06.12.20. Спецкурс. д/з от лекции 12.

① а) $cov(\mu(\theta_k); X_{pe}) = a\cdot\delta_{kp}$.

$$cov(\mu(\theta_k); X_{pe}) \underset{\substack{\mu(\theta_k)=E(X_{ki}|\theta_k)\\ m=EX_{ki}}}{=} E(\mu(\theta_k)-m)(X_{pe}-m) = E\left[E((\mu(\theta_k)-m)(X_{pe}-m)\mid\theta_k)\right] =$$

$$= E[(\mu(\theta_k)-m)\,E(X_{pe}-m\mid\theta_k)] = E[(\mu(\theta_k)-m)\cdot\delta_{kp}\cdot E(\underbrace{X_{ke}|\theta_k}_{=\mu(\theta_k)})-m)] =$$

$$= E\,\delta_{kp}\cdot(\mu(\theta_k)-m)^2 \underset{E(\mu(\theta_k))=m}{=} \delta_{kp}\cdot \underbrace{D(\mu(\theta_k))}_{=a} = \delta_{kp}\cdot a.$$

б) $cov(X_{ki}; X_{pe}) = (a+s^2\cdot\delta_{ie})\delta_{kp}$.

$$cov(X_{ki}; X_{pe}) = E(X_{ki}-EX_{ki})(X_{pe}-EX_{pe}) = E(X_{ki}\pm E(X_{ki}|\theta_k)-EX_{ki})(X_{pe}\pm E(X_{pe}|\theta_k)-EX_{pe}) =$$

$$= E(X_{ki}-E(X_{ki}|\theta_k))(X_{pe}-E(X_{pe}|\theta_k)) +$$
$$+ E(X_{ki}-E(X_{ki}|\theta_k))\cdot(E(X_{pe}|\theta_k)-EX_{pe}) +$$
$$+ E(E(X_{ki}|\theta_k)-EX_{ki})(X_{pe}-E(X_{pe}|\theta_k)) +$$
$$+ E(E(X_{ki}|\theta_k)-EX_{ki})(E(X_{pe}|\theta_k)-EX_{pe}) =$$

$$= E[E((X_{ki}-E(X_{ki}|\theta_k))(X_{pe}-E(X_{pe}|\theta_k))\mid\theta_k)] +$$
$$+ E[E((X_{ki}-E(X_{ki}|\theta_k))(E(X_{pe}|\theta_k)-EX_{pe})\mid\theta_k)] +$$
$$+ E[E((E(X_{ki}|\theta_k)-EX_{ki})(X_{pe}-E(X_{pe}|\theta_k))\mid\theta_k)] +$$
$$+ cov(E(X_{ki}|\theta_k); E(X_{pe}|\theta_k)) =$$

$$= E\,cov(X_{ki}; X_{ke}|\theta_k)\cdot\delta_{kp}$$
$$+ E[E(X_{pe}|\theta_k)-EX_{pe})\,\underbrace{E(X_{ki}-E(X_{ki}|\theta_k))|\theta_k)}_{=0}] +$$
$$+ E[E(X_{ki}|\theta_k-EX_{ki})\cdot\underbrace{E(X_{pe}-E(X_{pe}|\theta_k))|\theta_k)}_{=0}] +$$
$$+ \underbrace{cov(E(X_{ki}|\theta_k); E(X_{pe}|\theta_k))}_{=\delta_{kp}\cdot D(\underbrace{E(X_{ki}|\theta_k)}_{=\mu(\theta_k)})} = \delta_{kp}\cdot\delta_{ie}\cdot\underbrace{E\sigma^2(\theta_k)}_{=s^2} + \delta_{kp}\cdot\underbrace{D(\mu(\theta_k))}_{=a} = \delta_{kp}\cdot(a+\delta_{ie}\cdot s^2).$$

в) $cov(\bar{X}_{k\cdot}(t); \bar{X}_{p\cdot}(t)) = (a+\frac{s^2}{t})\delta_{kp}$.

$$cov(\bar{X}_{k\cdot}(t); \bar{X}_{p\cdot}(t)) = cov\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}X_{ki}; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_{pj}\right) = \frac{1}{t^2}\cdot\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}cov(X_{ki}; X_{pj}) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(a+s^2\delta_{ij})\delta_{kp} = \frac{\delta_{kp}}{t^2}(at^2+s^2\cdot t) = \delta_{kp}\cdot(a+\frac{s^2}{t}).$$

② При выполнении гипотез (BS1) и (BS2):

а) $cov(\mu(\theta_k); X_{pi}) = a\cdot\delta_{kp}$

$cov(\mu(\theta_k); X_{pi}) = E(\mu(\theta_k)-m)(X_{pi}-m) =$

$= E[E((\mu(\theta_k)-m)(X_{pi}-m)|\theta_k)] = E[(\mu(\theta_k)-m)\cdot E(X_{pi}-m|\theta_k)] =$

$= E(\delta_{kp}\cdot(\mu(\theta_k)-m)\cdot(E(X_{ki}|\theta_k)-m)) = \delta_{kp}\cdot D(\mu(\theta_k)) = \delta_{kp}\cdot a$

б) $cov(X_{ki}; X_{pj}) = (a + \delta_{ij}\frac{s^2}{w_{ki}})\delta_{kp}$

$cov(X_{ki}; X_{pj}) = E((X_{ki} \pm E(X_{ki}|\theta_k) - EX_{ki})(X_{pj} \pm E(X_{pj}|\theta_k) - EX_{pj}) =$ ← раскроем скобки и навесим усл опис $\cdot\theta_k$

$\ldots = E\,cov(X_{ki}; X_{pj}|\theta_k) + cov(E(X_{ki}|\theta_k); E(X_{pj}|\theta_k)) =$

$= \delta_{kp}\cdot\underbrace{E\,cov(X_{ki}; X_{pj}|\theta_k)}_{=E\,\sigma^2(\theta_k)\cdot\frac{\delta_{ij}}{w_{kj}}} + \delta_{kp}\cdot\underbrace{D(\mu(\theta_k))}_{=a} = \delta_{kp}\cdot(a + \frac{\delta_{ij}}{w_{kj}}\cdot\underbrace{E\,\sigma^2(\theta_k)}_{=s^2}) = \delta_{kp}\cdot(a+\delta_{ij}\cdot\frac{s^2}{w_{kj}})$

в) $cov(X_{ki}; X_{k\cdot}^w) = cov(X_{k\cdot}^w; X_{k\cdot}^w) = a + \frac{s^2}{w_{k\cdot}}$

$w_{k\cdot} = \sum_{j=1}^{t} w_{kj}$

- $cov(X_{ki}; X_{k\cdot}^w) = cov(X_{ki}; \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}X_{kj}) = \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}cov(X_{ki}; X_{kj}) = \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}(a+\delta_{ij}\cdot\frac{s^2}{w_{kj}}) =$
$= a + \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}\cdot\delta_{ij}\cdot\frac{s^2}{w_{kj}} = a + \frac{s^2}{w_{k\cdot}}$
- $cov(X_{k\cdot}^w; X_{k\cdot}^w) = cov(\sum_{i=1}^{t}\frac{w_{ki}}{w_{k\cdot}}X_{ki}; \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}X_{kj}) = \frac{1}{(w_{k\cdot})^2}\cdot\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} w_{ki}\,w_{kj}\cdot\underbrace{cov(X_{ki}, X_{kj})}_{=a+\delta_{ij}\cdot\frac{s^2}{w_{ki}}} =$
$= \frac{(w_{k\cdot})^2\cdot a}{(w_{k\cdot})^2} + \frac{s^2\cdot w_{k\cdot}}{(w_{k\cdot})^2} = a + \frac{s^2}{w_{k\cdot}}$

г) $cov(X_{ki}; X_{\cdot\cdot}^w) = \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}} + a\cdot\frac{w_{k\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}$

$cov(X_{ki}; X_{\cdot\cdot}^w) = cov(X_{ki}; \sum_{l=1}^{n}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}X_{l\cdot}^w) = \sum_{l=1}^{n}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}cov(X_{ki}; X_{l\cdot}^w) = \sum_{l=1}^{n}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}cov(X_{ki}; \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{lj}}{w_{l\cdot}}X_{lj}) =$

$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{t}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}\cdot\frac{w_{lj}}{w_{l\cdot}}\cdot cov(X_{ki}; X_{lj}) \underset{l=k}{=} \sum_{j=1}^{t}\frac{\cancel{w_{k\cdot}}}{w_{\cdot\cdot}}\cdot\frac{w_{kj}}{\cancel{w_{k\cdot}}}\cdot(a+\delta_{ij}\cdot\frac{s^2}{w_{ki}}) = \frac{w_{k\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}a + \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}}$

д) $cov(X_{k\cdot}^w; X_{\cdot\cdot}^w) = \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}} + \frac{a\,w_{k\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}$

$cov(X_{k\cdot}^w; X_{\cdot\cdot}^w) = cov(\sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}X_{kj}; X_{\cdot\cdot}^w) = \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}cov(X_{kj}; X_{\cdot\cdot}^w) \overset{\text{см. г)}}{=} \sum_{j=1}^{t}\frac{w_{kj}}{w_{k\cdot}}(\frac{w_{k\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}a + \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}}) = \frac{w_{k\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}a + \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}}$

е) $cov(X_{\cdot\cdot}^w; X_{\cdot\cdot}^w) = \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}} + a\cdot\sum_{k=1}^{n}(\frac{w_{k\cdot}}{w_{\cdot\cdot}})^2$

$cov(X_{\cdot\cdot}^w; X_{\cdot\cdot}^w) = cov(\sum_{l=1}^{n}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}X_{l\cdot}^w; X_{\cdot\cdot}^w) = \sum_{l=1}^{n}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}cov(X_{l\cdot}^w; X_{\cdot\cdot}^w) \overset{\text{см. д)}}{=} \sum_{l=1}^{n}\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}(\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}a + \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}}) =$

$= a\cdot\sum_{l=1}^{n}(\frac{w_{l\cdot}}{w_{\cdot\cdot}})^2 + \frac{s^2}{w_{\cdot\cdot}}$

30.11.20. Спецкурс. дз от лекции 11.

1. Найти наилучшее приближение $X_{t+1}$ с помощью $X_1 \dots X_t$. (неоднородной)

Решение: В теореме об оптим. прогнозе мы доказали, что $\hat{X}_{t+1}^{*} = E(X_{t+1} / X_1 \dots X_t)$.

В задаче 3 этого д/з мы доказали, что $E(X_{t+1}/X_1 \dots X_t) = E(\mu(\theta)/X_1 \dots X_t)$.

А в теореме Бюльмана мы выяснили, что $E(\mu(\theta)/X_1 = x_1 \dots X_t = x_t) = \widehat{\mu(\theta)}^{*} = (1-\varsigma_t)m + \varsigma_t \overline{X_t}$, где $\overline{X_t} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i$

$\varsigma_t = \frac{at}{s^2+at} = \frac{cov(X_1;X_2)}{D(\overline{X_t})}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{X}_{t+1}^{*} = (1-\varsigma_t)m + \varsigma_t \overline{X_t}}$$

Зам. можно явно: $Z = \hat{X}_{t+1} = \sum_{i=0}^{t} c_i X_i$

$E(X_{t+1} - Z) \cdot X_i = 0$; $i = 0 \dots t$; $X_0 = 1$;

$i=0$: $m = c_0 + \sum_{j=1}^{t} c_j \cdot m \Rightarrow X_{t+1} - Z$ - центрир, и $c_0 = m(1 - \sum_{j=1}^{t} c_j)$

$i \geq 1$: $cov(X_{t+1} - Z; X_i) = \underbrace{E(X_{t+1}-Z)X_i}_{0} - \underbrace{E(X_{t+1}-Z)EX_i}_{0} = 0$.

$\Rightarrow \underbrace{cov(X_{t+1}; X_i)}_{a} = \sum_{j=0}^{t} c_j \cdot \underbrace{cov(X_j; X_i)}_{\delta_{ij} s^2 + a}$ — по лемме

$\Rightarrow a = a\sum c_j + c_i \cdot s^2$

$\Rightarrow c_i = \frac{a(1-\sum c_i)}{s^2} \Rightarrow c_i$ - все одинаковые

$\Rightarrow s^2 c = a - atc$

$\Rightarrow c = \frac{a}{at+s^2}$. ч.т.д.

2. Найти наилучшее приближение $\mu(\theta)$ с помощью лин. однородной комб.

Решение:

$Z = \sum_{i=1}^{t} c_i X_i$

$Z \perp$ плоскости $(X_1 \dots X_t) \Rightarrow E(\mu(\theta) - Z)X_i = 0$; $i = 1 \dots t$ (*)

(т.к. это проекция)

Запишем $cov(\mu(\theta) - Z; X_i)$ двумя способами,

- $cov(\mu(\theta) - Z; X_i) = \underbrace{E(\mu(\theta) - Z)X_i}_{0\ (\text{см. } *)} - E(\mu(\theta) - Z) \cdot EX_i = 0 - (E\mu(\theta) - EZ) \cdot EX_i = -(m - \sum_{i=1}^{t} c_i \cdot m)m = -m^2(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i)$

- $cov(\mu(\theta) - Z; X_i) = cov(\mu(\theta); X_i) - cov(Z; X_i) = a - cov(\sum_{j=1}^{t} c_j X_j; X_i) = a - \sum_{j=1}^{t} c_j \underbrace{cov(X_j; X_i)}_{\delta_{ij} s^2 + a} =$

см. лемму на стр. 31.

$= a - \sum_{i=1}^{t} c_i \cdot a - c_i \cdot s^2 = a(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i) - c_i \cdot s^2$.

$\Rightarrow -m^2 \cdot (1 - \sum_{i=1}^{t} c_i) = a(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i) - c_i s^2$.

$\Rightarrow c_i = \frac{(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i)(a + m^2)}{s^2}$

$\Rightarrow$ все $c_i$ - одинаковые и равны $c$

Найдем их:

$s^2 \cdot c = (1 - t \cdot c)(a + m^2)$

$\frac{s^2 c}{m^2 + a} = 1 - t \cdot c$

$c(t + \frac{s^2}{m^2+a}) = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{t + \frac{s^2}{m^2+a}} = \frac{m^2+a}{s^2 + t(m^2+a)}$

$\Rightarrow Z = (\sum_{i=1}^{t} X_i) \cdot c = \boxed{\overline{X_t} \cdot \frac{t(m^2+a)}{s^2+t(m^2+a)}}$ ← ответ.

③ Пользуясь условной (при заданном $\theta$) независ. $X_{t+1}$ и $X_1 \dots X_t$,
док-ть, что $E(X_{t+1}|X_1\dots X_t) = E(\mu(\theta)|X_1\dots X_t)$

<u>Решение:</u> Рассм. $E(\mu(\theta)-f(X_1\dots X_t))^2 =$

$$= E\big(\mu(\theta)-E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)+E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)-f(X_1\dots X_t)\big)^2 =$$

$$= E\big(\mu(\theta)-E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)\big)^2 + 2E\big(\mu(\theta)-E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)\big)\big(E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)-f(X_1\dots X_t)\big) +$$
$$+ E\big(E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)-f(X_1\dots X_t)\big)^2$$

Причем

$$E\big(\mu(\theta)-E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)\big)\big(E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)-f(X_1\dots X_t)\big) = E\big[E((\dots\dots)|X_1\dots X_t)\big] =$$

$E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)$ и $f(X_1\dots X_t)$ – измеримы относ. $\sigma(X_1\dots X_t)$

$$= E\Big[\{E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)-f(X_1\dots X_t)\}\cdot \underbrace{E\big(\mu(\theta)-E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)\,|\,X_1\dots X_t\big)}_{=\,E(\mu(\theta)|X_1\dots X_t)-E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)}\Big]$$

$\Rightarrow \inf\limits_f E(\mu(\theta)-f(X_1\dots X_t))^2$ – достигает минимума при $f(X_1\dots X_t)=E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)$ —
т.к. 1-е слагаемое не зависит от $f$,
а 2-е и 3-е друг $=0$ при таком выборе $f$.

$\Rightarrow \hat\mu(\theta) = E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)$ – ~~наилучш~~ оптим. оценка из ф-ций $\in \langle X_1\dots X_t\rangle$.

Но мы-то знаем, что $\hat\mu(\theta)=E(\mu(\theta)|X_1\dots X_t)$ – для любой ф-ции её оптим. оценка из ф-ций $\in\langle X_1\dots X_t\rangle$ есть УМО относ. этой σ-алгебры.

$\Rightarrow \quad E(\mu(\theta)|X_1\dots X_t) = E(X_{t+1}|X_1\dots X_t)$. чтд.

24.11.20. Спецкурс. д/з от лекции 10.

① $X \sim R[0, 2b]$; $\bar{F}_X(t) = \left(1 - \frac{t}{2b}\right) \cdot I[0; 2b]$

$Y \sim Exp\left(\frac{1}{b}\right)$; $\bar{F}_Y(t) = e^{-\frac{t}{b}} \cdot I[0; +\infty]$

$Z \sim Par(b; 0)$; $\bar{F}_Z(t) = \frac{b^2}{(b+t)^2} \cdot I[0; +\infty)$

Найти $\Pi_\rho$ для $X, Y, Z$ при $\rho = 1.2$; $1.5$; $1.8$.

Решение: $\Pi_\rho(X) = \int_0^{+\infty} (\bar{F}_X(t))^{1/\rho} dt$; $\rho \geq 1$ — см. лекцию 10.

1) Для $X \sim R[0, 2b]$:

$$\Pi_\rho(X) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{2b}\right)^{1/\rho} dt = -2b \cdot \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{2b}\right)^{1/\rho} d\left(1 - \frac{t}{2b}\right) = -2b \cdot \frac{\left(1 - \frac{t}{2b}\right)^{\frac{1}{\rho}+1}}{\frac{1}{\rho}+1} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{-2b\rho}{\rho+1}(0 - 1) = \frac{2\rho}{\rho+1} \cdot b$$

2) Для $Y \sim Exp\left(\frac{1}{b}\right)$:

$$\Pi_\rho(Y) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{b}}\right)^{1/\rho} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\rho b}} dt = -\rho b \cdot e^{-\frac{t}{\rho b}} \Big|_0^{+\infty} = \rho b$$

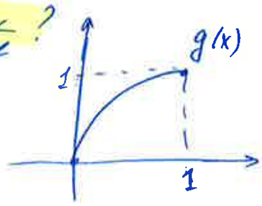
3) Для $Z \sim Par$:

$$\Pi_\rho(Z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{b^2}{(b+t)^2}\right)^{1/\rho} dt = b^{\frac{2}{\rho}} \cdot \int_0^{+\infty} (b+t)^{-\frac{2}{\rho}} d(b+t) = b^{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{(b+t)^{-\frac{2}{\rho}+1}}{-\frac{2}{\rho}+1} \Bigg|_0^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \rho \geq 2 \\ \frac{b\rho}{2-\rho}, & \text{если } \rho < 2. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

| $\rho$ | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| 1.2 | $\approx 1.09b$ | $1.2b$ | $1.5b$ |
| 1.5 | $1.2b$ | $1.5b$ | $3b$ |
| 1.8 | $\approx 1.2857b$ | $1.8b$ | $9b$ |

② Сохраняет ли принцип $H(X) = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_X(t)) dt$ порядки $\leq_{st}$ и $\leq_{sl}$?




Ответ: да, сохраняет.

Решение: 1) $X \leq_{st} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$, $\forall t$.

Считаем, что $g$ — возрастающая вогнутая, $g(0) = 0$; $g(1) = 1$.

$\Rightarrow g(\bar{F}_X(t)) \leq g(\bar{F}_Y(t))$

$\Rightarrow H(X) = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_X(t)) dt \leq \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_Y(t)) dt = H(Y)$

2) $X \leq_{sl} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} E(X-d)^+ \leq E(Y-d)^+$, $\forall d$

$\Pi_X(x) := E[(X-x)_+] = \int_x^{+\infty} \bar{F}_X(t) dt$

т.е. $X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow \Pi_X(x) \leq \Pi_Y(x)$, $\forall x$

Введем понятие "crossover point", или CP

$\{\varepsilon; u\} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ является CP для $\{F_1(x); F_2(x)\}$,

если для $i \neq j \in \{1;2\}$: $\begin{cases} F_i(\varepsilon^-) \le F_j(\varepsilon^-) \le F_j(\varepsilon) \le F_i(\varepsilon) \\ u = F_j(\varepsilon) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} F_i^{-1}(u) \le F_j^{-1}(u) \le F_j^{-1}(u^+) \le F_i^{-1}(u^+) \\ \varepsilon = F_j^{-1}(u). \end{cases}$

Как связана CP и точки пересечения $F_1$ и $F_2$?

