Теоретические билеты к государственному экзамену

602 группа и сочувствующие (Евгений, Надежда)

25 мая 2022 г.

Содержание

1 Непрерывность функций одной переменной. Свойства непрерывных функций.

Будем считать, что функция $f(x)$ определена на некотором подмножестве $A \subseteq \mathbb{R}$. Нам нужно, чтобы точка x_0, о которой будет идти речь, была предельной точкой множества A. Это означает, что в любой δ-окрестности точки x_0 должно быть бесконечно много точек множества A.

Определение. Число l называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 (обозначается $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$) *по Коши*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : (x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta)$ выполнено $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Аналогично определяются *левый/правый предел в точке* x_0, а также предел при стремлении x к ∞ и т.д.

Предложение. *Пусть существуют пределы* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. *Тогда* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$.

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По определению предела, $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon/2)$ такое, что для всех $x : 0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполнено $|f(x) - l_1| < \varepsilon/2$. Аналогично $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon/2)$ такое, что для всех $x : 0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполнено $|g(x) - l_2| < \varepsilon/2$.

Положим $\delta = \delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ имеем: $|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| \le |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, что и доказывает наше утверждение. □

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Замечание. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow f(x) - l$ – бесконечно малая функция.

Из определения бесконечно малой функции следует, что она, в частности, является *ограниченной* в некоторой проколотой δ-окрестности точки x_0, т.е. $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$ выполнено $|f(x)| < C$ для некоторого $C > 0$.

Предложение. *Пусть* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$, $f(x)$ *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, $\beta(x) = f(x)\alpha(x)$. *Тогда* $\beta(x)$*– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$.

Доказательство. Найдётся $\delta_1 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_1 : |f(x)| < C, C > 0$. Зададимся теперь произвольным $\varepsilon > 0$. Существует $\delta_2 = \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{C}\right) > 0$ такое, что для всех x: $0 < |x - x_0| < \delta_2$ имеем $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$. Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta : |\beta(x)| = |\alpha(x)||f(x)| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$, что и требовалось. □

Предложение. *Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. *Тогда* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = l_1 l_2$.

Доказательство. Имеем: $f(x) = l_1 + \alpha(x)$, $g(x) = l_2 + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда $f(x)g(x) = (l_1 + \alpha(x))(l_2 + \beta(x)) = l_1 l_2 + \underbrace{\alpha(x) l_2 + l_1 \beta(x) + \alpha(x)\beta(x)}_{\text{б.м. при } x \to x_0}$, что и доказывает наше утверждение. □

Предложение. *Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, $l_2 \ne 0$. *Тогда* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Доказательство.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1 + \alpha(x)}{l_2 + \beta(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha(x) l_2 - \beta(x) l_1}{l_2} \frac{1}{g(x)}.$$

Левая дробь представляет собой бесконечно малую функцию при $x \to x_0$, правая дробь есть функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Следовательно, их произведение есть бесконечно малая функция при $x \to x_0$, что и доказывает наше утверждение. $\square$

Теорема. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, *и* $g: X \to Y$, $f: Y \to \mathbb{R}$, x_0, y_0 *предельные точки для* X, Y *соответственно. Пусть* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$. *Тогда имеем* $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $y: |y - y_0| < \delta_1$ выполнено $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Далее, существует $\delta = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что при всех $x: 0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо $|g(x) - y_0| < \delta_1$. В итоге, мы получили, что $\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$, что и требовалось. $\square$

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$;
4. $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$, $\alpha(x_0) = 0$;
5. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем: ε-окрестность точки $f(x_0)$ содержит образ (при отображении f) некоторой окрестности точки x_0.

Эквивалентность этих условий следует из доказанных фактов о пределах.

Определение. Функция называется *непрерывной справа*, если $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$; *непрерывной слева*, если $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Предложение. *Для того чтобы* $f(x)$ *была непрерывной в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *была одновременно непрерывна справа и слева.*

Доказательство. Необходимость. Если $f(x)$ непрерывна, то $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$. Значит, для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x: |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда при всех $x: -\delta < x - x_0 < 0$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следовательно, $f(x)$ непрерывна слева. Аналогично получаем, что $f(x)$ непрерывна справа.

Достаточность. Функция $f(x)$ непрерывна справа и слева при $x \to x_0$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \forall x: -\delta_2 < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. При таком $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непрерывна в точке x_0. $\square$

Из свойств пределов получаем следующие свойства непрерывных функций.

Предложение. *Пусть* f, g *непрерывны в точке* x_0*. Тогда в точке* x_0 *имеем:*

1. $c_1 f + c_2 g$ *непрерывны* $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*;*
2. fg *непрерывна;*
3. f/g *непрерывна, если* $g(x_0) \neq 0$*;*
4. *Если* $f(x_0) \neq 0$*, то существует* $\delta > 0$ *такое, что* $f(x)f(x_0) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*;*
5. $f(x)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* x_0*;*
6. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0*,* $g(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = f(x_0)$*, то* $h(x) = g(f(x))$ *непрерывна в точке* x_0*.*

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна при всех x_0 с условием $a < x_0 < b$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Докажем несколько общих свойств функций, непрерывных на отрезке.

Теорема. *(Об обращении функции в нуль). Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на* $[a, b]$ *и на концах этого отрезка она принимает значения разных знаков, т.е.* $f(a)f(b) < 0$*. Тогда существует* $c \in (a, b)$ *такое, что* $f(c) = 0$*.*

Доказательство. Разделим отрезок $J_0 = [a, b]$ пополам точкой x_1. Если $f(x_1) = 0$, то всё доказано. Если нет, то $f(x_1)$ имеет знак, отличный либо от $f(a)$, либо от $f(b)$. Обозначим за J_1 тот из двух отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Теперь разделим отрезок J_1 пополам точкой x_2 и выберем отрезок J_2 так, чтобы на его концах $f(x)$ имела значения разных знаков. Продолжая дальше этот процесс, получаем последовательность вложенных отрезков $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$. Это последовательность стягивающихся отрезков, так как длина J_n равна $\frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Такая последовательность, как известно, имеет общую точку x_0. Далее, если $J_n = [a_n, b_n]$, то $a_n \to x_0$ и $b_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Отсюда $f(a_n) \to f(x_0)$ и $f(b_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$. Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то $\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$, что и требовалось. □

Теорема. *(О промежуточном значении непрерывной функции). Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$*,* $f(a) = \alpha$*,* $f(b) = \beta$ *и пусть* c *– любое число, удовлетворяющее условию*

$$\alpha \leq c \leq \beta, \text{ если } \alpha \leq \beta,$$

$$\beta \leq c \leq \alpha, \text{ если } \beta \leq \alpha.$$

Тогда существует точка $x_0 \in [a, b]$ *такая, что* $f(x_0) = c$*.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - c$. Если $g(a)$ или $g(b) = 0$, то $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если же $g(a)g(b) \neq 0$, то $g(a)$ и $g(b)$ имеют значения разных знаков. По предыдущей теореме, $\exists x_0 \in [a,\, b] : g(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = c$, что и требовалось. $\square$

Теорема. *(Об ограниченности непрерывной функции). Функция, непрерывная на $[a,\, b]$, ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. От противного: пусть $f(x)$ не ограничена. Разделим отрезок $J_0 = [a,\, b]$ пополам и обозначим за J_1 ту половину, на которой $f(x)$ не ограничена. Снова делим J_1 пополам и обозначаем за J_2 ту половину, на которой $f(x)$ не ограничена, и так далее. В итоге получаем $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$. Это – последовательность стягивающихся отрезков. Пусть x_0 – их общая точка. В ней $f(x)$ непрерывна. Возьмём $\delta(1)$ – окрестность точки x_0, в которой $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Тогда

$$|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$$

и $f(x)$ ограничена в $\delta(1)$-окрестности точки x_0. Поскольку $\delta(1) > 0$, то в ней целиком содержится всякий отрезок J_n, если только его длина $\frac{b-a}{2^n} < \delta(1)$. Но тогда $f(x)$ ограничена и на J_n, что противоречит построению $\{J_n\}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема. *(О достижении непрерывной функцией точных верхней и нижней граней). Функция, непрерывная на отрезке, достигает своей точной верхней и нижней граней, т.е.*

$$\exists x_1 \in [a,\, b] \textit{такое, что} \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1),$$

$$\exists x_2 \in [a,\, b] \textit{такое, что} \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Докажем теорему только для $\sup f(x)$, *так как для случая* $\inf f(x)$ *можно рассмотреть функцию* $f_1(x) = -f(x)$.

Доказательство. От противного. Пусть $A = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $A \neq f(x)$ при всех $x \in [a,\, b]$. Тогда $A > f(x)$, $\forall x$. Но тогда $A - f(x)$ – непрерывная функция и $A - f(x) > 0$ при всех $x \in [a,\, b]$.

Следовательно, $g(x) = \frac{1}{A - f(x)}$ тоже непрерывна. По предыдущей теореме, $g(x)$ ограничена, т.е. $\exists B > 0$ такое, что

$$\frac{1}{A - f(x)} < B.$$

Отсюда

$$A - f(x) > \frac{1}{B},\, f(x) < A - \frac{1}{B},$$

т.е. число $A - \frac{1}{B}$ есть верхняя грань, которая меньше, чем A – противоречие с тем, что A – наименьшая верхняя грань. $\square$

2 Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Условимся, что для функций с векторными значениями f, g: $f=o(g)$, если $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^m}=o\left(\|g(x)\|_{\mathbb{R}^n}\right)$. Аналогично обобщается понятие O-большого.

Далее E — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, чтобы не страдать над граничными точками.

Определение. Отображение $f:E\to\mathbb{R}^n$, определенная на множестве $E\subset\mathbb{R}^m$, называется *дифференцируемой в точке* $x\in E$, предельной для множества E, если

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=L(x)h+\alpha(x;h),} \tag{1}$$

где $L(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ – линейная относительно h функция, а $\alpha(x;h)=o(h)$, $\|h\|\to 0$, $x+h\in E$.

Линейная функция $L(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ в соотношении (1) называется *дифференциалом, касательным отображением* или *производным отображением функции* $f:E\to\mathbb{R}^n$ *в точке* $x\in E$.

Дифференциал функции $f:E\to\mathbb{R}^n$ в точке $x\in E$ обозначается символами $df(x)$, $Df(x)$ или $f'(x)$. Дифференциал, в сущности, определен на смещениях h от рассматриваемой точки $x\in\mathbb{R}^m$.

В новых обозначениях 1 переписывается, как

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=df(x)h+\alpha(x;h),} \tag{2}$$

Замечание (Геометрический смысл дифференциала). Функция

$$g_{x_0}(x)=f(x_0)+df(x_0)(x-x_0)$$

задает в точке x_0 касательную гиперплоскость к графику функции $f(x)$, поскольку по определению касания порядка 1:

$$|f(x)-g_{x_0}(x)|=o\left(x-x_0\right).$$

Дифференцируемость функции

$$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\ f=(f^1(x^1,\ldots,x^m),\ldots,f^n(x^1,\cdots,x^m))$$

равносильна дифференцируемости функций $f^i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ – это прямо следует из определения, если расписать его покоординатно. Поэтому посмотрим внимательнее на вещественнозначные функции.

Определение. Пусть $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Если существует

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^m) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m)}{h^i}, \tag{3}$$

то он называется *частной производной функции* $f(x)$ *в точке* $(x^1, \ldots, x^m)$ *по переменной* x^i. Его обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \;\; \partial_i f(x), \;\; D_i f(x), \;\; f'_{x^i}(x).$$

Замечание. Если рассмотреть специальные приращения вдоль координатных осей, то можно заключить, что для вещественнозначных функций $f(x):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, дифференциал расписывается через частные производные:

$$df(x)h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) h^i. \tag{4}$$

Теперь, пользуясь этим замечанием, можно выписать координатное представление дифференциала для функции $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f = (f^1, \ldots, f^n)$, $f^i:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$df(x)h = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ \cdots \\ df^n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \cdots \\ h^m \end{pmatrix} \tag{5}$$

Определение. Матрица $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)\right)$ называется *матрицей Якоби* в точке x отображения f.

Замечание. Операция дифференцирования линейна, а для вещественнозначных функции верны правила дифференцирования произведения и частного. В силе остается и теорема о дифференцировании композиции.

Вернемся к вещественнозначным функциям. Если пространство $\mathbb{R}^m$ рассматривать как евклидово пространство, т. е. как векторное пространство со скалярным произведением, то любую линейную функцию $L(v)$ можно будет записать в виде скалярного произведения $\langle \xi, v \rangle$ фиксированного вектора $\xi = \xi(L)$ и переменного вектора v.

В частности, найдется вектор ξ такой, что

$$df(x_0)v = \langle \xi, v \rangle.$$

Определение. Вектор $\xi \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$, отвечающий в смысле равенства выше дифференциалу $df(x_0)$ функции f в точке x_0, называется *градиентом* функции в этой точке и обозначается символом $\mathrm{grad} f(x_0)$.

$$df(x_0)v = \langle \mathrm{grad} f(x_0), v \rangle.$$

Замечание. В декартовой системе координат

$$\mathrm{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right)(x_0).$$

Теорема (Достаточное условие дифференцируемости)**.**

Пусть $f : U(x) \to \mathbb{R}$ – функция, определенная в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$.

Если функция f имеет в каждой точке окрестности $U(x)$ все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}$, то из их непрерывности в точке x следует дифференцируемость f в этой точке.

Доказательство. Без ограничения общности $U(x) = B(x; r)$, т.е. шар с центром в x радиуса r. Тогда вместе с точками $x + h = (x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m)$ области $U(x)$ должны также принадлежать точки $(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m), \ldots, (x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + h^m)$ и соединяющие их отрезки. Воспользуемся этим, применяя теорему Лагранжа для функций одной переменной:

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x) = f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\
&f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m) + \\
&f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, x^2, x^3 + h^3, \ldots, x^m + h^m) + \cdots + \\
&f(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\
&\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1 + \theta^1 h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m)h^1 + \\
&\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2 + \theta^2 h^2, \ldots, x^m + h^m)h^2 + \cdots + \\
&\frac{\partial f}{\partial x^m}(x^1, x^2, \ldots, x^m + \theta^m h^m)h^m.
\end{aligned}$$

Пока мы воспользовались лишь наличием у функции f в области $U(x)$ частных производных по каждой из переменных. Теперь воспользуемся их непрерывностью в точке x. Продолжая предыдущую выкладку, получаем, что

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)h^1 + \alpha^1 h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x)h^2 + \alpha^2 h^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)h^m + \alpha^m h^m, \tag{6}$$

где величины $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ в силу непрерывности частных производных в точке x стремятся к нулю при $h \to 0$. Это равенство и есть дифференцируемость в точке x. $\square$

3 Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.

Определение. *Неразмеченное разбиение* отрезка $[a, b]$ — это множество точек $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ такое, что $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Определение. *Диаметр разбиения* T — это число $\Delta_T = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение. *Размеченное разбиение* V отрезка $[a, b]$ — это набор точек $\{x_0, x_1, ..., x_n; \xi_1, ..., \xi_n\}$, где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ — точки, выбранные на отрезках $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$.

Диаметр размеченного разбиения определяется так же, как и для неразмеченного.

Определение. *Интегральная сумма* функции $f(x)$, соответствующая размеченному разбиению V — это сумма $\sigma(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

Определение. Число I называется *определённым интегралом Римана* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_V < \delta$, выполняется неравенство

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Пусть фиксировано неразмеченное разбиение $T = \{a = x_0, x_1, ..., b = x_n\}$ отрезка $[a, b]$. Положим $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$.

Определение. *Нижней суммой Дарбу* функции $f(x)$, отвечающей разбиению T отрезка $[a, b]$, называется сумма $s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$.

Верхней суммой Дарбу функции $f(x)$, отвечающей разбиению T отрезка $[a, b]$, называется сумма $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$.

Пусть разбиения T_1 и T_2 таковы, что любая точка разбиения T_1 является также точкой разбиения T_2. Тогда разбиение T_2 называют *измельчением* разбиения T_1. Легко видеть, что $s(T_1) \le s(T_2)$ и $S(T_1) \ge S(T_2)$.

Определение. Пусть $\mathbb{T}$ — множество всех неразмеченных разбиений отрезка $[a, b]$.

Число $I_* = \sup\limits_{T \in \mathbb{T}} s(T)$ называется *нижним интегралом Дарбу.*

Число $I^* = \inf\limits_{T \in \mathbb{T}} S(T)$ называется *верхним интегралом Дарбу.*

Следующие леммы понадобятся для доказательства критерия Римана интегрируемости функции на отрезке.

Лемма (1). *Для любого размеченного разбиения V отрезка $[a, b]$ и для любой функции $f(x)$, для которой определены суммы Дарбу, выполняются неравенства*

$$s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V)).$$

Доказательство. Напрямую следует из определения чисел m_k и M_k: для любого k $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$. □

Лемма (2). *Фиксируем неразмеченное разбиение T_0 отрезка $[a, b]$. Пусть $\alpha(T_0)$ — множество размеченных разбиений, соответствующий неразмеченному разбиению T_0. Тогда*

$$s(T_0) = \inf_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V), \qquad S(T_0) = \sup_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V).$$

Лемма (3). *Для любых двух разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a, b]$ выполнено неравенство $s(T_1) \leq S(T_2)$.*

Доказательство. Пусть $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда T_3 —это измельчение и для разбиения T_1, и для разбиения T_2, и выполняется цепочка неравенств

$$s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2).$$

□

Лемма (4). *Для любой ограниченной на отрезке функции $f(x)$ существуют верхний и нижний интегралы Дарбу I^* и I_*, причём для любого разбиения T выполняются неравенства*

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Доказательство. Пусть $M_1 = \{S(T), T \in \mathbb{T}\}$ и $M_2 = \{s(T), T \in \mathbb{T}\}$.

Выберем $\alpha \in M_1$. По предыдущей лемме для любого разбиения T выполнено неравенство $s(T) \leq \alpha$. Значит, множество M_2 ограничено сверху, и существует его супремум I_*.

Аналогично доказывается существование интеграла I^*.

Поскольку для любых $\alpha \in M_1$ и $\beta \in M_2$ выполнено неравенство $\beta \leq \alpha$, то и $I_* = \sup M_2 \leq \inf M_1 = I^*$. □

Лемма (5)**.** *Пусть функция $f(x)$ ограничена. Для любого неразмеченного разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняются неравенства*

$$I^* - I_* \leq S(T) - s(T) := \Omega(T).$$

Теперь докажем критерий интегрируемости функции на отрезке.

Теорема (Критерий Римана интегрируемости на отрезке)**.** *Ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Big(S(T) - s(T)\Big) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого ε_1 существует такое число δ_1, что для всех разбиений с диаметром $\Delta_V < \delta$ выполняются неравенства $I - \varepsilon_1 < \sigma(V) < I + \varepsilon_1$. Отсюда, из леммы (2) и из леммы (3) следует:

$$I - \varepsilon_1 < s(T) \leq S(T) < I + \varepsilon_1,$$

откуда $|S(T) - s(T)| < 2\varepsilon_1$. Положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta_1 > 0$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta$ выполнено неравенство $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$, что и требовалось.

Обратно, пусть $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Big(S(T) - s(T)\Big) = 0$. Тогда из предельного перехода и леммы (5) следует, что $I_* = I^*$. Обозначим это число за I и докажем, что это и есть интеграл Римана функции $f(x)$ на отрезке.

По лемме (1) $s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V))$. По лемме (4) $s(T(V)) \leq I \leq S(T(V))$. Стало быть, $|I - \sigma(V)| \leq S(T(V)) - s(T(V))$, и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ выполнено неравенство $|I - \sigma(V)| \leq |S(T(V)) - s(T(V))| < \varepsilon$, что и требовалось. □

Теорема. *Всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нём.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке. Стало быть, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|x - y| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Выберем разбиение T с диаметром $\Delta_T < \delta$; тогда для любого $k = 1, ..., n$ выполняется неравенство

$$\omega_k = \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Значит, и $S(T) - s(T) = \Omega(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, то есть по определению $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Big(S(T) - s(T)\Big) = 0$. По критерию Римана функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$. $\square$

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$, если $F(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,\, b]$ и $\forall x \in [a,\, b]$ $F'(x) = f(x)$. (В крайних точках отрезка берётся левая или правая производная, соответственно).

Теорема. *Пусть* $f(x) \in C[a,\, b]$. *Тогда функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ *является первообразной для функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,\, b]$.

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in [a,\, b]$. Тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt =$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0) + f(x_0))dt = f(x_0)\Delta x + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))dt.$$

Функция $f(x)$ непрерывна, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда при $\Delta x < \delta$:

$$\left|\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \frac{1}{\Delta x}\left|f(x_0)\Delta x + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))dt - f(x_0)\Delta x\right| =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0))dt\right| \le \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\; dt \le \frac{1}{\Delta x} \cdot \varepsilon \cdot \Delta x = \varepsilon.$$

Значит, по определению предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$, то есть $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

4 Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Определение. Если переменная u, которая является по смыслу функцией аргументов $x^1, \ \ldots, x^n$, задаётся функциональным уравнением вида

$$F(x^1, \ \ldots, x^n, u) = 0,$$

то говорят, что u, как функция аргументов $x^1, \ \ldots, x^n$, *задана неявно.*

Пример. В уравнении окружности, $x^2+y^2-1=0$, функция $y(x)$ задана неявно. Естественным выглядит желание понять, когда можно однозначно написать $y(x)=\ldots$. В данном примере, очевидно, просто так переписать в подобном виде ничего не выйдет: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Теорема (О существовании и непрерывности неявной функции)**.** *Пусть:*

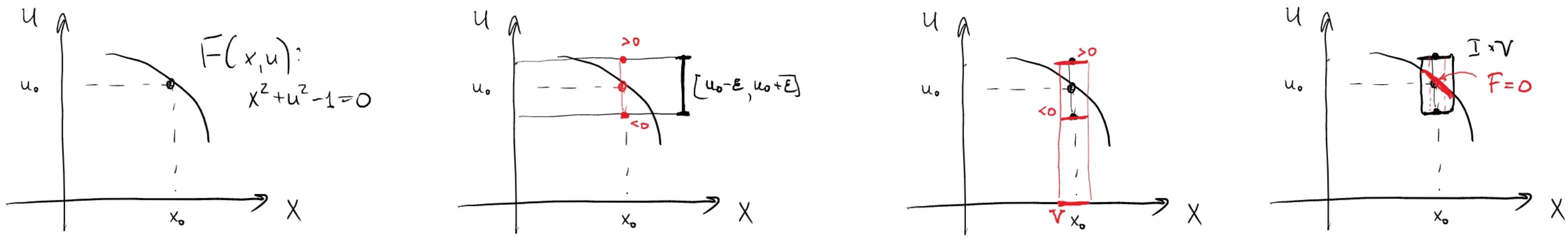
1. $F(x^1, \ \ldots, x^n, u)$ *определена и непрерывна в некоторой окрестности* U *точки* $(x^1_0, \ \ldots, x^n_0, u_0)$
2. $F(x^1_0, \ \ldots, x^n_0, u_0)=0$
3. F *строго возрастает по* u *при любом фиксированном наборе* $(x^1, \ \ldots, x^n)\in U$.

Тогда существует некоторая окрестность V *точки* $(x^1_0, \ \ldots, x^n_0)$*, и в ней – единственная функция* $\varphi(x^1, \ \ldots, x^n)$*, т.ч.:*

1. $F(x^1, \ \ldots, x^n, \varphi(x^1, \ \ldots, x^n))=0, \forall(x^1, \ \ldots, x^n)\in V$
2. $\varphi(x^1_0, \ \ldots, x^n_0)=u_0$
3. φ *непрерывна в* V.

Доказательство. Выберем такое ε, что $I=[u^0-\varepsilon, u^0+\varepsilon]: \ \{\vec{x}_0\}\times I\subset U$. По условию, F возрастает по $u \Rightarrow F(\vec{x}_0, u_0-\varepsilon)<0, \ F(\vec{x}_0, u_0+\varepsilon)>0$.

F непрерывна, значит, $\exists V$ – окрестность $\vec{x}_0$, т.ч. $F(x, u_0-\varepsilon)<0, \ F(x, u_0+\varepsilon)>0, \ x\in V$. Можно выбрать V так, что $I\times V\subset U$. В силу непрерывности F и теоремы Коши о промежуточном значении функции, $\forall x\in V\exists u=\varphi(x^1, \ \ldots, x^n), \ \ s.t. \ F(x, u)=0$. Функция φ, удовлетворяющая пункту (1) построена.



В силу монотонности F, для любого $\vec{x} \in V$ $\exists$ единственное u, такое что $F(\vec{x}, u) = 0$. Кроме того, взяв $\vec{x} = \vec{x}_0$, получим $F(\vec{x}, u) = 0$. Это доказывает единственность выбранной функции и пункт (2).

Докажем непрерывность φ. Выберем произвольное $\varepsilon' < \varepsilon$, построим для него по тому же алгоритму функцию φ'. В силу доказанной единственности, на $D = V \cap V'$ верно: $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon'$, что доказывает непрерывность φ в точке $\vec{x}_0$.

Осталось доказать непрерывность в произвольной точке x_0'. Пусть $u' = \varphi(x_0')$. Существует окрестность точки $(x_0', u') \subset U$, такая что к ней применима теорема. Тогда функция φ', построенная тем же образом, непрерывна в точке x_0', а в силу единственности φ, верно, что в V $\varphi' = \varphi$. $\square$

Теорема (О дифференцировании неявной функции)**.** *Пусть F – как в условии прошлой теоремы и дифференцируема в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0)$. Тогда φ будет дифференцируема в $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, причём*

$$\varphi_{x^i}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right) = -\frac{F_{x^i}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right)}{F_u\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right)}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $(\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n)$. Пусть $\Delta u = \varphi\left(x_0^1 + \Delta x^1, \ldots, x_0^n + \Delta x^n\right) - \varphi\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)$. Тогда

$$\begin{aligned}
0 &= F\left(x_0^1 + \Delta x^1, \ldots, x_0^n + \Delta x^n, u_0 + \Delta u\right) - F\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) = \\
&= \left(F_{x^1}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) + \alpha^1\right) \Delta x^1 + \cdots + \left(F_{x^n}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) + \alpha^n\right) \Delta x^n + \\
&+ \left(F_u\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) + \beta\right) \Delta u
\end{aligned}$$

где $\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \beta$ – функции от $(\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n, \Delta u)$, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю аргументов. Первое равенство следует из определения неявной функции, второе – из дифференцируемости функции F в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0)$.

Можно считать α^i и β функциями от $(\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n)$, поскольку Δu есть функция от $(\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n)$, и она стремится к нулю при стремлении к нулю аргументов. Тогда

$$\Delta u = -\frac{\left(F_{x^1}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) + \alpha^1\right)\Delta x^1 + \cdots + \left(F_{x^n}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) + \alpha^n\right)\Delta x^n}{F_u\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right) + \beta} =$$

$$= -\frac{F_{x^1}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right)}{F_u\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right)}\Delta x^1 - \cdots - \frac{F_{x^n}\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right)}{F_u\left(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0\right)}\Delta x^n + \overline{\overline{o}}\left(\Delta x^1, \ldots, \Delta x^n\right)$$

$\square$

Можно ещё написать примерно столько же про неявные *отображения* $R^m \to R^n$, но зачем :) Если очень хочется, можете посмотреть в одной из уже хорошо затеханных подборок билетов или потыкать меня, Никиту М, вдруг допишу.

5 Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

Определение. *Числовой ряд* – формальная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Определение. *Частичная сумма ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Определение. Числовой ряд называется *сходящимся* если $\exists \lim_{N\to\infty} S_N = S$ и *расходящимся* в противном случае. В случае сходимости ряда S называется его *суммой* и обозначается как $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным* если все $a_n \geq 0$.

Теорема (Критерий сходимости Коши). *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, *такое что* $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$ *для всех* $N < n < m$

Доказательство.

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = S_m - S_n$$

Таким образом критерий Коши для рядов – это критерий Коши для последовательностей, примененный к частичным суммам. □

Лемма (Необходимое условие сходимости). *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) =$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

□

Теорема (Критерий сходимости Вейерштрасса). *Знакоположительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. Его последовательность частичных сумм монотонно неубывает, а значит к ней применима теорема Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности. □

Теорема (Телескопический признак)**.** *Пусть последовательность* a_n *положительна и монотонно невозрастает. Тогда сходимость* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *эквивалентна сходимости* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$*.*

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{2^N} a_{2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}} \geq \sum_{n=1}^{2^N} a_n \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{2^N} a_{2^{\lceil \log_2(n) \rceil}} = \sum_{n=2}^{N} 2^n a_{2^n}$$

□

Из этого признака, в частности, следует расходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

Теорема (Свойство суммы рядов)**.** *Пусть есть два ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*. Тогда*

1. *Если они оба сходятся, то* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *тоже сходится.*

2. *Если один из них сходится, а второй – расходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *тоже расходится.*

Доказательство.

1. $\sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n$.

2. Если $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n)$ – тоже сходится.

□

Теорема (Оценочный признак)**.** *Пусть есть два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, причём начиная с некоторого номера n выполняется* $a_n \geq b_n$*. Тогда*

1. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *тоже сходится.*

2. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится, то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *тоже расходится.*

Доказательство.

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены. Значит ограничены частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \sum_{n=1}^{N} b_n)$. Значит, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то его частичные суммы неограничены. Значит неограничены частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \sum_{n=1}^{N} b_n)$. Значит, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

□

Теорема (Интегральный признак Коши-Маклорена)**.** *Пусть $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ – невозрастающая функция. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(t)dt$.*

Доказательство.

$$\int_1^N f(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)dt \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \geq$$

$$\geq \sum_{n=2}^{N+1} \int_n^{n+1} f(t)dt = \int_2^{N+1} f(t)dt$$

□

Теорема (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный ряд. Тогда:*

1. *Если существуют $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, такие, что для всех $n > N$ выполнено $(a_n)^{\frac{1}{n}} < 1-\varepsilon$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

2. *Если существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n > N$ выполнено $(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.*

Доказательство.

1. Пусть существуют $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, такие, что для всех $n > N$ выполнено $(a_n)^{\frac{1}{n}} < 1-\varepsilon$. Тогда, для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполнены условия оценочного признака, причем первый ряд сходится.

2. Следует из необходимого условия сходимости.

□

Теорема (Признак Куммера)**.** *Пусть есть два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$, *причём известно, что второй ряд расходится. Тогда:*

1. *Если существуют* $\epsilon > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$, *такие, что для всех* $n > N$ *выполнено* $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \epsilon$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

2. *Если существует* $N \in \mathbb{N}$, *такое, что для всех* $n > N$ *выполнено* $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. 1. Пусть существуют $\epsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, такие, что для всех $n > N$ выполнено $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > \epsilon$. выполнены условия оценочного признака. Тогда $\epsilon \sum_{k=N+1}^{m} a_k \leq \sum_{k=N}^{m-1} a_k c_k - a_{k+1} c_{k+1} = a_N c_N - a_m c_m \leq a_N c_N$. Значит, частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограниченны и ряд сходится по критерию Вейерштрасса.

2. Пусть существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n > N$ выполнено $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$. Тогда последовательность $a_n c_n$ начиная с N монотонно неубывает, из чего следует, что $a_n c_n \geq a_N c_N$ для всех $n > N$. Значит, для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $a_N c_N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ выполнены условия оценочного признака, причем второй ряд расходится.

□

Некоторые частные случаи признака Куммера имеют собственные названия:

- Признак Даламбера: $c_n = 1$
- Признак Раабе: $c_n = n$
- Признак Бертрана: $c_n = n \ln(n)$

Теорема (Признак Гаусса)**.** *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *– знакоположительный ряд, такой, что* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + O(\frac{1}{n^\lambda})$, *где* $\lambda > 1$. *Тогда ряд сходится при* $\theta > 1$ *и расходится при* $\theta \leq 1$.

Доказательство. Сходимость при $\theta > 1$ следует из признака Раабе.

Расходимость при $\theta \leq 1$ следует из признака Бертрана. □

Теорема (Признак Дирихле)**.** *Пусть последовательность* a_n *не возрастает и стремится к 0 при* $n \to \infty$. *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *частные суммы* S_n *которого ограничены. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Пусть S_n – частичные суммы b_n, $|S_n| < M$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k (S_k - S_{k-1})\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k S_k - \sum_{k=n}^{m} a_k S_{k-1}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k S_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} a_{k+1} S_k\right| =$$
$$\left|\sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_m S_m - a_n S_{n-1}\right| \leq M \left(\left|\sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1})\right| + |a_m| + |a_n|\right) \leq$$
$$\leq M\ (|a_{m-1} - a_n| + |a_m| + |a_n|) \leq 4Ma_n \to_{n\to\infty} 0.$$

□

Заметим, что если a_n не убывает и стремится к 0, то аналогичное утверждение тоже верно (так как $\sum_{i=1}^{N} a_n b_n = \sum_{i=1}^{N} (-a_n)(-b_n)$).

Частный случай признака Дирихле при $b_n = (-1)^n$ называется «признак Лейбница».

Теорема (Признак Абеля)**.** *Пусть последовательность a_n монотонна и ограничена. Пусть дан сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

Доказательство. a_n сходится по теореме Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - A) b_n + A \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Первый ряд сходится по признаку Дирихле, а второй по условию теоремы. □

6 Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Рассмотрим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ – расходится.

Теорема. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, то он сходится.*

Доказательство. Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m > n > N_\varepsilon : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| < \varepsilon.$$

□

Определение. Биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется перестановкой $\mathbb{N}$.

