04.03.2021. ЧМ. Семинар 4. (КР1)

(1) Найти общее решение ур-я в действит. форме:

$$26y_{k-1}+8y_k+17y_{k+1}=0.$$

Решение: ищем $y_k:=\mu^k$

$$\Rightarrow 17\mu^2+8\mu+26=0.$$

$$D=64-4\cdot17\cdot26=64-1768=-1704=-4\cdot426.$$

$$\mu_{1;2}=\frac{-8\pm2i\sqrt{426}}{2\cdot17}=-\frac{4}{17}\pm\frac{i\sqrt{426}}{17}$$

$$r^2=\frac{16+426}{289}=\frac{442}{289}=\frac{26}{17}$$

$$\Rightarrow \mu_{1;2}=\sqrt{\frac{26}{17}}\left(-\frac{4\cdot\sqrt{17}}{17\cdot\sqrt{26}}\pm\frac{i\sqrt{426}\cdot\sqrt{17}}{17\cdot\sqrt{26}}\right)=\sqrt{\frac{26}{17}}\left(\frac{-4}{\sqrt{442}}\pm\frac{i\sqrt{426}}{\sqrt{442}}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi=-\frac{4}{\sqrt{442}};\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{426}}{\sqrt{442}}\quad\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=-\frac{\sqrt{426}}{4}\ \Rightarrow \varphi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{426}}{4}$$

$$\Rightarrow y_k=c_1\mu_1^k+c_2\mu_2^k=c_1\left(\sqrt{\frac{26}{17}}\right)^k(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k+c_2\cdot\left(\sqrt{\frac{26}{17}}\right)^k(\cos\varphi-i\sin\varphi)^k=$$

$$=c_1\left(\sqrt{\frac{26}{17}}\right)^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)+c_2\left(\sqrt{\frac{26}{17}}\right)^k(\cos k\varphi-i\sin k\varphi)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{26}{17}}\right)^k\left(\cos k\varphi(c_1+c_2)+\sin k\varphi\cdot i(c_1-c_2)\right)=\boxed{\left(\sqrt{\frac{26}{17}}\right)^k\left(\tilde{c}_1\cos k\varphi+\tilde{c}_2\sin k\varphi\right);\ \varphi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{426}}{4}}$$

ответ

(2) Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2}+y_k=\cos\frac{\pi k}{2};\ y_0=2;\ y_1=1.$$

Решение: однор: $y_{k+2}+y_k=0.$

ищем $y_k:=\mu^k$

$$\Rightarrow \mu^2+1=0.$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2}=\pm i$$

$$\Rightarrow y_k^0=C_1\cos\frac{\pi}{2}k+C_2\sin\frac{\pi}{2}k.$$

неоднор: $\varphi=\frac{\pi}{2}$ — корень левой части кратности 1.

$\alpha=1$ — не корень левой части

$$\Rightarrow y_k^1=\left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right)k$$

подставляем в ур-е:

$$\Big(a\underbrace{\cos\frac{\pi(k+2)}{2}}_{=-\cos\frac{\pi k}{2}}+b\underbrace{\sin\frac{\pi(k+2)}{2}}_{=-\sin\frac{\pi k}{2}}\Big)(k+2)+\left(a\cos\frac{\pi k}{2}+b\sin\frac{\pi k}{2}\right)k=\cos\frac{\pi k}{2}.$$

$\Rightarrow -2a\cos\frac{\pi k}{2} - 2b\sin\frac{\pi k}{2} = \cos\frac{\pi k}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow y_k^1 = -\frac{k}{2}\cdot\cos\frac{\pi k}{2}.$

$\Rightarrow y_k = y_k^0 + y_k^1 = c_1\cos\frac{\pi k}{2} + c_2\sin\frac{\pi k}{2} - \frac{k}{2}\cdot\cos\frac{\pi k}{2}$

теперь подберём c_1 и c_2 так, чтобы $y_0 = 2;\ y_1 = 1$:

$\begin{cases} k=0: & c_1\cdot\underset{1}{\cos 0} + \cancel{c_2\sin 0} - 0 = 2 \\ k=1: & \cancel{c_1\cos\frac{\pi}{2}} + c_2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \frac{1}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y_k = \left(2 - \frac{k}{2}\right)\cos\frac{\pi k}{2} + \sin\frac{\pi k}{2}}$ ответ.

