24.05.19 Мат. анализ. Лекция 27.

Досрочный экзамен: 5.06; 12.00; ауд. 13-06.

Рассм. пов-ть: простая, ∂D — кус. гладкая и лежит в $\overline{D}$ ($\Rightarrow$ у пов-ти есть край)

∂D - кус. гладкая $\Rightarrow$ Γ — тоже кус. гладкий
край Φ.

Вопрос на экзамене: из ф-лы Стокса получить ф-лу Грина и наоборот.

$\partial D := L$.

пов-ти нужно выбрать нормаль, а контуру - направление обхода.

Обход $\partial D = L$ индуцирует соотв. обход края Γ. $\leftarrow$ ориентация края (т.е обход Γ)

Ориентация края наз. согласованной с ориентацией Φ (т.е с выбором нормали), если ∂D индуцирует соотв. обход Γ, где нормаль выбирается $\vec{n} = \oplus \frac{[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v']}{|[r_u' \times r_v']|}$

Фихтенгольц, III том, стр. 620 — см. правило штопора.

Теорема (формула Стокса)

Пусть задана простая пов-ть $\Phi \subset G$ с усл. 1 (т.е есть край...), где G — область в $\mathbb{R}^3$, причём ∂D — гладкий (а вообще кус-гладкий) и $x, y, z \in C^2(\overline{D})$ (а вообще C^1).

$P, Q, R \in C^1(G)$.

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}$$

Тогда если ориентация Γ согласована с ориентацией Φ, то

$$\boxed{\int\limits_{\Gamma\text{ край}} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Phi} \underbrace{\{(Q_x' - P_y')\cos\gamma + (P_z' - R_x')\cos\beta + (R_y' - Q_z')\cos\alpha\}}_{\langle \vec{n}; \operatorname{rot}\vec{a}\rangle;\ \text{выбор нормали участвует в косинусах}} dS} \quad (2)$$

Док-во: Дост. док-ть ф-лу:

$$\boxed{\int\limits_{\Gamma} Pdx = \iint\limits_{\Phi} (P_z' \cdot \cos\beta - P_y' \cdot \cos\gamma)\, dS} \quad (3)$$

Кривая $L := \partial D = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}; \ t \in [t_0; T]$.

индуцирует соотв. обход кривой в пр-ве Γ: $\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$ $t \in [t_0; T]$

Имеем: $\int\limits_{\Gamma} Pdx$ – крив. интеграл 2 рода.

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} Pdx = \int\limits_{t_0}^{T} P\cdot x'_t\,dt = \int\limits_{t_0}^{T} P(x'_u\cdot u'_t + x'_v\cdot v'_t)\,dt =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{L} P(x'_u\,du + x'_v\,dv)}_{\text{плоская кривая}} \overset{\text{ф-ла Грина}}{=} \iint\limits_{D} \left\{\frac{\partial}{\partial u}(P x'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P\cdot x'_u)\right\} du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left\{\left(P'_x\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + P'_y\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + P'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot x'_v - \left(P'_x\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + P'_y\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + P'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)x'_u\right\} du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{D} \{0\cdot P'_x + P'_z\cdot(\underbrace{z'_u\cdot x'_v - z'_v\cdot x'_u}_{B}) + P'_y\,(\underbrace{y'_u\cdot x'_v - y'_v\cdot x'_u}_{-C})\}\,du\,dv = (?)$$

но вспомним, как мы получали нормаль.

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} ; \quad \vec{r}'_u\times\vec{r}'_v = (A, B, C),$$

$$\Rightarrow (?) = \iint\limits_{D} (P'_z\cdot B - P'_y\,C)\,du\,dv = \iint\limits_{D} \frac{(P'_z\cdot B - P'_y\cdot C)}{|r'_u\times r'_v|}\cdot \underbrace{|r'_u\times r'_v|\,du\,dv}_{= dS}$$

$$= \iint\limits_{\Phi} (P'_z\cdot\cos\beta - P'_y\cdot\cos\gamma)\,dS. \quad \text{чтд.}$$

Зам. ① мы требовали, чтобы $x, y, z \in C^2$.
но ф-ла Стокса верна для $x, y, z\in C^1(\overline{D})$, и даже для кус. гладких.
Мы просто апроксимировали более гладкими.

