Пусть $\{S_t\}$, $t=0,1,\dots$ стоимости ценных бумаг,

$$u_t = \ln(S_t / S_{t-1})$$

AR(1): $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t=1,2,\dots$, $u_0=0$,
$\beta \in R^1$, $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$.
Тогда $u_t = \beta(\beta u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = \underline{\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \dots + \beta^{t-1}\varepsilon_1}$
ARCH(1) (Engle, 1992):

$$\begin{cases} u_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2, \quad t=1,2,\dots, \quad u_0 = 0, \end{cases}$$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Зачем нужны такие модели? Рассм. AR(1)
Опт. с.к. прогноз ненабл. u_{n+1} по набл. $u_1,\dots,u_n$ – это сл. в. $u^*_{n+1} = \varphi^*(u_1,\dots,u_n)$, явл. решением задачи

$$E\big(u_{n+1} - \varphi(u_1,\dots,u_n)\big)^2 \to \min_{\varphi}$$

φ бор.: $E\varphi^2(u_1,\dots,u_n) < \infty$.

Пусть $\mathcal{F}_n = \sigma\{u_1,\dots,u_n\}$.
Тогда $\varphi^*(u_1,\dots,u_n) = E(u_{n+1} / \mathcal{F}_n) =$
$= E(\beta u_n + \varepsilon_{n+1} / \mathcal{F}_n) = E(\beta u_n / \mathcal{F}_n) + E(\varepsilon_{n+1} / \mathcal{F}_n) =$
$= \beta u_n + E\varepsilon_{n+1} = \beta u_n$. $\boxed{u^*_{n+1} = \beta u_n}$

Зад. Надо оценивать β.

Зад. 2. $H_0: u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \ t = 1, 2, \dots, n; \ u_0 = 0.$

$H_{1n}: u_t = \beta_{tn} u_{t-1} + \varepsilon_t,$

$\beta_{tn} = \beta + a_{tn} n^{-1/2}$. Это „дрейф" парам.

Задача 3. $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t$ – н.о.р., $\varepsilon_1 \sim G(x)$.

$H_0: G(x) \in \{\Phi(x/\theta), \theta > 0\}.$

$H_{1n}: G(x) = (1 - n^{-1/2}) \Phi(x/\theta_0) + n^{-1/2} H(x).$

Задача 4.

$$\begin{cases} u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Как оценить β?

Пусть $u_t = a + \varepsilon_t, \ t = 1, 2, \dots, n, \quad a \in R^1$.

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0, \quad 0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty,$

$\varepsilon_1 \sim G(x)$ и $G(x)$ неизв.

Если $\varepsilon_1 \sim g(x) = G'(x)$, то ф.р. u_t есть $G(x-a)$,

а пл.в. $g(x-a)$. Логарифм. правд.

$$L_n(\mathcal{U}, \theta) = \sum_{t=1}^{n} g(u_t - \theta).$$

О.м.п. $\hat{a}_{n,mL}$ – реш. зад. $L_n(\mathcal{U}, \theta) \to \max\limits_{\theta \in R^1}$.

Тема 1. Оценивание в задаче с неизв. параметром сдвига. М-оценки с гладкой целевой ф-ей. Выборочная медиана. АОЭ оценок.

Тема 2. В-робастные оценки.

Тема 3. Тесты в схеме с неизв. параметром сдвига. АОЭ тестов. Теорема Питмена. Робастные тесты.

Тема 4. Обзор авторегрессионных моделей врем. рядов: $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p,q)$, $ARCH(p)$.

Тема 5. Оценивание и проверка гипотез в автор. моделях. Робастные процедуры.

Раздел 1. Оценивание в задаче с неизв. параметром сдвига.

Набл. $u_t = a + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, n$; $a \in R^1$.
$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., ε_1 имеет ф.р. $G(x)$, $g(x) = G'(x)$.
Будем предполагать, что либо (1) $G(0) = 1/2$ (т.е. ноль – медиана $G(x)$), либо (2) $E\varepsilon_1 = 0$.
Тогда $F(x) = P(u_1 \le x) = G(x - a)$, и a – мед. $F(x)$, т.к. $F(a) = G(0) = 1/2$. Либо $Eu_1 = a$.
Если $\varepsilon_1 \overset{d}{=} -\varepsilon_1$, то $G(x)$ симметр. отн. нуля.
Это бывает т. и т.т., когда $G(x) + G(-x) \equiv 1$ $\forall x$.

Если еще $E|\varepsilon_1| < \infty$, то $E\varepsilon_1 = 0$, $G(0) = 1/2$

Действ., $E\varepsilon_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d(1-G(-x)) =$
$= \int_{\infty}^{-\infty} z\, dG(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} z\, dG(z)$ ч.т.д.

Цель — оценить a. Примеры.

① Оценка макс. правдоподобия (парам. оценка)

Пусть $\varepsilon_1 \sim g(x)$ и $g(x)$ изв. Пусть $U = (u_1, \dots, u_n)$

$$f_n(x_1, \dots, x_n, a) = \prod_{t=1}^{n} g(x_t - a),$$

Логарифм. правд. $L_n(U, \theta) := \sum_{t=1}^{n} \ln g(u_t - \theta)$.

О.м.п. — реш. задачи

$$L_n(U, \theta) \to \max_{\theta \in R^1}$$

Если $g(x)$ — гладкая, то можно решать ур-ие правдоподобия

(1) $$\sum_{t=1}^{n} g'(u_t - \theta) / g(u_t - \theta) = 0.$$

Почему это хор. оценка? Пусть

$$l_n(\theta) := n^{-1} \sum_{t=1}^{n} g'(u_t - \theta) / g(u_t - \theta).$$

(2) В силу З.Б.Ч. $l_n(\theta) \xrightarrow{P} E \dfrac{g'(u_1 - \theta)}{g(u_1 - \theta)} =: l(\theta)$

Есть надежда, что (из (2)) ~~...~~ и корни ур-ия (1) сход. к корням ур-ия $l(\theta) = 0$.

но $l_n(a) = E\frac{g'(\varepsilon_1)}{g(\varepsilon_1)} = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\, g(x)\,dx =$

$= \int g'(x)\,dx = \left(\int g(x)\,dx\right)' = 0\,(!)$.

*/ Если $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$, то о.м.п.

– реш. зад.

$$\sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(u_t-\theta)^2/2\sigma^2}\right) \to \max_{\theta\in R^1}$$

экв. $\sum_{t=1}^{n} (u_t-\theta)^2 \to \min_{\theta\in R^1}$, $\hat{a}_n = \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_t u_t$.

Тогда $n^{1/2}(\bar{u}_n - a) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

*/ Общий случай инф. Фишера $i(a) = \cancel{E_a\left(\frac{\partial}{\partial a}\right.}$

$= E_a\left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(u_1, \ldots, u_n, a)\right)^2 = E_a\left(\frac{g'(u_1-a)}{g(u_1-a)}\right)^2 =$

$= E\left(\frac{g'(\varepsilon_1)}{g(\varepsilon_1)}\right)^2 = \int \frac{(g'(x))^2}{g(x)}\,dx$ – не зав. от a

$$n^{1/2}(\hat{a}_{n,мп} - a) \xrightarrow{d} N(0, 1/i(a)).$$

② Оценка по методу минимума хи-квадрат (парам. оценка)

$-\infty = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \infty$,

$B_j = (x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, m$; $\nu_1, \ldots, \nu_m$ –

– число $\{u_t\}$, попавших в $B_1, \ldots, B_m$ соотв.

Пусть $p_j(\theta) = G(x_j - \theta) - G(x_{j-1} - \theta) > 0$. Оценка — реш. ур-ния

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j \frac{p_j'(\theta)}{p_j(\theta)} = 0.$$

Тогда

$$n^{-1} l_n(\theta) := n^{-1} \sum_{j=1}^{m} \nu_j \frac{p_j'(\theta)}{p_j(\theta)} \xrightarrow{P} \sum_{j=1}^{m} p_j(a) \frac{p_j'(\theta)}{p_j(\theta)} =: l(\theta).$$

$$l(a) = \sum_{j=1}^{m} p_j'(a) = \left(\sum_{j=1}^{m} p_j(a) \right)' = 0 \ (!)$$

(3) Оценка минимального расстояния (пар. сл.)

Пусть $\hat F_n(x) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} I(u_t \le x)$ — э.ф.р.

В силу теоремы Гливенко–Кантелли

$$\sup_x |\hat F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Оценка миним. расстояния — реш. зад.

$$\max_x |\hat F_n(x) - \underbrace{G(x-\theta)}_{F(x)}| \to \min_{\theta \in R^1}$$

Тогда $n^{1/2} l_n(\theta) = \max_x |n^{1/2}[\hat F_n(x) - G(x-\theta)]|$,

$$l_n(a) = \max_x |n^{1/2}[\hat F_n(x) - F(x)]| \Big|_{F(x)=t} = \max_{0<t<1} |\hat v_n(t)|, \quad v_n(t) = n^{1/2}[\hat F_n(F^{-1}(t)) - t] \text{ — эмп. пр.}$$

В силу теоремы Колмогорова

$$P\Big(\sup_{0<t<1} |\hat{V}_n(t)| \le x\Big) \to K(x) = 1 - 2\sum_{j \ge 0} (-1)^{j+1} e^{-x^2 j^2}$$

Т.е. $l_n(a) = O_p(1)$. При $\theta \ne a$

$$l_n(\theta) = \max_x \left| n^{1/2}\left[\hat{F}_n(x) - G(x-\theta)\right]\right| \xrightarrow{P} \infty$$

(4) Непарам. М-оценка

$$\sum_{t=1}^{n} \psi(u_t - \theta) = 0, \quad \text{где } E\psi(\varepsilon_1) = 0$$

Тогда $l_n(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \psi(u_t - \theta) \xrightarrow{P} E\psi(u_1 - \theta)$,

$$E\psi(u_1 - a) = E\psi(\varepsilon_1) = 0$$

(5) Медианная оценка

Вар. ряд $u_{(1)} \le u_{(2)} \le \ldots \le u_{(n)}$;

$$\hat{m}_n = \begin{cases} u_{(k+1)}, & n = 2k-1, \\ \dfrac{u_{(k)} + u_{(k+1)}}{2}, & n = 2k; \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Будет показано, что при нек. усл. регул.

$$n^{1/2}(\hat{m}_n - a) \xrightarrow{d} N\Big(0, \frac{1}{(2g(0))^2}\Big).$$

Оценок много! Как их сравнивать?

Асимптотическая нормальность М-оценок — 8 —

Ур-ие правд. $\sum_{t=1}^{n} \frac{g'(u_t-\theta)}{g(u_t-\theta)} = 0$.

Если $\psi_0(\theta) = g'(u_t-\theta)/g(u_t-\theta)$, то

$$E\psi_0(a) = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\, g(x)\,dx = \int g'(x)\,dx =$$
$$= \left(\int g(x)\,dx\right)' = 0$$

Непар. М-оценка

(3) $\sum_{t=1}^{n} \psi(u_t-\theta) = 0$, $\boxed{E_a\psi(u_t-a) = E\psi(\varepsilon_t) = 0}$

Пусть $L_n(\theta) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \psi(u_t-\theta)$.

Тогда $L_n(a+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \psi(\varepsilon_t - n^{-1/2}\tau)$, $|\tau| \le C < \infty$.

Возьмём ф-лу Тейлора

$$L_n(a+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_t \psi(\varepsilon_t) - \tau n^{-1}\sum_t \psi'(\varepsilon_t)$$
$$+ \frac{1}{2}\tau^2 n^{-3/2}\sum_t \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}_t), \quad \tilde{\varepsilon}_t \in (a,\ a+n^{-1/2}\tau).$$

1) Пусть $\boxed{\psi^{(2)}(x) \text{ огр}}$. Тогда при $|\tau| \le C$

$$\left|\frac{1}{2}\tau^2 n^{-3/2}\sum_t \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}_t)\right| \le \frac{1}{2} C^2 n^{-1/2} \sup_x |\psi^{(2)}(x)| \to 0$$

2) $n^{-1}\sum_t \psi'(\varepsilon_t) = E\psi'(\varepsilon_t) + o_p(1)$.

3) значит, $l_n(a+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum \psi(\varepsilon_t) +$

(4) $+\tau E\psi'(\varepsilon_t) + \alpha_n(\tau)$, $\sup\limits_{|\tau|\le\Theta} |\alpha_n(\tau)| < \infty$.

Пусть $\boxed{E\psi'(\varepsilon_1)\neq 0}$

Пусть $n^{1/2}(\hat a_n - a) = O_p(1)$, $n\to\infty$.

