ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Метод Райса для одного процесса гауссовского хаоса

Выполнил студент
609 группы
Промыслов Платон Валерьевич

____

подпись студента

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Питербарг Владимир Ильич

____

подпись научного руководителя

Москва, 2021 г.

Содержание

Аннотация

В данной работе рассматривается случайный процесс, образованный применением функции минимум из двух величин к двум одинаково распределенных стационарным гауссовским процессам $X_1(t)$ и $X_2(t)$, причем последний процесс берется с некоторым фиксированным положительным коэффициентом. Благодаря применению метода Райса для вышеприведенного процесса, подсчитывается асимптотика вероятности его выхода на некоторый высокий уровень u.

Введение

Гауссовские случайные процессы — одно из важнейших понятий теории вероятностей. Одно из подтверждений этому — знаменитая центральная предельная теорема.

Также немаловажную роль в современном стохастическом анализе занимает класс гауссовских случайных процессов. Их используют при построении экономических моделей, в области медицинских исследований, при разработке проектов в инженерии и многих других областях. Одно из преимуществ гауссовских случайных процессов в том, что основные результаты можно сформулировать в терминах их базовых характеристик — среднего и ковариационной функции.

Впервые задача вычисления вероятности достижения уровня случайным сигналом на заданном отрезке времени встала перед специалистами в области теоретической радиотехники, и в 1942 году американский математик Генри Гордон Райс вывел свою знаменитую формулу для среднего числа выходов (т.е. пересечений снизу вверх) случайного сигнала за уровень u, как раз с целью аппроксимации вероятности достижения сигналом этого уровня.

Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения вероятности выхода траектории двумерного гауссовского векторного стационарного случайного процесса, заданного на конечном интервале, за бесконечно удаляющуюся границу. Аналогичная работа уже проводилась в [4] для достаточно гладкой границы множества. В данной же работе эта граница задается хоть и непрерывной функцией, но не достаточно гладкой. Основываясь на идее Райса [30], состоящей в том, что за удаленную границу траектория выйдет с подавляющей вероятностью не более одного раза, мы вводим соответствующий точечный процесс моментов выходов и, оценивая второй факториальный момент числа выходов, показываем, что вероятность выхода эквивалентна среднему числу точек этого процесса. Метод моментов для хвоста гауссовского распределения максимума рассматривается например в [9]. Для гауссовского гладкого стационарного процесса эта техника введена в вышеупомянутой работе Райса и далее детально развита рядом авторов (см. монографии [10], [15] и библиографии в них). Для получения соответствующих вероятностей выходов траекторий гладких гауссовских полей также может быть использован метод точечных процессов [23], [16], [17]. В данной работе применяется метод моментов к гауссовскому векторному процессу. Наряду с теоретическим интересом, задача вычисления вероятности выхода векторного процесса за удаленную границу, например, одновременное превышение компонентами процесса высокого уровня, важна в различных приложениях. Например, в задачах статистической электротехники [18], теории надежности [25], финансов и страхования [22]. Среди уже рассмотренных примеров назовем серию работ по большим уклонениям траекторий χ-процессов, начатую в работе [14], где бесконечно удаляющейся границей является сфера, а компоненты гауссовского векторного процесса стационарны и независимы.

Отметим, что похожая задача исследовалась в [3], [7], [8] и [24] с помощью метода двойных сумм Пикандса, позволяющего рассматривать недифференцируемые процессы. Однако метод двойных сумм, в отличие от метода Райса, не дает возможности получать поправочные члены в асимптотическом разложении для исследуемой вероятности.

Пусть $g(x) = \min(x_1, x_2/c)$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, а $c > 0$ — некоторая положительная константа. Кроме того, пусть $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является $\mathbb{R}^2$-значным стандартным гауссовским векторным процессом с независимыми компонентами. Далее будет рассматриваться асимптотическое поведение следующей вероятности:

$$P\left(\max_{t\in[0,T]} g(X(t)) > u\right), T > 0, \tag{1}$$

для $u \to \infty$. По аналогии с понятием гауссовского хаоса, описанным в работе Коршунова и др. [6], мы называем случайный процесс $g(X(t))$ процессом гауссовского хаоса порядка 1, т. е. $g(ax) = a^1 g(x)$ для всех $a > 0$ и $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Традиционно термин гауссовский хаос порядка $\alpha \in \mathbb{N}$ используется в литературе для случая, когда $g(x)$ является однородным многочленом степени α; это понятие восходит к Эйнеру [14], который первым ввел процессы полиномиального хаоса. В данной работе автор придерживается расширенного понятия гауссовского хаоса. Дополнительно отметим, что координаты гауссовского векторного процесса $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ являляются независимыми и одинаково распределенными. Случаи зависимых и неидентично распределенных компонентов технически более сложны, но могут быть обработаны аналогичным образом. Хотя предположения о независимости и одинаковом распределении не являются критичными для наших основных результатов, предположение (2) имеет центральное значение. Мы предполагаем, что компоненты $X_i(t), i = 1, 2,$ гауссовского векторного процесса стационарны, и их ковариационная функция $r(t)$, удовлетворяет следующему условию:

$$r(t) = 1 - \frac{1}{2}|t|^2 + (|t|^2), t \to 0, |r(t)| < 1, \text{ при } t \in (0,T]. \tag{2}$$

Отправной точкой нашего исследования является теория больших отклонений гауссовского хаоса, разработанная в работах Коршунова и др. [5], [6] и Хашорвой и др. [20]. Метод, который мы используем, является модификацией метода двойной суммы, см. [28], [10]. Особые случаи этого метода рассматривались и раньше. В частности, в [29] рассматривают случай $g(x) = g(x_1, x_2) = x_1x_2$ с неидентичными распределениями независимых компонент. В работе Жданова [2], [1] результаты Питербарга и Жданова [29] распространены на случай зависимых компонент. Хотя здесь мы сосредоточимся на случае независимых и одинаково распределенных компонент, инструменты, разработанные в Жданове [1], потенциально могут быть использованы для обобщения нижеприведенных результатов на случай зависимых и неодинаково распределенных компонентов. В дополнение к работам и книгам по гауссовским хаотическим процессам, о которых мы уже упоминали, стоит вспомнить серию работ, посвященных χ^2-процессам, которые являются частным случаем гауссовских случайных процессов порядка 2, (см. [21]; [27]; [11], [12]; [13]; [31], [32]).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для векторного процесса $X(t)$, тогда верны следующие асимптотические разложения:*

$$P\left(\max_{t\in[0,T]} g(X(t)) > u\right) = \frac{Tc}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-u^2}}{u}\left(1 + O\left(u^{-2}\right)\right), \tag{3}$$

при $c > 1$ и $u \to \infty$;

$$P\left(\max_{t\in[0,T]} g(X(t)) > u\right) = \frac{e^{-\frac{u^2(1+c^2)}{2}}}{u^2} \cdot \left(\frac{1}{2c\pi} + u\frac{Tc}{(2\pi)^{3/2}} + O\left(u^{-2}\right)\right), \tag{4}$$

при $c \leqslant 1$ и $u \to \infty$.

