Краткий конспект лекций по курсу

«Грубые траектории»

С. В. Шапошников

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Интеграл Римана–Стилтьеса

Основная задача

В разнообразных прикладных задачах требуется найти изменяющуюся со временем величину $Y(t)$, про которую известно, что

$$Y(t+h) - Y(t) = A(t)h + B(t)(X(t+h) - X(t)) + o(h), \quad h \to 0.$$

Например, изменение численности $N(t)$ популяции «зайцев» пропорционально количеству зайцев, то есть справедливо равенство $N(t+h)-N(t) = \lambda N(t)h+o(h)$. Другой пример доставляет работа $\mathcal{A}(t)$ векторного поля $F(x)$ вдоль кривой $X(t)$:

$$\mathcal{A}(t+h) - \mathcal{A}(t) = F(X(t))(X(t+h) - X(t)) + o(h), \quad h \to 0.$$

Пусть известно начальное значение $Y(0)$. Для вычисления $Y(T)$ разобьем отрезок $[0,T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и представим разность $Y(T) - Y(0)$ в виде суммы:

$$Y(T) - Y(0) = \sum_k \big(Y(t_k) - Y(t_{k-1})\big) = \sum_k A(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) +$$
$$+ \sum_k B(t_{k-1})\big(X(t_k) - X(t_{k-1})\big) + \sum_k o((t_k - t_{k-1})).$$

Устремляя длину отрезков разбиения к нулю, получаем

$$Y(T) - Y(0) = \int_0^T A(t)\,dt + \int_0^T B(t)dX(t),$$

где в правой части равенства сумма интеграла Римана и интеграла Римана–Стилтьеса, если таковые существуют. Теория грубых траекторий позволяет распространить описанный выше классический подход на случай, когда кривая $X(t)$ столь «груба», что интегральные суммы Римана–Стилтьеса не сходятся.

Интеграл Римана–Стилтьеса

Пусть $a < b$. Через $\mathbb{T}$ обозначим разбиение отрезка $[a,b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

на отрезки $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$. Через ξ обозначим набор отмеченных точек $\xi_k \in \Delta_k$. Положим $\lambda(\mathbb{T}) = \max_k |\Delta_k|$, где $|\Delta_k| = t_k - t_{k-1}$. Пусть функции f и g определены на $[a,b]$. Если $\Delta = [\alpha, \beta]$, то $\Delta g = g(\beta) - g(\alpha)$. Положим

$$\sigma(f dg, \mathbb{T}, \xi) = \sum_k f(\xi_k)\Delta_k g.$$

По определению интегралом Римана–Стилтьеса называется величина

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sigma(f dg, \mathbb{T}, \xi),$$

где предел понимается в смысле предела по базе, состоящей из множеств $B_\delta = \{(\mathbb{T}, \xi)\colon\ \lambda(\mathbb{T}) < \delta\}$, где $\delta > 0$.

Критерий Коши существования предела по базе позволяет сформулировать критерий существования интеграла Римана–Стильтьеса: интеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$ существует тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(\mathbb{T}, \xi)$ и $(\mathbb{T}', \xi')$ из неравенств $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ и $\lambda(\mathbb{T}') < \delta$ следует оценка

$$\big|\sigma(fdg, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(fdg, \mathbb{T}', \xi')\big| < \varepsilon.$$

Теорема 1.1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, а функция g имеет ограниченную вариацию, то есть*

$$\mathrm{Var}_{[a,b]} g = \sup_{\mathbb{T}} \sum_k |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty,$$

то существует интеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$.

Доказательство. Проверяем условие критерия интегрируемости. Пусть $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ и $\lambda(\mathbb{T}') < \delta$, где $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки Δ_k, а $\mathbb{T}'$ — разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки Δ'_k. Заметим, что

$$\Delta_i g = \sum_j (\Delta_i \cap \Delta'_j) g, \quad \Delta'_j g = \sum_i (\Delta_i \cap \Delta'_j) g,$$

где слагаемые, соответствующие пустым пересечениям, считаем равными нулю. Справедливы равенства

$$\big|\sigma(fdg, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(fdg, \mathbb{T}', \xi')\big| = \big|\sum_i f(\xi_i)\Delta_i g - \sum_j f(\xi'_j)\Delta'_j g\big| =$$

$$= \big|\sum_i \sum_j \big(f(\xi_i) - f(\xi'_j)\big)(\Delta_i \cap \Delta'_j) g\big|.$$

Если пересечение $\Delta_i \cap \Delta'_j \neq \emptyset$, то $|\xi_i - \xi'_j| \leq 2\delta$. Поскольку функция f непрерывна, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором из $|\xi_i - \xi'_j| \leq 2\delta$ следует неравенство $|f(\xi_i) - f(\xi'_j)| < \varepsilon$. Итак, верны неравенства

$$\big|\sigma(fdg, \mathbb{T}, \xi) - \sigma(fdg, \mathbb{T}', \xi')\big| \leq \varepsilon \sum_i \sum_j \big|\Delta_i \cap \Delta'_j) g\big| \leq \varepsilon \mathrm{Var}_{[a,b]} g.$$

По критерию интегрируемости интеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$ существует. □

Рассмотрим примеры, показывающие точность условий теоремы.

1) Пусть $a < c < b$ и

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases}$$

Тогда $\sigma(fdg, \mathbb{T}, \xi) = f(\xi_k)$, если $t_{k-1} < c \leq t_k$. Если функция f разрывна в точке c, то предела $\sigma(fdg, \mathbb{T}, \xi)$ при $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$ не существует. Если функция f непрерывна в точке c, то $\int_a^b f(t)dg(t) = f(c)$.

2) Пусть $a < b$ и $a < s_k < b$ — возрастающая последовательность, которая сходится к b. Положим

$$g(s_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad g(s_{2k-1}) = 0, \quad g(a) = 0, \quad g(b) = 0.$$

На отрезках $[a, s_1]$, $[s_k, s_{k+1}]$ определяем g линейно. Функция g непрерывна, но не существует интеграла $\int_a^b g(t)dg(t)$. Для сколь угодно малого масштаба $\lambda(\mathbb{T})$ можно считать, что точки s_k с достаточно большими номерами входят в отмеченное разбиение. Остается заметить, что

$$\sum_{k=2M}^{2N} g(s_k)(g(s_k) - g(s_{k-1})) = \sum_{k=M}^{N} \frac{1}{k},$$

так как $g(s_k)g(s_{k-1}) = 0$ и $g(s_{2k}) = k^{-1/2}$.

Проблема продолжения интеграла по непрерывности

Из приведенного выше примера видно, что только лишь непрерывности функций для существования интеграла Римана–Стилтьеса не хватает. Естественно возникает вопрос о возможности непрерывного продолжения интеграла на непрерывные функции. А именно, возможно ли, равномерно приближая непрерывные функции f и g непрерывно дифференцируемыми функциями f_n и g_n, определить интеграл $\int_a^b f(t)dg(t)$ с помощью предела интегралов $\int_a^b f_n(t)dg_n(t)$. Ответ на этот вопрос отрицательный, что показывает следующий простой пример. Положим

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\cos(n^3 t), \quad g_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^3 t).$$

Последовательности f_n и g_n равномерно сходятся к нулю, но

$$\int_0^\pi f_n(t)dg_n(t) = n\int_0^\pi \cos^2(n^3 t)\,dt = \frac{n\pi}{2} \to \infty.$$

Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. (T.Lyons, 1991) *Не существует такого сепарабельного банахова пространства $X \subset C[0,\pi]$, что траектории винеровского процесса принадлежат X почти наверное и билинейная форма*

$$(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(t)\,dg(t)$$

с гладких функций продолжается до непрерывной билинейной формы на X.

Теорема будет доказана в следующем параграфе после обсуждения винеровского процесса и меры Винера.

2. Винеровский процесс и мера Винера

Винеровский процесс

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Случайный процесс $w_t(\omega)$, отображающий $[0,T]\times\Omega$ в $\mathbb{R}$, называется *винеровским процессом*, если

1) почти наверно $w_0 = 0$, $t \to w_t$ — непрерывная функция,

2) вектор $(w_{t_1}, \ldots, w_{t_n})$ имеет гауссовское распределение для всех $t_1, \ldots, t_n \in [0,T]$,

3) $\mathbb{E}w_t = 0$ и $\mathbb{E}w_t w_s = \min\{t, s\}$.

Предположения 2) и 3) можно заменить на условия: $w_t - w_s \sim N(0, t-s)$ при $t > s$ и случайные величины

$$w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$$

независимы для всех $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Пусть $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[0,T]$ точками $0 = t_1 < \ldots < t_n = T$.

Теорема 2.1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \mathbb{E}\Bigl(\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - T\Bigr)^2 = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbb{E}\Bigl(\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - T\Bigr)^2 = \mathbb{E}\Bigl(\sum_k \Bigl((w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\Bigr)\Bigr)^2 =$$

$$= \sum_k \mathbb{E}\Bigl((w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\Bigr)^2.$$

Положим

$$C = \mathbb{E}(|\xi|^2 - 1)^2, \quad \xi \sim N(0,1).$$

Тогда

$$\mathbb{E}\Bigl(\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - T\Bigr)^2 = C\sum_k (t_k - t_{k-1})^2 \le CT\lambda(\mathbb{T}) \to 0.$$

$\square$

Во всякой последовательности разбиений $\mathbb{T}_n$, у которой $\lambda(\mathbb{T}_n) \to 0$, существует такая подпоследовательность $\mathbb{T}_{n_j}$, что величины

$$\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2$$

сходятся к T почти наверное.

Следствие 2.1. *Почти наверное функция $t \to w_t$ имеет бесконечную вариацию.*

Доказательство. Пусть последовательность разбиений $\mathbb{T}_n$ такова, что $\lambda(\mathbb{T}_n) \to 0$ и величины

$$\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2$$

сходятся к T почти наверное. Пусть функция $t \to w_t(\omega)$ непрерывна. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большой номер n, начиная с которого

$$|w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_k (w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega))^2 \le \varepsilon\, \mathrm{Var}_{[0,T]} w_t(\omega).$$

Если $\mathrm{Var}_{[0,T]}w_t(\omega) < \infty$, то $\sum_k (w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega))^2$ стремится к нулю, но почти наверное это выражение стремится к T. $\square$

Таким образом, нельзя проинтегрировать непрерывную функцию по траектории винеровского процесса в смысле Римана–Стилтьеса.

Показатель Гёльдера траектории винеровского процесса

Теорема 2.2. *Пусть w_t — винеровский процесс на $[0,T]$ и $0 < \gamma < 1/2$. Тогда для почти наверное всех ω выполнено*

$$|w_t(\omega) - w_s(\omega)| \le N(\omega)|t-s|^\gamma \quad \forall t, s \in [0,T].$$

В доказательстве используем следующее полезное неравенство

Лемма 2.1. *Пусть $p > 0$, $\alpha > 0$ и f — непрерывная функция на $[0,T]$. Тогда справедливо неравенство*

$$|f(t) - f(s)|^p \le N(p,\alpha)|t-s|^{p\alpha-1} \int_0^T \int_0^T \frac{|f(u)-f(v)|^p}{|u-v|^{p\alpha+1}}\,du\,dv.$$

Докажем теорему.

Доказательство. Найдем математическое ожидание

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_0^T \frac{|w_u - w_v|^p}{|u-v|^{p\alpha+1}}\,du\,dv.$$

Положим

$$M(p) = \mathbb{E}|\xi|^p, \quad \xi \sim N(0,1).$$

Тогда математическое ожидание можно переписать в виде

$$M(p)\int_0^T \int_0^T \frac{1}{|u-v|^{p(\alpha-1/2)+1}}\,du\,dv =: C(p,\alpha,T).$$

Если $\alpha < 1/2$, то $C(p,\alpha,T) < \infty$ По лемме

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\ne s}\frac{|w_t - w_s|}{|t-s|^{\alpha-1/p}}\Big)^p \le N(p,\alpha)C(p,\alpha,T)) < \infty.$$

Следовательно, почти наверное

$$N(\omega) = \sup_{t\ne s}\frac{|w_t - w_s|}{|t-s|^{\alpha-1/p}} < \infty.$$

Параметры $\alpha < 1/2$ и $p > 1$ можно выбрать так, что $\alpha - 1/p = \gamma$. $\square$

В доказательстве теоремы показано, что $\mathbb{E}N(\omega)^p < \infty$.

Неверно, что показатель Гёльдера для винеровского процесса можно взять равным $\frac{1}{2}$ или больше. Это следует из закона повторного логарифма.

Теорема 2.3. (Хинчин) *Для всякого $t \in [0,T)$ почти наверное верно равенство*

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{w_{t+h} - w_t}{\sqrt{2h\ln\ln(\frac{1}{h})}} = 1.$$

Кроме того, траектории винеровского процесса почти наверное нигде не дифференцируемы. Это трудно утверждение, но из закона повторного логарифма легко выводится утверждение, что почти наверное множество точек дифференцируемости винеровского процесса является множеством меры нуль по Лебегу. Пусть $E = \{(t,\omega)\colon\ w_s(\omega)\,\text{не имеет производной в точке}\,t\}$ и I_E — индикатор E. Из закона повторного логарифма следует, что при фиксированном t величина $I_E(t,\,\cdot\,)$ почти наверное равна нулю. По теореме Фубини получаем

$$\mathbb{E}\int_0^T I_E(t,\omega)\,dt = \int_0^T \mathbb{E}I_E(t,\omega)\,dt = 0.$$

Следовательно, почти наверное $\int_0^T I_E(t,\omega)\,dt = 0$, а это означает, что почти наверное множество точек дифференцируемости w_t является множеством меры нуль.

Мера Винера и пространство Камерона–Мартина

Винеровский процесс задает вероятностную меру P_W на $C[0,T]$ и даже на

$$C_0([0,T]) = \{x\in C[0,T]\colon\ x(0)=0\}$$

следующим образом

$$P_W(\{x\colon x_{t_1}\in B_1,\dots,x_{t_n}\in B_n\}) = P(\{\omega\colon w_{t_1}(\omega)\in B_1,\dots,w_{t_n}(\omega)\in B_n\}).$$

Мера P_W называется мерой Винера.

Вычислим преобразование Фурье меры Винера:

$$\int e^{il(x)}P_W(dx),\quad l\in (C_0[0,T])^*.$$

По теореме Рисса $l(x) = \displaystyle\int_0^T x(t)\mu(dt)$, где μ — конечная борелевская мера. Пусть $\mu = \sum_k c_k\delta_{t_k}$. Тогда

$$\int e^{il(x)}P_W(dx) = \int e^{i\sum_k c_k x(t_k)}P_W(dx) = \mathbb{E}e^{i\sum c_k w_{t_k}} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k,m}c_kc_m\min\{t_k,t_m\}}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k,m}c_kc_m\min\{t_k,t_m\} = \int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds).$$

Приближая произвольную меру μ последовательностью мер вида $\sum_k c_k\delta_{t_k}$, получаем

$$\int e^{il(x)}P_W(dx) = \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds)\Bigr),\quad l(x) = \int_0^T x(t)\mu(dt).$$

Таким образом, мера $P_W\circ l^{-1}$ является гауссовской мерой с нулевым средним. Мера, у которой образ при отображении произвольным линейным непрерывным функционалом, является гауссовской мерой на прямой, называется гауссовской мерой. Напомним, что преобразование Фурье невырожденной гауссовской меры на $\mathbb{R}^d$ в подходящей системе координат имеет вид $\exp(-|y|^2/2)$. Попробуем записать в таком виде преобразование Фурье меры Винера. Для упрощения рассмотрим случай, когда $\mu = \varrho\,dx$. Заметим, что

$$\int_0^T\int_0^T \min\{t,s\}\varrho(t)\varrho(s)\,ds\,dt = \int_0^T\int_0^t s\varrho(s)\,ds\varrho(t)\,dt + \int_0^T\int_t^T \varrho(s)\,ds\varrho(t)t\,dt.$$

Используя равенство

$$\frac{d}{dt}\Bigl(-\int_t^T \varrho(s)\,ds\Bigr) = \varrho(t)$$

и интегрируя по частям, приходим к выражению

$$\int_0^T \Big(\int_0^t \int_s^T \varrho(\tau)\,d\tau\Big)\varrho(t)\,dt.$$

Вновь интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^T \int_0^T \min\{t,s\}\varrho(t)\varrho(s)\,ds\,dt = \int_0^T \Big|\int_t^T \varrho(s)\,ds\Big|^2\,dt.$$

Итак, в рассматриваемой ситуации преобразование Фурье меры Винера можно записать в виде

$$\exp\big(-\tfrac{1}{2}\|h'\|^2_{L^2[0,T]}\big),$$

где

$$h(t) = \int_0^t \int_s^T \varrho(\tau)\,d\tau\,ds,$$

то есть

$$h'' = -\varrho, \quad h(0) = 0, \quad h'(T) = 0.$$

Пусть теперь x — дифференцируема функция и $x(0) = 0$. Справедливы равенства

$$l(x) = \int_0^T x(t)\varrho(t)\,dt = -\int_0^T x(t)h''(t)\,dt = \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt = \langle x', h'\rangle_{L^2[0,T]}.$$

Неформально (понимая, что траектории винеровского процесса нигде не имеют производной) преобразование Фурье меры Винера можно записать в виде

$$<< \int e^{i\langle x',h'\rangle} P_W(dx) = e^{-\frac{1}{2}\|h'\|^2} >>$$

Эти вычисления являются мотивировкой для рассмотрения следующего гильбертова пространства $H = W_0^{1,2}[0,T]$, состоящего из таких абсолютно непрерывных функций h, что $h(0) = 0$ и $h' \in L^2[0,T]$. Скалярное произведение на H задается равенством

$$\langle h, g\rangle = \int_0^T h'(t)g'(t)\,dt.$$

Поскольку $\max_{[0,T]}|h| \le \sqrt{T}\|h\|_H$, то пространство H непрерывно вложено в $C_0[0,T]$. Кроме того, несложно убедиться, что H всюду плотно в $C_0[0,T]$. Если $l \in C_0[0,T]^*$, то ограничение l на H является линейным непрерывным функционалом на H и с помощью теоремы Рисса отождествляется с некоторым вектором $h \in H$:

$$l(x) = \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt.$$

Кроме того, l задается мерой μ и справедливо равенство

$$\int_0^T \int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds) = \|h\|_H^2.$$

Действительно, при каждом s функция $t \to \min\{t,s\}$ лежит в H и

$$\int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt) = \int_0^s h'(t)\,dt = h(s).$$

Следовательно,

$$\int_0^T \int_0^T \min\{t,s\}\mu(dt)\mu(ds) = \int_0^T h(s)\mu(ds) = \int_0^T |h'(s)|^2\,ds.$$

Будем говорить, что задано абстрактное пространство Винера (B, H, γ), если заданы банахово пространство B, непрерывно и плотно вложенное в B гильбертово пространство H и вероятностная мера γ на B, причем для всякого $l \in B^*$ верно равенство

$$\int e^{il(x)}\gamma(dx) = e^{-\frac{\|l\|_H^2}{2}}.$$

Гильбертово пространство H называют пространством Камерона–Мартина.

Можно рассмотреть более общую ситуацию, когда на банаховом пространстве X задана центрированная гауссовская мера γ. Тогда пространство Камерона–Мартина определяется следующим образом: $H \subset X$ состоит из таких векторов h, для которых

$$\|h\|_H := \sup\Big\{l(h)\colon \int_X |l(x)|^2\,\gamma(dx) \le 1,\ l \in X^*\Big\} < \infty.$$

Пространство H является (как и выше) гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в X. В общем случае нельзя считать, что H плотно вложено в X.

В случае абстрактного пространства Винера из вида преобразования Фурье немедленно выводится равенство

$$\int |l(x)|^2\gamma(dx) = \|l\|_H^2.$$

Пусть $\sup\{l(x)\colon \|l\|_H \le 1\} < \infty$. Всякий линейный непрерывный функционал на H продолжается до линейного непрерывного функционала на B (причем единственным образом). Отображение $l \to l(x)$ является непрерывным линейным функционалом на пространстве H^*. Тогда существует такой вектор $h \in H$, что $l(x) = \langle h, v\rangle$, где вектор v соответствует функционалу l. Следовательно, $l(h) = l(x)$ для всякого непрерывного линейного функционала l. Имеем $x = h$ и $\sup\{l(x)\colon \|l\|_H \le 1\} = \|h\|_H$.

Теорема 2.4. *Пусть γ — гауссовская мера на банаховом пространстве X и H — её пространство Камерона–Мартина.*

(i) *Для всякого $h \in H$ мера $\gamma(\,\cdot - h)$ абсолютно непрерывна относительно γ.*

(ii) *Пространство H является пересечением всех линейных пространств L, у которых $\gamma(L) = 1$.*

(iii) *Если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H и $\xi_n \sim N(0,1)$ — последовательность независимых случайных величин на некотором вероятностном пространстве, то ряд $\sum_n \xi_n e_n$ сходится в X почти наверное, причем сумма ряда имеет распределение γ.*

Невозможность продолжения интеграла Римана–Стилтьеса

Теорема 2.5. (T.Lyons, 1991) *Не существует такого сепарабельного банахова пространства $X \subset C[0,\pi]$, что траектории винеровского процесса принадлежат X почти наверное и билинейная форма*

$$(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(t)\,dg(t)$$

с гладких функций продолжается до непрерывной билинейной формы на X.

Лемма 2.2. *Наборы функций*

$$\Big\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(nt)}{n}\Big\}, \quad \Big\{\frac{t}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(nt)}{n}\Big\}$$

являются ортонормированными базисами в $W_0^{1,2}[0,\pi]$ (пространство Камерона–Мартина меры Винера).

Докажем теорему.

Доказательство. Предположим, что такое пространство X существует. Тогда верно включение $W_0^{1,2}[0,\pi] \subset X$. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, причем $\xi_k \sim N(0,1)$. Положим

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi_n \frac{\sin(nt)}{n}, \quad g_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi_n \frac{1-\cos(nt)}{n}.$$

Почти наверное f_N и g_N сходятся в пространстве X. Кроме того, верно равенство

$$\int_0^\pi f_N(t) g_N'(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n^2}{n}.$$

Остается заметить, что почти наверное

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^2}{n} = +\infty.$$

Имеем

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^N \frac{\xi_n^2}{n}} = \Pi_{n=1}^N \mathbb{E} e^{-\frac{\xi_n^2}{n}} \le \Pi_{n=1}^N \left(\mathbb{E} e^{-\xi_n^2} \right)^{1/n} = q^{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}},$$

где $q = \mathbb{E} e^{-\xi^2} < 1$, $\xi \sim N(0,1)$. Получаем равенство

$$\mathbb{E} e^{-\sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_n^2}{n}} = 0,$$

из которого следует, что почти наверное $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_n^2}{n} = +\infty$.

$\square$

3. Интеграл Ито и его приближения интегралом Римана–Стилтьеса

Интеграл Ито от ступенчатого процесса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, w_t — одномерный винеровский процесс, $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, s \le t)$ — порождаемая процессом w_t естественная фильтрация.

Через $\mathbb{L}^2[0,T]$ обозначим пространство процессов $\xi_t(\omega)$ из $[0,T]\times\Omega$ в $\mathbb{R}$, которые измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}[0,T]\otimes\mathcal{F}$, для каждого $t\in[0,T]$ величина ξ_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$ (это свойство называется согласованностью процесса ξ_t с фильтрацией $\mathcal{F}_t$) и

$$\|\xi\|_2^2 = \mathbb{E}\int_0^T |\xi_s|^2\,ds < \infty.$$

Далее полезно иметь ввиду, что у всякого $\xi\in\mathbb{L}^2[0,T]$ есть прогрессивно измеримая модификация, то есть такой процесс $\widetilde{\xi}\in\mathbb{L}^2[0,T]$, что для всякого $t\in[0,T]$ величина $(s,\omega)\to\xi_s(\omega)$ измерима относительно $\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F}_t$ и $\xi_t=\widetilde{\xi}_t$ с вероятностью единица.