Теорема. *Любая перестановка членов абсолютно сходящегося ряда $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ приводит к абсолютно сходящемуся ряду $S^\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, и $S = S^\sigma$.*

Доказательство. Обозначим $A_N = \sum_{k=1}^{N} |a_k|$, $A = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $A_N^\sigma = \sum_{k=1}^{N} |a_{\sigma(k)}|$ и пусть $N_1 = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$. Тогда выполнено $A_N^\sigma \leq A_{N_1}$, значит $A_N^\sigma = \sum_{k=1}^{N} |a_{\sigma(k)}|$ сходится к некому $A^\sigma \leq A$. Рассматривая теперь исходный ряд как перестановку переставленного ряда, получаем $A^\sigma \geq A$, а значит $A^\sigma = A$. Наконец,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{\sigma(k)} + \left|a_{\sigma(k)}\right|\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

□

Замечание. Перестановкой членов условно сходящегося ряда мы можем в итоге получить любую сумму (теорема Римана).

Определение. Рассмотрим два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Тогда их *(формальным) произведением* называется ряд из всевозможных попарных произведений в некотором порядке $\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_k} b_{q_k}$.

Если этот ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка слагаемых. В этом случае она называется *суммой произведения рядов.*

Теорема. *Если ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно, то их произведение сходится абсолютно к сумме, равной произведению сумм указанных рядов.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный порядок $\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_k} b_{q_k}$. По критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\forall m \geq n > N, \ \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \sqrt{\varepsilon} \text{ и } \sum_{k=n}^{m} |b_k| < \sqrt{\varepsilon}$$

Существует такое $K > 0$, что при $k > K$ верно $p_k > N$ и $q_k > N$. Выберем $m \geq n > K$. Существует такое M, что $M > p_k$, $M > q_k$ при $k = n, \ldots, m$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{m} |a_{p_k}| \, |b_{p_k}| \leq \sum_{k=N}^{M} |a_k| \cdot \sum_{k=N}^{M} |b_k| < \varepsilon.$$

Отсюда, по критерию Коши, ряд сходится абсолютно.

Теперь можем расставить члены ряда в удобном для нас порядке. Запишем $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + \ldots$. Частные суммы этого ряда с номером n^2 равны $S_{n^2} = S_n^a S_n^b$ и сходятся к $S^a S^b -$ произведению сумм рядов. Но поскольку последовательность частных сумм этого ряда сходится, ее предел равен пределу указанной подпоследовательности. $\square$

7 Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование)

Пусть функции $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, определены на множестве E и пусть $x_0 \in E$. Если числовая последовательность $\{f_n\ (x_0)\}$ сходится, то последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *сходится в точке* x_0. Последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке $x \in E$, называют *сходящейся на множестве* E. В этом случае на множестве E определена функция $f(x)$, значение которой в любой точке $x \in E$ равно пределу последовательности $\{f_n(x)\}$. Эту функцию называют *предельной функцией последовательности* $\{f_n(x)\}$ на множестве E и пишут

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\, x \in E, \tag{1}$$

или

$$f_n(x) \to f(x),\, x \in E,$$

или, короче,

$$f_n \underset{E}{\to} f.$$

По определению предела запись (1) означает, что

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon(x) : \forall n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пусть функции $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, определены на множестве E и пусть для каждого $x \in E$ существует конечный предел последовательности $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2}$$

называют *сходящимся на множестве* E. Если $S(x)$ - предельная функция последовательности $\{S_n(x)\}$ на множестве E, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),\, x \in E,$$

то функцию называют $S(x)$ *суммой ряда* (2) и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),\, x \in E.$$

Например, если $u_n(x) = x^{n-1}$, $E = (-1,\, 1)$, то $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$, $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Если в каждой точке $x \in E$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$, то ряд (2) называют *абсолютно сходящимся на множестве* E.

Определение. Последовательность функций

$$\{f_n(x)\}$$

называется *равномерно сходящейся* на множестве E к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \ \forall x \in E \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (3)$$

В этом определении существенно, что номер N_ε не зависит от x. Если справедливо утверждение (3), то пишут

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \, x \in E,$$

или

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E, если существует функция f, удовлетворяющая условию (3). Если существуют числовая последовательность $\{a_n\}$ и номер n_0 такие, что

$$\forall n \geq n_0 \ \forall x \in E \implies |f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

причем $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то

$$f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} f(x), \, x \in E.$$

Теорема. *Чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных на множестве E, сходилась равномерно на этом множестве к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим $\sigma_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Тогда условие (4) означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \implies \sigma_n < \varepsilon. \qquad (5)$$

Если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что $\sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для $n \geq N_\varepsilon$. Поэтому неравенство $\sigma_n < \varepsilon$ выполняется при всех $n \geq N_\varepsilon$, где $n_\varepsilon = N_\varepsilon$. Обратно, если выполняется условие (4) или равносильное ему условие (5), то, используя неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n$ для $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, получаем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для $x \in E$, $n \geq n_\varepsilon$, то есть $f_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in E$. $\square$

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Чтобы последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *сходилась равномерно на множестве* E*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* ***условие Коши***

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \implies |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство. **Необходимость**. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E$. Тогда по определению равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall k \geq N_\varepsilon\ \forall x \in E \implies |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

В частности, (7) выполняется при $k = n$, если $n \geq N_\varepsilon$, и при $k = n + p$ для $p \in \mathbb{N}$, то есть

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |(f_{n+p}(x) - f(x)) - (f_n(x) - f(x))| \leq$$
$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |\ f_n(x) - f(x)\ | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

то есть выполняется условие (6).

Достаточность. Заметим, что числовая последовательность $\{f_n\ (x_0)\}$, где x_0 — фиксированная точка множества E, удовлетворяет условию Коши (6) и в силу критерия Коши для числовой последовательности существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} f_n\ (x_0)\ . \tag{8}$$

Так как предел (8) существует для каждого $x_0 \in E$, то на множестве E определена функция (обозначим ее $f(x)$), которая является предельной функцией для последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E. Запишем условие Коши (6) в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \implies |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Переходя в неравенстве (9) к пределу при $p \to \infty$ (при каждом фиксированном $n \geq N_\varepsilon$ и фиксированном $x \in E$) и учитывая, что существует $\lim_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, получаем неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

справедливое при всех $n \geq N_\varepsilon$ и для всех $x \in E$. Это означает, что

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in E.$$

□

Пусть функции $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, определены на множестве E. Обозначим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x). \tag{10}$$

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{11}$$

называется *равномерно сходящимся на множестве* E, если на этом множестве определена функция $S(x)$ такая, что

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ x \in E. \tag{12}$$

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)**.** *Для того чтобы ряд (11) равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{18}$$

Доказательство. По определению равномерная сходимость ряда (11) на множестве E означает равномерную сходимость последовательности $\{S_n(x)\}$ на E. Согласно критерию Коши для функциональной последовательности $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in E \implies |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Так как $S_{n+p}(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)$, то условие (19) равносильно условию (18). □

Теорема (Признак Вейерштрасса)**.** *Если для функционального ряда (11) можно указать такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех $n \geq n_0$ и для всех $x \in E$ выполняется условие*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \tag{20}$$

то ряд (11) сходится абсолютно и равномерно на множестве E.

Доказательство. Согласно условию (20) для любого $n \geq n_0$, любого $p \in \mathbb{N}$ и для каждого $x \in E$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k. \tag{21}$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что для него выполняется условие Коши, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N} \implies \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon, \tag{22}$$

а из (21) и (22) следует, что для ряда (11) выполняется на множестве E условие Коши (18), и в силу критерия Коши этот ряд сходится равномерно на множестве E. Абсолютная сходимость ряда (11) для каждого $x \in E$ следует из правого неравенства (21). $\square$

Следствие. *Если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *где* $a_n = \sup_{x\in E} |u_n(x)|$, *то ряд* (11) *сходится абсолютно и равномерно на множестве* E.

Теорема. *Если все члены ряда* (11) *– непрерывные на отрезке* $[a, b]$ *функции, а ряд* (11) *сходится равномерно на* $[a, b]$, *то его сумма* $S(x)$ *также непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка отрезка $[a, b]$. Для определенности будем считать, что $x_0 \in (a, b)$. Нужно доказать, что функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

непрерывна в точке x_0, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\delta\ (x_0) \implies |S(x) - S\ (x_0)| < \varepsilon, \tag{23}$$

где $U_\delta\ (x_0) = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \subset [a, b]$. По условию $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in [a, b]$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall x \in [a, b] \implies |S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{24}$$

Фиксируем номер $n_0 \geq N_\varepsilon$. Тогда из (24) при $n = n_0$ получаем

$$|S(x) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{25}$$

и, в частности, при $x = x_0$ находим

$$|S\ (x_0) - S_{n_0}\ (x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Функция $S_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0 как сумма конечного числа непрерывных функций $u_k(x)$, $k=\overline{1,\, n_0}$. По определению непрерывности

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in U_\delta\ (x_0)\subset[a,\,b]\implies|S_{n_0}(x)-S_{n_0}\ (x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (27)$$

Воспользуемся равенством

$$\begin{gathered}S(x)-S\ (x_0)=\\=(S(x)-S_{n_0}(x))+(S_{n_0}(x)-S_{n_0}\ (x_0))+(S_{n_0}\ (x_0)-S\ (x_0))\ .\end{gathered}$$

Из этого равенства, используя оценки (25)-(27), получаем

$$\begin{gathered}|S(x)-S\ (x_0)|\le\\\le|S(x)-S_{n_0}(x)|+|S_{n_0}(x)-S_{n_0}\ (x_0)|+|S_{n_0}\ (x_0)-S\ (x_0)|<\varepsilon\end{gathered} \quad (28)$$

для любого $x\in U_\delta\ (x_0)\subset[a,\,b]$, то есть справедливо утверждение (23). Так как x_0- произвольная точка отрезка $[a,b]$, то функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$. □

Из этой теоремы следует, что при выполнении ее условий возможен почленный предельный переход!

Теорема. *Если все члены ряда (11) – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, а ряд (11) сходится равномерно на $[a,\,b]$, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dt \quad (29)$$

также равномерно сходится на $[a,\,b]$, и если

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \quad (30)$$

то

$$\int_a^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dt,\qquad x\in[a,\,b] \quad (31)$$

то есть ряд (30) можно почленно интегрировать.

Доказательство. По условию ряд (30) сходится равномерно к $S(x)$ на отрезке $[a,\,b]$, то есть $S_n(x)=\sum_{k=1}^n u_k(x)\rightrightarrows S(x)$, $x\in[a,\,b]$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon:\forall n\in N_\varepsilon\ \forall t\in[a,\,b]\implies|S(t)-S_n(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (32)$$

Пусть $\sigma(x)=\int_a^x S(t)dt$, а $\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^n\int_a^x u_k(t)dt-n$-я частичная сумма ряда (29). Функции $u_k(x)$, $k\in\mathbb{N}$, по условию непрерывны на отрезке $[a,b]$ и поэтому они интегрируемы на $[a, b]$. Функция $S(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, так как она непрерывна на этом отрезке. Используя свойства интеграла, получаем

$$\sigma_n(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^n u_k(t)dt = \int_a^x S_n(t)dt$$

Следовательно

$$\sigma(x) - \sigma_n(x) = \int_a^x \left(S(t) - S_n(t)\right) dt.$$

откуда в силу условия (32) получаем

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^x dt = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon,$$

причем это неравенство выполняется для всех $n \geq N_\varepsilon$ и для всех $x \in [a, b]$. Это означает, что ряд (29) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, и выполняется равенство (31). □

Следствие. *Если* $S_n(t) \rightrightarrows S(t), x \in [a, b]$, *а каждая из функций* $S_n(t)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int_{x_0}^x S_n(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^x S(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

для любой точки $x_0 \in [a, b]$.

Теорема. *Если функции* $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{33}$$

сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, *а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{34}$$

сходится хотя бы в одной точке $x \in [a, b]$, *то есть сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x_0\right) \tag{35}$$

то ряд (11) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, *и его можно почленно* *дифференцировать, то есть*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36}$$

где

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{37}$$

Доказательство. Обозначим через $\tau(x)$ сумму ряда (33), то есть

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{38}$$

По предыдущей теореме ряд (38) можно почленно интегрировать, то есть

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)dt, \tag{39}$$

где $x_0, x \in [a, b]$, причем ряд (39) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Так как $\int_{x_0}^{x} u_n'(t)dt = u_n(x) - u_n\ (x_0)$, то равенство (39) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \tag{40}$$

где

$$v_n(x) = u_n(x) - u_n\ (x_0)\ . \tag{41}$$

Ряд (40) сходится равномерно, а числовой ряд (35) сходится (а значит, и равномерно сходится на отрезке $[a, b]$). Поэтому ряд (34) сходится равномерно на $[a, b]$ как разность равномерно сходящихся рядов. Из равенств (40),(41) и (37) следует, что

$$\int_{x_0}^{x} \tau(t)dt = S(x) - S\ (x_0)\ . \tag{42}$$

Так как функция $\tau(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ по теореме о непрерывности суммы, то в силу свойств интеграла с переменным верхним пределом левая часть равенства (42) имеет производную, которая равна $\tau(x)$. Следовательно, правая часть (42) – дифференцируемая функция, а ее производная равна $S'(x)$. Итак, доказано, что $\tau(x) = S'(x)$, то есть справедливо равенство (36) для всех $x \in [a, b]$. □

Следствие. *Если последовательность* $\{S_n(x)\}$ *непрерывно дифференцируемых на* $[a, b]$ *функций сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a, b]$*, а последовательность* $\{S'_n(x)\}$ *сходится равномерно на* $[a, b]$*, то последовательность* $\{S_n(x)\}$ *также сходится равномерно на* $[a, b]$ *к некоторой функции* $S(x)$ *и*

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S'_n(x), \quad x \in [a, b]$$

8 Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.

Разумеется, базовые свойства степенных рядов над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ ничем не отличаются, поэтому будем в основном вести повествование над $\mathbb{C}$. Если дана функция $f : K \to \mathbb{C}$, где $K \subseteq \mathbb{C}$, то будем обозначать $||f||_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$. Через $\mathcal{A}(D)$ будем обозначать пространство функций, голоморфных в области D. Для леммы Гурса, формулы Коши и теоремы Морера я ссылаюсь на билет 23.

Определение. Пусть D – это область в $\mathbb{C}$. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : D \to \mathbb{C}$ *сходится равномерно к функции* f *при* $n \to \infty$ ($f_n \rightrightarrows f$ *внутри* D), если эта последовательность сходится равномерно на любом компакте $K \subset D$, то есть $||f - f_n||_K \to 0$.

Замечание. Можно, конечно, дать аналогичное определение для областей в $\mathbb{R}$, но область в $\mathbb{R}$ – это интервал, а сходимость на компактах внутри интервала – это сходимость на любом подотрезке. Поэтому это всё не имеет особого смысла.

Теорема (Вейерштрасс). *$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(D)$ и $f_n \rightrightarrows f$ внутри $D \implies f \in \mathcal{A}(D)$ и $\forall k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D.*

Доказательство. Тот факт, что $f \in \mathcal{A}(D)$ следует из леммы Гурса, сохранения условия треугольника при равномерной сходимости и теоремы Морера. По индукции достаточно доказать, что для любого замкнутого круга $K = \overline{B_r(a)}$ выполнено $||f_n' - f'||_K \to 0$. Выберем $d > 0$ такое, что $\overline{B_{r+d}(a)} \subset D$. Пусть $\Gamma^+ = \partial^+ B_{r+d}(a)$. По формуле Коши для производных имеем

$$|f_n'(z_0) - f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma^+} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \, ||f_n - f||_{\Gamma} \, d^{-2} 2\pi(r + d) \to 0,$$

так как $f_n \rightrightarrows f$ на Γ. □

Рассмотрим *степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \qquad (*)$$

Точка z_0 называется *центром ряда* или *центром разложения*. Через $E_{(*)}$ обозначим множество сходимости ряда $(*)$.

Лемма (Абель)**.** *Ряд* $(*)$ *сходится в точке* $z_1 \neq z_0 \implies$ *ряд* $(*)$ *сходится абсолютно и равномерно внутри круга* $B(z_0, |z_1 - z_0|)$*.*

Доказательство. $|c_n(z_1 - z_0)^n| \to 0 \implies |c_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$. Пусть $K = B(z_0, r)$, $r < |z_1 - z_0|$, $q = \frac{r}{|z_1 - z_0|} \implies \sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ – это мажорирующий ряд. □

Следствие (1)**.** *Ряд* $(*)$ *расходится в* $z_2 \neq z_0 \implies$ *ряд* $(*)$ *расходится вне* $\overline{B(z_0, |z_2 - z_0|)}$*.*

Следствие (2)**.** *Для любого ряда* $(*)$ *существует* $R \in [0, \infty]$ *такое, что ряд* $(*)$ *сходится равномерно внутри* $B_{(*)} = B(z_0, R)$ *и расходится вне* $\overline{B_{(*)}}$*.*

Число R называется *радиусом сходимости.*

Следствие (3)**.** $E^0_{(*)} = B_{(*)}$.

Следствие (4)**.** *Пусть* $S(z)$ *– это сумма ряда* $(*)$*, определенная на* $B_{(*)}$*. Тогда* $S(z) \in \mathcal{A}(B_{(*)})$*.*

Доказательство. Применим теорему Вейерштрасса к частичным суммам. □

Теорема (Формула Коши-Адамара)**.**

$$l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \implies R = 1/l.$$

Доказательство. Пусть $l > 0$. Для любого z имеем

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} = l|z - z_0|$$

$\implies$ там, где $l|z - z_0| < 1$ ряд сходится, а где $l|z - z_0| > 1$ – расходится (признак Коши в предельной форме) $\implies 1/l$ подходит под определение R. Если $l = 0$, то сходится везде ($R = \infty$). Если $l = \infty$, то не сходится нигде, кроме центра разложения ($R = 0$). □

Теорема. *В степенном ряде* $(*)$ *радиус* $R > 0 \implies$ *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(z - z_0)^n$ *имеет радиус сходимости* R *и задаёт функцию* S' *в* $B_{(*)}$*.*

Доказательство. Радиус – из формулы Коши-Адамара, а почленное дифференцирование – из теоремы Вейерштрасса. □

Следствие. *В степенном ряде* $(*)$ *радиус* $R > 0 \implies$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z - z_0)^n$ *имеет радиус сходимости* R *и задаёт функцию* $\int_{z_0}^{z} S(\zeta)d\zeta$ *в* $B_{(*)}$*, то есть первообразную* S *с условием равенства нулю в точке* z_0*.*

Теперь теорема из матана для вещественных степенных рядов. Будем далее считать, что $c_n \in \mathbb{R}\ \forall n$ и $z_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема (Вторая теорема Абеля)**.** *В степенном ряде* $(*)$ *радиус* $R \in (0, \infty)$ $\implies$ *если сходится числовой ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$*, то ряд* $(*)$ *сходится равномерно на отрезке* $[z_0, z_0 + R]$.

Замечание. Первая теорема Абеля в матане – это лемма Абеля.

Доказательство. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n$ сходится равномерно по признаку Абеля, так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ сходится равномерно на $[z_0, z_0 + R]$, а последовательность $\left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n$ монотонна и равномерно ограниченна. $\square$

Следствие. *В степенном ряде* $(*)$ *радиус* $R \in (0, \infty)$ $\implies$ *если сходится числовой ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$*, то функция* $S(x)$*, задаваемая рядом* $(*)$*, непрерывна на* $[z_0, z_0 + R]$.

Разложим элементарные функции в степенные ряды (про ряды Тейлора см. также билет 23)

1. $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \ R = \infty$$

2. $$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!},\ \ R = \infty$$

3. $$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!},\ \ R = \infty$$

4. $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ \ R = 1$$

5. $$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,\ \ R = 1$$

6. $$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n},\ \ R = 1 \text{ (интегрируем (5))}$$

7.

$$(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\,\dots\,(p-n+1)}{n!}z^n + \dots,$$

$$R = 1 \text{ при } p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

8.

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{2m+1}, \ \ R = 1$$

9 Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов

Несобственные интегралы.

Пусть $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty<a<b\le+\infty$, и $\forall c\in[a,b): f\in R[a,c]$, т.е f интегрируема по Риману (если $b<\infty$, то функция f может быть как определена при $x=b$, так и не определена).

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Определение. Если НИ $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то величину $\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$ обозначают тем же символом $\int_a^b f(x)dx$, что и сам НИ, и называет ее значением НИ: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx$.

Свойства несобственных интегралов (без доказательств).

1. **Линейность.** Если $\exists$ НИ $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$, то $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ НИ $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$ сходится и
$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$
2. Если НИ $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и $\forall x\in[a,b): f(x)\le g(x)$, то
$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$
3. **Формула Ньютона-Лейбница для НИ.** Пусть $f\in C[a,b)$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на $[a,b)$. Если существует $\lim_{x\to b-0}F(x)=F(b-0)$, то НИ $\int_a^b f(x)dx$ сходится и
$$\int_a^b f(x)dx=F(b-0)-F(a).$$
4. **Замена переменной в НИ.** Пусть $f\in C[a,b)$, $g\in C^1[\alpha,\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta\le+\infty$, $a=g(\alpha)\le g(t)<b=\lim_{t\to\beta-0}g(t)$ и существует НИ $\int_a^b f(x)dx$. Тогда НИ $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ сходится и справедливо равенство
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

5. **Формула интегрирования по частям для НИ.** Пусть $u, v \in C^1[a, b)$. Если две из трех функций $\int_a^c u(x)v'(x)dx$, $\int_a^c u'(x)v(x)dx$ и $u(c)v(c)$ имеют конечный предел при $c \to b-0$, то третья функция также имеет конечный предел и справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Критерии сходимости.

Теорема (Критерий Коши сходимости НИ). *НИ* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in [a, b)$ *т.ч.* $\forall \delta', \delta'' \in (\delta, b) : |\int_{\delta'}^{\delta''} f(x)dx| < \varepsilon$.

Теорема (Критерий сходимости НИ от неотрицательной функции). *Пусть* $f \geq 0$ *на* $[a, b)$. *НИ* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда функция* $\Phi(\delta) = \int_a^\delta f(x)dx$ *ограничена сверху.*

Теорема (Признак сравнения). *Пусть* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $[a, b)$. *Тогда*

1. *если НИ* $\int_a^b g(x)dx$ *сходится, то НИ* $\int_a^b f(x)dx$ *также сходится;*

2. $\int_a^b f(x)dx = +\infty$, *то и* $\int_a^b g(x)dx = +\infty$.

Теорема (Метод выделения главной части, следствие из предыдущей теоремы). *Если*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)),\ x \to b-0,\ g(x) \geq 0,\ x \in [a, b),$$

то НИ $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ и $\forall \delta \in [a, b) : f \in R[a, \delta]$.

Определение. НИ $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, а функция f – *абсолютно интегрируемой* (в несобственном смысле) на $[a, b)$.

Теорема. *Всякий абсолютно сходящийся несобственный интеграл сходится.*

Доказательство. Следствие критерия Коши. □

Определение. Если НИ $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а НИ $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится, то НИ $\int_a^b f(x)dx$ называется *условно сходящимся*.

Теорема (Теорема о среднем). *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ монотонна на $[a, b]$. Тогда $\exists \xi \in [a, b]$,*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Теорема (Признак Дирихле). *НИ $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если f, g интегрируемы на любом подотрезке и:*

1. *$\exists C > 0$ т.ч. $\forall t \in [a, b) : |\int_a^t f(x)dx| \leq C$,*
2. *$g(x)$ монотонна на $[a, b)$,*
3. *$g(x) \to 0$ при $x \to b - 0$.*

Теорема (Признак Абеля). *НИ $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если f, g интегрируемы на любом подотрезке и:*

1. *НИ $\int_a^b f(x)dx$ сходится,*
2. *$g(x)$ монотонна на $[a, b)$,*
3. *$\exists M > 0$, т.ч. $\forall x \in [a, b) : |g(x)| \leq M$.*

Доказательство для признаков Дирихле и Абеля. Воспользуемся теоремой о среднем, $b_1, b_2 < \infty$:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx = g(b_1)\int_{b_1}^\xi f(x)dx + g(b_2)\int_\xi^{b_2} f(x)dx.$$

В условиях любой из теорем достаточно воспользоваться критерием Коши. □

Интегралы с параметром.

Определение. Пусть $Y \subset \mathbb{R}$, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ – две функции, определенные на Y, $\varphi(y) \leq \psi(y)$, и функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y) : y \in Y, x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$$

называют *интегралами, зависящими от параметра*, а переменную y называют *параметром.*

Чаще имеют дело со случаем, когда $\varphi(y) = a$, $\psi(y) = b$ и

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx. \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Определение. Если для каждого $y_0 \in Y$ интеграл

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)dx$$

сходится, то интеграл (7) называется *сходящимся на множестве* Y.

Дальше считаем, что $-\infty < a < b \le +\infty$, при любом $y \in Y$ функция $f(x, y)$ по переменной x интегрируема по Риману, на каждом отрезке $[a, c]$, где c таково, что $a < c < b$.

В этом случае, сходимость интеграла (7) на множестве Y означает, что при любом $y \in Y$ существует предел

$$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y)dx$$

или

$$\lim_{c \to b-0} \int_c^b f(x, y)dx = 0.$$

Таким образом, если интеграл (7) сходится на множестве Y, то при каждом фиксированном $y \in Y$ для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $c_\varepsilon = c_\varepsilon(y) < b$, что если $c_\varepsilon < c < b$, то

$$\left| \int_c^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Определение. Сходящийся на множестве Y интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ называется *равномерно сходящимся* на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c_\varepsilon < b$, что для всех $y \in Y$ и всех c таких, что $c_\varepsilon < c < b$, выполняется неравенство

$$\left| \int_c^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Эквивалентное определение.

Определение. Сходящийся на множестве Y интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ называется *равномерно сходящимся* на этом множестве, если

$$\lim_{c \to b-0} \sup_{y \in Y} \left| \int_c^b f(x, y)dx \right| = 0.$$

Теорема (Признак Вейерштрасса). *Если существует неотрицательная функция $\varphi(x)$, определенная на промежутке $[a, b)$ и интегрируемая по Риману на каждом отрезке $[a, c]$, где $a < c < b$, и такая, что:*

1. $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$, *где* $a \leq x < b$, $y \in Y$,
2. *интеграл* $\int_a^b \varphi(x)dx$ *сходится,*

то интеграл (7) равномерно сходится на множестве Y.

Доказательство. Для начала отметим, что условий достаточно для того, чтоб доказать, что интеграл просто сходится (даже абсолютно, используем критерий Коши). Далее, в силу сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $c_\varepsilon < b$, что если $c_\varepsilon < c < b$, то $\int_c^b \varphi(x)dx < \varepsilon$. Тогда, в силу условия 1 теоремы,

$$\left|\int_c^b f(x, y)dx\right| \leq \int_c^b |f(x, y)|dx \leq \int_c^b \varphi(x)dx < \varepsilon, c_\varepsilon < c < b, y \in Y,$$

а это обозначает абсолютную и равномерную сходимость интеграла $\int_a^b f(x, y)dx$ на множестве Y. □

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости интегралов). *Для того, чтобы интеграл (7) равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $c < b$, что для всех c', c'', удовлетворяющих условиям $c < c'$, $c'' < b$, и всех $y \in Y$ выполнено неравенство*

$$\left|\int_{c'}^{c''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Равномерная сходимость интеграла (7) означает также равномерное стремление на множестве Y функции

$$\Phi(y, c) = \int_a^c f(x, y)dx$$

при $c \to b - 0$ к функции (7).

Действительно, это обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c_\varepsilon < b$, что для каждого c, удовлетворяющего условию $c_\varepsilon < c < b$, и всех $y \in Y$ выполняется неравенство $|\Phi(y) - \Phi(y, c)| < \varepsilon$. Неравенство в условии теоремы можно переписать в виде $|\Phi(y, c') - \Phi(y, c'')| < \varepsilon$. Далее смотри про равномерную сходимость функций. □

Свойства непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру для несобственных интегралов.

Теорема (Непрерывность по параметру)**.** *Пусть*

1. $f(x, y) \in C\left([a, +\infty) \times [b, c]\right)$,
2. $$\int_a^t f(x, y)dx \underset{t\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^\infty f(x, y)dx =: g(y), \ \ y \in [b, c].$$

Тогда $g(y) \in C\left([b, c]\right)$.

Доказательство. Фиксируем $y_0 \in [b, c]$ и покажем, что $g(y)$ непрерывна в y_0.

Зафиксируем любое $t \in [a, +\infty)$. Тогда имеем в силу равномерной непрерывности на компактах

$$f(x, y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} f(x, y_0), \ \ x \in [a, t]. \tag{8}$$

В силу (8) можно взять любую последовательность $y_n \to y_0$:

$$h_n(x) := f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x, y_0) = h(x), \ \ x \in [a, t]. \tag{9}$$

Функции $h_n(x)$, $h(x)$ интегрируемы на $[a, t]$, причем в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла

$$Q_{t,n} := \int_a^t h_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^t h(x)dx =: Q_t, \ \ t \in [a, +\infty). \tag{10}$$

В то же время из условия 2 следует, что

$$Q_{t,n} := \int_a^t h_n(x)dx = \int_a^t f(x, y_n)dx \underset{t\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^\infty f(x, y_n)dx =: Q_n, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Получили

$$\left.\begin{array}{l} Q_{t,n} \underset{n\to\infty}{\to} Q_t, \ \ t \in [a, \infty) \\ Q_{t,n} \underset{t\to\infty}{\rightrightarrows} Q_n, \ \ n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} Q_{t,n},$$

где оба повторных предела существуют.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f(x, y_n)dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} Q_{t,n} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_a^t f(x, y_n)dx}_{\text{т-ма для собств. инт.}} = \lim_{t\to\infty} \int_a^t \lim_{n\to\infty} f(x, y_n)dx = \int_a^\infty f(x, y_0)dx = g(y_0).$$

$\square$

Теорема (Интегрируемость по параметру)**.** *Пусть*

1. $f(x,y) \in C\,([a,+\infty)\times[b,c])$,

2. $$\int_a^t f(x,y)dx \underset{t\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^\infty f(x,y)dx =: g(y), \;\; y \in [b,c].$$

Тогда

1. $g(y)$ *интегрируема на* $[b,c]$.

2. $h(x) := \int_b^c f(x,y)dy$ *интегрируема на* $[a,\infty)$ *и*

$$\int_b^c g(y)dy = \int_a^\infty h(x)dx \iff \int_b^c dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_b^c f(x,y)dy.$$

Доказательство. Рассмотрим $\{t_n\} : a < t_1 < t_2 < \dots < t_n \to \infty$. Тогда из свойства 2

$$g_n(y) := \int_a^{t_n} f(x,y)dx \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(y), \;\; y \in [b,c]. \tag{12}$$

Так как $f(x,y) \in C\,([a,t_n]\times[b,c])$, то

$$g_n(y) = \int_a^{t_n} f(x,y)dx \in C\,([b,c])$$

по соответствующей теореме для собственных интегралов с параметром. Значит, $g_n(y)$ интегрируема на $[b,c]$. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла и (12): $g(y)$ также интегрируема.

Проинтегрируем g_n по $[b,c]$ и переставим интегралы по соответствующей теореме для собственных интегралов

$$\int_b^c g_n(y)dy = \int_b^c dy \int_a^{t_n} f(x,y)dx = \int_a^{t_n} dx \int_b^c f(x,y)dy. \tag{13}$$

Возьмем предел $n \to \infty$ в (13), тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла и (12)

$$\begin{gathered}\int_b^c dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_b^c g(y)dy = \int_b^c \lim_{n\to\infty} g_n(y)dy = \\ \lim_{n\to\infty} \int_b^c g_n(y)dy = [(13)] = \int_a^\infty dx \int_b^c f(x,y)dy,\end{gathered} \tag{14}$$

где интеграл справа существует, потому что существует интеграл слева. □

Теорема (Дифференцируемость по параметру). *Пусть*

1. $f(x,\, y) \in C\;([a,\, +\infty) \times [b,\, c])$,
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) \in C\;([a,\, +\infty) \times [b,\, c])$,
3. $\forall y \in [b,\, c]$: $g(y) := \int_a^\infty f(x,\, y)dx < \infty$.
4. $$\int_a^t \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)dx \underset{t\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)dx,\;\; y \in [b,\, c].$$

Тогда $g(y)$ дифференцируема на $[b,\, c]$:

$$g'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)dx.$$

Доказательство. В силу условий 1 и 2 функции

$$g_n(y) := \int_a^n f(x,\, y)dx,\;\; n \geq a$$

дифференцируемы, причем

$$g_n'(y) = \int_a^n \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)dx$$

по теореме о дифференцировании под знаком интеграла для собственного случая.

Осталось заметить, что

$$\left.\begin{aligned} &g_n(y) \underset{n\to\infty}{\to} g(y) = \int_a^\infty f(x,\, y)dx < \infty, \\ &g_n'(y) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)dx \end{aligned}\right\} \implies \Big(\lim_{n\to\infty} g_n(y)\Big)' = \lim_{n\to\infty} g_n'(y)$$

или

$$g'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)dx.$$

□

10 Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, если существует интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ в одном из следующих смыслов:

1. как собственный интеграл (для этого достаточно, чтобы функция $f(x)$ была собственно интегрируема на $[a, b]$);
2. как несобственный интеграл;
3. отрезок $[a, b]$ представляется как конечное объединение непересекающихся промежутков, на каждом из которых функция абсолютно интегрируема в смысле предыдущих двух вариантов.

Замечание. (Без доказательства). Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$, а функция $g(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ абсолютно интегрируемо на $[a, b]$.

