04.10.21. Шапошников. Лекция 3.

Есть урчп I порядка: $F(x, u(x), u_{x_1}(x) \dots u_{x_n}(x)) = 0$.

Начнем с линейных ур-й I-го порядка.

лин. ур-е 1 порядка: $\boxed{b_1(x) u_{x_1}(x) + \dots + b_n(x) u_{x_n}(x) = 0 \Leftrightarrow \langle b, \nabla u \rangle = 0}$

$b_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – гладкое вект. поле, $b_1^2 + \dots + b_n^2 \neq 0$ – поле не обращается в ноль.

Утв. 1. Если u – классич. решение $*$, и $\dot x = b(x)$, то $u(x(t)) = const$.

2. Если u – гладкая ф-ция, и $\forall x_0 \ \exists \delta > 0: u(x(t)) \equiv const$ на $(-\delta, \delta)$ и $\begin{cases} \dot x = b(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, то u – решение $*$.

Док-во: $\frac{d}{dt} u(x(t)) = \sum u_{x_i} \dot x_i = \sum u_{x_i} b_i = \langle b, \nabla u \rangle$.

1) Если u – решение – то правая часть $= 0$. ч.т.д.

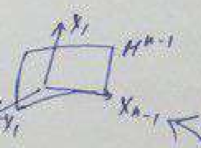
2) Если u такова, что $u(x(t)) \equiv const$, то левая часть $= 0$ $\Rightarrow \langle b, \nabla u \rangle|_{x_0} = 0$, и поскольку так для каждой точки x_0, то u – решение. ч.т.д.

Т.е. решения – это те и только те ф-ции, кот. постоянны вдоль кривых $\dot x = b(x)$.

Опр. Решения ур-я $\dot x = b(x)$ – назыв. характеристики. $u(x)$ для этой системы и. явл. первым интегралом.

Хотим решить Задачу Коши:

$\begin{cases} \langle b, \nabla u \rangle = 0 \\ u|_{M^{n-1}} = g \text{ – гладкая на } M^{n-1} \end{cases}$



Задача, очев, не всегда решается.

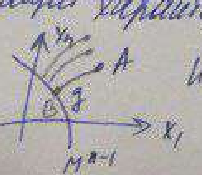
Например, если 2 измер:

Это нельзя сделать, если M^1 – характеристика, а g – не постоянна.

Так же и тут, если окажется, что на M^{n-1} лежит характеристика, а g – не постоянна – то не будет решения.

Т.е. на пов-ти, содержащей характеристики – плохо ставить З.К.

Итак, есть г-мерная пов-ть:



$u(A) = ?$

Хотим: $u(A) = ?$

Знаем: $u = const$ вдоль характеристик

Как найти $u(A)$?

Ну провести через A — характеристику, она пересечёт M^{n-1} в точке B — и тогда $u(A) = g(B)$.

Если через любую точку мы можем провести характеристику — то всё ок.

Характеристики могут вести себя ~~[illegible]~~ сложно — поэтому задача решается только глобально.

<u>Теорема</u> Если $p \in M^{n-1}$, $b(p) \notin T_pM^{n-1}$, то в некот. окр-ти точки p $\exists!$ решение и задачи Коши.

<u>Зам.</u> Условие $b(p) \notin T_pM^{n-1}$ — избавляет от касания характеристик, и с другой стороны, что поле b трансверсально кас. плоскости — т.е. заметает кусочек пр-ва.

<u>Док-во:</u>

M^{n-1} с помощью f вложено: $f: \underset{(y)}{\mathbb{R}^{n-1}} \to \mathbb{R}^n$

т.е. y — лок. коорд в окр-ти точки p

Решаем: $\begin{cases} \dot{x}(t,y) = b(x(t,y)) \\ x(0,y) = f(y) \end{cases}$

Возникает отображение: $(t, y_1 \dots y_{n-1}) \to (x_1(t,y) \dots x_n(t,y))$

мы хотим обратить это отобр.

