(20) Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.

Линейное однородное ур-ие с постоянными коэфф-ами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_j = const \quad (1)$$

Составим характеристический многочлен:

$$\chi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2)$$

- Если искать решение (1) в виде $y = e^{\lambda x}$, то получим уравнение (2)
- Если λ - корень (2), то $e^{\lambda x}$ - решение (1)

По основной теореме алгебры (2) имеет n корней с учётом кратности

1) Все n корней $\in \mathbb{R}$ и различны $\Rightarrow y_j = e^{\lambda_j x}$ - решен. и их n штук, они лин. нез $\Rightarrow$ ФСР

2) корни $\in \mathbb{R}$, но они кратные
Тогда $\exists$ есть корень λ кратности $k \Rightarrow$
решение ищем в виде $(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$

Для $x^l e^{\lambda x}$, $0 \le l \le k-1$:

$$(x^l e^{\lambda x})^{(j)} = \sum_{m=0}^{j} C_j^m (x^l)^{(j-m)} (e^{\lambda x})^{(m)} \ominus \text{ф-ла Лейбница}$$

$$= \sum_{m=0}^{j} \frac{j!}{m!(j-m)!} \cdot l \cdot \ldots \cdot (l-(j-m)+1) x^{l-j+m} \lambda^m e^{\lambda x}, \quad l \ge j-m$$

$= 0$, иначе

Подставим $(x^l e^{\lambda x})$, $0 \le l \le k-1$ в (1)

$$e^{\lambda x}\Big(a_0 \sum_0^n \lambda^m C_n^m (x^l)^{(n-m)} + a_1 \sum_0^{n-1} \lambda^m C_{n-1}^m (x^l)^{(n-1-m)} +$$

$$\ldots + a_{n-1} \sum_0^1 \lambda^m C_1^m (x^l)^{(1-m)} + a_n x^l\Big) =$$

$= e^{\lambda x}\left(a_0 \sum_0^n \lambda^{n-m} C_n^m (x^l)^{(m)} + \ldots + a_{n-1} \sum_0^1 \lambda^{1-m} C_1^m (x^l)^{(m)} +\right.$

$\left. + a_n x^l\right) =$

$= e^{\lambda x}\Big(x^l \overbrace{(a_n + \lambda a_{n-1} + \ldots + \lambda^n a_0)}^{\chi(\lambda)=0} + l x^l (0 + a_{n-1} + \ldots +$

$+ a_1 (n-1)\lambda^{n-2} + a_0 n \lambda^{n-1}) + \ldots + l(l-1)\ldots 1 \cdot x^0 (a_0 \lambda^{n-l} C_n^l + \ldots$

$\ldots + a_{n-l} \lambda^0 \cdot C_{n-l}^l + 0 + \ldots + 0) + 0 + \ldots + 0\Big) =$

$= e^{\lambda x}\Big(x^l \underbrace{\chi(\lambda)}_{=0} + l x^{l-1} \underbrace{\chi'(\lambda)}_{=0} + \frac{l(l-1)}{2!}\chi''(\lambda) + \ldots + \frac{l!}{l!}\underbrace{\chi^{(l)}(\lambda)}_{=0}\Big) = 0$

т.к. λ - имеет кратность k, то $\chi^{(l)}(\lambda) = 0$
$0 \le l \le k-1$

3) есть $\in \mathbb{R}$ корни, есть $\in \mathbb{C}$
$\Rightarrow$ есть корни $\alpha \pm \beta i$ (сопряженные)

Аналогично будут решения вида $x^k e^{(\alpha \pm i\beta)x} =$

$= x^k(\cos\beta x \pm i \sin\beta x)e^{\alpha x}$, k - меньше кратности корня

Их лин. комбинация тоже решения $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Sigma}{2} : x^k e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\frac{-}{2i} : x^k e^{\alpha x}\sin\beta x$ — решения

$\Rightarrow$ берём ФСР: $\overbrace{(C_1 + C_2 x + \ldots + C_{k-1}x^{k-1})}^{g_{k-1}(x)} e^{\alpha x}\cos\beta x$
$(D_1 + D_2 x + \ldots + D_{k-1}x^{k-1}) e^{\alpha x}\sin\beta x$

Лин. независимость:

Пусть $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$ и $\mathcal{L} = \chi(\underbrace{\mathcal{D}}_{=d/dx}) = (\mathcal{D} - \lambda_1 I)^{k_1} \ldots (\mathcal{D} - \lambda_p I)^{k_p}$

