Линейные операторы и отображения

① Линейное отображение

Пусть V и W – вект. пр-ва над полем F.

Опр. $f: V \to W$ – **линейное отображение**, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in F$

Ядро: $\ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$ – подпр-во в V

Образ: $\operatorname{Im} f = \{y \in W \mid \exists x \in V : f(x) = y\}$ – подпр-во в W.

Обозн: $\mathcal{L}(V, W)$ – мн-во всех линейных отображений $V \xrightarrow{L} W$

② Задание линейных отображений матрицами

Если функция линейна, то если мы знаем её значения на базисных векторах, то мы знаем её на любых векторах.

Пусть $\{v_1 \dots v_n\}$ – базис V; $\{w_1 \dots w_m\}$ – базис W; $f \in \mathcal{L}(V, W)$

Тогда $f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{mj} w_m$, $j = 1 \dots n$. $= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

Пусть $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$; $f(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$.

Тогда $f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right)$

Тогда из единственности разложения по базису $\{w_1 \dots w_n\}$

$$\boxed{y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}}, \text{ т.е. } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ где } A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица A_f называется **матрицей отображения** f в базисах $\{v_1 \dots v_n\}$ и $\{w_1 \dots w_m\}$.

Теорема. При фиксированных базисах V и W существует взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами $m \times n$.

Док-во: Зададим отображение $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \to$ матрица $m \times n$; $\varphi(f) = A_f$

1) сюръективность: $\forall B = (b_{ij})$ $\exists f: V \to W \mid f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$

(ну мы принудительно переводим j-й базисный вектор в вектор, у которого в W координаты – это j-й столбец матрицы. Это задаёт всю функцию целиком, т.к. она линейна.)

2) инъективность. Если $A_f = A_g$, то $A_{(f-g)} = A_f - A_g = 0$ ← такое отображение, которое всё переводит в 0.

$\Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$.

Опр. Если V и W конечномерны, то **рангом лин. отображения** f назовём размерность образа f, т.е. $\operatorname{rank} f := \dim(\operatorname{Im} f)$

Теорема. $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A_f$.

Док-во: Пусть $v_1 \dots v_n$ – базис V. Тогда $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1) \dots f(v_n) \rangle$.

Если $\{w_1 \dots w_n\}$ – базис W, а A_f – матрица f в базисах $\{v_i\}$; $\{w_j\}$, то зависимость - независимость векторов $f(v_1) \dots f(v_n)$ – это зависимость - независимость столбцов. $\Rightarrow$ столбцы $j_1 \dots j_k$ матрицы A_f лин. независимы (т.к. столбцы – это коорд. $f(v_j)$ в новом базисе) $\Leftrightarrow f(v_{j_1}) \dots f(v_{j_k})$ лин. независимы $\Rightarrow \operatorname{rank} A_f = \operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f)$. ч.т.д.

19.02.18. Лин. алгебра. Лекция 4.

Теорема. Пусть $f: V \to W$ – лин. отображение. Тогда $\boxed{\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}$

Док-во: Пусть $\{v_1 \dots v_n\}$ – базис V; $\{w_1 \dots w_m\}$ – базис W, A_f – матрица f в этих базисах (т.е. в j-м столбце стоят координаты $f(v_j)$, разложенные по базису $\{w_1 \dots w_m\}$.)

Пусть $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$; $w = f(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$; $Y = A_f X$

По опр. $\operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f)$ – см. лекцию 3.
Там же мы доказали, что $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A_f$.
Обозначим $k = \operatorname{rk} A_f = \operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f)$.

- $v \in \ker f \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow X$ – решение системы $A_f X = 0$. Но размерность пр-ва решений $= n - \operatorname{rk} A_f = n - k \Rightarrow \dim \ker f = n - k$.
- Но $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = \operatorname{rk} A_f = k$.

$\Rightarrow \dim V = n = (n-k) + k \Rightarrow$ верно. ЧТД.

