13.10.20. Спецкурс Бул. д/з 6.   Токсаева Александра 409

① $N \sim pois(\lambda)$

каждая точка отправляется в i-ю группу с вер-тью p_i

N_i – кол-во точек в i-й группе $i=1\dots m$

Док-ть: а) $N_i \sim pois(p_i\lambda)$

б) $\{N_i\}_{i=1}^{m}$ – незав.

Решение: а) $N_i = \sum\limits_{t=0}^{N} X_t$, где X_t – н.о.р.с.в ; $X_t = \begin{cases} 1, \text{ с вер-тью } p_i \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$; $X_t \perp\!\!\!\perp N$

$$\Rightarrow P(N_i=k) = P\left(\sum_{t=0}^{N} X_t = k\right) \overset{\text{ф-ла полной вер-ти}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{N} X_t = k \cap N=n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{N} X_t = k \mid N=n\right)\cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{n} X_t = k \mid N=n\right) P(N=n) \underset{X_t \perp\!\!\!\perp N}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{n} X_t = k\right)\cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{n-k} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{p_i^k \cdot (1-p_i)^{n-k} \cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!} =$$

$$= \frac{p_i^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p_i)^{n-k}\cdot\lambda^n}{(n-k)!} = \frac{p_i^k \cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p_i)^{n-k}\cdot\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \underset{\text{при } n<k \text{ будет } 0}{=}$$

$$= \frac{p_i^k \cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1-p_i)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p_i^k \cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \cdot e^{(1-p_i)\lambda} = \frac{p_i^k \cdot \lambda^k \cdot e^{-p_i\lambda}}{k!} = P(pois(\lambda p_i)=k)$$

$\Rightarrow N_i \sim pois(\lambda p_i)$

б) $N_i = \sum\limits_{t=0}^{N_1} X_t$, где $N_1 \sim pois(\lambda)$; $X_t = \begin{cases} 1, \text{ с вер-тью } p_i \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ $N_1 \perp\!\!\!\perp N_2$; $\{X_t\} \perp\!\!\!\perp N_1$; $\{Y_t\} \perp\!\!\!\perp N_2$.

$N_j = \sum\limits_{t=0}^{N_2} Y_t$, где $N_2 \sim pois(\lambda)$; $Y_t = \begin{cases} 1, \text{ с вер-тью } p_j \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Докажем, что $P(N_i=k \cap N_j=m) \overset{?}{=} P(N_i=k)\cdot P(N_j=m) = \frac{(p_i\lambda)^k \cdot e^{-p_i\lambda}}{k!} \cdot \frac{(p_j\lambda)^m \cdot e^{-p_j\lambda}}{m!}$

$$\text{Но } P(N_i=k \cap N_j=m) \overset{\text{ф-ла полной вер-ти}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(N_i=k \cap N_j=m \mid N_1=n; N_2=l)\cdot P(N_1=n; N_2=l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{N_1} X_t = k \cap \sum_{t=0}^{N_2} Y_t = m \mid N_1=n; N_2=l\right)\cdot P(N_1=n)\cdot P(N_2=l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{n} X_t = k\right)\cdot P\left(\sum_{t=0}^{l} Y_t = m\right)\cdot P(N_1=n)\cdot P(N_2=l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} C_n^k \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{n-k} \cdot C_l^m \cdot p_j^m \cdot (1-p_j)^{l-m} \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^l}{l!} =$$

$$= \frac{p_i^k p_j^m \cdot e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k\cdot\lambda^m}{k!\,m!} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-p_i)^{n-k}(1-p_j)^{l-m}\cdot\lambda^{n-k}\cdot\lambda^{l-m}}{(n-k)!\,(l-m)!} =$$

$$= \frac{p_i^k p_j^m e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k\cdot\lambda^m}{k!\,m!}\, e^{\lambda(1-p_i)}\, e^{\lambda(1-p_j)} = \frac{p_i^k p_j^m \cdot e^{-\lambda p_i}\cdot e^{-\lambda p_j}\cdot\lambda^k\cdot\lambda^m}{k!\,m!} =$$

$$= \frac{(p_i\lambda)^k \cdot e^{-\lambda p_i}}{k!}\cdot\frac{(p_j\lambda)^m \cdot e^{-\lambda p_j}}{m!} = P(N_i=k)\cdot P(N_j=m) \Rightarrow N_i \perp\!\!\!\perp N_j \text{. ч.т.д.}$$

② Док-ть, что а) $Bin(n, p_1) \underset{st}{\leq} Bin(n; p_2)$ при $p_1 < p_2$

б) $Bin(n_1; p) \underset{st}{\leq} Bin(n_2; p)$ при $n_1 < n_2$.

