Обзор основных результатов теории вероятностей

5.11.2022

Михаил Житлухин

Содержание

1. Вероятностные пространства

1.1. Элементарные исходы и случайные события

Определение. Вероятностное пространство – это пара (Ω, P), где

- Ω – непустое не более чем счетное множество элементарных исходов;
- $\mathrm{P}(\omega)$ – вероятность, т.е. функция со свойствами

$$\forall \omega \;\; \mathrm{P}(\omega) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\omega) = 1.$$

Считается, что в результате вероятностного эксперимента происходит один и только один исход из Ω.

Замечание. Строго говоря, определение выше – это определение дискретного вероятностного пространства. Общие вероятностные пространства с несчетным множеством исходов нам не потребуются.

Определение. Случайное событие A – это любое подмножество Ω. Считается, что событие происходит, если происходит какой-либо исход, входящий в него.

Вероятность события по определения равна сумме вероятностей его исходов.

Пример

С какой вероятностью при бросании трех монет выпадет ровно один орел?

Решение

- $\Omega = \{\text{OOO}, \text{OOP}, \text{OPO}, \ldots\}$ (8 исходов).
- $A = \{\text{PPO}, \text{POP}, \text{OPP}\}$.
- $\mathrm{P}(A) = 3/8$.

Операции с событиями

Так как события являются множествами, то для них определены операции на множествах (объединение, пересечение, разность, дополнение), которые имеют следующий смысл:

- $A \cup B =$ "произойдет событие A или B (или оба)"
- $A \cap B =$ "произойдут оба события A и B"
- $A \setminus B =$ "событие A произойдет, а B не произойдет"
- $\overline{A} = \Omega \setminus A =$ "событие A не произойдет"

Отношения между событиями

- События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \emptyset$ (пересечение пусто, т.е. у них нет общих исходов). Тогда $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
- Если $A \subseteq B$, то если происходит A, то происходит и B. В этом случае $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$ и $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$.

1.2. Классическое вероятностное пространство и комбинаторика

Определение. Классическим вероятностным пространством называется конечное Ω с вероятностью $\forall \omega \ \mathrm{P}(\omega) = 1/n$, где $n = |\Omega|$ – число всех исходов в Ω.

Для для любого события в классическом вероятностном пространстве

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Подсчет $|A|$ и $|\Omega|$ можно осуществить с помощью комбинаторики.

Теорема. Число последовательностей длины k, которые можно составить из n объектов, задается следующими формулами:

Последовательность	Без повторения	С повторением
Упорядоченная	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Неупорядоченная	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Пример

С какой вероятностью при бросании n монет выпадет ровно k орлов?

Решение

- $|\Omega| = 2^n$ (упорядоченные последовательности с повторением из 2 объектов, “О” и “Р”)
- $|A| = C_n^k$ (неупорядоченный набор k номеров мест в последовательности, где стоят “Р”)
- $\mathrm{P}(A) = C_n^k / 2^n$.

2. Независимые события

2.1. Условная вероятность

Определение. Условной вероятностью события A при условии события B, где $\mathrm{P}(B) > 0$, называется

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Предложение (правило умножения вероятностей). Если $\mathrm{P}(B) > 0$, то выполнено равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \,|\, B)\,\mathrm{P}(B).$$

2.2. Независимость двух событий и совместная независимость

Определение. События A, B называются **независимыми** (обозначение: $A \perp\!\!\!\perp B$), если

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

Если $\mathrm{P}(B) \neq 0$, то это эквивалентно тому, что $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.

Упражнение. Бросаются две монетки. Покажите, что события “орел на первой” и “исходы монеток различны” независимы.

Определение. События $A_1, A_2, \ldots$ называются совместно независимыми, если $\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdot \mathrm{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(A_{i_n})$ для любых различных индексов $i_1, \ldots, i_n$.

Предложение. Если $A_1, A_2, \ldots$ совместно независимы, и события B_i равны A_i или $\overline{A}_i$, то B_i тоже совместно независимы.

Пример. n человек договорились встретиться. Каждый из них опоздает на встречу с вероятностью p, независимо от других. Какова вероятность, что хотя бы один опоздает?

Ответ. $1 - (1-p)^n$.

