Текст создавался для личного пользования.

За негативные последствия использования текста автор никакой ответственности не несет. Автор выражает благодарность всем, кто участвовал в обсуждении задач.

Задача 1. Найти ранги матриц

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

Решение. Ранг матрицы равен порядку максимального минора с ненулевым определителем. Миноры все считать не будем, воспользуемся тем, что ранг матрицы равен рангу системы векторов-строк или столбцов. Найдем этот ранг, например, с помощью метода Гаусса.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & -5 & -7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 18\end{pmatrix}$$

Ранг равен 3.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -3 & -5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ранг опять равен 3.

Задача 2. Привести пример такого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, что он сходится, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ расходится.

Решение. Так как ничего не сказано про абсолютную сходимость ряда, то приведем пример условно сходящегося, а именно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

Он сходится по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов. Ряд из квадратов расходится – это гармонический ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Задача 3. Привести пример такого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, что он сходится, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^3$ расходится.

Решение. К сожалению, в этой задаче такая же идея не пройдет. Здесь члены должны чередоваться хитрее – положительный, два отрицательных, положительный, два отрицательных, а модули убывать очень медленно.

Пример ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k/3)}{\ln(k+1)} = \frac{-1}{2\ln(2)} + \frac{-1}{2\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} + \frac{-1}{2\ln(5)} + \frac{-1}{2\ln(6)} + \frac{1}{\ln(7)} + \dots$$

Если мы объединим отрицательные члены по парам, то новый ряд сходится по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов. Действительно

$$\frac{1}{2\ln(n)} + \frac{1}{2\ln(n+1)} > \frac{1}{2\ln(n+2)} + \frac{1}{2\ln(n+2)} = \frac{1}{\ln(n+2)},$$

$$\frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{2\ln(n)} + \frac{1}{2\ln(n)} > \frac{1}{2\ln(n+1)} + \frac{1}{2\ln(n+2)}.$$

Но когда мы говорим об этом ряде, мы рассматриваем не все конечные суммы исходного ряда, а только их подпоследовательность $\{S_2, S_3, S_5, S_6, S_8, \dots\}$. Впрочем, эта подпоследовательность сходится одновременно с последовательностью $\{S_n\}$, ибо соответствующие суммы отличаются на слагаемое порядка $\frac{1}{\ln n}$, которое стремится к 0. Таким образом, сходимость ряда доказана.

Рассмотрим ряд из кубов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2\pi k/3)}{\ln(k+1)}\right)^3 = \frac{-1}{8\ln^3(2)} + \frac{-1}{8\ln^3(3)} + \frac{1}{\ln^3(4)} + \frac{-1}{8\ln^3(5)} + \frac{-1}{8\ln^3(6)} + \frac{1}{\ln^3(7)} + \dots$$

Ряд расходится из следующих соображений. Рассмотрим тройки членов вида

$$a_k = \frac{1}{\ln^3(3k+1)} + \frac{-1}{8\ln^3(3k+2)} + \frac{-1}{8\ln^3(3k+3)}.$$

Для a_k верна следующая оценка:

$$a_k > \frac{3}{4\ln^3(3k+1)} > \frac{1}{4k},$$

начиная с некоторого фиксированного $k = K_0$ (это следует из того, что логарифм растет медленнее любого многочлена). Таким образом, конечные суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$ оцениваются снизу конечными суммами гармонического ряда, то есть ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ расходится. Последовательность конечных сумм этого ряда является подпоследовательностью сумм нашего ряда из кубов (с точностью до первых двух членов), причем соответствующие суммы отличаются на слагаемое порядка $\frac{1}{\ln^3 n}$, то есть ряды сходятся и расходятся одновременно. А значит, ряд из кубов тоже расходится, что и требовалось.

Задача 4. Исследовать ряды и интегралы на сходимость (или равномерную сходимость), $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение.

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x dx}{1+x^2}.$$

Рассмотрим $g(x) = 1/(1+x^2)$. Имеет место сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(+\infty) - \mathrm{arctg}(-\infty) = \pi$$

Далее, для всех значений аргументов имеем

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| < g(x),$$

то есть $g(x)$ является мажорантой для подынтегральной функции и по признаку Вейерштрасса наш интеграл сходится равномерно.