Ещё есть 2 CP в концах носителей $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (где никакой смены знака между $F_1$ и $F_2$ на самом деле не происходит)

Пусть $(a_i; b_i)$; $-\infty \le a_i < b_i \le \infty$ – открытый носитель $F_i$

$\underline{a} = \min\{a_1; a_2\}$

$\overline{b} = \max\{b_1; b_2\}$

$\Rightarrow (\underline{a}; \overline{b})$ – открытый носитель пары $\{F_1(x); F_2(x)\}$

$\{\underline{a}; 0\}$ и $\{\overline{b}; 1\}$ – остаточные CP.

Ещё нам понадобятся обобщенная теорема Карлина-Новикова и две леммы.

Теорема (обобщ. т. Карлина-Новикова о пересечении)

$X, Y$ – случ. величины с $\mu_X, \mu_Y, F_X(x); F_Y(x); \pi_X(x); \pi_Y(x)$.

пусть распределения пересекаются $n \ge 1$ раз в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

тогда $X \le_{SL} Y \Leftrightarrow$ либо первая перемена знака у $F_Y(x) - F_X(x)$ с – на +, $n = 2m$ и $\pi_X(t_{2j-1}) \le \pi_Y(t_{2j-1})$; $j = 1 \ldots m$

либо первая перемена знака у $F_Y(x) - F_X(x)$ происходит с + на –, $n = 2m+1$, $\mu_X \le \mu_Y$ и $\pi_X(t_{2j}) \le \pi_Y(t_{2j})$; $j = 1 \ldots m$.

Лемма 1 $X_1 \le_{SL} X_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall$ CP-пар $\{\varepsilon, u\}$ для $\{F_1(x); F_2(x)\}$ выполнено: $\pi_1(\varepsilon) \le \pi_2(\varepsilon)$

Док-во: • $\pi_1(\overline{b}) \le \pi_2(\overline{b}) \Leftrightarrow b_1 \le b_2$ – т.к. $\pi_i(x) = \int_x^{+\infty} \overline{F}_i(t)dt$
где $\overline{b} = \max\{b_1; b_2\}$

• $\pi_1(\underline{a}) \le \pi_2(\underline{a}) \Leftrightarrow \mu_1 \le \mu_2$ – т.к. если $\underline{a} > -\infty$, то всё следует из того, что $\pi_i(\underline{a}) = \mu_i - \underline{a}$
где $\underline{a} = \min\{a_1; a_2\}$
если $\underline{a} = -\infty$, то:

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} \overline{F}_1(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_1(x) \le \int_0^{+\infty} \overline{F}_2(x) - \int_{-\infty}^0 F_2(x)dx = \mu_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\pi_1(\underline{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}_1(x)dx \le \pi_2(\underline{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F}_2(x)dx$$

Но мн-во CP-пар есть $\{c_1 \ldots c_n\} \cup \{\underline{a}; 0\} \cup \{\overline{b}; 1\}$.

$\pi_1(\varepsilon) \le \pi_2(\varepsilon)$ $\forall \{\varepsilon, u\} \in$ CP-пары

$\Leftrightarrow$ вып. усл. $\underset{\text{обобщ}}{\text{теоремы}}$ Карлина-Новикова $\Leftrightarrow X_1 \le_{SL} X_2$. Чтд.

Теперь введем преобразование ~~Харди~~-Литтлвуда $X^H$:

$$(F_X^H)^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{1-u}\int_u^1 F_X^{-1}(v)\,dv, & u<1 \\ F_X^{-1}(1), & u=1 \end{cases}$$

Лемма 3 $\boxed{X_1 \le_{se} X_2 \iff X_1^H \le_{st} X_2^H}$ — т.е. свели стоп-лосс порядок к стохастическому

Док-во: (Kertz and Rösler (1992), Lemma 1.8)

$\forall$ СР-пары, выражение $\int_\varepsilon^{+\infty}\{F_1(t)-F_2(t)\}dt = \int_u^1\{F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v)\}dv$ выражает тот факт, что площадь между $F_1$ и $F_2$ правее $\varepsilon$ равна площади между $F_1^{-1}$ и $F_2^{-1}$ правее $u$.

Из этого и леммы 1 получаем:

$X_1 \le_{se} X_2$

$\iff \pi_1(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty}\bar F_1(t)dt \le \int_\varepsilon^{+\infty}\bar F_2(t)dt = \pi_2(\varepsilon)$ $\forall$ СР-пары $\{\varepsilon; u\}$

$\iff \int_\varepsilon^{+\infty}\{F_1(t)-F_2(t)\}dt \ge 0$ $\forall$ СР-пары $\{\varepsilon; u\}$

$\iff \int_u^1\{F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v)\}dv \ge 0$ $\forall$ СР-пары $\{\varepsilon, u\}$

$\iff (F_1^H)^{-1}(u) \le (F_2^H)^{-1}(u)$ $\forall u \in [0,1]$

$\iff X_1^H \le_{st} X_2^H$. Чтд

~~Теперь докажем, что Hg сохраняет $\le_{se}$~~

~~Док-во: Для $X \ge 0$ определим $X^g$ с ф.р. $F_X^g(x) = g(F_X(x))$.~~

Лемма 2 $X \le_{se} Y \Rightarrow \exists$ посл-ть сл. вел $Z_1, Z_2 \dots Z_n$: $\begin{cases} X = Z_1 \\ Y = Z_n \end{cases}$ — см. Kaas & all (1994)

$Z_i \le_D Z_{i+1}$; $i = 1 \dots n-1$.

где $X \le_D Y \overset{def}{\iff} \begin{cases} F_X(x) \le F_Y(x), & \forall x < c \\ F_X(x) \ge F_Y(x), & \forall x \ge c. \\ \mu_X \le \mu_Y \end{cases}$ — такое почти было, см. теорема 12 на стр. 46 в книге Е.В. Булинской.

Теперь докажем, что $H_g$ — сохраняет $\le_{se}$.

Док-во: Для сл. вел $X \ge 0$ определим $\underset{\text{сл. вел}}{X^g}$ с доп. ф.р. $\bar F_X^g(x) := g(\bar F_X(x))$.

По лемме 2 дост. док-ть, что $X \le_D Y$ влечет $X^g \le_{se} Y^g$

Тогда мы получим, что $H_g(X) = EX^g \le EY^g = H_g(Y)$

Итак, хотим док-ть, что $X \le_D Y$ влечет $X^g \le_{se} Y^g$.

По лемме 3 дост. док-ть, что $X \le_{\Delta} Y$ влечет $(X^g)^H \le_{st} (Y^g)^H$

Ну пусть $\begin{cases} X \le_{\Delta} Y \\ EX \le EY \\ \forall q \in (0,1): \begin{cases} F_X^{-1}(u) \ge F_Y^{-1}(u), & 0 \le u < q \\ F_X^{-1}(u) \le F_Y^{-1}(u); & q \le u \le 1. \end{cases} \end{cases}$

$(F_X^g)^{-1} = (\gamma \circ F_X)^{-1}$

Но $(F_X^H)^{-1}(u) = \begin{cases} \frac{1}{1-u} \int_u^1 F_X^{-1}(v)dv; & u < 1 \\ F_X^{-1}(1); & u = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow (F_X^{g,H})^{-1}(u) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 (\gamma \circ F_X)^{-1}(v)dv = \frac{1}{1-u} \int_{\gamma^{-1}(u)}^1 F_X^{-1}(v)d\gamma(v); \; 0 \le u < 1.$

Аналогично для $Y$.

Хотим: $(F_X^{g,H})^{-1}(u) \le (F_Y^{g,H})^{-1}(u) \; \forall u \in [0,1]$,

т.е. $\int_w^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\} d\gamma(v) \ge 0 \; \forall w \in [0,1]$.

Если $w \ge q$ – то всё очев., т.к. $F_X^{-1}(u) \le F_Y^{-1}(u)$; $q \le u \le 1$.

Если $0 \le w < q < 1$: $\gamma(x)$ – выпуклая $\Rightarrow \gamma'(x)$ – возрастает

$\Rightarrow \gamma'(w) \le \gamma'(q) \le \gamma'(1)$

$\Rightarrow \int_w^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\} d\gamma(v) = -\int_w^q \{F_X^{-1}(v) - F_Y^{-1}(v)\}\gamma'(v)dv \ge$

$\ge \gamma'(q) \int_w^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\}dv \ge \gamma'(q) \cdot \int_0^1 \{F_Y^{-1}(v) - F_X^{-1}(v)\}dv = \gamma'(q) \cdot \{EY - EX\} \ge 0.$ чтд.

(3) Док-ть, что $H(X+Y) \le H(X) + H(Y)$

<u>Док-во:</u> Дост. док-ть что для произв. $Y$ и дискретного $X$ со знач. $1, \dots n$.

Действительно, $H(aX+b) = aH(X)+b \Rightarrow$ утв. верно для $X \in \{k, \dots n+k\}$

и $X \in \{kh \dots (n+k)h\}$; $k \in \mathbb{N}_+$, $h > 0$.

А поскольку любую сл. вел можно сколь угодно хорошо приблизить дискретной сл. вел с дост. малым $h$, то утв. будет верно для любой $X$.

Докажем по индукции.

<u>База:</u> $n = 0$ – всё очев.

<u>Шаг:</u> $n \rightsquigarrow n+1$

$X \in \{0 \dots n+1\}$

пусть $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ распределены как $(X, Y \mid X > 0)$.

Поскольку $\tilde{X} \in \{1 \dots n\}$ – то по предп. инд: $H(\tilde{X} + \tilde{Y}) \le H(\tilde{X}) + H(\tilde{Y})$.

Обозн. $\varepsilon = P(X=0)$

$\bar{F}_{Y|0}(x) = P(Y > x \mid X=0)$

Имеем $\forall x > 0$:

$\bar F_X(x) = (1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X}(x)$

$\bar F_Y(x) = \varepsilon \bar F_{Y|0}(x) + (1-\varepsilon)\bar F_{\tilde Y}(x)$

$\bar F_{X+Y}(x) = \varepsilon \bar F_{Y|0}(x) + (1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X+\tilde Y}(x)$

Используем <u>лемму</u>: $g(x)$ - вогнутая для $x \geq 0$.

$\Rightarrow \forall x \geq 0: \quad g(x+b) - g(x+a) \leq g(b) - g(a)$

(Ну $g(x)$ - вогнутая $\Leftrightarrow \dfrac{g(y)-g(x)}{y-x} \geq \dfrac{g(z)-g(y)}{z-y} \quad \forall\, 0 \leq x < y \leq z.$

и просто последовательно применим эту ф-лу для

$a < b \leq x+a < x+b$

и $a < x+a < b < x+b$ )

$\Rightarrow$ по лемме:

$$g(\bar F_{X+Y}(x)) - g(\bar F_X(x)) - g(\bar F_Y(x)) \leq g((1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X+\tilde Y}(x)) - g((1-\varepsilon)\bar F_{\tilde X}(x)) - g((1-\varepsilon)\bar F_{\tilde Y}(x)).$$

Теперь заметим, что $k(x) := \dfrac{g((1-\varepsilon)x)}{g(1-\varepsilon)}$ - возрастающая вогнутая ф-ция на $[0,1]$

$k(0) = 0$

$k(1) = 1.$

Интегрируем с обеих сторон, используя предп. индукции для $k(x)$:

$$\Rightarrow H(X+Y) - H(X) - H(Y) \leq g(1-\varepsilon)\left\{\int_0^{+\infty} k(\bar F_{\tilde X+\tilde Y}(x))\,dx - \int_0^{+\infty} k(\bar F_{\tilde X}(x))\,dx - \int_0^{+\infty} k(\bar F_{\tilde Y}(x))\,dx\right\} \leq 0.$$ ч.т.д.

16.11.20. Спецкурс Бул. д/з 9.

(1.) XL: 5 xs 2 ⇒ страховщик платит при $X_i \in [2;7]$

4 возобновления ⇒ $M = 5(4+1) = 25$ – макс. сумма выплат перестраховщика

$c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = \frac{1}{2}; c_3 = 1; c_4 = 2.$

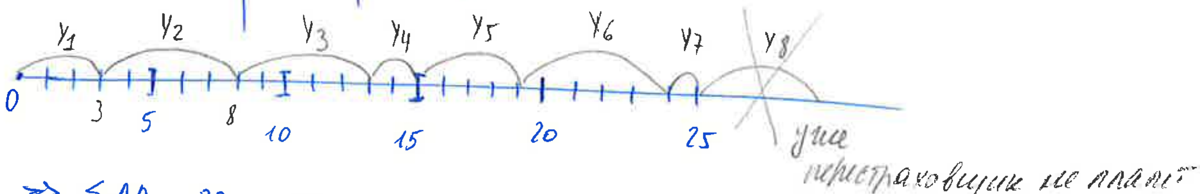
X – убытки: 5, 10, 7, 4, 6, 8, 3, 9.

$P_0 = 4$

посчитать размер добавочных премий (AP)

Решение:

| $i$ | $X_i$ (FGU) | $Y_i$ | $\sum_{k=1}^{i} Y_k$ | XL; M=25 | AP |
|---|---|---|---|---|---|
| N 1 | 5 | 3 | 3 | 3 | $P_0 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3P_0}{20}$ $= 0,6$ – восст. 1 полосу |
| N 2 | 10 | 5 | 8 | 5 | $P_0 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + P_0 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = P_0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{3P_0}{10} = \frac{4P_0}{10} = \frac{8P_0}{20}$ $= 1,6$ – т.к восст. 1 и 2 полосы. |
| N 3 | 7 | 5 | 13 | 5 | $P_0 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + P_0 \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 = P_0 \frac{1}{5} + \frac{3P_0}{5} = \frac{4P_0}{5} = \frac{16P_0}{20}$ $= 3,2$ – т.к восст. 2 и 3 полосы. |
| N 4 | 4 | 2 | 15 | 2 | $P_0 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2P_0}{5} = \frac{8P_0}{20}$ $= 1,6$ – т.к восст. 3 полосу |
| N 5 | 6 | 4 | 19 | 4 | $P_0 \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{8P_0}{5} = \frac{32P_0}{20}$ $= 6,4$ – т.к восст. 4 полосу |
| N 6 | 8 | 5 | 24 | 5 | $P_0 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 = P_0 \frac{2}{5} = \frac{8P_0}{20}$ $= 1,6$ – т.к восст 4 полосу. |
| N 7 | 3 | 1 | 25 | 1 | — т.к. возобновления уже закончены. |
| N 8 | 9 | 5 | 30 | — | — |




$$\Rightarrow \sum AP = \frac{3P_0}{20} + \frac{8P_0}{20} + \frac{16P_0}{20} + \frac{8P_0}{20} + \frac{32P_0}{20} + \frac{8P_0}{20} = \frac{75}{20} P_0 = \boxed{3,75P_0 = 15}$$ ← ответ.

$P_0 = 4$

(2.) Чему равна премия по договору 3 xs 2 (млн.) [2; 5] если $X = 3;\ 3.4;\ 3.2;\ 4.8;\ 4.4;\ 7$

Скользящая ставка от 2% до 5% (при коэф. надбавки $\frac{100}{80}$ убытков на карман перестраховщика)

Премия прямого страховщика $= 200 \cdot 10^6 = 200$ (млн) (т.е $A = 200$)

Решение:

$t_{min} = 2\%$;

$t_{max} = 5\%$

$\alpha = \frac{100}{80}$

| $i$ | $X_i$ (FGU) | $Y_i$ | $\sum_{k=1}^{i} Y_k$ |
|---|---|---|---|
| N 1 | 3 | 1 | 1 |
| N 2 | 3.4 | 1.4 | 2.4 |
| N 3 | 3.2 | 1.2 | 3.6 |
| N 4 | 4.8 | 2.8 | 6.4 |
| N 5 | 4.4 | 2.4 | 8.8 |
| N 6 | 7 | 3 | 11.8 |

⇒ убытки = 11.8, а премии = 200 (у страховщика)

Имеем: $P = t \cdot A = \min(t_{max} \cdot A;\ \max(t_{min} A;\ \alpha Z)) =$

$= \min(0{,}05 \cdot 200;\ \max(0{,}02 \cdot 200;\ \frac{100}{80} \cdot 11{,}8)) =$

$= \min(10;\ \max(4;\ 14.75)) = \min(10;\ 14.75) = \boxed{10\ (\text{млн})}$ ответ

01.11.20. Спицуре Бул. КР1.

① $F_k$ – ф.р. $N(\mu_k;\sigma_k^2)$; $k=1,2$

$\left.\begin{matrix}\mu_1\le\mu_2\ ;\ \sigma_1^2\le\sigma_2^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow F_1 \underset{se}{\le} F_2.$

Можно ли $F_1$ и $F_2$ упорядочить в смысле стохаст. порядка? (ответ: вообще нельзя, но можно, если дисперсии равны)

Решение: проверим сначала, можно ли $F_1$ и $F_2$ упорядочить в смысле $\underset{st}{\le}$ (т.к. если $F_1 \underset{st}{\le} F_2 \Rightarrow F_1 \underset{se}{\le} F_2$)

$$F_1 \underset{st}{\le} F_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_1(x)\ge F_2(x)\ \forall x$$

$$F_i(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}dt=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_i}{\sigma_i\sqrt2}}\frac{1}{\sqrt\pi}\cdot e^{-y^2}dy$$

$$y=\frac{t-\mu_i}{\sigma_i\sqrt2}$$

$$dy=\frac{dt}{\sigma_i\sqrt2}$$

$$\Rightarrow F_1(x)-F_2(x)=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt2}}\frac{1}{\sqrt\pi}\cdot e^{-y^2}dy-\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_2}{\sigma_2\sqrt2}}\frac{1}{\sqrt\pi}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_{\frac{x-\mu_2}{\sigma_2\sqrt2}}^{\frac{x-\mu_1}{\sigma_1\sqrt2}}\underbrace{e^{-y^2}}_{>0}dy$$

→ $\ge 0$, если $\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\le\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

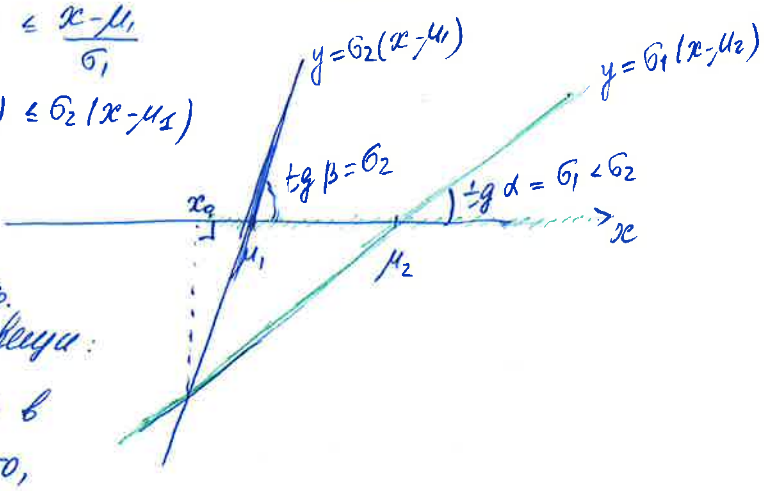
→ $\le 0$, иначе

Итак, $F_1(x)\ge F_2(x)$, если $\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\le\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

$$\sigma_1(x-\mu_2)\le\sigma_2(x-\mu_1)$$

$\mu_1\le\mu_2$

$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$




т.е. $F_1(x)\ge F_2(x)$ только для $x\ge x_0$.

Отсюда мы сразу видим 2 вещи:

1) $F_1$ и $F_2$ нельзя упорядочить в смысле $\underset{st}{\le}$, т.к. неверно ни то, что $F_1(x)\ge F_2(x)\ \forall x \Rightarrow F_1 \underset{st}{\not\le} F_2$

ни то, что $F_1(x)\le F_2(x)\ \forall x \Rightarrow F_1 \underset{st}{\not\ge} F_2$

2) $F_1 \underset{se}{\le} F_2$ по 1-й теореме о пересечении (см. теорема 12 на стр. 46 в книге или стр. 9 в лекции 5)

Теорема

Если риски $X$ и $Y$ удовл. условиям $EX\le EY$ и $\exists\, c\ge 0$ такое, что:

$\begin{cases}F_X(t)\le F_Y(t) \text{ при } t<c\\ F_X(t)\ge F_Y(t) \text{ при } t\ge c\end{cases}$, то $X \underset{se}{\le} Y$.