т.е. $\forall \varepsilon>0 \ \exists A=A(\varepsilon)$:

$$\sup_n P(|n^{1/2}(\hat a_n - a)| > A) < \varepsilon$$

Лемма 1

Если $n^{1/2}(\hat a_n - a) = O_p(1)$, то при пред. усл.

$$l_n(\hat a_n) = \overbrace{n^{-1/2}\sum_t \psi(\varepsilon_t)}^{l_n(a)} + E\psi'(\varepsilon_1)\, n^{1/2}(\hat a_n - a) + o_p(1)$$

Док-во. $P(|l_n(\underbrace{a+n^{-1/2}\cdot n^{1/2}(\hat a_n - a)}_{\hat a_n}) - l_n(a) -$

$-E\psi'(\varepsilon_1)\, n^{1/2}(\hat a_n - a)| > \delta) = P(|\ldots| > \delta,$

$|n^{1/2}(\hat a_n - a)| \le \Theta) + P(|\ldots|, |n^{1/2}(\hat a_n - a)| > \Theta) \le$

$\le \varepsilon/2 + P(\sup\limits_{|\tau|\le\Theta} |l_n(a+n^{-1/2}\tau) - l_n(a) -$

$-E\psi'(\varepsilon_1)\tau| > \delta) \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > n_0$.

ч.т.д.

$u_t = a + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, n$; $a \in R^1$;

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. с неизв. ф.р. $G(x)$ и плотн. вер. $g(x) = G'(x)$.

Доп. предп. $\varepsilon_1 \overset{d}{=} -\varepsilon_1$ (т.е. для непр. $G(x)$ $G(x)+G(-x)=1$)
и $E|\varepsilon_1|<\infty$; тогда $E\varepsilon_1 = 0$.

М-оценка для a (непар. оценки) – реш. ур-ия

(3) $$\sum_{t=1}^{n} \psi(u_t - \theta) = 0.$$

Пусть $l_n(\theta) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \psi(u_t-\theta)$, тогда

$$l_n(a+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \psi(\varepsilon_t - n^{-1/2}\tau).$$

Условие (i) $E\psi(\varepsilon_1)=0$, $E\psi^2(\varepsilon_1)<\infty$

Условие (ii) $\sup_x|\psi^{(2)}(x)|<\infty$, $E|\psi'(\varepsilon_1)|<\infty$,
$E\psi'(\varepsilon_1)\neq 0$.

При этих условиях при любого $0\le\Theta<\infty$

(4) $$l_n(a+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t) + \tau E\psi'(\varepsilon_1) + \alpha_n(\tau),$$

$$\sup_{|\tau|\le\Theta}|\alpha_n(\tau)| = o_p(1).$$

Если $n^{1/2}(\hat a_n - a) = O_p(1)$ (т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists A=A(\varepsilon)$:
$\sup_n P(|n^{1/2}(\hat a_n-a)|>A)<\varepsilon$), то из (4) след.:

(5) $$l_n(\hat a_n) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t) + E\psi'(\varepsilon_1)\, n^{1/2}(\hat a_n - a) + o_p(1)$$

Пусть $S_n = \{\omega :$ ур-ие (3) $l_n(a) = 0$ имеет реш.$\}$. Покажем, что $P(S_n) \to 1$. Пусть для определенности $E\psi'(\varepsilon_1) < \infty$. Положим в (5) $\hat{a}_n = a + n^{-1/2}A$, $A > 0$ – константа. Тогда $n^{1/2}(\hat{a}_n - a) = A$ и, след., $n^{1/2}(\hat{a}_n - a) = O_p(1)$.

В силу (5)

$$l_n(a + n^{-1/2}A) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t) + E\psi'(\varepsilon_1)A + o_p(1).$$

В силу ц. п. т.

$$(6) \quad n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_1) \xrightarrow{d} N(0, E\psi^2(\varepsilon_1)).$$

<u>Задача 1</u> */ Если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $\xi_n = O_p(1)$;

*/ Если $\sup_n E|\xi_n|^\alpha < \infty$ при нек. $\alpha > 0$, то $\xi_n = O_p(1)$;

*/ Если $\xi_n = O_p(1)$, а $\eta_n = o_p(1)$, то $\xi_n + \eta_n = O_p(1)$, $\xi_n\eta_n = o_p(1)$.

В силу задачи 1 и соотн. (6) при дост. большом $A > 0$

$$(7) \quad l_n(a + n^{-1/2}A) < 0 \text{ при всех } n > n_0$$

с вероятн. не меньше $1 - \varepsilon/2$. Если S_{n1} – мн-во, на котором вып. (7), то $P(S_{n1}) > 1 -$

Совершенно аналогично

(8) $l_n(a - n^{-1/2}A) = n^{-1/2}\sum_1^n \psi(\xi_t) - E\psi'(\xi_1)A + o_p(1) > 0$

при $n > n_0$ на мн-ве S_{n2} с $P(S_{n2}) > 1 - \varepsilon/2$.

Значит, (7) и (8) выполнены одновременно на мн-ве $S_{n1} \cdot S_{n2}$ и $P(S_{n1} S_{n2}) > 1 - \varepsilon$, $n > n_0$.

Для $\forall \omega \in S_{n1} \cdot S_{n2}$ ф-ия $l_n(\theta)$ на концах отр. $[a - An^{-1/2}, a + An^{-1/2}]$ принимает разные знаки (+ и − соотв.), а т.к. она непр., то в этом отр. есть корень $\hat{a}_n^A$. Тогда

$$1 - \varepsilon \le P(S_{n1} S_{n2}) \le P(S_n), \text{ т.е. } P(S_n) \to 1.$$

При каждом $\omega \in S_n$ ур-ие $l_n(\theta) = 0$ может иметь несколько корней. Выберем из них корень $\hat{a}_n$, ближайший к a. Он существует, т.к. $l_n(\theta)$ непр. Корень $\hat{a}_n$ от a не зависит. Кроме того,

$$P(|n^{1/2}(\hat{a}_n - a)| \le A, S_n) \ge P(|n^{1/2}(\hat{a}_n^A - a)| \le A, S_{n1} S_{n2}),$$

т.к. $S_{n1} S_{n2} \subseteq S_n$, $(\omega : |n^{1/2}(\hat{a}_n^A - a)| \le A) \subseteq$
$\subseteq (\omega : |n^{1/2}(\hat{a}_n - a)| \le A)$. Но

$$P(|n^{1/2}(\hat{a}_n^A - a)| \le A, S_{n1} \cdot S_{n2}) = P(S_{n1} \cdot S_{n2}) > 1 - \varepsilon, \; n > n_0$$

Итак, (9) $P(|n^{1/2}(\hat{a}_n - a)| \le A; S_n) > 1 - \varepsilon$, $n > n_0$. Т.е.

$n^{1/2}(\hat{a}_n - a) = O_p(1)$. Но корень $\hat{a}_n$ опред. только на S_n! Пусть $\hat{a}_{n,M} = \begin{cases} \hat{a}_n, & \text{если } \hat{a}_n \text{ сущ.,} \\ c, & \text{в прот. случае.} \end{cases}$

Тогда, (10) $n^{1/2}(\hat{a}_{n,M} - a) = O_p(1)$, т.к.

$P(|n^{1/2}(\hat{a}_{n,M} - a)| \le A) = P(|n^{1/2}(\hat{a}_n - a)| \le A, S_n) +$
$+ P(|n^{1/2}(\hat{a}_n - a)| \le A, \overline{S}_n) > 1 - \varepsilon$, $n > n_0$ в силу (9).

~~В силу (10) и (9)~~ кроме того,

(11) $\quad l_n(\hat{a}_{n,M}) = o_p(1)$. $\qquad \overset{\hat{a}_n}{''}$

Действ., $P(|l_n(\hat{a}_{n,M})| > \delta) = P(|l_n(\hat{a}_{n,M})| > \delta, S_n) + \underset{0}{\underset{''}{P(|l_n(\hat{a}_{n,M})| > \delta, \overline{S}_n)}} \le 0 + P(\overline{S}_n) \le \varepsilon$, $n > n_0$.

В силу (10), (11) и (5) получаем:

$$o_p(1) = l_n(\hat{a}_{n,M}) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \psi(\varepsilon_t) + E\psi'(\varepsilon_1)\, n^{1/2}(\hat{a}_{n,M} - a) + o_p(1).$$

Отсюда,

(12) $$n^{1/2}(\hat{a}_{n,M} - a) = \frac{1}{E\psi'(\varepsilon_1)}\, n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \psi(\varepsilon_t) + o_p(1) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{E\psi^2(\varepsilon_1)}{\{E\psi'(\varepsilon_1)\}^2}\right), \; n \to \infty.$$

$\overset{n}{\sigma}{}^2_M$

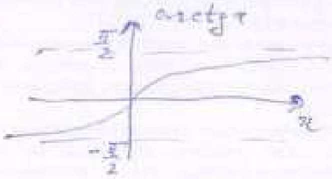
Примеры. Пусть $E\varepsilon_1=0$, $0<\sigma^2=E\varepsilon_1^2<\infty$.

① $\psi(x)=x$, тогда ур-ие (3) имеет вид

$$\sum_{t=1}^{n}(u_t-\theta)=0,$$ его решение $\hat a_{n,M}=\bar u$.

В силу (12) (или непоср.!) $n^{1/2}(\bar u-a)\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2)$, $\sigma^2=E\varepsilon_1^2$

② $\psi(x)=\mathrm{arctg}\,x$



$\psi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,

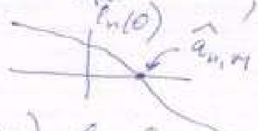
$$\psi^{(2)}(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \sup_x|\psi^{(2)}(x)|<\infty.$$

Если ε_1 имеет симметр. распр, то $E\psi(\varepsilon_1)=0$

Ур-ие (3) имеет вид:

(13) $$\sum_{t=1}^{n}\mathrm{arctg}(u_t-\theta)=0.$$

Тогда ф-ия $\tilde l_n(\theta)=\sum_{t=1}^{n}\mathrm{arctg}(u_t-\theta)$ строго убывает по θ, т.к. $\tilde l_n'(\theta)<0$. Кроме того, $\tilde l_n(\theta)\to+\infty$ при $\theta\to-\infty$; $\tilde l_n(\theta)\to-\infty$ при $\theta\to+\infty$.



Корень ур-ия (13) всегда сущ. и единств.

Для него верно утв. (12).

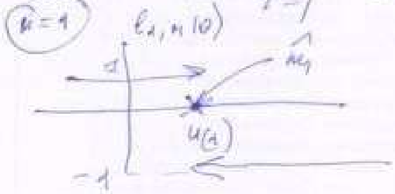
③ Пусть $u_{(1)} \le u_{(2)} \le \ldots \le u_{(n)}$ — вар. ряд выб.

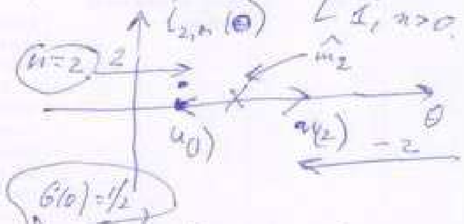
Пусть $G(0)=1/2$, $g(0)>0$. Величина

$$\hat{m}_n := \begin{cases} u_{(k+1)}, & n=2k+1,\ k=0,1,\ldots, \\ \dfrac{u_{(k)}+u_{(k+1)}}{2}, & n=2k,\ k=1,2,\ldots, \end{cases}$$

наз. выборочной медианой. Тогда $\hat{m}_n$ — один из корней ур-ия

$$L_{n,n}(\theta) := \sum_{t=1}^{n} \mathrm{sign}\,(u_t-\theta) = 0, \quad \mathrm{sign}\,x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$





Можно показать: если $G(0)=1/2$, $G(x)$ диффер. в нуле и $G'(0)=g(0)>0$, то

$$n^{1/2}(\hat{m}_n - a) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{(2g(0))^2}\right).$$

Замечательно(!), что утв. (12) дает тот же ответ. Действ., пусть $\psi(x) = \mathrm{sign}\,x$.

Тогда $E(\mathrm{sign}\,\varepsilon_1)^2 = 1$, а

$$E\psi'(\varepsilon_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,d\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,d\,\mathrm{sign}\,x = 2g(0).$$

Значит $\sigma_M^2 = \dfrac{1}{(4g(0))^2}$ (!). Наши условия ас. норм. для М-оценок избыточны!

Замечание об АОЭ оценок

Пусть по наблюдениям $X_1, \dots, X_n$ надо оценить скал. параметр θ. Пусть $\hat{\theta}_{1n}$ такая оценка θ, что

(14) $$n^{1/2}(\hat{\theta}_{1n} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta)), \quad n \to \infty$$

Пусть есть другая оценка $\hat{\theta}_{2n}$ такая, что

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_{2n'} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta)), \quad n' = n'(n) \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

в. Асимптотической относительной эффективностью (АОЭ или ARE) оценки $\hat{\theta}_{1n}$ относительно оценки $\hat{\theta}_{2n}$ наз.-ся величина

$$e_{1,2} := \lim_{n \to \infty} \frac{n'(n)}{n},$$

если этот ненулевой конечный предел сущ. и не зависит от выб. посл. $n'(n)$, для которых выполн. (14).

