Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 14

Грубые уравнения с частными производными первого порядка

Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \beta < \frac{1}{2}$, $T > 0$ и $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}_g^{\beta}[0, 2T]$.

Рассмотрим грубое транспортное уравнение

$$du + \langle b, \nabla u \rangle dZ = 0$$

с начальным условием $u(T, x) = g(x)$. Функции $b_i^j(x)$, $g(x)$ являются ограниченными, бесконечно гладкими с ограниченными производными. Будем понимать под классическим решением такую непрерывную функцию u на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, что $u(T, x) = g(x)$, функция $x \to u(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для всех $s < t$ верно равенство

$$u(t, x) - u(s, x) = \int_s^t \langle b(x), \nabla_x u(\tau, x) \rangle \, dZ_\tau,$$

где интеграл в правой части является грубым интегралом по $(Z, \mathbb{Z})$ от

$$Y_t = \langle b(x), \nabla_x u(t, x) \rangle, \quad Y'_t = \langle b(x), \nabla_x \bigl(\langle b(x), \nabla_x u(t, x) \rangle\bigr) \rangle.$$

Слабым решением называем такую непрерывную функцию u на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, что $u(T, x) = g(x)$, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и для всех $s < t$ справедливо равенство

$$\int \varphi(x) u(t, x) \, dx - \int \varphi(x) u(s, x) \, dx = \int_s^t \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x)) u(\tau, x) \, dx \, dZ_\tau,$$

где интеграл в правой части является грубым интегралом по $(Z, \mathbb{Z})$ от

$$Y_t = \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x)) u(t, x) \, dx, \quad Y'_t = \int \mathrm{div}(b(x)\mathrm{div}(b(x)\varphi(x))) u(t, x) \, dx.$$

Мы далее ограничимся обсуждением слабого решения.

Для построения решения рассмотрим такие гладкие кривые Z_t^ε на $[0, 2T]$, что

$$(Z^\varepsilon, \mathbb{Z}^\varepsilon) \to (Z, \mathbb{Z})$$

в $\mathfrak{C}^\alpha[0, 2T]$, причем грубые траектории $(Z^\varepsilon, \mathbb{Z}^\varepsilon)$ равномерно (по ε) ограничены в пространстве $\mathfrak{C}^\beta[0, 2T]$ и

$$\mathbb{Z}_{st}^\varepsilon = \int_s^t Z_{s\tau}^\varepsilon \otimes \, dZ_\tau^\varepsilon.$$

Пусть u^ε — решение классического транспортного уравнения

$$u_t^\varepsilon + \langle b\dot{Z}_t^\varepsilon, \nabla_x u^\varepsilon \rangle - 0$$

с начальным условием $u^\varepsilon(T, x) = g(x)$. Решение u^ε можно построить с помощью характеристик. Для всяких $(\tau, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ через $X_t^\varepsilon(\tau, y)$ обозначим решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt} X_t = b(X_t) Z_t^\varepsilon, \quad X_\tau = y, \quad t \in [\tau, T].$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} u^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y)) = u_t^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y)) + \langle b(X_t^\varepsilon(\tau, y)) Z_t^\varepsilon, \nabla_x u_t^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y)) \rangle = 0$$

и функция $t \to u^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y))$ постоянна. Следовательно, верно равенство

$$u^\varepsilon(\tau, y) = g(X_T^\varepsilon(\tau, y)).$$

Можно проверить, что это равенство действительно определяет классическое решение.

В силу непрерывности отображения Ito–Lyons кривые $X_t^\varepsilon(\tau,y)$ сходятся в $C^\alpha[\tau,T]$ при $\varepsilon\to 0$ к решению $X_t(\tau,y)$ задачи Коши для грубого дифференциального уравнения

$$dX_t = b(X_t)\,dZ_t, \quad X_\tau = y, \quad t\in[\tau,T].$$

Поскольку g — гладкая функция, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(\tau,y) = u(\tau,y) = g(X_T(\tau,y)).$$

Предложение 1. *Функция u непрерывна на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ и является слабым решением грубого транспортного уравнения*

$$du + \langle b,\nabla u\rangle dZ = 0.$$

Для доказательства нам потребуется утверждение о гладкой зависимости от начальной точки решения грубого дифференциального уравнения. Справедлив следующий результат (см. теорема 8.10 в книге P.Friz, M.Hairer).

Лемма 1. *Пусть $\|Z\|_\beta + \|\mathbb{Z}\|_{2\beta}\le M$ и $|y|\le R$. Решение $X_t(\tau,y)$ бесконечно дифференцируемо по y, причем для всякого $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ найдется такая константа $C(k,M,R,T)>0$, что*

$$\|D_y^k X(\tau,y)\|_{\beta,[\tau,T]} \le C(k,M,R,T),$$

причем эта константа не зависит от τ. Кроме того, $D_y^k X_t$ является решение грубого дифференциального уравнения, которое получается дифференцированием по y грубого уравнения $dX_t = b(X_t)dZ_t$.

