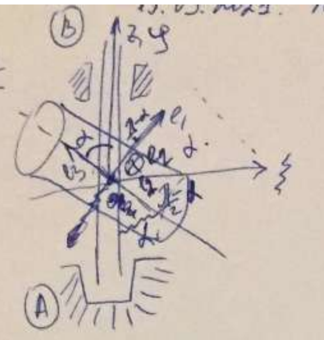
Задача



Посчитаем кин. момент: $\vec{K_0} = I_1 \omega \sin\alpha \, \vec{e_1} + I_3 \omega \cos\alpha \, \vec{e_3}$

Или так посчитаем кин. момент: $\vec{K_0} = \mathcal{J}_{O\xi\eta\varphi} \vec{\omega} = \mathcal{J}_{O\xi\eta\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

Запишем матрицу инерции цилиндра отн. точки O в осях $e_1 e_2 e_3$:

$$\mathcal{J}_{Oe_1e_2e_3} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$ – ну это пил. оператор.

← конкретные числа, мы для цилиндра их знаем (и для диска мы знаем)

2 способ

А мы хотим момент в осях $O\xi\eta\varphi$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{O\xi\eta\varphi} = \Gamma^T \mathcal{J}_{Oe_1e_2e_3} \Gamma$$, где Γ – матрица перехода от $e_1e_2e_3$ к $\xi\eta\varphi$.

↑ коорд. новых базисных векторов в старом базисе по столбцам.

e_ξ и e_η e_φ через e_1 и e_2, e_3.

$$e_\xi = \cos\alpha \cdot e_1 - \sin\alpha \cdot e_3$$
$$e_\eta = e_2$$
$$e_\varphi = \sin\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_3.$$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma^T \mathcal{J}_{Oe_1e_2e_3} \Gamma = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot I_1 & 0 & -\sin\alpha \cdot I_3 \\ 0 & I_2 & 0 \\ \sin\alpha \cdot I_1 & 0 & \cos\alpha \cdot I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha \cdot I_1 + \sin^2\alpha \cdot I_3 & 0 & \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot I_1 - \sin\alpha\cos\alpha \cdot I_3 \\ 0 & I_2 & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha (I_1 - I_3) & 0 & \sin^2\alpha \cdot I_1 + \cos^2\alpha \cdot I_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{O\xi\eta\varphi} \bar{\omega} = \begin{pmatrix} & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (I_1 - I_3) \\ 0 \\ \sin^2\alpha \cdot I_1 + \cos^2\alpha \cdot I_3 \end{pmatrix}$$

то же самое

1 способ ~~$K = I_1 e_1 + I_2 e_2 + I_3 e_3 = I_2 \cos\alpha \, e_2$~~

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\alpha \cdot \omega \\ 0 \\ \cos\alpha \cdot \omega \end{pmatrix}}_{= \bar{\omega} = \omega \cdot \bar{e}_\xi} = \begin{pmatrix} I_1 \sin\alpha \cdot \omega \\ 0 \\ I_3 \cos\alpha \cdot \omega \end{pmatrix} = I_1 \sin\alpha \cdot \omega \cdot \underbrace{\bar{e_1}}_{= \cos\alpha \cdot \bar{e}_\xi + \sin\alpha \cdot \bar{e}_\varphi} + I_3 \cdot \cos\alpha \cdot \omega \cdot \underbrace{\bar{e_3}}_{= -\sin\alpha \cdot \bar{e}_\xi + \cos\alpha \cdot \bar{e}_\varphi} =$$

$R_{A\xi} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \omega^2 M}{2h}\cdot\left(\frac{l^2}{3}-\frac{r^2}{h}\right) = -R_{B\xi}$

$R_{A\eta} = R_{B\eta} = 0.$

$R_{Az} = mg.$

ответ: — написали, что $\frac{d}{dt}\vec{L}_O = [\vec{OO}; m\vec{g}] + [\vec{OA}; \vec{R}_A] + [\vec{OB}; \vec{R}_B]$

посчитали в лоб.

(2.120) — то же самое, только для диска, только I_ξ, I_η, I_z другие.

! реакции в шарнирах всегда лежат в плоскости, проходящей через ось вращения и ось симм. цилиндра.

! Гориз. реакции равны по величине и противоп. по направл.

⇒ это пара сил.

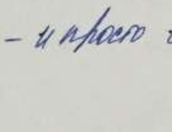
т.е. они в сумме $=0$, но создают момент.

Причём $R_{A\xi} \sim \omega^2 \Rightarrow$ чем больше ω, тем больше $R_{A\xi}$ – и просто сломается шарнир.

Связь в этой задаче = неподвижность оси.

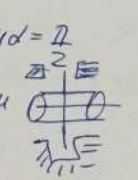
Связь обеспечивается доп. силами – реакциями – по аксиоме об освобождении от связей.

