② Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Опр. $A \subset \mathbb{R}^n$, A - открыто, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$
$x^0 := (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0+h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{h}$

(если этот $\lim \exists$-ет) - частная производная f по k-ой переменной

Зам: 1. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ \forall k \overset{в.г.}{\not\Rightarrow} f \in C(x^0)$
(но для $n=1$ - это $\overset{верно}{\Rightarrow}$)

Пример: $f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ разрывна $\Rightarrow$ в т. $(0;0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h;0) - f(0;0)}{h} = 0$.

Опр. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - открыто, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$

Тогда $f \in \mathcal{D}(x^0)$ - дифференцируема в т. $x^0 \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\exists \overset{строка}{C} \in \mathbb{R}^n$, $\exists O(x^0)$ / $f(x) = f(x^0) + C(x-x^0) + \bar{o}(\|x-x^0\|)$
при $x \to x^0$, $\forall x \in O(x^0)$.

$df(x^0) := C(x-x^0)$ - дифференциал в т. x^0.

Теорема: Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - откр., $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$.
Тогда $f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow f \in C(x^0)$

▶ $\exists O(x^0)$ и $\exists C \in \mathbb{R}^n$ / $f(x) = f(x^0) + C(x-x^0) + \bar{o}(\|x-x^0\|)$
$x \to x^0$, $\forall x \in O(x^0)$

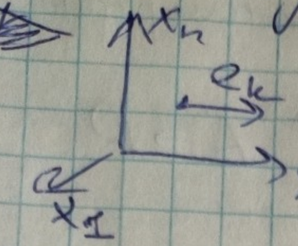
$\Rightarrow$ при $x \to x^0$: $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0) + 0 + 0$ ◀

Зам 2: $f(x) \in C(x^0) \underset{в.г.}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(x^0)$

Примеры: 1) $f(x) = |x|$, в точке $x=0$.
$x>0$: $|x| = 0 + Cx + \bar{o}(|x|) \Rightarrow C = 1$
$x<0$: $C = -1$.

2) $f(x,y) = |x| + y \Rightarrow |x| + y = C_1 x + \underset{=1}{C_2} y + \bar{o}(|x| + |y|)$
$x>0$: $C_1 = 1$; $x<0$: $C_1 = -1$.

Теорема: Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - откр., $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$.
Тогда $f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow C_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$.



$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + he_k) - f(x^0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x^0)} + C_1 \cdot 0 + \dots + C_k \cdot h + \dots + C_n \cdot 0 - \cancel{f(x^0)} + \bar{o}(h)}{h}$$

$$= C_k + \lim_{h \to 0} \bar{o}(1) = C_k$$

Следствие: $df(x^0) = \sum_{k=\overline{1,n}} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \underbrace{(x_k - x_k^0)}_{=dx_k}$ - если ∃-ет

Зам. 3 $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\ \forall k \overset{?}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(x^0)$

Примеры: 1) см. Зам. 1

2) $f(x,y) = |xy|^{1/2}$ в т. $(0,0)$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{1/2} \cdot 0^{1/2} - x^{1/2} \cdot 0^{1/2}}{h} = 0 = \frac{\partial f(0,y)}{\partial y} \quad \forall x\ \forall y$$

Если $f \in \mathcal{D}(0)$, то $f(x,y) = |xy|^{1/2} = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \bar{o}(|x| + |y|)$

т.е. $\lim_{|x|+|y| \to 0} \frac{|xy|^{1/2}}{|x|+|y|} = 0$. и при $y = x$: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \bot$

Теорема (достаточные условия дифференцируемости)

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ - откр., $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$.

