16.11.20. Дискр. матем. д/з от семинара 11.

① пусть монотонная ф-ция f имеет ровно 2 нижние единицы.

Док-ть, что $\bar{f}$ – шефферова.

<u>Док-во</u>: по т. Поста, чтобы $\{\bar{f}\}$ было полно, необх. и дост. чтобы $\bar{f} \notin T_0, T_1, S, L, M$.

на самом деле, $\overset{\text{для полноты } \{g\}}{\text{достаточно}}$ проверить, что $g \notin T_0, T_1, S$, а про L и M проверять не нужно, это автоматически получается. см 407 N8.2 24:35

Действительно, если $\begin{cases} g \notin T_0 \\ g \notin T_1 \\ g \notin S \end{cases}$, то $\begin{cases} g \notin L \\ g \notin M. \end{cases}$

Про M: $\begin{cases} g \notin T_0 \Rightarrow g(0\ldots0)=1 \\ g \notin T_1 \Rightarrow g(1\ldots1)=0 \end{cases} \Rightarrow g \notin M$

Про L: пусть $g \in L$, т.е $g = x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_s} \oplus \underset{\text{т.к } g \notin T_0}{1}$.

$g \notin T_1 \Rightarrow g(1\ldots1)=0 \Rightarrow$ слагаемых-переменных нечёт. число.

но если s = кол-во слагаемых нечёт – то $g \in S$

поскольку $\overline{g(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)} = (x_{i_1} \oplus 1) \oplus \ldots \oplus (x_{i_s} \oplus 1) \oplus 1 \oplus 1 = \underbrace{x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_s} \oplus 1}_{g(x_1 \ldots x_n)} \oplus \underset{\text{нечёт.}}{s} \oplus 1 = g(x_1 \ldots x_n)$

$\Rightarrow$ противоречие, т.к по усл. $g \notin S$.

Итак, нам достаточно проверить, что $\begin{cases} \bar{f} \notin T_0 \\ \bar{f} \notin T_1 \\ \bar{f} \notin S. \end{cases}$

- $\bar{f} \notin T_0$, т.к если $\bar{f} \in T_0 \Rightarrow \bar{f}(0\ldots0)=0$ $\Rightarrow f(0\ldots0)=1$. – но f – монотонная по усл $\Rightarrow f=1$ – но у такой f не две нижние единицы, а одна: $(0\ldots0)$.
- $\bar{f} \notin T_1$, т.к если $\bar{f} \in T_1 \Rightarrow \bar{f}(1\ldots1)=1$ $\Rightarrow f(1\ldots1)=0$, но f – монотонная по усл $\Rightarrow f \equiv 0$ – но у такой f не две нижние единицы, т.к у неё вообще нет нижних единиц.
- $\bar{f} \notin S$. сначала заметим, что дост. док-ть, что $f \notin S$, т.к f и $\bar{f}$ самодвойственны или несамодвойственны одновременно. $\Rightarrow$ надо док-ть, что $f \notin S$.

по усл. $\begin{cases} f \text{ – монот} \\ \text{у } f \text{ ровно 2 нижние единицы } (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \text{ и } (\beta_1 \ldots \beta_n) \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x_1 \ldots x_n) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}}$

почему? ну любая монотонная функция = дизъюнкции по своим нижним единицам:

см. 422 N11.2 16:44 $\boxed{f = \bigvee\limits_{\substack{\alpha \text{ – нижняя} \\ \text{единица } f}} K(\alpha), \text{ где } K(\alpha) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}$ алгебраическая степень! отрицаний нет!

ну если $\exists\bar\alpha$: $\bar x = \bar\alpha$, т.е $\bar x$ = нижняя единица, то ф-ла даёт 1. — всё верно.

если $\exists\bar\alpha$: $\bar x > \bar\alpha$, т.е какая-то нижняя единица предшествует $\bar x$, то ф-ла тоже даёт 1,
(т.е $f(\bar x) = 1$ по опр. нижних единиц)
т.к если $\bar\alpha$ предшествует $\bar x$, то там, где у $\bar\alpha$ единицы — у $\bar x$ тоже единицы, а моном из единиц $\bar\alpha$ — присутствует в ф-ле.