Из картинки видно, что у нас именно так: $\begin{cases}F_1(x)\ge F_2(x) \text{ для } x\ge x_0\\ F_1(x)\le F_2(x) \text{ для } x<x_0.\end{cases} \Rightarrow F_1 \underset{se}{\le} F_2$. ч.т.д.

Зам. $F_1$ и $F_2$ можно $\overset{\text{стохаст.}}{\text{упорядочить}}$, если $\begin{cases}\mu_1\le\mu_2\\ \sigma_1=\sigma_2\end{cases}$

Во-первых, это интересно само по себе, а во-вторых, позволяет дать другое решение 1-й задачи (хотя и более длинное)

Итак, пусть $F_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$

$F_{2,1} \sim N(\mu_2; \sigma_1^2)$

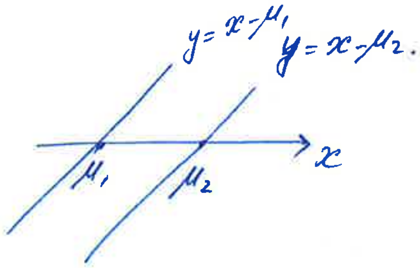
$\mu_1 \le \mu_2$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2) \\ F_{2,1} \sim N(\mu_2; \sigma_1^2) \\ \mu_1 \le \mu_2 \end{array}\right\} \Rightarrow F_1 \le_{st} F_2$$

Это можно получить как непосредственно из того,

что $F_1(x) - F_2(x) \ge 0$, если $\dfrac{x-\mu_2}{\sigma_2} \le \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$

но $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow x - \mu_2 \le x - \mu_1$




$\Rightarrow F_1(x) \ge F_2(x)\ \forall x$

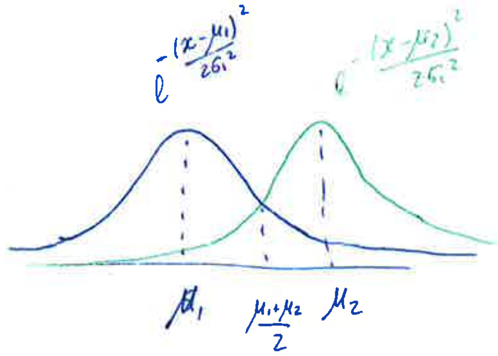
$\Rightarrow F_1 \le_{st} F_2$ по опр.

А можно и по дост. условию (см. теорема 6 на стр. 34 книги)

Теорема пусть $\exists c$: $\begin{cases} dF_X(x) \ge dF_Y(x) \text{ при } x<c \\ dF_X(x) \le dF_Y(x) \text{ при } x>c \end{cases} \Rightarrow X \le_{st} Y$

В нашем случае: $dF_1(x) \overset{?}{\ge} dF_{21}(x)$

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \ge \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2}}$$




$$-(x-\mu_1)^2 \ge -(x-\mu_2)^2$$

$$(x-\mu_2)^2 \ge (x-\mu_1)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2x\mu_2 + \mu_2^2 \ge \cancel{x^2} - 2x\mu_1 + \mu_1^2$$

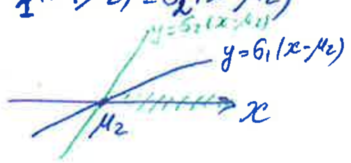
$$(\mu_2+\mu_1)\underbrace{(\mu_2-\mu_1)}_{>0} \ge 2x\underbrace{(\mu_2-\mu_1)}_{>0}$$

$$x \le \frac{\mu_1+\mu_2}{2}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dF_1(x) \ge dF_{21}(x) \text{ при } x \le \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \\ dF_1(x) \le dF_{21}(x) \text{ при } x \ge \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \end{cases} \Rightarrow F_1 \le_{st} F_{21}.$$

Заметим также, что $\underset{N(\mu_2;\sigma_1^2)}{\underset{\wr}{F_{21}}} \le_{se} \underset{N(\mu_2;\sigma_2^2)}{\underset{\wr}{F_2}}$ — т.к. $F_{21}(x) - F_2(x) \ge 0$, если $\dfrac{x-\mu_2}{\sigma_2} \le \dfrac{x-\mu_2}{\sigma_1}$

$\sigma_1(x-\mu_2) \le \sigma_2(x-\mu_2)$




$$\Rightarrow \begin{cases} F_{21}(x) \ge F_2(x) \text{ при } x \ge \mu_2 \\ F_{21}(x) \le F_2(x) \text{ при } x < \mu_2 \end{cases} \Rightarrow F_{21} \le_{se} F_2$$

$$\Rightarrow \overset{\sim N(\mu_1;\sigma_1^2)}{F_1} \underset{\Downarrow\ se}{\le_{st}} \overset{\sim N(\mu_2;\sigma_1^2)}{F_{2,1}} \le_{se} \overset{\sim N(\mu_2;\sigma_2^2)}{F_2} \quad \Rightarrow F_1 \le_{se} F_2 \quad \text{чтд.}$$

(2.) Ф-ции полезности: $U(x)=x$
$U(x)=-(b-x)^2$
$U(x)=\ln(\alpha+x)$
$U(x)=-\alpha e^{-\alpha x}$

Можно ли их представить в виде $U(x,\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}$ с $\alpha+\beta x>0; \beta\neq 0; \beta\neq 1$ или как их предел при $\beta\to 0$, $\beta\to 1$? Найти соотв. значение коэф. неприятия риска $a(x)$. $\left(a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)$

Решение: • При $\alpha:=b$, $\beta:=-1$ $U(x,\alpha,\beta)=\frac{(b-x)^2}{-2}=-\frac{1}{2}(b-x)^2$ – квадратичная ф-ция полезности

(У нас получился коэф. $\frac{1}{2}$, но заметим, что линейные преобразования ф-ции полезности дают те же самые решения, поэтому на самом деле, ф-ция полезности определена с точностью до варьирования $U(0)$ и $U'(0)$).

• При $\alpha=1; \beta\to 0$: $U(x,\alpha,\beta)=\frac{(1+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=\frac{\overbrace{(1+\beta x)}^{\to 1}\cdot(1+\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}}{\underbrace{(\beta-1)}_{\to -1}}\xrightarrow[\beta\to 0]{}-e^{-x}$ => эксп. ф. р.

• При $\alpha>1; \beta\to 0$:

$$\lim_{\beta\to 0} U(x,\alpha,\beta)=\lim_{\beta\to 0}\frac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=\lim_{\beta\to 0}-\alpha\cdot(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}=\lim_{\beta\to 0}\frac{-\alpha}{(\alpha+\beta x)^{1/\beta}}=\lim_{\gamma\to\infty}\frac{-\alpha}{\left(\alpha+\frac{x}{\gamma}\right)^{\gamma}}$$

$\gamma=\frac{1}{\beta}$; $\xrightarrow[\gamma\to+\infty]{} 0$; $\xrightarrow[\gamma\to-\infty]{}\infty$

• при $\alpha<1$, $\beta\to 0$

$$\lim_{\beta\to 0} U(x,\alpha,\beta)=\lim_{\gamma\to\infty}\frac{-\alpha}{\left(\alpha+\frac{x}{\gamma}\right)^{\gamma}}$$

$\xrightarrow[\gamma\to+\infty]{} 0$; $\lim_{\gamma\to-\infty}-\alpha\cdot\alpha^{\gamma}\cdot e^{\frac{x}{\alpha}}=0.$

• при $\beta\to 1$: $\lim_{\beta\to 1}\frac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=\infty$

• при $\beta\to\infty$: $\lim_{\beta\to\infty} U(x,\alpha,\beta)=\lim_{\beta\to\infty}\frac{(\alpha+\beta x)^{1-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}=x$ => лин. ф-ция полезности.

Итог перебрали все возможности => $U(x)=\ln(\alpha+x)$ – нельзя получить.

$U(x)=x$ => $a(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}=\frac{0}{1}=0$

$U(x)=-(b-x)^2$ => $a(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}=\frac{2}{2(b-x)}=\frac{1}{b-x}$

$U(x)=\ln(\alpha+x)$ => $a(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}=\frac{-\frac{-1}{(\alpha+x)^2}}{\frac{1}{\alpha+x}}=\frac{1}{\alpha+x}$

$U(x)=-\alpha\cdot e^{-\alpha x}$ => $a(x)=-\frac{U''(x)}{U'(x)}=\frac{\alpha^3\cdot e^{-\alpha x}}{\alpha^2\cdot e^{-\alpha x}}=\alpha.$

③ Для распр. Вейбулла: $F_k(t)=1-e^{-\lambda_k t^{\alpha_k}}$; $0\le t<\infty$; $k=1,2$,
если мат. ожидания равны, то из $\alpha_1\ge\alpha_2$ следует $F_1 \le_{se} F_2$.

Решение: Используем теорему 12 на стр 46 в книге (это стр. 9 в лекции 5):
Если риски $X$ и $Y$ удовл. условиям $EX\le EY$ и $\exists\, c\ge 0$ такое что:

$$\begin{cases} F_X(t)\le F_Y(t) \text{ при } t<c \\ F_X(t)\ge F_Y(t) \text{ при } t\ge c. \end{cases}, \text{ то } X\le_{se} Y.$$

Когда $F_1(t)\ge F_2(t)$

$$1-e^{-\lambda_1 t^{\alpha_1}}\ge 1-e^{-\lambda_2 t^{\alpha_2}}$$

$$e^{-\lambda_2 t^{\alpha_2}}\ge e^{-\lambda_1 t^{\alpha_1}}$$

$$-\lambda_2 t^{\alpha_2}\ge -\lambda_1 t^{\alpha_1}$$

$$\lambda_1 t^{\alpha_1}\ge \lambda_2 t^{\alpha_2}$$

$$t^{\alpha_1-\alpha_2}\ge\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad (\text{т.к } \lambda_k>0).$$

$$t\ge\sqrt[\overbrace{\alpha_1-\alpha_2}^{\ge 0}]{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} F_1(t)\le F_2(t) \text{ при } t<c=\sqrt[\alpha_1-\alpha_2]{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ F_1(t)\ge F_2(t) \text{ при } t\ge c=\sqrt[\alpha_1-\alpha_2]{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \end{cases} \Rightarrow F_1\le_{se} F_2. \text{ чтд.}$$

④ Док-ть: $IFR\subset IFRA\subset NBU\subset NBUE$

$F$ - IFR, если для $0\le x_1<x_2<\infty$: $F_{x_2}\le_{st} F_{x_1}$ $\iff \ln\bar F(t)$ - вогнутая

$\iff F_{x_2}(t)\ge F_{x_1}(t)\ \forall t$ $\qquad \iff \lambda(t)=\frac{f(t)}{\bar F(t)}=-\frac{d}{dt}\ln\bar F(t)$ - монот. возрастает по $t$.

$\iff \bar F_{x_2}(t)\le \bar F_{x_1}(t)\ \forall t$

почему?
Из по усл. $F_x \ge_{st} F_{x+\delta}$
т.е $\bar F_x(t)\ge \bar F_{x+\delta}(t)$

$$\bar F_x(t)=e^{-\int_x^{x+t}\lambda(y)dy}\ge e^{-\int_{x+\delta}^{x+\delta+t}\lambda(y)dy}=\bar F_{x+\delta}(t)$$

$$-\int_x^{x+t}\lambda(y)dy\ge-\int_{x+\delta}^{x+\delta+t}\lambda(y)dy$$

$$\int_{x+\delta}^{x+\delta+t}\lambda(y)dy\ge\int_x^{x+t}\lambda(y)dy \quad y=z$$

$y=z+\delta$

$$\int_x^{x+t}\lambda(z+\delta)dz\ge\int_x^{x+t}\lambda(z)dz$$

$\Rightarrow \lambda(z+\delta)\ge\lambda(z)\Rightarrow \lambda(z)$ возр. по $z$.

$F$ - IFRA, если $-\frac{\ln\bar F(t)}{t}$ возр. по $t$

$F$ - NBU, если $F_x\le_{st} F\ \forall x\ge 0$
т.е $\bar F_x(t)\le\bar F(t)\ \forall x\ge 0$
т.е $\frac{\bar F(t+x)}{\bar F(x)}\le\bar F(t)\ \forall x\ge 0,\ \forall t\ge 0.$

$F$ - NBUE, если $\begin{cases} EX<\infty \\ ET_x\le EX \end{cases}$
Остаточное время жизни

Решение: IFR => IFRA

Дано: $\lambda(t)$ монот. возрастает по $t$

Хотим: $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ возрастает по $t$

Имеем: $\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \ln \bar F(t)$

$$\Rightarrow \bar F(t) = e^{-\int_0^t \lambda(y)dy}$$

$$\Rightarrow \ln \bar F(t) = -\int_0^t \lambda(y)dy$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln \bar F(t)}{t} = \frac{\int_0^t \lambda(y)dy}{t} \text{ — возрастает по } t?$$

$\Rightarrow$ Хотим: $$\frac{\int_0^t \lambda(y)dy}{t} \overset{?}{\leq} \frac{\int_0^{t+\delta} \lambda(y)dy}{t+\delta}$$

$$\Rightarrow \cancel{t\int_0^t \lambda(y)dy} + \delta\cdot\int_0^t \lambda(y)dy \overset{?}{\leq} t\cdot\int_0^{t+\delta}\lambda(y)dy = \cancel{t\cdot\int_0^t \lambda(y)dy} + t\cdot\int_t^{t+\delta}\lambda(y)dy$$

$$\Rightarrow \delta\cdot\int_0^t \lambda(y)dy \overset{?}{\leq} t\cdot\int_t^{t+\delta}\lambda(y)dy$$

Но $$\delta\int_0^t \lambda(y)dy \underset{\lambda(y)\leq\lambda(t)}{\leq} \delta\cdot t\cdot\lambda(t) \underset{\lambda(t)\leq\lambda(y)}{\leq} t\cdot\int_t^{t+\delta}\lambda(y)dy \Rightarrow \text{верно}$$

IFRA => NBU

Дано: $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ возр. по $t$

Хотим: $\bar F(t+x) \leq \bar F(t)\cdot\bar F(x)$ $\forall t\geq 0, \forall x\geq 0$

т.е $\ln \bar F(t+x) \leq \ln \bar F(t) + \ln \bar F(x)$

Если $0\leq t\leq x\leq x+t$

но $-\frac{\ln \bar F(t)}{t}$ — возрастает по $t$ $\Rightarrow$ $\frac{\ln \bar F(t)}{t} \geq \frac{\ln \bar F(x)}{x} \geq \frac{\ln \bar F(x+t)}{x+t}$

$$\Rightarrow \ln \bar F(x+t) \leq \frac{x+t}{x}\cdot\ln\bar F(x) = \ln \bar F(x) + \frac{t}{x}\underbrace{\ln \bar F(x)}_{\leq \frac{x}{t}\ln \bar F(t)} \leq \ln\bar F(x) + \frac{\cancel{t}}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{t}}\cdot\ln\bar F(t) = \ln\bar F(x) + \ln\bar F(t)$$

Если $0\leq x\leq t\leq x+t$ $\Rightarrow \frac{\ln\bar F(x)}{x} \geq \frac{\ln \bar F(t)}{t} \geq \frac{\ln\bar F(x+t)}{x+t}$

$$\Rightarrow \ln \bar F(x+t) \leq \frac{x+t}{t}\ln\bar F(t) = \ln\bar F(t) + \frac{x}{t}\cdot\underbrace{\ln \bar F(t)}_{\leq\frac{t}{x}\ln\bar F(x)} \leq \ln\bar F(t) + \frac{\cancel{x}}{\cancel{t}}\cdot\frac{\cancel{t}}{\cancel{x}}\ln\bar F(x) = \ln\bar F(t) + \ln\bar F(x)$$

чтд.

NBU => NBUE  Дано: $F_x \le_{st} F$ $\forall x \ge 0$, т.е. $\frac{\bar F(t+x)}{\bar F(x)} \le \bar F(t)$ $\forall x \ge 0; \forall t \ge 0$. (*)

Хотим: $ET_x \le EX$ $\forall x$, т.е. $\frac{\int_0^{+\infty} \bar F(t+x)\,dt}{\bar F(x)} \le EX = \int_0^{+\infty} \bar F(t)\,dt$ (**)

И видно, что из (*) сразу следует (**). => чтд.

Или можно так:

$X \le_{st} Y \Rightarrow Eh(X) \le Eh(Y)$ $\forall$ ~~возр.~~ неубыв. выпуклой $f$

В частности, $EX \le EY$

Но $T_x$ – имеет ф.р. $F_x$

$X$ – имеет ф.р. $F$

=> раз $F_x \le_{st} F$, то $ET_x \le EX$ чтд.

27.10.20. Спецкурс Бун. д/з 8.

① Нарисовать кривую Лоренца для распр. Парето с $F(x)=1-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\alpha}$; $x\ge\sigma>0$

Решение: Кривая Лоренца: $L_X(u)=\dfrac{\int_0^u F_X^{-1}(t)dt}{\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt}$ ; $u\in[0,1]$

$F_X(\ )=1-\left(\frac{\ }{\sigma}\right)^{-\alpha}=1-\left(\frac{\sigma}{\ }\right)^{\alpha}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\ }\right)^{\alpha}=1-F_X(\ )$

$\Rightarrow \frac{\sigma}{\ }=\sqrt[\alpha]{1-F_X(\ )}$

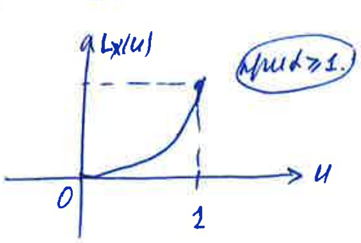
$\Rightarrow \ =\dfrac{\sigma}{\sqrt[\alpha]{1-F_X(\ )}}$

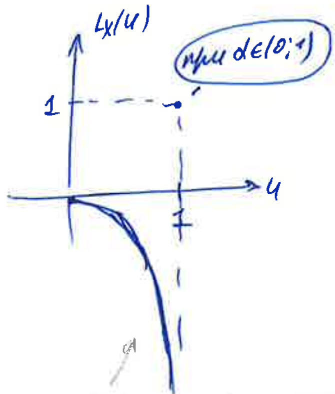
$\Rightarrow F_X^{-1}(t)=\dfrac{\sigma}{\sqrt[\alpha]{1-t}}$

$\Rightarrow \int_0^u F_X^{-1}(t)dt=\int_0^u \sigma\cdot(1-t)^{-1/\alpha}dt=-\sigma\cdot(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}+1}\cdot\dfrac{1}{-\frac{1}{\alpha}+1}\Big|_0^u=-\dfrac{\sigma\alpha}{\alpha-1}\left((1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}-1\right)=\dfrac{\sigma\alpha}{\alpha-1}\left(1-(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)$

$\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt=\int_0^1\sigma(1-t)^{-1/\alpha}dt=-\sigma(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}+1}\cdot\dfrac{1}{-\frac{1}{\alpha}+1}\Big|_0^1=-\dfrac{\sigma\alpha}{\alpha-1}(0-1)=\dfrac{\sigma\alpha}{\alpha-1}$

$\Rightarrow L_X(u)=\dfrac{\int_0^u F_X^{-1}(t)dt}{\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt}=1-(1-u)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$




Этот случай не подх

Проверка: $L_X(0)=1-1=0$

$L_X(1)=\dfrac{\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt}{\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt}=1.$ (при $\alpha\ge1$)

$L_X(u)$ выпукла вниз, т.к

$L_X'(u)=-\frac{\alpha-1}{\alpha}(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot(-1)=(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}$

$L_X''(u)=\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}-1}(-1)=\underbrace{\frac{\alpha-1}{\alpha^2}}_{\ge0\text{ при }\alpha\ge1}\cdot\underbrace{(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}-1}}_{\ge0}\ge0$ при $\alpha\ge1$. (и $\le0$ при $\alpha\in(0;1)$

② а) $X\le_{Lor}Y \Rightarrow CV(X)\le CV(Y)$

б) обратное неверно.