② Верна и для C^1-кус. гладких

③ Ф-ла Стокса (2) при обозн. $\vec{a} := (P, Q, R)$
приобретает вид: $\underbrace{\oint\limits_{\Gamma} \langle\vec{a};\vec{dr}\rangle}_{\text{циркуляция}} = \iint\limits_{\Phi} \underbrace{\langle \mathrm{rot}\,\vec{a};\vec{n}\rangle\,dS}_{\text{поток}}$

циркуляция вект. потока $\vec{a}$ по замкн. контуру: краю Γ пов-ти Φ; поток вихря вект. потока $\vec{a}$ через пов-ть Φ

Зам. $$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

④ Из ф-лы Стокса следует ф-ла Грина.

⑤ Ф-ла 3) может быть переписана в виде:

$$\boxed{\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Phi} (Q'_x - P'_y)\, dx\wedge dy + (P'_z - R'_x)\, dz\wedge dx + (R'_y - Q'_z)\, dy\wedge dz}$$

Φ ← с соотв. стороной

пов. интеграл 2 рода.

Пункт 5. Формула Гаусса–Остроградского.

Опр. область G наз. простой относительно Oz $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $G := \{ \varphi_1(x;y) < z < \varphi_2(x;y)\ ;(x;y) \in D \in \mathbb{R}^2;\ \varphi_1;\varphi_2 \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \}$.

Аналогично определяется, когда G простая относ Ox и Oy.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$

Область G наз. допустимой, если: 1) G – может быть "разделена" (т.е объединение, внутренности не совпадают) на конечное число областей G_z^k; $k = 1 \dots N_z$ – простых относ. Oz.

2) Она же может быть разделена на конечное объединение простых относ. Ox ⇒ (G-огранич)

3) и она м.б разделена на конечное объединение простых относ. Oy.

Теорема (Формула Гаусса-Остроградского)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$; G - допустимая область в $\mathbb{R}^3$;

$P, Q, R \in C^1(\overline{G})$

произв. на границе – предел произв. изнутри по любому направлению. И все произв. вместе с пределом непрер.

Тогда

$$\boxed{\iint\limits_{\Phi} (\underbrace{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma}_{(\vec{a};\vec{n})})\, ds = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz} \quad (1),$$

↑простая относ Oz

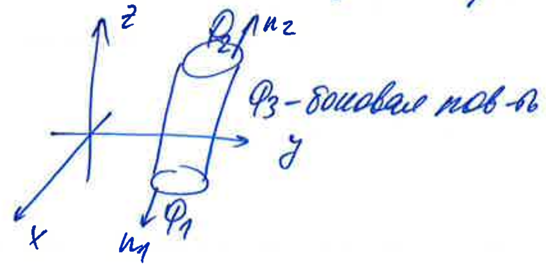
где $\Phi = \partial G$

$\vec{n}$ – внешняя нормаль относ G.

Док-во: Дост. док-ть, когда G – простая относ Oz, а потом все сложить, и интегралы по боковушкам сократятся.

Хотим: $\boxed{\iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma\, dS \overset{?}{=} \iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz}$ (2).

Дост. док-ть ф-лу (2) для случая, когда G – простая отн. Oz.



Имеем: $\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x;y)}^{\varphi_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$

т. Фубини для цилиндроида

$= \iint\limits_{D} \left[R(x,y,\varphi_2(x;y)) - R(x;y;\varphi_1(x;y))\right] dx\,dy =$ ← см. опр. пов. инт. 1 рода

$= \iint\limits_{\Phi_2} R\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{\Phi_1} R\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{\Phi_3} \underbrace{R\cos\gamma}_{=0}\, dS \Rightarrow (2).$ ч.т.д.