Докажем предложение.

Доказательство. Из этой леммы следует гладкость функции $u(\tau,y) = g(X_T(\tau,y))$ по y.

Пусть $s<t$. Имеет место оценка

$$\begin{aligned} X_T(t,y) - X_T(s,y) &= X_T(t,y) - X_T(t, X_t(s,y)) = \\ &= D_y X_T(t,y)\big(y - X_t(s,y)\big) + O(|y - X_t(s,y)|^2), \end{aligned}$$

причем константа в оценке $O(|y-X_t(s,y)|^2)$ зависит лишь от M,R,T. Кривая $t\to X_t(s,y)$ контролируема относительно Z и

$$X_t(s,y) - y = X_t(s,y) - X_s(s,y) = b(y)Z_{st} + R^X_{st},$$

причем $\|R^X\|_{2\beta}$ оценивается константой, зависящей лишь от M,R,T. Следовательно,

$$X_T(t,y) - X_T(s,y) = -D_y X_T(t,y) b(y) Z_{st} + O(|t-s|^{2\beta}).$$

Заметим, что $\|D_y X_T(\,\cdot\,,y)b(y)\|_\beta \le C(M,R,T)$. Кривая $Y_t = g(X_T(t,y))$ контролируема относительно Z, причем

$$Y_t' = -Dg(X_T(t,y))D_y X_T(t,y) b(y) = -\langle b(y), \nabla_y u(t,y)\rangle.$$

Следовательно, для всякой функции $\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ кривая

$$Y_t = \int \Phi(x) u(t,x)\,dx$$

контролируема относительно Z, причем

$$Y_t' = -\int \Phi(x)\langle b(x), \nabla_x u(t,x)\rangle\,dx = \int \operatorname{div}(b(x)\Phi(x)) u(t,x)\,dx,$$

причем норма $\|Y\|_{\mathcal{D}_Z^{2\beta}}$ ограничена константой, зависящей только от Φ, M, R, T.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для u^ε справедливо равенство

$$\int \varphi(x)u^\varepsilon(t,x)\,dx - \int \varphi(x)u^\varepsilon(s,x)\,dx = \int_s^t \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u^\varepsilon(\tau,x)\,dx\,dZ^\varepsilon_\tau.$$

Будем интеграл в правой части понимать в виде грубого интеграла от

$$Y^\varepsilon_t = \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u^\varepsilon(t,x)\,dx, \quad (Y^\varepsilon_t)' = \int \mathrm{div}(b(x)\mathrm{div}(b(x)\varphi(x)))u^\varepsilon(t,x)\,dx.$$

Поскольку $\|Y^\varepsilon\|_{\mathcal{D}^{2\beta}_{Z^\varepsilon}}$ равномерно ограничены, то можно (выбирая подпоследовательность) считать, что $\|Y - Y^\varepsilon\|_{\mathcal{D}^{2\beta}_{Z^\varepsilon}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где

$$Y_t = \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u(t,x)\,dx, \quad Y'_t = \int \mathrm{div}(b(x)\mathrm{div}(b(x)\varphi(x)))u(t,x)\,dx.$$

Используя непрерывную зависимость грубого интеграла от интегрируемой кривой и грубой траектории, переходим к пределу при ε и получаем

$$\int \varphi(x)u(t,x)\,dx - \int \varphi(x)u(s,x)\,dx = \int_s^t \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u(\tau,x)\,dx\,dZ_\tau.$$

$\square$

Пусть $(B, \mathbb{B})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу и построенная с помощью интеграла Стратоновича.

Если $(Z, \mathbb{Z}) = (B, \mathbb{B})$, то слабое решение $u(t,x,\omega)$ грубого уравнения $du + \langle b, \nabla u\rangle dB$, является решением стохастического транспортного уравнения

$$du + \langle b, \nabla u\rangle \circ dw_t = 0.$$

Грубые уравнения с частными производными второго порядка

Рассмотрим на $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ общее грубое параболическое уравнение с частными производными

$$du = Lu + \Gamma(u)dZ,$$

где

$$Lu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\sigma\sigma^t D^2 u\big) + \langle b, \nabla u\rangle + cu,$$
$$G_i(u) = \langle \beta_i, \nabla u\rangle + \gamma_i u.$$

Кроме того, мы предполагаем, что решение удовлетворяет условию $u(x,T) = g(x)$. Слабым решением называем такую непрерывную функцию u на $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, что $u(x,T) = g(x)$ для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$\int u(x,t)\varphi(x)\,dx - \int u(x,s)\varphi(x)\,dx = \int_s^t \int uL^*\varphi\,dx\,d\tau + \int_s^t \int uG^*(\varphi)\,dx\,dZ_\tau,$$

