МГУ

Финансовая математика, 2

Москва, 2020

1 Введение

Цель курса "Финансовая математика -1" состояла в том, чтобы подвести слушателей к пониманию технологии оценивания активов в условиях полного рынка, а также управления портфелями ценных бумаг. Исторически сложилось, что эта технология опирается на теорию случайных процессов с непрерывным временем (собственно, эта теория и возникла для моделирования цен на финансовых рынках). Поэтому значительная часть курса состояла в изложении основных идей стохастического интегрирования по винеровскому процессу и её финансовым приложениям.

К сожалению, предположение полноты рынка в реальности не выполняется и парадигма оценивания опционов через репликацию не работает. В связи с этим на первый план вышла идея, что рыночная цена производных ценных бумаг (деривативов), устанавливаемая взаимодействием продавцов и покупателей, не должна приводить к арбитражу, т.е. к безрисковому обогащению. В конце курса на примере модели с дискретным временем, конечным числом состояний природы и конечным числом периодов было установлено , что свойство безарбитражности рынка равносильно существованию эквивалентной мартингальной меры, а единственность последней - равносильна полноте рынка. Для анализа такой модели, крайне далёкой от реальности, вполне достаточно весьма элементарной математики, именно, начальных знаний выпуклого анализа в конечномерном пространстве.

Как мы увидим дальше, для модели с произвольным числом состояний природы, т.е. для произвольного вероятностного пространства, теория быстро усложняется и требует знания элементов теории отделимости выпуклых множеств в бесконечномерных функциональных пространствах. Цель первых лекций курса "Финансовая математика-2" — дать представление о современной теории арбитража и таких её понятиях, как условие отсутствия бесплатного завтрака, мартингальные дефляторы, состоятельные ценовые системы и т.д.

2 Теорема Даланга, Мортона, Виллингера (DMW)

Рассматриваемая постановка и обозначения в точности те же, что и в теореме Харрисона–Плиски, за одним исключением: мы не предполагаем что вероятностное пространство конечно. Это резко меняет используемый математический инструментарий.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$, на котором задан d-мерный согласованный процесс $S = (S_t)$, моделирующий цены рисковых активов. Мы будем предполагать, что на рынке имеется и безрисковый актив (банковский счёт с нулевой процентной ставкой).

Множество "результатов" R_T, т.е. терминальных значений самофинансирующихся портфелей с нулевым значением начального капитала состоит из с.в. вида

$$H \cdot S_T := \sum_{t=1}^{T} H_t \Delta S_t;$$

здесь "интеграл" — просто сокращённое обозначение для суммы в правой части, $\Delta S_t := S_t - S_{t-1}$, $H_t \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{F}_{t-1})$. В моделях с дискретным временем процесс $H = (H_t)$ с таким свойством измеримости называется предсказуемым.

Пусть L^0_+ — множество с.в. $\xi \geq 0$. Множество $A_T := R_T - L^0_+$ можно рассматривать как множество хеджируемых платежей, т.е. с.в. вида $H \cdot S_T - h$, где $h \geq 0$.

Рынок допускает арбитражные возможности, если существует такая стратегия H, что $H \cdot S_T \geq 0$ и $P(H \cdot S_T > 0) > 0$.

Отсутствие арбитража (NA), *безарбитражность модели*, означает, что $R_T \cap L^0_+ = \{0\}$, или, эквивалентно, $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ и именно вторая формулировка оказывается ключевой для обобщения теоремы Харрисона–Плиски на случай произвольного Ω.

Теорема 2.1 *Следующие свойства эквивалентны:*

(*a*) $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ *(свойство NA);*

(*b*) $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ *и* $A_T = \bar{A}_T$ *(замыкание в L^0);*

(*c*) $\bar{A}_T \cap L^0_+ = \{0\}$*;*

(*d*) *существует строго положительный процесс $\rho \in \mathcal{M}$ такой, что $\rho S \in \mathcal{M}$;*

(*e*) *существует* **ограниченный** *строго положительный процесс $\rho \in \mathcal{M}$ такой, что $\rho S \in \mathcal{M}$.*

Как обычно, $\mathcal{M}$ является пространством мартингалов (если потребуется, будем использовать более сложные обозначения, указывающие вероятностную меру, временной промежуток и т.д.).

Последние два свойства обычно формулируются следующим образом:

(d') *существует вероятностная мера* $\tilde{P} \sim P$ *такая, что* $S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$*;*

(e') *существует вероятностная мера* $\tilde{P} \sim P$ *с* $d\tilde{P}/dP \in L^\infty$ *такая, что* $S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$*.*

Выбранные формулировки, однако, имеют более прямые аналоги в модели с транзакционными издержками. Напомним, что их эквивалентность вытекает из следующего факта о мартингалах по отношению к вероятностной мере $\tilde{P} \sim P$ с плотностью ρ_T

$S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$ *тогда и только тогда, когда* $\rho S \in \mathcal{M}(P)$*, где* $\rho_t = E(\rho_T|\mathcal{F}_t)$*,* $t \le T$*.*

В случае конечного Ω множество A_T всегда замкнуто. Действительно, оно является арифметической суммой линейного пространства и полиэдрального (многогранного) конуса $-L^0_+$ в конечномерном линейном пространстве L^0. Поэтому это — полиэдральный конус. Таким образом, между первыми тремя первыми свойствами нет никакой разницы, тогда как последние два очевидным образом совпадают. В случае произвольного Ω ситуация принципиально другая. Хоть линейное пространство R_T всегда замкнуто (это будет показано ниже), множество A_T может не быть замкнуто даже для $T = 1$ и счетного Ω.

Пример: Пусть $\mathcal{F}_0$ — тривиальная σ-алгебре и $\mathcal{F}_1 = \sigma\{\xi\}$, $\Delta S_1 = \xi$, где ξ — строго положительной конечной случайной величиной такой, что $P(\xi < \varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Множество $A_1 = \mathbf{R}\xi - L^0_+$ не содержит ни одной строго положительной константы, но каждая константа $c > 0$ принадлежит его замыканию $\bar{A}_1$, поскольку $(n\xi) \wedge c \to c$ при $n \to \infty$.

