Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 4

1. Приближение интеграла Ито

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $(w_t^1, \dots, w_t^d)$ — независимые винеровские процессы и u — гладкая функция с ограниченными производными.

Предположим, что процессы $B_n^i(t,\omega)$ почти наверное сходятся к w_t^i для каждого t и почти наверное функции $t \to B_n^i(t,\omega)$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы. Обсудим существование и значение предела

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T u(B_n(t)^1, \dots, B_n(t)^d)\, dB_n(t)^j.$$

Рассмотрим более простой частный случай

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\Bigl(\int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j + B_n(t)^j\, dB_n(t)^i\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T d(B_n^i(t)B_n^j(t)) = \frac{1}{2}\bigl(B_n^i(T)B_n^j(T) - B_n^i(0)B_n^j(0)\bigr) \to \frac{1}{2}w_T^i w_T^j.$$

По формуле Ито

$$\frac{1}{2}w_T^i w_T^j = \frac{1}{2}\int_0^T w_t^i\, dw_t^j + w_t^j\, dw_t^i + \frac{1}{2}\delta^{ij}T.$$

Следовательно, для вычисления предела

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j$$

достаточно найти предел выражения

$$\frac{1}{2}\Bigl(\int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j - B_n(t)^j\, dB_n(t)^i\Bigr).$$

Оказывается, что этот предел зависит от приближения.

Рассмотрим приближение Макшейна.

Пусть $d = 2$, $t_k = kT/2^n$, функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1[0,1]$ не убывают и $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(1) = 1$. Положим $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $|\Delta_k| = t_{k+1} - t_k$, $\Delta_k w^i = w^i_{t_{k+1}} - w^i_{t_k}$ и на Δ_k при $\Delta_k w^1 \Delta_k w^2 \ge 0$

$$B_n^1(t) = w^1_{t_k} + \varphi_1\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^1, \quad B_n^2(t) = w^2_{t_k} + \varphi_2\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^2,$$

а при $\Delta_k w^1 \Delta_k w^2 < 0$

$$B_n^1(t) = w^1_{t_k} + \varphi_2\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^1, \quad B_n^2(t) = w^2_{t_k} + \varphi_1\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^2.$$

Так как на Δ_k

$$|B_n^i(t) - w_t^i| \le |\Delta_k w^i| + |w_t^i - w^i_{t_k}| \le 2N(\omega)|t_{k+1} - t_k|^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1/2,$$

то $B_n^i(t)$ почти наверное равномерно сходится к w_t^i на $[0,T]$. Найдем

$$\frac{1}{2}\int_0^T B_n^1(t)\, dB_n^2(t) - B_n^2(t)\, dB_n^1(t).$$

Имеем
$$\int_0^T B_n^1(t)\,dB_n^2(t)=\sum_k\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\,dB_n^2(t).$$
При $\Delta_k w^1\Delta_k w^2\geq 0$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\,dB_n^2(t)=w_{t_k}^1\Delta_k w^2+\int_0^1\varphi_1\dot\varphi_2\,dt\Delta_k w^1\Delta_k w^2,$$
а при $\Delta_k w^1\Delta_k w^2<0$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\,dB_n^2(t)=w_{t_k}^1\Delta_k w^2+\int_0^1\varphi_2\dot\varphi_1\,dt\Delta_k w^1\Delta_k w^2.$$
Аналогичным образом вычисляется
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^2(t)\,dB_n^1(t).$$
Следовательно, справедливо равенство
$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\,dB_n^2(t)-B_n^2(t)\,dB_n^1(t)=$$
$$=\frac{1}{2}\big(w_{t_k}^1\Delta_k w^2-w_{t_k}^2\Delta_k w^1\big)+\frac{1}{2}\Big(\int_0^1\varphi_1\dot\varphi_2-\varphi_2\dot\varphi_1\,dt\Big)|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|.$$
Положим
$$\Phi=\frac{1}{2}\Big(\int_0^1\varphi_1\dot\varphi_2-\varphi_2\dot\varphi_1\,dt\Big)=\frac{1}{2}\Big(1-2\int_0^1\varphi_2\dot\varphi_1\,dt\Big).$$
Получаем
$$\frac{1}{2}\int_0^T B_n^1(t)\,dB_n^2(t)-B_n^2(t)\,dB_n^1(t)=\frac{1}{2}\sum_k\big(w_{t_k}^1\Delta_k w^2-w_{t_k}^2\Delta_k w^1\big)+\Phi\sum_k|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|.$$
По определению стохастического интеграла почти наверное
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_k\big(w_{t_k}^1\Delta_k w^2-w_{t_k}^2\Delta_k w^1\big)=\frac{1}{2}\int_0^T w_t^1\,dw_t^2-w_t^2\,dw_t^1.$$
Заметим, что для $\xi\sim N(0,\sigma^2)$ справедливо равенство
$$\mathbb{E}|\xi|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$
Докажем, что почти наверное
$$\lim_{n\to\infty}\sum_k|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|=\frac{2}{\pi}T.$$
Имеем
$$\mathbb{E}\Big(\sum_k|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|-\frac{2}{\pi}T\Big)^2=\mathbb{E}\Big(\sum_k\big(|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|-\frac{2}{\pi}|\Delta_k|\big)\Big)^2=$$
$$\sum_{k,m}\mathbb{E}\big(|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|-\frac{2}{\pi}|\Delta_k|\big)\big(|\Delta_m w^1\Delta_m w^2|-\frac{2}{\pi}|\Delta_m|\big).$$
Поскольку вектор $(\Delta_k w^1,\Delta_k w^2)$ и вектор $(\Delta_m w^1,\Delta_m w^2)$ независимы и
$$\mathbb{E}|\Delta_k w^1\Delta_k w^2|=\frac{2}{\pi}|\Delta_k|,$$