если $\nexists\bar\alpha$: $\bar x > \bar\alpha$, т.е (т.е $f(\bar x)=0$ по опр. нижних единиц) никакая из нижних единиц не предшествует $\bar x$, то значит, для любой конъюнкции, заданной нижней единицей, найдется переменная, которая $=0$ на наборе $\bar x$ $\Rightarrow$ ф-ла тоже даёт ноль на $\bar x$.

Итак, $f(x_1\dots x_n) = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$

и надо док-ть, что $f \notin S$. (т.е не бывает самодвойственных ф-ций с двумя нижними единицами. А с 1 и с 3 — бывают: $f \equiv 1$ и f = ф-ция голосования)

1 способ от противного. Пусть $f \in S$.

$\Rightarrow$ она $=1$ на $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ наборах.

А на скольких наборах $=1$ ф-ция $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$?

Пусть в $(\alpha_1\dots\alpha_n)$ k нулей $\Rightarrow$ $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} = 1$ на 2^k наборах
(ну любой из нулей можно или оставить нулем, или сделать единицей)

Пусть в $(\beta_1\dots\beta_n)$ m нулей $\Rightarrow$ $x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n} = 1$ на 2^m наборах.

Пусть у $(\alpha_1\dots\alpha_n)$ и $(\beta_1\dots\beta_n)$ l общих нулей, причем $\begin{cases} l<k \\ l<m \end{cases}$, т.к $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ несравнимы, т.к они нижние единицы.

$\Rightarrow f(x_1\dots x_n) = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n} = 1$ на $2^k+2^m-2^l$ наборах. (а если $l=k$, то $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ сравнимы)

$\Rightarrow 2^k + 2^m - 2^l \overset{?}{=} 2^{n-1}$.

но это не может выполняться, т.к $2^k+2^m-2^l$ при $\begin{cases} l<k \\ l<m \end{cases}$ не может быть степенью двойки.

Действительно, смотрим на двоичную запись:

если $k \neq m$, то
0..010...0
+ 01...0 — единицы не сократились.
− 001 0

если $k=m$, то $2^k+2^m = 2^{k+1}$, то $l<k<k+1$
$\Rightarrow$ будет 0..010..100 $\neq$ степени двойки.

$\Rightarrow$ против $\Rightarrow f \notin S$. чтд.

2 способ (сем. 407 №9.1 25.10)

от противного.
Пусть $f \in S$
и $f(x_1\dots x_n) = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$

Заметим сначала, что в $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ и $x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$ нет общих переменных, (стр 2)
которые можно вынести за скобку, т.к если такие есть, то:

$f(x_1\dots x_n) = x_{i1}\dots x_{ik}$ (~~остаток~~ остаток от $\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}$ $\vee$ остаток от $\tilde{x}^{\tilde{\beta}}$)

$\Rightarrow$ при $x_{i1}=\dots=x_{ik}=0$: $f=0$.

но f - самодвойственна $\Rightarrow$ при $x_{i1}=\dots=x_{ik}=1$, $f=1$ вне зависимости от остальных переменных

$\Rightarrow f(x_1\dots x_n)\equiv x_{i1}\dots x_{ik}$ — но у такого набора только одна нижняя единица, а у f-то их должно быть две $\Rightarrow$ против $\Rightarrow$ нет общих переменных.

$\Rightarrow$ у $x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ и $x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$ <u>нет</u> общих переменных,

т.е каждая x_i присутствует только в одном из двух ($\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}$ или $\tilde{x}^{\tilde{\beta}}$),
причем каждая ~~в~~ в каком-то из них присутствует,
т.к все переменные должны присутствовать (мы можем считать, что все переменные существенные, поскольку несущественные переменные не влияют на самодвойственность)

$\Rightarrow$ наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ - это отрицания друг друга.

т.е $(\alpha_1\dots\alpha_n)\oplus(\beta_1\dots\beta_n)=1$. $\Rightarrow$ $(\alpha_1\dots\alpha_n)=(\overline{\beta_1}\dots\overline{\beta_n})$.

но поскольку $f\in S$, то она на $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ принимает <u>противоположные</u> значения. но это противоречие, поскольку $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ - обе (нижние) единицы. т.е на них <u>обоих</u> f должна быть $=1$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow f\notin S$. чтд.