Пусть $f_{s,\mu} = x^s e^{\mu x}$

$\Rightarrow (\mathcal{D} - \lambda I) f_{s,\mu} = s x^{s-1} e^{\mu x} + \mu x^s e^{\mu x} - \lambda x^s e^{\mu x}$

Если $\mu = \lambda$: $f_{s,\mu} \to s f_{s-1,\mu}$

$\mu \ne \lambda$: $f_{s,\mu} \to s f_{s-1,\mu} + (\mu - \lambda) f_{s,\mu}$

Пусть $P_{r,\mu} = \{ q(x) e^{\mu x} \mid \deg q(x) \le r \} \Rightarrow$

$$(\mathcal{D}-\lambda I)P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu}, & \text{если } \mu\neq\lambda \\ P_{r-1,\mu}, & \text{если } \mu=\lambda \text{ и } r>0 \\ 0, & \text{если } \mu=\lambda \text{ и } r=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{D}-\lambda I)^k P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu}, & \mu\neq\lambda \\ P_{r-k,\mu}, & \mu=\lambda \text{ и } r\geq k \\ 0, & \mu=\lambda \text{ и } r<k \end{cases}$$

Следствие: $\mathcal{L}P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu}, & \text{если } \mu\notin\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\} \\ P_{r-k_i,\mu}, & \text{если } \mu=\lambda_i \text{ и } r\geq k_i \\ 0, & \text{если } \mu=\lambda_i \text{ и } r<k_i \end{cases}$

От противного: $\exists\, f_{j,\mu}$ – лин. зав., т.е.

$\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=0}^{k_i} c_{ij} f_{j,\mu_i}\equiv 0$, причём не все $c_{ij}=0$

Сгруппируем по $e^{\lambda_i x}$: $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=0}^{k_i} c_{ij} f_{j,\mu_i} = \underbrace{\hat{p}_1(x)e^{\lambda_1 x}+\dots+\hat{p}_p(x)e^{\lambda_p x}}_{\equiv 0}$

где $\hat{p}_j(t)$ – многочлены. Б.О.О. мн-н $\hat{p}_p(t)\not\equiv 0$ ← есть ненулевой коэфф-т

$\Rightarrow \hat{p}_1(x)+\hat{p}_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\dots+\hat{p}_p(x)e^{(\lambda_p-\lambda_1)x}\equiv 0 \;\Big|\left(\frac{d}{dx}\right)^{\deg \hat{p}_1+1}$

$\Rightarrow$ т.к. $\lambda_j-\lambda_1\neq 0\ \forall j=\overline{2,p}$, то $\hat{p}_{k,2}(x)$ – у них сохраняется степень как у $\hat{p}_k(x)$, $k=\overline{2,p}$

делим на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$ $\Rightarrow \hat{P}_{2,2}(x)+\dots+\hat{P}_{p,2}(x)e^{(\lambda_p-\lambda_2)x}\equiv 0 \;\Big|\left(\frac{d}{dx}\right)^{a}$, $a=\deg\hat{P}_{2,2}+1$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{P}_{p,p-1}(x)\underbrace{e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})x}}_{\neq 0}\equiv 0 \Rightarrow \hat{P}_{p,p-1}\equiv 0 \Rightarrow$?!.

Правая часть специального вида:

$a_n y^{(n)}+\dots+a_n y = \underbrace{P_m(x)}_{\text{мн-н с } \deg=m}e^{ax}\in P_{m,a}$

$\exists$ частное решение вида: $y_1 = x^r Q_m(x)e^{ax}\in P_{m+r,a}$

$r=0$, если a – не корень $\chi(\lambda)$

$r=k_i$, если $a=\lambda_i$

$\mathcal{L}P_{m+r,a}=P_{m,a}$

$\Rightarrow \exists y\in P_{m+r,a} / \mathcal{L}y=f\in P_{m,a}$

$Q_m(x)$ – ищем при подстановке

Если правая часть содержит $\cos bx$ и $\sin bx$, т.е.

$e^{ax}(P_n \cos bx + Q_m \sin bx)$, то $y_1 = x^r e^{ax}(P_l(x)\cos bx + T_l(x)\sin bx)$

где $r = 0$, если $a + ib$ - не корень $\chi(\lambda)$

$r = k_j$, если $a + ib = \lambda_j$

$l = \max(n, m)$.

Линейное неоднородное ур-нение с пост. коэффициентами

$$Ly = a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \in C(D)$$

Решается методом вариации постоянной

Пусть нашли общее решение для $Ly = 0$: $y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$

$\Rightarrow$ для $Ly = f$ решение ищем в виде:

$y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n$ и C_k из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0} \end{cases}$$