③ найти общее решение ур-я

$y_{k+1} - 2.5y_k + y_{k-1} = e^{-k^2}$

Решение: одноp: $y_k := \mu^k$

$\Rightarrow \mu^2 - \frac{5}{2}\mu + 1 = 0.$

$2\mu^2 - 5\mu + 2 = 0.$

$D = 25 - 4\cdot 4 = 9$

$\mu_{1,2} = \frac{5\pm 3}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_k^0 = c_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2\cdot 2^k$

неодноp: $f_k = e^{-k^2}$ – оно ограничено

$\Rightarrow$ нам нужно огр. фунд. решение.

$\Rightarrow$ решаем $y_{k+1} - 2.5y_k + y_{k-1} = \delta_k^0$

$\Rightarrow \begin{cases} y_{k+1} - 2.5y_k + y_{k-1} = 0; & k \le -1 \\ y_{k+1} - 2.5y_k + y_{k-1} = 1; & k = 0 \\ y_{k+1} - 2.5y_k + y_{k-1} = 0; & k \ge 1. \end{cases}$

$\Rightarrow y_k = \begin{cases} c_1^-\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2^-\cdot 2^k; & k \le -1 \\ ?; & k = 0 \\ c_1^+\left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2^+\cdot 2^k; & k \ge 1. \end{cases}$

нам нужно огр. решение $\Rightarrow c_1^- = 0$.

Положим $c_2^- := 0$ – захотели так.

$$\Rightarrow y_k = \begin{cases} 0; & k \le 0 \\ c_1^+ \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2^+ \cdot 2^k; & k \ge 1. \end{cases}$$

Ур-е при $k=-1$: $\underbrace{y_0}_{} - 2.5\underbrace{y_{-1}}_{=0} + \underbrace{y_{-2}}_{=0} = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

Ур-е при $k=0$: $y_1 - 2.5\underbrace{y_0}_{=0} + \underbrace{y_{-1}}_{=0} = 1. \Rightarrow y_1 = 1.$

Ур-е при $k=1$: $y_2 - 2.5\underbrace{y_1}_{=1} + \underbrace{y_0}_{=0} = 0 \Rightarrow y_2 = 2.5.$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_k = \overset{=a}{c_1^+} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \overset{=b}{c_2^+} \cdot 2^k; \ k \ge 1 \\ y_1 = 1 \\ y_2 = 2.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot 2 = 1 \\ a \cdot \frac{1}{4} + b \cdot 4 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b = 2 \\ a + 16b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12b = 8 \\ a = 2 - 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a = 2 - \frac{8}{3} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_k^1 = \begin{cases} 0; & k \le 0 \\ -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3} \cdot 2^k; & k \ge 1. \end{cases}$$ – частное решение новой задачи (с δ_k^0)

$$\Rightarrow y_k = y_k^0 + y_k^1 = \begin{cases} c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 \cdot 2^k; & k \le 0 \\ \left(c_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(c_2 + \frac{2}{3}\right) 2^k; & k \ge 1. \end{cases}$$ – общее решение новой задачи (с δ_k^0)

Хотим огр. решение $\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow y_k = \begin{cases} -\frac{2}{3} 2^k; & k \le 0 \\ -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k; & k \ge 1. \end{cases}$$ – это $G_k^{(0)}$

$$\Rightarrow G_k^{(n)} = \begin{cases} -\frac{2}{3} 2^{k-n}; & k-n \le 0 \\ -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}; & k-n \ge 1. \end{cases}$$

$f_k = e^{-k^2}$

$$\Rightarrow y_k^1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_k^{(n)} f_n = \sum_{n=-\infty}^{k-1} -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \cdot e^{-n^2} + \sum_{n=k}^{+\infty} -\frac{2}{3} \cdot 2^{k-n} \cdot e^{-n^2}$$ – частное решение исх. задачи с f_k.

$$\Rightarrow \boxed{y_k = y_k^0 + y_k^1 = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 \cdot 2^k - \frac{2}{3}\left(e^{-k^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\left(e^{-(k+n)^2} + e^{-(k-n)^2}\right)\right)}$$ ← ответ.

