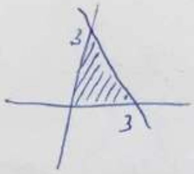
09.11.20. Вар ОПУ. КР 1. Вар 1,3,3.

(1.1) $\begin{cases} x^2+y^2-xy-x-y \to extr \\ -x \le 0 \\ -y \le 0 \\ x+y-3 \le 0 \end{cases}$



$\Lambda(x,y) = \lambda_0(x^2+y^2-xy-x-y) - \lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_3(x+y-3)$

$\Lambda'_x = \lambda_0(2x-y-1) - \lambda_1 + \lambda_3$

$\Lambda'_y = \lambda_0(2y-x-1) - \lambda_2 + \lambda_3$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0(2x-y-1) - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_0(2y-x-1) - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \\ \lambda_3(x+y-3) = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \\ \lambda_3(x+y-3) = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ne 0$ (т.к. иначе $\bar{\lambda} = (\lambda_0; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = \bar{0}$ – так нельзя)

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y-3 = 0 \end{cases}$ – противоречие, т.к. $0 \ne 3$.

$\Rightarrow \lambda_0 \ne 0.$

пусть $\lambda_0 = 1$ – т.е. ищем минимум

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y-1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2y-x-1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \\ \lambda_3(x+y-3) = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0. \end{cases}$

$\to$ если $\lambda_1 = 0$, то $\begin{cases} 2x-y-1 + \lambda_3 = 0 \\ -x+2y-1-\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \\ \lambda_3(x+y-3) = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$

$\to$ если $\lambda_2 = 0$, то $\begin{cases} 2x-y-1+\lambda_3 = 0 \\ -x+2y-1+\lambda_3 = 0. \\ \lambda_3(x+y-3) = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0. \end{cases}$ $\Rightarrow 3(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$

$\to$ если $\lambda_3 = 0$, то $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ $\Rightarrow x = y = 1.$

$\Rightarrow (1; 1; 1; 0; 0; 0)$ А

если $\lambda_3 \ne 0$, то $\begin{cases} x+y=3. \\ 2x-y-1+\lambda_3 = 0 \\ -x+2y-1+\lambda_3 = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow x = y = \frac{3}{2}.$

$\lambda_3 = 1+y-2x = 1-\frac{3}{2} < 0$ – не подх

если $\lambda_2 \ne 0$, то $y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1+\lambda_3 = 0 \\ -x-1-\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3(x-3) = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$

если $\lambda_3 = 0$, то $\begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -x-1 = -\frac{3}{2} < 0 \text{ – не подх} \end{cases}$

если $\lambda_3 \ne 0$, то $\begin{cases} 2x-1+\lambda_3 = 0 \\ -x-1-\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ x = 3 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_3 = 1-2x = -5 < 0$ не подх

↓ если $\lambda_1 \neq 0$, то $x=0$:

$$\begin{cases} -y-1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 2y-1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_2 y=0 \\ \lambda_3(y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$$

→ если $\lambda_2=0$, то $\begin{cases} -y-1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 2y-1+\lambda_3=0 \\ \lambda_3(y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0. \end{cases}$

→ если $\lambda_3=0$, то $\begin{cases} -y-1-\lambda_1=0 \\ 2y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1=-y-1=-\frac{1}{2}<0$ не подх.

если $y-3=0$, то $\begin{cases} -y-1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 2y-1+\lambda_3=0. \Rightarrow \lambda_3=1-2y=-5<0 \text{ не подх} \\ y=3 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0. \end{cases}$

если $y=0$, то $\begin{cases} -1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ -1-\lambda_2+\lambda_3=0 \Rightarrow \lambda_2=-1<0 \text{ не подх.} \\ -3\lambda_3=0 \Rightarrow \lambda_3=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

Пусть теперь $\lambda_0=-1$, т.е. ищем максимум.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+y+1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ x-2y+1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1 x=0 \\ \lambda_2 y=0 \\ \lambda_3(x+y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$$

→ если $\lambda_1=0$, то $\begin{cases} -2x+y+1+\lambda_3=0 \\ x-2y+1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_2 y=0 \\ \lambda_3(x+y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

→ если $\lambda_2=0$, то $\begin{cases} -2x+y+1+\lambda_3=0 \\ x-2y+1+\lambda_3=0. \\ \lambda_3(x+y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

→ если $\lambda_3=0$, то $\begin{cases} -2x+y+1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=y=1$

$\Rightarrow (1;1;-1;0;0;0)$ B

если $x+y=3$, то $x=y=\frac{3}{2}$

$\lambda_3=2x-y-1=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1;0;0;\frac{1}{2})$ C

если $y=0$, то $\begin{cases} -2x+1+\lambda_3=0 \\ x+1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_3(x\cancel{+y}-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

→ если $\lambda_3=0$, то $x=\frac{1}{2}$

$\lambda_2=x+1=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow (\frac{1}{2};0;-1;0;\frac{3}{2};0)$ D