К списку можно добавить несколько других эквивалентных условий:

(f) *существует строго положительный процесс* $\rho \in \mathcal{M}$ *такой, что* $\rho S \in \mathcal{M}_{loc}$*;*

(f') *существует вероятностная мера* $\tilde{P} \sim P$ *такая, что* $S \in \mathcal{M}_{loc}(\tilde{P})$*;*

(g) $\{\eta \Delta S_t : \ \eta \in L^0(\mathcal{F}_{t-1})\} \cap L^0_+ = \{0\}$ *для любого* $t \le T$ *(NA для одношаговых моделей).*

Если считать, что остальные эквивалентности выше уже установлены, эти добавленные свойства не вызывают затруднений. Действительно, (f') очевидным образом следует из (e'). С другой стороны, если $S \in \mathcal{M}_{loc}(\tilde{P})$, тогда $\tilde{H} \cdot S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$ с $\tilde{H}_t := 1/(1 + \tilde{E}(|\Delta S_t||\mathcal{F}_{t-1}))$. Таким образом, мы знаем, что NA выполнено для процесса $\tilde{H} \cdot S$, так что оно выполнено и для S тоже, так как оба процесса имеют одно и то же множество хеджируемых требований, то есть (f') влечет свойство из "главного" списка эквивалентных условий. Предположим теперь, что импликация $(g) \Rightarrow (a)$ не выполнена. Возьмем наименьшее $t \le T$ такое, что $A_t \cap L^0_+ \ne \{0\}$ (множество таких моментов времени непусто: оно как минимум содержит T). У нас есть стратегия $H = (H_s)_{s \le T}$ такая, что $H \cdot S_t \ge 0$ и $P(H \cdot S_t > 0) > 0$. Согласно выбору t либо множество $\Gamma' := \{H \cdot S_{t-1} < 0\}$ имеет строго положительную вероятностную меру (и (g) нарушается на $\eta := I_{\Gamma'} H_t$), либо множество $\Gamma'' := \{H \cdot S_{t-1} = 0\}$ имеет полную вероятностную меру (и (g) нарушается на $\eta := I_{\Gamma''} H_t$). Противоречие.

Замечание. Свойство NA для класса всех стратегий, следуя определению выше, эквивалентно свойству NA на более узком классе ограниченных стратегий H. Действительно, если есть возможность арбитража, то в силу условия (g) есть возможность арбитража η для некоторой одношаговой модели. Очевидно, $\eta I_{\{|\eta| \le n\}}$ для достаточно большого n будет возможностью арбитража для этой одношаговой модели. Заметим, что присутствие условия (g) в списке эквивалентных условий является ключевым в этом рассуждении.

Аналогичным образом, NA эквивалентно условию отсутствия арбитража в классе так называемых *допустимых* стратегий H, для которых процесс $H \cdot S$ ограничен снизу константой (зависящей от стратегии). Более того, если H является возможностью арбитража, порождающей процесс ценности $V = H \cdot S$, можно предъявить другую возможность арбитража $\tilde{H}$ такую, что процесс $\tilde{H} \cdot S \ge 0$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим множества $\Gamma_t := \{H \cdot S_t < 0\}$ и последний момент времени r, для которого вероятность такого множества строго положительна; $0 < r < T$, поскольку H является возможностью арбитража. Проверим, что стратегия $\tilde{H} := I_{\Gamma_r} I_{]r,T]} H$ обладает заявленным свойством. Действительно, процесс $\tilde{V} := \tilde{H} \cdot S$ является нулевым для всех $t \le r$ и остается нулевым вне множества Γ_r до момента времени T. На множестве Γ_r приращения $\Delta \tilde{V}_t = \Delta V_t$ для $t \ge r+1$, и поэтому траектории $\tilde{V}$ являются траекториями V, сдвинутыми на величину $-V_r > 0$.

Прежде чем приступить к доказательству Теоремы 2.1, приведем несколько вспомогательных результатов, которые пригодятся для установления критериев отсутствия арбитража в моделях с транзакционными издержками.

2.1 Подпоследовательности измеримых с.в. Теорема Крепса–Яна.

Лемма 2.2 *Пусть* $\eta^n \in L^0(\mathbf{R}^d)$ *таковы, что* $\underline{\eta} := \liminf |\eta^n| < \infty$. *Тогда существуют* $\tilde{\eta}^k \in L^0(\mathbf{R}^d)$ *такие, что для всех* ω *последовательность, состоящая из* $\tilde{\eta}^k(\omega)$, *является сходящейся подпоследовательностью последовательности* $\eta^n(\omega)$.

Доказательство. Пусть $\tau_k := \inf\{n > \tau_{k-1} : \ ||\eta^n| - \underline{\eta}| \le k^{-1}\}$, где $\tau_0 := 0$. Тогда $\tilde{\eta}_0^k := \eta^{\tau_k}$ принадлежит $L^0(\mathbf{R}^d)$ и $\sup_k |\tilde{\eta}_0^k| < \infty$. Продолжая работать с $\tilde{\eta}_0^n$, мы строим, применяя процедуру выше к первой компоненте и ее $\liminf$, последовательность $\tilde{\eta}_1^k$ со сходящейся первой компонентой такую, что для всех ω последовательность $\tilde{\eta}_1^k(\omega)$ является подпоследовательностью последовательности $\tilde{\eta}_0^n(\omega)$. Переходя на каждом шаге к новой подпоследовательности с.в. и к следующей компоненте, мы получаем последовательность с желаемыми свойствами. □

Замечание. Утверждение может быть переформулировано следующим образом: существует (строго) возрастающая последовательность целочисленных случайных величин σ_k таких, что η^{σ_k} сходится почти наверное.

Лемма 2.3 *Пусть* $\mathcal{G} = \{\Gamma_\alpha\}$ *— семейство измеримых множество такое, что любое измеримое множество* $\Gamma \neq \emptyset$ *имеет* **ненулевое** *пересечение с некоторым элементом* $\mathcal{G}$. *Тогда существует не более чем счетное подсемейство множеств* $\{\Gamma_{\alpha_i}\}$, *объединение которых имеет полную меру.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{G}$ замкнуто относительно счетных объединений. Тогда $\sup_\alpha P(\Gamma_\alpha)$ достигается на некотором $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{G}$. Подсемейство, состоящее из единственного $\tilde{\Gamma}$, является тем, которое нужно. Действительно, $P(\tilde{\Gamma}) = 1$: иначе мы могли бы расширить супремум, добавляя множество из $\mathcal{G}$, имеющее ненулевое пересечение с $\tilde{\Gamma}^c$. Утверждение в общем случае следует из этого после рассмотрения семейства, порождаемое счетными объединениями множеств из $\mathcal{G}$. □

Следующий результат обычно называется теоремой Крепса–Яна. Она верна для произвольного $p \in [1, \infty]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, но случаи $p = 1$ и $p = \infty$ являются наиболее значимыми. Вспомним, что для $p \neq \infty$ замыкание по норме выпуклого множества в L^p совпадает с замыканием в $\sigma\{L^p, L^q\}$.

