Модели с транзакционными издержками

14 октября 2020

Теорема Харрисона–Плиски (1981)

Концепция мартингальной меры появилась в работе Харрисона и Плиски (в модели с конечным числом состояний природы), которые сформулировали в её терминах критерий безарбитражности рынка.

Дискретное время. Цена активов — согласованный d-мерный процесс $S = (S_t)_{t=0,\dots,T}$ на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t), P)$; компонента S^1 тождественно равна единице.

$R_T = \{H \cdot S_T : \ H_t \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{F}_{t-1})\}, \ A_T = R_T - L^0_+,$

$$\Delta(H \cdot S)_t = H_t \Delta S_t.$$

Свойство NA : $R_T \cap L^0_+ = \{0\}$ (равносильно $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$).

Theorem

Пусть Ω конечно. Тогда следующие свойства эквивалентны:
(a) NA;
(b) существует мера $\tilde{P} \sim P$ такая, что $S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$.

Теорема Харрисона–Плиски, доказательство

Lemma (Stiemke, 1915, современная геометрическая версия)

Пусть K и R — замкнутые конуса в $\mathbb{R}^n$, причём K - заострённый (т.е. $K \cap (-K) = \{0\}$ и, значит, $\operatorname{int} K^* \neq \emptyset$). *Тогда*

$$R \cap K = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad (-R^*) \cap \operatorname{int} K^* \neq \emptyset.$$

Применим лемму Штимке в пространстве L^0 со скалярным произведением $\langle \xi ; \eta \rangle = E\xi\eta$ к конусам R_T и L^0_+ (с $(L^0_+)^* = L^0_+$). Отождествляя (нормированный) элемент $\eta \in \operatorname{int} L^0$ с мерой $\tilde{P} \sim P$, получаем, что

$$R_T \cap L^0_+ = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ мера } \tilde{P} \sim P \text{ такая, что } \tilde{E}\xi = 0 \ \forall \xi \in R_T.$$

Поскольку $H_t \Delta S_t \in R_T$, последнее условие эквивалентно (b).

Элементом новизны в приведённом доказательстве является, по сути, последняя строчка. Но именно это простое замечание определило облик всей теории.

Позиции могут быть представлены в виде вектора инвестиций в каждую из d валют V_t в терминах базисного актива, возможно, внешнего для рынка (монетарное представление), либо в виде вектора $\widehat{V}_t$, представляющего количества единиц каждой валюты в портфеле.
Котировки выражаются вектором цен $S_t = (S_t^1, \ldots, S_t^d)$; $S_t^i > 0$, $S_0 = \mathbf{1} = (1, ..., 1)$.
По определению,

$$\widehat{V}_t^i = V_t^i / S_t^i, \quad i \le d.$$

Более формально, $\widehat{V}_t = \phi_t V_t$, где

$$\phi_t : (x^1, ..., x^d) \mapsto (x^1/S_t^1, ..., x^d/S_t^d).$$

Динамика

В монетарном представлении:

$$\Delta V^i_t = \widehat{V}^i_{t-1}\Delta S^i_t + \Delta B^i_t, \qquad V_{-0} = v,$$
$$\Delta B^i_t := \sum_j \Delta L^{ji}_t - \sum_j (1+\lambda^{ij}_t)\Delta L^{ij}_t - h^i_t,$$

$\Delta L^{ji}_t \in L^0(\mathbf{R}_+, \mathcal{F}_t)$ – приращение позиции i за счёт уменьшения инвестиции в позицию j,
$h^i_t \in L^0(\mathbf{R}_+, \mathcal{F}_t)$ – отзыв средств или "свободное расходование",
$\lambda^{ij}_t \in L^0(\mathbf{R}_+, \mathcal{F}_t)$ – коэффициенты платы за транзакции, $\lambda^{ii} = 0$.
Вводя "стохастический логарифм" $\Delta Y^i_t = \frac{\Delta S^i_t}{S^i_{t-1}}$, $Y^i_0 = 1$, имеем:

$$\Delta V^i_t = V^i_{t-1}\Delta Y^i_t + \Delta B^i_t.$$

Ясно, что управление $\Delta B^i_t \in -K_t$, где конус кредитоспособности

$$K_t := \Big\{x \in \mathbf{R}^d : \exists\,(a,h) \in \mathbf{M}^d_+ \times \mathbf{R}^d_+ \text{ s.t. } x^i = h^i + \sum_j [(1+\lambda^{ij}_t)a^{ij} - a^{ji}]\Big\}.$$