Определение. Пусть $f(x) - 2\pi$-периодическая и абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция. Если коэффициенты a_k и b_k вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(ku)du \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(ku)du \quad k = 1, 2, ...,$$

то говорят, что *ряд Фурье* $S(x, f) := a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ отвечает функции $f(x)$. В силу периодичности, a_k и b_k не зависят от промежутка интегрирования: $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \int_{-\pi}^{\pi} = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}$.

Рассмотрим k-ый член ряда Фурье, $k > 0$:

$$a_k\cos kx + b_k\sin kx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(ku)du\cos kx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(ku)du\sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos ku\cos kx + \sin ku\sin kx)du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos k(u-x)du.$$

Определение. (Многочлены Фейера). Зафиксируем набор чисел $d=(d_0, ..., d_n)$, $d_0=1/2$. Тогда *многочленом Фейера* называется многочлен

$$T_d(x, f) = d_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Подставляя выражение для k-ого члена ряда Фурье, получим:

$$T_d(x, f) = d_0 \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{k=1}^{n} d_k \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos k(u-x) du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(d_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k \cos k(u-x) \right) du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y) K_d(y) dy =$$

$$= [\text{в силу периодичности}] = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+y) K_d(y) dy =$$

$$= \left[= \int\limits_{-\pi}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi} = \right] = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) K_d(y) dy,$$

где $K_d(y) = d_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k \cos ky \Longrightarrow 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} K_d(y) dy = 1$.

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье $S_n(x, f)$. Они являются частным случаем многочлена T_d с $d=(1/2, 1, \ldots, 1)$. Следовательно, $S_n(x, f) = 1/\pi \int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) K_d(y) dy$. Обозначим соответствующую функцию K_d через D_n (она называется ядром Дирихле). Значит, $D_n(y) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos ky$ и

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 1 \Longrightarrow \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} D_n(y) dy = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow S_n(x, f) - S = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+y) + f(x-y) - 2S) D_n(y) dy.$$

Кроме того,

$$2\sin\frac{y}{2}D_n(y)=2\sin\frac{y}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right)=\sin\frac{y}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\cos ky\sin\frac{y}{2}=$$

$$=\sin\frac{y}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)y\right)-\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right)\right)=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right),$$

деля на $2\sin y/2$, получаем

$$D_n(y)=\frac{\sin(\left(n+\frac{1}{2}\right)y)}{2\sin\frac{y}{2}}.$$

Лемма. *(Лемма Римана). Если $g(u)$ — абсолютно интегрируема на $[a,b]$, то $\lim_{\rho\to\infty}\int_a^b g(u)\sin(\rho u)du=0$, и, следовательно, $\lim_{\rho\to\infty}\int_a^b g(u)\cos(\rho u)du=0$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\forall a,\, b\left|\int_a^b\sin(\rho u)du\right|=\left|\frac{\cos\rho a-\cos\rho b}{\rho}\right|\leqslant\frac{2}{\rho}.$$

1) Если $g(u)$ интегрируема в собственном смысле, то пусть

$$a=u_0<u_1<\ldots<u_n=b,\quad m_k:=\inf_{[u_k,u_{k+1}]}g(u)\implies$$

$$\implies\int_a^b g(u)\sin(\rho u)du=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}g(u)\sin(\rho u)du=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}(g(u)-m_k)\sin(\rho u)du+\sum_{k=0}^{n-1}m_k\int_{u_k}^{u_{k+1}}\sin(\rho u)du.$$

Так как $g(u)-m_k\leqslant\omega_k<\infty$ (потому что $g(u)$ интегрируема в собственном смысле) и $|\sin\rho u|\leqslant 1$, то

$$\left|\int_a^b g(u)\sin(\rho u)du\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta u_k+\frac{2}{\rho}\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|.$$

Так как $g(u)$ — интегрируема, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ разбиение, такое что $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta u_k<\varepsilon/2$. Берем отвечающие ему m_k. По ним выберем

$\rho > (4/\varepsilon)\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b g(u)\,\sin(\rho u)du\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\frac{4}{\varepsilon}\sum m_k}\sum m_k = \varepsilon \implies \lim_{\rho\to\infty}\int\limits_a^b g(u)\,\sin(\rho u)du = 0.$$

2) Если $g(u)$ абсолютно интегрируема в несобственном смысле, то пусть, без ограничения общности, особенность в точке b. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b g(u)\,\sin(\rho u)du\right| \leqslant \left|\int\limits_a^{b-\delta} g(u)\,\sin(\rho u)du\right| + \left|\int\limits_{b-\delta}^b g(u)du\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(второе слагаемое оцениваем за счет сходимости интеграла, занеся модуль под интеграл, а первое — по пункту 1).

3) Случай, когда отрезок $[a, b]$ представляется как конечное объединение непересекающихся промежутков, на каждом из которых $g(u)$ абсолютно интегрируема в собственном или в несобственном смысле, тривиально следует из предыдущего случая (поскольку интеграл по объединению промежутков равен сумме интегралов по ним).

Таким образом, во всех случаях $\lim_{\rho\to\infty}\left|\int_a^b g(u)\,\sin(\rho u)du\right| = 0$.

$\square$

Теорема. *(Признак Дини сходимости ряда Фурье). Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и $f(-\pi) = f(\pi)$. Фиксируем $x_0 \in [-\pi, \pi]$ и $S_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\varphi(u) = f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S_0$. Если для некоторого $h > 0$ функция $\varphi(u)/u$ абсолютно интегрируема на $[0, h]$, то $S(x_0, f) = S_0$.*

Доказательство. Так как $\exists\int_0^h \varphi(u)/u$, то $\exists\int_0^\pi \varphi(u)/u$. Тогда

$$|S_n(x_0, f) - S_0| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\,\sin\frac{1}{2}u}du\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\frac{\varphi(u)}{u}\right|\cdot\left|\frac{\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\right|\cdot\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right|du.$$

Доопределим функцию $((1/2)u)/(\sin(1/2)u)$ единицей в нуле. Тогда она непрерывна на $[0, \pi] \implies (\varphi(u)/u)\cdot((1/2)u)/(\sin(1/2)u)$ абсолютно интегрируема на $[0, \pi] \implies$ по лемме Римана интеграл стремится к 0 при $n \to \infty \implies \lim_{n\to\infty} S_n(x_0, f) = S_0$. $\square$

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда ее модулем непрерывности называется функция

$$\omega_f(u) = \sup_{|x_1-x_2|\leqslant u}|f(x_1) - f(x_2)|.$$

Следствие. *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и для некоторого $h > 0$ функция $\omega_f(u)/u$ абсолютно интегрируема на $[0, h]$. Тогда $\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$, $S(x_0, f) = f(x_0)$.*

Для доказательства достаточно отметить, что для $S_0 = f(x_0)$ получим $|f(x_0 \pm u) - S_0| \leq \omega_f(u)$, откуда $|\varphi(u)| \leq 2\omega_f(u)$, что влечет абсолютную интегрируемость $\varphi(u)/u$ на $[0, h]$, а значит, и выполнение признака Дини.

Этому условию удовлетворяют все функции из любого класса Гельдера (определяемого условием $\omega_f(u) \leq Cu^p$, для некоторых $C, p > 0$; сюда входят функции класса Липшица — им соответствует $p = 1$), поскольку интеграл $\int_0^h u^{p-1} du$ сходится при $p > 0$.

Одного требования непрерывности функции, однако, недостаточно. Иначе говоря, существует непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция f, ряд Фурье которой к ней не сходится.

11 Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.

В билете используется **Формула Грина**:

Теорема. *Пусть C — положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости, а D — область, ограниченная кривой C. Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ определены в области D и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то*

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy.$$

Напомним, что область Q называется *элементарной относительно оси* Oz, если найдутся две такие непрерывные в замыкании области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$, что

$$Q = \{(x,y,z) : z_1(x,y) < z < z_2(x,y),\ \ (x,y) \in G\}.$$

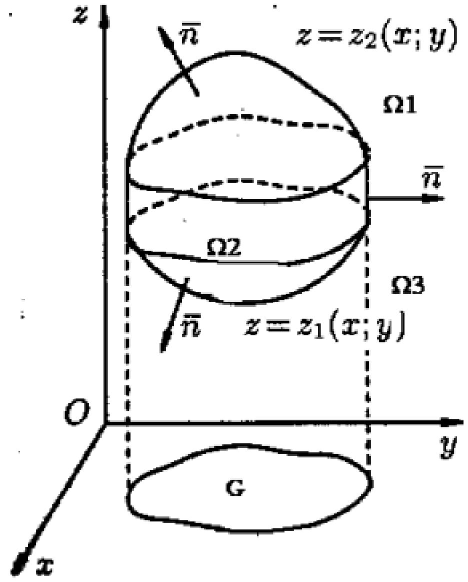
Теорема. Формула Остроградского-Гаусса. *Пусть*

1. *Q – элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;*
2. *функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.*

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_\Omega Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть Q ограничена снизу поверхностью Ω_1, уравнение которой $z = z_1(x,y)$, сверху – поверхностью Ω_2, уравнение которой $z = z_2(x,y)$, сбоку цилиндрической поверхностью Ω_3, образующие которой параллельны оси Oz (см. рис.). Функции $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ непрерывны в замкнутой области G_{xy} – проекции на плоскость Oxy, причем $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$.



Преобразуем тройной интеграл $\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ в поверхностный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона-Лейбница выполним интегрирование по z. Получим

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{G_{xy}} R(x,\, y,\, z_2(x,\, y))dxdy - \iint\limits_{G_{xy}} R(x,\, y,\, z_1(x,\, y))dxdy.$$

Двойные интегралы заменим равными им поверхностными интегралами, взятыми по внешней стороне поверхностей Ω_1 и Ω_2 соответственно:

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} R(x,\, y,\, z)dxdy - \iint\limits_{\Omega_1} R(x,\, y,\, z)dxdy.$$

Меняя в интеграле по Ω_1 сторону поверхности, получаем

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} R(x,\, y,\, z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_1} R(x,\, y,\, z)dxdy.$$

Интеграл по цилиндрической поверхности Ω_3 равен нулю, т.е.

$\iint\limits_{\Omega_3} R(x,y,z)dxdy = 0$. Добавляя его в предыдущее равенство, получим

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_1} R(x,y,z)dx\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_3} R(x,y,z)dxdy.$$

Отсюда

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy, \tag{16}$$

где Ω — поверхность, ограничивающая область Q.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint\limits_{\Omega} Q(x,y,z)dzdx, \tag{17}$$

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dydz. \tag{18}$$

Складывая почленно равенства (16), (17) и (18), получаем формулу Остроградского-Гаусса (15). $\square$

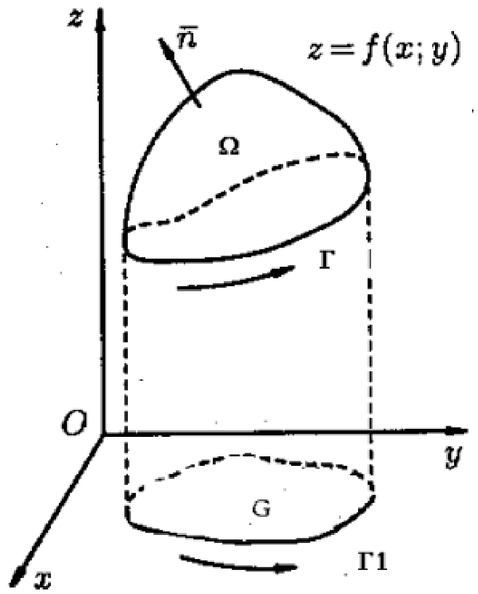
Замечание.

- Формула Остроградского-Гаусса (15) справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей.
- Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами второго рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема. Формула Стокса.

Пусть

1. *Ω – элементарная относительно оси Oz поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$, где функции $f(x,y)$, f'_x, f'_y непрерывны в замкнутой области G, проекции Ω на Oxy;*
2. *Γ – контур, ограничивающий область Ω, Γ_1 – его проекция на плоскость Oxy, являющаяся контуром, ограничивающим область G;*



3. *функции* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности* Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_{\Omega+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx.$$

Доказательство. Преобразуем криволинейный интеграл вида $\oint\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx$ в интеграл по поверхности согласно схеме $\oint\limits_{\Gamma} \to \oint\limits_{\Gamma_1} \to \iint\limits_{G} \to \iint\limits_{\Omega+}$.

Шаг 1: $\oint\limits_{\Gamma} \to \oint\limits_{\Gamma_1}$.

Так как контур Γ лежит на поверхности Ω, то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z=f(x, y)$. Поэтому значения функции $P(x, y, z)$ в точках контура Γ равны значениям функции $P(x, y, f(x, y))$ в соответствующих точках контура Γ_1, являющегося проекцией Γ. Проекции же соответствующих участков разбиения контуров Γ и Γ_1 на ось Ox совпадают.

Значит, совпадают также интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода от функции P по контурам Γ и Γ_1. Следовательно, равны и интегралы

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,\,y,\,z)dx = \oint\limits_{\Gamma_1} P(x,\,y,\,f(x,\,y))dx.$$

Шаг 2: $\oint\limits_{\Gamma_1} \to \iint\limits_{G}$.

Применяя формулу Грина, перейдем к двойному интегралу по области G. Так как подынтегральная функция равна частной производной от сложной функции, получающейся из $P(x,\,y,\,z)$ после подстановки $f(x,\,y)$ вместо z, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma_1} P(x,\,y,\,f(x,\,y))dx = -\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot f'_y\right) dxdy.$$

Шаг 3: $\iint\limits_{G} \to \iint\limits_{\Omega^+}$.

Поскольку Ω^+ – верхняя сторона поверхности, т.е. $\cos\gamma > 0$, где γ — острый угол между нормалью и осью Oz, то вектор нормали имеет координаты $\vec{N} = (-f'_x;\,-f'_y;\,1)$. Так как направляющие косинусы нормали пропорциональны соответствующим проекциям:

$$\cos\alpha = -\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \ \cos\beta = -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

то $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \dfrac{-f'_y}{1} = -f'_y$. Поэтому

$$-\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot f'_y\right) dxdy = -\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy.$$

Учитывая, что $dxdy = \cos\gamma dS$, получим

$$-\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) dxdy = -\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right) dS.$$

Поскольку $\cos\gamma dS = dxdy$ и $\cos\beta dS = dzdx$, то

$$-\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right) dS = -\iint\limits_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \frac{\partial P}{\partial z}dzdx =$$

$$= \iint\limits_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

или

$$\oint\limits_\Gamma P(x,\, y,\, z)dx = \iint\limits_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\oint\limits_\Gamma Q(x,\, y,\, z)dy = \iint\limits_{\Omega^+} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint\limits_\Gamma R(x,\, y,\, z)dz = \iint\limits_{\Omega^+} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса. $\square$

Замечание.

- Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число простых областей указанного вида.

- Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами.

Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат.

Определение. (Оператор Набла). $\nabla := \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$.

Определение. (Дивергенция). $\operatorname{div} \vec{a} := (\nabla, \vec{a}) = P'_x + Q'_y + R'_z$.

Определение. (Ротор/вихрь). $\operatorname{rot} \vec{a} := [\nabla, \vec{a}] = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$.

Определение. Криволинейный интеграл I второго рода

$$I = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

по кусочно-гладкой ориентированной замкнутой кривой Γ называется *циркуляцией вектора* $\vec{a} = (P, Q, R)$ по замкнутому контуру Γ.

Определение. Поверхностный интеграл второго рода по ориентированной гладкой поверхности S вида

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

называется *потоком вектора* $\vec{a} = (P, Q, R)$ через поверхность Ω.

Можно переформулировать в векторном виде теоремы Стокса и Гаусса-Остроградского.

Теорема. Формула Стокса. *Циркуляция вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ по кусочно - гладкой границе Γ кусочно - гладкой поверхности Ω равна потоку $\operatorname{rot} \vec{a}$ через эту поверхность:*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} dr = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{a} d\mathbf{s},$$

где dr — элемент контура Γ.

Теорема. Формула Остроградского-Гаусса. *Поток вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ через замкнутую поверхность Ω равен интегралу от $\operatorname{div} \vec{a}$, взятому по объему Q, ограниченному поверхностью Ω.*

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iiint\limits_{Q} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{v}.$$

12 Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.

Определение. *Линейным пространством* над полем k называется множество V с заданными на нём двумя операциями:

- Сложение $"+"\ : V \times V \to V$,
- Умножение на скаляр $"\cdot"\ : k \times V \to V$,

удовлетворяющими свойствам:

1. $\forall a,\, b \in V \quad a+b=b+a$;
2. $\forall a,\, b,\, c \in V \quad (a+b)+c=a+(b+c)$;
3. $\exists\, \vec{0} \in V$ такой, что $\forall a \in V \quad a+\vec{0}=a$.
4. $\forall a \in V \quad \exists\, -a \in V : a+(-a)=\vec{0}$.
5. $\forall\, \lambda \in k,\quad \forall\, a,\, b \in V \quad \lambda \cdot (a+b)=\lambda \cdot a+\lambda \cdot b$.
6. $\forall\, \lambda,\, \mu \in k,\quad \forall\, a \in V \quad (\lambda+\mu) \cdot a=\lambda \cdot a+\mu \cdot a$.
7. $\forall\, \lambda,\, \mu \in k,\quad \forall\, a \in V \quad (\lambda\mu) \cdot a=\lambda \cdot (\mu \cdot a)$.
8. $\exists\, 1 \in k$ — такой скаляр, что $\forall\, a \in V \quad 1 \cdot a=a$.

Определение. Подмножество $L \subset V$ линейного пространства V называется *линейным подпространством*, если

1. $\forall \quad a, b \in L \quad a+b \in L$;
2. $\forall \quad \lambda \in k,\ a \in V \quad \lambda \cdot a \in L$.

Иначе говоря, линейное подпространство — это подмножество линейного пространства, являющееся линейным пространством над тем же полем и относительно тех же операций.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = b_1; \\ .... \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n = b_1. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты $a_{i,j}$ и b_l берутся из поля k. Решения $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ищутся в том же поле.

Определение. Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей коэффициентов*, отвечающей данной системе линейных уравнений (СЛУ).

Определение. Матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

называется *расширенной матрицей коэффициентов* данной СЛУ.

Система линейных уравнений называется *однородной* (ОСЛУ), если $b_1 = ... = b_m = 0$.

Определение. *Линейная комбинация векторов* $a_1, ..., a_n$ — это выражение вида $\lambda_1 \cdot a_1 + ... + \lambda_n \cdot a_n$, где $\lambda_1, ..., \lambda_n \in k$.
Если среди скаляров $\lambda_1, ..., \lambda_n$ есть ненулевые, то линейная комбинация называется *нетривиальной*, если же все они нулевые —*тривиальной*.

Определение. Векторы $a_1, ..., a_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Если среди всех линейных комбинаций данных векторов нулю равна только тривиальная (то есть, из равенства $\lambda_1 \cdot a_1 + ... + \lambda_n \cdot a_n = \vec{0}$ следует, что все λ_i равны 0), то такие векторы называются *линейно независимыми*.

Определение. Система линейно независимых векторов из пространства V называется *максимальной*, если при добавлении к этой системе любого вектора из V получается линейно зависимая система.

Максимальная система линейно независимых векторов из данного пространства называется *базисом* данного пространства.

Пространство называется конечномерным, если найдется такое натуральное N, что любые N векторов линейно зависимы. Дальше будем рассматривать только такие пространства.

Предложение. *Любой элемент линейного пространства V представим в виде линейной комбинации векторов из базиса этого пространства, причём коэффициенты перед базисными векторами определяются однозначно.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — какой-то базис пространства V. Выберем произвольный вектор $v \in V$ и рассмотрим систему $\{a_1, \ldots, a_n, v\}$:

По определению базиса эта система векторов линейно зависима, то есть существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda v = 0$. Предположим, $\lambda = 0$; тогда $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$ — нетривиальная линейная комбинация базисных векторов, равная нулю. Противоречие с определением базиса; значит, $\lambda \neq 0$, а тогда

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} a_n.$$

Пусть, далее, коэффициенты могут быть выбраны неоднозначно, то есть существует два различных нетривиальных представления:

$$\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n = v = \nu_1 a_1 + \ldots + \nu_n a_n.$$

Тогда

$$(\mu_1 - \nu_1) a_1 + \ldots + (\mu_n - \nu_n) a_n = 0$$

— нетривиальная (поскольку мы взяли различные представления, существует такое i, что $\mu_i \neq \nu_i$) линейная комбинация базисных векторов, равная нулю. Противоречие с линейной независимостью векторов в базисе. $\square$

Определение.

1. *Линейной оболочкой* векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется множество $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, состоящее из всех векторов, представимых в виде $\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ (то есть множество всех векторов, представимых в виде линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_n$).

2. *Линейной оболочкой* векторов $a_1, ..., a_n \in V$ называется минимальное (по включению) линейное подпространство V, содержащее данные векторы.

Легко проверить, что приведённые выше определения линейной оболочки эквивалентны.

Лемма. *Система векторов $\{a_1, ..., a_n\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из a_i, $i = 1, ..., n$, представим в виде линейной комбинации остальных.*

Доказательство. Пусть система векторов линейно зависима. Это значит, что $\lambda_1 \cdot a_1 + ... + \lambda_n \cdot a_n = 0$, и без ограничения общности (при необходимости перенумеруем векторы) $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} a_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n$.

Обратно, пусть, без ограничения общности, $a_1 = \mu_2 a_2 + ... + \mu_n a_n$. Тогда $-1 \cdot a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_n a_n = 0$ — нетривиальная линейная комбинация, равная нулю. □

Из данной леммы, в частности, следует, что линейная оболочка любой системы векторов является линейной оболочкой максимального линейно независимого подмножества этой системы.

Лемма (Основная лемма о линейной зависимости)**.** *Пусть $b_1, ..., b_m \in \langle a_1, ..., a_k \rangle$ и $k < m$. Тогда $\{b_1, ..., b_m\}$ — линейно зависимая система.*

Доказательство. Учитывая предыдущую лемму, можно считать,что векторы $a_1, ..., a_k$ линейно независимы.

Предположим, $b_j = \alpha_{j,1} a_1 + ... + \alpha_{j,k} a_k$; тогда из равенства

$$\lambda_1 \cdot b_1 + ... + \lambda_n \cdot b_n = 0$$

получаем:

$$(\lambda_1 \alpha_{1,1} + ... + \lambda_m \alpha_{m,1}) a_1 + ... + (\lambda_1 \alpha_{1,k} + ... + \lambda_m \alpha_{m,k}) a_k = 0.$$

Поскольку элементы $a_1, ..., a_k$ линейно независимы, отсюда сразу следует, что

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_{1,1} + ... + \lambda_m \alpha_{m,1} = 0; \\ .... \\ \lambda_1 \alpha_{1,k} + ... + \lambda_m \alpha_{m,k} = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных уравнений, в которой уравнений меньше, чем неизвестных. Значит, существует более одного решения, то есть существуют нетривиальные решения $\lambda_1, ..., \lambda_m$, а следовательно — нетривиальная линейная комбинация элементов $b_1, ..., b_m$, равная нулю. □

Следствие. *Все базисы данного линейного пространства V состоят из одинакового количества элементов.*

Доказательство. Пусть существуют два различных базиса $\{a_1, ..., a_k\}$ и $\{b_1, ..., b_m\}$ пространства V с различным количеством элементов (без ограничения общности $m > k$). Поскольку $\{a_1, ..., a_k\}$ — базис, то $b_1, ..., b_m \in \langle a_1, ..., a_k \rangle$. Тогда по основной лемме о линейной зависимости система $\{b_1, ..., b_m\}$ линейно зависима. Противоречие с тем, что это базис. $\square$

Определение. *Размерностью* линейного пространства V называется количество элементов в его базисе.

Предыдущее *следствие* показывает, что размерность линейного пространства определена корректно.

Определение. *Рангом* системы векторов называется размерность их линейной оболочки.

Ясно, что ранг системы — это количество векторов в максимальной линейно независимой подсистеме этой системы.

Определение. *Арифметическим пространством* k^n называется линейное пространство строк вида $(a_1, ..., a_n)$, где $a_i \in k$, над тем же полем k (операции определены покоординатно).

Строки матрицы $m \times n$ мы будем рассматривать как элементы k^n, а столбцы — как элементы k^m.

Определение. *Рангом* матрицы A называется ранг её системы строк.

Теорема (Теорема о ранге матрицы.)**.** *Ранг системы строк матрицы равен рангу системы её столбцов и равен размеру её максимального ненулевого минора.*

Доказательство. Обозначим ранг системы строк матрицы A за r_1, системы столбцов — за r_2, а размер максимального ненулевого минора — за r.

Сначала докажем, что $r \le r_1$. Выберем минор порядка $r' > r_1$ и рассмотрим соответствующие ему строки матрицы A. Мы выбрали $r' > r_1$ строк, а значит, они линейно зависимы. Но тогда линейно зависимы (с теми же коэффициентами) строки самого минора, следовательно, он нулевой.

Теперь докажем, что $r_1 \le r$. Приведём матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса. Поскольку свойство минора быть нулевым или ненулевым при этом приведении сохраняется, мы можем работать с новой матрицей A' вместо матрицы A.

Матрица A' содержит r_1 ненулевых строк, в каждой из которых самый левый ненулевой элемент — это 1. Выберем минор, составленный из тех строк и столбцов, в которых стоят эти первые в своей строке единицы. Это минор размерности r_1, и он ненулевой (поскольку мы получили единичную матрицу), следовательно, $r_1 \leq r$.

Осталось понять, что миноры матрицы A и миноры транспонированнной матрицы A^T одинаковы, в частности, одинаковы и размеры максимальных ненулевых миноров данных матриц. Ранг же системы столбцов матрицы A — это ранг системы строк матрицы A^T. Отсюда получаем: $r_1 = r = r_2$. $\square$

Вернёмся к СЛУ и ОСЛУ.
Будем рассматривать решения $(x_1, ..., x_n)$ системы однородных линейных уравнений как векторы-строки. Тогда множество векторов-решений данной системы образует линейное пространство (операции сложения и умножения на скаляр определяются покоординатно) — линейное подпространство пространства k^n. Действительно, легко проверить, что для двух решений $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ и для любого $\lambda \in k$ векторы $\lambda\overline{x}^1$ и $\overline{x}^1 + \overline{x}^2$ тоже являются решениями.

Определение. *Фундаментальной системой решений ОСЛУ* называется базис пространства её строк-решений.

Размерность фундаментальной системы решений (и размерность пространства строк-решений) однородной системы линейных уравнений от n переменных с матрицей A равна $n - rankA$. Это легко увидеть, приведя систему к ступенчатому виду методом Гаусса. Разумеется, ОСЛУ всегда имеет хотя бы одно (тривиальное) решение.
Для неоднородных же систем линейных уравнений имеет место

Теорема (Теорема Кронекера-Капелли)**.** *Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы её коэффициентов равен рангу расширенной матрицы её коэффициентов.*

Доказательство. Обозначим $rank\Big(A\Big) = r_1$ и $rank\Big(A\Big|b\Big) = r_2$. Ясно, что всегда $r_1 \leq r_2$.

Пусть система имеет решение. Тогда столбец b выражается в виде линейной комбинации столбцов матрицы A, то есть столбец b принадлежит линейному пространству, порождённому столбцами матрицы A, и следовательно ранг системы столбцов матрицы A равен рангу системы столбцов расширенной матрицы $(A|b)$.

Пусть теперь система не имеет решений. Выберем среди столбцов матрицы A r_1 линейно независимых (назовём полученный набор столбцов E; система не имеет решений, следовательно, столбец b не выражается в виде их линейной комбинации. Кроме того, ни один столбец из E не выражается через остальные столбцы E и вектор b (если бы он выражался с нулевым коэффициентом перед b, то система была бы линейно зависимой; если же с ненулевым — сам столбец B выражался бы через E). Стало быть, $E \cup \{b\}$ — линейно независимая система столбцов расширенной матрицы, и $r_2 \geq r_1 + 1$. $\square$

13 Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

Определение. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Функция $\mathcal{B}\colon V\times V\to\mathbb{K}$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу:

$$\mathcal{B}(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\, y)=\lambda_1\mathcal{B}(x_1,\, y)+\lambda_2\mathcal{B}(x_2,\, y) \text{ и}$$
$$\mathcal{B}(x,\, \mu_1y_1+\mu_2x_2)=\mu_1\mathcal{B}(x,\, y_1)+\mu_2\mathcal{B}(x,\, y_2)$$

для любых $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \mu_1,\, \mu_2\in\mathbb{K}$ и $x,\, x_1,\, x_2,\, y,\, y_1,\, y_2\in V$.

Матрицей билинейной функции $\mathcal{B}$ в базисе $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n$ пространства V называется квадратная матрица $B=(b_{ij})$ размера n, где $b_{ij}=B(e_i,\, e_j)$.

Зная матрицу $B=(b_{ij})$, можно восстановить значение $\mathcal{B}(x,\, y)$ на любой паре векторов $x=x^ie_i$ и $y=y^je_j$:

$$\mathcal{B}(x,\, y)=\mathcal{B}(x^ie_i,\, y^je_j)=x^iy^jB(e_i,\, e_j)=b_{ij}x^iy^j=x^tBy.$$

Выражение $B(x,\, y)=b_{ij}x^iy^j=x^tBy$ называется *билинейной формой*. Билинейная форма представляет собой однородный многочлен степени 2 от двух наборов переменных $x^1,\, \ldots,\, x^n$ и $y^1,\, \ldots,\, y^n$, который линеен по x при фиксированных y и линеен по y при фиксированных x.

Теорема (закон изменения матрицы билинейной функции)**.** *Имеет место соотношение*

$$B'=C^tBC,$$

где B — матрица билинейной функции $\mathcal{B}\colon V\times V\to\mathbb{K}$ в базисе $e_1,\, \ldots,\, e_n$, B' — матрица в базисе $e'_1,\, \ldots,\, e'_n$ и C — матрица перехода от базиса $e_1,\, \ldots,\, e_n$ к базису $e'_1,\, \ldots,\, e'_n$.

Доказательство. Пусть $B=(b_{ij})$, $B'=b'_{ij}$, $C=(c^i_{i'})$. Мы имеем

$$b'_{ij}=\mathcal{B}(e'_i,\, e'_j)=\mathcal{B}(c^i_{i'}e_i,\, c^j_{j'}e_j)=c^i_{i'}c^j_{j'}\mathcal{B}(e_i,\, e_j)=c^i_{i'}b_{ij}c^j_{j'},$$

что эквивалентно матричному соотношению $B'=C^tBC$. □

Следствие. *Ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса.*

Доказательство. Так как матрица C обратима, $\mathrm{rk}(B')=\mathrm{rk}(C^tBC)=\mathrm{rk}(B)$. □

Определение. *Рангом* билинейной функции $\mathcal{B}$ (обозначается $\mathrm{rk}(\mathcal{B})$) называется ранг её матрицы в произвольном базисе. Билинейная функция $\mathcal{B}$ в пространстве V называется *невырожденной*, если $\mathrm{rk}(\mathcal{B}) = \dim V$.

Определение. Билинейная функция $\mathcal{B}$ называется *симметричной*, если $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

Определение. *Квадратичной формой* над $\mathbb{K}$ называется однородный многочлен второй степени от n переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$, т.е. многочлен вида

$$Q(x) = Q(x^1, \ldots, x^n) = q_{ij}x^i x^j = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}(x^i)^2 + \sum_{i<j} 2q_{ij}x^i x^j,$$

где $q_{ij} = q_{ji} \in \mathbb{K}$. Симметричная матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей квадратичной формы.*

Если $B(x, y) = b_{ij}x^i y^j$ — симметричная билинейная форма, то $B(x, x) = b_{ij}x^i x^j$ является квадратичной формой с матрицей B. Таким образом, квадратичная форма полностью определяет симметрическую билинейную форму $B(x, y)$, а значит и симметрическую билинейную функцию $\mathcal{B}(x, y)$. Это можно увидеть и не прибегая к выбору базиса: для симметрической билинейной функции имеет место соотношение:

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathcal{B}(x+y, x+y) - \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y)),$$

т.е. значение $\mathcal{B}$ на произвольной паре векторов можно восстановить, зная лишь значения $\mathcal{B}$ на парах совпадающих векторов. Функцию $V \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \mathcal{B}(x, x)$ называют *квадратичной функцией.*

Теорема. *Для симметричной билинейной функции $\mathcal{B}$ над полем характеристики, отличной от 2, существует базис, в котором её матрица диагональна. Другими словами, любую квадратичную форму линейной заменой $x = Cy$ можно привести к виду*

$$Q(y) = r_{11}(y^1)^2 + \ldots r_{nn}(y^n)^2.$$

Доказательство. Пусть $Q(x) = q_{ij}x^i x^j$ — квадратичная форма. Доказательство заключается в последовательном упрощении $Q(x)$, использующем основное и два вспомогательных преобразования.

Основное преобразование производится, если в квадратичной форме

$Q(x) = q_{ij}x^ix^j$ первый коэффициент q_{11} не равен нулю. Тогда имеем

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \ldots + 2q_{1n}x^1x^n + \sum_{i,j>1} q_{ij}x^ix^j =$$

$$= q_{11}\left(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right)^2 - q_{11}\left(\frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right)^2 + \sum_{i,j>1} q_{ij}x^ix^j =$$

$$= q_{11}\left(x^1 + \frac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots \frac{q_{1n}}{q_{11}}x^n\right)^2 + Q'(x^2, \ldots, x^n),$$

где $Q'(x^2, \ldots, x^n)$ — некоторая квадратичная форма от $n-1$ переменных. Теперь сделаем замену координат

$$u^1 = x^1 + \tfrac{q_{12}}{q_{11}}x^2 + \ldots \tfrac{q_{1n}}{q_{11}}x^n,$$
$$u^2 = x^2, \ \ldots, \ u^n = x^n.$$

В результате форма $Q(x)$ преобразуется к виду

$$Q(u^1, \ldots u^n) = q_{11}(u^1)^2 + Q'(u^2, \ldots, u^n)$$

Если в форме $Q'(u^2, \ldots, u^n)$ первый коэффициент (т.е. q'_{22}) не равен нулю, то можем применить основное преобразование, и т.д.

