07.04.2022. Кр1. Толкова Александра

1. $X_t = \mu t + B_t$ ($\Rightarrow dX_t = \mu dt + dB_t$)

Привести пример $f(x) \not\equiv const$: $Y_t = f(X_t)$ – мартингал.

Решение: по ф-ле Ито для $f(x)$:

$$df(X_t) = f'_t dt + f'_x dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx} (dX_t)^2 =$$
$$= f'_t dt + f'_x (\mu dt + dB_t) + \frac{1}{2} f''_{xx} \cdot dt =$$
$$= \underbrace{(f'_t + \mu f'_x + \frac{1}{2} f''_{xx})}_{\stackrel{!}{=}0} dt + f'_x dB_t$$

Подберём какую-нибудь f такую, чтобы $f'_t + \mu \cdot f'_x + \frac{1}{2} f''_{xx} = 0$.

У нас $f = f(x)$ – не зависит от $t \Rightarrow f'_t = 0$.

$\Rightarrow \mu \cdot f'_x + \frac{1}{2} f''_{xx} = 0$.

Замена: $v := f'_x$

$\Rightarrow \mu \cdot v + \frac{1}{2} v'_x = 0$.

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2\mu v$

$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -2\mu dx$

$\Rightarrow \ln|v| = -2\mu x + c$

$\Rightarrow v = c \cdot e^{-2\mu x}$

Обратная замена: $f'_x = c \cdot e^{-2\mu x}$

$$\frac{df}{dx} = c \cdot e^{-2\mu x}$$

$$f = -\frac{c}{2\mu} \cdot e^{-2\mu x} + c_1$$

нам подойдёт любая, то есть $f = -\frac{1}{2\mu} \cdot e^{-2\mu x}$ – подойдёт.

$\Rightarrow$ для такой f: $df(X_t) = e^{-2\mu X_t} dB_t$ – имеет только слагаемое с $dB_t \Rightarrow$ лок. мартингал.

Проверим, что он мартингал.

т.е. надо проверить, что $E|Y_t| < \infty$?

$$E|Y_t| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| -\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu x} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\mu} \cdot e^{-2\mu x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2 + 2\mu x t - \mu^2 t^2}{2t}} dx =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 + 2\mu x t - 4\mu x t - \mu^2 t^2}{2t}} dx = \frac{1}{2\mu} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+\mu t)^2}{2t}} dx \right)}_{=1} = \frac{1}{2\mu} < \infty \Rightarrow \text{мартингал}$$

Ответ: $f(x) = -\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu x}$ – подходит.

② Найти $V(t,x)$:

$$\begin{cases} V'_t(t,x) + \frac{1}{2} V''_{xx}(t,x) + \mu V'_x(t,x) = rV(t,x) & ; t\in(0,1);\ x\in\mathbb{R} \\ V(1,x) = e^{x} \end{cases}$$

Решение: по ф-ле Фейнмана-Каца:

$a(t,x) = \mu$

$b(t,x) = 1 \qquad T = 1.$

$f(x) = e^{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} dX_t = \mu dt + dB_t \\ v(t,x) = e^{-r(T-t)} E_{t,x} f(X_T) = e^{-r(T-t)} \cdot E_T\{e^{(X_T)} \mid X_t = x\}. \end{cases}$$

У нас $dX_t = \mu dt + dB_t$

$$\Rightarrow X_T = \underset{x}{\underset{\parallel}{X_t}} + \mu(T-t) + B_{T-t} \sim N(x+\mu(T-t);\ T-t)$$

$$\Rightarrow E(e^{X_T}) = E\, e^{x+\mu(T-t)+\sqrt{T-t}\cdot\xi^{\sim N(0,1)}} = e^{x+\mu(T-t)} \cdot E\, e^{\sqrt{T-t}\,\xi} =$$

$$= e^{x+\mu(T-t)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\sqrt{T-t}\cdot y} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= e^{x+\mu(T-t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2+2\sqrt{T-t}\,y}{2}} dy =$$

$$= e^{x+\mu(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\sqrt{T-t})^2+(T-t)}{2}} dy =$$

$$= e^{x+\mu(T-t)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\sqrt{T-t})^2}{2}} dy}_{=1} \cdot e^{\frac{T-t}{2}} = e^{x+\mu(T-t)} \cdot e^{\frac{T-t}{2}}$$

$$\Rightarrow V(t,x) = e^{-r(T-t)} \cdot E e^{X_T} = e^{-r(T-t)} \cdot e^{x+\mu(T-t)} \cdot e^{\frac{T-t}{2}} \Big|_{T=1} = \boxed{e^{x-(r-\mu)(T-t)+\frac{(1-t)}{2}}}$$