Конуса платёжеспособности и их двойственные, 1

Конус платёжеспособности (solvency) K_t — полиэдральный (т.е. конечно-порождённый), т.к. является образом полиэдрального конуса $\mathbf{M}_+^d \times \mathbf{R}_+^d$ при линейном отображении,

$$K_t = \operatorname{cone}\{(1+\lambda_t^{ij})e_i - e_j,\ e_i,\ 1 \le i,j \le d\},$$

его (положительный) двойственный

$$K_t^* = \{w \in \mathbf{R}_+^d :\ (1+\lambda_t^{ij})w^i - w^j \ge 0,\ 1 \le i,j \le d\}.$$

Напомним, что конус полиэдрален тогда и только тогда, когда он является пересечением конечного числа замкнутых полупространств (теорема Фаркаша–Минковского–Вейля).

Матрица инцидентности $(I_{\{\lambda^{ij}=0\}})$ разбивает множество активов $E = \{1,\dots,d\}$ на классы эквивалентности, внутри которых можно осуществлять обмены без трения. Если класс эквивалентности один, то говорят, что рынок имеет эффективное трение. В геометрических терминах это значит, что конус платёжеспособности — собственный, т.е. $K_t^0 := K_t \cap (-K_t) = \{0\}$.

Конуса платёжеспособности и их двойственные, 2

В терминах физических единиц имеем:

$$\widehat{K}_t = \phi_t K_t = \mathrm{cone}\,\{\pi_t^{ij} e_i - e_j,\ e_i,\ 1 \le i, j \le d\},$$

где

$$\pi_t^{ij} := (1 + \lambda_t^{ij}) S_t^j / S_t^i$$

есть количество единиц i-го актива, которое необходимо, чтобы получить в обмен одну единицу j-го актива.

Моделирование можно начать сразу в физических единицах, задав матрицы предложения–спроса (bid–ask) $\Pi_t = (\pi_t^{ij})$.

Заметим, что это не приводит к новым моделям, поскольку по Π_t всегда можно построить Λ_t и S_t.

Иногда удобно рассматривать матрицы с

$$1 + \lambda_t^{ij} \le (1 + \lambda_t^{ik})(1 + \lambda_t^{kj}), \qquad \forall\, i, j, k.$$

Интерпретация: "рациональный" инвестор будет искать операции с наименьшими потерями.

Динамика в физических единицах:

$$\Delta \widehat{V}_t^i = \frac{\Delta B_t^i}{S_t^i}, \qquad V_{-0} = v.$$

В векторном виде:

$$\Delta \widehat{V}_t = \widehat{\Delta B}_t, \qquad \widehat{\Delta B}_t \in -\widehat{K}_t := -\phi_t K_t.$$

Очевидно,

$$V_t^i = S_t^i \widehat{V}_t^i = S_t^i \left(v^i + \sum_{s \le t} \frac{\Delta B_s^i}{S_s^i} \right).$$

Легко видеть, что это просто формула Коши ...

Множество "результатов" (с учётом свободного расходования):

$$\widehat{A}_0^T = \sum_{s=0}^{T} L^0(-\widehat{K}_t, \mathcal{F}_t).$$

Условие отсутствия арбитража $NA^w : \widehat{A}_0^T \cap L^0(\mathbf{R}_+^d, \mathcal{F}_T) = \{0\}.$

Критерий арбитража NA^w для конечного Ω

Обозначим через $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ множество мартингалов Z таких, что $Z_t \in \widehat{K}_t^* \setminus \{0\}$, $0 \le t \le T$.