Теорема 2.4 *Пусть $\mathcal{C}$ — выпуклый конус в L^p, замкнутый в $\sigma\{L^p, L^q\}$, содержащий $-L^p_+$ и такой, что $\mathcal{C} \cap L^p_+ = \{0\}$. Тогда существует $\tilde{P} \sim P$ с $d\tilde{P}/dP \in L^q$ такая, что $\tilde{E}\xi \le 0$ для всех $\xi \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. По теореме Хана–Банаха любой ненулевой $x \in L^p_+ := L^p(\mathbf{R}_+, \mathcal{F})$ может быть отделен от $\mathcal{C}$: существует $z_x \in L^q$ такая, что $Ez_x x > 0$ и $Ez_x\xi \le 0$ для всех $\xi \in \mathcal{C}$. Поскольку $\mathcal{C} \supseteq -L^p_+$, последнее свойство влечет, что $z_x \ge 0$; можно положить, что $||z_x||_q = 1$. Рассмотрим семейство $\mathcal{G} := \{z_x > 0\}$. Поскольку любое непустое множество Γ имеет непустое пересечение с множеством $\{z_x > 0\}$, $x = I_\Gamma$, семейство $\mathcal{G}$ содержит счетное подсемейство множеств (скажем, соответствующее последовательности $\{x_i\}$), объединение которого имеет полную меру. Таким образом, $z := \sum 2^{-i} z_{x_i} > 0$, и можно взять $\tilde{P} := zP$.

2.2 Доказательство теоремы DMW

Некоторые следствия, а именно: $(b) \Rightarrow (a)$, $(b) \Rightarrow (c)$, and $(e) \Rightarrow (d)$ тривиальны. Следствие $(d) \Rightarrow (a)$ доказывается просто. Действительно, пусть $\xi \in A_T \cap L^0_+$, т.е. $0 \le \xi \le H \cdot S_T$. Так как условное математическое ожидание по отношению к мартингальной мере удовлетворяет $\tilde{E}(H_t \Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, из этого получим, что $\tilde{E} H \cdot S_T = 0$. Значит, $\xi = 0$. Чтобы закончить доказательство теоремы, остаётся проверить, что $(c) \Rightarrow (e)$ и $(a) \Rightarrow (b)$.

$(c) \Rightarrow (e)$ Заметим, что для любой случайной величины η есть эквивалентная вероятностная мера P' с ограниченной плотностью, такая что $\eta \in L^1(P')$ (например, можно взять $P' = Ce^{-|\eta|}P$). Условие (c) (так же как (a) и (b)) инвариантно при изменении вероятностной меры на эквивалентную. Это замечание позволяет нам предположить, что все S_t интегрируемы. Выпуклое множество $A^1_T := \bar{A}_T \cap L^1$ является замкнутым в L^1. Так как $A^1_T \cap L^1_+ = \{0\}$, то Теорема 2.4 обеспечивает существование $\tilde{P} \sim P$ с ограниченной плотностью, т.ч. $\tilde{E}\xi \le 0$ для всех $\xi \in A^1_T$, в частности, для $\xi = \pm H_t \Delta S_t$ где H_t ограничена и $\mathcal{F}_{t-1}$-измерима. Таким образом, $\tilde{E}(\Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Лемма 2.2 позволяет нам построить замыкание A_T с помощью простых рекурсивных рассуждений, даже без предположения о том, что σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ тривиальна (конечно, это не добавляет общности, но позволяет начать индукцию по переменной времени)

Рассмотрим случай $T = 1$. Пусть $H^n_1 \Delta S_1 - r^n \to \zeta$ п.н., где H^n_1 $\mathcal{F}_0$-измеримо и $r^n \in L^0_+$. Замкнутость A_1 означает, что $\zeta = H_1 \Delta S_1 - r$ для некоторого $\mathcal{F}_0$- измеримого H_1 и

$r \in L^0_+$. Чтобы это показать представим каждый H_1^n как вектор-столбец и запишем всю последовательность этих векторов-столбцов в виде бесконечной матрицы

$$\mathbf{H}_1 := \begin{bmatrix} H_1^{11} & H_1^{21} & \ldots & \ldots & H_1^{n1} & \ldots \\ H_1^{12} & H_1^{22} & \ldots & \ldots & H_1^{n2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_1^{1d} & H_1^{2d} & \ldots & \ldots & H_1^{nd} & \ldots \end{bmatrix}.$$

Если матрица равна нулю то доказывать нечего. Предположим, что утверждение выполнено, когда эта (случайная) матрица имеет для каждого ω хотя бы m нулевых строк. Мы покажем, что утверждение также истинно, когда $\mathbf{H}_1$ имеет хотя бы $m-1$ нулевых строк.

Достаточно найти $\mathcal{F}_0$-измеримые случайные величины $\tilde{H}_1^k$, сходящиеся почти наверное, и $\tilde{r}^k \in L^0_+$, такие что $\tilde{H}_1^k \Delta S_1 - \tilde{r}^k \to \zeta$ п.н.

Пусть $\Omega_i \in \mathcal{F}_0$ образуют конечное разбиение Ω. Важное (хотя и простое) замечание: мы можем рассматривать каждое Ω_i отдельно как независимое измеримое пространство (расматривая ограничения на случайные величины и ограничения σ-алгебр).

Пусть $\underline{H}_1 := \liminf |H_1^n|$. На $\Omega_1 := \{\underline{H}_1 < \infty\}$ возьмём, используя лемму 2.2, $\mathcal{F}_0$-измеримое $\tilde{H}_1^k$ такое что $\tilde{H}_1^k(\omega)$ является сходящейся подпоследовательностью $H_1^n(\omega)$ для любого ω; $\tilde{r}^k$ определяются соответствующим образом. Таким образом, если Ω_1 имеет меру 1, то цель достигнута.