т.к. нормаль у Φ_1 внешняя отн-но цилиндра

т.к. нормаль $\parallel$ оси Oxy

Зам. 1. Ф-ла Гаусса – Остроградского верна для огр. области D с кус. гладкой пов-тью ∂D – это Φ.

2. Ф-ла (1) может быть написана:

$\vec{a} = (P; Q; R)$

$\iint\limits_{\Phi} \langle \vec{a}; \vec{n} \rangle dS = \iiint\limits_{G} (\operatorname{div} \vec{a})\, dx\,dy\,dz.$

внешняя нормаль к G

поток вектора $\vec{a}$ через пов-ть Φ по направл. внешней нормали

3. левая часть – можно записать как II рода.

21.05.19. Мат.анализ. Лекция 26.

Рассм. матрицу Якоби: $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$

Обозн: $E := (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = \langle$ 1-я строчка; 1-я строчка $\rangle$

$G := (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = \langle$ 2-я строчка; 2-я строчка $\rangle$

$F := x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v = \langle$ 1-я строчка; 2-я строчка $\rangle$.

Тогда $|r'_u \times r'_v| = EG - F^2$

$\Rightarrow$ по доказ: $\boxed{S = \iint\limits_D |r'_u \times r'_v| \, du dv}$ (8)

$\Rightarrow \boxed{S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \, du dv}$

пример. $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x;y) \end{cases}$; $(x;y) \in \overline{D}$.

$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix} \Rightarrow E = 1 + (f'_x)^2$

$G = 1 + (f'_y)^2 \quad \Rightarrow EG - F^2 = 1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2$ – элемент площади.

$F = f'_x \cdot f'_y$

Зам. Формула (8) определяется и для кус. гладких.

параграф 2. поверхностные интегралы I и II рода.

пункт 1. преобразование параметров (u,v) гладкой пов-ти (замена коорд).

пусть задана пов-ть $\Phi := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$; $(u;v) \in \overline{D}$, условия 1), 2), 3) без особых точек ($r'_u \nparallel r'_v$) (D-огр, непрер, кус.-гладкая граница, пов-ть, взаимно-однозн. инъективность. без границы)

! Если инъективность вместе с границей – наз. пов-ть с краем.

(но вообще инъективность на границе не предполагается).

Рассм. отображение $F: (u_1; v_1) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to F(u_1; v_1) \in \overline{D_1}$, (2)

(т.е. замена параметра) причём $\overline{D_1}$ – измеримо по Жордану (D_1 и $\overline{D_1}$ – их измеримость по Жордану экв).

$\vec{r} = \vec{r}(u;v)$ – радиус-вектор пов-ти.

пов-ть $\tilde{\Phi} := \begin{cases} \xi = \xi(u_1; v_1) = x(u(u_1;v_1); v(u_1;v_1)) \\ \eta = \eta(u_1;v_1) = y(\ldots) \\ \zeta = \zeta(u_1;v_1) = z(\ldots) \end{cases}$

т.е $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u_1; v_1) := \vec{r}(u(u_1; v_1); v(u_1; v_1))$.

Замена параметров (2) наз. допустимой, если:

1) $F: \overline{D_1} \to \overline{D}$ – диффеоморфизм, причём $D_1 \underset{\text{внутренность}}{\leftrightarrow} D$ $(\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D)$

2) $\frac{\partial(u; v)}{\partial(u_1; v_1)} \neq 0$ в D_1 – т.е якобиан невырожден $(\Rightarrow \frac{\partial(u_1; v_1)}{\partial(u; v)} \neq 0)$

$\frac{\partial(u; v)}{\partial(u_1; v_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix}$

нам теперь, после замены переменных, для площади надо считать ρ'_{u_1} и ρ'_{v_1}.

