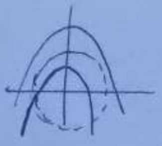
30.09.20. Вдогонку. ДЗ от семинара 4

① $x^2+y \to extr$

$x^2+y^2-1 \le 0$

$-x \le 0$

$-y \le 0.$



Решение: $\Lambda(x,y) = \lambda_0(x^2+y) + \lambda_1(x^2+y^2-1) - \lambda_2 x - \lambda_3 y$

$\Lambda'_x = 2x\lambda_0 + 2x\lambda_1 - \lambda_2$

$\Lambda'_y = \lambda_0 + 2y\lambda_1 - \lambda_3$ $\Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 2(\lambda_0+\lambda_1) & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(\lambda_0+\lambda_1) - \lambda_2 = 0 \\ 2y\lambda_1 + \lambda_0 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \\ \lambda_2 x = 0 \\ \lambda_3 y = 0. \\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0. \end{cases}$$

~~Если~~

и ещё $x^2+y^2-1 \le 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0.$

~~[illegible]~~

Если $\lambda_0 = 0$: $\begin{cases} 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2y\lambda_1 - \lambda_3 = 0. \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \\ \lambda_2 x = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3 \ge 0. \end{cases}$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\begin{cases} 0 - \lambda_2 = 0 \\ 0 - \lambda_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \bar{\lambda} = (\lambda_0; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = \bar{0}$ – не подх.

Если $\lambda_1 \ne 0$, то $\begin{cases} x = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \\ y = \frac{\lambda_3}{2\lambda_1} \\ x^2+y^2 = 1. \\ \lambda_2 x = 0 \\ \lambda_3 y = 0. \end{cases} \Rightarrow \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 4\lambda_1^2$

(из ур-я $x = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}$)

$\lambda_2 x = 0 \longrightarrow$ если $\lambda_2 = 0$, то $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \lambda_3 = 0$ (из ур-я $\lambda_3 y = 0$).

но $\underset{\pm1}{y} = \frac{\lambda_3}{2\lambda_1} = 0 \Rightarrow$ против.

если $\lambda_2 \ne 0$, то $x = 0$. – из ур-я $\lambda_2 x = 0$.

но $\underset{0}{x} = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \ne 0 \Rightarrow$ против.

$\Rightarrow \lambda_0 \ne 0.$

а) Будем искать минимумы

$\Rightarrow$ положим $\lambda_0 = 1.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(1+\lambda_1) - \lambda_2 = 0 \\ 2y\lambda_1 + 1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \\ \boxed{\lambda_2 x = 0} \\ \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_1; \cancel{\lambda_1}; \lambda_2; \lambda_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Из ур-я $\lambda_2 x = 0$: если $x=0$, то из $2x(1+\lambda_1) - \lambda_2 = 0$ − получаем $\lambda_2 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0. \\ 2y\lambda_1 + 1 - \lambda_3 = 0. \\ \lambda_1(y^2 - 1) = 0 \\ \lambda_3 y = 0. \\ \lambda_1; \lambda_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

если $y = 0$, то $\begin{cases} \lambda_2 = 0. \\ \lambda_3 = 1. \\ \lambda_1 = 0. \\ \lambda_1; \lambda_3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \left(0;0;\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\lambda_0}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda_1}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda_2}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\lambda_3}\right)$ Ⓐ

если $\lambda_3 = 0$, то $\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ 2y\lambda_1 + 1 = 0 \\ \lambda_1(y^2-1) = 0 \\ \lambda_1 \geqslant 0. \end{cases}$

Заметим, что $\lambda_1 = 0$ − не подх, т.к $2y\lambda_1 + 1 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ 2y\lambda_1 = -1 \\ y = \pm 1 \\ \lambda_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$y = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1}{2y} = -\frac{1}{2} < 0$ − не подх

$y = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2y} = \frac{1}{2} \geqslant 0$ − подх.

$\Rightarrow \left(0;-1;\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\lambda_0}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{2}}}{\lambda_1}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda_2}\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\lambda_3}\right)$ Ⓑ

но она не удовл. исх. усл. $y \geqslant 0$.

если $\lambda_2 = 0$, то $\begin{cases} 2x(1+\lambda_1) = 0 \\ 2y\lambda_1 + 1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_1; \lambda_3 \geqslant 0 \end{cases}$

если $\lambda_1 = -1$ − не подх, т.к $\lambda_1, \lambda_3 \geqslant 0$ должно быть.

если $x = 0$, то $\begin{cases} 2y\lambda_1 + 1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(y^2-1) = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_1; \lambda_3 \geqslant 0. \end{cases}$

если $y = 0$, то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

$\Rightarrow (0;0;1;0;0;1)$ − уже была эта точка

если $\lambda_3 = 0$, то заметим, что $2y\lambda_1 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1. \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2y} \\ \lambda_1; \lambda_3 \geqslant 0 \end{cases}$ $y = 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ − не подх; $y = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ − подх; $(0;-1;1;\frac{1}{2};0;0)$ − была

$\Rightarrow$ на ветви 1 подозрит. точка:

Ⓐ $(0;0;1;0;0;1)$

Ⓑ ~~$(0;-1;1;\frac{1}{2};0;0)$~~

б) Будем искать максимум

=> положим $\lambda_0 = -1$.

