07.09.20. Спецкурс Булинская. д/з от семинара 0 — Токаева Александра 409

(1.) $X \sim Geom(p)$, т.е. $p_k = P(X=k) = pq^k$; $k=0,1,2\dots$

Док-ть: $P(X \geq k+\ell / X \geq k) = P(X \geq \ell)$ – св-во отсутствия памяти.

Решение: $P(X \geq \ell) = \sum_{t=\ell}^{\infty} P(X=t) = \sum_{t=\ell}^{\infty} pq^t = pq^\ell(1+q+q^2+\dots) = \frac{pq^\ell}{1-q} = \frac{pq^\ell}{p} = q^\ell$

$$P(X \geq k+\ell / X \geq k) = \frac{P(X \geq k+\ell \cap X \geq k)}{P(X \geq k)} \underset{\text{т.к. } \{X \geq k+\ell\} \subset \{X \geq k\}}{=} \frac{P(X \geq k+\ell)}{P(X \geq k)} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = P(X \geq \ell).\ \text{чтд.}$$

(2.) $S^{coe} = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i$

$N(\omega)$ – целочисл. сл. вел.

$N \perp\!\!\!\perp \{X_i\}_{i \geq 1}$

X_i – нор св.

$P_N(z) = Ez^N$ – произв. ф-ция N

$g_X(t) = Ee^{tX_i}$; $i \geq 1$ – произв. ф-ция моментов X_i.

$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$ – хар. ф-ция
$g_\xi(t) = Ee^{t\xi}$ – произв. ф-ция моментов
$L_\xi(t) = Ee^{-t\xi}$ – преобр. лапласа
$\psi_\xi(z) = Ez^\xi$ – произв. ф-ция.

Док-ть: а) $g_{S^{coe}}(t) = Ee^{tS^{coe}} \overset{?}{=} P_N(g_X(t))$

б) $ES^{col} = ?$; $\mathcal{D}S^{col} = ?$

Решение: а) $g_{S^{coe}}(t) = Ee^{tS^{coe}} = Ee^{t\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i} = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right) \overset{\text{ф-ции неотриц. поэтому меняем местами } E \text{ и } \Sigma.}{=}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i} \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right) \underset{\text{по усл. } N(\omega) \perp\!\!\!\perp \{X_i\}_{i \geq 1}}{=}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\underbrace{Ee^{t(X_1+\dots+X_n)}}_{\substack{= Ee^{tX_1}\cdot\ldots\cdot Ee^{tX_n}, \\ \text{поскольку } X_i \text{ – незав. сл. вел.}}} \cdot \underbrace{E\mathbb{1}\{N(\omega)=n\}}_{= P(N(\omega)=n)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(Ee^{tX_1}\right)^n}_{= (g_X(t))^n} P(N(\omega)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} (g_X(t))^n \cdot P(N(\omega)=n) = \underbrace{E(g_X(t))^{N(\omega)}}_{= P_N(g_X(t))}$

$\Rightarrow g_{S^{coe}}(t) = P_N(g_X(t))$.

б) как зная $g_\xi(t) = Ee^{t\xi}$ вычислить $E\xi$ и $\mathcal{D}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$?

Имеем: $g_\xi'(t) = (Ee^{t\xi})' = E[(e^{t\xi})'] = E[\xi \cdot e^{t\xi}]$

$\Rightarrow g_\xi'(0) = E\xi$

Далее, $g_\xi''(t) = E[\xi^2 e^{t\xi}]$.

$\Rightarrow g_\xi''(0) = E\xi^2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E\xi &= g_\xi'(0) \\ \mathcal{D}\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = g_\xi''(0) - (g_\xi'(0))^2 \end{aligned}} \quad (*)$$

$\Rightarrow ES^{col} = \underbrace{P_N'(g_X(0))}_{= EN} \cdot \underbrace{g_X'(0)}_{= EX_i} = \underbrace{P_N'(1)}_{= EN} \cdot EX_i = \boxed{EN \cdot EX_i}$

почему $P_N'(g_x(0)) = EN$?