Первое вспомогательное преобразование производится если $q_{11} = 0$, но существует $q_{ii} \neq 0$. В этом случае мы делаем замену $u^1 = x^i$, $u^i = x^1$, а остальные координаты без изменений. В результате получим $q'_{11} \neq 0$

Второе вспомогательное преобразование производится, если все коэффициенты q_{ii} при квадратах равны нулю, но при этом есть хотя бы один ненулевой коэффициент (в противном случае $Q(x) \equiv 0$ уже имеет нужный вид). Пусть $q_{ij} \neq 0$, где $i < j$. Произведем замену координат

$$x^i = u^i, \quad x^j = u^i + u^j, \qquad x^k = u^k, \quad \text{при } k \neq i, j$$

В результате форма $Q(x)$ преобразуется к виду

$$Q(x) = 2q_{ij}x^ix^j + \ldots = 2q_{ij}u^i(u^i + u^j) + \ldots = 2q_{ij}(u^i)^2 + \ldots,$$

где $\ldots$ означает члены, не содержащие квадратов. Далее мы можем применять предыдущие преобразования.

Последовательно применяя основное и (если нужно) вспомогательные преобразования, мы приводим форму $Q(x)$ к диагональному виду. □

Предложение. *Для любой симметричной билинейной функции $\mathcal{B}$ в пространстве над полем $\mathbb{R}$ существует базис, в котором её матрица имеет* *диагональный вид с* 1, -1, 0 *на диагонали. Другими словами, вещественную квадратичную форму* $Q(x)$ *линейной заменой координат* $x=Cy$ *можно привести к виду*

$$(y^1)^2+\ldots+(y^p)^2-(y^{p+1})^2-\ldots-(y^{p+q})^2.$$

Доказательство. Сперва с помощью предыдущей теоремы приведем квадратичную форму к виду

$$Q(u)=r_{11}(u^1)^2+\ldots+r_{nn}(u^n)^2.$$

Если $r_{ii}>0$, то замена $y_i=\sqrt{r_{ii}}u^i$ приводит слагаемое $r_{ii}(u^i)^2$ к виду $(y^i)^2$. Если же $r_{ii}<0$, то замена $y_i=\sqrt{-r_{ii}}u^i$ приводит слагаемое $r_{ii}(u^i)^2$ к виду $-(y^i)^2$. В результате получим требуемый вид квадратичной формы с 1, -1, 0 на диагонали. $\square$

Вид, описанный в предложении, называется *нормальным видом* вещественной симметрической билинейной квадратичной формы (вещественной квадратичной формы). Над полем $\mathbb{C}$ квадратичную форму можно ещё больше упростить.

Предложение. *Для любой симметричной билинейной функции* $\mathcal{B}$ *в пространстве над полем* $\mathbb{C}$ *существует базис, в котором её матрица имеет диагональный вид с* 1 *и* 0 *на диагонали. Другими словами, комплексную квадратичную форму* $Q(x)$ *линейной заменой координат* $x=Cy$ *можно привести к виду*

$$(z^1)^2+\ldots+(z^r)^2.$$

Доказательство. С помощью предыдущего предложения приведем квадратичную форму к виду $(y^1)^2+\ldots+(y^p)^2-(y^{p+1})^2-\ldots-(y^{p+q})^2$. Затем сделаем замену координат $y^k=z^k$ при $k\le p$ и $y^k=iz^k$ при $k>p$. В результате получим требуемый вид, где $r=p+q=\mathrm{rk}Q$. $\square$

Вид, описанный в предложении выше, называется *нормальным видом* комплексной симметрической билинейной квадратичной формы (комплексной квадратичной формы).

В случае симметрической билинейной формы над полем $\mathbb{C}$ нормальный вид зависит только от её ранга, и поэтому мы получаем:

Предложение. *Две комплексные симметрические билинейные формы (комплексные квадратичные формы) получаются друг из друга линейной заменой координат тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

В случае вещественных симметрических билинейных форм ситуация сложнее: их нормальный вид не определяется одним лишь рангом, а зависит ещё от количества 1 и -1 на диагонали матрицы. Оказывается, что нормальный вид такой формы не зависит от способа приведения к нормальному виду:

Теорема (Закон инерции)**.** *Количество* 1, -1, 0 *на диагонали матрицы вещественной симметрической билинейной функции не зависит от способа приведения к нормальному виду.*

Другими словами, если квадратичная форма $Q(x)$ *вещественной линейной заменой* $x = Cy$ *приводится к виду*

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^p)^2 - (y^{p+1})^2 - \ldots - (y^{p+q})^2,$$

а вещественной заменой $x = C'z$ *— к виду*

$$(z^1)^2 + \ldots + (z^{p'})^2 - (z^{p'+1})^2 - \ldots - (z^{p'+q'})^2,$$

то мы имеем $p = p'$ *и* $q = q'$*.*

Доказательство. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты в исходном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, $(y^1, \ldots, y^n)$ — координаты в базисе $f_1, \ldots, f_n$, а $(z^1, \ldots, z^n)$ — координаты в базисе $g_1, \ldots, g_n$. Рассмотрим подпространства

$$\begin{gathered} U_+ = \langle f_1, \ldots, f_p \rangle, \quad U_- = \langle f_{p+1}, \ldots, f_{p+q} \rangle, \quad U_0 = \langle f_{p+q+1}, \ldots, f_n \rangle \\ W_+ = \langle g_1, \ldots, g_{p'} \rangle, \quad W_- = \langle g_{p'+1}, \ldots, g_{p'+q'} \rangle, \quad W_0 = \langle g_{p'+q'+1}, \ldots, g_n \rangle \end{gathered}$$

Для ненулевого вектора $x \in U_+$ мы имеем $x = y^1 f_1 + \ldots + y^p f_p$ и поэтому $\mathcal{B}(x, x) = (y^1)^2 + \ldots + (y^p)^2 > 0$. Аналогично, если $x \in U_- \oplus U_0$, то $\mathcal{B}(x, x) \leq 0$. Для ненулевого вектора $x \in W_+$ мы имеем $\mathcal{B}(x, x) > 0$, а для $x \in W_- \oplus W_0$ имеем $\mathcal{B}(x, x) \leq 0$.

Предположим, что $p > p'$. Тогда

$$\dim U_+ + \dim(W_- \oplus W_0) = p + (n - p') > n = \dim V,$$

значит $U_+ \cap (W_- \oplus W_0) \neq \{0\}$. Возьмем ненулевой вектор x в этом пересечении. Так как $x \in U_+$, то $\mathcal{B}(x, x) > 0$. С другой стороны, из $x \in W_- \oplus W_0$ следует, что $\mathcal{B}(x, x) \leq 0$. Противоречие.

Следовательно $p = p'$. Кроме того, $p + q = \mathrm{rk}\mathcal{B} = p' + q'$, а значит и $q = q'$. □

Определение. Разность $p - q$ между числом положительных и отрицательных диагональных элементов в нормальном виде называется *сигнатурой* вещественной симметрической билинейной функции

14 Линейные преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями

Пусть V — векторное (линейное) пространство над полем $\mathbb{F}$.

Определение. *Линейным преобразованием* пространства V называется отображение $\mathcal{A} : V \to V$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$
2. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$

Для любых $x, x_1, x_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

В случае, когда линейное пространство V конечномерно имеет место следующее важное утверждение.

Теорема. *Для фиксированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V и фиксированного набора его векторов $b_1, \ldots, b_n$ существует единственное линейное преобразование, переводящее векторы $e_1, \ldots, e_n$ соответственно в векторы $b_1, \ldots, b_n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x \in V$. Он имеет однозначное разложение по базисным векторам:

$$x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n.$$

Определим отображение $\phi : V \to V$ следующим образом:

$$\phi(x) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Подставив базисные векторы, легко видеть, что $\phi(e_i) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ то есть условие теоремы выполняется. Проверим линейность отображения ϕ.

Подставим λx, $\lambda \in \mathbb{F}$:

$$\phi(\lambda x) = \lambda a_1 b_1 + \ldots + \lambda a_n b_n = \lambda(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) = \lambda \phi(x).$$

Теперь проверим второе условие. Для $y = c_1 e_1 + \ldots c_n e_n$ имеем:

$$x + y = (a_1 + c_1)e_1 + \ldots + (a_n + c_n)e_n.$$

Подставим в отображение:

$$\phi(x+y) = (a_1+c_1)b_1+\ldots+(a_n+c_n)b_n = (a_1 b_1+\ldots+a_n b_n)+(c_1 b_1+\ldots+c_n b_n) = \phi(x)+\phi(y).$$

Осталось проверить единственность отображения ϕ. Пусть ψ второе преобразование, удовлетворяющее условию $\psi(e_i) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу линейности ψ для произвольного $x = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$:

$$\psi(x) = \psi(a_1 e_1+\ldots+a_n e_n) = a_1 \psi(e_1)+\ldots+a_n \psi(e_n) = a_1 b_1+\ldots+a_n b_n = \phi(x).$$

$\square$

Данная теорема означает, что линейное преобразование однозначно задается образами векторов какого-либо базиса. Поэтому для описания линейных преобразований удобно использовать матрицы. Пусть V линейное преобразование с фиксированным базисом $\{e\}$. Образы базисных векторов задаются своими координатами:

$$\left.\begin{array}{l} \phi\,(e_1) = a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n \\ \phi\,(e_2) = a_{12}e_1 + \ldots + a_{2n}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi\,(e_n) = a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n \end{array}\right\}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Называется *матрицей линейного преобразования ϕ в базисе $e_1, \ldots e_n$.*

Таким образом, при фиксированном базисе, каждому линейному преобразованию соответствует единственная матрица с координатами из $\mathbb{F}$.

Обратно, пусть дана квадратная матрица A порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$. Пользуясь этой матрицей, можно найти при фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ образы базисных элементов. Но по предыдущей теореме выбором этих векторов определяется линейное преобразование, матрицей которого, очевидно, является A. Получается, имеет место взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями и квадратными матрицами порядка n. Прямой подстановкой нетрудно проверить, что если обозначить за X столбец координат вектора x, а за Y вектор координат его образа $\phi(x)$, то имеет место матричное равенство:

$$Y = AX$$

Рассмотрим как меняются матрицы линейного преобразования при переходе к другому базису.

Теорема. *Если A, A_1 - матрицы линейного преобразования φ пространства R_n соответственно в базисах $\{e\}, \{e'\}$ и $T-$ матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, то*

$$A_1 = T^{-1}AT.$$

Доказательство. Рассмотрим векторы x и $y = \varphi x$. Их координатные столбцы X и Y в базисе $\{e\}$ связаны равенством $Y = AX$.

Аналогично для их координатных столбцов X_1, Y_1 в базисе $\{e'\}$ имеем:

$$Y_1 = A_1 X_1. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$Y = TY_1, \quad X = TX_1.$$

Отсюда

$$Y_1 = T^{-1}Y = T^{-1}(AX) = T^{-1}\left(A\left(TX_1\right)\right) = \left(T^{-1}AT\right) X_1.$$

Т. е.

$$Y_1 = \left(T^{-1}AT\right) X_1. \qquad (2).$$

Так как равенства (1) и (2) верны для любых векторов X_1, то матрицы A_1 и $T^{-1}AT$ задают одно и то же линейное преобразование в базисе $\{e'\}$. Следовательно, $A_1 = T^{-1}AT$.

□

Определение. *Собственным вектором* линейного преобразования φ пространства V над полем $\mathbb{F}$ называется ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию

$$\varphi x = \lambda x.$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}$. Число λ при этом называется *собственным значением* преобразования φ, соответствующим вектору x.

Предложение. *Собственные векторы линейного преобразования* φ*, отвечающие данному собственному значению* λ*, вместе с нулевым вектором образуют подпространство.*

Доказательство. Обозначим через $V^{(\lambda)}$ множество всех собственных векторов, отвечающих данному λ, дополненное нулевым вектором.

Если $x_1, x_2 \in V^{(\lambda)}$, то $\varphi(x_1) = \lambda x_1$ и $\varphi(x_2) = \lambda x_2$ и в силу линейности φ

$$\varphi\,(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda\,(x_1 + x_2)\,.$$

Следовательно, $x_1 + x_2 \in V^{(\lambda)}$. Далее, при любом $\alpha \in \mathbb{F}$ имеем:

$$\varphi\,(\alpha x_1) = \alpha\varphi(x_1) = \alpha\lambda x_1 = \lambda\,(\alpha x_1)\,.$$

Таким образом, из $x_1 \in V^{(\lambda)}$ следует $\alpha x_1 \in V^{(\lambda)}$. Получаем, что $V^{(\lambda)}$– подпространство пространства V. Это подпространство называется принадлежащим собственному значению λ. □

Предложение. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *линейного преобразования* φ*, соответствующие попарно различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$*, линейно независимы.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по числу векторов m.

Для $m = 1$ утверждение верно, так как всякий отличный от нулевого вектор линейно независим. Положим, что утверждение верно для $m - 1$ собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ при попарном неравенстве собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$.

Докажем, что тогда и система собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ линейно независима, если попарно различны собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m$.

Допустим противное. Тогда по свойству линейной зависимости вектор x_m линейно выражается через $x_1, \ldots, x_{m-1}$, так что при некоторых $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{F}$

$$x_m = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{m-1} x_{m-1}. \tag{1}$$

Применяя к обеим частям равенства (1) линейное преобразование φ, получим:

$$\lambda_m x_m = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + c_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1}. \tag{2}$$

Умножая (1) на λ_m и вычитая (2), получим:

$$c_1\,(\lambda_m - \lambda_1)\,x_1 + c_2\,(\lambda_m - \lambda_2)\,x_2 + \ldots + c_{m-1}\,(\lambda_m - \lambda_{m-1})\,x_{m-1} = 0. \tag{3}$$

Так как система $x_1, \ldots, x_{m-1}$ линейно независима и разности $\lambda_m - \lambda_1, \lambda_m - \lambda_2, \ldots, \lambda_m - \lambda_{m-1}$ по условию не равны нулю, то из (3) следует, что $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$. Тогда из (2) получаем $x_m = 0$, что противоречит определению собственного вектора. Наше допущение оказалось неверным. Следовательно, система $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ линейно независима. $\square$

Следствие. *Линейное преобразование n-мерного пространства не может иметь более n собственных векторов с попарно различными собственными значениями.*

Определение. Пусть A - квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij} из поля $\mathbb{F}$. Тогда многочлен

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E|$$

называется *характеристическим многочленом матрицы A*.

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ относительно λ называют *характеристическим уравнением*, а его корни – *характеристическими числами матрицы A*.

Из определения определителя следует, что $\Delta(\lambda)$ есть многочлен от λ степени n. Коэффициент старшего члена равен $(-1)^n$.

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ матрицы A линейного преобразования φ есть определитель $|A - \lambda E|$. Как известно, в другом базисе матрица A_1 того же преобразования φ имеет вид:

$$A_1 = T^{-1}AT,$$

где T - матрица перехода к новому базису. В новом базисе характеристический многочлен есть определитель матрицы $A_1 - \lambda E$. Имеем:

$$|A_1 - \lambda E| = \left|T^{-1}AT - \lambda E\right| = \left|T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET\right| = \left|T^{-1}(AT - \lambda ET)\right| =$$
$$\left|T^{-1}(A - \lambda E)T\right| = \left|T^{-1}\right| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = \left|T^{-1}\right| \cdot |T| \cdot |A - \lambda E| = \left|T^{-1}T\right| \cdot |A - \lambda E| =$$
$$|E| \cdot |A - \lambda E| = |A - \lambda E| \, .$$

$\square$

Данная теорема позволяет называть характеристический многочлен матрицы характеристическим многочленом преобразования. Множество характеристических чисел также не зависит от базиса, поэтому уместно говорить о характеристических числах преобразования.

Теорема. *Множество собственных значений преобразования φ линейного пространства V над числовым полем $\mathbb{F}$ совпадает с множеством корней характеристического многочлена преобразования φ, принадлежащих полю $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Выберем в V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Линейному преобразованию φ в этом базисе соответствует некоторая матрица A с элементами из поля $\mathbb{F}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n -$ произвольный вектор из V и

$$\varphi(x) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Для координат векторов x и $\varphi(x)$ имеют место известные соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n \\ \eta_2 = a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n \end{array}\right\}$$

Пусть некоторое число $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ является собственным значением преобразования φ, соответствующим собственному вектору x. Тогда по определению $x \neq 0$ и

$$\varphi(x) = \lambda_0 x.$$

Отсюда имеем:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n = \lambda_0\zeta_1 \\ a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n = \lambda_0\zeta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n = \lambda_0\zeta_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Или:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_0)\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n = 0 \\ a_{21}\zeta_1 + (a_{22} - \lambda_0)\ \zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)\ \zeta_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Мы видим, что набор чисел $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ является ненулевым решением однородной системы линейных уравнений. Следовательно:

$$\Delta\ (\lambda_0) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Таким образом, любое собственное значение линейного преобразования φ является корнем его характеристического многочлена, принадлежащим полю $\mathbb{F}$. Обратно, пусть характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = |A - \lambda E|$ преобразования φ имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, т. е. выполняется равенство (3). Это означает, что определитель системы уравнений (2) равен нулю, а потому она имеет ненулевое решение, например $\zeta_1^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}$. Легко видеть, что оно удовлетворяет соотношениям, полученным из (1) заменой ζ_i на $\zeta_i^{(0)}$.

В результате имеем: для вектора $x^{(0)}$ с координатами $\zeta_1^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}$ справедливо соотношение

$$\varphi x^{(0)} = \lambda_0 x^{(0)}.$$

Следовательно, λ_0 является собственным значением преобразования φ, соответствующим собственному вектору $x^{(0)}$. Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Всякое линейное преобразование пространства V над полем комплексных чисел имеет хотя бы один собственный вектор.*

15 Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Определение (Скалярное произведение)**.** Билинейная симметричная положительно определённая ($q(x, x) > 0 \; \forall x \neq 0$) форма называется *скалярным произведением.*

Определение (Евклидово пространство)**.** Векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабжённое скалярным произведением, называется *евклидовым пространством.*

По теореме о приведении формы к нормальному виду существует базис, в котором матрица скалярного произведения диагональна с 0 или ± 1 на диагонали, а в силу положительной определённости – единична.

Определение (Ортонормированный базис)**.** Базис, при котором матрица скалярного произведения единична, называется *ортонормированным.*

Определение (Ортогональная матрица)**.** Матрицы перехода между ортонормированными базисами называются *ортогональными матрицами.*

Теорема. *Матрица C ортогональна тогда и только тогда, когда $C^T = C^{-1}$.*

Доказательство. Пусть C – матрица перехода из пространства со скалярным произведением B_1 в пространство со скалярным произведением B_2. Тогда $B_2 = C^T B_1 C$. Так как в силу ортонормированности базисов $B_1 = B_2 = E$, теорема доказана. □

Определение (Симметрическое преобразование)**.** Линейное преобразование f пространства V называется *симметрическим*, если

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle, \;\; \forall x, y \in V.$$

Теорема. *В ортонормированных базисах матрицы симметрических преобразований симметричны.*

Доказательство. По определению симметрического преобразования; посмотрим, как оно действует на e_i, e_j. □

Замечание. Можно построить взаимно-однозначное соответствие между симметрическими преобразованиями и симметричными билинейными формами. Рассмотрим некоторое симметрическое преобразование $\mathcal{A}$, построим по нему функцию $g(x,\,y)=\langle x,\,\mathcal{A}y\rangle$. Она является симметричной билинейной формой (проверяется тривиально).
Сюръективность отображения следует из того, что при фиксированном базисе пространства V мы можем взять преобразование $\mathcal{A}$, заданное матрицей G.
Инъективность: $g(x,y)=\langle x,\mathcal{A}_1 y\rangle=\langle x,\mathcal{A}_2 y\rangle\Rightarrow 0\equiv\langle x,(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)y\rangle\Rightarrow 0\equiv\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2$.

Теорема (о приведении к главным осям)**.** *Для любой симметрической билинейной формы на евклидовом пространстве существует такой* ортогональный *базис, в котором ее матрица диагональна.*

Доказательство. Пользуясь построенной выше биекцией квадратичных форм на симметрические операторы, будем доказывать теорему для симметрических операторов. По известной теореме, линейный оператор пространства V над $\mathbb{R}$ имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство, то есть, такое $U\subset V$, что:

$$\mathcal{A}U\subset U;\quad \dim U\leq 2.$$

Если показать, что симметрический оператор имеет одномерное инвариантное подпространство, то дальнейшее доказательство следует из того тривиального факта, что ортогональное дополнение к инвариантному относительно симметрического оператора подпространству тоже инвариантно, а также индуктивных рассуждений по $n=\dim V$.

Докажем, что $\mathcal{A}$ имеет одномерное инвариантное подпространство в V. Либо это так по вышеупомянутой теореме, либо есть двумерное инвариантное U. Ограничение $\mathcal{A}$ на него также является симметрическим оператором, имеющим в ортонормированном базисе симметричную вещественнозначную матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

характеристический многочлен которой, $\lambda^2-\lambda(a+d)+(ad-b^2)$ с дискриминантом $(a-d)^2+4b^2$, имеет вещественный корень, что значит, что у оператора есть вещественный собственный вектор с вещественным собственным значением (здравствуй, инвариантное одномерное подпространство). $\square$

16 Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.

Определение. *Группа* – это множество G с бинарной операцией $G\times G\to G$, $(a, b)\mapsto ab$, удовлетворяющей аксиомам:

1. $(ab)c=a(bc)$, $\forall a, b, c\in G$;
2. $\exists e\in G:\forall g\in G:eg=ge=g$ (элемент e называется *нейтральным*);
3. $\forall g\in G:\exists g'\in G:gg'=g'g=e$ (элемент g' называется *обратным* к g и обозначается g^{-1}).

Замечание. Нейтральный и обратный элемент определены однозначно.

Доказательство. В самом деле: пусть e_1, e_2 – 2 нейтральных элемента. Тогда

$$e_1e_2=\begin{cases} e_1, & \text{так как } e_1 \text{ нейтрален;}\\ e_2, & \text{так как } e_2 \text{ нейтрален.}\end{cases}$$

Отсюда $e_1=e_2$, т.е. нейтральный элемент определён однозначно.

Пусть теперь b, b' – два обратных к a элемента. Тогда

$$(ba)b'=eb'=b',$$

$$b(ab')=be=b.$$

Отсюда $b=b'$, т.е. обратный элемент также определён однозначно. □

Определение. Группа G называется *коммутативной* (или *абелевой*) группой, если групповая операция удовлетворяет следующему свойству: $ab=ba$, $\forall a, b\in G$.

Определение. *Подгруппа* в группе G – это непустое подмножество $H\subseteq G$, для которого:

1. $a, b\in H\Rightarrow ab\in H$,
2. $a\in H\Rightarrow a^{-1}\in H$.

В частности, $e\in H$.

Подгруппа $H\subseteq G$ сама является группой по отношению к той же операции, ограниченной на H.

Определение. Пусть G, H – группы. *Гомоморфизмом* групп называется отображение $\varphi\colon G \to H$ такое, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in G$.

Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом.*

Пусть далее G – группа, $H \subseteq G$ – подгруппа.

Определение. Элементы $g_1, g_2 \in G$ *смежны (слева)* по H, если $\exists h \in H : g_1 = g_2 h$. Обозначение: $g_1 \sim g_2$.

Проверим свойства отношения эквивалентности.

- Рефлексивность: $g \sim g$.
- Симметричность: $g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_1 = g_2 h \Rightarrow g_2 = g_1 h^{-1} \Rightarrow g_2 \sim g_1$.
- Транзитивность: $g_1 \sim g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 = g_2 h$, $g_2 = g_3 h' \Rightarrow g_1 = g_3 h' h \Rightarrow g_1 \sim g_3$.

Классы эквивалентности $gH = \{g' = gh | h \in H\}$ называются *(левыми) смежными классами* в G по H. Правые смежные классы определяются аналогично.

Множество смежных классов обозначается G/H, его мощность $|G/H| = |G : H|$ называется *индексом* подгруппы $H \subseteq G$.

Теорема. *(Лагранжа) Пусть $|G| < \infty$, $H \subseteq G$ – подгруппа в группе G. Тогда $|G| = |H| \cdot |G/H|$.*

Доказательство. Имеется взаимно однозначное соответствие $H \Longleftrightarrow gH$, $h \Longleftrightarrow gh$. Следовательно, $|gH| = |H|$. Так как смежные классы являются классами эквивалентности, они образуют разбиение G на попарно непересекающиеся подмножества. Поэтому

$$|G| = |H| + |g_1 H| + |g_2 H| + \ldots = \underbrace{|H| + \ldots + |H|}_{|G/H| \text{ раз}} = |H||G/H|.$$

□

Пусть G – группа, $g \in G$.

Определение. *Порядок элемента*

$$o(g) = \begin{cases} & \text{наименьшее } m \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } g^m = e; \\ \infty, & \text{если такого } m \text{ не существует.} \end{cases}$$

Свойство. Пусть $o(g) = m$ (или ∞).

1. $g^n = e \Leftrightarrow m|n$ (или $n=0$, соответственно).
2. $g^k = g^l \Leftrightarrow k \equiv l \pmod{m}$.

Доказательство.

1. При $o(g)=\infty$: утверждение очевидно (так как $g^{-n}=e \Rightarrow g^n=e$).

   При $o(g)=m<\infty$: поделим с остатком: $n=mq+r,\quad 0 \le r < m$. Тогда $g^n=(g^m)^q g^r = g^r = e \Leftrightarrow r=0 \Leftrightarrow m|n$.

2. $g^k=g^l \Leftrightarrow g^{k-l}=e \Leftrightarrow m|(k-l)$ (или $k=l=0$, соответственно) $\Leftrightarrow k \equiv l \pmod{m}$ (или $k=l$, соответственно).

$\square$

Множество $H=\{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$ – подгруппа в G. Она называется *циклической подгруппой, порождённой элементом* g. Обозначение: $H=\langle g\rangle = \langle g\rangle_m$, где $m=o(g)$.

Определение. Если $G=\langle g\rangle$ для некоторого $g\in G$, то G называется *циклической группой*, g – её *порождающий элемент.*

Свойство. (3) $o(g)=|\langle g\rangle|$.

Доказательство. Используем свойство 2.

Если $o(g)=\infty$, то все g^k различные $(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \langle g\rangle$ бесконечна.

Если $o(g)=m<\infty \Rightarrow \langle g\rangle = \underbrace{\{g^0=e,\, g,\, g^2,\, \ldots,\, g^{m-1}\}}_{\text{попарно различны}}$ имеет m элементов.

$\square$

Теорема. *Все циклические группы одного порядка изоморфны друг другу.*

Доказательство. Пусть $G=\langle g\rangle$.

Пусть $o(g)=\infty$. Отображение $\varphi:\mathbb{Z}\to G$, $\varphi(k)=g^k$ взаимно однозначно по свойству 2.

$\varphi(k+l)=g^{k+l}=g^k g^l=\varphi(k)\varphi(l) \Rightarrow \varphi$ – изоморфизм; $G\simeq\mathbb{Z}$.

Пусть теперь $o(g)=m<\infty$. Отображение $\varphi:\mathbb{Z}_m\to G$, $\varphi(\overline{k})=g^k$ корректно определено и взаимно однозначно по свойству 2.

$\varphi(\overline{k}+\overline{l})=\varphi(\overline{k+l})=g^{k+l}=g^k g^l=\varphi(\overline{k})\varphi(\overline{l}) \Rightarrow \varphi$ – изоморфизм, $G\simeq\mathbb{Z}_m$. $\square$

Теорема. *Пусть G – циклическая группа. Тогда:*

1. *Любая подгруппа $H\subseteq G$ – циклическая.*
2. $|G|=m<\infty \Rightarrow |H|\,|m$.

3. $\forall d|m\ \exists!$ *подгруппа* $H \subseteq G$, $|H| = d$.

Доказательство.

1. Пусть $G = \langle g \rangle$; либо $H = \{e\}$, либо $\exists n \in \mathbb{N} : g^n \in H (g^{-n} \in H \Rightarrow g^n \in H)$. Возьмём наименьшее такое n.

   Пусть $g^k \in H$, $k = nq + r$, $0 \leq r < n \Rightarrow g^k = (g^n)^q g^r \Rightarrow g^r \in H \Rightarrow r = 0 \Rightarrow n|k$. Следовательно, $H = \langle g^n \rangle$.

2. $g^m = e \Rightarrow n|m$, $m = nd$; $H = \{e, g^n, g^{2n}, \ldots, g^{(nd-1)n}\}$, $|H| = d$.

3. d однозначно определяет $n = \frac{m}{d}$, а значит, и H. Обратно, для всякого $d|m$ можно взять $H = \langle g^n \rangle$, где $n = \frac{m}{d}$.

□

Определение. Подгруппа $H \subseteq G$ *нормальна*, если $gH = Hg$, $\forall g \in G$.
Обозначение: $H \triangleleft G$.

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $H \triangleleft G$;

2. $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$;

3. $\forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H$.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2$. $gH = Hg \Rightarrow gHg^{-1} = H$ (домножили справа на g^{-1}).
$2 \Rightarrow 1$. $gHg^{-1} = H \Rightarrow gH = Hg$ (домножили справа на g).
$2 \Rightarrow 3$. Очевидно.
$3 \Rightarrow 2$. Имеем: $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$. Докажем обратное включение $H \subseteq gHg^{-1}$. В самом деле: $\forall g \in G : g^{-1}Hg \subseteq H$. Домножим слева на g, а справа на g^{-1}. Тогда $H \subseteq gHg^{-1}$, что и требовалось. □

Определение. Пусть $H \triangleleft G$. *Факторгруппа* группы G по подгруппе H – это множество G/H с операцией умножения смежных классов как подмножеств в G: $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.
Корректность: $(xH)(yH) = x(Hy)H = x(yH)H = xyHH = xyH$.
Ассоциативность $\Leftarrow$ ассоциативность в G.
Нейтральный элемент: $eH = H$.
Обратный элемент: $(gH)^{-1} = g^{-1}H$.

Определение. Пусть $\varphi : G \to H$ – гомоморфизм групп.
Образ гомоморфизма $\mathrm{Im}\ \varphi = \varphi(G) = \{h = \varphi(g) \mid g \in G\}$.
Ядро гомоморфизма $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$.

Свойство.

1. $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H.
2. $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа в G.

Доказательство.

1. Пусть $h, h' \in \operatorname{Im}\varphi$, т.е. $h = \varphi(g)$, $h' = \varphi(g')$. Тогда $hh' = \varphi(gg') \in \operatorname{Im}\varphi$. $h^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \operatorname{Im}\varphi$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H.
2. Пусть $x, y \in \operatorname{Ker}\varphi$. Стало быть, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = ee = e$; $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} = e^{-1} = e$, т.е. $xy \in \operatorname{Ker}\varphi$, $x^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi$ – подгруппа в G.

   Докажем нормальность ядра: пусть $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, $g \in G$. Имеем: $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e\varphi(g^{-1}) = e \Rightarrow gxg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, что и означает нормальность.

$\square$

Теорема. *(Основная теорема о гомоморфизмах групп) Пусть* $\varphi : G \to H$ *– гомоморфизм групп. Тогда* $\exists!$ *изоморфизм* $\overline{\varphi} : G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$*, устроенный так:* $\overline{\varphi}(g \operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g)$, $\forall g \in G$.

Доказательство. Обозначим $K = \operatorname{Ker}\varphi$.

Корректность $\overline{\varphi}$ (независимость от выбора g): пусть $gK = g'K$. Тогда $g' = gk$, $k \in K$. Имеем: $\overline{\varphi}(g'K) = \varphi(g') = \varphi(gk) = \varphi(g)\varphi(k) = \varphi(g) = \overline{\varphi}(gK)$, т.е. данное отображение на факторгруппе определено корректно.

Единственность такого отображения очевидна (ибо все элементы фиксированного смежного класса G/K под действием φ отображаются в один и тот же элемент в $\operatorname{Im}\varphi$, и так для всех смежных классов).

Сюръективность $\overline{\varphi}$: пусть $h \in \operatorname{Im}\varphi$, т.е. $h = \varphi(g)$ для некоторого $g \in G$. Тогда $\overline{\varphi}(gK) = \varphi(g) = h$, что и требовалось.

Инъективность $\overline{\varphi}$: пусть $\overline{\varphi}(g_1K) = \overline{\varphi}(g_2K)$, т.е. $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Отсюда $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = e \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in K \Rightarrow g_2 = g_1k$, $k \in K \Rightarrow g_2K = g_1K \Rightarrow \overline{\varphi}$ инъективно.

Гомоморфность $\overline{\varphi}$: $\overline{\varphi}(g_1Kg_2K) = \overline{\varphi}(g_1g_2K) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \overline{\varphi}(g_1K)\overline{\varphi}(g_2K)$.

Таким образом, $\overline{\varphi}$ – биективный гомоморфизм, т.е. изоморфизм между G/K и $\operatorname{Im}\varphi$. $\square$

17 Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

БИЛЕТ 17.

Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

Определение. Кривой второго порядка называется поверхность в $\mathbb{R}^n$, неявно задаваемая в некотором репере уравнением вида

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c,$$

где $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$.

Замечание. *Эта кривая задается таким уравнением в любом другом репере.*

Определение. Аффинным преобразованием называется преобразование, представимое в виде композиции линейного преобразования и параллельного переноса.

Определение. Две поверхности называются аффинно эквивалентными, если существует такое аффинное преобразование (замена координат), что уравнение первой кривой в одной системе совпадает с уравнением второй кривой в другой системе.

Теорема (Об аффинной классификации)**.** *Любая поверхность в $\mathbb{R}^n$ аффинно эквивалентна поверхности, задаваемой одним из следующих уравнений:*

1. $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 = 0$, *где $k \geq l$. Поверхности такого вида называются квадратичными конусами.*
2. $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 = 1$, *где $k > 0, l \geq 0$. К этому виду относятся эллипсоиды и гиперболоиды, а также эллиптические и гиперболические конусы.*
3. $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 = x_{k+l+1}$, *где $k \geq l \geq 0$, $k > 0$. Поверхности этого типа называются параболоидами или параболическими цилиндрами.*

Доказательство. Сначала, по теореме о приведении к нормальной форме, можно привести к нормальной форме квадратичную часть $Q(x)$. Получим выражение вида:

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i^2 + b_ix_i) - \sum_{i=k+1}^{k+l}(x_i^2 + b_ix_i) + \sum_{i=k+l+1}^{n} b_ix_i + c = 0.$$

Затем, верно равенство $x^2 + bx = y^2 - \dfrac{b^2}{4}$, где $y = x + \dfrac{b}{2}$. Согласно ему, положим $y_i = x_i + \dfrac{b_i}{2}$. Далее, если $\displaystyle\sum_{i=k+l+1}^{n} b_ix_i + c$ – не константа, положим $y_{k+l+1} = \displaystyle\sum_{i=k+l+1}^{n} b_ix_i + c$. Еще не определенные координаты доопределим так, чтобы получилась корректная замена координат (на самом деле, здесь построена система линейно независимых векторов, которую надо дополнить до базиса, и часть координат точки отсчета, остальные задаются произвольно), получим один из трех случаев:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k+l} y_i^2 = 0.$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k+l} y_i^2 = c,\ c \neq 0.$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k+l} y_i^2 = by_{k+l+1},\ b \neq 0.$

Если $b < 0$ или $c < 0$, умножим уравнение на -1, и переставим координаты. Теперь, во втором случае поделим уравнение на $a = c$, во третьем – на $a = b$, и положим $y_i' = \dfrac{y_i}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$. В результате, получим уравнения с $b = 1$ или $c = 1$, соответственно.

Теперь, если в первом или в третьем случае $k < l$, умножим уравнение на -1 и переставим координаты. В третьем случае положим $y'_{k+l+1} = -y_{k+l+1}$.

Наконец, в третьем случае при $k = 0$ получается уравнение $x_1 = 0$. Оно равносильно уравнению $x_1^2 = 0$ первого типа. ■

Приведем список поверхностей в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^2$, тип 1.

1. $k = 2, l = 0$ Одна точка.
2. $k = 1, l = 1$ Две пересекающиеся прямые.
3. $k = 1, l = 0$ Прямая.
4. $k = 0, l = 0$ Вся плоскость.

$\mathbb{R}^2$, тип 2.

1. $k = 2, l = 0$ Эллипс.
2. $k = 1, l = 1$ Гипербола.
3. $k = 1, l = 0$ Две параллельные прямые.

$\mathbb{R}^2$, тип 3.

1. $k = 1, l = 0$ Парабола.

$\mathbb{R}^3$, тип 1.

1. $k = 3, l = 0$ Одна точка.
2. $k = 2, l = 1$ Конус.
3. $k = 2, l = 0$ Прямая.
4. $k = 1, l = 1$ Две пересекающиеся плоскости.
5. $k = 1, l = 0$ Плоскость.
6. $k = 0, l = 0$ Все пространство.

$\mathbb{R}^3$, тип 2.

1. $k = 3, l = 0$ Эллипсоид.
2. $k = 2, l = 1$ Однополостный гиперболоид.
3. $k = 2, l = 0$ Эллиптический цилиндр.
4. $k = 1, l = 2$ Двуполостный гиперболоид.
5. $k = 1, l = 1$ Гиперболический цилиндр.
6. $k = 1, l = 0$ Две параллельные плоскости.

$\mathbb{R}^3$, тип 3.

1. $k = 2, l = 0$ Эллиптический параболоид.
2. $k = 1, l = 1$ Гиперболический параболоид.
3. $k = 1, l = 0$ Параболический цилиндр.

Определение. Изометрией называется аффинное преобразование, сохраняющее расстояния между точками.

Определение. Две поверхности называются изометричными, если существует такая изометрическая замена координат, что уравнение первой кривой в одной системе совпадает с уравнением второй кривой в другой системе.

Теорема (О метрической классификации)**.** *Любая поверхность в $\mathbb{R}^n$ изометрична поверхности, задаваемой одним из следующих уравнений:*

1. $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 = 0$

2. $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 = 1$

3. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 = x_{k+1}$

$\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Ортогональным преобразованием можно привести форму к главным осям:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i^2 + b_i x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} b_i x_i + c = 0.$$

Далее, как и в прошлой теореме, параллельным переносом можно сделать $b_i = 0$ при $\lambda_i \neq 0$. Затем, если присутствует линейная часть, поворотом в координатах $x_{k+1}, \ldots, x_n$ можно привести линейную часть, если она есть, к виду bx_{k+1}. При $b \neq 0$, можно параллельным переносом убрать c. Наконец, если $b \neq 0$ или $c \neq 0$, можно сделать их равными единице делением уравнения на них. ■

Замечание. *После этого сжатием или растяжением базиса по разным осям можно привести форму к виду из теоремы об аффинной классификации. Соответственно, получатся те же самые типы, но теперь внутри одного типа не все поверхности будут эквивалентны друг другу.*

Определение. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ без нуля, и назовем вектора эквивалентными, если они пропорциональны. Множество классов эквивалентности называется проективной плоскостью $\mathbb{RP}^2$.

Определение. Проективным преобразованием называется преобразование проективной плоскости, индуцируемое линейным преобразованием $\mathbb{R}^3$.

Это определение корректно, поскольку линейные преобразования переводят пропорциональные вектора в пропорциональные. Далее, пространство $\mathbb{R}^2$ может быть вложено в $\mathbb{RP}^2$ следующим отображением: $(x, y) \to (x, y, 1)$.

При таком вложении уравнение любой кривой примет вид

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Определение. Две кривые называются проективно эквивалентными, если существует такое проективное преобразование (замена координат), что уравнение первой кривой при вложении в проективное пространство в одной системе совпадает с уравнением второй кривой в другой системе.

Теорема (О проектной классификации)**.** *Любая поверхность в $\mathbb{R}^n$ аффинно эквивалентна одной из следующих поверхностей:*

1. *овал (эллипс, гипербола или парабола);*
2. *пара прямых;*
3. *прямая;*
4. *точка.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ соответствующую квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$$

и приведем ее к нормальному виду. Упорядочим координаты так, чтобы сначала шли 1, затем -1 и в конце 0. При этом, уравнение поверхности в проективных координатах примет один из следующих видов:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$;
2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;
3. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$;
4. $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$;
5. $x_1^2 + x_2^2 = 0$;
6. $x_1^2 - x_2^2 = 0$;
7. $-x_1^2 - x_2^2 = 0$;
8. $x_1^2 = 0$;
9. $-x_1^2 = 0$;

Далее, попарно эквивалентны с помощью умножения уравнения на -1 следующие уравнения: 1 и 4, 2 и 3, 5 и 7, 8 и 9. Уравнение 1 не имеет решений на проективной плоскости, поскольку ему удовлетворяет только $(0,0,0)$, который в $\mathbb{RP}^2$ не лежит. Остаются:

1. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;
2. $x_1^2 + x_2^2 = 0$;
3. $x_1^2 - x_2^2 = 0$;
4. $x_1^2 = 0$.

Первое уравнение задает кривые, называемые овалами. В аффинных координатах ему соответствуют параболы, эллипсы и гиперболы. Второе уравнение задает одну точку, третье – пару прямых, и четвертое – прямую. ∎

18 Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где x — независимая переменная, y — неизвестная функция, n — *порядок уравнения.*

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, если она n раз дифференцируема и обращает уравнение в тождество.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешённым относительно производной*, называется уравнение вида $y' = F(x, y)$.

Сформулируем задачу Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной.

Задача Коши. Найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Иначе говоря, решить следующую систему

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{19}$$

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (19) называется *единственным (локально)*, если существует окрестность $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ такая, что в ней не существует решений уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющих условию $y(x_0) = y_0$ и не совпадающих с $\varphi(x)$ хотя бы в одной точке, отличной от x_0.

Теорема (Пикар). *Пусть $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике* $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ *и удовлетворяет* условию Липшица *по y в* Π, *то есть существует $L > 0$ такое, что для любой пары точек $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$ выполнено $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$. Тогда решение задачи Коши* (19) *существует и единственно на интервале $U_h(x_0) = (x_0 - h, x_0 + h)$, где $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ и $M = \max_\Pi |f(x, y)|$.*

Замечание. Всюду далее $x \in U_h$ (иногда $x \in \overline{U_h}$, но это будет оговорено отдельно).

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма (об интегральном уравнении)**.** *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна. Функция $y(x)$ является решением задачи Коши* (19) *тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{20}$$

Определение. Функция $y(x)$ называется решением уравнения (20), если она непрерывна и обращает (20) в равенство.

Замечание. Для любителей абсурдной строгости: речь в лемме и определении, очевидно, идёт о локальной непрерывности в окрестностях точек (x_0, y_0) и x_0 соответственно.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение задачи Коши (19). Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y'(x) = f(x, y(x))$. Проинтегрируем обе части уравнения на отрезке $[x_0, x]$:

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds,$$

откуда

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Поскольку y удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$, получаем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Заметим, что y, будучи решением дифференциального уравнения, дифференцируема, а значит, непрерывна.

Обратно, пусть $y(x)$ — решение уравнения (20). Тогда по определению $y(x)$ непрерывна. Кроме того, $f(x, y)$ непрерывна по условию. Значит, $f(x, y(x))$ непрерывна как композиция непрерывных функций. А это означает, что существует непрерывная производная

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds = f(x, y(x)).$$

Таким образом, правая часть уравнения (20) имеет непрерывную производную $f(x, y(x))$. Значит, её имеет и левая часть этого уравнения, то есть $y' = f(x, y(x))$. Кроме того, $y(x_0) = y_0$. Таким образом, $y(x)$ является решением задачи Коши (19). $\square$

Теперь докажем теорему Пикара.

Доказательство. Построим последовательные приближения Пикара

$$
\begin{aligned}
&y_0(x) = y_0;\\
&y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds;\\
&y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds;\\
&\vdots\\
&y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds;\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Доказательство существования решения будет состоять из трех шагов:

1. Докажем, что $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$ при $|x - x_0| \leqslant h$ (для любого натурального n).

2. Докажем, что последовательность $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $\overline{y}(x)$ на $\overline{U_h}$.

3. Докажем возможность предельного перехода к $\overline{y}(x)$ в формуле для приближений Пикара, то есть перехода от уравнения $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$ к уравнению $\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))ds$, что будет означать, что $\overline{y}$ — решение интегрального уравнения (20).

Шаг 1. Докажем утверждение по индукции. Для $n = 1$ имеем

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant \frac{Mb}{M} = b.$$

Пусть известно, что $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$. Тогда $(x, y_n(x)) \in \Pi$ при $|x - x_0| \leqslant h$, а значит, $|f(x, y_n(x))| \leqslant M$ при $|x - x_0| \leqslant h$. Поэтому

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y_n(s))|ds \leqslant Mh \leqslant b.$$

Шаг 2. Заметим, что $y_n(x)$ — частичная сумма ряда $y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где $f_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x)$. Докажем равномерную сходимость этого ряда при $|x - x_0| \leqslant h$. Это будет означать равномерную сходимость последовательности его частичных сумм $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Применим признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

$$|f_n(x)| = |y_n(x) - y_{n-1}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s,\, y_{n-1}(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s,\, y_{n-2}(s))ds \right| .$$

Докажем по индукции, что $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{L^{n-1}M}{n!}|x-x_0|^n \leqslant \dfrac{L^{n-1}M}{n!}h^n$.

Для $n=1$ имеем

$$|f_1(x)| = |y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s,\, y_0(s))ds \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s,\, y_0(s))|ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant M|x-x_0| \leqslant Mh = \frac{ML^0h^1}{1!}.$$

Пусть оценка выполняется для $f_n(x)$. Тогда

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s,\, y_n(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s,\, y_{n-1}(s))ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s,\, y_n(s)) - f(s,\, y_{n-1}(s))|ds \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} L|y_n(s) - y_{n-1}(s)|ds \right| =$$
$$= \left| \int_{x_0}^{x} L|f_n(s)|ds \right| \leqslant \frac{L^nM}{n!} \left| \int_{x_0}^{x} |x-x_0|^n dx \right| = \frac{L^nM}{n!} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{L^nM}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Итак, имеем $|f_n(x)| \leqslant a_n$, где $a_n = \dfrac{L^{n-1}M}{n!}h^n$, для всех $x \in \overline{U}_h$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Даламбера. Действительно,

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{ML^nh^{n+1}n!}{(n+1)!Mh^nL^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{Lh}{n+1} = 0 < 1.$$

Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $\overline{U}_h$ по признаку Вейерштрасса. Тогда существует $\overline{y}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ при $|x-x_0| \leqslant h$ и $\overline{y}(x)$ — непрерывная функция.

Шаг 3. В равенстве $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\, y_{n-1}(s))ds$ мы хотим перейти к пределу при $n\to\infty$ и получить $\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\, \overline{y}(s))ds$. Докажем, что если $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится к $\overline{y}(x)$ на $\overline{U}_h$, то $\int_{x_0}^{x} f(s,\, y_{n-1}(s))ds \to \int_{x_0}^{x} f(s,\, \overline{y}(s))ds$ при $n\to\infty$. Действительно, из равномерной сходимости последовательности $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на $\overline{U}_h$ следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0:\forall n>N\ \ \forall x:|x-x_0|\leqslant h$ имеем $|y_n(x)-\overline{y}(x)|<\varepsilon$. Тогда, с учетом того, что $f(s,\overline{y}(s))\in\Pi$ при $s\in\overline{U}_h$ (ибо Π — компакт), можем написать

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_n(s))ds-\int_{x_0}^{x} f(s,\overline{y}(s))ds\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,y_n(s))-f(s,\overline{y}(s))|ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} L|y_n(s)-\overline{y}(s)|ds\right|\leqslant L\varepsilon h=:\varepsilon_1.$$

Таким образом, предельный переход под знаком интеграла обоснован, а потому $\overline{y}(x)$ является решением интегрального уравнения (20), а значит, и задачи Коши (19).

Существование решения доказано, перейдём к единственности, которую докажем от противного. **Warning:** это доказательство единственности накладывает дополнительное ограничение на h (его можно включить в формулировку и порадоваться). Ещё ниже будет представлено доказательство единственности с помощью леммы Гронуолла, которое позволяет избежать этого ограничения. Итак, начнём.

Предположим, что существуют $\overline{y}(x)$ и $\overline{\overline{y}}(x)$ — решения задачи Коши (19) и, что то же самое, уравнения (20), то есть

$$\overline{y}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\overline{y}(s))ds;$$

$$\overline{\overline{y}}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\overline{\overline{y}}(s))ds.$$

Тогда

$$0\leqslant|\overline{y}(x)-\overline{\overline{y}}(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,\overline{y}(s))ds-\int_{x_0}^{x} f(s,\overline{\overline{y}}(s))ds\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,\overline{y}(s))-f(s,\overline{\overline{y}}(s))|ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|\overline{y}(s)-\overline{\overline{y}}(s)|ds\right|\leqslant Lh\sup_{\overline{U}_h}|\overline{y}(s)-\overline{\overline{y}}(s)|.$$

Перейдём к супремуму слева и справа, получим

$$\sup_{\overline{U}_h}|\overline{y}(x)-\overline{\overline{y}}(x)|\leqslant Lh\sup_{\overline{U}_h}|\overline{y}(x)-\overline{\overline{y}}(x)|;$$

$$(1-Lh)\sup_{\overline{U}_h}|\overline{y}(x)-\overline{\overline{y}}(x)|\leqslant 0.$$

Значит, при $1-Lh\geqslant 0$ имеем $\sup_{\overline{U}_h}|\overline{y}(x)-\overline{\overline{y}}(x)|\leqslant 0$. С другой стороны, очевидно, что этот супремум неотрицателен. Значит, он равен нулю, то есть функции $\overline{y}(x)$ и $\overline{\overline{y}}(x)$ совпадают на $\overline{U}_h$ при $h \leqslant \dfrac{1}{L}$. Таким образом, мы доказали единственность на множестве $\overline{U}_h$, где $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{L}\right)$. □

Теперь докажем единственность «по-честному», то есть без требования $h \leqslant \dfrac{1}{L}$, но только на открытом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Лемма (Гронуолл)**.** *Пусть* $u(x) \in C[x_0, \alpha)$, *где* $\alpha \leqslant +\infty$, *и* $u(x) \geqslant 0$ *на* $[x_0, \alpha)$. *Пусть* $b(x) \in C[x_0, \alpha)$ *и* $b(x) \geqslant 0$ *на* $[x_0, \alpha)$. *Пусть* $a \geqslant 0$ ($a \in \mathbb{R}$) *и выполняется интегральное неравенство*

$$u(x) \leqslant a + \int_{x_0}^{x} b(s)u(s)ds.$$

Тогда

$$u(x) \leqslant a e^{\int_{x_0}^{x} b(s)ds}.$$

Доказательство. Обозначим через $v(x)$ правую часть интегрального неравенства из условия. Тогда $v(x_0) = a \geqslant 0$, $v(x) \geqslant 0$, $v'(x) = b(x)u(x) \leqslant b(x)v(x)$ (последнее неравенство опять же следует из интегрального неравенства в условии).

Далее рассмотрим два случая: $a > 0$ и $a = 0$.

Пусть $a > 0$. Тогда

$$\frac{dv(x)}{v(x)} \leqslant b(x)dx;$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dv(s)}{v(s)} \leqslant \int_{x_0}^{x} b(s)ds.$$

$$\ln|v(x)| - \ln|v(x_0)| \leqslant \int_{x_0}^{x} b(s)ds;$$

$$u(x) \leqslant v(x) \leqslant a e^{\int_{x_0}^{x} b(s)ds}.$$

Пусть $a = 0$. Тогда надо доказать, что $u(x) = 0$ при $x \in [x_0, \alpha)$. При фиксированном x для любого $a_1 > 0$ имеем по предыдущему

$$u(x) \leqslant a_1 e^{\int_{x}^{x_0} b(s)ds}.$$

Переходим к пределу при $a_1 \to 0$ и получаем $u(x) \leqslant 0$. Но $u(x) \geqslant 0$ по условию леммы. Так что $u(x) = 0$. □

Замечание. Аналогичное утверждение верно и для полуинтервала $(\beta, x_0]$, где $\beta \geqslant -\infty$. Таким образом, лемма Гронуолла выполняется на любом интервале (α, β), содержащем точку x_0.

Теперь докажем единственность в теореме Пикара. Снова от противного.

Предположим, что существуют $\overline{y}(x)$ и $\overline{\overline{y}}(x)$ — решения задачи Коши (19) и, что то же самое, уравнения (20), то есть

$$\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))ds;$$

$$\overline{\overline{y}}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{\overline{y}}(s))ds.$$

Тогда

$$u(x) := |\overline{y}(x) - \overline{\overline{y}}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{\overline{y}}(s))ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \overline{y}(s)) - f(s, \overline{\overline{y}}(s))|ds \right| \leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} |\overline{y}(s) - \overline{\overline{y}}(s)|ds \right| .$$

Будем считать, что $x > x_0$. Тогда $u(x) \leqslant \int_{x_0}^{x} L|\overline{y}(s) - \overline{\overline{y}}(s)|ds$. То есть выполнено условие леммы Гронуолла с $a = 0$ и $b(x) = L$. Таким образом, $u(x) = 0$, а значит $\overline{y}(x) = \overline{\overline{y}}(x)$ при $x > x_0$. Аналогично для $x < x_0$ (просто поменяются местами пределы интегрирования). Ну а при $x = x_0$ значения этих функций совпадают по условию. Единственность доказана.

Замечание. Если использовать лемму Гронуолла, то в доказательстве единственности вместо условия Липшица по y можно наложить на f чуть более слабое условие: $\exists b(x) \in C(x_0 - h; x_0 + h)$, $b(x) \geqslant 0$ такая, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant b(x)|y_2 - y_1|$.

19 Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

Предполагаем, что все функции рассматриваются на промежутке (a, b) и обладают достаточной гладкостью.

Определение. *Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка* – дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = f(x).$$

Определение. *Линейное однородное уравнение* – линейное дифференциальное уравнение, правая часть которого равна 0.

Предложение.

1. *Решения линейного однородного уравнения образуют линейное пространство.*

2. *Пусть y_1 – решение неоднородного линейного уравнения, а y_2 – решение соответствуюшего однородного (полученного заменой правой части на 0). Тогда $y_1 + y_2$ – тоже решение исходного уравнения.*

3. *Пусть y_1 и y_2 – решения неоднородного линейного уравнения. Тогда $y_1 - y_2$ – решение соответствующего однородного (полученного заменой правой части на 0).*

4. *Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме его частного решения и общего решения соответствующего однородного (полученного заменой правой части на 0).*

Доказательство. Первые три пункта проверяются прямой подстановкой. Последний – их прямое следствие. □

Лемма. *Пусть $z(x) = (y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$, y – решение уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = 0$. Пусть также на промежутке (a, b) все функции $a_i(x)$ ограничены. Тогда для некоторого A имеет место оценка*

$$\|z(x)\|_2 \leq \|z(x_0)\|_2 \cdot e^{A|x-x_0|}$$

для любых $x,\, x_0 \in (a,\, b)$.

Доказательство. Если $z(x_0)=0$, то $z(x)\equiv 0$ на любом отрезке $[c;\, d]\subset (a,\, b)$ в силу его компактности и теоремы о единственности решения.

Пусть теперь $z(x_0)\neq 0$. Тогда существует такое A, что:

Тогда

$$A\|z\|_2 \geq \left\| \left(y',\, y^{(2)},\, ...,\, y^{(n-1)},\, -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} \right) \right\|_2 =$$

$$= \left\| (y'(x),\, y^{(2)}(x),\, ...,\, y^{(n)}(x)) \right\|_2 =$$

$$= \|z'\|_2 = \frac{\|z'\|_2 \|z\|_2}{\|z\|_2} \geq \frac{(z,\, z')}{\sqrt{(z,\, z)}} = \|z\|'.$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[x_0;\, x]$, получаем, что $\ln \|z(x)\| - \ln \|z(x_0)\| \leq A(x - x_0)$. □

Теорема. *В условиях леммы, для любой точки* $x_0 \in (a,\, b)$ *и любых начальных условий*

$$y^{(k)}(0) = c_k,\, 0 \leq k < n$$

существует единственное решение уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_0(x) y = 0$ *с этими начальными условиями, определенное на всём* $(a,\, b)$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ с координатами $(x,\, z)$, в нем точку $(x_0,\, z_0)$, и множество

$$\left\{(x,\, z) \mid x \in [c,\, d],\, \|z\|_2 \leq \|z_0\|_2 \left(1 + e^{A(x-x_0)}\right)\right\}.$$

Это множество компактно в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, поэтому, решение с начальным условием в $(x_0,\, z_0)$ (оно существует и единственно в окрестности $(x_0,\, z_0)$ по теореме Пикара) единственным образом продолжается до его границы. В то же время, оно не может выйти на границу

$$\|z\|_2 = \|z_0\|_2 \left(1 + e^{A(x-x_0)}\right)$$

по лемме. Значит, оно продолжается по x на весь отрезок $[c,\, d]$, и это верно для любого $[c,\, d]\subset (a,\, b)$. Поэтому, решение определено на всем $(a,\, b)$. □

Будем говорить, что функции *линейно независимы*, если они линейно независимы как элементы линейного пространства.

Определение. *Определитель Вронского* системы функций $f_0, \ldots, f_{n-1}$ – функция

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \ldots & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & \ldots & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_0^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Лемма (1). *Если функции линейно зависимы в некоторой окрестности точки x_0, то их определитель Вронского в этой точке равен* 0.

Доказательство. Если функция $c_0 f_0 + \ldots + c_{n-1} f_{n-1} \equiv 0$ в окрестности x_0, то $c_0 f_0^{(k)}(x_0) + \ldots + c_n f_{n-1}^{(k)}(x_0) = 0$ для всех целых неотрицательных k. □

Лемма (2). *Определитель Вронского n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n отличен от* 0 *во всех точках* (a, b).

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – эти решения. Пусть $\sum_{i=1}^n c_i (y_i^{(0)}(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0)) = 0$ в некоторой $x_0 \in (a, b)$ (т.е., столбцы в определителе Вронского линейно зависимы, а сам определитель = 0). Тогда, $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ – решение исходного уравнения с начальными условиями $y^{(k)}(x_0) = 0$, $k \leq n-1$. Поскольку такое решение единственно, то $y \equiv 0$. Противоречие с линейной независимостью $y_1, \ldots, y_n$. □

Теорема. *Пространство решений линейного однородного уравнения n-го порядка n-мерно.*

Доказательство. Построим n линейно независимых решений. Для этого рассмотрим базис $v_0, \ldots, v_{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$ и решения $y_0, \ldots, y_n$ исходного уравнения при начальных условиях $(y_i^{(0)}(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0)) = v_i$. Поскольку матрица, со столбцами $v_0, \ldots, v_{n-1}$ невырождена, определитель Вронского $y_0, .., y_{n-1}$ будет ненулевым, а значит сами они будут линейно независимыми в окрестности x_0 по лемме 1.

Теперь покажем, что любые другие решения уравнения представимы в виде линейной комбинации полученных ранее. Действительно, если y – некоторое решение уравнения, то, так как определитель линейной системы

$$\begin{cases} c_1 y_0^{(0)}(x_0) + \ldots + c_{n-1} y_{n-1}^{(0)}(x_0) = y^{(0)}(x_0) \\ \vdots \\ c_1 y_0^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

ненулевой (это определитель Вронского $y_0, \ldots, y_{n-1}$) можно, решив её, получить $c_1, \ldots, c_n$. При этом, единственное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\begin{cases} c_1 y_0^{(0)}(x_0) + ... + c_{n-1} y_{n-1}^{(0)}(x_0) = y^{(0)}(x_0) \\ \vdots \\ c_1 y_0^{(n-1)}(x_0) + ... + c_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

это $y \equiv c_1 y_0 + ... + c_{n-1} y_{n-1}$. □

Определение. *Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения* – базис пространства его решений.

Теорема (Формула Лиувилля-Остроградского)**.** *Пусть W – определитель Вронского фундаментальной системы решений $y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_0(x) y = 0$. Тогда*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t) dt}$$

для всех $x_0, x \in (a, b)$.

Доказательство. Поскольку производная определителя – сумма определителей матриц, полученных дифференцированием одной строки, имеем:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_0^{(0)} & \dots & y_{n-1}^{(0)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_0^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} \\ y_0^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0^{(0)} & \dots & y_{n-1}^{(0)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_0^{(n-2)} & \dots & y_{n-1}^{(n-2)} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y_0^{(i)} & \dots & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y_{n-1}^{(i)} \end{vmatrix} = -a_{n-1}(x) W(x).$$

□

Теорема (Метод вариации произвольных постоянных)**.** *Пусть $y_0, ..., y_{n-1}$ – фундаментальная система решений уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_0(x) y = 0$. Тогда y является решением уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + a_0(x) y = f(x)$ в том и только в том случае, когда она предствима в виде $y(x) = c_0(x) y_0(x) + ... + c_{n-1}(x) y_{n-1}(x)$, где $c_0(x), ..., c_{n-1}(x)$ – решение линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\begin{cases} c_0'(x) y_0(x) + \dots + c_{n-1}'(x) y_{n-1}(x) = 0 \\ c_0'(x) y_0'(x) + \dots + c_{n-1}'(x) y_{n-1}'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_0'(x) y_0^{(n-2)}(x) + \dots + c_{n-1}'(x) y_{n-1}^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_0'(x) y_0^{(n-1)}(x) + \dots + c_{n-1}'(x) y_{n-1}^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{21}$$

Доказательство. То, что такое $y(x)$ всегда будет решением исходного уравнения, доказывается прямой подстановкой.
То же, что любое решение исходного уравнения представимо в таком виде, следует из того, что определитель Вронского $y_0, \ldots, y_{n-1}$ невырожден в любой точке x по лемме 2, а значит систему дифференциальных уравнений (21) (на нее можно смотреть, как на линейную при фикс. x) можно привести к виду:

$$\begin{cases} c_0'(x) = f_0(x) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(x) = f_{n-1}(x). \end{cases} \tag{22}$$

Пусть $C_0(x)$, ..., $C_{n-1}(x)$ – частное решение системы (22) дифференциальных уравнений, а значит и (21). Тогда $y(x) = C_0(x)y_0(x) + ... + C_{n-1}(x)y_{n-1}(x)$ – частное решение исходного уравнения по первому абзацу. Тогда его общее решение имеет вид

$$y(x) = C_0(x)y_0(x) + ... + C_{n-1}(x)y_{n-1}(x) + A_0y_0(x) + ...A_{n-1}y_{n-1}(x) =$$

$$= (C_0(x) + A_0)y_0(x) + ... + (C_{n-1}(x) + A_{n-1})y_{n-1}(x)$$

для произвольных $A_0, ..., A_1 \in \mathbb{R}$, а $C_0(x) + A_0, ..., C_{n-1}(x) + A_{n-1}$ в свою очередь все еще являются решениями (21). □

20 Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное

Определение. *Линейным уравнением с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x), \tag{23}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $y = y(x)$ – неизвестная функция, а $f(x)$ – заданная правая часть. При $f(x) \equiv 0$ уравнение (23) называется *однородным.*

Будем пользоваться следующей леммой из теории линейных ДУ (билет 19).

Лемма (1)**.**

1. *Все решения однородного уравнения образуют линейное пространство размерности n.*

2. *Общее решение неоднородного уравнения (23) есть сумма любого частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.*

Пусть D – оператор дифференцирования: $Dy = y'$, I - тождественный оператор.

Определение. Многочлен

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

называется *характеристическим многочленом* для уравнения (23).

Для характеристического многочлена $P(t)$ рассмотрим дифференциальный оператор $L(P)$:

$$L(P) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I. \tag{24}$$

Уравнение (23) принимает вид:

$$L(P)[y] = f(x).$$

С другой стороны, характеристический многочлен P раскладывается над $\mathbb{C}$:

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_p)^{k_p}\ , \tag{25}$$

где $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, p$ – корни характеристического многочлена P с кратностями $k_i,\ i = 1, \ldots, p$, соответственно.

В силу (24) и (25):

$$L(P) = (D - \lambda_1 I)^{k_1} \cdots (D - \lambda_p I)^{k_p}\ . \tag{26}$$

Рассмотрим теперь функции $f_{s,\mu}(x) = x^s e^{\mu x}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Обозначим за $P_{r,\mu}$ линейную оболочку $\{f_{s,\mu},\ s \le r\}$. Иначе говоря, элементы $P_{r,\mu}$ имеют вид

$$q(x)e^{\mu x},$$

где $q(x)$ – многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ с $\deg q \le r$.

Лемма (2, действие оператора $L(P)$ на $P_{r,\mu}$)**.**

$$L(P)[P_{r,\mu}] = \begin{cases} P_{r,\mu}, & \mu \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}, \\ P_{r-k_i,\mu}, & \mu = \lambda_i,\ r \ge k_i, \\ 0, & \mu = \lambda_i,\ r < k_i. \end{cases}$$

Доказательство. Подействуем на $f_{s,\mu}$ оператором $D_\lambda := D - \lambda I$:

$$D_\lambda f_{s,\mu} = (D-\lambda I)x^s e^{\mu x} = sx^{s-1}e^{\mu x} + x^s \mu e^{\mu x} - \lambda x^s e^{\mu x} =$$
$$sx^{s-1}e^{\mu x} + (\mu-\lambda)x^s e^{\mu x} = sf_{s-1,\mu} + (\mu-\lambda)f_{s,\mu}.$$

Таким образом

$$D_\lambda f_{s,\mu} = \begin{cases} sf_{s-1,\mu} + (\mu-\lambda)f_{s,\mu}, & \mu \neq \lambda, \\ sf_{s-1,\mu}, & \mu=\lambda,\ s>0, \\ 0, & \mu=\lambda,\ s=0. \end{cases} \tag{27}$$

Пользуясь (27) можно описать действие D_λ на $P_{r,\mu}$

$$D_\lambda P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu}, & \mu \neq \lambda, \\ P_{r-1,\mu}, & \mu=\lambda,\ r>0, \\ 0, & \mu=\lambda,\ r=0. \end{cases} \tag{28}$$

По индукции получаем из (28)

$$D_\lambda^k P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu}, & \mu \neq \lambda, \\ P_{r-k,\mu}, & \mu=\lambda,\ r\geq k, \\ 0, & \mu=\lambda,\ r<k. \end{cases} \tag{29}$$

Осталось последовательно применить операторы $D_{\lambda_i}^{k_i}$, $i=1,\ldots,p$ и получить формулу для действия $L(P)=D_{\lambda_1}^{k_1}\cdots D_{\lambda_p}^{k_p}$. □

Утверждение. *Функции* f_{j,λ_i}, $i=1,\ldots,p$, $j\leq k_i$ *при различных* j,λ_i *линейно независимы над* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Предположим обратное. Найдем коэффициенты, при которых линейная комбинация будет равна 0 и сгруппируем слагаемые с одинаковыми λ:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{k_i} c_{ij} f_{j,\lambda_i} = 0. \tag{30}$$

Без ограничения общности $c_{i,k_i}\neq 0$ для любого $i=1,\ldots,p$. Проведем индукцию по p.