2.3. Биномиальные вероятности

Теорема. Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ совместно независимы и имеют одинаковую вероятность p. Тогда вероятность того, что произойдет ровно k из n событий равна

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Идея доказательства. Пусть C – рассматриваемое событие. Искомую вероятность можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(C) &= \mathrm{P}(\bigcup B_1 \cap \ldots \cap B_n) \\ &= \sum \mathrm{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \sum p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

где B_i равно либо A_i, либо $\overline{A}_i$, а объединение и сумма берутся по всевозможным таким комбинациям B_i. Количество комбинаций (количество способов взять k событий и $n-k$ отрицаний) равно C_n^k.

3. Случайные величины

3.1. Понятие случайной величины

Определение. Случайной величиной на дискретном вероятностном пространстве называется любая функция $X(\omega)\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Операции со случайными величинами определяются как операции с функциями. Например, $Z = X + Y$ – это такая с.в., что $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Примеры

1. Монетка бросается n раз. Количество орлов X – это случайная величина, которая может принимать значения $0, 1, \ldots, n$.
2. Бросаются два кубика. Тогда количества очков на них X и Y являются случайными величинами. Сумма очков $Z = X + Y$ – тоже является случайной величиной

Определение. Распределением дискретной с.в. называется функция

$$p(x) = \mathrm{P}(X = x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Определение. Случайные величины X, Y называются равными

- почти наверное, если $\mathrm{P}(X = Y) = 1$. Обозначение: $X \overset{\text{п.н.}}{=} Y$.
- по распределению, если $\mathrm{P}(X = a) = \mathrm{P}(Y = a)$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Обозначение: $X \overset{\mathrm{d}}{=} Y$.

Пример. Если X, Y – количества очков на кубиках, то $X \overset{\mathrm{d}}{=} Y$, но $X \overset{\text{п.н.}}{\neq} Y$.

3.2. Некоторые распределения случайных величин

1. Равномерное распределение на конечном множестве S из n элементов:

$$\mathrm{P}(X = s) = \frac{1}{n} \quad \text{для любого } s \in S.$$

2. Распределение Бернулли (вероятность “успеха/неудачи”):

$$\mathrm{P}(X = 1) = p, \qquad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p.$$

3. Биномиальное распределение (число успехов в n испытаниях):

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n$$

4. Геометрическое распределение (число испытаний до первого успеха):

$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots$$

3.3. Независимость случайных величин

Определение. Случайные величины X, Y называются **независимыми**, если

$$\mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}(X = x)\,\mathrm{P}(Y = y) \text{ для любых } x, y \in \mathbb{R}.$$

Обозначение: $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Определение. С.в. $X_1, X_2, \ldots$ называются **(совместно) независимыми**, если

$$\mathrm{P}(X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_n} = x_{i_n}) = \mathrm{P}(X_{i_1} = x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(X_{i_n} = x_{i_n})$$

для любых различных индексов $i_1, \ldots, i_n$ и произвольных чисел $x_{i_k} \in \mathbb{R}$.

Теорема (распределение суммы независимых величин). Если $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $Z = X + Y$ имеет распределение

$$\mathrm{P}(Z = z) = \sum_x \mathrm{P}(X = x)\,\mathrm{P}(Y = z - x)$$

(“свертка распределений”).

Упражнение: докажите, что если $X \perp\!\!\!\perp Y$ имеют биномиальное распределение с параметрами (n, p) и (m, p), то

$X + Y$ имеет биномиальное р-е с параметрами $(n + m, p)$.

Отсюда следует, что X можно представить в виде

$$X = X_1 + \ldots + X_n,$$

где X_n – независимые бернуллиевские с.в.

4. Математическое ожидание

4.1. Определение

Определение. Математическим ожиданием с.в. X называется число

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathrm{P}(\omega)$$

Замечание. Определение корректно, если $\sum_\omega |X(\omega)|\,\mathrm{P}(\omega) < \infty$ (т.е. ряд сходится абсолютно или Ω конечно). Мы будем рассматривать только такие случайные величины.

Эквивалентным образом можно определить

$$\mathrm{E}\,X = \sum_x x\,\mathrm{P}(X = x),$$

где сумма берется по всем значениям X. (Это следует из первой формулы, если сгруппировать слагаемые с одинаковыми значениями $X(\omega)$.)

