

СА-1. Найти коэффициент при z^6 ряда Тейлора функции $\cos^2 z$ (разложение в точке 0).

Ответ: $-2/45$.

СА-2. Найти $f(i)$, где f — рациональная функция, в окрестности нуля задаваемая рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$.

Ответ: $-1/2$.

СА-3. Найти радиус сходимости ряда Тейлора в точке 0 функции $1/(e^z + 1)$.

Ответ: π .

СА-4. Найти площадь образа области $\{z = x + iy : x \in [0, \ln 3], y \in [0, \pi]\}$ под действием функции e^z .

Ответ: 4π .

СА-5. Найти радиус окружности, являющейся образом окружности $\{z : |z| = 1\}$ при отображении $z \rightarrow z/(z - 2)$.

Ответ: $2/3$.

СА-6. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2 - z} dz.$$

Ответ: 1.

СА-7. Найти образ круга $\{z : |z| < 1\}$ при отображении $z \rightarrow (z - i)/(z + i)$.

Ответ: левая полуплоскость $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$.

СА-8. Найти коэффициент при z^{-2} ряда Лорана функции

$$2 \sin \frac{z-1}{z}$$

в кольце $0 < |z| < \infty$.

Ответ: $-\sin 1$.

СА-9. Найти ближайшие к 0 корни уравнения $\sin z = 2$.

Ответ: $\pi/2 + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$.

СА-10. Найти такую голоморфную функцию f комплексного переменного $z = x + iy$, что $\operatorname{Re} f(x, y) = y - xy$ и $f(0) = 0$.

Ответ: $-iz + iz^2/2$.

СА-11. Вычислить $17 \operatorname{tg}(\pi/4 - i \ln 2)$.

Ответ: $8 - 15i$.

СА-12. Кривая является образом окружности $\{z : |z| = 2\}$ под действием функции Жуковского

$$\frac{1}{2}(z + 1/z).$$

Найти площадь области, ограниченной этой кривой.

Ответ: $15\pi/4$.

СА-13. В каких точках комплексной плоскости функция $f(z) = \bar{z}^2 + 2i\bar{z}$ имеет производную по z ?

Ответ: i .

СА-14. Найти образ прямой $\{z = x + iy : y = 1\}$ при отображении $z \rightarrow z^2$.

Ответ: парабола $y^2 = 4x + 4$.

СА-15. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (2\bar{z} + 1) dz.$$

Ответ: 2.

СА-16. Найти ближайший к 1 полюс функции

$$\frac{1}{e^{iz} - 1} + \frac{i}{z}.$$

Ответ: 2π .

СА-17. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \sin \frac{z+1}{z} dz.$$

Ответ: $\cos 1$.

СА-18. Найти функцию, голоморфную в окрестности нуля и удовлетворяющую функциональному уравнению $f(z) = 2f(iz) + 3z^6$.

Ответ: z^6 .

СА-19. Найти рациональную функцию, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, простой полюс в -1 с вычетом -1 , не имеющую других полюсов и равную 0 в 0.

Ответ: $\frac{2z^2}{z^2-1}$.

СА-20. Найти конформное отображение f верхней полуплоскости на единичный круг, удовлетворяющее условиям $f(i) = 0$, $f'(i) = 1/2$.

Ответ: $\frac{iz+1}{z+i}$.