стр 2

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(-1+\lambda_1)-\lambda_2=0 \\ 2y\lambda_1 - 1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1)=0 \\ \lambda_2 x = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3 \geq 0. \end{cases}$$

если $x=0$, то из $2x(-1+\lambda_1)-\lambda_2=0$ получаем $\lambda_2=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=0. \\ 2y\lambda_1-1-\lambda_3=0 \\ \lambda_1(y^2-1)=0 \\ \lambda_3 y=0 \\ \lambda_1;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$$

если $y=0$, то $\begin{cases} \lambda_2=0 \\ \lambda_3=-1 \end{cases}$ - не подх

если $\lambda_3=0$, то $\begin{cases} \lambda_2=0 \\ 2y\lambda_1=1 \\ \lambda_1(y^2-1)=0 \\ \lambda_1\geq 0. \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_1\neq 0$, т.к $2y\lambda_1=1$.

$\Rightarrow \begin{cases} y=\pm 1. \\ \lambda_1=\frac{1}{2y} \\ \lambda_1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $y=1$ - подх т.к $\lambda_1=\frac{1}{2}$

$y=-1$ - не подх т.к $\lambda_1=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (0;1;-1;\frac{1}{2};0;0)$ Ⓒ

если $\lambda_2=0$, то $\begin{cases} 2x(-1+\lambda_1)=0 \\ 2y\lambda_1-1-\lambda_3=0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1)=0 \\ \lambda_3 y=0 \\ \lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0 \end{cases}$

если $y=0$, то $\begin{cases} 2x(-1+\lambda_1)=0 \\ \lambda_3=-1 \end{cases}$ - не подх

если $\lambda_3=0$, то $\begin{cases} 2x(-1+\lambda_1)=0 \\ 2y\lambda_1=1 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1)=0 \\ \lambda_1\geq 0. \end{cases}$

если $\lambda_1=1$, то $\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x^2=\frac{3}{4} \end{cases}$ Ⓓ

$\Rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1;1;0;0)$

$(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1;1;0;0)$ не подх т.к. не удовл. исх. усл. $x\geq 0$

если $x=0$, то $\begin{cases} 2y\lambda_1=1 \\ \lambda_1(y^2-1)=0 \\ \lambda_1\geq 0. \end{cases}$

$\lambda_1\neq 0$ т.к $2y\lambda_1=1$

$\Rightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ \lambda_1=\frac{1}{2y} \\ \lambda_1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow y=1.$

$\Rightarrow (0;1;-1;\frac{1}{2};0;0)$

~~эта точка уже~~ была

=> на вестах есть 2 подозр. точки:

Ⓒ $(0;1;-1;\frac{1}{2};0;0)$

Ⓓ $(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1;1;0;0)$

~~Ⓔ $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1;1;0;0)$~~

Теперь считаем гессиан, конус и L.

Для минимума: $L=\{(1;0;0;1)\}$

гессиан = $\begin{pmatrix} 2(\lambda_0+\lambda_1) & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$ конус: $df_0 = (2x;1)$, $df_1 = (2x,2y)$, $df_2 = (-1;0)$, $df_3 = (0;-1)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2xh_1 + h_2 \le 0 \\ h_1x + h_2y \le 0 \\ -h_1 \le 0 \\ -h_2 \le 0. \end{cases}$

точка Ⓐ $= (0;0;1;0;0;1)$

~~гессиан $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $H_{11} = 2 > 0$, $H_{12} = 0 \ge 0$ — не вып. дост. усл.~~

Из усл. $\begin{cases} 2xh_1 + h_2 \le 0 \\ h_1x + h_2y \le 0 \\ -h_1 \le 0 \\ -h_2 \le 0 \end{cases}$ получаем $x=0$, $y=0$ $\begin{cases} \boxed{h_2 \le 0} \\ 0 \le 0 \\ h_1 \ge 0 \\ \boxed{h_2 \ge 0} \end{cases} \Rightarrow$ Итак $\begin{cases} h_2 = 0 \\ h_1 \ge 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{h} = (\underset{\ge 0}{h_1};0)$

$\Rightarrow (h_1;0)\begin{pmatrix} 2(\lambda_0+\lambda) & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2h_1^2(\lambda_0+\lambda_1) \longrightarrow \lambda_0+\lambda_1 = 1+0 = 1 \Rightarrow$ ге. $\ge 2 \cdot \|h\|$ — верно

~~$\lambda_0 + \lambda_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ ге. $\ge \frac{2 \cdot 3}{2}\|h\|$ — верно~~

$\Rightarrow$ точка A — это точка **locmin** (а $\Rightarrow$ и globmin, т.к. $x^2+y^2 \le 1$ — компакт)

~~Точка Ⓑ $= (0;-1;1;\frac{1}{2};0;0)$~~

~~из усл. конуса: $\begin{cases} 2xh_1 + h_2 \le 0 \\ h_1x + h_2y \le 0 \\ -h_1 \le 0 \\ -h_2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 \le 0 \\ -h_2 \le 0 \\ -h_1 \le 0 \\ -h_2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = 0 \\ h_1 \ge 0. \end{cases}$~~

~~$\Rightarrow h$~~

~~Для~~ **Для максимума**: $L = \{(-1;\frac{1}{2};0;0); (-1;1;0;0)\}$. $C = (0;1)$ $D = (\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$

точка Ⓒ $= (0;1)$: $\begin{cases} 2xh_1 + h_2 \le 0 \\ h_1x + h_2y \le 0 \\ -h_1 \le 0 \\ -h_2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 \le 0 \\ h_2 \le 0 \\ h_1 \ge 0 \\ \boxed{h_2 \ge 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = 0 \\ h_1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{h} = (\underset{\ge 0.}{h_1};0)$

$\Rightarrow h^T \Gamma h = (h_1;0)\begin{pmatrix} 2(\lambda_0+\lambda_1) & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2h_1^2(\lambda_0+\lambda_1) \Longrightarrow 2h_1^2(-1+\frac{1}{2}) = -h_1^2$?