Имеем: $\vec{\rho}'_{u_1} \times \vec{\rho}'_{v_1} = ?$

$\vec{\rho}'_{u_1} = \vec{r}'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial u_1} + \vec{r}'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial u_1}$.

$\vec{\rho}'_{v_1} = \vec{r}'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial v_1} + \vec{r}'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial v_1}$

$r'_v \times r'_v = 0$.
$r'_u \times r'_u = 0$

$$\Rightarrow [\vec{\rho}'_{u_1} \times \vec{\rho}'_{v_1}] = \left[\left(\vec{r}'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial u_1} + \vec{r}'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial u_1}\right) \times \left(\vec{r}'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial v_1} + \vec{r}'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial v_1}\right)\right] =$$

$$= 0 + \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial u_1}\right] = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \cdot \boxed{\frac{\partial(u; v)}{\partial(u_1; v_1)}} \neq 0 \text{ в } D,$$

т.к замена допустимая

Следствие ① параметрическое задание (1) с усл. 1–3 и неособыми точками при допустимой замене переходит в (2) – поле с 1-3 и неособыми точками (гладкость очев. сохраняется, а неособость сейчас проверили).

② кас. плоскость и нормаль не изменились. (может, растянулись/сжались)

пункт 2. поверхностный интеграл I рода.

Пусть задана пов-ть Φ формулами (1) с усл. 1/2/3).

Опр. $f: \Phi \to \mathbb{R}$;

тогда интегралом I рода по пов-ти Φ от функции f называется выражение

$$\boxed{\iint\limits_{\Phi} f(x; y; z)\, dS := \iint\limits_{\substack{D \\ \text{область параметров}}} f(x(u,v); y(u;v); z(u;v)) \underbrace{|r'_u \times r'_v|\, du\, dv}_{\text{элемент пов-ти}}} \quad (1)$$

дифференциал

если этот интеграл существует.

Зам. ① $\exists \iint\limits_{\Phi} f\,dS \Leftrightarrow \tilde f(u;v) = f(x(u;v);y(u;v);z(u;v)) \in R(D)$.

! мы сейчас увидим, что после замены параметра интеграл как число не изменится.

② Имеем: $\boxed{\iint\limits_{\Phi} \tilde f(\xi;\eta;\zeta)\,dS} \overset{\text{см.(1)}}{=} \iint\limits_{D_1} \tilde f(\xi(u_1;v_1);\eta(u_1;v_1);\zeta(u_1;v_1))\,\underbrace{|\rho'_{u_1}\times\rho'_{v_1}|}_{\substack{\text{см. п. 1}\\ \| \\ |r'_u\times r'_v|\cdot\left|\frac{D(u;v)}{D(u_1;v_1)}\right|}}\,du_1dv_1 =$

D_1 измеримо по опр., т.и замена допустимая.

$= \iint\limits_{D_1} f(x(u(u_1;v_1);v(u_1;v_1)),y(\ldots);z(\ldots))\,|r'_u\times r'_v|\cdot\left|\frac{D(u;v)}{D(u_1;v_1)}\right|du_1dv_1 =$

ф-ла замены переменных $D_1\to D$.

$= \boxed{\iint\limits_{D} f(x(u;v);y(\ldots);z(\ldots))\,|r'_u\times r'_v|\,du\,dv} = \iint\limits_{\Phi} f(x;y;z)\,dS.$

$\Rightarrow$ интеграл I рода как число не поменяется.

③ Если Φ - кус. гладкая (из конечного числа кусков);

$\Phi = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Phi_k$; Φ_k - гладкие; внутренности Φ_k не пересек.

Тогда определяем $\iint\limits_{\Phi} f\,dS := \sum\limits_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Phi_k} f\,dS$.

④ Интеграл I рода не зависит от стороны пов-ти
(т.к мы не выбирали нормаль (в смысле знак), только модуль).

Пункт 3. Поверхностный интеграл II рода.

