30.09.21. Виноградов ДЗ 3.

① Док-ть обратное утверждение:
если вер-ть q_i не зависит от i, то $p_k = q^{k-1}p$ (где $p+q=1$; $k \geq 1$)

Решение: положим $q_i = p$

q_i = вер-ть того, что в момент $t=i$ произойдет страховой случай

В прошлом ДЗ мы выяснили, что $Q(z) = \frac{\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$, где $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k$

$Q(z) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i z^i$

но если $q_i = p$, то $Q(z) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i z^i = p\sum_{i=1}^{\infty} z^i = \frac{pz}{1-z}$

$$\Rightarrow \frac{pz}{1-z} = Q(z) = \frac{\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

$$\Rightarrow pz - pz\varphi(z) = \varphi(z)(1-z)$$

$$\Rightarrow \varphi(z)(1-z+pz) = pz$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{pz}{1-z(1-p)} = \frac{pz}{1-qz}, \text{ где } q = 1-p.$$

но $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \overset{?}{=} \frac{pz}{1-qz}$

Как найти p_k? — разложим $\frac{pz}{1-qz}$ в ряд: $pz \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (qz)^s = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} z^k \Rightarrow \boxed{p_k = q^{k-1}p}$

② Найти q_i, если $P(\Delta m = 1) = P(\Delta m = 2) = 0.5$.

Решение: т.е. $\Delta m - \begin{cases} 1, & p_1 = 0.5 \\ 2, & p_2 = 0.5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2$$

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{\varphi(z)}{1-\varphi(z)} = \frac{\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2}{1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z^2} = \frac{z+z^2}{2-z-z^2} = \frac{2}{2-z-z^2} - 1 = \frac{2}{(1-z)(z+2)} - 1 =$$

на простые дроби

$$= \frac{2}{3(1-z)} + \frac{2}{3(z+2)} - 1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{\infty} z^i + \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{z^i}{2^i} - 1 = \cancel{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1\right)}^{\,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3} + \frac{(-1)^i}{3\cdot 2^i}\right)}_{= q_i} z^i$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^i}{2^i}}$$