Решение: $F_1 \underset{st}{\leq} F_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_1(t) \geq F_2(t) \; \forall t$.

На стр. 23 лекции 4 была теорема:

если $\exists c: \begin{cases} dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ при } x < c, \\ dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ при } x > c, \end{cases}$ то $X \underset{st}{\leq} Y$.

а) имеем: $X \sim Bin(n, p_1)$

$Y \sim Bin(n; p_2)$ $\quad p_1 < p_2$.

$$dF_X(x) = P(X = x) = C_n^x p_1^x (1-p_1)^{n-x}$$

$$dF_Y(x) = P(Y = x) = C_n^x p_2^x (1-p_2)^{n-x}$$

$$dF_X(x) \; ? \; dF_Y(x)$$

$$\cancel{C_n^x} p_1^x (1-p_1)^{n-x} \; ? \; \cancel{C_n^x} p_2^x (1-p_2)^{n-x}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x \; ? \; \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-x}$$

$$\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{n-x} \; ? \; \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^x$$

$$\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^n \; ? \; \left(\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^x$$

$$n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right) \; ? \; x \ln\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)$$

$$\frac{n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)}{\ln\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)} \; ? \; x$$

Т.е $\exists c = \dfrac{n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)}{\ln\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)} > 0 : \begin{cases} dF_X(x) > dF_Y(x), \text{ при } c > x \\ dF_X(x) < dF_Y(x), \text{ при } c < x \end{cases} \Rightarrow X \underset{st}{\leq} Y$

$\Rightarrow Bin(n, p)$ стохаст. упорядочена по p при фикс n.

б) имеем: $X \sim Bin(n_1; p)$

$Y \sim Bin(n_2; p)$; $n_1 < n_2$.

Сравним $dF_X(x)$ и $dF_Y(x)$:

$$C_{n_1}^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n_1 - x} \; ? \; C_{n_2}^x p^x \cdot (1-p)^{n_2 - x}$$

$$\frac{n_1!}{x!(n_1-x)!} \cancel{p^x} \cdot (1-p)^{n_1} \cdot \cancel{(1-p)^{-x}} \; ? \; \frac{n_2!}{x!(n_2-x)!} \cancel{p^x} \cdot (1-p)^{n_2} \cdot \cancel{(1-p)^{-x}}$$

$$\frac{n_1!}{(n_1-x)!}(1-p)^{n_1} \;?\; \frac{n_2!}{(n_2-x)!}(1-p)^{n_2}$$

$$\cancel{n_1(n_1-1)\ldots(n_1-x+1)(1-p)^{n_1} \;?\; n_2(n_2-1)\ldots(n_2-x+1)(1-p)^{n_2}}$$

$$\frac{(n_2-x)!}{(n_1-x)!} \;?\; \underbrace{\frac{n_2!}{n_1!}}_{>1}(1-p)^{\overbrace{n_2-n_1}^{\geq 0}}$$

$$(n_2-x)(n_2-x-1)\ldots(n_1-x+1) \;?\; \underbrace{\frac{n_2!}{n_1!}(1-p)^{n_2-n_1}}_{=const}.$$

левая часть $(0) = \frac{n_2!}{n_1!} >$ правой части

левая часть $(n_1^{+1}) = 0 <$ правой части

$\Rightarrow \exists c > 0: \begin{cases} dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ при } x < c \\ dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ при } x > c \end{cases} \Rightarrow X \underset{st}{\leq} Y \Rightarrow Bin(n,p)$ стох. упор. по n при фикс p. чтд.

(3) $X \underset{se}{\leq} Y \overset{?}{\Rightarrow} DX \leq DY$. нет!