Пусть Φ-пов-ть (1) с усл. 1)2)3) без особых точек.

$\Rightarrow$ (сославшись на Зорича) - на Φ определено ~~единичное~~ непрер. поле единичных нормалей: $\vec n = \pm\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ - т.е Φ - двусторонняя.

Сторона - это + или - у нормали.

Опр. P, Q, R : $\Phi\to\mathbb{R}$, непрер. на Φ. физ. смысл: поток вектора $\vec a$ через пов-ть Φ

Тогда интегралом II рода по (ориентированной) пов-ти Φ называется (1)

$$\boxed{\iint\limits_{\Phi^{\vec n}} \langle\vec a\cdot\vec n\rangle\,dS} = \iint\limits_{\Phi^{\vec n}} \{P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma\}\,dS$$

$\vec n$ выбрана нормаль; это пов. инт. I рода, т.и dS.

Зам. ① пов. интеграл II рода зависит от ориентации.

② Интеграл (1) не меняется при допустимой замене параметров, если она сохраняет сторону пов-и.
(а она может и не сохранять, если det якобиана < 0).

③ пов. интеграл II рода меняет знак при замене $\vec{n}$ на $-\vec{n}$.

④ На кус. пов-и определяется как сумма интегралов по гладким кускам.

Говорим, что пов-ть Φ положит. ориентирована, если $\vec{n} = \oplus \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$;
В этом случае пишут $\Phi^{\vec{n}} =: \Phi^+$.
В этом случае пишут: $\boxed{\iint\limits_{\Phi^+} P\, dy\wedge dz + Q\, dz\wedge dx + R\, dx\wedge dy := \iint\limits_{\Phi^{\vec{n}}} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle dS}$

вместо $\cos\alpha$ пишем! не $dx \wedge dz$!

Имеем: $\boxed{\iint\limits_{\Phi^+} P\, dy\wedge dz + Q\, dz\wedge dx + R\, dx\wedge dy} = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS =$ (см. п. 2)

$\vec{n} = + \frac{[r'_u \times r'_v]}{|[r'_u \times r'_v]|}$

тут не надо писать Φ^+, т.к. во-первых, это пов. инт. I рода, а во-вторых, знак сидит в $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

$= \iint\limits_{D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, |[r'_u \times r'_v]|\, du\, dv = (*)$

Но $r'_u \times r'_v = \overrightarrow{(A, B, C)}$, где $A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$; $B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$; $C := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Но $\cos\alpha = \frac{A}{|[r'_u \times r'_v]|}$; $\cos\beta = \frac{B}{|[r'_u \times r'_v]|}$; $\cos\gamma = \frac{C}{|[r'_u \times r'_v]|}$ — они с плюсом, т.к. мы уже выбрали $\oplus$.

$\Rightarrow$ модуль вект. произведения сократится!

$\Rightarrow (*) = \iint\limits_{D} (PA + QB + RC)\, du\, dv = \boxed{\iint\limits_{D} \langle (P; Q; R); [r'_u \times r'_v] \rangle\, du\, dv.}$

! пов. инт. II рода $= \boxed{\iint\limits_{\Phi^{\vec{n}}} \langle \vec{a}; \vec{n} \rangle dS = \iint\limits_{D} \langle a; [r'_u \times r'_v] \rangle\, du\, dv}$!

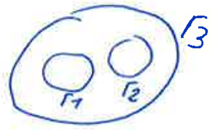
пункт 4. Формула Стокса.

Пусть Φ — простая пов-ть, т.е $\Phi = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ где; $(u;v) \in \overline{D_1}$ с усл. 1, 2, 3,
без особых точек, с краем (т.е биекция на $\overline{D_1}$).
Тогда край $\Phi := \{ \vec{r} = \vec{r}(u,v);\ (u;v) \in \partial D \}$.

Лемма Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$; D-ограничено 07.04.19. Мат. анализ. Лекция 23.