На $\Omega_2 := \{\underline{H}_1 = \infty\}$ мы положим $G_1^n := H_1^n/|H_1^n|$ и $h_1^n := r_1^n/|H_1^n|$. Очевидно, что $G_1^n \Delta S_1 - h_1^n \to 0$ п.н. По Лемме 2.2 находим $\mathcal{F}_0$-измеримое $\tilde{G}_1^k$ такое что $\tilde{G}_1^k(\omega)$ является сходящейся подпоследовательностью $G_1^n(\omega)$ для любого ω. Определяя предел этой последовательности, как $\tilde{G}_1$, получим, что $\tilde{G}_1 \Delta S_1 = \tilde{h}_1$, где $\tilde{h}_1$ неотрицательная величина, следовательно, в силу (a), получаем $\tilde{G}_1 \Delta S_1 = 0$.

Так как $\tilde{G}_1(\omega) \neq 0$, то существует разбиение Ω_2 на d непересекающихся подмножеств $\Omega_2^i \in \mathcal{F}_0$ таких что $\tilde{G}_1^i \neq 0$ на Ω_2^i. Определим $\bar{H}_1^n := H_1^n - \beta^n \tilde{G}_1$, где $\beta^n := H_1^{ni}/\tilde{G}_1^i$ на Ω_2^i. Тогда $\bar{H}_1^n \Delta S_1 = H_1^n \Delta S_1$ на Ω_2. Матрица $\bar{\mathbf{H}}_1$ имеет для каждого $\omega \in \Omega_2$, как минимум m нулевых строк: проведённые нами операции не затрагивали нулевые строки матрицы $\mathbf{H}_1$ и возникла новая нулевая строка, а именно i-я на Ω_2^i. Мы завершили рассмотрение предположения индукции.

Для проведения шага индукции по временной переменной мы предполагаем, что утверждение выполнено для $(T-1)$-шаговой модели. Пусть $\sum_{t=1}^{T} H_t^n \Delta S_t - r^n \to \zeta$ п.н., где H_t^n являются

$\mathcal{F}_{t-1}$-измеримыми и $r^n \in L^0_+$. Так же, как и на первом шаге, мы работаем с матрицей $\mathbf{H}_1$ используя те же самые рассуждения, что и раньше.

На Ω_1 возьмём возрастающую последовательность $\mathcal{F}_0$-измеримых с.в. τ_k такую, что $H^k := H_1^{\tau_k}$ сходится к H_1. Тогда $\sum_{t=2}^T H_t^{\tau_k} \Delta S_t - r^{\tau_k}$ сходится при $k \to \infty$ и мы имеем редукции к $(T-1)$-шаговой модели.

На Ω_2 мы снова используем такую же индукцию по m, то есть по номеру нулевых строк матрицы $\mathbf{H}_1$. Единственная модификация заключается в том, что идентичные операции (рассуждения с подпоследовательностью, нормализация посредством H_1^n, и т.д.) должны выполняться одновременно для всех других матриц $\mathbf{H}_2$, ..., $\mathbf{H}_T$.

Замечание 1. В точности те же аргументы, какие использовались при доказательстве следствия $(a) \Rightarrow (b)$ приводят к следующему утверждению, носящему название лемма Стрикера:

Множество результатов R_T замкнуто.

Это условие выполняется независимо от NA-условия (no arbitgage). Действительно, Это условие использовалось, чтобы проверить, что неотрицательный предел $\tilde{h}_1$ на самом деле не просто неотрицательный, а даже равен нулю. Но это выполняетя автоматически, если мы начнём рассуждения с $r_n = 0$.

Замечание 2. Теорема DMW включает в себя в качестве следствия утверждение, что в условиях, когда время дискретно и горизонт времени конечен $(T < \infty)$, любой локальный мартингал является мартингалом по отношению к мере $\tilde{P} \sim P$ с ограниченной плотностью. Более того, эта мера может быть выбрана таким способом, что некоторая выбранная нами заранее случайная величина ξ будет $\tilde{P}$-интегрируемой. В конце этой главы мы покажем, что даже в модели с бесконечным горизонтом времени локальный мартингал является мартингалом по отношению к эквивалентной вероятностной мере.

2.3 "Быстрое" доказательство теоремы DMW

Детальная формулировка теоремы DMW вместе с её доказательством предназначена для подготовки читателя к рассуждениям, которые используются в моделях с транзакционными издержками. Доказательство “главной” эквивалентности $(a) \Leftrightarrow (e)$ интересно и само по себе. Приведём доказательство, сочетающее в себе оптимизационый подход Криса Роджерса с леммой 2.2 об измеримых подпоследовательностях. Оно основано на одношаговом утверждении, первое условие в котором является просто переформулировкой свойства NA.

Предложение 2.5 (Роджерс) *Пусть $\xi \in L^0(\mathbf{R}^d)$ и пусть $\mathcal{G}$ является под-σ-алгеброй $\mathcal{F}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) для любого $\alpha \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{G})$, если выполнено неравенство $\alpha\xi \geq 0$, то выполнено равенство $\alpha\xi = 0$;

(ii) существует ограниченная с.в. $\varrho > 0$ такая, что $E\varrho|\xi| < \infty$ и $E(\varrho\xi|\mathcal{G}) = 0$.

Доказательство. Докажем только "сложную" импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$.

Рассмотрим случай, когда σ-алгебра $\mathcal{G}$ тривиальна. Введём функцию $f(a) = Ee^{a\xi - |\xi|^2}$, $a \in \mathbf{R}^d$. Если она достигает своего минимума в некоторой точке a_*, то всё доказано: возьмём $\rho = e^{a_*\xi - |\xi|^2}$, так как в этой точке производная f равна нулю: $E\xi e^{a_*\xi - |\xi|^2} = 0$. Можно проверить, что условие (i) исключает возможность того, что минимум не достигается (обязательно убедитесь в этом для одномерного случая, т.е. когда $d = 1$). Мы проверим это ниже.