Пусть, напр., $e_{1,2} = 2$. Тогда при больших и $n' \approx 2n$. Значит, для $\hat{\theta}_{2n}$ нужно в два раза больше наблюдений, чем для $\hat{\theta}_{1n}$, чтобы достичь одинаковой точности $\sigma^2(\theta)/n$. Оценка $\hat{\theta}_{1n}$ в два раза лучше оценки $\hat{\theta}_{2n}$!

Задача.

Пусть $n^{1/2}(\hat{\theta}_{in} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_i^2(\theta))$, $n \to \infty$, $i = 1, 2$, $\sigma_i^2(\theta) > 0$.

Тогда АОЭ существует и равна

$$e_{1,2} = \sigma_2^2(\theta) / \sigma_1^2(\theta).$$

В силу этой задачи АОЭ $\hat{m}_n$ отн. $\bar{X}$ равна

$$e_{\hat{m}_n, \bar{X}} = 4g^2(0)\sigma^2$$

1) Если $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$, то

$$e_{\hat{m}_n, \bar{X}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^2 \sigma^2 = \frac{2}{\pi} \approx 0.637 < 1$$

Т.е. если выбор. медиану построить по n набл., то ту же точность получим для $\bar{X}$ по $0.637n$ наблюдениям! $\hat{m}_n$ вне „хуже" $\bar{X}$!

2) $\varepsilon_1 \sim Lap(\lambda)$, $\lambda > 0$. Тогда $g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$,

$E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = \frac{2}{\lambda^2}$; $e_{\hat{m}_n, \bar{X}} = 4 \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{2}{\lambda^2} = 2 > 1$

Выбор. мед. в 2 раза лучше!

3) $\varepsilon_1 \sim T(\Delta, \tau)$, $g(x) = (1-\Delta)\varphi(x) + \frac{\Delta}{\tau}\varphi\left(\frac{x}{\tau}\right)$ - смесь

$$e_{\hat{m}_n, \bar{X}} = 4\left[(1-\Delta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\Delta}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^2 \left[1 - \Delta + \tau^2\Delta\right] \to \infty, \ \tau \to \infty$$

3. B-робастность выборочной медианы.

(Martin, Yohai (1986).)

Схема засорений Мартина-Йохаи имеет вид:

$$y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Здесь $\{u_t\}$ — „полезный сигнал" (временной ряд); $\{z_t^{\gamma}\}$ — н.о.р. сл.в., $z_1^{\gamma} \sim Bin(1, \gamma)$, $0 \le \gamma \le 1$ (γ — уровень засорения);

$\{\xi_t\}$ — н.о.р. сл.в. — грубые выбросы, ξ_1 имеет распределение $\mu_\xi \in M_\xi$; распр. μ_ξ неизвестно, а мн-во M_ξ известно;

Последовательности $\{u_t\}, \{z_t^{\gamma}\}, \{\xi_t\}$ независимы между собой.

Пусть $y_1, \dots, y_n$ — наблюдения, и распределение вектора $Y_n = (y_1, \dots, y_n)$ зависит от неизвестного параметра β. Пусть $\hat{\beta}_n$ — некоторая оценка β.

<u>Основное предположение</u>

При любом $0 \le \gamma \le 1$ существует предел

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma, \quad n \to \infty; \quad \theta_0 = \beta.$$

Δ. Если существует предел

$$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) := \lim_{\gamma\to+0} \frac{\theta_\gamma - \theta_0}{\gamma},$$ то

$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ называется функционалом влияния оценки $\hat\beta_n$.

Если ф-ия влияния существует, то

$$\theta_\gamma = \theta_0 + IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma + o(\gamma),\quad \gamma\to+0,$$

т.е. $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)$ характеризует главный линейный по γ член в разложении по γ асимптотического смещения $\theta_\gamma - \theta_0 = \theta_\gamma - \beta$.

Δ. Величина $GES(\theta_\gamma, M_\xi) := \sup\limits_{\mu_\xi\in M_\xi} |IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)|$ называется чувствительностью оценки $\hat\beta_n$ к засорениям (выбросам).

Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то главный (по γ) член асимптотического смещения $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)\gamma$ равномерно по μ_ξ мал при малых γ.

Δ. Если $GES(\theta_\gamma, M_\xi) < \infty$, то оценка $\hat\beta_n$ называется робастной по смещению, или B-робастной.

Пример. (выборочное среднее).

$$\begin{cases} u_t = a + \xi_t \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t \end{cases}, \quad t = 1, \dots, n,$$

$\{\xi_t\}$ - н.о.р. сл.в.,

$E\xi_1 = 0$ (тогда $Eu_t = a$), $E|\xi_1| < \infty$

Возьмем оценкой a эмп. среднее $\bar{y} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} y_t$.

$\sum (y_t - \bar{y})^2 \to \min$

Тогда $\bar{y} \xrightarrow{P} E(u_1 + z_1^{\gamma} \xi_1) = a + \gamma E\xi_1 = \theta_{\gamma}^{LS}$.

ф-ия θ_{γ}^{LS} определена при всех γ,

$\frac{d\theta_{\gamma}^{LS}}{d\gamma} = E\xi_1 = IF(\theta_{\gamma}^{LS}, \mu_{\xi})$. Если M_1 - класс распределений с конечным первым моментом, то

$$GES(\theta_{\gamma}^{LS}, M_1) = \sup_{\mu_{\xi} \in M_1} |E\xi_1| = \infty \,!$$

Оценка ~~β~~ $\bar{y}$ не B-робастна на классе M_1!

Пример (выборочная медиана)

Пусть

$$\begin{cases} u_t = a + \xi_t \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t \end{cases}, \quad t = 1, \dots, n,$$

$$\hat{m}_n^{y} = \begin{cases} y_{(k+1)}, & n = 2k+1, \ (k = 0, 1, \dots) \\ \dfrac{y_{(k)} + y_{(k+1)}}{2}, & n = 2k, \ (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Теорема 1

Пусть существует производная $g(x) = G'(x)$, $g(x)$ непрерывна и ограничена, $g(0) > 0$, $G(0) = 1/2$. Тогда: 1) $\hat{m}_n^y \xrightarrow{P} \theta_y^m$, $\theta_0 = a$,

2) существует функционал влияния выб. мед.

$$IF(\theta_y^m, \mu_\xi) = \frac{1 - 2EG(-\xi_1)}{2g(0)}.$$

3) чувствительность выб. медианы на классе всех возможных распределений M_ξ

$$GES(\theta_y^m, M_\xi) = \sup_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_y^m, \mu_\xi)| = \frac{1}{2g(0)} < \infty,$$

т.е. выб. медиана В-робастна.

Док-во. шаг 1. Выбор. медиана $\hat{m}_n^y$ удовл. уравнению

(1) ~~(10)~~ $$t_n(\theta) := n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \mathrm{sign}(y_t - \theta) = 0,$$

В силу 3.6.4 при любом θ и любом $0 \le \gamma \le 1$

$$l_n(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign}(y_t - \theta) \xrightarrow{P} E \operatorname{sign}(y_1 - \theta) =: \Lambda_M(\gamma, \theta).$$

<u>Задача</u> Пусть ξ и η – независимые случ. вектора, причем η – дискретный вектор со знач. $\eta_1, \eta_2, \ldots$. Проверить, что

$$E\varphi(\xi, \eta) = \sum_{k \ge 1} E\varphi(\xi, \eta_k) \cdot P(\eta = \eta_k) =$$

$$= \sum_{k \ge 1} E(\varphi(\xi, \eta) / H_k)\, P(H_k),$$

<u>где гипотеза</u> $H_k = (\eta = \eta_k)$.

(2) Найдем удобный вид для $\Lambda_M(\gamma, \theta)$. Имеем:

(3) $\Lambda_M(\gamma, \theta) = E(1 - 2I(y_1 - \theta \le 0)) = 1 -$

$$-2EI(\varepsilon_1 \le \theta - a - z_1^\gamma \xi_1) \underset{3}{=} 1 - 2EG(\theta - a - z_1^\gamma \xi_1),$$

т.к. $\operatorname{sign} x = 1 - 2I(x < 0)$ при $x \ne 0$.

Чтобы упростить (3), введем две гипотезы

$$H_1 = (z_1^\gamma = 0), \quad H_2 = (z_1^\gamma = 1).$$

Тогда, используя задачу, получаем из (3).

$$\Lambda_M(\gamma, \theta) = 1 - 2(1-\gamma)\, G(\theta - a) - 2\gamma\, EG(\theta - a - \xi_1),$$

Ф-ия $\Lambda_M(\gamma, \theta)$ ~~явн~~ определена при всех γ, θ, в том числе и для отриц. γ

Шаг 2. Ф-ия $\Delta_M(\gamma,\theta)$ в окрестности точки $(0,a)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы о неявной ф-ии. А именно,

1) $\Delta_M(0,a) = 1-2G(0) = 0$;

2) существуют и непрерывны по паре (γ,θ) ф-ии $\dfrac{\partial \Delta_M(\gamma,\theta)}{\partial \gamma}$ и $\dfrac{\partial \Delta_M(\gamma,\theta)}{\partial \theta}$;

3) $\dfrac{\partial \Delta_M(\gamma,\theta)}{\partial \theta} = -2g(0) \neq 0$.

Значит, в окр. точки $(0,a)$ определена ф-ия $\theta_m(\gamma) = \theta_\gamma^m$ такая, что

$$\Delta_M(\gamma,\theta_\gamma^m) = 0.$$

Кроме того, $\theta_0^m = a$; $\theta_\gamma^m \to \theta_0$ при $\gamma \to 0$; ф-ия θ_γ^m дифференцируема в т. $\gamma = 0$, и

(3) ~~(12)~~ $$\left.\frac{d\theta_\gamma^m}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = -\left(\frac{\partial \Delta_M(0,a)}{\partial \theta}\right)^{-1} \frac{\partial \Delta_M(0,a)}{\partial \gamma} = \frac{1-2EG(-\xi_1)}{2g(0)}$$

Шаг 3. Покажем, что (4) ~~(13)~~ $\hat{m}_n^{\gamma} \xrightarrow{P} \theta_\gamma^m$, $n \to \infty$

Тогда из (3)-(4) будет следовать, что функционал влияния выбор. медианы равен

(5) $$IF(\theta_\gamma^m, \mu_\xi) = \frac{1 - 2E\,G(-\xi_1)}{2g(0)}.$$

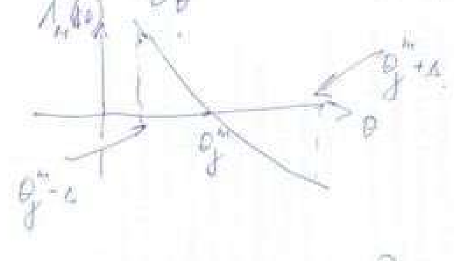
Модуль числителя в (5) не больше единицы, причем если ξ_1 неслучайно и $\xi_1 \to +\infty$, то числитель стрем. к ед.

Значит, $GES(\theta_\gamma^m, M_\xi) = \sup_{\mu_\xi \in M_\xi} |IF(\theta_\gamma^m, \mu_\xi)| = \frac{1}{2g(0)}$

Итак, докажем (4)

имеем при малых $\gamma \geq 0$ (γ – фикс.!) вблизи a: и θ

$$\frac{\partial \Lambda_M(\gamma, \theta)}{\partial \theta} = -2(1-\gamma)g(\theta - a) - 2\gamma E g(\theta - a - \xi_1) < 0$$



т.е. $\Lambda(\gamma, \theta)$ убыв. по θ

Значит $\begin{cases} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m - \Delta) > 0 \\ \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m + \Delta) < 0 \end{cases}$

(6) Но $\begin{cases} l_n(\theta_\gamma^m - \Delta) \xrightarrow{P} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m - \Delta) > 0 \\ l_n(\theta_\gamma^m + \Delta) \xrightarrow{P} \Lambda_M(\gamma, \theta_\gamma^m + \Delta) < 0 \end{cases}$

ф-ия $l_n(\theta)$ монот. убывает (точнее, не возрастает) по θ.

В силу ~~(15)~~ 6 с вер. сколь угодно близкой к единице при достаточно больших n все корни уравнения $L_n(\theta)=0$ лежат в интервале $(\theta_\gamma^m-\Delta,\ \theta_\gamma^m+\Delta)$.

И выбор. медиана $\hat{m}_n^\gamma$ тоже!

Поскольку $\Delta>0$ любое ~~малое~~, получаем:

$$\hat{m}_n^\gamma \xrightarrow{P} \theta_\gamma^m,\quad n\to\infty.$$

Соотн. (β_4) доказано. Теорема 1 полностью доказана.