ну $g_x(0) = E e^{tX_i}\Big|_{t=0} = E1 = 1.$

Далее, $P_N(z) = Ez^N = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot P(N=n)$

$\Rightarrow P_N'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} \cdot P(N=n)$

$\Rightarrow P_N'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N=n) = EN.$

Аналогично, $P_N''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} P(N=n)$

$$\Rightarrow P_N''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot P(N=n) - \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) = EN^2 - EN.$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} EN = P_N'(1) \\ EN^2 = P_N''(1) + EN = P_N''(1) + P_N'(1). \end{cases}} \quad (**)$$

Теперь, опять используя $g_{S^{col}}(t) = P_N(g_x(t))$, посчитаем $DS^{col} = E(S^{col})^2 - (ES^{col})^2$

нам нужно $E(S^{col})^2$.

но по ф-ле (*): $E(S^{col})^2 = g_{S^{col}}''(0) = \left(P_N(g_x(t))\right)''\Big|_{t=0} = \left(P_N'(g_x(t)) \cdot g_x'(t)\right)'\Big|_{t=0} =$

$= P_N''(g_x(t)) \cdot (g_x'(t))^2\Big|_{t=0} + P_N'(g_x(t)) \cdot g_x''(t)\Big|_{t=0} =$

$= P_N''(g_x(0)) \cdot (g_x'(0))^2 + P_N'(g_x(0)) \cdot g_x''(0) = P_N''(1) \cdot (g_x'(0))^2 + P_N'(1) \cdot g_x''(0) \overset{\text{см. (*) и (**)}}{=}$

$= (EN^2 - EN) \cdot (EX_i)^2 + EN \cdot EX_i^2 = EN^2 (EX_i)^2 + EN \cdot (\underbrace{EX_i^2 - (EX_i)^2}_{= DX_i}) = EN^2 (EX_i)^2 + EN \cdot DX_i$

$\Rightarrow DS^{col} = E(S^{col})^2 - (ES^{col})^2 = EN^2 (EX_i)^2 + EN \cdot DX_i - (EN \cdot EX_i)^2 =$

$= (EX_i)^2 (\underbrace{EN^2 - (EN)^2}_{= DN}) + EN \cdot DX_i = \boxed{(EX_i)^2 \cdot DN + EN \cdot DX_i}$

<u>Ответ:</u> $ES^{col} = EN \cdot EX_i$

$DS^{col} = EN \cdot DX_i + DN \cdot (EX_i)^2$

Зам. В принципе, ф-лу для ES^{col} и DS^{col} можно было получить и в лоб, без производящей ф-ции моментов. (стр 2)

$$S^{col} = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i$$

$$ES^{col} = E\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i = \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right\} \underset{N \perp \{X_i\}_{i\geq 1}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(E\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\cdot E\mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot EX_i \cdot P(N(\omega)=n) = EX_i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P(N(\omega)=n) = \boxed{EX_i \cdot EN}$$

$$E(S^{col})^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1^2+\dots+X_n^2+2X_1X_2+\dots+2X_{n-1}X_n)\cdot P(N(\omega)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n\cdot EX_i^2 + n(n-1)\underbrace{EX_i\cdot EX_j}_{=(EX_i)^2}\right)\cdot P(N(\omega)=n)\right] = EX_i^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P(N(\omega)=n) +$$

$$+ (EX_i)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P(N(\omega)=n) = EX_i^2 \cdot EN + (EX_i)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n) - \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P(N=n)\right) =$$

$$= EX_i^2 \cdot EN + (EX_i)^2 \cdot (EN^2 - EN) = (EX_i)^2 \cdot EN^2 + EN\underbrace{(EX_i^2 - (EX_i)^2)}_{=DX_i} = (EX_i)^2 \cdot EN^2 + EN\cdot DX_i$$

$$\Rightarrow DS^{col} = E(S^{col})^2 - (ES^{col})^2 = (EX_i)^2 \cdot EN^2 + EN\cdot DX_i - (EN\cdot EX_i)^2 =$$

$$= (EX_i)^2\underbrace{(EN^2 - (EN)^2)}_{=DN} + EN\cdot DX_i = \boxed{(EX_i)^2 \cdot DN + EN\cdot DX_i}$$

③ $CV(X) = \dfrac{\sqrt{DX}}{EX}$ — коэф. изменчивости

Пусть $S_1^{col} = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i$; $S_2^{col} = \sum_{i=1}^{N_2} Z_i$,

где $N_1 \sim NB(10; \frac{9}{10})$; $N_2 \sim NB(1, \frac{1}{10})$, $Y \sim Exp(a)$; $Z \sim Par(x_0; \frac{9}{4})$

у него есть только 1 и 2 моменты, а дальше нет, т.к. $2 < \frac{9}{4} < 3$

Найти: коэф. изменчивости N_1 N_2 Y Z S_1 S_2.