$\Downarrow$

$2h_1^2(1-1) = 0.$

$\Rightarrow \max\limits_{\lambda \in L} h^T \Gamma h = 0 \Rightarrow$ не вып. дост. усл. max

точка Ⓓ $= (\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$ $\begin{cases} \sqrt{3}h_1 + h_2 \le 0 \\ \sqrt{3}h_1 + h_2 \le 0 \\ h_1 \ge 0 \\ h_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow h_1 = h_2 = 0.$

$\Rightarrow h^T \Gamma h = 0.$

И что делал?

ⓘ стр 3

② $$\begin{cases} 2x^2+2x+4y-3z \to extr \\ 8x-3y+3z \le 40 \\ -y \le 0 \\ -2x+y-z=-3 \end{cases}$$

Решение: $\Lambda(x,y,z) = \lambda_0(2x^2+2x+4y-3z)+\lambda_1(8x-3y+3z-40)-\lambda_2 y+\lambda_3(-2x+y-z+3)$

$$\Lambda'_x = \lambda_0(4x+2)+8\lambda_1-2\lambda_3$$

$$\Lambda'_y = 4\lambda_0-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 \quad \Rightarrow \text{гессиан} = \begin{pmatrix} 4\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda'_z = -3\lambda_0+3\lambda_1-\lambda_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ 4\lambda_0-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3\lambda_0+3\lambda_1-\lambda_3=0 \\ \lambda_1(8x-3y+3z-40)=0 \\ \lambda_2 y=0. \\ 8x-3y+3z\le 40 \\ y\ge 0 \\ -2x+y-z=-3 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\ge 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0=0$: $$\begin{cases} 8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ -3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1-\lambda_3=0. \\ \lambda_1(8x-3y+3z-40)=0. \\ \lambda_2 y=0 \\ -2x+y-z=-3 \\ 8x-3y+3z\le 40 \\ y\ge 0. \end{cases}$$

– если $\lambda_1=0$, то $\lambda_3=0 \Rightarrow \lambda_2=0$ – плохо.

$\Rightarrow \lambda_1 \ne 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_3=4\lambda_1 \\ \lambda_2=\lambda_1 \\ \lambda_3=3\lambda_1 \\ \lambda_2 y=0 \\ 8x-3y+3z-40=0. \\ -2x+y-z=-3. \end{cases} \to \lambda_1=0=\lambda_3=\lambda_2 \Rightarrow \text{все множители} = 0 \text{ плохо.}$$

а) Пусть $\lambda_0=1$ – т.е ищем минимум.

$$\to \begin{cases} 2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ 4-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0. \\ \lambda_1(8x-3y+3z-40)=0 \\ \lambda_2 y=0 \\ 8x-3y+3z\le 40 \\ y\ge 0 \\ -2x+y-z=-3 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\ge 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 y=0 \longrightarrow$ если $\lambda_2=0$, то $$\begin{cases} 2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0. \\ 4-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0. \\ \ldots \end{cases}$$ $\left.\begin{matrix} 4-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0. \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1=0 \Rightarrow$ против.

$\lambda_2 y=0 \longrightarrow$ если $y=0$, то См. на след. стр.

↓ если $y=0$, то:
$$\begin{cases} 2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ 4-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0 \\ \lambda_1(8x+3z-40)=0 \\ -2x-z=-3 \\ 8x+3z-40\le 0 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\ge 0. \end{cases}$$
(2-е и 3-е уравнения) $\Rightarrow \lambda_2=1$

$\longrightarrow$ если $\lambda_1=0$, то
$$\begin{cases} 2(2x+1)=2\lambda_3 \\ 4-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3-\lambda_3=0 \\ -2x-z+3=0 \\ 8x+3z-40\le 0 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=4+\lambda_3=1 \\ \lambda_3=-3 \end{cases}$$
$\Rightarrow 2x+1=-3$

$2x=-4$

$x=-2$

$\Rightarrow z=-2x+3=4+3=7.$

проверим, что $8x+3z-40\le 0$:

$x=-2$

$z=7$

$\Rightarrow 8x+3z=-16+21\le 40$ - верно

$\Rightarrow (-2;0;7;1;0;1;-3)$ Ⓐ

если $8x+3z-40=0$:
$$\begin{cases} 2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ 4-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0. \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0 \\ 8x+3z-40=0. \\ -2x-z+3=0. \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\ge 0. \end{cases}$$
(2-е и 3-е) $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2=1. \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0. \end{cases}$

(4-е и 5-е) $\Rightarrow -z-28=0 \Rightarrow z=-28$

$x=-\frac{z+3}{2}=\frac{31}{2}.$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(31+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 8\lambda_1-2\lambda_3+64=0. \\ 3\lambda_1-\lambda_3-3=0. \end{cases}$

$2\lambda_1+70=0.$

$\Rightarrow \lambda_1=-35<0$ - не подх. т.к $\lambda_1\ge 0$.