Отметим, что если $t\to\xi_t$ непрерывны слева и процесс ξ_t согласован с $\mathcal{F}_t$, то процесс ξ_t прогрессивно измерим.

Утверждение о существовании прогрессивно измеримой модификации достаточно трудно доказывается. Поэтому часто рассматривают только прогрессивно измеримые процессы или меньшую сигма-алгебру, порожденную всеми непрерывными слева согласованными процессами (процессы, измеримые относительно такой сигма-алгебры называют предсказуемыми).

Предложение 3.1. *Всякий процесс $\xi\in\mathbb{L}^2[0,T]$ по норме $\|\ \|_2$ приближается процессами вида*

$$\zeta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1}\eta_k(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$ — разбиение отрезка $[0,T]$, а η_k измеримы относительно $\mathcal{F}_{t_k}$. Процессы такого вида называем ступенчатыми или простыми.

Это трудное утверждение становится простым для почти наверное непрерывных по t процессов ξ_t, для которых $|\xi_t(\omega)|\le\Phi(\omega)$ и $\mathbb{E}\Phi^2<\infty$. При $\lambda(\mathbb{T})\to 0$ процессы

$$\zeta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1}\xi_{t_k}(\omega)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

сходятся к ξ_t. Действительно, для всякого ω

$$\int_0^T |\xi_t(\omega)-\zeta_t(\omega)|^2\,dt = \sum_k\int_{t_k}^{t_{k+1}}|\xi_t(\omega)-\xi_{t_k}(\omega)|^2\,dt\to 0$$

при $\lambda(\mathbb{T})\to 0$ из-за непрерывности $t\to\xi_t(\omega)$. Кроме того,

$$\int_0^T |\xi_t(\omega)-\zeta_t(\omega)|^2\,dt \le 4T\Phi(\omega)^2$$

и по теореме Лебега

$$\mathbb{E}\int_0^T |\xi_t(\omega)-\zeta_t(\omega)|^2\,dt\to 0$$

при $\lambda(\mathbb{T})\to 0$.

Таким образом, трудность обоснования предложения состоит в приближении произвольного процесса ξ_t из $\mathbb{L}^2[0,T]$ непрерывными.

Для ступенчатого процесса

$$\zeta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k(\omega) I_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$$

по определению

$$\int_0^t \zeta_s \, dw_s = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k(\omega) \big(w_{t_{k+1} \wedge t} - w_{t_k \wedge t} \big).$$

Напомним, что процесс M_t называется мартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, если $\mathbb{E}|M_t| < \infty$, процесс M_t согласован с $\mathcal{F}_t$ и для всякого $t \in [0, T]$ верно равенство

$$\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s, \quad t > s.$$

Таким образом, $M_t = \mathbb{E}(M_T|\mathcal{F}_t)$ и мартингал по сути является семейством проекций случайной величины M_T.

Предложение 3.2. *Отображение*

$$(t, \omega) \to \int_0^t \zeta_s \, dw_s$$

является непрерывным мартингалом относительно $\mathcal{F}_t$ *и*

$$\mathbb{E} \int_0^t \zeta_s \, dw_s = 0, \quad \mathbb{E} \Big| \int_0^t \zeta_s \, dw_s \Big|^2 = \mathbb{E} \int_0^t |\zeta_s|^2 \, ds.$$

Доказательство. Пусть $s < t$ и $t_m \le s < t_{m+1}$, $t_j \le t \le t_{j+1}$. Можно считать, что $t_{j+1} = t$. Имеем

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} \eta_k(\omega) \big(w_{t_{k+1} \wedge t} - w_{t_k \wedge t} \big) |\mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} \eta_k(\omega) \big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k} \big) |\mathcal{F}_s\Big) +$$

$$+ \mathbb{E}\big(\eta_m(\omega)\big(w_s - w_{t_m}\big)|\mathcal{F}_s\big) + + \mathbb{E}\big(\eta_m(\omega)\big(w_{t_{m+1}} - w_s\big)|\mathcal{F}_s\big) + \sum_{k=m+1}^{j} \mathbb{E}\big(\eta_k(\omega)\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)|\mathcal{F}_s\big).$$

Так как величина w_τ измерима относительно $\mathcal{F}_s$ при $\tau \le s$, то

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{m-1} \eta_k(\omega)\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)|\mathcal{F}_s\Big) + + \mathbb{E}\big(\eta_m(\omega)\big(w_s - w_{t_m}\big)|\mathcal{F}_s\big) = \int_0^s \zeta_\tau \, dw_\tau.$$

Так как $w_{\tau_2} - w_{\tau_1}$ не зависит от $\mathcal{F}_s$ при $s \le \tau_1 < \tau_2$ и $\mathbb{E}\big(w_{\tau_2} - w_{\tau_1}\big) = 0$, то

$$\mathbb{E}\big(\eta_m(\omega)\big(w_{t_{m+1}} - w_s\big)|\mathcal{F}_s\big) + \sum_{k=m+1}^{j} \mathbb{E}\big(\eta_k(\omega)\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)|\mathcal{F}_s\big) = 0.$$

Итак, при $t > s$

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \zeta_\tau \, dw_\tau |\mathcal{F}_s\Big) = \int_0^s \zeta_\tau \, dw_\tau.$$

Проверим теперь равенство

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t \zeta_s \, dw_s\Big|^2 = \mathbb{E}\int_0^t |\zeta_s|^2 \, ds$$

Имеем

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t \zeta_s \, dw_s\Big|^2 = \sum_{k,i} \mathbb{E}\eta_k\eta_i (w_{t_{k+1}\wedge t} - w_{t_k \wedge t})(w_{t_{i+1}\wedge t} - w_{t_i \wedge t}) =$$

$$\sum_k \mathbb{E}\eta_k^2(w_{t_{k+1}\wedge t} - w_{t_k\wedge t})^2 = \sum_{k\le j-1} \mathbb{E}\eta_k^2(t_{k+1}-t_k) + \mathbb{E}\eta_j^2(t-t_j) = \mathbb{E}\int_0^t \zeta_\tau^2\,d\tau.$$

Аналогично проверяется равенство нулю математического ожидания. □

Интеграл Ито в общем случае

Используя неравенство Дуба для квадратично интегрируемых непрерывных мартингалов

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t|^2 \le C\mathbb{E}|M_T|^2,$$

можно показать, что пространство $\mathcal{M}_c^2$ непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов M_t на $[0,T]$ (фильтрация $\mathcal{F}_t$) с нормой $\|M\| = \sqrt{\mathbb{E}|M_T|^2}$ является полным пространством.

Остановимся отдельно лишь на одном моменте обоснования полноты. Пусть процессы M_t^n — фундаментальная последовательность. Тогда найдется подпоследовательность номеров n_k, для которой $\|M^{n_{k+1}} - M^{n_k}\| \le 2^{-k}$. В силу неравенства Дуба имеет место оценка

$$\mathbb{E}\sum_k \sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}| \le \sum_k \mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}| \le$$

$$\le \sum_k \Bigl(\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}|^2\Bigr)^{1/2} \le \sum_k C^{1/2}2^{-k/2} < \infty.$$

Следовательно, почти наверное ряд

$$\sum_k \sup_{[0,T]}|M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}|$$

сходится и последовательность $M_t^{n_k}$ сходится равномерно.

Пусть $\xi_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$. Интеграл Ито от ξ_t определяется равенством

$$\int_0^t \xi_s\,dw_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \zeta_s^n\,dw_s,$$

где ζ_t^n — последовательность простых процессов, которые приближают ξ_t, то есть

$$\mathbb{E}\int_0^T |\xi_t - \zeta_t^n|^2\,dt \to 0, \quad n\to\infty.$$

Пусть $\xi_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$, почти наверное отображение $t\to\xi_t$ непрерывно, $|\xi_t(\omega)| \le \Phi(\omega)$ и $\mathbb{E}\Phi^2 < \infty$. Тогда в качестве приближающего простого процесса можно взять

$$\zeta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_{t_k}(\omega) I_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

где $\{t_k\}$ — разбиение $\mathbb{T}$ отрезка $[0,T]$. Тогда существует такая последовательность разбиений $\mathbb{T}_n$, что $\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0$ и почти наверное равномерно на $[0,T]$

$$\int_0^t \xi_s\,dw_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\xi_{t_k}\bigl(w_{t_{k+1}\wedge t} - w_{t_k\wedge t}\bigr).$$

В более специальном случае это утверждение можно уточнить.

Предложение 3.3. *Пусть ξ_t — согласованный с $\mathcal{F}_t$ процесс, причем*
$$|\xi_t(\omega) - \xi_s(\omega)| \le N(\omega)|t-s|^\gamma, \quad \mathbb{E}N^2 < \infty.$$
Пусть $t_k = Tk/2^n$. Тогда почти наверное равномерно по $t \in [0,T]$
$$\int_0^t \xi_s\, dw_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{t_k}\big(w_{t_{k+1}\wedge t} - w_{t_k\wedge t}\big).$$

Доказательство. Положим
$$\zeta_t^n(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_{t_k}(\omega) I_{(t_k,t_{k+1}]}(t).$$
Заметим, что
$$\mathbb{E}\int_0^T |\xi_t - \zeta_t^n|^2\, dt = \sum_k \mathbb{E}\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\xi_t - \xi_{t_k}|^2\, dt \le C\mathbb{E}N^2 2^{-2\gamma n}.$$
Следовательно, $\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|\xi_t - \zeta_t^n|^2 \le C' 2^{-2\gamma n}$ и ряд $\sum_n \sup_{[0,T]}|\xi_t - \zeta_t^n|^2$ сходится почти наверное, в частности почти наверное ζ_t^n сходится равномерно к ξ_t. □

Формула Ито

Поучим аналог формулы Ньютона–Лейбница для стохастического интеграла.

Предложение 3.4. *Пусть $f \in C^3(\mathbb{R})$, причем производные второго и третьего порядка ограничены. Почти наверное справедливо равенство*
$$f(w_T) - f(w_0) = \int_0^T f'(w_t)\, dw_t + \frac{1}{2}\int_0^t f''(w_t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $t_k = kT/2^n$. Применяя разложение Тейлора, получаем
$$f(w_T) - f(w_0) = \sum_k \big(f(w_{t_{k+1}}) - f(w_{t_k})\big) = A_n + B_n + C_n,$$
где
$$A_n = \sum_k f'(t_k)\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big),$$
$$B_n = \frac{1}{2}\sum_k f''(t_k)\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2,$$
$$C_n = \frac{1}{6}\sum_k f'''(t_k)\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^3.$$
Последовательность A_n почти наверное сходится к стохастическому интегралу от $f'(w_t)$. Запишем последовательность B_n немного в другом виде:
$$B_n = \frac{1}{2}\sum_k f''(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2}\sum_k f''(t_k)\Big(\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2 - (t_{k+1} - t_k)\Big).$$
Первое слагаемое стремится к
$$\frac{1}{2}\int_0^T f''(w_t)\, dt.$$
Второе слагаемое стремится к нулю. Действительно, верна цоенка
$$\mathbb{E}\Big(\sum_k f''(t_k)\Big(\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2 - (t_{k+1} - t_k)\Big)\Big)^2 =$$

$$= \sum_k \mathbb{E}|f''(t_k)|^2\Big(\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2 - (t_{k+1} - t_k)\Big)^2 \le C2^{-n},$$

из которой следует, что с вероятностью единица выражение

$$\sum_k f''(t_k)\Big(\big(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}\big)^2 - (t_{k+1} - t_k)\Big)$$

стремится к нулю. Так как последовательности A_n и B_n сходятся, то последовательность C_n сходится. Проверим, что ее предел почти наверное равен нулю, а это немедленно следует из оценки $\mathbb{E}|C_n| \le C2^{-n/2}$. □

Доказанное равенство является частным случаем формулу Ито.

Для формулировки формулы Ито нам потребуется многомерный винеровский процесс. В многомерном случае винеровский процесс w_t задается вектором $(w_t^1, \dots, w_t^d)$ из d независимых винеровских процессов.

Естественная фильтрация: $\mathcal{F}_t = \sigma\big(w_s^1, \dots, w_s^d,\ s \le t\big)$.

Интеграл Ито

$$\int_0^t \xi_s\, dw_s = \sum_i \int_0^t \xi_s^i\, dw_s^i,$$

где одномерные интегралы определяются как и выше.

Предположим, что

$$x_t^i = x_0^i + \int_0^t B_s^i\, ds + \int_0^t \Sigma_s^{ij}\, dw_s^j.$$

Тогда для всякой функции $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ с ограниченными вторыми производными справедливо равенство (формула Ито)

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t Lf\, ds + \sum_{i,j} \int_0^t f_{x_i}(x_s)\Sigma_s^{ij}\, dw_s^j,$$

где

$$Lf = \langle B_s, \nabla f(x_s)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\Sigma_s\Sigma_s^T D^2 f(x_s)\big).$$

Приближение интеграла Ито интегралом Римана–Стилтьеса

Пусть f — гладкая функция с ограниченными производными.

Предположим, что $B_n(t)$ — кусочно гладкие процессы, которые при каждом t почти наверное сходятся к w_t при $n \to \infty$. Тогда

$$\int_0^T f(B_n(t))dB_n(t) = F(B_n(t)) - F(B_n(0)), \quad F'(x) = f(x).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(B_n(t))dB_n(t) = F(w_T) - F(w_0).$$

По формуле Ито

$$F(w_T) - F(w_0) = \int_0^T F'(w_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^T F''(w_s)\, ds.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T f(B_n(t))dB_n(t) = \int_0^T f(w_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^T f'(w_s)\, ds.$$

В многомерном случае ситуация существенно сложнее.

Пусть $(w_t^1, \dots, w_t^d)$ — независимые винеровские процессы и u — гладкая функция с ограниченными производными.

Предположим, что процессы $B_n^i(t,\omega)$ почти наверное сходятся к w_t^i для каждого t и почти наверное функции $t \to B_n^i(t,\omega)$ непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы. Обсудим существование и значение предела

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T u(B_n(t)^1, \dots, B_n(t)^d)\, dB_n(t)^j.$$

Рассмотрим более простой частный случай

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\Bigl(\int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j + B_n(t)^j\, dB_n(t)^i\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T d(B_n^i(t)B_n^j(t)) = \frac{1}{2}\bigl(B_n^i(T)B_n^j(T) - B_n^i(0)B_n^j(0)\bigr) \to \frac{1}{2}w_T^i w_T^j.$$

По формуле Ито

$$\frac{1}{2}w_T^i w_T^j = \frac{1}{2}\int_0^T w_t^i\, dw_t^j + w_t^j\, dw_t^i + \frac{1}{2}\delta^{ij}T.$$

Следовательно, для вычисления предела

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j$$

достаточно найти предел выражения

$$\frac{1}{2}\Bigl(\int_0^T B_n(t)^i\, dB_n(t)^j - B_n(t)^j\, dB_n(t)^i\Bigr).$$

Оказывается, что этот предел зависит от приближения.

Рассмотрим **приближение Макшейна.**

Пусть $d = 2$, $t_k = kT/2^n$, функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1[0,1]$ не убывают и $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(1) = 1$. Положим $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $|\Delta_k| = t_{k+1} - t_k$, $\Delta_k w^i = w^i_{t_{k+1}} - w^i_{t_k}$ и на Δ_k при $\Delta_k w^1 \Delta_k w^2 \geq 0$

$$B_n^1(t) = w^1_{t_k} + \varphi_1\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^1, \quad B_n^2(t) = w^2_{t_k} + \varphi_2\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^2,$$

а при $\Delta_k w^1 \Delta_k w^2 < 0$

$$B_n^1(t) = w^1_{t_k} + \varphi_2\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^1, \quad B_n^2(t) = w^2_{t_k} + \varphi_1\bigl(\tfrac{t-t_k}{\Delta_k}\bigr)\Delta_k w^2.$$

Так как на Δ_k

$$|B_n^i(t) - w_t^i| \leq |\Delta_k w^i| + |w_t^i - w^i_{t_k}| \leq 2N(\omega)|t_{k+1} - t_k|^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1/2,$$

то $B_n^i(t)$ почти наверное равномерно сходится к w_t^i на $[0,T]$. Найдем

$$\frac{1}{2}\int_0^T B_n^1(t)\, dB_n^2(t) - B_n^2(t)\, dB_n^1(t).$$

Имеем

$$\int_0^T B_n^1(t)\, dB_n^2(t) = \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\, dB_n^2(t).$$

При $\Delta_k w^1 \Delta_k w^2 \geq 0$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\, dB_n^2(t) = w^1_{t_k}\Delta_k w^2 + \int_0^1 \varphi_1 \dot{\varphi}_2\, dt \Delta_k w^1 \Delta_k w^2,$$

а при $\Delta_k w^1 \Delta_k w^2 < 0$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\,dB_n^2(t) = w_{t_k}^1 \Delta_k w^2 + \int_0^1 \varphi_2 \dot{\varphi}_1\,dt \Delta_k w^1 \Delta_k w^2.$$

Аналогичным образом вычисляется

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^2(t)\,dB_n^1(t).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_n^1(t)\,dB_n^2(t) - B_n^2(t)\,dB_n^1(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(w_{t_k}^1 \Delta_k w^2 - w_{t_k}^2 \Delta_k w^1\big) + \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1\,dt\Big)|\Delta_k w^1 \Delta_k w^2|.$$

Положим

$$\Phi = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \varphi_1\dot{\varphi}_2 - \varphi_2\dot{\varphi}_1\,dt\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - 2\int_0^1 \varphi_2\dot{\varphi}_1\,dt\Big).$$

Получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^T B_n^1(t)\,dB_n^2(t) - B_n^2(t)\,dB_n^1(t) = \frac{1}{2}\sum_k \big(w_{t_k}^1 \Delta_k w^2 - w_{t_k}^2 \Delta_k w^1\big) + \Phi\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2|.$$

По определению стохастического интеграла почти наверное

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_k \big(w_{t_k}^1 \Delta_k w^2 - w_{t_k}^2 \Delta_k w^1\big) = \frac{1}{2}\int_0^T w_t^1\,dw_t^2 - w_t^2\,dw_t^1.$$

Заметим, что для $\xi \sim N(0,\sigma^2)$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}|\xi| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

Докажем, что почти наверное

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| = \frac{2}{\pi}T.$$

Имеем

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}T\Big)^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_k \big(|\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}|\Delta_k|\big)\Big)^2 =$$

$$\sum_{k,m}\mathbb{E}\big(|\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}|\Delta_k|\big)\big(|\Delta_m w^1 \Delta_m w^2| - \frac{2}{\pi}|\Delta_m|\big).$$

Поскольку вектор $(\Delta_k w^1, \Delta_k w^2)$ и вектор $(\Delta_m w^1, \Delta_m w^2)$ независимы и

$$\mathbb{E}|\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| = \frac{2}{\pi}|\Delta_k|,$$

то

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}T\Big)^2 = \sum_k \mathbb{E}\big(|\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}|\Delta_k|\big)^2.$$

Пусть

$$C = \mathbb{E}\Big(|\xi||\eta| - \frac{2}{\pi}\Big)^2,$$

где $\xi, \eta \sim N(0,1)$ — независимые величины. Получаем оценку

$$\mathbb{E}\Big(\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2| - \frac{2}{\pi}T\Big)^2 = C\sum_k |\Delta_k|^2 = \frac{CT^2}{2^n},$$

из которой следует сходимость почти наверное выражения $\sum_k |\Delta_k w^1 \Delta_k w^2|$ к $\frac{2}{\pi}T$.

Таким образом, выражение

$$\frac{1}{2}\Big(\int_0^T B_n(t)^1\,dB_n(t)^2 - B_n(t)^2\,dB_n(t)^1\Big)$$

почти наверное сходится к

$$\frac{1}{2}\int_0^T w_t^1\,dw_t^2 - w_t^2\,dw_t^1 + \frac{T}{\pi}\Big(1 - 2\int_0^1 \varphi_2\dot{\varphi}_1\,dt\Big).$$

Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то второе слагаемое равно нулю. Если $\varphi_1(t) = t$ и $\varphi_2(t) = t^2$, то второе слагаемое равно $\frac{T}{3\pi}$. Итак, предел зависит от выбора функций φ_1 и φ_2, то есть зависит от способа приближения винеровского процесса. Мы рассмотрели частный случай, но замечательным образом в общем случае достаточно контролировать только предел выражения

$$\frac{1}{2}\Big(\int_0^T B_n(t)^1\,dB_n(t)^2 - B_n(t)^2\,dB_n(t)^1\Big).$$

Приведем формулировку общего результата, доказательство которого можно найти в книге Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.

Пусть $P = P_W$ — мера Винера на $\Omega = C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \le t)$ и $w_t^i(\omega) = \omega^i(t)$.

Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим процесс $B_\delta(t,\omega) = (B_\delta^1(t,\omega),\ldots,B_\delta^d(t,\omega))$ на вероятностном пространстве $(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d), P_W)$, для которого выполнены условия

1) функция $t \to B_\delta^i(t,\omega)$ кусочно непрерывно дифференцируема,
2) величина $B_\delta(0,\omega)$ измерима относительно $\mathcal{F}_\delta$,
3) верно равенство $B_\delta(t+k\delta,\omega) = B_\delta(t,\omega(\cdot - k\delta) - \omega(k\delta)) + \omega(k\delta)$,
4) $\mathbb{E}B_\delta^i(0,\omega) = 0$,
5) $\mathbb{E}\Big|B_\delta^i(0,\omega)\Big|^6 \le C\delta^3$,
6) $\mathbb{E}\Big(\int_0^\delta \Big|\dot{B}_\delta^i(t,\omega)\Big|\,dt\Big)^6 \le C\delta^3$,
7) существует предел

$$\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\Big(\frac{1}{2}\int_0^\delta B_\delta^i\dot{B}_\delta^j - B_\delta^j\dot{B}_\delta^i\Big)\,dt\Big),$$

который будем обозначать через s_{ij}.

Теорема 3.1. *Для всякой гладкой функции u с ограниченными производными выражение*

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}\Bigg(\int_0^t u(B_\delta)\,dB_\delta^j - \Big(\int_0^t u(w_s)\,dw_s^j + \frac{1}{2}\int_0^t u_{x_j}(w_s)\,ds\Big) - \int_0^t \sum_i s_{ij}u_{x_i}(w_s)\,ds\Bigg)^2$$

стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Проясним геометрический смысл выражения

$$\frac{1}{2}\int_0^\delta B_\delta^i\dot{B}_\delta^j - B_\delta^j\dot{B}_\delta^i\Big)\,dt$$

Площадь Леви

Обсудим на примере гладкой плоской кривой $(x(t), y(t))$, где $t \in [0, T]$ и $x(0) = y(0) = 0$, геометрический смысл выражения

$$\frac{1}{2}\int_0^t x\,dy - y\,dx.$$

Пусть $\mathcal{D}$ — связное открытое множество на плоскости, ограниченное кусочно гладкой жордановой замкнутой кривой ∂D, причем кривая обходит множество против часовой стрелки. Если P, Q — гладкие на $\overline{\mathcal{D}}$ функции, то по теореме Грина

$$\int_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$

Выбирая $Q = x$, $P = 0$, и $Q = 0$, $P = y$, получаем равенства

$$|\mathcal{D}| = \int_{\mathcal{D}} xdy = -\int_{\mathcal{D}} ydx.$$

Следовательно, верно равенство

$$|\mathcal{D}| = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} xdy - ydx.$$

Предположим, что кривая $(x(t), y(t))$ вместе с хордой, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(x(T), y(T))$, образуют кусочно гладкую жорданову кривую, ограничивающую множество $\mathcal{D}$. Несложно проверить, что интеграл

$$\int x\,dy - y\,dx$$

по хорде, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(x(T), y(T))$, равен нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int_0^T x\,dy - y\,dx = \pm|\mathcal{D}|.$$

Таким образом, интеграл

$$\frac{1}{2}\int_0^T x\,dy - y\,dx$$

выражает площадь (со знаком) между кривой и хордой. Согласно сформулированной выше теореме вместе с условием сходимости кусочно гладкого процесса B_δ к винеровскому процессу w_t надо контролировать предел интегралов, выражающих площади между кривой B_δ и хордой в проекции на плоскости координат x_i, x_j.