Тогда 1) $\exists O(x^0) / \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\ \forall x \in O(x^0)\ \forall k$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C(x^0)\ \forall k = \overline{1,n}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{D}(x^0)$

Б.О.О. $n = 2$. : $f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) =$

$= f(x_1, x_2) \pm f(x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0) =$ ← теор. Лагранж

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \underbrace{x_2^0 + \theta_2(x_2 - x_2^0)}_{\text{серед. точка}}) \cdot (x_2 - x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1(x_1 - x_1^0), x_2^0)(x_1 - x_1^0)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) + \bar{o}(1)\right)(x_2 - x_2^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) + \bar{o}(1)\right)(x_1 - x_1^0)$$

при $x_1^\circ, x_2^\circ \to x_1^\circ, x_2^\circ$

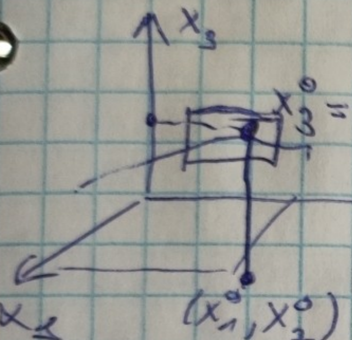
$$\Rightarrow f(x_1,x_2) - f(x_1^\circ,x_2^\circ) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^\circ,x_2^\circ)(x_2-x_2^\circ) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^\circ,x_2^\circ)(x_1-x_1^\circ) + \bar{o}(|x_1-x_1^\circ| + |x_2-x_2^\circ|)$$ ◭

Опр. $\exists\, A \subset \mathbb{R}^n$ - откр., $x^\circ \in A$, $f: A \to \mathbb{R}^m$, $f=(f_1,\dots,f_m)$

Тогда $f \in \mathcal{D}(x^\circ) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f_i \in \mathcal{D}(x^\circ)\ \forall i=\overline{1,m}$

Геометрический смысл:

$\exists$ есть $\mathbb{R}^3$, причём $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



$x_3^\circ = f(x_1^\circ, x_2^\circ)$

$(x_3 - x_3^\circ) - A_1(x_1-x_1^\circ) - A_2(x_2-x_2^\circ) = 0$

плоскость, к-ая проходит через т. $(x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ)$

$$\pi: x_3 = \underbrace{x_3^\circ}_{= f(x_1^\circ,x_2^\circ)} + A_1(x_1-x_1^\circ) + A_2(x_2-x_2^\circ)$$

Плоскость π - касат. к графику $f(x_1,x_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists\, O(x_1^\circ,x_2^\circ) \,/\, f(x_1,x_2) - x_3 = f(x_1,x_2) - f(x_1^\circ,x_2^\circ) - A_1(x_1-x_1^\circ) -$
$- A_2(x_2-x_2^\circ) = \bar{o}(\|x-x^\circ\|)\ \forall x \in O(x_1^\circ,x_2^\circ)$

(Аналогично для $m>2$).

Опр. $\exists\, f: O(x^\circ) \to \mathbb{R}$, $x^\circ \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, l=(l_1,\dots,l_n) \,/\, \|l\|=1$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial l}(x^\circ) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x^\circ+hl)-f(x^\circ)}{h}$ (если lim $\exists$)

производная по направлению l

Теорема! $\exists\, f: O(x^\circ) \to \mathbb{R}$, $x^\circ \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{D}(x^\circ) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x^\circ) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^\circ)\cdot l_k =: (\nabla f(x^\circ), l)$$

где $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x)$ - градиент f в т. x.

▷ $\frac{f(x^0+hl)-f(x^0)}{h} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\cdot h l_k + \bar{\bar{o}}(|h|\cdot \underbrace{\|l\|}_{=1})}{h} =$

$= \sum\limits_{1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\, l_k + \bar{\bar{o}}(1)$ при $h \to 0$. ◁

Следствие! $\frac{\partial f}{\partial l}(x^0) = (\nabla f(x^0), l) = \underbrace{|\nabla f(x^0)|}_{const}\cdot\underbrace{|l|}_{1}\cdot$

$\cdot\cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\nabla f(x^0), l)$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial l} \to \max$, если $\varphi = 0$, т.е. $\nabla f \uparrow\uparrow l$

$\to \min$, если $\varphi = \pi$, т.е. $\nabla f \uparrow\downarrow l$.