1 Поведение вероятности в нуле

Прежде, чем приступать к доказательству основного результата, сформулируем и докажем вспомогательное утверждение. В спомогательном утверждении рассмотрим вместо случайного процесса $g(X(t))$ случайную величину $g(X(0))$. Ниже приведена формулировака утверждения.

Утверждение 1. *Пусть* $g(X) = \min\left(X_1, \frac{1}{c}X_2\right)$*,* X_1 *и* X_2 *— независимые стандартные гауссовские величины получаемые из процессов* $X_1(t)$ *и* $X_2(t)$ *определенных выше в момент* $t = 0$*, а* $c > 0$ *— фиксированная константа. Тогда верна следующая асимптотика:*

$$P(g(X) > u) = \frac{1}{2c\pi} e^{-\frac{(1+c^2)u^2}{2}} \left(u^{-2} + O(u^{-4})\right). \tag{5}$$

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим, что из себя представляет случайная величина $g(X)$:

$$g(X) = \min\left(X_1, \frac{1}{c}X_2\right). \tag{6}$$

Таким образом, нас интересует минимум из двух случайных велечин. Первая имеет гауссовское распределение с нулевым средним и, как можно заметить из вида ковариационной функции, единичной дисперсией. Вторая тоже имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $\frac{1}{c^2}$.

Заметим, что искомую вероятность можно записать в виде:

$$P(g(X) > u) = P(X_1 > u) \cdot P\left(\frac{1}{c}X_2 > u\right). \tag{7}$$

Таким образом утверждение сводится к подсчету асимптотики вероятности следующего типа:

$$P(x > ku), \tag{8}$$

где x — стандартная гауссовская случайная величина, $k = 1$ или c, а $u \to \infty$.

Сначала сформулируем необходимую для решения теорему:

Теорема 2 (из Федорюк «Метод перевала» [19], **теорема 1.1).** *Пусть* $S(x)$ *— вещественнозначная функция,* λ *– большой положительный параметр,* $f(x)$ *— функция, отрезок* $I = [a, b]$ *— конечный и* $f(x), S(x) \in C(I)$*,* $f(x), S(x) \in C^\infty$*, при* x *близких к* a*,* $S'(a) \neq 0$*. Также пусть* $\max_{[a,b]} S(x) = S(a)$ *и достигается* *только в точке a. Тогда при $\lambda \to \infty$ справедливо разложение:*

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx = e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1}, \tag{9}$$

где $c_n = -M^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Big|_{x=a}$, $M = -\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}$.

Применим теорему к нашему утверждению:

$$P(x > ku) = \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-\frac{(ux)^2}{2}} dx = \left|\left| x = y^{-1/2}, dx = -y^{-3/2}/2 \right|\right| =$$
$$\frac{u}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{1}{k^2}} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{u^2}{2y}} dy = \frac{u}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2u^2}{2}} \left(2(ku)^{-2} + O(u^{-4})\right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2u^2}{2}} \left((ku)^{-1} + O(u^{-3})\right). \tag{10}$$

Таким образом, искомая асимптотика вероятности равна:

$$P(g(X) > u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(u^{-1} + O(u^{-3})\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2u^2}{2}} \left((cu)^{-1} + O(u^{-3})\right) =$$
$$= \frac{1}{2c\pi} e^{-\frac{(1+c^2)u^2}{2}} \left(u^{-2} + O(u^{-4})\right).$$

□

2 Логарифмическая (грубая) асимптотика

В этом разделе мы выведем логарифмическую (грубую) асимптотуку для вероятности (1). Попутно выделим малое информативное множество, которые будет вносить основной вклад в искомую вероятность.

Из соотношения (2) следует, что процесс $X(t)$ имеет п.н. непрерывно дифференцируемую версию. Далее будем рассматриваить именно эту версию. Обозначим через $R(s,t) = EX(s)X(t)^{\top}$ ковариационную функцию (матричнозначную) для процесса $X(t)$. Заметим, что для любого t матрица $R_t := R(t,t)$ имеет полный ранг. Пусть $A_u \subset \mathbb{R}^2$, $0 \notin A_u$, $u \geqslant 0$ — совокупность замкнутых множеств, таких что $\rho\left(0, A_u\right) \to \infty$, при $u \to \infty$, где

$$\rho(0, A) = \inf\{|x| : x \in A\}. \tag{11}$$

В этом разделе мы изучаем поведение вероятности

$$P_X(u,S) := P(\exists t \in [0,S] : X(t) \in A_u)\,, \quad S < T,$$

при $u \to \infty$.

Теорема 3. *Предположим, что существуют постоянные Γ и $\gamma \in (0{,}2)$ такие, что*

$$E|X(t) - X(s)|^2 \leqslant \Gamma |t-s|^\gamma \tag{12}$$

для всех $s,t \in [0,T)$. Тогда существует константа C, которая зависит от Γ и γ и только тогда, когда для всех $u \geqslant 1$ и $S < T$:

$$P_X(u,S) \leqslant CM(u)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}M^2(u)\right), \tag{13}$$

где

$$M(u) = \min_{t\in[0,S]} \rho\left(0, R_t^{-1/2}A_u\right). \tag{14}$$

Обозначим через $\sigma_1^2(t)$ максимальное собственное значение матрицы R_t.