то

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}T\Big)^2 = \sum_k \mathbb{E}\big(|\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}|\Delta_k|\big)^2.$$

Пусть

$$C = \mathbb{E}\Big(|\xi||\eta| - \frac{2}{\pi}\Big)^2,$$

где $\xi, \eta \sim N(0,1)$ — независимые величины. Получаем оценку

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}T\Big)^2 = C\sum_k |\Delta_k|^2 = \frac{CT^2}{2^n},$$

из которой следует сходимость почти наверное выражения $\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2|$ сходятся к $\frac{2}{\pi}T$.

Таким образом, выражение

$$\frac{1}{2}\Big(\int_0^T B_n(t)^1\,dB_n(t)^2 - B_n(t)^2\,dB_n(t)^1\Big)$$

почти наверное сходится к

$$\frac{1}{2}\int_0^T w_t^1\,dw_t^2 - w_t^2\,dw_t^1 + \frac{T}{\pi}\Big(1 - 2\int_0^1 \varphi_2\dot{\varphi}_1\,dt\Big).$$

Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то второе слагаемое равно нулю. Если $\varphi_1(t) = t$ и $\varphi_2(t) = t^2$, то второе слагаемое равно $\frac{T}{3\pi}$. Итак, предел зависит от выбора функций φ_1 и φ_2, то есть зависит от способа приближения винеровского процесса. Мы рассмотрели частный случай, но замечательным образом и в общем случае достаточно контролировать предел выражения

$$\frac{1}{2}\Big(\int_0^T B_n(t)^1\,dB_n(t)^2 - B_n(t)^2\,dB_n(t)^1\Big).$$

Приведем формулировку общего результата, доказательство которого можно найти в книге Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.

Пусть $P = P_W$ — мера Винера на $\Omega = C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \le t)$ и $w_t^i(\omega) = \omega^i(t)$.

Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим процесс $B_\delta(t,\omega) = (B_\delta^1(t,\omega), \ldots, B_\delta^d(t,\omega))$ на вероятностном пространстве $(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d), P_W)$, для которого выполнены условия

1) функция $t \to B_\delta^i(t,\omega)$ кусочно непрерывно дифференцируема,
2) величина $B_\delta(0,\omega)$ измерима относительно $\mathcal{F}_\delta$,
3) верно равенство $B_\delta(t + k\delta, \omega) = B_\delta(t, \omega(\cdot - k\delta) - \omega(k\delta)) + \omega(k\delta)$,
4) $\mathbb{E}B_\delta^i(0,\omega) = 0$,
5) $\mathbb{E}\Big|B_\delta^i(0,\omega)\Big|^6 \le C\delta^3$,
6) $\mathbb{E}\Big(\int_0^\delta \Big|\dot{B}_\delta^i(t,\omega)\Big|\,dt\Big)^6 \le C\delta^3$,
7) существует предел

$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\Big(\frac{1}{2}\int_0^\delta B_\delta^i\dot{B}_\delta^j - B_\delta^j\dot{B}_\delta^i\Big)\,dt\Big),$$

который будем обозначать через s_{ij}.

Теорема 1. *Для всякой гладкой функции u с ограниченными производными выражение*

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}\left(\int_0^t u(B_\delta)\,dB_\delta^j-\Bigl(\int_0^t u(w_s)\,dw_s^j+\frac{1}{2}\int_0^t u_{x_j}(w_s)\,ds\Bigr)-\int_0^t\sum_i s_{ij}u_{x_i}(w_s)\,ds\right)^2$$

стремится к нулю при $\delta\to 0$.