Решение: а) $X\le_{Lor}Y$, если $L_X(u)\ge L_Y(u)$ $\forall u\in[0,1]$

$X\le_{Lor}Y \Leftrightarrow \frac{X}{EX}\le_{cx}\frac{Y}{EY}$

$X\le_{Lor}Y \Leftrightarrow Eh\left(\frac{X}{EX}\right)\le Eh\left(\frac{Y}{EY}\right)$ $\forall$ выпуклой непрер. f.

$X\le_{cx}Y \overset{def}{\Leftrightarrow}\begin{cases}X\le_{sl}Y\\ EX=EY\end{cases}$ $\leftarrow$ $X_1\le_{sl}Y$, если $E(X_1-d)^+\le E(X_2-d)^+$, $\forall d\ge0$.

$\Leftrightarrow Ef(X)\le Ef(Y)$ $\forall$ неубыв. выпуклой ф-ции f.

Итак, $X\le_{Lor}Y\Rightarrow\frac{X}{EX}\le_{cx}\frac{Y}{EY}\Rightarrow E\left(\frac{X^2}{(EX)^2}\right)\le E\left(\frac{Y^2}{(EY)^2}\right)$ т.к $g(x)=x^2$ - неубыв. и выпукла

$$\Rightarrow \frac{EX^2}{(EX)^2} \le \frac{EY^2}{(EY)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{EX^2}{(EX)^2} - 1 \le \frac{EY^2}{(EY)^2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{EX^2 - (EX)^2}{(EX)^2} \le \frac{EY^2 - (EY)^2}{(EY)^2}$$

$$\Rightarrow (CV(X))^2 \le (CV(Y))^2$$

$\Rightarrow CV(X) \le CV(Y)$. чтд.

б) $CV(X) \le CV(Y) \not\Rightarrow X \le_{cor} Y$.

Например, рассм. $X = \begin{cases} 0, \text{ с вер-тью } 1/4 \\ 1, \text{ с вер-тью } 1/4 \\ 2, \text{ с вер-тью } 1/4 \\ 3, \text{ с вер-тью } 1/4 \end{cases}$ $\Rightarrow EX = \frac{1}{4}(1+2+3) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$EX^2 = \frac{1}{4}(1+4+9) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

$Y = \begin{cases} 0, \text{ с вер-тью } \frac{1}{3} \\ 2, \text{ с вер-тью } \frac{1}{2} \\ 3, \text{ с вер-тью } \frac{1}{6} \end{cases}$ $\Rightarrow EY = \frac{1}{2}\cdot 2 + 3\cdot\frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$EY^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 9 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

$\Rightarrow EX = EY = \frac{3}{2}$, $EX^2 = EY^2 = \frac{7}{2}$ $\Rightarrow CV(X) = CV(Y)$

Но $X \not\le_{cor} Y$, т.к. $X \not\le_{sl} Y$ (а верь $\begin{cases} X \le_{cor} Y \\ EX = EY \end{cases} \Leftrightarrow X \le_{sl} Y$)
(ну sl + = − будет cx)

Почему $X \not\le_{sl} Y$?

потому что на стр. 47 книги Булинской есть лемма 8:

$\begin{cases} X \le_{sl} Y \\ EX = EY \\ DX = DY \end{cases} \Rightarrow X \overset{d}{=} Y$ — а у нас явно $X \overset{d}{\ne} Y$.

(Док-во леммы: $m_X(d) = E(X-d)^+ = \int_d^{+\infty} (1 - F_X(u))du$

$X \le_{sl} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} E(X-d)^+ \le E(Y-d)^+ \ \forall d \Rightarrow m_X(d) \le m_Y(d) \ \forall d > 0$

Имеем: $\begin{cases} EX = EY \\ DX = DY \end{cases} \Rightarrow EX^2 = EY^2$

но $EX^2 = \int_0^{+\infty} x^2 dF_X(x) = -\int_0^{+\infty} x^2 d(1 - F_X(x)) = \underbrace{\cancel{-x^2(1-F_X(x))\Big|_0^{+\infty}}}_{0} + 2\int_0^{+\infty} x(1 - F_X(x))dx =$

$= -2\int_0^{+\infty} x \, dm_X(x) = \underbrace{\cancel{-2x m_X(x)\Big|_0^{+\infty}}}_{0} + 2\int_0^{+\infty} m_X(x)dx = 2\int_0^{+\infty} m_X(x)dx$

$\Rightarrow$ поскольку $EX^2 = EY^2$, то $\int_0^{+\infty} (m_Y(x) - m_X(x))dx = 0$.

но $X \le_{sl} Y \Rightarrow m_X(d) \le m_Y(d) \ \forall d > 0$ $\Rightarrow m_Y(x) = m_X(x)$

а по функции $m_X(x)$ однозначно восстанавливается $F_X(x)$. чтд.

**3.** $X \perp\!\!\!\perp Z$

$X \sim \Gamma(1; \frac{1}{\lambda}) = Exp(\lambda)$ $\Rightarrow Y = \frac{X}{Z} \sim$ Pareto с ф.р. $F(x) = 1 - (1 + \lambda \frac{x}{\cancel{\beta}})^{-\alpha}$ ; $x > 0$, $\alpha > 1$, $\lambda > 0$.

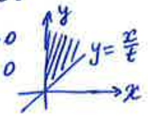
$Z \sim \Gamma(\alpha; 1)$

**Решение:** $\Gamma(k; \theta)$: $p(x) = \dfrac{x^{k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \cdot \theta^k} \cdot I(x > 0)$ $\qquad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$

$$\Rightarrow f_X(x) \overset{\Gamma(1; \frac{1}{\lambda})}{=} \frac{x^0 \cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(1) \cdot \frac{1}{\lambda}} \cdot I(x > 0) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot I(x > 0)$$

$$f_Y(x) \underset{\Gamma(\alpha; 1)}{=} \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \cdot I(x > 0)$$

$$\Rightarrow F_{\frac{X}{Z}}(t) = P\left(\frac{X}{Z} \le t\right) = \iint\limits_{\frac{x}{y} \le t} \underbrace{p_X(x) \cdot p_Z(y)}_{\text{т.к. } X \perp\!\!\!\perp Z} dx\,dy = \iint\limits_{\substack{\frac{x}{y} \le t \\ x > 0 \\ y > 0}} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \frac{y^{\alpha-1} \cdot e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dx\,dy =$$



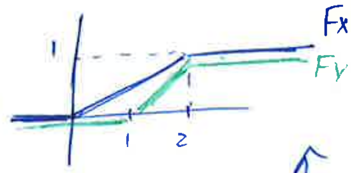

$$= \int_0^{+\infty} \Big( \underbrace{\int_0^{yt} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx}_{= \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{yt} = 1 - e^{-\lambda y t}} \Big) \frac{y^{\alpha-1} \cdot e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda y t}) \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy}_{= \Gamma(\alpha)} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y(1+\lambda t)} y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dy =$$

$$= 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{(y(1+\lambda t))^{\alpha-1}}{(1+\lambda t)^{\alpha-1}} \cdot e^{-y(1+\lambda t)} dy = 1 - \frac{(1+\lambda t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{+\infty} (y(1+\lambda t))^{\alpha-1} \cdot e^{-y(1+\lambda t)} dy =$$

$$= 1 - \frac{(1+\lambda t)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{1+\lambda t} \underbrace{\int_0^{+\infty} (y(1+\lambda t))^{\alpha-1} \cdot e^{-y(1+\lambda t)} d(y(1+\lambda t))}_{= \Gamma(\alpha)} = 1 - (1+\lambda t)^{-\alpha} \text{ чтд.}$$

**4.** $X \underset{st}{\le} Y \not\Leftarrow X \underset{sl}{\le} Y$

**Решение:** Рассм. $X \sim U(0, 2)$, $Y \sim U(1, 2)$




Опр. $X \underset{st}{\le} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} F_X(t) \ge F_Y(t), \forall t$ — туда, см. картинку

Если $d = 0$ — то $0 = 0$.

Если $d \in (0; 1)$, то $E(X-d)^+ = \int_0^{2-d} \frac{1}{2} dx = \frac{2-d}{2} = 1 - \frac{d}{2} \le 1$ $\Rightarrow E(X-d)^+ \le 1 = E(Y-d)^+$

$E(Y-d)^+ = \int_{1-d}^{2-d} 1 dx = 2 - d - (1-d) = 1$

Если $d \in (1; 2)$: $E(X-d)^+ = \int_0^{2-d} \frac{1}{2} dx = \frac{2-d}{2}$ $\Rightarrow E(X-d)^+ = \frac{2-d}{2} \le 2 - d = E(Y-d)^+$

$E(Y-d)^+ = \int_0^{2-d} 1 dx = 2 - d$

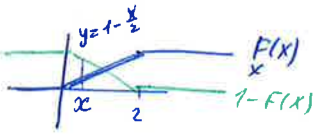
Если $d \in [2; +\infty]$ — то $0 = 0$.

Этим мы проверили, что $X \underset{sl}{\le} Y$, но это и так было ясно, т.к. $X \underset{st}{\le} Y \Rightarrow X \underset{sl}{\le} Y$

Опр. $X \underset{K}{\le} Y$, если $K_X(x) \le K_Y(x)\ \forall x \ge 0$, где $K_X(x) = \frac{1}{EX} m_X(xEX) = \dfrac{\int_{xEX}^{+\infty}(1-F_X(t))dt}{EX}$ $x \ge 0$

Имеем: $X \sim R[0,2]$

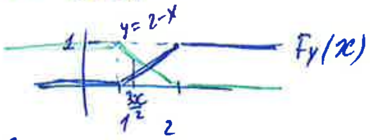
$EX = 1$




$\Rightarrow \begin{cases} K_X(x) = \int_x^{+\infty}(1-F_X(t))dt = \frac{1}{2}\cdot(1-\frac{x}{2})(2-x) = \frac{1}{4}(2-x)^2, \forall x \in [0;2] \\ K_X(x) = 0, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

$Y \sim R[1;2]$

$EY = \frac{3}{2}$




$K_Y(x) = \frac{2}{3}\cdot\int_{\frac{3x}{2}}^{+\infty}(1-F_Y(x))dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{3x}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{3x}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}(4-3x)^2, \forall x \in [\frac{2}{3};\frac{4}{3}]$.

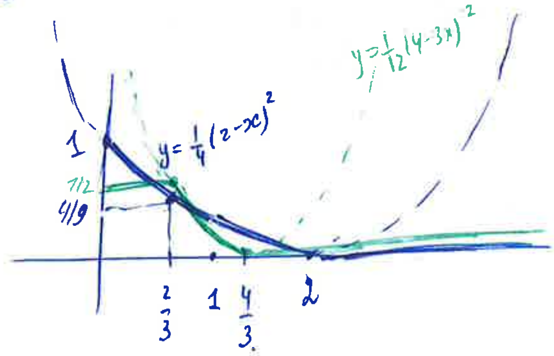
$\frac{3x}{2} \in [1;2]$

$3x \in [2;4]$

$x \in [\frac{2}{3};\frac{4}{3}]$

$K_Y(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in [0;\frac{2}{3}]$

$K_Y(x) = 0, \forall x \ge \frac{4}{3}$

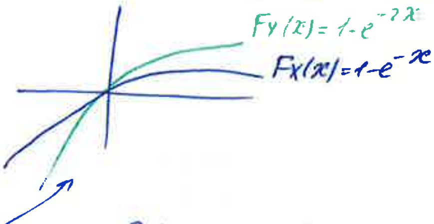



Видно, что неверно, что $K_X(x) \le K_Y(x)\ \forall x \ge 0 \Rightarrow X \underset{K}{\not\le} Y$.

5. $X \underset{K}{\le} Y \not\Rightarrow X \underset{st}{\le} Y$

Решение: $X \sim Exp(1)$ $p_X(x) = 1\cdot e^{-x}\cdot I(x>0)$ $EX = \frac{1}{\lambda} = 1$ $F_X(x) = 1-e^{-\lambda x} = 1-e^{-x}$

$Y \sim Exp(2)$ $p_Y(x) = 2\cdot e^{-2x}\cdot I(x>0)$ $EY = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ $F_Y(x) = 1-e^{-\lambda x} = 1-e^{-2x}$




$X \underset{st}{\le} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} F_X(t) \ge F_Y(t)\ \forall t$.

Но у нас неверно, что $F_X(t) \ge F_Y(t)\ \forall t \Rightarrow X \underset{st}{\not\le} Y$

$X \underset{K}{\le} Y$, если $K_X(x) \le K_Y(x)\ \forall x \ge 0$, где $K_X(x) = \frac{1}{EX} m_X(xEX) = \dfrac{\int_{xEX}^{+\infty}(1-F_X(t))dt}{EX}$, $\forall x \ge 0$

$m_X(x) = \int_x^{+\infty}(1-F_X(t))dt = \int_x^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_x^{+\infty} = -(0-e^{-x}) = e^{-x}$

$m_Y(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty}(1-F_Y(t))dt = 2\int_{x/2}^{+\infty} e^{-2t}dt = 2\cdot\frac{-1}{2}\cdot e^{-2t}\Big|_{x/2}^{+\infty} = -(0-e^{-x}) = e^{-x}$

$\Rightarrow m_X(x) = m_Y(x)\ \forall x \ge 0. \Rightarrow X \underset{K}{\le} Y$

⑥ Показать, что $\Gamma(\alpha;\theta)$ с $\alpha \geq 1$ и $R[a,b]$ имеют расп IFR.

Решение: Расп $\in$ IFR $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \lambda(t)=\frac{f(t)}{\bar F(t)}$ — ~~выпуклая~~ ($\Leftrightarrow \ln \lambda(t)$ ~~моног. возр. нот~~) вогнутая ф-ция.
моног. возрастает нот

а) $X \sim \Gamma(\alpha;\theta)$

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^\alpha}\cdot I(x>0)$$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{t}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\,\theta^\alpha}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^\alpha}\cdot\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\theta}}dt = 1-\frac{\int_x^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\theta}}dt}{\Gamma(\alpha)\,\theta^\alpha}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{f_X(x)}{\bar F_X(x)} = \frac{x^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\cdot\cancel{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^\alpha}}{\cancel{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^\alpha}\cdot\int_x^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\theta}}dt} = \frac{x^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\int_x^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-\frac{t}{\theta}}dt} = \frac{1}{\int_x^{+\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}(t-x)}dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^{-1}(x) = \int_x^{+\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}(t-x)}dt \underset{v:=t-x}{=} \int_0^{+\infty}\left(\frac{v+x}{x}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}v}dv = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{v}{x}\right)^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}v}dv$$

Заметим, что $\alpha \geq 1 \Rightarrow \left(1+\frac{v}{x}\right)^{\alpha-1}$ убывает по $x$

$\Rightarrow \lambda^{-1}(x) = \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{v}{x}\right)^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\theta}v}dv$ — убывает по $x$

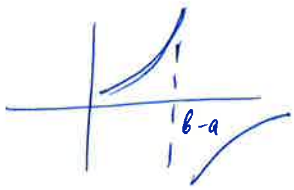
$\Rightarrow \lambda(x)$ - возрастает по $x$. чтд.

б) $X \sim R[a,b]$.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\cdot I[a,b]$$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x}{b-a}\ ;\ x\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \underset{x\in[a,b]}{\lambda(x)} = \frac{f(x)}{\bar F(x)} = \frac{1/b-a}{1-\frac{x}{b-a}} = \frac{1}{b-a-x}$$




— моног. возрастает по $x$

⑦ $X_i \underset{mor}{\leq} Y_i\ ;\ i\geq 1 \Rightarrow \min_i X_i \underset{mor}{\leq} \min_i Y_i$

Решение: $X \underset{mor}{\leq} Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lambda_X(t) \geq \lambda_Y(t)\ ,\ \forall t\geq 0.$

1 способ: ~~Что~~ На стр 39 лекции 7 была лемма: $X \underset{mor}{\leq} Y \Leftrightarrow \exists Z \perp\!\!\!\perp Y: X \overset{d}{=} \min(Y,Z)$

$$\begin{cases} X_1 \underset{mor}{\leq} Y_1 \Rightarrow \exists Z_1 \perp\!\!\!\perp Y_1 : X_1 \overset{d}{=} \min(Y_1;Z_1) \\ X_2 \underset{mor}{\leq} Y_2 \quad \exists Z_2 \perp\!\!\!\perp Y_2 : X_2 \overset{d}{=} \min(Y_2;Z_2) \end{cases}$$

но $\underbrace{\min(X_1;X_2)}_{X} \overset{d}{=} \min(\min(Y_1;Z_1);\min(Y_2;Z_2)) = \min(Y_1;Z_1;Y_2;Z_2) = \min(\underbrace{\min(Y_1;Y_2)}_{=Y};\underbrace{\min(Z_1;Z_2)}_{=Z})$

$\Rightarrow \exists\ Z = \min(Z_1;Z_2) \perp\!\!\!\perp Y = \min(Y_1;Y_2):\ X \overset{d}{=} \min(Y;Z).$ чтд.

2 способ Если $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\lambda_{\min(X,Y)} = \lambda_X + \lambda_Y$.

Имеем: $\lambda_X(x) = \dfrac{f_X(x)}{\overline{F_X(x)}}$

$\lambda_Y(x) = \dfrac{f_Y(x)}{\overline{F_Y(x)}}$

Найдем ф.р $\min(X,Y)$

$$F_Z(x) = P(\min(X,Y) \le x) = 1 - P(\min(X,Y) > x) = 1 - P(X > x; Y > x) \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} 1 - P(X>x)\cdot P(Y>x) =$$

$$= 1 - (1-F_X(x))(1-F_Y(x)) = 1 - \overline{F_X(x)}\cdot\overline{F_Y(x)}$$

$$\Rightarrow f_Z(x) = F_Z'(x) = -(1-F_X(x))\cdot -f_Y(x) - (-f_X(x))\cdot(1-F_Y(x)) =$$

$$= \overline{F_X(x)}\cdot f_Y(x) + f_X(x)\cdot\overline{F_Y(x)}$$

$$\Rightarrow \lambda_Z(x) = \frac{f_Z(x)}{\overline{F_Z(x)}} = \frac{\overline{F_X(x)}\cdot f_Y(x) + f_X(x)\cdot\overline{F_Y(x)}}{\overline{F_X(x)}\cdot\overline{F_Y(x)}} = \frac{f_Y(x)}{\overline{F_Y(x)}} + \frac{f_X(x)}{\overline{F_X(x)}} = \lambda_X(x) + \lambda_Y(x)$$

$\Rightarrow$ если $X_i \le_{mor} Y_i$, то $\lambda_{X_i}(x) \ge \lambda_{Y_i}(x)$ $\forall x \ge 0$.

$$\Rightarrow \lambda_{\min_i(X_i)} = \sum_i \lambda_{X_i}(x) \ge \sum_i \lambda_{Y_i}(x) = \lambda_{\min_i(Y_i)}$$

$$\Rightarrow \min_i(X_i) \le_{mor} \min_i(Y_i)$$

① Стохастический порядок не сохраняется для премии Эшера.

Пример: $P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{3}$

$P(X=0;\ Y=\frac{2}{3h})=\frac{1}{3}$

$P(X=\frac{3}{h};\ Y=\frac{3}{h})=\frac{1}{3}$

| $X \backslash Y$ | $0$ | $\frac{2}{3h}$ | $\frac{3}{h}$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $1/3$ | $1/3$ | – |
| $\frac{3}{h}$ | – | – | $1/3$ |

Тогда $X \leq_{st} Y$, но $\Pi_X > \Pi_Y$.

