МГУ

Финансовая математика, 1

Исчисление Ито и его приложения к задачам финансовой математики

Москва, 2020

Аннотация

Курс включает напоминание базовых фактов о винеровском процессе и замечательных свойствах его траекторий (недифференцируемость, бесконечность вариации, закон повторного логарифма). Приводятся последовательно усложняемые конструкции стохастических интегралов на идее изометрического продолжения: интегралы от детерминированных функций, интегралы от предсказуемых функций с фиксированным верхним пределом, интегралы как процессы. Излагается идея расширения класса интегрантов с помощью локализации. Объясняется формула Ито и доказываются теоремы Леви и Гирсанова, условие Новикова и теорема о предсказуемом представлении. Обсуждаются сильные и слабые решения стохастических уравнений, доказывается теорема о существовании и единственности решения обратного стохастического уравнения. В качестве приложения развитого стохастического исчисления решается задача о хеджировании опционов в условиях полного рынка, а также две задачи оптимального управления портфелями (задача Мертона и задача парного трейдинга), решаемые с помощью проверочных теорем для уравнений Беллмана.

Содержание

1 Винеровский процесс

1. Определение. Винеровский процесс (броуновское движение) — гауссовский случайный процесс $w = (w_t)_{t\geq 0}$ с непрерывными траекториями с независимыми приращениями, $w_0 = 0$, $Ew_t = 0$ и $E(w_t - w_s)^2 = t - s \; \forall \; s \leq t$.

В частности, $Ew_t^2 = t$ и $Ew_t w_s = s$, если $s \leq t$ (или, в симметричной форме, $Ew_t w_s = t \wedge s$).

2. Элементарные свойства.

Пусть w — винеровский процесс. Тогда следующие процессы — также винеровские (доказать):

$-w$ (свойство симметрии);

w^{+a}, где $w_t^{+a} := w_{t+a} - w_a$, $a \geq 0$;

w^σ, где $w_t^\sigma := \sigma w_{t/\sigma^2}$, $\sigma > 0$, (свойство автомодельности или самоподобия);

w^i, где $w_t^i := t w_{1/t}$, $t > 0$, и $w_0^i := 0$ (инвариантность относительно обращения времени).

Предложение 1.1 *Если w — винеровский процесс, то*

$$w_t/t \to 0 \quad \text{п.н.}, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Очевидно, поскольку

$$P\left(\lim_{t\to\infty} w_t/t = 0\right) = P(\lim_{t\to 0} w_t^i = 0) = P(\lim_{t\to 0} w_t = 0) = 1.$$

□

3. Существование винеровского процесса.

Система Хаара $\mathcal{H}$ на $]0,1]$ — это множество функций $f_0 := 1$,

$$f_{k2^{-n}} := 2^{(n-1)/2}(I_{](k-1)2^{-n},k2^{-n}]} - I_{]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}), \quad k \in A_n,\, n \in \mathbb{N}$$

где $A_1 := \{1\}$, ..., $A_n := \{1, 3, ..., 2^n - 1\}$.

Упражнение. Нарисовать графики и показать, что $\mathcal{H}$ — полная ортонормированная система (т.е. ортонормированный базис) в $L^2(]0,1])$.

Определим функции Шаудера: $F_0(t) := t$,

$$F_{k2^{-n}}(t) := \int_0^t f_{k2^{-n}}(s)ds = (I_{]0,t]}, f_{k2^{-n}})_{L^2(]0,1])}, \quad k \in A_n,\; n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\xi_0, \xi_{k2^{-n}}$, $k \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$, — счётное множество независимых стандартных гауссовских с.в., определённых на каком-то вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (почему такое есть?).

Положим

$$w_t := \xi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in A_n} \xi_{k2^{-n}} F_{k2^{-n}}(t). \tag{1}$$

Теорема 1.2 *Ряд сходится равномерно п.н. и его предел определяет винеровский процесс.*

Доказательство. Пусть $\|.\|$ — равномерная норма на $[0,1]$. Поскольку каждая сумма по k содержит только одно слагаемое

$$S_n := \Big\| \sum_{k\in A_n} \xi_{k2^{-n}} F_{k2^{-n}} \Big\| \le \max_{k\in A_n} |\xi_{k2^{-n}}| \|F_{k2^{-n}}\| = 2^{-(n+1)/2} \max_{k\in A_n} |\xi_{k2^{-n}}|.$$

Пусть $\theta > 1$. Пользуясь оценкой $\int_a^\infty e^{-y^2/2}dy \le \int_a^\infty (y/a)e^{-y^2/2}dy = (1/a)e^{-a^2/2}$, $a>0$, имеем:

$$\begin{aligned} P(S_n \ge \theta(2^{-n}\ln 2^n)^{1/2}) &\le P\left(\max_{k\in A_n} |\xi_{k2^{-n}}| \ge \theta\sqrt{2n\ln 2}\right) \le 2^{n-1} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\theta\sqrt{2n\ln 2}}^\infty e^{-y^2/2}dy \\ &\le C2^n n^{-1/2} \exp\{-\theta^2 n \ln 2\} = Cn^{-1/2} 2^{n(1-\theta^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sum n^{-1/2}2^{n(1-\theta^2)} < \infty$ и по лемме Бореля–Кантелли (если $\sum P(A_n) < \infty$, то $\sum I_{A_n} < \infty$ п.н.) для почти всех ω справедливо неравенство $S_n \le \theta(2^{-n}\ln 2^n)^{1/2}$ для почти всех $n \ge n_0(\omega)$.

Таким образом, ряд (1) сходится равномерно почти наверное.

Далее,

$$Ew_t w_s = ts + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\in A_n} F_{k2^{-n}}(t) F_{k2^{-n}}(s) = t \wedge s,$$

где второе равенство есть ни что иное как равенство Парсеваля [1] для элементов $x = I_{[0,t]}$ и $y = I_{[0,s]}$ пространства $L^2([0,1])$. Случайные величины w_t образуют гауссовскую систему (убедитесь, что каждая с.в. w_t есть предел в $L^2(\Omega)$ последовательности элементов гауссовской системы, а замыкание в $L^2(\Omega)$ гауссовской системы есть гауссовская система). Тем самым мы доказали существование винеровского процесса на отрезке $[0,1]$.

Пусть $w^1, w^2, \ldots$ — последовательность независимых копий винеровского процесса на отрезке $[0,1]$. Тогда процесс

$$w_t = w_t^1 I_{[0,1]}(t) + (w_1^1 + w_{t-1}^2) I_{]1,2]}(t) + (w_1^1 + w_1^2 + w_{t-2}^3) I_{]2,3]}(t) + \ldots$$

— винеровский на $[0,\infty[$. $\square$

[1] Если $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H и $x, y \in H$, то $x = \sum a_i e_i$, $y = \sum b_i e_i$, где $|x|^2 = \sum a_i^2 < \infty$, $|y|^2 = \sum b_i^2 < \infty$, и скалярное произведение $(x,y) = \sum (x,e_i)(y,e_i) = \sum a_i b_i$.

2 Замечательные свойства винеровского процесса

Предложение 2.1 *Почти все траектории винеровского процесса являются функциями, не имеющими (даже правых) производных ни в одной точке.*

Доказательство. Если функция $w = (w_t)_{t\in[0,1[}$ имеет (правую) производную в точке $s \in [0,1[$, то существуют $l, m \in \mathbb{N}$ такие что $s + 4/m < 1$ и для всех $n \geq m$ справедлива оценка $|w_t - w_s| \leq l(t-s)$, когда $t \in [s, s+4/n]$. Точка s лежит в каком-то интервале $[(i-1)/n, i/n[$ и если оценка выполняется, то выполняются и следующие неравенства для приращений:

$$|w_{(i+1)/n} - w_{i/n}| \leq 3l/n, \quad |w_{(i+2)/n} - w_{(i+1)/n}| \leq 5l/n, \quad |w_{(i+3)/n} - w_{(i+2)/n}| \leq 7l/n$$

(нарисовать график!). Отсюда следует, что интересующее нас множество тех ω, для которых функция $t \mapsto w_t(\omega)$ дифференцируема справа хотя бы в одной точке интервала, содержится в множестве $B = \cup_{l\geq 1} B_l$, где

$$B_l := \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ |w_{\frac{j}{n}} - w_{\frac{(j-1)}{n}}| \leq 7l/n \right\} = \liminf_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ |w_{\frac{j}{n}} - w_{\frac{(j-1)}{n}}| \leq 7l/n \right\}$$

(вспомнить определение нижнего предела множеств и тождество $I_{\liminf \Gamma_n} = \liminf I_{\Gamma_n}$).

Используя лемму Фату[2] и независимость приращений винеровского процесса, имеем:

$$P\left[\liminf_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ |w_{\frac{j}{n}} - w_{\frac{(j-1)}{n}}| \leq 7l/n \right\} \right] \leq \liminf_{n\to\infty} P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcap_{j=i+1}^{i+3} \left\{ |w_{\frac{j}{n}} - w_{\frac{(j-1)}{n}}| \leq 7l/n \right\} \right]$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} (n+1) \left(P\left[|w_{\frac{1}{n}}| \leq 7l/n \right] \right)^3 = \liminf_{n\to\infty} n \left(P\left[|w_1| \leq 7l/\sqrt{n} \right] \right)^3 \leq \liminf_{n\to\infty} C/\sqrt{n} = 0,$$

где последнее неравенство имеет место поскольку $\int_{|x|\leq a} e^{-x^2/2} dx \leq 2a$.

Следовательно, $P(B) \leq \sum_{l\geq 1} P(B_l) = 0$. $\square$

Предложение 2.2 *Почти все траектории винеровского процесса $(w)_{t\leq T}$ являются функциями бесконечной вариации: $Var_T w = \infty$ п.н.*

[2] Обычная формулировка: $E \liminf \xi_n \leq \liminf E\xi_n$ для $\xi_n \geq 0$. Для случая, когда $\xi_n = I_{\Gamma_n}$, она может быть записана в форме $P(\liminf \Gamma_n) \leq \liminf P(\Gamma_n)$

Доказательство. Для упрощения формул будем считать, что $T = 1$. Положим

$$V_n(w) := \sum_{i=1}^{2^n} |w_{i2^{-n}} - w_{(i-1)2^{-n}}|.$$

Ясно, что $Var_1 w \geq V_n(w)$. Пользуясь неравенством $e^{-x} \leq 1 - x + (1/2)x^2$, $x \geq 0$, имеем:

$$\begin{aligned} Ee^{-Var_1 w} &\leq Ee^{-V_n(w)} = \left(Ee^{-|w_{2^{-n}}|}\right)^{2^n} \leq \left(1 - E|w_{2^{-n}}| + (1/2)Ew_{2^{-n}}^2\right)^{2^n} \\ &= \left(1 - 2^{-n/2}E|w_1| + (1/2)2^{-n}\right)^{2^n} \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $Ee^{-Var_1 w} = 0$ и, значит, $Var_1 w = \infty$ п.н.. $\square$

3 Закон(ы) повторного логарифма

Теорема 3.1 *Справедливо следующее утверждение:*

$$P\left(\limsup_{t\to 0} w_t/\sqrt{2t\ln\ln(1/t)} = 1\right) = 1.$$

Замечание. Из этой теоремы следует, в силу симметрии, что

$$P\left(\liminf_{t\to 0} w_t/\sqrt{2t\ln\ln(1/t)} = -1\right) = 1$$

и, ввиду инвариантности при обращении времени, что

$$P\left(\limsup_{t\to\infty} w_t/\sqrt{2t\ln\ln t} = 1\right) = 1, \qquad P\left(\liminf_{t\to\infty} w_t/\sqrt{2t\ln\ln t} = -1\right) = 1.$$

Доказательство. Положим $h(t) := \sqrt{2t\ln\ln(1/t)}$. Покажем, что

$$\limsup_{t\to 0} w_t/h(t) \leq 1 \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

В силу максимального неравенства для положительного мартингала $Z_t(\alpha) := e^{\alpha w_t - \alpha^2 t/2}$ имеем[3]:

$$P\left(\max_{s\leq t}[w_s - \alpha s/2] > \beta\right) = P\left(\max_{s\leq t} Z_s(\alpha) > e^{\alpha\beta}\right) \leq e^{-\alpha\beta}.$$

[3]Этот неравенство пока принимаем на веру. Мартингальное свойство $Z(\alpha)$ будет доказано позже.

Выберем $\theta \in]0,1[$ и $\delta \in]0,1[$; положим $\alpha_n := (1+\delta)\theta^{-n}h(\theta^n)$ и $\beta_n := h(\theta^n)/2$. Тогда $e^{-\alpha_n\beta_n} \le Cn^{-1-\delta}$ и, по лемме Бореля–Кантелли, п.н. выполняется неравенство

$$\max_{s\le t}[w_s - \alpha_n s/2] \le \beta_n$$

при $n \ge n_0(\omega)$. В частности, если $t \in]\theta^n, \theta^{n-1}]$, то

$$w_t \le \max_{s\le\theta^{n-1}} w_s \le \frac{1}{2}\alpha_n\theta^{n-1} + \beta_n = \left[\frac{1+\delta}{2\theta} + \frac{1}{2}\right] h(\theta^n) \le \left[\frac{1+\delta}{2\theta} + \frac{1}{2}\right] h(t),$$

поскольку функция h возрастает в окрестности нуля. Полагая $\theta \uparrow 1$ и устремляя $\delta \downarrow 0$, получаем неравенство (1).

Покажем, что

$$\limsup_{t\to 0} w_t/h(t) \ge 1 \quad \text{п.н.} \tag{2}$$

Для этого нам понадобится оценка сверху хвоста гауссовского распределения, а именно, неравенство $\int_a^\infty e^{-y^2/2}dy > (a+1/a)^{-1}e^{-a^2/2}$, где $a > 0$. Оно вытекает из следующего рассуждения, использующего интегрирование по частям $\int_a^\infty y^{-2}e^{-y^2/2}dy$:

$$(1+a^{-2})\int_a^\infty e^{-y^2/2}dy > \int_a^\infty e^{-y^2/2}dy + \int_a^\infty y^{-2}e^{-y^2/2}dy = a^{-1}e^{-a^2/2}.$$

Рассмотрим последовательность независимых событий $B_n := \{w_{\theta^n} - w_{\theta^{n+1}} \ge (1-\sqrt{\theta})h(\theta^n)\}$. С.в. $w_{\theta^n} - w_{\theta^{n+1}}$ имеет такое же распределение, как $\xi\sqrt{\theta^n - \theta^{n+1}}$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Пользуясь указанной оценкой, имеем:

$$P(B_n) = P\left(\xi \ge \frac{1-\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}(2\ln\ln\theta^{-n})^{1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1-\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}(2\ln\ln\theta^{-n})^{1/2}}^\infty e^{-y^2/2}dy \ge C\frac{n^{-(1-\sqrt{\theta})^2/(1-\theta)}}{\sqrt{\ln n}}.$$

Стало быть, ряд $\sum P(B_n)$ расходится. В силу второй части леммы Бореля–Кантелли бесконечно часто

$$w_{\theta^n} \ge w_{\theta^{n+1}} + (1-\sqrt{\theta})h(\theta^n) \quad \text{п.н.}$$

Но из первой части доказательства вытекает, что $w_{\theta^{n+1}} \le 2h(\theta^{n+1})$ п.н., когда $n \to \infty$. Следовательно, бесконечно часто

$$w_{\theta^n} \ge -2h(\theta^{n+1}) + (1-\sqrt{\theta})h(\theta^n) \ge (1-4\sqrt{\theta})h(\theta^n)$$

п.н. Иными словами,

$$\limsup_{t\to 0} w_t/h(t) \ge 1 - 4\sqrt{\theta},$$

и (2) выполняется. □

4 Модуль непрерывности

Пропустить при первом чтении.

Положим $A_t := \{(t_1,t_2) \in [0,1]^2 : \ t_1 < t_2, \ t_2 - t_1 \le t\}$, $g(t) := \sqrt{-2t\ln t}$. Функция g возрастает на $[0,e^{-1}]$.

Теорема 4.1

$$P\left(\limsup_{t\to 0} \max_{(t_1,t_2)\in A_t} \frac{|w_{t_2}-w_{t_1}|}{g(t)} = 1\right) = 1.$$

Доказательство. **Лёгкая часть:** "$\limsup \ge 1$". Выберем $\varepsilon > 0$. Используя независимость приращений винеровского процесса, имеем:

$$P\left(\max_{0\le i<2^n} \frac{|w_{(i+1)2^{-n}} - w_{i2^{-n}}|}{g(2^{-n})} \le 1-\varepsilon\right) = (1-J)^{2^n} < e^{-2^n J}$$

(поскольку $e^{-x} \ge 1-x$), где

$$2^n J := 2^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1-\varepsilon)\sqrt{2n\ln 2}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy \ge C\frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-(1-\varepsilon)^2\ln 2^n} > c2^{n\varepsilon}.$$

Лемма Бореля–Кантелли влечёт результат.

Трудная часть: "$\limsup \le 1$". Фиксируем $\delta > 0$ и $\varepsilon > (1+\delta)/(1-\delta) - 1$. Положим $A_N^\delta := \{(i,j) : \ 0 \le i,j \le 2^n, \ k := j-i \le 2^{n\delta}\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} p_n &:= P\left(\max_{(i,j)\in A_n^\delta} \frac{|w_{j2^{-n}} - w_{i2^{-n}}|}{g((j-i)2^{-n})} \ge 1+\varepsilon\right) \le \sum_{(i,j)\in A_n^\delta} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln 2^n/(j-i)}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy \\ &\le C2^n \sum_{1\le k\le 2^{n\delta}} \int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln 2^n/k}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy \le C\frac{1}{\sqrt{n}} 2^{n(1+\delta)} 2^{-n(1-\delta)(1+\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sum_n p_n < \infty$, поскольку $(1+\varepsilon)^2 > (1+\delta)/(1-\delta)$, и по лемме Бореля–Кантелли, п.н., для достаточно больших n

$$\max_{(i,j)\in A_n^\delta} \frac{|w_{j2^{-n}} - w_{i2^{-n}}|}{g((j-i)2^{-n})} \ge 1+\varepsilon.$$

Последующее рассуждение применяется к произвольному ω вне исключительного множества нулевой вероятности.

Выберем t_1 и t_2 такие, что $t := t_2 - t_1 < 2^{-m(1-\delta)}$, где m такое, что $n \geq m$. Пусть n таково, что $2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq t < 2^{-n(1-\delta)}$. Имеют место представления:

$$t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots \quad (n < p_1 < p_2 < \dots),$$

$$t_2 = j2^{-n} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \dots \quad (n < q_1 < q_2 < \dots)$$

с $t_1 \leq i2^{-n} < j2^{-n} \leq t_2$ и $0 < k := j - i \leq t2^n < 2^{n\delta}$. Используя непрерывность w, получаем:

$$\begin{aligned} |w_{t_2} - w_{t_1}| &\leq |w_{t_2} - w_{j2^{-n}}| + |w_{j2^{-n}} - w_{i2^{-n}}| + |w_{i2^{-n}} - w_{t_1}| \\ &\leq (1+\varepsilon)\sum_{p>n} g(2^{-p}) + (1+\varepsilon)g(k2^{-n}) + \sum_{q>n}(1+\varepsilon)g(2^{-q}). \end{aligned}$$

При достаточно больших n

$$\sum_{p>n} g(2^{-p}) \leq cg(2^{-n}) < \varepsilon g(2^{(n+1)(1-\delta)}).$$

Функция h возрастает в окрестности нуля. Следовательно, для малых t

$$|w_{t_2} - w_{t_1}| \leq (1 + 3\varepsilon + 2\varepsilon^2)g(t),$$

что и даёт результат. $\square$

Упражнение. Траектории винеровского процесса п.н. удовлетворяют условию Гёльдера с про звольным показателем $\alpha < 1/2$, т.е. $|w_t - w_s| \leq |t - s|^\alpha$ при всех $t, s \in [0, T]$ п.н. Условие Гёльдера с показателем $\alpha \geq 1/2$ не выполняется (см. закон повторного логарифма в нуле!).