Обратимся теперь к общему случаю. Рассуждения с уменьшением размерности (индукция по размерности) позволяют предположить, что соотношение $\alpha\xi = 0$, где $\alpha \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{G})$ выполнено, только если $\alpha = 0$ (когда $\mathcal{G}$ тривиальна, то это выражение — просто линейная комбинация компонент вектора ξ как элементов L^0). Пусть $Q(\omega, dx)$ - регулярное условное распределение ξ относительно $\mathcal{G}$. Определим функцию

$$f(\omega, a) := \int e^{ax - |x|^2} Q(\omega, dx)$$

непрерывную по a и $\mathcal{G}$-измеримую по ω. Введём $\mathcal{G}$-измеримую с.в. $f_*(\omega) = \inf_a f(\omega, a)$ и рассмотрим в пространстве $\Omega \times \mathbf{R}^d$ множества $\{(\omega, a) : f(\omega, a) < f_*(\omega) + 1/n\}$ с непустыми открытыми ω-сечениями $\Gamma_n(\omega)$. Пусть α_n — $\mathcal{G}$-измеримая с.в. с $\alpha_n(\omega) \in \Gamma_n(\omega)$. Такие α_n могут быть с лёгкостью построены (не ссылаясь на теорему об измеримом выборе), например, можно взять $\alpha_n(\omega) := q_{\theta(n)}$, где

$$\theta(n) := \min\{k : \ f(\omega, q_k) < f_*(\omega) + 1/n\}$$

, а $\{q_n\}$ — произвольное счётное всюду плотное подмножество в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим множество $\Omega_0 := \{\liminf |\alpha_n| < \infty\}$ и его дополнение Ω_1. Используя лемму 2.2, можно предположить, что на Ω_1 последовательность $\tilde{\alpha}_n := \alpha_n/|\alpha_n|$ сходится к некоторому β с $|\beta| = 1$ и по лемме Фату:

$$\begin{aligned} &\int e^{\lim|\alpha_n(\omega)|\beta(\omega)x-|x|^2} I_{\{\beta(\omega)x\neq 0\}} Q(\omega, dx) \\ \leq \quad &\liminf \int e^{\alpha_n(\omega)x-|x|^2} I_{\{\beta(\omega)x\neq 0\}} Q(\omega, dx) \leq f_*(\omega). \end{aligned}$$

Из $Q(\omega, \{x: \ \beta(\omega)x > 0\}) = 0$ следует, что $\beta\xi \leq 0$ (п.н.) и, значит, в силу (i) $\beta\xi = 0$. В силу наших условий это равенство выполнено только когда $\beta = 0$, и значит, Ω_1 — множество нулевой меры, которое ни на что не влияет. Снова по лемме 2.2 можем предположить, что на множестве Ω_0 меры 1 последовательность $\alpha_n(\omega)$ сходится к некоторому $\alpha_*(\omega)$. Очевидно, $f(\omega, a)$ достигает своего минимума на $\alpha_*(\omega)$ и мы завершаем доказательство, взяв $\varrho := e^{\alpha_*\xi-|\xi|^2}/c(\alpha_*)$, где функция $c(a) := \sup_x(1+|x|)e^{ax-|x|^2}$. $\square$

“Сложная" импликация $(a) \Rightarrow (e)$ следует из предыдущего утверждения посредством обратной индукции. Мы утверждаем, что для любого $t = 0, 1, ..., T-1$ существует ограниченная с.в. $\rho_t^T > 0$ такая, что $E\rho_t^T|\Delta S_u| < \infty$ и $E\rho_t^T\Delta S_u = 0$ for $u = t+1, ..., T$. Так как из (a) следует свойство NA для каждой одношаговой модели, существование ρ_{T-1}^T следует из предложения выше с $\xi = \Delta S_T$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{T-1}$. Предположим, что мы уже нашли ρ_t^T. Полагая $\xi = E(\rho_t^T|\mathcal{F}_{t-1})\Delta S_{t-1}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{t-2}$, находим ограниченную $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримую с.в. $\varrho_{t-1} > 0$ такую что $E(\varrho_{t-1}E(\rho_t^T|\mathcal{F}_{t-1})|\Delta S_{t-1}|) < \infty$ и $E(\varrho_{t-1}E(\rho_t^T|\mathcal{F}_{t-1})\Delta S_{t-1}) = 0$. Очевидно, что ρ_{t-1}^T удовлетворяет требованиям. Свойство (e) теоремы DMW выполняется, если взять $\rho_t := E(\rho_0^T|\mathcal{F}_t)$.

2.4 Теорема хеджирования для европейских опционов

Одна из фундаментальных идей финансовой математики —арбитражное ценообразование деривативов (производных ценных бумаг).

Дериватив или *опцион* — случайная величина ξ, которую можно интерпретировать как выплату продавца опциона его покупателю. Для европейского опциона оплата производится в срок погашения T и может зависеть от всей истории вплоть до T. Какова "справедливая" цена для такого контракта, выплачиваемая в начальный момент времени? По всей видимости, цена опциона должна быть, по крайней мере, такой, чтобы ни одна из двух сторон не имела арбитражных возможностей, т.е. безрисковой прибыли.

Определим множество

$$\Gamma := \Gamma(\xi) := \{x : \exists H \in \mathcal{P} \ : \ x + H \cdot S_T \geq \xi\}.$$

Очевидно, если оно не пусто, то это полубесконечный интервал (возможно совпадающий со всей прямой). A priori, он может иметь форму либо $[\bar{x}, \infty[$, либо $]\bar{x}, \infty[$.

Приводимая ниже теорема утверждает, в частности, что $\bar{x} \in \Gamma$. Если договорная цена опциона x строго больше, чем $\bar{x}$, то продавец имеет безрисковую прибыль $x - \bar{x}$, так как для некоторого H терминальное значение самофинансирующегося портфеля $\bar{x} + H \cdot S$ превосходит выплату ξ.

Аналогично, положим, что правый конец $\underline{x}$ полубесконечного интервала

$$-\Gamma(-\xi) = \{x : \exists H \in \mathcal{P} \text{ such that } -x + H \cdot S_T \geq -\xi\}$$

принадлежит этому интервалу. Если x строго меньше, чем $\underline{x}$, то у покупателя опциона будет арбитражная возможность. Действительно, в этом случае существует стратегия H такая, что $-\underline{x} + H \cdot S_T \geq -\xi$. Поэтому, занимая x в момент $t = 0$ на покупку опциона, покупатель запускает портфель $-x + H \cdot S$, конечное значение которого больше $\underline{x} - x - \xi$. Следовательно, после погашения опциона, агент будет иметь безрисковую прибыль $\underline{x} - x$.