Отметим, что выражение

$$\frac{1}{2}\int_0^T w_t^1\,dw_t^2 - w_t^2\,dw_t^1$$

часто называют **площадью Леви**.

Обобщения стохастического интеграла

Пусть M_t — квадратично интегрируемый непрерывный мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, а $\langle M\rangle_t$ — квадратичная вариация, то есть непрерывный неубывающий процесс A_t, который согласован с $\mathcal{F}_t$, $A_0 = 0$ и для которого процесс $M_t^2 - A_t$ является мартингалом.

Отметим полезное неравенство (Burkholder-Davis-Gundy)

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|M_t|^p \le c(p)\mathbb{E}\langle M\rangle_T^{p/2}, \quad p \ge 1.$$

Для винеровского процесса $\langle w\rangle_t = t$. С помощью формулы Ито несложно проверить, что

$$\langle\int_0^t \xi_s\, dw_s\rangle = \int_0^t |\xi_s|^2\, ds.$$

Повторяя построение стохастического интеграла по винеровскому процессу можно определить

$$\int_0^t \xi_s\, dM_s$$

для согласованного процесса ξ_t, удовлетворяющего условию

$$\mathbb{E}\int_0^T |\xi_t|^2\, d\langle M\rangle_t < \infty.$$

Интеграл по $\langle M\rangle_t$ понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, то есть как интеграл по соответствующей мере.

Далее стохастический интеграл распространяется на процессы вида

$$X_t = X_0 + M_t + S_t,$$

где S_t — непрерывный согласованный процесс ограниченной вариации. Для непрерывного согласованного процесса ξ_t (для которого определен интеграл по M_t)полагают

$$\int_0^t \xi_s\, dX_s = \int_0^t \xi_s\, dM_s + \int_0^t \xi_s\, dS_t,$$

где второй интеграл справа является интегралом Римана–Стилтьеса.

Отметим, что к процессам вида $X_t = X_0 + M_t + S_t$ относятся процессы

$$x_t = x_0 + \int_0^t B_s\, ds + \int_0^t \Sigma_s\, dw_s$$

и $f(x_t)$, где f — гладкая функция с ограниченными производными.

Для $X_t = X_0 + M_t + S_t$ полагаем $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

Пусть $X_t = X_0 + M_t + S_t$ и $Y_t = Y_0 + N_t + R_t$. Положим

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{2}\big(\langle X+Y\rangle_t - \langle X\rangle_t - \langle Y\rangle_t\big).$$

На процессы X_t и Y_t обобщается формула Ито.

Наконец, в некоторых вопросах удобнее использовать интеграл Стратоновича

$$\int_0^T Y_t \circ\, dX_t = \int_0^T Y_t\, dX_t + \frac{1}{2}\langle X, Y\rangle_t.$$

Справедливо равенство

$$\int_0^T Y_t \circ\, dX_t = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \frac{Y_{t_k} + Y_{t_{k+1}}}{2}\Big(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\Big),$$

где предел понимается в смысле сходимости по вероятности.

4. Сигнатура кривой

Итерации Пикара

Рассмотрим линейную систему уравнений
$$dy_t = Ay_t\, dx_t,$$
которая в координатной записи имеет вид
$$dy_t^i = \sum_{k,m} a_{km}^i y_t^k\, dx_t^m.$$
Здесь a_{km}^i — вещественные числа, x_t — непрерывно дифференцируемая кривая, причем $t \in [0, T]$.

При построении решения с начальным условием y_0 на достаточно малом отрезке $[0, T]$ обычно к отображению
$$F(y) = y_0 + \int_0^{\cdot} Ay_s\, dx_s$$
применяется теорема Банаха о сжимающем отображении и решение является пределом последовательности итераций Пикара
$$y_{t,n} = F(y_{t,n-1}), \quad y_{t,0} = y_0.$$
Выпишем явный вид первых двух итераций Пикара:
$$y_{t,1}^i = y_0^i + \int_0^t \sum_{k,m} a_{km}^i y_0^k\, dx_s^m = y_0^i + \sum_{k,m} a_{km}^i y_0^k \int_0^t dx_s^m,$$
$$y_{t,2}^i = y_0^i + \int_0^t \sum_{k,m} a_{km}^i y_{s,1}^k\, dx_s^m =$$
$$= y_0^i + \sum_{k,m} a_{km}^i y_0^k \int_0^t dx_{u_1}^m + \sum_{k,m,p,q} a_{km}^i a_{pq}^k y_0^p \int_0^t \int_0^{u_2} dx_{u_1}^p\, dx_{u_1}^q.$$
Таким образом, каждая функция $y_{t,n}$ является линейной комбинацией выражений
$$1, \quad \int_0^t dx_{u_1}^{i_1}, \quad \int_0^t \int_0^{u_2} dx_{u_1}^{i_1}\, dx_{u_2}^{i_2}, \quad \ldots, \quad \int_0^t \int_0^{u_n} \cdots \int_0^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_n}^{i_n}.$$
Пусть $x_t \colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ — непрерывно дифференцируемая кривая. Положим
$$X_{ab}^{i_1 \ldots i_n} = \int_a^b \int_a^{u_n} \cdots \int_a^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_n}^{i_n} = \int_{a<u_1<\ldots<u_n<b} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_n}^{i_n}.$$
Совокупность всех таких выражений обозначаем через $X_{ab}^{(n)}$, а бесконечную последовательность
$$1, \quad X_{ab}^{(1)}, \quad X_{ab}^{(2)}, \quad \ldots, \quad X_{ab}^{(n)}, \quad \ldots$$
называем **сигнатурой кривой** x_t на отрезке $[a, b]$ и обозначаем через $S(x_\cdot)$.

Свойства сигнатуры гладкой кривой исследовал в конце 50-х годов прошлого века Kuo–Tsai Chen.

Произведение элементов сигнатуры

Через $\mathrm{shuffle}(k, m)$ обозначим множество всех таких перестановок σ на
$$\{1, 2, \ldots, k + m\},$$

что $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(k)$ и $\sigma(k{+}1) < \sigma(k{+}2) < \ldots < \sigma(k{+}m)$. Такие перестановки описывают перетасовку карточной колоды, когда она разбивается на две части из k и m карт, которые потом без изменения их порядка вкладываются друг между другом.

Теорема 4.1. *Пусть $x_t\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ — непрерывно дифференцируемая кривая. Верно равенство*

$$X_{ab}^{i_1\ldots i_k} \cdot X_{ab}^{i_{k+1}\ldots i_{k+m}} = \sum_{\sigma\in\mathrm{shuffle}(k,m)} X_{ab}^{i_{\sigma^{-1}(1)} i_{\sigma^{-1}(2)} \ldots i_{\sigma^{-1}(k+m)}}.$$

Таким образом, произведение двух элементов сигнатуры выражается линейным образом через элементы сигнатуры.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай:

$$X_{ab}^{i_1} \cdot X_{ab}^{i_2} = \int_a^b dx_{u_1}^{i_1} \cdot \int_a^b dx_{u_2}^{i_2} = \int_a^b dx_{u_1}^{i_1} \cdot \int_a^b dx_{u_2}^{i_2} = \int_a^b \dot{x}_{u_1}^{i_1}\, du_1 \cdot \int_a^b \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_2.$$

По теореме Фубини это выражение можно переписать в виде

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \dot{x}_{u_1}^{i_1} \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_1\, du_2.$$

Разбивая квадрат на два треугольника и применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_a^b \int_a^{u_1} \dot{x}_{u_1}^{i_1} \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_2\, du_1 + \int_a^b \int_a^{u_2} \dot{x}_{u_1}^{i_1} \dot{x}_{u_2}^{i_2}\, du_1\, du_2 = \int_a^b \int_a^{u_1} dx_{u_2}^{i_2}\, dx_{u_1}^{i_1} + \int_a^b \int_a^{u_2} dx_{u_1}^{i_1}\, dx_{u_2}^{i_2}.$$

Таким образом,

$$X_{ab}^{i_1} \cdot X_{ab}^{i_2} = X_{ab}^{i_1 i_2} + X_{ab}^{i_2 i_1}.$$

Теперь обоснуем общий случай. Имеем

$$X_{ab}^{i_1\ldots i_k} \cdot X_{ab}^{i_{k+1}\ldots i_{k+m}} =$$

$$= \int_{a<u_1<\ldots<u_k<b} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k} \cdot \int_{a<u_k<\ldots<u_{k+m}<b} dx_{u_k}^{i_1} \ldots dx_{u_{k+m}}^{i_{k+m}}.$$

По теореме Фубини это выражение равно

$$\int\limits_{a<u_1<\ldots<u_k<b,\, a<u_k<\ldots<u_{k+m}<b} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_{k+m}}^{i_{k+m}}.$$

Заметим, что множество

$$\{(u_1,\ldots,u_{k+m})\colon\ a<u_1<\ldots<u_k<b,\, a<u_k<\ldots<u_{k+m}<b\}$$

является объединением множества меру нуль и множеств вида

$$\{(u_1,\ldots,u_{k+m})\colon\ a<u_{\sigma^{-1}(1)}<\ldots<u_{\sigma^{-1}(k+m)}<b\},$$

где $\sigma \in \mathrm{shuffle}(k,m)$. Действительно, мы перебираем здесь все возможные упорядочивания координат u_i точек из $[a,b]^{k+m}$, когда $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$ и $u_{k+1} < \ldots < u_{k+m}$. Следовательно, получаем выражение

$$\sum_{\sigma \mathrm{shuffle}(k,m)} \int\limits_{a<u_{\sigma^{-1}(1)}<\ldots<u_{\sigma^{-1}(k+m)}<b} dx_{u_{\sigma^{-1}(1)}}^{i_{\sigma^{-1}(1)}} \ldots dx_{u_{\sigma^{-1}(k+m)}}^{i_{\sigma^{-1}(k+m)}}.$$

□

Единственность

Следующее утверждение показывает, что сигнатура в определенном смысле однозначно задает кривую.

Теорема 4.2. *Пусть $x_t\colon [0,1]\to\mathbb{R}^d$ и $y_t\colon [0,1]\to\mathbb{R}^d$ — непрерывно дифференцируемые инъективные отображения, причем $\dot{x}_t\neq 0$ и $\dot{y}_t\neq 0$ для всех $t\in[0,1]$ и $x_0=y_0=0$. Тогда равенство $S(x.)=S(y.)$ влечет существование такого возрастающего гомеоморфизма $\psi\colon[0,1]\to[0,1]$, что $x_{\psi(t)}=y_t$.*

Рассмотрим случай $d=1$. Справедливо равенство

$$X_{01}^{(k)}=\frac{(x_1-x_0)^k}{k!}.$$

Из равенства сигнатур $S(x.)=S(y.)$ получаем равенство $x_1=y_1$. Следовательно, $x_t\colon[0,1]\to[0,b]$, $y_t\colon[0,1]\to[0,b]$, где $b=x_1=y_1$ и отображение $\psi=x^{-1}\circ y$ — искомая замена параметра.

В многомерном случае рассуждение сложнее.

Доказательство. Достаточно проверить, что $x.([0,1])=y.([0,1])$, так как в этом случае замена параметра ψ задается формулой $x^{-1}\circ y$. Отметим, что $\psi(0)=x^{-1}(y_0)=x^{-1}(x_0)=0$ и ψ — возрастающее отображение.

Рассуждаем от противного. Предположим, что $x_{t_0}\notin y.([0,1])$ для некоторой точки $t_0\in(0,1)$. Найдется открытый шар $B(x_{t_0},\delta)$, который не пересекается с $y.([0,1])$. Поскольку $\dot{x}_{t_0}\neq 0$, можно считать, что на некотором интервале

$$I=(t_0-\alpha,t_0+\alpha)\subset(0,1)$$

выполнено $\dot{x}_t^1>0$. Поскольку отображение $x.\colon[0,1]\to x.([0,1])$ является гомеоморфизмом, то множество $x.(I)=V\bigcap x.([0,1])$, где V открытое множество. Пусть $B(x_{t_0},r)\subset V\bigcap B(x_{t_0},\delta)$ и g — непрерывная неотрицательная функция, которая рана нулю вне $B(x_{t_0},r)$, причем $g(x_{t_0})=1$. Заметим, что $g(x_t)=0$ вне I, так как $t\notin I$ влечет $x_t\notin x.(I)$ и, значит, $x_t\notin V\bigcap x.([0,1])$ и $x_t\notin B(x_{t_0},r)$. Так как функция $g(x_t)\dot{x}_t^1\geq 0$ и $g(x_{t_0})\dot{x}_{t_0}^1>0$, то

$$\int_0^1 g(x_t)\,dx_t^1>0.$$

Поскольку шар $B(x_{t_0},r)$ не пересекается с $y.([0,1])$, то $g(y_t)\equiv 0$ и

$$\int_0^1 g(y_t)\,dy_t^1=0.$$

Можно считать, что множества $x.([0,1])$, $y.([0,1])$ и $B(x_{t_0},r)$ лежат внутри некоторого замкнутого куба. Приближая функцию g на этом кубе многочленом, находим многочлен, для которого справедливо неравенство

$$\int_0^1 P(x_t)\,dx_t^1\neq\int_0^1 P(y_t)\,dy_t^1.$$

Следовательно, существует такой моном $(x^1)^{m_1}(x^2)^{m_2}\cdots(x^d)^{m_d}$, что

$$\int_0^1 (x_t^1)^{m_1}(x_t^2)^{m_2}\cdots(x_t^d)^{m_d}\,dx_t^1\neq\int_0^1 (y_t^1)^{m_1}(y_t^2)^{m_2}\cdots(y_t^d)^{m_d}\,dy_t^1.$$

Так как $x_0=y_0=0$, то

$$x_t^i=\int_0^t dx_{u_i}^i,\quad y_t^i=\int_0^t dy_{u_i}^i.$$

Таким образом, выражение $(x_t^1)^{m_1}(x_t^2)^{m_2}\cdots(x_t^d)^{m_d}$ является произведением элементов сигнатуры $S_{0t}(x.)$, а выражение $(y_t^1)^{m_1}(y_t^2)^{m_2}\cdots(y_t^d)^{m_d}$ является произведением элементов сигнатуры $S_{0t}(y.)$. По доказанной выше теореме эти выражения представляются в виде суммы элементов сигнатур и, следовательно, интегралы

$$\int_0^1 (x_t^1)^{m_1}(x_t^2)^{m_2}\cdots(x_t^d)^{m_d}\,dx_t^1 \qquad \int_0^1 (y_t^1)^{m_1}(y_t^2)^{m_2}\cdots(y_t^d)^{m_d}\,dy_t^1$$

являются линейными комбинациями элементов сигнатуры $S_{01}(x.)$ и сигнатуры $S_{01}(y.)$ соответственно, что влечет равенство этих интегралов и приводит к противоречию. $\square$

Приведем теперь без доказательства более общий результат, полученный Kuo–Tsai Chen.

Непрерывная кривая $x_t\colon [a,b]\to\mathbb{R}^d$ называется кусочно регулярной, если отрезок $[a,b]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых x_t является ограничением непрерывно дифференцируемой кривой, у которой в каждой точке $\dot{x}_t\neq 0$. Непрерывная кусочно регулярная кривая x_t называется неприводимой, если для всякой точки $s\in(a,b)$ выполнено условие: не существует таких отрезков $[s_1,s]$ и $[s,s_2]$, что x_t непрерывно дифференцируемая кривая с $\dot{x}_t\neq 0$ на каждом из этих отрезков и $x.([s_1,s]) = x.([s,s_2])$. Две кривые $x_t\colon [a,b]\to\mathbb{R}^d$ и $y_t\colon [c,d]\to\mathbb{R}^d$ эквивалентны, если существует такой возрастающий гомеоморфизм $\psi\colon [c,d]\to[a,b]$ и $x_{\psi(t)} = y_t$.

Теорема 4.3. *Пусть x_t и y_t — непрерывные кусочно регулярные и неприводимые кривые, причем $x_0 = y_0$. Если $S(x.) = S(y.)$, то кривые x_t и y_t эквивалентны.*

На кривые ограниченной вариации этот результат обобщен в работе B.Hambly, T.Lyons в 2007 г.

5. Соотношения Чена

Тензорная алгебра

Пусть $V = \mathbb{R}^d$, пространство V^* — сопряженное пространство к V, $e_1, \ldots, e_d$ — стандартный базис в пространстве V и $e^1, \ldots, e^d$ — дуальный к нему базис в V^*. Если $l \in V^*$ и $v \in V$, то $v(l) = l(v)$.

Рассмотрим полилинейные функции $f(l_1, \ldots, l_k)$ и $g(l_1, \ldots, l_m)$ на V^*. Тензорное умножение $f \otimes g$ задает полилинейную функцию и определяется формулой

$$f \otimes g(l_1, \ldots, l_{k+m}) = f(l_1, \ldots, l_k) g(l_{k+1}, \ldots, l_m).$$

Это умножение ассоциативно, но не является коммутативным. Представляя функционалы в виде $l_n = l_n(e_1)e^1 + \ldots + l_n(e_d)e^d$ и используя полилинейность f, получаем

$$f(l_1, \ldots, l_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} f(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}) e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}(l_1, \ldots, l_k).$$

Таким образом, всякая полилинейная функция f определяется своими координатами $c^{i_1 \ldots i_k} = f(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k})$ в базисе $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$. При заменах координат эти числа меняются именно как координаты векторов. Если $c^{i_1 \ldots i_k}$ — координаты f и $b^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты g, то

$$(f \otimes g)^{i_1 \ldots i_{k+m}} = c^{i_1 \ldots i_k} \cdot b^{i_{k+1} \ldots i_{k+m}}.$$

Линейное пространство всех k — линейных функций обозначаем через $T^{(k)}(V)$.

Рассмотрим бесконечную прямую сумму

$$T(V) = \mathbb{R} \oplus T^1(V) \oplus T^2(V) \oplus \cdots \oplus T^k(V) \oplus \ldots,$$

то есть $T(V)$ — линейное пространство бесконечных последовательностей

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots), \quad a_k \in T^k(V).$$

Для элементов $a, b \in T(V)$ умножение $a \otimes b$ определено формулой

$$(a \otimes b)_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \otimes b_{m-k}.$$

Заметим, что в координатах это равенство записывается в виде

$$(a \otimes b)_m^{i_1 \ldots i_m} = \sum_{k=0}^{m} a_k^{i_1 \ldots i_k} \cdot b_{m-k}^{i_{k+1} \ldots i_m}.$$

Линейное пространство $T(V)$ с таким умножением называется тензорной алгеброй. Через $T^{(m)}(V)$ обозначаем линейное пространство

$$\mathbb{R} \oplus T^1(V) \oplus T^2(V) \oplus \cdots \oplus T^m(V),$$

то есть $T^{(m)}(V)$ — линейное пространство конечных упорядоченных наборов

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m), \quad a_k \in T^k(V).$$

Пространство $T^{(m)}(V)$ является алгеброй с умножением $a \otimes b$.

Соотношения Чена

Пусть $x_t \colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ — кусочно непрерывно дифференцируемая кривая. Сигнатуре

$$S_{ab}(x) = \{1, X_{ab}^{i_1}, X_{ab}^{i_1 i_2}, \ldots X_{ab}^{i_1 \ldots i_k}, \ldots\},$$

$$X_{ab}^{i_1\ldots i_k} = \int_{a<u_1<\ldots<u_k<b} dx_{u_1}^{i_1} \cdots dx_{u_k}^{i_k},$$

соответствует элемент

$$S_{ab}(x) = (1, X_{ab}^{(1)}, \ldots, X_{ab}^{(k)}, \ldots)$$

алгебры $T(V)$, где

$$X_{ab}^{(k)} = \sum_{i_1\ldots i_k} X_{ab}^{i_1\ldots i_k} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}.$$

Здесь важно отметить, что при заменах координат в $V = \mathbb{R}^d$ наборы чисел $X_{ab}^{i_1\ldots i_k}$ меняются именно как координаты полилинейной функции на V^*. Далее всегда считаем, что сигнатура кривой — элемент алгебры $T(V)$.

Пусть x_t — кусочно непрерывная кривая на $[a, c]$ и y_t — кусочно непрерывная кривая на $[c, b]$, где $a < c < b$. Положим

$$(x * y)_t = \begin{cases} x_t, & t \in [a, c] \\ y_t - y_c + x_c, & t \in [c, b] \end{cases}$$

Теорема 5.1. (Chen) *Верно равенство*

$$S_{ab}(x * y) = S_{ac}(x) \otimes S_{cb}(y).$$

Доказательство. Пусть $z = x * y$ и $Z_{ab}^{(k)}$ — соответствующие элементы сигнатуры. Надо проверить равенство

$$Z_{ab}^{i_1\ldots i_m} = \sum_{k=0}^{m} X_{ac}^{i_1\ldots i_k} \cdot Y_{cb}^{i_{k+1}\ldots i_m}.$$

По определению

$$Z_{ab}^{i_1\ldots i_m} = \int_{a<u_1<\ldots<u_m<b} dz_{u_1}^{i_1} \ldots dz_{u_m}^{i_m}.$$

Так как

$$\Big\{(u_1, \ldots, u_m) \colon\ a < u_1 < \ldots < u_m < b\Big\} =$$

$$\bigsqcup_{k=0}^{m} \Big\{(u_1, \ldots, u_m) \colon\ a < u_1 < \ldots < u_k < c < u_{k+1} < \ldots < u_m < b\Big\} \bigsqcup V,$$

где $u_0 = a$ и V — множество меры нуль, соответствующее подмножествам плоскостей $u_i = c$. По теореме Фубини

$$\int_{a<u_1<\ldots<u_k<c<u_{k+1}<\ldots<u_m<b} dz_{u_1}^{i_1} \ldots dz_{u_m}^{i_m} =$$

$$\int_{a<u_1<\ldots<u_k<c} dz_{u_1}^{i_1} \ldots dz_{u_k}^{i_k} \cdot \int_{c<u_{k+1}<\ldots<u_m<b} dz_{u_{k+1}}^{i_{k+1}} \ldots dz_{u_m}^{i_m}.$$

Поскольку $dz_t^i = dx_t^i$ на $[a, c]$ и $dz_t^i = dy_t^i$ на $[c, b]$, получаем

$$\int_{a<u_1<\ldots<u_k<c<u_{k+1}<\ldots<u_m<b} dz_{u_1}^{i_1} \ldots dz_{u_m}^{i_m} = X_{ac}^{i_1\ldots i_k} \cdot Y_{cb}^{i_{k+1}\ldots i_m}.$$

Используя аддитивность интеграла, получаем равенство

$$Z_{ab}^{i_1\ldots i_m} = \sum_{k=0}^{m} X_{ac}^{i_1\ldots i_k} \cdot Y_{cb}^{i_{k+1}\ldots i_m}.$$

□

Рассмотрим частный случай, когда $x_t\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ и $y_t = x_t$ на $[c,b]$. Тогда

$$X_{ab}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} X_{ac}^{(k)} \otimes X_{cb}^{(m-k)}.$$

Если $m = 1$, то

$$X_{ab}^{i} = X_{ac}^{i} + X_{cb}^{i},$$

что полностью согласуется с $X_{st}^i = X_t^i - X_s^i$. Отметим, что если задана функция $f(s,t)$ двух переменных и $f(s,t) = f(s,u) + f(u,t)$ при $s < u < t$, то $f(s,t) = f(0,t) - f(0,s)$.