Обозн: $NB(m,p)$: $P(N=k) = C_{m+k-1}^{k} p^m \cdot (1-p)^k$; $k = 0,1,2\dots$

$Exp(a)$: $f(x) = a\cdot e^{-ax} \cdot \mathbb{1}\{x>0\}$.

$Par(x_0, d)$: $\underset{1-P(Z\leq x)}{\underset{\parallel}{P(Z>x)}} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^d \cdot \mathbb{1}\{x>x_0\}$. — дана доп. ф-ция распр.

$$\Rightarrow -f(x) = (x_0)^d \cdot (-d)\cdot\frac{1}{x^{d+1}} \cdot \mathbb{1}\{x>x_0\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{d(x_0)^d}{x^{d+1}} \cdot \mathbb{1}\{x>x_0\}$$ — плотность распр. Парето.

Посчитаем E и D для N_1 N_2 Y и Z.

по ф-лам из задачи 2, нам этого хватит, чтобы посчитать E и D для S_1 и S_2.

для N_1 $P(N_1=k)=C^k_{m+k-1}p^m\cdot(1-p)^k=C^k_{m+k-1}p^mq^k;\ k=0,1,\dots$

это вообще плотность, т.е. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(N_1=k)=1$,

т.к. по ф-ле из Тейлора $(1-x)^{-n}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C^k_{n+k-1}x^k$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}P(N_1=k)=p^m\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}C^k_{m+k-1}q^k}_{=(1-q)^{-m}}=p^m\cdot(1-q)^{-m}=p^m\cdot p^{-m}=1.$$

Посчитаем EN_1 и DN_1 через произв. ф-цию $\Psi_{N_1}(z)=Ez^{N_1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n\cdot P(N_1=n)$

Мы уже выяснили (см. **), что $\Psi'_{N_1}(1)=EN_1$

$$\Psi''_{N_1}(1)=EN_1^2-EN_1.$$

Имеем: $\Psi_{N_1}(z)=Ez^{N_1}=p^m\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k\cdot C^k_{m+k-1}q^k=p^m\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}C^k_{m+k-1}(zq)^k=\dfrac{p^m}{(1-zq)^m}$ знаем $(1-x)^{-n}$

$$\Rightarrow \Psi'_{N_1}(z)=p^m\cdot(-m)\cdot(-q)\cdot\frac{1}{(1-zq)^{m+1}}=\frac{mp^mq}{(1-zq)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Psi'_{N_1}(1)}_{=EN_1}=\frac{mp^mq}{(1-q)^{m+1}}=\frac{mp^mq}{p^{m+1}}=\boxed{\frac{mq}{p}}\quad\Rightarrow\boxed{EN_1=\Psi'_{N_1}(1)=\frac{mq}{p}}$$

Далее, $\Psi''_{N_1}(z)=mp^mq\cdot(-m-1)\cdot(-q)\cdot\dfrac{1}{(1-zq)^{m+2}}=\dfrac{p^m\cdot q^2\cdot m(m+1)}{(1-zq)^{m+2}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\Psi''_{N_1}(1)}_{=EN_1^2-EN_1}=\frac{p^m\cdot q^2\cdot m(m+1)}{(1-q)^{m+2}}=\frac{p^m\cdot q^2m(m+1)}{p^{m+2}}=\frac{q^2m(m+1)}{p^2}$$

$$\Rightarrow EN_1^2=\Psi''_{N_1}(1)+EN_1=\frac{q^2m(m+1)}{p^2}+\frac{mq}{p}=\frac{mq(q(m+1)+p)}{p^2}=\frac{mq(qm+\overbrace{p+q}^{=1})}{p^2}=\frac{mq(mq+1)}{p^2}$$

$$\Rightarrow DN_1=EN_1^2-(EN_1)^2=\frac{mq(mq+1)}{p^2}-\frac{m^2q^2}{p^2}=\frac{mq(\cancel{mq}+1-\cancel{mq})}{p^2}=\boxed{\frac{mq}{p^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}EN_1&=\frac{mq}{p}\\ DN_1&=\frac{mq}{p^2}\end{aligned}}$$

