Наблюдаются $y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t$, $t=0,1,\dots,n$.

Медианная оценка для β, постр. по $\{y_t\}$, это медиана массива $\{y_t / y_{t-1},\ t=1,\dots,n\}$.

Обозн. ее $\hat{\beta}_{n,M}$. Тогда $\hat{\beta}_{n,M}$ — корень ур-ия

$$\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} y_{t-1} \times \operatorname{sign}(y_t - \theta y_{t-1}) = 0.$$

Найти функционал влияния для $\hat{\beta}_{n,M}$ и чувствительность.

Найти ф-я влияния медианной оценки ($g(x)$ — чётная, $g(x)>0$, $g(x)$ — непр. в нуле(?))

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t$

$\hat{\beta}^{y}_{n,M}$ = медиана $\{ \frac{y_t}{y_{t-1}}, t = 1 \dots n \}$

$\hat{\beta}^{y}_{n,M}$ — решение ур-я $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign}\left(\frac{y_t}{y_{t-1}} - \theta \right) = 0$

Имеем: $\frac{1}{n} \sum \operatorname{sign}\left(\frac{y_t}{y_{t-1}} - \theta \right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign}(y_{t-1}) \operatorname{sign}(y_t - \theta y_{t-1}) \xrightarrow{P} \underbrace{E \operatorname{sign}(y_0) \cdot \operatorname{sign}(y_1 - \theta y_0)}_{= \Lambda(\gamma, \theta)}$

Считаем $\Lambda(\gamma, \theta) =$

$= E \operatorname{sign}(y_0) \operatorname{sign}(y_1 - \theta y_0) = \gamma^2 E (u_0 + \xi_0) \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \xi_1 + \beta u_0 - \theta u_0 - \theta \xi_0) +$

$+ \gamma(1-\gamma) E \operatorname{sign}(u_0 + \xi_0) \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \beta u_0 - \theta u_0 - \theta \xi_0) + \gamma(1-\gamma) E \operatorname{sign}(u_0) \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \xi_1 + \beta u_0 - \theta u_0) +$

$+ (1-\gamma)^2 E \operatorname{sign}(u_0) \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \beta u_0 - \theta u_0)$

$\Rightarrow \Lambda(0, \beta) = E \operatorname{sign}(u_0) \operatorname{sign}(\varepsilon_1) = E \operatorname{sign}(u_0) \cdot \overbrace{E \operatorname{sign}(\varepsilon_1)}^{0 \text{, т.к. } g(x) \text{ — чётная}}$

Для самого сложного делаем так:

$E \operatorname{sign}(u_0 + \dots) \cdot \operatorname{sign}(\varepsilon_1 + \dots) = E \left(E \operatorname{sign}(u_0 + \dots)(1 - 2\mathbb{1}(\varepsilon_1 < \dots)) \mid u_0, \xi_0, \xi_1 \right) =$

$= E \left(\operatorname{sign}(u_0 + \dots) \cdot E (1 - 2\mathbb{1}(\underbrace{\varepsilon_1 < \dots}_{\uparrow \text{ это константа при фикс. } u_0, \xi_0, \xi_1}) \mid u_0, \xi_0, \xi_1 \right) = E \operatorname{sign}(u_0 + \dots) \cdot (1 - 2G(\dots))$

Получим:

$\Lambda(\gamma, \theta) = \gamma^2 E \operatorname{sign}(u_0 + \xi_0)(1 - 2G(\theta u_0 + \theta \xi_0 - \beta u_0 - \xi_1)) + \gamma(1-\gamma) E \operatorname{sign}(u_0 + \xi_0)(1 - 2G(\theta u_0 + \theta \xi_0 - \beta u_0))$

$+ \gamma(1-\gamma) E \operatorname{sign}(u_0)(1 - 2G(\theta u_0 - \beta u_0 - \xi_1)) + (1-\gamma)^2 E \operatorname{sign}(u_0)(1 - 2G(\theta u_0 - \beta u_0))$

Вспомним Т. о неявной ф-ции:

$\Lambda(0, \beta) = 0$; $\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}(\gamma, \theta)$; $\underbrace{\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}(\gamma, \theta) \text{ — } \exists \text{ и непр.}}_{\text{для этого и поменяли } \operatorname{sign} \text{ на } (1-2G) \text{ — непр. [illegible]}}$, $\left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}(\gamma, \theta) \right|_{\substack{\gamma = 0 \\ \theta = \beta}} = -E \operatorname{sign}(u_0) \cdot 2u_0 g(0) = -2g(0) E|u_0| < 0$

$\Rightarrow$ по т. о неявной ф-ции ур-е $\Lambda(\gamma, \theta) = 0$ имеет решение θ_γ^M при $|\gamma| < \delta$, $|\theta - \beta| < \varepsilon$,

и $\left. \frac{d\theta_\gamma}{d\gamma} \right|_{\gamma = 0} = -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}(0, \beta)}{\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}(0, \beta)}$, где $\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}(0,\beta) = E\,\mathrm{sign}(u_0+\xi_0)(1-2G(\beta\xi_0)) + \overbrace{E\,\mathrm{sign}(u_0)}^{=0}(1-2G(-\xi_0)) - 2E\,\mathrm{sign}(u_0)\underbrace{(1-2G(0))}_{0,\ \text{т.к. } g\text{-симм}} =$

$= E\,\mathrm{sign}(u_0+\xi_0)(1-2G(\beta\xi_0)).$

$$\Rightarrow \frac{d\theta_\gamma}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0} = \frac{E\,\mathrm{sign}(u_0+\xi_0)(1-2G(\beta\xi_0))}{2g(0)E|u_0|},$$

и дост. показать, что $\underbrace{\hat\beta^{y}_{n,m} \xrightarrow{P} \theta_\gamma,\ m\to\infty}$, и тогда $IF = \frac{d\theta_\gamma}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0}$ по опр.

но это — легко, т.к. $\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}(\gamma,\theta) = -2\gamma^2 E\,\underbrace{\mathrm{sign}(u_0+\xi_0)(u_0+\xi_0)}_{=|u_0+\xi_0|\geq 0}\underbrace{g(\theta u_0+\theta\xi_0-\beta u_0-\xi_0)}_{>0 \text{ по усл.}} -$

$-2\gamma(1-\gamma)E\,\underbrace{\mathrm{sign}(u_0+\xi_0)(u_0+\xi_0)}_{\geq 0}\, g(\theta u_0+\theta\xi_0-\beta u_0) - 2\gamma(1-\gamma)E\,\underbrace{\mathrm{sign}(u_0)u_0}_{\geq 0}\, g(\theta u_0-\beta u_0-\xi_0) -$

$-2(1-\gamma)^2 E\,\mathrm{sign}(u_0)u_0\, g(\theta u_0-\beta u_0) < 0,$

то имеем в окр-ти корня:

$\begin{cases} \Lambda(\gamma,\theta_\gamma-\Delta)>0 \\ \Lambda(\gamma,\theta_\gamma+\Delta)<0 \end{cases}$, $\Lambda_n(\gamma,\theta_\gamma-\Delta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma,\theta_\gamma-\Delta)$

$\Lambda_n(\gamma,\theta_\gamma+\Delta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma,\theta_\gamma+\Delta)$,

т.е. при дост. больших n с вер-тью $\to 1$ все корни ур-я $\Lambda_n(\gamma,\theta)$ (те $\hat\beta^{y}_{n,m}$ один) будут лежать в $(\theta_\gamma-\Delta, \theta_\gamma+\Delta)$, при том, Δ — сколь угодно мало.

$\Rightarrow \hat\beta^{y}_{n,m} \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, чтд.