где L^*, G^* — формально сопряженные операторы к L и G (просто результат интегрирования по частям), а второй интеграл в правой части является грубым интегралом по $(Z, \mathbb{Z})$ от

$$Y_t = \int u(x,t)G^*(\varphi)(x)\,dx, \quad Y'_t = \int u(x,t)G^*\big(G^*(\varphi)\big)(x)\,dx.$$

Предложение 2. *Пусть все коэффициенты являются бесконечно гладкими ограниченными функциями с ограниченными производными. Тогда слабое решение существует, причем является пределом решений u^ε уравнений*

$$u^\varepsilon_t = Lu^\varepsilon + G(u^\varepsilon)\dot{Z}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(x,T) = g(x),$$

где $(Z^\varepsilon, \mathbb{Z}^\varepsilon)$ *— гладкие кривые, которые сходятся к пространстве грубых траекторий к* $(Z, \mathbb{Z})$.

Доказательство повторяет (в основном) рассуждения, проведенные выше для более простого транспортного уравнения. Первым важным наблюдением является представление решения u^ε с помощью формулы Феймана–Каца

$$u^\varepsilon(y,\tau) = \mathbb{E}g(X_T^{\tau,y})\exp\Bigl(\int_\tau^T c(X_s^{\tau,y})\,ds + \int_\tau^T \gamma(X_s^{\tau,y})\dot{Z}_s^\varepsilon\,ds\Bigr).$$

Случайный процесс $X_t^{\tau,y}$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \sigma(X_t)\,dw_t + \bigl(b(X_t) + \beta(X_t)\dot{Z}_s^\varepsilon\bigr)\,dt, \quad X_\tau = y,$$

Формула Феймана-Каца (если уже известно существование гладкого решения u^ε) выводится из формулы Ито, примененной к

$$u(t, X_t^{\tau,y})\exp\Bigl(\int_\tau^t c(X_s^{\tau,y})\,ds + \int_\tau^t \gamma(X_s^{\tau,y})\dot{Z}_s^\varepsilon\,ds\Bigr).$$

Далее для обоснования предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ надо переписать стохастическое уравнение в виде грубого дифференциального уравнения.

Теорема о восстановлении

Напомним, что лемма о сшивке является ключевым утверждение для построения грубого интеграла и анализа грубых дифференциальных уравнений. Однако лемма о сшивке является исключительно одномерным утверждением. Ключевым утверждением **теории регулярных структур** является теорема о восстановлении, которая обобщает лемму о сшивке на многомерные пространства.

Для получения аналога леммы о сшивке, запишем условие и заключение этой леммы в терминах действия обобщенных функций.

Пусть $A_{st}\colon \Delta_T = \{(s,t)\colon 0 \le s \le t \le T\} \to \mathbb{R}$. Предположим, что $s \to A_{st}$ — непрерывно дифференцируемая функция и $F_t(s) = \partial_s A_{st}$. Будем предполагать также, что кривая γ_t, которая строится в лемме о сшивке по A_{st}, является непрерывно дифференцируемым отображением. Пусть $s < u < t$ и $\varphi_s^{u-s}(\tau) = (u-s)^{-1}I_{[s,u]}(\tau)$. Тогда

$$\int \bigl(F_t(\tau) - F_u(\tau)\bigr)\varphi_s^{u-s}(\tau)\,d\tau = (u-s)^{-1}\int_s^u \bigl(\partial_\tau A_{\tau t} - \partial_\tau A_{\tau u}\bigr)\,d\tau = (u-s)^{-1}\bigl(A_{ut} - A_{st} + A_{su}\bigr).$$

Если выполнено условие $|A_{ut} - A_{st} + A_{su}| \le C|t-s|^{1+\varepsilon}$, то

$$\Bigl|\int \bigl(F_t(\tau) - F_u(\tau)\bigr)\varphi_s^{u-s}(\tau)\,d\tau\Bigr| \le C|u-s|^{-1}\bigl(|u-s| + |t-u|\bigr)^{1+\varepsilon}.$$

Кривая γ_t связана с A_{st} неравенством

$$|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}| \le C'|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Тогда

$$\int \bigl(\gamma'(\tau) - F_s(\tau)\bigr)\varphi_s^{u-s}(\tau)\,d\tau = \int \bigl(\gamma'(\tau) - \partial_\tau A_{s\tau}\bigr)\varphi_s^{u-s}(\tau)\,d\tau = (u-s)^{-1}\bigl(\gamma_u - \gamma_s - A_{su}\bigr)$$