(2.) Найти f от n переменных (не обязательно существенных), у которой max кол-во ДНФ.

Решение: Мы на семинаре выяснили, что к уже имеющейся ДНФ можно прибавлять произв. лин. комбинацию мономов тех точек, на которых f уже $=1$.

$\Rightarrow$ max кол-во вариантов у той ф-ции, у которой max кол-во точек со значением 1.

А у кого больше всего точек-единиц? ну у $f\equiv1$.

А сколько ДНФ у $f\equiv1$?

Если записать $f=x_1\vee\overline{x_1}$, то добавлять можно любые мономы, кроме $x_1, \overline{x_1}$ и пустого $\Rightarrow 3^n-3$.

$\Rightarrow$ ~~м~~ $\#ДНФ(1)\geq 2^{3^n-3}$.

А всего $\#ДНФ$: $2^{3^n-1}-1$. $\Rightarrow$ уже четверть от всех ДНФ причем мы у f ещё не посчитали те ДНФ, где есть x_1 и нет $\bar{x}_1$,

те, где нет x_1 и есть $\bar{x}_1$ и те, где нет ни x_1, ни $\bar{x}_1$.

Если есть x_1, но нет $\bar{x}_1 \Rightarrow f = x_1 \vee \underbrace{(\text{что-то от } x_2 \dots x_n)}_{\equiv 1}$

А ДНФ для $\equiv 1$ от $x_2 \dots x_n$ – их $\geq 2^{3^{n-1}-3}$

И так же для $\overset{\text{случая}}{\text{когда}}$ нет x_1, но есть $\bar{x}_1$: ещё $+2^{3^{n-1}-3}$

$\Rightarrow \#ДНФ(1) \geq 2^{3^n-3} + 2 \cdot 2^{3^{n-1}-3} = 2^{3^n-3} + 2^{3^{n-1}-2}$ – и это тоже ещё не всё:

Можно их так посчитать:

2^{3^n-3} ДНФ когда есть $x_1 \vee \bar{x}_1$

$\vdots$

2^{3^n-3} ДНФ когда есть $x_n \vee \bar{x}_n$.

При этом мы 2 раза посчитали те, у кого есть 2 такие штуки, (таких C_n^2 случаев)

3 раза посчитали тех, у кого есть 3 такие штуки... n раз посчитали тех,

у кого есть n таких штук.

$$\Rightarrow \boxed{\#ДНФ(1) = n \cdot 2^{3^n-3} - C_n^2 \cdot 2^{3^n-5} - C_n^3\, 2^{3^n-2\cdot 3-1} \dots - C_n^n \cdot 2^{3^n-2\cdot n-1}}$$ ответ

③ Найти min базисы в T_0, T_1, S, L, M.

а) $T_0 = \{\oplus; \&\}$ – т.к. в полиноме Жегалкина в T_0 нет свободного члена.

Есть ли базис из 1 ф-ции: да, $xy \oplus z$.

$xx \oplus z = x \oplus z$ – получили $\oplus$

$xy \oplus (xx \oplus x) = xy \oplus (x \oplus x) = xy$ – получили &.

б) T_1 – двойственный к T_0.

$\Rightarrow$ базис в T_1 – это $\{\sim; \vee\}$ – из 2-х функций.

Из 3-х ф-ций: $\{\&; x+y+z; 1\}$ – из полинома Жегалкина; $x \vee y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}} = (x+1)(y+1)+1 = xy + x + y$

А из 1 ф-ции: $(x \vee y) \sim z$. – из двойственности.

в) Базис в S – это $\{m(x,y,z); \neg\}$, – доказывали на ТДФ; см. Гиндикин, решение задачи 7.26 на стр. 107.

где $m(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz = xy \oplus yz \oplus xz$ – ф-ция голосования

Докажем, что $\{m(x, \bar{y}, \bar{z})\}$ – тоже базис в S (из 1 ф-ции). (сем. 422 N10.3 17:21) см. задачи лист 10 Таранников.

Очевидно, что $m(x, \bar{y}, \bar{z}) \in S$ как суперпозиция самодвойственных функций.

