# Краткий конспект лекций по курсу «Грубые траектории и регулярная структура»

## Лекция 1

### 1. Мотивировка

В разнообразных прикладных задачах требуется найти изменяющуюся со временем величину $Y(t)$, про которую известно, что

$$Y(t+h) - Y(t) = A(t)h + B(t)(X(t+h) - X(t)) + o(h), \quad h \to 0.$$

Например, изменение численности $N(t)$ популяции «зайцев» пропорционально количеству зайцев, то есть справедливо равенство $N(t+h)-N(t) = \lambda N(t)h+o(h)$. Другой пример доставляет работа $\mathcal{A}(t)$ векторного поля $F(x)$ вдоль кривой $X(t)$:

$$\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) = F(X(t))(X(t+h) - X(t)) + o(h), \quad h \to 0.$$

Пусть известно начальное значение $Y(0)$. Для вычисления $Y(T)$ разобьем отрезок $[0,T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и представим разность $Y(T) - Y(0)$ в виде суммы:

$$Y(T) - Y(0) = \sum_k \bigl(Y(t_k) - Y(t_{k-1})\bigr) = \sum_k A(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) +$$

$$+ \sum_k B(t_{k-1})\bigl(X(t_k) - X(t_{k-1})\bigr) + \sum_k o((t_k - t_{k-1})).$$

Устремляя длину отрезков разбиения к нулю, получаем

$$Y(T) - Y(0) = \int_0^T A(t)\,dt + \int_0^T B(t)dX(t),$$

где в правой части равенства сумма интеграла Римана и интеграла Римана–Стилтьеса, если таковые существуют. Теория грубых траекторий позволяет распространить описанный выше классический подход на случай, когда кривая $X(t)$ столь «груба», что римановы суммы не сходятся.

### 2. Интеграл Римана–Стилтьеса

Пусть $a < b$. Через $\mathbb{T}$ обозначим разбиение отрезка $[a,b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

на отрезки $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$. Через $\xi$ обозначим набор отмеченных точек $\xi_k \in \Delta_k$. Положим $\lambda(\mathbb{T}) = \max_k |\Delta_k|$, где $|\Delta_k| = t_k - t_{k-1}$. Пусть функции $f$ и $g$ определены на $[a,b]$. Если $\Delta = [\alpha, \beta]$, то $\Delta g = g(\beta) - g(\alpha)$. Положим

$$\sigma(f dg, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)\Delta_k g.$$

По определению интегралом Римана–Стилтьеса называется величина

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sigma(f dg, \mathbb{T}, \xi),$$

где предел понимается в смысле предела по базе, состоящей из множеств $B_\delta = \{(\mathbb{T},\xi)\colon\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta\}$, где $\delta > 0$.

Критерий Коши существования предела по базе позволяет сформулировать критерий существования интеграла Римана–Стилтьеса: интеграл $\displaystyle\int_a^b f(t)dg(t)$ существует тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(\mathbb{T},\xi)$ и $(\mathbb{T}',\xi')$ из неравенств $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ и $\lambda(\mathbb{T}') < \delta$ следует оценка

$$\big|\sigma(fdg,\mathbb{T},\xi) - \sigma(fdg,\mathbb{T}',\xi')\big| < \varepsilon.$$

**Теорема 1.** *Если функция $f$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $g$ имеет ограниченную вариацию, то есть*

$$\mathrm{Var}_{[a,b]}g = \sup_{\mathbb{T}} \sum_k |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty,$$

*то существует интеграл* $\displaystyle\int_a^b f(t)dg(t)$.

*Доказательство.* Проверяем условие критерия интегрируемости. Пусть $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ и $\lambda(\mathbb{T}') < \delta$, где $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ на отрезки $\Delta_k$, а $\mathbb{T}'$ — разбиение отрезка $[a,b]$ на отрезки $\Delta'_k$. Заметим, что

$$\Delta_i g = \sum_j (\Delta_i \cap \Delta'_j)g, \quad \Delta'_j g = \sum_i (\Delta_i \cap \Delta'_j)g,$$

где слагаемые, соответствующие пустым пересечениям, считаем равными нулю. Справедливы равенства

$$\big|\sigma(fdg,\mathbb{T},\xi) - \sigma(fdg,\mathbb{T}',\xi')\big| = \big|\sum_i f(\xi_i)\Delta_i g - \sum_j f(\xi'_j)\Delta'_j g\big| =$$

$$= \big|\sum_i \sum_j \big(f(\xi_i) - f(\xi'_j)\big)(\Delta_i \cap \Delta'_j)g\big|.$$

Если пересечение $\Delta_i \cap \Delta'_j \neq \emptyset$, то $|\xi_i - \xi'_j| \leq 2\delta$. Поскольку функция $f$ непрерывна, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором из $|\xi_i - \xi'_j| \leq 2\delta$ следует неравенство $|f(\xi_i) - f(\xi'_j)| < \varepsilon$. Итак, верны неравенства

$$\big|\sigma(fdg,\mathbb{T},\xi) - \sigma(fdg,\mathbb{T}',\xi')\big| \leq \varepsilon \sum_i \sum_j \big|\Delta_i \cap \Delta'_j)g\big| \leq \varepsilon \mathrm{Var}_{[a,b]}g.$$

По критерию интегрируемости интеграл $\displaystyle\int_a^b f(t)dg(t)$ существует. □

Рассмотрим примеры, показывающие точность условий теоремы.