Нужна теорема об обр. ф-ции:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Хотим обратить F в точке a

Если $\det F'(a) \neq 0$ — то локально $\exists$ гладкое F^{-1} — т.е. F локально диффеоморфизм

Как у нас устроена мат. Якоби:

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix}\right|_{\substack{t=0 \\ f(y)=p}}$$

$b(p)$

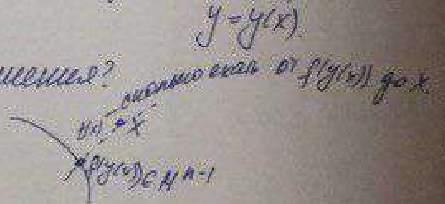
$\leftarrow$ столбцы — это базис кас. пр-ва! T_pM^{n-1}

А по усл $b(p) \notin T_pM^{n-1} \Rightarrow$ определитель $\neq 0$

$\Rightarrow \exists$ обратное отобр: т.е $t = t(x)$, $y = y(x)$.

Вопрос: что взять в качестве решения?

Ну $u(x) := g(y(x))$!



Почему $u(x)$ — решение?

- Если $x \in$ пов-ти, то $u(x) = g$(точки на пов-ти) — как и положено (ну $t=0$, а y задает коорд. точки на пов-ти) почему u - решение, т.е почему u - постоянно вдоль решений?

Ну у нас все характеристики в этой опр-ии - имеют вид $x(t,y)$!

$\Rightarrow$ если взять u на этой характеристике:

$u(x(t,y))$ — это равно $\underset{\sim}{g(y)}$ тут нет буквы t!

т.е u - пост. на характеристике! чтд.

Пример $\begin{cases} u_{x_1} + 2u_{x_2} = 0 \\ u|_{x_1=0} = g(x_2) \end{cases}$

Ну система на характеристики: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = t + x_1^0 \\ x_2(t) = 2t + x_2^0 \end{cases}$

Берём $(x_1; x_2)$ - нам нужно через эту точку провести характеристику до пересечения с осью x_2.

т.е $x_1^0 = 0 \Rightarrow t = x_1$

$\Rightarrow x_2^0 = x_2 - 2x_1$

$\Rightarrow u(x_1; x_2) = u(x_1^0; x_2^0) = g(x_2^0) = g(x_2 - 2x_1)$. Всё!

Зам. А раньше учили так делать?

Если $b(x_0) \neq 0$, то $\exists$ замена коорд. $x = x(y)$, которая выпрямляет поле,

т.е $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

т.е в новых коорд: для $\tilde{u}(y) = u(x(y))$ ур.е имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} = 0.$$

$\Rightarrow \tilde{u}$ - решение $\Leftrightarrow \tilde{u} = \tilde{u}(y_2 \dots y_n)$

$\Rightarrow$ в исх. коорд: $u(x) = \tilde{u}(y_2(x) \dots y_n(x))$, где $y_2 \dots y_n$ - I-е интегралы. функц. независ.

т.е для $u_{x_1} + 2u_{x_2} = 0$:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{2}$$

$\Rightarrow 2dx_1 = dx_2$

$\Rightarrow d(2x_1 - x_2) = 0.$

$\Rightarrow 2x_1 - x_2 = const$

$\Rightarrow$ всякое решение имеет вид: $f(2x_1 - x_2)$ чтд

Итак: решаем линейное ур-е 1 порядка - доводим характеристики до нужной пов-ти.

Вероятностное представление решений эллипт. ур-й.

Решаем задачу Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$

Хотим запустить такую кривую, чтобы $u(A) := g(B)$.

(Да, надо из точки A запустить винер процесс, и $u(A) = E\,g(B)$.)

Есть (Ω, F, P).

Винеровский процесс: это отобр. $[0;+\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, измеримое: $W_t(\omega)$

1. $W_0 = 0$ п.н.
2. $t \to W_t(\omega)$ — непрер.
3. $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, $t > s$
4. $t_0 < t_1 \ldots < t_n$: $W_{t_0}; W_{t_1} - W_{t_0} \ldots W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ — незав.

$W_t \in \mathbb{R}^n = (W_t^1; \ldots W_t^n)$ — незав. набор 1-мерных

$\exists$ такого процесса следует из т. Колмогорова: 1) о согл. семействах 2) … что траект. п.н. непрер. и даже гёльдеровы.

