19.02.2023. Rough Path. ДЗ 2.

(18) Пусть μ – конечная борелевская мера на $[0,T]$

Выразите общее решение ур-я $y''=\mu$ через ф-цию распр. $f(t)=\mu([0,t])$.

<u>Решение:</u> Как в УрЧП, хотим, чтоб $\forall$ пробной ф-ции $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$ было выполнено.

$$\langle y''; \varphi\rangle \overset{?}{=} \langle \mu, \varphi\rangle$$

т.е. $$\int_0^T y''(x)\varphi(x)\,dx \overset{?}{=} \int_0^T \varphi(x)\,\mu(dx)$$

$$= \cancel{y'(x)\cdot\varphi(x)}\Big|_0^T - \int_0^T \varphi'(x)\,y'(x)\,dx \qquad = \int_0^T \varphi(x)\,d\mu(x)$$

$$= -\cancel{\varphi'(x)}\cdot y(x)\Big|_0^T + \int_0^T y(x)\,\varphi''(x)\,dx \qquad = \int_0^T \varphi(x)\,df(x)$$

$$= \cancel{\varphi(x)}\,f(x)\Big|_0^T - \int_0^T f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$f(x) = \left(\int_0^x f(s)\,ds\right)' \text{ – и это занесем под дифференциал}$$

$$= -\left(\int_0^x f(s)\,ds\cdot\cancel{\varphi'(x)}\right)\Big|_0^T + \int_0^T\left(\int_0^x f(s)\,ds\right)\varphi''(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^T y(x)\,\varphi''(x)\,dx = \int_0^T\left(\int_0^x f(s)\,ds\right)\varphi''(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x f(s)\,ds + C_1x + C_2$$ – ответ.