Эти доводы показывают, что "справедливые" цены принимают значения в интервале $[\underline{x}, \bar{x}]$.

Замечание 1. Обратите внимание: подразумевается, что агент (продавец опциона) может иметь короткую позицию. Для моделей с дискретным временем —безобидное предположение, но оно сомнительно для моделей с непрерывным временем, где неограниченные короткие позиции не являются допустимыми.

В случае, когда опцион реплицируем, т.е. имеет вид $\xi = x + H^\xi \cdot S_T$, безарбитражная цена опциона $x = \underline{x} = \bar{x}$.

Теорема хеджирования дает "двойственное" описание множества начальных капиталов Γ, начиная из которых можно хеджировать ("супер-реплицировать", доминировать) выплату по опциону ξ.

Обозначения. Пусть $\mathcal{Q}$ (соотв. $\mathcal{Q}^e$) - множество всех мер $Q \ll P$ (соотв. $Q \sim P$) таких, что S мартингал относительно меры Q. Добавим к этим обозначениям индекс l для обозначения бо́льших множеств мер $\mathcal{Q}_l$ и $\mathcal{Q}_l^e$, относительно которых S – локальный мартингал. Обозначим за $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}^e$, $\mathcal{Z}_l$, ... процессы плотностей для мер из соответствующих множеств.

Теорема 2.6 *Предположим, что $\mathcal{Q}^e \neq \emptyset$. Пусть ξ — ограниченная снизу случайная величина такая, что $E_Q|\xi| < \infty$ для всякой $Q \in \mathcal{Q}^e$. Тогда*

$$\Gamma = \{x : \ x \geq E\rho_T\xi \ \textit{для всех}\ \rho \in \mathcal{Z}^e\} = \Big\{x : \ x \geq \sup_{\rho \in \mathcal{Z}^e} E\rho_T\xi\Big\}. \tag{1}$$

Другими словами, $\bar{x} = \sup_{Q \in \mathcal{Q}^e} E_Q\xi$ и $\Gamma = [\bar{x}, \infty]$. Очевидное следствие этой теоремы (применённой к множеству $\Gamma(-\xi)$) утверждает, что $\underline{x} = \inf_{Q \in \mathcal{Q}^e} E_Q\xi$.

Прямое доказательство данного результата несложно, но мы получим его из двух фундаментальных фактов, представляющих самостоятельный интерес. Первый факт называют *теоремой об опциональном разложении.*

Теорема 2.7 *Предположим, что $\mathcal{Q}^e \neq \emptyset$. Пусть $X = (X_t)$ — ограниченный снизу процесс, который является супермартингалом относительно каждой вероятностной меры $Q \in \mathcal{Q}^e$. Тогда существует стратегия H и возрастающий процесс A такие, что $X = X_0 + H \cdot S - A$.*

Предложение 2.8 *Предположим, что $Q^e \neq \emptyset$. Пусть ξ — ограниченная снизу с.в. такая, что $\sup_{Q \in \mathcal{Q}^e} E_Q|\xi| < \infty$. Тогда процесс X с*

$$X_t = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}^e} E_Q(\xi|\mathcal{F}_t)$$

является супермартингалом относительно каждой $Q \in \mathcal{Q}^e$.

Доказательство теоремы 2.6. Включение $\Gamma \subseteq [\bar{x}, \infty[$ очевидно: если $x + H \cdot S_T \geq \xi$, то $x \geq E_Q\xi$ для всякой $Q \in \mathcal{Q}^e$. Чтобы показать обратное включение, допустим, что $\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q|\xi| < \infty$ (иначе оба множества пусты). Применяя теорему об опциональном разложении, получаем, что $X = \bar{x} + H \cdot S - A$. Поскольку $\bar{x} + H \cdot S_T \geq X_T = \xi$, получаем утверждение теоремы. □

2.5 Стохастические дисконтирующие множители (дефляторы)

Обсудим финансовые аспекты теоремы хеджирования и интерпретацию плотностей мартингальных мер как стохастических дисконтирующих множителей *дефляторы.*

Рассмотрим "практический" пример, где продавец опциона дал обязательство доставить в день экспирации T набор из d активов в количестве η^i каждого. Так как рынок идеален, то это то же самое, что сделать выплату в размере $\xi = \eta S_T$. Теорема хеджирования утверждает, что множество начальных капиталов, для которых существует портфель, доминирующий ξ, может быть описано в терминах цен. А именно, если NA-свойство выполнено, то можно хеджировать выплату при начальном капитале x, тогда и только тогда, когда x не меньше математического ожидания "стохастически дисконтированной" выплаты $\rho_T\xi = \eta S^\rho_T$ при любой мартингальной плотности ρ. Иными словами, сравнение должно быть сделано не вычислением "стоимости" набора ценных бумаг по номинальной цене, а по "согласованной ценовой системе" (consistent price system) $S^\rho = \rho S$, полученной умножением номинальной цены (как процесса) на *стохастический множитель дисконтирования* ρ. Слово "согласованный" здесь отражает факт, что S^ρ_t определяется величиной S^ρ_T через мартингальное свойство: $S^\rho_t = E(S^\rho_T|\mathcal{F}_T)$.

2.6 Теорема хеджирования для опционов американского типа

В случае опциона американского типа покупатель имеет право исполнить опцион в любое время до момента T на основании доступной информации. Таким образом, момент погашения τ — марковский момент $\tau \leq T$; покупатель получает выплату Y_τ – значение в момент τ соответствующего процесса Y. Описание процесса выплаты $Y = (Y_t)$ оговорено в контракте (как и финальная дата экспирации T).