Теперь выразим произвольную функцию $f(x_1; x_2 \dots x_n) \in S$ через

$h(x,y,z) = m(x,\bar{y},\bar{z})$.

Функция $\tilde{h}(y,z) := h(0,y,z) = m(0,\bar{y},\bar{z}) = y \downarrow z$ – стрелка пирса.

А стрелка пирса – одна образует базис в P_2.

$\Rightarrow$ функцию $\tilde{f}(x_2 \ldots x_n) := f(0,x_2 \ldots x_n)$ можно выразить ф-лой $\tilde{\Psi}$ через $\tilde{h}$ без использования x_1, поскольку x_1 для ф-ции $\tilde{f}$ является фиктивной переменной.

Теперь в ф-ле $\tilde{\Psi}$ заменим каждое вхождение $\tilde{h}(\Phi_1;\Phi_2)$ на $h(x_1;\Phi_1;\Phi_2)$ и получим ф-лу Ψ, реализующую некоторую ф-цию $\hat{f}(x_1;x_2 \ldots x_n)$.

Очевидно, что $\hat{f}(0,x_2 \ldots x_n) = \tilde{f}(x_2 \ldots x_n) = f(0,x_2 \ldots x_n)$. – по постр.

Но поскольку $\hat{f}$ есть суперпозиция самодвойственных ф-ций, она сама самодвойственная

$\Rightarrow \hat{f}(1,x_2 \ldots x_n) = \overline{\hat{f}(0,\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)} = \overline{f(0,\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n)} = f(1,x_2 \ldots x_n)$

$\Rightarrow \hat{f} \equiv f \Rightarrow$ мы выразили через $h(x,y,z) = m(x,\bar{y},\bar{z})$ произв. ф-цию $f \in S$. чтд.

2) Базис в $L = \{\oplus; 1\}$ – т.к полином Жегалкина линеен.

Докажем, что $\nexists$ базиса в L из 1 ф-ции. (см. сем 422 №10.3 9:32)

От противного. пусть $\{x_1 \oplus \ldots \oplus x_s \oplus c\}$ – базис в L из 1 ф-ции.

Если $c=0$, то ф-ция сохраняет 0 $\Rightarrow$ мы не сможем получить линейное $\notin T_0$.

$\Rightarrow c \neq 0. \Rightarrow c=1$. $\Rightarrow$ уже тогда точно не базис

Если s - чётное, то $f(1 \ldots 1) = 1 \Rightarrow$ сохраняет 1. но среди линейных есть ф-ции, которые не сохраняют единицу (e.g $x \oplus y$)

$\Rightarrow f = x_1 \oplus \ldots \oplus x_s \oplus 1$, где s - нег. $\Rightarrow s$ - нег

но если s - нег, то f – самодвойственная.

но бывают ведь линейные несамодвойственные – e.g. $x \oplus y$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \nexists$ базиса в L из 1 ф-ции.

9) Базис в $M = \{0, 1, \&, \vee\}$.

почему? Т.е где отрицание-то?

ну у монотонных ф-ций можно убрать отрицание из ДНФ! (сем. 407 №9.1 15:17)

почему? ну $f = \ldots \vee x_{i_1} \ldots x_{i_k} \bar{x}_{j_1} \ldots \bar{x}_{j_s} \vee \ldots$

Рассм. набор $1 \ldots 1\, 0 \ldots 0$

$\Rightarrow f(1 \ldots 1\, 0 \ldots 0) = 1$ – т.к эта конъюнкция на этом наборе $=1$.

Но f - монотонная

$\Rightarrow f(1 \ldots 1 * \ldots *) = 1 \Rightarrow$ от $x_{j_1} \ldots x_{j_s}$ – ничего не зависит

$\Rightarrow$ можно оставить только $\vee x_{i_1} \ldots x_{i_k} \vee$ – т.е стереть переменные с отрицанием

Итак, $\{0, 1, x\&y; x\vee y\}$ – базис в M.

Заметим, что $\{0, 1, xy\vee z\}$ – тоже базис, т.к $\begin{cases} xy\vee 0 = xy \\ x\cdot 1\vee z = x\vee z \end{cases}$

А меньше 3-х можно?