Следствие 1. *При тех же условиях, что и в приведенной выше теореме, существует (возможно, иная) константа C, такая, что:*

$$P_X(u,S) \leqslant C\rho\,(0,A_u)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \exp\left(-\frac{\rho^2\,(0,A_u)}{2\sigma^2(S)}\right), \tag{15}$$

где

$$\sigma^2(S) = \max_{s\in[0,S]} \sigma_1^2(s) = 1. \tag{16}$$

Доказательство следствия 1. **Следствие 1** является частным случаем **теоремы 3**. В нашем случае эти утверждения эквивалентны, и их удобно доказывать вместе. Для каждого t возмем ортогональную матрицу U_t такую, что

$$U_t R_t U_t^\top = \mathrm{diag}\left(\sigma_1^2(t), \sigma_2^2(t)\right) =: \Sigma_t$$

и

$$\sigma_1^2(t) \geq \sigma_2^2(t),$$

так чтобы компоненты вектора $U_t X(t)$ были взаимно независимы с дисперсиями $\sigma_1^2(t), \sigma_2^2(t)$ соответственно. По нашим предположениям $\sigma_2^2(t) > 0$ для всех t. Заметим, что $\Sigma_t^{-1/2} U_t = R_t^{-1/2}$. Используя двойственность и равенство

$|U_tX| = |X|$, мы получим, что для любого $S < T$ верно следующее:

$$\begin{aligned}
P_X(u,S) &= P\left(\exists t \in [0,S] : U_tX(t) \in U_tA_u\right) \\
&= P\left(\exists t \in [0,S] : \Sigma_t^{-1/2}U_tX(t) \in R_t^{-1/2}A_u\right) \\
&\leqslant P\left(\exists t \in [0,S] : \left|\Sigma_t^{-1/2}U_tX(t)\right| \geqslant \rho\left(0, R_t^{-1/2}A_u\right)\right) \\
&= P\left(\exists t \in [0,S] : \max_{v\in\mathbb{S}_1}\left\langle \Sigma_t^{-1/2}U_tX(t), v\right\rangle \geqslant \rho\left(0, R_t^{-1/2}A_u\right)\right) \\
&\leqslant P\left(\exists t \in [0,S] : \max_{v\in\mathbb{S}_1}\left\langle \Sigma_t^{-1/2}U_tX(t), v\right\rangle \geqslant \rho\left(0, U_tA_u\right)/\sigma_1(t)\right) \\
&= P\left(\max_{(t,v)\in[0,S]\times\mathbb{S}_1} \sigma_1(t)\left\langle U_tX(t), \Sigma_t^{-1/2}v\right\rangle \geqslant \rho\left(0, A_u\right)\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

□

Для доказательства теоремы воспользуемся уравнением (17) и рассмотрим гауссовское поле $Z(t,v) = \left\langle \Sigma_t^{-1/2}U_tX(t), v\right\rangle$ на цилиндре $[0,S] \times \mathbb{S}^1$. Для доказательства следствия рассмотрим $Z(t,v) = \sigma_1(t)\left\langle \Sigma_t^{-1/2}U_tX(t), v\right\rangle$, что появляется в конечном уравнении приведенной выше цепочке равенств и неравенств (17). Дисперсия первого поля равна $\Sigma v_i^2 = 1$. Максимум дисперсии поля, который мы используем для следствия, равен $\sigma^2 = \sigma^2(S) = \max_{t\in[0,S]} \sigma_1^2(t)$.[1] Кроме того, воспользовавшись треугольником и неравенствами Шварца, и используя тот факт, что $Z(t,v) = \left\langle X(t), U_t^\top \Sigma_t^{-1/2}v\right\rangle$ в уравнении (17) и $\gamma \leqslant 2$, получим,

$$\sqrt{E(Z(t,v) - Z(s,w))^2} \leqslant \Gamma_1 |(t,v) - (s,w)|^\gamma \tag{18}$$

для некоторых Γ_1. Теперь, используя **предложение 9.2.2** из [10], мы получаем, что для некоторых, возможно, различных C,

$$P\left(\max_{(t,v)\in[0,S]\times\mathbb{S}_1} Z(t,v) \geqslant \rho\left(0, A_u\right)\right) \leqslant CSM(u)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}M^2(u)\right) \tag{19}$$

для теоремы и

$$P\left(\max_{(t,v)\in[0,S]\times\mathbb{S}_1} Z(t,v) \geqslant \rho\left(0, A_u\right)\right) \leqslant CS\rho\left(0, A_u\right)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \exp\left(-\frac{\rho^2\left(0, A_u\right)}{2\sigma^2(S)}\right) \tag{20}$$

для следствия. Это завершает доказательства теоремы и следствия.

[1]Заметим, что если $\sigma_1^2(t) > \sigma_2^2(t)$, то максимум достигается во всех точках множества $\{(t,v) : \sigma_1(t) = \sigma(t), v_1 = 1, v_2 = 0\}$

Замечание 1. *Невырожденность R_t требуется только в окрестности множества $\rho\left(0, R_t^{-1/2}A_u\right)$ ($\sigma_1^2(t)$ для следствия), принимает свое минимальное (максимальное) значение. Более того, можно вывести соответствующие неравенства в случае любого положительного ранга R_t в окрестности. Для доказательства этого можно было бы использовать теорию расстояния Махаланобиса, обобщенные обратные матрицы и связанные с ними понятия, которые должны быть знакомы тем, кто изучает многомерную статистику.*

Замечание 2. *Отметим, что неравенство (18), которое не является самым сильным из возможных, так как мы можем написать $|t-s|^\gamma + |v-w|^2$ в правой части; но в этом случае нам потребуется модификация **теоремы 8.1** [28], доказательство которой мы не включаем здесь для экономии места.*

Теперь сформулируем следствия для процесса гауссовского хаоса, которые понадобятся нам в следующем разделе. Для начала введем обозначение $g(X) = g(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2/c)$. Зададим $A_u = \{X : g(X) \geqslant u\}$. Введем обозначение $g = \max_{\varphi \in \Pi_1} g(\varphi)$. Поскольку $|g(X)| \leqslant g|X|$, мы имеем,

$$A_u \subseteq \{x : |x| \geqslant u/g\}, \tag{21}$$

следовательно

$$\min_{t\in[0,S]} \rho(0, R_t^{-1/2}A_u) \geqslant u \min_{t\in[0,S],|e|=1} \rho(0, R_t^{-1/2}e) = u\sqrt{1+c^2}. \tag{22}$$

Следствие 2. *В условиях **теоремы 1** для однородной функции $g(x)$, определенной выше,мы имеем для любого $S \in (0,T)$ и всех $u \geqslant 1$,*

$$P\left(\max_{[0,S]} g(X(t)) > u\right) \leqslant C_1 S u^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \exp\left(-\frac{(1+c^2)u^2}{2}\right), \tag{23}$$

где $C_1 = C(1+c^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma}}$.