$\Rightarrow$ 1 подозрит. точка на locmin:

Ⓐ $(-2;0;7;1;0;1;-3)$

б) Ищем locmax, т.е $\lambda_0=-1$.
$$\Rightarrow \begin{cases} -2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0. \\ -4-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 3+3\lambda_1-\lambda_3=0 \\ \dots \end{cases}$$
(2-е и 3-е) $\Rightarrow \lambda_2=-1$ - против. т.к $\lambda_2\ge 0$

$\Rightarrow$ нет подозрит. точек на locmax.

Исследуем точку A через дост. усл: гессиан $=\begin{pmatrix} 4\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda_0=1}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

конус =:

$df_1=(4x+2;4;-3)$

$df_2=(8;-3;3)$

$df_3=(0;-1;0)$

$df_4=(-2;1;-1)$
$$\Rightarrow \begin{cases} (4x+2)h_1+4h_2-3h_3\le 0 \\ 8h_1-3h_2+3h_3\le 0. \\ h_2\ge 0 \\ -2h_1+h_2-h_3=0 \Rightarrow h_3=-2h_1+h_2 \end{cases}$$
$\Rightarrow$ в т.Ⓐ: $\begin{cases} -6h_1+4h_2-3h_3\le 0. \\ 8h_1-3h_2+3h_3\le 0 \\ h_2\ge 0 \\ h_3=-2h_1+h_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{6h_1}+4h_2+\cancel{6h_1}-3h_2\le 0 \Rightarrow h_2\le 0 \\ 8h_1-\cancel{3h_2}-6h_1+\cancel{3h_2}\le 0 \\ h_2\ge 0 \\ h_3=-2h_1+h_2 \end{cases} \Rightarrow h_2=0$

$\Rightarrow \bar{h}=(h_1; h_2; -2h_1+h_2)$

$$\Rightarrow h^T\Gamma h=(h_1\ h_2\ -2h_1+h_2)\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\-2h_1+h_2\end{pmatrix}=4h_1^2=\frac{4}{5}\cdot\|h\|^2\geqslant c\cdot\|h\|^2 \Rightarrow \text{это всmax}$$

но $\begin{cases}h_1\leq 0\\h_2=0\end{cases}$

$h_3=-2h_1+h_2=-2h_1 \Rightarrow \|h\|^2=h_1^2+4h_1^2=5h_1^2$

③ $\begin{cases}2x^2+2x+4y-3z\to extr\\8x-3y+3z-40\leq 0\\-2x+y-z+3\leq 0\\-y\leq 0\end{cases}$

Решение: $\Lambda(x,y,z)=\lambda_0(2x^2+2x+4y-3z)+\lambda_1(8x-3y+3z-40)\overset{-\lambda_2 y}{+}\lambda_3(-2x+y-z+3)$

$\Lambda'_x=\lambda_0(4x+2)+8\lambda_1-2\lambda_3$

$\Lambda'_y=4\lambda_0-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3$

$\Lambda'_z=-3\lambda_0+3\lambda_1-\lambda_3$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda_0(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0\\4\lambda_0-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\-3\lambda_0+3\lambda_1-\lambda_3=0\\\lambda_1(8x-3y+3z-40)=0\\\lambda_2 y=0\\\lambda_3(-2x+y-z+3)=0\\8x-3y+3z-40\leq 0\\-2x+y-z+3\leq 0\\-y\leq 0.\\\lambda_0;\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq 0\end{cases}$$

$\left.\begin{matrix}4\lambda_0-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\-3\lambda_0+3\lambda_1-\lambda_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda_2=\lambda_0$

Если $\lambda_0=0$, то $\begin{cases}8\lambda_1-2\lambda_3=0\Rightarrow 4\lambda_1=\lambda_3\\\lambda_2=\lambda_0=0\\3\lambda_1-\lambda_3=0\\\dots\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=0\Rightarrow\lambda_3=0\Rightarrow\bar\lambda=(\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)=\bar 0$ – плохо.

Если $\lambda_0=-1$, то сразу получаем $\lambda_2=\lambda_0=-1<0$ – не подх

$\Rightarrow\lambda_0\neq -1\Rightarrow$ на всmax – нет подозрит. точек.

Если $\lambda_0=1$, т.е. ищем всmin, то

$$\begin{cases}2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0\\\lambda_2=\lambda_0=1\\-3+3\lambda_1-\lambda_3=0\\\boxed{\lambda_1(8x+3z-40)=0}\\1\cdot y=0\quad\Rightarrow\boxed{y=0}\\\lambda_3(-2x-z+3)=0\\8x+3z-40\leq 0\\-2x+z+3\leq 0\\\lambda_1;\lambda_3\geq 0\end{cases}$$

$\to$ если $\lambda_1=0\dots$

$\to$ если $8x+3z-40=0\dots$

→ если $\lambda_1=0$, то: $\begin{cases} 2(2x+1)-2\lambda_3=0 \\ \lambda_2=\lambda_0=1 \\ -3-\lambda_3=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_3=-3<0$ – не подх. (т.к $\lambda_0;\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\geq0$)

↓ Если $8x+3z-40=0$: $\begin{cases} 2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ \lambda_2=\lambda_0=1 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0. \\ \boxed{\lambda_3(-2x-z+3)=0} \\ -2x-z+3\leq0 \\ \lambda_1;\lambda_3\geq0 \end{cases}$

→ если $\lambda_3=0$, то $-3+3\lambda_1-0=0 \Rightarrow \underline{\lambda_1=1}.$

$\Rightarrow 2(2x+1)+8-0=0$

$\Rightarrow 2x+1=-4$

$2x=-5$

$x=-\frac{5}{2}$ ⇒ рд $8x+3z-40=0$,

то $z=\frac{40-8x}{3}=\frac{40+20}{3}=20$

⇒ ~~z $-2x+3=8$.~~ но $-2x-z+3\leq0$, т.е $z\geq-2x+3=8$ – верн.