До Колмогорова, его строили через ф-ции Хаара.

С винер. процессом можно связать сем-во σ-алгебр:

$$F_t = \sigma(W_s;\, s \in [0;t]) = \sigma(\{\omega : W_{s_1}(\omega) \in B_1 \ldots W_{s_n}(\omega) \in B_n\});\ 0 \le s_1 \le \ldots \le s_n \le t \text{ — естеств. фильтрация}$$

Упр. Док-ть, что $W_t - W_s$ и F_s — независимы, если $t > s$.

Интеграл Ито $\int_0^T X_t\,dW_t$ — строится для прогрес-измеримых

$X_t \in \mathbb{L}^2[0,T] = \{X_t :$ 1) $E\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty$

2) отобр. $(t,\omega) \to X_t(\omega)$, $\forall t$ измер. отобр.: $B([0,t]) \times F_t \to B(\mathbb{R})$.

Можно проверить, что в нём плотны:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{m} Y_j(\omega)\, I_{[t_j;t_{j+1})}(t):\ Y_j \text{ — измеримо относ } F_{t_j}.$$

Зам. Если X_t — непрер (т.е. $t \to X_t(\omega)$ — непрер), то для прогр-измеримости достаточно, чтобы X_t был F_t-измерим. (т.е. для непрер. прогрессивность и мн-измер. — одно и тоже)

$$\int_0^T Y_t\,dW_t = \sum_j Y_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

Он: 1) линеен

2) $E\int_0^T Y_t\,dW_t = 0$ — т.к. Y_j — отно F_{t_j} — измеримо, $W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$

3) $E\left(\int_0^T Y_t\,dW_t\right)^2 = E\int_0^T |Y_t|^2 dt$

$\Rightarrow$ приближаем: $X_t^N \xrightarrow{L^2} X_t$, и $\int_0^T X_t\,dW_t \overset{L^2}{=} \lim\limits_{N\to\infty} \int_0^T X_t^N\,dW_t$

Формула Ито: $dX_t = B\,dt + \sigma\,dW_t \Leftrightarrow X_t^i \overset{\text{пнн}}{=} x_0^i + \int_0^t B^i(s,\omega)\,ds + \int_0^t \sigma^{ij}(s,\omega)\,dW_s^j$

пусть f - гладкая ф-ция с огранич. производными,

и $Y_t = f(X_t)$.

Как выглядит dY_t? ; $A = \sigma\sigma^t$

$$\boxed{dY_t = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dX_t^i + \frac{1}{2}\,tr(A\,\partial^2 f)\,dt}$$

Стох. дифф. ур-е: X_t - решение

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t \\ \text{с нач. усл. } X_0. \end{cases}$$

$\downarrow$ понимается это: $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s$

(считаем, что b, σ - гладкие с огр. производными)

Теорема при этих усл$^{\uparrow}$: решение $\exists!$ (тоже через нер-во Гельдера).

Момент остановки: $\tau: \Omega \to \mathbb{R} \cup +\infty$: $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

Упр. Если X_t - решение СДУ - то $\tau = \inf\{t \ge 0: X_t \notin \Omega\}$ - явл. моментом остановки.

Зам. Ф-ла Ито верна с τ вместо t, т.е.

$$\int_0^\tau X_t\,dW_t = \int_0^T X_t \cdot I_{[0,\tau]}\,dW_t.$$

Теорема Предп., что: $Lu = \frac{1}{2}\,tr(A\,\partial^2 u) + \langle b, \nabla u\rangle$, где $A = \sigma\sigma^T$

и для всяких гладких f и g: $\exists!$ решение и задачи Дирихле: $\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$

тогда $E\tau^y < \infty$, где $\tau^y = \inf\{t \ge 0: X_t^y \notin \Omega\}$,

а X_t^y уравн. СДУ: $\begin{cases} dX_t^y = b(X_t^y)\,dt + \sigma(X_t^y)\,dW_t \\ X_0^y = y \end{cases}$