Далее следует логарифмическое (грубое) асимптотическое поведение.

Следствие 3.

$$\log P\left(\max_{[0,S]} g(X(t)) > u\right) \sim -\frac{(1+c^2)u^2}{2}, \textit{при } u \to \infty. \tag{24}$$

Действительно, для $t \in \arg\min \rho(0, R_t^{-1/2}A_u)$ воспользуемся результатом **утверждения 1** и получим оценку $P(g(X(t)) > u)$ снизу, тогда как показатель экспоненты из результата **утверждения 1** совпадает с правой частью уравнения (24).

При использовании метода Лапласа (также известного как аппроксимация седловой точки) для получения асимптотики необходимым и часто важным шагом вычисления является извлечение набора информации, который вносит наибольший вклад в интеграл или связанный с ним объект, такой как рассматриваемая вероятность. Следующее следствие демонстрирует это.

Для единичного вектора e рассмотрим расстояние Махаланобиса в направлении e, то есть $\rho_{e,t}(0, A_u) = \min\{h : he \in R_t^{-1/2} A_u\}$. Определим:

$$N := \text{argmin}_{t\in[0,S]} \rho(0, R_t^{-1/2} A_u); \tag{25}$$

$$N_\delta = \{t : \rho(0, R_t^{-1/2} A_u) \geqslant \delta + \min_{t\in[0,S]} \rho(0, R_t^{-1/2} A_u)\}; \tag{26}$$

$$I_\delta(t) := \{e : \rho_{e,t}(0,A_u) \leqslant \delta + \rho(0, R_t^{-1/2} A_u)\},\ I_\delta^c(t) := \{e \notin I_\delta(t)\}; \tag{27}$$

$$I_\delta := \{(t,e)^t \in N_\delta, e \in I_\delta(t)\}, I_\delta^c := \{(t,e) : t \in [0,S]\backslash N_\delta \text{ или } e \in I_\delta^c(t)\}. \tag{28}$$

Следствие 4. *Пусть $P_X(u,S)$ и $P'_X(u,S)$ — вероятности выхода $X(t)$ из неограниченно растущих множеств A_u, A'_u соответственно, и пусть I_δ и I'_δ - соответствующие множества, определенные выше. Для любого $\delta > 0$, если для всех $u > u_0$ с некоторым u_0, $I_\delta = I'_\delta$, то:*

$$P_X(u,S) \sim P'_X(u,S), \text{ при } u \to \infty. \tag{29}$$

Более того, эта эквивалентность имеет место даже когда $\delta(u) \to 0$ достаточно медленно, чтобы было верно следующее:

$$\lim_{u\to\infty} \inf \delta(u) M(u) \log^{-a} M(u) > 0, \tag{30}$$

для некоторого произвольного $a > 1$ (при $u \to \infty$).

Доказательство следствия 4. Давайте напишем,

$$\begin{aligned} P_X(u,S) = P\left(\exists t \in [0,S] : X(t) \in A_u, (t, X(t)/|X(t)|) \in I_\delta\right) \\ + P\left(\exists t \in [0,S] : X(t) \in A_u, (t, X(t)/|X(t)|) \in I_\delta^c\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Для второго члена справа мы воспользуемся **теоремой 3**, где вместо $M(u)$ подставим $M(u) + \delta$, чтобы показать, что он экспоненциально меньше $P(X(t) \in A_u)$ для любого $t \in N$. Для случая $\delta \to 0$ вторая вероятность сходится к нулю быстрее, чем любая отрицательная степень $M(u)$, умноженная на тот же показатель. Кроме того, вероятность $P(X(t) \in A_u)$, $t \in N$ является нижней границей для обеих вероятностей $P_X(u,S)$ и $P'_X(u,S)$; её можно легко вычислить, и её логарифм эквивалентен $-\frac{1}{2}M^2(u)$. $\square$

Замечание 3. *В случае гауссовских случайных процессов можно взять* $\delta(u) \to 0$ *сходящимся так медленно, чтобы* $\liminf_{u\to\infty} u^2\delta(u)\log^{-a} u > 0$ *в* ***следствии 4***.

Прежде, чем продолжать дальнейшее решение сделаем несколько подготовительных шагов и введем несколько обозначений.

Заметим, что функция $g(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2/c) - 1$, где $x_1, x_2 \geqslant 0$, задает границу некоторого звездного множества в первой четверти. Обозначим за A то множество, которое не содержит 0. Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \{v \in \partial A : |v| = \rho(0,A)\}$. В наше случае $\rho(0,A) = \sqrt{1+c^2}$. Далее эту величину будем обозначать через ρ.

Поскольку множество A является звездным, его границу можно представить как график некоторой функции $s(e)$ на единичной сфере $\mathbb{S}_1$, т.е.

$$\partial A = \left\{x : \ |x| = s\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}. \tag{32}$$

Заметим, что эта функция может быть определена не на всей сфере. Единичный вектор e отождествляется в сферических координатах (r,φ) с пространственным углом $\varphi \in \mathbb{S}_1$, поэтому мы будем писать также подразумевая:

$$A = (r,\varphi) : r = s(\varphi).$$

Обозначим $\mathcal{M}_\varphi := \operatorname{argmin}_{\varphi\in\mathbb{S}_1} s(\varphi)$ параметризацию множества $\mathcal{M}$ в сферических координатах, т.е.

$$\mathcal{M} = \{(r,\varphi) : r = \rho, \varphi \in \mathcal{M}_\varphi\}.$$

Заметим, что в нашем случае множество $\mathcal{M}$ состоит из одной точки.

Обозначим за uA множество, которое получается из множества A с помощью гомотетии с центром в нуле и коэффициентом растяжения u. Т.е. множество задается уравнением $\min(x_1, x_2/c) \geqslant u$. Рассмотрим окрестности множества $\mathcal{M}$ следующего вида:

$$U_{\mathcal{M},\delta} := \left\{t \in A : ||t|| \in [\sqrt{1+c^2}, \sqrt{1+c^2} + \delta(u))\right\},$$

где $\delta(u) = u^{-2}\ln^2 u$. Тогда в силу вышеизложенного имеем, что

$$P_X(T,u(A\backslash U_{\mathcal{M},\delta})) \leqslant C\exp(-c\ln^2 u)\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2u^2\right). \tag{33}$$

Далее имеем

$$P_X(T,u(A\backslash U_{\mathcal{M},\delta})) + P_X(T,uU_{\mathcal{M},\delta}) \geqslant P_X(T,uA) \geqslant P_X(T,uU_{\mathcal{M},\delta}),$$

т.е.,учитывая (33), получаем, что

$$P_X(T,uA) = P_X(T,uU_{\mathcal{M},\delta}) + O\left(\exp(-c\ln^2 u)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2u^2\right), \tag{34}$$

при $u \to \infty$.

