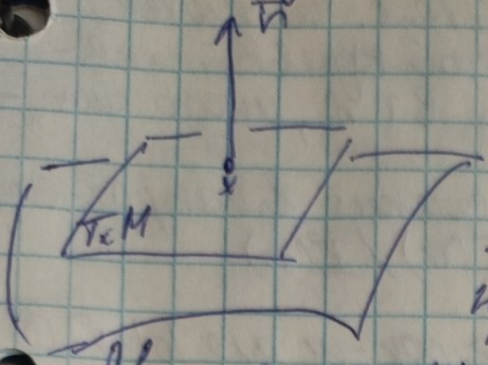
(26) Вторая квадратичная форма пов-ти. Нормальная кривизна линии на пов-ти. Теорема Менье.



Базис в $\mathbb{R}^3$: $\vec{r}_{u^1}, \vec{r}_{u^2}$ и $\vec{n}$

(где $\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_{u^1} \times \vec{r}_{u^2}}{|\vec{r}_{u^1} \times \vec{r}_{u^2}|}$)

Д-им гладко параметр. кривую на M, проходит через т. $x \in M$ и в т. x: $v = v^i r_{u^i}$

Пусть $u^1 = u^1(t)$, $u^2 = u^2(t)$ — её параметризация в лок. коорд. на пов-ти

Ускорение ⟹

$$\frac{d^2}{dt^2} r(u^1, u^2) = \frac{d}{dt}(r_{u^1}\dot{u}^1 + r_{u^2}\dot{u}^2) = r_{u^1u^1}\dot{u}^1\dot{u}^1 +$$

$$+ r_{u^1u^2}\dot{u}^1\dot{u}^2 + r_{u^2u^1}\dot{u}^2\dot{u}^1 + r_{u^2u^2}\dot{u}^2\dot{u}^2 + r_{u^1}\ddot{u}^1 + r_{u^2}\ddot{u}^2 =$$

$$= r_{u^iu^j}\dot{u}^i\dot{u}^j + r_{u^i}\ddot{u}^i \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} r(u^1, u^2), \vec{n}\right) = \underbrace{(r_{u^i}\ddot{u}^i, n)}_{=0} +$$

$$+ (r_{u^iu^j}\dot{u}^i\dot{u}^j, n) = \dot{u}^i\dot{u}^j(r_{u^iu^j}, n) = v^i v^j (r_{u^iu^j}, n)$$

Утв. Нормальная составляющая вектора ускорения кривой, лежащей на пов-ти, в т. x (по отношению к касат. пл-ти в т. x) является ф-цией от в-ра скорости этой кривой в т. x. Она равна $b_{ij}v^iv^j$, где $b_{ij} = (r_{u^iu^j}, n)$

Опр. Второй фундаментальной формой пов-ти M назыв. ф-ция II_x / определ. на ∀ касат. пл-ти в т. x

• $\mathrm{II}_x(v) = b_{ij}v^iv^j$, где $(n, r_{u^iu^j}) = b_{ij}$, $v \in T_xM$

Матрица $B = (b_{ij})$ — матрица II кв.ф. (в базисе r_{u^1}, r_{u^2})

Пусть Π_v — аффинная плоскость $x + \langle v, n \rangle$, где $x \in M$, $0 \neq \vec{v} \in T_xM$ и $\vec{n}$ — нормаль к M в т. x.

Опр. Кривизна нормального сечения (нормальная кривизна) пов-ти M в т. x в направлении в-ра $v \in T_xM$ —

— это кривизна кривой $\Pi_v \cap M$ в т. x со знаком „+" если в-р главной нормали этой кривой совпадает с нормалью $\vec{n}$ к пов-ти в т. x, иначе знак „−"

Утв. Кривизна k_v нормального сечения в направлении в-ра $v \in T_xM$ равна: $k_v = \mathrm{II}(v)/\mathrm{I}(v)$

▷ $\frac{\mathrm{II}(v)}{\mathrm{I}(v)} = \frac{b_{ij}v^i v^j}{g_{ij}v^i v^j}$ — не меняется при умнож. на число $\Rightarrow$ док-м для $|v| = \sqrt{\mathrm{I}(v)} = 1$

$\Rightarrow$ считаем, что параметр на $\Pi_v \cap M$ натуральный $\Rightarrow$ Ф-лы Френе

$\Rightarrow$ в т. x ускорение $= k_v \vec{n} = \mathrm{II}(v)\vec{n}$ — по Опр. $\mathrm{II}(v)$ это норм. составл. ◁

Теорема (Менье): $\forall\ \gamma$ — гладкая кривая на пов-ти M.

$\Rightarrow$ Кривизна k кривой γ в пр-ной т. $x \in \gamma$ связана с нормал. кривизной k_v пов-ти M по направл. в-ра v в т. $x \in \gamma$ — в-р скорости γ:

$$k \cos\theta = k_v$$

где θ - угол между нормалью к пов-ти в т. x и главной нормалью к кривой γ в т. x.

▷ $\forall\ q(s)$ - натур. парам-ция γ, $\vec{m}$ - нормаль к γ, $\vec{n}$ - нормаль к пов-ти M.

в т. x: $\vec{v} = \vec{q}\,'$ и $\vec{q}\,'' = k\vec{m} \Rightarrow k_v\vec{n} = \frac{\mathrm{II}(v)}{\mathrm{I}(v)}\vec{n} \overset{|v|=1}{=} \mathrm{II}(v)\vec{n} =$

$= (\vec{q}\,'', \vec{n})\vec{n} = (k\vec{m}, \vec{n})\vec{n} = k\cos\theta\,\vec{n}$ ◁