19.02.19. Мат. анализ. Лекция 4.

Теорема (критерий Дарбу интегрируемости на брусе)

Пусть $f \in B(I)$.

Тогда $\boxed{f \in R(I) \Leftrightarrow \mathcal{J}_в = \mathcal{J}_н}$

1. $\Rightarrow$ пусть $f \in R(I) \Rightarrow$ по опр. $\exists \mathcal{J} := \int_I f(x)dx$

⇓ прерывный критерий

$$\lim_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$$

$\Rightarrow 0 \le \mathcal{J}_в - \mathcal{J}_н \le \Omega(P) \to 0 \Rightarrow \mathcal{J}_в = \mathcal{J}_н$

и (см. теорему - прерывный критерий и 1-е следствие из неё): $\mathcal{J}_в = \mathcal{J}_н = \mathcal{J}$.

2. $\Leftarrow$ пусть $\begin{cases} f \in B(I) \\ \mathcal{J}_в = \mathcal{J}_н =: \mathcal{J} \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} f \in R(I)$

по лемме 2 лекции 3 дост. док-ть, что $\inf_{P \in P^*} \Omega(P) \overset{?}{=} 0$.

Имеем: а) $\Omega(P) \geq 0$; $\forall P \in P^* \Rightarrow 0$ - это нижняя грань

б) Докажем, что 0 - это <u>точная</u> нижняя грань,

т.е что $\forall \varepsilon > 0\ \exists P \mid 0 \le \Omega(P) \le 0 + \varepsilon$

Идея: $\forall \varepsilon$ выбираем P_1 для $\mathcal{J}_в$, P_2 для $\mathcal{J}_н$, а для Ω берём их объединение (измельчение)

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

Но $\mathcal{J}_в = \inf_{P \in P^*} \underline{S}(P)$

$\Rightarrow \exists P^{(1)} \in P^* \mid \underline{S}(P^{(1)}) < \mathcal{J}_в + \frac{\varepsilon}{2} = \mathcal{J} + \frac{\varepsilon}{2}$

А $\mathcal{J}_н = \sup_{P \in P^*} \overline{S}(P)$

$\Rightarrow \exists P^{(2)} \in P^* \mid \overline{S}(P^{(2)}) > \mathcal{J}_н - \frac{\varepsilon}{2} = \mathcal{J} - \frac{\varepsilon}{2}$

Но $\Omega(P) = \underline{S}(P) - \overline{S}(P)$, где P - одинаковое,

а у нас пока $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ разные.

Ну возьмём измельчение:

положим $P := P^{(1)} \cup P^{(2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} P \prec P^{(1)} \\ P \prec P^{(2)} \end{cases}$ - т.е P - измельчение $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$

поэтому $\Omega(P) = \underline{S}(P) - \overline{s}(P) \le \underline{S}(P^{(1)}) - \overline{s}(P^{(2)}) < \mathcal{J} + \frac{\varepsilon}{2} - (\mathcal{J} - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$

$\uparrow$ т.к. $\Omega(\tilde{P}) \le \Omega(P)$

В итоге: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in P^* \ / \ 0 \le \Omega(P) < \varepsilon$ — это мы нашли какое-то одно такое P, и мы доказали, что $\inf\limits_{P \in P^*} \Omega(P) = 0$, но не $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$.

$\Rightarrow$ мы доказали, что $\inf\limits_{P \in P^*} \Omega(P) = 0.$

$\Rightarrow$ по лемме 2 лекции 3 (это дост. усл. интегрируемости) : $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0.$ ◀

Зам ① $f \in R(I) \underset{\text{см. док-во п.1) (или см. теорему — предельный критерий)}}{\Longrightarrow} \mathcal{J}_В = \mathcal{J}_Н = \underbrace{\int_I f(x)dx}_{\text{он } \exists \text{ по опр, т.к } f \in R(I)}$

тогда и он определен, т.к $f \in B(I)$.

② $\mathcal{J}_В = \mathcal{J}_Н \underset{\text{по критерию Дарбу}}{\Longrightarrow} f \in R(I) \underset{\text{по зам 1}}{\Longrightarrow} \mathcal{J}_В = \mathcal{J}_Н = \text{числу } \int_I f(x)dx.$

Следствия ①

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{пусть } f \in B(I).\\ \text{Тогда } f \in R(I) \Longleftrightarrow \exists \text{ и равны } \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{s}(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P)\end{array}}$$

◀ $(\Rightarrow)$ см. следствие 2 к теореме лекции 2 (предельный критерий).