$\Rightarrow \boxed{\left(-\frac{5}{2};0;20;1;1;1;0\right)}$ Ⓐ

↓ если $-2x-z+3=0$: $\begin{cases} 2(2x+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ \lambda_2=\lambda_0=1. \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0 \\ -2x-z+3=0 \\ \lambda_1;\lambda_3\geq0. \\ 8x+3z-40=0. \end{cases}$ $\Rightarrow -z-28=0.$

$\Rightarrow z=-28$

$\Rightarrow x=\frac{-z+3}{2}=\frac{31}{2}.$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(31+1)+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ -3+3\lambda_1-\lambda_3=0 \\ \lambda_1;\lambda_3\geq0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 64+8\lambda_1-2\lambda_3=0 \\ 6-6\lambda_1+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1;\lambda_3\geq0 \end{cases}$ $\Rightarrow 2\lambda_1=-70$

$\Rightarrow \lambda_1=-35<0$ –

<u>не подх</u>.

⇒ 1 подозрит. точка на локmin:

Ⓐ $\left(-\frac{5}{2};0;20;1;1;1;0\right)$

Проверим её с помощью дост. усл: гессиан $=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ | $h^T\Gamma h=4h_1^2$ ← $=\frac{4\cdot9}{73}\cdot\|h\|^2\geq c\|h\|^2$ ⇒ (локmin)

Конус: $df_1=(4x+2;4;-3)$

$df_2=(8;-3;3)$

$df_3=(0;-1;0)$

$df_4=(-2;1;-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} (4x+2)h_1+4h_2-3h_3\leq0 \\ 8h_1-3h_2+3h_3\leq0 \\ h_2\geq0 \\ -2h_1+h_2-h_3\leq0 \end{cases}$

в т.А: $\begin{cases} -8h_1+4h_2-3h_3\leq0. \\ 8h_1-3h_2+3h_3\leq0 \\ h_2\geq0 \\ -2h_1+h_2-h_3\leq0 \end{cases}$ $\Rightarrow h_2\leq0.$

$\Rightarrow h_2=0.$

$\Rightarrow \begin{cases} -8h_1-3h_3\leq0 \\ 8h_1+3h_3\leq0. \\ -2h_1-h_3\leq0. \end{cases}$ $\Rightarrow 8h_1+3h_3=0$

$h_3=-\frac{8h_1}{3}$

$\Rightarrow \|h\|^2=h_1^2+\frac{64h_1^2}{9}=\frac{73h_1^2}{9}$

④ $\begin{cases} xz - 2y \to extr \\ 2x - y - 3z - 10 \leq 0 \\ -y \leq 0 \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$

Решение: $\Lambda(x, y\ z) = \lambda_0 (xz - 2y) + \lambda_1 (2x - y - 3z - 10) - \lambda_2 y + \lambda_3 (3x + 2y + z - 6)$

$\Lambda'_x = \lambda_0 z + 2\lambda_1 + 3\lambda_3$

$\Lambda'_y = -2\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3$ $\Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Lambda'_z = x\lambda_0 - 3\lambda_1 + \lambda_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 z + 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ x\lambda_0 - 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (2x - y - 3z - 10) = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$: $\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0. \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ из $-\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$ – получаем $\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \bar{\lambda} = (\lambda_0; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = \bar{0}$ – так нельзя

Пусть $\lambda_0 = 1$ – т.е. ищем минимум

$$\Rightarrow \begin{cases} z + 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2 - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ x - 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (2x - y - 3z - 10) = 0 \\ \boxed{\lambda_2 y = 0} \\ 3x + 2y + z - 6 = 0 \\ y \geq 0 \\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ если $y = 0$: $\begin{cases} z + 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2 - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ x - 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 (2x - 3z - 10) = 0 \\ 3x \cancel{+2y} + z - 6 = 0 \\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ если $\lambda_1 = 0$, то

$$\begin{cases} z + 3\lambda_3 = 0 \Rightarrow z = -3\lambda_3 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2 = 0 \\ x + \lambda_3 = 0 \Rightarrow x = -\lambda_3 \\ 3x + z - 6 = 0 \Rightarrow -3\lambda_3 - 3\lambda_3 - 6 = 0 \\ \lambda_0; \lambda_1; \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = -1.$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2\lambda_3 - 2 = -4 < 0$ так нельзя