При $p=1$

$$\sum_{j=0}^{k} c_j f_{j,\lambda} = 0,\ \ c_k \neq 0.$$

Действуя на обе части данного равенства оператором D_λ^k и пользуясь выкладками из доказательства леммы 2 и получим:

$$cf_{0,\mu} = \mathrm{c}e^{\mu x} = 0,$$

где $c\neq 0$. Противоречие. Следовательно, база доказана.

Пусть теперь $p > 1$. Действуем оператором $D_{\lambda_p}^{k_p+1}$ на обе части равенства (30). Тогда из выкладок к лемме 2 f_{j,λ_p} перейдут в 0, а f_{j,λ_i}, $i < p$ перейдут в себя же + слагаемые с меньшими j. Получаем в итоге:

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{k_i} d_{ij} f_{j,\lambda_i} = 0,$$

где $d_{i,k_i} \neq 0$. Противоречие с предположением индукции.

Следовательно, функции f_{j,λ_i}, $i = 1, \ldots, p$, $j \leq k_i$ линейно независимы.

□

Замечание. Получается, на самом деле $\{f_{j,\mu}, j \leq r\}$ – базис в своей линейной оболочке $P_{r,\mu}$, а подпространства $P_{r,\mu_1} \cap P_{s,\mu_2} = \{0\}$ при $\mu_1 \neq \mu_2$.

Теперь введем подпространство

$$P_L = P_{k_1-1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus P_{k_p-1,\lambda_p}.$$

Благодаря предложению и сопутствующему замечанию, сумма будет прямой.

Из леммы 2 следует, что пространства P_{k_i-1,λ_i} для всех $i = 1, \ldots, p$ переводятся в 0 оператором $L(P)$. Поэтому, все элементы пространства P_L будут переводится оператором $L(P)$ в 0: $L(P)[P_L] = 0$. Иначе говоря, они будут решениями уравнения $L(P)[y] = 0$, то есть, однородного уравнения (23). Итак, P_L – подпространство в пространстве решений V однородного уравнения (23), $P_L \subset V$.

С другой стороны, $\dim P_L = k_1 + \cdots + k_p = n$, поскольку это есть сумма кратностей корней характеристического уравнения, которое имеет степень n. Однако, $\dim V = n$ по лемме 1. Итак, $\dim P_L = \dim V$, поэтому $P_L = V$.

Вспоминая построение P_L, любой элемент P_L есть линейная комбинация элементов P_{k_i-1,λ_i}, $i = 1, \ldots, p$, а последние есть линейные комбинации f_{s,λ_i} при $i = 1, \ldots, p$, $s < k_i$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Решения однородного уравнения (23) имеют вид*

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij} f_{j,\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{ij} x^j e^{\lambda_i x}, \tag{31}$$

где $c_{ij} \in \mathbb{C}$ – произвольные коэффициенты, а функции $f_{s,\lambda_i} = x^s e^{\lambda_i x}$, $i = 1, \ldots, p$, $j \leq k_i$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (23).

Получаем n-параметрическое семейство (31) решений уравнения (23) (параметрами являются c_{ij}).

Определение. Семейство решений (31) называется *общим решением однородного уравнения (23).*

Перейдем к решению неоднородного уравнения.

Замечание. Если правая часть уравнения $f(x)$ представима как

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_r f_r(x),$$

и для $f_i(x)$ найдены частные решения $y_i(x)$: $L(P)[y_i] = f_i(x)$, то для $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_r y_r(x)$ справедливо $L(P)[y] = f(x)$ в силу линейности $L(P)$ (лемма 1). То есть, $y(x)$ – частное решение уравнения (23).

Согласно лемме 1, достаточно найти одно частное решение неоднородного уравнения. Если правая часть $f(x)$ произвольна, можно использовать метод вариации постоянных, применимый к любому линейному уравнению (см. билет 19). Однако, в случае правой части

$$f(x) = q(x)e^{\mu x} \tag{32}$$

для некоторого $\mu \in \mathbb{C}$ и некоторого многочлена $q(x)$, поиск частного решения можно упростить. Пользуясь замечанием, можно находить частные решения в случае, когда правая часть есть линейная комбинация функций вида (32).

Утверждение. *Рассмотрим уравнение (23), $f(x) = q(x)e^{\mu x}$. Обозначим $s = \deg q$. Положим*

$$k = \begin{cases} s, & \mu \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}, \\ s + k_i, & \mu = \lambda_i. \end{cases}$$

Тогда уравнение (23) имеет решение в пространстве $P_{k,\mu}$.

Доказательство. Согласно лемме 2, при таком выборе k окажется

$$L(P)[P_{k,\mu}] = P_{s,\mu}.$$

Поэтому, существует $y \in P_{k,\mu}$,

$$L(P)[y] = q(x)e^{\mu x} \in P_{s,\mu}$$

□

Частное решение y из утверждения выше можно выписать:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i e^{\mu x}. \tag{33}$$

Коэффициенты c_i в (33) можно находить методом неопределенных коэффициентов.

После нахождения частного решения, общее решение неоднородного уравнения получается, согласно лемме 1, как сумма данного частного решения и общего решения неоднородного уравнения.

Итак, изложена методика построения общего решения однородного уравнения вида (23) и неоднородного уравнения вида (23) с правой частью определенного вида.

Замечание (О замене базиса). Поскольку все a_i в уравнении (23) вещественны, комплексные корни характеристического уравнения будут попарно сопряженными. В силу этого, в P_L войдут пары слагаемых

$$P_{k,a+bi} \oplus P_{k,a-bi}.$$

Базисом в данном подпространстве, по построению, являются функции

$$\left\{x^s e^{(a \pm bi)x},\, s \leq k\right\}. \tag{34}$$

Вместо них, в качестве базиса можно взять

$$\{x^s e^{ax} \cos bx,\;\; x^s e^{ax} \sin bx,\;\; s \leq k\}. \tag{35}$$

Это следует из того, что

$$\begin{cases} 2\cos bx = e^{bix} + e^{-bix}, \\ 2i \sin bx = e^{bix} - e^{-bix} \end{cases}$$

задает невырожденное линейное преобразование для перехода от базису (34) к базису (35).

Базис (35) удобен тем, что состоит из вещественных на $\mathbb{R}$ функций, и, потому, возможно избежать действий с комплексными числами при поиске конкретных решений для задачи Коши.

Тем же методом можно пользоваться и при поиске решений для неоднородного уравнения. Пусть правая часть имеет вид $q(x)e^{ax}\cos bx$ или $q(x)e^{ax}\sin bx$, $q(x)$ – многочлен степени s. Тогда ее можно представить как линейную комбинацию функций из $P_{s,a+bi}$ и $P_{s,a-bi}$. Определив k по последней теореме, получаем из нее, что существует частное решение в

$$P_{k,a+bi} \oplus P_{k,a-bi}.$$

Опять заменив базис, можем искать его как линейную комбинацию функций $\{x^r e^{ax}\cos bx,\;\; x^r e^{ax}\sin bx,\;\; r \leq k\}$. Отметим, однако, что, если в правой части был только синус или только косинус, решение все равно следует искать в базисе из обеих функций.

21 Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Напомним основные понятия, связанные с комплексными числами.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^2$ и введем на нем умножение $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$. Получится поле, которое называется полем комплексных чисел и обозначается $\mathbb{C}$. При этом, числа вида $(x, 0)$ образуют подполе, изоморфное $\mathbb{R}$, поэтому обозначаются просто x. Обозначив число $(0, 1)$ через i, получим для произвольного числа форму $(x, y)=(x, 0)+(y, 0)(0, 1)=x+yi$. i обладает свойством $i^2=-1$. Далее, на $\mathbb{C}$ вводится естественная топология $\mathbb{R}^2$. При этом, последовательность x_n+iy_n сходится к $x+iy$ тогда и только тогда, когда $x_n\to x$ и $y_n\to y$. Далее, длина вектора (x, y) называется модулем комплексного числа $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$, а угол между вектором (x, y) и осью абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки, называется аргументом этого числа, $\arg(x+iy)$. При перемножении чисел модули перемножаются, а аргументы складываются. Отметим еще, что аргумент определен с точностью до 2π. Наконец, сопряженным к числу $z=x+iy$ называется число $\bar{z}=x-iy$.

Определение. Отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ называется функцией комплексного переменного.

Определение. Если для некоторого z_0 существует предел

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

то он называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0, а функция называется $\mathbb{C}$- *дифференцируемой* в этой точке. Если функция $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности данной точки, то она называется *голоморфной* в данной точке.

Пусть f — функция комплексного переменного. С ней естественно связывается отображение $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Обозначим его компоненты следуюшим образом: $F(x,y)=(u(x,y), v(x,y))$. Соответственно, $f(z)=u(x+iy)+iv(x+iy)$. Далее будут рассматриваться приращения аргумента $\Delta\mathrm{z}=(\Delta\mathrm{x}, \Delta\mathrm{y})$. Говорят, что f *принадлежит классу* $\bar{\bar{o}}(1)$ *при* $z\to z_0$, если значение $f(z_0+\Delta z)$ стремится к 0 при $\Delta\mathrm{z}\to 0$, и *принадлежит классу* $\bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z})$ *при* $z\to z_0$, если $f(z_0+\Delta z)/|\Delta z|$ стремится к 0 при $\Delta\mathrm{z}\to 0$. Отметим, что условия $(f(z_0+\Delta z)/|\Delta z|)\to 0$ и $(f(z_0+\Delta z)/\Delta z)\to 0$ эквивалентны $(|\Delta z/|\Delta z||=1)$. Кроме того, при $z\to z_0: \bar{\bar{o}}(1)\cdot\Delta z=\bar{\bar{o}}(\Delta z)$, $\bar{\bar{o}}(\Delta z)/\Delta z=\bar{\bar{o}}(1)$.

Пусть отображение F дифференцируемо в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ (тогда функция f называется $\mathbb{R}$-*дифференцируемой*). Это означает, что при $z \to z_0$

$$F\,(z_0 + \Delta\mathrm{z}) = F\,(x_0 + \Delta\mathrm{x},\, y_0 + \Delta\mathrm{y}) =$$
$$= F\,(x_0,\, y_0) + \left.\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} \Delta\mathrm{x} \\ \Delta\mathrm{y} \end{pmatrix} + \bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z}) =$$
$$= F\,(x_0,\, y_0) + \left.\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta\mathrm{x} + \left.\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta\mathrm{y} + \bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z}).$$

Обозначив $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$, получим

$$f\,(z_0 + \mathrm{z}) = f\,(z_0) + f_x(z_0)\Delta\mathrm{x} + f_y(z_0)\Delta\mathrm{y} + \bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z}) =$$
$$= f\,(z_0) + \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) - if_y(z_0))\,(\Delta\mathrm{x} + i\Delta\mathrm{y}) + \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) + if_y(z_0))\,(\Delta\mathrm{x} - i\Delta\mathrm{y}) + \bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z}) =$$
$$= f\,(z_0) + f_z(z_0)\Delta\mathrm{z} + f_{\bar{z}}(z_0)\Delta\bar{\mathrm{z}} + \bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z}),$$

где $f_z = \frac{1}{2}\,(f_x - if_y)$, $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\,(f_x + if_y)$.

Определение. Условие $f_{\bar{z}} = 0$ называется *условием Коши-Римана.*

Замечание. В терминах функций u и v оно записывается так:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}.$$

Теорема. *$f'\,(z_0)$ существует тогда и только тогда, когда $f(z)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0 и удовлетворяет в этой точке условиям Коши-Римана. В случае существования, $f'\,(z_0) = f_z\,(z_0)$.*

Доказательство. Достаточность. Если $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, то легко видеть, что

$$\frac{f\,(z_0 + \Delta\mathrm{z}) - f\,(z_0)}{\Delta\mathrm{z}} = f_z(z_0) + \bar{\bar{o}}(1),\; z \to z_0.$$

То есть существует

$$f'\,(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f\,(z_0)}{z - z_0} = f_z(z_0).$$

Необходимость. Пусть существует указанный предел. Тогда

$$\frac{f\,(z_0 + \Delta\mathrm{z}) - f\,(z_0)}{\Delta\mathrm{z}} = f'\,(z_0) + \bar{\bar{o}}(1),\; z \to z_0$$
$$f\,(z_0 + \Delta\mathrm{z}) - f\,(z_0) = f'\,(z_0)\,\Delta\mathrm{z} + \bar{\bar{o}}(\Delta\mathrm{z}),\; z \to z_0.$$

С другой стороны, $\mathbb{R}$-дифференцируемость эквивалентна представимости приращения функции в виде

$$f\ (z_0+\Delta z)-f\ (z_0)=f_z(z_0)\Delta \mathrm{z}+f_{\bar z}(z_0)\Delta\bar z+\bar{\bar{o}}(\Delta \mathrm{z}),\ z\to z_0$$

(если такое представление построено, то находятся $f_x=f_z+f_{\bar z}$ и $f_y=(f_{\bar z}-f_z)\ /i$). Итак, из $\mathbb{C}$-дифференцируемости следует $\mathbb{R}$-дифференируемость, причем выполнены условия Коши-Римана $f_{\bar z}(z_0)=0$. □

Определение. Отображение $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ называется *конформным в точке* z_0, если оно дифференцируемо в этой точке, и его дифференциал представляется в виде композиции поворота и гомотетии с отличным от 0 коэффициентом.

Легко видеть, что в этом случае матрица его дифференциала имеет вид

$$J=k\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\cos\varphi & -k\sin\varphi\\ k\sin\varphi & k\cos\varphi\end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$J=\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}$$

и представляется в таком виде тогда и только тогда, когда $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, то есть, когда соответствующая функция комплексного переменного f удовлетворяет условиям Коши-Римана в точке z_0, что эквивалентно ее $\mathbb{C}$-дифференцируемости в этой точке. Условие $k\neq 0$ при этом эквивалентно $f'\ (z_0)\neq 0$. Итак, доказана

Теорема. *Отображение F конформно в точке z_0 тогда и только тогда, когда f голоморфна в точке z_0, и $f'\ (z_0)\neq 0$.*

Далее, из $f_{\bar z}=0$ следует, что $if_y=-f_x$, откуда $f_z=\frac{1}{2}\ (f_x-if_y)=\frac{1}{2}\ (f_x+f_x)=f_x=u_x+iv_x$. С другой стороны, коэффициент k и угол φ находятся из условий

$$u_x=k\cos\varphi,\quad v_x=k\sin\varphi$$

то есть, как длина и полярный угол вектора (u_x,v_x), но этот вектор и есть вектор $f_z=f'\ (z_0)$. Вспоминая определения модуля и аргумента, получаем

$$k=|f'\ (z_0)|\ ,\quad \varphi=\arg f'\ (z_0)$$

22 Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования

Обозначение. $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Это множество можно снабдить сферической метрикой d^*, которая индуцирует на нём топологию. Это даёт, в частности, систему окрестностей бесконечности. Метрика d^* определяется формулами $d^*(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_2|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$ для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $d^*(z, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ для $z \in \mathbb{C}$.

Определение (Конформность в точке)**.** Пусть функция f является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0 \in \mathbb{C}$. f называется *конформной* в точке z_0, если её дифференциал в этой точке имеет вид $df|_{z_0}(\Delta z) = ke^{i\alpha}\Delta z$ с $k > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, или, что то же самое, существует производная f в точке z_0, не равная нулю.

Геометрический смысл конформности заключается в том, что конформные отображения сохраняют углы между кривыми (то есть между их касательными векторами) в данной точке: $f(\gamma(t))|'_{t_0} = f'(z_0)\gamma'(t_0)$, если $\gamma(t_0) = z_0$. Угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ — это угол между векторами $\gamma_1'(t_1)$ и $\gamma_2'(t_2)$ на комплексной плоскости, и умножение на $f'(z_0)$ его не меняет.

Определение (Конформность и бесконечность)**.** Пусть функция f задана на $\overline{\mathbb{C}}$ и принимает значения оттуда же. Рассмотрим три случая.

1. Пусть f отображает некоторую окрестность бесконечности в некоторую окрестность бесконечности. Говорят, что f *конформна на бесконечности*, если отображение $g(z) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{z}\right)}$, доопределённое равенством $g(0) = 0$, конформно в точке 0.

2. Пусть f отображает окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ в окрестность бесконечности. Говорят, что f конформна в точке z_0, если функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, доопределённая равенством $g(z_0) = 0$, конформна в точке z_0.

3. Пусть f отображает окрестность бесконечности в окрестности точки $w_0 \in \mathbb{C}$. Говорят, что f конформна на бесконечности, если

функция $g(z)=f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, доопределённая равенством $g(0)=w_0$, конформна в точке 0.

Определение (Конформность в области)**.** Пусть D — область (то есть открытое связное множество) в $\mathbb{C}$. Если f конформна в каждой точке D, то говорят, что она *локально конформна* в D. Если f вдобавок взаимно однозначна на D, то говорят, что она *конформна* в D.

Теперь рассмотрим элементарные функции комплексного переменного.

Предложение. *Для любого* $z\in\mathbb{C}$ *существует* $e^z:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

Доказательство. Считаем, что для $z\in\mathbb{R}$ *это уже известно.*

Обозначим $z_n:=\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$. Положим $z=x+iy$, тогда $\left|1+\dfrac{z}{n}\right|=\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^2+\left(\dfrac{y}{n}\right)^2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)}=e^{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]}=e^x.$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg(z_n)=\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{n+x}\right)=y.$$

Пояснение к последней цепочке равенств: при $n\gg 1$ точка $1+\dfrac{z}{n}$ лежит в правой полуплоскости, а потому верно равенство $\arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)$.

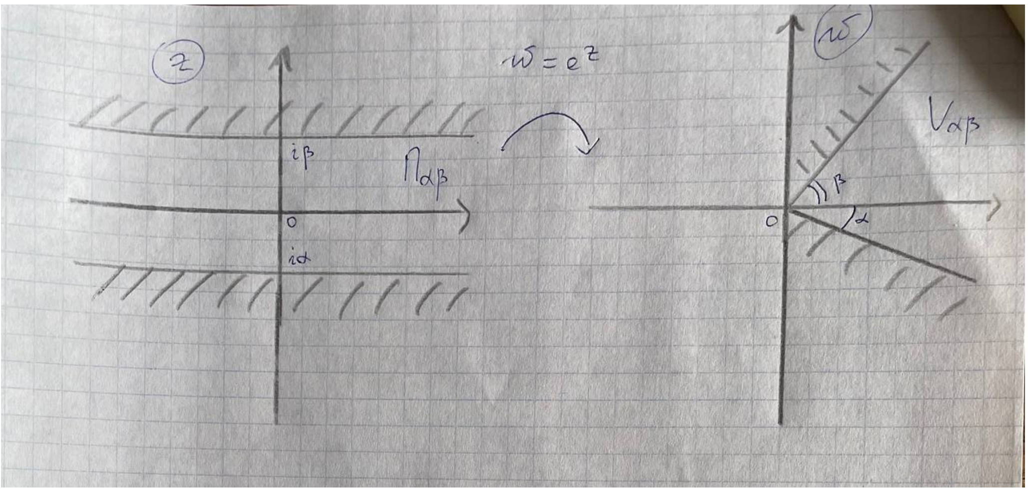
Итак, существует $\lim_{n\to\infty}z_n=e^x(\cos y+i\sin y)$. $\square$

Отметим несколько свойств экспоненциальной функции: $|e^z|=e^x$, $\operatorname{Arg}e^z=\{y+2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $e^{2\pi i}=1$, $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$.

Теперь определим логарифм как функцию, обратную к экспоненте. Поскольку экспонента периодична, она не является взаимно однозначным отображением. А значит, обратная функция будет многозначна. Итак, скажем, что $w\in\operatorname{Ln}z$, если $z=e^w$.

Определение. Пусть F — многозначная функция на области E и $\varnothing\neq E_1\subseteq E$. Пусть $f:E_1\to\mathbb{C}$ — функция такая, что $\forall z\in E_1$ выполнено $f_1(z)\in F(z)$. Тогда говорят, что f_1 — однозначная ветвь многозначной функции F на E_1.

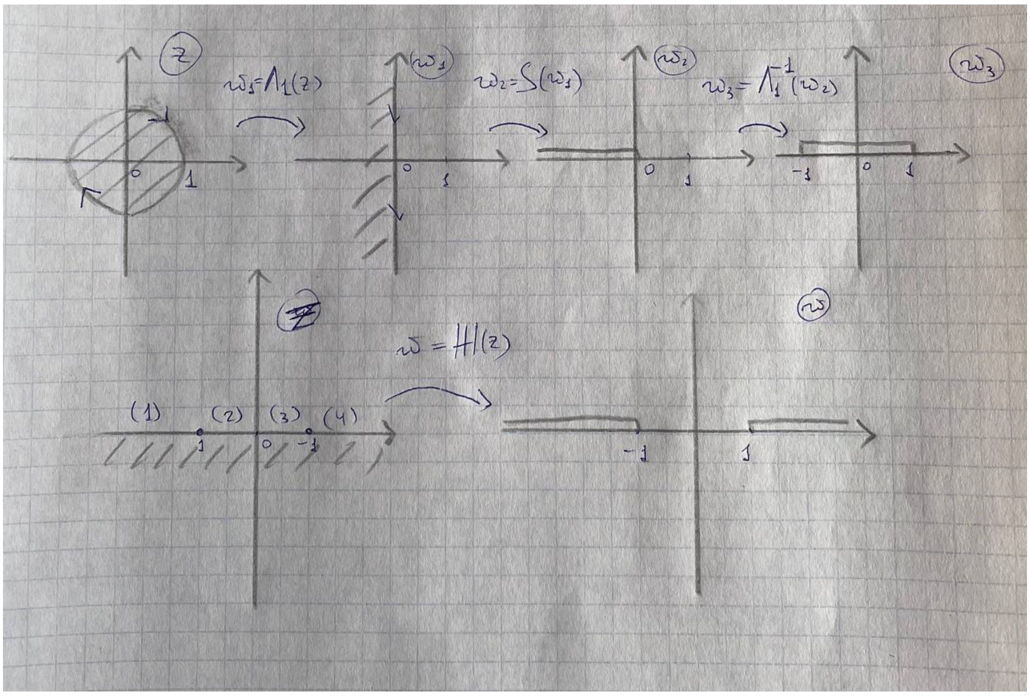
Функция e^z гомеоморфно отображает полосу $\Pi_{\alpha\beta}=\{z:\alpha<\operatorname{Im}z<\beta\}$ $(\beta\leqslant\alpha+2\pi)$ на область $V_{\alpha\beta}$ (см. рис.).



Обозначим обратное отображение через $\ln_{(\alpha;\beta)} w$. Оно конформно на $V_{\alpha,\beta}$. Это однозначная ветвь функции $\operatorname{Ln} w$ на $V_{\alpha\beta}$. *Главным значением* функции $\operatorname{Ln} w$ называется ветвь $\ln w := \ln_{(-\pi;\pi)} w$. Несложно видеть, что $\ln z$ конформна в области $\mathbb{C} \setminus (\infty; 0]$ и отображает эту область на полосу $\Pi_{(-\pi;\pi)}$.

При помощи функции $\operatorname{Ln} z$ можно определить степенную и показательную многозначные функции: $z^p := e^{p \operatorname{Ln} z}$ для $p \in \mathbb{C}$ и $a^z := e^{z \operatorname{Ln} a}$ для $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Главные значения этих функций получаются подстановкой главного значения логарифма в определяющие их формулы. Заметим, что ветви a^z являются целыми (т.е. голоморфными в $\mathbb{C}$) функциями. При $n \in \mathbb{N}$ функция $z^n = z \cdot \ldots \cdot z$ локально конформна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и конформна в $V_{\left(-\frac{\pi}{n};\frac{\pi}{n}\right)}$ (но ни в какой большей области).

Ещё одна замечательная функция — это функция Жуковского $Ж(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Производная функции Жуковского обращается в 0 лишь в точках ± 1, а потому $Ж(z)$ локально конформна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$. Функцию Жуковского можно представить в виде композиции $Ж(z) = \Lambda_1^{-1} \circ S \circ \Lambda_1$, где $\Lambda_1(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ и $S(z) = z^2$. Эта композиция поможет понять, куда отображаются основные области конформности этой функции: B_1 (открытый единичный круг), $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_1}$ (эти два множества склеиваются функцией Жуковского), Π_+ (верхняя полуплоскость) и Π_- (нижняя полуплоскость) (эти два множества тоже перейдут в одно в силу нечётности функции Жуковского и того факта, что образ Π_+ симметричен относительно нуля).



Теперь рассмотрим тригонометрические функции. Они определяются следующими равенствами.

$$\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

$$\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};$$

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z};$$

$$\operatorname{ctg} z := \frac{\cos z}{\sin z};$$

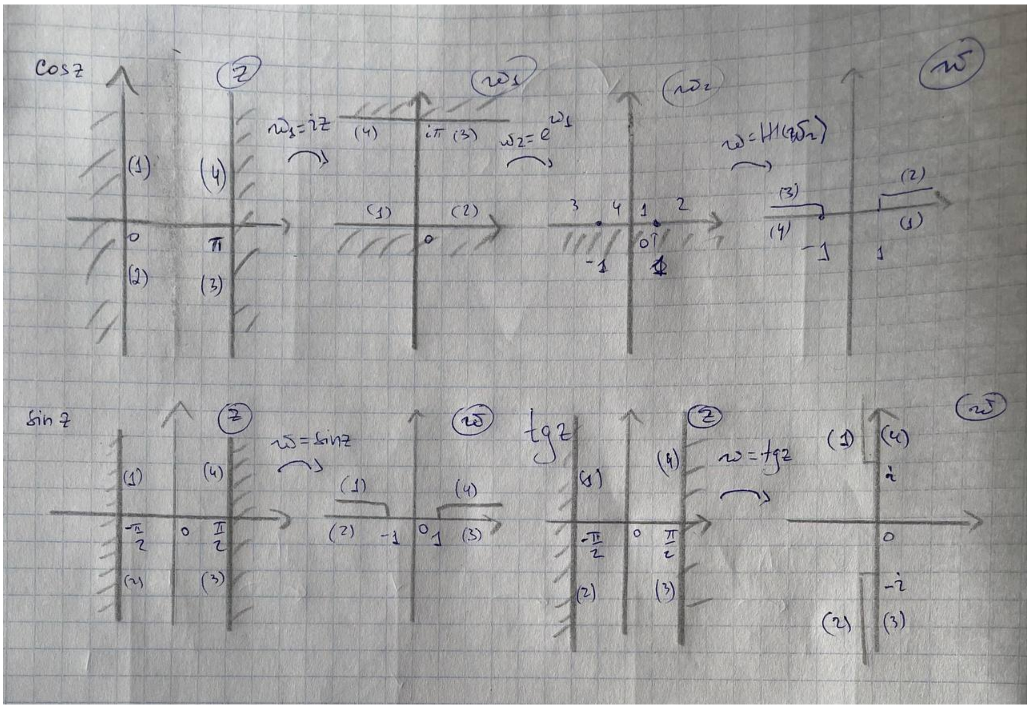
$$\operatorname{ch} z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{sh} z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z := \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z};$$

$$\operatorname{cth} z := \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Функции $\sin z$ и $\operatorname{tg} z$ конформны в полосе $|\operatorname{Re}(z)| < \dfrac{\pi}{2}$. Функция $\cos z$ конформна в полосе $0 < \operatorname{Re}(z) < \pi$. Кроме того, этим функциям соответствуют многозначные обратные (арксинус, арккосинус и арктангенс). Их однозначные ветви на образах этих полос под действием синуса, косинуса и тангенса соответственно суть их главные значения. Чтобы понять, куда эти полосы переводят наши тригонометрические функции, заметим, что выполняются следующие три равенства: $\cos z = Ж(e^{iz})$, $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$ и $\operatorname{tg} z = -i\Lambda_1(e^{2iz})$, где $\Lambda_1(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.



Определение. *Дробно-линейное отображение (ДЛО)* — это фукнция вида $w = \Lambda(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ и

$$\delta := \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Утверждение (Свойства ДЛО)**.**

1. *Всякое ДЛО является гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.*

2. *Всякое ДЛО является конформным автоморфизмом $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.*

3. *Обратное к ДЛО также является ДЛО. Обратному ДЛО соответствует матрица, полученная обращением матрицы данного ДЛО. Композиция ДЛО также является ДЛО, и этой композиции соответствует произведение матриц двух ДЛО.*

4. ДЛО образуют группу относительно композиции, изоморфную $PGL_2(\mathbb{C})$ (фактор $GL_2(\mathbb{C})$ по центру).

Доказательство.

1. Непрерывность очевидна, биективность тоже, для точек $z = -d/c, \infty$ доопределяется по непрерывности.

2. $\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)' = \dfrac{\delta}{(cz+d)^2} \neq 0$ и с конформностью на бесконечности тоже всё хорошо (это легко проверяется руками).

3. Прямая проверка.

4. Следствие предыдущего. Осталось заметить, что умножение матрицы ДЛО на скаляр не изменяет этого ДЛО.

$\square$

Комментарий: есть ощущение, что на госах хватит всего, что было описано до этого момента, так что если не будет хватать времени, то можно остановиться в написании билета примерно здесь.

Будучи конформным автоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$, всякое ДЛО обладает замечательными геометрическими свойствами. Опишем их.

Определение. *Обобщённой окружностью* в $\overline{\mathbb{C}}$ называется обычная окружность в $\mathbb{C}$ или прямая, дополненная бесконечной точкой.

Теорема (Круговое свойство ДЛО)**.** *Всякое ДЛО отображает обобщённую окружность на обобщённую окружность.*

Доказательство. Если $c = 0$, то $\Lambda(z) = az + b = a\left(z + \dfrac{b}{a}\right)$ — композиция параллельного переноса и поворотной гомотетии. Такое отображение очевидно сохраняет окружности и прямые, а бесконечность оставляет на месте.

Пусть теперь $c \neq 0$. Положим $z_0 = -\dfrac{d}{c}$ и напишем $\Lambda(z) = \dfrac{az+b}{c(z-z_0)} = \alpha + \dfrac{\beta}{(z-z_0)}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\beta \neq 0$. Поэтому Λ представляется в виде композиции отображений $w_1 = z - z_0$, $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ и $w_3 = \beta w_2 + \alpha$. Первое и третье отображение, очевидно, обладают круговым свойством (то есть переводят обобщённые окружности в обобщённые окружности). Остаётся понять, почему им обладает отображение $\Lambda(z) = \dfrac{1}{z}$. Чтобы это понять, докажем следующее утверждение.

Утверждение. *Всякая обобщённая окружность в* $\overline{\mathbb{C}}$ *имеет уравнение (в* $\mathbb{C}$*)* $Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$, *где* $A, C\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{C}$ *и* $AC<|B|^2$.

Доказательство. В уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ или прямой $ax+by+c=0$ нужно подставить $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ и $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, и всё станет ясно. $\square$

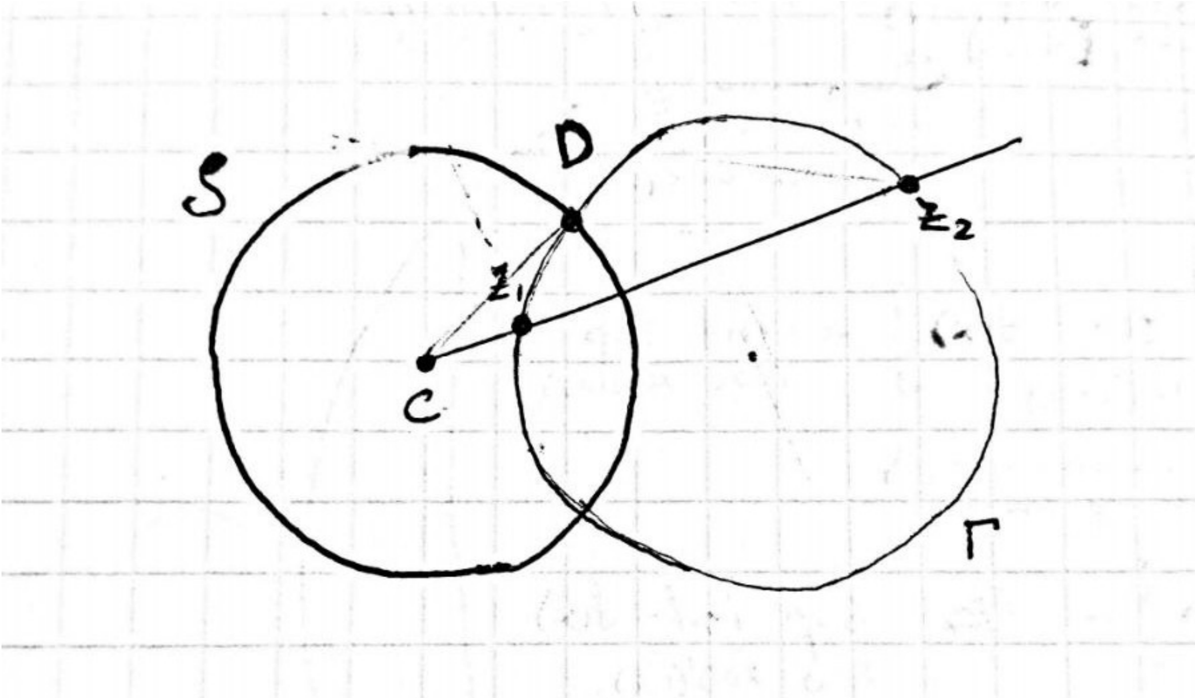
Очевидно, что форма уравнения обобщённой окружности сохраняется при подстановке $z\mapsto\dfrac{1}{z}$ (A и C просто поменяются местами). $\square$

Напомним, что *симметрией относительно (обычной) окружности* называется инверсия, то есть отображение, переводящее точку A, лежащую на луче с началом в центре O этой окружности, в точку B, лежащую на этом же луче, такую, что выполнено равенство $|OA|\cdot|OB|=r^2$, где r — радиус окружности.