и выполняется неравенство

$$\Bigl|\int \bigl(\gamma'(\tau) - F_s(\tau)\bigr)\varphi_s^{u-s}(\tau)\,d\tau\Bigr| \le C'|u-s|^\varepsilon.$$

Итак, лемму о сшивке можно неформально переформулировать следующим образом: для семейства обобщенных функций (F_t) и функции $\varphi(\tau) = I_{[0,1]}$, удовлетворяющих условию

$$\left|\langle F_t, \varphi_s^{u-s}\rangle - \langle F_u, \varphi_s^{u-s}\rangle\right| \le C|u-s|^{-1}\bigl(|u-s| + |t-u|\bigr)^{1+\varepsilon},$$

где $\varphi_s^{u-s}(\tau) = (u-s)^{-1}\varphi\bigl(\frac{\tau-s}{u-s}\bigr)$, существует такая обобщенная функция $F = \gamma'$, что

$$\left|\langle F, \varphi_s^{u-s}\rangle - \langle F_s, \varphi_s^{u-s}\rangle\right| \le C'|u-s|^{\varepsilon}.$$

Грубо говоря, для семейства обобщенных функций (F_t), которое «непрерывно» зависит от t, существует обобщенная функция F, которая локально приближается этим семейством.

Рассмотрим еще один пример. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^d$. Для всякого $y \in \mathbb{R}^d$ через F_y обозначим регулярную обобщенную функцию

$$x \to f(y) + \langle \nabla f(y), x-y\rangle.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\{x\colon |x|<1\})$ и $\varphi_y^\delta(x) = \delta^{-d}\varphi\bigl(\frac{x-y}{\delta}\bigr)$, $\delta > 0$. Тогда

$$\left|\langle f, \varphi_y^\delta\rangle - \langle F_y, \varphi_y^\delta\rangle\right| \le \int\left|f(x) - f(y) + \langle \nabla f(y), x-y\rangle\right|\varphi_y^\delta(x)\,dx \le C(y)\delta^2.$$

Заметим, что

$$\left|f(y) + \langle\nabla f(y), x-y\rangle - f(z) - \langle \nabla f(z), x-z\rangle\right| \le$$
$$\left|f(y) - f(z) - \langle\nabla f(z), z-y\rangle\right| + \left|\langle \nabla f(y) - f(z), x-y\rangle\right| \le$$
$$C|y-z|^2 + C|x-y||y-z| \le C(|y-x| + |y-z|)^2.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\left|\langle F_z, \varphi_y^\delta\rangle - \langle F_y, \varphi_y^\delta\rangle\right| \le \bigl(|y-z| + \delta\bigr)^2.$$

В этом примере семейство обобщенных функций (F_y), каждая из которых является первыми двумя слагаемыми разложения Тейлора функции f, приближает в каждой точке функцию f.

Итак, отталкиваясь от рассмотренных примеров, можно сформулировать следующий вопрос. Когда для данного семейства обобщенных функций $(F_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ существует обобщенная функция F, которая локально хорошо приближается этим семейством? Ответ на этот вопрос дает теорема о восстановлении.

Теорема 1. (M.Harier 2014, L.Zambotti, F.Caravenna 2020) *Пусть $(F_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ — семейство обобщенных функций, причем для всякой функции $\zeta \in \mathcal{D}$ отображение $x \to \langle F_x, \zeta\rangle$ измеримо. Пусть $\varepsilon_n = 2^{-n}$. Предположим, что существует такие числа $\gamma > 0$, $\alpha \le \gamma$ и обобщенная функция $\varphi \in \mathcal{D}$, что $\int \varphi\,dx \ne 0$ и для всякого компакта K справедлива оценка*

$$\left|\langle F_y, \varphi_x^{\varepsilon_n}\rangle - \langle F_x, \varphi_x^{\varepsilon_n}\rangle\right| \le C(K)\varepsilon_n^{\alpha}\Bigl(|x-y| + \varepsilon_n\Bigr)^{\gamma-\alpha} \quad \forall x, y \in K, \quad \varphi_x^{\varepsilon_n}(z) = \varepsilon_n^{-d}\varphi\bigl(\tfrac{x-z}{\varepsilon_n}\bigr).$$

Тогда существует единственная обобщенная функция $RF \in \mathcal{D}'$, для которой на каждом компакте K для всякой функции $\psi \in \mathcal{D}(B(0,1))$, $\|\psi\|_{C^m} \le 1$, $m > -\alpha$, справедливо неравенство

$$\left|\langle RF, \psi_x^{\varepsilon_n}\rangle - \langle F, \psi_x^{\varepsilon_n}\rangle\right| \le C(K,m)\varepsilon_n^{\gamma} \quad \forall x \in K.$$