если $x\cancel{+y}=3$, то $\begin{cases} \lambda_3=2x-1=5 \\ \lambda_2=x+1+\lambda_3=9 \end{cases}$

$\Rightarrow (3;0;-1;0;9;5)$ E

если $x=0$, то $\begin{cases} y+1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ -2y+1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_2 y=0 \\ \lambda_3(y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

→ если $\lambda_2=0$, то $\begin{cases} y+1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ -2y+1+\lambda_3=0 \\ \lambda_3(y-3)=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

→ если $\lambda_3=0$, то $y=\frac{1}{2}$

$\lambda_1=y+1=\frac{3}{2}>0$

$\Rightarrow (0;\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2};0;0)$ F

(стр 2)

если $y=3$, то $\begin{cases} 4-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ -5+\lambda_3=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3=5;\ \lambda_1=4+\lambda_3=9$

$\Rightarrow (0;3;-1;9;0;5)\ G$ $f_2 f_4$

если $y=0$, то $\begin{cases} 1-\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_3(y-3)=0 \Rightarrow \lambda_3=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3 \geq 0 \end{cases}$ $\nearrow \lambda_1=1$, $\nearrow \lambda_2=1$ $\Rightarrow (0;0;-1;1;1;0)\ H$ $f_2 f_3$

Теперь исследуем эти 1+7 подозрительных точек.

$\Lambda''_{xx}=2\lambda_0$; $\Lambda''_{xy}=-\lambda_0$; $\Lambda''_{yy}=2\lambda_0$

$f_1=x^2+y^2-xy-x-y$ $\quad df_1=(2x-y-1;\ 2y-x-1)$

$f_2=-x$ $\quad df_2=(-1;0)$

$f_3=-y$ $\quad df_3=(0;-1)$

$f_4=x+y-3$ $\quad df_4=(1;1)$

$\Rightarrow \Gamma=\begin{pmatrix} 2\lambda_0 & -\lambda_0 \\ -\lambda_0 & 2\lambda_0 \end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M_{11}=2$, $M_{12}=4-1=3>0$

Тут матрица знакоопределена на всей плоскости, далее конус не нужно считать.

при $\lambda_0=1$: $\Gamma>0^{\ \forall h\neq 0}$ $\Rightarrow$ точка $A\in$ locmin

при $\lambda_0=-1$: $\Gamma<0^{\ \forall h\neq 0}$ но проблема в том, что конус $=\bar{0}$: $\begin{matrix} h_1\geq 0 \\ h_2\geq 0 \\ h_1+h_2\leq 0 \end{matrix} \Rightarrow h_1=h_2=0 \Rightarrow \bar{0}$

$\Rightarrow$ точки $B, C, D, E, F, G, H \notin$ locmax, только если конус в этой точке не есть только нулевой вектор (т.к тогда конус$\setminus\{0\}=\varnothing$, а для $\varnothing$ — верно всё, что угодно)

Заметим, что поскольку область — компакт, то должны достигаться globmin и globmax

$\Rightarrow A\in$ globmin; $f(A)=f(1,1)=1+1-1-1-1=-1$. $\Rightarrow S_{min}=-1$

посчитаем конус в точках B–H, методом активных индексов (т.е только те из f_2, f_3, f_4, где достигается равенство). и $\in$ locmax только те, у кого этот конус $=\{\bar{0}\}$ — т.к иначе $\Gamma<0$.

$f(B)=f(1;1)=1+1-1-1-1=-1$

$f(C)=f(\frac{3}{2};\frac{3}{2})=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-3=\frac{9}{4}-\frac{12}{4}=-\frac{3}{4}$ не достиг. равенств $\Rightarrow$ конус $=\{\mathbb{R}^2\}_{\neq \bar{0}} \Rightarrow \notin$ locmax

$f(D)=f(\frac{1}{2};0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ достиг. равенства в $f_4 \Rightarrow h_1+h_2=0 \Rightarrow$ конус $\neq\bar{0} \Rightarrow \notin$ locmax $^{\ni}\{(t;-t),\ t\in[0,\frac{3}{\sqrt{2}}]\}$

достиг. рав-во в $f_3 \Rightarrow h_2=0 \Rightarrow$ конус $=\{L(h_1)\}\neq\bar{0} \Rightarrow \notin$ locmax

$f(E)=f(3;0)=9-3=6$ достиг. рав-во в f_3 и $f_4 \Rightarrow h_1=0, h_2=0 \Rightarrow$ конус $=\bar{0} \Rightarrow \in$ locmax

$f(F)=f(0;\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ достиг. рав-во в $f_2 \Rightarrow h_1=0 \Rightarrow$ конус $=\{L(h_2)\}\neq\bar{0} \Rightarrow \notin$ locmax

$f(G)=f(0;3)=9-3=6$. достиг. рав-во в f_2 и $f_4 \Rightarrow h_1=h_2=0 \Rightarrow$ конус $=\bar{0} \Rightarrow \in$ locmax

$f(H)=f(0;0)=0$. достиг. рав-во в f_2 и $f_3 \Rightarrow h_1=h_2=0 \Rightarrow$ конус $=\bar{0} \Rightarrow \in$ locmax

$\Rightarrow E=(3;0)$ и $G(0,3)\in$ globmax; $\Rightarrow S_{max}=6$. (выбираем E, G и H)

Ответ: $A=(1;1)\in$ globmin; $S_{min}=-1$

$E=(3;0)$ и $G(0;3)\in$ globmax; $S_{max}=6$.