$\longrightarrow$ если $2x - 3z - 10 = 0$, то

$$\begin{cases} z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \Rightarrow z=-2\lambda_1-3\lambda_3 \\ -\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3-2=0 \\ x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \Rightarrow x=3\lambda_1-\lambda_3 \\ 3x+z-6=0 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\geqslant 0 \\ 2x-3z-10=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 3(3\lambda_1-\lambda_3)-2\lambda_1-3\lambda_3-6=0. \\ 2(3\lambda_1-\lambda_3)+3(2\lambda_1+3\lambda_3)-10=0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7\lambda_1-6\lambda_3-6=0 & |7 \\ 12\lambda_1+7\lambda_3-10=0 & |6 \end{cases} \Rightarrow (49+72)\lambda_1-60-426=0.$$

$$121\lambda_1=102$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{102}{121}$$

$$\Rightarrow \lambda_3=\frac{7\lambda_1-6}{6}=\frac{7\cdot 102-121\cdot 6}{121\cdot 6}=\frac{714-726}{121\cdot 6}$$

$$=\frac{-12}{121\cdot 6}=\frac{-2}{121}$$

~~$\begin{cases} 3x+z-6=0 & |3 \\ 2x-3z-10=0 \end{cases} \Rightarrow 11x-28=0$~~

~~$x=\frac{28}{11}$~~

~~$z=6-3x=\frac{66-60-24}{11}=\frac{-18}{11}.$~~

$$\Rightarrow \lambda_2=-\lambda_1+2\lambda_3-2=$$

$$=\frac{-102}{121}-\frac{4}{121}-\frac{242}{121}=\frac{-348}{121}<0.$$

$\Rightarrow$ не подх.

если $\lambda_2=0$: $\begin{cases} z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_3-2=0 \\ x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ \boxed{\lambda_1(2x-y-3z-10)=0} \\ 3x+2y+z-6=0 \\ y\geqslant 0 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\geqslant 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ если $\lambda_1=0$, то $\begin{cases} z=-3\lambda_3 \\ \lambda_3=1 \end{cases} \Rightarrow z=-3$

$\begin{cases} x=-\lambda_3 \quad x=-1 \\ 3x+2y+z-6=0 \Rightarrow -3+2y+3-6=0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

$2y=6$

$y=3.$

$$\Rightarrow \boxed{(-1;3;-3;1;0;0;1)} \text{ Ⓐ}$$

если $2x-y-3z-10=0$,

то $\begin{cases} z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \Rightarrow z=-2\lambda_1-3\lambda_3 \\ -\lambda_1+2\lambda_3-2=0 \\ x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \Rightarrow x=3\lambda_1-\lambda_3 \\ \left.\begin{array}{l} 2x-y-3z-10=0 \\ 3x+2y+z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x-5z-26=0 \\ y\geqslant 0 \\ \lambda_0;\lambda_1;\lambda_2\geqslant 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 7(-2\lambda_1-3\lambda_3)-5(3\lambda_1-\lambda_3)-26=0.$

т.е $\begin{cases} -29\lambda_1-16\lambda_3-26=0. \\ -\lambda_1+2\lambda_3-2=0. \quad |8 \end{cases} \Rightarrow -37\lambda_1-42=0.$

$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{42}{37}<0$ - не подх.

$\Rightarrow$ только 1 подозрит. точка на вост-ть:

Ⓐ $=(-1;3;-3;1;0;0;1)$

б) пусть $\lambda_0=-1$, т.е ищем locmax

$\Rightarrow \begin{cases} -z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \\ 2-\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ -x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_1(2x-y-3z-10)=0 \\ \boxed{\lambda_2 y=0} \\ 3x+2y+z-6=0 \\ y\geqslant 0 \\ \lambda_1;\lambda_2\geqslant 0. \end{cases}$

$\longrightarrow$ если $y=0$: $\begin{cases} -z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3+2=0 \\ -x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ \boxed{\lambda_1(2x-3z-10)=0} \\ \lambda_1;\lambda_2\geqslant 0. \\ 3x+z-6=0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ если $\lambda_1=0$, то $\begin{cases} z=3\lambda_3 \\ -\lambda_2+2\lambda_3+2=0 \\ x=\lambda_3 \\ \lambda_1;\lambda_2\geqslant 0. \\ 3x+z-6=0. \end{cases} \Rightarrow 3\lambda_3+3\lambda_3=6.$

$\Rightarrow \lambda_3=1.$

$\Rightarrow \lambda_2=2\lambda_3+2=4$

$\Rightarrow \boxed{(1;0;3;-1;0;4;1)\ Ⓑ}$

если $2x-3z-10=0$:

$\begin{cases} -z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 & \Rightarrow z=2\lambda_1+3\lambda_3 \\ -\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3+2=0 \\ -x-3\lambda_1+\lambda_3=0 & \Rightarrow x=-3\lambda_1+\lambda_3 \\ 2x-3z-10=0. \\ 3x+z-6=0 \\ \lambda_1;\lambda_2\geqslant 0. \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} 2x-3z-10=0. \\ 3x+z-6=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2(-3\lambda_1+\lambda_3)-3(2\lambda_1+3\lambda_3)-10=0 \\ 3(-3\lambda_1+\lambda_3)+2\lambda_1+3\lambda_3-6=0. \end{cases}$

$\begin{cases} -12\lambda_1-7\lambda_3-10=0 \quad |6 \\ -7\lambda_1+6\lambda_3-6=0 \quad |7 \end{cases}$

$\Rightarrow -(72+49)\lambda_1-60-42=0.$

$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{102}{121}<0$ - не подх.