5 Фильтрация, порождённая винеровским процессом

Пусть винеровский процесс w задан на полном[4] вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Положим $\mathcal{F}_t^o := \sigma\{w_s :\ s \le t,\ \mathcal{N}\}$, где $\mathcal{N}$ — семейство всех множеств P-меры нуль из $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F}_t := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s^o$, $\mathbf{F} := (\mathcal{F}_t)$. Фильтрации $\mathbf{F}$ непрерывна справа ($\mathcal{F}_t = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$) и $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$. Это так называемые *обычные условия.*

Функция $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ называется *марковским моментом* или *моментом остановки* (внимание: второе название иногда используется только к конечным марковским моментам), если $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех t. Введём σ-алгебру $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} :\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\ \forall t \ge 0\}$.

Данные определения годятся для произвольной фильтрации, не только винеровской. Легко видеть, что если τ и σ — марковские моменты, то $\tau\wedge\sigma$, $\tau\vee\sigma$, $\tau+\sigma$ — тоже марковские моменты и $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ при любом t. Для непрерывной справа фильтрации последнее условие для с.в. τ влечёт, что τ — марковский момент (упражнение). Марковский момент — одно из важнейших понятий теории случайных процессов и для более детального знакомства со свойствами марковских моментов стоит обратиться к учебникам.

Предложение 5.1 (Теорема Дынкина–Ханта) *Пусть τ — конечный марковский момент относительно винеровской фильтрации. Тогда $w_\cdot^{+\tau} := w_{\tau+\cdot} - w_\tau$ — винеровский процесс независящий от $\mathcal{F}_\tau$ (иными словами σ-алгебры $\sigma\{w_t^{+\tau},\ t \ge 0\}$ и $\mathcal{F}_\tau$ независимы).*

Доказательство. Пусть $f \in C_b(\mathbf{R}^n)$, $g_t := f(w_{t_1+t} - w_t, \ldots, w_{t_n+t} - w_t)$, $\Gamma \in \mathcal{F}_\tau$. Положим

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n} I_{\{\tau\in[(k-1)2^{-n},k2^{-n}[\}}.$$

Очевидно, $\tau_n \downarrow \tau$ п.н. В силу непрерывности,

$$\begin{aligned} EI_\Gamma g_\tau &= \lim_{n\to\infty} EI_\Gamma g_{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} EI_\Gamma \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{\tau\in[(k-1)2^{-n},k2^{-n}[\}} g_{k2^{-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} EI_{\Gamma\cap\{\tau\in[(k-1)2^{-n},k2^{-n}[\}} g_{k2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} EI_{\Gamma\cap\{\tau\in[(k-1)2^{-n},k2^{-n}[\}} Eg_{k2^{-n}}, \end{aligned}$$

поскольку $\Gamma \cap \{\tau \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$ и, следовательно, не зависит от $g_{k2^{-n}}$. Далее, $Eg_{k2^{-n}} = Eg_0$. Получаем, что $EI_\Gamma g_\tau = EI_\Gamma Eg_0$, откуда и вытекает результат (обдумать детали). $\square$

[4]Это свойство означает, что если $A \in \mathcal{F}$ и $P(A) = 0$, то любое подмножество A тоже принадлежит $\mathcal{F}$.

Упражнение (блюменталевский "закон нуля или единицы"). Если $A \in \mathcal{F}_0$, то либо $P(A) = 0$, либо $P(A) = 1$.

6 Стохастические интегралы

1. Интеграл от детерминированной функции. Пусть $\mathcal{E}$ — множество всех функций на $[0, T]$ вида

$$f_t = \sum_{i=0}^{n} c_i I_{]t_i, t_{i+1}]}(t),$$

где $c_i \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_{n+1} = T$. Заметим, что $\mathcal{E}$ плотно в $L^2([0, T])$. Действительно, любая непрерывная функция может быть приближена функциями из $\mathcal{E}$ даже равномерно, утверждение о плотности в $L^2([0, T])$ множества непрерывных функций — стандартный факт из теории меры, где он доказывается различными способами — Гугл в помощь).

Определение. Для $f \in \mathcal{E}$ положим

$$J_T(f) := \int_0^T f_s dw_s = \sum_{i=0}^{n} c_i (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \tag{1}$$

(в стохастическом анализе используется и обозначение $f \cdot w_T$).

Легко видеть, что $J_T : f \mapsto J_T(f)$ — линейное отображение $\mathcal{E} \subset L^2([0, T])$ в $L^2(\Omega)$ со следующими свойствами: $EJ_T(f) = 0$,

$$EJ_T(f)J_T(g) = \int_0^T f_s g_s ds, \quad f, g \in \mathcal{E}.$$

В частности,

$$\|J_T(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = EJ_T^2(f) = \int_0^T f_s^2 ds = \|f\|^2_{L^2([0,T])}, \quad f \in \mathcal{E}.$$

Следующая лемма позволяет распространить определение интеграла как линейное изометрическое отображение $L^2([0, T])$ в $L^2(\Omega)$.

Лемма 6.1 *Пусть X и Y — метрические пространства, X_0 — всюду плотное подмножество в X, $f_0 : X_0 \to Y$ — изометрическое отображение*[5]. *Предположим, что Y полно.*

[5]Отображение, сохраняющее расстояние: $d_Y(f_0(x_1), f_0(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$

Тогда существует изометрическое отображение $f : X \to Y$ такое, что $f|_{X_0} = f_0$. Такое отображение (называемое изометрическим продолжением f_0) единственно.

В частности, если пространство X — нормированное, а Y — банахово, X_0 — линейное подпространство плотное в X, а $f_0 : X_0 \to Y$ — линейное изометрическое отображение, то f — линейное изометрическое отображение.

Доказательство. Упражнение (обязательное).

2. Кратный винеровский интеграл от детерминированной функции. Этот раздел включён для того, чтобы объяснить, как идея интегрирования винеровских интегралов может быть обобщена на многомерные интегралы. При первом чтении его можно пропустить.

Обозначим $\widehat{L}^2([0,T]^n)$ подпространство симметрических функций в $L^2([0,T]^n)$. Пусть $\mathcal{E}$ — множество симметрических функций $f = f(t_1,\dots,t_n)$ вида

$$f(t_1,\dots,t_n) = \sum c_{i_1,\dots,i_n} I_{]u_{i_1},v_{i_1}]}(t_1)\dots I_{]u_{i_n},v_{i_n}]}(t_n),$$

где u_{i_j} и $v_{i_j} = u_{i_j+1}$ — последовательные точки разбиения $0 = u_0 < u_1 \dots < u_{n+1} = T$ и все точки $u_{i_1},\dots,u_{i_n}$ разные; $c_{i_1,\dots,i_n} = c_{\pi(i_1),\dots,\pi(i_n)}$ для любой перестановки π индексов $i_1,\dots,i_n$. Значение функции $f \in \mathcal{E}$ равно нулю, если есть совпадающие переменные. Это свойство является ключевым при вычислении корреляции стохастических интегралов, приведённом ниже. Вместе с тем, множество специальных ступенчатых функций всюду плотно в $\widehat{L}^2([0,T]^n)$ (чтобы это понять, рассмотреть для примера функции на квадрате и воспользоваться тем, что диагональ квадрата имеет лебегову меру на плоскости равную нулю).

Определим кратный винеровский интеграл от функции $f \in \mathcal{E}$ следующим образом:

$$I_n(f) := \sum c_{i_1,\dots,i_n}(w_{v_{i_1}} - w_{u_{i_1}})\dots(w_{v_{i_n}} - w_{u_{i_n}}) = n! \sum_{i_1<\dots<i_n} c_{i_1,\dots,i_n}(w_{v_{i_1}} - w_{u_{i_1}})\dots(w_{v_{i_n}} - w_{u_{i_n}}).$$

Очевидно, что $EI_n(f) = 0$, $EI_n(f)I_m(g) = 0$, если $m \neq n$, и

$$EI_n(f)I_n(g) = n! \int_{[0,T]^n} \tilde{f}(t_1,\dots,t_n)\tilde{g}(t_1,\dots,t_n)dt_1...dt_n, \quad f,g \in \mathcal{E},$$

где

$$\tilde{f}(t_1,\dots,t_n) := \frac{1}{n!}\sum_{\pi} f(t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)})$$

является симметризацией f. В частности,

$$\|I_n(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = EI_n^2(f) = n!\int_{[0,T]^n} \tilde{f}^2(t_1,\dots,t_n)ds = n!\|f\|^2_{L^2([0,T])}, \quad f \in \mathcal{E}.$$

Это свойство позволяет нам распространить отображение $f \mapsto I_n(f)$ как линейную изометрию $\sqrt{n!}\widehat{L}^2([0,T]^n)$ в $L^2(\Omega)$. Для $f \in L^2([0,T]^n)$ полагаем $I_n(f) := I_n(\tilde{f})$.

Пусть H_n — образ $\widehat{L}^2([0,T]^n)$ при отображении $f \mapsto I_n(f)$, то есть H_n — пространство всех с.в. $I_n(f)$; полагаем $H_0 := \mathbb{R}$. Важное свойство: H_n — ортогональные пространства в $L^2(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема, доказанная Ито: $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^w) = \oplus\sum_{n=0}^\infty H_n$. (в современной литературе такое представление называется винеровским пространством Фока). Иными словами, любая квадратично-интегруемая с.в. ξ, являющаяся функцией от винеровского процесса $w = (w_t)_{t\le T}$ раскладывается в ряд по кратным винеровским интегралам, $\xi = \sum_n I_n(f_n)$. Это свойство лежит в основе так называемого исчисления Маллявена.

3. Интегралы от предсказуемых процессов.

Интеграл как элемент $L^2(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{E}_p$ — линейное пространство всех процессов $f = (f_t)$ на $[0,T]$ вида

$$f_t = \sum_{i=0}^n c_i I_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \qquad c_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{t_i}), \tag{2}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 \dots < t_{n+1} = T$. Определим стохастический интеграл от $f \in \mathcal{E}_p$ по той же формуле (1), но рассмотрим $J_T(f)$ (другие обозначения: $\int_0^T f_s dw_s$, $f \cdot w_T$) как линейное отображение $\mathcal{E}_p \subset L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}, m)$ в $L^2(\Omega)$, где $\mathcal{P}$ — предсказуемая σ-алгебра (порожденная всеми процессами вида (2)), а мера $m(d\omega, dt) := P(d\omega)dt$.

Для процессов $f \in \mathcal{E}_p$ имеем: $EJ_T(f) = 0$,

$$EJ_T(f)J_T(g) = E\int_0^T f_s g_s ds, \quad f, g \in \mathcal{E}_p.$$

В частности,

$$\|J_T(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = EJ_T^2(f) = E\int_0^T f_s^2 ds = \|f\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}, \quad f \in \mathcal{E}_p.$$

Заметим, что при вычислении корреляции стохастических интегралов структура интегрантов (2) крайне важна (привести детали вычисления и понять, почему математическое ожидание "перекрёстных" членов равно нулю).

Лемма о продолжении изометрии позволяет распространить определение интеграла на все процессы из $L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P},m)$ при сохранении свойства выше.

Замечание. Обратите внимание, что стохастический интеграл определен для элементов пространства $L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P},m)$, которые есть классы m-эквивалентных процессов. Это пространство такое же, как $L^2(\Omega\times[0,T],\bar{\mathcal{P}},m)$, где $\bar{\mathcal{P}}$ пополнение σ-алгебры $\mathcal{P}$ по мере m.

С другой стороны, по данному выше определению стохастический интеграл является элементом пространства, т.е. классом эквивалентных с.в. Для всех $t\in[0,T]$ можно определить интеграл $f\cdot w_t$, но неочевидно, что можно выбрать представители этих классов, чтобы получить непрерывный процесс $f\cdot w=(f\cdot w_t)_{t\in[0,T]}$.

Стохастический интеграл как случайный процесс.

Чтобы избежать указанной трудности, изменим конструкцию стохастического интеграла, рассматривая его как процесс уже на стадии определения для ступенчатых предсказуемых интегрантов.

Пусть $\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$ — пространство непрерывных мартингалов $M=(M_t)_{t\in[0,T]}$ с интегрируемым квадратом ($EM_t^2<\infty$, $E(M_t|\mathcal{F}_s)=M_s,\ s\le t\le T$), $M_0=0$; процессы, отличные на множестве нулевой вероятности, отождествляются.

Комментарий. Мы могли бы, по-видимому, обойтись без понятия условного математического ожидания относительно σ-алгебры, определив квадратично интегрируемый мартингал как процесс M, любое приращение M_t-M_s, $s\le t$, которого, как элемент пространства $L^2(\mathcal{F})$ ортогонально подпространству $L^2(\mathcal{F}_s)$, т.е. $E(M_t-M_s)\xi=0$ для любой с.в. $\xi\in L^2(\mathcal{F}_s)$. Тем не менее, знакомство с ним крайне желательно и я рекомендую посмотреть мои лекционные записки "Введение в теорию мартингалов с дискретным временем".

Ключевым результатом здесь является неравенство Дуба: для $M\in\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$

$$||M||_B^2 := E\sup_{s\le T} M_s^2 \le 4EM_T^2 =: 4||M||_H^2$$

(для непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов оно следует из неравенства Дуба для квадратично интегрируемых мартингалов в дискретном времени простым предельным переходом).

Легко проверить, что $||.||_B$ и $||.||_H$ — нормы в $\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$. Будучи связанными неравенствами $||M||_H\le||M||_B\le 2||M||_H$, они эквивалентны. Относительно $||.||_B$ пространство $\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$, очевидно, полно, т.е. является банаховым, а относительно $||.||_H$ — гильбертовым пространством.

Для $f \in \mathcal{E}_p$ положим

$$J_t(f) := f \cdot w_t := \int_0^t f_s dw_s = \sum_{i=0}^n c_i (w_{t_{i+1}\wedge t} - w_{t_i \wedge t}). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что процесс $J(f) = (J_t(f))$ принадлежит $\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$ и

$$||J(f)||_H^2 = EJ_T^2(f) = ||f||^2_{L^2(\Omega\times[0,T])}.$$

Следовательно, определение интеграла с линейного пространства $\mathcal{E}_p$ может быть распространено на все процессы из $L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P},m)$ как линейное изометрическое отображение в пространство $\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$ с гильбертовой нормой.

Упражнения. 1. Разумеется, интеграл можно определить, взяв в качестве начального момента не нуль, а $S \geq 0$. Используя для такого интеграла обозначение $\int_S^t f_s dw_s$, $t > s$, и обозначения введённые ранее, показать, что

$$\int_S^T f_s dw_s = f \cdot w_T - f \cdot w_S = (I_{[S,T]} f) \cdot w_T.$$

2. Вычислить стохастический интеграл $g \cdot w$ для $g = cI_{]\tau,\infty[}$, где τ — марковский момент, а c — $\mathcal{F}_\tau$-измеримая ограниченая с.в.

3. Пусть τ — марковский момент, $f \in L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P},m)$. Покажите, что $fI_{[0,\tau]}\cdot w = (f\cdot w)^\tau$ (**Обозначение:** если $X = (X_t)$, то $X^\tau = (X_{t\wedge\tau})$ обозначает процесс, полученный из X остановкой в момент τ.).

Стохастический интеграл с ослабленным требованием на интегрируемость.

Свойство, сформулированное в последнем упражнении, очень важно: оно позволяет определить интеграл $f \cdot w$ для всех предсказуемых функций f, таких, что

$$\int_0^T f_s^2 ds < \infty \quad \text{п.н.}$$

Иными словами, избавиться от требования "глобально" интегрируемости f двух переменных, а ограничиться только свойством интегрируемости траекторий $t \mapsto f_t(\omega)$.

Действительно, пусть свойством интегрируемости траекторий выполняется. Положим $\tau_n := \inf\{t : \int_0^t f_s^2 ds \geq n\}$; τ_n — марковский момент (почему?). Тогда

$$\int_0^T f_s^2 I_{[0,\tau_n]} ds \leq n,$$

интеграл $fI_{[0,\tau_n]} \cdot w$ определен и совпадает с $(fI_{[0,\tau_{n+1}]} \cdot w)^{\tau_n}$. То есть,

$$fI_{[0,\tau_n]} \cdot w = fI_{[0,\tau_{n+1}]} \cdot w$$

на стохастическом интервале $[0, \tau_n]$. Так что определён процесс X такой, что $X^{\tau_n} = fI_{[0,\tau_n]} \cdot w$. Этот процесс X, полученный "склейкой" интегралов объявляется стохастическим интегралом от f с использованием ранее введённых обозначений.

Отметим, что пожертвовав "глобальной" интегрируемостью мы теряем важные свойства. Мы не можем в этом случае гарантировать, что $E(f \cdot w_t)^2 < \infty$, ни даже, что $Ef \cdot w_t = 0$.

Очевидно, таким же образом мы можем определить процесс $f \cdot w = (f \cdot w_t)_{t \geq 0}$ для предсказуемого процесса f такого, что

$$\int_0^t f_s^2 ds < \infty \quad \text{п.н.} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

4. Стохастические интегралы по процессам Ито.

Пусть $a = (a_t)$ и $b = (b_t)$ — предсказуемые процессы такие, что

$$|a| \cdot \Lambda_T := \int_0^T |a_s| ds < \infty, \qquad b^2 \cdot \Lambda_T := \int_0^T b_s^2 ds < \infty.$$

Тогда на $[0, T]$ определён непрерывный согласованный процесс $X = (X_t)$ с

$$X_t = a \cdot \Lambda_t + b \cdot w_t = \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dw_s,$$

где первый интеграл определён при почти каждом ω в смысле обычного интеграла Лебега, а второй — как стохастический. Такого рода процессы (называемые процессами Ито) тоже могут служить интеграторами. Интеграл $f \cdot X$ определяется почленно для предсказуемого процесса f такого, что $|fa| \cdot \Lambda < \infty$, $(fb)^2 \cdot \Lambda < \infty$ и является процессом Ито:

$$f \cdot X = (fa) \cdot \Lambda + (fb) \cdot w.$$

Отметим своеобразный *“ассоциативный закон” для интегралов*: если предсказуемый процесс h интегрируем по $f \cdot X$, то

$$h \cdot (f \cdot X) = (hf) \cdot X.$$

5. Стохастический интеграл по непрерывному локальному мартингалу.

В 1967 году японские математики Кунита и Ватанабе опубликовали замечательную работу, которая придала элегантный вид теории стохастического интегрирования. Она основана на следующем очень простом соображении. Пусть $M \in \mathcal{M}_0^{2,c}$ и для него существует возрастающий непрерывный согласованный процесс $\langle M \rangle$, $\langle M \rangle_0 = 0$, такой, что разность $M^2 - \langle M \rangle$ является мартингалом. Повторяя почти дословно конструкцию интеграла по винеровскому процессу и замечая, что

$$E((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) = E(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) = E(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s | \mathcal{F}_s),$$

можно определить $J(f)$ (т.е. $f \mapsto f \cdot M$) как изометрическое отображение пространства $L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}, dPd\langle M \rangle)$ в пространство $\mathcal{M}_0^{2,c}$ и обобщить основные результаты всей теории Ито. Понятно, что в этом обобщении важную роль играет предположение о существовании процесса $\langle M \rangle$ с указанными свойствами. Оказывается, такой процесс $\langle M \rangle$ **всегда существует** и единственен. Этот факт вытекает из фундаментального результата стохастического анализа, теоремы Дуба–Мейера, обсуждение которого не входит в нашу задачу. Однако нетрудно проверить, что для интеграла $f \cdot w$ по винеровскому процессу $\langle f \cdot w \rangle = f^2 \cdot \Lambda$.