~~О робастности ВН оценок~~

Как находить функционал влияния в общей ситуации

Пусть оценка $\hat{\beta}_n$ ищется как корень уравнения

(7) ~~(8)~~ $$l_n(\theta) := n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) = 0.$$

Пусть выполнены следующие условия.

(i) $l_n(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma,\theta)$ при всех $|\theta-\beta|<\delta$, $0\le\gamma<\gamma_0$. ~~[illegible]~~

~~[illegible] $|\gamma|<\gamma_0$~~

(ii) $\Lambda(0,\beta)=0$

(iii) Пусть $\Lambda(\gamma,\theta)$ можно продолжить на ~~[illegible]~~ отр. знач. γ так, что при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ существуют и непрерывны по паре аргументов (γ,θ) частные производные $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$.

(iv) Пусть $\lambda(\beta) := \frac{\partial\Lambda(0,\beta)}{\partial\theta} \neq 0.$

Теорема 2. Пусть вып. усл. (i)-(iv), и ф-ии $\varphi_t(y_n,\theta)$ непр. по θ. Тогда ур-ие (8) с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, имеет ~~[illegible]~~ при дост. малых γ такое решение $\hat{\beta}_n$, что соответствующая оценка $\tilde{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, $\theta_0=0$, и существует функционал влияния

$$\boxed{IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = -(\lambda(\beta))^{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\Lambda(0,\beta).}$$

Док-во Теоремы 2

Шаг 1) Рассмотрим уравнение $\Delta(\gamma,\theta)=0$

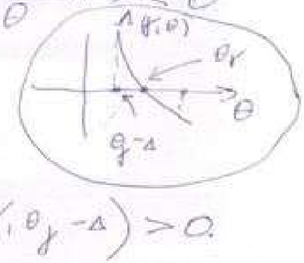
Для функции $\Delta(\gamma,\theta)$ при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ выполнены все условия Теоремы о существовании неявной функции. Поэтому в некоторой окрестности точки $(0,\beta)$ существует ф-ия $\theta(\gamma)=\theta_\gamma$ такая, что:

1) $\Delta(\gamma,\theta_\gamma)\equiv 0$; 2) ф-ия θ_γ непрерывна по γ, причем ~~часть~~ $\theta_\gamma\to\theta_0=\beta$ при $\gamma\to 0$; 3) θ_γ непрерывно дифференцируема по γ и $\boxed{\left.\frac{d\theta_\gamma}{d\gamma}\right|_{\gamma=0}=-(\lambda(\beta))^{-1}\frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\gamma}}$

Шаг 2) Покажем, что с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, существует такое решение $\hat\beta_n$ ур-ия (7), что $\hat\beta_n\xrightarrow{P}\theta_\gamma$, $n\to\infty$, для малых $\gamma\geq 0$.

Пусть для определенности $\lambda(\beta)=\frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\theta}<0$.

Т.к. $\frac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ непрерывна по паре (γ,θ), то при малых $\gamma\geq 0$ и θ вблизи β $\frac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}<0$



Значит, при малом $\Delta>0$

(8) ~~(9)~~ $n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\psi_t(y_n,\theta_\gamma-\Delta)\xrightarrow{P}\Delta(\gamma,\theta_\gamma-\Delta)>0.$

Тогда левая часть (8) больше нуля на мн-ве

S_{1n}^{Δ}, и $P(S_{1n}^{\Delta}) \to 1$, $n \to \infty$. Т.е.

$P(S_{1n}^{\Delta}) \geq 1-\delta/2$ для $n > n_0$ при любом $\delta > 0$.

Аналогично,

(9) ~~(10)~~ $$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma + \Delta) \xrightarrow{P} \Delta(\gamma, \theta_\gamma + \Delta) < 0.$$

Т.е. левая часть (10) меньше нуля на мн-ве S_{2n}^{Δ}, $P(S_{2n}^{\Delta}) \geq 1-\delta/2$, $n > n_0$.

Получаем: на мн-ве $S_n^{\Delta} = S_{1n}^{\Delta} \cdot S_{2n}^{\Delta}$ таком, что $P(S_n^{\Delta}) \geq 1-\delta$, $n > n_0$, вып. одновр. нер-ва:

$$\begin{cases} n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma - \Delta) > 0 \\ n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma + \Delta) < 0 \end{cases}$$

Т.к. ф-ия $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta)$ непрерывна по θ, то $\forall \omega \in S_n^{\Delta}$ в инт. $(\theta_\gamma - \Delta, \theta_\gamma + \Delta)$ есть корень $\hat{\beta}_n^{\Delta}$.

Пусть $S_n = \{\omega:$ ур-ие ~~(8)~~ (7) имеет решение$\}$.

Тогда $P(S_n) \geq P(S_n^{\Delta}) \geq 1-\delta$, $n > n_0$.

$\boxed{\text{Т.е. } P(S_n) \to 1,\ n \to \infty.}$

Пусть $\hat{\beta}_n$ - ближайший к θ_γ корень ур-ия ~~(8)~~ (7)

Тогда

$$P\left(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta,\ S_n\right)\ge P\left(|\hat\beta_n^\Delta-\theta_\gamma|\le\Delta,\ S_n^\Delta\right),$$

т.к. $\left(\omega: |\hat\beta_n^\Delta-\theta_\gamma|\le\Delta\right)\in\left(\omega: |\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta\right)$, $S_n^\Delta\subseteq S_n$.

Но $P\left(|\hat\beta_n^\Delta-\theta_\gamma|\le\Delta,\ S_n^\Delta\right)=P(S_n^\Delta)>1-\delta$, $n>n_0$

т.е. $\boxed{P\left(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta,\ S_n\right)\to 1,\ n\to\infty,}$

<u>Шаг 3</u> Пусть $\tilde\beta_n=\begin{cases}\hat\beta_n, & \omega\in S_n,\\ \text{любое } \beta', & \omega\notin S_n.\end{cases}$

оценка

$\tilde\beta_n$ – оценка, соответствующая $\hat\beta_n$. Покажем, что

$$\tilde\beta_n\xrightarrow{P}\theta_\gamma,\ n\to\infty.$$

Имеем: $P\left(|\tilde\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta\right)=P\left(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta,\ S_n\right)+$

$+P\left(|\beta'-\beta|\le\Delta,\ \bar S_n\right)\ge P\left(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta,\ S_n\right)\to 1,\ n\to\infty$

Итак, $\boxed{\begin{array}{l}\tilde\beta_n\xrightarrow{P}\theta_\gamma,\quad \theta_0=\beta,\\ IF(\theta_\gamma,\mu_\xi)=-(\lambda(\beta))^{-1}\dfrac{\partial\Delta(\theta,\beta)}{\partial\gamma}\end{array}}$

Теорема 2 полностью доказ.

<u>~~Пример~~ Задача</u>

$$\begin{cases}u_t=a+\varepsilon_t\\ y_t=u_t+z_t^\gamma\xi_t\end{cases}$$

$E\xi_t=0$, $\xi_t\sim g(x)$ п.н.в., $g(x)=g(-x)$. Оценка θ – корень ур-ия

$$\cancel{\sum_{t=1}^{n}\left[\Phi(y_t-\theta)-1/2\right]=0}$$

$\Phi(x)$ – ф.р. $N(0,1)$

Пример (М-оценка медианы)

Пусть $\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t \end{cases}$, $\{\varepsilon_t\}$ - нор, $\varepsilon_1 \sim g(x) = G'(x)$, $g(x) = g(-x)$.

Тогда a - медиана ф.р. сл.в. u_1.

Будем искать оценку a (обозначим её $\hat{a}_n$) как корень ур-ния

(10) (9) $$\sum_{t=1}^{n} \psi(y_t - \theta) = 0$$

Такая оценка называется М-оценкой. В частности, при $\psi(x) = x$ $\hat{a}_n = \bar{y}$; при $\psi(x) = \operatorname{sign} x$ $\hat{a}_n = \hat{m}_n$.

Пусть выполнены условия:

(i) $\psi(x)$ - нечётная строго возрастающая ф-ия, $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = c_1 > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x) = c_2 < \infty$

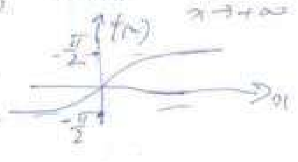
(ii) Существует непрерывная и ограниченная $\psi'(x)$, $E\psi'(\varepsilon_1) \neq 0$

Тогда ур-ние (10) всегда имеет и притом ед. решение.

Условия (i)-(ii) выполнены, например, для

$\psi(x) = \operatorname{arctg} x$, здесь $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x) = -\frac{\pi}{2}$,

$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



Найдем ф-ию влияния и чувствительность М-оценки. Используем Теорему 2.

Проверим и условия.

(i) $n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\psi(y_t-\theta)\xrightarrow{P} E\psi(y_1-\theta)=:\Lambda(\gamma,\theta)$

при всех θ и $0\le\gamma\le 1$

Введем гипотезы $H_1=(z_1^\gamma=0)$, $H_2=(z_1^\gamma=1)$.

Тогда $\Lambda(\gamma,\theta)=\sum_{i=1}^{2}E\big(\psi(\underbrace{\varepsilon_1+a+z_1^\gamma\xi_1}_{=y_1}-\theta)/H_i\big)\times P(H_i)=$

$=(1-\gamma)\,E\psi(\varepsilon_1+a-\theta)+\gamma\,E\psi(\varepsilon_1+\xi_1+a-\theta)$.

(ii) $\Lambda(0,a)=E\psi(\varepsilon_1)=0$, т.к.

(ii) ф-ия $\Lambda(\gamma,\theta)$ опред. при всех γ и θ;

частные производные $\dfrac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$ и $\dfrac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$

существуют при условиях (i)–(i) и непр. по паре (γ,θ). В частности,

$$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\gamma}=-\underbrace{E\psi(\varepsilon_1)}_{=0}+E\psi(\varepsilon_1+\xi_1)=$$

$=E\psi(\varepsilon_1+\xi_1)$. т.к. $\psi(x)$ - неч., а $g(x)$ - чётн.

(iii) $\dfrac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\theta}=-E\psi'(\varepsilon_1)\neq 0$.

В силу Теоремы 2 $\hat a_n\xrightarrow{P}\theta_\gamma$, $\theta_0=a$,

$$IF(\theta_\gamma,\mu_\xi)=\frac{E\psi(\varepsilon_1+\xi_1)}{E\psi'(\varepsilon_1)},$$

$$BES(\theta_\gamma,M_\xi)\le\frac{\max\{|c_1|,|c_2|\}}{E\psi'(\varepsilon_1)}<\infty,$$ M_ξ - класс всех вер. распр.

С.к. «Знаковый анализ линейных моделей»

Раздел 1. Введение во временные ряды

Пусть S_t, $t=0,1,\dots$ — стоимости ценных бумаг в момент времени t. Введем логарифмические приращения $u_t := \ln S_t/S_{t-1} = \ln S_t - \ln S_{t-1}$.

Для описания динамики посл. $\{u_t\}$ используют различные стохастические разностные ур-ия.

Вот простейшие примеры.

AR(1) ~~-мое~~ уравнение:

~~(1)~~ $$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots; \quad \beta \in R^1,$$

$\{\varepsilon_t\}$ — н.о.р. сл.в., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < D\varepsilon_1 = \sigma^2 < \infty$.

Начальное значение u_0 от $\{\varepsilon_t\}$ не зависит, $Eu_0 = 0$, $Eu_0^2 < \infty$. Обычно параметры β, σ^2 и распределение ε_1 неизвестны.

ARCH(1) уравнение (Engle (1992)):

~~(2)~~ $$u_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2, \quad t=1,2,\dots;$$

$\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$; $\{\varepsilon_t\}$ — н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$, нач. знач. u_0 как в ~~(1)~~ AR(1); парам. α_0 и α_1 неизв.

Обратимся к AR(1) модели ~~из (1)~~.

Метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов в авторегрессии

AR(1)-модель

(1) $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots$; $u_0 = 0$, $\beta \in \mathbb{R}^1$,

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в., $E\varepsilon_t = 0$, $0 < E\varepsilon_t^2 < \infty$.

Тогда $u_t = \beta(\beta u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} =$

$= \dots = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \dots + \beta^{t-1}\varepsilon_1$

① Стационарный случай $|\beta| < 1$

$u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} u_t^0 := \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$ и ряд с.к. сходится, т.к.

$$E(u_t - u_t^0)^2 = E\Big(\sum_{j \geq t} \beta^j \varepsilon_{t-j}\Big)^2 = E\varepsilon_1^2 \sum_{j \geq t} \beta^{2j} = O(\beta^{2t}) = o(1),\ t \to \infty$$

② Критический случай (нестационарный) когда $|\beta| = 1$

③ Взрывающаяся авторегрессия $|\beta| > 1$

$$Du_t = D\sum_{j=0}^{t-1} \beta^j \varepsilon_{t-j} = E\varepsilon_1^2 \sum_{j=0}^{t-1} \beta^{2j} = \frac{E\varepsilon_1^2(1-\beta^{2t})}{1-\beta^2} =$$

$= O(\beta^{2t}) \to \infty$ при $t \to \infty$ эксп. быстро.