и верно равенство: $u(y) = E g(X_{\tau^y}^y) - E\int_0^{\tau^y} f(X_t^y)\,dt$

В частности, если $f \equiv 0$, то $u(y) = E g(X_{\tau^y}^y)$

Зам. принцип макс следует отсюда очевидно:

$$\begin{cases} \max\limits_{\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} g \\ \min\limits_{\Omega} u = \min\limits_{\partial\Omega} g \end{cases}$$

Док-во: u — решение

по ф-ле Итô для $u(X_t^y)$:

$$u(X_t^y) = u(\underbrace{X_0^y}_{=y}) + \int_0^t \left(\frac{1}{2} tr(A\nabla^2 u) + \langle b, \nabla u\rangle\right)(X_s^y)ds + \int_0^t \dots dW_s.$$

Возьмём $\tau_N := \min\{\tau_y; N\}$ — снова момент ост.

Подставим τ_N вместо t и возьмём м.о.:

$$E u(X_{\tau_N}^y) = u(y) + E\int_0^{\tau_N} Lu(X_s^y)ds \quad (*)$$

Решим такую задачу: $\begin{cases} Lu = 1 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$; u — классич. решение, u — огр. ф-ция.

$\Rightarrow E\tau_N \le 2C$; $N \to \infty$

$\Rightarrow E\tau_y < \infty$.

Понятно, что $\tau_N(\omega) \xrightarrow[N\to\infty]{} \tau_y(\omega)$

А процесс — непрер. $\Rightarrow$ в $(*)$ переходим к пределу при $N\to\infty$:

получаем $E \underbrace{u(X_{\tau_y}^y)}_{= g(X_{\tau_y}^y)} = u(y) + E\int_0^{\tau_y} f(X_s^y)ds.$

$$\Rightarrow u(y) = Eg(X_{\tau_y}^y) - E\int_0^{\tau_y} f(X_s^y)ds. \quad \text{Чтд.}$$

Пример. Берём  — винер. траект.

$\tau_y = \inf\{t>0 : y + W_t \notin B\}$ — т.е. когда винер. процесс выйдет из шара.

У нас $b = 0$; $\sigma = I$;

$Lu = \frac{1}{2}\Delta u$. $\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u = f \\ u|_{\partial B} = g \end{cases}$

Ф-ла: $\boxed{u(y) = Eg(y + W_{\tau_y}) - E\int_0^{\tau} f(y + W_s)ds}$ где u — решение

Возьмём $g = 0$; $f = 1$.

Решаем: $\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u = 1 \\ u|_{\partial B} = 0 \end{cases}$ — тут $u(x) = \frac{-R^2 + |x|^2}{d}$

$$\Rightarrow \boxed{E\tau_y = -u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{d}}$$ — среднее время выхода винер. траект. из шара

стр 4

У нас: $u(y) = Eg(y + W_{\tau-y})$

У нас винер. процесс от траекторий.

Другой способ: мера Винера P_W на $C[0,T]$: – т.е. возможны все ~~вероятности~~ траектории, но с какими вер-тями.

$$W_t(\omega) = \omega(t)$$

$\Rightarrow$ с точки зрения меры Винера это: $Eg(y + W_{\tau-y})$:

$$\boxed{Eg(y + W_\tau) = \int\limits_{C[0,T]} g(y + \omega(\tau(\omega_\cdot))) P_W(d\omega_\cdot)}$$

Опять метод характеристик:

<u>Пример</u> Ур-е неразр-ти: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0; \\ \mu_0 = \nu. \end{cases}$

μ_t – вер. меры на $\mathbb{R}^n$.

Если μ_t было бы задано плотностью: $\mu_t = \rho(x,t)dx$,

то было бы ур-е: $\rho_t + b_1\rho_{x_1} + \ldots + b_n\rho_{x_n} + \operatorname{div} b\,\rho = 0$.

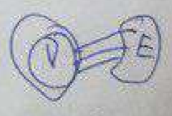
Решаем: $\dot{x} = b(x)$ – характеристики

$y \longmapsto X_t(y)$

$$y \longrightarrow X_t(y)$$

$\mu_t := \nu \circ X_t^{-1}$ – перенос ν вдоль характеристик.