$(\Leftarrow)$ пусть $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{s}(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \{\underline{S}(P) - \overline{s}(P)\} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$

$\Rightarrow$ по предельному критерию $f \in R(I)$ ◀

②

$$\boxed{\text{пусть } \begin{cases} f \in B(I). \\ \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{s}(P) \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ по следствию 1: $f \in R(I) \underset{\text{Дарбу}}{\overset{\text{критерий}}{\Longrightarrow}} \underbrace{\mathcal{J}_В}_{\text{это } \inf\limits_{P \in P^*} \underline{S}(P)} = \mathcal{J}_Н = \overbrace{\int_I f(x)dx}^{=: \mathcal{J}}$

причем оказалось, что если $f \in R(I)$, то $\forall\ \underline{S}(P)$ есть честный предел, не то что частичный предел (т.е $\inf$).

$\Rightarrow \quad \mathcal{J}_в = \mathcal{J} = \mathcal{J}_н$

$\mathcal{J}_в = \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P)$, $\mathcal{J} = \int\limits_I f(x)dx$ (по опр.), $\mathcal{J}_н = \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{S}(P)$ ← т.к. $\inf = \lim$, если $\lim \exists$

$\Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P) = \underset{\mathcal{J}_н}{\overset{\mathcal{J}_в}{\mathcal{J}}} = \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{S}(P)$ — и это так, только когда $f \in R(I)$.
И в этом случае $\mathcal{J}_в$ — не частичный (а именно нижний) предел, а честный.

параграф. Множества меры нуль.

пункт 1. Определение и основные св-ва мн-в меры нуль.

опр 1. Брус $I \in \mathbb{R}^n$ наз. кубическим, если $(b_i - a_i) = \underset{>0}{\ell}$ $\forall i = 1 \dots n$.

опр 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда лебегова мера мн-ва E равна нулю (обозн. $\mu(E)=0$)
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счётная система брусов $\{I_k \mid I_k$ - кубический брус$\}$
со св-вами: 1) $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$

2) $\sum\limits_k |I_k| < \varepsilon$

Зам. Если $\mathring{I}_k$ - открытый брус, то $|\mathring{I}| := |I|$

Зам. ① В опр 2 можно брать открытые брусы $\mathring{I}_k$.

▶ ⇐ если верно опр 2 с $\{\mathring{I}_k\}$, то верно и с $\{I_k\}$,
т.к. если E покрывается открытыми, то покрывается и замкнутыми, а объёмы у них одинаковые.

⇒ пусть верно опр 2 с замкнутыми брусами.
т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счётная система замкнутых кубических брусов $\{I_k\}$ такая что: 1) $E \subset \bigcup\limits_k I_k$

2) $\sum\limits_k |I_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

Теперь $\forall k$ рассм. кубический брус $\mathring{\mathcal{J}}_k$ со св-вами:

а) $\mathring{\mathcal{J}}_k \supset I_k$ — т.е на замкнутый наречем открытый, но побольше

б) $|\mathring{\mathcal{J}}_k| < 2|I_k|$

Тогда: 1) $E \subset \bigcup_k I_k \subset \bigcup_k \overset{\circ}{J_k}$

2) $\sum_k |\overset{\circ}{J_k}| \le 2 \sum_k |I_k| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ◀

② Пусть $B_r(x^0)$ – открытый шар с центром в x^0 и радиусом $r>0$.

Тогда объем $B_r(x^0) = |B_r(x^0)| := c_n \cdot r^n$, где $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$; $n \in \mathbb{N}$.

Тогда в опр.2. вместо брусов можно рассм. шары

▶ ну на брус можно надеть шар и наоборот ◀

③ В опр 2 можно вместо кубических брусов рассм. произвольные брусы (т.е параллелепипеды). Это будет доказано сильно дальше.

Лемма 2 1) точка – это мн-во меры 0

2) $\mu(E_m) = 0$ $\underbrace{\forall m \in \mathbb{N}}_{\text{т.е шарикиов не более чем счетно}}$ $\Rightarrow \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) = 0$.

3) $\begin{cases} B \subset A \\ \mu(A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu(B) = 0$

4) I – брус в $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ не верно, что $\mu(I) = 0$.