По аналогии с европейскими опционами определим множество начальных капиталов, начиная с которых можно запустить самофинансирующийся портфель, значение которого не меньше окончательной выплаты на рассматриваемом временном интервале:

$$\Gamma := \Gamma(Y) := \{x : \exists H \in \mathcal{P} \text{ такой, что } x + H \cdot S \geq Y\}.$$

Теорема 2.9 *Допустим что $\mathcal{Q}^e \neq \emptyset$. Пусть $Y = (Y_t)$ — соответствующий процесс выплат, ограниченный снизу и такой что $E_Q|Y_t| < \infty$ для всех $Q \in \mathcal{Q}^e$ and $t \leq T$. Тогда*

$$\Gamma = \{x : \ x \geq E\rho_\tau Y_\tau \text{ для всех } \rho \in \mathcal{Z}^e \text{ и всех марковских моментов } \tau \leq T\}. \qquad (2)$$

Доказательство данного результата базируется на применении опционального разложения, которое в точности такое же как и в теореме 2.6. Единственное различие заключается в том, что теперь мы берём в качестве X процесс

$$X_t = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}^e, \tau \in \mathcal{T}_t} E_Q(Y_\tau | \mathcal{F}_t),$$

где $\mathcal{T}_t$ — множество марковских моментов со значениями в множестве $\{t, t+1, ..., T\}$. Согласно предположению $\sup_{Q \in \mathcal{Q}^e} E_Q|Y_t| < \infty$ для всех t, процесс X — супермартингал по любой мере $Q \in \mathcal{Q}^e$.

2.7 Существенный супремум

Для любого семейства $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ скалярных с.в. (которые принимать и бесконечные значения) существует с.в. η со следующими свойствами:

1) $\eta \geq \zeta_\alpha$ для всех α; 2) если $\eta' \geq \zeta_\alpha$ для всех α, то $\eta' \geq \eta$.

Очевидно, что эта с.в. (точнее, класс эквивалентности) единственна п.н. (т.е., единственен класс эквивалентности); она обозначается $\operatorname{ess\,sup}_{\alpha \in J} \zeta_\alpha$.

Существование. Достаточно рассмотреть случай, где все ζ_α принимают значения в ограниченном интервале (например, если $\tilde{\eta}$ существенный супремум для семейства $\{\tilde{\zeta}_\alpha\}$ с $\tilde{\zeta}_\alpha := \arctan \zeta_\alpha$, то $\operatorname{tg} \tilde{\eta}$ — существенный супремум для $\{\zeta_\alpha\}$)

Пусть $a := \sup_I E\zeta_I$, где I пробегает множество конечных подмножеств J и ζ_I обозначает $\sup_{\alpha \in I} \zeta_\alpha$. Возьмем последовательность I_n такую, что $E\zeta_{I_n} \to a$. Заменяя, если необходимо, I_n на $\cup_{k \leq n} I_k$, мы можем считать без потери общности, что $I_n \uparrow I_\infty$. Тогда $\zeta_{I_n} \uparrow \eta := \zeta_{I_\infty}$. Принимая во внимание, что $E\eta = a$, и учитывая монотонную сходимость, легко проверить, что η — существенный супремум. Заметим, что $\eta = \sup_{\alpha\in I_\infty}\zeta_\alpha$, где I_∞ — **счетное** подмножество I.

Приведенные аргументы показывают, что если семейство $\{\zeta_\alpha\}$ направленно вверх (т.е. для любых α_1, α_2, найдется такое α, что $\zeta_\alpha \geq \zeta_{\alpha_1} \vee \zeta_{\alpha_2}$), то можно найти **возрастающую** последовательность ζ_{α_n} такую, что $\lim_n \zeta_{\alpha_n} = \operatorname{ess\,sup}_\alpha \zeta_\alpha$. Следствием этого наблюдения является:

Предложение 2.10 *Предположим, что семейство $\{\zeta_\alpha\}$ направлено вверх и $\zeta_\alpha \geq \zeta$, где $E(|\zeta||\mathcal{G}) < \infty$. Тогда*

$$E(\operatorname{ess\,sup}_\alpha \zeta_\alpha|\mathcal{G}) = \operatorname{ess\,sup}_\alpha E(\zeta_\alpha|\mathcal{G}).$$

2.8 Теорема об опциональном разложении

Теорема 2.11 *Допустим, что $\mathcal{Q}_l^e \neq \emptyset$. Пусть $X = (X_t)$ — процесс, который является обобщенным мартингалом по любой мере $Q \in \mathcal{Q}_l^e$. Тогда существует стратегия H и возрастающий процесс A такие, что $X = X_0 + H \cdot S - A$.*

Proof. Мы начнем с доказательства одношаговой версии результата.

Лемма 2.12 *Пусть $\mathcal{G}$ – под-σ-алгебра $\mathcal{F}$ и пусть ξ и η – с.в. со значениями в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^d$, для которых $E(|\xi| + |\eta||\mathcal{G}) < \infty$. Предположим, что $E(\alpha\xi|\mathcal{G}) \leq 0$ для любой с.в. $\alpha > 0$ такой, что $E(\alpha|\mathcal{G}) = 1$ и $E(\alpha\eta|\mathcal{G}) = 0$ и $E(\alpha|\xi||\mathcal{G}) < \infty$, $E(\alpha|\eta||\mathcal{G}) < \infty$. Предположим, что такая α существует. Тогда найдётся $\lambda \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{G})$ такая, что $\xi - \lambda\eta \leq 0$.*

Proof. Для начала мы полагаем без ограничения общности, что ξ и η — интегрируемы (иначе заменим $\tilde{\xi} := \xi/(1 + E(|\xi| + |\eta||\mathcal{G}))$ и $\tilde{\eta} := \eta/(1 + E(|\xi| + |\eta||\mathcal{G})))$. Определим множество $A_1 := \{\lambda\eta :\ \lambda \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{G})\} - L^0_+$. По теореме DMW это множество замкнуто по вероятности. Таким образом, выпуклое множество $A_1^1 := A_1 \cap L^1$ замкнуто в L^1. Если утверждение леммы не выполняется, то $\xi \notin A_1^1$. По этой причине в силу теоремы отделимости Хана–Банаха существует $\alpha \in L^\infty$ такая, что

$$E\alpha\xi > \sup_{\zeta\in A^1} E\alpha\zeta.$$

Необходимо, чтобы $\alpha \geq 0$: иначе правая часть неравенства будет бесконечна. По этой же причине $E\alpha\lambda\eta = 0$ для любой $\lambda \in L^\infty(\mathbf{R}^d, \mathcal{G})$. Отсюда $E(\alpha\eta|\mathcal{G}) = 0$ и супремум равняется нулю. То есть, $E\alpha\xi > 0$. Но это противоречит неравенству $E(\alpha\xi|\mathcal{G}) \le 0$, которое должно быть верным для таких α. $\square$