Ответ: $\boxed{V(t,x) = e^{x-(r-\mu)(T-t)+\frac{(1-t)}{2}}}$

③ ∃ ли решение ур-я $\begin{cases} dX_t = \frac{1}{X_t}dt + \sqrt{X_t}\,dB_t \\ X_0 = 1. \end{cases}$, опред. для всех $t \in \mathbb{R}_+$? стр1

Решение: $b(x) = \frac{1}{x}$
$\sigma(x) = \sqrt{x}$

Рассм. особую точку $y=0$.

$$\rho(x) = \exp\left(\int_x^a \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right) = \exp\left(\int_x^a \frac{2}{y\cdot y}dy\right) = \exp\left(-2\cdot\frac{1}{y}\Big|_x^a\right) = \exp\left(-2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)\right) = e^{2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)}$$

$$\int_0^a \rho(y)dy = \int_0^a e^{2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{a}\right)}dy = e^{-\frac{2}{a}}\cdot\int_0^a e^{\frac{2}{y}}dy = \infty.$$

=> выбираем между типом 3 и типом 5. Там в таблице тип 3,4,5 - вместе.

=> нам надо узнать, какой тип в $+\infty$

$$\rho(x) = \exp\left\{-\int_a^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)}dy\right\} = \exp\left\{-\int_a^x \frac{2dy}{y^2}\right\} = \exp\left\{\frac{2}{y}\Big|_a^x\right\} = \exp\left\{2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\right\}.$$

$$\int_a^{+\infty} \rho(x)dx = e^{-2/a}\int_a^{+\infty} e^{\frac{2}{y}}dy = \infty$$ => это тип A.

=> смотрим в таблицу - есть и слабое ∃-е, и слабая единственность.

(4) На рынке $B_t \equiv 1$

$S_t = 1 + W_t^2$

Обладает ли этот рынок NFLVR?

<u>Решение</u>: нет, не обладает, т.к. на этом рынке есть арбитраж,
т.к. { заняли $S_0 = 1$ руб. денег, купили 1 акцию в момент времени 0 (по $S_0 = 1$), держим её
через время t получаем, что у нас долг в 1 рубль, 1 акция,
у которой цена $S_t = 1 + W_t^2$.
$\Rightarrow$ прибыль у нас W_t^2.
А $P(W_t^2 > 0) > 0$. $\Rightarrow$ арбитраж.
А мы знаем, что NFLVR $\Rightarrow$ NA.
Но есть арбитраж $\Rightarrow$ нет NFLVR.

$\boxed{\text{Ответ: нет.}}$

(5) $B_t \equiv 1$

$$\begin{cases} dS_t^i = S_t^i(\mu^i dt + \sigma^i dW_t^i) \\ S_0^i = 1 \end{cases}$$

Найти справедливую стоимость контракта, который платит 1 в момент T, если $S_T^1 > S_T^2$, иначе 0.

<u>Решение</u>: нас интересует $E^Q[\mathbb{1}\{S_T^1 > S_T^2\}]$

Переходим в риск-нейтральную меру:

$\Rightarrow d\tilde{S}_t^i = \tilde{S}_t^i \sigma^i d\tilde{W}_t^i$

$\Rightarrow$ (ф-ла для решения GBM: $\tilde{S}_t^i = 1 \cdot e^{-\frac{(\sigma_i)^2}{2}t + \sigma_i \tilde{W}_t^i}$

Тогда стоимость в момент ноль $= E^Q[\mathbb{1}\{S_T^1 > S_T^2\}] = Q\left(e^{-\frac{(\sigma_1)^2}{2}T + \sigma_1 \tilde{W}_T^1} > e^{-\frac{(\sigma_2)^2}{2}T + \sigma_2 \tilde{W}_T^2}\right) =$

$= Q\left(e^{\underbrace{\sigma_1 \tilde{W}_T^1 - \sigma_2 \tilde{W}_T^2}_{=\tilde{\sigma}\tilde{\tilde{W}}_T}} > e^{\left(\frac{(\sigma_1)^2}{2} - \frac{(\sigma_2)^2}{2}\right)T}\right) = Q\left(\tilde{\sigma}\tilde{\tilde{W}}_T > \left(\frac{(\sigma_1)^2}{2} - \frac{(\sigma_2)^2}{2}\right)T\right) =$

$= Q\left(\tilde{\sigma} \cdot \sqrt{T} \cdot \underset{\sim N(0,1)}{\xi} > \left(\frac{(\sigma_1)^2 - (\sigma_2)^2}{2}\right)T\right) = 1 - \Phi\left(\frac{((\sigma_1)^2 - (\sigma_2)^2)T}{2\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right) = \boxed{\Phi\left(\frac{((\sigma_2^2) - (\sigma_1^2))\sqrt{T}}{2\tilde{\sigma}}\right)}$

$\boxed{\text{Ответ: стоимость}\big|_{t=0} = \Phi\left(\frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\sqrt{T}}{2\tilde{\sigma}}\right)}$