# 4. О множествах сходимости мартингалов

§VII.5

## 1. Множества сходимости суб/супер-мартингалов

**Обозначение**: $\{X_n \to\} = \{\omega : \exists \lim_n X_n(\omega) \in (-\infty, +\infty)\}$

$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : X_n > a\}$, $\inf \varnothing = \infty$

$\sigma_a = \inf\{n \geq 1 : |X_n| > a\}$, $\inf \varnothing = \infty$ — м-ты остановки

**Т-ма 1.** 1) $X_n$ — субмарт. и $\forall a > 0$ $E \Delta X_{\tau_a} I(\tau_a < \infty) < \infty \Rightarrow \{X_n \to\} = \{\sup X_n < \infty\}$ п.н.

2) $X_n$ — март и $\forall a > 0$ $E|\Delta X_{\sigma_a}| I(\sigma_a < \infty) < \infty \Rightarrow \{X_n \to\} = \{\sup |X_n| < \infty\}$ п.н.

- $A = B$ п.н. означает $P(A \setminus B) = P(B \setminus A) = 0$
- Заметим, что $\Delta X_{\tau_a} > 0$ на м-ве $\{\tau_a < \infty\}$

**Д-во** 1) „$\subseteq$" — очевидно

„$\supseteq$" Введем $X_n^a = X_{n \wedge \tau_a}$

$\sup_n E(X_n^a)^+ \leq a + E(\Delta X_{\tau_a} I(\tau_a < \infty)) < \infty$

$\Rightarrow P(X_n^a \to) = 1 \Rightarrow \{\tau_a = \infty\} \subseteq \{X_n \to\}$ п.н.

Далее $\bigcup_{a \in \mathbb{N}} \{\tau_a = \infty\} = \{\sup_n X_n < \infty\} \Rightarrow \{\sup_n X_n < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}$ п.н.

2) Упражнение (д-во аналогично) □

**Сл-е** $X$ — март. и $E \sup_{n \geq 1} |\Delta X_n| < \infty \Rightarrow \{X_n \not\to\} = \{\varliminf X_n = -\infty, \varlimsup X_n = +\infty\}$ п.н.

28.10.2019

**Т-ма 2** $X$ — субмарт, $X_n = M_n + A_n$ — р-е Дуба. Тогда

Т.к. $A_n$ неуб., то $A_\infty \in (-\infty, +\infty]$ всегда опред.

1) $\forall n$ $X_n \geq 0 \Rightarrow \{A_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}$ п.н.

2) $\forall a > 0$ $E \Delta X_{\tau_a} I(\tau_a < \infty) < \infty \Rightarrow \{X_n \to\} \subseteq \{A_\infty < \infty\}$ п.н.

**Д-во** 1) $\rho_a = \inf\{n : A_{n+1} > a\}$ — м.о. (т.к. $A$ — предск.).

Тогда $A_{\rho_a} \leq a$ и $E X_{\rho_a \wedge n} = E A_{\rho_a \wedge n} \leq a$

т. Дуба об ост.

$\Rightarrow X_n^a = X_{\rho_a \wedge n}$ — субмарт, $\sup_n E(X_n^a)^+ < \infty \Rightarrow P(X^a \to) = 1$

Тогда $\{A_\infty \leq a\} = \{\rho_a = \infty\} \subseteq \{X_n \to\}$

т.к. $X_n^a = X_n$ на $\{\rho_a = \infty\}$

$\Rightarrow \{A_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}$

2) Из т-мы 1: $\{X_n \to\} = \{\sup_n X_n < \infty\}$. Докажем, что $\{\sup_n X_n < \infty\} \subseteq \{A_n \to\}$

$\tau_a = \inf\{n : X_n > a\}$

Тогда $E A_{\tau_a \wedge n} = E X_{\tau_a \wedge n} \leq E X^+_{\tau_a \wedge n} \leq a + E(\Delta X_{\tau_a})^+ I(\tau_a < \infty)$

т. Дуба об ост.

$\Rightarrow E A_{\tau_a} < \infty$ (т-ма о мон. сход)

$\Rightarrow \{\tau_a = \infty\} \subseteq \{A_\infty < \infty\} \Rightarrow \{\sup_n X_n < \infty\} = \bigcup_a \{\tau_a = \infty\} \subseteq \{A_\infty < \infty\}$

□

## 2. Применение к квадратично интегр. мартингалам

Март. $X_n$ называется **квадратично интегрируемым**, если $\forall n$ $EX_n^2 < \infty$.

Тогда $X_n^2$ — субмарт $\Rightarrow X_n^2 = M_n + A_n$ — р-е Дуба, $A_n$ — неуб. предск, $A_0 = 0$

Послед $A_n$ (компенсатор $X_n^2$) наз. **квадратической характеристикой**, обозначение: $\langle X \rangle_n$

(т.е. $X_n^2 - \langle X \rangle_n$ — март)

В явном виде $\langle X \rangle_n = \sum_{k=1}^n E(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}^2 = \sum_{k=1}^n E((\Delta X_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1})$

Т-ма 3 $X_n$ - кв. инт. м-л. Тогда

1) $\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n \to\}$ п.н.

2) если $E\sup_n(\Delta X_n)^2 < \infty$, то $\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} = \{X_n \to\}$ п.н.

Д-во 1) Заметим, что $\langle X\rangle_n = \langle X+1\rangle_n$

Тогда $\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} \subseteq \{X_n^2 \to, (X_n+1)^2 \to\} = \{X_n \to\}$ п.н.

