15.09.21 ОМСС дз от семинара 1

(1) $\begin{cases} u_1 = \xi_1(e^{k_1 t}-1) \\ u_2 = \xi_2(e^{k_2 t}-1) \\ u_3 = \xi_3(e^{k_3 t}-1) \end{cases}$ Найти: $\bar v(\bar x,t)=?$ $\bar a(\bar x,t)=?$

Решение: $\bar x = \bar\xi + \bar u$

$$\Rightarrow \bar v^{(\xi,t)} = \frac{d\bar x}{dt} = \frac{d(\bar\xi+\bar u)}{dt} = \frac{d\bar u}{dt} = (\xi_1\cdot k_1\cdot e^{k_1 t};\ \xi_2\cdot k_2\cdot e^{k_2 t};\ \xi_3\cdot k_3\cdot e^{k_3 t})$$

Надо подставить $\bar\xi = \bar\xi(\bar x,t)$.

Имеем: $\bar x = \bar\xi + \bar u = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_1(e^{k_1 t}-1)\\ \xi_2(e^{k_2 t}-1)\\ \xi_3(e^{k_3 t}-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\cdot e^{k_1 t}\\ \xi_2\cdot e^{k_2 t}\\ \xi_3\cdot e^{k_3 t}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = x_1\cdot e^{-k_1 t}\\ \xi_2 = x_2\cdot e^{-k_2 t}\\ \xi_3 = x_3\cdot e^{-k_3 t}\end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar v(\bar x,t) = \bar v(\bar\xi,t)\Big|_{\bar\xi=\bar\xi(\bar x,t)} = (k_1\cdot x_1;\ k_2\cdot x_2;\ k_3\cdot x_3)}$$

$$\Rightarrow \bar a^{(\xi,t)} = \frac{d\bar v}{dt} = \left(k_1\cdot\frac{dx_1}{dt};\ k_2\cdot\frac{dx_2}{dt};\ k_3\cdot\frac{dx_3}{dt}\right) = (k_1\cdot k_1\cdot\xi_1\cdot e^{k_1 t};\ k_2\cdot k_2\cdot\xi_2\cdot e^{k_2 t};\ k_3\cdot k_3\cdot\xi_3\cdot e^{k_3 t})$$

$\begin{cases} x_1 = \xi_1\cdot e^{k_1 t}\\ x_2 = \xi_2\cdot e^{k_2 t}\\ x_3 = \xi_3\cdot e^{k_3 t}\end{cases}$

$$\Rightarrow \bar a(\bar x,t) = \bar a(\bar\xi,t)\Big|_{\bar\xi=\bar\xi(\bar x,t)} = \boxed{(k_1^2 x_1;\ k_2^2 x_2;\ k_3^2\cdot x_3)}$$

Ответ: $\bar v(\bar x,t) = (k_1 x_1; k_2 x_2; k_3 x_3)$
$\bar a(\bar x,t) = (k_1^2 x_1; k_2^2 x_2; k_3^2 x_3)$

(2) $\begin{cases} u_1 = -\xi_1(1-\cos kt) - \xi_2\sin kt \\ u_2 = \xi_1\sin kt - \xi_2(1-\cos kt) \\ u_3 = 0\end{cases}$ Найти: $\bar v(\bar x,t)=?$ $\bar a(\bar x,t)=?$

Решение: $\bar x = \bar\xi + \bar u = \begin{pmatrix}\xi_1\cos kt - \xi_2\sin kt\\ \xi_1\sin kt + \xi_2\cos kt\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1\cos kt - \xi_2\sin kt = x_1 \ \big|\cos kt\\ \xi_1\sin kt + \xi_2\cos kt = x_2 \ \big|\sin kt\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_1 = x_1\cos kt + x_2\sin kt\\ \xi_2 = x_2\cos kt - x_1\sin kt\end{cases}$