3 Точечный процесс

Введем обозначение $A_\delta = \partial A \cap U_{\mathcal{M},\delta}$ соответствующую окрестность множества $\mathcal{M}$ в ∂A. Заметим, что для достаточно больших u, $A_\delta \subset U_{\mathcal{M}}$, где $U_{\mathcal{M}}$ — окрестность множества $\mathcal{M}$. Обозначим через $\eta_u^+(B)$, где B — борелевское ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, точечный процесс попаданий (входов) траекторий процесса $X(t)$ в uA через uA_δ , т.е. в $uU_{\mathcal{M},\delta}$. Другими словами, $t \in \eta_u^+(B)$ тогда и только тогда, когда $X(t) \in uA_\delta$, в некоторой левой окрестности этой точки траектория лежит вне uA, и в некоторой правой — внутри uA. Обозначим $X'(t) = (X_1'(t), X_2'(t))^\top$. Заметим, что в силу невырожденности векторного процесса $(X(t),X'(t))^\top$, вероятность касания траекторией многообразия A_δ равна нулю. Это утверждение является достаточно простым обобщением теоремы Булинской [16].

Обозначим через $p_t(x,y)$ плотность распределения вектора $(X(t),X'(t))^\top$, а за $N_u^+(B)$ количество точек пересечения. Пусть n_v — внутренняя к uA нормаль в точке $v \in uA_\delta$. Следующее утверждение доказано в **теореме 1** из [26] для двумерного случая.

Предложение 1. *Среднее число входов равно*

$$EN_u^+(B) = \int_B dt \int_{uA_\delta} dv \int_{\langle y,n_v\rangle \geqslant 0} \langle y,n_v\rangle p_t(v,y)dy, \tag{35}$$

где dv — элемент 1-мерного объема A_δ.

Нам также понадобится выражение для второго факториального момента числа входов. Обозначим $p_{t_1,t_2}(x_1,x_2,y_1,y_2)$ плотность распределения вектора $(X(t_1),X(t_2),X'(t_1),X'(t_2))$. Следующее утверждение также доказано в **теореме 3** из [26] для двумерного случая.

Предложение 2. *Второй факториальный момент числа входов равен*

$$EN_u^+(B)(N_u^+(B)-1)=2\int_{B\times B,t_2\geqslant t_1}dt_1dt_2\int_{uA_\delta\times uA_\delta}dv_1dv_2\times \\ \int_{\langle y_1,n_{v_1}\rangle\geqslant 0}\int_{\langle y_2,n_{v_2}\rangle\geqslant 0}\langle y_1,n_{v_1}\rangle\langle y_2,n_{v_2}\rangle p_{t_1,t_2}(v_1,v_2,y_1,y_2)dy_1dy_2. \quad (36)$$

Теперь сформулируем основную лемму метода моментов.

Лемма 1. *Пусть вышеприведенные условия на векторный процесс $X(t)$ выполнены. Тогда для всех $u>0$ имеют место следующие неравенства:*

$$0\geqslant P_X(T,uU_{\mathcal{M},\delta})-EN_u^+([0,T])-P\left(X(0)\in uU_{\mathcal{M},\delta}\right)\geqslant \\ -EN_u^+([0,T])\big(N_u^+([0,T])-1\big)-P\left(X(0)\in uU_{\mathcal{M},\delta},X(T)\in uU_{\mathcal{M},\delta}\right).$$

Доказательство этой леммы повторяет в основном соответствующее доказательство в одномерном случае для общих случайных процессов, приведенное в **лемме F.1** из [15] и в **лемме 15.1** из [10]. Заметим только, что, к сожалению, в доказательствах этих лемм содержатся неточности в элементарных преобразованиях, влекущие несущественные неточности в формулировках. Эти неточности не влияют на основной смысл **леммы 1**, состоящий в том, что выражение в правой части этих неравенств экспоненциально меньше слагаемых в средней части (это будет доказано ниже). Более того, из всех трех формулировок следует, что для доказательства этого утверждения достаточно оценить вероятность двойного события и второй факториальный момент в правой части.

4 Асимптотическое поведение моментов точечного процесса

4.1 Асимптотика первого момента

Поскольку значение гауссовского стационарного дифференцируемого в среднем квадратическом процесса и его производной в этой же точке независимы между собой, ковариационная матрица вектора $(X(t),X'(t))^\top$ равна

$$\mathrm{covar}(X(t),X'(t)) = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix},$$

где I_d — единичная матрица. К интегралу (35) применим метод Лапласа. Плотность под интегралом равна

$$p_t(v,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + y_1^2 + y_2^2\right)\right).$$

Рассмотрим внутренний интеграл в (35):

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{uA_\delta} \exp\left(-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right) dv \int_{\langle y,n_v\rangle \geqslant 0} \langle y,n_v\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\right) dy.$$

После ортогонального преобразования координат $x = x(y)$, такого, что $x_1 = \langle y,n_v\rangle$, интеграл примет вид:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{uA_\delta} \exp\left(-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right) dv \int_{x_1>0} x_1 \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) dx =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{uA_\delta} \exp\left(-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right) dv =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathbf{I}_{0\leqslant v_1-u\leqslant u\delta}\, \mathbf{I}_{0\leqslant v_2-cu\leqslant cu\delta}\, \mathbf{I}_{\min(v_1,v_2/c)=u}\, dv =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathbf{I}_{0\leqslant v_1-u\leqslant u\delta}\, \mathbf{I}_{v_2=cu}\, dv\right) +$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathbf{I}_{0\leqslant v_2-cu\leqslant cu\delta}\, \mathbf{I}_{v_1=u}\, dv\right) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_u^{u\delta+u} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathbf{I}_{v_2=cu}\, dv_2\, dv_1\right) +$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_u^{cu\delta+cu} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathbf{I}_{v_1=u}\, dv_1\, dv_2\right) =$$
$$= \text{ сделаем замену во втором интеграле: } ||v_2 = cv_2', dv_2 = cdv_2'|| =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_u^{u\delta+u} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathbf{I}_{v_2=cu}\, dv_2\, dv_1\right) +$$
$$\frac{c}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_u^{u\delta+u} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(v_2')^2}{2}\right) \mathbf{I}_{v_1=u}\, dv_1\, dv_2'\right) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\int_u^{u\delta+u}\exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{c^2u^2}{2}\right)\,dv_1\right)+$$
$$\frac{c}{(2\pi)^{3/2}}\left(\int_u^{u\delta+u}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{(v_2')^2}{2}\right)\,dv_2'\right). \quad (37)$$

Таким образом требуется посчитать осимптотику интеграла следующего вида:

$$\frac{c}{k(2\pi)^{3/2}}e^{-k^2u^2/2}\int_u^{u\delta+u}e^{-x^2/2}\,dx, \quad (38)$$

где $k=1$ или c.