Ну нет, т.к $f\equiv 1$ – единственная монотонная, которая $\notin T_0$.

$\Rightarrow f\equiv 1$ обязана быть в базисе, т.к остальные моног. все $\in T_0$, поэтому её никак суперпозицией не выразить

$f\equiv 0$ – единственная монотонная, которая $\notin T_1$

$\Rightarrow f\equiv 0$ обязана быть в базисе, иначе её никак не выразить.

$\Rightarrow$ в базисе 0, 1 и ещё что-то (иначе только 0 и 1 и останутся)

$\Rightarrow\ \geq 3$ ф-ций. А 3 – мы привели.

на самом деле, что угодно монотонное, кроме 0, 1, $x_1\&\ldots\&x_s$ и $x_1\vee\ldots\vee x_s$.

Ответ:

T_0:	$xy\oplus z$	1 ф-ция
T_1:	$(x\vee y)\sim z$	1 ф-ция
S:	$m(x,\bar{y},\bar{z})$	1 ф-ция
L:	$\{x\oplus y; 1\}$	2 ф-ции
M:	$\{0; 1; xy\vee z\}$	3 ф-ции

или $m(x,y,z)$, например, т.к $m(x,y,0)=xy$; $m(x,y,1)=x\vee y$

④ Найти число нешефферовых ф-ций от n переменных.   N 4.25 Гаврилов

Решение: в начале задачи 1 мы выяснили, что ~~чтобы~~ для полноты $\{f\}$ достаточно, чтобы $f\notin T_0; f\notin T_1; f\notin S$.

$$\Rightarrow \#\{f\notin T_0; f\notin T_1; f\notin S\} = \#\{f\notin T_0; f\notin T_1\} - \underbrace{\#\{f\notin T_0; f\notin T_1; f\in S\}}_{\text{надо } f \text{ определить на } 2^{n-1}-1 \text{ наборе}} =$$

$$= \underbrace{2^{2^n-2}}_{\text{т.к на наборах } (0\ldots0) \text{ и } (1\ldots1)\ f \text{ уже определена}} - 2^{2^{n-1}-1}$$

(т.к самодвойственное надо только на половине наборов определить.)

Ответ: $\begin{cases} 2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1} & \text{при } n>0 \\ 0 & \text{при } n=0 \end{cases}$ – т.к там $f\equiv 0$ и $f\equiv 1$, и обе нешефферовы.

⑤ $L_{ДНФ}(f)$:= число символов переменных в min ДНФ для f.

Найти $\max\limits_{f\in L_2(n)} L_{ДНФ}(f)$.

Решение: Если у функции $\exists$ точки со значением 1 – соседние (т.к соединены ребром), то мы ДНФ можем упростить: их выражения из СДНФ – объединить в одно, просто убрав переменную, от которой ~~они~~ она зависит – ну

ребро — это и есть, когда от переменной не зависит.
И это приводит к тому, что ДНФ после упрощения (с 2-мя соседними единицами) становится даже меньше в смысле сложности $L_{ДНФ}$, чем даже если от одной из этих единицу не было — т.к. не только у нас будет на одно слагаемое (в общей дизъюнкции) меньше, но и это слагаемое будет зависеть от $n-1$ переменной (т.к. мы от фиктивной одной избавились).

⇒ нам нужно так раскрасить булев куб в 0 и 1, чтобы max кол-во единиц было несоседними. Ну max кол-во несоседних — это когда все единицы несоседние. И да, так бывает, например, раскрасим куб в шахматном порядке — это соотв. ф-ции $x_1\oplus\ldots\oplus x_n$.
Тогда там 2^{n-1} единиц ⇒ в ДНФ$_{min}$ для такой f: $\underbrace{n}_{\text{столько символов переменных в каждой дизъюнкции}}\cdot\underbrace{2^{n-1}}_{\text{столько дизъюнкций}}$ символов переменной

(e.g. $x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 \leadsto x_1x_2$ (замена) — это меньше в смысле $L_{ДНФ}$, чем каждая из $x_1x_2x_3$; $x_1x_2\bar{x}_3$).

