t = (y\,\partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t}) \vee \eta_0$; $\tilde{Y}^*_{0-} = \eta_0$ –

дает непрер. справа возраст. процесс, кот. удовл. усл. 1-го порядка.

Док-во: $\tilde{\Lambda}$ – непрер. на $[0, \tilde{k}_0]$ (пок), т.к. $k \to \tau_k$ – непрер из-за строгой монотонности $\rho \Rightarrow$ и $\tilde{k}$ на $\{\tilde{k} > 0\}$.

$\tilde{\Lambda}$ – убывает, т.к. $\tilde{\Lambda}_{\tilde{k}_t} = \tilde{k}_t \cdot \rho_t = \tilde{\lambda}_t$ – убывает по $t \geq 0$.

$\hat{\Lambda}$ – абс. непрер, т.к. $\tilde{\Lambda}$ непрер.

$\tilde{Y}^*$ – монотонна из-за монотонности $\tilde{k}$ и $\partial\hat{\Lambda}$.

Докажем непрер-ть справа для $\tilde{Y}^*_t$:

имеем: $\lim\limits_{t \to t_0} \tilde{Y}^*_t = (y\,\partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_{t_0+}}) \vee \eta_0$ – из-за непрер-ти слева у $\partial\hat{\Lambda}$ и её опр. выше. (потому оно непр. слева)

$\Rightarrow$ осталось док-ть, что $\partial\hat{\Lambda}_{k_0} = \partial\hat{\Lambda}_{k_1}$, где $k_0 = \tilde{k}_{t_0+}$; $k_1 = \tilde{k}_{t_0} \geq k_0$.

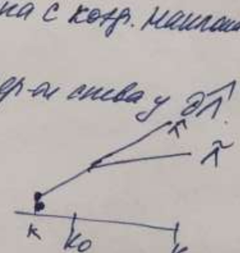
Если $k_1 = k_0$ – то нечего доказывать.

Если $k_0 < k_1$, то $\tau_k = \tau_{k_1}$ для $k \in [k_0; k_1)$, поэтому $\tilde{\Lambda}$ – линейна с коэф. наклона $\rho_{\tau_{k_0}}$.

$\Rightarrow \hat{\Lambda}$ – тоже линейна, и поэтому $\partial\hat{\Lambda}_{k_1} = \partial\hat{\Lambda}_{k_0+}$ из-за непрер-ти слева у $\partial\hat{\Lambda}$.

Осталось показать, что нет скачка вниз у $\partial\hat{\Lambda}$ в k_0.
От противного:
Если от скачка вн, то $\hat{\Lambda}_{k_0} = \tilde{\Lambda}_{k_0}$, – т.к. изгиб у выпуклой оболочки.

и $\partial\hat{\Lambda}_{k_0+} \geq \rho_{\tau_{k_0}}$ – т.к. прямая соотв. $\hat{\Lambda}$ – она выше, чем $\tilde{\Lambda}$.



$$\Rightarrow \forall k \leq k_0 : \; k\rho_{\tau_{k_0}} \leq \tilde{\Lambda}_k \leq \hat{\Lambda}_k \leq \hat{\Lambda}_{k_0} + \partial\hat{\Lambda}_{k_0+}(k - k_0) \leq k \cdot \rho_{\tau_{k_0}}$$

т.к. $\tilde{\Lambda}_k = k \cdot \rho_{\tau_k} \geq k \cdot \rho_{\tau_{k_0}}$ т.к. τ_k – убыв пок

по опр. вып. обол.

из-за выпуклости

переносим $\hat{\Lambda}_{k_0}$ право, делим на $(k - k_0)$ и исп. н-во $= \tilde{\Lambda}_{k_0} = k_0 \cdot \rho_{\tau_{k_0}}$

$\Rightarrow$ получаем равенства

$\Rightarrow \partial\hat{\Lambda}_{k_0} = \rho_{\tau_{k_0}} \leq \partial\hat{\Lambda}_{k_0+}$ – а это противоречит тому, что мы предположили скачок.

Теперь проверим усл. 1 порядка:

$$-\int_{(t,\infty)} \tilde{Y}^*_u \, d\tilde{k}^*_u \geq -y\int_{(t,\infty)} \partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_u} \, d\tilde{k}_u = y \cdot \int_0^{\tilde{k}_t} \partial\hat{\Lambda}_k \, dk = y\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t} \geq y \cdot \tilde{\Lambda}_{\tilde{k}_t} = y\tilde{k}_t\rho_t = y \cdot \tilde{\lambda}_t$$

по опр. $\tilde{Y}^*$; замена времени, $\tilde{k}_\infty = 0$; $\hat{\Lambda} \geq \tilde{\Lambda}$

И очев, что $d\tilde{Y}^*_t > 0$ – это когда $y\,\partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}}$ больше η_0, т.е. будут равенства. ч.т.д.

предл. 3.7 при усл. теоремы 3.6, имеем:

Если $\|\partial\hat{\Lambda}\|_{L^2} = \left(\int_0^{\tilde{k}_0} (\partial\hat{\Lambda}_k)^2 dk\right)^{1/2} < \infty$, то можем однозн. выбрать $y^* > 0$.

