(25) Криволинейные координаты на пов-ти. Первая квадратичная форма пов-ти.

Опр. Простой кусок пов-ти в $\mathbb{R}^3$ – это п/мн-во в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфное 1-ому кругу $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$

Опр. Параметризация куска M – это любой гомеоморфизм $r : \Omega \to M$, где Ω – простая плоская область, M – простой кусок пов-ти.

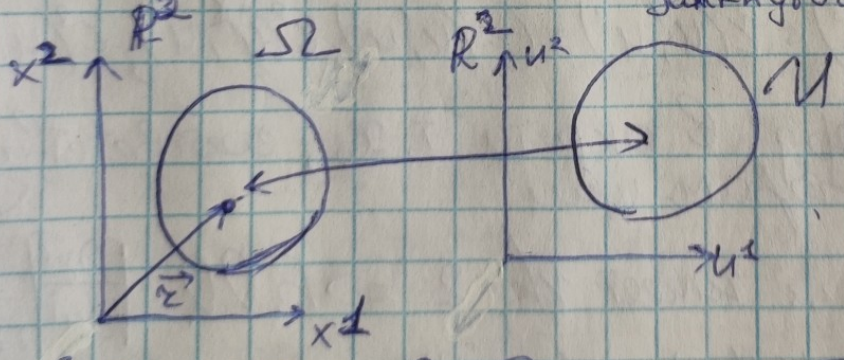
Параметризация гладкая, если r – гладкое

Опр. Парам-ция $r : \Omega \to M$ – регулярная, если

1) Ω – имеет кус-гладкую границу
2) $rk(\underbrace{dr|_{\Omega}}_{\text{матрица}}) = 2 \quad \forall \sigma \in \Omega$.

Если простой кусок пов-ти M допускает регулярную параметризацию, то M наз гладким.

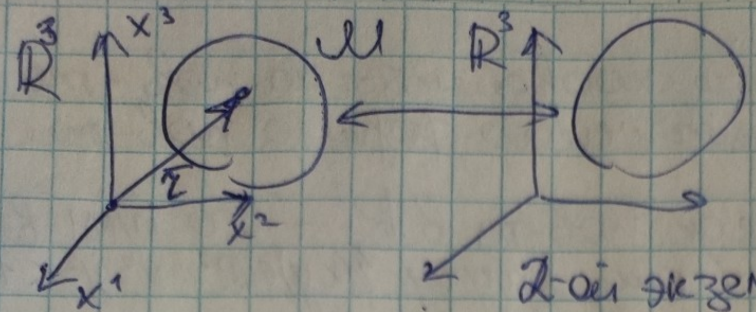
Опр. Гладкой пов-тью M в $\mathbb{R}^3$ наз. $M \subset \mathbb{R}^3$ / для $\forall$ т. $x \in \mathbb{R}^3$ $\exists \varepsilon > 0$: $M \cap \underbrace{\overline{B}_\varepsilon(x)}_{\text{замкнутый шар}} = \left[\begin{array}{l} \text{гладкий кусок пов-ти} \\ \varnothing \end{array} \right.$



Параметры в обл-ти Ω обозначаем как u^1, u^2, и используем в формулах как координаты на M

Т.к. u^1, u^2 параметризуют не всю пов-ть, а только кусок, то называем их локальными координатами ~~криволинейными~~

Обозначения: $r_{u^i} = \dfrac{\partial r}{\partial u^i}$ и $r_{u^i u^j} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$ –



В $\mathbb{R}^3$ есть евклидовы координаты (x^1, x^2, x^3)

2-ой экземпляр $\mathbb{R}^3$

Опр. Регулярной СК в $M \subset \mathbb{R}^3$ назыв. набор гладких ф-ций $u^i(x^1, x^2, x^3)$ $i = \overline{1,3}$

$X \to U$ (взаимооднозначно) и $\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$

якобиан $\neq 0$

(т.е. диффеоморфизм)

биекция и гладкие в обе стороны

Тогда $\vec{r}(u^1, u^2, u^3) = (x^1(u^1, u^2, u^3), x^2(u^1, u^2, u^3), x^3(u^1, u^2, u^3))$