Следствие 1: Следующие условия эквивалентны:

1) f инъективно (т.е. разные v и u перешли в разные $f(v)$ и $f(u)$, т.е. никакой ненулевой вектор $u - v \neq 0$ не перешёл в 0, т.к. иначе если $f(u-v) = 0 \Rightarrow u = v$;)
2) $\ker f = 0$ (это то же самое, что инъективность, т.к. если $f(u-v) = 0$, то $f(u-v) = f(u) - f(v) = 0 \Rightarrow f(u) = f(v) \Rightarrow u = v \Rightarrow u - v$ – нулевой).
3) $\operatorname{rank} f = \dim V$ (следует из формулы $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$)

Следствие 2: Пусть $\dim U = \dim V$ и $f: U \to V$ – лин. отображение.
Тогда $\ker f = 0 \Leftrightarrow \exists f^{-1}: V \to U$, причём f^{-1} тоже линейно.

Док-во: 1) ($\Leftarrow$) Если $f^{-1} \in L(V, U)$ и $x \in \ker f$,
то $x = (f^{-1} f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0) = 0. \Rightarrow \ker f = 0$.

2) ($\Rightarrow$) Пусть $\ker f = 0$. Тогда f инъективно (см. следствие 1), а $\operatorname{Im} f = V$ (т.к. если $\dim \ker f = 0$, то по формуле $\dim \operatorname{Im} f = \dim U = \dim V$ (т.к. $\dim U = \dim V$ по усл.). Но если $\operatorname{Im} f$ – подпр-во пр-ва V, причём у V и $\operatorname{Im} f$ одинаковая размерность, то $\operatorname{Im} f = V$)
Но если $\operatorname{Im} f = V$, то f – сюръективно.
$\Rightarrow$ в итоге f – биективно $\Rightarrow \exists f^{-1}: V \to U$.

Докажем, что f^{-1} – линейное.
Пусть $a, b \in V$; $a = f(x)$; $b = f(y)$; $x, y \in U$; $\alpha, \beta \in F$ – скаляры.
$\Rightarrow x = f^{-1}(a)$; $y = f^{-1}(b)$ – т.к. $\exists f^{-1}$.
Тогда $f^{-1}(\alpha a + \beta b) = f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(y)) = (f^{-1} f)(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y =$
$= \alpha f^{-1}(a) + \beta f^{-1}(b). \Rightarrow f^{-1}$ линейно. ЧТД.

3. Линейные операторы.

Опр. Лин. оператор – это лин. отображение пр-ва в себя.

Пусть $V = W$. Тогда $L(V) = L(V, W)$ – мн-во лин. операторов на V.

Если A и B - лин. операторы на V, а $\alpha \in F$ - скаляр, то 1) 2) 3) - тоже лин. операторы.

1) $A+B$; $(A+B)(x) = A(x)+B(x)$

2) αA ; $(\alpha A)(x) = \alpha \cdot A(x)$

3) произведение (композиция) A и B: $AB(x) = A(B(x))$

$A(B(\alpha x+\beta y)) = A(\alpha B(x)+\beta B(y)) = \alpha(A(B(x))) + \beta(A(B(y))) = \alpha(AB)(x)+\beta(AB(y))$.

Т.е. $L(V)$ - алгебра лин. операторов, т.к.

(а) $L(V)$ - вект. пр-во над F (определена сумма и умножение на скаляр)

(б) $L(V)$ - кольцо (относ. операций сложения и умножения (композиции) операторов)

Другое обозначение: $L(V) = Hom_F(V,V)$ - гомоморфизм из V в V.

(гомоморфизм - лин. отображение, сохраняющая сложение и умножение на скаляр).

! Алгебра $L(V)$ изоморфна алгебре матриц $M_n(F)$, где $n = \dim V$.
(т.к. мы доказывали, что в фикс. базисах $\{v_1 \dots v_n\}$ и $\{w_1 \dots w_m\}$ $\exists$ биекция между лин. отобр. $L(V,W)$ и матрицами $m \times n$. А тут т.к. $W=V$, то выберем базис $\{w_1 \dots w_m\} = \{v_1 \dots v_n\}$, и получим это, причём композиция будет сохранять структуру вект. пр-ва). что значит?

④ Матрица линейного оператора

Пусть V - вект. пр-во с базисом $\{v_1 \dots v_n\}$ (базис $\{w_1 \dots w_m\}$ не нужен, т.к. $W=V$ => будет тот же базис) и A - линейный оператор на пр-ве V.