1) Пусть $a < c < b$ и

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

Тогда $\sigma(fdg,\mathbb{T},\xi) = f(\xi_k)$, если $t_{k-1} < c \leq t_k$. Если функция $f$ разрывна в точке $c$, то предела $\sigma(fdg,\mathbb{T},\xi)$ при $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$ не существует. Если функция $f$ непрерывна в точке $c$, то $\displaystyle\int_a^b f(t)dg(t) = f(c)$.

2) Пусть $a < b$ и $a < s_k < b$ — возрастающая последовательность, которая сходится к $b$. Положим

$$g(s_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad g(s_{2k-1}) = 0, \quad g(a) = 0, \quad g(b) = 0.$$

На отрезках $[a,s_1]$, $[s_k,s_{k+1}]$ определяем $g$ линейно. Функция $g$ непрерывна, но не существует интеграла $\displaystyle\int_a^b g(t)dg(t)$. Для сколь угодно малого масштаба $\lambda(\mathbb{T})$ можно считать, что точки $s_k$ с достаточно большими номерами входят в отмеченное разбиение. Остается заметить, что

$$\sum_{k=2M}^{2N} g(s_k)(g(s_k)-g(s_{k-1})) = \sum_{k=M}^{N} \frac{1}{k},$$

так как $g(s_k)g(s_{k-1})=0$ и $g(s_{2k})=k^{-1/2}$.

**3. Проблема продолжения интеграла по непрерывности**

Из приведенного выше примера видно, что только лишь непрерывности функций для существования интеграла Римана–Стилтьеса не хватает. Естественно возникает вопрос о возможности непрерывного продолжения интеграла на непрерывные функции. А именно, возможно ли, равномерно приближая непрерывные функции $f$ и $g$ непрерывно дифференцируемыми функциями $f_n$ и $g_n$, определить интеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$ с помощью предела интегралов $\int_a^b f_n(t)dg_n(t)$. Ответ на этот вопрос отрицательный, что показывает следующий простой пример. Положим

$$f_n(t)=\frac{1}{n}\cos(n^3t), \quad g_n(t)=\frac{1}{n}\sin(n^3t).$$

Последовательности $f_n$ и $g_n$ равномерно сходятся к нулю, но

$$\int_0^\pi f_n(t)dg_n(t) = n\int_0^\pi \cos^2(n^3t)\,dt = \frac{n\pi}{2} \to \infty.$$

Более того, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** (T.Lyons, 1991) *Не существует такого сепарабельного банахова пространства $X\subset C[0,\pi]$, что траектории винеровского процесса принадлежат $X$ почти наверное и билинейная форма*

$$(f,g)\mapsto \int_0^\pi f(t)\,dg(t)$$

*с гладких функций продолжается до непрерывной билинейной формы на $X$.*

Мы докажем это утверждение позднее.

**4. Винеровский процесс**

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — вероятностное пространство. Случайный процесс $w_t(\omega)$, отображающий $[0,T]\times\Omega$ в $\mathbb{R}$, называется *винеровским процессом*, если

1) почти наверно $w_0=0$, $t\to w_t$ — непрерывная функция,

2) вектор $(w_{t_1},\ldots,w_{t_n})$ имеет гауссовское распределение для всех $t_1,\ldots,t_n\in[0,T]$,

3) $\mathbb{E}w_t=0$ и $\mathbb{E}w_tw_s=\min\{t,s\}$.

Предположения 2) и 3) можно заменить на условия: $w_t-w_s\sim N(0,t-s)$ при $t>s$ и случайные величины

$$w_{t_1}, w_{t_2}-w_{t_1}, \ldots, w_{t_n}-w_{t_{n-1}}$$

независимы для всех $t_1<t_2<\ldots<t_n$.

Пусть $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[0,T]$ точками $0=t_1<\ldots<t_n=T$.

**Теорема 3.** *Справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \mathbb{E}\Big(\sum_k (w_{t_k}-w_{t_{k-1}})^2 - T\Big)^2 = 0.$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - T\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_k \Big((w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\Big)\Big)^2 =$$

$$= \sum_k \mathbb{E}\Big((w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\Big)^2.$$

Положим

$$C = \mathbb{E}(|\xi|^2 - 1)^2, \quad \xi \sim N(0,1).$$

Тогда

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - T\Big)^2 = C\sum_k (t_k - t_{k-1})^2 \le CT\lambda(\mathbb{T}) \to 0.$$

□

Во всякой последовательности разбиений $\mathbb{T}_n$, у которой $\lambda(\mathbb{T}_n) \to 0$, существует такая подпоследовательность $\mathbb{T}_{n_j}$, что величины

$$\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2$$

сходятся к $T$ почти наверное.

**Следствие 1.** *Почти наверное функция $t \to w_t$ имеет бесконечную вариацию.*

*Доказательство.* Пусть последовательности разбиений $\mathbb{T}_n$ такова, что $\lambda(\mathbb{T}_n) \to 0$ и величины

$$\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2$$

сходятся к $T$ почти наверное. Пусть функция $t \to w_t(\omega)$ непрерывна. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большой номер $n$, начиная с которого

$$|w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_k (w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega))^2 \le \varepsilon\,\mathrm{Var}_{[0,T]} w_t(\omega).$$

Если $\mathrm{Var}_{[0,T]} w_t(\omega) < \infty$, то $\sum_k (w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega))^2$ стремится к нулю, но почти наверное это выражение стремится к $T$. □

Таким образом, нельзя проинтегрировать непрерывную функцию по траектории винеровского процесса в смысле Римана–Стилтьеса.