Процесс M называется *локальным мартингалом*, если существует последовательность марковских моментов (τ_n), таких, что $\tau_n \uparrow \infty$ п.н. и M^{τ_n} является мартингалом $\forall\, n$.

Конструкция стохастического интеграла даёт нам обширное множество непрерывных локальных мартингалов $f \cdot w$.

Пусть M — непрерывный локальный мартингал, $M_0 = 0$. Существует (и притом единственный) непрерывный согласованный (следовательно, предсказуемый) возрастающий процесс $\langle M \rangle$, $\langle M \rangle_0 = 0$, такой, что $M^2 - \langle M \rangle$ является локальным мартингалом.

Существование $\langle M \rangle$ является следствием теоремы Дуба–Мейера.

Упражнение. Пусть M и N — два локальных мартингала. Покажите, что существует один (и только один) непрерывный процесс $\langle M, N \rangle$ ограниченной вариации, $\langle M, N \rangle_0 = 0$, такой, что $MN - \langle M, N\rangle$, является локальным мартингалом[6].

Указание. Использовать тождество $ab = (1/4)[(a+b)^2 - (a-b)^2]$ (одномерный вариант полярного разложения билинейной формы).

Понятно, что $\langle w\rangle_t = \Lambda_t = t$.

Упражнение. Покажите, что $\langle f\cdot w\rangle = \int_0^\cdot f_s^2 ds$ и $\langle f\cdot w, g\cdot w\rangle = \int_0^\cdot f_s g_s ds$.

Теория стохастических интегралов для предсказуемых функций несильно меняется, если мы рассматриваем как интегратор локальный мартингал M (интеграл $f\cdot M$ определяется, если процесс f предсказуем и $f^2\cdot\langle M\rangle_t := \int_0^t f_s^2 d\langle M\rangle_s$, $t<\infty$, $\langle f\cdot M\rangle = f^2\cdot\langle M\rangle$ и т.д.).

Кроме того, та же самая конструкция хорошо работает, если M — процесс, для которого существует последовательность марковских моментов (τ_n), $\tau_n\uparrow\infty$ (п.н.) такая, что M^{τ_n} является квадратично интегрируемым мартингалом: $E(M_\infty^{\tau_n})^2<\infty$.

В этом случае теорема Дуба–Мейера утверждает, что существует один (и только один) предсказуемый возрастающий процесс $\langle M\rangle$, $\langle M\rangle_0 = 0$, такой, что $M^2 - \langle M\rangle$ является локальным мартингалом.

7 Формула Ито и её приложения

Упражнение 1. 1) Покажите, что если w — винеровский процесс, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$,

$$S_n^2(t) := \sum_{i=1}^n (w_{t_i} - w_{t_{i-1}})^2,$$

то $S_n^2(t)\to t$ в L^2 (следовательно, по вероятности), когда $\max_{i\le n}|t_i - t_{i-1}|\to 0$.

Указание. Используйте тот факт, что $w^2 - t$ является мартингалом.

2) Найдите предел $S_n^2(t)$ (по вероятности) в случае, когда w — непрерывный локальный мартингал.

Процесс X называется *непрерывным семимартингалом*, если он допускает разложение $X = X_0 + M + A$, где M — непрерывный локальный мартингал, $M_0 = 0$, A – непрерывный процесс ограниченой вариации.

Упражнение 2. Покажите, что представление $X = X_0 + M + A$ единственно (используйте 2) предыдущего упражнения).

[6] В этой символике $\langle M\rangle$ — сокращённое обозначение $\langle M, M\rangle$.

Теорема 7.1 **(Формула Ито.)** *Пусть $F \in C^2$, X — непрерывный семимартингал. Тогда*

$$F(X_t) - F(X_0) = F'(X) \cdot X_t + (1/2)F''(X) \cdot \langle M \rangle_t. \tag{3}$$

В частности, если w — винеровский процесс, то $F(w) = F(0) + F'(w) \cdot w + (1/2)F''(w) \cdot \Lambda$, или, в классических обозначениях,

$$F(w_t) - F(0) = \int_0^t F'(w_s)dw_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(w_s)ds. \tag{4}$$

Доказательство. Локализация, т.е. остановка процессов в подходящий марковский момент (какой именно?) позволяет ограничиться случаем, когда все процессы $|X|$, $|M|$, Var, A и $\langle M \rangle$ ограничены константой K и F имеет компактный носитель.

По формуле Тейлора имеем:

$$F(X_t)-F(X_0) = \sum_{i=1}^n (F(X_{t_i})-F(X_{t_{i-1}})) = \sum_{i=1}^n F'(X_{t_{i-1}})(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n F''(\eta_i)(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})^2,$$

где $t_i := it/n$ и $\eta_i \in [X_{t_{i-1}}, X_{t_i}]$.

Первая сумма сходится к $F'(X) \cdot X$ (объясните почему). Чтобы заключить, что вторая сумма сходится к $(1/2)F''(X) \cdot \langle M \rangle_t$, заметим,что

$$\sum_{i=1}^n |F''(\eta_i) - X_{t_{i-1}}|(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \leq \sup_i |F''(\eta_i) - X_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^n |(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \to 0$$

по вероятности (см. 2) в упражнении 1). Но

$$\begin{aligned} P\text{-}\lim_n \sum_{i=1}^n F''(X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}))^2 &= P\text{-}\lim_n \sum_{i=1}^n F''(X_{t_{i-1}})(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \\ &= P\text{-}\lim_n \sum_{i=1}^n F''(X_{t_{i-1}})(\langle M \rangle_{t_i} - \langle M \rangle_{t_{i-1}}) = F''(X) \cdot \langle M \rangle_t \end{aligned}$$

(приведите детали доказательства). □

Из формулы Ито следует, что множество непрерывных семимартингалов под действием любой функции из C^2 переходит в себя.

Упражнение 3. Доказать формулу Ито для произведения непрерывных семимартингалов $X = X_0 + M + A$ и $\tilde{X} = \tilde{X}_0 + \tilde{M} + \tilde{A}$:

$$X\tilde{X} = X_0\tilde{X}_0 + X \cdot \tilde{X} + \tilde{X} \cdot X + \langle M, \tilde{M} \rangle$$

(использовать полярное разложение).

Многомерная версия.

Теорема 7.2 *Пусть X — d-мерный процесс такой, что его компоненты $X^j = X_0^j + M^j + A^j$ — непрерывные семимартингалы. Пусть $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2. Тогда*

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{j=1}^{d} F_{x_j}(X) \cdot X_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} F_{x_j x_k}(X) \cdot \langle M^j, M^k \rangle_t. \tag{5}$$

Доказательство. Упражнение.

Примечание. В важном частном случае, когда $X_t^1 = \Lambda_t = t$, формула (5) верна для $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ класса $C^{1,2}$ и для $X = (\Lambda, w)$, $d = 2$, её можно записать в виде

$$F(t, w_t) - F(0, w_0) = \int_0^t F_x(s, w_s) dw_s + \int_0^t F_t(s, w_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(s, w_s) ds.$$

Формула Ито в применении к функции $F(x) = e^x$ и процессу $X := M - (1/2)\langle M \rangle$ немедленно даёт следующий важный для дальнейшего результат:

Предложение 7.3 *Пусть M — непрерывный локальный мартингал, $M_0 = 0$,*

$$Z := e^{M - (1/2)\langle M \rangle}.$$

Тогда $Z = 1 + Z \cdot M$ и, значит, Z является локальным мартингалом.

Процесс Z, являющийся решением линейного стохастического уравнения, называется стохастической экспонентой и обозначается $\mathcal{E}(M)$.

В частности, если $M = f \cdot w$, где $f^2 \cdot \Lambda_T < \infty$, то процесс

$$Z := \mathcal{E}(f \cdot w) = e^{f \cdot w - (1/2) f^2 \cdot \Lambda} = \exp\left\{ \int_0^{\cdot} f_s dw_s - \frac{1}{2} \int_0^{\cdot} f_s^2 ds \right\}$$

удовлетворяет уравнению

$$Z_{\cdot} = 1 + \int_0^{\cdot} Z_s f_s dw_s.$$

Пусть $\tau_a := \inf\{t \colon w_t \geq a\}$. Тогда для любых $\lambda, a > 0$ процесс $\lambda I_{[0,\tau_a]} \cdot w$ ограничен сверху и $\mathcal{E}(\lambda I_{[0,\tau_a]} \cdot w)$ — ограниченный мартингал. Вывести отсюда в качестве упражнения, что

$$E e^{-\lambda \tau_a} = e^{-\sqrt{2\lambda} a}.$$

8 Теорема Леви

Теорема 8.1 *Пусть M — непрерывный локальный мартингал такой, что $M_0 = 0$, а процесс $X := M^2 - \Lambda$ — локальный мартингал (т.е. $\langle M \rangle_t = t$). Тогда M — винеровский процесс.*

Доказательство. Заметим, что $EM^2_{t\wedge\tau_n} = E(t \wedge \tau_n) \le t$, когда τ_n – марковский момент такой, что X^{τ_n} — мартингал. Применение леммы Фату показывает, что M — квадратично интегрируемый мартингал, а X — мартингал.

По формуле Ито
$$e^{i\lambda M_t} = 1 + i\lambda \int_0^t e^{i\lambda M_s} dM_s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t e^{i\lambda M_s} ds.$$
Поскольку математическое ожидание стохастического интеграла в этой формуле равно нулю, то для характеристической функции $\varphi_t := Ee^{i\lambda M_t}$ получаем интегральное уравнение
$$\varphi_t = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t \varphi_s ds,$$
из которого получаем дифференциальное уравнение $\varphi' = -(1/2)\lambda^2\varphi$, $\varphi_0 = 1$, решение которого есть $\varphi_t = e^{-(1/2)\lambda^2 t}$. Тем самым мы показали, что $M_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Приведённое рассуждение теорему не доказывает, но может быть легко модифицировано. Применяя формулу Ито на отрезке $[s, t]$ и умножая её на индикаторную функцию множества $A \in \mathcal{F}_s$, мы получим для функции $\varphi : t \to EI_A e^{i\lambda(M_t - M_s)}$ то же уравнение, но с начальным условием $\varphi_s = P(A)$. Его решение $\varphi_t = P(A)e^{-(1/2)\lambda^2(t-s)}$. Отсюда вытекает, ввиду произвольности A, что приращение $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ и не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ (объяснить). □

9 Теорема Гирсанова

Прототип теоремы. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана стандартная гауссовская с.в. ξ, т.е. $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $Ee^{z\xi} = e^{(1/2)z^2}$, где $z \in \mathbb{C}$. Положим $\zeta := e^{a\xi-(1/2)a^2}$, где $a \in \mathbb{R}$. Очевидно, $E\zeta = 1$ и $\tilde{P} := \zeta P$ — вероятностная мера. Утверждается, что относительно меры $\tilde{P}$ с.в. $\xi - a$ — стандартная гауссовская. Действительно, для её характеристической функции относительно меры $\tilde{P}$ имеем (непосредственно из определений и простых преобразований):
$$\tilde{E}e^{i\lambda(\xi-a)} = E\zeta e^{i\lambda(\xi-a)} = Ee^{(a+i\lambda)\xi-(1/2)a^2-i\lambda a} = e^{-(1/2)\lambda^2}.$$

Теорему Гирсанова имеет дело с абсолютно непрерывной заменой вероятностной меры на пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$, где задан винеровский процесс $w = (w_t)_{t\le T}$ и предсказуемый процесс f такой что $f^2 \cdot \Lambda_T < \infty$ (п.н.), а следовательно, определен процесс $Z = e^{f\cdot w-(1/2)f^2\cdot\Lambda}$, являющийся решением линейного уравнения $Z = 1+(Zf)\cdot w$. Лемма Фату гарантирует только, что локальный мартингал Z — супермартингал и $EZ_T \le 1$. Для того, чтобы мера $\tilde{P} := Z_T P$ была вероятностной, условие $EZ_T = 1$ вводится в формулировку.

Лемма 9.1 *Пусть Z — мартингал.*

(a) Процесс $Y = (Y_t)_{t\le T}$ — мартингал относительно $\tilde{P}$ тогда и только тогда, когда ZY — мартингал относительно P.

(b) Если ZY — локальный мартингал, то Y — локальный мартингал относительно $\tilde{P}$.

Доказательство. (a) Из мартингальности Z следует, что $\tilde{E}|Y_t| = EZ_T|Y_t| = EZ_t|Y_t|$; правые и левые части конечны одновременно. В том же духе, для любого $A \in \mathcal{F}_s$, $s \le t$, имеем $\tilde{E}Y_tI_A = EZ_TY_tI_A = EZ_tY_tI_A$, $\tilde{E}Y_sI_A = EZ_TY_sI_A = EZ_sY_sI_A$. Если правые части этих цепочек равенств совпадают (ZY — мартингал), то совпадают и левые (Y — $\tilde{P}$-мартингал) и наоборот.

(b) Доказать в качестве упражнения.

Теорема 9.2 *Предположим, что $EZ_T = 1$ и, следовательно, $\tilde{P} = Z_TP$ — вероятностная мера. Тогда $\tilde{w} := w - f\cdot\Lambda$ — винеровский процесс относительно $\tilde{P}$.*

Доказательство. По формуле для произведения двух процессов Ито $Z = 1 + Zf \cdot w$ и $\tilde{w}$

$$Z\tilde{w} = \tilde{w}\cdot Z + Z\cdot(w - f\cdot\Lambda) + Zf\cdot\Lambda = \tilde{w}\cdot Z + Z\cdot w = (\tilde{w}fZ + Z)\cdot w.$$

Применяя её к процессам Z и $X := \tilde{w}^2 - \Lambda = 2\tilde{w}\cdot\tilde{w} = 2\tilde{w}\cdot w - 2\tilde{w}f\cdot\Lambda$, получаем, что

$$ZX = X\cdot Z + Z\cdot X + 2\tilde{w}fZ\cdot\Lambda = X\cdot Z + 2Z\tilde{w}\cdot w = (XZf + 2Z\tilde{w})\cdot w.$$

Итак, $Z\tilde{w}$ и $Z(\tilde{w}^2-\Lambda)$ — локальные мартингалы (стохастические интегралы по w). Результат вытекает из пункта (b) леммы и теоремы Леви о мартингальной характеризации винеровского процесса. $\square$

10 Стохастические уравнения

Пусть w — винеровский процесс, ξ — независимая от него с.в, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Процесс $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ является сильным решением дифференциального стохастического уравнения

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dw_t, \quad X_0 = \xi, \tag{6}$$

если:

(i) X — непрерывный процесс, согласованный с фильтрацией, порожденной w и ξ;

(ii) $\int_0^T |b(s, X_s)|ds + \int_0^T |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty$ (п.н.);

(iii) выполняется равенство процессов

$$X_. = \xi + \int_0^. b(s, X_s)ds + \int_0^. \sigma(s, X_s)dw_s. \tag{7}$$

Замечание. Название стохастическое дифференциальное уравнение — дань традиции. На самом деле, оно — интегральное уравнение (в этом отличие от теории обыкновенных дифференциальных уравнений, где имеется теорема, что дифференциальное уравнение и соответствующее ему интегральное уравнение эквивалентны).

Пусть B — банахово пространство непрерывных согласованных процессов X с нормой $||X||_B := (E \sup_{t\le T} X_s^2)^{1/2}$ (процессы отличные на множестве меры нуль отождествляются).

Теорема 10.1 *Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию линейного роста и условию Липшица, т.е. существуют константы K и L такие, что*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \le K(1 + |x|), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ t \in [0, T],$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \le L|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0, T].$$

Тогда уравнение (7) имеет в B решение и это решение единственно.

Доказательство. Дадим доказательство для случая $b = 0$, $\xi = w \in \mathbb{R}$ (общий случай — упражнение). Для $X \in B$ положим

$$F(X) := x + \int_0^. \sigma(s, X_s)dw_s$$

В силу условия линейного роста $\sup_{s\le T}\sigma^2(s,X_s)\le K^2\sup_{s\le T}(1+|X_s|)^2\le 2K^2(1+\sup_{s\le T}X_s^2)$. Применяя неравенство Дуба, получаем что

$$E\sup_{t\le T}\Big(\int_0^t \sigma(s,X_s)dw_s\Big)^2\le 4E\int_0^T\sigma^2(s,X_s)ds\le 8K^2T(1+E\sup_{s\le T}X_s^2)<\infty.$$

Значит, F отображает B в B.

В силу условия Липшица $\sup_{s\le T}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,\tilde X_s))^2\le L^2\sup_{s\le T}|X_s-\tilde X_s|^2$ и, как и выше, выводим оценку

$$||F(X)-F(\tilde X)||_B^2=E\sup_{t\le T}\Big(\int_0^t(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,\tilde X_s))dw_s\Big)^2\le 4L^2TE\sup_{s\le T}|X_s-\tilde X_s|^2=\theta^2||X-\tilde X||_B^2,$$

где $\theta:=2LT^{1/2}$. Если $\theta<1$, то отображение F — сжимающее и по теореме Банаха о сжимающем отображении (Гугл в помощь) имеет единственную неподвижную точку. Таким образом, теорема доказана в предположении, что отрезок $[0,T]$ достаточно мал.

Простое дополнительное рассуждение показывает, что она верна для любого T. Действительно, доказательство остаётся в силе, когда начальное условие есть независящая от w случайная величина ξ с $E\xi^2<\infty$. Имея решение X на отрезке $[0,T_1]$, $T_1<1/(4L^2)$, строим решение на отрезке $[T_1,2T_1]$ с начальным условием X_{T_1}, затем на $[2T_1,3T_1]$ и.т.д. В результате получаем (единственное) решение на $[0,T]$. □

Результат о единственности заслуживает более детального обсуждения.

Говорят, что для коэффициентов (b,σ) (или, менее формально, для уравнения имеет место сильная единственность решения, если для любых Ω, w и ξ, решения X^1 и $\tilde X^2$ уравнения 7, совпадают п.н.

Пример. В одномерном случае пусть $\sigma=1$, а $b=b(t,y)$ — убывающая функция по y для всех t. Тогда для уравнения

$$dX_t=b(t,X_t)dt+dw_t,\quad X_0=\xi,$$

есть сильная единственность. Действительно, положим $\Delta^X:=X^1-X^2$. Тогда

$$(\Delta_t^X)^2=2\int_0^t\Delta_s^X(b(s,X_s^1)-b(s,X_s^2))ds\le 0,$$

и, следовательно, $\Delta^X=0$.

Напомним *неравенство Гронуолла–Беллмана.*

Пусть $g \geq 0$ — непрерывная функция, $a, c \in \mathbb{R}_+$ и на $[0, T]$ выполняется неравенство

$$g_{\cdot} \leq c + a \int_0^{\cdot} g_s ds.$$

Тогда на $[0, T]$ справедлива оценка

$$g_{\cdot} \leq ce^{at}.$$

Для доказательства заметим, что данное неравенство при $c > 0$ эквивалентно неравенству

$$\frac{d}{dt} \ln(c + a \int_0^t g_s ds) \leq a, \qquad t \in [0, T].$$

Интегрируя от 0 до t, получаем оценку $\ln(c + a \int_0^t g_s ds) - \ln c \leq at$, эквивалентную требуемой. Случай, $c = 0$ получается из рассмотренного предельным переходом по $c \downarrow 0$.