$\Gamma = \partial D = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$, где Γ_i – кус. гладкий контур, причём $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$

Тогда D может быть разрезано на конечное число простых областей.



Γ_3 Γ_1 Γ_2

Д-во: О.В. Бесов „Лекции по мат. анализу", 4, 2014

Теорема (Формула Грина)

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$; D-ограничено

$\partial D = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$, где Γ_i – кус. гладкая, причём $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$, для $i \neq j$.

и пусть $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}; \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\overline{D})$.

Тогда
$$\boxed{\int\limits_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint\limits_{D} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy} \quad (1)$$

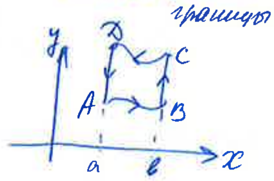
∂D^+ – полож. напр. обхода

Д-во: Достаточно док-ть, что
$$\boxed{\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int\limits_{\partial D^+} P dx} \quad (2)$$

она измерима по Жордану, т.к. границы кус.-гладкие

(1.) Пусть D – простая относительно Oy,

т.е. $D = \{ a < x < b ; \varphi(x) < y < \psi(x) \}$

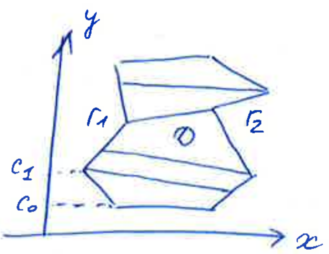


Имеем:
$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \overset{\text{т. Фубини №2}}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = \int_a^b \{ P(\psi(x)) - P(\varphi(x)) \} dx =$$

$$= \underbrace{-\int\limits_{\overrightarrow{CD}} P(x;y)\, dx - \int\limits_{\overrightarrow{AB}} P(x;y)\, dx - \underset{\shortparallel 0}{\int\limits_{\overrightarrow{BC}} P dx} - \underset{\shortparallel 0}{\int\limits_{\overrightarrow{DA}} P dx}}_{\text{Это всё крив. интегралы, а не инт. Римана!}} = -\int\limits_{\partial D^+} P dx \Rightarrow (2)$$

(2.) D – простая относительно Ox,

при доп. условии, что "боковые границы" (Γ_1 и Γ_2) – ЛОМАНЫЕ

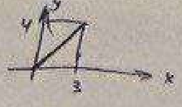


$\Gamma_1 := \{ c \le y \le d ; x = \varphi(y) \}$

$\Gamma_2 := \{ c \le y \le d ; x = \psi(y) \}$

Разобьём всё на трапеции:

$\exists$ разбиение $\{c_i ; i = 0 \ldots N\}$ отрезка такое, что $D_i := \{ c_{i-1} < y < c_i ; \varphi(y) < x < \psi(y) \}_{i=1\ldots N}$ – трапеция.

Параметризуем ОМ:  $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \end{cases}$ $t\in[0;1]$.

$$\Rightarrow \int\limits_{OM} y\,dx+(2+x)\,dy = \int_0^1 4t\cdot 3dt+(2+3t)\cdot 4dt = \int_0^1 24t\,dt+8dt = 24\frac{t^2}{2}+8\cdot t = 12+8=20$$

$$\Rightarrow \int\limits_C (\dots) = \oint\limits_C (\dots) - \int\limits_{OM} (\dots) - \underbrace{\int\limits_{NO} (\dots)}_{40} = \boxed{5\pi - 70}$$

Д/З: 4368
4371
4452.2 (см. д/з от сем. 15)
+ выписать:

Выписать: ① Крив. интеграл 1 рода и ф-ла Грина

работа по переносу точки вдоль контура ② Крив. интеграл 2 рода и как его свести к обычному (параметризация)
Это работа по перемещению точки вдоль контура, а если контур замкнутый – по циркуляция.

площадь ③ пов. интеграл 1 рода и как его свести к двойному (в случае параметризации и $z=f(x;y)$)

поток вект. поля через пов-ть ④ пов. интеграл 2 рода и как его свести к поверхностному инт. 1 рода и как свести к двойному.