$H=(0;0)\in$ locmax

(2.3) Проверить выпуклость, найти субдиф и решить задачу на минимум.

$$f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2-6x-8y+23}_{f_1} + \underbrace{2\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}}_{f_2} \longrightarrow \min$$

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x-6$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y-8$ $\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $M_1 = 2 > 0$, $M_{12} = 4 > 0$ $\Rightarrow \Gamma > 0 \Rightarrow f_1$ — выпукла (вниз)

f_2 — выпукла, т.к $f_2 = 2\cdot\|(x+3;\, y+4)\|$ — т.к мы проверяли, что норма — выпуклая функция

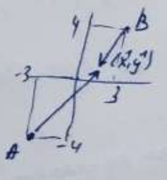
$\Rightarrow f = f_1+f_2$ — тоже выпуклая ф-ция.

по т. Мора-Рокафеллара: $\partial(f_1+f_2)(\hat{x}) = \partial f_1(\hat{x}) + \partial f_2(\hat{x})$

$\partial f_1(\hat{x},\hat{y}) = (2\hat{x}-6;\, 2\hat{y}-8) = 2(\hat{x}-3;\, \hat{y}-4)$

$\partial f_2(\hat{x},\hat{y}) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot(\hat{x}+3;\, \hat{y}+4)}{\sqrt{(\hat{x}+3)^2+(\hat{y}+4)^2}}, & \text{если } (\hat{x},\hat{y}) \neq (-3;-4) \\ 2\cdot \text{единичный шар с центром в нуле}, & \text{если } (\hat{x},\hat{y}) = (-3;-4) \end{cases}$

$\Rightarrow \partial(f_1+f_2)(\hat{x},\hat{y}) = \begin{cases} 2\cdot\left(\dfrac{(\hat{x}+3;\hat{y}+4)}{\sqrt{(\hat{x}+3)^2+(\hat{y}+4)^2}} + (\hat{x}-3;\hat{y}-4)\right), & \text{если } (\hat{x},\hat{y}) \neq (-3;-4) \text{ (это 1 точка)} \\ 2\cdot(\text{единичный шар в нуле, сдвинутый на } (-6;-8)), & \text{если } (\hat{x},\hat{y}) = (-3;-4) \end{cases}$



Когда $0 \in \partial f(\hat{x},\hat{y})$?

Если $(\hat{x},\hat{y}) \neq (-3;-4)$, то из картинки $(\hat{x},\hat{y}) = (t, t) \in [A;B]$ вектор $(\hat{x}-3;\hat{y}-4)$ должен быть единичным.

$\Rightarrow (\hat{x},\hat{y}) = (3,4) - \frac{1}{5}(3-0;4-0) = \frac{4}{5}(3;4) = \left(\frac{12}{5};\frac{16}{5}\right)$

Если $(\hat{x},\hat{y}) = (-3;-4)$, то сдвинутый шар точку 0 не содержит

$\Rightarrow (\hat{x},\hat{y}) = \left(\frac{12}{5};\frac{16}{5}\right) \in \min$

$\boxed{\text{Ответ: } (\hat{x},\hat{y}) = \left(\frac{12}{5};\frac{16}{5}\right)}$

(3.3) $f: C[-1;1] \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = \int_{-1}^{1} \sin x(t)\cdot x^3(-1)\,dt$ — найти производную Фреше

Заметим, что для $g(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$: $g'(x)[h] = \int_{-1}^{1} h(t)\,dt$ — т.к $g(x+h) = \underbrace{\int_{-1}^{1} x(t)\,dt}_{g(x)} + \underbrace{\int_{-1}^{1} h(t)\,dt}_{\text{линейно лот.}}$

Далее, по т. о сложной ф-ции для $h(x) = \sin x(t)\cdot x^3(-1)$:

$h'(x)[h] = \cos x(t)\cdot h(t)\cdot x^3(-1) + \sin x(t)\cdot 3\cdot x^2(-1)\cdot h(-1)$

$\Rightarrow$ по т. о сложной ф-ции для композиции g и h:

$$\boxed{f'(x)[h] = \int_{-1}^{1} \left(\cos x(t)\, h(t)\, x^3(-1) + \sin x(t)\cdot 3\cdot x^2(-1)\, h(-1)\right) dt}$$

ответ