4.2. Примеры

1. X – число очков на кубике. Тогда $\mathrm{E}\,X = 3.5$.

2. X имеет равномерное распределение на множестве $\{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$. Тогда $\mathrm{E}\,X = (a+b)/2$.

3. X имеет биномиальное распр. с параметрами (n, p). Тогда $\mathrm{E}\,X = np$.
   Доказательство. Можно посчитать напрямую, а можно представить в виде $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X_1 + \ldots + X_n) = n\,\mathrm{E}\,X_1 = np$, где X_i имеют распределение Бернулли.

4. X имеет геометрическое распр. с параметром p. Тогда $EX = \frac{1}{p}$.

   Доказательство

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^k = -p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right)' = -p\left(\frac{1-p}{p}\right)' = \frac{1}{p}$$

4.3. Основные свойства математического ожидания

Теорема. Выполнены следующие свойства:

1. $\mathrm{E}\,a = a$ для любой константы a;
2. $\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}\,X + b\,\mathrm{E}\,Y$ для любых констант a, b;
3. если $X \overset{\text{п.н.}}{\geqslant} Y$ п.н., то $\mathrm{E}\,X \geqslant \mathrm{E}\,Y$;
4. если $X \overset{\mathrm{d}}{=} Y$, то $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,Y$;
5. если $X_1, \ldots, X_n$ независимы, то $\mathrm{E}(X_1 X_2 \ldots X_n) = \mathrm{E}\,X_1 \cdot \mathrm{E}\,X_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}\,X_n$.

Примеры

1. В задаче о количестве беспорядков число адресатов X, получивших свои письма, имеет $\mathrm{E}\,X = 1$.
   Доказательство. $X = X_1 + \ldots + X_n$, где $X_i = 0$ или 1 в зависимости от того, получил ли адресат i свое письмо. Тогда $\mathrm{P}(X_i = 1) = 1/n$ и $\mathrm{E}\,X_i = 1/n$, значит $\mathrm{E}\,X = 1$.

2. В n изначально пустых коробок бросают случайных образом k шаров. Найдите ожидание числа непустых коробок.
   Ответ. $\mathrm{E}\,X = n(1 - (1 - \frac{1}{n})^k)$.

5. Предельные теоремы

5.1. Закон больших чисел

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым распределением и $\mu = \mathrm{E}(X_i)$. Тогда

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mu.$$

Замечание. Необходимо определить, в каком смысле понимать сходимость последовательности случайным величин $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

Можно понимать в смысле сходимости по вероятности:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,:\, \mathrm{P}(|Y_n - \mu| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

5.2. Центральная предельная теорема

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым распределением и $\mu = \mathrm{E}(X_i)$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{E}((X-\mu)^2)}$.

Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) \to \Phi(x) \text{ при } n \to \infty,$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

Замечания

1. Величина σ называется стандартным отклонением. Функция $\Phi(x)$ называется нормальной функцией распределения.
2. Такой тип сходимости называется сходимостью по распределению.

Пример

Бросают 1000 монеток. С какой вероятностью число орлов будет между 480 и 520?

Решение

Пусть $X_i = 0$ или 1 для монетки i (решка или орел). Тогда S_n – число орлов. Имеем $\mu = 1/2$, $\sigma = 1/2$.

$$\mathrm{P}(480 \leqslant S_n \leqslant 520) = \mathrm{P}\left(\frac{480-500}{\sqrt{1000}/2} \leqslant \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{520-500}{\sqrt{1000}/2}\right)$$
$$\approx \Phi(1.265) - \Phi(-1.265) = 0.79,$$

где значения $\Phi(x)$ находятся численными методами.

Домашнее задание

Слайды и домашние задания:

`https://1drv.ms/u/s!Ap0hrtgHCg5OgZt2hfThdlDCMTsXoA?e=sIjPY6`

Срок сдачи домашнего задания 1: 7 ноября, 23:59
Присылайте решения на info@vega-institute.org

Литература

А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, гл. 1, § 1–4.

У. Феллер, *Ведение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, гл. I–VI, IX.