$$\boxed{\text{Ответ: } \max_{f\in P_2(n)} L_{ДНФ}(f) = n\cdot 2^{n-1}}$$

6. Используя задачу про число монот. ф-ций на $\alpha\times\beta$, док-ть, что $|M(n)| \le A^{C_n^{n/2}}$; оценить A. (см. Келдыш стр. 32)

Решение: Докажем, что $\log_2 M(n) \le 3C_n^{\lfloor n/2\rfloor}$ ($\Rightarrow M(n)\le 2^3\cdot 2^{C_n^{\lfloor n/2\rfloor}} \Rightarrow A$)

Без огр. общности считаем, что $n=2k$ (ну любой же куб есть прямое произведение 2-х кубов на 1 меньшей размерности)
Представим n-мерный булев куб B^n в виде прямого произведения двух k-мерных кубов B_1^k и B_2^k, каждый из которых в свою очередь представим в виде объединения $C_k^{\lfloor k/2\rfloor}$ непересек. цепей (ну куб B^n можно всегда покрыть $C_n^{n/2}$ цепями, т.к. длина max антицепи $=C_n^{n/2}$ — мы сегодня доказали, и на каждую вершину антицепи — по 1 ~~вершине~~ цепи надо).

$\Rightarrow B_1^k=\bigcup_\alpha \bar\alpha$

$B_2^k=\bigcup_\beta \bar\beta$

$\Rightarrow B^n = B^{2k} = (\bigcup_\alpha \alpha)\times(\bigcup_\beta \beta) = \bigcup_\alpha\bigcup_\beta \alpha\times\beta$ — объединение $(C_k^{k/2})^2$ прямых произведений цепей.

А мы уже знаем, что #монотонных ф-ций на $\alpha\times\beta$ — их $C_{|\alpha|+|\beta|}^{|\alpha|}$ — см. д/з от сем. 10.

$$\Rightarrow M(n) = M(2k) \le \prod_\alpha \prod_\beta C_{|\alpha|+|\beta|}^{|\alpha|} \underset{(1+1)^{|\alpha|+|\beta|} = \sum_{i=0}^{|\alpha|+|\beta|} C^i_{|\alpha|+|\beta|}}{\le} \prod_\alpha \prod_\beta 2^{|\alpha|+|\beta|} = 2^{\sum_\alpha \sum_\beta (|\alpha|+|\beta|)}$$

~~так как~~

$$\Rightarrow \log_2 M(n) \le \sum_\alpha \sum_\beta (|\alpha|+|\beta|)$$

Имеем: $\sum_\alpha \sum_\beta (|\alpha|+|\beta|) = \sum_\alpha \sum_\beta |\alpha| + \sum_\alpha \sum_\beta |\beta| =$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta |\alpha| + \sum_\beta \sum_\alpha |\beta| = 2\sum_\alpha \sum_\beta |\alpha| = 2\sum_\alpha |\alpha| \cdot \underbrace{\sum_\beta 1}_{\text{количество цепей} = C_k^{k/2}} = 2\underbrace{\sum_\alpha |\alpha|}_{\text{длина цепей = весь куб} = 2^k} \cdot C_k^{[k/2]} = 2 \cdot 2^k \cdot C_k^{[k/2]}.$$

$$\Rightarrow \log_2 M(2k) \le 2^{k+1} \cdot C_k^{k/2}$$

$\Rightarrow$ по ф-ле Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$:

$$2^{k+1} \cdot C_k^{k/2} = 2^{k+1} \cdot \frac{k!}{\left(\frac{k}{2}\right)!\left(\frac{k}{2}\right)!} \approx 2^{k+1} \cdot \frac{\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k}{2\pi \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{k}{2e}\right)^k} = \frac{2^{k+1} \cdot 2^k}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi k}} = \frac{\overset{\approx 2{,}828\ldots}{2^{3/2}} \cdot 2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} \le 3 \cdot C_{2k}^k$$

$$\text{т.к. } C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!\,k!} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{2\pi k \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi k}} \cdot 2^{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot 2^{2k}$$

$$\Rightarrow \log_2 M(n) \le 3 C_n^{n/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(n) \le 8 \cdot 2^{C_n^{n/2}}} \Rightarrow A \in (2;3)$$

ответ