Что известно: оптимальный с.к. прогноз u_{n+1} по $u_1, \dots, u_n$ есть $\hat{u}_{n+1} = \beta u_n$. Т.е. $\hat{u}_{n+1}$ – решение задачи $E(u_{n+1} - f(u_1, \dots, u_n))^2 \to \min_{f}$

Надо уметь оценивать β!

[illegible]

Пусть $\varepsilon_1 \sim f(x)$. Положим $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$

Тогда: (1) $\varepsilon = BU$,

(2) $\underline{U = B^{-1}\varepsilon}$

Пл. в. вектора ε есть $g_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i)$

Тогда пл. вер. вектора U есть в силу (2)

$$g_U(y, \beta) = \frac{1}{|\det(B^{-1})|} g_\varepsilon(By) = \left(By = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \beta y_1 \\ \vdots \\ y_n - \beta y_{n-1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \prod_{t=1}^{n} g(y_t - \beta y_{t-1}), \text{ где } y = (y_1, \ldots, y_n),\ y_0 = 0.$$

О.м.п. для β — решение задачи

(3) $$\ln g_U(U, \beta) = \sum_{t=1}^{n} \ln g(u_t - \beta u_{t-1}) \to \max_{\beta \in R^1}$$

Для гладкой g уравнение макс. правд.

(4) $$\sum_{t=1}^{n} u_{t-1} \frac{g'(u_t - \beta u_{t-1})}{g(u_t - \beta u_{t-1})} = 0.$$

Пример 1. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Тогда $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}$, и задача (3) имеет вид

$$\sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(u_t - \beta u_{t-1})^2}{2\sigma^2}} \to \max_{\beta \in R^1}$$

Последняя задача экв. следующей:

(5) $$\sum_{t=1}^{n} (u_t - \beta u_{t-1})^2 \to \min_{\beta \in R^1}$$

Решение (5) — о.м.п.

(6) $$\hat{\beta}_{n,ML} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 .$$

Если мы не предполагаем гаусс. ε_1, то решение задачи (5) есть о.н.к.

(7) $$\hat{\beta}_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2$$

Оценка $\hat{\beta}_{n,ML}$ — параметрическая, а $\hat{\beta}_{n,LS}$ — непараметрическая!

Пример 2. $\varepsilon_1 \sim Lap(\lambda)$.

Тогда $g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$, $\lambda > 0$.

Задача (5) имеет вид

$$\sum_{t=1}^{n} \ln \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |u_t - \theta u_{t-1}|} \to \max_{\theta \in R^1},$$

что экв. задаче

(8) $$\sum_{t=1}^{n} |u_t - \theta u_{t-1}| \to \min_{\theta \in R^1}$$

Решение (8) — о.м.п. $\hat{\beta}_{n,ML}$.

Если распр. ε_1 неизв., то реш. (8) — о.н.м. $\hat{\beta}_{n,LD}$.

Рассмотрим случай гауссовских $\{\varepsilon_t\}$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

Пусть
$$d_n^2(\beta) := \begin{cases} \frac{n}{1-\beta^2}, & |\beta|<1, \\ n^2/2, & |\beta|=1, \\ \beta^{2n}/(\beta^2-1)^2, & |\beta|>1. \end{cases}$$

Покажем, что $d_n^2(\beta) \sim I_n(\beta)$ при $n \to \infty$, где $I_n(\beta)$ – информация Фишера о парам. β, содержащаяся в $u_1, \dots, u_n$. Действительно, если $U = (u_1, \dots, u_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, то пл. вер.

$$g_n(y,\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \beta y_{t-1})^2},$$

а потому

$$I_n(\beta) = E_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln g_n(U,\beta)\right)^2 = E_\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2} \times \sum_{t=1}^{n}(u_t - \beta u_{t-1})^2\right)\right)^2 = E_\beta\left(\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}(u_t - \beta u_{t-1})\right)^2 =$$
$$= E_\beta\left(\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\varepsilon_t\right)^2 = \sum_{t=1}^{n} E_\beta u_{t-1}^2 = \sum_{t=1}^{n-1} E_\beta u_t^2.$$

Но $u_t = \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j \varepsilon_{t-j}$, и

$$E u_t^2 = E\left(\sum_{j=0}^{t-1} \beta^j \varepsilon_{t-j}\right)^2 = \sum_{j=0}^{t-1} \beta^{2j} = \begin{cases} \frac{1-\beta^{2t}}{1-\beta^2}, & |\beta| \\ t, & |\beta|= \end{cases}$$

Значит,
$$I_n(\beta) = \begin{cases} \frac{n-1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2(1-\beta^{2(n-1)})}{(1-\beta^2)^2}, & |\beta| \neq 1, \\ (n-1)(1+n-1), & |\beta| = 1 \end{cases}$$

Распределение Коши с пар. (0,1) обозн. $\mathcal{K}(0,1)$, т.е. $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть $W(s)$, $s\in[0,1]$, станд. вин. процесс.
Обозначим $H(\beta)$, $|\beta|=1$, распред. сл. в.

$$\beta\,\frac{W^2(1)-1}{2^{3/2}\int_0^1 W^2(s)\,ds}.$$

$u_t=\beta u_{t-1}+\varepsilon_t$, $t=1,2,\dots$
$\beta\in R^1$, $u_0=0$

<u>Теорема 1</u>

Пусть $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р. сл.в., $\varepsilon_1\sim N(0,1)$. Тогда

$$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,\text{мн}}-\beta)\xrightarrow{d}\begin{cases}N(0,1), & |\beta|<1,\\ H(\beta), & |\beta|=1,\\ \mathcal{K}(0,1), & |\beta|>1,\end{cases}$$

при $n\to\infty$.

Док-во. $\hat\beta_{n,\text{мн}}=\sum_{t=1}^n u_{t-1}u_t\Big/\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2=$

$$=\sum_{t=1}^n u_{t-1}(\beta u_{t-1}+\varepsilon_t)\Big/\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2=\beta+\sum_{t=1}^n\varepsilon_t u_{t-1}\Big/\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2.$$

Положим для краткости

$$M_n:=d_n^{-1}(\beta)\sum_{t=1}^n\varepsilon_t u_{t-1},\quad V_n:=d_n^{-2}(\beta)\sum_{t=1}^n u_{t-1}^2.$$

Тогда $$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,\text{мн}}-\beta)=M_n/V_n.$$

Пусть $f_n(t,s)$ – совместная характеристическая функция M_n и V_n. Тогда (см. [Rao M.M. Ann.

Statist., 1978, v. 6, pp. 185–190])

$$(9)\quad f_n(t,s) \to f(t,s) = \begin{cases} \exp\{is - t^2/2\}, & |\beta|<1, \\ (1+t^2-2is)^{-1/2}, & |\beta|>1. \end{cases}$$

① $|\beta|<1$. Тогда $f(t,s)$ есть хар. ф-ия вектора $(\xi,1)^T$, где $\xi\sim N(0,1)$. Действительно,

$$\varphi(t,s) = E e^{i(t\xi+s\cdot 1)} = e^{is}\cdot\varphi_\xi(t) = e^{is-t^2/2}.$$

Теорема о наследовании слабой сходимости.

Пусть случ. вектор $S_n \xrightarrow{d} S$, $n\to\infty$, $S_n, S\in R^k$, а $H: R^k\to R^1$ борелевская ф-ия, непрерывная на мн-ве A таком, что $P(S\in A)=1$.

Тогда $H(S_n)\xrightarrow{d} H(S)$, $n\to\infty$.

У нас в силу (9) $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi,1)^T$. Если $H(x,y)=x/y$, то $H(x,y)$ непрерывна при $y\neq 0$. Можно взять $A=\{y: y>0\}$, $P((\xi,1)^T\in A)=1$. В силу теор. о наслед. слабой сходимости

$$\varphi_n(\beta)(\hat\beta_{n,MH}-\beta) = M_n/V_n = H(M_n,V_n) \xrightarrow{d} H(\xi,1)=\xi$$

ч.т.д.

② $|\beta|>1$. Тогда $f(t,s)$ есть хар. ф-ия вектора $(\xi\eta, \eta^2)^T$, где $\xi,\eta\sim N(0,1)$, ξ и η незав.

Действительно, $Ee^{it(\xi\eta)+is\eta^2} =$

$= EE\left(e^{it(\xi\eta)+is\eta^2}/\eta\right) = Ee^{is\eta^2}E\left(e^{it(\eta)\xi}/\eta\right) =$

$= Ee^{is\eta^2}e^{-t^2\eta^2/2} = Ee^{i(s+it^2/2)\eta^2} =$

$\left(Ee^{ilX_1^2} = (1-2il)^{-1/2}\right) = (1-2is+2t^2/2)^{-1/2} =$

$= (1+t^2-2is)^{-1/2} = \varphi(t,s).$

Значит, $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$,

$d_n(\beta)(\hat{\beta}_{n,\text{мн}} - \beta) = M_n/V_n \xrightarrow{d} \xi\eta/\eta^2 = \xi/\eta \sim K(0,1)$

ч.т.

(3) Пусть $\beta=1$, случай $\beta=-1$ аналогичен.

Тогда $M_n = \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t u_{t-1}$,

$V_n = \frac{2}{n^2}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2.$

Далее, $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_t$.

Введем киферовский последовательный процесс

$w_n(s) := n^{-1/2}\sum_{i \le ns} \varepsilon_i, \quad s\in[0,1],$

$w_n(s) = 0$ при $0 \le s < 1/n$. Тогда

✓ $n^{-1/2}u_{t-1} = w_n\left(\frac{t-1}{n}\right)$.

Пусть $\Delta w_n\left(\frac{t}{n}\right) := w_n\left(\frac{t}{n}\right) - w_n\left(\frac{t-1}{n}\right)$ ε

Тогда $$M_n = \sqrt{2}\sum_{t=1}^{n} w_n\left(\frac{t-1}{n}\right)\Delta w_n\left(\frac{t}{n}\right),$$
$$V_n = 2\sum_{t=1}^{n} w_n^2\left(\frac{t-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

Пусть $U_n := \left(w_n\left(\frac{1}{n}\right), w_n\left(\frac{2}{n}\right), \dots, w_n\left(\frac{n}{n}\right)\right)^T$.

Тогда $U_n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}, \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\right)^T$ и это есть гауссовский вектор со средним ноль, $\operatorname{cov}\left(w_n\left(\frac{i}{n}\right), w_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \frac{\min(i,j)}{n}$.

Действительно
$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 & & 0\\ 1 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 1 & \dots\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix},$$
для $i \le j$ $\operatorname{cov}\left(w_n\left(\frac{i}{n}\right), w_n\left(\frac{j}{n}\right)\right) =$
$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_t \times \sum_{k=1}^{j}\varepsilon_k\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{t=1}^{i}\varepsilon_t\right)^2 = \frac{i}{n} = \frac{\min(i,j)}{n}.$$

Введем вектор $U = \left(w\left(\frac{1}{n}\right), w\left(\frac{2}{n}\right), \dots, w\left(\frac{n}{n}\right)\right)^T$, где $w(s)$ — стандартный винеровский.

Это гаусс. вектор со средним ноль, $\operatorname{cov}\left(w\left(\frac{i}{n}\right), w\left(\frac{j}{n}\right)\right) = \frac{\min(i,j)}{n}$. Значит,

(10) $U_n \overset{d}{=} U$, и след., $\varphi(U_n) \overset{d}{=} \varphi(U)$

для любой бор. изм. φ.

Док-во. Действ., пусть $\xi \overset{d}{=} \zeta$ для $\xi, \zeta \in R^k$. Тогда $\varphi(\xi) \overset{d}{=} \varphi(\zeta)$, т.к. $P(\varphi(\xi) \in A) = P(\xi \in \varphi^{-1}(A)) =$
$= P(\zeta \in \varphi^{-1}(A)) = P(\varphi(\zeta) \in A)$.