радиус-вектор и u^1, u^2, u^3 – криволинейные координаты

Опр. Т. $x \in M$ назыв. внутренней, если $\exists\, r: \Omega \to N$, $N \subset M$ – некот. кусок M, $x \in N$ и $r^{-1}(x) \in \operatorname{Int} \Omega$

Теорема 1: Гладкую пов-ть в окр-ти $\forall$-ой внутренней точки можно задать ур-нием $f(x,y) = z$ где x, y, z – коорд. в $\mathbb{R}^3$, f – гладкая ф-ция

▲ $\bar{r} = (r^1, r^2, r^3) = r(u^1, u^2) = (r^1(u^1, u^2), r^2(u^1, u^2), r^3(u^1, u^2))$

u^1, u^2 – лок. коорд. в окр-ти т. x_0, соответствующие регул. парам-ции

$\Rightarrow \left(\frac{\partial r^i}{\partial u^j}\right)_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}}$ имеет $rk = 2$ $\Rightarrow$ Б.О.О. $\left|\frac{\partial r^i}{\partial u^j}\right|_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}} \neq 0$

$\Rightarrow (u^1, u^2) \to (r^1(u^1, u^2), r^2(u^1, u^2))$ – локально можно обратить

т.е. $u^1 = \psi^1(x,y)$, $u^2 = \psi^2(x,y)$ $\Rightarrow z = r^3(\psi^1(x,y), \psi^2(x,y)) = f(x,y)$ гладкая

т.е. $(x,y) \mapsto r(u^1, u^2) = r(\psi^1, \psi^2) = (x, y, r^3(\psi^1, \psi^2))$ ◀

Теорема 21. 1) Пусть $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — гладкая ф-ция / $F(p)=0$, $dF|_p \neq 0$
$\Rightarrow$ ур-ие $F=0$ — задаёт кусок пов-ти в нек. окр-ти т. p

2) $\forall$-ая пов-ть — локально задаётся таким образом

▷ 2) $z=f(x,y) \rightsquigarrow f(x,y)-z=0$, т.е. $F(x,y,z)=f(x,y)-z$
$dF=(f_x, f_y, -1) \Rightarrow dF|_p \neq 0$.

1) $dF|_p \neq 0 \Rightarrow$ Б.О.О. $\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_p \neq 0 \Rightarrow$ по Т. о неявной ф-ции

локально $F=0 \Leftrightarrow z=f(x,y)$, где f — некот. гладкая ф-ция ◁

Опр. Первой фундаментальной формой (или квадратичной формой) пов-ти $M \subset \mathbb{R}^3$ назыв. ф-ция I_x, определенная для $\forall$ т. $x \in M$ на касат. пр-ве T_xM, значение к-ой на пр-ном в-ре $v \in T_xM$ равно: $I_x(v)=(v,v)$ ← скал. произв.

Утв. 1. Пусть $v \in T_xM \Rightarrow I(v)=g_{ij}v^iv^j$, где $g_{ij}=(r_{u^i}, r_{u^j})$

▷ Пусть u^1, u^2 — лок. СК, $v=v^ir_{u^i} \Rightarrow$

$(v,v)=(v^ir_{u^i}, v^jr_{u^j})=g_{ij}v^iv^j$ ← коэфф. 1ой КвФ ◁

Обозн.: $G=(g_{ij})$ — симм. матрица, $|G|=g$.

Утв. 2: Пусть $u^1,u^2 \rightsquigarrow \tilde{u}^1, \tilde{u}^2 \Rightarrow \tilde{g}_{ij}=\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}g_{kl}$

▷ $u^1,u^2 \rightsquigarrow \tilde{u}^1,\tilde{u}^2 \Rightarrow (r_{\tilde{u}^1}\ r_{\tilde{u}^2})=(r_{u^1}\ r_{u^2})\,J_{u\tilde{u}}$

где $J_{u\tilde{u}}=J_{\tilde{u}u}^{-1}=\left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}\right)_{i,j=1,2} \Rightarrow G \rightsquigarrow \tilde{G}=J_{u\tilde{u}}^T\,G\,J_{u\tilde{u}}$
как преобразование матрицы билинейной формы ◁