Если $m = 2$, то

$$X_{ab}^{ij} = X_{ac}^{ij} + X_{cb}^{ij} + X_{ac}^{i} \cdot X_{cb}^{j}.$$

Таким образом, соотношения Чена в определенном смысле являются обобщением аддитивности интеграла.

Мультипликативные функционалы

Пусть $\Delta_T = \{(s,t)\colon\ 0 \le s \le t \le T\}$.

Мультипликативным функционалом степени m называется отображение

$$X_{st}\colon \Delta_T \to T^{(m)}(V),$$

для которого выполнено $X_{st}^{(0)} = 1$ и для всех $s < u < t$ и всех $1 \le n \le m$ справедливы равенства

$$X_{st}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} X_{su}^{(k)} \otimes X_{ut}^{(n-k)}.$$

Сигнатура кусочно гладкой кривой задает мультипликативный функционал. Пример мультипликативного функционала, который не порождается сигнатурой гладкой кривой:

$$X_{st} = (1, 0, 0, \ldots, F_t - F_s),$$

где F — произвольное отображение $[0,T] \to T^m(V)$. Действительно, достаточно проверить лишь равенство

$$X_{st}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} X_{su}^{(k)} \otimes X_{ut}^{(m-k)}.$$

Левая часть равна $F_t - F_s$, а в правой части все слагаемые равны нулю, кроме слагаемых с номерами $k = 0$ и $m = 0$, то есть правая часть равна

$$X_{su}^m + X_{ut}^m = F_u - F_s + F_t - F_u = F_t - F_s.$$

Предложение 6.1. *Если X_{st} и Y_{st} — мультипликативные функционалы степени m и*

$$X_{st}^{(1)} = Y_{st}^{(1)}, \quad X_{st}^{(2)} = Y_{st}^{(2)}, \quad \ldots \quad X_{st}^{(m-1)} = Y_{st}^{(m-1)},$$

то для $Z_{st}^{(m)} = X_{st}^{(m)} - Y_{st}^{(m)}$ для всех $s < u < t$ справедливо равенство

$$Z_{st}^{(m)} = Z_{su}^{(m)} + Z_{ut}^{(m)},$$

то есть $Z_{st} = Z_{0t} - Z_{0s}$.

Доказательство. Имеем

$$Z_{st}^{(m)} = X_{st}^{(m)} - Y_{st}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} X_{su}^{(k)} \otimes X_{ut}^{(m-k)} - \sum_{k=0}^{m} Y_{su}^{(k)} \otimes Y_{ut}^{(m-k)}.$$

Так как все члены с номерами $1 \le k \le m-1$ сокращаются, то

$$Z_{st}^{(m)} = X_{su}^{(m)} + X_{ut}^{(m)} - Y_{su}^{(m)} - Y_{ut}^{(m)} = Z_{su}^{(m)} + Z_{ut}^{(m)}.$$

□

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим теперь мультипликативные функционалы X_{st} степени m, для которых выполнены оценки

$$|X_{st}^{(k)}| \le C_k |t-s|^{k\alpha}, \quad k = 1, 2, \ldots m.$$

Предложение 6.2. *Если $(k+1)\alpha > 1$ и*

$$X_{st}^{(1)} = Y_{st}^{(1)}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{st}^{(2)}, \quad \ldots \quad X_{st}^{(k)} = Y_{st}^{(k)},$$

то

$$X_{st}^{(k+1)} = Y_{st}^{(k+1)}, \quad X_{st}^{(k+2)} = X_{st}^{(k+2)}, \quad \ldots \quad X_{st}^{(m)} = Y_{st}^{(m)}.$$

Доказательство. По предыдущему утверждению для $Z^{(k+1)}_{st} = X^{(k+1)}_{st} - Y^{(k+1)}_{st}$ справедливо равенство

$$Z^{(k+1)}_{st} = Z^{(k+1)}_{su} + Z^{(k+1)}_{ut}.$$

Для всякого разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[s,t]$ точками $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ справедливо равенство

$$Z^{(k+1)}_{st} = \sum_{j=0}^{N-1} Z^{(k+1)}_{u_j u_{j+1}}.$$

Поскольку $|X^{(k+1)}_{st}| \le C_x|t-s|^{(k+1)\alpha}$ и $|Y^{(k+1)}_{st}| \le C_y|t-s|^{(k+1)\alpha}$, то $|Z^{(k+1)}_{st}| \le (C_x + C_y)|t-s|^{(k+1)\alpha}$. Следовательно, выполнено

$$|Z^{(k+1)}_{st}| \le \sum_{j=0}^{N-1} |Z^{(k+1)}_{u_j u_{j+1}}| \le (C_x + C_y)\sum_{j=0}^{N-1} |u_{j+1} - u_j|^{(k+1)\alpha} \le (C_x + C_y)T\lambda(\mathbb{T})^{(k+1)\alpha - 1}.$$

Устремляя масштаб разбиения к нулю, получаем $Z^{(k+1)}_{st} = 0$ и $X^{(k+1)}_{st} = Y^{k+1}_{st}$. □

Предложение 6.3. *Если $(k+1)\alpha > 1$ и X_{st} — мультипликативный функционал степени k, то существует такой мультипликативный функционал Y_{st} степени $k+1$, что*

$$X^{(1)}_{st} = Y^{(1)}_{st}, \quad X^{(2)}_{st} = X^{(2)}_{st}, \quad \ldots \quad X^{(k)}_{st} = Y^{(k)}_{st}.$$

Разберем подробно случай $\alpha > 1/2$ и $k = 1$.

Лемма 6.1. *Пусть $y_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ и $x_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, причем*

$$|y_{st}| \le C|t-s|^\alpha, \quad |x_{st}| \le C|t-s|^\alpha,$$

где $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $x_{st} = x_t - x_s$, $y_{st} = y_t - y_s$. Тогда существует число M такое, что для всех $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Big| \le MC^2|t-s|^{2\alpha}.$$

Доказательство. Заметим, что при $N = 1$ неравенство справедливо с произвольной константой, так как левая часть равна нулю. Пусть $N \ge 2$. Найдется такой номер $1 \le k \le N-1$, что

$$|u_{k+1} - u_{k-1}| \le \frac{2|t-s|}{N-1}.$$

Удалим из разбиения $\mathbb{T}$ точку u_k и новое разбиение обозначим через $\mathbb{T}'$. Тогда

$$\Big|\sum_{u_k\in\mathbb{T}'} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - \sum_{u_k\in\mathbb{T}} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}}\Big| = \Big|y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1}u_{k+1}} - y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1}u_k} - y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}}\Big|$$

Поскольку $y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1}u_{k+1}} = y_{u_{k-1}} x_{u_{k-1}u_k} + y_{u_{k-1}} x_{u_k u_{k+1}}$, то получаем оценку

$$\Big|\sum_{u_k\in\mathbb{T}'} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - \sum_{u_k\in\mathbb{T}} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}}\Big| \le |y_{u_{k-1}u_k}||x_{u_k u_{k+1}}| \le \frac{4^\alpha C^2|t-s|^{2\alpha}}{(N-1)^{2\alpha}}.$$

Удаляя точки, приходим к выражению $y_s x_{st}$ и получаем оценку

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Big| \le 4^\alpha C^2|t-s|^{2\alpha}\Big(\frac{1}{(N-1)^{2\alpha}} + \frac{1}{(N-2)^{2\alpha}} + \ldots + 1\Big).$$

Положим

$$M = 4^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Big| \le MC^2|t-s|^{2\alpha}.$$

□

Продолжение мультипликативного функционала

Предложение 6.4. *Если $(k+1)\alpha > 1$ и X_{st} — мультипликативный функционал степени k, то существует такой мультипликативный функционал Y_{st} степени $k+1$, что*

$$X_{st}^{(1)} = Y_{st}^{(1)}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{st}^{(2)}, \quad \dots \quad X_{st}^{(k)} = Y_{st}^{(k)}.$$

Разберем подробно случай $\alpha > 1/2$ и $k = 1$. В конце прошлой лекции было доказано следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Пусть $y_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ и $x_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, причем*

$$|y_{st}| \le \|y\|_\alpha |t-s|^\alpha, \quad |x_{st}| \le \|x\|_\alpha |t-s|^\alpha,$$

где $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $x_{st} = x_t - x_s$, $y_{st} = y_t - y_s$. Тогда существует число M такое, что для всех $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Big| \le M\|x\|_\alpha \|y\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Отметим, что $\sum_{k=0}^{N-1} x_{u_k u_{k+1}} = x_{st}$ и

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st} = \sum_{k=0}^{N-1} y_{s u_k} x_{u_k u_{k+1}}.$$

Таким образом, выше доказано, что

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} y_{s u_k} x_{u_k u_{k+1}}\Big| \le M\|x\|_\alpha \|y\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Лемма 6.3. *В условиях предыдущей леммы существует предел*

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[s,t]\in\mathbb{T}} y_s x_{st},$$

где $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[0,T]$, а запись $[s,t] \in \mathbb{T}$ означает, что $[s,t]$ — отрезок разбиения. Этот предел называют интегралом Юнга от y_t по x_t на $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$. Через $\mathbb{T}_3$ обозначим разбиение, которое получается объединением точек разбиений $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$. Имеем

$$\Big|\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_1} y_s x_{st} - \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}_3} y_u x_{uv}\Big| \le \sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_1} \Big|y_s x_{st} - \sum_{[u,v]\subset[s,t]} y_u x_{uv}\Big|.$$

По предыдущей лемме правая часть оценивается через

$$\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_1} M\|x\|_\alpha \|y\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Поскольку $2\alpha > 1$, получаем оценку

$$\Big|\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_1} y_s x_{st} - \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}_3} y_u x_{uv}\Big| \le MT\|x\|_\alpha\|y\|_\alpha\lambda(\mathbb{T}_1)^{2\alpha-1}$$

Аналогичным образом выводим оценку

$$\Big|\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_2} y_s x_{st} - \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}_3} y_u x_{uv}\Big| \le MT\|x\|_\alpha\|y\|_\alpha\lambda(\mathbb{T}_2)^{2\alpha-1}.$$

Объединяем эти оценки:

$$\Big|\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_1} y_s x_{st} - \sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_2} y_u x_{uv}\Big| \le MT\|x\|_\alpha\|y\|_\alpha\Big(\lambda(\mathbb{T}_1)^{2\alpha-1} + \lambda(\mathbb{T}_2)^{2\alpha-1}\Big).$$

Следовательно, выполняется условие Коши существования предела по базе разбиений отрезка $[0,T]$. □

Докажем теперь утверждение о существовании продолжения.

Доказательство. Пусть $(1, X^{(1)}_{st})$ — мультипликативный функционал степени 1, причем $|X^{(1)}_{st}| \le \|X^{(1)}\|_\alpha |t-s|^\alpha$ и $\alpha > 1/2$. Искомое продолжение задается равенствами $Y^{(1)}_{st} = X^{(1)}_{st}$ и

$$Y^{ij}_{st} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} X^i_{su_k} X^j_{u_k u_{k+1}},$$

где $\mathbb{T}$: $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$. По доказанному выше этот предел существует. Поскольку

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} X^i_{su_k} X^j_{u_k u_{k+1}}\Big| \le M\|X^i\|_\alpha\|X^j\|_\alpha|t-s|^{2\alpha},$$

то

$$|Y^{ij}_{st}| \le M\|X^i\|_\alpha\|X^j\|_\alpha|t-s|^{2\alpha}.$$

Остается проверить, что для Y_{st} выполняются соотношения Чена. Пусть $s < u < t$ и разбиение $s = u_0 < \ldots < u_N = t$ отрезка $[s,t]$ содержит точку $u = u_m$. Выполнено

$$\sum_{k=0}^{N-1} X^i_{su_k} X^j_{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^{m-1} X^i_{su_k} X^j_{u_k u_{k+1}} + \sum_{k=m}^{N-1} X^i_{su_k} X^j_{u_k u_{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} X^i_{su_k} X^j_{u_k u_{k+1}} + \sum_{k=m}^{N-1} X^i_{uu_k} X^j_{u_k u_{k+1}} + X^i_{su} X^j_{ut}.$$

Устремляя масштаб разбиения к нулю, получаем равенство

$$Y^{ij}_{st} = Y^{ij}_{su} + Y^{ij}_{ut} + X^i_{su} X^j_{ut}.$$

Обсудим кратко общий случай. Положим

$$\widehat{X}_{st} = (1, X^{(1)}_{st}, \ldots, X^{(k)}_{st}, 0).$$

Продолжение Y_{st} определяется равенством

$$Y_{st} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \widehat{X}_{su_1} \otimes \widehat{X}_{u_1 u_2} \otimes \ldots \otimes \widehat{X}_{u_{N-1} t}.$$

Здесь $\mathbb{T}$: $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$. Заметим, что в силу соотношений Чена при $m \le k$ справедливо равенство

$$\Big(\widehat{X}_{su_1} \otimes \widehat{X}_{u_1 u_2} \otimes \ldots \otimes \widehat{X}_{u_{N-1} t}\Big)^{(m)} = X^{(m)}_{st}.$$

Когда $m = k+1$ существование предела требует обоснования, но мы ограничимся лишь проверкой соотношений Чена.

Пусть $s < u < t$ и разбиение $s = u_0 < \ldots < u_N = t$ отрезка $[s,t]$ содержит точку $u = u_m$. Так как

$$\widehat{X}_{su_1}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{N-1}t} = \Big(\widehat{X}_{su_1}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{m-1}u}\Big)\otimes\Big(\widehat{X}_{uu_{m+1}}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{N-1}t}\Big),$$

то после перехода к пределу при $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$ получаем равенство

$$Y_{st} = Y_{su} \otimes Y_{ut},$$

которое и является одной из форм соотношений Чена. □

Предложение 6.5. *Пусть $(k+1)\alpha > 1$ и X_{st} — мультипликативный функционал степени k. Тогда существует такое число $C > 0$, что для всякого мультипликативного функционала Y_{st} степени k из неравенств*

$$|X^{(m)}_{st} - Y^{(m)}_{st}| \le \varepsilon |t-s|^{m\alpha}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

следует неравенство

$$|\widetilde{X}^{(k+1)}_{st} - \widetilde{Y}^{(k+1)}_{st}| \le \varepsilon C |t-s|^{(k+1)\alpha},$$

где $\widetilde{X}_{st}$ — продолжение X_{st} и $\widetilde{Y}_{st}$ — продолжение Y_{st} до мультипликативных функционалов степени $k+1$.

Доказательство. Ограничимся случаем $k = 1$. По доказанному выше

$$\widetilde{X}^{ij}_{st} - \widetilde{Y}^{ij}_{st} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} \Big(X^i_{su}X^j_{uv} - Y^i_{su}Y^j_{uv}\Big).$$

Заметим, что

$$X^i_{su}X^j_{uv} - Y^i_{su}Y^j_{uv} = (X-Y)^i_{su}X^j_{uv} + Y^i_{su}(X-Y)^j_{uv}.$$

Следовательно, верно равенство

$$\sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} \Big(X^i_{su}X^j_{uv} - Y^i_{su}Y^j_{uv}\Big) = \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} (X-Y)^i_{su}X^j_{uv} + \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} Y^i_{su}(X-Y)^j_{uv}.$$

Применяя полученные выше оценки, приходим к неравенству

$$\Big|\sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} \Big(X^i_{su}X^j_{uv} - Y^i_{su}Y^j_{uv}\Big)\Big| \le M\big(\|X^i - Y^i\|_\alpha \|X^j\|_\alpha + \|X^j - Y^j\|_\alpha \|Y^i\|_\alpha\big)|t-s|^{2\alpha}.$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и $\|X^i - Y^i\|_\alpha \le \varepsilon$. Тогда

$$\Big|\widetilde{X}^{ij}_{st} - \widetilde{Y}^{ij}_{st}\Big| \le M(1 + 2\|X^{(1)}\|_\alpha)\varepsilon.$$

□

Таким образом, если $(k+1)\alpha > 1$, то мультипликативный функционал X_{st} степени $m > k$ однозначно определяется элементами $(1, X^{(1)}_{st}, \ldots, X^{(k)}_{st}$.

Грубые траектории

Пусть $\alpha \in (0,1)$ и k — наименьшее натуральное число, для которого $(k+1)\alpha > 1$. Мультипликативный функционал X_{st} степени k, удовлетворяющий условиям

$$|X_{st}^{(m)}| \le C_m |t-s|^{m\alpha}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

называется **грубой траекторией или грубой кривой** степени k.

Отметим, что благодаря соотношениям Чена грубая кривая может быть представлена именно в виде кривой, то есть отображения из $[0,T]$ в $T^{(k)}(V)$. Действительно, все элементы X_{st} выражаются через X_{0t}:

$$X_{st}^{(1)} = X_{0t} - X_{0s}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{0t}^{(2)} - X_{0s}^{(2)} - X_{0s}^{(1)} \otimes (X_{0t}^{(1)} - X_{0s}^{(1)}), \quad \ldots$$

Таким образом, вместо X_{st} можно рассматривать $t \to X_{0t}$.

Далее мы ограничимся случаем

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \quad k = 2.$$

Вместо записи $(1, X_{st}^{(1)}, X_{st}^{(2)})$ будем использовать обозначение $(X, \mathbb{X})$.

Итак, мы рассматриваем грубые траектории $(X, \mathbb{X})$ на отрезке $[0,T]$, где $X\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $\mathbb{X}\colon \Delta_T \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, верны оценки

$$|X_{st}^i| \le C|t-s|^{\alpha}, \quad |\mathbb{X}_{st}^{ij}| \le C|t-s|^{2\alpha},$$

и выполнены соотношения Чена

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \mathbb{X}_{su}^{ij} + \mathbb{X}_{ut}^{ij} + X_{su}^i X_{ut}^j, \quad s < u < t.$$

Грубые траектории, соответствующие винеровскому процессу

Пусть $(w_t^1, \ldots, w_t^d)$ — винеровский процесс. Положим

$$B_t^i = w_t^i, \quad \mathbb{B}_{st}^{ij} = \int_s^t (w_r^i - w_s)\, dw_r^j.$$

Интеграл в определении $\mathbb{B}_{st}^{ij}$ понимается в смысле Ито. Несложно проверить, что почти наверно выполняются соотношения Чена. Для проверки непрерывности по Гёльдеру нам потребуется обобщение теоремы А.Н. Колмогорова о существовании непрерывной модификации.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Предположим, что для всех $\omega \in \Omega$ и $s, t \in [0,T]$, $s \le t$, определены $X_t^i(\omega)$ и $\mathbb{X}_{st}^{ij}(\omega)$ и выполнены соотношения Чена. Предположим также, что отображение $(\omega, t) \to (X_t^i(\omega), \mathbb{X}_{0t}^{ml}(\omega))$ является случайным процессом.

Теорема 7.1. *Если для некоторых чисел $q \ge 2$ и $\beta > \frac{1}{q}$ справедливы оценки*

$$\big(\mathbb{E}|X_{st}^i|^q\big)^{1/q} \le C|t-s|^{\beta}, \quad \big(\mathbb{E}|\mathbb{X}_{st}^i|^{q/2}\big)^{2/q} \le C|t-s|^{2\beta},$$

то для всякого $\alpha \in (0, \beta - \frac{1}{q})$ найдутся такие модификации $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ процессов X_t и $\mathbb{X}_{st}$, что почти наверное

$$|X_{st}| \le K_\alpha |t-s|^{\alpha}, \quad |\mathbb{X}_{st}| \le \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha},$$

и $\mathbb{E}|K_\alpha|^q < \infty$, $\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^{q/2} < \infty$.

Применим эту теорему к $(B_t, \mathbb{B}_{st})$. Имеем

$$\mathbb{E}|w_t^i - w_s^i|^q = C_1(q)|t-s|^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\Big|\int_s^t (w_r^i - w_s^i)\,dw_r^j\Big|^{q/2} \le C_2(q)\mathbb{E}\Big|\int_s^t (w_r^i - w_s^i)^2\,dr\Big|^{q/4} \le$$

$$\le C_2(q)|t-s|^{q/4}\mathbb{E}\sup_{[s,t]}(w_r^i - w_s^i)^{q/2} \le C_3(q)|t-s|^{q/2}.$$

Таким образом, теорема применима с $\beta = 1/2$ и произвольным $q \ge 2$. Следовательно, для всякого $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ почти наверное

$$|B_{st}| \le C|t-s|^{\alpha}, \quad |\mathbb{B}_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha},$$

то есть почти наверно пара $(B, \mathbb{B})$ является грубой траекторией.

Доказательство теорема А.Н.Колмогорова

Доказательство. Пусть $T = 1$, то есть рассматриваем отрезок $[0,1]$. Через $\mathbb{T}_n$ обозначим разбиение отрезка $[0,1]$ точками $t_k = k/2^n$.

Положим $K_n = \max_k |X_{t_k t_{k+1}}|$. Заметим, что

$$\mathbb{E}K_n^q \le \sum_k \mathbb{E}|X_{t_k t_{k+1}}|^q \le C^q 2^{-n(\beta q - 1)}.$$

Пусть $s < t$ — двоично рациональные точки, причем $2^{-m-1} < t-s \le 2^{-m}$. Существует такое разбиение $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$, что всякий отрезок $[u_k, u_{k+1}]$ принадлежит какому-то разбиению $\mathbb{T}_n$ с $n \ge m+1$ и для каждого такого n в разбиении не более двух отрезков из $\mathbb{T}_n$. Найдем такие точки $a_1 \le s \le a_2$ и $b_1 \le t \le b_2$, что a_1, a_2 и b_1, b_2 — последовательные или совпадающие точки разбиения $\mathbb{T}_{m+1}$. Между a_2 и b_1 не более двух отрезков из $\mathbb{T}_{m+1}$. Теперь делим отрезки $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ пополам. Получившиеся после деления половины, которые лежат между s и t добавляем к уже имеющимся отрезкам из $\mathbb{T}_{m+1}$. Эта процедура добавляет не более двух отрезков из $\mathbb{T}_{m+2}$. Продолжая построение, получаем искомое разбиение.

Справедлива оценка

$$|X_{st}| \le \sum_k |X_{u_k u_{k+1}}| \le 2\sum_{n=m+1} K_n.$$

Поскольку $2^{-m-1} < t-s \le 2^{-m}$, то

$$\frac{|X_{st}|}{|t-s|^{\alpha}} \le 2\sum_{n=m+1} K_n 2^{\alpha(m+1)} \le 2\sum_{n=m+1} K_n 2^{\alpha n} \le 2\sum_{n=0} 2^{\alpha n} K_n =: K_{\alpha}.$$

По неравенству Минковского

$$\big(\mathbb{E}K_{\alpha}^q\big)^{1/q} \le 2\sum_{n=0} 2^{\alpha n}\big(\mathbb{E}K_n^q\big)^{1/q} = 2\sum_{n=0} 2^{-(\beta - q^{-1} - \alpha)n} < \infty.$$

Итак, для всех двоично рациональных s, t и всех ωс справедливо неравенство

$$|X_{st}(\omega)| \le K_{\alpha}(\omega)|t-s|^{\alpha},$$

причем $\mathbb{E}K_{\alpha}^q < \infty$. Пусть Ω' — множество таких ω, что $K_{\alpha}(\omega) < \infty$. На Ω' отображение $t \to X_t(\omega)$ непрерывно по Гёльдеру на двоично-рациональных t для всех ω. Пусть $t_k \to t$ и t_k — последовательность двоично рациональных чисел. Тогда последовательность $X_{t_k}(\omega)$ фундаментальная и имеет предел, который обозначим через

$\widetilde{X}_t(\omega)$. Вне Ω' полагаем $\widetilde{X}_t(\omega) = 0$. Для каждого ω отображение $t \to \widetilde{X}_t(\omega)$ непрерывно по Гёльдеру на $[0,T]$ и выполнена оценка $|\widetilde{X}_{st}(\omega)| \le K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha$. Покажем, что $\widetilde{X}_t$ является модификацией X_t. Поскольку

$$\mathbb{E}|X_t - X_{t_k}|^q \le C^q |t-t_k|^{\beta q},$$

то $\mathbb{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^q = 0$ и $\widetilde{X}_t = X_t$ почти наверное.