Воспользовавшись **теоремой 2**, получим:

$$\frac{c}{k(2\pi)^{3/2}}e^{-k^2u^2/2}\int_u^{u\delta+u}e^{-y^2/2}\,dy=||y=ux,dy\to udx||=$$
$$\frac{cu}{k(2\pi)^{3/2}}e^{-k^2u^2/2}\int_1^{\delta+1}e^{-u^2x^2/2}\,dx=$$
$$\frac{cu}{k(2\pi)^{3/2}}e^{-k^2u^2/2}\cdot e^{-u^2/2}\left(\frac{u^{-2}}{k^2}+O(u^{-4})\right). \quad (39)$$

Таким образом, получаем, что асимптотика (37) равна:

$$\frac{1}{c^2u(2\pi)^{3/2}}e^{-c^2u^2/2}\cdot e^{-u^2/2}\left(1+O(u^{-2})\right)+$$
$$\frac{c}{u(2\pi)^{3/2}}e^{-u^2/2}\cdot e^{-u^2/2}\left(1+O(u^{-2})\right)=$$
$$\frac{e^{-u^2/2}}{u(2\pi)^{3/2}}\left(1+O(u^{-2})\right)\frac{e^{-c^2u^2/2}+c^3e^{-u^2/2}}{c^2}. \quad (40)$$

В силу вышеуказанного результата (40) получаем следующую асимптотику.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* ***теоремы 1***. *Тогда верны следующие асимптотические разложения:*

$$EN_u^+([0,T])=\frac{Tce^{-u^2}}{u(2\pi)^{3/2}}\left(1+O(u^{-2})\right), \quad (41)$$

при $c>1$ и $u\to\infty$;

$$EN_u^+([0,T])=\frac{Te^{-u^2(1+c^2)/2}}{uc^2(2\pi)^{3/2}}\left(1+O(u^{-2})\right), \quad (42)$$

при $c \leqslant 1$ *и* $u \to \infty$.

4.2 Оценка второго факториального момента

Рассмотрим второй факториальный момент $EN_u^+([0,T])(N_u^+([0,T]) - 1)$. В интеграле (36) произведем замену $w_i = u^{-1}v_i$, $i = 1, 2$. Далее имеем:

$$EN_u^+([0,T])\big(N_u^+([0,T]) - 1\big) = 2u^2 \int_{[0,T]\times[0,T], t_2 \geqslant t_1} dt_1 dt_2 \int_{A_\delta \times A_\delta} dw_1 dw_2 \times$$
$$\int_{\langle y_1, n_{w_1}\rangle \geqslant 0} \int_{\langle y_2, n_{w_2}\rangle \geqslant 0} \langle y_1, n_{w_2}\rangle \langle y_2, n_{w_2}\rangle p_{t_1,t_2}(uw_1, uw_2, y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2. \quad (43)$$

Наша цель — показать, что в условиях теоремы, как и в одномерном случае, этот интеграл экспоненциально меньше, чем интегралы в **лемме 2**. Обозначим R_{t_1,t_2} ковариационную матрицу вектора $(X(t_1), X(t_2), X'(t_1), X'(t_2))$, и рассмотрим минимум квадратичной формы

$$f(t_i, uw_i, y_i, i = 1, 2) := (uw_1, uw_2, y_1, y_2)^\top R_{t_1,t_2}^{-1}(uw_1, uw_2, y_1, y_2)$$

на множестве интегрирования в (43). Обозначим

$$A_1 = \{(t_i, w_i, y_i, i = 1, 2) : [0,T] \times [0,T],\, t_2 \geqslant t_1,\, A_\delta \times A_\delta, \langle y_i, n_{w_i}\rangle \geqslant 0\},$$
$$A_2 = \{(t_i, w_i, y_i, i = 1, 2) : [0,T] \times [0,T],\, t_2 \geqslant t_1,\, A_\delta \times A_\delta, \langle y_2, n_{w_2}\rangle \geqslant 0\},.$$
$$A_3 = \{(t, w_i, y_i, i = 1, 2) : [0,T],\, A_\delta \times A_\delta,\, y_1,\, \langle y_2, n_{w_2}\rangle \geqslant 0\}$$

Имеем

$$\min_{A_1} f(t_i, uw_i, y_i, i = 1, 2) \geqslant \min_{A_2} f(t_i, uw_i, y_i, i = 1, 2) =$$
$$\min_{A_3} f(0, t, uw_i, y_i, i = 1, 2), \quad (44)$$

где последнее равенство имеет место вследствие стационарности.

Обозначим через $\widetilde{N}_u(T)$ число входов траекторий процесса X в множество $\{x : ||x|| > u\rho\}$, т.е. во внешность шара радиуса $u\rho$. Очевидно

$$N_u^+(T) := N_u^+([0,T]) \leqslant \widetilde{N}_u(T), \quad (45)$$

поэтому

$$EN_u^+(T)(N_u^+(T) - 1) \leqslant E\widetilde{N}_u(T)(\widetilde{N}_u(T) - 1).$$

Применим теперь к правой части формулу (43) и заменим множество интегрирования в (43) на множество

$$\{[0,T], \mathbb{S}_{1,\rho} \times \mathbb{S}_{1,\rho}, \langle y_2, n_{w_2}\rangle \geqslant 0\},$$

где $\mathbb{S}_{1,\rho}$ сфера размероности 1 и радиуса ρ. Заметим, что этим мы только увеличили интеграл. Проинтегрировав по y_1, получаем, что интеграл (43) для некоторой константы C не превосходит выражения

$$C\int_{[0,T]} dt \int_{\mathbb{S}_{1,\rho}} dw_1 \int_{\mathbb{S}_{1,\rho}} dw_2 \int_{\langle y_2, n_{w_2}\rangle \geqslant 0} \langle y_2, n_{w_2}\rangle p_{0,t}(uw_1, uw_2, y_2) dy_2 =$$
$$C|\mathbb{S}_{1,\rho}| \int_{[0,T]} dt \int_{\mathbb{S}_1} dw_1 \int_{y_{21}\geqslant 0} y_{21} p_{0,t}(uw_1, ue_1, y_2) dy_2, \quad (46)$$

где $p_{0,t}(x_1, x_2, y_2)$ — плотность распределения вектора $(X(0), X(t), X'(t))^\top$. При этом мы воспользовались независимостью подынтегрального выражения от w_2 и положили $w_2 = e_1$ — первый базисный вектор пространства. Это можно сделать в силу независимости и одинаковой распределенности компонент процесса X.