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}.$$

Рассуждаем полностью аналогично предыдущему пункту – та же функция $g(x)$ является мажорантой, и по признаку Вейерштрасса интеграл сходится равномерно.

3)

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-tx} dx$$

Интеграл сходится при $t > 0$ и расходится при $t \leq 0$ (в первом случае интеграл считает просто, во втором оценивается снизу интегралом от 1).

Здесь не указано множество принимаемых значений параметра t. Заметим, что при всех действительных значениях параметра подынтегральная функция неотрицательна. Если $t \in (a, +\infty)$, где $a > 0$, то имеет место равномерная сходимость. Для этого используем критерий Коши. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx,$$

то найдется такое U, что

$$\int_U^{+\infty} e^{-ax} dx < \varepsilon.$$

Учитывая, что при $t > a > 0, x > 0$ верно $e^{-tx} < e^{-ax}$, имеем

$$0 < \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} dx < \int_U^{+\infty} e^{-tx} dx < \int_U^{+\infty} e^{-ax} dx < \varepsilon,$$

где $u_2 > u_1 > U$. Условие критерия Коши выполнено, и интеграл сходится равномерно на $(a, +\infty)$.

Если же $t \in (0, \infty)$, то условие критеря Коши не выполняется. Действительно, пусть $\varepsilon = 1$. Покажем, что для любого $U > 0$ найдутся такие $u_2 > u_1 > U$ и $t > 0$, что

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} dx > 1.$$

Посчитаем интеграл в левой части:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} dx = \left(-\frac{1}{t} e^{-tx} \right) \Big|_{u_1}^{u_2} = \frac{e^{-tu_1} - e^{-tu_2}}{t}.$$

Выберем t такое, чтобы выполнялось $e^{-tU}/t > 2$ (это можно сделать, так как при уменьшении t заменатель убывает к нулю, а числитель возрастает). Выбирая u_1 и u_2 так, чтобы $e^{-tu_1}/t > 1.5$ и $e^{-tu_2}/t < 0.5$, получим нужное неравенство (это тоже можно сделать, так как функция e^{-tu}/t монотонно убывает по u до нуля). Таким образом, равномерной сходимости нет.

4)

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-tx} dx$$

Непонятно, по какому параметру проверять равномерную сходимость. Если например считать α фиксированным, то при неотрицательных значениях α задача практически не отличается от предыдущего пункта, а при отрицательных значениях α еще и будет равномерная сходимость на $(0, +\infty)$ (критерий Коши).

С другой стороны, можно рассмотреть α в качестве параметра, фикисируя разные t.

Впрочем, можно рассматривать равномерную сходимость по двум параметрам сразу. Главное – использовать критерий Коши и всё аккуратно расписывать. А мне лень еще раз это делать.

5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n .$$

Рассмотри $n-$ый член ряда.

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^n = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{3n+2} \right)^n \right) .$$

Из замечательного предела следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n+2} \right)^n = e^{1/3} = C,$$

то есть при больших значениях n член ряда ведет себя как $\operatorname{tg}(C/3^n)$. Аргумент тангенса убывает, и при больших значениях n очень мал. Как мы знаем, при малых x имеет место оценка $\operatorname{tg} x < 2x$. Отсюда члены ряда мажорируются числами вида $2C/3^n$, из чего следует, что ряд сходится.

6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \operatorname{arctg} nx}{n^2 + x^2}.$$

При всех действительных значениях параметра x ряд сходится, так как сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

и

$$\left| \frac{\sqrt{n} \operatorname{arctg} nx}{n^2 + x^2} \right| \le \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + x^2} \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Исследуем ряд на равномерную сходимость. Вообще-то, мы уже это сделали, так как нашли мажоранту, которая сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд сходится равномерно для всех действительных значений x.

Задача 5. Решить дифференциальное уравнение.
Решение.
1)

$$y'' + y = \sin 2x$$

Корни характеристического многочлена $\lambda^2 + 1 = 0$ – $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, откуда общее решение однородного уравнения имеют вид $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Общее решение неоднородного уравнения находится в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения однородного. Решение неоднородного ищем в виде $y_u = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

$$(-4c_1 + c_1)\cos 2x + (-4c_2 + c_2)\sin 2x = \sin 2x,$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -1/3, \quad y_u = -\frac{\sin 2x}{3}.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = -\frac{\sin 2x}{3} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2), 3) Эти пункты решаются аналогично.