Опр. A - матрица оператора A в базисе $\{v_1 \dots v_n\}$, если j-й столбец A составлен из координат вектора $A(v_j)$ в том же базисе $\{v_1 \dots v_n\}$, т.е. $\boxed{A(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i}$

Тогда, если $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$; $w = A(v) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, то $\boxed{Y = AX}$ (см. лекция 3)

⑤ Переход к другому базису

Знать обязательно!

Теорема Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ и $\{e_1' \dots e_n'\}$ - два базиса пр-ва V; $A \in L(V)$ - лин. оператор на V; C - матрица перехода из базиса $\{e\}$ в $\{e'\}$. Пусть A - матрица A в базисе $\{e_1 \dots e_n\}$; B - матрица A в базисе $\{e_1' \dots e_n'\}$. Тогда $\boxed{B = C^{-1}AC.}$

Док-во: $e_j' = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$ - по опр. матрицы перехода C

Посчитаем $A(e_j')$ двумя способами:

1) $A(e_j') = A\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} A(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k =$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ij} a_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij}\right) e_k$.

2) $A(e_j') = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i' = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki} b_{ij}\right) e_k$.

но разложение по базису единственно

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} b_{ij} \Rightarrow AC = CB \Rightarrow B = C^{-1}AC$.

Матрица перехода C обратима, т.к. она невырождена, т.к. $\{e_1' \dots e_n'\}$ - базис (см. Винберг лекция 8).

⑥ Определитель и след лин. оператора

Опр: Пусть $A: V \to V$ – лин. оператор; A – его матрица.
Определитель: $\det A =: \det A$.
След: $tr\, A =: tr\, A$.

Предложение $\det A$ и $tr\, A$ не зависят от выбора базиса в V.
Док-во: 1) $\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det C \cdot \det A = \frac{1}{\det C} \cdot \det C \cdot \det A = \det A$.
2) Можно проверить, что $tr(PQ) = tr(QP)$.
$\Rightarrow tr(C^{-1}AC) = tr(ACC^{-1}) = tr\, A$.

⑦ Критерий невырожденности

Опр: Оператор A – **невырожденный**, если $\det A \neq 0$.
A невырожд. $\Leftrightarrow \ker A = 0$ (т.е. ненулевой вектор в 0 не перешёл).
Но мы уже доказали, что $\ker A = 0 \Leftrightarrow Im\, A = V \Leftrightarrow rk\, A = \dim V$.

⑧ Инвариантные подпространства

Пусть A – лин. оператор на V и $U \subseteq V$ – подпр-во.
Опр. U называется **инвариантным** подпр-вом для оператора A, если $A(U) \subseteq U$ (т.е. $A(x) \in U \ \forall x \in U$).
Если мы хотим, чтобы вектор лежал в инвариантном подпр-ве для оператора A, то на его коэф. будут ограничения, а именно: пусть $v_1 \dots v_k$ – базис U. Дополним его до базиса $v_1 \dots v_n$ всего пр-ва V.
Тогда $\forall j = 1 \dots k \quad A(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, причём $a_{k+1\,j} = \dots = a_{nj} = 0$
(т.к. $A(v_j) \subset U \Rightarrow$ выражается через первые k векторов, т.к. они базисные для U).
т.е. матрица оператора A в этом базисе имеет блочный вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} \underset{k\times k}{B} & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)_{(n-k)\times(n-k)}$

Если $V = U \oplus W$ – прямая сумма и U, W инвариантны для оператора A, т.е. $A(U) \subseteq U$; $A(W) \subseteq W$, то $\exists$ базис V, в котором матрица оператора A имеет блочно-диагональный вид:
$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ (первые k векторов выражаются через себя $\Rightarrow B = 0$; последние $(n-k)$ векторов выражаются через себя $\Rightarrow C = 0$)
Обратно тоже верно. (если ~~~~ в некотором базисе V матрица блочно-диагональная, то $V =$ ~~~~ $U \oplus W$, где $U = \langle v_1 \dots v_k \rangle$; $W = \langle v_{k+1} \dots v_n \rangle$.

⑨ Собственные вектора, собственные значения

обозн: eigenvector; eigenvalue.
Опр. ненулевой вектор $v \neq 0$ – **собственный вектор** оператора A,

если $\mathcal{A}(v) = \lambda v$, $\lambda \in F$.

