Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 13

Непрерывность отображения Ito-Lyons

На прошлой лекции доказали теорему существования и единственности решения задачи Коши для грубого дифференциального уравнения.

Пусть $0<\tau<T<1$ и $\frac{1}{3}<\beta<\frac{1}{2}$. Предположим, что $(X,\mathbb{X})\in\mathfrak{C}^\beta[0,T]$ и функция f трижды непрерывно дифференцируема и ее производные ограниченны. Контролируемая относительно X кривая $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\beta}[0,\tau]$ является на $[0,\tau]$ решением **грубого дифференциального уравнения**

$$dY_t=f(Y_t)\,dX_t$$

и удовлетворяет начальному условию $Y_0=y$, если для всех $t\in[0,\tau]$ справедливо равенство

$$Y_t=y+\int_0^t f(Y_u)dX_u,$$

где интеграл в правой части является грубым интегралом по грубой кривой $(X,\mathbb{X})$ от контролируемой кривой $(f(Y),Df(Y)Y')$.

Теорема 1. *Для всякого $y\in\mathbb{R}^m$ существует такое $\tau\in(0,T)$, что грубое уравнение $dY_t=f(Y_t)dX_t$ на $[0,\tau]$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $Y_0=y$.*

Замечание 1. Можно считать, что построенное при доказательстве теоремы решение Y удовлетворяет неравенству

$$\|Y\|\le|y|+|f(y)|+\|X\|_\beta+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}+1=M$$

и τ зависит именно от M.

Замечание 2. Поскольку решение Y является неподвижной точкой сжимающего отображения

$$(Y,Y')\to\Bigl(y+\int_0^t f(Y_u)\,dX_u,f(Y_u)\Bigr),$$

то это решение является пределом по норме $\|\cdot\|_\mathcal{D}$ последовательности Y^n, где

$$Y_t^0=y+f(y)X_{0t},\quad (Y_t^0)'=f(y),\quad Y_t^{n+1}=y+\int_0^t f(Y_u^n)\,dX_u,\quad (Y_t^{n+1})'=f(Y_t^n).$$

Теорема 2. *Пусть $\beta\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, $(X,\mathbb{X}),(\widetilde{X},\widetilde{\mathbb{X}})\in\mathfrak{C}^\beta[0,T]$, причем*

$$\|X\|_\beta+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}+\|X\|_\beta+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}\le R.$$

Тогда для всякого $y\in\mathbb{R}^d$ существует такое $\tau\in(0,T)$, что на $[0,\tau]$ каждое из грубых дифференциальных уравнений

$$dY_t=f(Y_t)dX_t\quad\text{и}\quad d\widetilde{Y}_t=f(\widetilde{Y}_t)d\widetilde{X}_t$$

имеет единственное решение Y_t и $\widetilde{Y}_t$ соответственно с начальным условием $Y_0=\widetilde{Y}_0=y$ и для всякого $\alpha\in(\frac{1}{3},\beta)$ справедлива оценка

$$\|Y-\widetilde{Y}\|_\mathcal{D}\le C(f,\alpha,R)\bigl(\|X-\widetilde{X}\|_\alpha+\|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\bigr),$$

где $\|Y-\widetilde{Y}\|_\mathcal{D}=\|Y'-\widetilde{Y}'\|_\alpha+\|R^Y-R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}$.

Доказательство. Сразу выбираем число $\tau < 1$ так, что существует единственное решение у каждого из грубых дифференциальных уравнений, причем
$$\|Y\|_{\mathcal{D}}, \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} \le M = 1 + |y| + |f(y)| + 2R.$$
Заметим, что
$$\|X\|_{\alpha} = \tau^{\beta-\alpha}\|X\|_{\beta} \le \tau^{\beta-\alpha}M \le M, \quad \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} = \tau^{2\beta-2\alpha}\|\mathbb{X}\|_{\beta} \le \tau^{2\beta-2\alpha}M \le M.$$
Применяя лемму 5 из прошлой лекции, получаем
$$\|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_{\alpha} \le C(M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\alpha}(\tau^{\alpha} + \tau^{\beta-\alpha}M) + \|X - \widetilde{X}\|_{\alpha}\big),$$
$$\|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \le C(M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\alpha}(\tau^{\alpha} + \tau^{2\beta-2\alpha}M) + \|X - \widetilde{X}\|_{\alpha} + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$
Поскольку
$$Y_t = y + \int_0^t f(Y_u)\,dX_u, \quad Y'_t = f(Y_t), \quad \widetilde{Y}_t = y + \int_0^t f(\widetilde{Y}_u)\,d\widetilde{X}_u, \quad \widetilde{Y}'_t = f(\widetilde{Y}_t),$$
то
$$\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} = \|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_{\alpha} + \|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}.$$
Следовательно, верна оценка
$$\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} \le 2C(M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\alpha}(\tau^{\alpha} + \tau^{\beta-\alpha}M + \tau^{2\beta-2\alpha}M) + \|X - \widetilde{X}\|_{\alpha} + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$
Для достаточно малого τ можно считать, что
$$2C(M)(\tau^{\alpha} + \tau^{\beta-\alpha}M + \tau^{2\beta-2\alpha}M) < \frac{1}{2}$$
и верна оценка
$$\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} \le 4C(M)\big(\|X - \widetilde{X}\|_{\alpha} + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$
□