т.е. $\mu_t(E) = \nu(X_t^{-1}(E))$



<u>Утв</u>. μ_t – решение.

А в каком смысле? ~~Нужно $\forall\varphi$: вып:~~

Нужно $\forall\varphi$ вып: $\frac{d}{dt}\int\varphi\, d\mu_t = \int \langle b, D\varphi\rangle d\mu_t$.

(т.е. ур-е $\frac{\partial}{\partial t}\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0$ – умножили на $\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)

Пусть $\mu_t = \nu \circ X_t^{-1}$ – образ меры ν при переносе X_t.

$\Rightarrow \int \varphi(x)\, d\mu_t \circ X_t^{-1} \overset{\text{замена в интегр.}}{=} \int \varphi(X_t(y))\,\nu(dy)$

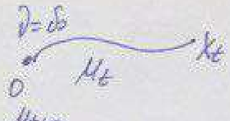
продифф: $\frac{d}{dt}\int\varphi(X_t(y))\,\nu(dy) = \int\langle D\varphi, b\rangle(X_t(y))\,\nu(dy) = \int\langle D\varphi(x), b(x)\rangle \mu_t(dx)$

$\Rightarrow$ какое-то решение выглядит так: $\mu_t = \nu \circ X_t^{-1}$.

Например, если $\nu = \delta_0$.

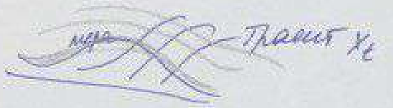
$$\Rightarrow \mu_t(E) = \nu(X_t^{-1}(E)) \overset{\nu=\delta_0}{=} \begin{cases} 1, & 0 \in X_t^{-1}(E) \quad \leftarrow X_t(0) \in E \\ 0, & 0 \notin X_t^{-1}(E) \quad \leftarrow X_t(0) \notin E \end{cases} = \delta_{X_t(0)}$$

Т.е. так:



Т.е. δ-мера поехавшая вдоль характеристик.

$\Rightarrow$ для ур-я мер уравнение метод характеристик выглядит так:
(оно на меру)



Итак, было ур-е: $\frac{\partial}{\partial t}\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0$.

Мы поняли, что решение: $\mu_t = \nu \circ X_t^{-1}$ — перенос меры вдоль траекторий

Возьмем отображение: $y \overset{\Psi}{\longmapsto} (y, X_\cdot(y))$

$\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \times C[0,T]$

Ψ: оно сопоставляет игреку решение соотв. задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{X}_t = b(x) \\ X(0) = y. \end{cases}$$

$\Rightarrow \nu \rightsquigarrow \underline{P} = \nu \circ \Psi^{-1}$

что это за мера $\underline{P}$?

Ну $\underline{P}$ на $\mathbb{R}^n \times C[0,T]$ обладает св-вами:

1) P сосредоточена только на парах $(y, X_\cdot)$, где $X(t) = y + \int_0^t b(X(s))\,ds$.

2) $P \circ e_t^{-1} = \mu_t \leftarrow$ которое явл. решением ур-я неразрывности.

$(e_t(X_\cdot) = X_t)$

$\Rightarrow$ для μ_t — можно написать то стохастическое выражение

<u>Теорема</u> (L. Ambrosio)

Пусть μ_t — решение ур-я $\frac{\partial}{\partial t}\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0$ — какая-то траектория мер вероятностных мер

$t \to \mu_t$ — непрер. кривая в пр-ве вер. мер.

Пусть b — ~~непр~~ огр. $\longleftarrow$ система $\dot{x} = b(x)$ — может не решаться

Тогда $\exists$ мера $\underline{P}$ на $\mathbb{R}^n \times C[0,T]$:

1) $P \circ e_t^{-1} = \mu_t$ — проекция: $e_t((y, X_\cdot)) = X_t$ ← траектория

2) P сосредоточена на парах вида $(y, X_\cdot)$: $X(t) = y + \int_0^t b(X(s))\,ds$.

$P \circ e_t^{-1}(E) = \underline{P}(e_t^{-1}(E))$: мера $(y, X_\cdot)$: $X_t \in E$

$P((y, X_\cdot): X_t \in E) = \mu_t(E)$