Theorem (Kabanov–Stricker, 1999 (2001))

$$NA^w \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\}) \neq \emptyset$$

Доказательство. Согласно лемме Штимке NA^w эквивалентно существованию случайного вектора $\eta \in L^0(\mathrm{int}\, \mathbf{R}_+^d)$ такого, что $E\eta\xi \le 0$ $\forall \xi \in L^0(-\widehat{K}_t, \mathcal{F}_t)$, $t = 0, 1, ..., T$. Тогда $Z_t = E(\eta|\mathcal{F}_t)$ - искомый мартингал,

Результат справедлив для произвольных адаптированных конусозначных случайных процессов G. В частности, он включает другие модели с пропорциональными транзакционными издержками: рынок акций (с операциями "купить акцию" и "продать акцию"), рынок, где любая транзакция оплачивается через банковкий счёт...

Состоятельные ценовые системы

Это - элементы множества $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$. Элементы множества $\mathcal{M}_0^T(\mathrm{ri}\, K^*)$ называются строго состоятельными ценовыми системами.

В случае финансового рынка без трения,

$$K = \{v \in \mathbf{R}^d : \ v^1 + v^2 + ... + v^d \geq 0\},$$

$K^* = \mathbf{R}_+\mathbf{1}$, $\widehat{K}_t^* = \phi_t^{-1}K^* = \mathbf{R}_+S_t$.
Когда реперный актив торгуется, $S_t^1 = 1$, элементы $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ имеют вид $(\rho, \rho S^2, ..., \rho S^d)$, где ρ — строго положительный мартингал. Без ограничения общности можно считать, что $E\rho_t = 1$.
Иными словами, при отсутствии трения, состоятельные ценовые системы получаются умножением номинальных цен на стохастические дефляторы, которые являются процессами плотностей мартингальных мер.

Теорема Даланга–Мортона–Виллингера

Theorem (Dalang–Morton–Willinger, *Stochastics*, 1990)

Следующие свойства эквивалентны:
(a) $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ *(NA);*
(b) $A_T \cap L^0_+ = \{0\}$ *и* $A_T = \bar{A}_T$ *(замыкание в* L^0*);*
(c) $\bar{A}_T \cap L^0_+ = \{0\}$*;*
(d′) *существует процесс* $\rho \in \mathcal{M}$, $\rho > 0$, *такой, что* $\rho S \in \mathcal{M}$*;*
 (d) *существует мера* $\tilde{P} \sim P$ *такая, что* $S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$*;*
(e′) *существует ограниченый процесс* $\rho \in \mathcal{M}$, $\rho > 0$, *такой, что* $\rho S \in \mathcal{M}$*;*
 (e) *существует мера* $\tilde{P} \sim P$, $d\tilde{P}/dP \in L^\infty$ *такая, что* $S \in \mathcal{M}(\tilde{P})$*;*
(f′) *существует процесс* $\rho \in \mathcal{M}$, $\rho > 0$, *такой, что* $\rho S \in \mathcal{M}_{loc}$*;*
 (f) *существует мера* $\tilde{P} \sim P$ *такая, что* $S \in \mathcal{M}_{loc}(\tilde{P})$*;*
(g) $\{\eta \Delta S_t :\ \eta \in L^0(\mathcal{F}_{t-1})\} \cap L^0_+ = \{0\}\ \forall\, t \le T$ *(NA для каждого шага).*

Теорема Григорьева

Вопрос о распространении теоремы ДМВ на случай моделей с транзакционными издержками привёл к интересным и неожиданным математическим результатам.

Оказалось, что NA^w на каждом шаге не влечёт многошагового NA^w.

Некоторые из эквивалентностей сохранились для случая $d = 2$, весьма специфического, поскольку конуса на плоскости — просто сектора.

Theorem (Grigoriev, 2005)

Let $d = 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(A) $A_0^T \cap L^0(\mathbf{R}_+^d) = \{0\}$ *(NA^w);*

(C) $\bar{A}_0^T \cap L^0(\mathbf{R}_+^d) = \{0\}$*;*

(D) $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Имеется пример одношаговой модели, удовлетворяющей NA^w, но для которой множество A_0^1 незамкнуто.

Для $d = 3$ есть пример с NA^w и $\mathcal{M}_0^1(\widehat{K}^* \setminus \{0\}) = \emptyset$.

Отсутствие арбитража NA^s для конечного Ω, 1

Стратегия B называется слабой арбитражной возможностью для даты $t \le T$, если $V_t^B \in K_t$, но $P(V_t^B \notin K_t^0) > 0$, где $K_t^0 := K_t \cap (-K_t)$. (Арбитраж с точки зрения аудитора.)