Момент этих сил обеспечивает вертикальность оси.



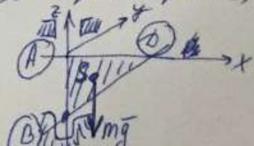
⇒ инженеры стараются уменьшить реакции.

⇒ надо сделать $\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\pi}{2}$

 или 

в обоих случаях ось вращения явл. главной осью инерции.

(2.123) С какой ω нужно вращать вокруг катета равноб. прямоуг. Δ, чтобы гориз. сост. в точке B была $= 0$?



Просят реакцию найти.

1) Но сначала разберёмся с ур-ями движения пластины, чтобы закон изменения φ найти.

Имеем: $I_{Oz} \cdot \ddot{\varphi} = M_{Oz}^{\text{внеш. зар}}$ – для тв. тела, кот. вращается вокруг непод. оси

Внеш. зар. сила – только сила тяжести. Она действует на все точки тела. Но действие силы тяжести мы можем заменить на эквив. систему сил, и приложить её к Ц.М.

Ещё есть две внешние реакции: $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$.

Есть ещё внутренние реакции, кот. обеспечивают постоянство расстояний внутри тв. тела — но они не входят в т. о движении Ц.М. и об изменении кин. момента отн. непод. точки для данного типа движения.

Выберем непод. точку O — выгоднее выбрать

Начало отсчета – оно влияет на момент реакций, момент силы тяжести, и еще на кин. момент. (стр2)

пишем т. об изменении кин. момента:

$$\frac{d\overline{K_0}}{dt} = [\overline{OS}; m\overline{g}] + [\overline{OA}; \overline{R_A}] + [\overline{OB}; \overline{R_B}].$$

Если выбрать $O := A$ – то это ~~......~~ будет $=0$, ~~......~~

и это $=0$, т.к $\underbrace{R_B^{\text{гориз}} = 0}_{\text{ХОТИМ!}} \Rightarrow [\overline{AB}; R_B] \perp$ плоскости – оно не войдет.

(т.к мы у этого ур-я проекцию на ось $\perp$ плоскости и так уже знаем и использовали:

$\Rightarrow [\overline{OA}; \overline{R_A}]$ и $[\overline{OB}; \overline{R_B}]$ – будут равна нулю, и нам не придется их считать.

А если $O := B$ – то $[\overline{BA}; \overline{R_A}] \neq 0$, и мы не знаем связь $\overline{\omega}$ и $\overline{R_A}$, поэтому придется добавить еще т. о движении ц.м.

Короче, $O := A$.

$\Rightarrow$ т. об изменении кин. момента: $\dfrac{d\overline{K_A}}{dt} = [\underbrace{\overline{AS}; m\overline{g}}_{\overline{M_A}}]$

$\overline{M_A} \parallel \overline{e_z} \Rightarrow \underbrace{(\overline{M_A}; \overline{e_z})}_{M_{Oz}} = 0.$

$\Rightarrow I_{Az} \cdot \ddot{\varphi} = M_{Oz} = 0.$

$\Rightarrow \dot{\varphi} = \text{const} \Rightarrow$ ~~движение~~ вращение с пост. угловая скорость.

2) Разбираемся с реакциями:

пишем т. об изменении кин. момента относ. A.

$$\frac{d\overline{K_A}}{dt} = [\overline{AS}; m\overline{g}] + \cancel{[\overline{AA}; \overline{R_A}]}^{0} + \cancel{[\overline{AB}; \overline{R_B}]}^{0}$$

т.к хотим, чтобы $\overline{R_B}$ гориз $= 0$, а что на ось Oz – не важно, т.к мы туда проекцию уже знаем.

$$\overline{K_A} = \mathcal{J}_A \cdot \overline{\omega} = \begin{pmatrix} I_{Ax} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{Ay} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{Az} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = -I_{xz} \cdot \underset{\substack{\text{const,} \\ \text{т.к } \omega = \dot{\varphi} = \text{const}}}{\omega} \overline{e_x} - \cancel{I_{yz} \omega \overline{e_y}}^{0} + I_{Az} \cdot \omega \cdot \overline{e_z}$$

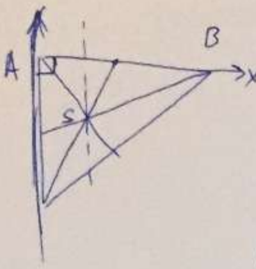
т.к наша фигура плоская, т.е $y \equiv 0$.

$$\Rightarrow \frac{d\overline{K_A}}{dt} = -I_{xz} \cdot \omega \cdot \underset{\text{ф-ла Пуас.}}{\dot{\overline{e_x}}} = -I_{xz} \cdot \omega \cdot [\underbrace{\overline{\omega}}_{\omega \cdot \overline{e_z}}; \overline{e_x}] = -I_{xz} \cdot \omega^2 \cdot \overline{e_y}$$

I_{xz} – посчитаем интеграл.