В общем случае однородное линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами решается следующим образом. Сначала находим корни характеристического многочлена $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, решение записывается в виде

$$y = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)e^{\lambda_k x},$$

где $P_j(x)$ – многочлен, степень которого на 1 меньше кратности корня λ_j.

Далее, ищем решение неоднородного уравнения. Это можно сделать методом вариации постоянных. Если же справа стоит выражение вида $Q(x)e^{\mu x}$, где $Q(x)$ – многочлен, то частное решение ищем в виде

$$y_u = \tilde{Q}(x)e^{\mu x},$$

где $\tilde{Q}(x)$ – многочлен той же степени, что и $Q(x)$, если μ не является корнем характеристического уравнения. Если же μ совпадает с одним из корней, то степень $\tilde{Q}(x)$ должна быть больше на кратность этого корня.

Не забываем так же, что синус и косинус – тоже линейные комбинации экспонент. Соответственно, если справа стоит выражение вида $Q_1(x)\cos \mu x + Q_2(x)\sin \mu x$, то решение можно искать в виде

$$y_u = \tilde{Q}_1(x)\cos \mu x + \tilde{Q}_2(x)\sin \mu x,$$

степень обоих многочленов считаем равной $\max\{\deg Q_1, \deg Q_2\} + \alpha$, где α – кратность μ как корня характеристического уравнения (если оно не является корнем, считаем $\alpha = 0$).

Если справа стоит сумма таких слагаемых вида $Q(x)e^{\mu x}$, то можно найти частные решения по отдельности и сложить – получим частное решение для всего уравнения (следует из линейности).

4)

$$y' = c$$

Ну прям даже не знаю, что написать.

5)

$$yy' + x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2}$$

Сделаем замену $z^2 = x^2 + y^2$. Нетрудно заметить, что

$$zz' = \frac{(z^2)'}{2} = \frac{(x^2 + y^2)'}{2} = yy' + x$$

Тогда мы получим уравнение на функцию $z(x)$:

$$zz' = \frac{z}{2x^2}.$$

Решение $z = 0$ не подходит, так как мы ищем решения в действительных числах, и уравнение $x^2 + y^2 = 0$ дает лишь нулевое решение. Поэтому разделим обе части на z, и получим

$$z' = \frac{1}{2x^2},$$

$$z = -\frac{1}{2x} - C$$

$$y^2 = z^2 - x^2 = \left(C + \frac{1}{2x}\right)^2 - x^2$$

Где определена функция $y(x)$, легко определить для каждого конкретного значения параметра.

Задача 6. Привести примеры рядов, сходящихся равномерно и неравномерно.

Решение.

Равномерно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

Неравномерно: возьмем пример из Чубарикова

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$$

при $x \in [0,1]$. Для всех значений $x > 0$ сумма ряда равна 1 (легко считается, геометрическая прогрессия). Но в нуле очевидно 0. Если бы была в нуле равномерная сходимость, то сумма была бы непрерывна в нуле, так как члены ряда непрерывны в нуле. Но непрерывности в нуле нет, значит, нет и равномерной сходимости.

Задача 7. Частичным пределом последовательности называется предел какой-либо ее подпоследовательности (если таковая существует). Частичный предел характеризует предельную точку, то есть такую, в любой окрестности которой лежит бесконечное число членов последовательности.

Нижним пределом последовательности называется наименьший элемент множества частичных пределов (другими словами, наименьшая из предельных точек). Аналогично, верхний предел – наибольший элемент из множества частичных пределов (наибольшая предельная точка).

Например,

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1, \quad \text{верхний предел,}$$

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1, \quad \text{нижний предел.}$$

Задача 8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$.

Решение.

Разложим функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье (рассматриваем $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$).

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Коэффициенты ряда находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx,$$

В нашем случае имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)dx = 0,$$

так как подынтегральные функции нечетные, и интеграл по отрезку, симметричному относительно точки 0 будет равен нулю.