Для $Y \sim Exp(a)$

$$EY = \int_0^{+\infty} x \cdot a \cdot e^{-ax} dx = \frac{a}{-a} \cdot \int_0^{+\infty} x\, d(e^{-ax}) = \underbrace{-x \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx =$$

$$= \frac{-1}{a} \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{a}(0-1) = \frac{1}{a}$$

$$EY^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot a \cdot e^{-ax} dx = \frac{a}{-a} \int_0^{+\infty} x^2 d(e^{-ax}) = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-ax}}_{0} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot 2x\, dx =$$

$$= \frac{2}{-a} \int_0^{+\infty} x\, d(e^{-ax}) = \underbrace{-\frac{2}{a} x \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty}}_{0} + \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{-a} \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} EY &= \frac{1}{a} \\ EY^2 &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}}$$

Для $Z \sim Par(x_0, d)$

$$EZ = \int_{x_0}^{+\infty} x \cdot \frac{d \cdot x_0^d}{x^{d+1}} dx = d x_0^d \cdot \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^d} = d x_0^d \cdot \left(\frac{-1}{d-1}\right) \cdot \frac{1}{x^{d-1}} \Big|_{x_0}^{+\infty} = \frac{d}{d-1} \cdot x_0^d \cdot \frac{1}{x_0^{d-1}} = \frac{d}{d-1} x_0$$

$$EZ^2 = \int_{x_0}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{d x_0^d}{x^{d+1}} dx = d x_0^d \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{d-1}} = d \cdot x_0^d \cdot \left(\frac{-1}{d-2}\right) \cdot \frac{1}{x^{d-2}} \Big|_{x_0}^{+\infty} = \frac{d}{d-2} x_0^d \cdot \frac{1}{x_0^{d-2}} = \frac{d}{d-2} x_0^2$$

$$\Rightarrow DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = \frac{d}{d-2} x_0^2 - \frac{d^2 x_0^2}{(d-1)^2} = \frac{d x_0^2 ((d-1)^2 - d(d-2))}{(d-1)^2 (d-2)} = \frac{d x_0^2 (\cancel{d^2} \cancel{-2d} + 1 \cancel{-d^2} \cancel{+2d})}{(d-1)^2 (d-2)} = \frac{d x_0^2}{(d-1)^2 (d-2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} EZ &= \frac{d}{d-1} x_0 \\ DZ &= \frac{d x_0^2}{(d-1)^2 (d-2)} \end{aligned}}$$

по ф-лам из задачи 2: $ES_1 = EY_i \cdot EN_1$

$DS_1 = (EY_i)^2 DN_1 + EN_1 \cdot DY_i$

$ES_2 = EZ_i \cdot EN_2$

$DS_2 = (EZ_i)^2 DN_2 + EN_2 \cdot DZ_i$

считаем всё численно для $N_1 \sim NB(10, \frac{9}{10})$

$N_2 \sim NB(1, \frac{1}{10})$

$Y \sim Exp(a)$

$Z \sim Par(x_0; 9/4)$

$$EN_1 = \frac{mq}{p} = \frac{10\cdot\frac{1}{10}}{9/10} = \frac{10}{9}$$
$$DN_1 = \frac{mq}{p^2} = \frac{10\cdot\frac{1}{10}}{81/100} = \frac{100}{81}$$
$$\Rightarrow CV(N_1) = \frac{\sqrt{DN_1}}{EN_1} = \frac{10/9}{10/9} = 1.$$