такое что $X_t^* = \lambda_0 (y^* \partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_0} - \eta_0)^+ + \int_{[0,t]} \lambda_s d\{(y^* \partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_s}) \vee \eta_0\}, t \geq 0$ —

увеличивается с $X_{0-}^* = 0$ до $X_\infty^* = x$.

Это $X^* \in \mathcal{X}$ — оптим. стратегия для исх. задачи (2.3)

В случае $\eta_0 = 0$, имеем $y^* = \frac{x}{\|\partial\hat{\Lambda}\|_{L^2}^2}$, и $\min C(X^*) = \frac{x^2}{2\|\partial\hat{\Lambda}\|_{L^2}^2}$

Если $\|\partial\hat{\Lambda}\|_{L^2} = \infty$, и $\inf_{X \in \mathcal{X}} C(X) = 0$, и задача (2.3) не имеет решения.

Док-во: положим $\hat{Y}_t := \partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t}$

$\hat{Y}_{0-} = 0$

$Y_t^y := (y\hat{Y}_t) \vee \eta_0$

$Y_{0-}^y := \eta_0$

тогда $d\hat{Y}_{t_0} > 0$ только при тех $t_0 \geq 0$, когда $\tilde{\lambda}_{t_0} = \lambda_{t_0}$.

Для этого проверяем, что для таких t_0: $d\tilde{\lambda}_{t_0} < 0$. — рассм. $\left[\begin{array}{l}\Delta_{t_0}\tilde{k} < 0 \\ \tilde{k}_{t_0} = k_{t_0}\end{array}\right.$

После этого проверяем, что $\|\partial\hat{\Lambda}_k\|_{L^2} < \infty \iff \hat{\lambda}$ явл. $d\hat{Y}$-интегрируемой:

$$\int_{[0,\infty)} \lambda_t d\hat{Y}_t \overset{\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t} = \lambda_t}{=} \int_{[0,\infty)} \tilde{\hat{\Lambda}}_{\tilde{k}_t} d(\partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t}) = \int_{[0,\infty)} \hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t} d(\partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_t}) = \int_0^{\tilde{k}_0} \partial\hat{\Lambda}_l \, \partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}_{\tau_l}} dl = \int_0^{\tilde{k}_0} (\partial\hat{\Lambda}_l)^2 dl$$

там, где $\partial\hat{\Lambda}$ меняется, там $\tilde{\lambda} = \hat{\lambda}$

$\hat{\Lambda}_{k_t} = \int_0^{\tilde{k}_t} \partial\hat{\Lambda}_l dl$

Потому, если $\|\partial\hat{\Lambda}\|_{L^2} < \infty$, то мы можем рассм. $X_t^y := \int_{[0,t]} \lambda dY^y, t \geq 0$.

Он определен, непрер. справа, возрастает по t.

Более того, X_∞^y строго возрастает по y от 0 до ∞.

$\Rightarrow \exists! y^* : X_\infty^{y^*} = x$.

Далее проверяем в лоб, что $K(Y^*) \leq \infty$ $\} \Rightarrow Y^* \in \mathcal{Y}$, а $X^* \in \mathcal{X}$.

Почему эти X^* и Y^* — оптим. в задачах 2.3 и 3.5 (и $\Rightarrow$ 3.4)?

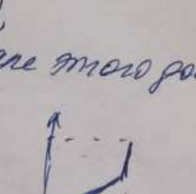
Ну поскольку берем $Y^* = (y^* \partial\hat{\Lambda}_{\tilde{k}}) \vee \eta_0$ — по Т. 3.6 он непрер. справа и удовл. условию 1-го порядка — а по prop. 3.5 этого дост., чтобы быть решением задачи (3.5). А ещё Y^* — решение задачи (3.4),

т.к. $\{dY^* > 0\} = \{\lambda = \tilde{\lambda}\}$ — доказали в начале этого док-ва. чтд.

пример пусть $\delta_t = \delta_0 \cdot \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$

$r_t \equiv r_0 > 0; t \geq 0$.

$\eta_0 = 0$



Хотим убедиться, что наш ответ в этом случае даст то, что у Обизаевой-Ванга:

Имеем: $\lambda_t = \frac{\delta_t}{\rho_t}$; $\rho_t = e^{\int_0^t r_0 ds} = e^{t\cdot r_0}$

$\Rightarrow \lambda_t = \tilde{\lambda}_t = \delta_0 \cdot e^{-r_0 t}\cdot \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$

$\kappa_t = \tilde{\kappa}_t = \delta_0\cdot e^{-2r_0 t}\cdot \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$

$\tau_k := \inf\{t\ge 0: \tilde{\kappa}_t \le k\}$

$\Rightarrow$ хотим: $\delta_0 \cdot e^{-2r_0\tau_k}\cdot\mathbb{1}_{[0,T]} = k$

$\Rightarrow$ если $t\in[0,T]$, то $e^{-2r_0\tau_k} = \frac{k}{\delta_0}$

$-2r_0\tau_k = \ln\left(\frac{k}{\delta_0}\right)$ — а если нет, то будет $\frac12 \ln\left(\frac{\delta_0}{\kappa_T}\right)$