⑤ Ф-ла Стокса и Гаусса – Остроградского.

① Крив. интеграл 1 рода: $\int\limits_L f\,ds = \int_a^b f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'_t)^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$. (длина кривой)

площадь пов-ти  $|S| = \int\limits_L (z_2(x;y)-z_1(x;y))\,ds$ $\rightsquigarrow$ полярная замена $\int_0^{2\pi} d\varphi \int r\,dr$

$$x_{ц.м} = \frac{\int\limits_L x\cdot\rho(x;y;z)\,ds}{\int\limits_L \rho(x;y;z)\,ds}$$

② Крив. интеграл 2 рода. (работа поля по перемещению точки) (исп. ф-лу Стокса)

$\int\limits_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds = \int\limits_L P\,dx+Q\,dy+dz$. Нужно параметризовать контур!

Сведение к интегралу Римана: $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_a^b (P\cdot x'+Q y'+R\cdot z')\,dt$

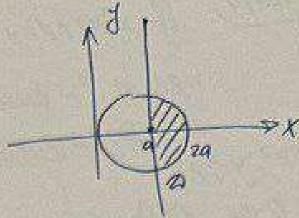
Ф-ла Грина: $\boxed{\int\limits_{\partial D} P\,dx+Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy}$

③ пов. интеграл 1 рода. (площадь пов-ти) $\boxed{\iint\limits_S f\,d\sigma}$ $[\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v]$

Сведение к интегралу Римана: $\boxed{\iint\limits_S f\,d\sigma = \iint\limits_D f(x;y;z)\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv}$

Если $z=z(x;y)$, то $\iint\limits_S f\,d\sigma = \iint\limits_D f(x;y;z(x;y))\cdot\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$.

② $\boxed{\oint_L \frac{\partial(x^2-5xy+3y^2)}{\partial n}\,ds}$ $\qquad L: x^2+y^2=2ax \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2=a^2.$
$x=a$
$x\geq a.$



Ф-ла: $\oint_L \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$

$\operatorname{grad} f = (\underbrace{2x-5y}_{P};\ \underbrace{6y-5x}_{Q})$

$\frac{\partial P}{\partial x}=2;\ \frac{\partial Q}{\partial y}=6.$

$\Rightarrow \oint_L \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D (2+6)dxdy = 8\cdot\underbrace{\iint_D dxdy}_{\text{площадь}} = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2 = \boxed{4\pi a^2}$ ⊕

③ $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(r)))$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

В каком случае $\operatorname{div}[\operatorname{grad}[f(r)]]=0$?

$\operatorname{grad} f(r) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y};\ \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right) = f'\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x};\frac{\partial r}{\partial y};\frac{\partial r}{\partial z}\right)$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\left(\frac{\partial r}{\partial x};\frac{\partial r}{\partial y};\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{|r|}\cdot(x;y;z) = \frac{\vec{r}}{|r|}.$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad} f(r) = f'\cdot\frac{\vec{r}}{|r|}} = \frac{f'}{|r|}\cdot(x;y;z)$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\cdot\frac{x}{|r|}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f'(r)\cdot\frac{y}{|r|}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f'(r)\cdot\frac{z}{|r|}\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f'(r)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f'(r)\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$

$= f''(r)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + f'(r)\cdot\left(\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{x^2+y^2+z^2}\right) + f''(r)\frac{\partial r}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$+ f'(r)\cdot\left(\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}}{x^2+y^2+z^2}\right) + f''(r)\frac{\partial r}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(\frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}}{x^2+y^2+z^2}\right) =$

$= f''(r)\cdot\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\right) + f'(r)\cdot\left(\frac{(x^2+y^2+z^2-x^2)+(x^2+y^2+z^2-y^2)+(x^2+y^2+z^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) =$

$= f''(r)\cdot 1 + f'(r)\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \boxed{f''(r)+\frac{2}{r}\cdot f'(r)}$ ⊛

$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(r)))=0 \Leftrightarrow f''(r)+\frac{2}{r}\cdot f'(r)=0.$ решить!