$$EN_2 = \frac{mq}{p} = \frac{1\cdot 9/10}{1/10} = 9$$
$$DN_2 = \frac{mq}{p^2} = \frac{1\cdot 9/10}{1/100} = \frac{9}{10}\cdot 100 = 90$$
$$\Rightarrow CV(N_2) = \frac{\sqrt{DN_2}}{EN_2} = \frac{3\sqrt{10}}{9} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$EY = \frac{1}{a}, \quad DY = \frac{1}{a^2} \Rightarrow CV(Y) = \frac{\sqrt{DY}}{EY} = \frac{1/a}{1/a} = 1.$$

$$EZ = \frac{\alpha}{\alpha-1}x_0 = \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{5}x_0 = \frac{9}{5}x_0$$
$$DZ = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{9}{4}x_0^2\cdot\frac{4\cdot4\cdot4}{5\cdot5\cdot1} = \frac{16\cdot 9x_0^2}{25}$$
$$\Rightarrow CV(Z) = \frac{\sqrt{DZ}}{EZ} = \frac{4\cdot 3x_0}{5}\cdot\frac{5}{9x_0} = \frac{4}{3}.$$

$$ES_1^{col} = EY_i\cdot EN_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{10}{9}$$
$$DS_1^{col} = (EY_i)^2\cdot DN_1 + EN_1\cdot DY_i = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{100}{81} + \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{190}{81a^2}$$
$$\Rightarrow CV(S_1^{col}) = \frac{\sqrt{DS_1^{col}}}{ES_1^{col}} = \frac{\sqrt{190}\cdot 9a}{9a\cdot 10} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{10}}$$

$$ES_2^{col} = EZ\cdot EN_2 = \frac{9}{5}x_0\cdot 9 = \frac{81x_0}{5}$$
$$DS_2^{col} = (EZ)^2\cdot DN_2 + EN_2\cdot DZ = \frac{81x_0^2}{25}\cdot 90 + \frac{9\cdot16\cdot9x_0^2}{25} = \frac{81x_0^2\cdot 106}{25}$$
$$\Rightarrow CV(S_2^{col}) = \frac{9x_0\sqrt{106}\cdot 5}{5\cdot 81x_0} = \frac{\sqrt{106}}{9}$$

<u>Ответ</u>: $CV(N_1) = 1$
$CV(N_2) = \frac{\sqrt{10}}{3}$
$CV(Y) = 1$
$CV(Z) = \frac{4}{3}$
$CV(S_1^{col}) = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{10}}$
$CV(S_2^{col}) = \frac{\sqrt{106}}{9}$

(4.) $V_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1\ldots n$, где $f_{V_i}(x) = \frac{\beta^{\alpha_i}\cdot x^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta x}\cdot I(x>0)$.

$\{V_i\}_{i\geq1}$ — незав.

Используя преобр. Лапласа, док-ть, что $S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} V_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i; \beta\right)$.

<u>Решение</u>: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

посчитаем преобр. Лапласа $L(z) = Ee^{-zV}$ для сл. вел $V \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$L_V(z) = Ee^{-zV} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-zx}\cdot\beta^\alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-(z+\beta)x}\cdot x^{\alpha-1}dx =$$

$(z+\beta)x = y$
$x = \frac{y}{z+\beta}$
$dx = \frac{dy}{z+\beta}$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot\left(\frac{y}{z+\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{dy}{z+\beta} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\cdot(z+\beta)^\alpha}\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{\alpha-1}dy}_{=\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow L_{V_i}(z) = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_i}$$

независимость V_i

В силу независимости V_i: $L_{S^{ind}}(z) = Ee^{-S^{ind}z} = Ee^{-z(V_1+\ldots+V_n)} = E\left(e^{-zV_1}\cdot\ldots\cdot e^{-zV_n}\right) =$
$$= Ee^{-zV_1}\cdot\ldots\cdot Ee^{-zV_n} = L_{V_1}(z)\cdot\ldots\cdot L_{V_n}(z) = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$$

$\Rightarrow L_{S^{ind}}(z) = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$. Мы узнаём в этом выражении преобр. Лапласа для $\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n; \beta)$. А поскольку есть вз. однозн. соответствие между распр. и его преобр. Лапласа, то $S^{ind} \sim \Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n; \beta)$. Ч.т.д.