④ Найти все решения задачи на собств. значения

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k; \; k=1\ldots N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = -y_{N-1} \qquad h = \dfrac{1}{N-0.5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=1: \; \dfrac{y_2 - 2y_1 + \overset{0}{y_0}}{h^2} = -\lambda y_1 \\ k=N-1: \; \dfrac{\overset{-y_{N-1}}{y_N} - 2y_{N-1} + y_{N-1}}{h^2} = -\lambda y_{N-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\begin{pmatrix} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{3}{h^2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Матрица симметричная
$\Rightarrow$ собств. ф-ции - ортогональны
в обычном
скал. произведении.

Решение: $y_{k+1} - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right) y_k + y_{k-1} = 0.$

$y_{k+1} - 2p\, y_k + y_{k-1} = 0.$

ищем: $y_k := \mu^k$

$D = 4p^2 - 4 = 4(p^2 - 1)$

$\mu_{1,2} = \dfrac{2p \pm 2\sqrt{p^2-1}}{2} = p \pm \sqrt{p^2-1}.$

Если $\mu_1 = \mu_2$, то $y_k = (c_1 + c_2 k)\mu^k$

- $y_0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y_k = c_2 k \cdot \mu^k$
- $y_N = -y_{N-1} \Rightarrow \cancel{c_2} \cdot N \cdot \mu^N = -\cancel{c_2}(N-1) \cdot \mu^{N-1}$

$\Rightarrow \mu = -\dfrac{N-1}{N}$ - но $\mu^2 = 1$ по т. Виета

А это μ-не удовл. условию $\mu^2 = 1 \Rightarrow$ не подх.

Если $\mu_1 \neq \mu_2$, то $y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$

- $y_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1. \Rightarrow y_k = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k)$
- $y_N = -y_{N-1} \Rightarrow c_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = -c_1(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})$

$\Rightarrow \mu_1^N - \mu_2^N = -\mu_1^{N-1} + \mu_2^{N-1}$

$\mu_1^{N-1}(\mu_1 + 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 + 1)$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{N-1} = \dfrac{\mu_2+1}{\mu_1+1} = \dfrac{\mu_2 + \mu_2 \cdot \mu_1}{\mu_1 + 1} = \mu_2.$

$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = 1. = e^{2\pi i n}$

$\Rightarrow \mu_1 = e^{\frac{2\pi i n}{2N-1}} = e^{\frac{\pi i n}{N-0.5}}$, $n = 0 \ldots 2N-1$. ~~...~~ - потом выберем нужный диапазон

$n = 1 \ldots N-1$

$\Rightarrow \mu_2 = \bar{\mu}_1 = e^{-\frac{\pi i n}{N-0.5}}$;

$\Rightarrow y_k^{(n)} = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k) = c_1\left(e^{\frac{\pi i n k}{N-0.5}} - e^{-\frac{\pi i n k}{N-0.5}}\right) = \tilde{c}_1 \cdot \sin\dfrac{\pi n k}{N-0.5}$; $n = 1 \ldots N-1$ —

т.к при $n=0$: $y_k = 0$.
а при $n \geqslant N$ - будет повтор,
т.к мы уже нашли $N-1$
незав. решение.

Теперь ищем $\lambda^{(n)}$:

$$\mu_1+\mu_2 = 2p = 2\left(1-\frac{\lambda h^2}{2}\right)$$
$$e^{\frac{\pi i n}{N-0.5}}+e^{-\frac{\pi i n}{N-0.5}} = 2\cos\frac{\pi n}{N-0.5}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\lambda h^2}{2} = \cos\frac{\pi n}{N-0.5}$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)} = \frac{2\left(1-\cos\frac{\pi n}{N-0.5}\right)}{h^2} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n}{2(N-0.5)}\ ;\ n=1\ldots N-1.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } y_k^{(n)} = \sin\frac{\pi n k}{N-0.5}\ ;\ n=1\ldots N-1 \qquad \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n}{2(N-0.5)}\ ;\ n=1\ldots N-1}$$