2. Площадь Леви

Выражение

$$\frac{1}{2}\int_0^T w_t^1\,dw_t^2-w_t^2\,dw_t^1$$

называется площадью Леви. Обсудим на примере гладкой плоской кривой $(x(t),y(t))$, где $t\in[0,T]$ и $x(0)=y(0)=0$, геометрический смысл выражения

$$\frac{1}{2}\int_0^t x\,dy-y\,dx.$$

Пусть $\mathcal{D}$ — связное открытое множество на плоскости, ограниченное кусочно гладкой жордановой замкнутой кривой ∂D, причем кривая обходит множество против часовой стрелки. Если P,Q — гладкие на $\overline{\mathcal{D}}$ функции, то по теореме Грина

$$\int_{\partial\mathcal{D}}Pdx+Qdy=\iint_{\mathcal{D}}\Bigl(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Bigr)\,dx\,dy.$$

Выбирая $Q=x$, $P=0$, и $Q=0$, $P=y$, получаем равенства

$$|\mathcal{D}|=\int_{\mathcal{D}}xdy=-\int_{\mathcal{D}}ydx.$$

Следовательно, верно равенство

$$|\mathcal{D}|=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}xdy-ydx.$$

Предположим, что кривая $(x(t),y(t))$ вместе с хордой, соединяющей точки $(0,0)$ и $(x(T),y(T))$, образуют кусочно гладкую жорданову кривую, ограничивающую множество $\mathcal{D}$. Несложно проверить, что интеграл

$$\int x\,dy-y\,dx$$

по хорде, соединяющей точки $(0,0)$ и $(x(T),y(T))$, равен нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int_0^T x\,dy-y\,dx=\pm|\mathcal{D}|.$$

Таким образом, интеграл

$$\frac{1}{2}\int_0^T x\,dy-y\,dx$$

выражает площадь (со знаком) между кривой и хордой. Согласно сформулированной выше теореме вместе с условием сходимости кусочно гладкого процесса B_δ к винеровскому процессу w_t надо контролировать предел интегралов, выражающих площади между кривой B_δ и хордой в проекции на плоскости координат x_i,x_j.

3. Обобщения стохастического интеграла

Пусть M_t — квадратично интегрируемый непрерывный мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, а $\langle M\rangle_t$ — квадратичная вариация, то есть непрерывный неубывающий процесс A_t, который согласован с $\mathcal{F}_t$, $A_0 = 0$ и для которого процесс $M_t^2 - A_t$ является мартингалом.

Отметим полезное неравенство (Burkholder-Davis-Gundy)

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t|^p \le c(p)\mathbb{E}\langle M\rangle_T^{p/2}, \quad p \ge 1.$$

Для винеровского процесса $\langle w\rangle_t = t$. С помощью формулы Ито несложно проверить, что

$$\langle \int_0^t \xi_s\, dw_s\rangle = \int_0^t |\xi_s|^2\, ds.$$

Повторяя построение стохастического интеграла по винеровскому процессу можно определить

$$\int_0^t \xi_s\, dM_s$$

для согласованного процесса ξ_t, удовлетворяющего условию

$$\mathbb{E}\int_0^T |\xi_t|^2\, d\langle M\rangle_t < \infty.$$

Интеграл по $\langle M\rangle_t$ понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, то есть как интеграл по соответствующей мере.

Далее стохастический интеграл распространяется на процессы вида

$$X_t = X_0 + M_t + S_t,$$

где S_t — непрерывный согласованный процесс ограниченной вариации. Для непрерывного согласованного процесса ξ_t (для которого определен интеграл по M_t)полагают

$$\int_0^t \xi_s\, dX_s = \int_0^t \xi_s\, dM_s + \int_0^t \xi_s\, dS_t,$$

где второй интеграл справа является интегралом Римана–Стилтьеса.

Отметим, что к процессам вида $X_t = X_0 + M_t + S_t$ относятся процессы

$$x_t = x_0 + \int_0^t B_s\, ds + \int_0^t \Sigma_s\, dw_s$$

и $f(x_t)$, где f — гладкая функция с ограниченными производными.

Для $X_t = X_0 + M_t + S_t$ полагаем $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

Пусть $X_t = X_0 + M_t + S_t$ и $Y_t = Y_0 + N_t + R_t$. Положим

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{2}\big(\langle X+Y\rangle_t - \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t\big).$$

На процессы X_t и Y_t обобщается формула Ито.

Наконец, в некоторых вопросах удобнее использовать интеграл Стратоновича

$$\int_0^T Y_t \circ dX_t = \int_0^T Y_t\, dX_t + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t.$$

Справедливо равенство

$$\int_0^T Y_t \circ dX_t = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \frac{Y_{t_k} + Y_{t_{k+1}}}{2}\Big(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\Big),$$

где предел понимается в смысле сходимости по вероятности.