Отсутствие таких стратегий называется строгим свойством отсутствия арбитража: NA_t^s:

$$A_t \cap L^0(K_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(K_t^0, \mathcal{F}_t),$$

или, эквивалентно,

$$\widehat{A}_t \cap L^0(\widehat{K}_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(\widehat{K}_t^0, \mathcal{F}_t).$$

Theorem (Kabanov–Stricker, 1999)

Для конечного Ω следующие условия эквивалентны:
(a) $A_T \cap L^0(K_T, \mathcal{F}_T) \subseteq L^0(K_T^0, \mathcal{F}_T)$;
(b) there is $Z^{(T)} \in \mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ with $Z_T^{(T)} \in L^1(\mathrm{ri}\, \widehat{K}_T^*, \mathcal{F}_T)$.

Отсутствие арбитража NA^s для конечного Ω, 2

- Доказательство использует обобщение леммы Штимке.
- Условие NA^s_T не влечёт условие NA^s_t для $t < T$. Иными словами, инвестор не может зафиксировать прибыль.
- Обозначение NA^s используется, когда NA^s_t имеет место для всех $t \le T$.

Theorem (Kabanov–Stricker, 1999)

Для конечного Ω следующие условия эквивалентны:
(a) $A_t \cap L^0(K_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(K^0_t, \mathcal{F}_t)$ $\forall t$ (NA^s);
(b) для каждого $t \le T$ существует процесс $Z^{(t)} \in \mathcal{M}^t_0(\widehat{K}^* \setminus \{0\})$ с $Z^{(t)}_t \in L^1(\mathrm{ri}\, \widehat{K}^*_t, \mathcal{F}_t)$.

Критерии в абстрактной формулировке, 1

Модель

- Задано конечное семейство $\{X_t^n(\omega),\ n \le N\}$ d-мерных адаптированных процессов,

$$G_t(\omega) := \mathrm{cone}\,\{X_t^n(\omega),\ n \le N\}.$$

- Пусть G и $\tilde{G}$ — замкнутые конуса. Говорят, что G доминируется конусом $\tilde{G}$, если $G \setminus G^0 \subseteq \mathrm{ri}\,\tilde{G}$, где $G^0 := G \cap (-G)$. Это определение распространяется на конусозначные процессы. Оно может быть сформулировано и в терминах дуальных конусов:

$$G \setminus G^0 \subseteq \mathrm{ri}\,\tilde{G} \;\Leftrightarrow\; \tilde{G}^* \setminus \tilde{G}^{*0} \subseteq \mathrm{ri}\,G^*.$$

  Если G имеет внутренность (в случае финансовых моделей, где $G_t = \widehat{K}_t \supseteq \mathbb{R}^d$, это означает что имеется эффективное трение),

$$G \setminus G^0 \subseteq \mathrm{int}\,\tilde{G} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{G}^* \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{ri}\,G^*.$$

Критерии в абстрактной формулировке, 2

Определения

- Пусть $A_0^t(G) := A_t(G) := -\sum_{s=0}^t L^0(G_s, \mathcal{F}_s)$.
- Говорят, что процесс G удовлетворяет:

  – слабому свойству отсутствия арбитража NA^w, если

$$A_t(G) \cap L^0(G_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(\partial G_t, \mathcal{F}_t) \qquad \forall\, t \le T;$$

  – строгому свойству отсутствия арбитража NA^s, если

$$A_t(G) \cap L^0(G_t, \mathcal{F}_t) \subseteq L^0(G_t^0, \mathcal{F}_t) \qquad \forall\, t \le T;$$

  – робастному свойству отсутствия арбитража NA^r, G доминируется процессом $\tilde{G}$, удовлетворяющим NA^w.

- Легко показать, что если G доминирует процесс $\mathbb{R}_+^d$, то NA^w имеет место тогда и только тогда, когда $A_T(G) \cap L^0(\mathbb{R}_+^d) = \{0\}$.