2) По сл-ю из т-мы 1, $\{X_n \to\} = \{X_n^2 \to\}$.

Чтобы д-ть $\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} = \{X_n^2 \to\}$ дост проверить $\forall a>0$ $E\Delta X_{\sigma_a}^2 I(\sigma_a < \infty) < \infty$ и применить Т-му 2.

Имеем на $\{\sigma_a < \infty\}$:

$$\Delta X_{\sigma_a}^2 \le (\Delta X_{\sigma_a})^2 + 2|X_{\sigma_a - 1}|\cdot|\Delta X_{\sigma_a}| \le (\Delta X_{\sigma_a})^2 + 2\sqrt{a}\,|\Delta X_{\sigma_a}| \le (\Delta X_{\sigma_a})^2 + 2\sqrt{a}\left((\Delta X_{\sigma_a})^2 + 1\right)$$

$$\Rightarrow E\Delta X_{\sigma_a}^2 I(\sigma_a < \infty) < 2\sqrt{a} + (1+2\sqrt{a})\, E\sup_n(\Delta X_n)^2 < \infty.$$

$\square$

Т-ма (ЗБЧ для кв. инт м-лов). $X_n$ - кв. инт. м-л. Тогда

$$\frac{X_n}{\langle X\rangle_n} \to 0 \text{ п.н. на } \{\langle X\rangle_\infty = \infty\}$$

Лемма 1 (Кронекера) $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$, $b_0 > 0$, $\forall n$ $b_{n+1} \ge b_n$, $b_n \to \infty$.

Тогда $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_k b_k \to 0$

Д-во: § IV. 3

Лемма 2 $c_n \in \mathbb{R}$, $c_n > 0$, $d_n = \sum_{k=1}^n c_k \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{d_n^2} < \infty$

Д-во $\sum_{n=2}^\infty \frac{c_n}{d_n^2} \le \sum_{n=2}^\infty \frac{c_n}{d_n d_{n-1}} = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{d_{n-1}} - \frac{1}{d_n} < \infty$.

Д-во т-мы. Пусть $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta X_k}{\langle X\rangle_k}$ - кв. инт. м-л, $\langle M\rangle_\infty = \sum_{k=1}^\infty \frac{\Delta\langle X\rangle_n}{\langle X\rangle_n^2} < \infty$ п.н. (по л. 2) $\Rightarrow P(M_n \to) = 1$.

Тогда $\frac{X_n}{\langle X\rangle_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \langle X\rangle_k \Delta M_k}{\langle X\rangle_n} \to 0$ на $\{\langle X\rangle_\infty = \infty\}$ по л. 1. $\square$

## 3. Примеры

Утв (обобщ. л. Бореля-Кантелли) $A_n \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \{A_n \text{ б.ч.}\} = \{\sum_{n\ge1} P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$

Д-во Обозн. $\pi_k = P(A_k|\mathcal{F}_{k-1})$

$X_n = \sum_{k=1}^n (I(A_k) - \pi_k)$ - кв. инт. март., $\langle X\rangle_n = \sum_{k=1}^n \pi_k(1-\pi_k)$

Тогда $\{\sum_{k=1}^\infty \pi_k < \infty\} \subseteq \{\langle X\rangle_\infty < \infty, \sum_{k=1}^\infty \pi_k < \infty\} = \{X_n \to, \sum_{k=1}^\infty \pi_k < \infty\} \subseteq \{\sum_{k=1}^\infty I(A_k) < \infty\} = \overline{\{A_n \text{ б.ч.}\}} \Rightarrow \{A_n \text{ б.ч.}\} \subseteq \{\sum_{k=1}^n \pi_k = \infty\}$

Далее:

$\{\sum_{k=1}^\infty \pi_k = \infty, X_n \to\} \subseteq \{\sum_{k=1}^\infty I(A_k) = \infty\} \subseteq \{A_n \text{ б.ч.}\}$

$\{\sum_{k=1}^\infty \pi_k = \infty, X_n \not\to\} \subseteq \{\sum_{k=1}^\infty \pi_k = \infty, \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = +\infty\} \subseteq \{\sum_{k=1}^\infty I(A_k) = \infty\} \subseteq \{A_n \text{ б.ч.}\}$

$\Rightarrow \{\sum_{k=1}^n \pi_k = \infty\} \subseteq \{A_n \text{ б.ч.}\}$ $\square$.

Упр-е Как отсюда получить обычную лемму Б.-К.?

Утв. (об. т. Колмогорова о 3 рядах) Пусть $z_n$ - $\mathcal{F}_n$-изм, $\bar{z}_n = z_n I(|z_n| \le 1)$

Тогда $\{\sum_{k=1}^n z_k \to\} = \{\sum_{k=1}^n E(\bar{z}_k|\mathcal{F}_{k-1}) \to, \sum_{k=1}^n Var(\bar{z}_k|\mathcal{F}_{k-1}) \to, \sum_{k=1}^n P(|z_k| \ge 1|\mathcal{F}_{k-1}) \to\}$

Схема док-ва. Рассмотреть $M_n = \sum_{k=1}^n (\bar{z}_k - E(\bar{z}_k|\mathcal{F}_{k-1}))$ - кв. инт м-л, $\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n Var(\bar{z}_k|\mathcal{F}_{k-1})$