▶ 1, 2, 3 – доказывали во 2 семестре

4): если $\forall \varepsilon$ объем накрывающего брусика $= 0$,

то в итоге $v(I) = 0$ – но по опр. $v(I) \ne 0$, т.к $a_i < b_i$ $\forall i$. ◀

Зам. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$

Рассм. 2 нормы: $\|x\|_n := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$\|x\|_\infty := \max_{i=1\ldots n} |x_i|$

см. семинары Дьяченко

Оказывается, любые 2 нормы в $\mathbb{R}^n$ и в любом конечномерном пр-ве эквивалентны.

В частности, имеет место равенство: $\boxed{\|x\|_n \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_n}$ (1)

В самом деле: $\|x\|_n = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \le \sqrt{n \cdot (\max_{i=1\ldots n} |x_i|)^2} = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Далее: $\|x\|_\infty \underset{\text{max достигается}}{=} |x_{i_0}| = \sqrt{|x_{i_0}|^2} \le \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_n$.

Напоминание: ① (аналог теоремы Лагранжа.

по вообще см. Даваров : ф-ла Адамара)
лекция 5 II сем.

пусть $f \in \mathcal{D}(B_\delta(x^0))$.

$\Rightarrow \forall x, y \in B_\delta(x_0)$: $\boxed{f(y) - f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta(y-x)) \cdot (y_i - x_i)}$, где $\theta \in (0;1)$

Замечаем ~~из того~~ исходя, что $[x;y] \in B_\delta(x_0)$ — т.е $B_\delta(x^0)$ — выпуклое мн-во.

Обобщение: (для вектор-функций)

пусть $\begin{cases} f: \underset{\in \mathbb{R}^n}{B_\delta(x^0)} \to \mathbb{R}^n \\ f_i \in \mathcal{D}(B_\delta(x^0)) \end{cases}$

тогда $\forall y, x \in B_\delta(x^0)$: $\boxed{f_i(y) - f_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - x_j) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \theta_i(y-x))\ ; i = 1 \ldots n}$ (2)

Действительно:

$$f(y) - f(x) = f(x + t(y-x))\Big|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x))\,dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x + t(y-x)) \cdot (y - x)\,dt =$$

скал. произв

$$= \int_0^1 \Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + t(y-x)) \cdot (y_j - x_j)\Big] dt = \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + t(y-x))\,dt\Big](y_j - x_j)$$ — а дальше см 1-ю т. о среднем.

② $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$, если $f \in \mathcal{D}(a, b)$ —

т.е если производная ограничена, то ф-ция липшицова.

Лемма 2 Пусть $\begin{cases} f: B_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ f_i \in \mathcal{D}(B_\delta(x^0)) ; i = 1 \ldots n \end{cases}$ ← но это не гарантирует, что производное ограничено, т.к шарики могут быть открытые.

причем $\exists K > 0 \mid \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \le K, \forall x \in B_\delta(x^0)$.

Тогда $\boxed{\forall x, y \in B_\delta(x_0): \|f(y) - f(x)\|_n \le C \cdot \|x - y\|_n}$ ← зависит от размерности пр-ва

Имеем: $\|f(y) - f(x)\|_n \underset{\text{см}(1)}{\le} \sqrt{n} \cdot \|f(y) - f(x)\|_\infty =$

$$= \sqrt{n} \cdot \max_{i=1\ldots n} |f_i(y) - f_i(x)| \underset{\text{см.}(2)}{=} \sqrt{n} \cdot \max_{i=1\ldots n} \Big|\sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \theta_i(y-x))\Big](y_j - x_j)\Big| \le$$

$$\le \sqrt{n} \cdot n \cdot K \cdot \|y - x\|_\infty \underset{\text{см}(1)}{\le} \underbrace{n^{3/2} \cdot K}_{=: C} \cdot \|y - x\|_n$$

модуль суммы не превосх. суммы модулей

Зам. $f(A\cup B) \underset{\neq}{\subset} f(A)\cup f(B)$

Ну действительно: Пусть $y \in f(A\cup B)$

$\Rightarrow \exists x \in (A\cup B) \mid f(x)=y.$

$\Rightarrow$ если $x\in A$, то $y \in f(A)$

если $x \in B$, то $y\in f(B)$.

Но $f(A\cup B) \neq f(A)\cup f(B)$

и $f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$.

А для прообраза всё это верно: f^{-1} согласован со всеми теоретико-множественными операциями.