Решение: ответ – нет. (хотя $EX \leq EY$ – это правда)

Почему мы предполагаем, что это нет так:

$X \underset{se}{\leq} Y \Rightarrow f(EX) \leq Ef(X)$ $\forall$ выпуклой f $\Rightarrow$ $EX^k \leq EY^k$

(т.к. $X \underset{st}{\leq} Y \Rightarrow EX \underset{se}{\leq} X \Rightarrow$ по н-ву Йенсена получим) т.к. $f(x) = x^k$ при $k \geq 1$ – выпуклая вниз

$$\Rightarrow \begin{cases} EX \leq EY \\ EX^2 \leq EY^2 \end{cases}$$

но $DX = EX^2 - (EX)^2 \overset{?}{\leq} EY^2 - (EY)^2 = DY$.

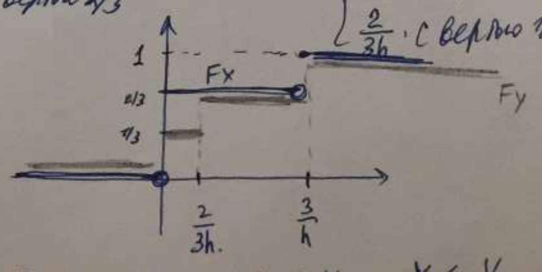
$$(EY^2 - EX^2) + (EX)^2 - (EY)^2 \overset{?}{\geq} 0.$$

$$\underbrace{(EY^2 - EX^2)}_{\geq 0} + \underbrace{(EX - EY)}_{\leq 0}(EX + EY) \overset{?}{\geq} 0.$$

Видно, что не обязательно $DY - DX \geq 0$.

$\Rightarrow$ придумаем контрпример.

Пусть $X = \begin{cases} \frac{3}{h}, \text{ с вер-тью } 2/3 \\ 0, \text{ с вер-тью } 1/3 \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} \frac{3}{h}, \text{ с вер-тью } 1/3 \\ 0, \text{ с вер-тью } 1/3 \\ \frac{2}{3h}, \text{ с вер-тью } 1/3. \end{cases}$



Видим, что $\forall t: F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \underset{st}{\leq} Y \Rightarrow X \underset{se}{\leq} Y$.

но $EX = \frac{3}{h} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{h}$

$EX^2 = \frac{9}{h^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{h^2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{h^2} - \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h^2}$

$EY = \left(\frac{3}{h} + \frac{2}{3h}\right)\frac{1}{3} = \frac{11}{9h}$

$EY^2 = \left(\frac{9}{h^2} + \frac{4}{9h^2}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{85}{27h^2}$

$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{85}{27h^2} - \frac{121}{81h^2} = \frac{255-121}{81h^2} = \frac{134}{81h^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} X \underset{se}{\leq} Y \\ DX = \frac{2}{h^2} > \frac{134}{81h^2} = DY. \end{cases}$ чтд.

(4.) $\left.\begin{array}{l} X \sim R[0,2] \\ Y \sim Exp(\lambda=1) \end{array}\right\} \Rightarrow X \underset{se}{\leq} Y$

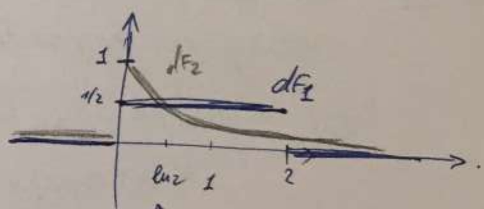
$p_Y(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} = e^{-x} \cdot I\{x>0\}$

<u>Решение:</u> $EX = \frac{b-a}{2} = 1.$

$EY = \lambda = 1.$ $\Rightarrow EX = EY$

нарисуем ~~[illegible]~~ графики: $dF_X(x) = \frac{1}{2} \cdot I[0,2]$

и $dF_Y(x) = e^{-x} \cdot I\{x>0\}$.



$e^{-x} = 1/2 \Rightarrow -x = -\ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$

Используем теорему со стр. 10 лекции 5:

Если $EX = EY$ и $\exists$ три непересек. интервала I_0, I_1, I_2: $\begin{cases} 0 \in I_0 \\ I_2 \text{ беск. вправо} \\ [0,+\infty) = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \end{cases}$,

причем $\begin{cases} dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ при } x \in I_0 \cup I_2. \\ dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ при } x \in I_1 \end{cases}$ — то $X \underset{st}{\leq} Y$.

На картинке ровно так и есть, для $I_0 = (0; \ln 2)$

$I_1 = (\ln 2; 2)$

$I_2 = (2; +\infty)$

$\Rightarrow X \sim R[0,2] \underset{se}{\leq} Y \sim Exp(1)$ чтд.