Теорема 10.2 *Предположим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $K_n > 0$ такое, что для всех $t > 0$ и x, y с $|x| \leq n$, $|y| \leq n$ имеем:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_n |x - y|.$$

Тогда для коэффициентов (b, σ) имеет место сильная единственность решения.

Доказательство. Пусть X^1 и X^2 — два решения уравнения. Положим $\tau_n^i := \inf\{t : |X_t^1| \geq n\}$, $\tau_n := \tau_n^1 \wedge \tau_n^2$ и, опуская зависимость от n, $g_t := E(\Delta_{t \wedge \tau_n}^X)^2$,

$$J_t := \int_0^{t \wedge \tau_n} (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)) ds, \quad \tilde{J}_t := \int_0^{t \wedge \tau_n} (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dw_s.$$

Пусть $t \in [0, T]$. Используя неравенство Иенсена и условие Липшица, имеем:

$$EJ_t^2 \leq E(T \wedge \tau_n) \int_0^{t \wedge \tau_n} (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))^2 ds \leq K_n^2 TE \int_0^{t \wedge \tau_n} (X_s^1 - X_s^2)^2 ds \leq K_n^2 T \int_0^t g_s ds.$$

Для стохастического интеграла, применяя неравенство Дуба, получаем что

$$E\tilde{J}_t^2 \leq 4E \int_0^{t \wedge \tau_n} (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2 ds \leq 4K_n^2 \int_0^t g_s ds.$$

Используя элементарное неравенство $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ и полученные оценки, имеем:

$$g_t = E(J_1 + J_2)^2 \leq 2(EJ_1^2 + EJ_2^2) \leq 8K_n^2 (T + 1) \int_0^t g_s ds.$$

В силу неравенства Гронуолла–Беллмана $g \leq 0$ и, следовательно, $g = 0$ на $[0, T]$. Таким образом, $X^1 I_{\{[0, \tau_n]\}} = X^2 I_{\{[0, \tau_n]\}}$ п.н. Но $\tau_n \to \infty$ п.н. Отсюда результат. $\square$

11 Теорема Гирсанова и слабые решения стохастических уравнений

Пусть $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримые функции, $x \in \mathbb{R}$.

Задача о слабых решениях ставится следующим образом: найти вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, Q)$, на котором задан согласованный с $\mathbf{F}$ винеровский процесс W и непрерывный согласованный процесс X такие, что на $[0, T]$ выполняется равенство $X = x + f(X) \cdot \Lambda + \sigma(X) dW$, или, в классических обозначениях для интегралов,

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

которое в символической форме стохастического дифференциального уравнения имеет вид

$$dX_t = f(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \qquad X_0 = x.$$

Перечисленный выше набор объектов и называется *слабым решением* стохастического дифференциального уравнения.

Для иллюстрации идеи приведём следующий результат:

Теорема 11.1 *Пусть f — ограниченная измеримая функция, $x = 0$. Тогда слабое решение для пары $(f, 1)$ существует.*

Доказательство. Пусть w — винеровский процесс на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ По теореме Гирсанова процесс $\tilde{w} = w - f(w) \cdot \Lambda$ — винеровский на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \tilde{P})$, где $\tilde{P} = \mathcal{E}(f(w) \cdot w_T) P$. Требуемое слабое решение получается переобозначениями $Q := \tilde{P}$, $X := w$, $W = \tilde{w}$, так как в них равенство выглядит как нужное нам уравнение $X = f(X) \cdot \Lambda + W$. $\square$

Заметим, что результат остаётся в силе и для функционального уравнения, т.е., когда $f : [0, T] \times C[0, T]$ — ограниченная измеримая функция такая, что $f(t, x) = f(t, x^t)$ при всех t, где $x^t_s = x_{s \wedge t}$. Условие ограниченности f можно ослабить (сформулировать соответствующее утверждение).

В известном примере Цирельсона функциональное уравнение с $|f| \le 1$ и $\sigma = 1$ не имеет сильного решения. Но для любой измеримой функции $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ сильное решение всегда существует (теорем Звонкина).

12 Условие Новикова

Пропустить при первом чтении.

Пусть $M = (M_t)_{t\le T}$ — непрерывный локальный мартингал. Положительный локальный мартингал $\mathcal{E}(M) := e^{M-(1/2)\langle M\rangle}$, является решением линейного уравнения

$$dZ_t = Z_t dM_t, \quad Z_0 = 1.$$

По лемме Фату, $Z = \mathcal{E}(M)$ — супермартингал и $E\mathcal{E}_T(M) \le 1$. Известен ряд достаточных условий, при выполнении которых $\mathcal{E}(M)$ — мартингал и $E\mathcal{E}_T(M) = 1$. Легче всего запомнить *условие Новикова*:

$$Ee^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_T} < \infty. \tag{8}$$

Оно является очевидным следствие немного более слабого условия

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \ln Ee^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\langle M\rangle_T} = 0. \tag{9}$$

Дадим краткое доказательство достаточности последнего.

Теорема 12.1 *Если (9) выполнено, то $\mathcal{E}(M)$ — мартингал.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{E}(M)$ — мартингал, если $Ee^{(\frac{1}{2}+\delta)\langle M\rangle_T} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Действительно, пусть $p := 1+\delta$, $q := (1+\delta)/\delta$. Возьмем $r > 1$ такое, чтобы выполнялось равенство $(r^2p - r)q = 1 + 2\delta$. Используя неравенство Гёльдера и оценку $E\mathcal{E}_\tau(rpM) \le 1$, мы получим, что для любого марковского момента τ со значениями в $[0, T]$

$$E\mathcal{E}^r_\tau(M) = E\mathcal{E}^{1/p}_\tau(rpM)e^{\frac{1}{2}(r^2p-r)\langle M\rangle_\tau} \le (Ee^{\frac{1}{2}(r^2p-r)q\langle M\rangle_\tau})^{1/q} \le (Ee^{(\frac{1}{2}+\delta)\langle M\rangle_T})^{1/q} < \infty.$$

Таким образом, семейство $\{\mathcal{E}_\tau(M)\}$ равномерно интегрируемо и $\mathcal{E}(M)$ — мартингал.

Из (9) следует, что с.в. $e^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\langle M\rangle_T}$ интегрируема, когда $\varepsilon \in]0, 1[$. Следовательно, меньшая с.в. $e^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\langle M\rangle_T}$ также интегрируема и, в силу только что доказанного достаточного условия, $\mathcal{E}((1-\varepsilon)M)$ — мартингал. Применяя неравенство Гёльдера (теперь с $p := 1/(1-\varepsilon)$ и $q := 1/\varepsilon$) имеем:

$$1 = E\mathcal{E}_T((1-\varepsilon)M) = E\mathcal{E}^{1-\varepsilon}_T(M)e^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\varepsilon\langle M\rangle_T} \le (E\mathcal{E}_T(M))^{1-\varepsilon}(Ee^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\langle M\rangle_T})^\varepsilon.$$

Используя (9), получаем, что $E\mathcal{E}_T(M) \ge 1$ и, следовательно, $E\mathcal{E}_T(M) = 1$. □

13 Теорема о предсказуемом представлении

В этом параграфе $\mathbf{F}$ — фильтрация, порождённая винеровским процессом w.

Теорема 13.1 *Пусть $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$. Тогда существует и притом единственный процесс $\varphi \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}, dPd\Lambda)$ такой, что $\xi = E\xi + \varphi \cdot w_T$, или, в других обозначениях;*

$$\xi = E\xi + \int_0^T \varphi_s dw_s.$$

Доказательство. Мы будем доказывать теорему для комплексных пространств L^2 (конструкция стохастического интеграла распространяется на случай комплексные интегранты, а формулировки эквивалентны). Множество R с.в., допускающих представление, — замкнутое линейное подпространство в $L^2(\mathcal{F}_T)$ (стохастический интеграл определён через изометрию, поэтому пределы ξ^n и f^n (в соответствующих пространствах) существуют одновременно).

Пусть g — ограниченная борелевская функция на $[0,T]$. Тогда с.в. $Z_t := e^{g \cdot w_t - (1/2) g^2 \cdot \Lambda_t}$ принадлежат $L^2(\mathcal{F}_T)$. Поскольку $Z_T = 1 + (Zg) \cdot w_T$, то $Z_T \in R$. Но тогда и $e^{g \cdot w_T} \in R$. В частности, можно взять $g = \sum i\lambda_k I_{]t_k, t_{k+1}]}$. Это значит, что

$$e^{i\lambda_0(w_1 - w_0) + \ldots + i\lambda_n(w_{t_{n+1}} - w_{t_n})} \in R.$$

Отсюда вытекает, что $F(w_1 - w_0, ..., w_{t_{n+1}} - w_{t_n}) \in R$ для любой ограниченной непрерывной функции $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (обоснуйте, применяя теорему Стоуна–Вейерштрасса к тригонометрическим полиномам на компакте $[-N, N]^n$). Остаётся убедиться, используя теорему о монотонных классах, что такие с.в. плотны в $L^2(\mathcal{F}_T)$. $\square$

Следствие 13.2 *Любой квадратично интегрируемый мартингал относительно винеровской фильтрации допускает представление в виде стохастического интеграла и, следовательно, непрерывен (точнее, имеет непрерывную модификацию).*

Упражнение. Любой мартингал M относительно винеровской фильтрации непрерывен. *Указание*: рассмотреть ограниченные непрерывные мартингалы M^n с $M^n_T = M_T I_{\{|M_T| \le n\}}$ и воспользоваться максимальным неравенством для непрерывных мартингалов.

Условие $E\varphi^2 \cdot \Lambda_T < \infty$ для единственности представления является существенным. Мы объясним явление на бесконечном интервале. Действительно, пусть $\tau := \inf\{t > 0 \colon w_t > 1\}$ и $\sigma := \inf\{t > \tau \colon w_t < 0\}$. Эти два марковских момента конечны п.н. (ввиду закона повторного логарифма) и, значит, интеграл $I^2_{[0,\sigma]} \cdot \Lambda_\infty < \infty$ п.н., но $I_{[0,\sigma]} \cdot w_\infty = w_\sigma - w_0 = 0$.

14 Модель Блэка–Шоулза и цена опциона

1. Модель. В классической модели Блэка–Шоулза (Black and Scholes model, BS) предполагается, что на рынке имеется безгранично делимый рисковый актив (акция, stock). Инвестор (трейдер) имеет возможность покупать и продавать произвольное количество этого актива, уменьшая или увеличивая таким образом сумму на своём банковском счёте с процентной ставкой r и мгновенным зачислением процентов, что выражается формулой

$$dB_t = rB_t dt.$$

Динамика цены рискового актива описывается *геометрическим броуновским движением*:

$$dS_t = S_t(adt + \sigma dw_t),$$

т.е. доходность акции имеет детерминированную компоненту a и гауссовскую "флуктуацию", амплитуда которой характеризуется *волатильностью* $\sigma > 0$. Имеют место явные формулы:

$$B_t = B_0 e^{rt}, \qquad S_t = S_0 e^{(a-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma w_t}.$$

В каждый момент времени инвестор имеет возможность сформировать портфель, выбрав произвольно количество акций в портфеле за счёт своего банковского счёта. Мы будем предполагать, что $r = 0$. Это означает, что банковский счёт используется в качестве базового актива (numeraire) для вычисления приведённой стоимости к нулевому моменту времени. Динамика стоимости V самофинансирующегося портфеля с начальным капиталом V_0 описывается стохастическим интегралом, $V = V_0 + H \cdot S$, где H_t — количество акций в портфеле в момент t выбирается произвольно (естественно, при изменении инвестиций в акции меняется сумма на банковском счёте, но она никак не влияет на динамику портфеля, так как $dB_t = 0$).

В модели Блэка–Шоулза предполагается, что ценовой процесс несет всю возможную информацию. Это означает, что фильтрация $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ порождается процессом S (или, что то же, w). Действия инвестора на цену не влияют.

2. Принцип репликации или хеджирования. В модели Блэка–Шоулза была принципиально решена проблема нахождения "теоретической" цены опционов европейского типа на примере опциона "колл" (call-option), или опциона покупателя. Исторически, таким был контракт между продавцом и покупателем актива, в котором указывалось, что в момент погашения T (exercise time or maturity time), например, по истечении года с момента заключения контракта, покупатель имеет право потребовать у продавца предоставить ему актив по цене K, указанной в контракте (strike-price), вне зависимости от рыночной цены S_T. В модели рынка без транзакционных издержек это означает, что покупатель воспользуется своим правом и предъявит опцион к исполнению только в случае, когда $S_T > K$. В противном случае он купит актив по более низкой рыночной цене, а контракт пойдёт в мусорную корзину. В любом случае, продавец сталкивается с необходимостью выплаты $(S_T - K)^+$: в случае, когда рыночная цена выше он добавляет разность $S_T - K$ к оплате и покупает актив на рынке или просто выплачивает эту разность покупателю, предоставив ему самому обратиться к рынку. Разумеется, на современном рынке, как правило, бумажных контрактов нет, а транзакции производятся на основе цифровых технологий.

Блэк и Шоулз предложили считать ценой опциона (и возвели это в принцип) начальный капитал самофинансирующегося портфеля, терминальное значение которого является "репликой выплаты", т.е. совпадает с выплатой $\xi = (S_T - K)^+$ и, значит, ограждает, "хеджирует" [7] продавца от потерь. В наших обозначениях это означает, что проблема состоит в нахождении числа p и стратегии H таких, что $\xi = p + H \cdot S_T$.

В рамках теории, изложенной выше, эта задача легко решается. Действительно, запишем интеграл $H \cdot S_T$ как интеграл $\varphi \cdot \tilde{w}$, где $\varphi_t := H_t S_t \sigma$ и $\tilde{w}_t = w_t + (a/\sigma)t$ и сравним формулу $\xi = p + \varphi \cdot \tilde{w}_T$ с формулой в теореме о предсказуемом представлении. Отличие только в том, что интегрирование ведётся по винеровскому процессу со сносом $\tilde{w}$. Однако, по теореме Гирсанова (в простейшем варианте, известном задолго до Гирсанова) с $f = -(a/\sigma)$, процесс $\tilde{w}$ является стандартным винеровским относительно вероятностной меры $\tilde{P}$, называемой *(эквивалентной) мартингальной мерой*. Поэтому, $p = \tilde{E}\xi$, а существование φ обеспечивается теоремой о представлении на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \tilde{P})$ (нетрудно проверить, что в нашем случае, $\tilde{E}S_T^2 < \infty$ и нужное условие интегрируемости выполняется).

3. Формулы Блэка–Шоулза. Пусть $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$ и пусть $b, A > 0$. Согласно прототипу теоремы Гирсанова разность $\eta - b$ относительно меры $\bar{P} = e^{b\eta - \frac{1}{2}b^2} P$ имеет то же распределение, что и η относительно P, т.е. стандартное гауссовское. Поскольку $(\zeta - A)^+ = \zeta I_{\{\zeta > A\}} - A I_{\{\zeta > A\}}$,

[7] От *to hedge* — ограждать

имеем:

$$\begin{aligned} E(e^{b\eta-\frac{1}{2}b^2}-A)^+ &= Ee^{b\eta-\frac{1}{2}b^2}I_{\{\eta\ge\frac{1}{b}\ln A+\frac{1}{2}b\}}-AEI_{\{\eta\ge\frac{1}{b}\ln A+\frac{1}{2}b\}}=EI_{\{\eta\ge\frac{1}{b}\ln A-\frac{1}{2}b\}}-AEI_{\{\eta\ge\frac{1}{b}\ln A+\frac{1}{2}b\}}\\ &= \Phi\Big(-\frac{1}{b}\ln A+\frac{1}{2}b\Big)-A\Phi\Big(-\frac{1}{b}\ln A-\frac{1}{2}b\Big). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tilde{w}_T/\sqrt{T}\sim\mathcal{N}(0,1)$ относительно $\tilde{P}$ и записывая S_T в виде

$$S_T=xe^{\sigma\sqrt{T}\tilde{w}_T/\sqrt{T}-(1/2)\sigma^2T},$$

получаем отсюда первую **формулу Блэка–Шоулза** для цены опциона

$$C(0,x)=C(0,x,\sigma):=\tilde{E}(S_T-K)^+=x\tilde{E}(S_T/x-K/x)^+$$

в момент $t=0$

$$C(0,x,\sigma)=x\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\frac{x}{K}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)-K\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\frac{x}{K}-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right). \tag{10}$$

Соответственно, если контракт начинается в момент времени $t<T$, где T — время погашения и $T-t$ — время до погашения, x — цена актива в момент t, формула Блэка–Шоулза принимает вид

$$C(t,x)=C(t,x,\sigma)=x\Phi(d)-K\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t}), \tag{11}$$

где

$$d=d(t,x)=d(t,x,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\frac{x}{K}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}. \tag{12}$$

Положим также $C(T,x)=(x-K)^+$. Функция C непрерывна во всех точках $(t,x)\in[0,T]\times]0,\infty[$ кроме (T,K).

Процесс цены опциона $C(t,S_t)$ является $\tilde{P}$-мартингалом. Чтобы увидеть это, вычислим производные:

$$\begin{aligned} C_x(t,x) &= \Phi(d(t,x)), && \text{(Delta)},\\ C_{xx}(t,x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}\varphi(d(t,x)), && \text{(Gamma)},\\ C_t(t,x) &= -\frac{\sigma x}{2\sqrt{T-t}}\varphi(d(t,x)), && \text{(Theta)}. \end{aligned}$$

В скобках стоят "греки" — названия производных на профессиональном жаргоне. Производная $C_\sigma(t,x)$ называется Vega, а производная $C_r(t,x)$ (в модели, где $r>0$) — Rho.

Заметим, что

$$C_t(t,x) + (1/2)\sigma^2 x^2 C_{xx}(t,x) = 0. \tag{13}$$

По формуле Ито на $[0,T[$

$$C(t,S_t) = C(0,S_0) + \int_0^t C_x(u,S_u)dS_u + \int_0^t [C_t(u,S_u) + (1/2)\sigma^2 S_u^2 C_{xx}(u,S_u)]du$$

и, следовательно, в силу тождества для производных

$$C(t,S_t) = C(0,S_0) + \int_0^t C_x(u,S_u)dS_u = C(0,S_0) + \int_0^t C_x(u,S_u)S_u\sigma d\tilde{w}_u.$$

Значит, процесс $C(t,S_t)$ — $\tilde{P}$-мартингал. Тем самым мы нашли и явный вид для функции из теоремы о представлении предсказуемом представлении для с.в. $(S_T - K)^+$: именно, $\varphi_t = C_x(t,S_t)S_t\sigma$.

Значение производной $C_x(t,x)$ (“дельта") функции C показывает, какое количество акций в момент времени t должно быть в портфеле, когда цена актива равна x. Важно отметить, что $0 < C_x(t,x) < 1$. В частности, хеджирующий портфель не требует шорт-селлинга, т.е. заимствования акций.

Фундаментальное равенство $C_x(t,x) = \Phi(d(t,x))$ естественно назвать **второй формулой Блэка–Шоулза** (впрочем, его так никто не называет).

Терминальная задача для *уравнения Блэка–Шоулза* (13) в обращённом времени $T-t$ есть обычная задача Коши для уравнения параболического типа $u_t = (1/2)\sigma^2 x^2 u_{xx}$ с начальным условием $u(0,x) = g(x)$. В случае опциона колл $g(x) = (x-K)^+$. В общем случае, её решение определяет структуру хеджирующего (реплицирующего) портфеля для опциона с выплатой $g(S_T)$. Для произвольной функции g явных формул нет и цена опциона находится с использованием численных методов.

