ЭКЗАМЕН 2021

Во всех задачах w — винеровский процесс, $\Lambda_t = t$.

1. Покажите, что процесс $B_t = w_1 - w_{1-t}$ — винеровский на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Утверждение очевидно, поскольку $B_0 = 0$, а приращения B совпадают с приращениями винеровского процесса w.

2. Выпишите решение СДУ $dX_t = -(1/2)X_t dt + dw_t$, $X_0 = 0$, и покажите, что $X_{\ln(t+1)}\sqrt{t+1}$ — винеровский процесс. Пользуясь законом повторного логарифма вычислите $\limsup_{t\to\infty} X_t/\sqrt{t}$.

Решение. Из формулы Ито следует, что процесс $X_t = e^{-t/2}\int_0^t e^{s/2}dw_s$ удовлетворяет данному уравнению. Но тогда $\tilde{w}_t := X_{\ln(t+1)}\sqrt{t+1} = \int_0^{\ln(t+1)} e^{r/2}dw_r$. Стохастический интеграл от детерминированной функции — гауссовский процесс с независимыми приращениями. Так как $\mathbb{E}\tilde{w}_t = 0$, $\mathbb{E}(\tilde{w}_t - \tilde{w}_s)^2 = \int_{\ln(s+1)}^{\ln(t+1)} e^r dr = t - s$, то $\tilde{w}$ — винеровский процесс. Поскольку $X_t = e^{-t/2}w_{e^t-1}$, то закон повторного логарифма влечет

$$\limsup_{t\to\infty} X_t/\sqrt{t} = \limsup_{t\to\infty} e^{-t/2}w_{e^t-1}/\sqrt{t} = 0.$$

3. Докажите, что w — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}^o_{t+})$, где $\mathcal{F}^o_t := \sigma\{w_s,\ s \le t\}$.

Решение. Имеем: $\mathbb{E}(w_t - w_{s+1/n}|\mathcal{F}^o_{s+}) = E(\mathbb{E}(w_t - w_{s+1/n}|\mathcal{F}^o_{s+1/n})|\mathcal{F}^o_{s+}) = 0$ (меньшая σ-алгебра “ест" большую, а винеровский процесс w — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}^o_t)$). Остаётся сделать предельный переход при $n \to \infty$.

4. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$. На множестве $\Omega\times\mathbb{R}_+$ определены σ-алгебры $\mathcal{P} := \sigma\{A\times]s,\infty[,\ A \in \mathcal{F}_s,\ s \ge 0,\ B \times \{0\},\ B \in \mathcal{F}_0\}$ (предсказуемая) и $\mathcal{O} := \sigma\{A \times [s,\infty[,\ A \in \mathcal{F}_s,\ s \ge 0\}$ (опциональная). Какая из них включает другую?

Решение. Заметим, что множество $A \times [s + 1/n, \infty[\in \mathcal{O}$, когда $A \in \mathcal{F}_s$, и, значит, множество $A\times]s,\infty[= \cap_n A \times [s + 1/n, \infty[\in \mathcal{O}$ и, значит, $B \times \{0\} = B \times [0,\infty[\setminus B\times]0,\infty[\in \mathcal{O}$.

5. Пусть $M^n \in \mathcal{M}^{2,c}_0$, $\langle M^n\rangle \le C = \text{const}$ и $\langle M^n\rangle_t \to t$ при $n \to \infty$. Показать, что распределения случайных величин M^n_t слабо сходятся к гауссовскому распределению с нулевым средним и дисперсией t.

Решение. Пользуясь тем, что $\mathbb{E}e^{i\lambda M_t^n+(1/2)\lambda^2\langle M^n\rangle_t}$ и $|e^{i\lambda M_t^n}|=1$ имеем:

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}e^{i\lambda M_t^n}-e^{-\lambda^2 t}| &= |\mathbb{E}e^{i\lambda M_t^n}-e^{-(1/2)\lambda^2 t}\mathbb{E}e^{i\lambda M_t^n+(1/2)\lambda^2\langle M^n\rangle_t}| = |\mathbb{E}e^{i\lambda M_t^n}(1-e^{-(1/2)\lambda^2 t}e^{(1/2)\lambda^2\langle M^n\rangle_t}| \\ &\le \mathbb{E}|e^{i\lambda M_t^n}||1-e^{-(1/2)\lambda^2 t}e^{(1/2)\lambda^2\langle M^n\rangle_t}| = \mathbb{E}|1-e^{-(1/2)\lambda^2 t}e^{(1/2)\lambda^2\langle M^n\rangle_t}| \to 0.\end{aligned}$$

7. По теореме о предсказуемом представлении $w_1^4 = Ew_1^4+\varphi\cdot w_1$, где $\varphi\in L^{2,2}$. Найти φ.

Решение. Ищем решение задачи $u_t+(1/2)u_{xx}=0$, $u(1,x)=x^4$, предполагая, что её решение имеет вид $\sum_{j=1}^4 a_j(t)x^j$. Приравнивая нулю коэффициенты при степенях x, получаем систему дифференциальных уравнений с граничными условиями:

$$a_4'=0,\ a_4(T)=1,\quad a_3'=0,\ a_3(T)=0,\quad a_2'+6a_4=0,\ a_2(T)=0,\quad a_1'+3a_3=0,\ a_0'+a_2=0.$$

Её решение: $a_4(t)=1$, $a_3=0$, $a_2(t)=6(1-t)$, $a_1(t)=0$, $a_0=3t^2-6t+3$. Таким образом, $u(t,x)=x^4+6(1-t)x^2+3t^2-6t+3$ и $\varphi_t=u_x(t,w_t)=w_t^3+12(1-t)w_t$.

9. Цена рискового актива $S=x+a\Lambda+\sigma w$. Процентная ставка равна нулю. Получить формулу для цены опциона колл.

Решение. Относительно меры $\tilde{P}=e^{-(a/\sigma)w_T-(1/2)(a/\sigma)^2T}P$ процесс $\tilde{w}_t+(a/\sigma)t$ — винеровский. Цена опциона колл равна (ниже $\xi\sim\mathcal{N}(0,1)$)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}(S_T-K)^+ &= \tilde{\mathbb{E}}(x+\sigma\tilde{w}_T-K)^+ = \mathbb{E}(\sigma\sqrt{T}\xi+x-K)I_{\{\xi\ge(K-x)/\sigma\sqrt{T})\}} \\ &= \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\int_{(K-x)/\sqrt{T}}^{\infty} ye^{-y^2/2}dy+(x-K)\Phi((x-K)/\sigma\sqrt{T}) \\ &= \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}e^{-(x-K)^2/2\sigma^2T}+(x-K)\Phi((x-K)/\sigma\sqrt{T}).\end{aligned}$$

10. Определить цену опциона колл с погашением через 180 дней по модели BS. Цена акции 95, страйк 105, волатильность 11, процентная ставка 2.

Решение. Пользуясь, например, https://vindeep.com/Derivatives/OptionPriceCalc.aspx , находим, что цена опциона колл равна 0,46.