Напомним также, что две пересекающихся окружности называются *ортогональными*, если угол между радиусами, проведёнными в точку их пересечения (любую из двух), прямой. Прямая и окружность называются ортогональными, если центр окружности лежит на прямой.

Лемма. *Пусть* S *— обобщённая окружность. Тогда точки* z_1 *и* z_2 *симметричны относительно* S *тогда и только тогда, когда для любой обобщённой окружности* Γ*, проходящей через* z_1 *и* z_2*, выполнено* $S\perp\Gamma$.

Доказательство. Если S — прямая, то всё очевидно: если Γ — окружность, то заметим, что серединный перпендикуляр к любой хорде окружности проходит через центр этой окружности (и обратно, всякая окружность симметрична относительно своего диаметра), а если Γ — прямая, то всё верно по определению симметрии.



Пусть S — обычная окружность (см. рис.). Если две точки z_1 и z_2 симметричны относительно S, то по определению они лежат на прямой, проходящей через её центр. Поэтому остаётся понять, что происходит, когда Γ — обычная окружность. Обозначим центр S через C, а точку пересечения S и Γ через D. Тогда $|Cz_1||Cz_2| = |CD|^2$, что означает, что прямая CD является касательной к Γ, то есть Γ и S перпендикулярны. Обратно, если любая Γ, содержащая z_1 и z_2, перпендикулярна S, то возьмем в качестве Γ прямую, проходящую через z_1 и z_2 и получим, что она проходит через центр S. Возьмём теперь в качестве Γ обычную окружность. В силу её перпендикулярности S прямая CD будет касательной к Γ, а значит, $|CD|^2 = |Cz_1| \cdot |Cz_2|$, то есть z_1 и z_2 симметричны относительно S. $\square$

Теорема. *Всякое ДЛО Λ переводит точки, симметричные относительно обобщённой окружности S, в точки, симметричные относительно её образа $\Lambda(S)$.*

Доказательство. Это следует из леммы, кругового свойства и того факта, что конформные отображения сохраняют углы между кривыми (в частности, между обобщёнными окружностями). $\square$

Теорема (Свойство трёх точек)**.** *Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ — различные точки. Пусть то же верно для w_1, w_2, w_3. Тогда существует единственное ДЛО, переводящее z_i в w_i для $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство. Существование. Рассмотрим ДЛО $\Lambda_1(z) := \dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ (оно переводит z_1 в 0, z_2 в ∞ и z_3 в 1) и $\Lambda_2(w) := \dfrac{w-w_1}{w-w_2} : \dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$. Тогда $\Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1$ — искомое ДЛО.

Единственность. Пусть имеется два ДЛО Λ_1 и Λ_2 с указанным свойством. Тогда $\Lambda(z) := \Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1$ оставляет точки z_1, z_2 и z_3 на месте. Из этого следует, что оно тождественно (ведь если это не так, то уравнение $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$, где $\dfrac{az+b}{cz+d} = \Lambda(z)$, имеет не больше двух решений, а мы предъявили три). $\square$

Следствие. *Всякое ДЛО сохраняет ангармоническое отношение четырёх точек:* $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [\Lambda(z_1), \Lambda(z_2), \Lambda(z_3), \Lambda(z_4)]$, *где* $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \dfrac{z_4-z_1}{z_4-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$.

23 Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ БИЛЕТА:

Определение. Пусть D – это область в $\mathbb{C}$ и функция f непрерывна в D. Говорят, что f *удовлетворяет условию треугольника в* D, если для любого замкнутого треугольника $\Delta \subseteq D$ выполнено $\int_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$.

Лемма (Гурса)**.** Δ – *замкнутый треугольник с ориентированной границей* $\partial^+\Delta$, *функция* f *определена в некоторой окрестности треугольника* Δ *и* f *является* $\mathbb{C}$*-дифференцируемой в любой точке* $z \in \Delta \implies \int_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$.

Следствие. $f \in \mathcal{A}(D) \implies f$ *удовлетворяет условию треугольника в* D.

Доказательство. Предположим от противного, что $\int_{\partial^+\Delta} f(z)dz = I \neq 0$. Разбиваем наш треугольник $\Delta = \Delta_0$ на 4 КОНГРУЭНТНЫХ треугольника $T_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ средними линиями.

Имеем:

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{\partial^+ T_j^{(1)}} f dz = \int_{\partial^+\Delta_0} f dz = I,$$

откуда найдётся такой j_1, что

$$\left| \int_{\partial^+ T_{j_1}^{(1)}} f dz \right| \geq |I|/4.$$

Обозначим $\Delta_1 = T_{j_1}^{(1)}$ и будем продолжать в том же духе. Через l_n обозначим периметр треугольника Δ_n. Мы получим систему вложенных замкнутых треугольников со свойствами:

$$l_n = l_0/2^n,$$

$$\left|\int_{\partial^+\Delta_n} f dz\right| \geq |I|/4^n.$$

По ТЕОРЕМЕ О ВЛОЖЕННЫХ КОМПАКТАХ $\cap_{n=0}^{\infty}\Delta_n = z_0 \in \Delta_0$. По условию

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0),$$

где $\mu(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$, $\mu(z_0) = 0$ определена в окрестности Δ_0 и непрерывна на Δ_0. Фиксируем $\epsilon > 0$ и выберем $\delta : |\mu(z)| \leq \epsilon$ при $|z - z_0| < \delta$. Выберем n такое, что $l_n < \delta$. Тогда

$$\frac{|I|}{4^n} \leq \left|\int_{\partial^+\Delta_n} f dz\right| = \left|\int_{\partial^+\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mu(z)(z - z_0))dz\right| =$$

$$= \left|\int_{\partial^+\Delta_n} \mu(z)(z - z_0)dz\right|,$$

так как интеграл от многочлена по треугольнику равен нулю (надо считать руками для z^n по отрезку; будет формула как в матане). Далее,

$$\left|\int_{\partial^+\Delta_n} \mu(z)(z - z_0)dz\right| \leq \epsilon l_n^2 = \epsilon \frac{l_0^2}{4^n}.$$

Отсюда $|I|/4^n \leq \epsilon l_0^2/4^n \implies |I| \leq \epsilon l_0^2$ – противоречие. □

Теорема (Коши для односвязной области)**.** *D – односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f удовлетворяет в D условию треугольника $\implies$ для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ в D выполнено $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Доказательство. Добейте... □

Следствие. *D – односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f удовлетворяет в D условию треугольника $\implies$ для любых спрямляемых кривых Γ_1 и Γ_2 в D с одинаковыми началами и концами имеем $\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутую кривульку $\Gamma_1 \cap \Gamma_2^-$. □

Если D – это область в $\mathbb{C}$, $F \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) = F'(z)$ $\forall z \in D$, то F называется *комплексной первообразной* функции f в D.

Теорема (о существовании первообразной в односвязной области)**.** *D – односвязная область в $\mathbb{C}$, f удовлетворяет условию треугольника в $D \implies$ для любой фиксированной точки $a \in D$ функция $F_a(z) = \int_{\Gamma_{az}} f(z)dz$ является первообразной для f в D, где Γ_{az} – это любая спрямляемая кривая в D с началом в a и концом в z.*

Доказательство. Фиксируем $z_0 \in D$. Докажем, что $F_a'(z_0) = f(z_0)$. Фиксируем $\epsilon > 0$, находим такую $\delta > 0$, что $B_\delta(z_0) \subseteq D$ и при $z \in B_\delta(z_0)$ выполнено $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Оценим

$$\left|\frac{F_a(z) - F_a(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{z - z_0}\left(\int_{\Gamma_{az}} f(z)dz - \int_{\Gamma_{az_0}} fdz\right) - \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(z_0)dz\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(z)dz - \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(z_0)dz\right| =$$

$$= \frac{1}{|z - z_0|}\left|\int_{[z_0,z]} (f(z) - f(z_0))dz\right| < \epsilon.$$

□

Определение. Зафиксируем $S \in \mathbb{N}$. Пусть заданы замкнутые спрямляемые жордановы кривые Γ_s^+, ограничивающие области D_s, $s = 1, \ldots, S$. Если $S = 1$, то на этом и закончим. Пусть $S \geq 2$ и все замыкания $\overline{D_s}$, $s = 2, \ldots, S$ попарно не пересекаются и лежат в D_1. Рассмотрим область $D = D_1 \setminus \bigsqcup_{s=2}^{S} \overline{D_s}$. Она называется *допустимой областью ранга S*. Её *ориентированная граница* – это $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \cap (\cap_{s=2}^{S} \Gamma_s^-)$.

Определение. Жорданова область G называется *простейшей*, если ее ориентированная граница может быть задана параметризацией $\gamma(t) = a + r(t)e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, где $a \in \mathbb{C}$, $r : [-\pi, \pi] \to (0, \infty)$ – функция ограниченной вариации с условием $r(-\pi) = r(\pi)$. Далее, допустимая область называется *простой*, если существует конечное число простейших областей $G_1, \ldots, G_N$ таких, что

1. при всех $n \neq m$ выполнено $G_n \subseteq D$ и $G_n \cap G_m = \emptyset$;
2. для всех $f \in C(\overline{D})$ выполнено $\int_{\partial^+ D} f(z)dz = \sum_{n=1}^{N} \int_{\partial^+ G_n} f(z)dz$;
3. $\overline{D} = \cap_{n=1}^{N} \overline{G_n}$.

Замечание. Кольцо является простейшей областью.

Теорема (интегральная теорема Коши для допустимых областей)**.** *D – допустимая область в $\mathbb{C}$, $f \in C(\overline{D})$ и удовлетворяет условию треугольника в $D \implies \int_{\partial^+ D} f(z)dz = 0$.*

Доказательство. Надо короче доказать для простейших, а для этого достаточно доказать для простых. Добейте... □

Теорема (интегральная формула Коши)**.** *D – допустимая область, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D}) \implies$ для всех $z_0 \in D$ выполнено*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Доказательство. Докажем, как всегда, для простых. Добейте... □

Теорема (формула Коши для производных)**.** *D – допустимая область, $f \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D}) \implies$ для всех $k \geq 0$ и $z_0 \in D$ выполнено*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

В частности, $f^{(k)} \in \mathcal{A}(D)$.

Доказательство. По индукции, пусть верно для k. Фиксируем $z_0 \in D$ и пусть $d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Пусть $\Delta z \in B_{d/2}(0)$, $\Delta z \neq 0$.

$$\frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} f(z) g_{\Delta z}(z) dz,$$

где

$$g_{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)^{k+1}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \right).$$

Остается доказать, что $g_{\Delta z} \rightrightarrows g_0$ на ∂D при $\Delta z \to 0$, здесь $g_0(z) = (k+1)(z - z_0)^{-k-2}$, и воспользоваться спрямляемостью ∂D. Для этого заметим, что

$$g_{\Delta z}(z) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(z - z_0)^j (z - z_0 - \Delta z)^{k+2-j}}$$

и

$$\left\| \frac{1}{(z - z_0)^j (z - z_0 - \Delta z)^{k+2-j}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+2}} \right\|_{\partial D} \to 0$$

при $\Delta z \to 0$. □

Теорема (Морера)**.** *D – область в $\mathbb{C}$, f удовлетворяет в D условию треугольника $\implies f \in \mathcal{A}(D)$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой о существовании первообразной в односвязной области для кругов из D и теоремой выше. □

Теорема (Коши-Тейлор)**.** *$r \in (0, \infty]$, $f \in \mathcal{A}(B)$, где $B = B_r(z_0) \implies f$ во всем круге разлагается в свой ряд Тейлора с центром в z_0:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Доказательство. Добейте... выживших □

Следствие. *$B = B_r(z_0)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ в $B \implies a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.*

Доказательство. Из билета 8 мы знаем, что $f \in \mathcal{A}(B)$, а значит определен ряд Тейлора функции f. Подставим $z = z_0$, получим $f(z_0) = a_0$. Ну и так далее дифференцируем да подставляем (ох как удачно сложилось, что характеристика поля $\mathbb{C}$ равна нулю, над полями конечной характеристики такой трюк, разумеется, не прокатил бы (ну и с факториалом бы были проблемы (именно наличие экспоненциирования делает теорию алгебраических групп над полями характеристики нуль сильно проще))). □

ВТОРОЙ ВАРИАНТ БИЛЕТА (СОБРАНО НА ОСНОВЕ ЛЕКЦИЙ ДОМРИНА-СЕРГЕЕВА):

Напомним определение первообразной в произвольной области:

Определение. *Первообразной* функции f в области $D \subseteq \mathbb{C}$ называется голоморфная в D функция F такая, что:

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D$$

Известна следующая теорема о существовании первообразной у голоморфной функции в круге:

Теорема. *Всякая функция f, голоморфная в круге $U \subseteq \mathbb{C}$, имеет в U первообразную.*

Для доказательства теоремы выше как раз и нужна лемма Гурса. Но доказывать это всё мы пока не станем, чтобы не загромождать билет.

Теперь дадим определение первообразной вдоль пути.

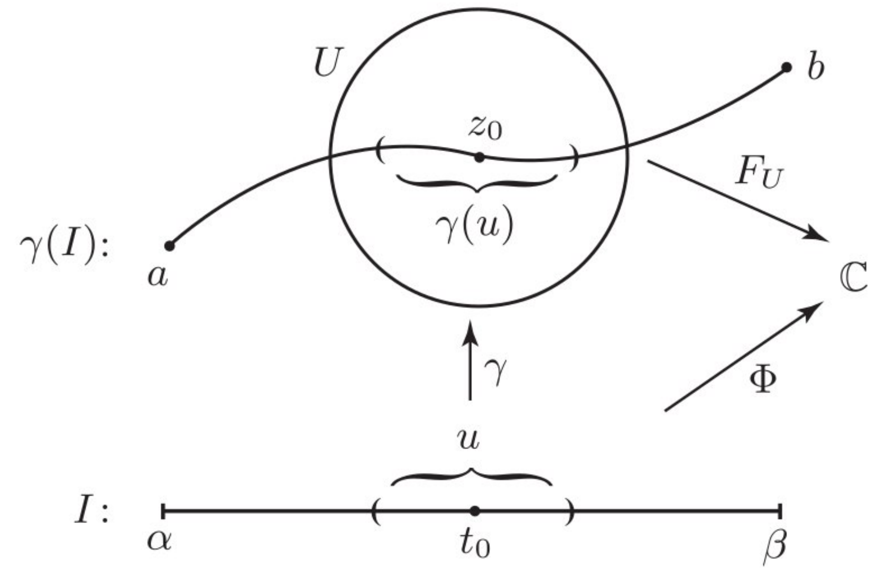
Определение. Пусть $\gamma\colon I \to D$ – произвольный путь в области D и $f\colon D \to \mathbb{C}$ – произвольная функция в этой области. Функция $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$ называется *первообразной функции f вдоль пути γ*, если:

(1) Φ непрерывна на I;

(2) для любого $t_0 \in I$ можно указать круг, $U \subset D$ с центром в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ и первообразную F_U в этом круге так, что

$$\Phi(t) = F_U(\gamma(t))$$

для всех t из некоторого открытого интервала $u = u(t_0) \subset I$, содержащего t_0.



Первообразная вдоль пути существует и единственна с точностью до прибавления константы.

Также известна формула Ньютона-Лейбница.

Теорема. *Пусть $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to D$ – кусочно гладкий путь в области D и функция f голоморфна в этой области. Обозначим через Φ первообразную f вдоль γ. Тогда*

$$\int_\gamma f dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Вспомним определение гомотопных путей. Пусть $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ – область. Тогда можно считать, что любой путь в D имеет вид $\gamma\colon I = [0,\ 1] \to D$ – этого можно добиться заменой параметризации кривой.

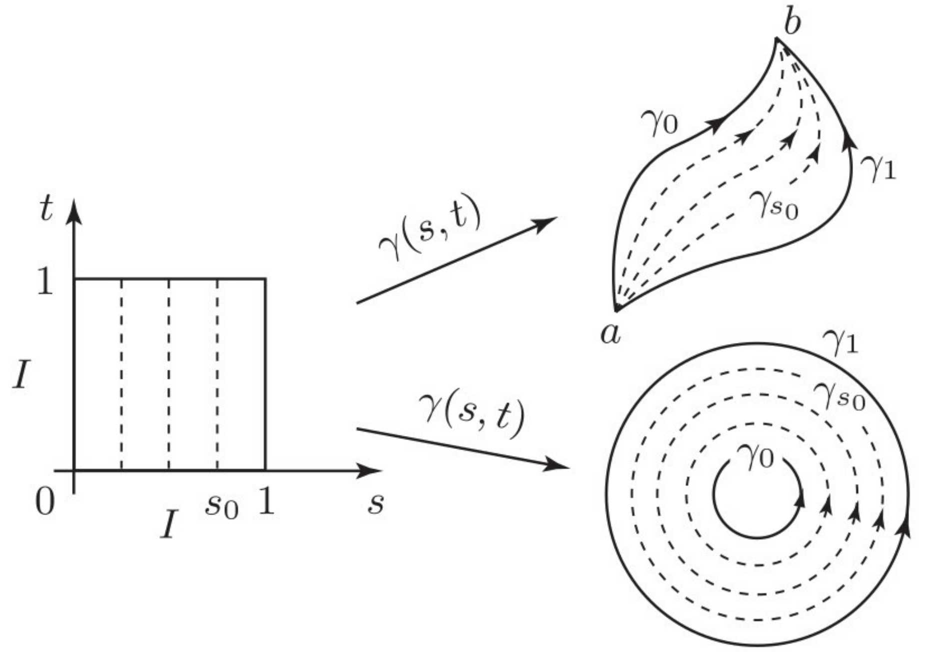
Определение. Два *пути* $\gamma_0\colon I \to D$ и $\gamma_1\colon I \to D$ с общими концами

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a, \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$$

Называются гомотопными в области D, если существует непрерывное отображение $\gamma = \gamma(s,\ t)\colon I \times I \to D$ такое, что

$$\gamma(0,\ t) \equiv \gamma_0(t), \quad \gamma(1,\ t) \equiv \gamma_1(t), \quad t \in I$$

$$\gamma(s,\ 0) \equiv a, \quad \gamma(s,\ 1) \equiv b, \quad s \in I$$



Определение выше работает и для замкнутых путей, когда $a = b$.

Первые из двух заявленных в билете теорем легко докажутся с помощью следующей теоремы.

Теорема (Теорема Коши о гомотопии). *Если функция f голоморфна в области D и пути γ_0 , γ_1 гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Доказательство. Рассмотрим гомотопию двух данных путей:

$$\gamma_s(t) = \gamma(s, t)\colon I \times I \to D.$$

И рассмотрим интегралы, соответствующие каждому пути из гомотопии:

$$J(s) = \int_{\gamma_s} f dz, \quad \forall s \in I.$$

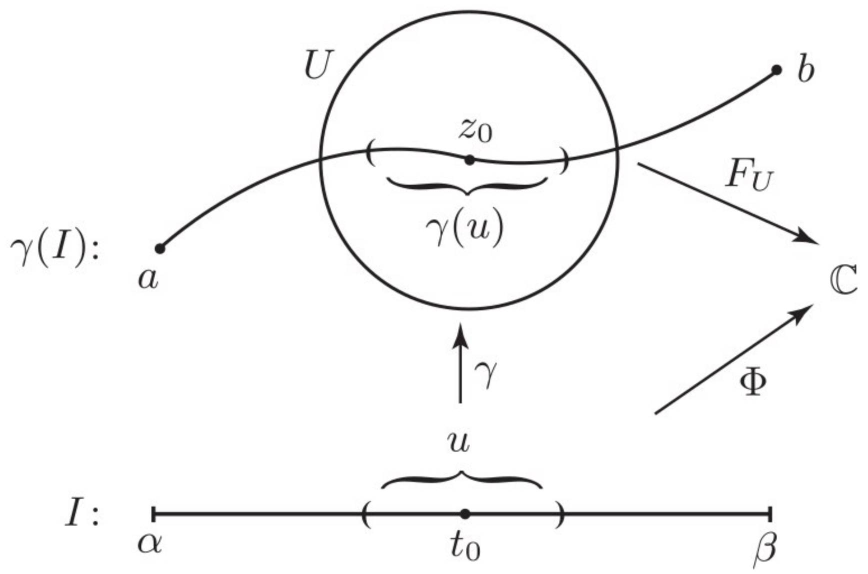
Нам нужно доказать, что $J(0) = J(1)$. Для этого достаточно показать, что каждая точка $s_0 \in I$ обладает окрестностью $v = v(s_0) \subset I$ такой, что $J(s) = J(s_0)$ для всех $s \in v$.

Рассмотрим произвольную первообразную функции f вдоль пути γ_{s_0} $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$. Рассмотрим разбиение отрезка I точками, как в определении первообразной вдоль пути:

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$$

на отрезки $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, для которого найдутся: (1) круги $U_j \subset D$ такие, что $\gamma_{s_0}(I_j) \subset U_j$ (2) первообразные $F_j \in \mathcal{A}(U_j)$ функции f в U_j такие, что

$$\Phi = F_j \circ \gamma_{s_0} \ \text{ на } \ I_j \ \ \forall j = 1, \ ..., n.$$



Так можно сделать в силу компактности носителя пути.

Из определения первообразной вдоль пути $F_j \equiv F_{j-1}$ на $U_j \cap U_{j-1}$. Кроме того, раз $\gamma(s, t)$ непрерывна $I \times I$ (на компакте), то она равномерно непрерывна на нём. Тогда найдётся окрестность $v \subset I$ точки s_0 такая, что $\gamma(v \times I_j) \subset U_j$ при всех j (т.е. мы построили покрытие кругами U для γ_{s_0}, а покрыли все пути γ_s, $s \in v$).

Теперь можно рассмотреть новую функцию $\Phi_s\colon I \to \mathbb{C}$ переменного t на всём отрезке, зависящую от $s \in v$, как от параметра:

$$\Phi_s = F_j \circ \gamma_s \ \text{ на } \ I_j \ \ \forall j = 1, \ ..., n.$$

Тогда получается, что при каждом $s \in v$ функция Φ_s непрерывна на I и совпадает в окрестности каждой точки $t_0 \in I$ с $F(\gamma_s(t))$ для некоторой первообразной F_i функции f в окрестности точки $\gamma(t_0)$) (напомним, что $F_j \equiv F_{j-1}$ на $U_j \cap U_{j-1}$!). Но тогда по определению, Φ_s *является первообразной функции f вдоль пути γ_s.*

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$J(s) = \int_{\gamma_s} f dz = \Phi_s(1) - \Phi_s(0).$$

Для окончания доказательства нужно показать, что эта функция не зависит от $s \in v$. Для порядка рассмотрим случаи, когда пути γ_0 и γ_1 замкнуты и не замкнуты:

1. Если пути γ_0 и γ_1 *гомотопны как пути с общими концами* ($\gamma_s(0) = a$, $\gamma_s(1) = b$ для всех $s \in I$), то числа

$$\Phi_s(0) = F_1(\gamma_s(0)) = F_1(a) \ \text{ и } \ \Phi_s(1) = F_n(\gamma_s(1)) = F_n(b)$$

не зависят от $s \in v$. Тогда и их разность $J(s)$ принимает одно и то же значение для всех $s \in v$.

2. Если γ_0 и γ_1 *гомотопны как замкнутые пути* (так что $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ для всех $s \in I$), то (не зависящие от s) функции F_1 и F_n как две первообразные функции f в окрестности $U_1 \cap U_n$ точки $z_s = \gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ отличаются на (независящую от s) константу:

$$F_n(z) - F_1(z) = C \ \text{ для всех } \ z \in U_1 \cap U_n$$

Поэтому

$$J(s) = F_n(\gamma_s(1)) - F_1(\gamma_s(0)) = F_n(z_s) - F_1(z_s) = C$$

принимает одно и тоже значение для всех $s \in v$. □

Следствие (Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру)**.** *Если функция f голоморфна в области D и путь $\gamma\colon I \to D$ гомотопен нулю в этой области, то*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

В частности, в односвязной области интеграл от функции $f \in \mathcal{A}(D)$ по любому замкнутому пути $\gamma\colon I \to D$ равен нулю.

Доказательство. Вытекает из предыдущей теоремы и того факта, что интеграл по постоянному пути $\gamma(t) \equiv z_0$ равен нулю. □

ТЕПЕРЬ МОЖНО ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМУ КОШИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

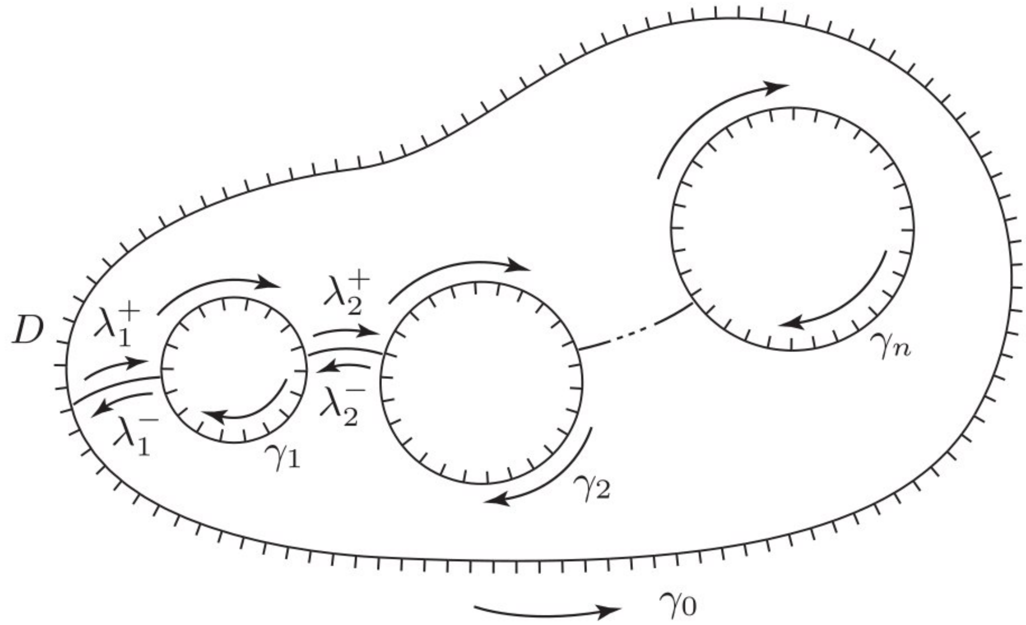
Теорема (Коши)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – компактно принадлежащая $\mathbb{C}$ подобласть (имеется ввиду, что замыкание подобласти компактно в $\mathbb{C}$) с простой границей (объединение конечного числа непересекающихся кусочно гладких замкнутых жордановых кривых $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n$, где γ_0 обозначает внешнюю границу D, а $\gamma_1, ..., \gamma_n$ – внутренние компоненты ∂D) и функция f голоморфна в некоторой области $G \supset D$. Тогда*

$$\int_{\partial D} f dz = \int_{\gamma_0} f dz - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f dz = 0$$

Доказательство. Если внешняя часть границы (γ_0) ориентирована против часовой стрелки, а внутренняя по часовой, то первая часть равенства – просто определение интегрирования.

Значит, остаётся доказать $\int_{\partial D} f dz = 0$

Проведем в области D конечное число разрезов $\lambda_1^{\pm}, ..., \lambda_n^{\pm}$, связывающих компоненты границы $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n$ между собой, так, чтобы замкнутая кривая Γ, составленная из отрезков границы ∂D и путей $\lambda_j^{\pm}$ была гомотопна нулю в области G:



Тогда по следствию из теоремы Коши будем иметь:

$$0 = \int_{\Gamma} f dz = \int_{\partial D} f dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{\lambda_j^+} f dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{\lambda_j^-} f dz = \int_{\partial D} f dz$$

так как интегралы по λ_j^+ и λ_j^- в сумме дают нуль. □

Замечание. Вообще говоря, чтобы довести приведенное выше рассуждение до строгого доказательства, необходимо уточнить, как проводить разрезы $\lambda_j^{\pm}$ так, чтобы кривая Γ была гомотопна нулю в G.

Но делать этого мы, конечно, не будем. Потому что и так много всего. Желающие могут по этому поводу заглянуть в лекции Домрина. Там даются идеи.

Замечание. Теорема Коши остается верной, если требование голоморфности f в объемлющей области $G \supset D$ ослабить до требования голоморфности f в области D и ее непрерывности в замыкании D. Схема доказательства в этом случае такова: надо найти последовательность компактно вложенных друг в друга областей $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D$ с простыми границами такую, что $\cup_1^{\infty} D_n = D$, и проверить, пользуясь непрерывностью f в D, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial D_n} f dz = \int_{\partial D} f dz$$

Так как $\int_{\partial D_n} f dz = 0$ в силу доказанной теоремы, отсюда будет следовать, что и $\int_{\partial D} f dz = 0$.

ТЕПЕРЬ ДОКАЖЕМ ИНТЕГРАЛЬНУЮ ФОРМУЛУ КОШИ

Теорема (Интегральная формула Коши)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – компактно принадлежащая $\mathbb{C}$ подобласть с простой границей и функция f голоморфна в некоторой области $G \supset \overline{D}$. Тогда для всех $z \in D$ справедлива формула*

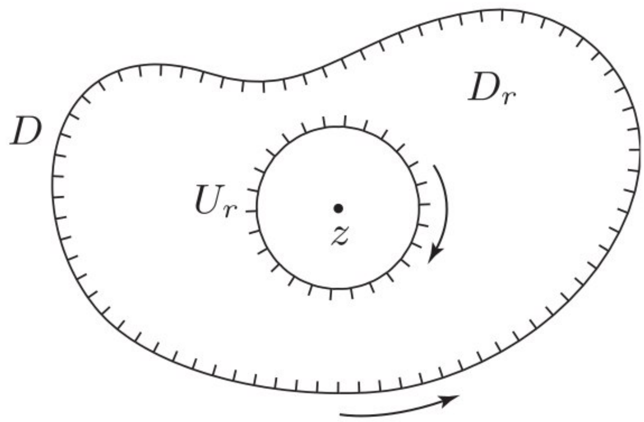
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Интеграл в правой части этой формулы называется интегралом Коши*, а функция $\frac{1}{\zeta - z}$ – ядром Коши.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z \in D$ и рассмотрим круг:

$$U_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}.$$

Границу ориентируем так, как на рисунке:



Выберем достаточно малый радиус круга r, чтобы $\overline{U}_r \subset D$. Применим теорему Коши к области $D_r = D \setminus \overline{U}_r$ и функции

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

голоморфной в замыкании этой области. Получим

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Отсюда видно, что интеграл в правой части не зависит от r. Для доказательства теоремы достаточно показать, что он равен $2\pi i f(z)$. Имеем

$$2\pi i f(z) - \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial U_r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где мы воспользовались равенством

$$\int_{\partial U_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i.$$

С помощью простой оценки $|\int_\gamma f d\gamma| \le \sup_{\zeta\in\gamma} |f| \cdot |\gamma|$, где $|\gamma|$ – длина пути, покажем, что $\int_{\partial U_r} \frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$:

$$\left| \int_{\partial U_r} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \le \sup_{\zeta \in \partial U_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{r} \cdot 2\pi r \le 2\pi \sup_{\zeta \in \partial \overline{U}_r} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Радиус r в знаменателе в выражении после первого знака неравенства вылезает из-за того, что U_r – круг и ζ – точка на его границе. Второе неравенство возникает из-за того, что мы берём sup по большему множеству.

Получается, что выражение $\int_{\partial U_r} \frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ при уменьшении r можно сделать сколь угодно малым. С другой стороны, как отмечалось выше, это выражение не зависит от r. значит, оно равно 0. Значит

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

$\square$

РЯД ТЕЙЛОРА:

Теорема (Коши-Тейлор)**.** *Пусть функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и $U_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ – круг радиуса $R > 0$ с центром в точке $a \in D$, содержащийся в D. Введем обозначение*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2..., \quad 0 < r < R.$$

Числа c_n не зависят от r и называются коэффициентами Тейлора функции f в точке a. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

называется рядом Тейлора функции f с центром в точке a. Он сходится для всех $z \in U_R(a)$ и его сумма равна $f(z)$:

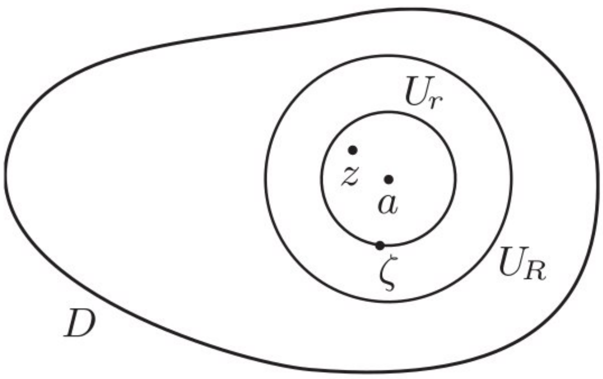
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{при} \quad |z - a| < R.$$

Доказательство. Независимость c_n от выбора r вытекает из теоремы Коши о гомотопии, поскольку любые две окружности

$$\{|\zeta - a| = r_1\} \text{ и } \{|\zeta - a| = r_2\} \text{ с } 0 < r_1 < r_2 < R$$

гомотопны в D как замкнутые пути.