Пусть
$$\overline{M}_n = \sqrt{2} \sum_{t=2}^{n} w\left(\frac{t-1}{n}\right) \Delta w\left(\frac{t}{n}\right),$$
$$\overline{V}_n = 2 \sum_{t=1}^{n} w\left(\frac{t-1}{n}\right) \frac{1}{n}$$
($\overline{M}_n, \overline{V}_n$ – бор. ф-ии от W)

Из (90) следует, что (M_n и V_n – бор. ф-ии от u_n)

(91) $$\frac{M_n}{V_n} \overset{d}{=} \frac{\overline{M}_n}{\overline{V}_n}$$

Но
$$\overline{M}_n \xrightarrow{c.к.} \sqrt{2} \int_0^1 w(s)\, d w(s),$$
$$\overline{V}_n \xrightarrow{c.к.} 2 \int_0^1 w^2(s)\, ds$$

Значит, $(\overline{M}_n, \overline{V}_n)^T \xrightarrow{d} \left(\sqrt{2} \int_0^1 w(s)\, dw(s),\ 2\int_0^1 w^2(s)\, ds\right)^T$,

и, следовательно,

(92) $$\frac{\overline{M}_n}{\overline{V}_n} \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{2} \int_0^1 w(s)\, dw(s)}{2 \int_0^1 w^2(s)\, ds} = \frac{w^2(1) - 1}{2^{3/2} \int_0^1 w^2(s)\, ds}.$$

Поскольку
$$d_n(\beta)(\hat{\beta}_{МНК} - \beta) = \frac{M_n}{V_n},$$ свойс. (91)–(92)

влекут утв. теор. 9.1.7

Итак, $q_n(\beta)(\hat{\beta}_{n,MH}-\beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta|<1,\\ H(\beta), & |\beta|=1,\\ K(0,1), & |\beta|>1.\end{cases}$

Теорема 2.

Пусть $\{\xi_t\}$ — н.о.р. $N(0,1)$ сл. в. Тогда

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}\,(\hat{\beta}_{n,MH}-\beta) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0,1), & |\beta|\neq 1,\\ \hat{H}(\beta), & |\beta|=1.\end{cases}$$

здесь $\tilde{H}(\beta)$ — распр. сл. в.

$$\frac{W^2(1)-1}{2\sqrt{\int_0^1 W^2(s)ds}} = \frac{\int_0^1 W(s)dW(s)}{\sqrt{\int_0^1 W^2(s)ds}}$$

Док-во. $\sqrt{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}\,(\hat{\beta}_{n,MH}-\beta) = \frac{M_n}{\sqrt{V_n}}$,

где $M_n = d_n^{-1}(\beta)\sum_{t=1}^{n}\xi_t u_{t-1}$, $V_n = d_n^{-2}(\beta)\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2$

① $|\beta|<1$. Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi, 1)^T$, значит $M_n/\sqrt{V_n} \xrightarrow{d} \xi/\sqrt{1} \sim N(0,1)$

② $|\beta|>1$ Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} (\xi\eta, \eta^2)^T$, значит $M_n/\sqrt{V_n} \xrightarrow{d} \frac{\xi\eta}{\sqrt{\eta^2}} = \xi\cdot\operatorname{sign}\eta \sim N(0,1)$

③ $\beta=1$ Тогда $(M_n, V_n)^T \xrightarrow{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(W^2(1)-1),\, 2\int_0^1 W^2(s)ds\right)^T$

значит, $M_n/\sqrt{V_n} \xrightarrow{d} \frac{W^2(1)-1}{2\sqrt{\int_0^1 W^2(s)ds}}$. ч.т.д.

Рассмотрим стационарное AR(1) уравнение

(13) $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, $|\beta| < 1$,

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

Δ Любая последовательность $\{u_t\}$, для которой в (13) левая часть равна правой п.н., называется решением ур-ия (13)

<u>Теорема 3</u> При $|\beta| < 1$ существует п.н. единственное строго стационарное решение ур-ия (13). Оно имеет вид

(14) $u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \varepsilon_{t-j}$, ряд с.к. сходится (т.е. сходится в L^2).

Решение (14) является также стационарным в широком смысле, причем

$$Eu_t = 0, \quad R(\tau) = \mathrm{cov}(u_t, u_{t+\tau}) = \frac{\sigma^2 \beta^{|\tau|}}{1-\beta^2}.$$

Док-во. а) <u>Существование решения</u>

Пусть $u_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{n} \beta^j \varepsilon_{t-j}$ – частная сумма ряда (14). Ряд с.к. сходится, если для некот. сл.в. ξ: $E\xi^2 < \infty$, существует с.к. пред (т.е. $E|u_t^{(n)} - \xi_t|^2 \to 0, n \to \infty$). Известно, (это критерий Коши), что это с.к. сходимость эквивалентна с.к. фундаментальности, т.е. соо

$$\lim_{n,m \to \infty} E|u_t^{(n)} - u_t^{(m)}|^2 = 0.$$

Пусть для краткости $l = \min(m,n)$, $k = \max(m,$

Тогда $E|u_t^{(n)} - u_t^{(m)}|^2 = E|\sum_{j=l+1}^{k} \beta^j \varepsilon_{t-j}|^2 =$

$= \sigma^2 \sum_{j=l+1}^{k} \beta^{2j} \to 0$, т.к. $l, k \to \infty$, и $|\beta| < 1$.

Значит, ряд (14) с.к. сходится.

Имеем п.н.: $u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \beta \sum_{j \geq 1} \beta^{j-1} \varepsilon_{t-j} =$

$= \varepsilon_t + \beta \sum_{s \geq 0} \beta^s \varepsilon_{t-s-1} = \varepsilon_t + \beta u_{t-1}$.

Значит, $\{u_t\}$ из (14) есть решение (13)

Строгая стационарность

Пусть $U(\tau) = (u_{t_1+\tau}, \dots, u_{t_k+\tau})$ надо показать, что $U(\tau) \stackrel{d}{=} U(0)$. Пусть $U_n(\tau) := (u^{(n)}_{t_1+\tau}, \dots, u^{(n)}_{t_k+\tau})$.

Задача. Если $\{\xi_t\}$ - строго стац. посл., а $\eta_t = f(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-k})$ (f-бор), то

$\{u_t\}$ — строго стац. посл.

В силу этой задачи $\{u_t^{(n)}\}$ строго стационарно, т.е. распределение вектора $U_n(\tau)$ вовсе от τ не зависит. Но

(15) $\quad U_n(\tau) \xrightarrow{d} U(\tau), \ n \to \infty,$

т.к. $u_t^{(n)} \xrightarrow{с.к.} u_t$. Значит, в силу (15), распределение $U(\tau)$ от τ не зависит. ч.т.д.

<u>Единственность.</u>

Пусть $\{\tilde{u}_t\}$ — любое строго стац. решение (13).

Тогда п.н. $\tilde{u}_t = \beta \tilde{u}_{t-1} + \varepsilon_t = \overbrace{\varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta^{k-1}\varepsilon_{t-k+1}}^{u_t^{(k)}} + \beta^k \tilde{u}_{t-k}$. Имеем: $P(|\beta^k \tilde{u}_{t-k}| > \delta) = P(|\beta^k \tilde{u}_0| > \delta) \to 0, \ k \to \infty$, т.к. $|\beta| < 1$.

Знаем, что $u_t^{(k)} \xrightarrow{с.к.} u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$, $Eu_t^2 < \infty$.

Значит, $u_t^{(k)} + \beta^k \tilde{u}_{t-k} \xrightarrow{P} u_t$, для $k \to \infty$.

След., п.н. $\tilde{u}_t = \cancel{\sum_{j\geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}} = \operatorname{plim}_{k \to \infty} (u_t^{(k)} + \beta^k \tilde{u}_{t-k}) = u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$. ч.т.д.

Стационарность ...

она стац. в узком и шир. смысл. до 2-го п

Тогда из (13) $Eu_t = \beta E u_{t-1} + E\xi_t$;

$(1-\beta) E u_0 = 0$, $E u_0 = 0$.

Для $\tau > 0$ $E u_{t+\tau} u_t = \beta E u_{t+\tau-1} u_t + E\xi_{t+}$

но $E\xi_{t+\tau} u_t = E\xi_{t+\tau} E u_t = 0$, т.к. $\xi_{t+\tau}$ и

Получаем: $R(\tau) = \beta R(\tau-1)$, $R(0) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$

отсюда $R(\tau) = \frac{\sigma^2 \beta^\tau}{1-\beta^2}$, а т.к. $R(\tau)$ — четн

при любом τ $R(\tau) = \frac{\sigma^2 \beta^{|\tau|}}{1-\beta^2}$. ч.т.д.

$$E u_t^2 = \beta^2 E u_{t-1}^2 + 2\beta \underbrace{E(u_{t-1}\cdot \xi_t)}_{=0} + E\xi_t^2,$$

$$(1-\beta^2)\underbrace{E u_0^2}_{R(0)} = E\xi_0^2 = \sigma^2;$$

$$R(0) = \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}.$$

Об оценке наименьших квадратов в авторегр.

Если $\{\xi_t\}$ в AR(1) ур-ии

(16) $u_t = \beta u_{t-1} + \xi_t$, $u_0 = 0$, $t = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}^1$,

ξ_t н.о.р. $N(0,1)$ с.в., то о.м.п. – реш. задачи

(17) $$\sum_{t=1}^{n} (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}^1}$$

Если же $\{\xi_t\}$ – н.о.р. с.в. с неизв. распр., то задача (17) определяет о.н.к.

$$\hat\beta_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 .$$

О.н.к. $\hat\beta_{n,LS}$ – непараметрическая!

Теорема 4. Пусть $u_t = \beta u_{t-1} + \xi_t$, $|\beta| < 1$, $t \in \mathbb{Z}$. Если $\{\xi_t\}$ – н.о.р., $E\xi_1 = 0$, $0 < E\xi_1^2 < \infty$, то

$$n^{1/2}(\hat\beta_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 1-\beta^2), \quad n \to \infty.$$

Замечание (в схеме (16))

① Если $|\beta| = 1$, то при $E\xi_1 = 0$, $0 < E\xi_1^2 < \infty$, $\{\xi_t\}$ – н.о.р.,

$$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} H(\beta).$$

② Если $|\beta| > 1$, то в усл. п. ①

$$d_n(\beta)(\hat\beta_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{-j} \xi_j}{\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{-j} \xi_j'},$$

$\{\xi_t\}$, $\{\xi_t'\}$ – нез. посл. с нач. расп.

Действительно, если верно (2), то при $\tau=0$ получаем (3). Обратно, если верно (3), то т.к. $2|R(k+\tau)R(k-\tau)| \le R^2(k+\tau)+R^2(k-\tau)$, то (3) влечёт (2) ($\tau$ - фикс.!)

Получили: если $\{u_t\}$ - стац. гаусс. посл., то $\hat{R}_n(\tau) \xrightarrow{CK} R(\tau) \Leftrightarrow n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} R^2(k) \to 0$

Дост. усл. $R(k)\to 0$ при $k\to\infty$.

Видим, что надо уходить в класс строго стац. посл.!

Замечания о последовательностях с сильным перемешиванием (с.п.)

1. Пусть $\{u_t\}$, $t\in\mathbb{Z}$, строго стацион. посл.

Если $\alpha(\tau) := \sup_{A\in M_{-\infty}^{0},\ B\in M_{\tau}^{\infty}} |P(AB)-P(A)P(B)| \to 0$ при $\tau\to\infty$,

то $\{u_t\}$ удовл. условию сильного перемешивания с коэффициентом пер. $\alpha(\tau)$.

Здесь $M_a^b = \sigma\{u_t,\ a\le t\le b\}$.

Примеры.

*/ $\{\xi_t\}$ - н.о.р. сл.в. Здесь $\alpha(\tau)=0$ при $\tau>0$.

*/ $u_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р.

Здесь $\alpha(\tau) = 0$ при $\tau > q$.

*/ $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р.

ε_1 имеет Лебегову пл.в., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 < \infty$,

(1988) ∃ стр. стац. реш.

Маккален: ∀ $\{u_t\}$ уд. сем. с.п. с $\alpha(\tau) \le c\lambda^\tau$, $0 < \lambda < 1$

Задача. Если $\{u_t\}$ уд. с.п. с коэфф $\alpha(\tau)$, а $z_t = f(u_t, u_{t-1}, \ldots, u_{t-k})$, то $\{z_t\}$ уд. с.п. с $\alpha_z(\tau) \le \alpha(\tau - k)$, $\tau > k$

3.6.4

Если $\{u_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, строго стац. посл. с с.п., $E|u_1| < \infty$, то $n^{-1} \sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{п.н.} Eu_1$, $n \to \infty$.

Ц.П.Т. (Ибрагимов, Линник. Незав. и стац. св. сл. вел. М., Наука, Т 18.5.3)

Пусть $\{u_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, стр. стац. посл. с с.п., $Eu_1 = 0$, $E|u_1|^{2+\delta} < \infty$ при нек. $\delta > 0$. Пусть $\sum_{\tau \ge 1} (\alpha(\tau))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$

Тогда:

① Ряд $\Delta^2 := Eu_0^2 + 2\sum_{\tau \ge 1} Eu_0 u_\tau$ абс. сход.

② Если $\Delta > 0$, то $n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2)$.

Следствие.