С данной леммой доказательство теоремы просто. В самом деле, пусть $\rho \in \mathcal{Z}_l^e$. Рассмотрим очевидное равенство $\rho_t = \alpha_1...\alpha_t$, где $\alpha_k := \rho_k/\rho_{k-1}$. Мартингальные свойство ρ означает, что $E(\alpha_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 1$. С другой стороны, из-за равенства множеств локальных и обобщённых мартингалов, $\rho \in \mathcal{Z}_l^e$, тогда и только тогда, когда $E(\alpha_t|\Delta S_t||\mathcal{F}_{t-1}) < \infty$ и $E(\alpha_t \Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ для всех $t \le T$. Отсюда по лемме 2.12 существует с.в. $H_t \in L^0(\mathbf{R}^d|\mathcal{F}_{t-1})$ такая, что $\Delta X_t - H_t \Delta S_t \le 0$. Обозначив правую часть $-\Delta A_t$ и положив $A_0 = 0$, получим желаемое разложение. $\square$

3 Arbitrage Theory for continuous time processes

In 1981 Kreps established a theorem relating the existence of an equivalent “separating" measure with a certain no-arbitrage property: No Free Lunch (NFL). Delbaen and Schachermayer in 1994 observed that in a model driven by a semimartingale price process NFL coincides with another no-arbitrage property of a clear financial meaning: No Free Lunch with Vanishing Risk (NFLVR). Following closely the line of their proof we study here a more general setting with value processes as the primary objects, covering the case of bond market models and allowing some types of constraints. Our main message is that the closedness result holds without any additional hypothesis.

Let $\mathcal{S}$ be the space of semimartingales X defined on a finite interval $[0,T]$ and starting from zero; $\mathcal{S}$ is a Frechet space with the quasinorm

$$\mathbf{D}(X) := \sup\{E 1 \wedge |h \cdot X_T| : \ h \text{ is predictable}, \ \ |h| \le 1\}.$$

We fix in $\mathcal{S}$ a closed convex subset $\mathcal{X}^1$ of processes $X \ge -1$ which contains 0 and satisfies the following condition: if $X, Y \in \mathcal{X}^1$, $H, G \ge 0$ are bounded predictable processes, $HG = 0$, and $Z := H \cdot X + G \cdot Y \ge -1$ then $Z \in \mathcal{X}^1$.

Put $\mathcal{X} := \cup_{\lambda > 0} \lambda \mathcal{X}^1$.

Define the convex sets $K_0^1 := \{X_T : \ X \in \mathcal{X}^1\}$, $K_0 := \{X_T : \ X \in \mathcal{X}\}$, $C_0 := K_0 - L_+^0$, $C := C_0 \cap L^\infty$. We denote by $\bar{C}$, $\tilde{C}^*$, and $\bar{C}^*$ the norm closure, the union of weak* closures of denumerable subsets, and weak* closure of C in L^∞; $C_+ := C \cap L_+^\infty$ etc.

The properties NA, NFLVR, NFLBR, and NFL mean that $C_+ = \{0\}$, $\bar{C}_+ = \{0\}$, $\tilde{C}^*_+ = \{0\}$, and $\bar{C}^*_+ = \{0\}$, respectively. Consecutive inclusions induce the hierarchy of these properties:

$$\begin{array}{ccccccc} C & \subseteq & \bar{C} & \subseteq & \tilde{C}^* & \subseteq & \bar{C}^* \\ \text{NA} & \Leftarrow & \text{NFLVR} & \Leftarrow & \text{NFLBR} & \Leftarrow & \text{NFL.} \end{array}$$

Define the ESM property as the existence of $\tilde{P} \sim P$ such that $\tilde{E}X_T \le 0$ for all $X \in \mathcal{X}$. We introduce also the BK (NA1, NAA1, NUPBR) property: K^1_0 is bounded in L^0.

The following result referred sometimes, especially, in the case of the example below, as the Fundamental Theorem of Asset Pricing (FTAP).

Теорема 3.1 *NFL $\Leftrightarrow$ ESM.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Let $f \in \bar{C}^* \cap L^\infty_+$. Since $d\tilde{P}/dP \in L^1$, there are $f_n \in C$ with $\tilde{E}f_n \to \tilde{E}f$. By definition, $f_n \le X^n_T$ where $X^n \in \mathcal{X}$. Thus, $\tilde{E}f_n \le 0$ implying that $\tilde{E}f \le 0$ and $f = 0$.

($\Rightarrow$) Since $\bar{C}^* \cap L^\infty_+ = \{0\}$, the Kreps–Yan separation theorem provides $\tilde{P} \sim P$ such that $\tilde{E}f \le 0$ for all $f \in C$, hence, for all $f \in K_0$. □

Surprisingly, we have also NFLVR $\Leftrightarrow$ NFLBR $\Leftrightarrow$ NFL due to following

Теорема 3.2 *Under NFLVR $C = \bar{C}^*$.*

Example. Let $\mathcal{X}^1$ be the set of all integrals $H \cdot S \ge -1$ with respect to a fixed semimartingale S (it is closed by Mémin's theorem. By definition, S has EMM (resp. ELMM) property if there is $P' \sim P$ such that $S \in \mathcal{M}(P')$ (resp., $S \in \mathcal{M}_{loc}(P')$. If S is bounded, ESM coincides with EMM. Indeed, being bounded from below, the stochastic integral $H \cdot S \in \mathcal{M}(P')$ (see [**?**]) and, by the Fatou lemma, $E'H \cdot S_T \le 0$. On the other hand, for each stopping time τ the processes $I_{[0,\tau]} \cdot S$ and $-I_{[0,\tau]} \cdot S$ belong to $\mathcal{X}$, $\tilde{E}S_\tau = 0$ and, hence, $S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$. Of course, if S is locally bounded, ESM coincides with ELMM.

Theorem 2 *Let P be a separating measure. Then for any $\varepsilon > 0$ there is $Q \sim P$ with* $\mathrm{Var}\,(P - Q) \le \varepsilon$ *such that S is a σ-martingale under Q.*