В случае опциона продавца, называемого также “пут“, $g(x) = (K-x)^+ = (x-K)^-$. Европейский опцион пут (put) — это опционный контракт, который даёт держателю право, но не обязанность, продать единицу базового актива по установленной цене K в момент T. Покупатель опциона пут считает, что базовая акция упадет ниже цены исполнения в момент T. Поскольку $b^+ - b^- = b$, а S — $\tilde{P}$-мартингал с $S_0 = x$, то имеет место следующее тождество для цен, называемое паритетом опционов колл и пут: $\tilde{E}(S_T-K)^+ - \tilde{E}(K-S_T)^+ = x - K$.

Модель с положительной банковской процентной ставкой. В случае, когда $r > 0$, динамика стоимости самофинансирующегося портфеля может быть записана в виде

$$V = V_0 + H \cdot S + ((V - HS)B^{-1}) \cdot B = V_0 + H \cdot S + r(V - HS) \cdot \Lambda. \tag{14}$$

Для дисконтированной стоимости $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$, т.е. приведённой к начальному моменту времени, пользуясь удобной в данном случае "дифференциальной" формой записи, имеем:

$$d\tilde{V}_t = d(e^{-rt}V_t) = e^{-rt}dV_t - re^{-rt}V_t dt = e^{-rt}H_tS_t(adt + \sigma dw_t) - re^{-rt}H_tS_tdt = e^{-rt}H_tS_t\sigma d\bar{w}_t,$$

где $\bar{w}_t = t(a-r)/\sigma + w_t$. Мартингальная мера $\tilde{P} = e^{f \cdot w_T - (1/2)f^2 \cdot \Lambda_T}P$, где $f := -(a-r)/\sigma$ и цена опциона с дисконтированным платежом $e^{-rT}(S_T - K)^+$ задаётся формулой

$$C(0, T, \sigma) = e^{-rT}\tilde{E}(S_T - K)^+ = x\Phi(d_1(0, x)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2(0, x)),$$

где

$$d_1(0, x) := d(0, x) + \frac{r}{\sigma}\sqrt{T} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\frac{x}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} + \frac{r}{\sigma}\sqrt{T}, \qquad d_2(0, x) := d_1(0, x) - \sigma\sqrt{T}.$$

Упражнение 1. Вывести уравнение Блэка–Шоулза для случая $r > 0$.

Упражнение 2. Вывести аналоги формул Блэка–Шоулза в модели с переменной волатильностью $\sigma = (\sigma_t)$, где σ — измеримая функция со значениями в интервале $[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$, $\underline{\sigma} > 0$.

4. Другие типы опционов.

Линейные комбинации опционов, для которых имеются явные формулы, (как нетрудно видеть из изложенного выше таковыми являются опционы с кусочно-линейными платёжными функциями), образуют опционы с явными формулами для цен. Таков, например, стрэдл (straddle) с $g(x) = (K - x)^+ + (x - K)^+ = |x - K|$ $(x > 0)$.

Американские опционы — опционы, в которых держатель может предъявить их к реализации в любое время до даты экспирации (expiration date) $T \le \infty$, оговоренной в контракте. В американском опционе задаётся функция выплат $(\xi_t)_{t \le T}$ — случайный процесс. Погашая опцион в момент t, покупатель получает выплату ξ_t.

В американском опционе колл с датой экспирации T выплата в момент погашения (exercise date) $t \le T$ равна $(S_t - K)^+$. Предполагается, что покупатель не знает будущего, т.е. принимает решение на основе информации о процессе S до момента τ. Более формально,

τ — марковский момент относительно фильтрации, порождённой S (тем не менее, можно предположить, что покупатель бросает монетку и принимает решение в зависимости от результата, т.е. τ есть марковский момент относительно фильтрации, расширенной добавлением независимой случайной величины).

Нетрудно понять, что цена американского опциона не может быть меньше цены европейского. Для опционов колл обе цены совпадают. Действительно, хеджирующий портфель европейского опциона доминирует выплату американского опциона, когда он предъявлен в момент T, т.е. $p+f\cdot S_T=(S_T-K)^+$. Поскольку функция $x\mapsto(x-K)^+$ выпукла, то процесс $(S_t-K)^+$ — $\tilde{P}$-субмартингал, значит, $(S_t-K)^+\le\tilde{E}((S_T-K)^+|\mathcal{F}_t)=p+f\cdot S_t$ для люого $t\le T$. Т.е., хеджирующий портфель европейского опциона доминирует выплату американского опциона на всём отрезке $[0,T]$. Привлекательность такого опциона для продавца очевидна: легко себе представить ситуацию, когда по какой-то причине держатель опциона вынужден его погасить ранее момента T.

Примерами опционов, где платёжное обязательство ξ зависит от всей траектории цены, являются так называемые Азиатские опционы, где $\xi:=(S_T-A_T)^+$ или $\xi:=(A_T-K)^+$, а $A_T:=T^{-1}\int_0^T S_t dt$ — случайная величина (в более общем варианте $A_T:=(T-T_0)^{-1}\int_{T_0}^T S_t dt$, где $T_0<T$). Азиатские опционы позволяют избежать манипуляции ценой актива, когда продавец опциона перед моментом погашения выбрасывает на рынок какое-то количество актива, после чего цена последнего в момент T падает ниже страйка Европейского опциона колл.

15 Теоретические и практические аспекты формул BS

1. Замечательным свойством формул Блэка–Шоулза (BS) является тот факт, что они зависят только от параметра σ, который на практике, при знании эволюции цены S до момента t, можно считать известным. Действительно, пусть $t_k^n := tk/n$. Тогда

$$P\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^n \Big(\frac{S_{t_k^n} - S_{t_{k-1}^n}}{S_{t_{k-1}^n}}\Big)^2 = \sigma^2 P\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^n (w_{t_k^n} - w_{t_{k-1}^n})^2 = \sigma^2 t.$$

и оценка $\widehat{\theta}_n := (1/t)\sum_{k\le n}(S_{t_k^n}/S_{t_{k-1}^n} - 1)^2$ при разумных значениях n оказывается хорошим приближением σ^2. Полученная таким образом оценка $\widehat{\sigma} = \widehat{\theta}_n^{1/2}$ называется *исторической волатильностью.*

2. Практическая реализация хеджирующего портфеля. Определение портфеля как стохастического интеграла и формулы BS подразумевает физически нереализуемый непрерывный трейдинг. В реальности, портфель переформатируется в соответствии со второй формулой BS через какие-то достаточно малые промежутки времени, например, в моменты t_k, которые, в частности, могут быть периодическими $t_k := kT/n$ или сгущаться при приближении даты погашения. Из свойств стохастического интеграла следует, что для аппроксимирующей физически реализуемой кусочно-постоянной стратегии

$$H^n = \sum_{k=0}^n C_x(t_k, S_{t_k}, \sigma) I_{]t_k, t_{k+1}]}, \tag{15}$$

терминальное значение $V_T^n = C(0, x, \sigma) + H^n \cdot S_T$ сходится по вероятности к платежу $(S_T - K)^+$.

3. Учёт транзакционных издержек. В описанной выше схеме, когда переформатирование портфеля происходит в дискретные моменты времени, легко ввести плату за покупку и продажу акций, в простейшем варианте эта плата пропорциональна объёму сделки и соответствующее значение портфеля может быть описана формулой

$$\tilde{V}_T^n = p_n + \sum_{k=0}^n \tilde{C}_x(t_k, S_{t_k})(S_{t_{k+1}} - S_{t_k}) - \sum_{k=0}^n \kappa_n S_{t_k} \big|\tilde{C}_x(t_k, S_{t_k}) - \tilde{C}_x(t_{k-1}, S_{t_{k-1}})\big|, \tag{16}$$

где коэффициент κ_n может зависеть от числа транзакций. В случае, когда $\kappa_n = \kappa_0/\sqrt{n}$, то можно использовать формулы BS, но не с истинной волатильностью σ, а с искусственно завышенным значением $\tilde{\sigma} := \sigma(1 + \sqrt{8/\pi}\kappa_0/\sigma)^{1/2}$, то есть полагать

$$p_n = C(0, T, \tilde{\sigma}), \qquad \tilde{C}_x(t_k, S_{t_k}) = C_x(t_k, S_{t_k}, \tilde{\sigma}).$$

Теорема Леланда–Лотта утверждает, что $\tilde{V}_T^n \to (S_T - K)^+$ по вероятности при $n \to \infty$.

4. Хеджирование и репликация. В идеализированной модели BS понятия хеджирования и репликации совпадают. Это связано с тем, что в этой модели любой опцион может быть реплицирован (благодаря теореме о предсказуемом представлении). В других моделях, даже простых, это не так. Поэтому целесообразно эти понятия разделить. В перспективе различных обобщений, в том числе на модели с транзакционными издержками, для опциона с платежом ξ естественно ввести множество $\Gamma = \Gamma(\xi)$ *хеджирующих начальных капиталов*, как тех p, для которых найдётся допустимая стратегия H такая, что $p + H \cdot S_T \geq \xi$. Понятно, что множество Γ, если непусто, является полубесконечным интервалом. Напомним, что в модели BS допустимость связывалось с условием интегрируемости в теореме о предсказуемом представлении, причём для меры $\tilde{P}$. В более общих теориях *допустимыми* объявляются стратегии, для которых процесс стоимости портфеля $p + H \cdot S$ ограничен снизу. *Хеджирующей (или суперхеджирующей) ценой* называется величина $\underline{p} := \inf \Gamma$.

5. Хотя в модели BS постулируется наличие на рынке только одного рискового финансового актива, появление на нём, например, опциона колл, означает, что на нём появился ещё один актив. Неявно предполагается, что он торгуется только в нулевой момент времени, т.е. для него допускается только стратегия buy-and-hold (в реальности это не так). Что произойдёт, если покупатель согласен купить по цене $p > C(0, x)$? Благодаря имеющейся в модели идеализации, продавец получит безрисковую прибыль $p - C(0, x)$, инвестировав $C(0, x)$ в качестве начального капитала портфеля V, обеспечивающего выполнение контрактного обязательства. Иными словами, для продавца появляется арбитражная возможность. Легко понять, что если $p < C(0, x)$, то безрисковую прибыль получит покупатель опциона. Для этого он ему нужен самофинансирующийся портфель стоимость которого $-V$ (объяснить, сравнив балансы покупателя в момент 0 и T). Отсутствие арбитража считается важнейшим свойством свойством финансового рынка, теснейшим образом связанным с существованием эквивалентной мартингальной меры. Теория арбитража фактически является синонимом теории финансовых рынков.

6. Одним из достоинств формулы BS является её *робастность*, т.е. устойчивость относительно ошибок спецификации модели. Тем не менее, статистические тесты в большинстве случаях отвергают гауссовость приращений логарифмов ($\ln S$ — винеровский процесс с детерминированным сносом). В связи с этим в настоящее время на практике используются более продвинутые модели: с локальной волатильностью, $dS_t = S_t(adt + \sigma(t, S_t))dw_t$, где $\sigma(t, x)$ — некоторая функция, со стохастической волатильностью, где $\sigma = (\sigma_t)$ — случайный процесс, а также модели, основанные на геометрическом процессе Леви, etc.

7. Экономический смысл опционных контрактов. Чтобы понять изначальный экономический смысл опциона колл представим себе производство, функционирующее на сырье, цена которого может варьироваться в широких пределах (таком, как нефть). Приобретение опциона обеспечивает гарантированную поставку по цене не превосходящей K в момент времени T, обеспечивая тем самым устойчивость производства вне зависимости от того, насколько в будущем поднимется цена S_T. При этом покупатель обеспечивает себе детерминированную границу издержек на сырьё: K + цена опциона p + цена банковской услуги, которая в модели не обсуждается, но, разумеется, имеет место быть. В чём эта услуга состоит? Дело в том, что покупатель опциона полностью исключает для себя риск, связанный с флуктуациями цены актива, и не заботится о том, что из себя представляет этот риск, как его моделировать, хеджировать и т.д. В этом смысле опционы являются финансовыми инструментами. Риск и работу с ними берёт на себя банк — продавец опционов. Именно в этом состоит его услуга: банк формирует модель цены актива, близкую или нет к реальности, хеджирует тем или иным способом терминальную выплату $(S_T - K)^+$, несёт операционные издержки и т.д. Цена банковской услуги формируется рынком. Некоторые опционы типа колл и пут стандартизованы и торгуются на рынке (фиксированы даты погашения, обычно с шагом в 3 месяца, и страйки). Как и все ценные бумаги (на самом деле, никаких бумаг нет) они являются предметом биржевой спекуляции. В силу того, что деривативы гораздо дешевле базовых активов, они гораздо привлекательнее для спекуляции, при этом их суммарная стоимость на рынке оказывается в разы больше суммарной стоимости базовых активов.

8. В отличие от неизменных физических законов, финансовые рынки постоянно эволюционируют, что требует эволюцию и моделей, их описывающих. При этом синхронное действие трейдеров в соответствии с одним и тем же алгоритмом, может вызвать резкое изменение цены, не предказанное моделью (пример: flash-crash 6-го мая 2010 года).

9. Обширная информация о теории и практике опционов, а также калькуляторы, могут быть найдена на интернете. См. например, https://www.macroption.com/tutorials.

16 Оптимальное управление портфелями ценных бумаг

1. Формулировка. В качестве примера мы рассмотрим задачу Мертона об инвестициях и потреблении в её простейшем варианте. Эта задача имеет красивый ответ, допускающий ясную экономическую интерпретацию, а её решение позволяет продемонстрировать технику решения таких задач, основанную на проверочной теореме и уравнении Беллмана (в англоязычной литературе Hamilton–Jacobi–Bellman equaition, или HJB equaition).

Итак, на рынке имеется только один рисковый актив, цена которого S, задаётся геометрическим броуновским движением, а динамика портфеля имеет вид $V = x + H \cdot S - c \cdot \Lambda$, где H — предсказуемые процесс, для которых определены интегралы как процессы на $\mathbb{R}$. Если $c = 0$, то приведённое равенство описывает самофинансирующийся портфель, в котором число акций $H = (H_t)$ есть управление. В рассматриваемом случае, добавляется ещё и управление $c \geq 0$, которое интерпретируется как потребление. Цель управления состоит в максимизации математического ожидания интеграла

$$J_T := \int_0^T e^{-\beta s} u(c_s) ds,$$

интерпретируемого как интегральная дисконтированная полезность потребления с интенсивностью c. Мы будем работать с функцией полезности $u(c) = c^\gamma/\gamma$, $\gamma \in]0,1[$, и решать задачу с бесконечным горизонтом $T = \infty$. В данном контексте естественно считать, что в случае, когда стоимость портфеля достигла нуля, то управление прекращается (инвестор обанкротился). Удобно изменить параметризацию, положив $\alpha_t = H_t S_t / V_t$ (это доля капитала, инвестированная в рисковый актив). Тогда динамика портфеля $V = V^{\pi,x}$ приобретает вид линейного стохастического уравнения

$$dV_t = \alpha_t V_t (a dt + \sigma dw_t) - c_t dt, \qquad V_0 = x. \tag{17}$$

Множество $\mathcal{A}(x)$, $x > 0$, допустимых управлений $\pi = (\alpha, c)$ состоит из предсказуемых процессов таких, что $\alpha^2 \cdot \Lambda_t < \infty$, $c \cdot \Lambda_t < \infty$, $\pi = \pi I_{[0,\tau[}$, где $\tau := \tau^{x,\pi} := \inf\{t > 0 \colon V_t^{\pi,x} = 0\}$.

Функция Беллмана определяется равенством

$$W(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} E J_\infty^\pi, \quad x > 0. \tag{18}$$

Функция W наследует свойства функции u: она возрастает ($\mathcal{A}(\tilde{x}) \supseteq \mathcal{A}(x)$, если $\tilde{x} \geq x$), вогнута и является однородной в степени γ, т.е. $W(bx) = b^\gamma W(x)$ при $b > 0$. Последние два свойства очевидны в параметризации (H,c) (объяснить). В зависимости от параметров, она может быть конечной или тождественно равной бесконечности. Если W конечна, то по свойству вогнутых функций она непрерывна на $]0,\infty[$.

Теорема 16.1 *Пусть параметры таковы, что*

$$\kappa := \frac{1}{1-\gamma}\left(\beta - \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{a^2}{\sigma^2}\right) > 0. \tag{19}$$

Тогда функция Беллмана $W(x) = Kx^\gamma$, *где* $K = \kappa^{\gamma-1}/\gamma$, *оптимальная стратегия* $\pi^o = (\alpha^o, c^o)$ *задаётся формулами* $\alpha^o = (1-\gamma)^{-1}a/\sigma^2$, $c_t^o = \kappa V_t^o$, *где* V^o *— решение линейного уравнения*

$$dV^o = V_t^o\alpha^o(adt + \sigma dw_t) - \kappa V_t^o dt, \qquad V_0^o = x, \tag{20}$$

является оптимальным процессом.

2. В ряде случаев задача оптимального управления может быть решена с использованием весьма элементарного приёма, называемого *проверочной теоремой* для уравнения Беллмана.

Для изучаемой задачи с бесконечным горизонтом уравнение Беллмана имеет вид

$$\sup_{\alpha,c}\left[\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2x^2f''(x) + \alpha axf'(x) - \beta f(x) - f'(x)c + u(c)\right] = 0, \tag{21}$$

где $x > 0$, а супремум берётся по всем $\alpha \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}_+$. Обозначим выражение в квадратных скобках $\mathcal{L}^{\alpha,c}f(x)$. Появление уравнения Беллмана обьясняет следующее рассуждение.

Пусть $f \in C^2$, $f \geq 0$, а процесс $V = V^{x,\pi}$, где $\pi \in \mathcal{A}(x)$. Введём в рассмотрение процесс $X^f = X^{f,x,\pi} \geq 0$ с

$$X_t^f := e^{-\beta t}f(V_t) + J_t^\pi. \tag{22}$$

Из формулы Ито (для $e^{-\beta t}f(x)$ и V) следует, что $X^f = f(x) + N + D$, где

$$N_t = N_t^{f,x,\pi} = \int_0^t e^{-\beta s}f'(V_s)V_s\alpha_s\sigma dw_s, \qquad D_t = D_t^{f,x,\pi} = \int_0^t e^{-\beta s}\mathcal{L}^{\alpha_s,c_s}f(V_s)ds.$$

Если $f \geq 0$ — суперрешение уравнения Беллмана (21), т.е. $\mathcal{L}^{\alpha,c}f(.) \leq 0$ для любых α, $c \geq 0$, то процесс $D \leq 0$ и убывает. Но тогда локальный мартингал $N \geq -f(x)$ и по лемме Фату является супермартингалом а, значит, $EN_t \leq EN_0 = 0$. Следовательно, справедлива оценка $EX_t^f = f(x) + EN_t + ED_t \leq f(x)$. Стало быть,

$$EJ_t^\pi = EX_t^f - Ee^{-\beta t}f(V_t) \leq EX_t^f \leq f(x). \tag{23}$$

Поскольку $EJ_t^\pi \to EJ_\infty^\pi$, $t \to \infty$, то $EJ_\infty^\pi \le f(x)$. Беря супремум по всем стратегиям $\pi \in \mathcal{A}(x)$, получаем, что $W(x) \le f(x) < \infty$. Как уже отмечалось, конечность W влечёт непрерывность на $]0, \infty[$. Если же $f(x) \to 0$, $x \to 0$, то и $W(x) \to 0$, т.е. W непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

Остаётся ответить на вопрос, когда $f = W$. Анализ приведённых рассуждений показывает, что для этого надо, чтобы существовало такое управление π^o, чтобы при всех $x > 0$ процесс $D^{f,x,\pi^o} = 0$, процесс N^{f,x,π^o} был мартингалом, и оценки (23) выполнялись как равенства. Формальный список этих свойств и называется проверочной теоремой, приводимой ниже.

Теорема 16.2 *Пусть $f \in C(\mathbf{R}_+) \cap C^2(]0, \infty[)$ — положительная вогнутая функция, удовлетворяющая уравнению Беллмана (21), $f(0) = 0$. Предположим, что супремум в (21) достигается на значениях $\alpha(x)$ и $c(x) \ge 0$ таких, что $x \mapsto \alpha(x)$ и $x \mapsto c(x)$ — измеримые функции, для которых уравнение*

$$dV_t^o = V_t^o \alpha(V_t^o)(adt + \sigma dw_t) - c(V_t^o)dt, \qquad V_0^o = x, \tag{24}$$

имеет сильное решение V_t^o такое, что $Ee^{-\beta t} f(V_t^o) \to 0$, $t \to \infty$. Тогда $W = f$ и оптимальное управление $\pi^o = (\alpha(V^o), c(V^o))$.

3. Доказательство теоремы Мертона. Несмотря на неуклюжую формулировку, проверочная теорема сводит нахождение функции Беллмана и оптимального управления в задаче Мертона к простому упражнению. Поскольку в данном случае u есть однородная функция степени γ, то $W(x) = Kx^\gamma$, где $K = W(1)$. Будем искать решение (21) в виде $f(x) = Kx^\gamma$, где $K > 0$. Нахождение супремума по α и c распадается на две независимые задачи.

Заметим, что

$$u^*(p) := \sup_{c \ge 0}(u(c) - cp) = \sup_{c \ge 0}(c^\gamma/\gamma - cp) = \frac{1-\gamma}{\gamma} p^{\gamma/(\gamma-1)},$$

причём супремум достигается в точке $p^{1/(\gamma-1)}$. Поэтому

$$\sup_{c \ge 0}(u(c) - cf'(x)) = u^*(f'(x)) = u^*(K\gamma x^{\gamma-1}) = (1-\gamma)\gamma^{1/(\gamma-1)} K^{\gamma/(\gamma-1)} x^\gamma.$$

Подстановка $f(x) = Kx^\gamma$ в уравнение Беллмана даёт тождество

$$\sup_\alpha \left[\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2\gamma(\gamma-1) + \alpha a\gamma - \beta + (1-\gamma)\gamma^{1/(\gamma-1)} K^{1/(\gamma-1)} \right] Kx^\gamma = 0,$$

где супремум по α достигается при $\alpha^o = (1-\gamma)^{-1}a/\sigma^2$. Подстановка α^o приводит к уравнению для K, решением которого является $K = \kappa^{\gamma-1}/\gamma$ с константой $\kappa > 0$, определённой в (19) и строго положительной по условию. Далее, $c^o(x) = (f'(x))^{1/(\gamma-1)} = \kappa x$, что приводит к линейному уравнению (20). Его решение задаётся явной формулой

$$V_t^o = x\exp\left\{\left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\gamma)^2}\right)\frac{a^2}{\sigma^2}t - \kappa t + \frac{1}{1-\gamma}\frac{a}{\sigma}w_t\right\}.$$

Поскольку $E(V_t^o)^p = x^p e^{\kappa_p t}$, где κ_p — константа, процесс N^{f,x,π^o} — квадратично интегрируемый мартингал. По построению, процесс $D^{f,x,\pi^o} \equiv 0$. В частном случае, когда $p = \gamma$ константа

$$\kappa_\gamma = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{a^2}{\sigma^2} - \gamma\kappa = \beta - \kappa,$$

см. (19). Следовательно, $e^{-\beta t}E(V_t^o)^\gamma = x^\gamma e^{-\kappa t} \to 0$, $t \to \infty$. Все условия проверочной теоремы выполнены, что и требовалось. $\square$

4. Согласно теореме отношение оптимальных инвестиций в рисковый актив $V^{2o} = \alpha^o V^o$ и банковский счёт $V^{1o} = (1-\alpha^o)V^o$ постоянно: $V^{2o}/V^{1o} = \alpha^o/(1-\alpha^o)$ и называется пропорцией Мертона. Можно показать, что отклонения от этой пропорции порядка ε влечёт отклонения ожидаемой полезности порядка ε^2.

Задача Мертона породила множество обобщений: другие функции полезности, другая динамика портфеля, учёт транзакционных издержек и т.д. Уравнение Беллмана играет в их решении центральную роль. Большая часть задач решена с использованием проверочных теорем и предъявления гладкой функции, удовлетворяющей уравнению Беллмана в классическом смысле и вопрос об априорной гладкости функции Беллмана, положительный ответ на который даёт даёт возможность решить задачу через проверочную теорему, является весьма непростым. В ряде моделей функция Беллмана негладкая и аргументы, основанные на формуле Ито, невозможны. Тем не менее, оказывается при очень слабых предположениях она является *вязкостным решением* уравнения Беллмана.

Упражнение. Выписать уравнение Беллмана и сформулировать проверочную теорему для задачи инвестиций на конечном интервале времени $[0,T]$ с критерием максимизации средней полезности $EU(V_T)$.

Указание. Рассмотрите семейство задач, начинающихся в произвольный момент веремени $t \in [0,T]$ с начальным капиталом x и воспользуйтесь формулой Ито, чтобы понять структуру уравнения в частных производных для $W(t,x)$.

17 Обратные стохастические уравнения (BSDE)

1. Начнём с некоторых обозначений, предназначенных для упрощения формулировок. Пусть $\mathbf{F}$ — винеровская фильтрация. Введём пространство C_{L^2} непрерывных согласованных процессов $V = (V_t)_{t\le T}$ с квадратично интегрируемой равномерной нормой $||V||$. Оснастим его нормой $||V||_B := (E\sup_{t\le T} V_t^2)^{1/2} = ||\,||V||\,||_{L^2(\Omega)}$ (т.е. суперпозицией норм $||.||$ и $||.||_{L^2(\Omega)}$), уже использовавшейся в пространстве $\mathcal{M}_0^{2,c}[0,T]$. Будем использовать обозначение $L^{2,2}$ для пространства $L^2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P},dPd\Lambda)$, норму в котором будем обозначать $||.||_{2,2}$. Обозначим через X банахово пространство пар процессов $C_{L^2}\times L^{2,2}$ с нормой $||(V,\phi)||_X := ||V||_B + ||\varphi||_{2,2}$. Как обычно, во всех случаях элементами пространств являются не процессы, а классы эквивалентных процессов.

Мы сразу воспользуемся введёнными обозначениями и докажем следующий результат:

Лемма 17.1 *Существует константа C_1 такая, что для любого $V\varphi\cdot w$, где $(V,\varphi)\in X$, и любого $c>0$*

$$E||V\varphi\cdot w|| = E\sup_{t\le T}|V\varphi\cdot w_t| \le (1/2)C_1(c||V||_B + (1/c)||\varphi||_{2,2}) < \infty.$$

В частности, $EV\varphi\cdot w_\tau = 0$ для любого марковского момента $\tau\le T$.

Доказательство. Согласно неравенству Буркхольдера–Ганди–Дэвиса (Гугл в помощь!) существует константа C_1 такая, что для любого непрерывного локального мартингала M

$$E\sup_{t\le T}|M_t| \le C_1 E\langle M\rangle_T^{1/2}.$$

Из этой оценки и неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$E\sup_{t\le T}|V\varphi\cdot w_t| \le C_1E(V^2\varphi^2\cdot\Lambda_T)^{1/2} \le C_1E(\sup_{t\le T}|V_t|)(\varphi^2\cdot\Lambda_T)^{1/2} \le C_1||V||_B||\varphi||_{2,2}.$$

Остаётся воспользоваться элементарным неравенством $2ab\le ca^2+(1/c)b^2$. $\square$

2. Теорема о предсказуемом представлении утверждает, что для заданной с.в. $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ существует процесс $\varphi\in L^{2,2}$ такой, что $\xi = x+\varphi\cdot w_T$. Её побочным продуктом является существование и притом единственного процесса $V\in C_{L^2}$ (именно, $V_t = E\xi+\varphi\cdot w_t$) такого, что $V_T=\xi$. Поэтому теорема может быть переформулирована как пары процессов $(V,\varphi)\in X$ такой, что $V = V_0+\varphi\cdot w$ и $V_T=\xi$.

Такая переформулировка делает естественным следующее обобщение: задан предсказуемый процесс f такой, что $||f||^2_{1,2} := E(|f|\cdot\Lambda_T)^2 < \infty$ (пространство таких процессов с нормой $||f||_{1,2}$ обозначим $L^{1,2}$). Спрашивается, существуют ли пара $(V,\varphi)\in X$, такая, что

$$V = V_0 - f\cdot\Lambda + \varphi\cdot w, \qquad V_T = \xi. \tag{25}$$

Ответ положительный: по теореме о представлении для $\tilde{\xi} = \xi + f\cdot\Lambda_T$ существует интегрант $\varphi\in L^{2,2}$ такой, что

$$\xi + f\cdot\Lambda_T = x + \varphi\cdot w_T, \qquad x := E\xi + Ef\cdot\Lambda_T,$$

и требуемый процесс $V = x - f\cdot\Lambda + \varphi\cdot w$.

Тем самым определено **непрерывное** отображение $F : f \mapsto (F^1(f), F^2(f)) = (V,\varphi)$ пространства $L^{1,2}$ в X, которое нам понадобится в дальнейшем.

3. Следующее обобщение имеет вид линейного уравнения для (V,φ):

$$V = V_0 - (\alpha V + f)\cdot\Lambda + \varphi\cdot w, \qquad V_T = \xi, \tag{26}$$

где α — ограниченный предсказуемый процесс. Предположим, что требуемые (V,φ) существуют. Умножая обе части равенства на $e^{\alpha\cdot\Lambda}$, т.е. на решение уравнения $Z = 1 + Z\alpha\cdot\Lambda$, получим, что

$$Ve^{\alpha\cdot\Lambda} = V_0 + e^{\alpha\cdot\Lambda}\cdot(-f\cdot\Lambda + \varphi\cdot w)$$

(вспомните формулу Коши для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения — так она выводится). Отсюда вытекает, что

$$V_0 + e^{\alpha\cdot\Lambda}\varphi\cdot w_T = e^{\alpha\cdot\Lambda}\xi + e^{\alpha\cdot\Lambda}f\cdot\Lambda_T.$$

Поскольку процесс α ограничен, то правая часть равенства есть элемент $L^2(\Omega)$ и применима теорема о представлении, которая позволяет получить процесс φ, а затем, как и выше, определить и процесс V.

4. Продолжая в этом же духе, можно рассмотреть уравнение

$$V = V_0 - (aV + b\varphi + f)\cdot\Lambda + \varphi\cdot w, \qquad V_T = \xi. \tag{27}$$

Пусть для простоты $\alpha\equiv 0$, а b — ограниченный предсказуемый процесс (общий случай — упражнение). Умножим обе части равенства на процесс $Z = \mathcal{E}(b\cdot w)$, т.е. на решение уравнения $Z = 1 + Zb \cdot w$. По формуле для произведения

$$VZ = V_0 + VZb \cdot w - Z(b\varphi + f) \cdot \Lambda + Z\varphi \cdot w + Zb\varphi \cdot \Lambda = V_0 - Zf \cdot \Lambda + Z(bV + \varphi) \cdot w$$

(если теперь разделить на V, то это даст стохастический вариант формулы Коши). Обозначая $\tilde{f} := Zf$, $\tilde{\varphi} := Z(bV + \varphi)$, $\tilde{V} := ZV$, $\tilde{\xi} := Z_T\xi$, получаем уравнение вида

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0 - \tilde{f} \cdot \Lambda + \tilde{\varphi} \cdot w, \qquad \tilde{V}_T = \tilde{\xi},$$

совпадающего с (25). Если с.в. $\sup_{s\le t} |b \cdot w|$ ограничена, то по доказанному последнее уравнение имеет решение, которое позволяет найти и решение уравнения (25) с требуемыми условиями интегрируемости. Без условия ограниченности "глобальные" условия интегрируемости могут не выполняться и существование решения остаётся вопросом, требующим дополнительного исследования, и к которому мы вернёмся позже (какие есть идеи?).

5. Обратимся к уравнению (14) хеджирования с банковской ставкой r:

$$V = V_0 + H \cdot S + r(V - HS) \cdot \Lambda, \qquad V_T = \xi.$$

Перейдём от процесса H, количества акций в портфеле, к процессу $\pi := HS$, величине инвестиций в акции. В новой параметризации имеем

$$V = V_0 + \big(rV + (a - r)\pi\big) \cdot \Lambda + \sigma\pi \cdot w, \qquad V_T = \xi,$$

т.е. обратное уравнение типа (27).

Концепция обратного уравнения позволяет предложить модель хеджирования в ситуации, когда процентная ставка заимствования $\bar{r}$ выше банковской ставки r, именно, задав портфель нелинейным BSDE

$$V = V_0 + \big(r(V - \pi)^+ - \bar{r}(V - \pi)^- + a\pi\big) \cdot \Lambda + \sigma\pi \cdot w, \qquad V_T = \xi. \tag{28}$$

Дальнейшим развитием являются так называемые FBSDE (forward-backward stochastic differential equations), системы взаимозависимых стохастического уравнения и обратного стохастического уравнения. Примером может служить следующая модель, учитывающая импакт хеджирования на цену базового актива:

$$\begin{aligned} S &= x + a(t, S_t, V_t, \pi_t) \cdot \Lambda + \sigma(t, S_t, V_t, \pi_t) \cdot w, \\ V &= V_0 + \big(r(V - \pi)^+ - \bar{r}(V - \pi)^- + a\pi\big) \cdot \Lambda + \sigma\pi \cdot w, \qquad V_T = \xi. \end{aligned}$$

18 Нелинейные BSDE

Пусть $g = g(\omega, t, x, y)$ — функция, такая что $(\omega, t) \mapsto g(\omega, t, x, y)$ — предсказуемый процесс при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $(x, y) \mapsto g(\omega, t, x, y)$ — непрерывная функция при всех $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$.

Определение. Решением BSDE с *драйвером* g и терминальным значением $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ называют пару $(V, \varphi) \in L^{2,2} \times L^{2,2}$ такую, что V — непрерывный процесс и

$$V = V_0 - g(V, \varphi) \cdot \Lambda + \varphi \cdot w, \qquad V_T = \xi. \tag{29}$$

Уравнение (29) может быть записано в следующей форме, удобной для получения оценок:

$$V_t = \xi + \int_t^T g(s, V_s, \varphi_s) ds - \int_t^T \varphi_s dw_s, \qquad t \in [0, T]. \tag{30}$$

Теорема 18.1 *Пусть $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$, $|g(0,0)| \cdot \Lambda_T \in L^2(\mathcal{F}_T)$ и выполнено условие Липшица: существует константа L такая что*

$$|g(\omega, t, x, y) - g(\omega, t, \tilde{x}, \tilde{y})| \le L(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|), \quad \forall\, (\omega, t, x, y),\ (\omega, t, \tilde{x}, \tilde{y}). \tag{31}$$

Тогда BSDE (29) имеет и притом единственное решение (V, φ). Более того, $(V, \varphi) \in X$.

Доказательство. **1.** Мы разобьём его на несколько частей. Начнём с априорной оценки для решения (V, φ), показывающей, что в условиях теоремы $(V, \varphi) \in X$.

Лемма 18.2 *Существует константа C, зависящая только от T и L, такая, что*

$$||(V, \varphi)||_X^2 \le C\big(E\xi^2 + E(|g(0,0)| \cdot \Lambda_T)^2\big). \tag{32}$$

Доказательство. В последующих рассуждениях мы будем обозначать через C различные константы, зависящие только от L и T. Их значения даже в одной формуле могут различаться.

Из (30) и неравенства $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$ следует, что

$$||V||_B^2 := E \sup_{t \le T} V_t^2 \le 3\Big(E\xi^2 + E(|g(V, \varphi)| \cdot \Lambda_T)^2 + E\Big(|\varphi \cdot w_T| + \sup_{t \le T} |\varphi \cdot w_t|\Big)^2\Big).$$

Применяя условие Липшица и неравенство Коши–Буняковского, имеем:

$$(|g(V, \varphi)| \cdot \Lambda_T)^2 \le (|g(0,0| \cdot \Lambda_T + L(|V| + |\varphi|) \cdot \Lambda_T)^2 \le 2(|g(0,0)| \cdot \Lambda_T)^2 + 2L^2 T(|V| + |\varphi|)^2 \cdot \Lambda_T$$

и, следовательно,

$$E(|g(V,\varphi)|\cdot\Lambda_T)^2\le C\big(E(|g(0,0)|\cdot\Lambda_T)^2+||V||_{2,2}^2+||\varphi||_{2,2}^2\big).$$

Неравенство Дуба даёт оценку

$$E\Big(|\varphi\cdot w_T|+\sup_{t\le T}|\varphi\cdot w_t|\Big)^2\le 2E(\varphi\cdot w_T)^2+2E\sup_{t\le T}(\varphi\cdot w_t)^2\le 10E\varphi^2\cdot\Lambda_T=10||\varphi||_{2,2}^2.$$

С учётом полученных оценок заключаем, что

$$||V||_B^2\le C\big(E\xi^2+||g(0,0)||_{1,2}^2+||V||_{2,2}^2+||\varphi||_{2,2}^2\big). \tag{33}$$

Поскольку в силу определения решения BSDE и условий теоремы правая часть этого неравенства конечна, то тем самым мы доказали, что $(V,\varphi)\in X$.

Наша следующая задача — избавиться от двух последних слагаемых в правой части. Для этого нам понадобится следующее тождество, получаемого перегруппировкой формулы Ито для квадрата процесса V, удовлетворяющего (29):

$$|V_t|^2+\int_t^T|\varphi_s|^2ds=\xi^2+2\int_t^T V_sg(s,V_s,\varphi_s)ds-2\int_t^T V_s\varphi_sdw_s. \tag{34}$$

По лемме 17.1 математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю. Поэтому

$$E|V_t|^2+E\int_t^T|\varphi_s|^2ds=E\xi^2-2E\int_t^T V_sg(s,V_s,\varphi_s)ds \tag{35}$$

Из условия Липшица и элементарного неравенства $2ab\le 2La^2+(2L)^{-1}b^2$ следует, что

$$2|Vg(V,\varphi)|\le 2|V|(|g(0,0)|+L|V|+L|\varphi|)\le 2(\sup_{s\le T}|V_s|)|g(0,0)|+2L|V|^2+2L^2|V|^2+(1/2)|\varphi|^2$$

и, значит,

$$2E\int_t^T|V_sg(s,V_s,\varphi_s)|ds\le 2E(\sup_{s\le T}|V_s|)|g(0,0)|\cdot\Lambda_T+2L(L+1)E\int_t^T|V_s|^2ds+\frac{1}{2}E\int_t^T|\varphi_s|^2ds.$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части не превосходит $\varepsilon||V||_B^2+\varepsilon^{-1}||g(0,0)||_{1,2}$ для любого $\varepsilon>0$. Подходящее значение ε будет выбрано в дальнейшем.

Из тождества (35) и этих фактов следует оценка

$$E|V_t|^2+\frac{1}{2}E\int_t^T|\varphi_s|^2ds\le A_\varepsilon+2L(L+1)E\int_t^T|V_s|^2ds, \tag{36}$$

где $A_e := E\xi^2 + \varepsilon||V||_B^2 + \varepsilon^{-1}||g(0,0)||_{1,2}$. Эта оценка выполняется порознь для каждого из слагаемых в левой части. Полагая $f_t := E|V_t|^2$ и, пользуясь теоремой Фубини получаем, что ограниченная положительная функция f удовлетворяет неравенству

$$f_t \le A_\varepsilon + 2L(L+1)\int_t^T f_s ds.$$

По лемме Гронуолла–Беллмана $f_t \le A_\varepsilon e^{2L(L+1)(T-t)} \le CA_\varepsilon$ (проверьте справедливость её утверждения в этом варианте). Следовательно, правая часть неравенства (36) не превосходит CA_ε, и, значит, $||\varphi||_{2,2}^2 \le CA_\varepsilon$. Кроме того, $||V||_{2,2}^2 \le CA_\varepsilon$. Подставляя эти оценки в (33), приходим к неравенству вида

$$||V||_B^2 \le C(E\xi^2 + \varepsilon^{-1}||g(0,0)||_{1,2} + \varepsilon||V||_B^2).$$

Полагая $\varepsilon = 1/(2C)$, получаем для $||V||_B^2$ неравенство, правая часть которого имеет вид, требуемый в формулировке леммы. Оно даёт неравенство такого же вида для A_ε, а значит, и для $||\varphi||_{2,2}^2$. $\square$

2. Единственность. Пусть (V,φ) и $(\tilde V,\tilde\varphi)$ — два решения BSDE (29). Тогда их разность $(\Delta V, \Delta\varphi)$ удовлетворяет BSDE

$$\Delta V = \Delta V_0 - (g(V,\varphi) - g(\tilde V,\tilde\varphi))\cdot\Lambda + \Delta\varphi\cdot w, \qquad \Delta V_T = 0,$$

которое может быть переписано в виде

$$\Delta V = \Delta V_0 - \bar g(\Delta V, \Delta\varphi)\cdot\Lambda + \Delta\varphi\cdot w, \qquad \Delta V_T = 0,$$

где $\bar g(x,y) := \alpha x + \beta y$, $\alpha_t := \big(g(t,V_t,\varphi) - g(t,\tilde V_t,\varphi)\big)(\Delta V)^\oplus$, $\beta_t := \big(g(t,\tilde V_t,\varphi) - g(t,\tilde V_t,\tilde\varphi)\big)(\Delta\varphi)^\oplus$. Символ $a^\oplus$ обозначает псевдообращение, т.е. $a^\oplus := a^{-1}$, если $a \ne 0$, и $0^\oplus := 0$).

Благодаря условию Липшица процессы α и β ограничены и $\bar g(0,0) = 0$. В силу неравенства (32) $||\Delta V, \Delta\varphi||_X = 0$, что и требовалось.

3. Существование решения. Фиксируем $\xi \in L^2(\mathcal F_T)$ и для $(W,\psi) \in L^{2,2}\times L^{2,2}$ положим $G : (W,\psi) \mapsto g(W,\psi)$. Из условия Липшица следует, что G — непрерывное отображение пространства $L^{2,2}\times L^{2,2}$ в пространство $L^{1,2}$. Следовательно, суперпозиция

$$\Psi := F\circ G : (W,\psi) \mapsto (F^1(G(W,\psi), F^2(G(W,\psi)),$$

где F определено в п.2 предыдущего параграфа, есть непрерывное отображение $L^{2,2} \times L^{2,2}$ в X: его первая компонента задаёт непрерывный согласованный процесс $\Psi^1 = F^1(G(W,\psi))$ такой, что

$$\Psi^1 = \Psi^1_0 - g(W,\psi)\cdot\Lambda + \varphi\cdot w, \qquad \Psi^1_T = \xi.$$

Свойство сжимаемости отображения зависит от нормы. Мы покажем, что при надлежащем выборе параметра $r > 0$, отображение Ψ — сжимающее в норме $||.||_r$, где при $(V,\varphi) \in X$

$$||(V,\varphi)||^2_r := \sup_{t\le T} E|D_t^{1/2}V_t|^2 + ||D^{1/2}\varphi||^2_{2,2}, \qquad D_t := D_t(r) = e^{rt},$$

и $||V||_{2,2} + ||\varphi||_{2,2} \le C||(V,\varphi)||_r, ||(V,\varphi)||_r \le \tilde{C}||(V,\varphi)||_X$ (убедитесь в этом).

Пусть (W,ψ), $(\tilde{W},\tilde{\psi})$ — элементы X с $W_T = \tilde{W}_T = \xi$. Образами элементов (W,ψ) и $(\tilde{W},\tilde{\psi})$ при отображении Ψ будут элементы (V,φ) и $(\tilde{V},\tilde{\varphi})$ пространства X такие что

$$\begin{aligned} V &= V_0 - g(W,\psi)\cdot\Lambda + \varphi\cdot w, \qquad V_T = \xi, \\ \tilde{V} &= \tilde{V}_0 - g(\tilde{W},\tilde{\psi})\cdot\Lambda + \tilde{\varphi}\cdot w, \qquad \tilde{V}_T = \xi. \end{aligned}$$

Положим $\Delta W := W - \tilde{W}$, $\Delta\psi := \psi - \tilde{\psi}$, $\Delta V := V - \tilde{V}$, $\Delta\varphi := \varphi - \tilde{\varphi}$. Тогда

$$\Delta V = \Delta V_0 - (g(W,\psi) - g(\tilde{W},\tilde{\psi}))\cdot\Lambda + \Delta\varphi\cdot w, \qquad \Delta V_T = 0,$$

и из формулы Ито для функции $e^{rt}x^2$ на отрезке $[t,T]$ после группировки членов получаем

$$D_t|\Delta V_t|^2 + \int_t^T D_s(r|\Delta V_s|^2 + |\Delta\varphi_s|^2)ds = J_t - 2\int_t^T D_s\Delta V_s\Delta\varphi_s dw_s, \tag{37}$$

где

$$J_t := 2\int_t^T D_s\Delta V_s\big(g(W_s,\psi_s) - g(\tilde{W}_s,\tilde{\psi}_s)\big)ds$$

и возьмём математическое ожидание от обеих частей. Учитывая, что математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю, получаем тождество:

$$ED_t|\Delta V_t|^2 + E\int_t^T D_s|\Delta\varphi_s|^2 ds = EJ_t - rE\int_t^T D_s|\Delta V_s|^2 ds.$$

Из условия Липшица и элементарного неравенства $2ab \le ca^2 + (1/c)b^2$ следует, что

$$2|\Delta V||g(W,\psi) - g(\tilde{W},\tilde{\psi})| \le 2L|\Delta V|(|\Delta W| + |\Delta\psi|) \le L(4TL + 4L)|\Delta V|^2 + \frac{1}{4T}|\Delta W|^2 + \frac{1}{4}|\Delta\psi|^2.$$

Поэтому при $r = 4L^2(T+1)$

$$E|J_t| \le rE\int_t^T D_s|\Delta V_s|^2 ds + \frac{1}{4}\sup_{t\le T} ED_t|\Delta W_t|^2 + \frac{1}{4}ED|\Delta\psi|^2 \cdot \Lambda_T,$$

где сумма двух последних членов в правой части равна $(1/4)||(\Delta W, \Delta\psi)||_r^2$. Следовательно,

$$ED_t|\Delta V_t|^2 + E\int_t^T D_s|\Delta\varphi_s|^2 ds \le \frac{1}{4}||(\Delta W, \Delta\psi)||_r^2.$$

Из этой оценки получаем неравенство $||(\Delta V, \Delta\varphi)||_r^2 \le (1/2)||(\Delta W, \Delta\psi)||_r^2$, означающее, что Ψ — сжимающее отображение относительно нормы $||.||_r$. Существование неподвижной точки отображения Ψ вытекает из приводимой ниже леммы общего характера. $\square$

Лемма 18.3 *Пусть (L, d_L) — полное метрическое пространство, X — подмножество L, на котором заданы метрики d_r и d_X, причём $d_r \le \tilde{C}d_X$ и $d_L \le Cd_r$ на X. Пусть Ψ — непрерывное отображение (L, d_L) в (X, d_X) такое, что $d_r(\Psi(x), \Psi(y)) \le \theta d_r(x, y)$ для всех $x, y \in X$, где $\theta \in]0, 1[$. Тогда существует $x \in X$ такое, что $x = \Psi(x)$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $x_n := \Psi(x_{n-1})$, $n \ge 1$. Как и в теореме Банаха проверяется, что последовательность $x_n \in X$ фундаментальна в (X, d_r), а значит, ввиду неравенства $d_L \le Cd_r$, фундаментальна и в банаховом пространстве (L, d_L), где она имеет предел, который мы обозначим x. В силу непрерывности отображения Ψ, последовательность $\Psi(x_n)$ сходится к $\Psi(x)$ в (X, d_X), а значит, ввиду неравенств для метрик, и в (L, d_L), где предел последовательности $\Psi(x_n) = x_{n+1}$ равен x. В силу единственности предела, $x = \Psi(x)$. $\square$

Вернёмся к уравнению (27) с драйвером $g(t, x, y) = a_t x + b_t y + f_t$, где a, b — ограниченные предсказуемые процессы, $|f| \cdot \Lambda_T \in L^2$. Условия теоремы 18.1, очевидно, выполняются и, значит, существует и притом единственная пара $(V, \varphi) \in X$ такая что

$$V = V_0 - (aV + b\varphi + f) \cdot \Lambda + \varphi \cdot w, \qquad V_T = \xi.$$

Пусть $Z = \mathcal{E}(a \cdot \Lambda + b \cdot w)$. Тогда $Z = 1 + aZ \cdot \Lambda + bZ \cdot w$. По формуле Ито для произведения

$$Z_t V_t = Z_T \xi - \int_t^T Z_s(\varphi_s + b_s V_s) dw_s + \int_t^T Z_s f_s ds.$$

Заметим, что $||Z||_B^2 := E\sup_{t\le T} Z_t^2 < \infty$ (проверить!) и, значит, по лемме 17.1 стохастический интеграл $Z(\varphi + bV)\cdot w$ является мартингалом. Отсюда следует, что

$$V_t = \frac{1}{Z_t}E_t\Big(\xi + \int_t^T Z_s f_s ds\Big),$$

где $E_t(.) := E(.|\mathcal{F}_t)$. В частности, если $\xi \ge 0$ и $f \ge 0$, то $V \ge 0$. Это свойство влечёт следующую теорему сравнения для решений BSDE.

Теорема 18.4 *Пусть (V,φ), $(\tilde V,\tilde\varphi)$ — решения BSDE с драйверами g, $\tilde g$, удовлетворяющими условиям теоремы 18.1 и терминальными значениями $\xi,\tilde\xi \in L^2(\Omega)$. Пусть $g(.,.) \ge \tilde g(.,.)$ $dPd\Lambda$ почти всюду и $\xi \ge \tilde\xi$. Тогда $V \ge \tilde V$.*

Доказательство. Пользуясь обозначениями, введёнными при доказательстве единственности в теореме 18.1, заметим, что разность решений $(\Delta V, \Delta\phi)$ удовлетворяет BSDE

$$\Delta V = \Delta V_0 - (\alpha\Delta V + \beta\Delta\varphi + \Delta f)\cdot\Lambda + \Delta\varphi\cdot w, \quad \Delta\xi := \xi - \tilde\xi,$$

где α и β ограничены и $\Delta f(\tilde V,\tilde\varphi) := g(\tilde V,\tilde\varphi) - \tilde g(\tilde V,\tilde\varphi) \ge 0$ $dPd\Lambda$-почти всюду. □

Замечание. Линейное BSDE для $(\Delta V, \Delta\phi)$ (справедливое и без предположения о сравнимости $g,\tilde g$ и $\xi,\tilde\xi$) в сочетании с неравенством (32) приводит к оценке

$$||(\Delta V,\Delta\phi)||_X^2 \le C(E|\Delta\xi|^2 + ||\Delta f||_{1,2}^2).$$

Используя это неравенство можно получить следующую теорему устойчивости решения.

Теорема 18.5 *Пусть (V^n,φ^n), $(\tilde V,\tilde\varphi)$ — решения BSDE с драйверами g^n, $\tilde g$, удовлетворяющими условиям теоремы 18.1 с константой Липшица L, независящей от n, и терминальными значениями $\xi^n,\tilde\xi \in L^2(\Omega)$. Пусть $E|\xi^n - \tilde\xi|^2 \to 0$, $||g^n(0,0) - \tilde g(0,0)||_{1,2}^2 \to 0$ и $g^n(.,.) \to \tilde g(.,.)$ $dPd\Lambda$-п.в. Тогда $||(V^n,\varphi^n) - (\tilde V,\tilde\varphi)||_X \to 0$.*

Доказательство. Пусть для простоты $\xi^n = \tilde\xi$. В очевидных обозначениях

$$||(\Delta V^n,\Delta\phi^n)||_X \le C||\Delta f^n(\tilde V,\varphi)||_{1,2} \le C(||\Delta f^n(\tilde V,\varphi) - \Delta f^n(0,0)||_{1,2} + ||\Delta f^n(0,0)||_{1,2}).$$

Поскольку $\Delta f^n(\tilde V,\varphi) - \Delta f^n(0,0) \to 0$ $dPd\Lambda$-п.в. и $|\Delta f^n(\tilde V,\varphi) - \Delta f^n(0,0)| \le 2L(|\tilde V| + |\varphi|)$, то сходимость первого слагаемого в правой части следует из теоремы о мажорируемом предельном переходе. Сходимость второго члена потребована в условиях теоремы. □

19 Марковские BSDE и их связь с PDE

Напомним, что драйвер $g(\omega, t, x, y)$, вообще говоря, зависит от ω. Рассмотрим случай, когда эта зависимость имеет специальный вид, возникающий при подстановке в данную детерминированную борелевскую функцию $\hat{g}(t, x, y, z)$ (в её аргумент z) случайной величины ζ_t, текущего значения процесса $\zeta \in B$, а именно, решения стохастического уравнения

$$d\zeta_t = a(t, \zeta_t)dt + \sigma(t, \zeta_t)dw_t, \qquad \zeta_0 \in \mathbb{R}, \tag{38}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям Липшица и линейного роста (см. т. 10.2).

Рассмотрим BSDE (29) с драйвером $g(\omega, t, x, y) = \hat{g}(t, x, y, \zeta_t(\omega))$ и $\xi = h(\zeta_T)$,

$$dV_t = -g(\omega, t, V_t, \varphi_t)dt + \varphi_t dw_t, \qquad V_T = h(\zeta_T). \tag{39}$$

где функция h такова, что $Eh^2(\zeta_T) < \infty$ (для чего достаточно, чтобы $|h(z)| \le c(1 + |z|)$, где c — константа), а функция $\hat{g}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\hat{g}(t, x, y, z) - \hat{g}(t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})| \le L(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| + |z - \tilde{z}|), \quad \forall\, (t, x, y, z),\ (\omega, t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

обеспечивающему для драйвера g выполнение (31), и условию $|\hat{g}(0, 0, 0)| \cdot \Lambda_T < \infty$. Перечисленные предположения позволяют применить теорему 18.1.

Теорема 19.1 *Пусть терминальная задача Коши для квазилинейного PDE*

$$u_t + (1/2)\sigma^2 u_{zz} + a u_z + \hat{g}(t, u, u_z\sigma, z) = 0, \quad u(T, z) = h(z), \tag{40}$$

имеет решение $u = u(t, z) \in C^{1,2}$ с ограниченной производной u_z.

Тогда BSDE (29) имеет и притом единственное решение (V, φ) задаваемое формулами

$$V_t = u(t, \zeta_t), \qquad \varphi_t = u_z(t, \zeta_t)\sigma(t, \zeta_t). \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}u := u_t + (1/2)\sigma^2 u_{zz} + a u_z$. По формуле Ито

$$du(t, \zeta_t) = \mathcal{L}u(t, \zeta_t)dt + u_z(t, \zeta_t)\sigma(t, \zeta_t)dw_t = -\hat{g}(t, u(t, \zeta_t), u_z(t, \zeta_t)\sigma(t, \zeta_t), \zeta_t)dt + u_z(t, \zeta_t)\sigma(t, \zeta_t)dw_t.$$

20 Процесс Орнштейна–Уленбека и парный трейдинг

1. Процесс Орнштейна–Уленбека (ОУ) определяется как решение линейного уравнения

$$X = X_0 + \theta(\mu - X) \cdot \Lambda + \sigma w$$

с параметрами $\theta > 0$, $\sigma > 0$, или, в общеупотребительной дифференциальной форме,

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dw_t.$$

По формуле Коши оно допускает явное выражение

$$X_t = e^{-\theta t}X_0 + e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta s}(\sigma dw_s + \theta\mu ds) = e^{-\theta t}X_0 + \mu(1-e^{-\theta t}) + \sigma e^{-\theta t}\int_0^t e^{\theta s}dw_s,$$

из которого следует, что если $X_0 = x \in \mathbb{R}$, то X — гауссовский процесс (объяснить!) и

$$EX_t = e^{-\theta t}x + \mu(1-e^{-\theta t}), \qquad \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}e^{-\theta(t+s)}(e^{2\theta(t\wedge s)} - 1).$$

Следовательно, $EX_t \to \mu$, $DX_t = E(X_t - EX_t)^2 \to \sigma^2/(2\theta)$ при $t \to \infty$.

В вырожденном случае, когда $\sigma = 0$ и мы имеем детерминированную динамику, траектории решения притягиваются к точке равновесия μ, при этом $\theta(\mu - V_t)$ интерпретируется как сила притяжения и θ определяет скорость сближения с μ. При $\sigma \neq 0$ случайное гауссовское нулевым средним с дисперсией пропрциональной σ^2 постоянно отбрасывает решение от положения равновесия и процесс флуктуирует вокруг μ. Это свойство называют mean-reverting.

Если X_0 — гауссовская с.в., независящая от винеровского процесса w, то X — гауссовский процесс (объяснить!). В частности, если $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$, то $EX_t = \mu$, $DX_t = \sigma^2/(2\theta)$ и процесс X — стационарный, т.е. его конечномерные распределения трансляционно-инвариантны (тоже объяснить!).

Процесс ОУ может быть получен при помощи замены времени из винеровского процесса:

$$X_t = e^{-\theta t}x + \mu(1-e^{-\theta t}) + \sigma(2\theta)^{-1/2}w_{e^{2\theta t}-1}.$$

2. Процесс ОУ используется в модели Васичека стохастических процентных ставок (ранее эта модель критиковалась, поскольку считалось, что процентные ставки не могут быть отрицательными, но практика показала, что могут!).

Процесс ОУ применяется для моделирования спреда между ценами акций компаний, занимающихся близкими видами бизнеса (Coca-Cola — Pepsi, Renault — PSA Peugeot Citroen и.т.д.), на котором основывается так называемый трейдинг парами (pairs trading).

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального управления парным трейдингом с горизонтом планирования, рассмотренную Е. и М. Богуславскими. Предположим, что процентная ставка банковского счёта равна нулю, $\mu = 0$, трейдинг начинается в момент времени t со значением спреда $X_t = x$, динамика портфеля $V = V^H$ описывается стохастическим уравнением $dV_s = H_s dX_s$, $s \in [t,T]$,

$$dV_s = -\theta H_s X_s ds + \sigma H_s dw_s, \qquad V_t = v,$$

управление $H \in L^{2,2}$. Цель управления состоит в максимизации $Eu(V_T^H)$, где $u(v) = \gamma^{-1}v^\gamma$, $\gamma \in]0,1[$, или $u(v) = \ln v$. Заметим, что процесс X зависит от x, а V — от x и v. Таким образом, функция Беллмана $W(t,x,v) := \sup_{H \in L^{2,2}} Eu(V_T^H)$.