Если $\{u_t\}$ уд. с.п., $Eu_1 = m$, $E|u_1 - m|^{2+\delta} < \infty$, $\sum_{\tau \ge 1} (\alpha(\tau))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$, $\tilde{\Delta}^2 = Du_0 + 2\sum_{\tau \ge 1} R(\tau)$, то при $\tilde{\Delta} > 0$

$$\sup_x \left| P\left(n^{1/2}(\bar{u} - m) \le x\right) - \Phi(x/\tilde{\Delta}) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Док-во Теоремы 3. Предположим дополнительно, что $E|\varepsilon_1|^{2+\delta}<\infty$ при некотором $\delta>0$. Пусть еще существует пл. вер. $\varepsilon_1 \sim g(x)$ по мере Лебега.

1) При $|\beta|<1$ сущ. строго стационарное решение ур-ия AR(1), оно имеет вид $u_t=\sum\limits_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$ и ряд с.к. сходится (т.е. сход. в L^2). Покажем, что этот ряд сходится в $L^{2+\delta}$ и, значит, $E|u_1|^{2+\delta}<\infty$.

Справедливо нер-во Минковского:

если $E|\xi|^{2+\delta}<\infty$, $E|\eta|^{2+\delta}<\infty$ при $\delta>0$, то

$$\{E|\xi+\eta|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)} \leq \{E|\xi|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}+\{E|\eta|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}$$

(это нер-во треуг.)

Рассмотрим частичную сумму $S_n=\sum\limits_{j=0}^{n}\beta^j\varepsilon_{t-j}$.

$$\{E|S_n-S_m|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}=\Big\{E\Big|\sum_{j=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}\beta^j\varepsilon_{t-j}\Big|^{2+\delta}\Big\}^{1/(2+\delta)}\leq$$

$$\leq\sum_{j=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}\{E|\beta^j\varepsilon_{t-j}|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}=\left(E\{|\varepsilon_1|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)}\right)\sum_{j=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)}|\beta|^j\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0,$$

при $|\beta|<1$

Значит, посл. $\{S_n\}$ частичных сумм фундаментальна, и ряд $u_t=\sum\limits_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$ сход. в $L^{2+\delta}$, $E|u_1|^{2+\delta}<\infty$.

2) $\hat\beta_{n,LS}=\sum\limits_{t=1}^{n}u_{t-1}u_t\Big/\sum\limits_{t=1}^{n}u_{t-1}^2\overset{\text{п.н.}}{=}\beta+\sum\limits_{t=1}^{n}u_{t-1}\varepsilon_t\Big/\sum\limits_{t=1}^{n}u_{t-1}^2$,

$$n^{1/2}(\hat\beta_{n,LS}-\beta)=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}\varepsilon_t\Big/\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}^2.$$

3) Ввиду рез-ов Мокканен (1988)

посл. $\{u_t\}$ удовл. усл. с.п. с коэффициентом $\alpha(\tau) \le C\lambda^\tau$, $0<\lambda<1$.

Посл. $\{\varepsilon_t u_{t-1} = \underbrace{(u_t - \beta u_{t-1})\, u_{t-1}}_{= f(u_t,\, u_{t-1})}\}$ тоже уд. усл. с.п. с эксп. убыв. коэфф. $\alpha'(\tau) \le c'\lambda^\tau$,

$$\sum_{\tau\ge1} \left(\alpha'(\tau)\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \le \sum_{\tau\ge1} \left(c'\lambda^\tau\right)^{\delta/(2+\delta)} = \frac{(c')^{\frac{\delta}{2+\delta}}\lambda^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{1-\lambda^{\frac{\delta}{2+\delta}}} < \infty$$

$E\varepsilon_t u_{t-1} = E\varepsilon_t E u_{t-1} = 0$; $E|\varepsilon_t u_{t-1}|^{2+\delta} = E|\varepsilon_1|^{2+\delta} E|u_1|^{2+\delta} < \infty$

В силу ц.п.т. для посл. с с.п.

$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t u_{t-1} \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2),$$

где $\Delta^2 = E(\varepsilon_1 u_0)^2 + 2\sum_{\tau\ge1} \underbrace{E(\varepsilon_1 u_0\, \varepsilon_{1+\tau} u_\tau)}_{=0} = E\varepsilon_1^2 \cdot E u_0^2$

4) $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 \xrightarrow{п.н.} Eu_0^2$ в силу З.Б.Ч. для посл. с с.п.

5) Значит $n^{1/2}(\hat\beta_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} \frac{1}{Eu_0^2} N(0, E\varepsilon_1^2 Eu_0^2)$.

Пред. дисп. есть $E\varepsilon_1^2 Eu_0^2 / (Eu_0^2)^2 = E\varepsilon_1^2 / Eu_0^2 = 1-\beta^2$

ч.т.д. Теор. 3 док.

Вот два важных вопроса:

① Как построить непараметрические оценки, асимптотически гауссовские, с не меньшей ас. дисперсией, чем у о.н.к?

② Будет ли оценка н.к. $\hat\beta_{n,LS}$ ~~Как строить робастные оценки~~ робастной? В-робастной?

Асимптотические доверительные интервалы

В силу теоремы 4 $\frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\hat{\beta}^2_{n,LS}}} =$

$$= \frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\hat{\beta}^2_{n,LS}}} \xrightarrow{d} N(0,1),\ n\to\infty,$$

т.к. $\frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$, $\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\hat{\beta}^2_{n,LS}}} \xrightarrow{P} 1$,

и применима лемма Слуцкого. Пусть $\xi_{1-\alpha/2}$ - квантиль уровня $1-\alpha/2$ ф.р. $\Phi(x) \sim N(0,1)$.

Тогда $P\left(\left|\frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\hat{\beta}^2_{n,LS}}}\right| < \xi_{1-\alpha/2}\right) \to 1-\alpha,\ n\to\infty$.

Т.е. при больших n приближенно с вер. $1-\alpha$

$$\hat{\beta}_{n,LS} - \frac{\sqrt{1-\hat{\beta}^2_{n,LS}}}{\sqrt{n}}\xi_{1-\alpha/2} < \beta < \hat{\beta}_{n,LS} + \frac{\sqrt{1-\hat{\beta}^2_{n,LS}}}{\sqrt{n}}\xi_{1-\alpha/2}.$$

Получили довер. инт. для β ас. ур-ня $1-\alpha$.

Проверка гипотез

Проверим гип. $H_0: \beta=\beta_0$ против альт. $H_1: \beta\neq\beta_0$.

Крит. мн-во (критерий) $S_\alpha = \{u_0,\dots,u_n: \left|\frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\right| > \xi_{1-\alpha/2}\}$. Тогда, очевидно, $P(H_1|H_0) \to \alpha$, а т.к. при H_1 $\frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} =$

$$= \frac{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS}-\beta)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \frac{n^{1/2}(\beta-\beta_0)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \xrightarrow{P} \infty,\ n\to\infty,$$ то

$P(H_0/H_1)\to 0$. Значит,

$$\begin{cases} P(H_0/H_0)\to 1-\alpha, \\ P(H_1/H_1)\to 1,\ n\to\infty. \end{cases}$$

Вер. принять прав. гип. близка к единице!

<u>О робастности о.н.к.</u>

$u_t=\beta u_{t-1}+\varepsilon_t$, $t\in\mathbb{Z}$, $|\beta|<1$, $\{\varepsilon_t\}$ — н.о.р., $E\varepsilon_1=0$, $0<E\varepsilon_1^2<\infty$. Пусть наблюдаются

$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t$, $t=0,1,\dots,n$; $\{u_t\}$ — стац. р., $\{z_t^\gamma\}$ — н.о.р., $z_1^\gamma \sim Bi(\gamma)$ и $0\le\gamma\le 1$; $\{\xi_t\}$ — н.о.р., $\xi_1\sim\mu_\xi$, $\mu_\xi\in M_2$, т.е. $E\xi_1^2<\infty$;

посл. $\{u_t\}$, $\{z_t^\gamma\}$, $\{\xi_t\}$ независимы между собой.

Пусть $\hat{\beta}^y_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}y_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2$

— о.н.к., построенная по засоренным данным $\{y_t\}$. Найдем ее функционал влияния.

<u>Первый способ.</u> Предп. дополнительно, что у ε_1 существует плотность вероятн. $g(x)=G'(x)$.

Тогда посл. $\{u_t\}$ удовлетворяет условиям с.п., а т.к. $\{z_t^\gamma \xi_t\}$, $t\in\mathbb{Z}$, — посл. н.о.р. сл.в., кото

15:27

Image (54).jpg

рие не зависит от $\{u_t\}$, то $\{y_t\}$ – строго стационарная последовательность с с.п.

Кроме того, $E|y_1|^2 < \infty$, т.к. $Ey_1^2 =$
$= E(u_1 + z_1^\gamma \xi_1)^2 = Eu_1^2 + 2\underbrace{Eu_1}_{0} \cdot Ez_1^\gamma \cdot E\xi_1 +$
$+ E(z_1^\gamma \xi_1)^2 = Eu_1^2 + \gamma E\xi_1^2 < \infty$

Значит, в силу 3.6.4 для посл. с с.п. имеем:

$$\hat{\beta}^y_{n,LS} = \frac{n^{-1}\sum_{t=1}^n y_{t-1} y_t}{n^{-1}\sum_{t=1}^n y_{t-1}^2} \xrightarrow{P} \theta_\gamma^{LS} = \frac{Ey_0 y_1}{Ey_0^2} =$$

$$= \frac{E(u_0 + z_0^\gamma \xi_0)(u_1 + z_1^\gamma \xi_1)}{E(u_0 + z_0^\gamma \xi_0)^2} = \frac{Eu_0 u_1 + \gamma^2 (E\xi_0)^2}{Eu_0^2 + \gamma E\xi_0^2}.$$

Отсюда $IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\xi) = \frac{d\theta_\gamma^{LS}}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0} = -\beta(1-\beta^2)\frac{E\xi_0^2}{E\xi_1^2}$

Если M_2 – мн-во распределений с кон. 2-ым моментом, то (при $\beta \neq 0$) $GES(\theta_\gamma^{LS}, M_2) = \sup_{\mu_\xi \in M_2} |IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\xi)| = \infty$. О.н.к. неробастна! $\boxtimes$

Второй способ.

Предположим опять, что ξ_1 имеет пл. вер. (лебегову) $g(x)$. Тогда, как говорилось, посл. $\{y_t\}$ удовл. усл. с.п.

Оценка $\hat{\beta}^y_{n,LS}$ – корень уравнения

$$\ell_{n,LS}(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^n y_{t-1}(y_t - \theta y_{t-1}) = 0.$$

15:27

Image (55).jpg

(i') $l_{n,LS}(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}(y_t - \theta y_{t-1}) \to E y_0 (y_1 - \theta y_0)$,

θ - любое, $0 \le \gamma \le 1$

т.е. $\Lambda_{LS}(\gamma, \theta) = E y_0 (y_1 - \theta y_0)$.

Пусть $H_{00} = (z_0^\gamma = 0,\ z_1^\gamma = 0)$, $H_{01} = (z_0^\gamma = 0,\ z_1^\gamma = 1)$, $H_{10} = (z_0^\gamma = 1,\ z_1^\gamma = 0)$, $H_{11} = (z_0^\gamma = 1,\ z_1^\gamma = 1)$

Тогда $\Lambda_{LS}(\gamma, \theta) = \sum_{i,j=0}^{1} E\left(y_0 (y_1 - \theta y_0) / H_{ij}\right) P(H_{ij}) =$

$= (1-\gamma)^2 E u_0 (u_1 - \theta u_0) + (1-\gamma)\gamma E u_0 (u_1 + \xi_1 - \theta u_0) +$

$+ \gamma (1-\gamma) E (u_0 + \xi_0)(u_1 - \theta u_0 - \theta \xi_0) +$

$+ \gamma^2 E (u_0 + \xi_0)(u_1 + \xi_1 - \theta u_0 - \theta \xi_1)$

значит, ф-ия $\Lambda_{LS}(\gamma, \theta)$ определена при всех γ и θ.

(ii) $\Lambda_{LS}(0, \beta) = E u_0 (u_1 - \beta u_0) = E u_0 \eta_1 = 0$.

(iii) $\frac{\partial \Lambda_{LS}(\gamma, \theta)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \Lambda_{LS}(\gamma, \theta)}{\partial \theta}$ сущ. и непр. по паре (γ, θ) при $\gamma \in R^1$, $\theta \in R^1$

$\frac{\partial \Lambda_{LS}(0, \beta)}{\partial \gamma} = -\beta E \xi_0^2$, $\frac{\partial \Lambda_{LS}(0, \beta)}{\partial \theta} = -E u_0^2$.

(iv) $\lambda(\beta) = -E u_0^2 = -\frac{E \eta_1^2}{1-\beta^2} < 0$

т.к. $\psi_t(y_n, \theta)$ непр., то

$$IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_\gamma) = -\left(\frac{\partial \Lambda_{LS}(\theta,\beta)}{\partial \theta}\right)^{-1} \frac{\partial \Lambda_{LS}(\theta,\beta)}{\partial \gamma} =$$

$$= \left(-\beta E \xi_0^2\right) / \left(-\frac{E\eta_1^2}{1-\beta^2}\right) = \boxed{-\beta(1-\beta^2) \cdot \frac{E\xi_0^2}{E\eta_1^2}}$$

Очевидно, при $\beta \neq 0$

$GES(\theta_\gamma^{LS}, M_2) = \infty$, т.е. $\hat{\beta}_{n,LS}^{J}$ не В-роб.