Рассмотрим теперь $\mathbb{X}$. Положим $\mathbb{K}_n = \max_k |\mathbb{X}_{t_k t_{k+1}}|$. Имеем

$$\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2} \le \sum_k \mathbb{E}|\mathbb{X}_{t_k t_{k+1}}|^{q/2} \le C^{q/2} 2^{-n(\beta q-1)}.$$

Пусть $s < t$ — двоично рациональные точки, причем $2^{-m-1} < t-s \le 2^{-m}$. Возьмем такое разбиение $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$, что всякий отрезок $[u_k, u_{k+1}]$ принадлежит какому-то разбиению $\mathbb{T}_n$ с $n \ge m+1$ и для каждого такого n в разбиении не более двух отрезков из $\mathbb{T}_n$. Тогда

$$|\mathbb{X}_{st}| = |\sum_k \mathbb{X}_{u_k u_{k+1}} + X_{s u_k} \otimes X_{u_k u_{k+1}}| \le \sum_k |\mathbb{X}_{u_k u_{k+1}}| + \Bigl(\sum_k |X_{u_k u_{k+1}}|\Bigr)^2.$$

В силу выбора разбиения точками u_k верна оценка

$$|\mathbb{X}_{st}| \le 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \mathbb{K}_n + \bigl(2\sum_{n=m+1}^{\infty} |X_{u_k u_{k+1}}|\bigr)^2.$$

Разделим правую и левую части на $|t-s|^{2\alpha}$. Получаем

$$\frac{|\mathbb{X}_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}} \le 2\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{K}_n 2^{2\alpha n} + K_\alpha^2 = \mathbb{K}_\alpha.$$

Применяя неравенство Минковского, выводим оценку

$$\bigl(\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^{q/2}\bigr)^{2/q} \le 2\sum_n \bigl(\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2}\bigr)^{2/q} + \bigl(\mathbb{E}\mathbb{K}_\alpha^{q}\bigr)^{2/q}.$$

Поскольку

$$\sum_n \bigl(\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2}\bigr)^{2/q} \le C\sum_n 2^{-2n(\beta - q^{-1} - \alpha)} < \infty,$$

то $\bigl(\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^{q/2}\bigr)^{2/q} < \infty$.

Пусть Ω' состоит из таких ω, что $\mathbb{K}_\alpha(\omega) < \infty$, $K_\alpha(\omega) < \infty$ и для всех двоично рациональных $s < u < t$ выполняются соотношения Чена. Для $\omega \in \Omega'$ и всех двоично рациональных s, t справедливы неравенства

$$|\mathbb{X}_{st}| \le \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha}$$

и

$$|\mathbb{X}_{0t} - \mathbb{X}_{0s}| \le \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha} + K_\alpha^2 |t-s|^\alpha.$$

Полагаем $\widetilde{\mathbb{X}}_{0t} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{X}_{0t_k}$, где t_k — последовательность двоично рациональных чисел, сходящаяся к t. Вне Ω' полагаем $\widetilde{\mathbb{X}}_{0t} = 0$. Как и выше проверяется, что процесс $\widetilde{\mathbb{X}}_{0t}$ является модификацией $\mathbb{X}_{0t}$. Положим

$$\widetilde{\mathbb{X}}_{st} = \widetilde{\mathbb{X}}_{0t} - \widetilde{\mathbb{X}}_{0s} - \widetilde{X}_{0s} \otimes \widetilde{X}_{st}.$$

Заметим, что отображение $(s,t) \to \widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ непрерывно и на двоично рациональных s, t совпадает с $\mathbb{X}_{st}$. Следовательно, верна оценка $|\widetilde{\mathbb{X}}_{st}| \le \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha}$. Остается заметить, что для $\widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ выполнены соотношения Чена. $\square$

Пространство Гёльдера

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Через $C^\alpha[0,T]$ обозначаем пространство таких непрерывных отображений $x.\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$, что

$$\|x\|_\alpha = \sup_{s\neq t} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

Предложение 7.1. *Пространство $C^\alpha[0,T]$ с нормой $|x_0|+\|x\|_\alpha$ является банаховым пространством.*

Отметим, что пространство $C^\alpha[0,T]$ не является сепарабельным. Действительно, для всяких $0 < a < b < T$

$$\|(\max\{0,t-a\})^\alpha - (\max\{0,t-b\})^\alpha\|_\alpha \geq 1.$$

Через $C^{0,\alpha}[0,T]$ обозначим замыкание в $C^\alpha[0,T]$ множества непрерывно дифференцируемых отображений.

Предложение 7.2. *Отображение x_t принадлежит пространству $C^{0,\alpha}[0,T]$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\delta\to 0+} \sup_{|s-t|<\delta} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} = 0.$$

Доказательство. Обоснуем только необходимость данного условия. Пусть y_t — непрерывно дифференцируемое отображение и $|y'_t| \leq C$. Имеем

$$\sup_{|s-t|<\delta} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} \leq \|x-y\|_\alpha + C\delta^{1-\alpha}.$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ находим такое отображение y_t, что $\|x-y\|_\alpha < \varepsilon$, а затем выбираем δ столь малым, что $C\delta^{1-\alpha} < \varepsilon$. Получаем для таких δ оценку

$$\sup_{|s-t|<\delta} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} \leq 2\varepsilon.$$

$\square$

В качестве следствия получаем для $0 < \beta < \alpha < 1$ строгие включения:

$$C^\beta[0,T] \subset C^{0,\alpha}[0,T] \subset C^\alpha[0,T].$$

Напомним, что $\Delta_T = \{(s,t)\colon 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Через $C^\alpha_{\Delta_T}$ обозначим пространство непрерывных отображений $x.\colon \Delta_T \to \mathbb{R}^{d^2}$, для которых

$$\|x\|_\alpha = \sup_{s\neq t} \frac{|x_{st}|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

Предложение 7.3. *Пространство $C^\alpha_{\Delta_T}$ с нормой $\|x\|_\alpha$ является банаховым пространством.*

Пространство грубых траекторий

Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Пространством грубых траекторий $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ называем подмножество пространства $C^\alpha[0,T] \times C^{2\alpha}_{\Delta_T}$, состоящее из пар $(X,\mathbb{X})$, для которых выполнены соотношения Чена.

Предложение 7.4. *Пространство грубых траекторий* $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ *с метрикой*

$$d((X,\mathbb{X}),(Y,\mathbb{Y})) = |X_0 - Y_0| + \|X = Y\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\|_{2\alpha}$$

является полным метрическим пространством.

Доказательство. Поскольку соотношения Чена — поточечные равенства, то $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ является замкнутым подмножеством полного пространства $C^\alpha[0,T] \times C^{2\alpha}_{\Delta_T}$. $\square$

8. Геометрические грубые траектории

Геометрические грубые траектории

Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Через $\mathfrak{C}_g^{0,\alpha}([0,T])$ обозначаем замыкание в пространстве грубых траекторий множества таких $(X,\mathbb{X})$, что X_t — гладкая кривая и

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \int_s^t X_{su}^i \, dX_u^j.$$

Элементы множества $\mathfrak{C}_g^{0,\alpha}([0,T])$ называются **геометрическими грубыми траекториями**. Далее используем обозначение

$$\operatorname{Sym} \mathbb{X}_{st}^{ij} = \frac{1}{2}\big(\mathbb{X}_{st}^{ij} + \mathbb{X}_{st}^{ji}\big).$$

Предложение 8.1. *Если X_t — гладкая кривая и*

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \int_s^t X_{su}^i \, dX_u^j,$$

то

$$\operatorname{Sym} \mathbb{X}_{st} = \frac{1}{2} X_{st} \otimes X_{st}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} + \mathbb{X}_{st}^{ji} = \int_s^t X_{su}^i \, dX_u^j + \int_s^t X_{su}^j \, dX_u^i = \int_s^t d(X_{su}^i X_{su}^j) = X_{st}^i X_{st}^j.$$

□

Грубые траектории $(X,\mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^\alpha([0,T])$, для которых выполнено равенство

$$\operatorname{Sym} \mathbb{X}_{st} = \frac{1}{2} X_{st} \otimes X_{st},$$

называют *слабо геометрическими грубыми траекториями*, а их множество обозначают через $\mathfrak{C}_g^\alpha([0,T])$.

Теорема 8.1. (P.Friz, N.Victoir) *Если $\frac{1}{3} < \alpha < \beta < \frac{1}{2}$, то*

$$\mathfrak{C}_g^\beta([0,T]) \subset \mathfrak{C}_g^{0,\alpha}([0,T]) \subset \mathfrak{C}^\alpha([0,T]),$$

причем все включения строгие.

Мы не будем обсуждать доказательство теоремы, но разберем подробно утверждение, которое является важнейшей частью этого доказательства и частично объясняет данный результат.

Теорема 8.2. *Пусть $(1,X,Y) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ и $\operatorname{Sym} Y = \frac{1}{2} X \otimes X$, то найдется такая гладкая кривая $X_t\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$, что $X_0 = 0$, $X = X_1 - X_0$ и*

$$Y^{ij} = \int_0^1 X_t^i \, dX_t^j.$$

Предварим доказательство несколькими наблюдениями.

(A)

Множество $T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, состоящее из элементов $(1,b,c) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, образуют группу с операцией

$$(1,b,c) \otimes (1,h,g) = (1, b+h, c+g+b\otimes h).$$

Напомним, что b, h — векторы, а c, g — матрицы. Элемент $(1,0,0)$ является единицей группы, а обратный элемент к элементу $(1,b,c)$ задается равенством

$$(1,b,c)^{-1} = (1,-b,-c+b\otimes b).$$

(B)

Множество $G^{(2)}$, состоящее из элементов вида $(1,b,c+\frac{1}{2}b\otimes b)$, где $c^{ij}=-c^{ji}$, является подгруппой в $T_1^{(2)}(\mathbb{R}^d)$. Действительно, единица принадлежит $G^{(2)}$, верно равенство

$$(1,b,c+\tfrac{1}{2}b\otimes b)\otimes(1,h,g+\tfrac{1}{2}h\otimes h) = (1,b+h,c+g+\tfrac{1}{2}(b\otimes h-h\otimes b)+\tfrac{1}{2}(b+h)\otimes(b+h)).$$

Если c, g — кососимметрические матрицы, то $c+g+\frac{1}{2}(b\otimes h-h\otimes b)$ — кососимметрическая матрица. Наконец заметим, что

$$(1,b,c+\tfrac{1}{2}b\otimes b)^{-1} = (1,-b,-c-\tfrac{1}{2}b\otimes b+b\otimes b) = (1,-b,-c+\tfrac{1}{2}b\otimes b).$$

(C)

Группа $G^{(2)}$ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}$ и отображения $(g_1,g_2)\to g_1\otimes g_2$ и $g\to g^{-1}$ являются гладкими, то есть $G^{(2)}$ — группа Ли.

Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}$, заданное равенством

$$\varphi(b,c) = (1,b,c+\tfrac{1}{2}b\otimes b),$$

является инъективным и гладким отображением максимального ранга $d+d^2$, причем дифференциал

$$d\varphi(\xi,\eta) = (0,\xi,\eta+\tfrac{1}{2}(\xi\otimes b+b\otimes\xi)).$$

По определению $G^{(2)}=\varphi(\Pi)$, где $\Pi=\{(\xi,\eta)\colon\ \eta^{ij}=-\eta^{ji}\}$. Элементы $(\xi,\eta)\in\Pi$ естественно принять за локальные координаты. Пусть $g_1=(1,\xi,\eta+\frac{1}{2}\xi\otimes\xi)$ и $g_1=(1,b,c+\frac{1}{2}b\otimes b)$. Тогда произведению $g_1\otimes g_2$ соответствуют локальные координаты $(\xi+b,\eta+c+\frac{1}{2}(\xi\otimes b-b\otimes\xi))$. Хорошо видно, что зависимость от координат (ξ,η) и (b,c) является бесконечно гладким отображением. Если $g=(1,\xi,\eta+\frac{1}{2}\xi\otimes\xi)$, то элементу g^{-1} соответствуют локальные координаты $(-\xi,-\eta)$ и отображение $g\to g^{-1}$ является бесконечно гладким.

(D)

Касательное пространство $T_1G^{(2)}$, где $1=(1,0,0)$, равно $d\varphi(\Pi)$ и состоит из элементов вида $(0,\xi,\eta)$, где $\eta^{ij}=-\eta^{ji}$. Важную роль в теории групп Ли играет экспоненциальное отображение, которое строится следующим образом. Вектору $v\in T_1G^{(2)}$ сопоставляется такая гладкая кривая γ, что $\gamma(0)=1$, $\dot\gamma(0)=v$, $\gamma(t)\in G^{(2)}$ и $\gamma(t+s)=\gamma(t)\otimes\gamma(s)$. По определению $\exp v=\gamma(1)$. Из свойств γ следует, что $\dot\gamma=\gamma\otimes v$. Пусть $v=(0,\xi,\eta)$. В локальных координатах (b,c) это уравнение имеет вид

$$\dot b=\xi,\quad \dot c+\frac{1}{2}(b\otimes\xi-\xi\otimes b)=\eta,$$

из которого с учетом условий $b(0)=0$, $c(0)=0$, выводим $b(t)=t\xi$, $c(t)=t\eta$. Таким образом, верно равенство

$$\exp((0,\xi,\eta)) = (1,\xi,\eta+\tfrac{1}{2}\xi\otimes\xi),$$

то есть $G^{(2)}=\exp\bigl(T_1G^{(2)}\bigr)$. В рассматриваемой ситуации экспоненциальное отображение устанавливает диффеоморфизм между касательным пространством в единице и группой Ли (чего в общем случае может и не быть).

(E)

Пусть $g\in G^{(2)}$. Рассмотрим отображение $L_g(h)=g\otimes h$. Это линейное отображение $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{d^2}$ и его дифференциал равен $dL_g(v)=g\otimes v$. Ограничение этого отображения на $G^{(2)}$ задает гладкий диффеоморфизм $G^{(2)} \to G^{(2)}$. Дифференциал dL_g устанавливает линейный изоморфизм $T_1G^{(2)} \to T_gG^{(2)}$ и для всякого $v \in T_1G^{(2)}$ дифференциал dL_g задает гладкое векторное поле $V(g) = dL_g(v)$.

Пусть M — гладкое многообразие, а V и W — гладкие векторные поля на M. Каждому векторному полю соответствует дифференцирование первого порядка на пространстве гладких функций, а именно $Vf(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}f(X_t(p))$, где $X_t(p)$ — фазовый поток, порождаемый векторным полем V. Верно и обратное, что всякому оператору дифференцирования первого порядка соответствует векторное поле. Коммутатор $[W,V]$ определяется равенством

$$[W,V]f = W(V(f)) - V(W(f))$$

и появляется в разложении по Тейлору:

$$f(Y_s(X_t(p))) - f(X_t(Y_s(p))) = st[W,V]f(p) + o(s^2+t^2),$$

где $X_t(p)$ – фазовый поток векторного поля V, а $Y_t(p)$ – фазовый поток векторного поля W. В касательном пространстве T_pM отображение $(W(p),V(p)) \to [W,V](p)$ задает скобку Ли и структуру алгебры Ли.

Рассмотрим теперь поверхность $G^{(2)}$. Пусть $u,v \in T_1G^{(2)}$ и $U(g) = dL_g(u)$, $V(g) = dL_g(v)$. Найдем $[u,v] := [U(g),V(g)]$. Пусть $g = (1, b, c + \frac{1}{2}b\otimes b)$, $u = (0,\xi,\eta)$ и $v = (0,\alpha,\beta)$. Запишем $U(g)$ и $V(g)$ в локальных координатах:

$$U((b,c)) = (\xi, \eta + \tfrac{1}{2}(b\otimes\xi - \xi\otimes b)), \quad V((b,c)) = (\alpha, \beta + \tfrac{1}{2}(b\otimes\alpha - \alpha\otimes b)).$$

Фазовый поток X_t, порождаемый полем U, в локальных координатах имеет вид

$$b(t) = b(0) + t\xi, \quad c(t) = c(0) + (\eta + \tfrac{1}{2}(b(0)\otimes\xi - \xi\otimes b(0)))t.$$

Аналогично выписывается фазовый поток Y_t для V:

$$b(t) = b(0) + t\alpha, \quad c(t) = c(0) + (\beta + \tfrac{1}{2}(b(0)\otimes\alpha - \alpha\otimes b(0)))t.$$

Заметим, что

$$Y_s(X_t((b,c))) = (b+t\xi+s\alpha, c+(\eta+\tfrac{1}{2}(b\otimes\xi-\xi\otimes b))t+\beta s+\tfrac{1}{2}(b\otimes\alpha-\alpha\otimes b)s+\tfrac{1}{2}(\xi\otimes\alpha-\alpha\otimes\xi)st).$$

Следовательно,

$$Y_s(X_t((b,c))) - X_t(Y_s(b,c)) = st(0, \xi\otimes\alpha - \alpha\otimes\xi)$$

и мы получаем, что

$$[u,v] = u\otimes v - v\otimes u.$$

(F)

Пусть $X_t[0,1] \to \mathbb{R}^d$ — гладкая кривая, причем $X_0 = 0$. Положим

$$\mathbb{X}^{ij}_{0t} = \int_0^t X^i_s\, dX^j_s.$$

Отображение $t \to (1, X_t, \mathbb{X}_{0t})$ является гладкой кривой в $G^{(2)}$ и в локальных координатах записывается в виде

$$b(t) = X_t, \quad c(t) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^t X^i_s\, dX^j_s - \int_0^t X^j_s\, dX^i_s\Big).$$

Следовательно,

$$\dot{b} = \dot{X}_t, \quad \dot{c}(t) = \frac{1}{2}\big(X^i_t\dot{X}^j_t - X^j_t\dot{X}^i_t\big).$$

Поскольку

$$(1, X_t, \mathbb{X}_{0t}) \otimes (0, \dot{X}_t, 0) = (0, \dot{b}, \dot{c} + \tfrac{1}{2}(\dot{b}\otimes b + b\otimes\dot{b})),$$

то вектор скорости кривой $t \to (1, X_t, \mathbb{X}_{0t})$ принадлежит пространству $dL_g(\{(0,\xi,0)\})$.

Положим

$$\mathcal{H} = \{(0,\xi,0)\} \subset T_1G^{(2)}, \quad \mathcal{H}_g = dL_g(\mathcal{H}) \subset T_gG^{(2)}.$$

Предложение 8.2. *Если $\gamma\colon [0,1] \to G^{(2)}$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = 1$, и для каждого $t \in [0,1]$ выполнено $\dot\gamma(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$, то*

$$\gamma(t) = (1, X_t^i, \int_0^t X_s^i \, dX_s^j).$$

Доказательство. Пусть в локальных координатах кривая задается в виде

$$\gamma(t) = (1, b(t), c(t)), \quad b(0) = 0, \quad c(0) = 0.$$

По условию для каждого $t \in [0,1]$ существует такой вектор $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$, что

$$\dot\gamma(t) = \gamma(t) \otimes (0, \xi(t), 0).$$

Следовательно, верны равенства

$$\dot b = \xi, \quad \dot c + \tfrac{1}{2}(\dot b \otimes b + b \otimes \dot b) = b \otimes \xi.$$

Заменяя во втором равенстве ξ на $\dot b$, получаем

$$\dot c = \tfrac{1}{2}(b \otimes \dot b - \dot b \otimes b).$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$b(t) \otimes b(t) = \int_0^t \dot b(s) \otimes b(s) + b(s) \otimes \dot b(s) \, ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$c(t) + \tfrac{1}{2} b \otimes b = \int_0^t b(s) \otimes \dot b(s) \, ds.$$

Таким образом, в качестве кривой X_t можно взять $b(t)$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать, что всякий элемент группы $G^{(2)}$ можно соединить с единицей гладкой кривой γ, у которой $\dot\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$.

Теорема 8.3. (Рашевский–Чоу) *Пусть M — гладкое конечномерное связное многообразие, для каждого $p \in M$ в касательном пространстве T_pM задано линейное подпространство $\mathcal{H}_p$, которое является линейной оболочкой гладких векторных полей в точке p, на $\mathcal{H}_p$ задано скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle_p$, гладко зависящее от точки p. Предположим, что для каждого p линейная оболочка векторов $[v_1, [v_2, [\ldots[v_{n-1}, v_n]]\ldots]]$, где $v_k \in \mathcal{H}_p$, совпадает с T_pM. Тогда для всяких точек $p, q \in M$ существует такая гладкая кривая $\gamma\colon [0,1] \to M$ (называемая горизонтальной кривой), что $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ и $\dot\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$.*

Заметим, что

$$(0,\xi,0) \otimes (0,\alpha,0) = (0,0,\xi\otimes\alpha - \alpha\otimes\xi)$$

и линейная оболочка векторов $(0,0,\xi\otimes\alpha-\alpha\otimes\xi)$ равна пространству векторов $(0,\xi,\eta)$, где $\eta^{ij} = -\eta^{ji}$. Следовательно, линейная оболочка векторов из $\mathcal{H}$ и их коммутаторов совпадает с $T_1G^{(2)}$. Поскольку $dL_g([u,v]) = [dL_g(u), dL_g(v)]$, то аналогичное наблюдение верно для $\mathcal{H}_g = dL_g(\mathcal{H})$ и $T_gG^{(2)}$. Таким образом, в рассматриваемой нами ситуации выполнены условия теоремы Рашевского–Чоу и для всякого $g \in G^{(2)}$ существует такая гладкая кривая $\gamma\colon [0,1] \to G^{(2)}$, что $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = g$ и $\dot\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$. По доказанному выше $\gamma(t) = \Big(1, X_t^i, \displaystyle\int_0^t X_s^i \, dX_s^j\Big)$.

9. Лемма о сшивке и интеграл Юнга

Лемма о сшивке

Напомним, что $\Delta_T = \{(s,t)\colon 0 \le s \le t \le T\}$.

Теорема 9.1. *Пусть A_{st} — непрерывное отображение $\Delta_T \to \mathbb{R}^N$, причем для некоторых $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ и для всех $s \le u \le t$ справедливо неравенство*

$$\Big|A_{st} - A_{su} - A_{ut}\Big| \le M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Тогда существует такая непрерывная кривая $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^N$, что $\gamma_0 = 0$ и

$$\gamma_t - \gamma_s = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} A_{uv}, \quad \Big|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}\Big| \le C(\varepsilon)M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Доказательство. Для всех $s \le t$ и всякого n положим

$$A^n_{st} = \sum_{k=0}^{2^n-1} A_{t^n_k t^n_{k+1}}, \quad t^n_k = s + \frac{k(t-s)}{2^n}.$$

Ясно, что $(s,t) \to A_{st}$ — непрерывное отображение. Пусть $u^n_k = (t^n_k + t^n_{k+1})/2$. Тогда

$$A^n_{st} - A^{n+1}_{st} = \sum_{k=0}^{2^n-1}\Big(A_{t^n_k t^n_{k+1}} - A_{t^n_k u^n_k} - A_{u^n_k t^n_{k+1}}\Big)$$

и справедлива оценка

$$\Big|A^n_{st} - A^{n+1}_{st}\Big| \le \sum_{k=0}^{2^n-1} M|t-s|^{1+\varepsilon}2^{-n-\varepsilon n} = M|t-s|^{1+\varepsilon}2^{-\varepsilon n}.$$

В частности,

$$\sup_{\Delta_T}\Big|A^n_{st} - A^{n+1}_{st}\Big| \le MT^{1+\varepsilon}2^{-\varepsilon n}.$$

Следовательно, ряд $\sum_n |A^n_{st} - A^{n+1}_{st}|$ сходится на Δ_T равномерно и поэтому сходится равномерно A^n_{st} к некоторому непрерывному отображению Γ_{st}. Более того, верна оценка

$$\Big|\Gamma_{st} - A_{st}\Big| \le C(\varepsilon)M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Пусть теперь $s < u < t$ — двоично рациональные точки. Тогда для достаточно больших n выполнено равенство

$$A^n_{st} = A^n_{su} + A^n_{ut},$$

которое в пределе дает равенство $\Gamma_{st} = \Gamma_{su} + \Gamma_{ut}$. В силу непрерывности последнее равенство верно для всех $s \le u \le t$. Положим $\gamma_t = \Gamma_{0t}$. Имеем $\gamma_t - \gamma_s = \Gamma_{st}$ и

$$\Big|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}\Big| \le C(\varepsilon)M|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Для всякого разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[s,t]$ на отрезки $[u,v]$ выполнено

$$\Big|\gamma_t - \gamma_s - \sum_{[u,v]} A_{uv}\Big| \le \sum_{[u,v]}\Big|\gamma_v - \gamma_u - A_{uv}\Big| \le C(\varepsilon)M\sum_{[u,v]}|u-v|^{1+\varepsilon} \le C(\varepsilon)M|t-s|\lambda(\mathbb{T})^{\varepsilon}.$$

Следовательно, верно равенство

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]} A_{uv} = \gamma_t - \gamma_s.$$

$\square$

Интеграл Юнга

В качестве применения леммы о сшивке построим интеграл Юнга.