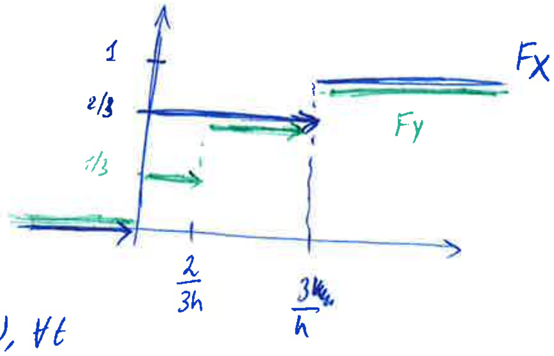
Решение: • $X \leq_{st} Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_X(t) \geq F_Y(t)\ \forall t$

• $\Pi_X = EX_h$, где $X_h \underset{pp}{\sim} F_{X,h}$ : $dF_{X,h}(x) = \dfrac{e^{hx}dF_X(x)}{Ee^{hX}}$

$$\Rightarrow \Pi_X = \frac{\int x\cdot e^{hx}dF_X(x)}{Ee^{hX}} = \frac{E(Xe^{hX})}{Ee^{hX}} = \frac{g'_X(h)}{g_X(h)}$$ , где $g_X(h)=Ee^{hX}$

Имеем: $X=\begin{cases}0, & \text{с вер-тью } \frac{2}{3}\\ \frac{3}{h}, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3}\end{cases}$

$Y=\begin{cases}0, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3h}, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3}\\ \frac{3}{h}, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3}\end{cases}$




а) Из картинки: $F_X(t) \geq F_Y(t),\ \forall t$

$\Rightarrow X \leq_{st} Y$

б) $g_X(t) = Ee^{tX} = \frac{2}{3}\cdot e^0 + \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{3t}{h}} = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{\frac{3t}{h}}$

$\Rightarrow g'_X(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{h}e^{\frac{3t}{h}} = \frac{1}{h}\cdot e^{\frac{3t}{h}}$

$$\Rightarrow \Pi_X = \frac{g'_X(h)}{g_X(h)} = \frac{\frac{1}{h}\cdot e^3}{\frac{1}{3}(2+e^3)} = \frac{3e^3}{h(2+e^3)}$$

$g_Y(t) = Ee^{tY} = \frac{1}{3}e^0 + \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{2}{3h}t} + \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{3}{h}t}$

$\Rightarrow g'_Y(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3h}\cdot e^{\frac{2t}{3h}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{h}\cdot e^{\frac{3}{h}t}$

$$\Rightarrow \Pi_Y = \frac{g'_Y(h)}{g_Y(h)} = \frac{\frac{2}{3h}\cdot e^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{h}\cdot e^3}{1+e^{\frac{2}{3}}+e^3}$$

$\Pi_X\ ?\ \Pi_Y$

$$\frac{3e^3}{h(2+e^3)}\ ?\ \frac{\frac{2}{3h}\cdot e^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{h}e^3}{1+e^{\frac{2}{3}}+e^3}$$

$3e^3 + 3e^{\frac{11}{3}} + 3e^6\ ?\ (2+e^3)\left(\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}} + 3e^3\right)$

$3e^{3} + 3e^{\frac{11}{3}} + \cancel{3e^{6}}$ ? $\frac{4}{3}e^{\frac{2}{3}} + 6e^{3} + \frac{2}{3}e^{\frac{11}{3}} + \cancel{3e^{6}}$

$\frac{7}{3}e^{\frac{11}{3}}$ $\quad 3e^{3}$

$\frac{7}{3}e^{\frac{11}{3}}$ ? $\frac{4}{3}e^{\frac{2}{3}} + 3e^{3}$

$7e^{\frac{11}{3}}$ ? $4e^{\frac{2}{3}} + 9e^{3}$

~~[illegible]~~

$273{,}8499\ldots$ ? $7{,}7909\ldots + 180{,}769\ldots$

$>$

$\Rightarrow \begin{cases} X \le_{st} Y \\ \Pi_X > \Pi_Y \end{cases} \Rightarrow$ премия Эшера не сохраняет стох. порядок.

② Сохраняется ли стох. порядок при подсчёте премии по принципу среднеквадр?

Решение: Ответ: нет

Пусть $X = \begin{cases} 0, & \text{с вер-тью } p \\ \frac{10}{\beta}, & \text{с вер-тью } 1-p \end{cases}$

$\Rightarrow EX = \frac{10}{\beta}(1-p)$

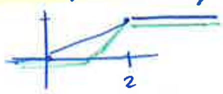
$EX^2 = \frac{100}{\beta^2}(1-p)$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{100}{\beta^2}(1-p) - \frac{100}{\beta^2}(1-p)^2 = \frac{100}{\beta^2}(1-p)p$

2 способ

$X \sim R(0,2)$

$Y \sim R(1,2)$



$\Rightarrow X \le_{st} Y$ — см. картинку

$EX = 1;\ DX = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$EY = 1{,}5;\ DY = \frac{1}{12}.$

$EX + \beta\sqrt{DX}$ ? $EY + \beta\sqrt{DY}$

$1 + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ ? $\frac{3}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\frac{\beta}{2\sqrt{3}}$ ? $\frac{1}{2}.$

$\beta$ ? $\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ при $\beta > \sqrt{3}$: $\begin{cases} X \le_{st} Y \\ P_X > P_Y \end{cases}$

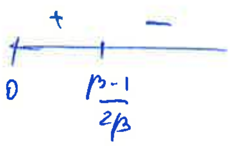
$\Rightarrow$ не сохраняется стох. порядок

$\Rightarrow P_X = EX + \beta\sqrt{DX} = \frac{10}{\beta}(1-p) + \beta \cdot \frac{10}{\beta}\sqrt{(1-p)p} = \frac{10}{\beta}(1-p) + 10\sqrt{p-p^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial P_X}{\partial p} = -\frac{10}{\beta} + 10(1-2p) \overset{?}{=} 0.$

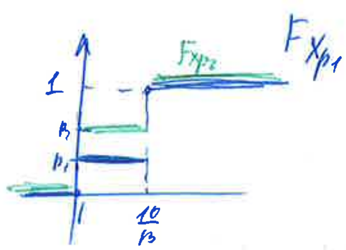
$1 - 2p = \frac{1}{\beta}$

$1 - \frac{1}{\beta} = 2p \Rightarrow p = \frac{\beta-1}{2\beta} < 1.$



$\Rightarrow$ при $0 < p_1 < p_2 < \frac{\beta-1}{2\beta}$:

$P_{X_{p_1}} < P_{X_{p_2}}$




но $X_{p_1} \ge_{st} X_{p_2}$, т.к. $F_{X_{p_1}}(t) \le F_{X_{p_2}}(t),\ \forall t.$

$\Rightarrow \begin{cases} X_{p_1} \ge_{st} X_{p_2} \\ P_{X_{p_1}} < P_{X_{p_2}} \end{cases} \Rightarrow$ стох. порядок не сохр.

(ПЗ)

(3) Всегда ли принцип нулевой полезности обеспечивает премию с нагрузкой?

Нет, это так только если ф-ция полезности вогнутая.

Решение: принцип нулевой полезности: $E\,u(p-X) = u(0)$

$u(x)$ – вогнутая $\Rightarrow$ по н-ву Йенсена $f(EZ) \geq Ef(Z)$ – т.к. $f(EX) \leq Ef(X)$ для выпуклых (вниз)

$$\Rightarrow u(0) = E\,u(p-X) \leq u(E(p-X)) = u(p-EX)$$

$$\Rightarrow u(0) \leq u(p-EX)$$

но $u$ – неубывает по опр $\Rightarrow p-EX \geq 0$

$\Rightarrow p \geq EX \Rightarrow p$ – с нагрузкой.

Если $u$ – выпуклая, например, $u(x) = e^x$

Возьмём $X \sim R[1,2]$.

$\Rightarrow EX = \frac{3}{2}$.

Ищем $p_X$: $E\,u(p-X) = u(0)$

$$\underset{\|}{E e^{p-X}} \qquad \underset{\|}{e^0} = 1.$$

$$\Rightarrow e^p \cdot Ee^{-X} = 1.$$

$$Ee^{-X} = \int_1^2 1 \cdot e^{-x}dx = -1 \cdot e^{-x}\Big|_1^2 = -(e^{-2} - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2}$$

$$\Rightarrow e^p \cdot \frac{e-1}{e^2} = 1.$$

$$e^{p-2} = \frac{1}{e-1}.$$

$$p - 2 = -\ln(e-1)$$

$$p = 2 - \ln(e-1) = 1{,}4586\ldots < 1{,}5 = EX.$$

$\Rightarrow p < EX \Rightarrow$ для выпуклой ф-ции полезности принцип нулевой полезности не дает премию с нагрузкой.

(4) Как меняется в смысле порядка $\leq_e$ семейство эксп. расп. при росте параметра?

Ответ: возрастает.

Решение: $X \leq_e Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} Ee^{\alpha X} \leq Ee^{\alpha Y}, \ \forall \alpha > 0.$

пусть $a < b$.

$X \sim Exp(a)$; $Y \sim Exp(b)$

$p_X(x) = a \cdot e^{-ax} \cdot I\{x > 0\}$

$$\Rightarrow Ee^{\alpha X} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \cdot a \cdot e^{-ax} dx = a \cdot \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - a)x} dx = \frac{a}{\alpha - a} \cdot e^{(\alpha - a)x}\Big|_0^{+\infty} = \begin{cases} \frac{a}{a-\alpha}, & \text{если } \alpha < a \\ \infty, & \text{если } \alpha \geq a. \end{cases}$$

$$Ee^{\alpha Y} = \begin{cases} \frac{b}{b-\alpha}, & \text{если } \alpha < b \\ \infty, & \text{если } \alpha \geq b. \end{cases}$$

пусть $0<\alpha<a<b$

$$\Rightarrow \frac{a}{a-\alpha} \; ? \; \frac{b}{b-\alpha}.$$

$$\frac{a}{a-\alpha}-\frac{b}{b-\alpha} \; ? \; 0.$$

$$\frac{\cancel{ab}-a\alpha-\cancel{ba}+b\alpha}{(a-\alpha)(b-\alpha)} \; ? \; 0.$$

$$\frac{\alpha(b-a)}{(a-\alpha)(b-a)} \; ? \; 0.$$

$>$

$\Rightarrow$ возрастает.

пусть $a\le\alpha<b$

$$\Rightarrow \infty > \frac{b}{b-\alpha}$$

пусть $a\le b\le\alpha$.

$$\Rightarrow \infty = \infty.$$

## 5. Эксп. порядок не явл. полным

Пример: $X\sim Exp(1)$ $\quad P(Y_1=0)=1.$

$Y=\frac{2}{3}\cdot\delta_0+\frac{1}{3}Exp(\frac{1}{2})$ — не упор. в смысле эксп. порядка.

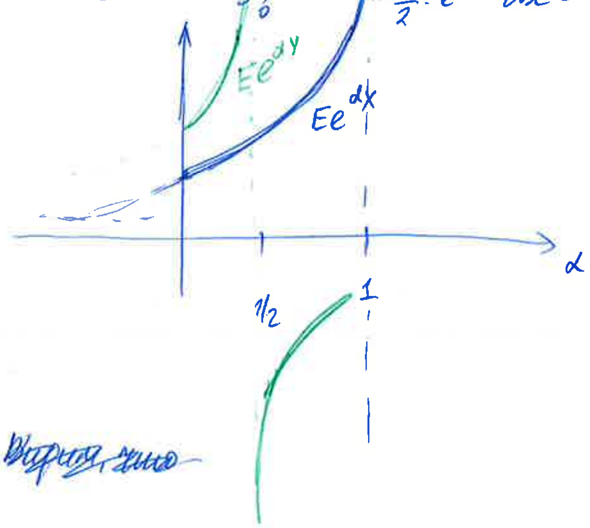
; $dF_Y(x)=\frac{2}{3}F_{Y_1}(x)+\frac{1}{3}F_{Y_2}(x)$

$dF_Y(x)=\frac{2}{3}P(Y_1=x)+\frac{1}{3}p_{Y_2}(x)$

Решение: $X\le_e Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} Ee^{\alpha X}\le Ee^{\alpha Y}$

$$Ee^{\alpha X}=\int_0^{+\infty}e^{\alpha x}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-1)x}dx=\frac{1}{\alpha-1}e^{(\alpha-1)x}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha<1.\\ \infty, & \text{если } \alpha\ge1.\end{cases}$$

$$Ee^{\alpha Y}=\frac{2}{3}Ee^0+\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{\alpha x}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}e^{x(\alpha-\frac{1}{2})}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{6(\alpha-\frac{1}{2})}e^{x(\alpha-\frac{1}{2})}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\frac{2}{3}+\frac{1}{3-6\alpha}, & \text{если } \alpha<\frac{1}{2}\\ \infty, & \text{если } \alpha\ge\frac{1}{2}.\end{cases}$$




~~Видим, что~~

Видим, что неверно, что $Ee^{\alpha X}\le Ee^{\alpha Y}$, $\forall\alpha>0$.

(т.к. $Ee^{\alpha X}>Ee^{\alpha Y}$ при $\alpha\in(0;\frac{1}{2})$)

$\Rightarrow$ $X$ и $Y$ не упорядоч. в смысле эксп. порядка

$\Rightarrow$ эксп. порядок не полный

13.10.20. Спецкурс Бур. д/з 6. Токсаева Александра 409

(1) $N \sim pois(\lambda)$

каждая точка отправляется в $i$-ю группу с вер-тью $p_i$

$N_i$ – кол-во точек в $i$-й группе $i=1\ldots m$

Док-ть: а) $N_i \sim pois(p_i\lambda)$

б) $\{N_i\}_{i=1}^m$ – незав.

Решение: а) $N_i = \sum\limits_{t=0}^{N} X_t$, где $X_t$ – незав; $X_t = \begin{cases} 1, & \text{с вер-тью } p_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$; $X_t \perp\!\!\!\perp N$

$$\Rightarrow P(N_i=k) = P\left(\sum_{t=0}^{N} X_t = k\right) \overset{\text{ф-ла полной вер-ти}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{N} X_t = k \cap N=n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{N} X_t = k \mid N=n\right)\cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{n} X_t = k \mid N=n\right) P(N=n) \underset{X_t \perp\!\!\!\perp N}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{n} X_t = k\right)\cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{n-k} \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p_i^k \cdot (1-p_i)^{n-k} \cdot \frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^n}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{p_i^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p_i)^{n-k}\cdot\lambda^n}{(n-k)!} = \frac{p_i^k\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p_i)^{n-k}\cdot \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \underset{\text{при } n<k \text{ будет } 0}{=}$$

$$= \frac{p_i^k \cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1-p_i)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p_i^k\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\cdot e^{(1-p_i)\lambda} = \frac{p_i^k\cdot\lambda^k\cdot e^{-p_i\lambda}}{k!} = P(pois(\lambda p_i)=k)$$

$\Rightarrow N_i \sim pois(\lambda p_i)$

б) $N_i = \sum\limits_{t=0}^{N_1} X_t$, где $N_1 \sim pois(\lambda)$; $X_t = \begin{cases} 1, & \text{с вер-тью } p_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad N_1 \perp\!\!\!\perp N_2$; $\{X_t\} \perp\!\!\!\perp N_1$; $\{Y_t\} \perp\!\!\!\perp N_2$.

$N_j = \sum\limits_{t=0}^{N_2} Y_t$, где $N_2 \sim pois(\lambda)$; $Y_t = \begin{cases} 1, & \text{с вер-тью } p_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Докажем, что $P(N_i=k \cap N_j=m) \overset{?}{=} P(N_i=k)\cdot P(N_j=m) = \frac{(p_i\lambda)^k\cdot e^{-p_i\lambda}}{k!}\cdot\frac{(p_j\lambda)^m\cdot e^{-p_j\lambda}}{m!}$

$$\text{Но } P(N_i=k \cap N_j=m) \overset{\text{ф-ла полной вер-ти}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(N_i=k \cap N_j=m \mid N_1=n; N_2=l)\cdot P(N_1=n; N_2=l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{N_1} X_t=k \cap \sum_{t=0}^{N_2} Y_t=m \mid N_1=n; N_2=l\right)\cdot P(N_1=n)\cdot P(N_2=l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P\left(\sum_{t=0}^{n} X_t=k\right)\cdot P\left(\sum_{t=0}^{l} Y_t=m\right)\cdot P(N_1=n)\cdot P(N_2=l) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} C_n^k\cdot p_i^k\cdot(1-p_i)^{n-k}\cdot C_l^m\cdot p_j^m\cdot(1-p_j)^{l-m}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^l}{l!} =$$

$$= \frac{p_i^k p_j^m \cdot e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k\cdot\lambda^m}{k!\,m!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(1-p_i)^{n-k}(1-p_j)^{l-m}\cdot\lambda^{n-k}\cdot\lambda^{l-m}}{(n-k)!\,(l-m)!} =$$

$$= \frac{p_i^k p_j^m e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^k\cdot\lambda^m}{k!\,m!}\, e^{\lambda(1-p_i)} e^{\lambda(1-p_j)} = \frac{p_i^k p_j^m\cdot e^{-\lambda p_i}\cdot e^{-\lambda p_j}\cdot\lambda^k\cdot\lambda^m}{k!\,m!} =$$

$$= \frac{(p_i\lambda)^k\cdot e^{-\lambda p_i}}{k!}\cdot\frac{(p_j\lambda)^m\cdot e^{-\lambda p_j}}{m!} = P(N_i=k)\cdot P(N_j=m) \Rightarrow N_i \perp\!\!\!\perp N_j \text{ чтд.}$$

② Док-ть, что а) $Bin(n, p_1) \le_{st} Bin(n; p_2)$ при $p_1 < p_2$ ← иначе: если $X_i \le_{st} Y_i$, то $\sum_{i=1}^{n} X_i \le_{st} \sum_{i=1}^{n} Y_i$

б) $Bin(n_1; p) \le_{st} Bin(n_2; p)$ при $n_1 < n_2$. ← иначе: если слагаемых больше по одн. $\ge_{st}$

**Решение:** $F_1 \le_{st} F_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_1(t) \ge F_2(t)\ \forall t.$

на стр. 23 лекции 4 была теорема:

если $\exists c: \begin{cases} dF_X(x) \ge dF_Y(x) \text{ при } x < c, \\ dF_X(x) \le dF_Y(x) \text{ при } x > c, \end{cases}$ то $X \le_{st} Y$.

а) имеем: $X \sim Bin(n, p_1)$

$Y \sim Bin(n; p_2)$ $p_1 < p_2$.

$dF_X(x) = P(X = x) = C_n^x p_1^x (1-p_1)^{n-x}$

$dF_Y(x) = P(Y = x) = C_n^x p_2^x (1-p_2)^{n-x}$

$dF_X(x) \ ? \ dF_Y(x)$

$C_n^x p_1^x (1-p_1)^{n-x} \ ? \ C_n^x p_2^x (1-p_2)^{n-x}$

$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x \ ? \ \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-x}$

$\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{n-x} \ ? \ \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^x$

$\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{n} \ ? \ \left(\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^x$

$n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right) \ ? \ x \ln\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)$

$\dfrac{n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)}{\ln\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)} \ ? \ x$

т.е $\exists c = \dfrac{n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)}{\ln\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)} > 0: \begin{cases} dF_X(x) > dF_Y(x), \text{ при } c > x \\ dF_X(x) < dF_Y(x), \text{ при } c < x \end{cases} \Rightarrow X \le_{st} Y$

$\Rightarrow Bin(n, p)$ стохаст. упорядочено по $p$ при фикс $n$.

б) имеем: $X \sim Bin(n_1; p)$

$Y \sim Bin(n_2; p)$ ; $n_1 < n_2$.

сравним $dF_X(x)$ и $dF_Y(x)$:

$C_{n_1}^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n_1 - x} \ ? \ C_{n_2}^x p^x \cdot (1-p)^{n_2 - x}$

$\frac{n_1!}{x!(n_1-x)!} \cancel{p}^x \cdot (1-p)^{n_1} \cdot \cancel{(1-p)}^{-x} \ ? \ \frac{n_2!}{x!(n_2-x)!} \cancel{p}^x \cdot (1-p)^{n_2} \cdot \cancel{(1-p)}^{-x}$

$$\frac{n_1!}{(n_1-x)!}(1-p)^{n_1} \ ? \ \frac{n_2!}{(n_2-x)!}(1-p)^{n_2}$$

$$\cancel{n_1(n_1-1)\dots(n_1-x+1)\cdot(1-p)^{n_1} \ ? \ n_2(n_2-1)\dots(n_2-x+1)(1-p)^{n_2}}$$

$$\frac{(n_2-x)!}{(n_1-x)!} \ ? \ \underbrace{\frac{n_2!}{n_1!}}_{>1}(1-p)^{\underbrace{n_2-n_1}_{\geq 0}}$$

$$(n_2-x)(n_2-x-1)\dots(n_1-x+1) \ ? \ \underbrace{\frac{n_2!}{n_1!}(1-p)^{n_2-n_1}}_{=const}.$$

левая часть $(0) = \frac{n_2!}{n_1!}$ > правой части

левая часть $(n_1+1) = 0$ < правой части

$\Rightarrow \exists c>0: \begin{cases} dF_X(x) \geq dF_Y(x) & \text{при } x<c \\ dF_X(x) \leq dF_Y(x) & \text{при } x>c \end{cases} \Rightarrow X \leq_{st} Y \Rightarrow Bin(n,p)$ стох. упор. по $n$ при фикс. $p$. чтд.

