20.09.20. Спецкурс Бунинская, ДЗ3. Токаева Александра 409

① Док-ть, что логнорм. распр масштабно инвар, но не обладает масштабным парам.

опр. Семейство распр. наз. масштабно инвар, если с любым распр. Y, распр. cY тоже принадлежит семейству $\forall c>0$.

опр. Масшт.-инвар. семейство обладает масшт. параметром θ, если у сл.вел cY только θ переходит в $c\theta$, а все остальные параметры такие же, как у X.

Пусть $Y \sim LogNorm(\mu, \sigma^2)$, т.е $Y = e^X$, где $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Чтобы узнать распр. сл.вел $Z = cY$, нам дост. посмотреть, например, на ее функцию распределения (т.к есть вз-однозн. соотв. между распределениями и их функциями распределения).

Найдем ф.р $Y = e^X$: $P(Y \le x) = P(e^X \le x) = P(X \le \ln x) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\Big)$

$\Rightarrow$ ф.р $Z = c\cdot e^X$: $P(Z \le x) = P(c\cdot e^X \le x) \underset{c>0}{=} P\big(e^X \le \frac{x}{c}\big) = \Phi\Big(\frac{\ln(\frac{x}{c}) - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\ln x - (\ln c + \mu)}{\sigma}\Big)$

$\Rightarrow$ в ф.р. Z мы угадываем ф.р. $LogNorm(\ln c + \mu; \sigma^2)$

$\Rightarrow Z = c\cdot Y$ — тоже $\in$ классу логнорм. распр $\Rightarrow$ логнорм. распр. масштабно инвар.
но масшт. параметра нет, т.к 2-й параметр σ^2 — не изменился
а 1-й параметр: $\mu \to \ln c + \mu$, а не $\mu \to c\mu$. чтд.

② Док-ть, что $Pois(\lambda)$ получается из $NB(\alpha, \beta)$ при $\begin{cases} \alpha\beta = \lambda \\ \beta \to 0 \end{cases}$

Дост. проверить, что $p_k^{NB} \to p_k^{Pois}$ при указанных условиях.

$Pois(\lambda)$: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$; $k = 0, 1, 2 \dots$

$NB(\alpha,\beta)$: $p_k = C^k_{k+\alpha-1} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}} = C^k_{k+\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha$ т.е α - успехов, k - неудач в серии испытаний до α-го успеха

имеем: $p_k^{NB(\alpha,\beta)} = C^k_{k+\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha = \frac{(k+\alpha-1)!}{k!(\alpha-1)!}\cdot\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^\alpha} = \frac{(k+\alpha-1)(k+\alpha-2)\dots\alpha}{k!}\cdot\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^\alpha} \overset{\alpha=\frac{\lambda}{\beta}}{=}$

$= \frac{(k+\frac{\lambda}{\beta}-1)(k+\frac{\lambda}{\beta}-2)\dots\frac{\lambda}{\beta}\cdot\beta^k}{k!}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^{\lambda/\beta}} = \frac{(k\beta+\lambda-\beta)(k\beta+\lambda-2\beta)\dots\lambda}{k!}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{\left((1+\beta)^{1/\beta}\right)^\lambda} \xrightarrow[\beta\to0]{}$

$\xrightarrow[\beta\to0]{} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{e^\lambda} = \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!} = p_k^{Pois(\lambda)}$

③ Все ли распр. типа (a,b,0) являются беск. делимыми?

<u>Опр.</u> сл. вел. X наз. беск. делимой, если $\forall n$ $X = Y_1 + \ldots + Y_n$; Y_i — нор св

то есть $\forall n$: $P_X(z) = \left(P_{Y_i}(z)\right)^n$, где $P = Ez^X$ — произв. ф-ция сл. вел. X.

то есть произв. ф-ция X явл. n-й степенью произв. ф-ции какой-то сл. вел Y_i.

В классе (a,b,0) всего 4 распр: биномиальное, пуас, отр. бином. и геометрическое.

а) $Bin(n,p)$: $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $k = 0 \ldots n$

$$P_X(z) = Ez^X = \sum_{k=0}^{n} z^k \cdot C_n^k p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (zp)^k \cdot (1-p)^{n-k} \overset{(x+y)^n}{=} (1-p+zp)^n = \left(P_\eta(z)\right)^n,$$

где $\eta \sim Bern(p)$: $Ez^\eta = z^0 \cdot (1-p) + z^1 \cdot p = 1+p+zp \Rightarrow Bin(n,p)$ — явл. БДЗ.

б) $Pois(\lambda)$: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$; $k = 0,1,2\ldots$

$$P_X(z) = Ez^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)} = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(z-1)}\right)^n = \left(P_\eta(z)\right)^n,$$

где $\eta \sim Pois\left(\frac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow Pois(\lambda)$ — явл. БДЗ

в) $NB(\alpha,\beta)$: $p_k = \frac{C_{k+\alpha-1}^k \beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}} = C_{k+\alpha-1}^k \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha$; $k = 0,1,2\ldots$

$$P_X(z) = Ez^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot C_{k+\alpha-1}^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+\alpha-1}^k \left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^k \overset{(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n-1}^k \cdot x^k}{=} \frac{1}{(1+\beta)^\alpha} \cdot \left(1 - \frac{z\beta}{1+\beta}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{(1+\beta-z\beta)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\left((1+\beta-z\beta)^{\alpha/n}\right)^n} = \left(P_\eta(z)\right)^n,$$ где $\sim NB\left(\frac{\alpha}{n};\beta\right) \Rightarrow NB(\alpha,\beta)$ — явл. БДЗ.

г) $Geom(\beta)$: $p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}$.

Заметим, что геом. распр — это частный случай $NB(\alpha,\beta)$ при $\alpha = 1 \Rightarrow$ Geom — тоже явл. БДЗ.

④ Выписать явный вид p_k^T; $k \geq 1$ для урезанного в нуле распр. из класса (a,b,0).

Напоминание: $\begin{cases} p_k^T = d \cdot p_k, \text{ где } d = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k} = \frac{1}{1-p_0} \\ p_0^T = 0 \end{cases}$

а) $Bin(n,p)$: $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $k = 0 \ldots n$

$\Rightarrow p_0 = (1-p)^n \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-(1-p)^n} \Rightarrow p_k^T = \frac{p_k}{1-(1-p)^n} = \frac{C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n}$; $k = 1 \ldots n$

б) $Pois(\lambda)$: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$; $k = 0,1,2\ldots$

$\Rightarrow p_0 = e^{-\lambda} \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \Rightarrow p_k^T = \frac{p_k}{1-e^{-\lambda}} = p_k \cdot \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} = \frac{\lambda^k}{k!(e^\lambda - 1)}$; $k = 1,2\ldots$

в) $NB(\alpha,\beta)$: $p_k = C_{k+\alpha-1}^k \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha$; $k = 0,1,2\ldots$

$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{(1+\beta)^\alpha} \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-(1+\beta)^\alpha} \Rightarrow p_k^T = \frac{p_k}{1-(1+\beta)^\alpha} = \frac{C_{k+\alpha-1}^k \cdot \beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha} \cdot \left(1-(1+\beta)\right)^\alpha}$; $k = 1,2\ldots$

г) $Geom(\beta)$: $p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{1+\beta}$; $k = 0,1,2\ldots$

$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{1+\beta} \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\beta}} = \frac{1+\beta}{\beta} \Rightarrow p_k^T = \frac{1+\beta}{\beta} p_k = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$; $k = 1,2\ldots$