$$\Rightarrow \bar v(\bar\xi,t) = \frac{d\bar x}{dt} = \begin{pmatrix}-k\xi_1\sin kt - k\xi_2\cos kt\\ k\xi_1\cos kt - k\cdot\xi_2\sin kt\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\xi_1\sin kt + \xi_2\cos kt)\\ k(\xi_1\cos kt - \xi_2\sin kt)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar v(\bar x,t) = \bar v(\bar\xi,t)\Big|_{\bar\xi=\bar\xi(\bar x,t)} = \boxed{\begin{pmatrix}-k\cdot x_2\\ kx_1\\ 0\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \bar a(\bar\xi,t) = \begin{pmatrix}-k^2\xi_1\cdot\cos kt + k^2\xi_2\sin kt\\ -k^2\xi_1\cdot\sin kt - k^2\xi_2\cos kt\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k^2(\xi_1\cos kt - \xi_2\sin kt)\\ -k^2(\xi_1\sin kt + \xi_2\cos kt)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar a(\bar x,t) = \bar a(\bar\xi,t)\Big|_{\bar\xi=\bar\xi(\bar x,t)} = \boxed{\begin{pmatrix}-k^2\cdot x_1\\ -k^2\cdot x_2\\ 0\end{pmatrix}}$$

Ответ: $\bar v(\bar x,t) = (-kx_2; kx_1; 0)$
$\bar a(\bar x,t) = (-k^2 x_1; -k^2 x_2; 0)$

(3) **Дано:** $\bar{v}(tx_1; tx_2; tx_3)$

Найти: $\bar{u}(\xi, t)$

Решение:
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = tx_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = tx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = tx_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{x_1} = t\,dt \\ \frac{dx_2}{dt} = t\,dt \\ \frac{dx_3}{dt} = t\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \\ x_2 = c_2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \\ x_3 = c_3 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \end{cases}$$

Но $\bar{x}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \xi_1 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \\ x_2 = \xi_2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \\ x_3 = \xi_3 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{u} = \bar{x} - \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 e^{\frac{t^2}{2}} - \xi_1 \\ \xi_2 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} - \xi_2 \\ \xi_3 \cdot e^{\frac{t^2}{2}} - \xi_3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \bar{u}(\xi, t) = \left(\xi_1\left(e^{\frac{t^2}{2}} - 1\right); \xi_2\left(e^{\frac{t^2}{2}} - 1\right); \xi_3\left(e^{\frac{t^2}{2}} - 1\right)\right)}$$

(4)
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k \cdot \frac{x_1}{t} \\ \frac{dx_2}{dt} = k \cdot \frac{x_2}{t} \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases}$$
найти: $\bar{v}(\xi, t)$.

Решение:
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{x_1} = k \cdot \frac{dt}{t} \\ \frac{dx_2}{x_2} = k \cdot \frac{dt}{t} \\ dx_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 = k \cdot \ln t + c_1 \\ \ln x_2 = k \cdot \ln t + c_2 \\ x_3 = c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \cdot t^k \\ x_2 = c_2 \cdot t^k \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Заметим, что при $t=0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, т.е. $\bar{x} \to \bar{\xi}$ – неоднозначно, т.е. $\bar{\xi}$ через $\bar{x}$ мы не выразим.

но возьмём тогда в качестве ~~[illegible]~~ момента, в который точкам приклеивают метки – момент $t=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\big|_{t=1} = c_1 \\ x_2\big|_{t=1} = c_2 \\ x_3\big|_{t=2} = c_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \cdot t^k \\ \tilde{\xi}_2 \cdot t^k \\ \tilde{\xi}_3 \end{pmatrix}, \text{ где } \tilde{\xi}_i = x_i\Big|_{t=1}.$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = \tilde{\xi} + \bar{v}(t-1)$$

$$\Rightarrow \bar{v}(t-1) = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1(t^k - 1) \\ \tilde{\xi}_2(t^k - 1) \\ \tilde{\xi}_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{t-1=\tau: \\ t=\tau+1}}{\Rightarrow} \boxed{\tilde{v}(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \cdot ((\tau+1)^k - 1) \\ \tilde{\xi}_2 \cdot ((\tau+1)^k - 1) \\ \tilde{\xi}_3 \end{pmatrix}}$$

Ответ: