Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Взаимозачёт в финансовых сетях

Юрий Кабанов, Рита Мокбель, Халил Эль Битар

Received: date / Accepted: date

Abstract Настоящая статья является обзором недавних результатов по проблеме взаимозачёта (клиринга) в финансовых системах. С точки зрения математики эта проблема сводится к существованию и единственности решений специфических нелинейных уравнений, формулируемых как задача о нахождении неподвижных точек $x = f(x)$, где $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ – отображние, построенное исходя из стохастических или субстохастических матриц. Обсуждаются некоторые алгоритмы нахождения неподвижных точек.

Keywords системный риск · финансовые сети · клиринг · теорема Кнастера–Тарского

Mathematics Subject Classification (2000) 90B10, 90B50

JEL Classification G21 · G33

1 Inroduction

Объяснение проблемы взаимозачёта мы начнём со следующего простейшего примера финансовой системы, состоящей из двух агентов, каждый из которых располагает наличностью в один доллар. Первый агент заимствует у второго тысячу долларов, второй, нуждаясь по какой-то причине в ресурсах, в свою очередь, заимствует у первого девятьсот долларов. Возникает ситуация, когда каждый из агентов имеет большие финансовые обязательства друг перед другом. Иными словами, в системе циркулируют деньги, существенно превосходящие собственные средства участников. В случае, если один из них по какой-то причине, не описанной в модели, оказывается не в состоянии вернуть долг, кредитор понесёт большие потери. В связи с этим регулятор мотивирован во введении правил, предписывающих

Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray,
25030 Besançon, cedex, France, и
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: ykabanov@univ-fcomte.fr

агентам осуществлять взаимозачёт (клиринг), полный или частичный, с тем чтобы уменьшить возможные последствия дефолтов. Для сложных финансовых систем, с большим количеством участников и цепочными заимствования, проблема взаимозачёта, т.е. снижение объёма взаимных кредитов в системе, является нетривиальной.

В основополагающей статье Айзенберг и Ноэ предложили процедуру взаимозачёта в простой статической модели, описывающей систему из N "банков" (под этим термином могут пониматься различные финансовые институты). Каждый банк располагает активами двух типов: наличностью (или каким-то ликвидным внешним активом) и кредитами, предоставленными другим банкам системы. Клиринг означает одновременную выплату всех долгов. Каждый банк возвращает своим партнёрам суммы пропорциональные их долям в общем объёме его заимствований; для этого он использует как имеющуюся наличность, так и возвращённые ему межбанковские кредиты. Правило таково: либо банк полностью рассчитывается со своими долгами, либо его ресурсы исчерпываются до нулевого уровня и он объявляется дефолтным. Общие суммы возвращённых банками кредитов образуют N-мерный вектор, называемый "клиринговым вектором", который находится как решение нелинейного уравнения, в котором участвует стохастическая матрица, строки которой образованы долями обязательств банка своим кредиторам в общем объёме его заимствований. Ключевое наблюдение состоит в том, что полученное уравнение есть задача о неподвижной точке монотонного отображения f многомерного замкнутого интервала в себя . Существование неподвижных точек немедленно вытекает из теоремы Кнастера–Тарского, красивого и простого результата, доказательство которого укладывается в несколько строк. Единственность клирингового вектора является более деликатным результатом. Элегантное доказательство Айзенберга и Ноэ привлекает к рассмотрению граф связей финансовой системы, который строится по тому же принципу, как это делается в теории марковских цепей.

Более общая модель с кросс-холдингами (т.е. взаимным владением банков акций друг друга) была рассмотрена независимо и в то же самое время Судзуки, [15], однако его работа была опубликована в малодоступном журнале и до последнего времени редко цитировалась.

Идеи статьи Айзенберга и Ноэ оказались весьма плодотворными. Описанная выше модель и методы её анализа были обобщены в различных направлениях, представляющих интерес как с точки зрения финансовой теории и практики, так и математических результатов, касающихся проблемы единственности клиринговых векторов и алгоритмов их вычисления. К настоящему времени проблема клиринга сложилась в специальный раздел новой дисциплины финансовой математики – теории системного риска.

Алгоритм вычисления максимального клирингового вектора, обобщающий алгоритм, предложенный в [5], изучался в работе [12] Роджерса и Луитпольд Вераарт для модели с издержками при дефолтах. Математически, эта модель является крайне простым обобщением модели Айзенберга и Ноэ, однако она весьма интересна с точки зрения финансов, поскольку позволяет исследовать такие явления как слияние банков и их спасение в случае дефолтов.

В глубоком исследовании Эльсингера [7] рассматривалась модель с кросс-холдингами, близкая упомянутой выше модели Судзуки [15], в сочетании с иерархической структурой межбанковских обязательств. Во избежание громоздких формул мы рассматриваем эти модели по отдельности.

В реальной финансовой практике банки хеджируют свои кредиты от дефолта заёмщиков, используя такой финансовый инструмент, как кредитный своп, credit default swap (CDS), т.е. контракт с третьей стороной, обязующейся выплатить компенсацию в случае банкротства заёмщика. В рассматриваемом контексте это означает, что матрица финансовых обязательств оказывается зависящей от клирингового вектора. Модель такого типа была проанализирована в работе Фишера [9] на основе идей [15].

Специальный класс образуют модели, в которых банки, помимо наличности и межбанковских обязательств имеют неликвидные активы, реализация которых влияет на их рыночную цену, см. [2] (модель с одним неликвидным активом) и [6] (модель с несколькими неликвидными активами).

В этом обзоре мы предлагаем единообразное изложение математического содержания вышеуказанных статей с детальными доказательствами. В § 2 мы кратко обсуждаем основные принципы и результаты фундаментальной статьи Айзенберга и Ноэ [5], а также объясняем, как адаптация классического алгоритма Гаусса исключения переменных, предложенная Сониным для уравнений Беллмана в задачах оптимальной остановки в [14], позволяет находить клиринговый вектор за конечное число шагов. Посвящённый модели Роджерса–Верaарт § 3 содержит упрощение рекуррентного алгоритма, также позволяющего найти клиринговый вектор за конечное число шагов. В § 4 мы излагаем результаты, относящиеся к модели Эльсингера–Судзуки, когда банки сети являются собственниками акций друг друга, а в § 5 – к модели Эльсингера с иерархией очередностей выплаты кредитов. Существование и единственность клирингового вектора в модели Фишера доказываются в § 6. Модели с неликвидными активами, реализация которых влияет на их рыночную цену, обобщающи моделі Амини, Филиповича и Минки, а также Фейнстейна, обсуждаются в § 7. Для удобства читателя мы приводим формулировку и доказательство теоремы Кнастера–Тарского, [16], приспособленную для наших целей.

Обозначения. Мы обозначаем символом $\geq$ частичный порядок в пространстве $\mathbf{R}^n$ и его подмножествах, индуцированный конусом $\mathbf{R}^n_+$. Иными словами, неравенство $y \geq x$ для векторов понимается покоординатно. Символы $x \wedge y$ и $x \vee y$ обозначают, соответственно, покоординатный минимум и максимум, $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x)^+$. Обозначение $[x, z]$ используется для интервала в смысле частичного порядка, т.е. $[x, z] := \{y \in \mathbf{R}^n : \ x \leq y \leq z\}$. Если $A \subseteq [x, z]$, то $\inf A$ – единственный элемент $\underline{y} \in [x, z]$ такой, что $\underline{y} \leq y$ для всех $y \in A$ и для любого $\tilde{y}$ такого, что $\tilde{y} \leq y$ для всех $y \in A$ имеет место неравенство $\tilde{y} \leq \underline{y}$. Иначе говоря, $\underline{y}^i = \inf\{y^i : \ y \in A\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Мы пользуемся матричными обозначениями, в которых вектора являются векторами-столбцами, $'$ – символом транспонирования, $\mathbf{1}' := (1, \dots, 1)$ (размерность этого вектора, а также единичной матрицы I предполагается ясной из контекста). Если $D \subset \{1, \dots, n\}$, то $\mathbf{1}_D$ – вектор, i-ая координата которого равна единице, если $i \in D$, и нулю – в противном случае. Диагональная матрица $\Lambda_D := \operatorname{diag} \mathbf{1}_D$ в наших матричных обозначениях играет роль индикаторной функции, когда векторы из $\mathbf{R}^n$ интерпретируются как функции, заданные на множестве $\{1, \dots, n\}$. Символы $|.|_1$ и $|.|_\infty$ обозначают l^1-норму и l^∞-норму, соответственно.

2 Модель Айзенберга–Ноэ

2.1 Описание модели и существование клиринговых векторов

В статье [5] Айзенберг и Ноэ исследовали финансовую систему состоящую из N банков обозначаемых точками множества $\mathcal{N} := \{1, \ldots, N\}$. Модель задаётся парой (e, L), где $e \in \mathbf{R}_+^N$ интерпретируется как вектор ликвидного резерва (наличности), а $N \times N$ матрица L с элементами $l^{ij} \geq 0$ и нулевой главной диагональю описывает межбанковские заимствования: l^{ij} – кредит, полученный банком i от банка j. Транспонированная матрица L' задаёт выданные кредиты. Вектор $l = L\mathbf{1}$ с компонентами $l^i = \sum_j l^{ij}$ описывает суммарные задолженности банков, а вектор $x := L'\mathbf{1}$ – выданные ими кредиты.

Собственный капитал или стоимость банка (equity, bank value) определяется равенством

$$c^i := (e^i + x^i - l^i)^+.$$

Положим

$$\pi^{ij} := \frac{l^{ij}}{l^i} = \frac{l^{ij}}{\sum_j l^{ij}}, \quad \text{если} \ \ l^i \neq 0, \ \text{и}\ \pi^{ij} := \delta^{ij} \ \text{в противном случае,} \tag{2.1}$$

где символ Кронекера $\delta^{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta^{ii} = 1$. Число π^{ij} есть доля задолженности банка i его кредитору j, матрицу $\Pi = (\pi^{ij})$ называют матрицей относительных задолженностей. Если $\pi^{ii} = 1$, то это означает, что банк i кредитует другие банки, но сам задолженностей не имеет.

Вообще говоря, финансовая система может иметь сложную структуру. Например, иметь циклические взаимозависимости со значительными суммами кредитов внутри циклов. Для их снижения, Айзенберг и Ноэ предложили в [5] клиринговый механизм, удовлетворяющий нескольким естественным требованиям, именно, ограниченой ответственности, абсолютного приоритета и пропорциональности. Формально, эти требования ведут к концепции клирингового вектора со следующими свойствами:

a. Ограниченая ответственность: для любого $i \in \mathcal{N}$

$$p^i \leq e^i + \sum_j \pi^{ji} p^j.$$

b. Абсолютный приоритет: для любого i либо $p^i = l^i$, либо

$$p^i = e^i + \sum_j \pi^{ji} p^j.$$

Такой механизм может быть реализован регулятором, который вынуждает банк “справедливо" рассчитаться с кредиторами, выплачивая каждому, при общей задолженности l^i сумму $p^i \leq l^i$ таким образом, что долг либо выплачен полностью (тогда $p^i = l^i$), либо все ресурсы полностью исчерпаны, но долг не погашен (тогда $p^i < l^i$).

Условия $a.$ и $b.$ могут быть переписаны следующим эквивалентным способом:

$$p = (e + \Pi' p) \wedge l, \tag{2.2}$$

где минимум понимается покомпонентно, т.е. в смысле частичного порядка, порождённого конусом $\mathbf{R}_+^N$.

Замечание. Внимательный читатель может заметить поразительное сходство (2.2) с уравнением Беллмана
$$v = (e + \Pi v) \vee l. \tag{2.3}$$
минимальное решение которого (в терминологии А.Н. Ширяева — наименьшая эксцессивная $(1, -e)$-мажоранта) является функцией выигрыша

$$v(x) = \sup_\tau E_x \Big(l(X_\tau) + \sum_{s=0}^{\tau} e(X_s) \Big)$$

в задаче оптимальной остановки с платой за наблюдения марковской цепи X с пространством состояний $\mathcal{N}$, матрицей переходных вероятностей Π и начальным состоянием x, см. [13], § 2.14.

Существование решения p уравнения (2.2) очевидно в силу классической теоремы Брауэра: непрерывное отображение $f : p \mapsto (e+\Pi' p) \wedge l$ выпуклого компактного множества $[0, l]$ в себя имеет неподвижную точку. Айзенберг и Ноэ заметили, что факт существования можно получить и прямой ссылкой на другую теорему о неподвижной точке, гораздо более простую, Кнастера–Тарского, утверждающей, что монотонное отображение f полной структуры (в данном случае интервала $[0, l]$) в себя обладает неподвижными точки и среди неподвижных точек есть минимальная и максимальная, см. § 8.

Пользуясь тождеством $(x - y)^+ = x - x \wedge y$, перепишем уравнение (2.2) в следующей эквивалентной форме:

$$(e + \Pi' p - l)^+ = e + \Pi' p - p, \tag{2.4}$$

в левой части которого стоит выражение $c(p)$ для собственного капитала банков после процедуры клиринга.

Лемма 2.1 *Собственный капитал после клиринга не зависит от клирингового вектора.*

Доказательство. Так как Π – стохастическая матрица, $\mathbf{1}'\Pi' = \mathbf{1}'$. Поэтому, умножая приведённое выше представление (2.4) слева на $\mathbf{1}'$, получаем, что

$$\mathbf{1}'(e + \Pi' p - l)^+ = \mathbf{1}' e,$$

то есть сумма собственных капиталов банков равна сумме начальных резервов наличности вне зависимости от клирингового вектора. С другой стороны, в силу монотонности
$$(e + \Pi' p - l)^+ \le (e + \Pi' \bar{p} - l)^+.$$
Если обе части этого векторного неравенства не совпадают, то

$$\mathbf{1}'(e + \Pi' p - l)^+ < \mathbf{1}'(e + \Pi' \bar{p} - l)^+$$

в противоречие с только что доказанной инвариантностью суммы собственных капиталов. □

Поскольку $c(p)$ не зависит от p, мы будем использовать обозначение c для вектора собственных капиталов после клиринга.

Замечание. В отличие от нашего определения (2.1), авторы [5] использовали соглашение $0/0 = 0$ в случае, когда $l^i = 0$. Поскольку доказательства существенно опираются на тот факт, что матрица Π – стохастическая, они немедленно приняли гипотезу, что все $l^i > 0$, исключив тем самым из рассмотрения содержательный случай, когда некоторые банки могут кредитовать без заимствований внутри системы. Другой специфической чертой работы [5] является предположение, что все $e^i \geq 0$, которое также можно избежать, что и делается в некоторых последующих работах. Отрицательное значение e^i при этом интерпретируется как внешний долг и величина $|e^i|$ фигурирует в части пассивов баланса.

2.2 Достаточное условие единственности клирингового вектора

Как и в теории марковских цепей мы свяжем со стохастической матрицей Π структуру ориентированого графа на $\mathcal{N}$, соединив стрелкой $i \to j$ каждую пару (i, j), для которой $\pi^{ij} > 0$. В данном контексте стрелка $i \to j$ означает, что узел (банк) j является кредитором i, если $i \neq j$. Стрелка $i \to i$ означает, что $l^i = 0$ и, значит, банк i не имеет заимствований у банков системы; в теории марковских цепей такое i является поглощающим состоянием.

Обозначим через $o(i)$ *орбиту узла* i, определяемую как множество всех узлов $j \in \mathcal{N} \setminus \{i\}$, для которых существует путь $i \to i_1 \to i_2 \to ... \to j$. В финансовой терминологии, если орбита $o(i)$ непуста, то она есть множество всех прямых и непрямых кредиторов i.

Заметим, что $k \notin o(i)$ тогда и только тогда, когда $\pi^{jk} = 0$ для всех $j \in o(i)$.

Лемма 2.2 *Пусть $p \in [0, l]$ – клиринговый вектор. Пусть $I = o(i)$ – орбита такая, что $\mathbf{1}'_I e > 0$. Тогда $\mathbf{1}'_I c > 0$. Иными словами, если орбита содержит узел со строго положительной наличностью, то после клиринга она будет иметь и узел со строго положительным собственным капиталом.*

Доказательство. Умножая тождество (2.4) слева на $\mathbf{1}'_I$ и замечая, что $(\mathbf{1}'_I \Pi')^j = 1$ для $j \in I$, получаем, что

$$\mathbf{1}'_I c = \mathbf{1}'_I (e + \Pi' p - l)^+ = \mathbf{1}'_I (e + \Pi' p - p) \geq \mathbf{1}'_I e > 0,$$

т.е. утверждение леммы. □

Финансовая система называется *регулярной*, если $\mathbf{1}'_{o(i)} e > 0$ для любой орбиты $o(i) \neq \emptyset$.

Заметим, что если $o(i) = \emptyset$, т.е. $l^i = 0$, то $\bar{p}^i = 0$. Это свойство вытекает из соотношения (2.4), i-ая компонента которого в этом случае есть

$$e^i + (\Pi' \bar{p})^i = e^i + (\Pi' \bar{p})^i - \bar{p}^i.$$

Теорема 2.3 *Пусть финансовая система регулярна. Тогда $\underline{p} = \bar{p}$.*

Доказательство. Предположим, что $\underline{p}$ и $\bar{p}$ не равны, т.е. $\underline{p} \leq \bar{p}$, но для некоторого i имеет место строгое неравенство $\underline{p}^i < \bar{p}^i$ и, следовательно, $o(i) \neq \emptyset$.

В силу леммы существует узел $m \in o(i)$ с собственным капиталом $c^m > 0$. Рассмотрим путь $i \to i_1 \to ... \to m$, предположив без ограничения общности, что

m – первый встреченный узел со строго положительным собственным капиталом. Если $m = i_1$, мы немедленно получаем противоречие: так как $c^m > 0$, то

$$c^m = e^m + \sum_j \pi^{jm} \underline{p}^j - l^m, \qquad c^m = e^m + \sum_j \pi^{jm} \bar{p}^j - l^m,$$

из чего вытекает невозможное равенство

$$\sum_j \pi^{jm} (\bar{p}^j - \underline{p}^j) = 0$$

(в сумме имеется строго положительное слагаемое, соответствующее $j = i$).

Предположим, что $m \neq i_1$. Следовательно, $c^{i_1} = 0$ и, в силу (2.4),

$$e^{i_1} + \sum_j \pi^{ji_1} \underline{p}^j - \underline{p}^{i_1} = 0, \qquad e^{i_1} + \sum_j \pi^{ji_1} \bar{p}^j - \bar{p}^{i_1} = 0,$$

Поэтому

$$\bar{p}^{i_1} - \underline{p}^{i_1} = \sum_j \pi^{ji_1} (\bar{p}^j - \underline{p}^j) > 0.$$

Стало быть, свойство $\underline{p}^i < \bar{p}^i$ распространяется вдоль пути и редукция к рассмотренному одношаговому случаю очевидна. □

Замечание. Полученная теорема показывает, что проблема единственности клирингового вектора некорректна в следующем смысле. Добавив инфинитезимально малое значение ко всем e^i (скажем, один цент), мы получим модель с единственным клиринговым вектором. Аналогичный эффект будет, если инфинитезимально увеличить элементы матрицы заимствований.

Приведённое выше доказательство единственности весьма элементарно и использует язык теории графов. Альтернативное доказательство, использующее спектральные свойства стохастических матриц может быть найдено в [1]. Теорема может быть сформулирована в следующей эквивалентной форме: если в каждом неразложимом классе, не состоящем из одного узла, есть узел со строго положительной наличностью, то клиринговый вектор единственен.

2.3 Алгоритм Гаусса исключения неизвестных

Пусть $D \neq \emptyset$ – собственное подмножество $\mathcal{N}$. Изменив при необходимости нумерацию, будем считать без потери общности, что $D := \{1, \dots, m\}$, $1 \leq m < N$. Введем следующие обозначения для подматриц: $\Pi_D := (\pi^{ij})_{i,j \in D}$, $\Pi_{D^c} := (\pi^{ij})_{i,j \in D^c}$, $e_D := (e^i)_{i \in D}$ и.т.д. Предположим, что p есть решение уравнения $p = e + \Pi' p$, перепишем последнее в блочно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} p_D \\ p_{D^c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_D \\ e_{D^c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi'_D & R' \\ T' & \Pi'_{D^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_D \\ p_{D^c} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Таким образом,

$$p_D = e_D + \Pi'_D p_D + R' p_{D^c}, \tag{2.6}$$

$$p_{D^c} = e_{D^c} + T' p_D + \Pi'_{D^c} p_{D^c}. \tag{2.7}$$

Предположим, что матрица $I_m - \Pi_D$ обратима. Подставляя в (2.7) значение p_D, найденное из (2.6), получаем, что вектор $p_1 := p_{D^c} \in \mathbf{R}^{N-m}$ является решением уравнения

$$p_1 = e_1 + \Pi_1' p_1, \tag{2.8}$$

где

$$e_1 := e_{D^c} + T'(I_m - \Pi_D')^{-1} e_D, \tag{2.9}$$

$$\Pi_1 := R(I_m - \Pi_D)^{-1} T + \Pi_{D^c}. \tag{2.10}$$

Нетрудно убедиться, что Π_1 – стохастическая матрица (субстохастическая, если Π_1 – субстохастическая). Уравнение (2.8) имеет тот же вид, что и изначальное, но имеет меньшую размерность и его решение посредством (2.6) даёт решение исходной задачи. Конечно, при $m = 1$ описываемая процедура понижения размерности есть ни что иное, как метод Гаусса последовательного исключения неизвестных для решения линейных уравнений в $\mathbf{R}^N$.

Как было замечено Сониным в контексте уравнений Беллмана для задач оптимальной остановки конечных марковских цепей, см. [14] и ссылки *ibid.*, метод исключения неизвестных Гаусса может быть приспособлен и для решения некоторых нелинейных уравнений записанных как задача о неподвижной точке, в частности, для уравнения $p = (e + \Pi' p) \wedge l$ и даже с произвольной матрицей. В самом деле, если множество $D_0 := \{i \in \mathcal{N} :\ e^i + (\Pi' l)^i < l^i\} = \emptyset$, решением является вектор $p = l$. Если это множество непусто, возьмём его любое собственное подмножество D. Без ограничения общности будем считать, что $D = \{1, \dots, m\}$. По аналогии с (2.6), (2.7) запишем уравнения

$$p_D = (e_D + \Pi_D' p_D + R' p_{D^c}) \wedge l_D, \tag{2.11}$$

$$p_{D^c} = (e_{D^c} + T' p_D + \Pi_{D^c}' p_{D^c}) \wedge l_{D^c}. \tag{2.12}$$

В силу определения множества D первое уравнение линейное и совпадает с (2.6). Таким образом, если матрица $I_m - \Pi_D$ обратима, то вектор $p_1 := p_{D^c}$ – решение уравнения меньшей размерности

$$p_1 = (e_1 + \Pi_1' p_1) \wedge l_{D^c}, \tag{2.13}$$

с e_1 и Π_1, заданными формулами (2.9) и (2.10).

Как и в классическом алгоритме Гаусса, возьмём $D = \{1\}$. Если $\pi^{11} \neq 1$, то мы можем исключить p^1, сведя задачу к поиску вектора $(p^2, \dots, p^N)$, удовлетворяющего уравнению того же типа. Если $\pi^{11} = 1$, то $e^1 = 0$ и $R' p_{D^c} = 0$. В этом случае значение p^1 нельзя определить из первого уравнения и оно может быть взято как свободный параметр $p^1 \in [0, l^1]$. В частности, если ищется минимальное решение, то надо взять $p^1 = 0$, а если максимальное, то $p^1 = l$. Задача снова редуцируется к аналогичной, но в размерности $N - 1$ если имеет все компоненты равными нулю, или даже в размерности $N - 1 - k$, если k компонент R' отличны от нуля – им соответствуют нулевые компоненты решения.

Для вычисления клиринговых векторов известны и другие процедуры. Вектор $\bar{p}$ может быть найден итеративной процедурой $p_n = f(p_{n-1})$, $n \geq 1$, с начальным условием $p_0 = l$. В самом деле, так как отображение f монотонно, $\bar{p} \leq p_{n+1} \leq p_n$; убывающая последовательность p_n имеет предел $p_\infty \in [\bar{p}, l]$. Непрерывность f влечёт равенство $p_\infty = f(p_\infty)$. Поскольку $\bar{p}$ – максимальная фиксированная точка,

$p_\infty = \bar{p}$. Та же процедура, но начинающаяся от нулевого вектора, приводит к последовательности, сходящейся к $\underline{p}$. Конечно, для получения решений эти процедуры требуют, вообще говоря, бесконечно много итераций. Подобно методу Гаусса, алгоритм фиктивных дефолтов, предложенный в [5], позволяет получить клиринговый вектор (предполагаемый единственным) не более, чем за $N+1$ шаг. В следующем параграфе мы опишем этот алгоритм в несколько более общей постановке.

3 Модель Роджерса–Вераарт

3.1 Потери при дефолтах и GA алгоритм

В модели Роджерса–Вераарт, [12], обобщающей модель Айзенберга–Ноэ, клиринговые векторы определяются как решения нелинейного уравнения

$$p = (I - \Lambda(p))l + \Lambda(p)(\alpha e + \beta \Pi' p), \tag{3.1}$$

где $e \in \mathbf{R}^N_+$ и $\Lambda(p) := \operatorname{diag} \mathbf{1}_D$, $D := \{i \in \mathcal{N}\colon\ e^i + (\Pi' p)^i < l^i\}$. Параметры $\alpha, \beta \in]0,1]$ позволяют ввести потери при дефолтах: Можно считать, что в случае дефолта банка $(1-\alpha)e^i + (1-\beta)(\Pi' p)^i$ есть сумма средств, выделенная на издержки ликвидации банка. Таким образом, модель задаётся четверкой (e, L, α, β). Модель Айзенберга–Ноэ является частным случаем и отвечает параметрам $\alpha = \beta = 1$.

Обозначим через $f(p)$ правую часть уравнения (3.1). Нетрудно видеть, что $p \mapsto f(p)$ является возрастающей функцией, отображающей $[0, l]$ в $[0, l]$. Как и ранее, теорема Кнастера–Тарского обеспечивает нам существование клиринговых векторов, минимального $\underline{p}$ и максимального $\bar{p}$. Кроме того, функция f непрерывна “сверху", т.е. $f(p_n) \to f(p_\infty)$, когда убывающая последовательность p_n сходится к p_∞. Поэтому итеративная процедура, описанная в конце предыдущего параграфа, сходится к $\bar{p}$, стартуя из $p_0 = l$. Если $\alpha < 1$ или $\beta < 1$, то f необязательно непрерывна “снизу" и нет гарантии, что такая процедура сойдётся к минимальному клиринговому вектору $\underline{p}$, стартуя из нулевого вектора.

Ниже мы опишем процедуру нахождения максимального клирингового вектора за конечное число шагов, названную в [12] “Greatest Clearing Vector Algorithm", или, сокращённо, GA. Это – рекуррентно определяемая последовательность векторов $p_n \in \mathbf{R}^N_+$, $n \geq 0$, с начальным значением $p_0 := l$ и общим членом

$$p_{n+1} := (I - \Lambda_n)l + \Lambda_n \hat{p}_{n+1}, \qquad n \geq 0, \tag{3.2}$$

где $\Lambda_n := \operatorname{diag} \mathbf{1}_{D_n}$, $D_n := \{i \in \mathcal{N}\colon\ e^i + (\Pi' p_n)^i < l^i\}$, и $\hat{p}_{n+1}$ – максимальное решение среди лежащих в интервале $[0, \Lambda_n p_n]$ линейного уравнения $p = f_n(p)$,

$$f_n(p) := \Lambda_n\big(\alpha e + \beta \Pi'(I - \Lambda_n)l + \beta \Pi' \Lambda_n p\big). \tag{3.3}$$

Проверим сперва, пользуясь монотонностью функции f_n на $\mathbf{R}^N_+$, что эта последовательность корректно определена и убывает. С этой целью заметим, что

$$f_0(\Lambda_0 l) = \Lambda_0(\alpha e + \beta \Pi' l) \leq \Lambda_0(e + \Pi' l) \leq \Lambda_0 l.$$

Таким образом, возрастающая функция f_0 отображает отрезок $[0, \Lambda_0 p_0]$ в себя. По теореме Кнастера–Тарского требуемая максимальная неподвижная точка $\hat{p}_1$ существует. Очевидно, $p_1 \leq l = p_0$. Предположим, что значения $p_k \in [0, l]$ уже определены (стало быть, и значения $\hat{p}_k$) для всех $k \le n$ и образуют убывающую последовательность. Следовательно, $D_n \supseteq D_{n-1}$. Положим $\Delta_n := \operatorname{diag} \mathbf{1}_{D_n \setminus D_{n-1}}$. Принимая во внимание, что $\Delta_n l = \Delta_n p_n$, $\Lambda_{n-1} p_n = \Lambda_{n-1} \hat{p}_n$ и $p_n \le l$, получаем, что

$$\begin{aligned} f_n(\Lambda_n p_n) = &\Lambda_{n-1}\big(\alpha e + \beta \Pi'(I - \Lambda_{n-1})l + \beta \Pi' \Lambda_{n-1} p_n\big) \\ &+\Delta_n\big(\alpha e + \beta \Pi'(I - \Lambda_{n-1})l + \beta \Pi' \Lambda_{n-1} p_n\big) \le \Lambda_{n-1}\hat{p}_n + \Delta_n l = \Lambda_n p_n. \end{aligned}$$

Стало быть, возрастающая функция f_n отображает отрезок $[0, \Lambda_n p_n]$ в себя и существование требуемого максимального элемента $\hat{p}_{n+1} \le \Lambda_n p_n$ обеспечивается теоремой Кнастера–Тарского. Это означает, что рекуррентная последовательность p_n корректно определена. Из (3.2) следует что

$$p_{n+1} - p_n = -\Delta_n l + \Lambda_n \hat{p}_{n+1} - \Lambda_{n-1} p_n \le -\Delta_n l + \Lambda_n p_n - \Lambda_{n-1} p_n = \Delta_n (p_n - l) \le 0.$$

Предложение 3.1 *Существует $n_0 \le N+1$ такое, что $p_n = \bar{p}$ для всех значений $n \ge n_0 - 1$.*

Доказательство. Для максимального решения $\bar{p}$ уравнения (3.1) мы имеем очевидным образом, что $\bar{p} \le p_0 = l$. Предположим, что мы уже установили неравенство $\bar{p} \le p_n$. По определению, $\Lambda_n p_{n+1} = \Lambda_n \hat{p}_{n+1} = \hat{p}_{n+1}$, где $\hat{p}_{n+1} \in [0, \Lambda_n p_n]$ является максимальным решением уравнения

$$\hat{p}_{n+1} = \Lambda_n\big(\alpha e + \beta \Pi'(I - \Lambda_n)l + \beta \Pi' \Lambda_n \hat{p}_{n+1}\big).$$

В силу предположения индукции $\Lambda(\bar{p}) \ge \Lambda_n$ и мы получаем из (3.1), что

$$\Lambda_n \bar{p} = \Lambda_n(\alpha e + \beta \Pi'(I - \Lambda_n)\bar{p} + \beta \Pi' \Lambda_n \bar{p}).$$

Поскольку $\bar{p} \le l$, следствие 8.2 обеспечивает неравенство $\hat{p}_{n+1} \ge \Lambda_n \bar{p}$. Следовательно, $p^i_{n+1} \ge \bar{p}^i$ при $i \in D_n$. Для $i \in D_n^c$ это неравенство очевидно.

Пусть $n_0 := \min\{n \ge 0\colon\ D_{n+1} = D_n\}$. Подмножества D_n возрастают и содержат не более N элементов. Поэтому $n_0 \le N+1$. Поскольку $\Lambda_{n_0+1} = \Lambda_{n_0}$, вектора $\hat{p}_{n_0+1}$ и $\hat{p}_{n_0+2}$ являются максимальными неподвижными точками одной и той же функции f_{n_0}, рассматриваемой, соответственно, на интервалах $[0, \Lambda_{n_0} p_{n_0}]$ и $[0, \Lambda_{n_0+1} p_{n_0+1}]$. Поэтому $\hat{p}_{n_0+1} \ge \hat{p}_{n_0+2}$ и $p_{n_0+1} \ge p_{n_0+2}$. Следовательно, имеют место равенства $p_{n_0+1} = p_{n_0+2}$ и $\Lambda_{n_0+1} = \Lambda_{n_0+2}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} f_{n_0+1}(\hat{p}_{n_0+2}) &= \Lambda_{n_0+1}(\alpha e + \beta \Pi'(I - \Lambda_{n_0+1})l + \beta \Pi' \Lambda_{n_0+1} \hat{p}_{n_0+2}) \\ &= \Lambda_{n_0+1}(\alpha e + \beta \Pi' p_{n_0+2}) \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$p_{n_0+1} = p_{n_0+2} = (I - \Lambda_{n_0+1})l + \Lambda_{n_0+1}(\alpha e + \beta \Pi' p_{n_0+1}),$$

т.е. p_{n_0+1} есть решение уравнения (3.1). Поскольку p_{n_0+1} доминирует максимальное решение $\bar{p}$, то $p_{n_0+1} = \bar{p}$. □

3.2 Алгоритм исключения неизвестных Гаусса в модели Роджерса–Вераарт

Алгоритм исключения неизвестных Гаусса может быть легко приспособлен и к нахождению клиринговых векторов за конечное число шагов и в модели с ликвидационными издержками.

Если $D_0 := \{i \in \mathcal{N}\colon\ e^i + (\Pi' l)^i < l^i\} = \emptyset$, то максимальным решением уравнения (3.1) является вектор l. Если $D_0 \neq \emptyset$, то без ограничения общности мы можем считать, что $e^1 + (\Pi' l)^1 < l^1$. Пользуясь как и в (2.3) блочным представлением матриц и положив $J = \{1\}$, запишем (3.1) в виде

$$p^1 = \alpha e^1 + \beta\pi^{11} p^1 + \beta R'\tilde{p}, \tag{3.4}$$
$$\tilde{p} = (I_{N-1} - \tilde{\Lambda})\tilde{l} + \tilde{\Lambda}(\alpha\tilde{e} + \beta(T' p^1 + \tilde{\Pi}'\tilde{p})), \tag{3.5}$$

где $\tilde{p}$, $\tilde{e}$ и $\tilde{l}$ — векторы, полученные удалением первой компоненты векторов p, e и l, а $\tilde{\Pi}$ и $\tilde{\Lambda}$ — $(N-1)\times(N-1)$ матрицы, полученные из Π и Λ удалением первой строки и первого столбца.

Рассмотрим сначала случай $\beta < 1$. Тогда $\beta\pi^{11} < 1$. Решая уравнение (3.4) относительно p^1 и подставляя полученное выражение, именно,

$$p^1 = \alpha(1-\beta\pi^{11})^{-1} e^1 + \beta(1-\beta\pi^{11})^{-1} R'\tilde{p},$$

в (3.5), получаем, что

$$\tilde{p} = (I_{N-1} - \tilde{\Lambda})\tilde{l} + \tilde{\Lambda}(\alpha e_1 + \beta\Pi_1'\tilde{p}), \tag{3.6}$$

где

$$e_1 := \tilde{e} + \beta(1-\beta\pi^{11})^{-1} e^1 T', \tag{3.7}$$
$$\Pi_1 := \tilde{\Pi} + \beta(1-\beta\pi^{11})^{-1} RT. \tag{3.8}$$

Далее, $\tilde{\Lambda} = \mathbf{1}_{\tilde{D}}$, где $\tilde{D} := \{i \geq \mathcal{N}\setminus\{1\}\colon\ \tilde{e}^i + (\Pi_1'\tilde{p})^i\}$. Матрица Π_1 — субстохастическая. Уравнение (3.6) имеет тот же тип, что и (3.1), но в размерности $N-1$. Последовательно понижая размерность, мы остановимся либо на уравнении, решением которого будет вектор образованный компонентами l , либо на уравнении с одним неизвестным, имеющим решение. Остаётся вычислить вектор p тем же самым образом, как это делается в обратном ходе алгоритма Гаусса.

Когда $\beta = 1$, может оказаться, что $\pi^{11} = 1$. In such a caseВ таком случае уравнение (3.4) не определяет p^1 и можно взять в качестве p^1 любое значение из интервала $[0, l^1]$. В частности, при поиске максимального решения нужным значением будет $p^1 = l^1$. Заметим, что $e^1 = 0$ и $R' p_{J^c} = 0$. Пусть множество $A := \{j \geq 2\colon\ \pi^{j1} > 0\}$ содержит k элементов (меняя нумерацию, всегда можно считать, что $A : \{2, \dots, k+1\}$). Тогда $p^j = 0$ для всех $j \in A$. Исходная задача сводится к поиску решений уравнения

$$\tilde{p} = (I_{N-1-k} - \tilde{\Lambda})\tilde{l} + \tilde{\Lambda}(\alpha\tilde{e} + \beta\tilde{\Pi}'\tilde{p}), \tag{3.9}$$

где $\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{\Pi}$ — $(N-1-k)\times(N-1-k)$ матрицы, полученные из $\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{\Pi}$ удалением строк и столбцов, занумерованных эленентами множества $\{1\}\cup A$, векторы $\tilde{l}$ и $\tilde{e}$ получены из l из e компонент, соответсвующих этому же множеству индексов.

3.3 Слияние и спасательный консорциум

Для описания *слияния* группы из k банков в рамках рассматриваемой модели, удобно расположить эту группу в конце списка. Вновь созданному банку мы припишем индекс 0, оставив неизменными индексы оставшихся $m = N - k$ банков. Формальное описание выглядит следующим образом. Пусть $M := \{m+1, \dots, N\}$ – подмножество $\mathcal{N}$, состоящее по крайней мере из двух элементов. Модель (e, L, α, β) заменяется моделью $(e_M, L_M, \alpha, \beta)$, где $e_M = (e^0, e^1, \dots, e^m)$ с $e^0 := \mathbf{1}_M e$, а элементы $(m+1) \times (m+1)$ матрицы $L_M = (l_M^{ij})$ имеют вид:

$$l^{00} = 0, \quad l_M^{0i} = \sum_{j \in M} l^{ji}, \quad l_M^{i0} = \sum_{j \in M} l^{ij}, \quad l_M^{ij} = l^{ij}, \quad 1 \le i, j \le m.$$

Стресс-тест системы состоит в замене вектора ликвидных активов на меньший $\hat{e} > 0$. Предположим, что множество $D_0 := \{i \in \mathcal{N} \colon \ \hat{e}^i + (\Pi' l)^i < l^i\} \neq \emptyset$. *Стоимость санации* (стрессированной) системы определяется величиной $\mathbf{1}'_{D_0}\delta$, где вектор $\delta := (l - \Pi' l - \hat{e}) \vee 0$ задаёт необходимую дополнительную ликвидность, обеспечивающую исполнение банками их финансовых обязательств.

Пусть p^* – максимальный клиринговый вектор в модели $(\hat{e}, L, \alpha, \beta)$.

Группа банков $A \subseteq D_0^c$ имеет *мотивацию к санации* системы, если выполняется неравенство

$$\mathbf{1}'_A(e + \Pi' l - l) - \mathbf{1}'_{D_0}\delta > \mathbf{1}'_A(e + \Pi' p^* - p^*)^+,$$

т.е. общий капитал банков группы A в предположении, что они получат обратно сумму выданных ими кредитов минус стоимость санации, превосходит суммарный капитал банков при клиринговом векторе p^*. Более слабое условие

$$\mathbf{1}'_A(e + \Pi' l - l) > \mathbf{1}'_{D_0}\delta$$

означает, что группа банков A обладает способностью санировать систему, т.е. достаточными ресурсами, чтобы покрыть долги банков из D_0, если обязательства будут полностью выплачены. Таким образом, группа банков, имеющая мотивацию, может создать спасательный консорциум.

Если в исходной системе все банки платежеспособны, то вектор их собственного капитала имеет вид $c = e + \Pi' l - l$. В стрессированной системе при клиринговом векторе p^* вектор собственного капитала имеет вид

$$(\hat{e} + \Pi' p^* - l) I_{\{l \le p^*\}}.$$

Предложение 3.2 *Предположим, что в модели* $(e, L, 1, 1)$ *все банки платёжеспособны. Пусть вектор* $\hat{e} \in [0, e]$ *таков, что по крайней мере один банк в модели* $(\hat{e}, L, 1, 1)$ *оказался в состоянии дефолта. Тогда стрессированная система не имеет спасательного консорциума.*

4 Модель Судзуки–Эльсингера с кросс-холдингами

4.1 Существование равновесия

Теперь мы рассмотрим вариант модели Судзуки–Эльсингера, [15], [7], с кросс-холдингами, определёнными с помощью субстохастической матрицы $\Theta = (\theta^{ij})$, где $\theta^{ij} \in [0, 1]$ – доля владения банка i банком j.

В этой модели клиринговый вектор и вектор собственных капиталов банков взаимозависимы и задача формулируется как задача нахождения равновесия, т.е. как одновременное нахождение вектора удвоенной размерности, удовлетворяющего уравнению в $\mathbf{R}^{2N}$. Это уравнение может быть записано в различных, но эквивалентных формах.

Мы примем в качестве постоянной гипотезы условие отсутствия в системе группы банков, чьими владельцами являются исключительно банки этой же группы:

H. Не существует подмножества $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ такого, что $\mathbf{1}'_A \Theta = \mathbf{1}'_A$.

Иными словами, не существует множества индексов $A \neq \emptyset$ такого, что

$$\sum_{j \in A} \theta^{ij} = 1 \quad \forall\, i \in A,$$

т.е. Θ не содержит стохастичских подматриц.

Лемма 4.1 *Условие* **H** *выполняется тогда и только тогда, когда единица не является собственным числом матрицы* Θ.

Доказательство. Предположим, что **H** выполняется, но единица является собственным числом, т.е. для некоторого $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ выполняется равенство $\Theta x = x$. Тогда для любого $i \in A$

$$|x^i| = |(\Theta x)^i| \le \sum_j \theta^{ij} |x^j| \le |x^i| \Big(\sum_{j \in A} \theta^{ij} + \sum_{j \in A^c} \theta^{ij} \Big) \le |x^i|.$$

Отсюда следует, что $\sum_{j \in A} \theta^{ij} = 1$ (иначе бы мы имели, что $|x^i| < |x^i|$). Но такое равенство противоречит **H**.

Обратно, пусть $\Lambda_A \Theta \Lambda_A \mathbf{1} = \Lambda_A \mathbf{1}$ для некоторого $A \neq \emptyset$. Тогда $x \mapsto \Theta x$ — монотонное отображение полной структуры $\mathbf{1}_A + [0, \mathbf{1}_{A^c}]$ в себя. Неподвижная точка этого отображения, существующая в силу теоремы Кнастера–Тарского, является правым собственным вектором Θ, соответствующим собственному числу единица. $\square$

Естественно, приведённая выше лемма может быть сформулирована как эквивалентность условия **H** обратимости матрицы $I - \Theta$ (или $I - \Theta'$).

Для субстохастической матрицы Θ спектральный радиус $\rho(\Theta)$ является её собственным числом, $\rho(\Theta) \le |\Theta|_\infty \le 1$ (см., например, теоремы 5.6.9 и 8.3.1 в [10]). Стало быть, условие **H** имеет место тогда и только тогда, когда $\rho(\Theta) < 1$. Полезно вспомнить, что $\rho(\Theta)$ является инфимумом матричных норм Θ, так что в нашем случае

$$(I - \Theta')^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta'^n.$$

Из этого представления вытекает, что отображение $x \mapsto (I - \Theta')^{-1} x$ сохраняет порядок.

Лемма 4.2 *Предположим, что* **H** *выполняется. Пусть* $y \in \mathbf{R}^N$ *и пусть* $B := \{i \in \mathcal{N} \colon\ y^i < 0\} \neq \emptyset$. *Тогда* $\mathbf{1}'_B \Lambda_B (I - \Theta') \Lambda_B y < 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{1}'_B\Lambda_B(I-\Theta')\Lambda_B y = \sum_{i\in B} y^i - \sum_{i\in B}\sum_{j\in B}\theta^{ji}y^j = \sum_{i\in B} y^i - \sum_{j\in B} y^j \sum_{i\in B}\theta^{ji} \le 0,$$

поскольку сумма элементов в каждом ряду субстохастической матрицы меньше или равна единице. Приведённое выше неравенство выполняется как равенство только если $\sum_{i\in B}\theta^{ji}=1$ для каждого $j\in B$, но такой случай исключён условием **H**. □

Лемма 4.3 *Для любого $x\in\mathbf{R}^N$ уравнения*

$$v = (x+\Theta' v)^+, \tag{4.1}$$

$$w = x+\Theta' w^+ \tag{4.2}$$

имеют единственные решения $v=v(x)\in\mathbf{R}^N_+$ и $w=w(x)\in\mathbf{R}^N$.

Функции $x\mapsto v(x)$ и $x\mapsto w(x)$ являются положительно однородными, выпуклыми, липшицевыми и сохраняющими порядок.

Доказательство. Существование. Если $x\in\mathbf{R}^N_+$, то решения явными формулами: $v=w=(I-\Theta')^{-1}x$. В общем случае обозначим правые части равенств (4.1) и (4.2) соответственно через $f_1(v;x)$ и $f_1(w;x)$. Тогда $f_k(.,x)\le f_k(.,x^+)$, $k=1,2$, и обе функции возрастают $v\mapsto f_k(.,x)$ возрастают на $\mathbf{R^N}$. Заметим, что

$$f_1((I-\Theta')^{-1}x^+,x) = (x+\Theta'(I-\Theta')^{-1}x^+)^+ \le x^+ + \Theta'(I-\Theta')^{-1}x^+ = (I-\Theta')^{-1}x^+.$$

Отсюда следует, что сужение $f_1(.,x)$ на порядковый интервал $[0,(I-\Theta')^{-1}x^+]$ отображает последний на себя и, значит, в силу теоремы Кнастера–Тарского это сужение имеет минимальную $\underline{v}$ и максимальную $\bar v$ неподвижные точки.

Аналогично, $f_2((I-\Theta')^{-1}x^+,x)\le (I-\Theta')^{-1}x^+$ и сужение $f_2(.,x)$ на порядковый интервал $[x,(I-\Theta')^{-1}x^+]$ имеет минимальную$\underline{w}$ и максимальную $\bar w$ неподвижные точки.

Единственность. Пусть $\tilde v$ — неподвижная точка отображения $v\mapsto f_1(v,x)$ необязательно лежащая в $[0,(I-\Theta')^{-1}x^+]$. Предположим, что множество индексов $B:=\{i\in\mathcal{N}:\ \tilde v^i>\underline{v}^i\}$ непусто. Заметим, что $\Lambda_B\tilde v=\Lambda_B x+\Lambda_B\Theta'\tilde v$ и $\Lambda_B\underline{v}\ge \Lambda_B x+\Lambda_B\Theta'\underline{v}$. Следовательно,

$$\Lambda_B(\underline{v}-\tilde v)\ge \Lambda_B\Theta'(\underline{v}-\tilde v)\ge \Lambda_B\Theta'\Lambda_B(\underline{v}-\tilde v).$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{1}'_B\Lambda_B(I-\Theta')\Lambda_B(\underline{v}-\tilde v)\ge 0$$

в противоречии с леммой 4.2. Итак, $B=\emptyset$ и $\tilde v\le \underline{v}$. Отсюда вытекает, что неподвижная точка $\tilde v$ также принадлежит интервалу $[0,I-\Theta')^{-1}x^+]$ и $\tilde v=\underline{v}$.

Взяв положительную часть от обеих сторон равенства (4.2), мы заключаем, что для любого решения w этого уравнения w^+ оказывается решением уравнения (4.1), которое, как мы показали, единственно. Но w однозначно определяется w^+.

Положительная однородность. Если $\lambda\in\mathbf{R}_+$ и $v(x)$ есть решение уравнения (4.1), то $\lambda v(x)$ удовлетворяет уравнению $v=(\lambda x+\Theta' v)$ и, в силу единственности совпадает с $v(\lambda x)$. Аналогичное рассуждение работает для (4.2).

Выпуклость и условие Липшица. Для любого $x \in \mathbf{R}^N$ определённая рекурсивно последовательность

$$v_{n+1}(x) = (x + \Theta' v_n(x))^+, \quad n \geq 1, \qquad v_0(x) = x,$$

эволюционирует в интервале $[x, (I - \Theta')^{-1}x^+]$ и любая её предельная точка есть решение уравнения (4.1). Поскольку последнее допускает единственное решение, последовательность $v_n(x)$ имеет предел $v(x)$. По индукции легко проверяется, что функция $x \mapsto v_n(x)$ выпукла, а значит, выпукла и функция $x \mapsto v(x)$. Но конечная выпуклая функция локально липшициева. Поскольку v к тому же положительно однородна, то она удовлетворяет обычному условию Липшица. Требуемые свойства для решения w уравнения (4.2) выполняются поскольку они выполняются для функции w^+, удовлетворяющей уравнению (4.1).

Монотонность. Пусть $\Delta := w(x+h) - w(x)$, где $h \in \mathbf{R}^N_+$. Введём в рассмотрение множество индексов $A := \{i\colon\ \Delta^i < 0\}$ и свяжем с ним диагональную матрицу $\Lambda := \operatorname{diag} \mathbf{1}_A$. Неравенство $a < b$ влечёт, что $a^+ - b^+ \geq a - b$, а неравенство $a \geq b$ — неравенство $a^+ - b^+ \geq 0$. Поэтому

$$\Theta'(w^+(x+h) - w^+(x)) \geq \Theta' \Lambda \Delta$$

и

$$\Lambda\Delta = \Lambda h + \Lambda\Theta'(w^+(x+h) - w^+(x)) \geq \Lambda h + \Lambda\Theta'\Lambda\Delta.$$

Перегруппировывая члены и суммируя компоненты, получаем, что

$$\mathbf{1}'\Lambda(I - \Theta')\Lambda\Delta \geq \mathbf{1}\Lambda h \geq 0.$$

Если $A \neq \emptyset$, приходим к противоречию, поскольку левая часть равна

$$\sum_{j \in A} \Delta^j - \sum_{j \in A} \Big(\sum_{i \in A} \theta^{ij}\Big)\Delta^j < 0 \tag{4.3}$$

в силу гипотезы **H**: все суммы в скобках не превосходят единицы и по крайней мере одна из них должна быть строго меньше. Стало быть, $A = \emptyset$, т.е. w сохраняет порядок.

Докажем монотонность функции v. Пусть $h \in \mathbf{R}^N_+$, $\Delta := v(x+h) - v(x)$, $A := \{i:\ \Delta^i < 0\}$,

$$B_1 := \{i\colon\ x^i + (\Theta' v(x))^i > 0\},$$
$$B_2 := \{i\colon\ x^i + (\Theta' v(x))^i < 0\},$$
$$B_3 := \{i\colon\ x^i + (\Theta' v(x))^i = 0\}.$$

Определим диагональные матрицы $\Lambda := \operatorname{diag} \mathbf{1}_A$ и $\Lambda_k = \operatorname{diag} \mathbf{1}_{B_k}$, $k = 1, 2, 3$.

Заметим, что $v^i(x+h) \geq v^i(x) = 0$, если $i \in B_2$. Более того, когда $|h|$ достаточно мало,

$$\Delta^i = v^i(x+h) = (x^i + h^i + (\Theta' v(x+h))^i)^+ = 0$$

Если $i \in B_3$, то $\Delta^i = v^i(x+h) \geq 0$. Если $i \in B_1$, то $x^i + h + (\Theta' v(x+h))^i > 0$, когда $|h|$ достаточно мало и, следовательно,

$$\Lambda_1\Delta = \Lambda_1(h + \Theta'\Lambda_1\Delta + \Theta'\Lambda_3\Delta) \geq \Lambda_1(h + \Theta'\Lambda_1\Delta).$$

Поскольку $A \subseteq B_1$, получаем, что $\Lambda\Delta \geq \Lambda h + \Lambda\Theta'\Lambda\Delta$ и, как и выше, $A = \emptyset$. $\square$

Рассмотрим следующую систему векторных уравнений с множеством решений $\mathit{\Gamma}_1 \subseteq [0,l] \times \mathbf{R}^N_+$:

$$p = (e + \mathit{\Pi}' p + \mathit{\Theta}' V)^+ \wedge l, \tag{4.4}$$

$$V = (e + \mathit{\Pi}' p - p + \mathit{\Theta}' V)^+. \tag{4.5}$$

Компонентами $(p, V) \in \mathit{\Gamma}_1$ будут, соответственно, *клиринговым вектором* и *собственным капиталом*.

Согласно лемме 4.3 при каждом p уравнение (4.5) имеет единственное решение, именно, $V(p) := v(e + \mathit{\Pi}' p - p)$ и функция $p \mapsto V(p)$ является липшициевой.

Стало быть, уравнение

$$p = (e + \mathit{\Pi}' p + \mathit{\Theta}' V(p))^+ \wedge l \tag{4.6}$$

имеет единственное решение в силу теоремы Брауэра, утверждающей, что непрерывное отображение (в данном случае определённое правой частью (4.6)) выпуклого компактного множества (именно, $[0,l]$) в себя обладает неподвижной точкой. Итак,

$$\mathit{\Gamma}_1 = \{(p, V(p)) \colon \ p \text{ решение } (4.6)\} \neq \emptyset.$$

Рассмотрим также следующие системы

$$p = (e + \mathit{\Pi}' p + \mathit{\Theta}' U)^+ \wedge l, \tag{4.7}$$

$$U = (e + \mathit{\Pi}' p - l + \mathit{\Theta}' U)^+ \tag{4.8}$$

с множеством решений $\mathit{\Gamma}_2 \subseteq [0,l] \times \mathbf{R}^N_+$ и

$$p = (e + \mathit{\Pi}' p + \mathit{\Theta}' W^+)^+ \wedge l, \tag{4.9}$$

$$W = e + \mathit{\Pi}' p - l + \mathit{\Theta}' W^+ \tag{4.10}$$

с множеством решений $\mathit{\Gamma}_3 \subseteq [0,l] \times \mathbf{R}^N$.

Введем в рассмотрение уравнение

$$p = (e + \mathit{\Pi}' p + \mathit{\Theta}' U(p))^+ \wedge l. \tag{4.11}$$

Пользуясь леммой 4.3, мы можем доказать, что

$$\mathit{\Gamma}_2 = \{(p, U(p)) \colon \ p \text{ решение } (4.11)\} \neq \emptyset,$$

где $U(p) := v(e + \mathit{\Pi}' p - l)$. Поскольку эта функция монотонна, мы можем применить к уравнению (4.11) теорему Кнастера–Тарского, утверждающую, что существуют минимальное $\underline{p}$ и максимальное $\bar{p}$ решения этого уравнения. Монотонность функции $p \mapsto U(p)$ позволяет заключить, что $\mathit{\Gamma}_2$ имеет минимальный и максимальный элементы, именно, $(\underline{p}, U(\underline{p}))$ и $(\bar{p}, U(\bar{p}))$.

Аналогичным образом, вводя в рассмотрение уравнение

$$p = (e + \mathit{\Pi}' p + \mathit{\Theta}' W^+(p))^+ \wedge l \tag{4.12}$$

и определяя функцию $W(p) = w(e + \mathit{\Pi}' p - l)$, мы показываем, что множество

$$\mathit{\Gamma}_3 = \{(p, W(p)) \colon \ p \text{ решение } (4.12)\}$$

содержит минимальный и максимальный элементы $(\underline{p}, W(\underline{p}))$ и $(\bar{p}, W(\bar{p}))$.

Остаётся показать, что $\mathit{\Gamma}_1$ также содержит минимальный и максимальный элементы и установить соотношения между всеми этими множествами.

Введём в рассмотрение функцию $\varphi : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N_+$ с $\varphi(x, y) := (x, y^+)$.

Лемма 4.4 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \varphi(\Gamma_3)$.

Доказательство. ($\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$) Пусть $(p, V(p)) \in \Gamma_1$. Если $V^i(p) > 0$, то

$$(e + \Pi' p - p + \Theta' V(p))^i > 0.$$

Переписав последнее неравенство в виде $p^i < (e + \Pi' p + \Theta' V(p))^i$, мы получаем в силу (4.6), что $p^i = l^i$. Следовательно, для такого i

$$V^i(p) = ((e + \Pi' p - l + \Theta' V(p))^i)^+.$$

Если $V^i(p) = 0$, то приведённое выше равенство следует тривиально в силу (4.6). Таким образом, $V(p)$ есть решение уравнения (4.8) для неизвестного U. Следовательно, ввиду единственности решения $V(p) = U(p)$ и $(p, V(p)) \in \Gamma_2$.

($\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$) Пусть $(p, U(p)) \in \Gamma_2$. Если $0 \leq p^i < l^i$, то в соответствии с уравнением (4.11), $p^i = ((e + \Pi' p + \Theta' U(p))^i)^+$ и это даёт нам, в силу (4.8), что $U^i(p) = 0$ и

$$U^i(p) = ((e + \Pi' p - p + \Theta' U(p))^i)^+.$$

Если $p^i = l^i$, то это равенство следует непосредственно из определения $U(p)$. Следовательно, $U(p)$ есть решение уравнения (4.5) и, значит, совпадает с $V(p)$. Но это означает, что $(p, U(p)) \in \Gamma_2$.

($\varphi(\Gamma_3) \subseteq \Gamma_2$) Пусть $(p, W(p)) \in \Gamma_3$. По определению $W(p)$ удовлетворяет уравнению (4.10). Взяв положительную часть от обеих частей этого уравнения, получаем, что $W^+(p)$ удовлетворяет уравнению (4.8). Значит, $(p, W^+(p)) \in \Gamma_2$.

($\Gamma_2 \subseteq \varphi(\Gamma_3)$) Пусть $(p, U(p)) \in \Gamma_2$. Заметим, что

$$W(p) := e + \Pi' p - l + \Theta' U(p) \leq (e + \Pi' p - l + \Theta' U(p))^+ = U(p)$$

и $W^i(p) = U^i(p)$, если $W^i(p) \geq 0$. Следовательно, $W^+(p) = U(p)$. Отсюда следует, что $W(p)$ Отсюда следует, что (4.10) и $(p, W(p)) \in \Gamma_3$. □

4.2 Единственность

Ниже мы будем использовать следующие обозначения: $\underline{V} := V(\underline{p})$, $\bar{V} := V(\bar{p})$,

$$\Delta_p := \bar{p} - \underline{p} \geq 0, \qquad \Delta_V := \bar{V} - \underline{V} \geq 0,$$

$A_p := \{i\colon\ \Delta_p > 0\}$, $A_V := \{i\colon\ \Delta_V > 0\}$. Определим диагональные матрицы

$$\Lambda_p := \operatorname{diag} \mathbf{1}_{A_p}, \qquad \Lambda_V := \operatorname{diag} \mathbf{1}_{A_V}, \qquad \Lambda := \operatorname{diag} \mathbf{1}_{A_p \cup A_V}.$$

Лемма 4.5 *Имеют место следующие тождества:*

$$\Lambda(I - \Theta')\Lambda_V = 0, \qquad \Lambda(\Pi' - I)\Lambda_p = 0. \tag{4.13}$$

Доказательство. Заметим, что $\underline{V} \geq e + \Pi\underline{p} - \underline{p} + \Theta'\underline{V}$ и для каждого $i \in A_p \cup A_V$ необходимо $\bar{p}^i > 0$ и $\bar{V}^i = e^i + (\Pi'\bar{p})^i - \bar{p}^i + (\Theta'\bar{V})^i$. Следовательно,

$$\Lambda\Delta_V \leq \Lambda(\Pi' - I)\Delta_p + \Lambda\Theta'\Delta_V.$$

Принимая во внимание, что $\Delta_V = \Lambda\Delta_V$ и $\Delta_p = \Lambda\Delta_p$, получаем отсюда неравенство

$$\mathbf{1}'\Lambda(I - \Theta')\Lambda\Delta_V \leq \mathbf{1}'\Lambda(\Pi' - I)\Lambda\Delta_p.$$

Анализируя детальные выражения (аналогичные (4.3)), заключаем, что левая часть неравенства не превосходит нуля, в то время как правая положительна. Стало быть,

$$\mathbf{1}'\Lambda(I - \Theta')\Lambda\Delta_V = 0, \qquad \mathbf{1}'\Lambda(\Pi' - I)\Lambda\Delta_p = 0. \tag{4.14}$$

Поскольку $\Delta_V^i > 0$ на A_V и $\Delta_p^i > 0$ на A_p, эти равенства эквивалентны (4.13). □

Теорема 4.6 *Предположим, что для любого подмножества индексов $A \neq \emptyset$ существует $j \in A$ такое, что*

$$\sum_{i\in A} \theta^{ij} < 1, \qquad \sum_{i\in A} \pi^{ij} < 1.$$

Тогда $(\underline{p}, V(\underline{p})) = (\bar{p}, V(\bar{p}))$.

Доказательство. Тождества (4.14) (эквивалентные (4.13)) могут быть записаны в виде

$$\sum_{j\in A_V} \Delta_V^j - \sum_{j\in A_V} \Big(\sum_{i\in A_V\cup A_p} \theta^{ij}\Big)\Delta_V^j = 0,$$
$$\sum_{j\in A_p} \Delta_p^j - \sum_{j\in A_p} \Big(\sum_{i\in A_V\cup A_p} \pi^{ij}\Big)\Delta_p^j = 0.$$

Пользуясь сделанным предположением с $A = A_p \cup A_V$, получаем результат. □

Теорема 4.7 *Предположим, что для любого подмножества индексов A такого, что для всех $i \in A$*

$$\sum_{j\in A} \theta^{ij} = 1 \quad or \quad \sum_{j\in A} \pi^{ij} = 1$$

имеет место неравенство

$$\sum_{i\in A} e^i > \sum_{i\in A} \Big(1 - \sum_{j\in A} \pi^{ij}\Big) l^i.$$

Тогда клиринговый вектор единственен. В частности, для модели Айзенберга–Ноэ, где $\Theta = 0$, единственность имеет место, если для любого подмножества индексов A такого, что $\sum_{j\in A} \pi^{ij} = 1$ для всех $i \in A$, имеет место неравенство $\sum_{i\in A} e^i > 0$.

Доказательство. Мы начнём с равенства

$$\varLambda\bar V=\varLambda(e+(\varPi'-I)\bar p+\varTheta'\bar V).$$

Перегруппировывая члены и умножая слева на $\mathbf{1}'$, получаем тождество

$$\mathbf{1}'\varLambda(I-\varTheta')\varLambda\bar V+\mathbf{1}'\varLambda(I-\varPi')\varLambda\bar p=\mathbf{1}'\varLambda e+\mathbf{1}'\varLambda\varPi'(I-\varLambda)\bar p+\mathbf{1}'\varLambda\varTheta'(I-\varLambda)\bar V.$$

Заметим, что $\bar V^i=0$ for $i\in A_p\setminus A_V$. Следовательно, $(\varLambda-\varLambda_V)\bar V=0$. Этот факт в сочетании с (4.13) позволяет заключить, что первый член в левой части тождества равен нулю.

Если $i\in A_V\setminus A_p$, то есть $\bar p^i=\underline{p}^i$ и $\bar V^i>\underline{V}^i\ge 0$, то в силу определений $\bar V^i=e^i+(\varPi'\bar p)^i-\bar p^i+(\varTheta'V(\bar p))^i>0$ и, значит, ввиду (4.6) $\bar p^i=l^i$. Стало быть,

$$(\varLambda-\varLambda_p)\bar p=(\varLambda-\varLambda_p)l. \tag{4.15}$$

Пользуясь вторым соотношением в (4.13) получаем, что второй член в левой части тождества равен $\mathbf{1}'\varLambda(I-\varPi')\varLambda l$. Следовательно,

$$\mathbf{1}'\varLambda(I-\varPi')\varLambda l=\mathbf{1}'\varLambda e+\mathbf{1}'\varPi'(I-\varLambda)\bar p+\mathbf{1}'\varTheta'(I-\varLambda)\bar V\ge\mathbf{1}'\varLambda e.$$

Таким образом,

$$\sum_{i\in A_p\cup A_V}\Big(1-\sum_{j\in A_p\cup A_V}\pi^{ij}\Big)l^i\ge\sum_{i\in A_p\cup A_V}e^i.$$

Пользуясь сделанным предположением при $A=A_p\cup A_V$, получаем результат. □

Замечание. В ранней работе Судзуки [15] эта модель была проанализирована с помощью другого подхода. В наших обозначениях уравнения (2), (3) из [15] после взятия положительной части в (2) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}p&=(e+\varPi'p+\varTheta'V)^+\wedge l=:g_1(p,V),\\ V&=(e+\varPi'p-l+\varTheta'V)^+=:g_2(p,V),\end{aligned}$$

где второе уравнение есть уравнение для W^+. Если $\lambda:=|\varPi'|_1\vee|\varTheta'|_1<1$, то $(p,V)\mapsto g(p,V)$ есть сжимающее отображение в $(\mathbf{R}^{2N}_+,|.|_1)$. В самом деле, элементарное неравенство

$$|a^+\wedge c-b^+\wedge c|+|(a-c)^+-(b-c)^+|\le|a-b|,\qquad a,b\in\mathbf{R},\ c\in\mathbf{R}_+,$$

даёт, что

$$\begin{aligned}|g(p,V)-g(\tilde p,V)|_1&\le|\varPi'(p-\tilde p)|_1+|\varTheta'(V-\tilde V)|_1\le|\varPi'|_1|p-\tilde p|_1+|\varTheta'|_1|V-\tilde V|_1\\ &\le\lambda(|p-\tilde p|_1+|V-\tilde V|_1).\end{aligned}$$

В силу полученой оценки существование и единственность равновесия очевидны.

5 Модель Эльсингера: финансовые обязательства разного старшинства

В этом параграфе мы рассмотрим вариант модели Эльсингера, в которой финансовые обязательства могут иметь приоритет друг перед другом. В этой модели система из N банков описывается вектором ликвидных резервов $e \geq 0$ и матрицами $L_1 = (l_1^{ij})$, ..., $L_M = (l_M^{ij})$, представляющими иерархию приоритетности долгов с убывающим старшинством. Иными словами, l_1^{ij} есть величина финансового обязательства банка i перед банком j, имеющее высший приоритет, l_2^{ij} - величина обязательства, следующего по приоритетности и т.д. $\sum_j l_S^{ij}$ есть сумма обязательств банка i, имеющих приоритет S.

Матрица Π_S относительных обязательств приоритета S оставлена из элементов

$$\pi_S^{ij} = \frac{l_S^{ij}}{l_S^i} = \frac{l_S^{ij}}{\sum_j l_S^{ij}}$$

(соглашение: $0/0 := 1$).

Клиринговая процедура требует полного возвращения кредитов, начиная со старшего приоритета, причём для каждого уровня старшинства финансовых обязательств выплата долгов осуществляется согласно их доле в соответствующей категории приоритетности. Для банка i мы обозначаем через p_S^i величину возвращаемых долгов уровня приоритетности S. Таким образом, клиринг описывается множеством векторов p_S, $S = 1, \ldots, M$, которые можно рассматривать как один “длинный" вектор из $(\mathbf{R}^N)^M$, удовлетворяющий системе уравнений

$$p_1^i = \Big(e^i + \sum_S \sum_j \pi_S^{ji} p_S^j\Big) \wedge l_1^i,$$

$$p_S^i = \Big(e^i + \sum_S \sum_j \pi_S^{ji} p_S^j - \sum_{r<S} l_r^i\Big)^+ \wedge l_S^i, \qquad 1 < S \leq M.$$

В векторной форме эти уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$p_S = \Big(e + \sum_S \Pi_S' p_S - \sum_{r<S} l_r\Big)^+ \wedge l_S, \qquad S = 1, ..., M. \tag{5.1}$$

Ясно, что для частичного порядка в $(\mathbf{R}^N)^M$, индуцированного конусом $(\mathbf{R}_+^N)^M$, функция

$$(p_1, ..., p_M) \mapsto \left(\Big(e + \sum_S \Pi_S' p_S^*\Big)^+ \wedge l_1, ..., \Big(e + \sum_S \Pi_S' p_S^* - \sum_{r<M} l_r\Big)^+ \wedge l_M\right)$$

является отображением порядкового интервала $[0, l_1] \times ... \times [0, l_M] \subset (\mathbf{R}^N)^M$ в себя. По теореме Кнастера–Тарского множество неподвижных точек этого отображения, т.е. решений системы уравнений (5.1), непусто и имеет минимальный и максимальный элементы.

В случае финансовых обязательств различных приоритетов после клиринга вектором $p \in (\mathbf{R}^N)^M$, вектор собственных средств $c \in \mathbf{R}^N$ имеет вид:

$$c = \Big(e + \sum_S \Pi_S' p_S - \sum_S l_S\Big)^+.$$

Лемма 5.1 *Вектор собственных средств не зависит от клирингового вектора.*

Доказательство. Заметим, что

$$\Big(e + \sum_S \Pi'_S p_S\Big) \wedge \sum_S l_S = \sum_S p_S.$$

Следовательно,

$$\Big(e + \sum_S \Pi'_S p_S - \sum_S l_S\Big)^+ = e + \sum_S \Pi'_S p_S - \sum_S p_S.$$

С этим тождеством рассуждения, использованые для случая $M = 1$ остаются в силе. □

В работе авторов [6] была сделана попытка использовать язык теории графов в стиле работы Айзенберга–Ноэ введением на множестве $\mathcal{N}$ структуры направленого графа с помощью семейства матриц Π_S, $S = 1, \ldots, M$.

Для данного клирингового вектора p определим *индекс дефолта* d^i узла i как наименьшее r такое, что

$$\bar{p}^i_r = e^i + \sum_S \sum_j \pi^{ji}_S \bar{p}^j_S - \sum_{r'<r} l^i_{r'}.$$

Иными словами, d^i is the lowest seniority for which the bank equity after clearing is equal to zero. Определим матрицу с $\Delta = \Delta(p)$ с $\Delta^{ij} = 1$, если $\pi^{ij}_{d(i)} > 0$ и $\Delta^{ij} = 0$ в противном случае. Мы используем обозначение $i \rightsquigarrow j$, если $\Delta^{ij} = 1$ и обозначаем $O(i)$ Δ-орбиту i, т.е. множество всех тех $j \neq i$, для которых найдётся путь $i \rightsquigarrow i_1 \rightsquigarrow i_2 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow j$.

Аргументы, подобные использованным в доказательстве теоремы 2.3, приводят к следующему результату.

Теорема 5.2 *Предположим, что клирингового вектора $\bar{p}$ любая Δ-орбита $O(i)$ такова, что $\mathbf{1}'_{O(i)}e > 0$. Тогда клиринговый вектор единственен.*

6 Модель Фишера: клиринг с деривативами.

В статье [9] Фишер обобщил модель Эльсингера–Судзуки на систему, в которой банки помимо прямых финансовых обязательств могут иметь обязательства в терминах деривативов, причём с различным приоритетом.

Математически, это означает, что матрицы L_S могут зависеть от клиринговых векторов. Уравнения клиринга для ситуации с кросс-холдингами могут быть записаны в следующем виде:

$$p_S = \Big(e + \Theta' V + \sum_{r\le M} \Pi'_r p_r - \sum_{r<S} l_r(p)\Big)^+ \wedge l_S(p), \qquad S = 1, ..., M, \tag{6.1}$$

$$V = \Big(e + \Theta' V + \sum_{r\le M} \Pi'_r p_r - \sum_S p_S\Big)^+. \tag{6.2}$$

Экономически, модель Фишера остаточно сильно отличается от рассмотренных нами ранее, поскольку в ней матрицы Π_S более не связаны с $L_S(p)$ и являются входными характеристиками модели.

Теорема 6.1 *Предположим, что функции $p \mapsto L_S(p)$ ограничены и непрерывны, $|\Theta| < 1$. Тогда система (6.1), (6.2) имеет решение.*

Доказательство. В силу леммы 4.3 уравнение (6.2) имеет решение $V(p)$ для любого p и и это решение непрерывно по p. Подставляя $V(p)$ в (6.1), получаем в правой части непрерывную функцию, которая отображает в себя компактное выпуклое множество $[0, l_1^*] \times \cdots \times [0, l_M^*]$, где $l_S^* = \sup_p l_S(p)$. Применение теоремы Брауэра даёт требуемое утверждение. □

В частности, приведённая выше теорема утверждает существование клирингового вектора в модели с кредитными свопами (credit default swaps, CDS), где L_1 – матрица прямых финансовых обязательств имеющих высший приоритет и

$$l_S^{ij} := \lambda_S^{ij}(l_S - p_S)^+, \qquad S \geq 2,$$

где λ_S^{ij} – положительные константы.

Лемма 6.2 *Система (6.1), (6.2) эквивалентна системе*

$$p_S = \Big(e + \Theta' V + \sum_{r \leq M} \Pi_r' p_r - \sum_{r<S} l_r(p)\Big)^+ \wedge l_S(p), \qquad S = 1, ..., M. \tag{6.3}$$

$$V = \Big(e + \Theta' V + \sum_{r \leq M} \Pi_r' p_r - \sum_{S} l_S(p)\Big)^+. \tag{6.4}$$

Доказательство. Если мы фиксируем V и возьмём p, которое удовлетворяет соотношениям (6.1), то правые части (6.2) и (6.4) совпадут. □

Статья [9] содержит результаты о существовании и единственности решения уравнения (6.3), (6.4) без предположения ограниченности функций l_S, но при более сильном условии на коэффициенты, именно, на матрицы Π_S.

Теорема 6.3 *Предположим, что $e \geq 0$, функции $p \mapsto L_S(p)$ непрерывны и нормы $|\Theta|_\infty < 1$, $|\Pi_S|_\infty < 1$ для всех S. Тогда система (6.3), (6.4) имеет решение.*

Доказательство. Положим $\Pi_{M+1} := \Theta$, $p_{M+1} := V$, и $l_{M+1} := \infty = (\infty, \dots, \infty)$. Не вводя новых обозначений, будем использовать символ p для $N(M+1)$-вектора $(p_1, ..., p_M, p_{M+1})$. Перепишем систему (6.4) в более компактном виде $p = \Phi(p)$, где

$$\Phi_S(p) := \Big(e + \sum_{r \leq M+1} \Pi_r' p_r - \sum_{r<S} l_r(p)\Big)^+ \wedge l_S(p), \qquad S = 1, ..., M+1.$$

Пусть $y \in \mathbf{R}$, $a_1, \dots, a_M \in \mathbf{R}_+$. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{S=1}^{M} \Big(y - \sum_{r<S} a_r\Big)^+ \wedge a_S + \Big(y - \sum_{r \leq M} a_r\Big)^+ = y, \tag{6.5}$$

легко проверяемое по индукции, основанной на том, что $w^+ \wedge a = w^+ - (w-a)^+$, когда $w \in \mathbf{R}$ и $a \in \mathbf{R}_+$.

Используя это тождество, нетрудно убедиться, что для любого $p \in \mathbf{R}_+^{N(M+1)}$

$$\sum_{S \leq M+1} \Phi_S(p) = e + \sum_{S \leq M+1} \Pi_S' p_S$$

и

$$\sum_{S\le M+1}|\Phi_S(p)|_1=|e|_1+\sum_{S\le M+1}|\Pi'_Sp_S|_1\le|e|_1+\theta\sum_{S\le M+1}|p_S|_1,$$

где $\theta:=\max_{S\le M+1}|\Pi'_S|_1$. В частности, если

$$\sum_{r\le M+1}|p_r|_1\le\frac{1}{1-\theta}|e|_1, \tag{6.6}$$

то справедливо и неравенство

$$\sum_{S\le M+1}|\Phi_S(p)|_1\le\frac{1}{1-\theta}|e|_1.$$

Стало быть, непрерывная функция $p\mapsto\Phi(p)$ отображает компактное выпуклое множество $p\in\mathbf{R}_+^{N(M+1)}$, удовлетворяющих (6.6), в себя. По теореме Брауэра это отображение имеет неподвижную точку, т.е. уравнение $p=\Phi(p)$ имеет решение.

Заметим, что если $p=\Phi(p)$, то выполняется следующее соотношение (называемое в статье [9] *accounting equation*)

$$\sum_{S\le M+1}p_r=e+\sum_{S\le M+1}\Pi'_Sp_S$$

и, значит,

$$\sum_{S\le M+1}|p_S|_1=|e|_1+\sum_{S\le M+1}|\Pi'_Sp_S|_1\le|e|_1+\sum_{S\le M+1}|\Pi'_S|_1|p_S|_1.$$

Отсюда вытекает, что

$$(1-\theta)\sum_{S\le M+1}|p_r|_1\le\sum_{S\le M+1}(1-|\Pi'_S|_1)|p_r|_1\le|e|_1.$$

Следовательно, любое решение уравнения $p=\Phi(p)$ удовлетворяет (6.6).

Замечание. Легко видеть, что утверждение теоремы выполняется также в случае, когда матрицы Π'_S зависят от p непрерывно и $\theta:=\sup_p|\Pi'_S(p)|_1<1$ для всех $S=1,\dots,M+1$.

Результат о единственности равновесия из [9] основывается на следующем элементарном утверждении.

Лемма 6.4 *Пусть $a_r,b_r\in\mathbf{R}$ таковы, что $b_r\ge a_r\ge0$, $r\ge1$. Пусть $A_0:=0$, $B_0:=0$, $A_r:=\sum_{j\le r}a_j$, $B_r:=\sum_{j\le r}b_j$ для $r\ge1$. Если $w,z\in\mathbf{R}$ таковы, что*

$$z-w\ge B_M-A_M, \tag{6.7}$$

то

$$z-w=\sum_{r\le M}\big|(z-B_{r-1})^+\wedge b_r-(w-A_{r-1})^+\wedge a_r\big|+\big|(z-B_M)^+-(w-A_M)^+\big|.$$

Доказательство. В силу того, что $b_M-a_M\ge0$, неравенство (6.7) влечёт неравенство $z-w\ge B_{M-1}-A_{M-1}$. Как и при доказательстве (6.5), мы можем использовать индукцию, но на этот раз основанную на тождестве

$$|v^+\wedge b-u^+\wedge a|=|v^+-u^+|-|(v-b)^+-(v-a)^+|,$$

которое имеет место, когда $b\ge a\ge0$ и $v-u\ge b-a$. $\square$

Теорема 6.5 *В дополнение к гипотезам предыдущей теоремы предположим, что*

$$l_r^i(p) = \psi_r^i\Big(\sum_{r\le M+1} (\Pi'_r p_r)^i\Big)$$

где $\psi_r^i : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *возрастающие функции такие, что для любых* $u, v \in \mathbf{R}_+$, $v \ge u$, *справедливо неравенство*

$$v - u \ge \sum_{r\le M} \big(\psi_r^i(v) - \psi_r^i(u)\big), \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда система (6.3), (6.4) имеет единственное решение.

Доказательство. Проверим, что Φ является сжимающим отображением в пространстве $\mathbf{R}_+^{N(M+1)}$, снабжённом метрикой, индуцированной l^1-нормой.

Пусть $p, \tilde p \in \mathbf{R}_+^{N(M+1)}$. Положим

$$x^i := \sum_{r\le M+1} (\Pi'_r p_r)^i, \qquad y^i := e^i + x^i, \qquad \Sigma_r^i := \sum_{j\le r} \psi_r^i(x^i),$$

и аналогично определим $\tilde x^i$, $\tilde y^i$, $\tilde\Sigma_r^i$; положим также $\psi_{M+1}^i(x^i) := \psi_{M+1}^i(x^i) = \infty$. В таких обозначениях

$$|\Phi(p) - \Phi(\tilde p)|_1 = \sum_{i\le N}\sum_{r\le M+1} \Big|(y^i - \Sigma_{r-1}^i)^+ \wedge \psi_r^i(x^i) - (\tilde y^i - \tilde\Sigma_{r-1}^i)^+ \wedge \psi_r^i(\tilde x^i)\Big|.$$

Гипотезы теоремы позволяют применить лемму 6.4, выбрав соответствие с её обозначениями в зависимости от знака разности $x^i - \tilde x^i$, и заключить, что внутренняя сумма равна $|y^i - \tilde y^i| = |x^i - \tilde x^i|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|\Phi(p) - \Phi(\tilde p)|_1 &= \sum_{i\le N}\Bigg|\sum_{r\le M+1} (\Pi'_r(p_r - \tilde p_r))^i\Bigg| \le \sum_{r\le M+1} |\Pi'_r(p_r - \tilde p_r)|_1 \\ &\le \sum_{r\le M+1} |\Pi'_r|_1 |p_r - \tilde p_r|_1 \le \theta |p - \tilde p|_1,\end{aligned}$$

где $\theta := \max_{S\le M+1} |\Pi'_S|_1 < 1$. □

7 Модели с неликвидными активами и влиянием на цены

7.1 Продажа в равных пропорциях

В статье [2], развивающей идеи [3], рассматривалась задача о клиринге в системе, где банки обладают также и неликвидным активом. Его продажа приводит к тому, что номинальная цена, фигурирующая в банковском балансе, заменяется рыночной ценой, которая тем меньше, чем больше неликвидного актива поступает на рынок. Более интересной является ситуация, когда банки имеют несколько неликвидных активов, рыночная цена которых может зависеть от выбранной банками стратегии. Мы опишем здесь простейшее обобщение, рассмотренное в [6], в котором предполагается, как и в модели из работы [4], что банки обязаны продавать свои неликвидные активы в равных пропорциях.

Рассмотрим модель клиринга с одним классом финансовых обязательств, в которой банк i имеет на своём балансе не только наличность e^i, но и K неликвидных активов в количестве $y^{i1}, \dots, y^{iK}$ единиц, представляемых i-ой строкой y_i матрицы $Y = (y^{im})$, $i \le N$, $m \le K$. Номинальные цены единицы неликвидных активов – строго положительные числа $Q^1, ..., Q^K$. Клиринговая процедура требует, чтобы в случае недостатка средств для покрытия финансовых обязательств, банки продавали неликвидные активы полностью или частично, понижая тем самым их рыночную цену. Если банк продаёт $u^{im} \in [0, y^{im}]$ единиц m-го актива по цене q_m, он увеличивает свой резерв наличности на величину

$$(Uq)^i = \sum_{m=1}^{K} u^{im} q^m.$$

Формирование цены моделируется функцией $F_0 : \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}^K$ предполагаемой непрерывной, монотонно убывающей (т.е. $F_0(z) \le F_0(x)$, когда $z \ge x$ в покомпонентном смысле) и такой, что $F_0(0) = Q$ и $F_0^m(Y'\mathbf{1}) > 0$ для всех $m = 1, \dots K$. В отсутствии поставок активов на рынок их цены совпадают с номинальными ценами и рыночные цены остаются строго положительными, даже если все активы поступили на рынок.

Клиринговые правила: каждый банк продаёт свои активы в соответствии с матрицей относительных обязательств и продаёт неликвидные активы в случае недостатка наличности и возвращённых кредитов. Результатом клиринга должна быть либо полная выплата долгов, либо полное исчерпание ресурсов и дефолт.

Предполагается также, что банк обязан продавать свои неликвидные активы в равных пропорциях:

$$\alpha^i(q) = \frac{\left(l^i - e^i - \sum_j \pi^{ji} p^j\right)^+}{\sum_k y^{ik} q^k} \wedge 1, \quad i \in \mathcal{N}. \tag{7.1}$$

При фиксированной рыночной цене банк не продаёт свои неликвидные активы, если его резерв наличности плюс возвращённые кредиты позволяют покрыть финансовые обязательства. В другом предельном случае, когда

$$l^i - e^i - \sum_j \pi^{ji} p^j \ge \sum_k y^{ik} q^k = (Yq)^i,$$

все активы должны быть проданы и банк оказывается в состоянии дефолта. В промежуточном случае банк продаёт долю $\alpha^i \in]0, 1[$ своего m-го актива, увеличивая таким образом сумму наличности на величину

$$\frac{l^i - e^i - \sum_j \pi^{ji} p^j}{\sum_k y^{ik} q^k} y^{im} q_m.$$

Это увеличение позволяет осуществить полную выплату долгов.

При таких правилах i-ый банк продаёт u^{im} единиц своего m-го актива, где

$$u^{im} := u^{im}(p, q) := \frac{y^{im}\left(l^i - e^i - \sum_j \pi^{ji} p^j\right)^+}{\sum_k y^{ik} q^k} \wedge y^{im}.$$

В результате этого полная поставка неликвидных активов на рынок описывается вектором $\mathbf{1}'U(p,q)$, где $U(p,q)$ – матрица, элементы которой задаются приведенной выше формулой.

Равновесный вектор $(p^*,q^*) \in [0,l]\times[F_0(1Y),Q]$ есть решение системы из $N+K$ уравнений, которая в матричной форме записывается следующим образом:

$$p = (e + U(p,q)q + \Pi' p) \wedge l, \tag{7.2}$$
$$q = F_0(U'(p,q)\mathbf{1}). \tag{7.3}$$

Нетрудно проверить, что $(e+U(p,q)q+\Pi'p)\wedge l = (e+Yq+\Pi'p)\wedge l$ и уравнение (7.2) может быть записано в виде

$$p = (e + Yq + \Pi' p) \wedge l, \tag{7.4}$$

см. [2] и [6].

Существование равновесия доказывается легко. Действительно, проверим, что

$$U'(p,q)\mathbf{1} \geq U'(\tilde{p},\tilde{q})\mathbf{1}, \qquad U(p,q)q + \Pi' p \leq U(\tilde{p},\tilde{q})\tilde{q} + \Pi'\tilde{p},$$

когда $(\tilde{p},\tilde{q}) \geq (p,q)$. Обозначая через $F(p,q)$ правую часть первого уравнения, получаем, что $(p,q) \mapsto (F(p,q), F_0(U'(p,q))\mathbf{1})$ – монотонное отображение интервала $[0,l]\times[F_0(1Y),Q]$ в себя. Согласно теореме Кнастера–Тарского множество неподвижных точек этого отображения непусто и содержит минимальный $(\underline{p}^*,\underline{q}^*)$ и максимальный $(\bar{p}^*,\bar{q}^*)$ элементы.

При фиксированном q функция $p \to F(p,q)$ – монотонна. Следовательно, по теореме Кнастера–Тарского множество множество решений уравнения (7.2) непусто и содержит, в частности, максимальный элемент $\bar{p}(q)$.

Для любого фиксированного $q \in [F_0(Y),Q]$ максимальное решение $\bar{p} = \bar{p}(q)$ уравнения (7.2) есть вектор

$$\bar{p} = \sup\{p \in [0,l]: \ p \leq (e + U(p,q)q + \Pi' p) \wedge l\}.$$

Следовательно, $q \mapsto \bar{p}(q)$ есть возрастающая (и непрерывная) функция на $[F_0(Y),Q]$. Отсюда следует, что функция

$$q \mapsto \zeta(q) := U'(\bar{p}(q),q)\mathbf{1}$$

убывает, в силу чего $q \mapsto F_0(\zeta(q))$ есть возрастающее (и непрерывное) отображение интервала $[F_0(Y),Q]$ в себя. Стало быть, оно обладает минимальной и максимальной неподвижными точками, которые мы будем обозначать q_1 и q_2.

Теорема 7.1 *Пусть функция $x \mapsto x'F_0(x)$ строго возрастает на $[F_0(Y),Q]$. Тогда существует q^* такое, что множество решений системы (7.2), (7.3) содержится в интервале с концами $(\underline{p}(q^*),q^*)$ и $(\bar{p}(q^*),q^*)$. В частности, если для каждого q решение уравнения (7.2) единственно, то решение системы также единственно.*

Доказательство этого результата и его обсуждение см. в [6].

7.2 Продажа с максимизацией целевых функционалов

В рассмотренной выше модели банки обязаны продавать свои неликвидные активы в равных пропорциях в силу чего матрица стратегий имеет вид $U = U(p,q)$. В её естественном обобщении строка $u_i = (u^{i1}, \dots, u^{iK})$, представляющую стратегию банка, образована произвольными функциями $u^{im} = u^{im}(p,q)$, определёнными на $[0,l] \times [F_0(1Y), Q]$ и принимающими значения в интервале $[0, y^{im}]$, такими, что $Uq = (l - e - \Pi' p)^+$, то есть каждый банк либо продаёт свои неликвидные активы и покрывает дефицит, либо полностью исчерпывает свои ресурсы.

При данной матрице стратегий U равновесный вектор $(p^*, q^*) \in [0,l] \times [F_0(1Y), Q]$, определяемый как решение системы (7.4), (7.3) существует в случае, когда функция $(p,q) \mapsto U(p,q)$ непрерывна (в силу теоремы Брауэра). Более интересной является теоретико-игровая постановка, в которой стратегии также являются элементами равновесия.

Для заданой матрицы стратегий U определим, при каждом $i \in \mathcal{N}$, задачу максимизации

$$\Phi^i(v, U) \to \max,$$

на множестве

$$\Gamma^i(p,q) := \{v \in \mathbf{R}^K:\ v'q = (y_i q) \wedge (l^i - e^i - (\Pi' p)^i)^+,\ v^m \in [0, y^{im}],\ m = 1, \dots, K\}.$$

Предполагается, что каждая функция Φ^i непрерывна и не зависит от строки u_i матрицы U. С точки зрения финансов наиболее интересным является случай, когда Φ^i зависит только от вектора $U'\mathbf{1} - u_i'$, иными словами, когда банк принимает решение на знании общего объёма поставок каждого актива остальными банками.

Обозначим через $G^i(p,q,U)$ множество решений этой задачи и через $V^i(p,q,U)$ — максимальное значение функционала.

Определим точечно-множественное отображение Ψ, положив

$$\Psi(p,q,U) := \{(e + Yq + \Pi' p) \wedge l\} \times \{F_0\big(U'\mathbf{1}\big)\} \times \prod_{i \le N} G^i(p,q,U).$$

Теорема 7.2 *Предположим, что при каждом U функции $v \mapsto \Phi^i(v,U)$ квазивогнуты на $[0, Y'\mathbf{1}]$. Тогда существует тройка $(p_*, q_*, U_*) \in \Psi(p_*, q_*, U_*)$.*

Доказательство. Функция $v \mapsto \Phi^i(v,U)$ непрерывна и множество $\Gamma^i(p,q) \ne \emptyset$ компактно. Стало быть, множество $G^i(p,q,U)$ непусто. Оно замкнуто и выпукло как пересечение непустых замкнутых множеств $\{v \in \Gamma^i(p,q) \colon \Phi^i(v,U) \ge a\}$, где $a < V^i(p,q,U)$. Следовательно, Ψ имеет непустые замкнутые выпуклые значения и существование равновесия (p_*, q_*, U_*) вытекает непосредственно из теоремы Какутани о неподвижной точке. Для её применения надо, чтобы график Ψ был замкнут. Очевидно, достаточно проверить, что точечно-множественные отображения G^i обладают замкнутыми графиками.

Итак, пусть $(p_n, q_n, U_n, v_n) \to (\tilde p, \tilde q, \tilde U, \tilde v)$, где $v_n \in G^i(p_n, q_n, U_n)$. Нам надо показать, что $\Phi^i(\tilde v, \tilde U) = V^i(\tilde p, \tilde q, \tilde U)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна, при достаточно больших n выполняются, при любом v с компонентами $v^m \in [0, y^{im}]$, неравенства

$$\Phi^i(v, U_n) - \varepsilon \le \Phi^i(v, \tilde U) \le \Phi^i(v, U_n) + \varepsilon. \tag{7.5}$$

В частности, при $v = v_n$

$$V^i(p_n, q_n, U_n) - \varepsilon \le \Phi^i(v_n, \tilde{U}) \le V^i(p_n, q_n, U_n) + \varepsilon. \tag{7.6}$$

Взяв в (7.5)супремум по всем v из $\Gamma^i(p, q)$ получаем, что

$$V^i(p_n, q_n, U_n) - \varepsilon \le \sup_{v \in \Gamma^i(p_n, q_n)} \Phi^i(v, \tilde{U}) \le V^i(p_n, q_n, U_n) + \varepsilon.$$

Поскольку рыночные цены q^i отграничены от нуля, множества $\Gamma^i(p_n, q_n) \to \Gamma^i(\tilde{p}, \tilde{q})$ в метрике Хаусдорфа. Отсюда следует, что при достаточно больших n

$$V^i(p_n, q_n, U_n) - 2\varepsilon \le \sup_{v \in \Gamma^i(\tilde{p}, \tilde{q})} \Phi^i(v, \tilde{U}) \le V^i(p_n, q_n, U_n) + 2\varepsilon. \tag{7.7}$$

Взяв в (7.6) и (7.7) $\liminf_n$, получаем неравенство $|\Phi^i(\tilde{v}, \tilde{U}) - V^i(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{U})| \le 3\varepsilon$, из которого вытекает требуемое свойство. $\square$

Замечание . В работе [8] в качестве целевых функционалов использовались функционалы $\Phi^i(v, U) := y_i F_0(U'\mathbf{1} - u_i' + v)$. Иными словами, предполагалось, что банк i максимизирует суммарную стоимость своих неликвидных активов в ценах рынка q после процедуры клиринга с вектором p, зная суммарное рыночное предложение каждого актива остальными банками (заметим, что функционал не зависит от u_i). По нашему, мнению, более естественным целевым функционалом мог бы быть $\Phi^i(v, U) := (y_i - v')F_0(U'\mathbf{1} - u_i' + v)$.

8 Аппендикс. Теорема Кнастера–Тарского о неподвижной точке

Пусть X – множество с частичным порядком $\ge$ и пусть A – его непустое подмножество. По определению, $\sup A$ есть элемент $\bar{x}$ такой, что $\bar{x} \ge x$ для всех $x \in A$ и если $y \ge x$ для всех $x \in A$, то $y \ge \bar{x}$. Элемент $\inf A$ определяется аналогичным образом, но относительно двойственного порядка $\le$. Частично упорядоченное множество X называется *полной структурой*, если для любого его непустого подмножества A существуют $\inf A$ и $\sup A$.

Теорема 8.1 *Пусть X – полная структура и пусть $f : X \to X$ – отображение, сохраняющее порядок, $L := \{x : \ f(x) \le x\}$, $U := \{x : \ f(x) \ge x\}$. Множество $L \cap U$ неподвижных точек отображения f непусто и содержит минимальную и максимальную неподвижные точки, которыми являются, соответственно, $\underline{x} := \inf L$ и $\bar{x} := \sup U$.*

Доказательство. Заметим, что множество $L \ne \emptyset$, поскольку содержит $\sup X$. Возьмём произвольную точку $x \in L$. Тогда $\underline{x} \le x$ и, значит, $f(\underline{x}) \le f(x) \le x$. Стало быть, $f(\underline{x}) \le \underline{x}$, так как $\underline{x} = \inf L$. Итак, $\underline{x} \in L$. Так как $f(L) \subseteq L$, то $f(\underline{x}) \in L$ и, следовательно, $\underline{x} \le f(\underline{x})$, т.е. $\underline{x} = f(\underline{x})$. Поскольку все неподвижные точки принадлежат L, точка $\underline{x}$ является наименьшей среди них. Утверждение о максимальной неподвижной точке доказывается аналогично. $\square$

Следствие 8.2 ([11]) *Пусть f_i, $i = 1, 2$, – два сохраняющих порядок отображения полной структуры $(X, \ge)$ в себя такие, что $f_2 \ge f_1$. Пусть $\underline{x}_i := \inf L_i$ и $\bar{x}_i$ их наименьшие и наибольшие неподвижные точки. Тогда $\underline{x}_2 \ge \underline{x}_1$ и $\bar{x}_2 \ge \bar{x}_1$.*

Утверждение очевидно, так как $L_1 = \{x: \ f_1(x) \le x\} \supseteq \{x: \ f_2(x) \le x\} = L_2$ и $U_1 = \{x: \ f_1(x) \ge x\} \subseteq \{x: \ f_2(x) \ge x\} = U_2$, see [11].

Приведённые выше общие результаты применяются в статье к замкнутым порядковым интервалам $[a, b]$ в $\mathbf{R}^d$ с по-компонентным порядком, т.е. порождённым конусом $\mathbf{R}^d_+$.

Настоящее исследование финансировалось грантом РНФ n° 15-11-30042. Авторы выражают благодарность Т. Судзуки за полезные обсуждения, а также благодарят за гостеприимство Лабораторий количественных финансов Высшей школы экономики и Tokyo Metropolitan University.

References

1. Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. (2013) Systemic risk and stability of financial networks. NBER Working paper Series.
2. Amini H., Filipovic D., Minca A. (2014) To fully net or not to net: adverse effects of partial multilateral netting. *Swiss Finance Institute Research Paper Series*, N. 14-63. Forthcoming in *Operations Research.*
3. Cifuentes R., Shin H.S., Ferrucci G. (2005) Liquidity risk and contagion. *Journal of the European Economic Association*, 3, 2-3, 556-566.
4. Cont R., Wagalath L. (2015) Fire sale forensics: measuring endogenous risk. *Mathematical Finance*, doi: 10.1111/mafi.12071.
5. Eisenberg L., Noe T.H. (2001) Systemic risk in financial systems. *Management Science*, 47 (2), 236–249.
6. El Bitar K., Kabanov Yu., Mokbel R. (2016) On uniqueness of clearing vectors reducing the systemic risk. *Informatics and Applications.* To appear.
7. Elsinger H. (2009) Financial networks, cross holdings, and limited liability. Working paper from Oesterreichische Nationalbank.
8. Feinstein Z. (2016) Financial contagion and asset liquidation strategies. Preprint.
9. Fischer T. (2014) No arbitrage pricing under systemic risk: accounting for cross-ownership. *Mathematical Finance*, 24 (1), 236–249.
10. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985.
11. Milgrom J., Roberts J. (1994) Comparing equilibria. *American Econ. Rev.*, 84, 441–454.
12. Rogers L.C.G., Veraart L.A.M. (2013) Failure and rescue in an interbank network. *Management Science*, 59 (4), 882–898.
13. Shiryaev A.N. *Optimal Stopping Rules.* Springer, 1978.
14. Sonin I. (2005) The optimal stopping of Markov chain and recursive solution of Poisson and Bellman equations. *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance: The Shiryaev Festschrift.* Kabanov Yu., Liptser R., Stoyanov J. (Eds.), Springer, 535–543.
15. Suzuki T. (2002) Valuing corporate debt: the effect of cross-holdings of stock and debt. *J. Operations Research Society of Japan*, 45 (2), 123–144.
16. Tarski A. (1955) A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics,* 5 (2), 285–309.