Пусть $X_t \in C^\alpha[0,T]$, $Y_t \in C^\beta[0,T]$ и $\alpha+\beta>1$. Положим $A_{st}=Y_sX_{st}$. Тогда

$$A_{st}-A_{su}-A_{ut}=Y_sX_{st}-Y_sX_{su}-Y_uX_{ut}=Y_sX_{ut}-Y_uX_{ut}=Y_{su}X_{ut}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\Bigl|A_{st}-A_{su}-A_{ut}\Bigr|\le \|X\|_\alpha\|Y\|_\beta|t-s|^{\alpha+\beta},$$

позволяющая применить лемму о сшивке. Соответствующую непрерывную кривую γ_t обозначаем через

$$\int_0^t Y_u\,dX_u$$

и называем интегралом Юнга. Выполнены следующие свойства:

$$\int_s^t Y_u\,dX_u=\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}Y_uX_{uv},\quad \Bigl|\int_s^t Y_u\,dX_u-Y_sX_{st}\Bigr|\le C(\alpha,\beta)\|X\|_\alpha\|Y\|_\beta|t-s|^{\alpha+\beta}.$$

10. Грубый интеграл

Контролируемые траектории

Пусть $X_t \in C^\alpha[0,T]$. Пара (Y_t, Y'_t) называется контролируемой относительно X_t траекторией, если Y_t, Y'_t — гёльдеровы с показателем α и для всех $s \le t$

$$Y_{st} = Y'_s X_{st} + R_{st}, \quad |R_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha}.$$

Кривая Y'_t называется производной Губинелли. Надо иметь ввиду, что производная Губинелли в общем случае не определена единственным образом.

Рассмотрим важный пример контролируемой траектории.

Пусть $f \in C_b^2(\mathbb{R})$ и $X_t \in C^\alpha[0,T]$. Тогда

$$f(X_t) - f(X_s) = \int_0^1 f'(X_s + \tau X_{st})\, d\tau X_{st} = f'(X_s)X_{st} + R_{st},$$

где

$$R_{st} = \int_0^1 \big(f'(X_s + \tau X_{st}) - f'(X_s)\big)\, d\tau X_{st}.$$

Поскольку $|R_{st}| \le \max|f''||X_{st}|^2 \le C|t-s|^{2\alpha}$, то $(f(X_t), f'(X_t))$ — контролируемая траектория относительно X_t.

Пространство $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ контролируемых относительно X_t траекторий (Y_t, Y'_t) является банаховым пространством относительно нормы

$$\|(Y, Y')\| = |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_\alpha + \|R\|_{2\alpha}.$$

Грубый интеграл

Прежде чем определить интеграл по грубой траектории рассмотрим гладкую кривую $X_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ и ее стандартное поднятие до грубой траектории:

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \int_s^t X_{su}^i\, dX_u^j.$$

Пусть f^k — гладкие функции с ограниченными производными. Далее по повторяющимся индексам всегда предполагается суммирование. Для всякого разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[0,T]$ на отрезки $[u,v]$ верно равенство

$$\int_0^T f^k(X_t)\, dX_t^k = \sum_{[u,v]} \int_u^v f^k(X_t)\, dX_t^k.$$

По формуле Тейлора

$$\int_u^v f^k(X_t)\, dX_t^k = f^k(X_u)X_{uv}^k + f_{x_j}^k(X_u)\mathbb{X}_{uv}^{jk} + \ldots.$$

Для гладкой кривой X_t уже второе слагаемое $f_{x_j}^k(X_u)\mathbb{X}_{uv}^{jk}$ есть $O(|u-v|^2)$. Если такого вида сумму написать для мультипликативного функционала $(1, X_{st}^{(1)}, X_{st}^{(2)}, \ldots)$, у которого $|X_{st}^{(k)}| \le C_k|t-s|^{k\alpha}$ с $\alpha > 1/3$, то второе слагаемое есть $O(|u-v|^{2\alpha})$, а уже третье слагаемое есть $O(|u-v|^{3\alpha})$. При стремлении масштаба разбиения к нулю сумма $\sum_{[u,v]} O(|u-v|^{3\alpha})$ сходится к нулю, так как $3\alpha > 1$. Это наблюдение позволяет надеяться, что интеграл по грубой траектории будет определяться пределом сумм вида

$$\sum_{[u,v]} f^k(X_u)X_{uv}^k + f_{x_j}^k(X_u)\mathbb{X}_{uv}^{jk}.$$

Отметим, что пара $Y_t^k = f^k(X_t)$ и $(Y_t')^{kj} = f^k_{x_j}(X_t)$ является контролируемой кривой относительно X_t и с учетом таких обозначений сумму можно переписать в виде

$$\sum_{[u,v]} Y_u^k X_{uv}^k + (Y_u')^{kj}\mathbb{X}_{uv}^{jk}.$$

Пусть теперь $(X,\mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$, где $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Пусть (Y,Y') — контролируемая относительно X_t кривая в $\mathbb{R}^{N\times d}$, то есть

$$Y_{st}^{lk} = (Y_s')^{lkj} X_{st}^j + R_{st}^{lk}, \quad |R_{st}^{lk}| \le C|t-s|^{2\alpha},$$

причем Y_t и Y_t' принадлежат C^α.

Интегралом от (Y,Y') по $(X,\mathbb{X})$ называется выражение

$$\int_0^T Y_t^{lk}\,dX_t^k = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}\Big(Y_u^{lk}X_{uv}^k + (Y_u')^{lkj}\mathbb{X}_{uv}^{jk}\Big).$$

Далее индексы для упрощения записи опускаем и пишем короче

$$\int_0^T Y_t\,dX_t = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}\Big(Y_uX_{uv} + (Y_u')\mathbb{X}_{uv}\Big).$$

Предложение 10.1. *Для отображения*

$$A_{st} = Y_sX_{st} + (Y_s')\mathbb{X}_{st}$$

выполнены условия леммы о сшивке.

Доказательство. Применяя соотношения Чена, устанавливаем для всех $0 \le s \le u \le t \le T$ справедливость равенства

$$A_{st} - A_{su} - A_{ut} = -R_{su}X_{ut} - Y_{su}'\mathbb{X}_{ut}.$$

Тогда

$$|A_{st} - A_{su} - A_{ut}| \le |t-s|^{3\alpha}\big(\|R\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\big).$$

Поскольку $3\alpha > 1$, то применима лемма о сшивке. $\square$

В качестве немедленного следствия получаем непрерывность

$$t \to \int_0^t Y_u\,dX_u,$$

оценку

$$\Big|\int_s^t Y_u\,dX_u - Y_sX_{st} - Y_s'\mathbb{X}_{st}\Big| \le |t-s|^{3\alpha}\big(\|R\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\big)$$

и равенство

$$\int_s^t Y_u\,dX_u = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}\Big(Y_uX_{uv} + Y_u'\mathbb{X}_{uv}\Big).$$

Предложение 10.2. *Пара*

$$\Big(\int_0^t Y_u\,dX_u, Y_t\Big)$$

является контролируемой относительно X траекторией. Далее соответствующий остаточный обозначаем через $R^{\int Y\,dX}$.

Доказательство. Имеем
$$R_{st}^{\int Y\,dX} = \int_s^t Y_u\,dX_u - Y_s X_{st}.$$
Поскольку
$$\Big|\int_s^t Y_u\,dX_u - Y_s X_{st} - Y_s'\mathbb{X}_{st}\Big| \le |t-s|^{3\alpha},$$
то
$$\Big|R_{st}^{\int Y\,dX}\Big| \le C|t-s|^{3\alpha} + |Y_s'\mathbb{X}_{st}| \le \Big(CT^\alpha + (\|Y_0'\| + \|Y'\|_\alpha T^\alpha)\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\Big)|t-s|^{2\alpha}.$$
□

Следующее утверждение показывает непрерывность отображения
$$(X,\mathbb{X}),(Y,Y') \mapsto \int Y\,dX.$$

Положим
$$\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})) = \|X-\widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha} + |Y_0-\widetilde{Y}_0| + |Y_0'-\widetilde{Y}_0'| + \|Y-\widetilde{Y}'\|_\alpha + \|R-\widetilde{R}\|_{2\alpha}.$$

Теорема 10.1. *Пусть* $(X,\mathbb{X}),(\widetilde{X},\widetilde{\mathbb{X}}) \in \mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ *и* $(Y,Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$, $(\widetilde{Y},\widetilde{Y}') \in \mathcal{D}_{\widetilde{X}}^{2\alpha}$, *причем для некоторого числа* $M>0$ *выполнено*
$$\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|\widetilde{X}\|_\alpha + \|\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha} \le M,$$
$$|Y_0| + |Y_0'| + \|Y'\|_\alpha + \|R\|_{2\alpha} + |\widetilde{Y}_0| + |\widetilde{Y}_0'| + \|\widetilde{Y}'\|_\alpha + \|\widetilde{R}\|_{2\alpha} \le M.$$
Тогда
$$\Big\|\int Y\,dX - \int \widetilde{Y}\,d\widetilde{X}\Big\|_\alpha \le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})),$$
$$\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha + \|R^{\int Y\,dX} - R^{\int \widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y})).$$

Доказательство. Достаточно установить оценку выражения
$$\|R^{\int Y\,dX} - R^{\int \widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}.$$
Положим
$$\Delta_{st} = Y_u X_{uv} + Y_u'\mathbb{X}_{uv} - \widetilde{Y}_u\widetilde{X}_{uv} - \widetilde{Y}_u'\widetilde{\mathbb{X}}_{uv}.$$
Справедливо равенство
$$\Delta_{st} - \Delta_{su} - \Delta_{ut} = R_{su}\big(\widetilde{X}_{ut} - X_{ut}\big) + \big(\widetilde{R}_{su} - R_{su}\big)\widetilde{X}_{ut} + \big(\widetilde{Y}_{su}' - Y_{su}'\big)\mathbb{X}_{ut} + \widetilde{Y}_{su}'\big(\widetilde{\mathbb{X}}_{ut} - \mathbb{X}_{ut}\big).$$
Следовательно, верна оценка
$$|\Delta_{st} - \Delta_{su} - \Delta_{ut}| \le C(M)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{3\alpha}.$$
Применяя лемму о сшивке к Δ_{st}, получаем
$$\Big|\int_s^t Y_u\,dX_u - \int_s^t \widetilde{Y}_u\,d\widetilde{X}_u - \Big(Y_s X_{st} + Y_s'\mathbb{X}_{st} - \widetilde{Y}_s\widetilde{X}_{st} - \widetilde{Y}_s'\widetilde{\mathbb{X}}_{st}\Big)\Big| \le$$
$$\le C(M)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{3\alpha}.$$
Следовательно,
$$\Big|R_{st}^{\int Y\,dX} - R_{st}^{\int \widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\Big| \le C(M)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{3\alpha} + |\widetilde{Y}_s'\widetilde{\mathbb{X}}_{st} - Y_s'\mathbb{X}_{st}|.$$
Оценивая второе слагаемое в правой части, получаем неравенство
$$\Big|R_{st}^{\int Y\,dX} - R_{st}^{\int \widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\Big| \le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{2\alpha},$$

из которого следует оценка

$$\|R^{\int Y\,dX} - R^{\int \widetilde{Y}\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \le C(M,T)\varrho((X,Y),(\widetilde{X},\widetilde{Y}))|t-s|^{2\alpha}.$$

□

Стохастический интеграл совпадает с грубым интегралом

Пусть $(B_t, \mathbb{B}_{st})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу w_t и построенная с помощью интеграла Ито, а (Y_t, Y'_t) — α–гёльдеров согласованный случайный процесс, почти наверное контролируемый относительно траекторий винеровского процесса w_t.

Предложение 10.3. *Грубый интеграл и стохастический почти наверное равны, то есть почти наверное*

$$\int_0^T Y_t\,dB_t = \int_0^T Y_t\,dw_t.$$

Доказательство. По определению

$$\int_0^T Y_t\,dB_t = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{[u,v]}\Big(Y_u B_{uv} + Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big).$$

Существует такая последовательность разбиений $\mathbb{T}_n$ (масштаб которых стремится к нулю), что с вероятностью единица

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0}\sum_{[u,v]} Y_u B_{uv} = \int_0^T Y_t\,dw_t.$$

Покажем, что с вероятностью единица

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0}\sum_{[u,v]} Y'_u\mathbb{B}_{uv} = 0.$$

Пусть $\sup|Y'_t| \le M$. Напомним, что

$$\mathbb{B}^{ij}_{uv} = \int_u^v w^i_s\,dw_s - w^i_u(w^j_v - w^i_u).$$

В частности, верно равенство

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{B}_{uv}|\mathcal{F}_t\big) = 0, \quad t \le u < v,$$

а $\mathcal{F}_t$ — фильтрация, порождаемая винеровским процессом. Следовательно, верно равенство

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{[u,v]} Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big|^2 = \sum_{[u,v]}\mathbb{E}\Big|Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big|^2.$$

Поскольку правая часть оценивается выражением

$$M^2C\sum_{[u,v]}|u-v|^2,$$

то

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{[u,v]} Y'_u\mathbb{B}_{uv}\Big|^2$$

стремится к нулю при $\lambda(\mathbb{T}_n)\to 0$. Случай неограниченного Y' сводится к уже рассмотренному с помощью моментов остановки. □

Формула Ито и грубая экспонента

Пусть функция f трижды непрерывно дифференцируема и ее производные третьего порядка ограничены. Пусть $(x, \mathbb{X})$ — грубая траектория. Кривая $(Df(X_t), D^2 f(X_t))$ является контролируемой относительно X_t. Положим

$$[X]_{st} = X_{st} \otimes X_{st} - 2\mathrm{Sym}\mathbb{X}_{st}.$$

Можно показать, что $[X]_{st} = [X]_{su} + [X]_{ut}$ для всех $s \le u \le t$. Далее через $[X]_t$ обозначаем $[X]_{0t}$, то есть $[X]_{st} = [X]_t - [X]_s$.

Заметим, что $D^2 f$ — симметричная матрица и верно равенство

$$\mathrm{tr}\big(D^2 f \mathbb{X}\big) = \mathrm{tr}\big(D^2 f \mathrm{Sym}\mathbb{X}\big).$$

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$f(X_T) - f(X_0) = \sum_{[u,v]} \Big(Df(X_u) X_{uv} + D^2 f(X_u)\mathbb{X}_{uv} + \frac{1}{2} D^2 f(X_u)[X]_{uv} + O(|u-v|^{3\alpha}) \Big).$$

Устремляя $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$, приходим к обобщению формулы Ньютона–Лейбница и аналогу формулы Ито для стохастического интеграла:

$$f(X_T) - f(X_0) = \int_0^T Df(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} \int_0^T D^2 f(X_t)\, d[X]_t.$$

Первое слагаемое — грубый интеграл, а второе слагаемое — интеграл Юнга. Это равенство обобщается на случай выражения $f(X_t + F_t)$, где F_t — гёльдерова кривая с показателем 2α, следующим образом:

$$f(X_T+F_T)-f(X_0+F_0) = \int_0^T Df(X_t+F_t)\, dX_t + \int_0^T Df(X_t+F_t)\, dF_t + \frac{1}{2} \int_0^T D^2 f(X_t)\, d[X]_t,$$

первое слагаемое — грубый интеграл, а второе и третье слагаемые — интегралы Юнга.

Применяя последнее равенство к

$$Y_t = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}[X]_t),$$

получаем

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s\, dX_s, \quad Y_0 = 1.$$

Таким образом, кривая Y_t является решением грубого дифференциального уравнения $dY_t = Y_t\, dX_t$.

11. Оценки функций от контролируемой траектории

Всегда на этой лекции считаем, что $0 < T < 1$.

Оценки Y и $f(Y)$

Пусть $X_t \in C^\alpha[0,T]$ и (Y, Y') — контролируемая относительно X кривая, то есть $Y_t, Y'_t \in C^\alpha[0,T]$ и

$$Y_{st} = Y'_s X_{st} + R^Y_{st}, \quad |R^Y_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha}.$$

Положим

$$\|Y\|_{\mathcal{D}} = |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}.$$

Лемма 11.1. *Пусть кривая (Y, Y') контролируется кривой X, кривая $(\widetilde{Y}, \widetilde{Y'})$ контролируется кривой $\widetilde{X}$ и функция g — дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными. Тогда справедливы оценки:*

(a)

$$\|Y\|_\alpha \le \bigl(\|Y'_0\| + \|Y'\|_\alpha\bigr)\|X\|_\alpha + T^\alpha\|R^Y\|_{2\alpha} \le \|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr),$$

(b)

$$\|g(Y)\|_\alpha \le C(g)\|Y\|_\alpha \le C(g)\|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr),$$

(c)

$$\begin{aligned}\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha &\le \|Y - Y\|_{\mathcal{D}}\|X\|_\alpha + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}T^\alpha \\ &\le \|Y - Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr) + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha,\end{aligned}$$

(d)

$$\|g(Y) - g(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(g)|Y_0 - \widetilde{Y}_0|\|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr) +$$
$$+C(g)\Bigl(\|Y - Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr) + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha\Bigr)\Bigl(1 + \|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr)\Bigr).$$

Доказательство. Обоснуем пункт (a). Имеем

$$|Y_{st}| \le |Y'_s||X_{st}| + |R^Y_{st}| \le (|Y'_0| + |Y'_{st}|)|X_s t| + |R^Y_{st}|$$

и, следовательно, $\|Y\|_\alpha \le (|Y'_0| + \|Y'\|_\alpha)\|X\|_\alpha + T^\alpha\|R^Y\|_{2\alpha}$.

Пункт (b) следует из (a) и липшицевости g.

Обоснуем пункт (c). Справедливы равенства

$$Y_{st} - \widetilde{Y}_{st} = Y'_s X_{st} - \widetilde{Y}'_s\widetilde{X}_{st} + R^Y_{st} - R^{\widetilde{Y}}_{st} = (Y'_s - \widetilde{Y}'_s)X_{st} + \widetilde{Y}'_s(X_{st} - \widetilde{X}_{st}) + R^Y_{st} - R^{\widetilde{Y}}_{st}.$$

Следовательно, верна оценка

$$\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha \le \|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X\|_\alpha + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}T^\alpha.$$

Докажем утверждение (d). Верно неравенство

$$g(Y_t) - g(Y_s) - g(\widetilde{Y}_t) + g(\widetilde{Y}_s) = \int_0^1 \Bigl(Dg(Y_s + \tau Y_{st})Y_{st} - Dg(\widetilde{Y}_s + \tau\widetilde{Y}_{st})\widetilde{Y}_{st}\Bigr)\,d\tau.$$

Так как первые и вторые производные функции g ограничены, то справедлива оценка

$$|Dg(Y_s + \tau Y_{st})Y_{st} - Dg(\widetilde{Y}_s + \tau\widetilde{Y}_{st})\widetilde{Y}_{st}| \le C(g)\sup|Y - \widetilde{Y}||Y_{st}| + C(g)|Y_{st} - \widetilde{Y}_{st}|$$

и неравенства

$$\sup|Y - \widetilde{Y}| \le |Y_0 - \widetilde{Y}_0| + \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha, \quad |Y_{st}| \le \|Y\|_\alpha|t-s|^\alpha, \quad |Y_{st} - \widetilde{Y}_{st}| \le \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha|t-s|^\alpha.$$

Итак, получаем оценку

$$\|g(Y) - g(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(g)\bigl(|Y_0 - \widetilde{Y}_0| + \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha\bigr)\|Y\|_\alpha + C(g)\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha.$$

Используя оценки из пунктов (a) и (c), получаем

$$\|g(Y)-g(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(g)|Y_0-\widetilde{Y}_0|\|Y\|_{\mathcal{D}}\big(T^\alpha+\|X\|_\alpha\big)+$$
$$+C(g)\Big(\|Y-Y\|_{\mathcal{D}}\big(T^\alpha+\|X\|_\alpha\big)+\|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X-\widetilde{X}\|_\alpha\Big)\Big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big(T^\alpha+\|X\|_\alpha\big)\Big).$$

□

Лемма 11.2. *Пусть (Y,Y') — контролируемая кривая относительно X и f — трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными. Тогда $(f(Y),Df(Y)Y')$ — контролируемая кривая относительно X и верны оценки*

$$\|Df(Y)Y'\|_\alpha \le C(f)\big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big),\quad \|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\le C(f)\big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big)^2.$$

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(Y)_{st}=\int_0^1 Df(Y_s+\tau Y_{st})\,d\tau Y_{st}.$$

Следовательно, верно равенство

$$f(Y)_{st}-Df(Y_s)Y'_sX_{st}=\int_0^1\big(Df(Y_s+\tau Y_{st})-Df(Y_s)\big)\,d\tau Y'_sX_{st}+\int_0^1 Df(Y_s+\tau Y_{st})\,d\tau R^Y_{st},$$

из которого следует оценка

$$|f(Y)_{st}-Df(Y_s)Y'_sX_{st}|\le C(f)\Big(\|Y\|_\alpha(|Y'_0|+\|Y'\|_\alpha)\|X\|_\alpha+\|R^Y\|_{2\alpha}\Big)|t-s|^{2\alpha}.$$

Применяя пункт (a) леммы 1, получаем

$$\|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\le C(f)\big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big)^2.$$

Теперь оценим $\|Df(Y)Y'\|_\alpha$. Справедливо равенство

$$Df(Y_t)Y'_t-Df(Y_s)Y'_s=\big(Df(Y_t)-Df(Y_s)\big)Y'_t+Df(Y_s)Y'_{st}.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\|Df(Y)Y'\|_\alpha\le\|Df(Y)\|_\alpha\big(|Y'_0|+\|Y'\|_\alpha\big)+C(f)\|Y'\|_\alpha.$$

Применяя пункт (b) леммы 1, получаем

$$\|Df(Y)Y'\|_\alpha\le C(f)\Big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\Big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big).$$

□

Лемма 11.3. *Пусть (Y,Y') — контролируемая кривая относительно X и $(\widetilde{Y},\widetilde{Y}')$ — контролируемая кривая относительно $\widetilde{X}$, причем*

$$\max\{\|Y\|_{\mathcal{D}},\|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}},\|X\|_\alpha,\|\widetilde{X}\|_\alpha\}\le M.$$

Пусть f — трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными. Тогда

$$\|Df(Y)Y'-Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha\le C(f,M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}+\|X-\widetilde{X}\|_\alpha\big),$$
$$\|R^{f(Y)}-R^{f(\widetilde{Y})}\|_{2\alpha}\le C(f,M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}+\|X-\widetilde{X}\|_\alpha\big).$$