(6.) Найти решение

$$y_{k+1} = \frac{y_k+1}{y_k+2}\ ;\ y_0=2.$$

Решение: Замена: $y_k = \frac{u_k}{v_k}$

$$\Rightarrow \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} = \frac{\frac{u_k}{v_k}+1}{\frac{u_k}{v_k}+2} = \frac{u_k+v_k}{u_k+2v_k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{k+1} = u_k+v_k \\ v_{k+1} = u_k+2v_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{k+1}+2v_{k+1} = 3u_k+5v_k, \quad u_{k+1}+2v_{k+1} = v_{k+2}$$

$$\Rightarrow u_k = \frac{v_{k+2}-5v_k}{3}$$

$$\Rightarrow v_{k+1} = u_k+2v_k = \frac{v_{k+2}-5v_k}{3}+\frac{6v_k}{3} = \frac{v_{k+2}+v_k}{3}.$$

$$\Rightarrow v_{k+2}-3v_{k+1}+v_k = 0.$$

$$D = 9-4 = 5$$

$$\mu_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

$$\Rightarrow v_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$$

~~$\Rightarrow v_{k+2} = u_{k+1}+2v_{k+1}$~~

$\Rightarrow \cancel{u_{k+1}+v_{k+1}} = 2u_k+3v_k$, $\cancel{u_{k+1}+v_{k+1}} = \cancel{u_{k+2}}$

$\Rightarrow \cancel{v_k = \frac{u_{k+2}-2u_k}{3}}$

$\Rightarrow \cancel{u_{k+1} = u_k+\frac{u_{k+2}-2u_k}{3} = \frac{u_{k+2}+u_k}{3}}.$

$\Rightarrow \cancel{u_{k+2}-3u_{k+1}+u_k = 0}.$

$\cancel{D = 9-4 = 5}$

$\cancel{u_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt5}{2}}.$

$$\Rightarrow u_k = v_{k+1}-2v_k =$$
$$= C_1\mu_1^{k+1}+C_2\mu_2^{k+1}-2C_1\mu_1^k-2C_2\mu_2^k =$$
$$= C_1\mu_1^k(\mu_1-2)+C_2\mu_2^k(\mu_2-2)$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{u_k}{v_k} = \frac{C_1\mu_1^k(\mu_1-2)+C_2\mu_2^k(\mu_2-2)}{C_1\mu_1^k+C_2\mu_2^k} = \frac{\mu_1-2+\frac{C_2}{C_1}\cdot\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k\cdot(\mu_2-2)}{1+\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k}$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{\mu_1 - 2 + C\cdot\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k\cdot(\mu_2 - 2)}{1 + C\cdot\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k}$$

$\mu_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\mu_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{4} = \frac{14-6\sqrt{5}}{4}.$

по усл. $y_0 = 2$: $\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 + C\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 2\right)}{1+C} = 2.$

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 + 2C.$$

$$-\frac{5+\sqrt{5}}{2} = C\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C = -\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{1-5} = -\frac{(1+5-2\sqrt{5})}{4} = -\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y_k = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 + \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 2\right)}{1 + \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^k}}$$

ответ:

(5.) Вычислить сумму

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\cdot 2^k;\ k \geq 1.$$

Решение: это неодн. ур-е $S_n - S_{n-1} = n^2\cdot 2^n$.

$S_0 = 0.$

$\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1.$

$\Rightarrow S_n^0 = C_1.$

$S_n^1 = 2^n(a + bn + cn^2)$

$$\Rightarrow 2^n(a+bn+cn^2) - 2^{n-1}(a + bn - b + cn^2 - 2cn + c) = n^2\cdot 2^n$$

$\Rightarrow 2a + 2bn + 2cn^2 - a - bn + b - cn^2 + 2cn - c = 2n^2.$

$a + b - c = 0.$

$b + 2c = 0.$

$c = 2$

$\Rightarrow c = 2$

$b = -2c = -4$

$a = c - b = 2 + 4 = 6.$

$\Rightarrow S_n^1 = 2^n(6 - 4n + 2n^2)$

$\Rightarrow S_n = S_n^0 + S_n^1 = C_1 + 2^n(6 - 4n + 2n^2)$

но $S_0 = 0.$

$\Rightarrow$ при $n = 0$: $0 = C_1 + 6 \Rightarrow C_1 = -6$

$\Rightarrow \boxed{S_n = -6 + 2^n(6 - 4n + 2n^2)}$ ответ.