↓ если $\lambda_2=0$: $\begin{cases} -z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_3+2=0 \\ -x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ \boxed{\lambda_1(2x-y-3z-10)=0} \\ 3x+2y+z-6=0 \\ y\geq 0 \\ \lambda_1;\lambda_2\geq 0 \end{cases}$

→ если $\lambda_1=0$, то $\begin{cases} z=3\lambda_3 \\ \lambda_3=-1 \\ x=\lambda_3 \\ 3x+2y+z-6=0. \\ y\geq 0 \\ \lambda_1;\lambda_2\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=-1$, $z=-3$

$\Rightarrow 2y=-3x-z+6=3+3+6$

$\Rightarrow y=6$

$\Rightarrow (-1;6;-3;-1;0;0;-1)$ Ⓒ

↓ если $2x-y-3z-10=0$, то

$\begin{cases} -z+2\lambda_1+3\lambda_3=0 \\ -2\lambda_1+2\lambda_3+2=0 \\ -x-3\lambda_1+\lambda_3=0 \\ 2x-y-3z-10=0 \\ 3x+2y+z-6=0 \\ y\geq 0 \\ \lambda_1;\lambda_2\geq 0. \end{cases}$

$\Rightarrow z=2\lambda_1+3\lambda_3$

$\Rightarrow x=-3\lambda_1+\lambda_3$

$7x-5z-26=0.$

$\Rightarrow 7(-3\lambda_1+\lambda_3)-5(-3\lambda_1+\lambda_3)-26=0.$

$\begin{cases} -6\lambda_1+2\lambda_3-26=0 \\ -2\lambda_1+2\lambda_3+2=0. \end{cases}$

$\Rightarrow 4\lambda_1+28=0.$

$\Rightarrow \lambda_1<0$ – не подх.

$\Rightarrow$ 2 точки подозр. на ветках:

Ⓑ $(1;0;3;-1;0;4;1)$

Ⓒ $(-1;6;-3;-1;0;0;-1)$

теперь проверим их по дост. усл. экстр.

конус: $df_1=(2;-2;8)$
$df_2=(2;-1;-3)$
$df_3=(0;-1;0)$
$df_4=(3;2;1)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2h_1-2h_2+xh_3\leq 0 \\ 2h_1-h_2-3h_3\leq 0 \\ h_1\geq 0 \\ 3h_1+2h_2+h_3=0 \end{cases} \Rightarrow h_3=-3h_1-2h_2$

$\Rightarrow \bar{h}=(h_1;h_2;-3h_1-2h_2)$

$$\Rightarrow h^T\Gamma h=(h_1\ h_2\ -3h_1-2h_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -3h_1-2h_2 \end{pmatrix}=(\lambda_0(-3h_1-2h_2);0;\lambda_0 h_1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ -3h_1-2h_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{-2\lambda_0 h_1(3h_1+2h_2)}$$

В точке Ⓐ $= (-1;3;-3;1;0;0;1)$: $\begin{cases} -3h_1-2h_2-h_3 \leq 0 \\ 2h_1-h_2-3h_3 \leq 0 \\ h_1 \geq 0 \\ h_3 = -3h_1-2h_2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2h_1-h_2-3h_3 \leq 0 \\ h_1 \geq 0 \\ h_3=-3h_1-2h_2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2h_1-h_2+9h_1+6h_2 \leq 0.$

$11h_1+5h_2 \leq 0.$

$h^T\Gamma h = -2h_1(3h_1+2h_2)$ И что?

В точке Ⓑ $= (1;0;3;-1;0;4;1)$ $\begin{cases} 3h_1-2h_2+h_3 \leq 0. \\ 2h_1-h_2-3h_3 \leq 0 \\ h_1 \geq 0 \\ h_3=-3h_1-2h_2 \end{cases}$ $\Rightarrow 3h_1-2h_2-3h_1-2h_2 \leq 0 \Rightarrow h_2 \geq 0.$

$2h_1-h_2-3h_3 \leq 0 \Rightarrow 11h_1+5h_2 \leq 0$

$h^T\Gamma h = 2h_1(3h_1+2h_2)$ И что?

В точке Ⓒ $= (-1;6;-3;-1;0;0;-1) \Rightarrow \begin{cases} -3h_1-2h_2-h_3 \leq 0. \\ 2h_1-h_2-3h_3 \leq 0 \\ h_1 \geq 0 \\ h_3=-3h_1-2h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3h_1-2h_2+3h_1+2h_2 \leq 0 \\ 11h_1+5h_2 \leq 0 \\ y \geq 0 \\ h_3=-3h_1-2h_2. \end{cases}$

$h^T\Gamma h = 2h_1(3h_1+2h_2)$ И что?

⑤ $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to extr \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leq 1. \end{cases}$

<u>Решение:</u> $\Lambda(x_1 \dots x_n) = \lambda_0(x_1^2+\dots+x_n^2)+\lambda(x_1^4+\dots+x_n^4-1)$

$\Lambda'_{x_i} = 2\lambda_0 x_i + 4\lambda_1 x_i^3$

$\Rightarrow$ гессиан $= \begin{pmatrix} 2\lambda_0+12\lambda_1 x_1^2 & & ⓪ \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\lambda_0+12\lambda_1 x_n^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 x_i + 2\lambda_1 x_i^3 = 0. \\ \lambda_1(x_1^4+\dots+x_n^4-1)=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leq 1. \\ \lambda_i \geq 0 \end{cases}$

Если $\lambda_0=0$, то $\begin{cases} \boxed{\lambda_1 x_i^3=0.} \\ \lambda_1(x_1^4+\dots+x_n^4-1)=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{2} x_i^4 \leq 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ если $\lambda_1=0$ – то $\bar{\lambda}=\bar{0}$ – плохо

$\longrightarrow$ если $\lambda_1 \neq 0$, то $\begin{cases} x_i=0 \\ x_1^4+\dots+x_n^4-1=0 \end{cases}$ – против.