Задача

$u_t = \beta u_{t-1} + \eta_t$, $t \in \mathbb{Z}$, $|\beta| < 1$; $\{\eta_t\}$ - н.о.р.,

$E\eta_1 = 0$, $0 < E\eta_1^2 < \infty$. $\beta \neq 0$

$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t$.

Оценка $\hat{\beta}_n$ ищется как корень ур-ия

$$\sum_{t=1}^{n} y_{t-2}(y_t - \theta y_{t-1}) = 0$$

1) Будет ли оценка $\hat{\beta}_n$ В-робастной?

2) Чему равен функционал влияния 2-го порядка?

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z},\ |\beta| < 1,$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$.

Наблюдения – $u_0, u_1, \dots, u_n$, $u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \varepsilon_{t-j}$.

О.н.к. для β

$$\hat\beta_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2$$

Известно, что (Теорема 4)

1) $n^{1/2}(\hat\beta_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 1-\beta^2)$, $n \to \infty$.

2) Если $\begin{cases} y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t \\ u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \end{cases}$ $E\xi_1^2 < \infty$ то для

$$\hat\beta^y_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} y_{t-1} y_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2, \quad \hat\beta^y_{n,LS} \xrightarrow{P} \theta_y^{LS},$$

функционал влияния

$$IF(\theta_y^{LS}, \mu_\xi) = -\beta(1-\beta^2)\frac{E\xi_1^2}{E\varepsilon_1^2},$$

при $\beta \neq 0$ $GES(\theta_y^{LS}, M_2) = \infty$.

Оценка н.к. на M_2 не В-робастна!

Две задачи:

① В схеме без засорений построить оценки ас. более эффективные, чем о.н.к.

② В схеме засорений Мартина-Йохаи построить в AR-модели В-робастные оценки.

Возможный вариант решения этих задач –

– ВМ-оценки.

$$l_n(\theta) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi(u_t - \theta u_{t-1})$$

$$l_n(\beta + n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t - n^{-1/2}\tau u_{t-1}).$$

В силу ф-лы Тейлора (пишем разл. до 2-го члена)

$$l_n(\beta + n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_t \varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) -$$

$$- n^{-1}\tau \sum_t \varphi(u_{t-1})\psi'(\varepsilon_t)u_{t-1} + \frac{1}{2} n^{-3/2}\tau^2 \sum_t \varphi(u_{t-1}) u_{t-1}^2 \psi^{(2)}(\eta_t),$$

$\eta_t \in (\varepsilon_t,\ \varepsilon_t - n^{-1/2}\tau u_{t-1})$

<u>Условие (i).</u>

Функции $\varphi, \psi, \psi', \psi^{(2)}$ ограничены.

<u>Условие (ii)</u>

$$E\psi(\varepsilon_1) = 0, \quad E(\varphi(u_1)u_1)E\psi'(\varepsilon_1) \neq 0$$

1) При условии (i)

$$\sup_{|\tau| \le \Theta} \left| \frac{1}{2} n^{-3/2}\tau^2 \sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1}) u_{t-1}^2 \psi^{(2)}(\eta_t) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} n^{-1/2}\Theta^2 \sup_x |\varphi(x)| \sup_x |\psi^{(2)}(x)|\, n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2 =$$

$$= o_p(1),\ n \to \infty$$

2) $$n^{-1}\tau \sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi'(\varepsilon_t)u_{t-1} = \tau E(\varphi(u_1)u_1) \times$$

$$\times E\psi'(\varepsilon_1) + o_p(1),\ n \to \infty,$$ равномерно по $|\tau| \le \Theta$

в силу 35.4 для последоват. с с.п.

3) $n^{-1/2}\sum\limits_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) \xrightarrow{d} N\left(0, E\varphi^2(u_1)E\psi^2(\varepsilon_1)\right)$, $n\to\infty$

4) итак, $l_n(\beta+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum \varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) +$

$+\tau E(\varphi(u_1)u_1)\cdot E\psi'(\varepsilon_1) + o_p(1)$, $n\to\infty$,

равномерно по $|\tau|\le C$.

5) В силу 4) $\exists$ $A>0$ для $E(\varphi(u_1)u_1)E\psi'(\varepsilon_1)>0$

$l_n(\beta\pm n^{-1/2}A) = n^{-1/2}\sum\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t)\pm$

$A E(\varphi(u_1)u_1)E\psi'(\varepsilon_1) \gtrless 0$, $n>n_0$

с вер., сколь угодно близкой к единиц.

Т.е. ур-ние $l_n(\theta)=0$ имеет реш. $\hat\beta_n$ в инт.

$(\beta-n^{-1/2}A, \beta+n^{-1/2}A)$ с вер., близк. к ед.

Ясно, что $n^{1/2}(\hat\beta_n-\beta)=O_p(1)$, $n\to\infty$

6) из 4) и (6) след.:

$0 = l_n(\hat\beta_n) = n^{-1/2}\sum\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) + n^{1/2}(\hat\beta_n-\beta)\times$

$\times E(\varphi(u_1)u_1)\cdot E\psi'(\varepsilon_1) + o_p(1)$, $n\to\infty$

7) из (6)

$$n^{1/2}(\hat\beta_n-\beta) = \frac{1}{E(\varphi(u_1)u_1)E\psi'(\varepsilon_1)}\, n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) + o_p(1)$$

$\xrightarrow{d} N(0, \sigma^2_{BH}(\varphi,\psi))$,

$\sigma^2_{BH}(\varphi,\psi) = E\varphi^2(u_1)E\psi^2(\varepsilon_1)\,/\,\{E(\varphi(u_1)u_1)E\psi'(\varepsilon_1)\}^2$

Теорема 5

При условиях (i)–(ii) ур-ие $l_n(\theta)=0$ с вероятн., стремящейся к единице при $n\to\infty$, имеет такое решение $\hat{\beta}_{n,BM}$, что

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,BM}-\beta)\xrightarrow{d} N(0,\sigma^2_{BM}(\varphi,\psi)),\quad n\to\infty,$$

где

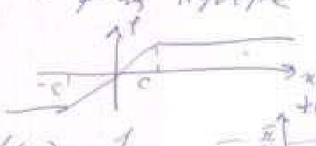
$$\sigma^2_{BM}(\varphi,\psi)=\frac{E\varphi^2(u_1)\,E\psi^2(\varepsilon_1)}{\{E(\varphi(u_1)u_1)\,E\psi'(\varepsilon_1)\}^2}.$$

Задача

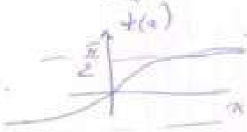
Проверить, что задача $\sigma^2_{BM}(\varphi,\psi)\to\min\limits_{\varphi,\psi}$ имеет решением $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=-g'(x)/g(x)$, $g=G'$, G – ф.р. ε_1. Т.е. $\sigma^2_{BM}(\varphi,\psi)$ минимальна для оценки макс. правд.

Примеры

① $\psi(x)=\begin{cases} x, & |x|\le c \\ c, & x\ge c \\ -c, & x\le -c \end{cases}$ – ф-ия Хубера



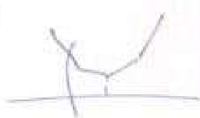
$\psi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\psi'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.



② $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=\operatorname{sign} x$

$$\sum u_{t-1}\operatorname{sign}(u_t-\theta u_{t-1})\doteq 0.$$

Это о.н.м. $\sum|u_t-\theta u_{t-1}|\to\min\limits_{\theta}$



Поскольку $E\psi'(\xi_1) = \int \psi'(x)\, g(x)\, dx = \int g(x)\, d\psi(x)$,

то $$\sigma^2_{LD} = \frac{1-\beta^2}{E\xi_1^2\,(2g(0))^2}$$

АОЭ $$e_{LD,LS} = (2g(0))^2\, E\xi_1^2 \quad \left(= \frac{\sigma^2_{LS}}{\sigma^2_{LD}}\right)$$

Ас. эффект. такая, как у выб. медианы отн. эмп. среднего!

③ $\varphi(x) = \psi(x) = \operatorname{sign} x$

$$\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1}) = 0, \text{ т.е.}$$

$$\sum \operatorname{sign}(u_t/u_{t-1} - \theta) = 0$$

Оценка $\hat{\beta}_{n,M}$ – медиана массива $\{u_t/u_{t-1}\}$, $t = 1, \dots, n$.

$$\sigma^2_M = \frac{1}{(2g(0))^2\,(E|u_1|)^2}.$$

Пусть теперь

$$\begin{cases} y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t \\ u_t = \beta u_{t-1} + \eta_t \end{cases}, \qquad L_n^y(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi(y_{t-1}) \times \psi(y_t - \theta y_{t-1}) = 0.$$

Теорема 6.

Пусть выполнены предп. Теоремы 4. Пусть $E|\xi_1| < \infty$. Тогда при достаточно малом $\gamma \geq 0$ с вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$, существует такое решение $\hat{\beta}^{y}_{n,BM}$ ур-ия $L_n^{y}(\theta) = 0$, что:

① $\hat{\beta}_{n,BM} \xrightarrow{P} \theta_y^{BM}$, $\theta_0^{BM} = \beta$;

② существует функционал влияния

$$IF(\theta_y^{BM}, \mu_\xi) = \frac{E\psi(u_0+\xi_0)\psi(\xi_1-\beta\xi_0)+E\varphi(u_0)\,E\psi(\xi_1+\xi_1)}{E\psi'(\xi_1)\,E(u_0\varphi(u_0))}$$

③ $\gamma E\, S(\theta_y^{BM}, \mu_1) < \infty$, т.е. $\hat{\beta}^{y}_{n,BM}$ — B-робастна.

Док-во. (i) Посл. $\{u_t\}$ удовл. усл. с.п. в силу р-та Моккадема, значит и $\{y_t\}$ – посл. с с.п. $t\in Z$,
Поэтому $\{\varphi(y_{t-1})\psi(y_t-\theta y_{t-1})\}$ – строго стацион. посл. с с.п. Поэтому при любых $0\le\gamma\le 1$ и любом θ

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\varphi(y_{t-1})\psi(y_t-\theta y_{t-1})\xrightarrow{P}\Lambda(\gamma,\theta)=$$

$$=E\varphi(y_0)\psi(y_1-\theta y_0)$$

Введем гипотезы $H_{00}=(z_0^\gamma=z_1^\gamma=0)$, H_{10}, H_{01}, H_{11}

Тогда $\Lambda(\gamma,\theta)=E\varphi(y_0)\psi(y_1-\theta y_0)=\sum_{ij}E(\varphi(y_0)\psi(y_1-\theta y_0)|H_{ij})P(H_{ij})=(1-\gamma)^2E\varphi(u_0)\psi(u_1-\theta u_0)+$
$+\gamma(1-\gamma)E\varphi(u_0+\xi_0)\psi(u_1-\theta u_0-\theta\xi_0)+$
$+(1-\gamma)\gamma E\varphi(u_0)\psi(u_1+\xi_1-\theta u_0)+\gamma^2E\varphi(u_0+\xi_0)\times$
$\times\psi(u_1+\xi_1-\theta u_0-\theta\xi_0)$.

Ф-ия $\Lambda(\gamma,\theta)$ определена при всех γ,θ.

(ii) $\Lambda(0,\beta)=E\varphi(u_0)\psi(\varepsilon_1)=E\varphi(u_0)E\psi(\varepsilon_1)=0$.

(iii) $\dfrac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}=-2(1-\gamma)E\varphi(u_0+\xi_0)\psi\ldots$
непр. по (γ,θ).

$\dfrac{\partial\Lambda(0,\beta)}{\partial\gamma}=E\varphi(u_0+\xi_0)\psi(\varepsilon_1-\beta\xi_0)+E\varphi(u_0)E\psi(\varepsilon_1+\xi_1)$

$\dfrac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \theta}$ сущ. и непр. по паре (γ,θ).

(iv) $\lambda(\beta) = \dfrac{\partial \Lambda(0,\beta)}{\partial \theta} = E\Big(\varphi(u_0)\,\psi'(u_1-\theta u_0)(-u_0)\Big)\Big|_{0,\beta} =$

$= -E\big(u_0\,\varphi(u_0)\big)\cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\,g(x)\,dx =$

$= -E\,\psi'(\varepsilon_1)\cdot E\big(u_0\,\psi(u_0)\big) \neq 0.$

Утверждение Теоремы 5 следует теперь из ~~[illegible]~~ общей теор. о вид. ф-ов влияния.