③ $X \leq_{se} Y \overset{?}{\Rightarrow} DX \leq DY$. Нет!

Решение: Ответ — нет. (хотя $EX \leq EY$ — это правда)

Почему мы предполагаем, что это нет так:

$X \leq_{se} Y \Rightarrow f(EX) \leq Ef(X)$ $\forall$ выпуклой $f$ $\Rightarrow$ $EX^k \leq EY^k$

(т.к. $X \leq_{se} Y \Rightarrow EX \leq_{se} X \Rightarrow$ по н-ву Йенсена получим) т.к. $f(x)=x^k$ при $k \geq 1$ — выпукла вниз

$\Rightarrow \begin{cases} EX \leq EY \\ EX^2 \leq EY^2 \end{cases}$

но $DX = EX^2 - (EX)^2 \overset{?}{\leq} EY^2 - (EY)^2 = DY$.

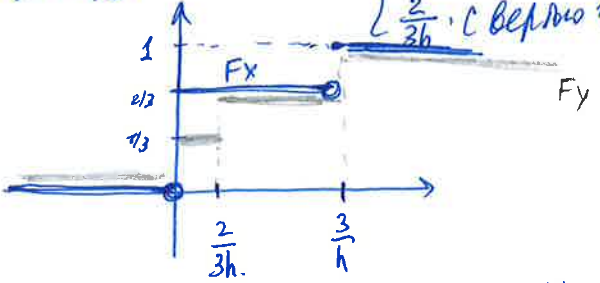
$$(EY^2 - EX^2) + (EX)^2 - (EY)^2 \overset{?}{\geq} 0.$$

$$\underbrace{(EY^2 - EX^2)}_{\geq 0} + \underbrace{(EX - EY)}_{\leq 0}(EX+EY) \overset{?}{\geq} 0.$$

Видно, что не обязательно $DY - DX \geq 0$.

$\Rightarrow$ придумаем контрпример.

Пусть $X = \begin{cases} \frac{3}{h}, & \text{с вер-ю } 1/3 \\ 0, & \text{с вер-ю } 2/3 \end{cases}$ $\quad Y = \begin{cases} \frac{3}{h}, & \text{с вер-ю } 1/3 \\ 0, & \text{с вер-ю } 1/3 \\ \frac{2}{3h}, & \text{с вер-ю } 1/3. \end{cases}$




Видим, что $\forall t: F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{se} Y$.

МО $EX = \frac{3}{h}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{h}$

$EX^2 = \frac{9}{h^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{h^2}$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{h^2} - \frac{1}{h^2} = \frac{2}{h^2}$

$EY = \left(\frac{3}{h} + \frac{2}{3h}\right)\frac{1}{3} = \frac{11}{9h}$

$EY^2 = \left(\frac{9}{h^2} + \frac{4}{9h^2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{85}{27h^2}$

$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{85}{27h^2}^{3} - \frac{121}{81h^2} = \frac{255-121}{81h^2} = \frac{134}{81h^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} X \underset{se}{\leq} Y \\ DX = \frac{2}{h^2} > \frac{134}{81h^2} = DY. \end{cases}$ чтд.

4. $\left.\begin{matrix} X \sim R[0,2] \\ Y \sim Exp(\lambda=1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \underset{se}{\leq} Y$

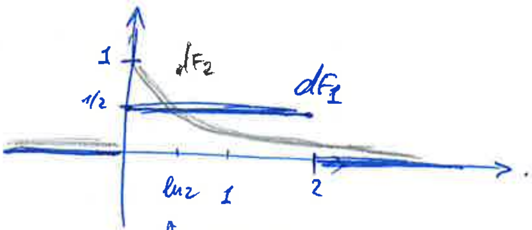
$p_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x}\cdot I\{x>0\}$

Решение: $EX = \frac{b-a}{2} = 1.$

$EY = \lambda = 1.$ $\Rightarrow EX = EY$

Нарисуем ~~графики~~ графики: $dF_X(x) = \frac{1}{2}\cdot I[0,2]$

и $dF_Y(x) = e^{-x}\cdot I\{x>0\}$.




$e^{-x} = 1/2 \Rightarrow -x = -\ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$

Используем теорему со стр. 10 лекции 5:

Если $EX = EY$ и $\exists$ три непересек. интервала $I_0, I_1, I_2$: $\begin{cases} 0 \in I_0 \\ I_2 \text{ бескон. вправо} \\ [0,+\infty) = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \end{cases}$,

причем $\begin{cases} dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ при } x \in I_0 \cup I_2, \\ dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ при } x \in I_1 \end{cases}$ — то $X \underset{st}{\leq} Y$.

На картинке ровно так и есть, для $I_0 = (0; \ln 2)$

$I_1 = (\ln 2; 2)$

$I_2 = (2; +\infty)$

$\Rightarrow X \sim R[0,2] \underset{se}{\leq} Y \sim Exp(1)$ чтд.

06.10.20. Спецкурс Бул. ДЗ 5. Токаева Александра 409

① Пусть $\underset{b}{\leq}$ – полный порядок всех рисков для индекса $b \in B$.

Определим $\underset{a}{\leq}$ так: $X \underset{a}{\leq} Y \Leftrightarrow X \underset{b}{\leq} Y \; \forall b \in B$.

Док-ть, что $\underset{a}{\leq}$ – это частичный порядок.

Решение: 1) Транзитивность $\begin{cases} X \underset{a}{\leq} Y \\ Y \underset{a}{\leq} Z \end{cases} \Rightarrow X \underset{a}{\leq} Z$

имеем: $\begin{cases} X \underset{a}{\leq} Y \Leftrightarrow X \underset{b}{\leq} Y \; \forall b \in B \\ Y \underset{a}{\leq} Z \Leftrightarrow Y \underset{b}{\leq} Z \; \forall b \in B \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{фикс}}{\forall b \in B}: X \underset{b}{\leq} Y \underset{b}{\leq} Z$

$\Rightarrow X \underset{b}{\leq} Z \; \forall b \in B$ – а это и есть $X \underset{a}{\leq} Z$.

(т.к $\underset{b}{\leq}$ – порядок)

2) рефлексивность: $X \underset{a}{\leq} X$

да, т.к $X \underset{a}{\leq} X \Leftrightarrow X \underset{b}{\leq} X \; \forall b \in B$ – а это верно, т.к $\underset{b}{\leq}$ – порядок.

3) антисимм: $\begin{cases} X \underset{a}{\leq} Y \\ Y \underset{a}{\leq} X \end{cases} \Rightarrow X = Y.$

да, т.к $\begin{cases} X \underset{b}{\leq} Y \; \forall b \in B \\ Y \underset{b}{\leq} X \; \forall b \in B \end{cases} \Rightarrow$ поскольку $\underset{b}{\leq}$ – порядок, то $\forall b \in B: X = Y$.

Причём $\underset{b}{\leq}$ – неполный порядок, т.к не обязательно $\begin{cases} \text{либо } X \underset{b}{\leq} Y \; \forall b \in B \\ \text{либо } Y \underset{b}{\leq} X \; \forall b \in B \end{cases}$,

т.к может для некот $\begin{cases} b_1 \in B: X \underset{b_1}{\leq} Y \\ b_2 \in B: X \underset{b_2}{\geq} Y. \end{cases}$

② Пусть $X \underset{st}{\leq} Y$.

Можно ли (на том же самом вер. пр-ве) найти $\tilde{Y}: \begin{cases} X \underset{s}{\leq} \tilde{Y} \\ \tilde{Y} \overset{d}{=} Y \end{cases}$

Решение: $X_1 \underset{st}{\leq} X_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} F_1 \underset{st}{\leq} F_2$

т.е $F_1(t) \geq F_2(t) \; \forall t$

$X_1 \underset{s}{\leq} X_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} P(X_1 \leq X_2) = 1.$

Имеем: $F_X(t) \geq F_Y(t) \; \forall t$ – т.к $X \underset{st}{\leq} Y$

подставим $t := X$

$\Rightarrow F_X(X) \geq F_Y(X)$

для дискр сл вел это не верно — см контрпример далее

$\Rightarrow$ (поскольку $F_Y^{-1}$ – возрастающая, т.к $F_Y$ – это ф.р):

$\tilde{Y} := F_Y^{-1}(F_X(X)) \geq X$

Заметим, что $F_{\tilde{Y}}(x) = P(F_Y^{-1}(F_X(X)) \leq x) = P(F_X(X) \leq F_Y(x)) = P(X \leq F_X^{-1}(F_Y(x))) =$

$= F_X(F_X^{-1}(F_Y(x))) = F_Y(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{Y} \overset{d}{=} Y \\ \tilde{Y} \geq X \end{cases}$ чтд.

③ Док-ть св-во 3° через опр. свертки.

Верны ли св-ва 1°; 2°; 4° для стох. порядка?

Решение: 3°: Для $F_1 F_2 G \in B_<$ : $F_k * G \in B_<$ ; $k=1,2$

$$F_1 < F_2 \Rightarrow F_1 * G < F_2 * G$$

У нас $<$ - это $<_{st}$ $\Leftrightarrow F(t) \geq G(t)\ \forall t$

Хотим: $F <_{st} G \Rightarrow F*P <_{st} G*P$

$$(F*P)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-x)\, dP(x) \underset{F <_{st} G}{\geq} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-x)\, dP(x) = (G*P)(t) \quad \forall t$$

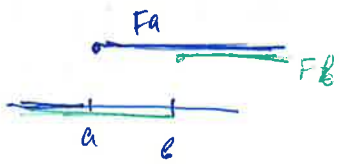
$\Rightarrow F*P <_{st} G*P$

Св-ва 1°; 2°; 4°: 1°: $F_1 <_{st} F_2 \Rightarrow m_1 \leq m_2$

Верно, т.к. $EX = \int_0^{+\infty} (1-F_X(x))\,dx = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x)\,dx$

$\Rightarrow$ если $F_1 <_{st} F_2$, т.е. $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$, то и $m_1 = EX_1 = \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} \bar{F}_2(x)\,dx = EX_2 = m_2$.

2°: $a \leq b \Leftrightarrow \theta_a < \theta_b$.




Ну верно, что $F_a(t) \geq F_b(t)$

$\Updownarrow$ $a \leq b$ $\Rightarrow$ верно

4°: $\forall c>0 \in \mathbb{R}$: $F_1 <_{st} F_2 \overset{?}{\Rightarrow} F_1^c <_{st} F_2^c$, где $F^c(x) = F(\frac{x}{c})$.

$F_1 <_{st} F_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} F_1(t) \geq F_2(t)\ \forall t$.

$\Rightarrow F_1(\frac{t}{c}) \geq F_2(\frac{t}{c})\ \forall t, \forall c>0$ — т.к. просто замена $\tilde{t} = \frac{t}{c}$.

А это и есть опр того, что $F_1^c <_{st} F_2^c$

$\Rightarrow$ Св-ва 1°; 2°; 3°; 4° - все верны для $<_{st}$.

④ Сохраняется ли стохаст. порядок при взятии составных распр?

Хотим: $N_1 <_{st} N_2$

$X_k <_{st} Y_k$

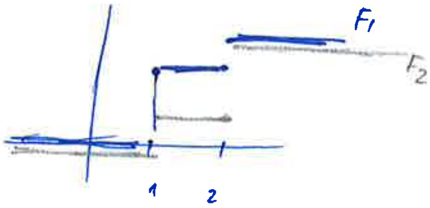
$\{X_k\}, \{Y_k\} \perp\!\!\!\perp N_1, N_2$

$\left.\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{N_1} X_k <_{st} \sum_{k=1}^{N_2} Y_k$.

Ответ: нет

Пусть $N_1 = \begin{cases} 1, & p = \frac{3}{4} \\ 2, & p = \frac{1}{4} \end{cases}$

$N_2 = \begin{cases} 1, & p = 1/4 \\ 2, & p = 3/4 \end{cases}$




Тогда $F_1(t) \geq F_2(t)\ \forall t \Rightarrow N_1 \leq_{st} N_2$ по опр.

Пусть $X_1 = Y_1;\ X_2 = Y_2 \Rightarrow \begin{cases} X_1 \leq_{st} Y_1 \\ X_2 \leq_{st} Y_2 \end{cases}$ ; $X_1 = \begin{cases} 0, & p = \frac{1}{2} \\ 1, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$ $X_2 = \begin{cases} 0, & p = \frac{1}{2} \\ -3, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

но $F_1(-1) = P\left(\sum_{k=1}^{N_1} X_k \leq -1\right) \underset{X_k \perp N_1}{=} P(N_1 = 1)\cdot P(X_1 \leq -1) + P(N_1 = 2)\cdot P(X_1 + X_2 \leq -1)$

$= \frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot P(X_2 = -3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$F_2(-1) = P\left(\sum_{k=1}^{N_2} X_k \leq -1\right) = P(N_2 = 1)\cdot P(X_1 \leq -1) + P(N_2 = 2)\cdot P(X_1 + X_2 \leq -1) =$

$= \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot P(X_2 = -3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$

$\Rightarrow F_1(-1) = \frac{1}{8} < \frac{3}{8} = F_2(-1)$ $\Rightarrow$ не верно, что $F_1(t) \geq F_2(t)\ \forall t$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N_1} X_k \not\leq_{st} \sum_{k=1}^{N_2} Y_k.$

(5) Док-ть: $EX \leq_{se} X$.

Решение: $X_1 \leq_{se} X_2$, если $E(X_1 - d)^+ \leq E(X_2 - d)^+\ \forall d$.

Хотим: $E(EX - d)^+ \overset{?}{\leq} E(X-d)^+$

Если $EX \geq d$, то $\begin{cases} E(EX-d)^+ = E(EX-d) = EX - d \\ E(X-d)^+ \geq E(X-d) = EX - d \end{cases}$ $\Rightarrow E(EX-d)^+ \leq E(X-d)^+$

Если $EX < d$, то $\begin{cases} E(EX-d)^+ = 0 \\ E(X-d)^+ \geq 0 \text{ всегда} \end{cases}$ $\Rightarrow E(EX-d)^+ \leq E(X-d)^+$ чтд.

(2) Пусть $X \leq_{st} Y$.

Можно ли (на том же самом вер.пр-ве) найти $\tilde{Y}$: $\begin{cases} X \leq_{1} \tilde{Y} \\ Y \overset{d}{=} \tilde{Y} \end{cases}$

Ответ: нет.

Вот контрпример: $\Omega = \{\omega_1; \omega_2\}$

$P(\omega_1) = 3/4;\ P(\omega_2) = 1/4$

$X_1 = \begin{cases} 0, & \text{на } \omega_1 \\ 1, & \text{на } \omega_2 \end{cases}$, т.е. $X_1 = \begin{cases} 0, & \text{с } p = 3/4 \\ 1, & \text{с } p = 1/4 \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 0, & \text{на } \omega_2 \\ 1, & \text{на } \omega_1 \end{cases}$, т.е. $X_2 = \begin{cases} 0, & \text{с } p = 1/4 \\ 1, & \text{с } p = 3/4 \end{cases}$

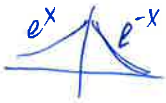

тогда $X_1 \leq_{st} X_2$, т.к. $F_{X_1}(t) \geq F_{X_2}(t),\ \forall t$

но $P(X_1 > X_2) = P(\omega_2) = 1/4 > 0 \Rightarrow X_1 \not\leq X_2$. ч.т.д.

27.09.20. Спецкурс Бунинская, дз 4 Токаева Александра 409

(1.) Пусть $f_X(x) = \dfrac{e^{-\left|\frac{x}{\theta}\right|}}{2\theta}$ ; $x \in (-\infty;+\infty)$ ; $\theta > 0$

Найти распр. $Y = e^X$.



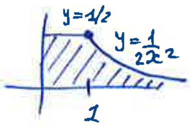

Решение: $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(e^X \le x) = P(X \le \ln x) = F_X(\ln x)$

$\Rightarrow f_Y(x) = F_X'(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{f_X(\ln x)}{x}$ ; $x > 0$.

$\Rightarrow$ в нашем случае $f_Y(x) = \dfrac{f_X(\ln x)}{x} = \dfrac{e^{-\left|\frac{\ln x}{\theta}\right|}}{2x\theta} \underset{\substack{x>0 \\ \theta>0 \\ \text{(т.к. плотность>0)}}}{=} \dfrac{e^{\frac{\ln x}{\theta}}}{2x\theta} \cdot I(x \in (0,1)) + \dfrac{e^{-\frac{\ln x}{\theta}}}{2x\theta} \cdot I(x \ge 1) =$

$= \dfrac{x^{1/\theta}}{2x\theta} \cdot I(x \in (0,1)) + \dfrac{x^{-\frac{1}{\theta}}}{2x\theta} \cdot I(x \ge 1) = \dfrac{1}{2\theta}\left(x^{\frac{1}{\theta}-1} \cdot I(x \in (0,1)) + x^{-\frac{1}{\theta}-1} \cdot I(x \ge 1)\right)$

Например, для $\theta = 1$:




(2.) Будет ли свёртка составных пуас. распр. снова сост. пуас. распр.?

Решение: что такое сост. пуас. распр.:

$\tilde{N} = \sum_{k=1}^{N} M_k$ , причём $N \sim Pois$

$P_{\tilde{N}}(z) = E z^{\tilde{N}}$ – произв. ф-ция $\tilde{N}$

$P_N(z) = E z^N$ – произв. ф-ция $N$, т.е. первичного распр.

$P_{M_k}(z) = E z^{M_k}$ – произв. ф-ция $M_k$, т.е. вторичного распр.

Проверим, что $P_{\tilde{N}}(z) = P_N(P_{M_k}(z))$

Имеем: $P_{\tilde{N}}(z) = E z^{\sum_{k=1}^{N} M_k} = E\left(z^{\sum_{k=1}^{N} M_k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 1\!\!1\{N=n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left(z^{\sum_{k=1}^{N} M_k} \cdot 1\!\!1\{N=n\}\right) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(z^{\sum_{k=1}^{n} M_k} \cdot 1\!\!1\{N=n\}\right) \underset{M_k \perp\!\!\!\perp N}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(E z^{M_k}\right)^n \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(P_{M_k}(z)\right)^n \cdot P(N=n) = P_N(P_{M_k}(z))$.

Если $N \sim Pois(\lambda)$, то $P_N(z) = E z^N = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$

$\Rightarrow P_{\tilde{N}}(z) = e^{\lambda(P_{M_k}(z)-1)}$

Рассм. свёртку 2-х составных. пуас. распр ~~(т.к. из 2-х сделав n-то n-1 раз сделав свёртку 2-х)~~

$X = \sum_{i=1}^{N_1} X_i$ ; $Y = \sum_{i=1}^{N_2} Y_i$ ; где $N_1 \sim Pois(\lambda_1)$
$N_2 \sim Pois(\lambda_2)$

$\Rightarrow P_X(z) = P_{N_1}(P_{X_i}(z)) = e^{\lambda_1(P_{X_i}(z)-1)}$

$P_Y(z) = P_{N_2}(P_{Y_i}(z)) = e^{\lambda_2(P_{Y_i}(z)-1)}$

но $P_{X+Y}(z) = E z^{X+Y} = E(z^X \cdot z^Y) \underset{X \perp Y}{=} E z^X \cdot E z^Y = P_X(z)\cdot P_Y(z) = e^{\lambda_1(P_{X_i}(z)-1)} \cdot e^{\lambda_2(P_{Y_i}(z)-1)} =$

$= e^{\lambda_1 P_{X_i}(z) + \lambda_2 P_{Y_i}(z) - (\lambda_1+\lambda_2)} = e^{\left(\left(\frac{\lambda_1 P_{X_i}(z)+\lambda_2 P_{Y_i}(z)}{\lambda_1+\lambda_2}\right)-1\right)(\lambda_1+\lambda_2)}$

Возьмем $N_3 \sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$; $U := \sum_{i=1}^{N_3} U_i$

а $U_i$ – незав $\perp N_3$, ~~опр~~ с произв. ф-цией $P_{U_i}(z) := \frac{\lambda_1 P_{X_i}(z)+\lambda_2 P_{Y_i}(z)}{\lambda_1+\lambda_2}$

Тогда $P_{X+Y}(z) = P_U(z) \Rightarrow$ является.