④ **пов. интеграл 2 рода** (поток вект. поля через пов-ть) (исп. ф-лу Остроградского)

Если $\cos\angle(\vec{n};Oz)\geq 0$ – то верхняя сторона

Если $\cos\angle(\vec{n};Oz)<0$ – то нижняя.

~~внут~~ внешняя – это когда нормаль сонаправлена с радиус-вектором.

$$\boxed{\iint\limits_S F\cdot\vec{n}\,d\sigma} = \iint\limits_S P\,dx\wedge dy + Q\,dy\wedge dz + R\,dz\wedge dx$$

(единичная)

Сведение к двойному: $\iint\limits_S P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \boxed{\iint\limits_S F\cdot[r'_x\times r'_y]\,dx\,dy.}$

не единичная

Если образующие $\parallel$ оси Oz, то $\iint\limits_S R\,dx\wedge dy = 0$.

Если $z=z(x;y)$, то $\iint\limits_D R\,dx\wedge dy = \pm\iint\limits_D R(x;y;z(x;y))\,dx\,dy$.

⑤ **Ф-ла Гаусса-Остроградского.**

$$\boxed{\iint\limits_{\partial\Omega} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.}$$

Ф-ла Стокса:

$$\boxed{\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \vec{n}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma}$$

единичная

пов. интеграл 1 рода.

$$\boxed{\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy}$$

пов. интеграл 2 рода.

Формула Гаусса — Остроградского

Свести вычисление интеграла по замкнутой поверхности к вычислению тройного интеграла по ограниченной ею области позволяет следующая

Теорема (формула Гаусса — Остроградского). *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, её граница ∂D состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, а функции P, Q, R и их частные производные первого порядка непрерывны в $\overline{D}$. Тогда*

$$\iint\limits_{\partial D} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \iiint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

где поверхностный интеграл берётся по внешней стороне поверхности.

Вспомнив определение поверхностного интеграла второго рода, мы можем записать левую часть формулы Гаусса — Остроградского в виде интеграла первого рода $\iint\limits_{\partial D}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, где $F=(P,Q,R)$.

Для плоского векторного поля $\vec{F}=(P,Q)$ рассмотрим интеграл $\int\limits_{L}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$, где L — плоский контур, $\vec{n}=(n_x,n_y)$ — поле единичных внешних нормалей к L. Поле единичных касательных векторов $\vec{\tau}=(\tau_x,\tau_y)$ к L, задающее такую ориентацию L, что ограниченная им область D_L остаётся слева, получается из $\vec{n}$ поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, поэтому $(n_x,n_y)=(\tau_y,-\tau_x)$. Учитывая это и формулу Грина (с. 166), получаем

$$\int\limits_{L}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\int\limits_{L}(Pn_x+Qn_y)\,ds=\int\limits_{L}P\tau_y-Q\tau_x\,ds=\int\limits_{L}(-Q,P)\cdot\vec{\tau}\,ds=$$
$$=\iint\limits_{D_L}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Равенство

$$\boxed{\int\limits_{L}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint\limits_{D_L}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy}$$

можно назвать *двумерным аналогом формулы Гаусса — Остроградского.*

Естественная область применения формулы Гаусса — Остроградского — вычисление интегралов 2-го рода по замкнутым поверхностям в пространстве.

Пример 16.46. Вычислим интеграл

$$\iint\limits_{S}x^2\,dy\wedge dz+y^2\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона границы куба $D=[0;a]\times[0;a]\times[0;a]$.

Решение. Применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\iint\limits_{S}x^2\,dy\wedge dz+y^2\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy=\iiint\limits_{D}(2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a(x+y+z)\,dz=3a^4.\ \square$$