Еще надо $[\overline{AS}; m\overline{g}]$.

S – это точка пересечения медиан.



или так: $y.м = \cancel{\quad} \iint\limits_D x\,dm = \iint\limits_D x\cdot\rho\cdot dx\,dz$.

$$\bar{M}_A = [\bar{AS}; m\bar{g}] = [x_S\bar{e}_x + \underbrace{y_S}_{0}\bar{e}_y + z_S\bar{e}_z; mg\cdot -\bar{e}_z] = mg\,x_S\cdot\bar{e}_y$$

но $\dfrac{d\bar{K}_A}{dt} = \bar{M}_A$

$$\Rightarrow -I_{xz}\cdot\omega^2\cdot\cancel{\bar{e}_y} = mg\,x_S\,\cancel{\bar{e}_y}$$

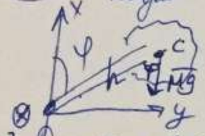
$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = -\frac{mg\,x_S}{I_{xz}}}$$

$x_S = \frac{a}{3}$; I_{xz} – посчитаем двойной интеграл.

(2.89) Дерево падает.

Дано:
$\begin{cases} M_{сопр}\text{ воздуха относ. ц.м.} = k\dot{\varphi}^2 \\ I_{Oz} = J \end{cases}$

Силу тяжести заменили на экв. систему сил, прилож. к ц.м.



Найти: угловую скорость в момент падения, т.е. $\omega|_{\varphi=\pi/2}$

неподв. точка

Вращение вокруг неподв. оси! (которая ⊥ доске)

Решение: мы знаем, что $\bar{\omega} = -\dot{\varphi}\bar{e}_z$ – т.к. падаем вправо.

Чтобы минус не таскать, направим z от нас, и будет $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{e}_z$

1) Напишем ур-е движения:

$\underset{дан.}{\underline{I_{Oz}}}\cdot\ddot{\varphi} = M_{Oz}^{внешн.\ заранее}$ – т.к. это ф-ла для вращения вокруг неподв. оси.

$\bar{M}_{сопр} = -k\dot{\varphi}^2\cdot\bar{e}_z$ – т.к. момент препятствует повороту, который $\bar{\omega}$.

(а если от ось Oz – на нас: $\bar{\omega} = -\dot{\varphi}\bar{e}_z$
$-I_{Oz}\ddot{\varphi} = M_{Oz}^{внешн.\ заран.}$
$\bar{M}_{сопр} = k\dot{\varphi}^2\bar{e}_z$)

$$\bar{M}_O^{тяжест} = [\bar{OC}; m\bar{g}] = [h\cos\varphi\,\bar{e}_x + h\sin\varphi\,\bar{e}_y; -mg\bar{e}_x] = mgh\sin\varphi\,\bar{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{Oz}\cdot\ddot{\varphi} = -k\dot{\varphi}^2 + mgh\sin\varphi}$$ – ур-е движения.

А мы хотим $\dot{\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow$ хотим зависимость $\dot{\varphi}(\varphi)$.

Обозн. $\dot{\varphi} = \omega \Rightarrow$ хотим: $\omega(\varphi)$.

~~...~~

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \omega'_\varphi\cdot\overset{=\omega}{\dot{\varphi}} = \omega'_\varphi\cdot\omega$$

$$\Rightarrow \underset{J}{I_{Oz}}\cdot\omega'_\varphi\cdot\omega = -k\omega^2 + mg\sin\varphi$$

$$\Rightarrow J\cdot\frac{d\omega}{d\varphi}\,\omega = -k\omega^2 + mg\sin\varphi\cdot h$$

~~$\Rightarrow \dfrac{J\omega\,d\omega}{-k\omega^2+mg\sin\varphi h} = d\varphi \Rightarrow \frac{J}{2}\left(-\frac{1}{k}\right)\ln(-k\omega^2+mg\sin\varphi) = \varphi + C_0 \Rightarrow -k\omega^2+mg\sin\varphi = C_0\,e^{-\frac{2k\varphi}{J}}$~~

Замена: $u = \omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\,u\cdot J\frac{du}{d\varphi} = -ku + mgh\sin\varphi}$$ – это линейное неоднор. ур-е.

ищем общее реш. однор. + частное неоднор.

$y_{oo} = e^{-\frac{2k\varphi}{J}}$

$y_{чн} = A\sin\varphi + B\cos\varphi$

и потом подст. $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Д/З 2.102
2.88 (шар посчитать кин. момент и трубки, и шарика)

потом в ответе устремить $\varepsilon \to 0$.

$\dot{\varphi}(0) = \varepsilon$ нач. усл.
$\varphi(0) = 0$ иначе $\varphi \equiv 0$.