Аналогично, если свёртка $n$ сост. пуас. распр.

$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, то $S$ – сост. пуас. распр. с $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

$P_S(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i(x)}{\lambda}$

③ Проверить, что NB – это пуас – логарифм. распр.

Решение: $NB(m;p)$: $P(N=k) = C^k_{m+k-1} p^m \cdot (1-p)^k$; $k=0,1,2\ldots$

$Pois(\lambda)$: $P(N=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $k=0,1,2\ldots$

логар.$(\beta)$: $P(N=k) = \frac{\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k\ln(1+\beta)}$ $= \frac{p^k}{-k\ln q}$ ; $k=1,2\ldots$

Найдем произв. ф-ции каждого:

$P_{NB(m;p)}(z) = E z^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot C^k_{m+k-1} p^m q^k = p^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (zq)^k \cdot C^k_{m+k-1} = p^m \cdot (1-zq)^{-m} = \left(\frac{p}{1-zq}\right)^m$ $= e^{m(\ln p - \ln(1-zq))}$

$P_{Pois}(z) = E z^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{z\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$

$P_{логар}(z) = E z^{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k\ln(1+\beta)} = \frac{1}{\ln(1+\beta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^k}{k} = \frac{-\ln\left(1-\frac{z\beta}{1+\beta}\right)}{\ln(1+\beta)} = \frac{\ln\left(1-\frac{z\beta}{1+\beta}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+\beta}\right)} \underset{\substack{p=\frac{\beta}{1+\beta} \\ q=\frac{1}{1+\beta}}}{=} \frac{\ln(1-zp)}{\ln q}$

$\Rightarrow P_{pois}(P_{логар.}(z)) = e^{\lambda\left(\frac{\ln(1-zp)}{\ln q}-1\right)} \underset{\lambda := -m\ln q}{=} e^{m(\ln q - \ln(1-zp))} = \left(\frac{q}{1-zp}\right)^m$ – это $NB(m;q)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{сумма } \sum_{i=1}^{N} X_i \sim NB(m;q), \text{ где } N \sim Pois(-m\ln q),\ X_i \sim Log(p)}$

чтд.

4. Доказать, что для сост. пуас. распр:

$$\boxed{g_n = \frac{\lambda}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} j f_j \cdot g_{n-j}}$$

Решение: $\tilde{N} = \sum_{i=1}^{N} M_i$

$g_n = P(\tilde{N}=n)$ $\qquad P_\varepsilon(z) = E z^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot P(\varepsilon=n)$

$p_n = P(N=n)$ $\qquad P_{\tilde{N}}(z) = P_N(P_{M_i}(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} (P_{M_i}(z))^k \cdot P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (P_{M_i}(z))^k$

$f_n = P(M_i=n)$

Мы знаем, что $P_{\tilde{N}}(z) = P_N(P_{M_i}(z))$

Сост. пуас. распр - это когда $N \sim pois(\lambda)$.

$pois(\lambda) \in$ классу $(a,b,0)$: $p_k = p_{k-1}\cdot\left(a+\frac{b}{k}\right); k\geq 1.$

Для $pois(\lambda)$: $a=0$, $b=\lambda$.

т.е $p_k = p_{k-1}\cdot\frac{\lambda}{k}$

$\Rightarrow k\cdot p_k = p_{k-1}\cdot\lambda \quad ; k\geq 1$

Умножим обе части на $(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)$ и просуммируем по $k\geq 1$:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k\cdot (P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)}_{=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p_k\cdot (P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z) = (P_{\tilde{N}}(z))'} = \underbrace{\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}\cdot (P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)}_{k-1=t:\ =\lambda\cdot P_{M_i}'(z)\cdot\sum_{t=0}^{\infty} p_t\cdot (P_{M_i}(z))^t = \lambda\cdot P_{M_i}'(z)\cdot P_{\tilde{N}}(z)}$$

$$\Rightarrow (P_{\tilde{N}}(z))' = \lambda\cdot P_{M_i}'(z)\cdot P_{\tilde{N}}(z)$$

Разложим обе части по степеням $z$ и приравняем коэф. при $z^{n-1}$:

$$n\cdot g_n = \lambda\cdot\sum_{j=0}^{n} j f_j\cdot g_{n-j} = \lambda\cdot\sum_{j=1}^{n} j\cdot f_j\cdot g_{n-j}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_n = \frac{\lambda}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} j\cdot f_j\cdot g_{n-j}} \quad \text{чтд.}$$

5. Если первичное распр. $N \in$ классу $(a,b,1)$, то $g_n = \dfrac{[p_1-(a+b)p_0]f_n + \sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{bj}{n}\right)f_j\cdot g_{n-j}}{1-af_0}$

Решение: $p_k = p_{k-1}\cdot\left(a+\frac{b}{k}\right); k\geq 2.$

$\Rightarrow k p_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1}. \quad ; k\geq 2$

Умножим обе части на $(P_{M_i}(z))^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)$ и просуммируем по $k\geq 1$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\cdot p_k\cdot \left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z) = a\cdot \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)p_{k-1}\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1} P_{M_i}'(z) + (a+b)\cdot\sum_{k=2}^{\infty} p_{k-1}\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)$$

Нам не хватает слагаемых при $k=1$:

$t=k-1$ // $P_{M_i}(z)\cdot\sum_{t=0}^{\infty} t\cdot p_t\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{t-1}\cdot P_{M_i}'(z))$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)}_{=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p_k\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z)} - p_1\cdot P_{M_i}'(z) = a\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_{k-1}\cdot\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1}\cdot P_{M_i}'(z) - 0\right) + (a+b)\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}\left(P_{M_i}(z)\right)^{k-1} P_{M_i}'(z) - p_0 P_{M_i}'(z)\right)$$

$=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1} g_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1} f_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot f_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1} g_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1} f_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\cdot g_n$ $=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1} f_n$

$$\Rightarrow \left(P_{\tilde N}(z)\right)' - p_1\cdot P_{M_i}'(z) = a\cdot P_{M_i}(z)\left(P_{\tilde N}(z)\right)' + (a+b)\left(P_{M_i}'(z)\cdot P_{\tilde N}(z) - p_0 P_{M_i}'(z)\right)$$

Ищем коэф. при $z^{n-1}$:

$$n\cdot g_n - p_1\cdot n\cdot f_n = a\cdot\sum_{j=0}^{n} f_j\cdot(n-j)g_{n-j} + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{n} j\cdot f_j\cdot g_{n-j} - p_0\cdot n\cdot f_n\right)$$

Выделим в правой части слагаемое с $j=0$:

$$n\cdot g_n - p_1\cdot n\cdot f_n = a f_0 n g_n + a\sum_{j=1}^{n} f_j(n-j)g_{n-j} + (a+b)\sum_{j=1}^{n} j\cdot f_j\, g_{n-j} - \underline{(a+b)p_0\, n\cdot f_n}$$

$$\Rightarrow n g_n(1-af_0) = n f_n\left(p_1-(a+b)p_0\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(a(n-j)+(a+b)j\right) f_j\cdot g_{n-j}$$

$$\Rightarrow g_n(1-af_0) = f_n\left(p_1-(a+b)p_0\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{b\cdot j}{n}\right) f_j\cdot g_{n-j}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_n = \frac{f_n\left(p_1-(a+b)p_0\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(a+\frac{b\cdot j}{n}\right) f_j\cdot g_{n-j}}{1-af_0}}$$

чтд.

20.09.20. Спецкурс Бутинская, Д33. Токаева Александра 409

① Док-ть, что логнорм. распр масштабно инвар, но не обладает масштабным парам.

опр. Семейство распр. наз. масштабно инвар, если с любым распр. $Y$, распр. $cY$ тоже принадлежит семейству $\forall c>0$.

опр. Масшт.-инвар. семейство обладает масш. параметром $\theta$, если у сл. вел $cY$ только $\theta$ переходит в $c\theta$, а все остальные параметры такие же, как у $X$.

Пусть $Y\sim LogNorm(\mu,\sigma^2)$, т.е $Y=e^X$, где $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

Чтобы узнать распр. сл. вел $Z=cY$, нам дост. посмотреть, например, на ее функцию распределения (т.к есть вз-однозн. соотв. между распределениями и их функциями распределения).

Найдём ф.р $Y=e^X$: $P(Y\le x)=P(e^X\le x)=P(X\le \ln x)=P(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)}\le\frac{\ln x-\mu}{\sigma})=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow$ ф.р $Z=c\cdot e^X$ : $P(Z\le x)=P(c\cdot e^X\le x)\underset{c>0}{=}P(e^X\le\frac{x}{c})=\Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{c})-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\ln x-(\ln c+\mu)}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow$ в ф.р. $Z$ мы угадываем ф.р. $LogNorm(\ln c+\mu;\sigma^2)$

$\Rightarrow Z=c\cdot Y$ – тоже $\in$ классу логнорм. распр $\Rightarrow$ логнорм. распр. масштабно инвар. но масшт. параметра нет, т.к 2-й параметр $\sigma^2$ – не изменился а 1-й параметр: $\mu\to\ln c+\mu$, а не $\mu\to c\mu$. ч.т.д.

② Док-ть, что $Pois(\lambda)$ получается из $NB(\alpha,\beta)$ при $\begin{cases}\alpha\beta=\lambda\\ \beta\to 0\end{cases}$

Дост. проверить, что $p_k^{NB}\to p_k^{pois}$ при указанных условиях.

$Pois(\lambda)$: $p_k=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$; $k=0,1,2\ldots$

$NB(\alpha,\beta)$: $p_k=C^k_{k+\alpha-1}\frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}}=C^k_{k+\alpha-1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha$ где $\alpha$ - успехов, $k$ - неудач в серии испытаний до $\alpha$-го успеха

Имеем: $p_k^{NB(\alpha,\beta)}=C^k_{k+\alpha-1}\cdot\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha=\frac{(k+\alpha-1)!}{k!\,(\alpha-1)!}\cdot\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^\alpha}=\frac{(k+\alpha-1)(k+\alpha-2)\ldots\alpha}{k!}\cdot\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^\alpha}\overset{\alpha=\frac{\lambda}{\beta}}{=}$

$=\frac{(k+\frac{\lambda}{\beta}-1)(k+\frac{\lambda}{\beta}-2)\ldots\frac{\lambda}{\beta}\cdot\beta^k}{k!}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^{\lambda/\beta}}=\frac{(k\beta+\lambda-\beta)(k\beta+\lambda-2\beta)\ldots\lambda}{k!}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^k}\cdot\frac{1}{(1+\beta)^{1/\beta})^\lambda}\xrightarrow[\beta\to 0]{}$

$\xrightarrow[\beta\to 0]{}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{e^\lambda}=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}=p_k^{pois(\lambda)}$

(3.) Все ли распр. типа $(a,b,0)$ являются беск. делимыми?

<u>Опр.</u> сл.вел. $X$ наз. беск. делимой, если $\forall n$ $X = Y_1+\ldots+Y_n$; $Y_i$ – норсв

то есть $\forall n$: $P_X(z) = \left(P_{Y_i}(z)\right)^n$, где $P = Ez^X$ – произв. ф-ция сл.вел. $X$.

то есть произв. ф-ция $X$ явл. $n$-й степенью произв. ф-ции какой-то сл.вел $Y_i$

В классе $(a,b,0)$ всего 4 распр: биномиальное, пуас, отр.бином. и геометрическое.

а) $Bin(n,p)$: $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $k=0\ldots n$

$$P_X(z) = Ez^X = \sum_{k=0}^{n} z^k \cdot C_n^k p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (zp)^k \cdot (1-p)^{n-k} \overset{(x+y)^n}{=} (1-p+zp)^n \neq \left(P_\eta(z)\right)^m,$$ если $m \nmid n$ (или $m>n$)

короче, при $m>n$: $\sqrt[m]{P_X(z)}$ – не явл. произв. ф-цией никакого распр $\Rightarrow$ $Bin(n,p)$ – не БДЗ!

~~где $\eta \sim Bern(p)$: $Ez^\eta = z^0\cdot(1-p)+z^1\cdot p = 1+p+zp \Rightarrow Bin(n,p)$ – явл. БДЗ.~~

б) $Pois(\lambda)$: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$; $k=0,1,2\ldots$

$$P_X(z) = Ez^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)} = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(z-1)}\right)^n = \left(P_\eta(z)\right)^n,$$

где $\eta \sim Pois\left(\frac{\lambda}{n}\right) \Rightarrow Pois(\lambda)$ – явл. БДЗ

в) $NB(\alpha,\beta)$: $p_k = C_{k+\alpha-1}^k \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}} = C_{k+\alpha-1}^k \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha$; $k=0,1,2\ldots$

$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n-1}^k \cdot x^k$

$$P_X(z) = Ez^X = \sum_{k=0}^{\infty} z^k C_{k+\alpha-1}^k \cdot \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+\alpha-1}^k \cdot \left(\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^k = \frac{1}{(1+\beta)^\alpha} \cdot \left(1-\frac{z\beta}{1+\beta}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{(1+\beta-z\beta)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\left((1+\beta-z\beta)^{\alpha/n}\right)^n} = \left(P_\eta(z)\right)^n,$$ где $\eta \sim NB\left(\frac{\alpha}{n};\beta\right) \Rightarrow NB(\alpha,\beta)$ – явл. БДЗ.

г) $Geom(\beta)$: $p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}$.

Заметим, что геом. распр – это частный случай $NB(\alpha,\beta)$ при $\alpha=1 \Rightarrow Geom$ – тоже явл. БДЗ.

(4.) Выписать явный вид $p_k^T$; $k\geq 1$ для урезанных в нуле распр. из класса $(a,b,0)$.

Напоминание: $\begin{cases} p_k^T = d\cdot p_k, \text{ где } d = \frac{1}{\sum_{k=1} p_k} = \frac{1}{1-p_0} \\ p_0^T = 0 \end{cases}$

а) $Bin(n,p)$: $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $k=0\ldots n$

$$\Rightarrow p_0 = (1-p)^n \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-(1-p)^n} \Rightarrow p_k^T = \frac{p_k}{1-(1-p)^n} = \frac{C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}{1-(1-p)^n}; \ k=1\ldots n$$

б) $Pois(\lambda)$: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$; $k=0,1,2\ldots$

$$\Rightarrow p_0 = e^{-\lambda} \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \Rightarrow p_k^T = \frac{p_k}{1-e^{-\lambda}} = p_k \cdot \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} = \frac{\lambda^k}{k!(e^\lambda-1)}; \ k=1,2\ldots$$

в) $NB(\alpha,\beta)$: $p_k = C_{k+\alpha-1}^k \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha$; $k=0,1,2\ldots$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{(1+\beta)^\alpha} \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-(1+\beta)^\alpha} \Rightarrow p_k^T = \frac{p_k}{1-(1+\beta)^\alpha} = \frac{C_{k+\alpha-1}^k \cdot \beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}\cdot(1-(1+\beta))^\alpha}; \ k=1,2\ldots$$

г) $Geom(\beta)$: $p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \cdot \frac{1}{1+\beta}$; $k=0,1,2\ldots$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{1+\beta} \Rightarrow d = \frac{1}{1-p_0} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\beta}} = \frac{1+\beta}{\beta} \Rightarrow p_k^T = \frac{1+\beta}{\beta} p_k = \frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k; \ k=1,2\ldots$$

14.09.20. Спецкурс Бунинская, 932   Токаева Александра 409

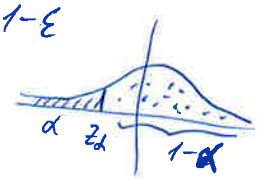
(1) Как выбрать премию $\pi_i$ так, чтобы вероятность разорения $< \varepsilon$?

Решение: Будем взимать с каждого риска премию $\pi_i$ (понятно, что $\pi_i > EX_i$, поскольку $X_i$ — случайная величина, а $\pi_i$ — детерминированная, поэтому мы делаем надбавку за риск).

Всего собрали $\Pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$ ; $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Хотим: $P(S_n \le \Pi) \ge 1-\varepsilon$ — т.е вер-ть неразорения $\ge 1-\varepsilon$ (что близко к 1 обычно)

Но $P(S_n \le \Pi) = P\Bigg(\underbrace{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{Var S_n}}}_{\xi_0 \text{ по ЦПТ}} \le \frac{\Pi - ES_n}{\sqrt{Var S_n}}\Bigg) \sim \Phi\left(\frac{\Pi - ES_n}{\sqrt{Var S_n}}\right) \overset{?}{\ge} 1-\varepsilon$




$\Rightarrow \dfrac{\Pi - ES_n}{\sqrt{Var S_n}} \ge z_{1-\varepsilon}$

$\Rightarrow \boxed{\Pi \ge ES_n + z_{1-\varepsilon} \cdot \sqrt{Var S_n}}$

(2) Док-ть, что единств. непрер. распр (т.е $\exists f = F'$) со св-вом отсутствия памяти — это эксп. распр.

Решение: Хотим: $P(X > x+t \mid X > x) = P(X > t)$

$$P(X > x+t \mid X > x) = \frac{P(X > x+t \cap X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}$$

$$P(X>t) = 1 - P(X \le t) = 1 - F(t)$$

$\Rightarrow$ Хотим: $\dfrac{1-F(x+t)}{1-F(x)} = 1 - F(t)$

$\Rightarrow 1-F(x+t) = (1-F(x))(1-F(t))$

Обозначим $g(K) := 1 - F(K)$

Тогда задача стала такой: найти все дифф. ф-ции $g(K)$ такие, что $g(x+t) = g(x)\cdot g(t)$

Будем решать эту задачу.

Сначала подставим $x = t = 0$

$\Rightarrow g(0) = g(0)\cdot g(0)$

$\Rightarrow g(0)\cdot(g(0)-1) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(0) = 0 \text{ — не подх.} \\ g(0) = 1. \end{array}\right.$

Заметим, что если $g(0)=0$,

то $\forall x: \; g(x+0) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(0)}} \cdot g(x) = 0.$

$\Rightarrow g(k) \equiv 0$

но $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{g(k)}} = 1 - F(k) \Rightarrow F(k) \equiv 1$ – такого у ф.р. быть не может, т.к. $F(-\infty)=0$.

$\Rightarrow g(0) = 1.$

~~Далее,~~ $\cancel{\frac{g(x+0)-g(0)}{x} = \frac{g(x)\cdot g(0) - g(0)}{x} = g(0)\cdot\frac{g(x)-1}{x} = g(0)\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x}}$

$\cancel{\Rightarrow g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} g(0)\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x} = g(0)\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = g(0)\cdot g'(0)}$

Далее, поскольку $g$ – дифф. по усл.:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot g(h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot(g(h) - \overset{g(0)}{\overset{\shortparallel}{1}})}{h} = g(x)\cdot\underset{g'(0)}{\underset{\shortparallel}{\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}}}$$

$\Rightarrow g'(x) = g(x)\cdot \underset{c}{\underset{\shortparallel}{g'(0)}}$ – какая-то константа.

$\Rightarrow \frac{dg}{dx} = g(x)\cdot c$

$\Rightarrow \frac{dg}{g} = c\,dx \Rightarrow \ln g = cx + \tilde{c} \Rightarrow g(x) = e^{cx}\cdot\tilde{\tilde{c}}$

причем выше мы выяснили, что $g(0)=1 \Rightarrow g(0) = e^0\cdot\tilde{\tilde{c}} \overset{?}{=} 1 \Rightarrow \tilde{\tilde{c}} = 1.$

$\Rightarrow \underset{1-F(x)}{\underset{\shortparallel}{g(x)}} = e^{cx}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = 1 - e^{cx}}$ – а это ф.р. для эксп. величины с параметром $\lambda = -c$.

(3) $Y = X^{1/\tau}$

$X \sim Exp(1)$, т.е. $F(x) = 1 - e^{-x}$

Найти распр. $Y$.

Решение: Если $\tau > 0$: $P(Y \le t) = P(X^{1/\tau} \le t) \overset{\tau>0}{=} P(X \le t^\tau) = F(t^\tau) = 1 - e^{-t^\tau}$

Если $\tau < 0$: $P(Y \le t) = P(X^{1/\tau} \le t) \underset{\tau<0}{=} P(X \ge t^\tau) = 1 - F(t^\tau) = e^{-t^\tau}$

07.09.20. Спецкурс Булинская. д/з от семинара 0 Токаева Александра 409

(1.) $X \sim Geom(p)$, т.е $p_k = P(X=k) = pq^k$; $k=0,1,2\dots$

Док-ть: $P(X \geq k+l \mid X \geq k) = P(X \geq l)$ – св-во отсутствия памяти.

