Модель Блюма-Исли с бесконечным числом агентов.

1. Обозначения (активы и агенты):

N активов

Векторы выплат $X_t = (X_{t,1}, ..., X_{t,N}) \in e_1, ..., e_N$ - независимые одинаково распределенные.

Пространство агентов - $(S, \mathcal{B}(S), \mu_t)$, где

$S = \triangle^N := \{s \in R_+^N : s_1 + ... + s_N = 1\}$,

$\mu_t = \mu_t(\omega, A)$ - мера, задающая распределение капитала в момент t; $A \in \mathcal{B}(S)$

$\mu_t(S) = 1$ для всех t, ω,

μ_0 - не случайная мера.

2. Динамика капитала:

$$\mu_{t+1}(A) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int\limits_A s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n}$$

Утв.: Эта формула действительно задает меру $(\forall t, \omega)$, т. е. выполнена счетная аддитивность.

Доказательство:

Рассмотрим объединение дизъюнктных множеств - $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

$$\mu_{t+1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int\limits_S 1_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\int\limits_S \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int\limits_S 1_{A_i} s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{A_i} s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\int\limits_{A_i} s_n \mu_t(ds)}{\int\limits_S s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{t+1}(A_i),$$

где мы воспользовались теоремой Фубини для считающей меры и μ_t и конечностью всех приведенных интегралов.

Отметим также, что при фиксированном A измеримость случайной величины $\mu_{t+1}(\omega, A)$ очевидна.

3. Оптимальные стратегии:

Опр.: Стратегия $s^* \in S$ эволюционно устойчива, если

$$\forall \mu_0$$

т., ч.

$$s^* \in supp(\mu_0)$$

$$\mu_t \xrightarrow{w} \delta_{s^*}$$

п. н., что эквивалентно определению:

если

$$\mu_0$$

т., ч.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_0(B_\varepsilon(s^*)) > 0,$$

то п. н.

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t((B_\varepsilon(s^*)) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Теорема: Стратегия
$$s_n^* = EX_{t,n} = P(X_t = e_n)$$
эволюционно устойчива.

Доказательство:

Рассмотрим множества
$$U_\varepsilon(s) = \{x \in \triangle^N : |x - s| < \varepsilon\},$$
$$\overline{U_\varepsilon}(s) = \{x \in \triangle^N : |x - s| \geq \varepsilon\}.$$

Докажем, что
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \mu_t(U_\varepsilon(s^*)) \to 1,$$
эквивалентно:
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \mu_t(\overline{U_\varepsilon}(s^*)) \to 0.$$

Достаточно рассматривать только $\varepsilon \in (0, 1)$.

Возьмем
$$\delta = \frac{\varepsilon}{4} \min_n s_n^*$$
(считаем, что $s_n^* > 0 \;\; \forall n$) и обозначим
$$A = U_\delta(s^*).$$

Т. к. $\overline{U_\varepsilon}(s^*)$ компактно, то из покрытия его открытыми множествами
$$U_{\varepsilon/2}(s), s \in \overline{U_\varepsilon}(s^*)$$
можно извлечь конечное подпокрытие.

Обозначим множества из выбранного конечного подпокрытия за
$$B_i = U_{\varepsilon/2}(s_i), \; i = 1, ..., m.$$

Достаточно доказать, что
$$\forall i \; \mu_t(B_i) \to 0.$$

Покажем, что
$$\frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)} \to \infty,$$
откуда и будет следовать
$$\mu_t(B_i) \to 0.$$

Обозначим
$$Z_t = \ln \frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)}$$
и покажем
$$Z_t \to \infty.$$

Имеем

$$Z_t = Z_0 + \sum_{u=0}^{t-1}(Z_{u+1} - Z_u) = Z_0 + \sum_{u=0}^{t-1}(E_u Z_{u+1} - Z_u) + \sum_{u=0}^{t-1}(Z_{u+1} - E_u Z_{u+1}),$$

где последнее слагаемое представляет собой мартингал, который по УЗБЧ для мартингалов при делении на t будет стремиться к нулю.

Пусть

$$D_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t,$$

$$D_{t+1} = \ln\frac{\mu_{t+1}(A)}{\mu_t(A)} - \ln\frac{\mu_{t+1}(B_i)}{\mu_t(B_i)} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\frac{1}{\mu_t(A)}\int\limits_A s_n \mu_t(ds)}{\frac{1}{\mu_t(B_i)}\int\limits_{B_i} s_n \mu_t(ds)} X_{t+1,n}.$$

Тогда

$$E_t D_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{\frac{1}{\mu_t(A)}\int\limits_A s_n \mu_t(ds)}{\frac{1}{\mu_t(B_i)}\int\limits_{B_i} s_n \mu_t(ds)} s_n^* = \sum_{n=1}^{N} s_n^* \ln\frac{F}{G},$$

где за F и G были обозначены соответствующие величины, $F \in A$, $G \in B_i$.

Следовательно, по прямому и обратному неравествам Пинскера:

$$E_t D_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} s_n^* \ln\frac{s_n^*}{G} - \sum_{n=1}^{N} s_n^* \ln\frac{s_n^*}{F} \geq \frac{1}{2}|S_* - G|^2 - \frac{|S^* - F|^2}{2\min\limits_n F_n} \geq \frac{1}{2} * \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\delta^2}{\min\limits_n s_n^*} = \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{16}\min_n s_n^* \geq \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{16} = \frac{\varepsilon^2}{16},$$

т. к. если $s \in B_i$, то $|s^* - s| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, а $\min\limits_n F_n \geq \min\limits_n s_n^* - \delta \geq \frac{1}{2}\min\limits_n s_n^*$, т. к. $\varepsilon < 1, \delta \leq \frac{\min_n s_n^*}{2}$.

Значит,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Z_t}{t} = \frac{\varepsilon^2}{16},$$

т. е. строго отделен от нуля, откуда

$$\frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)} \to \infty,$$

и теорема полностью доказана.