Доказательство. Имеем

$$Df(Y_t)Y'_t-Df(\widetilde{Y}_t)\widetilde{Y}'_t-Df(Y_s)Y'_s+Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s=$$
$$Df(Y)_{st}Y'_t-Df(\widetilde{Y})_{st}\widetilde{Y}'_t+Df(Y_s)Y'_{st}-Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_{st}=$$
$$(Df(Y)_{st}-Df(\widetilde{Y})_{st})Y'_t+Df(\widetilde{Y})_{st}(Y'_t-\widetilde{Y}'_t)+(Df(Y_s)-Df(\widetilde{Y}_s))Y'_{st}+Df(\widetilde{Y}_s)(Y'_{st}-\widetilde{Y}'_{st}).$$

Следовательно, верна оценка

$$\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha \le \|Df(Y) - Df(\widetilde{Y})\|_\alpha(|Y_0| + \|Y'\|_\alpha) +$$

$$\|Df(\widetilde{Y})\|_\alpha(|Y_0' - \widetilde{Y}_0'| + \|Y' - \widetilde{Y}'\|_\alpha) + \sup_s |Df(Y_s) - Df(\widetilde{Y}_s)| \|Y'\|_\alpha + \sup_s |Df(\widetilde{Y}_s)| \|Y' - \widetilde{Y}'\|_\alpha.$$

Заметим, что

$$\sup_s |Df(Y_s) - Df(\widetilde{Y}_s)| \le C(f)(|Y_0 - \widetilde{Y}_0| + \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha), \quad \sup_s |Df(\widetilde{Y}_s)| \le C(f)(|\widetilde{Y}_0| + \|\widetilde{Y}\|_\alpha).$$

Применяя оценки из леммы 1, получаем

$$\|Df(Y) - Df(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(f, M)(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha), \quad \|Df(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(f, M),$$

$$\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha \le C(M)(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha), \quad \|\widetilde{Y}\|_\alpha \le C(M).$$

Итак, верна оценка

$$\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha \le C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha\big).$$

Теперь рассмотрим выражение $R^{f(Y)} - R^{f(\widetilde{Y})}$. Справедливы следующие равенства:

$$R_{st}^{f(Y)} - R_{st}^{f(\widetilde{Y})} = f(Y)_{st} - Df(Y_s)Y_s'X_{st} - f(\widetilde{Y})_{st} + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_s'\widetilde{X}_{st} =$$

$$f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st} + Df(Y_s)R_{st}^Y - f(\widetilde{Y}_s) + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st} - Df(\widetilde{Y}_s)R_{st}^{\widetilde{Y}}.$$

По формуле Тейлора

$$f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st} = \int_0^1 (1-\tau)D^2 f(Y_s + \tau Y_{st})\, d\tau Y_{st} \otimes Y_{st},$$

$$f(\widetilde{Y}_s) - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st} = \int_0^1 (1-\tau)D^2 f(\widetilde{Y}_s + \tau \widetilde{Y}_{st})\, d\tau \widetilde{Y}_{st} \otimes \widetilde{Y}_{st}.$$

Следовательно,

$$(f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st}) - (f(\widetilde{Y}_s) - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st}) =$$

$$\int_0^1 (1-\tau)D^2 f(Y_s + \tau Y_{st})\, d\tau Y_{st} \otimes Y_{st} - \int_0^1 (1-\tau)D^2 f(\widetilde{Y}_s + \tau \widetilde{Y}_{st})\, d\tau \widetilde{Y}_{st} \otimes \widetilde{Y}_{st}$$

и справедлива оценка

$$|f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st}) - (f(\widetilde{Y}_s) - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st}| \le$$

$$C(f) \sup_s |Y_s - \widetilde{Y}_s| \|Y\|_\alpha^2 |t-s|^{2\alpha} +$$

$$C(f)(\|Y\|_\alpha + \|\widetilde{Y}\|_\alpha)\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Кроме того,

$$|Df(Y_s)R_{st}^Y - Df(\widetilde{Y}_s)R_{st}^{\widetilde{Y}}| \le$$

$$C(f) \sup_s |Y_s - \widetilde{Y}_s| \|R^Y\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} + C(f)\|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}.$$

Вновь применяя оценки из леммы 1, получаем

$$\|R^{f(Y)} - R^{f(\widetilde{Y})}\|_{2\alpha} \le C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha\big).$$

$\square$

Оценки грубого интеграла от $f(Y)$

Лемма 11.4. *Пусть* $(X, \mathbb{X})$ *— грубая траектория из* $\mathfrak{C}^\alpha$*, пара* (Y, Y') *— контролируемая кривая относительно* X *и функция* f *трижды непрерывно дифференцируема с ограниченными производными. Тогда пара*

$$\Big(\int_0^t f(Y_u)\,dX_u, Df(Y_t)Y'_t\Big)$$

является контролируемой кривой относительно X *и справедливы оценки*

$$\|f(Y)\|_\alpha \le C(f)\|Y\|_{\mathcal{D}}(\|X\|_\alpha + T^\alpha),$$
$$\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha} \le C(f)(1+\|Y\|_\alpha)^2(1+\|X\|_\alpha)^2(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

Доказательство. Оценка $\|f(Y)\|_\alpha$ следует из пункта (b) леммы 1. Поскольку

$$R_{st}^{\int f(Y)\,dX} = \int_s^t f(Y_u)\,dX_u - f(Y_s)X_{st}$$

и

$$|R_{st}^{\int f(Y)\,dX} - Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st}| \le |t-s|^{3\alpha}\big(\|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|Df(Y)Y'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\big),$$

то

$$\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha} \le \|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|Df(Y)Y'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \sup_s|Df(Y_s)Y'_s|\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}.$$

Применяя оценки из леммы 3, получаем

$$\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha} \le C(f)(1+\|Y\|_\alpha)^2(1+\|X\|_\alpha)^2(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

□

Лемма 11.5. *Пусть* $(X, \mathbb{X}), (\widetilde{X}, \widetilde{\mathbb{X}}) \in \mathfrak{C}^\alpha$*. Пусть* (Y, Y') *— контролируемая кривая относительно* X *и* $(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}')$ *— контролируемая кривая относительно* $\widetilde{X}$*, причем* $Y_0 = \widetilde{Y}_0$*,* $Y'_0 = \widetilde{Y}'_0$ *и*

$$\max\{\|Y\|_{\mathcal{D}}, \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}, \|X\|_\alpha, \|\widetilde{X}\|_\alpha, \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}, \|\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\} \le M.$$

Пусть f *— трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными. Тогда*

$$\|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(T^\alpha + \|X\|_\alpha) + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha\big),$$
$$\|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \le C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(T^\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

Доказательство. Оценка $\|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_\alpha$ следует из пункта (d) леммы 1. На прошлой лекции при обосновании непрерывности грубого интеграла с помощью леммы о сшивке получили оценку, которая в данном случае имеет вид:

$$|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}} - Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st} + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s\widetilde{\mathbb{X}}_{st}| \le$$
$$|t-s|^{3\alpha}C(M)\big(\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha + \|R^{f(Y)} - R^{f(\widetilde{Y})}\|_{2\alpha} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

С помощью леммы 3 правая часть оценивается сверху выражением

$$|t-s|^{3\alpha}C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

Теперь заметим, что

$$|t-s|^{-2\alpha}|Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st} - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s\widetilde{\mathbb{X}}_{st}| \le$$
$$\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + (|Df(\widetilde{Y}_0)\widetilde{Y}'_0| + \|Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha)\|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}.$$

Вновь применяя лемму 3, правую часть оцениваем выражением

$$C(f, M)(\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha})$$

Следовательно, приходим к оценке

$$\|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \leq C(f,M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(T^{\alpha}+\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) + \|X-\widetilde{X}\|_{\alpha} + \|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

$\square$

12. Грубые дифференциальные уравнения

Грубые дифференциальные уравнения

Пусть $0 < \tau < T < 1$ и $\frac{1}{3} < \beta < \frac{1}{2}$. Предположим, что $(X, \mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^{\beta}[0, T]$ и функция f трижды непрерывно дифференцируема и ее производные ограниченны. Контролируемая относительно X кривая $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\beta}[0, \tau]$ является на $[0, \tau]$ решением **грубого дифференциального уравнения**

$$dY_t = f(Y_t)\, dX_t$$

и удовлетворяет начальному условию $Y_0 = y$, если для всех $t \in [0, \tau]$ справедливо равенство

$$Y_t = y + \int_0^t f(Y_u) dX_u,$$

где интеграл в правой части является грубым интегралом по грубой кривой $(X, \mathbb{X})$ от контролируемой кривой $(f(Y), Df(Y)Y')$.

Теорема 12.1. *Для всякого $y \in \mathbb{R}^m$ существует такое $\tau \in (0, T)$, что грубое уравнение $dY_t = f(Y_t)dX_t$ на $[0, \tau]$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $Y_0 = y$.*

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$. Пусть

$$M > |y| + |f(y)| + \|X\|_{\beta} + \|\mathbb{X}\|_{2\beta}.$$

Заметим, что

$$\|X\|_{\alpha} \le \tau^{\beta - \alpha} M, \quad \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \le \tau^{2\beta = 2\alpha} M.$$

Рассмотрим множество

$$S_{M,\tau} = \{(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}[0, \tau] \colon\ Y_0 = y,\, Y'_0 = f(y),\, \|Y\|_{\mathcal{D}} = |y| + |f(y)| + \|Y'\|_{\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha} \le M\}.$$

Множество $S_{M,\tau}$ замкнуто в полном пространстве $\mathcal{D}_X^{2\alpha}[0, \tau]$ и, следовательно, является полным метрическим пространством с метрикой $\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}$. Отметим, что множество $S_{M,\tau}$ непусто, например $Y_t = y + f(y)X_{0t} \in S_{M,\tau}$. Положим

$$\Phi \colon (Y, Y') \to \Bigl(\int f(Y)\, dX, f(Y)\Bigr).$$

Имеем

$$\|\Phi(Y, Y')\|_{\mathcal{D}} = |f(y)| + \|f(Y)\|_{\alpha} + \|R^{\int f(Y)\, dX}\|_{2\alpha}.$$

По лемме 4

$$\|\Phi(Y, Y')\|_{\mathcal{D}} \le |f(y)| + C(f)\|Y\|_{\mathcal{D}}(\tau^{\alpha} + \|X\|_{\alpha}) + C(f)(1 + \|Y\|_{\alpha})^2(1 + \|X\|_{\alpha})^2(\|X\|_{\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

Следовательно,

$$\|\Phi(Y, Y')\|_{\mathcal{D}} \le |f(y)| + C(f)M(\tau^{\alpha} + \tau^{\beta - \alpha}M) + C(f)(1 + M)^4(\tau^{\beta - \alpha} + \tau^{2\beta - 2\alpha})M.$$

Поскольку $M > |f(y)|$, то для достаточно малого τ получаем оценку

$$\|\Phi(Y, Y')\|_{\mathcal{D}} \le M,$$

из которой следует, что Φ отображает множество $S_{M,\tau}$ в себя.

Пусть теперь $(Y, Y'), (\widetilde{Y}, \widetilde{Y}') \in S_{M,\tau}$. Согласно лемме 5

$$\|\Phi(Y, Y') - \Phi(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}')\|_{\mathcal{D}} = \|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_{\alpha} + \|R^{\int f(Y)\, dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\, dX}\|_{2\alpha} \le$$

$$C(f, M)\bigl(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(\tau^{\alpha} + \|X\|_{\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\|\Phi(Y,Y')-\Phi(\widetilde{Y},\widetilde{Y}')\|_{\mathcal{D}}\le C(f,M)M(\tau^{\alpha}+\tau^{\alpha}+\tau^{2\alpha})\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}.$$

Для достаточно малого τ получаем

$$\|\Phi(Y,Y')-\Phi(\widetilde{Y},\widetilde{Y}')\|_{\mathcal{D}}\le \frac{1}{2}\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}.$$

Итак, при достаточно малом τ отображение Φ является сжимающим отображением полного пространства $S_{M,\tau}$ в себя и по теореме Банаха существует единственная неподвижная точка.

Таким образом, существует такая кривая $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}[0,\tau]$, что

$$Y_t=y+\int_0^t f(Y_u)\,dX_u.$$

Поскольку

$$\Big|\int_s^t f(Y_u)\,dX_u-f(Y_s)X_{st}-Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st}\Big|\le C|t-s|^{3\alpha},$$
$$|f(Y_s)X_{st}+Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st}|\le C|t-s|^{2\beta},$$

то $Y'_t=f(Y_t)$, то $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\beta}[0,\tau]$.

Предположим, что существуют два решения $(Y,Y'),(Z,Z')$. Множество $E=\{t\in[0,\tau]\colon Y_t=Z_t\}$ непусто (содержит $t=0$) и замкнуто. Пусть $t_0=\inf\{t>0\colon t\notin E\}$. Тогда $t_0\in E$. По доказанному выше найдется такое число $\delta>0$, что $Y_t=Z_t$ на $[t_0,t_0+\delta]$, а это противоречит определению t_0. Следовательно, $Y_t=Z_t$ (а значит и $Y'_t=f(Y_t)=f(Z_t)=Z'_t$) на всем отрезке $[0,\tau]$. □

Замечание 12.1. Можно считать, что построенное при доказательстве теоремы решение Y удовлетворяет неравенству

$$\|Y\|\le|y|+|f(y)|+\|X\|_{\beta}+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}+1=M$$

и τ зависит именно от M.

Замечание 12.2. Поскольку решение Y является неподвижной точкой сжимающего отображения

$$(Y,Y')\to\Big(y+\int_0^t f(Y_u)\,dX_u,f(Y_u)\Big),$$

то это решение является пределом по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ последовательности Y^n, где

$$Y^0_t=y+f(y)X_{0t},\quad (Y^0_t)'=f(y),\quad Y^{n+1}_t=y+\int_0^t f(Y^n_u)\,dX_u,\quad (Y^{n+1}_t)'=f(Y^n_t).$$

Непрерывность отображения Ito-Lyons

Теорема 12.2. *Пусть $\beta\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, $(X,\mathbb{X}),(\widetilde{X},\widetilde{\mathbb{X}})\in\mathfrak{C}^{\beta}[0,T]$, причем*

$$\|X\|_{\beta}+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}+\|X\|_{\beta}+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}\le R.$$

Тогда для всякого $y\in\mathbb{R}^d$ существует такое $\tau\in(0,T)$, что на $[0,\tau]$ каждое из грубых дифференциальных уравнений

$$dY_t=f(Y_t)dX_t\quad\text{и}\quad d\widetilde{Y}_t=f(\widetilde{Y}_t)d\widetilde{X}_t$$

имеет единственное решение Y_t и $\widetilde{Y}_t$ соответственно с начальным условием $Y_0=\widetilde{Y}_0=y$ и для всякого $\alpha\in(\frac{1}{3},\beta)$ справедлива оценка

$$\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\le C(f,\alpha,R)\big(\|X-\widetilde{X}\|_{\alpha}+\|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big),$$

где $\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} = \|Y'-\widetilde{Y}'\|_\alpha + \|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}$.

Доказательство. Сразу выбираем число $\tau < 1$ так, что существует единственное решение у каждого из грубых дифференциальных уравнений, причем

$$\|Y\|_{\mathcal{D}}, \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} \le M = 1 + |y| + |f(y)| + 2R.$$

Заметим, что

$$\|X\|_\alpha = \tau^{\beta-\alpha}\|X\|_\beta \le \tau^{\beta-\alpha}M \le M, \quad \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} = \tau^{2\beta-2\alpha}\|\mathbb{X}\|_\beta \le \tau^{2\beta-2\alpha}M \le M.$$

Применяя лемму 5 из прошлой лекции, получаем

$$\|f(Y)-f(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha(\tau^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}M) + \|X-\widetilde{X}\|_\alpha\big),$$

$$\|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \le C(M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha(\tau^\alpha + \tau^{2\beta-2\alpha}M) + \|X-\widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

Поскольку

$$Y_t = y + \int_0^t f(Y_u)\,dX_u, \quad Y'_t = f(Y_t), \quad \widetilde{Y}_t = y + \int_0^t f(\widetilde{Y}_u)\,d\widetilde{X}_u, \quad \widetilde{Y}'_t = f(\widetilde{Y}_t),$$

то

$$\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} = \|f(Y)-f(\widetilde{Y})\|_\alpha + \|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}.$$

Следовательно, верна оценка

$$\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} \le 2C(M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha(\tau^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}M + \tau^{2\beta-2\alpha}M) + \|X-\widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

Для достаточно малого τ можно считать, что

$$2C(M)(\tau^\alpha + \tau^{\beta-\alpha}M + \tau^{2\beta-2\alpha}M) < \frac{1}{2}$$

и верна оценка

$$\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} \le 4C(M)\big(\|X-\widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

$\square$

Замечание 12.3. Выше мы не предполагали ограниченность отображения f, а только ограниченность его производных. Поэтому доказанные выше результаты верны для грубых дифференциальных линейных уравнений. **Если функция f ограничена, то в теореме существования и единственности решения и в теореме о непрерывности отображения Ito-Lyons можно считать, что τ не зависит от начальной точки y и утверждение теорем распространяется на весь отрезок $[0,T]$.**

Замечание 12.4. Пусть $(X,\mathbb{X}) \in \mathfrak{C}_g^\beta([0,T])$ и $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$. Тогда существует такая последовательность гладких кривых X_t^n, что

$$\|X^n - X\|_\alpha + \|\mathbb{X}^n - \mathbb{X}\|_{2\alpha} \to 0,$$

где

$$\mathbb{X}_{st}^n = \int_s^t X_{s\tau}^n \otimes dX_\tau^n,$$

причем $\sup_n\big(\|X^n\|_\beta + \|\mathbb{X}^n\|_{2\beta}\big) < \infty$.

Пусть Y_t^n и Y_t — решения грубых дифференциальных уравнений

$$dY_t^n = f(Y_t^n)\,dX_t^n, \quad dY_t = f(Y_t)\,dX_t, \quad Y_0^n = Y_0 = y.$$

Из последней теоремы следует, что на некотором отрезке $[0,\tau]$ все эти решения существуют и Y^n сходится к Y по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$, в частности по норме пространства $C^\alpha([0,\tau])$. Поскольку кривая X_t^n гладкая, то грубый интеграл совпадает с обычным интегралом Римана–Стилтьеса, а грубое уравнение можно считать обычным дифференциальным уравнением. Таким образом, решение грубого дифференциального уравнения можно считать пределом решений классических уравнений.

Связь со стохастическими уравнениями

Пусть отображение f ограничено, трижды дифференцируемо и его производные ограничены. Предположим, что $(B, \mathbb{B})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу w_t, построенная с помощью интеграла Ито, то есть

$$B_t = w_t, \quad \mathbb{B}^{ij}_{st} = \int_s^t w^i_{s\tau}\, dw^j_\tau.$$

Через $\mathcal{F}_t$ обозначаем фильтрацию, соответствующую винеровскому процессу w_t.

Пусть $Y_t(\omega)$ — решение грубого дифференциального уравнения

$$dY_t(\omega) = f(Y_t(\omega))\, dB_t(\omega), \quad Y_0(\omega) = y, \quad t \in [0, T].$$

Предложение 12.1. *Случайный процесс Y_t согласован с $\mathcal{F}_t$ и является сильным решением стохастического уравнения Ито*

$$dY_t = f(Y_t) dw_t.$$

Доказательство. Мы знаем, что для достаточно малого τ решение Y_t является пределом последовательности

$$Y^0_t = y + f(y)B_t, \quad (Y^0_t)' = f(y), \quad Y^{n+1}_t = y + \int_0^t f(Y^n_u)\, dB_u, \quad (Y^{n+1}_t)' = f(Y^n_t).$$

Ясно, что величины $Y^0_t, (Y^0_t)'$ измеримы относительно $\mathcal{F}_t$. Предположим, что уже известна измеримость $Y^n_t, (Y^n_t)'$. Поскольку

$$Y^{n+1}_t = y + \int_0^t f(Y^n_u)\, dB_u = y + \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]} \big(f(Y^n_u)B_{uv} + Df(Y^n_u)(Y^n_u)'\mathbb{B}_{uv},$$

то величина Y^{n+1}_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, а $(Y^{n+1}_t)' = f(Y^n_t)$. Так как Y_t является пределом Y^n_t, то величина Y_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$. Выше было отмечено, что в случае ограниченной функции f число τ не зависит от начальной точки. Применяя это рассуждение к $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$ и т.д., получаем измеримость Y_t относительно $\mathcal{F}_t$ для всех $t \in [0, T]$.

Так как грубый интеграл от согласованного с $\mathcal{F}_t$ процесса (Y_t, Y'_t) по грубой траектории $(B, \mathbb{B})$ почти наверное совпадает с интегралом Ито от Y_t по w_t, то с вероятностью единица верно равенство

$$Y_t = y + \int_0^t f(Y_u) dw_u.$$

$\square$

Аналогичное утверждение верно для стохастического уравнения в форме Стратоновича.

Итак, подняв траекторию винеровского процесса до грубой траектории с помощью стохастического интеграла, решение стохастического уравнения можно построить совершенно детерминированным образом без привлечения стохастического интеграла.

13. Приложения теории грубых траекторий

Теорема Wong–Zakai

Пусть f — ограниченное и трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными и $(B,\mathbb{B})$ — грубая траектория, полученная из винеровского процесса с помощью интеграла Стратоновича.

Теорема 13.1. *Предположим, что B^n_t — такой кусочно гладкий случайный процесс, что $(B^n,\mathbb{B}^n)$ сходится с вероятностью единица к $(B,\mathbb{B})$ в $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$, где $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ и $\mathbb{B}^n_{st}=\int_s^t B^n_{s\tau}\otimes dB^n_\tau$, причем последний интеграл является интегралом Римана–Стилтьеса. Тогда полученное при каждом ω решение $Y^n_t(\omega)$ классического дифференциального уравнения*

$$dY^n_t(\omega)=f(Y^n_t(\omega))\dot{B}^n_t(\omega)\,dt,\quad Y^n_0=y,$$

с вероятностью единица сходится в $C^\gamma[0,T]$, где $\gamma<\alpha$, к решению Y_t стохастического дифференциального уравнения в форме Стратоновича

$$dY_t=f(Y_t)\circ dw_t,\quad Y_0=y.$$

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из теоремы о непрерывности отображения Ito–Lyons. □

Для применения теоремы достаточно предъявить какое-нибудь приближение процесса $(B,\mathbb{B})$ в $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ кусочно гладким процессом. Пусть для простоты обозначений $T=1$ и

$$B^n_t(\omega)=w_{\frac{k}{2^n}}(\omega)+2^n(t-\tfrac{k}{2^n})\big(w_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega)-w_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\big),\quad t\in[\tfrac{k}{2^n},\tfrac{k+1}{2^n}].$$

Положим

$$\mathbb{B}^n_{st}=\int_s^t B^n_{s\tau}\otimes dB^n_\tau,$$

где интеграл является обычным интегралом Римана–Стилтьеса.