Решение: $P(X \geq l) = \sum\limits_{t=l}^{\infty} P(X=t) = \sum\limits_{t=l}^{\infty} pq^t = pq^l(1+q+q^2+\dots) = \frac{pq^l}{1-q} = \frac{\cancel{p}q^l}{\cancel{p}} = q^l$

$$P(X \geq k+l \mid X \geq k) = \frac{P(X \geq k+l \cap X \geq k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X \geq k+l)}{P(X \geq k)} = \frac{q^{k+l}}{q^k} = q^l = P(X \geq l).\ \text{чтд.}$$

т.к $\{X \geq k+l\} \subset \{X \geq k\}$

(2.) $S^{col} = \sum\limits_{i=1}^{N(\omega)} X_i$

$N(\omega)$ – целочисл. сл. вел.

$N \perp\!\!\!\perp \{X_i\}_{i\geq 1}$

$X_i$ – нор св.

$P_N(z) = Ez^N$ – произв. ф-ция $N$

$g_X(t) = Ee^{tX_i}$; $i \geq 1$ – произв. ф-ция моментов $X_i$.

$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} \text{ – хар. ф-ция} \\ g_\xi(t) = Ee^{t\xi} \text{ – произв. ф-ция моментов} \\ L_\xi(t) = Ee^{-t\xi} \text{ – преобр. лапласа} \\ \psi_\xi(z) = Ez^\xi \text{ – произв. ф-ция.} \end{array}}$

Док-ть: а) $g_{S^{col}}(t) = Ee^{tS^{col}} \overset{?}{=} P_N(g_X(t))$

б) $ES^{col} = ?$; $DS^{col} = ?$

Решение: а) $g_{S^{col}}(t) = Ee^{tS^{col}} = Ee^{t\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i} = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i} \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right) =$

ф-ции необр. ну, поэтому меняем местами $E$ и $\Sigma$.

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i} \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right) =$

по усл. $N(\omega) \perp\!\!\!\perp \{X_i\}_{i\geq 1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\underbrace{Ee^{t(X_1+\dots+X_n)}}_{=Ee^{tX_1}\cdot\ldots\cdot Ee^{tX_n}} \cdot \underbrace{E\mathbb{1}\{N(\omega)=n\}}_{=P(N(\omega)=n)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(Ee^{tX_1}\right)^n}_{=(g_X(t))^n} P(N(\omega)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} (g_X(t))^n \cdot P(N(\omega)=n) = \underbrace{E(g_X(t))^{N(\omega)}}_{=P_N(g_X(t))}$$

поскольку $X_i$ – незав. сл. вел.

$\Rightarrow g_{S^{col}}(t) = P_N(g_X(t))$

б) как зная $g_\xi(t) = Ee^{t\xi}$ вычислить $E\xi$ и $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$?

Имеем: $g_\xi'(t) = (Ee^{t\xi})' = E[(e^{t\xi})'] = E[\xi \cdot e^{t\xi}]$

$\Rightarrow g_\xi'(0) = E\xi$

Далее, $g_\xi''(t) = E[\xi^2 e^{t\xi}]$

$\Rightarrow g_\xi''(0) = E\xi^2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E\xi = g_\xi'(0) \\ D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = g_\xi''(0) - (g_\xi'(0))^2 \end{array}}$ (*)

$\Rightarrow ES^{col} = \underbrace{P_N'(\overset{1}{g_X(0)})}_{=EN} \cdot \underbrace{g_X'(0)}_{=EX_i} = \underbrace{P_N'(1)}_{=EN} \cdot EX_i = \boxed{EN \cdot EX_i}$

Почему $P_N'(g_x(0)) = EN$?

Ну $g_x(0) = E e^{tX_i}\Big|_{t=0} = E1 = 1$.

Далее, $P_N(z) = Ez^N = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot P(N=n)$

$\Rightarrow P_N'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} \cdot P(N=n)$

$\Rightarrow P_N'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N=n) = EN$.

Аналогично, $P_N''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} P(N=n)$

$\Rightarrow P_N''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot P(N=n) - \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) = EN^2 - EN$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} EN = P_N'(1) \\ EN^2 = P_N''(1) + EN = P_N''(1) + P_N'(1). \end{cases}} \quad (**)$$

Теперь, опять используя $g_{S^{col}}(t) = P_N(g_x(t))$, посчитаем $\mathcal{D}S^{col} = E(S^{col})^2 - (ES^{col})^2$

нам нужно $E(S^{col})^2$.

Но по ф-ле $(*)$: $E(S^{col})^2 = g_{S^{col}}''(0) = \left(P_N(g_x(t))\right)''\Big|_{t=0} = \left(P_N'(g_x(t)) \cdot g_x'(t)\right)'\Big|_{t=0} =$

$= P_N''(g_x(t)) \cdot (g_x'(t))^2\Big|_{t=0} + P_N'(g_x(t)) \cdot g_x''(t)\Big|_{t=0} =$

$= P_N''(g_x(0)) \cdot (g_x'(0))^2 + P_N'(g_x(0)) \cdot g_x''(0) = P_N''(1) \cdot (g_x'(0))^2 + P_N'(1) \cdot g_x''(0) =$ см. $(*)$ и $(**)$

$= (EN^2 - EN) \cdot (EX_i)^2 + EN \cdot EX_i^2 = EN^2 (EX_i)^2 + EN \cdot \underbrace{(EX_i^2 - (EX_i)^2)}_{= \mathcal{D}X_i} = EN^2 (EX_i)^2 + EN \cdot \mathcal{D}X_i$

$\Rightarrow \mathcal{D}S^{col} = E(S^{col})^2 - (ES^{col})^2 = EN^2 (EX_i)^2 + EN \cdot \mathcal{D}X_i - (EN \cdot EX_i)^2 =$

$= (EX_i)^2 \underbrace{(EN^2 - (EN)^2)}_{= \mathcal{D}N} + EN \cdot \mathcal{D}X_i = \boxed{(EX_i)^2 \cdot \mathcal{D}N + EN \cdot \mathcal{D}X_i}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ответ: } ES^{col} = EN \cdot EX_i \\ \mathcal{D}S^{col} = EN \cdot \mathcal{D}X_i + \mathcal{D}N \cdot (EX_i)^2 \end{array}}$$

Зам. В принципе, ф-лу для $ES^{col}$ и $DS^{col}$ можно было получить и в лоб, без производящей ф-ции моментов. Стр 2

$$S^{col} = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i$$

$$ES^{col} = E\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i = \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right\} \underset{N \perp \{X_i\}_{i\geq 1}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(E\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\cdot E\mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot EX_i \cdot P(N(\omega)=n) = EX_i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N(\omega)=n) = \boxed{EX_i \cdot EN}$$

$$E(S^{col})^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \cdot \mathbb{1}\{N(\omega)=n\}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} E(X_1^2+\dots+X_n^2+2X_1X_2+\dots+2X_{n-1}X_n)\cdot P(N(\omega)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n\cdot EX_i^2 + n(n-1)\underbrace{EX_i \cdot EX_j}_{=(EX_i)^2}\right)\cdot P(N(\omega)=n)\right] = EX_i^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N(\omega)=n) +$$

$$+ (EX_i)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(N(\omega)=n) = EX_i^2 \cdot EN + (EX_i)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n) - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N=n)\right) =$$

$$= EX_i^2 \cdot EN + (EX_i)^2 \cdot (EN^2 - EN) = (EX_i)^2 \cdot EN^2 + EN\underbrace{(EX_i^2 - (EX_i)^2)}_{=DX_i} = (EX_i)^2 EN^2 + EN \cdot DX_i$$

$$\Rightarrow DS^{col} = E(S^{col})^2 - (ES^{col})^2 = (EX_i)^2 \cdot EN^2 + EN\cdot DX_i - (EN \cdot EX_i)^2 =$$

$$= (EX_i)^2\underbrace{(EN^2 - (EN)^2)}_{=DN} + EN \cdot DX_i = \boxed{(EX_i)^2 \cdot DN + EN \cdot DX_i}$$

(3) $CV(X) = \dfrac{\sqrt{DX}}{EX}$ — коэф. изменчивости

Пусть $S_1^{col} = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i$; $S_2^{col} = \sum_{i=1}^{N_2} Z_i$,

где $N_1 \sim NB(10; \frac{9}{10})$; $N_2 \sim NB(1, \frac{1}{10})$; $Y \sim Exp(a)$; $Z \sim Par(x_0; \frac{9}{4})$

— у него есть только 1 и 2 моменты, а дальше нет, т.к. $2 < \frac{9}{4} < 3$

Найти: коэф. изменчивости $N_1$ $N_2$ $Y$ $Z$ $S_1$ $S_2$.

Обозн: $NB(m,p)$: $P(N=k) = C^k_{m+k-1} p^m \cdot (1-p)^k$; $k = 0,1,2\dots$

$Exp(a)$: $f(x) = a\cdot e^{-ax} \cdot \mathbb{1}\{x>0\}$.

$Par(x_0, d)$: $\underset{= 1-P(Z\leq x)}{P(Z>x)} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^d \cdot \mathbb{1}\{x > x_0\}$ — дана доп. ф-ция распр.

$$\Rightarrow -f(x) = (x_0)^d(-d)\cdot\frac{1}{x^{d+1}}\cdot\mathbb{1}\{x>x_0\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{d(x_0)^d}{x^{d+1}}\cdot\mathbb{1}\{x>x_0\}$$ — плотность распр. Парето.

~~Ещё~~ посчитаем $E$ и $D$ для $N_1$ $N_2$ $Y$ и $Z$.

по ф-лам из задачи 2, нам этого хватит, чтобы посчитать $E$ и $D$ для $S_1$ и $S_2$.

для $N_1$ $P(N_1=k)=C^k_{m+k-1}p^m\cdot(1-p)^k=C^k_{m+k-1}p^mq^k$; $k=0,1,\dots$

это вообще плотность, т.е $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(N_1=k)=1$,

т.к по ф-ле из Чашкина $(1-x)^{-n}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C^k_{n+k-1}x^k$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}P(N_1=k)=p^m\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}C^k_{m+k-1}q^k}_{=(1-q)^{-m}}=p^m\cdot(1-q)^{-m}=p^m\cdot p^{-m}=1.$$

посчитаем $EN_1$ и $DN_1$ через произв. ф-цию $\psi_{N_1}(z)=Ez^{N_1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n\cdot P(N_1=n)$

Мы уже выяснили (см. **), что $\psi'_{N_1}(1)=EN_1$

$\psi''_{N_1}(1)=EN_1^2-EN_1$.

Имеем: $\psi_{N_1}(z)=Ez^{N_1}=p^m\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k\cdot C^k_{m+k-1}q^k=p^m\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}C^k_{m+k-1}(zq)^k=\dfrac{p^m}{(1-zq)^m}$

знаем $(1-x)^{-n}$

$$\Rightarrow \psi'_{N_1}(z)=p^m\cdot(-m)\cdot(-q)\cdot\frac{1}{(1-zq)^{m+1}}=\frac{mp^mq}{(1-zq)^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\psi'_{N_1}(1)}_{=EN_1}=\frac{mp^mq}{(1-q)^{m+1}}=\frac{mp^mq}{p^{m+1}}=\boxed{\frac{mq}{p}}\quad\Rightarrow \boxed{EN_1=\psi'_{N_1}(1)=\frac{mq}{p}}$$

Далее, $\psi''_{N_1}(z)=mp^mq\cdot(-m-1)\cdot(-q)\cdot\dfrac{1}{(1-zq)^{m+2}}=\dfrac{p^m\cdot q^2\cdot m(m+1)}{(1-zq)^{m+2}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\psi''_{N_1}(1)}_{=EN_1^2-EN_1}=\frac{p^m\cdot q^2\cdot m(m+1)}{(1-q)^{m+2}}=\frac{p^m\cdot q^2m(m+1)}{p^{m+2}}=\frac{q^2m(m+1)}{p^2}$$

$$\Rightarrow EN_1^2=\psi''_{N_1}(1)+EN_1=\frac{q^2m(m+1)}{p^2}+\frac{mq}{p}=\frac{mq(q(m+1)+p)}{p^2}=\frac{mq(qm+\overbrace{p+q}^{=1})}{p^2}=\frac{mq(mq+1)}{p^2}$$

$$\Rightarrow DN_1=EN_1^2-(EN_1)^2=\frac{mq(mq+1)}{p^2}-\frac{m^2q^2}{p^2}=\frac{mq(\cancel{mq}+1-\cancel{mq})}{p^2}=\boxed{\frac{mq}{p^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered}EN_1=\frac{mq}{p}\\ DN_1=\frac{mq}{p^2}\end{gathered}}$$

Для $Y \sim Exp(a)$ 

$$EY = \int_0^{+\infty} x \cdot a \cdot e^{-ax} dx = \frac{a}{-a} \cdot \int_0^{+\infty} x \, d(e^{-ax}) = \underbrace{-x \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx =$$

$$= \frac{-1}{a} \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{a}(0-1) = \frac{1}{a}$$

$$EY^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot a \cdot e^{-ax} dx = \frac{a}{-a} \int_0^{+\infty} x^2 d(e^{-ax}) = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-ax}}_{0} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot 2x \, dx =$$

$$= \frac{2}{-a} \int_0^{+\infty} x \, d(e^{-ax}) = \underbrace{-\frac{2}{a} x \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty}}_{0} + \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{-a} \cdot e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} EY &= \frac{1}{a} \\ EY^2 &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}}$$

Для $Z \sim Par(x_0, d)$

$$EZ = \int_{x_0}^{+\infty} x \cdot \frac{d \cdot x_0^d}{x^{d+1}} dx = d x_0^d \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^d} = d x_0^d \cdot \left(\frac{-1}{d-1}\right) \cdot \frac{1}{x^{d-1}} \Big|_{x_0}^{+\infty} = \frac{d}{d-1} \cdot x_0^d \cdot \frac{1}{x_0^{d-1}} = \frac{d}{d-1} x_0$$

$$EZ^2 = \int_{x_0}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{d x_0^d}{x^{d+1}} dx = d x_0^d \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{d-1}} = d \cdot x_0^d \cdot \left(\frac{-1}{d-2}\right) \cdot \frac{1}{x^{d-2}} \Big|_{x_0}^{+\infty} = \frac{d}{d-2} x_0^d \cdot \frac{1}{x_0^{d-2}} = \frac{d}{d-2} x_0^2$$

$$\Rightarrow DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = \frac{d}{d-2} x_0^2 - \frac{d^2 x_0^2}{(d-1)^2} = \frac{d x_0^2 \left((d-1)^2 - d(d-2)\right)}{(d-1)^2 (d-2)} = \frac{d x_0^2 (\cancel{d^2} \cancel{-2d} + 1 \cancel{-d^2} \cancel{+2d})}{(d-1)^2 (d-2)} = \frac{d x_0^2}{(d-1)^2 (d-2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} EZ &= \frac{d}{d-1} x_0 \\ DZ &= \frac{d x_0^2}{(d-1)^2 (d-2)} \end{aligned}}$$

по ф-лам из задачи 2: $ES_1 = EY_i \cdot EN_1$

$DS_1 = (EY_i)^2 DN_1 + EN_1 \cdot DY_i$

$ES_2 = EZ_i \cdot EN_2$

$DS_2 = (EZ_i)^2 DN_2 + EN_2 \cdot DZ_i$

Считаем всё численно для $N_1 \sim NB(10, \frac{9}{10})$

$N_2 \sim NB(1, \frac{1}{10})$

$Y \sim Exp(a)$

$Z \sim Par(x_0; 9/4)$

$$EN_1 = \frac{mq}{p} = \frac{10 \cdot \frac{1}{10}}{9/10} = \frac{10}{9}$$
$$DN_1 = \frac{mq}{p^2} = \frac{10 \cdot \frac{1}{10}}{81/100} = \frac{100}{81}$$
$$\Rightarrow CV(N_1) = \frac{\sqrt{DN_1}}{EN_1} = \frac{10/9}{10/9} = 1.$$

$$EN_2 = \frac{mq}{p} = \frac{1 \cdot 9/10}{1/10} = 9$$
$$DN_2 = \frac{mq}{p^2} = \frac{1 \cdot 9/10}{1/100} = \frac{9}{10} \cdot 100 = 90$$
$$\Rightarrow CV(N_2) = \frac{\sqrt{DN_2}}{EN_2} = \frac{3\sqrt{10}}{9} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$EY = \frac{1}{a}, \quad DY = \frac{1}{a^2} \Rightarrow CV(Y) = \frac{\sqrt{DY}}{EY} = \frac{1/a}{1/a} = 1.$$

$$EZ = \frac{d}{d-1} x_0 = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{5} x_0 = \frac{9}{5} x_0$$
$$DZ = \frac{d x_0^2}{(d-1)^2 (d-2)} = \frac{9}{4} x_0^2 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 1} = \frac{16 \cdot 9 x_0^2}{25}$$
$$\Rightarrow CV(Z) = \frac{\sqrt{DZ}}{EZ} = \frac{4 \cdot 3 \cancel{x_0}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{9 \cancel{x_0}} = \frac{4}{3}.$$

$$ES_1^{col} = EY_i \cdot EN_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{10}{9}$$
$$DS_1^{col} = (EY_i)^2 \cdot DN_1 + EN_1 \cdot DY_i = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{100}{81} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{190}{81 a^2}$$
$$\Rightarrow CV(S_1^{col}) = \frac{\sqrt{DS_1^{col}}}{ES_1^{col}} = \frac{\sqrt{190} \cdot \cancel{9a}}{\cancel{9a} \cdot 10} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{10}}$$

$$ES_2^{col} = EZ \cdot EN_2 = \frac{9}{5} x_0 \cdot 9 = \frac{81 x_0}{5}$$
$$DS_2^{col} = (EZ)^2 \cdot DN_2 + EN_2 \cdot DZ = \frac{81 x_0^2}{25} \cdot 90 + \frac{9 \cdot 16 \cdot 9 x_0^2}{25} = \frac{81 x_0^2 \cdot 106}{25}$$
$$\Rightarrow CV(S_2^{col}) = \frac{\cancel{9 x_0} \sqrt{106} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{81 x_0}_{9}} = \frac{\sqrt{106}}{9}$$

**Ответ:** $CV(N_1) = 1$

$CV(N_2) = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$CV(Y) = 1$

$CV(Z) = \frac{4}{3}$

$CV(S_1^{col}) = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{10}}$

$CV(S_2^{col}) = \frac{\sqrt{106}}{9}$.

4. $V_i \sim \Gamma(\alpha_i; \beta)$, $i = 1 \dots n$, т.е. $f_{V_i}(x) = \frac{\beta^{\alpha_i} \cdot x^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta x} \cdot I(x > 0)$.

$\{V_i\}_{i \geq 1}$ – незав.

Используя преобр. Лапласа, док-ть, что $S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} V_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i; \beta)$.

**Решение:** $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

посчитаем преобр. Лапласа $L(z) = E e^{-zV}$ для сл. вел $V \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$L_V(z) = E e^{-zV} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-zx} \cdot \beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-(z+\beta)x} \cdot x^{\alpha-1} dx =$$

$(z+\beta)x = y$, $x = \frac{y}{z+\beta}$, $dx = \frac{dy}{z+\beta}$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot \left(\frac{y}{z+\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{dy}{z+\beta} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) \cdot (z+\beta)^\alpha} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot y^{\alpha-1} dy}_{=\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow L_{V_i}(z) = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_i}$$

В силу независимости $V_i$: $L_{S^{ind}}(z) = E e^{-S^{ind} z} = E e^{-z(V_1 + \dots + V_n)} = E(e^{-zV_1} \cdot \dots \cdot e^{-zV_n}) \overset{\text{независимость } V_i}{=}$

$$= E e^{-zV_1} \cdot \dots \cdot E e^{-zV_n} = L_{V_1}(z) \cdot \dots \cdot L_{V_n}(z) = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_n} = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

$$\Rightarrow L_{S^{ind}}(z) = \left(\frac{\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$$

Мы узнаем в этом выражении преобр. Лапласа для $\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n; \beta)$. А поскольку есть вз. однозн. соответствие между распр. и его преобр. Лапласа, то $S^{ind} \sim \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n; \beta)$. ч.т.д.