Число λ называют **собственным значением** ! вектора v !

Свойство: $\langle v \rangle$ – инвар. подпр-во $\Leftrightarrow$ v – собств. вектор.

Теорема: Число λ является собств. значением оператора $\mathcal{A} \in L(V) \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$, где $\mathcal{E}$ – тождественный оператор на V, т.е. $\mathcal{E}(x) = x \ \forall x \in V$, (и по совместительству единичный элемент по умножению)

Док-во: 1) ($\Rightarrow$) Пусть v – некоторый собств. вектор; $e_1 \dots e_n$ – некоторый базис V.

Если X – столбец координат v в базис, то $\mathcal{A}(v) = \lambda v \Leftrightarrow AX = \lambda X$ (где A – матрица $\mathcal{A}$ в базис).

$\Rightarrow$ если есть собств. значение λ, то $\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \det(A - \lambda E) = 0$.
(т.к. если бы $\det \neq 0$, то было бы только нулевое решение)

2) ($\Leftarrow$) Пусть $\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.

Система ур-й $AX = \lambda X$ имеет ненулевое решение $(x_1 \dots x_n)$
(а она его имеет, т.к. $\det = 0 \Rightarrow$ решений либо нет, либо беск. много, но нулевое решение есть $\Rightarrow$ и ненулевое тоже)
$\Rightarrow$ вектор $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ – собств. вектор с собств. знач. λ. ч.т.д.

21.02.18. Лин алгебра. Лекция 5.

Характеристический многочлен линейного оператора

① Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе пр-ва V.

Опр. Многочлен от переменной t $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(tE - A)$ называют **характеристическим многочленом $\mathcal{A}$**.

Зам. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ не зависит от выбора базиса:
если A и B – матрицы $\mathcal{A}$ в разных базисах, то $B = C^{-1}AC$
$\Rightarrow \det(tE-B) = \det(tE - C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(tE-A)C) = \det(tE-A)$

Опр. $\lambda \in F$ – **характеристический корень $\mathcal{A}$**, если $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$.

② Геометрическая и алгебраическая кратность корня

$\mathcal{A}$ – лин. оператор на V,
Обозначим $V^{\lambda} = \{x \in V \mid \mathcal{A}(x) = \lambda x\}$ – „подпр-во" собственных векторов с собственным значением λ (вообще ноль не является собственным вектором, но если мы его добавим, то будет честное подпр-во).

Очевидно, что V^{λ} – подпр-во (т.к. сумма $\in V^{\lambda}$ и скалярное умножение тоже $\in V^{\lambda}$)

Опр: $\dim V^{\lambda}$ – **геометрическая кратность λ**

Опр. **Алгебраическая кратность корня λ** – кратность корня λ в $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Лемма $\dim V^{\lambda} = n - r$, где $n = \dim V$; $r = \operatorname{rank}(A - \lambda E)$

Док-во: Пусть A – матрица $\mathcal{A}$ в каком-то базисе, а X – столбец координат вектора v (в некотором базисе).
Тогда $v \in V^{\lambda} \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$, т.е. V^{λ} – это пр-во решений системы $(A-\lambda E)X = 0$. Но $\dim(\text{пр-ва решений}) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda E) =$
$= n - \operatorname{rk}(\mathcal{A} - \lambda E)$. чтд.

Теорема Геометрическая кратность корня λ не превосходит алгебраическую кратность.

Док-во: Выберем в V^{λ} базис $e_1 \dots e_k$ и дополним его до базиса $e_1 \dots e_n$ всего пр-ва V.
Тогда матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{matrix} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$
(в углу 0 – т.к. V^{λ} – это инвариантное пр-во – см. лекцию 4,
$\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{matrix}$ – т.к. $\mathcal{A}(e_1) = \lambda e_1 \Rightarrow$ координаты $\mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ и т.д.)

$\Rightarrow \det(tE - A) = \det \left(\begin{array}{c|c} (t-\lambda)E_1 & -B \\ \hline 0 & tE_2 - C \end{array}\right) = (t-\lambda)^k \cdot g(t)$, где $g(t) = \det(tE_2 - C)$.

(E_1 и E_2 – единичные матрицы $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$).
Следовательно, алгебраическая кратность λ не меньше k,
а $k = \dim V^{\lambda}$. чтд.