Предложение 13.1. *Для всякого $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\|B^n-B\|_\alpha+\|\mathbb{B}^n-\mathbb{B}\|_{2\alpha}\Big)=0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$B^n=\mathbb{E}\big(w|\sigma_n\big),\quad \sigma_n=\sigma(w_{\frac{k}{2^n}},k=0,1,\ldots,2^n).$$

Кроме того, выполнено

$$(\mathbb{B}^n_{st})^{ij}=\mathbb{E}\Big(\int_s^t w^i_{s\tau}\circ dw^j_\tau\Big|\sigma_n\Big)=\mathbb{E}\big(\mathbb{B}^{ij}_{st}|\sigma_n\big).$$

По теореме Колмогорова для всякого $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

$$|B_{st}(\omega)|\le K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha,\quad |\mathbb{B}_{st}(\omega)|\le\mathbb{K}_{2\alpha}(\omega)|t-s|^{2\alpha}.$$

Следовательно, аналогичные оценки верны для B^n и $\mathbb{B}^n$ с величинами

$$K^n_\alpha=\mathbb{E}(K_\alpha|\sigma_n),\quad \mathbb{K}^n_\alpha=\mathbb{E}(\mathbb{K}_\alpha|\sigma_n).$$

По теореме Дуба

$$\mathbb{E}\sup_n|K^n_\alpha|^2\le C\mathbb{E}|K_\alpha|^2,\quad \mathbb{E}\sup_n|\mathbb{K}^n_\alpha|^2\le C\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^2.$$

Следовательно, с вероятностью единица

$$\sup_n\Big(\|B^n\|_\alpha + \|\mathbb{B}^n\|_{2\alpha}\Big) < \infty.$$

Вместе с уже известным нам свойством, что B^n и $\mathbb{B}^n$ сходятся почти наверное к B и $\mathbb{B}$ соответственно, доказанная выше равномерная ограниченность дает сходимость в $\mathfrak{C}^\gamma[0,1]$ при $\gamma < \alpha$. $\square$

Следующее приложение теории грубых траекторий связано с задачей оценки параметра в коэффициенте сноса.

Оценка параметра

Предположим, что мы наблюдаем траектории процесса X_t, управляемого стохастическим уравнением Ито

$$dX_t = b(X_t)A\,dt + dw_t, \quad X_0 = x_0,$$

где A — постоянный параметр, а b — ограниченное гладкое отображение с ограниченными производными.

Напомним теорему Гирсанова.

Теорема 13.2. *Пусть ξ_t ограниченный случайный процесс на $(C[0,T], P_W)$, согласованный с $\mathcal{F}_t$, где P_W — мера Винера, а $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \le t)$. Тогда относительно меры*

$$Q = P_W \exp\Big(-\int_0^t \xi_s\,dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\xi_s|^2\,ds\Big)$$

процесс

$$\eta_t = w_t + \int_0^t \xi_s\,ds$$

является винеровским процессом, то есть $Q \circ \eta^{-1} = P_W$.

Итак, на $C[0,T]$ есть такая вероятностная мера Q, что процесс

$$X_t - x_0 = w_t + \int_0^t h(X_s)A\,ds.$$

является винеровским процессом. Итак, $Q(X(\omega) \in S) = P_W(\omega \in S - x_0)$,

Переформулируем исходную задачу следующим образом. Считаем, что вероятностное пространство — $C[0,T]$ с мерой Q. Тогда $X_t = x_0 + w_t$, процесс

$$\widetilde{w}_t = w_t - \int_0^t b(X_s)A\,ds$$

является винеровским относительно меры

$$Q_A = \exp\Big(\int_0^t b(X_s)A\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)A|^2\,ds\Big)Q.$$

Оценкой максимального правдоподобия называется величина $\widehat{A}_T(X)$, равная значению A, при котором функция

$$A \to \log\frac{dQ_A}{dQ} = \int_0^T b(X_s)A\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T |b(X_s)A|^2\,ds$$

достигает максимума. Ясно, что

$$\widehat{A}_T(X) = \Big(\int_0^T b(X_s)b(X_s)^t\,ds\Big)^{-1}\int_0^T b(X_s)^t\,dX_s,$$

При некоторых условиях на b можно показать, что $\widehat{A}_T(X)$ сходится к A по вероятности, когда $T \to +\infty$. Например, в одномерном случае имеет место равенство

$$\widehat{A}_T(X) - A = \Big(\int_0^T b(X_s)^2\, ds\Big)^{-1} \int_0^T b(X_s)\, dw_s.$$

Пусть $0 < c_1 \le |b(x)|^2 \le c_2$. Тогда

$$\mathbb{E}|\widehat{A}_T(X) - A|^2 \le c_1^{-1} T^{-2} \mathbb{E} \int_0^T b(X_s)^2\, ds \le c_1^{-1} c_2 T^{-1}$$

и $\mathbb{E}|\widehat{A}_T(X) - A|^2 \to 0$ при $T \to +\infty$.

Поскольку наблюдение за траекторий X_t не является точным, то важнейшим свойством оценки $\widehat{A}_T(X)$ должна быть непрерывная зависимость от X. Однако, в многомерном случае стохастический интеграл

$$\int_0^T h(X_s)^t\, dX_s$$

не является непрерывным относительно нормы $\max_{[0,T]} |X_s|$. Для восстановления свойства непрерывности надо перейти от стохастического интеграла к грубому интегралу, предварительно подняв процесс X_t до грубой траектории $(X, \mathbb{X})$. Тогда получаем оценку

$$\widehat{A}_T(X, \mathbb{X}) = \Big(\int_0^T b(X_s) b(X_s)^t\, ds\Big)^{-1} \int_0^T b(X_s)^t\, dX_s,$$

где последний интеграл является грубым интегралом по $(X, \mathbb{X})$. Отображение

$$(X, \mathbb{X}) \to \widehat{A}_T(X, \mathbb{X})$$

является непрерывным относительно метрики пространства грубых траекторий. Кроме того, можно перейти от интеграла Ито к интегралу Стратоновича и воспользоваться приближением такого интеграла интегралами по гладким кривым.

Грубые уравнения с частными производными первого порядка

Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \beta < \frac{1}{2}$, $T > 0$ и $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}_g^\beta[0, 2T]$.

Рассмотрим грубое транспортное уравнение

$$du + \langle b, \nabla u \rangle dZ = 0$$

с начальным условием $u(T, x) = g(x)$. Функции $b_i^j(x)$, $g(x)$ являются ограниченными, бесконечно гладкими с ограниченными производными. Будем понимать под классическим решением такую непрерывную функцию u на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, что $u(T, x) = g(x)$, функция $x \to u(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема и для всех $s < t$ верно равенство

$$u(t, x) - u(s, x) = \int_s^t \langle b(x), \nabla_x u(\tau, x) \rangle \, dZ_\tau,$$

где интеграл в правой части является грубым интегралом по $(Z, \mathbb{Z})$ от

$$Y_t = \langle b(x), \nabla_x u(t, x) \rangle, \quad Y_t' = \langle b(x), \nabla_x \bigl(\langle b(x), \nabla_x u(t, x) \rangle \bigr) \rangle.$$

Слабым решением называем такую непрерывную функцию u на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, что $u(T, x) = g(x)$, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и для всех $s < t$ справедливо равенство

$$\int \varphi(x) u(t, x) \, dx - \int \varphi(x) u(s, x) \, dx = \int_s^t \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x)) u(\tau, x) \, dx \, dZ_\tau,$$

где интеграл в правой части является грубым интегралом по $(Z, \mathbb{Z})$ от

$$Y_t = \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x)) u(t, x) \, dx, \quad Y_t' = \int \mathrm{div}(b(x) \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))) u(t, x) \, dx.$$

Мы далее ограничимся обсуждением слабого решения.

Для построения решения рассмотрим такие гладкие кривые Z_t^ε на $[0, 2T]$, что

$$(Z^\varepsilon, \mathbb{Z}^\varepsilon) \to (Z, \mathbb{Z})$$

в $\mathfrak{C}^\alpha[0, 2T]$, причем грубые траектории $(Z^\varepsilon, \mathbb{Z}^\varepsilon)$ равномерно (по ε) ограничены в пространстве $\mathfrak{C}^\beta[0, 2T]$ и

$$\mathbb{Z}_{st}^\varepsilon = \int_s^t Z_{s\tau}^\varepsilon \otimes dZ_\tau^\varepsilon.$$

Пусть u^ε — решение классического транспортного уравнения

$$u_t^\varepsilon + \langle b \dot{Z}_t^\varepsilon, \nabla_x u^\varepsilon \rangle - 0$$

с начальным условием $u^\varepsilon(T, x) = g(x)$. Решение u^ε можно построить с помощью характеристик. Для всяких $(\tau, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ через $X_t^\varepsilon(\tau, y)$ обозначим решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt} X_t = b(X_t) Z_t^\varepsilon, \quad X_\tau = y, \quad t \in [\tau, T].$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} u^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y)) = u_t^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y)) + \langle b(X_t^\varepsilon(\tau, y)) Z_t^\varepsilon, \nabla_x u_t^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y)) \rangle = 0$$

и функция $t \to u^\varepsilon(t, X_t^\varepsilon(\tau, y))$ постоянна. Следовательно, верно равенство

$$u^\varepsilon(\tau, y) = g(X_T^\varepsilon(\tau, y)).$$

Можно проверить, что это равенство действительно определяет классическое решение.

В силу непрерывности отображения Ito–Lyons кривые $X^\varepsilon_t(\tau,y)$ сходятся в $C^\alpha[\tau,T]$ при $\varepsilon\to 0$ к решению $X_t(\tau,y)$ задачи Коши для грубого дифференциального уравнения

$$dX_t=b(X_t)\,dZ_t,\quad X_\tau=y,\quad t\in[\tau,T].$$

Поскольку g — гладкая функция, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u^\varepsilon(\tau,y)=u(\tau,y)=g(X_T(\tau,y)).$$

Предложение 14.1. *Функция u непрерывна на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ и является слабым решением грубого транспортного уравнения*

$$du+\langle b,\nabla u\rangle dZ=0.$$

Для доказательства нам потребуется утверждение о гладкой зависимости от начальной точки решения грубого дифференциального уравнения. Справедлив следующий результат (см. теорема 8.10 в книге P.Friz, M.Hairer).

Лемма 14.1. *Пусть $\|Z\|_\beta+\|\mathbb{Z}\|_{2\beta}\le M$ и $|y|\le R$. Решение $X_t(\tau,y)$ бесконечно дифференцируемо по y, причем для всякого $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ найдется такая константа $C(k,M,R,T)>0$, что*

$$\|D^k_yX(\tau,y)\|_{\beta,[\tau,T]}\le C(k,M,R,T),$$

причем эта константа не зависит от τ. Кроме того, $D^k_yX_t$ является решение грубого дифференциального уравнения, которое получается дифференцированием по y грубого уравнения $dX_t=b(X_t)dZ_t$.

Докажем предложение.

Доказательство. Из этой леммы следует гладкость функции $u(\tau,y)=g(X_T(\tau,y))$ по y.

Пусть $s<t$. Имеет место оценка

$$X_T(t,y)-X_T(s,y)=X_T(t,y)-X_T(t,X_t(s,y))=$$
$$=D_yX_T(t,y)\big(y-X_t(s,y)\big)+O(|y-X_t(s,y)|^2),$$

причем константа в оценке $O(|y-X_t(s,y)|^2)$ зависит лишь от M,R,T. Кривая $t\to X_t(s,y)$ контролируема относительно Z и

$$X_t(s,y)-y=X_t(s,y)-X_s(s,y)=b(y)Z_{st}+R^X_{st},$$

причем $\|R^X\|_{2\beta}$ оценивается константой, зависящей лишь от M,R,T. Следовательно,

$$X_T(t,y)-X_T(s,y)=-D_yX_T(t,y)b(y)Z_{st}+O(|t-s|^{2\beta}).$$

Заметим, что $\|D_yX_T(\,\cdot\,,y)b(y)\|_\beta\le C(M,R,T)$. Кривая $Y_t=g(X_T(t,y))$ контролируема относительно Z, причем

$$Y'_t=-Dg(X_T(t,y))D_yX_T(t,y)b(y)=-\langle b(y),\nabla_yu(t,y)\rangle.$$

Следовательно, для всякой функции $\Phi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$ кривая

$$Y_t=\int\Phi(x)u(t,x)\,dx$$

контролируема относительно Z, причем

$$Y'_t=-\int\Phi(x)\langle b(x),\nabla_xu(t,x)\rangle\,dx=\int\mathrm{div}(b(x)\Phi(x))u(t,x)\,dx,$$

причем норма $\|Y\|_{\mathcal{D}^{2\beta}_Z}$ ограничена константой, зависящей только от Φ,M,R,T.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для u^ε справедливо равенство

$$\int \varphi(x)u^\varepsilon(t,x)\,dx - \int \varphi(x)u^\varepsilon(s,x)\,dx = \int_s^t \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u^\varepsilon(\tau,x)\,dx\,dZ^\varepsilon_\tau.$$

Будем интеграл в правой части понимать в виде грубого интеграла от

$$Y^\varepsilon_t = \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u^\varepsilon(t,x)\,dx, \quad (Y^\varepsilon_t)' = \int \mathrm{div}(b(x)\mathrm{div}(b(x)\varphi(x)))u^\varepsilon(t,x)\,dx.$$

Поскольку $\|Y^\varepsilon\|_{\mathcal{D}^{2\beta}_{Z^\varepsilon}}$ равномерно ограничены, то можно (выбирая подпоследовательность) считать, что $\|Y - Y^\varepsilon\|_{\mathcal{D}^{2\beta}_{Z^\varepsilon}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где

$$Y_t = \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u(t,x)\,dx, \quad Y'_t = \int \mathrm{div}(b(x)\mathrm{div}(b(x)\varphi(x)))u(t,x)\,dx.$$

Используя непрерывную зависимость грубого интеграла от интегрируемой кривой и грубой траектории, переходим к пределу при ε и получаем

$$\int \varphi(x)u(t,x)\,dx - \int \varphi(x)u(s,x)\,dx = \int_s^t \int \mathrm{div}(b(x)\varphi(x))u(\tau,x)\,dx\,dZ_\tau.$$

□

Пусть $(B, \mathbb{B})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу и построенная с помощью интеграла Стратоновича.

Если $(Z, \mathbb{Z}) = (B, \mathbb{B})$, то слабое решение $u(t,x,\omega)$ грубого уравнения $du + \langle b, \nabla u\rangle dB$, является решением стохастического транспортного уравнения

$$du + \langle b, \nabla u\rangle \circ dw_t = 0.$$

Грубые уравнения с частными производными второго порядка

Рассмотрим на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ общее грубое параболическое уравнение с частными производными

$$du = Lu + \Gamma(u)dZ,$$

где

$$Lu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\sigma\sigma^t D^2 u\big) + \langle b, \nabla u\rangle + cu,$$
$$G_i(u) = \langle \beta_i, \nabla u\rangle + \gamma_i u.$$

Кроме того, мы предполагаем, что решение удовлетворяет условию $u(x,T) = g(x)$. Слабым решением называем такую непрерывную функцию u на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, что $u(x,T) = g(x)$ для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ справедливо равенство

$$\int u(x,t)\varphi(x)\,dx - \int u(x,s)\varphi(x)\,dx = \int_s^t \int uL^*\varphi\,dx\,d\tau + \int_s^t \int uG^*(\varphi)\,dx\,dZ_\tau,$$

где L^*, G^* — формально сопряженные операторы к L и G (просто результат интегрирования по частям), а второй интеграл в правой части является грубым интегралом по $(Z, \mathbb{Z})$ от

$$Y_t = \int u(x,t)G^*(\varphi)(x)\,dx, \quad Y'_t = \int u(x,t)G^*\big(G^*(\varphi)\big)(x)\,dx.$$

Предложение 14.2. *Пусть все коэффициенты являются бесконечно гладкими ограниченными функциями с ограниченными производными. Тогда слабое решение существует, причем является пределом решений u^ε уравнений*

$$u^\varepsilon_t = Lu^\varepsilon + G(u^\varepsilon)\dot{Z}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(x,T) = g(x),$$

где $(Z^\varepsilon, \mathbb{Z}^\varepsilon)$ *— гладкие кривые, которые сходятся к пространстве грубых траекторий к* $(Z, \mathbb{Z})$*.*

Доказательство повторяет (в основном) рассуждения, проведенные выше для более простого транспортного уравнения. Первым важным наблюдением является представление решения u^ε с помощью формулы Феймана–Каца

$$u^\varepsilon(y, \tau) = \mathbb{E} g(X_T^{\tau,y}) \exp\Big(\int_\tau^T c(X_s^{\tau,y})\, ds + \int_\tau^T \gamma(X_s^{\tau,y}) \dot{Z}_s^\varepsilon\, ds\Big).$$

Случайный процесс $X_t^{\tau,y}$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dw_t + \big(b(X_t) + \beta(X_t)\dot{Z}_s^\varepsilon\big)\, dt, \quad X_\tau = y,$$

Формула Феймана-Каца (если уже известно существование гладкого решения u^ε) выводится из формулы Ито, примененной к

$$u(t, X_t^{\tau,y}) \exp\Big(\int_\tau^t c(X_s^{\tau,y})\, ds + \int_\tau^t \gamma(X_s^{\tau,y}) \dot{Z}_s^\varepsilon\, ds\Big).$$

Далее для обоснования предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ надо переписать стохастическое уравнение в виде грубого дифференциального уравнения.

15. Теорема о восстановлении

Напомним, что лемма о сшивке является ключевым утверждение для построения грубого интеграла и анализа грубых дифференциальных уравнений. Однако лемма о сшивке является исключительно одномерным утверждением. Ключевым утверждением **теории регулярных структур** является теорема о восстановлении, которая обобщает лемму о сшивке на многомерные пространства.

Для получения аналога леммы о сшивке, запишем условие и заключение этой леммы в терминах действия обобщенных функций.

Пусть $A_{st}\colon \Delta_T = \{(s,t)\colon 0 \le s \le t \le T\} \to \mathbb{R}$. Предположим, что $s \to A_{st}$ — непрерывно дифференцируемая функция и $F_t(s) = \partial_s A_{st}$. Будем предполагать также, что кривая γ_t, которая строится в лемме о сшивке по A_{st}, является непрерывно дифференцируемым отображением. Пусть $s < u < t$ и $\varphi_s^{u-s}(\tau) = (u-s)^{-1} I_{[s,u]}(\tau)$. Тогда

$$\int \big(F_t(\tau) - F_u(\tau)\big)\varphi_s^{u-s}(\tau)\, d\tau = (u-s)^{-1}\int_s^u \big(\partial_\tau A_{\tau t} - \partial_\tau A_{\tau u}\big)\, d\tau = (u-s)^{-1}\big(A_{ut} - A_{st} + A_{su}\big).$$

Если выполнено условие $|A_{ut} - A_{st} + A_{su}| \le C|t-s|^{1+\varepsilon}$, то

$$\Big|\int \big(F_t(\tau) - F_u(\tau)\big)\varphi_s^{u-s}(\tau)\, d\tau\Big| \le C|u-s|^{-1}\big(|u-s| + |t-u|\big)^{1+\varepsilon}.$$

Кривая γ_t связана с A_{st} неравенством

$$|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}| \le C'|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Тогда

$$\int \big(\gamma'(\tau) - F_s(\tau)\big)\varphi_s^{u-s}(\tau)\, d\tau = \int \big(\gamma'(\tau) - \partial_\tau A_{s\tau}\big)\varphi_s^{u-s}(\tau)\, d\tau = (u-s)^{-1}\big(\gamma_u - \gamma_s - A_{su}\big)$$

и выполняется неравенство

$$\Big|\int \big(\gamma'(\tau) - F_s(\tau)\big)\varphi_s^{u-s}(\tau)\, d\tau\Big| \le C'|u-s|^{\varepsilon}.$$

Итак, лемму о сшивке можно неформально переформулировать следующим образом: для семейства обобщенных функций (F_t) и функции $\varphi(\tau) = I_{[0,1]}$, удовлетворяющих условию

$$\big|\langle F_t, \varphi_s^{u-s}\rangle - \langle F_u, \varphi_s^{u-s}\rangle\big| \le C|u-s|^{-1}\big(|u-s| + |t-u|\big)^{1+\varepsilon},$$

где $\varphi_s^{u-s}(\tau) = (u-s)^{-1}\varphi\big(\frac{\tau-s}{u-s}\big)$, существует такая обобщенная функция $F = \gamma'$, что

$$\big|\langle F, \varphi_s^{u-s}\rangle - \langle F_s, \varphi_s^{u-s}\rangle\big| \le C'|u-s|^{\varepsilon}.$$

Грубо говоря, для семейства обобщенных функций (F_t), которое «непрерывно» зависит от t, существует обобщенная функция F, которая локально приближается этим семейством.

Рассмотрим еще один пример. Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^d$. Для всякого $y \in \mathbb{R}^d$ через F_y обозначим регулярную обобщенную функцию

$$x \to f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\{x\colon |x| < 1\})$ и $\varphi_y^\delta(x) = \delta^{-d}\varphi\big(\frac{x-y}{\delta}\big)$, $\delta > 0$. Тогда

$$\Big|\langle f, \varphi_y^\delta\rangle - \langle F_y, \varphi_y^\delta\rangle\Big| \le \int \Big|f(x) - f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle\Big|\varphi_y^\delta(x)\, dx \le C(y)\delta^2.$$

Заметим, что

$$\Big|f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle - f(z) - \langle \nabla f(z), x - z\rangle\Big| \le$$

$$\Big|f(y)-f(z)-\langle\nabla f(z),z-y\rangle\Big|+\Big|\langle\nabla f(y)-f(z),x-y\rangle\Big|\le$$
$$C|y-z|^2+C|x-y||y-z|\le C(|y-x|+|y-z|)^2.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\Big|\langle F_z,\varphi_y^\delta\rangle-\langle F_y,\varphi_y^\delta\rangle\Big|\le\big(|y-z|+\delta\big)^2.$$

В этом примере семейство обобщенных функций (F_y), каждая из которых является первыми двумя слагаемыми разложения Тейлора функции f, приближает в каждой точке функцию f.

Итак, отталкиваясь от рассмотренных примеров, можно сформулировать следующий вопрос. Когда для данного семейства обобщенных функций $(F_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ существует обобщенная функция F, которая локально хорошо приближается этим семейством? Ответ на этот вопрос дает теорема о восстановлении.

Теорема 15.1. (M.Harier 2014, L.Zambotti, F.Caravenna 2020) *Пусть $(F_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ — семейство обобщенных функций, причем для всякой функции $\zeta\in\mathcal{D}$ отображение $x\to\langle F_x,\zeta\rangle$ измеримо. Пусть $\varepsilon_n=2^{-n}$. Предположим, что существует такие числа $\gamma>0$, $\alpha\le\gamma$ и обобщенная функция $\varphi\in\mathcal{D}$, что $\displaystyle\int\varphi\,dx\ne0$ и для всякого компакта K справедлива оценка*

$$\Big|\langle F_y,\varphi_x^{\varepsilon_n}\rangle-\langle F_x,\varphi_x^{\varepsilon_n}\rangle\Big|\le C(K)\varepsilon_n^\alpha\Big(|x-y|+\varepsilon_n\Big)^{\gamma-\alpha}\quad\forall x,y\in K,\quad\varphi_x^{\varepsilon_n}(z)=\varepsilon_n^{-d}\varphi\big(\tfrac{x-z}{\varepsilon_n}\big).$$

Тогда существует единственная обобщенная функция $RF\in\mathcal{D}'$, для которой на каждом компакте K для всякой функции $\psi\in\mathcal{D}(B(0,1))$, $\|\psi\|_{C^m}\le1$, $m>-\alpha$, справедливо неравенство

$$\Big|\langle RF,\psi_x^{\varepsilon_n}\rangle-\langle F,\psi_x^{\varepsilon_n}\rangle\Big|\le C(K,m)\varepsilon_n^\gamma\quad\forall x\in K.$$

Литература

1. Peter K. Friz and Martin Hairer. A Course on Rough Paths, With an Introduction to Regularity Structures. Springer, 2nd edition, 2020.

2. Terry J. Lyons, Michael Caruana, Thierry Levy. Differential Equations Driven by Rough Paths. LNM, volume 1908, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

3. Hairer, M. (2014). A theory of regularity structures. Inventiones mathematicae, 198(2), 269–504.

4. Andrew L. Allan. Rough Path Theory. Lecture Notes. 2021.

5. Ilya Chevyrev, Andrey Kormilitzin. A Primer on the Signature Method in Machine Learning. arXiv:1603.03788v1 2016

6. Ikeda, N., Watanabe, S. (1989). Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland.

7. P. Friz and N. Victoir. Multidimensional stochastic processes as rough paths: theory and applications. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 120. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.