Рассмотрим теперь минимум квадратичной формы

$$f(t, uw_1, ue_1, y_2) := (uw_1, ue_1, y_2)\, R^{-1}_{1,0,t}\, (uw_1, ue_1, y_2)^\top$$

по множеству интегрирования в (46), где $R_{1,0,t}$ — ковариационная матрица вектора $(X(0), X(t), X'(t))^\top$. В силу независимости компонент,

$$p_{0,t}(uw_1, ue_1, y_2) = p_{0,t}(uw_{11}, u, y_{21})\, p_{0,t}(uw_{12}, 0, y_{22}). \quad (47)$$

Проинтегрировав теперь (46) по y_{22}, получаем, что интеграл в (46) равен интегралу

$$I := \int_{[0,T]} dt \int_{\mathbb{S}_{1,\rho}} |J(r,\varphi)|\, p_{0,t}(uw_{12}, 0)\, p_{0,t}(uw_{11}, u) \times \int_{y_{21}\geqslant 0} y_{21} p_{0,t}(y_{21} \mid uw_{11}, u)\, dy_{21} d\varphi \quad (48)$$

— условная плотность производной $X_1'(t)$. Здесь $J(r,\varphi)$ — якобиан перехода от декартовых к полярным координатам. В точке $w_{11} = 1$ подынтегральное выражение по t равно:

$$Vp_{0,t}(0{,}0)p_{0,t}(u,u)\int_{y_{21}\geqslant 0} y_{21}p_{0,t}\left(y_{11}\mid u,u\right)dy_{21}, \tag{49}$$

где V — объем единичной сферы $\mathbb{S}_{1,\rho}$ радиуса ρ. В [10] и [28] при исследовании соответствующего момента для гауссовского стационарного процесса показано, что это выражение не превосходит величины $C\exp(-(1+\Delta)u^2/2)$ для некоторых $C,\Delta>0$ и всех достаточно больших u. Следовательно, найдутся положительные δ и δ_1 такие, что для всех $t\leqslant\delta$ и $w_{11}>1-\delta_1$ это выражение не превосходит величины $C\exp(-(1+\Delta/2)u^2/2)$. Если $t\geqslant\delta$ и $w_{11}>1-\delta_1$, то также аналогично рассуждениям в [10], [28] получаем, что найдется достаточно малое $\Delta_1>0$ такое, что для достаточно малых δ_1 плотность $p_{0,t}(uw_{11},u)$ тоже не превосходит $\exp(-(1+\Delta_1)u^2/2)$. Пусть теперь $w_{11}\leqslant 1-\delta_1$. Поскольку $|w_1|=1$, то квадратичная форма под экспонентой в произведении всех двумерных плотностей в (48) равна

$$-\frac{u^2}{1-R^2(t)}+\frac{u^2R(t)w_{11}}{1-R^2(t)}\leqslant -\frac{u^2}{1-R^2(t)}+\frac{u^2R(t)\left(1-\delta_1\right)}{1-R^2(t)}= -\frac{u^2}{1+R(t)}-\frac{\delta_1R(t)u^2}{1-R^2(t)}$$

Для $t\leqslant\delta$ с достаточно малым δ последняя дробь положительна, что опять дает требуемую малость интеграла (48). Если же $t\geqslant\delta$, то уже первая дробь справа дает необходимую малость, а вторая не нарушит ее, если взять δ_1 достаточно малым, чтобы компенсировать возможные отрицательные значения $R(t)$.

Лемма 3. *В условиях **теоремы 1** найдется $\Delta_2>0$ такое, что*

$$EN_u^+([0,T])\left(N_u^+([0,T])-1\right)=O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2u^2\left(1+\Delta_2\right)\right)\right),\quad u\to\infty. \tag{50}$$

5 Итоговая оценка вероятностей

Рассмотрим вероятность $P(X(0)\in uU_{\mathcal{M},\delta})$ в формулировке **леммы 1**, где $X(0)=(X_1(0),X_2(0))$. В силу соотношения (34), эта вероятность с точностью до любой отрицательной степени u равна вероятности $P(g(X(0))>u)$, которая была посчитана ранее и равна (5).

Далее, вероятность $P(X(0) \in uU_{\mathcal{M},\delta}, X(T) \in uU_{\mathcal{M},\delta})$ не превосходит вероятности $P\left(|X(0)| \geqslant u\rho, |X(T)| \geqslant u\rho\right)$. В силу двойственности,

$$\{|X(0)| \geqslant u\rho\} = \left\{\max_{|v|=1}\langle X(0), v\rangle \geqslant u\rho\right\},$$

аналогично для $X(T)$, поэтому эта вероятность не превосходит вероятности

$$P\left(\max_{|v|=|w|=1}\langle X(0), v\rangle + \langle X(T), w\rangle \geqslant 2u\rho\right).$$

Оценивая дисперсию гауссовского гладкого поля на произведении сфер и применяя неравенство **теоремы 8.1** из [10], получаем, что эта вероятность экспоненциально меньше при $u \to \infty$, чем $P(X(0) \in uU_{\mathcal{M},\delta})$.

Просуммировав результаты (5), (41) или (42)[2], (50) получим итоговую асимптотику для искомой вероятности (1).

Заключение

В данной работе была получена асимптотики (3), (4) для вероятности (1) выхода максимума гауссовского случайного векторного процесса за определенный высокий уровень.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю за его комментарии, замечания и наставления, которые оказали неоценимую помощь в написании данной работы.

[2]Зависит от c: в случае $c > 1$ берется (41), а если $c \leqslant 1$, то берется (42).