Зафиксируем точку $z \in U_R(a)$ и число $0 < r < R$, удовлетворяющее $|z-a| < r < R$.



По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

По построению $|z-a| < r = |\zeta - a|$ для всех $\zeta \in \partial U_r(a)$. Воспользуемся этим для разложения подынтегрального выражения в геометрическую прогрессию:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Изучим модуль n-го члена этого ряда:

$$\left| \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \le \frac{M(r)}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n, \quad \text{где} \quad M(r) = \max_{|\zeta - a| = r} |f(\zeta)|.$$

Заметим, что $\frac{|z-a|}{r} = \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} < 1$ по построению. Значит, элементы $\frac{M(r)}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n$ являются членами геометрической прогрессии. Тогда числовой ряд их этих элементов сходится и мажорирует функциональный ряд с элементами в левой части неравенства. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Значит, его можно почленно интегрировать.

Почленно проинтегрировав равенство

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

и поделив на $2\pi i$, по формуле Коши (написана выше) получим в точности то, что указано в формулировке теоремы. $\square$

24 Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

Теорема. (Лорана) *Любую функцию f, голоморфную в кольце $V = \{r < |z-a| < R\}$, можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=\rho\}} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

где $r < \rho < R$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z \in V$ и построим кольцо $V' = \{r' < |\zeta - a| < R'\}$, такое что $z \in V' \subset V$. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V'} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \Gamma'} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)}}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \gamma'} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)}}_{I_2},$$

где окружности $\Gamma' = \{|\zeta - a| = R'\}$ и $\gamma' = \{|\zeta - a| = r'\}$ ориентированы против часовой стрелки.

Для всех $\zeta \in \Gamma'$ имеем $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| = q < 1$, следовательно, геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

сходится равномерно по ζ на Γ'. Заметим, что умножение на ограниченную функцию $\dfrac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ не нарушает равномерной сходимости. Проинтегрируем I_1

почленно:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma'}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\cdot f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Gamma'}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,\,1,\,...).$$

Второй интеграл разложим иначе. При всех $\zeta\in\gamma'$ имеем $\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|=p<1$, следовательно, получаем равномерно сходящуюся геометрическую прогрессию

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(z-a)\left(1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Аналогично, умножив ее на $\dfrac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ и интегрируя почленно вдоль γ', получаем

$$-I_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\gamma'}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n},\tag{36}$$

где

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\mathrm{d}\zeta\quad(n=1,\,2,\,...).\tag{37}$$

Заменим в формулах (36) и (37) индекс n, пробегающий значения 1, 2, ... индексом $-n$, пробегающим значения -1, -2, ... и положим

$$c_n=d_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'}f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1}\mathrm{d}\zeta\quad(n=-1,\,-2,\,...).$$

Тогда разложение (36) примет вид:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\gamma'}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)}=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n.$$

Таким образом,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

Остается заметить, что по теореме об инвариантности интеграла относительно замены параметра в формулах для c_n окружности Γ' и γ' можно заменить любой окружностью $\{|\zeta-a|=\rho\}$, где $r<\rho<R$. □

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n}_{\text{регулярная часть}} \tag{38}$$

называется *рядом Лорана.*

Определение. Скажем, что ряд (38) сходится/сходится абсолютно в точке $b \in \mathbb{C}$, если в этой точке сходятся/сходятся абсолютно его регулярная и главная части одновременно.

- Пусть $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$, тогда регулярная часть ряда (38) сходится в круге $B_R(a)$ и расходится вне него.

- Главная часть ряда (38) после замены $\xi = \dfrac{1}{z-a}$ примет вид:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\xi^m.$$

  Пусть $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-m}|}}$. Тогда главная часть ряда (38) сходится при $|\xi| < \dfrac{1}{r}$ и расходится при $|\xi| > \dfrac{1}{r}$. Следовательно, главная часть сходится вне круга $B_r(a)$ и расходится внутри него.

Таким образом, если $r \geq R$, то область сходимости ряда (38) пуста, иначе

$$\{z : r < |z-a| < R\}$$

— кольцо сходимости ряда (38).

Кроме того, по теореме Абеля ряд (38) сходится равномерно на любом компактном подмножестве кольца V, поэтому по теореме Вейерштрасса его сумма голоморфна в V.

Теорема. (Единственность разложения в ряд Лорана) *Если функция $f(z)$ в непустом кольце $V = \{r < |z-a| < R\}$ представима в виде ряда Лорана, то только одним способом.*

Доказательство. Возьмем окружность $\gamma = \{|z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = f(z)$$

сходится на ней равномерно, причем это свойство сохранится после умножения обеих частей уравнения на произвольную степень $(z-a)^{-k-1}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k-1} = f(z)(z-a)^{-k-1}.$$

Проинтегрируем полученный ряд почленно вдоль окружности γ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma} (z-a)^{n-k-1} \mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{k+1}}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^{n-k-1} = \begin{cases} 0, & n-k-1 \neq -1, \\ 2\pi i, & n-k-1 = -1. \end{cases}$$

Тогда в левой части равенства только один интеграл не равен нулю, получаем:

$$2\pi i \cdot c_k = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{k+1}} \quad (n = 0, \pm 1, ...),$$

что совпадает с ранее введенными формулами для коэффициентов ряда. $\square$

Следствие. (Неравенство Коши) *Пусть функция f голоморфна в кольце $V = \{r < |z-a| < R\}$ и на окружности $\gamma_\rho = \{|z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$, ее модуль не превосходит постоянной M. Тогда коэффициенты ряда Лорана функции f в кольце V удовлетворяют неравенствам*

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, в которой функция f голоморфна, а в самой точке либо не определена, либо не голоморфна.

В зависимости от поведения f при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Определение. Изолированная особая точка a функции f называется

1. *устранимой точкой*, если существует конечный

$$\lim_{z \to a} f(z) = A;$$

2. *полюсом*, если существует

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

3. *существенно особой точкой*, если f не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Теорема. (Критерий устранимой точки) *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является устранимой тогда и только тогда, когда лорановское разложение f в окрестности точки a не содержит главной части.*

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть a — устранимая точка, тогда существует конечный $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$ и, значит, $|f| \le M$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\{0 < |z-a| < R\}$ точки a. Возьмем произвольное ρ, $0 < \rho < R$, и воспользуемся неравенствами Коши:

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, ...).$$

Если $n < 0$, то правая часть стремится к нулю при $\rho \to 0$, а левая часть от ρ не зависит. Следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$.
ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть в проколотой окрестности точки a функция f представляется лорановским разложением без главной части. Тогда это разложение является тейлоровским, и, значит, существует и конечен предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0$, следовательно, точка a устранима. □

Теорема. (Критерий полюса) *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения f в окрестности точки a содержит лишь конечное и положительное число отличных от нуля членов:*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n, \; N > 0.$$

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть a — полюс, поскольку предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, то существует проколотая окрестность точки a, в которой f голоморфна и отлична от нуля. В этой окрестности голоморфна функция $\phi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, причем существует $\lim\limits_{z\to a}\phi(z)=0$. Следовательно, a является устранимой точкой функции ϕ и в нашей окрестности справедливо разложение

$$\phi(z) = b_N(z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + ... \quad (b_N \neq 0).$$

Тогда в этой же окрестности имеем

$$f(z) = \frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N}\cdot\underbrace{\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + ...}}_{\text{голоморфна в точке } a}, \tag{39}$$

следовательно, второй множитель допускает разложение Тейлора:

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + ...} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + ... \quad \left(c_{-N} = \frac{1}{b_N} \neq 0\right).$$

Подставим это выражение в (39), получим

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + ... + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть в проколотой окрестности точки a функция f представляется лорановским разложением с конечной главной частью. Пусть $c_{-N}\neq 0$. Тогда функция $\phi(z)=(z-a)^N f(z)$ голоморфна в этой окрестности и представляется разложением

$$\phi(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + ...,$$

из которого видно, что существует предел $\lim\limits_{z\to a}\phi(z)=c_{-N}\neq 0$. Но тогда функция $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{(z-a)^N}$ стремится к бесконечности при $z\to a$, то есть, a является полюсом f. □

Теорема. *Точка a является полюсом f тогда и только тогда, когда функция $\phi=\dfrac{1}{f}$, $\phi\not\equiv 0$ голоморфна в окрестности точки a и $\phi(a)=0$.*

Доказательство. Необходимость уже доказана в предыдущей теореме. Докажем достаточность. Если $\phi \not\equiv 0$ голоморфна в точке a и $\phi(a) = 0$, то по теореме единственности существует проколотая окрестность этой точки, в которой $\phi \neq 0$. В этой окрестности $f = \dfrac{1}{\phi}$ голоморфна, следовательно, точка a является изолированной особой точкой f, причем $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, значит, a — полюс. □

Определение. Порядком полюса a функции f называется порядок этой точки как нуля функции $\phi = \dfrac{1}{f}$.

Теорема. (Критерий существенно особой точки) *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является существенно особой тогда и только тогда, когда главная часть лораноского разложения f в окрестности точки a содержит бесконечное много отличных от нуля членов.*

Доказательство. Доказательство содержится в раннее доказанных критериях. □

Особые точки мешают применить формулу Коши. Пусть у функции f в ограниченной области D конечное число особых точек a_1, ..., a_n, а на кусочно-гладкой границе ∂D их нет. Будем вырезать эти точки из области вместе с маленькими кругами γ_i радиуса r, получим область G. Тогда функция будет голоморфной в G и интегральной формулой можно пользоваться. По формуле Коши имеем:

$$0 = \int\limits_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial \gamma_i} f(z)\mathrm{d}z,$$

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial \gamma_i} f(z)\mathrm{d}z.$$

Таким образом, вычисление интеграла от голоморфной функции по границе области сводится к вычислению ее интегралов по сколь угодно малым окружностям с центрами в особых точках.

Определение. Интеграл от функции f по достаточно малой окружности $\gamma_r = \{|z - a| = r\}$ с центром в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ этой функции, деленный на $2\pi i$, называется *вычетом f в точке a*:

$$\mathrm{res}_a\, f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} f\mathrm{d}z.$$

По теореме о неизменности интеграла при гомотопной деформации контура вычет не зависит от величины r при достаточно малых r.

Теорема. (Теорема Коши о вычетах) *Пусть D — ограниченная область с кусочной-гладкой границей, и функция $f(z)$ голоморфна в окрестности D за исключением особых точек a_1, ..., $a_n \in D$ Тогда*

$$\int_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{a_i} f.$$

Теорема.

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}$$

Доказательство. В проколотой окрестности точки a функция f представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем на окружности $\gamma_r = \{|z-a| = r\}$ при достаточно малых r этот ряд сходится равномерно. Интегрируя почленно вдоль γ_r, как и ранее в билете, получим

$$\int_{\partial\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = c_{-1} \cdot 2\pi i,$$

что доказывает данное утверждение. □

25 Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности

Определение. Областью $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будем называть открытое связное множество.

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n_1$ и $X \subset \mathbb{R}^n_2$ – две области с декартовыми координатами $(u_1, ..., u_n)$ и $(x_1, ..., x_n)$ соответственно. Говорят, что в области X задана *криволинейная система координат*, если задан диффеоморфизм $U \to X$ (взаимно однозначное, гладкое (непрерывно дифференцируемое нужное нам количество раз) в обе стороны отображение):

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, ..., u_n), \\ ... \\ x_n = x_n(u_1, ..., u_n), \\ \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) \neq 0. \end{cases}$$

В этом случае говорят, что $(u_1, ..., u_n)$ – *криволинейные координаты* на X.

Пример. Полярные координаты на плоскости, сферические координаты в пространстве.

Теперь дадим определение k-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Элементарной k-мерной поверхностью* в $\mathbb{R}^n$ называют образ некоторого открытого шара $U \subset \mathbb{R}^k$ при гладком отображении $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, ..., u_k) \\ ... \\ x_n = x_n(u_1, ..., u_k). \end{cases}$$

Если ещё потребовать максимальности ранга матрицы Якоби отображения ϕ в каждой точке:

$$rank\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) = k, \forall (u_1, ..., u_k) \in U,$$

то отображение ϕ будем называть *регулярным*, а элементарную поверхность *регулярной*.

В общем случае *(регулярной) k-мерной поверхностью* в $\mathbb{R}^n$ будем называть такие образы M гладких отображений, что для любой точки $x_0 \in M$

найдётся окрестность $W \in \mathbb{R}^n$: $W \cap M$ – элементарная (регулярная) k-мерная поверхность.

В этом случае $(u_1, ..., u_k)$ называются ***криволинейными координатами на поверхности*** M.

Такой способ задания поверхности называется *параметрическим.*

Также поверхности можно задавать с помощью систем уравнений. В этом случае для регулярности требуют, чтобы ранг матрицы Якоби, составленной из градиентов уравнений системы, был максимален в каждой точке и равен $n - k$, где k – количество локальных координат.

Обозначение. В случае параметрического способа задания удобно каждой точке поверхности M сопоставить её радиус-вектор:

$$\overline{r}(u_1, ..., u_k) = (x_1(u_1, ..., u_k), ..., x_n(u_1, ..., u_k)).$$

Итак, пусть $(u_1, ..., u_k)$ – криволинейные координаты на поверхности.

Определение. Если зафиксировать все координаты, кроме i-й, то получим *i-ю координатную линию*:

$$l_i = (x_1(u_i), ..., x_n(u_i)).$$

Касательным пространством к k-мерной поверхности M в точке x_0 называют линейное пространство

$$T_{x_0} = \left\langle \frac{\partial \overline{r}}{\partial u_1}(x_0), ..., \frac{\partial \overline{r}}{\partial u_k}(x_0) \right\rangle ,$$

которое является линейной оболочкой векторов скорости координатных линий. Это определение корректно: оно не зависит от выбора криволинейной системы координат, так как замена координат просто соответствует линейной замене базиса в пространстве выше (два разных порождающих набора касательных векторов переводятся друг в друга матрицей Якоби перехода от одних локальных координат к другим).

Если точка $x_0 \in M$ – регулярна, то в качестве базиса T_{x_0} можно взять эти векторы скорости (по определению, регулярность гарантирует максимальный ранг матрицы Якоби, а значит и линейную независимость указанных векторов).

Далее будем рассматривать только регулярные поверхности.

В этом случае можем рассмотреть *матрицу Грама* линейно независимых векторов касательного пространства T_{x_0} (составлена из попарных скалярных произведений):

$$g_{ij}(\overline{u}) = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u_i}, \frac{\partial \overline{r}}{\partial u_j} \right) .$$

Свойства:

1) g_{ij} положительно определена и невырождена.
2) g_{ij} симметрична.
3) При заменах координат меняется по тензорному закону

$$\tilde{g}_{ij}(\overline{w}) = \left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial w_i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial w_j}\right) = \left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial w_i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial w_j}\right) = \left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u_k}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u_s}\right)\frac{\partial u_k}{\partial w_i}\frac{\partial u_s}{\partial w_j}.$$

Здесь и далее по повторяющимся буквенным индексам снизу и сверху подразумевается суммирование.

Замечание. Три условия на форму выше по определению задают *риманову метрику.*

Вообще говоря форма g_{ij} зависит от точки $x_0 \in M$, в которой она рассматривается $g_{ij} = g_{ij}(x_0)$.

Определение. Квадратичную форму g_{ij} – матрицу Грама, составленную по векторам скорости координатных линий регулярной поверхности – называют ***первой квадратичной формой поверхности***.

Напомним, как связана первая квадратичная форма (матрица Грама) и вычисление скалярного произведения векторов $v, w \in T_{x_0}$

$$(v, w) = \left(v^i\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}, w^j\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^j}\right) = v^i w^j\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^j}\right) = v^i w^j g_{ij} = \begin{pmatrix} v^1 & \dots & v^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & \dots & g_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^k\end{pmatrix}.$$

Вычисление длин дуг кривых, площадей и объёмов на поверхности с помощью первой квадратичной формы.

Из линейной алгебры нам известно, что квадрат объёма параллелепипеда, натянутого на n векторов равен определителю матрицы Грама, составленной по этим векторам:

$$V^2(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \dots & (a_n, a_n)\end{vmatrix}.$$

Этот определитель ненулевой, когда все векторы линейно независимы.

Пусть $(u^1, \dots, u^k)$ – криволинейные координаты на поверхности.

Теперь возьмём базисные векторы $\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}$ в касательном пространстве к поверхности и рассмотрим элементарный параллелепипед со сторонами du^i

на этих векторах. Посчитаем его объём:

$$V^2\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^1}du^1, ..., \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^k}du^k\right) = \left|\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^j}\right)\cdot(du^1)^2\cdot ...\cdot(du^k)^2\right| = \left|\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^j}\right)\right|\cdot(du^1)^2\cdot ...\cdot(du^k)^2.$$

Значит элементарный объём (площадь) на поверхности вычисляется так:

$$dV\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^1}du^1, ..., \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^k}du^k\right) = \sqrt{\left|\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^j}\right)\right|}\cdot(du^1)\cdot ...\cdot(du^k).$$

Значит, чтобы посчитать объём (площадь) всего участка на поверхности, нужно проинтегрировать элементарный объём по всей области изменения параметров $(u^1, ..., u^k) \in U$

$$\int_U dV = \int_U \sqrt{\left|\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial\overline{r}}{\partial u^j}\right)\right|}(du^1)\cdots(du^k).$$

А что если мы хотим посчитать меру (площадь/объём) не какого участка на поверхности, а, допустим, подмногообразия меры нуль на поверхности (например, длину участка кривой на поверхности размерности большей 1 или кусочек площади двумерного подмногообразия на поверхности размерности большей 2)?

В этом случае нужно действовать так: вводим на подмногообразии локальные координаты $(t^1, ..., t^s)$. Тогда это подмногообразие на исходной поверхности будет задаваться так:

$$\overline{r}(u_1(t^1, ..., t^s), ..., u_k(t^1, ..., t^s)) = \overline{r}(t^1, ..., t^s) = (x_1(t^1, ..., t^s), ..., x_n(t^1, ..., t^s)) \in \mathbb{R}^n$$

После этого мы рассматриваем уже новую поверхность $\mathbf{r}(t^1, ..., t^s)$ и считаем для неё площадь/объём участка, как было указано выше.

Пример. Вычисление длины участка $[a, b]$ дуги кривой $\gamma = (u^1(t), ..., u^k(t))$ на поверхности:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}dt.$$

26 Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье

Эти билеты по лекциям Шафаревича. Если кому-то не понравится, есть еще книжка Мищенко Фоменко, там немножко по-другому

Пусть M – гладкая регулярная n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зафиксируем точку $P \in M$. Пусть на поверхности в некоторой окрестности P заданы локальные координаты $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$. Для каждой точки с локальными координатами $\mathbf{u}$ обозначим через $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = (x^1(\mathbf{u}), \ldots, x^n(\mathbf{u}))$ радиус-вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$, проведенный в эту точку.

Как обычно T_PM — касательное пространство к M в точке P. Базис T_PM образуют векторы $\left\{\mathbf{r}_i\Big|_P = \dfrac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial u^i}\Big|_P\right\}_{i=1}^n$. Нам нужно выбрать вектор единичной нормали $\mathbf{N}$ в точке P к поверхности M. Однако это можно сделать двумя способами. Выберем $\mathbf{N}$ так, чтобы упорядоченный набор векторов $(\mathbf{r}_1\Big|_P, \ldots, \mathbf{r}_n\Big|_P, \mathbf{N})$ был положительно ориентирован в $\mathbb{R}^{n+1}$ (считаем, что в $\mathbb{R}^{n+1}$ предварительно была задана ориентация).

Определение. Кривая, получающаяся пересечением поверхности M и какой-нибудь двумерной плоскости, проходящей через вектор нормали $\mathbf{N}$ в точке P, называется *нормальным плоским сечением* M в этой точке.

Пусть γ – какое-то нормальное сечение в точке P. Вспомним (почти трехгранник Френе), что если γ параметризована натуральным параметром s, то $\mathbf{a}(s) = \mathbf{r}(\mathbf{u}(s))'_s$ — касательный вектор к кривой, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{r}(\mathbf{u}(s))''_{ss}/||\mathbf{r}(\mathbf{u}(s))''_{ss}||$ — вектор главной нормали. Далее, $\mathbf{a}$ — касательный вектор к γ в точке P, $\mathbf{b}$ – вектор главной нормали к γ в точке P. Определим для γ «кривизну со знаком» $\widetilde{k}$. Пусть $\widetilde{k}$ равно обычной кривизне γ, если вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{N}$ смотрят в одну сторону, и равно «минус» кривизне в противном случае. Заметим, что нормальное сечение γ однозначно восстанавливается по вектору $\mathbf{a}$ (проводим двумерную плоскость через $\mathbf{N}, \mathbf{a}$ и пересекаем её с M). Поэтому $\widetilde{k}$ можно считать функцией только от $\mathbf{a}$. Из нашей конструкции также следует что, если умножить $\mathbf{a}$ на ненулевое число, то $\widetilde{k}$ не изменится.

Определение. *Второй квадратичной формой* гиперповерхности M в точке P назовем функцию q, которая каждому вектору $\mathbf{a} \in T_PM$ сопоставляет число

$$q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \widetilde{k}(\mathbf{a})$$

Теорема. *Определение корректно. Кроме того, в базисе* $\left\{ \boldsymbol{r}_i\Big|_P = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})}{\partial u^i}\Big|_P \right\}_{i=1}^n$ *матрица* q *имеет элементы*

$$q_{ij} = \left(\boldsymbol{N},\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^j}\bigg|_P \right), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Восстановим по $\mathbf{a}$ нормальное сечение γ. Выберем на кривой γ натуральный параметр s так, чтобы в точке P выполнялось $s=0$. Обозначим эту параметризацию в локальных координатах как $\mathbf{u}=\mathbf{u}(s)$. Пусть $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{u}(s))$ — уравнение γ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Т.к. s — натуральный параметр и $|\mathbf{N}|=1$, то выполнено $\widetilde{k}=(\mathbf{N}, \ddot{\mathbf{r}}(0))$. Тогда

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \frac{d}{ds} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i\Big|_P \dot{u}^i\big|_{s=0} = \sum_{i,j=1}^n r_{ij}\Big|_P \dot{u}^i(0)\dot{u}^j(0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i\Big|_P \ddot{u}^i(0),$$

где $r_{ij}\Big|_P = \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j}\bigg|_P$. Умножая равенство скалярно на $\mathbf{N}$ и учитывая, что $(\mathbf{r}_i\Big|_P, \mathbf{N})=0$,

$$\widetilde{k} = \sum_{i,j=1}^n \left(\mathbf{N}, r_{ij}\Big|_P \right) \dot{u}^i(0)\dot{u}^j(0).$$

В силу того, что $\mathbf{a}$ — касательный вектор к γ, то имеем $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cdot\dot{\mathbf{u}}(0)$. Поэтому

$$q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \widetilde{k} = |\mathbf{a}|^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\mathbf{N}, r_{ij}\Big|_P \right) \dot{u}^i(0)\dot{u}^j(0) = \sum_{i,j=1}^n \left(\mathbf{N}, r_{ij}\Big|_P \right) a^i a^j.$$

□

Замечание. С помощью матрицы q_{ij} в базисе $\left\{ \mathbf{r}_i\Big|_P \right\}_{i=1}^n$ также можно показать, что q — квадратичная форма. Действительно, если $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{u})$ — замена координат, то

$$\left(\mathbf{N},\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^i \partial v^j} \right) = \left(\mathbf{N},\ \frac{\partial}{\partial v^i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial v^j} \right) \right) = \left(\mathbf{N},\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^i \partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial v^j} \right) + \frac{\partial^2 u^s}{\partial v^j \partial v^i} \left(\mathbf{N},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^s} \right),$$

где второе слагаемое равно нулю по определению $\mathbf{N}$. Далее

$$= \left(\mathbf{N},\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^i \partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial v^j} \right) = \left(\mathbf{N},\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^t \partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial v^j} \frac{\partial u^t}{\partial v^i} \right) = q_{st} \frac{\partial u^s}{\partial v^j} \frac{\partial u^t}{\partial v^i}.$$

Т.е. мы получили что числа q_{ij} при замене базиса преобразуются как тензор типа $(0, 2)$.

Определение. Пусть l — произвольная кривая (на всякий случай являющаяся плоским сечением) на M, проходящая через точку P. Пусть γ — нормальное сечение, которое касается кривой l в точке P (т.е. γ и l имеют общий касательный вектор в точке P). Тогда *нормальной кривизной кривой l* назовём кривизну $\widetilde{k}$ нормального сечения γ.

Теорема (Менье)**.** *Пусть l — произвольная кривая на M (на всякий случай являющаяся плоским сечением), проходящая через точку P, $\boldsymbol{a}$ — касательный вектор к l в этой точке, и γ — нормальное сечение M двумерной плоскостью проходящей через $\boldsymbol{a}$ (таким образом, γ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{N}$). Тогда кривизны k и $\widetilde{k}$ кривых l и γ, соответственно, находятся по формулам*

$$\widetilde{k} = \frac{q(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{a})}, \quad k \cos \phi = \widetilde{k},$$

где g, q — первая и вторая квадратичные формы поверхности M в точке P, ϕ — угол между векторами ν — главной нормали к кривой l и $\boldsymbol{N}$ — нормали к поверхности M (оба вычислены в точке P).

Доказательство. Формула для $\widetilde{k}$ следует из предыдущей теоремы в силу того, что $g(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — натуральная параметризация кривой l, такая что точка P соответствует $s = 0$. Тогда $\ddot{\mathbf{r}}(0) = k\boldsymbol{\nu}\Big|_P$. Умножим скалярно обе стороны равенства на вектор $\mathbf{N}$:

$$(\mathbf{N},\, \ddot{\mathbf{r}}(0)) = k \cdot (\mathbf{N},\, \boldsymbol{\nu}).$$

Левая часть была вычислена в доказательстве предыдущей теоремы, она равна $\widetilde{k}$. При этом $k \cdot (\mathbf{N},\, \boldsymbol{\nu}) = k \cdot |\mathbf{N}| \cdot |\boldsymbol{\nu}| \cdot \cos \phi = k \cdot \cos \phi$, откуда получаем вторую формулу. $\square$

27 Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

Эти билеты по лекциям Шафаревича. Если кому-то не понравится, есть еще книжка Мищенко Фоменко, там немножко по-другому

Пусть M – гладкая регулярная n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Зафиксируем точку $P \in M$. Пусть на поверхности в некоторой окрестности P заданы локальные координаты $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n)$. Для каждой точки с локальными координатами $\mathbf{u}$ обозначим через $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = (x^1(\mathbf{u}), \ldots, x^n(\mathbf{u}))$ радиус-вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$, проведенный в эту точку.

Как обычно $T_P M$ — касательное пространство к M в точке P. Базис $T_P M$ образуют векторы $\left\{ \mathbf{r}_i \Big|_P = \dfrac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial u^i} \Big|_P \right\}_{i=1}^{n}$. Вспомним, что в этом базисе матрица первой квадратичной формы имеет вид $g_{ij} = (\mathbf{r}_i \Big|_P, \mathbf{r}_j \Big|_P)$, а матрица второй квадратичной формы — $q_{ij} = \left(\mathbf{N}, \mathbf{r}_{ij} \Big|_P\right)$, где $\mathbf{r}_{ij} \Big|_P = \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} \Bigg|_P$, $\mathbf{N}$ — вектор единичной нормали к M в точке P такой, что упорядоченный набор векторов $(\mathbf{r}_1 \Big|_P, \ldots, \mathbf{r}_n \Big|_P, \mathbf{N})$ положительно ориентрован в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема. *Существует базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в $T_P M$, в котором одновременно*

- *матрица первой квадратичной формы – единичная,*
- *матрица второй квадратичной формы – диагональная* $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Причем вещественные числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ находятся из уравнения

$$\det(Q - \lambda G) = 0 \qquad (40)$$

где $G = ||g_{ij}||$, $Q = ||q_{ij}||$ — матрицы первой и второй квадратичных форм в базисе $\left\{ \boldsymbol{r}_i \Big|_P \right\}_{i=1}^{n}$. Более того, столбец координат $\boldsymbol{a}_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)^t$ вектора $\boldsymbol{e}_i$ в базисе $\left\{ \boldsymbol{r}_i \Big|_P \right\}_{i=1}^{n}$ лежит в ядре матрицы $(Q - \lambda_i G)$, т.е.

$$(Q - \lambda_i G)\boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}. \qquad (41)$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ — произвольный ортонормированный базис $T_P M$. В этом базисе матрица первой квадратичной формы единичная (т.к. это матрица скалярных произведений базисных векторов). По теореме о приведении квадратичной формы к главным осям существует ортогональное преобразование переводящее базис $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ в базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, в котором вторая квадратичная форма диагональна. Очевидно $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ – это тоже ортонормированный базис (он получен из $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ ортогональным преобразованием), поэтому в нем первая квадратичная форма также имеет единичную матрицу.

Докажем формулу (40). Пусть $\widetilde{Q}$ — матрица второй квадратичной формы в базисе $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$, C — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{r}_i\Big|_P\}_{i=1}^n$ к базису $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$. Тогда $\widetilde{Q} = \mathrm{C}^t QC$, $E = C^t GC$ (E - единичная матрица). Собственные числа λ_i второй квадратичной формы находятся из характеристического уравнения $\det(\widetilde{Q} - \lambda E)$. Тогда

$$\det(C^t QC - \lambda C^t GC) = \det(C^t(Q - \lambda G)C) = (\det C)^2 \det(Q - \lambda G) = 0,$$

откуда получаем формулу (40).

Докажем формулу (41). Пусть $\mathbf{b}_i = (b_i^1, \ldots, b_i^n)^t$ — столбец координат вектора $\mathbf{e}_i$ в базисе $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$. Т.к. $\mathbf{e}_i$ — главная ось квадратичной формы, соответствующая собственному значению λ_i, то выполнено $(\widetilde{Q} - \lambda_i E)\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$. Т.к. C — матрица перехода из базиса $\{\mathbf{r}_i\Big|_P\}_{i=1}^n$ в базис $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$, то $C \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$. Следовательно,

$$\mathbf{0} = (\widetilde{Q} - \lambda_i E)\mathbf{b}_i = C^t(Q - \lambda_i G)C\mathbf{b}_i = C^t(Q - \lambda_i G)\mathbf{a}_i,$$

откуда получаем (41). □

Определение. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называют *главными кривизнами*, а вектора $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — *главными направлениями* поверхности M в точке P.

Вспомним, что *нормальная кривизна* в точке $P \in M$, соответствующая единичному вектору $\mathbf{a} \in T_P M$, — это кривизна нормального сечения M двумерной плоскостью, проходящей через точку P коллинеарно векторам $\mathbf{a}$ и вектору нормали $\mathbf{N}$ к M в этой точке.

Теорема (Формула Эйлера)**.** *Пусть $\widetilde{k}$ – нормальная кривизна в точке $P \in M$, соответствующая единичному вектору $\mathbf{a} \in T_P M$. Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ — главные кривизны M в точке P. Тогда*

$$\widetilde{k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \cos^2 \alpha_i$$

где α_i — это угол между вектором $\mathbf{a}$ и вектором $\mathbf{e}_i$ главного направления.

Доказательство. Т.к. $|\mathbf{a}| = 1$ и $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \cdot \mathbf{e}_i.$$

Т.к. квадратичная форма q диагональна в базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, то $q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \cos^2\alpha_i$. При этом $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}| = 1$, и остается воспользоваться формулой для нормальной кривизны $\widetilde{k} = \dfrac{q(\mathbf{a}, \mathbf{a})}{g(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ из предыдущего билета. □

Следствие. *Среди главных кривизн* $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ *содержится минимальное и максимальное значение кривизн нормальных сечений.*

Доказательство. Докажем для максимального значения, для минимального – аналогично. Для определенности будем считать, что λ_1 — это максимальная кривизна. Покажем, с помощью формулы Эйлера, что всегда выполнено $\widetilde{k} \le \lambda_1$. Пусть $\widetilde{k}$ соответствует единичному вектору $\mathbf{a}$. Тогда

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \cdot \mathbf{e}_i.$$

Т. к. $|\mathbf{a}| = 1$, то имеем $\sum_{i=1}^n \cos^2\alpha_i = 1$, откуда $\cos^2\alpha_1 = 1 - \sum_{i=2}^n \cos^2\alpha_i$. Подставим это выражение в формулу Эйлера:

$$\widetilde{k} = \lambda_1 - \sum_{i=2}^{n} (\lambda_1 - \lambda_i)\cos^2\alpha_i.$$

Отсюда получаем, что $\widetilde{k} \le \lambda_1$. При этом ясно, что λ_1 является нормальной кривизной для некоторого нормального сечения (положим $\alpha_1 = 0$, $\alpha_i = \pi/2$ для $i = 2, \ldots, n$). □

1. Непрерывность функций одной переменной. Свойства непрерывных функций.

2. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.

4. Неявная функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

7. Ряды функций Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование)

8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных

функций.

9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов

10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

11. Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.

12. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность.

13. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

14. Линейные преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями

15. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования.

Приведение квадратичной формы к главным осям.

16. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.

17. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

18. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения

19. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

20. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное

21. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

22. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие

многозначные функции. Дробно-линейные преобразования

23. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

24. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

25. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности

26. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье

27. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.