

Пробный вариант контрольной работы 1

1. Пусть X_t – процесс Бесселя размерности $\delta > 1$ с начальным условием $x_0 > 0$. Представьте процесс $Y_t = X_t^2$ в виде $dY_t = G_t dt + H_t dB_t$ и найдите процессы G_t, H_t .

2. Найдите решение $V(t, x)$ уравнения

$$\begin{cases} V'_t(t, x) + \frac{1}{2} V''_{xx}(t, x) - \mu x V'_x(t, x) = 0, & t \in [0, 1], x \in \mathbb{R} \\ V(1, x) = x^2 \end{cases}$$

3. Существует ли решение уравнения

$$dX_t = X_t^2 dt + dB_t, \quad X_0 = 1,$$

определенное для всех $t \in \mathbb{R}_+$?

4. Пусть рынок состоит из безрискового актива с ценой $B_t \equiv 1$ и акции с ценой S_t , задаваемой уравнениями

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t^1), & S_0 &= 1, \\ \sigma_t &= 1 + |W_t^2|, \end{aligned}$$

где W_t^1 и W_t^2 являются независимыми броуновским движениями. Докажите, что рынок неполон.

5. (*) Пусть рынок состоит из безрискового актива с ценой $B_t \equiv 1$ и двух акций с ценами

$$dS_t^i = S_t^i(\mu^i dt + \sigma^i dW_t^i), \quad S_0^i = s_0^i > 0, \quad i = 1, 2,$$

где W_t^1 и W_t^2 являются независимыми броуновским движениями. Найдите справедливую стоимость контракта, который дает право в момент времени T обменять одну акцию S_T^1 на одну акцию S_T^2 . *Указание:* нужно воспользоваться теоремой Гирсанова.