Список литературы

[1] Жданов А.: Вероятности больших отклонений для траекторий произведения двух гауссовых стационарных процессов. Теория вероятностей и приложения 60(3), 605-613 (2015).

[2] Жданов А.: Асимптотический анализ распределений квадратичных форм гауссовых векторов и процессов. Дипломная работа (магистерская диссертация), механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (2014).

[3] Жданов А. И., Питербарг В. И., Большие выбросы процессов гауссовского хаоса. Аппроксимация в дискретном времени, Теория вероятн. и ее примен., 63:1 (2018), 3-28.

[4] Клебан А.О., Питербарг В.И., Метод моментов для вероятности выхода гауссовского векторного процесса из большой области, Теория вероятн. и ее примен., 63:4 (2018), 669-682.

[5] Коршунов Д., Питербарг В. И., Хашорва Е.: Об экстремальном поведении гауссовского хаоса. Докл. Математика 88(2), 566-568 (2013).

[6] Коршунов Д. А., Питербарг В. И., Хашорва Е.: Об асимптотическом методе Лапласа и его применении к случайному хаосу. Мат. Заметки 97(6), 878-891 (2015).

[7] Кремена Е. В., Питербарг В. И., Хюслер Ю., О форме траекторий гауссовских процессов, имеющих массивные высокие выбросы, Теория вероятн. и ее примен., 58:4 (2013), 672-694; англ. пер.: Kremena E. V., Piterbarg V. I.,Hüsler J. , On the shape of trajectories of Gaussian processes having large massive excursions, Theory Probab. Appl., 58:4 (2014), 582-600.

[8] Кремена Е. В., Питербарг В. И., Хюслер Ю., О форме траекторий гауссовских процессов, имеющих массивные высокие выбросы. II, Теория вероятн. и ее примен., 60:3 (2015), 613-621; англ. пер.: Hüsler J., Kremena E. V., Piterbarg V. I., On the shape of trajectories of Gaussian processes having large massive excursions. II, Theory Probab. Appl., 60:3 (2016), 513-520.

[9] Питербарг В.И.: Двадцать две лекции о гауссовских процессах. Механико математический факультет Московскогогосударственного университета имени М. В. Ломоносова, (2017).

[10] Питербарг В. И., Двадцать лекций о гауссовских процессах, МЦНМО, М., 2015, 188 с.; англ. пер.: Piterbarg V. I., Twenty lectures about Gaussian processes, Atlantic Financial Press, London, 2015, xi+167 pp.

[11] Питербарг В. И.: Высокие отклонения для многомерного стационарного Гауссовского процесса с независимыми компонентами. Золотарев В. М.. — ТВП - ВСП Москва-Утрехрт, 197-230 (1994a).

[12] Питербарг, В. И.: Высокие отклонения для нестационарных обобщенных процессов хи-квадрат. Стохастические процессы Appl. 53, 307-337 (1994b).

[13] Питербарг, В., Стаматович, С.: Предельная теорема для a-выходов тректорий χ-процесса за высокий уровень. Теория вероятностей и ее приложения 48(4), 734-741 (2004).

[14] Питербарг В. И., Стаматович С., Предельная теорема для a-выходов траекторий χ-процесса за высокий уровень, Теория вероятн. и ее примен., 48:4 (2003), 811-818; англ. пер.: Piterbarg V. I., Stamatović S., Limit theorem for high level a-upcrossings by χ-process, Theory Probab. Appl., 48:4 (2004), 734-741.

[15] Питербарг В. И., Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988, 175 с.; англ. пер.: Piterbarg V. I., Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields, reprint ed., Transl. Math. Monogr., 148, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, xii+206 pp.

[16] Питербарг В. И., Метод Райса для гауссовских случайных полей, Фундамент. и прикл. матем., 2:1 (1996), 187-204.

[17] Питербарг В. И., Массивные выбросы гладких гауссовских изотропных полей. Метод моментов, Теория вероятн. и ее примен., 63:2 (2018), 240-259.

[18] Трифонов А. П., Шинаков Ю. С., Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех, Статистическая теория связи, 26, Радио и связь, М., 1986, 264 с.

[19] Федорюк М.В.: Метод перевала. Наука, (1977).

[20] Хашорва Е., Коршунов Д., Питербарг В. И.: Асимптотическое разложение гауссовского хаоса с помощью вероятностного подхода. Крайности 18(3), 315-347 (2015).

[21] Albin P., Hashorva E., Ji L., Ling C.:Extremes and Limit Theorems for Difference of Chi-type processes (2015). arXiv:1508.02758.

[22] Avram F., Palmowski Z., Pistorius M., A two-dimensional ruin problem on the positive quadrant, Insurance Math. Econom., 42:1 (2008), 227-234.

[23] Azäis J.-M., Wschebor M., Level sets and extrema of random processes and fields, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2009, xii+393 pp.

[24] Debicki K., Kosiński K. M., Mandjes M., Rolski T., Extremes of multidimensional Gaussian processes, Stochastic Process. Appl., 120:12 (2010), 2289-2301.

[25] Farkas J., Hashorva E., Piterbarg V. I., Asymptotic behavior of reliability function for multidimensional aggregated Weibull type reliability indices, Analytical and computational methods in probability theory (Moscow, 2017), Lecture Notes in Comput. Sci., 10684, Springer, Cham, 2017, 251-264.

[26] Illsley R., The moments of the number of exits from a simply connected region, Adv. in Appl. Probab., 30:1 (1998), 167-180.

[27] Lindgren G.: Extreme values and crossings for the χ^2-process and other functions of multidimensional Gaussian processes, with reliability applications. Adv. in Appl. Probab 12(3), 746-774 (1980).

[28] Piterbarg V.I.: Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. In: American Mathematical Society [Providence, R.I., etc.], United States, p. 206 (2012).

[29] Piterbarg V.I., Zhdanov A.: On probability of high extremes for product of two independent Gaussian stationary processes. Extremes 18(1), 99-108 (2015).

[30] Rice S. O., Mathematical analysis of random noise, Bell System Tech. J., 23:3 (1944), 282-332; 24:1 (1945), 46-156.

[31] Tan Z., Hashorva E.: Exact asymptotics and limit theorems for supremum of stationary χ-processes over a random interval. Stochastic Process Appl. 123(8), 1983-2998 (2013a).

[32] Tan Z., Hashorva E.: Limit theorems for extremes of strongly dependent cyclo-stationary χ-processes. Extremes 16(2), 241-254 (2013b).