Найдем коэффициенты $\{b_k\}$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos \pi k + \frac{-\pi}{k}\cos \pi k\right) =$$

$$= -\frac{2}{k}\cos \pi k = -\frac{2}{k}(-1)^k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$$

Таким образом, мы получили разложение

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Задача 9. Найти особые точки функций
Решение.
1)

$$f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

Отметим, что $z = 0$ точка ветвления функции $g = \sqrt{z}$. Разложим функцию $\sin\sqrt{z}$ в ряд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\sin\sqrt{z} = \sqrt{z} - \frac{(\sqrt{z})^3}{6} + \frac{(\sqrt{z})^5}{120} + \dots = \sqrt{z}\left(1 - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{120} + \dots\right) = \sqrt{z}h(x).$$

Второй множитель в последнем равенстве – голоморфная функция на $\mathbb{C}$. Имеем представление

$$f(z) = \frac{h(z)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Нужно выбрать ветвь у каждого из корней вверху и внизу. Ветви либо совпадают, либо отличаются знаком. Поэтому задание функции в одной точке определяет ее сразу на всей плоскости $\mathbb{C}$. В одном случае $f(z) = h(z)$, в другом – $f(z) = -h(z)$.

Проверим точку $z = \infty$. Пусть мы выбрали конкретные ветви корня, то есть и сверху, и снизу $\sqrt{1} = 1$ (второй случай рассматривается аналогично).

Рассмотрим две последовательности: $\{1, 2, 3, \dots\}$ и $\{-1, -2, -3, \dots\}$. По первой последовательности функция $f(z)$ стремится к нулю, ибо в числителе синус действительного числа – ограниченная функция , а знаменатель растет.

По второй последовательности функция $f(z)$ растет неограниченно, ибо в числителе синусы чисто мнимых растущих по модулю чисел, а такая последовательность растет как показательная функция действительного аргумента.

Таким образом, пределы не совпадают, а значит в $z = \infty$ существенная особенность.

2)

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

Знаменатель обращается в нуль только при $z = 0$, посему на особенность нужно проверить две точки: $z = 0, z = \infty$.

Точка $z = \infty$ является существенно особенной – если мы идем по положительным действительным числам, то предел равен нулю, если по отрицательным действительным числам, предел равен -1.

Разложим функцию в ряд функцию e^z:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

Тогда функция $f(z)$ принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots} = \frac{1}{z}\frac{1}{h(z)}.$$

Функция $h(z)$ голоморфна в окрестности нуля и $h(0) \neq 0$, а значит, функция $h_1(z) = 1/h(z)$ также голоморфна в окрестности нуля и $h_1(0) \neq 0$. Из этого и того, что

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{z}.$$

следует, что точка $z = 0$ – полюс первого порядка функции $f(z)$.

Задача 10. Найти производную функции в точке $(0,0)$.
Решение.
1)

$$f(x,y) = \sin\left|x^2 - y^2\right|$$

Покажем, что производная в точке $(0,0)$ равна 0. Для этого достаточно показать, что

$$f(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

При $t > 0$ верно неравенство $\sin t < t$ (рассмотрим функцию $g(t) = t - \sin t$ и продифференцируем – производная положительна при $t > 0$ и $g(0) = 0 = g'(0)$), поэтому запишем

$$\sin\left|\Delta x^2 - \Delta y^2\right| \leq \left|\Delta x^2 - \Delta y^2\right| \leq \left|\Delta x^2\right| + \left|\Delta y^2\right| = \Delta x^2 + \Delta y^2 = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

то есть линейная часть отсутсвует. Значит производная равна нулю.
2)

$$f(x) = \ln\cos\sqrt[4]{|xy|}$$

Найдем частную производную по x

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично, частная производная по y равна нулю в точке $(0,0)$. Если производная в точке $(0,0)$ существует, то она равна нулю, то есть в окрестности этой точки должно выполняться условие:

$$f(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

Исследуем функцию вдоль прямой $x = y$. Имеем

$$f(\Delta x, \Delta x) = \ln\cos\sqrt[4]{\Delta x^2} = \ln\cos\sqrt{\Delta x}.$$

Разложим в ряд Тейлора в нуле по $\sqrt{\Delta x}$

$$\ln\cos\sqrt{\Delta x} = \ln\left(1 - \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)\right) = -\frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x)$$

Но на прямой $x = y$ имеем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2\Delta x^2} = \sqrt{2}\Delta x$. Это означает, что $f(\Delta x, \Delta x)$ имеет тот же порядок малости, что и $(\Delta x, \Delta x)$, то есть условие

$$f(\Delta x, \Delta y) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

в окрестности нуля не выполняется, что противоречит предположению о существовании производной. То есть производная в точке $(0,0)$ не существует.