Критерии в абстрактной формулировке, 3
Результаты

Theorem (Schachermayer, 2004, Kabanov–Rasonyi–Stricker, 2003)

Предположим, что G доминирует процесс $\mathbb{R}^d_+$. Тогда

$$NA^r \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_0^T(\mathrm{ri}\, G^*) \neq \emptyset.$$

Theorem (Penner, 2003)

Пусть $L^0(G^0_s, \mathcal{F}_{s-1}) \subseteq L^0(G^0_{s-1}, \mathcal{F}_{s-1})\ \forall\, s \leq T$. Тогда

$$NA^s \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}_0^T(\mathrm{ri}\, G^*) \neq \emptyset.$$

Предположение теоремы Пеннер выполнено, когда $G^0 = \{0\}$ (эффективное трение) или когда $K^0_t = K_t \cap (-K_t)$ не зависит от t (e.g., когда транзакционные коэффициенты постоянны) и выполняется NA^s. В этом случае NA^r и NA^s совпадают.

Для $d = 4$ есть пример с NA^s и $\mathcal{M}_0^2(G^* \setminus \{0\}) = \emptyset$.

Теорема хеджирования для европейских опционов
Конечное Ω

Нас интересует выпуклое множество Γ начальных капиталов для самофинансирующихся стратегий, которые позволяют доминировать срочный контракт европейского типа с выплатой $C \in L^0(\mathbf{R}^d, \mathcal{F}_T)$:

$$\Gamma := \{v \in \mathbf{R}^d : \ \exists \text{ стратегия } B \text{ такая, что } \ v + V_T^B \succeq_{K_T} C\}.$$

Запись $\xi \succeq_{K_T} \eta$ означает, что $\xi - \eta \in K_T$.
Поскольку все $S_0^i = 1$, $\Gamma = \{v \in \mathbf{R}^d : \ \widehat{C} \in v + \widehat{A}_0^T\}$.
Рассмотрим замкнутое выпуклое множество

$$D := \left\{v \in \mathbf{R}^d : \ Z_0 v \geq EZ_T \widehat{C}, \ \forall\, Z \in \mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\})\right\}.$$

Theorem (Kabanov–Stricker, 2001)

Пусть Ω конечно и $\mathcal{M}_0^T(\widehat{K}^* \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Тогда $\Gamma = D$.

Состоятельные ценовые системы позволяют сравнивать настоящую стоимость активов и будущую стоимость...

Теорема хеджирования для американских опционов, 1
Конечное Ω

- Рассмотрим модель, задаваемую конусозначным процессом $G = (G_t)$, $t \geq T$, доминирующим $\mathbf{R}^d_+$.
- Процесс платы $Y = (Y_t)$ — d-мерный.
- Пусть $\mathcal{X}^0$ обозначает множество процессов $X = (X_t)$ с $X_{-1} = 0$ и $\Delta X_t \in -L^0(G_t, \mathcal{F}_t)$ при $t = 0, 1, ..., T$. Пусть

$$\Gamma := \{v \in \mathbf{R}^d : \ \exists X \in \mathcal{X}^0 \text{ такой, что } \ v + X_t \succeq_{G_t} Y_t \ \forall\, t\}.$$

- По аналогии с результатом для рынков без трения естественно предположить, что

$$\Gamma = \{v \in \mathbf{R}^d : \ Z_0 v \geq EZ_\tau Y_\tau \ \forall Z \in \mathcal{M}(G^*), \ \tau \in \mathcal{T}\}.$$

Ещё одна неожиданность: это неверно!

Теорема хеджирования для американских опционов, 2

- Для d-мерного процесса Z положим

$$\bar{Z}_t := \sum_{r=t}^{T} E(Z_r|\mathcal{F}_t).$$

- Определим множество когеррентных ценовых систем как множество процессов

$$\mathcal{Z}(G^*, P) := \{Z: \ Z_t, \bar{Z}_t \in L^0(G^*_t, \mathcal{F}_t), \ t = 0, 1, ..., T\}.$$

- Очевидно, $\mathcal{M}(G^*, P) \subseteq \mathcal{Z}(G^*, P)$.

Theorem (Bouchard–Temam, 2005)

Пусть Ω конечно, $\mathcal{M}_0^T(G^* \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Тогда

$$\Gamma = \Big\{ v \in \mathbf{R}^d : \ \bar{Z}_0 v \geq E \sum_t Z_t Y_t \ \ \forall Z \in \mathcal{Z}(G^*, P) \Big\}.$$