Пусть теперь $\tilde W(t,x,v) \geq 0$ — гладкая функция, допускающая применение формулы Ито и такая, что $\tilde W(T,x,v) = u(v)$. Тогда

$$u(V_T) - \tilde W(t,x,v) = \tilde W(T,X_T,V_T) - \tilde W(t,x,v) = \int_t^T (\sigma \tilde W_x(s,X_s,V_s) + \sigma H_s \tilde W_v(s,X_s,V_s))dw_s$$
$$+ \int_t^T \left[\tilde W_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde W_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2 H_s^2 \tilde W_{vv} + \sigma^2 H_s \tilde W_{xv} - \theta X_s \tilde W_x - \theta H_s X_s \tilde W_v\right](s,X_s,V_s)ds.$$

Это тождество показывает, что в данном случае уравнение HJB должно иметь вид

$$\sup_{h \in \mathbb{R}} \left[\tilde W_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde W_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2 \tilde W_{vv} + \sigma^2 h \tilde W_{xv} - \theta x \tilde W_x - \theta h x \tilde W_v\right] = 0 \qquad (42)$$

с граничным условием $\tilde W(T,x,v) = u(v)$. Если интегрант в интеграле по ds отрицателен при всех H, то интеграл по dw оказывается супермартингалом и мы сразу же получаем, что $\tilde W$ является суперрешением уравнения HJB.

Для того, чтобы функция $\tilde W$ была решением и совпадала с функцией Беллмана надо, чтобы выполнялся список условий, которые могут формулироваться по-разному, но обычно оформляемый в виде проверочной теоремы.

Теорема 20.1 *Пусть $\tilde W = \tilde W(t,x,v)$ — гладкая положительная функция, удовлетворяющая уравнению (42), $\tilde W(T,x,v) = u(v)$. Предположим, что супремум в (42) достигается на* *измеримой функции $H(t,x,v)$ такой, что уравнение*

$$dV_t^o = -\theta X_t H(t,X_t,V_t^o)dt + \sigma H(t,X_t,V_t^o)dw_t, \qquad V_t^o = v, \tag{43}$$

имеет сильное решение V^o такое, что $\tilde{W}_x(X,V^o) \in L^{2,2}$ и $H(X,V^o)\tilde{W}_v(X,V^o) \in L^{2,2}$. Тогда $\tilde{W} = W$ и оптимальное управление $H^o = H(X,V^o)$.

Далее мы предположим, что все коэффициенты в уравнении равны единице. Приём такого рода называется переходом к безразмерной форме (т.е. выбором единиц измерений). В данном случае он достигается простым преобразованием.

Супремум квадратичной функции в (42) достигается на $h = \sigma^{-2}(\theta x\tilde{W}_v - \sigma^2\tilde{W}_{xv})/\tilde{W}_{vv}$ и уравнение HJB приобретает вид

$$\tilde{W}_t + \frac{1}{2}\sigma^2\tilde{W}_{xx} - \frac{1}{2}\sigma^{-2}\tilde{W}_{vv}(\theta x\tilde{W}_v/\tilde{W}_{vv} - \sigma^2\tilde{W}_{xv}/\tilde{W}_{vv})^2 - \theta x\tilde{W}_x = 0.$$

Рассмотрим случай логарифмической функции полезности $u(v) = \ln v$. Будем искать решение в виде $\tilde{W}(t,x,v) = f(x,t) + \ln v$. Тогда

$$f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx} - \theta x f_x + \frac{1}{2}\sigma^{-2}\theta^2 x^2 = 0, \qquad f(x,T) = 0.$$

Мы получили задачу Коши для линейного уравнения, которая имеет гладкое решение. При этом $h(t,x,v) = -\sigma^{-2}\theta xv$. Уравнение (43) оказывается линейным и его решение может быть выписано в явном виде.

В случае $u(v) = \gamma^{-1}v^\gamma$ будем искать решение в виде $\tilde{W}(t,x,v) = \gamma^{-1}v^\gamma f(x,t)$. Тогда

$$f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^{-2}\frac{\gamma}{1-\gamma}(\theta x - \sigma^2 f_x/f)^2 f - \theta x f_x = 0, \qquad f(x,T) = 1.$$

Пусть $f = g^{1-\gamma}$. Тогда $f_t = (1-\gamma)g^{-\gamma}g_t$, $f_x = (1-\gamma)g^{-\gamma}g_x$, $f_{xx} = (1-\gamma)g^{-\gamma}g_{xx} - (1-\gamma)\gamma g^{-\gamma-1}g_x^2$, $f_x/f = (1-\gamma)g_x/g$. Подстановка этих выражений приводит к задаче Коши для линейного уравнения

$$g_t + \frac{1}{2}\sigma^2 g_{xx} - \frac{1}{1-\gamma}\theta x g_x + \frac{1}{2}\sigma^{-2}\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\theta^2 x^2 g = 0, \qquad g(x,T) = 1.$$

Это уравнение допускает явное решение, исследование которого (выходящее за рамки нашего курса) позволяет заключить, что условия проверочной теоремы выполнены и найти оптимальное управление.

3. Другие модели. Как уже отмечалось, модель процентных ставок Васичека критиковалась, так как процесс ОУ принимает и отрицательные значения. Этого недостатка лишена *модель Кокса– Ингерсолла–Росса* (CIR or Cox–Ingersoll–Ross model):

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dw_t.$$

При значении параметра $\theta > 0$ процесс X строго положителен (по иронии судьбы, теперь это свойство модели в теории процентных ставок считается недостатком). Такой процесс может использоваться и как процесс цены базового актива в задачах хеджирования и оптимального управления портфелем. Заметим, что для этой модели равномерной условие Липшица, которым мы пользовались при доказательстве теоремы существования решения стохастического уравнения не выполняется.

Упражнение. Выпишите уравнение для задачи управления портфелем на $[0, T]$ в случае логарифмической и степенной функций полезности и сформулируйте проверочную теорему.

Модель CEV (Constant Elasticity of Variance):

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t^\gamma dw_t,$$

где параметры $\sigma, \gamma > 0$. При $\gamma < 1$ модель описывает так называемый leverage effect, наблюдаемый на фондовых рынках, когда с падением цены волатильность возрастает.

Модель Хестона

$$\begin{aligned} dS_t &= aS_t dt + \sqrt{\nu_t}S_t dw_t^S, \\ d\nu_t &= \theta(\mu - \nu_t)dt + \sigma\sqrt{\nu_t}dw_t^\nu, \end{aligned}$$

где w^S и w^ν — винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ.

21 Введение в теорию арбитража

Необходимо отметить, что модель BS, основанная на математике, которая в своё время не была предметом изучения в стандартных программах экономических факультетов, вызвала своего рода культурный шок. Попытки воспроизвести её результаты в более элементарных моделях с дискретным временем натолкнулись на существенную трудность: если приращение цены актива на каком-то шагу принимает больше двух значений, то не любой платёж можно воспроизвести терминальным значением самофинансирующегося портфеля. Исключением является биномиальная модель, или модель Кокса–Росса–Рубинштейна, в которой приращение цены на каждом шагу имеет ровно два значения.

Модели с дискретным временем позволили прояснить связь отсутствия арбитража на рынке, т.е. возможности получать безрисковый доход и существованием эквивалентной мартингальной меры, а также связать единственность последней с полнотой рынка, т.е. с возможностью воспроизвести любое платёж терминальным значением самофинансирующегося портфеля. В случае, когда вероятностное пространство результаты требуют только элементов выпуклого анализа, который обычно преподаётся на экономических факультетах. Для общего вероятностного пространства теория арбитража существенно усложняется, а для моделей с непрерывным временем она требует глубокого знания как стохастического исчисления, так и геометрического функционального анализа.

Итак, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, ..., T$, на котором задан d-мерный согласованный процесс $S = (S_t)$, моделирующий эволюцию цен рисковых активов. Мы будем предполагать, что на рынке присутствует и безрисковый актив (банковский счёт с нулевой процентной ставкой).

Множество "результатов" R_T, т.е. терминальных значений самофинансирующихся портфелей с нулевым значением начального капитала состоит из с.в. вида

$$H \cdot S_T := \sum_{t=1}^{T} H_t \Delta S_t;$$

здесь "интеграл" — просто сокращённое обозначение для суммы в правой части, $\Delta S_t := S_t - S_{t-1}$, $H_t \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{F}_{t-1})$. В моделях с дискретным временем процесс $H = (H_t)$ с таким свойством измеримости называется предсказуемым.

Наглядно данную модель можно представлять себе так: вчера вечером, т.е. в момент времени $t-1$, трейдер выбрал позиции в рисковых активах, продавая их или покупая (по ценам S_{t-1}), что, естественно, отразится на банковском счёте. Сегодня, в момент времени t, были объявлены новые цены S_t. Доход от актива i будет $H_t^i \Delta S_t^i$, а суммарный доход будет выражаться скалярным происведением $H_t\Delta S_t = \sum_i H_t^i \Delta S_t^i$. Поскольку процентная ставка равна нулю, то банковский счёт не изменится. Таким образом, H — *стратегия* портфеля.

Пусть L^0_+ — множество с.в. $\xi \geq 0$. Множество $A_T := R_T - L^0_+$ можно рассматривать как множество хеджируемых платежей, т.е. с.в. вида $H \cdot S_T - h$, где $h \geq 0$.

Говорят, что рынок допускает арбитражные возможности, если существует такая стратегия H, что $H \cdot S_T \geq 0$ и $P(H \cdot S_T > 0) > 0$. Понятно, что рынок на котором есть арбитражные возможности, нежизнеспособен: масштабируя стратегию, инвестор на нём станет бесконечно богат (на реальном рынке, разумеется такого не происходит — арбитражная возможность, даже если и появляется, тут же исчезает).

Отсутствие арбитража (NA), безарбитражность модели, означает, что $R_T \cap L^0_+ = \{0\}$, или, эквивалентно, $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ (объяснить, почему). Эти математические формулировки оказываются весьма удобными для анализа.

Следующий результат принципиального характера называется теоремой Харрисона–Плиски[8].

Теорема 21.1 *Пусть $|\Omega| < \infty$, т.е. пространство Ω конечно. Свойство NA выполняется тогда и только тогда, когда существует вероятностная мера $\tilde{P} \sim P$ такая, что S — $\tilde{P}$-мартингал.*

Современное доказательство этой теоремы обходится ссылкой на хорошо известную лемму Штимке (1915 год) о двойственности конусов в конечномерном евклидовом пространстве.

Напомним, что K — (выпуклый) конус, если $\lambda K \subseteq K$ для всех $\lambda \geq 0$ и $K + K = K$. Если K — конус, то (положительный) двойственный к нему есть конус $K^* := \{w \colon wx \geq 0 \ \forall\, x \in K\}$. Конус называется заострённым, или собственным, если $K \cap (-K) = \{0\}$. Двойственный к заострённому конусу имеет внутренность $\operatorname{int} K^* = \{w \colon wx > 0 \ \forall\, x \in K \setminus \{0\}\}$.

Лемма 21.2 *Пусть K и R — два замкнутых конуса в $\mathbf{R}^n$, причём K заострённый. Тогда*

$$R \cap K = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad (-R^*) \cap \operatorname{int} K^* \neq \emptyset.$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Существование w такого, что $wx \leq 0$ для всех $x \in R$ и $wy > 0$ для всех y из $K \setminus \{0\}$ означает, что R и $K \setminus \{0\}$ не пересекаются.

($\Rightarrow$) Пусть C — выпуклый компакт такой, что $0 \notin C$ и $K = \operatorname{cone} C$. По теореме отделимости (для случая, когда одно множество замкнуто, а другое компактно) существует $z \in \mathbf{R}^n$ такое, что

$$\sup_{x \in R} zx < \inf_{y \in C} zy.$$

[8]Критерии арбитража часто называют фундаментальной теоремой оценивания активов, FTAP - Fundamental Theorem of Asset (or Arbitrage) Pricing.

Поскольку R — конус, то левая часть неравенства равна нулю, следовательно, $z \in -R^*$, а также $zy > 0$ для всех $y \in C$. Последнее свойство влечет $zy > 0$ для $z \in K$, $z \neq 0$ и, значит, $z \in \operatorname{int} K$. $\square$

Доказательство теоремы Харрисона–Плиски. Без ограничения общности будем считать, что $P(\{\omega\}) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Пусть n — число точек в Ω. Пространство L^0 случайных величин на Ω не более чем n-мерно и $\langle \xi, \eta \rangle := E\xi\eta$ — скалярное произведение на нём. По лемме Штимке (с $R = R_T$ и $K = L^0_+$) существует $\rho_T \in (-R_T^*) \cap \operatorname{int} (L^0_+)^*$. Заметим, что относительно рассматриваемого произведения $(L^0_+)^* = L^0_+$, а внутренность L^0_+ состоит из всех строго положительных с.в. Таким образом $\rho_T > 0$ и $E\rho_T\xi \leq 0$ для всех $\xi \in R_T$. Так как R_T — линейное подпространство, то $E\rho_T\xi = 0$ для всех $\xi \in R_T$. Без ограничения общности можно считать, что $E\rho_T = 1$ и определить вероятностную меру $\tilde{P} := \rho_T P$. Это всё, что нам даёт лемма Штимке. Остаётся заметить, что равенство $\tilde{E}\xi = 0$ выполняется, в частности, при $\xi = H_t \Delta S_t$, для любой $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримой с.в. H_t. Но это в точности мартингальное свойство процесса S относительно меры $\tilde{P}$. $\square$

Замечание 1. Рассмотрим мартингал $\rho_t = E(\rho_T | \mathcal{F}_t)$. Тогда векторный процесс $\tilde{S}_t := \rho_t S_t$ — мартингалом. Таким образом, условие NA эквивалентно существованию мартингального дефлятора, т.е. строго положительного мультипликатора преобразующего процесс цен активов в мартингалы.

Замечание 2. Оказывается, критерий отсутствия арбитража Харрисона–Плиски справедлив и без предположения конечности Ω. Для произвольного Ω справедлив целый набор интересных эквивалентных свойств (тривиальных для конечного Ω), сведённых в список, обычно называемый теоремой Даланга–Мортона–Виллингера.

Следующий результат — критерий, связывающий единственность мартингальной меры и полноту финансового рынка, т.е. свойство, когда любое платёжное обязательство может быть воспроизведено терминальным значением самофинансирующегося портфеля. Его иногда называют второй фундаментальной теоремой теории арбитража.

Теорема 21.3 *Пусть $|\Omega| < \infty$. Эквивалентная мартингальная мера единственна тогда и только тогда, когда $L^0 = \mathbb{R} + R_T$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что P — мартингальная мера. Если линейное подпространство $\mathbb{R} + R_T$ не совпадает с L^0, то найдётся $\eta \in L^0$, $\eta \neq 0$ такое, что $E\eta\xi = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R} + R_T$. Можно считать, что $|\eta| \leq 1/2$. Пусть $c := E(1 + \eta)$. Тогда $\tilde{P} = (1/c)(1 + \eta)P$ — другая мартингальная мера.

Пусть $L^0 = \mathbb{R} + R_T$. Тогда для любого $\Gamma \in \mathcal{F}_T$ имеем представление $I_\Gamma = c^\Gamma + H^\Gamma \cdot S_T$, где c^Γ — константа. Если Q — мартингальная мера, то $Q(\Gamma) = c^\Gamma$ и, значит, такая мера единственна. $\square$

Теорема хеджирования. Пусть ξ — платёжное обязательство, т .е. ξ — $\mathcal{F}_T$-измеримая случайная величина, Γ — множество $x \in \mathbb{R}$ таких, что $x + H \cdot S_T \geq \xi$ для некоторого предсказуемого процесса H.

Теорема 21.4 *Пусть* $|\Omega| < \infty$ *и множество* $\mathcal{Q}$ *эквивалентных мартингальных мер непусто. Тогда* $\Gamma = [\bar{x}, \infty[$*, где* $\bar{x} = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q \xi$.

Доказательство. Если $x \in \Gamma$, т.е. $x + H \cdot S_T \geq \xi$ для некоторого предсказуемого H, то $x \geq E_Q \xi$ для любой мартингальной меры Q. Следовательно, $x \geq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q \xi = \bar{x}$ и, значит, $\Gamma \subseteq [\bar{x}, \infty[$.

Обратно, пусть $\bar{x} \notin \Gamma$. Тогда $\xi - \bar{x} \notin R_T$. Поскольку R_T — линейное подпространство конечномерного пространсва L^0, то существует η такое, что $E\eta(\xi - \bar{x}) > 0$ и $E\eta\zeta = 0$ для всех $\zeta \in R_T$. Без ограничения общности можно считать, что $E\eta = 1$. Но тогда $\tilde{P}$ — мартингальная мера такая, что $\bar{x} < \tilde{E}\xi$. Пусть Q — эквивалентная мартингальная мера, существующая в силу условия теоремы. Тогда $Q^\varepsilon := (1-\varepsilon)\tilde{P} + \varepsilon Q$ — эквивалентная мартингальная мера при любом $\varepsilon \in]0,1]$. Поскольку $E_{Q^\varepsilon}\xi = (1-\varepsilon)\tilde{E}\xi + \varepsilon E_Q \xi \to \tilde{E}\xi$ при $\varepsilon \to 0$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство $\bar{x} < E_{Q^\varepsilon}\xi$, противоречащее определению $\bar{x}$. □

Замечание. Критерий полноты рынка и теорема хеджирования справедливы и без предположения конечности Ω (в последней надо добавить условие $\sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q|\xi| < \infty$).

Величина $\bar{x}$ называется *ценой суперхеджирования (суперрепликации).*

Пусть $\rho = (\rho_t)$ — процесс плотности мартингальной меры Q, т.е. $\rho_t := E(\rho_T|\mathcal{F}_t)$. Тогда $\rho_t = dQ_t/dP_t$, где P_t, Q_t — сужения мер P, Q на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$ (доказать). Процесс ρ называется *мартингальным дефлятором.*

В классической (дофинансовой) экономике опцион состоял в поставке вектора продуктов (например, различных видов топлива, количество которых выражено в баррелях) $N = (N^1, ..., N^d)$ с текущими номинальными ценами $S_t = (S_t^1, ..., S_t^d)$ (за баррель). Поэтому $\xi := NS_T$ и равенство $\bar{x} = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q \xi$ можно переписать следующим образом: $\bar{x} = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} EN\tilde{S}_T$, где $\tilde{S} := S\rho$ можно интерпретировать, как “новые", “правильные" цены. Таким образом, минимальный начальный капитал (супер)хеджирующего портфеля $\bar{x}$ есть супремум математических ожиданий стоимостей поставляемого по опциону вектора продуктов, рассчитываемых по ценам $\tilde{S}$.

References

[1] Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени. Изд-во МЦНМО, 2010.

[2] Cvitanić J., Zhang J. Contract Theory in Continuous-Time Models. Springer, 2013.

[3] Kabanov Yu. Safarian M. Markets with Transaction Costs. Mathematical Theory. Springer, 2009.

[4] Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, 1998.

[5] Маккин Г. Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.

[6] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 т. Изд-во МЦНМО, 2016.

5 lectures are here.
https://youtu.be/RgMqkbJY2u4
https://youtu.be/3R5vKhmW9IY
https://youtu.be/XH7OEvs5HeU
https://youtu.be/SAeCXWq9f58
https://youtu.be/X3bf8-ijy6A