Если $\lambda_0=1$: $\begin{cases} x_i+2\lambda_1 x_i^3=0 \\ \lambda_1(x_1^4+\dots+x_n^4-1)=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leq 1. \end{cases}$ $\Leftrightarrow x_i(1+2\lambda_1 x_i^2)=0.$ $\longrightarrow$ если $x_i=0$, то $\lambda_1=0 \Rightarrow \boxed{(0\dots0;1;0)\ Ⓐ}$

$\searrow$ если $x_i \neq 0$, то $\begin{cases} 2\lambda_1 x_i^2+1=0. \\ \lambda_1(x_1^4+\dots+x_n^4-1)=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{2} x_i^4 \leq 1. \end{cases}$ $\leftarrow \lambda_1 \neq 0,$ т.к. иначе в $2\lambda x_i^2+1=0$ будет $1=0.$

$\lambda_1 \neq 0$ (из $2\lambda_1 x_i^2 + 1 = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^4 + \dots + x_n^4 - 1 = 0 \\ 2\lambda_1 x_i^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_i^2 = \frac{-1}{2\lambda_1} \Rightarrow x_i^4 = \frac{1}{4\lambda_1^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{4\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow n = 4\lambda_1^2 \Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{n}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{n}}{2}$$, т.к $\lambda_1 \geq 0$.

$\Rightarrow x_i^2 = \frac{-1}{2\lambda_1} < 0$ – так не бывает.

~~⇒~~ Одна точка подозрит на locmin: Ⓐ$=(0\dots0;1;0)$

Если $\lambda_0 = -1$, то

$$\begin{cases} -x_i + 2\lambda_1 x_i^3 = 0 \Leftrightarrow -x_i(1 - 2\lambda_1 x_i^2) = 0. \\ \lambda_1(x_1^4 + \dots + x_n^4 - 1) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \leq 1 \\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

$\to$ если $x_i = 0$, то $\lambda_1 = 0$.

$\Rightarrow (0\dots0;-1;0)$ Ⓑ

если $$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 x_i^2 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \\ \Rightarrow x_1^4 + \dots + x_n^4 = 1. \\ \sum x_i^4 \leq 1 \\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i^2 = \frac{1}{2\lambda_1} \Rightarrow \frac{n}{4\lambda^2} = 1.$

$\Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{n}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{n}}{2} >$

$\Rightarrow x_i^2 = \frac{1}{2\lambda_1} = \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$

$\Rightarrow x_i = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$

$\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \dots \pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}}; -1; \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ Ⓒ

некоторые $x_i = 0$,
а остальные $= \pm\frac{1}{\sqrt[4]{m}}$

$\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{m}} \dots \pm\frac{1}{\sqrt[4]{m}}; 0\dots0\right)$ Ⓓ

$\Rightarrow$ 3 подозрит точки на locmax: Ⓑ$=(0;0\dots0;-1;0)$

Ⓒ$=\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \dots \pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}}; -1; \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

Ⓓ$=\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{m}} \dots \pm\frac{1}{\sqrt[4]{m}}; 0\dots0\right)$ $\lambda_1 = \frac{\sqrt{m}}{2}$

Гессиан: $$\Gamma = \begin{pmatrix} 2\lambda_0 + 12\lambda_1 x_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\lambda_0 + 12\lambda_1 x_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h^T\Gamma h = (2\lambda_0 + 12\lambda_1 x_1^2)h_1^2 + \dots + (2\lambda_0 + 12\lambda_1 x_n^2)h_n^2 = 2\lambda_0(h_1^2 + \dots + h_n^2) + 12\lambda_1(x_1^2 h_1^2 + \dots + x_n^2 h_n^2$$

Конус: $df_1 = 2(x_1 \dots x_n)$
$df_2 = 4(x_1^3 \dots x_n^3)$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 h_1 + \dots + x_n h_n \leq 0 \\ x_1^3 h_1 + \dots + x_n^3 h_n \leq 0. \end{cases}$$

В точке Ⓐ: $h^T\Gamma h = 2\lambda_0 \|h\|^2 \geq c \cdot \|h\|^2 \Rightarrow$ да, это locmin

В точке Ⓑ: $h^T\Gamma h = -2\|h\|^2 \ngeq c \cdot \|h\|^2 \Rightarrow$ нет, это не locmin

В точке Ⓒ: $h^T\Gamma h = -2\|h\|^2 + 12 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|h\|^2 = 4\|h\|^2 \geq c\|h\|^2 \Rightarrow$ это locmax.

В точке Ⓓ: $h^T\Gamma h = c \cdot (h_{i_1}^2 + \dots + h_{i_s}^2) \geq 0$, но $\ngeq c \cdot \|h\|^2 \Rightarrow$ не вып.

Ответ: $(0\dots0)$ –
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \dots \pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right.$