$r_0\tau_k = \frac12\ln\left(\frac{\delta_0}{k}\right)$

$\Rightarrow \rho_{\tau_k} = e^{\tau_k\cdot r_0} = e^{\frac12\ln\left(\frac{\delta_0}{k\vee\kappa_T}\right)} = \sqrt{\frac{\delta_0}{k\vee\kappa_T}}$

$\Rightarrow \tilde\Lambda_k = k\cdot\rho_{\tau_k} = k\cdot\sqrt{\frac{\delta_0}{k\vee\kappa_T}} = \sqrt{\delta_0 k}\wedge\sqrt{\frac{\delta_0}{\kappa_T}}\cdot k$; $0\le k\le\delta_0$.

$\tilde\Lambda$ — выпукло вверх $\Rightarrow \tilde\Lambda = \hat\Lambda$.

Дальше считаем $\partial\hat\Lambda_k = \begin{cases} \frac{1\sqrt{\delta_0}}{2\sqrt{k}}, & \text{если } k>\kappa_T \\ \sqrt{\frac{\delta_0}{\kappa_T}} = \sqrt{e^{2r_0T}} = e^{r_0T}, & \text{если } k\le\kappa_T\end{cases}$

$\Rightarrow \hat Y_t := \partial\hat\Lambda_{\kappa_t} = \begin{cases}\frac12\sqrt{\frac{\delta_0}{\kappa_t}} = \frac12 e^{r_0t}; & t<T\\ \sqrt{\frac{\delta_0}{\kappa_T}} = e^{r_0T}, & t\ge T\end{cases}$

Теперь берём нашу ф-лу для X_t^*: , и пока не y^*-оптим, а просто $y>0$ берём какое-то.

$$X_t^* = \lambda_0\left(y^*\partial\hat\Lambda_{\tilde\kappa_0} - \underset{0}{\eta_0}\right)^+ + \int_{[0,t]}\lambda_s\, d\left\{\left(y^*\partial\hat\Lambda_{\tilde\kappa_s}\right)\vee\underset{0}{\eta_0}\right\},\ t\ge0.$$

У нас $\eta_0 = 0$ по усл.

Имеем: $\lambda_0 = \frac{\delta_0}{\rho_0} = \delta_0$

$\partial\hat\Lambda_{\kappa_0} = \frac12 e^{r_0\cdot0} = \frac12$ $\Big\}\Rightarrow$ 1-е слагаемое будет $\delta_0\cdot\left(y\cdot\frac12\right)^+ = \delta_0\cdot y\cdot\frac12$

смотрим на 2-е слагаемое: $\lambda_s = \frac{\delta_0}{\rho_s} = \delta_0\cdot e^{-r_0 s}$

если $t<T$, то $\partial\hat\Lambda_{\tilde\kappa_s} = \frac12 e^{r_0t}$, для $t<T$ — не меняется

$\Rightarrow d\left(\partial\hat\Lambda_{\tilde\kappa_s}\right) = d\left(\frac12 e^{r_0s}\right) = \frac{r_0}{2}\cdot e^{r_0s}ds$

$\Rightarrow \int_{[0,t\wedge T]}\lambda_s\, d\left(y^*\partial\hat\Lambda_{\tilde\kappa_s}\right) = \int_0^{t\wedge T}\delta_0\cdot\cancel{e^{-r_0s}}\cdot y\cdot\frac{r_0}{2}\cancel{e^{r_0s}}ds = \frac{\delta_0 y r_0}{2}\cdot(t\wedge T)$

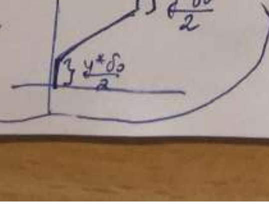
А если $t\ge T$, то $\delta_t\ne0$ только при $t=T$,

и скачок в $t=T$ будет $\lambda_T\cdot$ скачок$\left(y\cdot\partial\hat\Lambda_{\kappa_T}\right) = \delta_0\cdot e^{-r_0T}\cdot y\cdot\left(e^{r_0T}-\frac12e^{r_0T}\right) = \frac12\delta_0 y$

$\Rightarrow X_t^y = \frac{y\delta_0}{2}\left(1+r_0(t\wedge T)+\mathbb{1}_{[T,+\infty)}(t)\right)$

Хотим: $X_T^y = x$: $\frac{y\delta_0}{2}(2+r_0T) \overset{?}{=} x \Rightarrow y\delta_0\left(1+\frac{r_0T}{2}\right) \overset{?}{=} x \Rightarrow y = \frac{x}{\delta_0\left(1+\frac{r_0T}{2}\right)}$ ← это y^*

$\Rightarrow$ при $\eta_0=0$:



— оптим стратегия.