Задача 11. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, 1 < |z| < 2$.
Решение.
Очевидно, что

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

Мы имеем право расписать геометрическую прогрессию, так как по условию $|z| < 2$, то есть $|z/2| < 1$.

Рассмотрим второе слагаемое. Здесь уже нельзя разложить в ряд по положительным степеням z, ибо по условию $|z| > 1$. Поэтому поступим следующим образом

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n$$

В итоге получаем
$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n.$$

Задача 12. Найти количество групп порядка 6 и 8 (абелевых, циклических).

Решение.

Групп порядка 6 – ровно две, а именно $\mathbb{Z}_6$ и S_3. Из них абелева только одна – $\mathbb{Z}_6$, то, что других абелевых нет, следует из теоремы о структуре конечнопорожденных абелевых групп (так как $6 = 2 * 3$, то все абелевы группы порядка 6 имеют вид $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$).

Покажем, что нет других неабелевых кроме S_3.

Пусть группа G порядка 6 неабелева. Нетрудно заметить, что найдется элемент порядка 3 (от противного – предполагаем, что все неединичные элементы порядка 2 и приходим к противоречию). Он порождает нормальную подгруппу H порядка 3, так как любая подгруппа, порядок которой равен половине порядка группы, нормальна. Пусть $H = \{e, a, a^2\}$.

Покажем, что найдется элемент порядка 2. Допустим, что это не так, и все неединичные элементы имеют порядок 3. Рассмотрим элемент $b \in G, b \notin H$. Тогда $b^2 \notin H$ (потому что иначе $(b^2)^2 = b \in H$). Кроме того, $ab \notin H, ba \notin H$ (иначе сразу же имеем $b \in H$). Но вне H у нас всего три элемента, то есть какие-то два из этих четырех совпадают. После пары минут раздумий понимаем, что $ab = ba$. Но тогда группа коммутативна, то есть абелева, то есть $\mathbb{Z}_6$. Противоречие.

Итак, b имеет порядок 2. Обозначим $J =< b >$. Очевидно, $G = JH$. Кроме того, $J \cap H = \{e\}$. Это значит, что $G = H \rtimes J$ (эта запись означает, что G представляется в виде полупрямого произведения групп H и J).

Как известно, различных групп, представимых в виде полупрямого произведения $H \rtimes J$ столько же, сколько гомоморфизмов группы J в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(H)$. В нашем случае J изоморфно $\mathbb{Z}_2$, а H изоморфно $\mathbb{Z}_3$. То есть гомоморфизмов будет всего два. Один из них тождественный, ему соответсвует прямое произведение, которое дает нам абелеву группу $\mathbb{Z}_6$. А другой, стало быть, соответствует нашему S_3, и ничего другого получится не может.

Групп порядка 8 – ровно пять, три из них абелевы: $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (других абелевых нет, по той же теореме).

Далее, еще две группы неабелевы – это D_4 и Q_8. D_4 – группа изометрий квадрата в плоскости, Q_8 – группа кватернионов. D_4 получается аналогично предыдущему пункту, эта группа тоже представляется в виде полупрямого произведения.

Рассматривая возможные порядки неединичных элементов группы (а они равны либо 2, либо 4, либо 8), мы приходим к единственному варианту, когда нет ни прямого, ни полупрямого произведения. Это случай, когда у нас ровно один элемент порядка 2 и нет элементов порядка 8. С помощью простых рассуждений приходим к выводу, что эта группа может быть только группой Q_8.

В общем случае – задача весьма сложна, надеюсь, что на экзамене будут спрашивать только про абелевы.