Замечание 3. Выше мы не предполагали ограниченность отображения f, а только ограниченность его производных. Поэтому доказанные выше результаты верны для грубых дифференциальных линейных уравнений. **Если функция f ограничена, то в теореме существования и единственности решения и в теореме о непрерывности отображения Ito-Lyons можно считать, что τ не зависит от начальной точки y и утверждение теорем распространяется на весь отрезок $[0, T]$.**

Замечание 4. Пусть $(X, \mathbb{X}) \in \mathfrak{C}^{\beta}_{g}([0, T])$ и $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$. Тогда существует такая последовательность гладких кривых X^n_t, что
$$\|X^n - X\|_{\alpha} + \|\mathbb{X}^n - \mathbb{X}\|_{2\alpha} \to 0,$$
где
$$\mathbb{X}^n_{st} = \int_s^t X^n_{s\tau} \otimes dX^n_{\tau},$$
причем $\sup_n\big(\|X^n\|_{\beta} + \|\mathbb{X}^n\|_{2\beta}\big) < \infty$.

Пусть Y^n_t и Y_t — решения грубых дифференциальных уравнений
$$dY^n_t = f(Y^n_t)\,dX^n_t, \quad dY_t = f(Y_t)\,dX_t, \quad Y^n_0 = Y_0 = y.$$
Из последней теоремы следует, что на некотором отрезке $[0, \tau]$ все эти решения существуют и Y^n сходится к Y по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$, в частности по норме пространства $C^{\alpha}([0, \tau])$. Поскольку кривая X^n_t гладкая, то грубый интеграл совпадает с обычным интегралом Римана–Стилтьеса, а грубое уравнение можно считать обычным дифференциальным уравнением. Таким образом, решение грубого дифференциального уравнения можно считать пределом решений классических уравнений.

Связь со стохастическими уравнениями

Пусть отображение f ограничено, трижды дифференцируемо и его производные ограничены. Предположим, что $(B, \mathbb{B})$ — грубая траектория, соответствующая винеровскому процессу w_t, построенная с помощью интеграла Ито, то есть

$$B_t = w_t, \quad \mathbb{B}^{ij}_{st} = \int_s^t w^i_{s\tau}\, dw^j_\tau.$$

Через $\mathcal{F}_t$ обозначаем фильтрацию, соответствующую винеровскому процессу w_t.

Пусть $Y_t(\omega)$ — решение грубого дифференциального уравнения

$$dY_t(\omega) = f(Y_t(\omega))\, dB_t(\omega), \quad Y_0(\omega) = y, \quad t \in [0, T].$$

Предложение 1. *Случайный процесс Y_t согласован с $\mathcal{F}_t$ и является сильным решением стохастического уравнения Ито*

$$dY_t = f(Y_t) dw_t.$$

Доказательство. Мы знаем, что для достаточно малого τ решение Y_t является пределом последовательности

$$Y^0_t = y + f(y)B_t, \quad (Y^0_t)' = f(y), \quad Y^{n+1}_t = y + \int_0^t f(Y^n_u)\, dB_u, \quad (Y^{n+1}_t)' = f(Y^n_t).$$

Ясно, что величины $Y^0_t, (Y^0_t)'$ измеримы относительно $\mathcal{F}_t$. Предположим, что уже известна измеримость $Y^n_t, (Y^n_t)'$. Поскольку

$$Y^{n+1}_t = y + \int_0^t f(Y^n_u)\, dB_u = y + \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]} \bigl(f(Y^n_u)B_{uv} + Df(Y^n_u)(Y^n_u)'\mathbb{B}_{uv},$$

то величина Y^{n+1}_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, а $(Y^{n+1}_t)' = f(Y^n_t)$. Так как Y_t является пределом Y^n_t, то величина Y_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$. Выше было отмечено, что в случае ограниченной функции f число τ не зависит от начальной точки. Применяя это рассуждение к $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$ и т.д., получаем измеримость Y_t относительно $\mathcal{F}_t$ для всех $t \in [0, T]$.

Так как грубый интеграл от согласованного с $\mathcal{F}_t$ процесса (Y_t, Y'_t) по грубой траектории $(B, \mathbb{B})$ почти наверное совпадает с интегралом Ито от Y_t по w_t, то с вероятностью единица верно равенство

$$Y_t = y + \int_0^t f(Y_u) dw_u.$$

□

Аналогичное утверждение верно для стохастического уравнения в форме Стратоновича.

Итак, подняв траекторию винеровского процесса до грубой траектории с помощью стохастического интеграла, решение стохастического уравнения можно построить совершенно детерминированным образом без привлечения стохастического интеграла.

Теорема Wong–Zakai

Пусть f — ограниченное и трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными и $(B, \mathbb{B})$ — грубая траектория, полученная из винеровского процесса с помощью интеграла Стратоновича.

Теорема 3. *Предположим, что B^n_t — такой кусочно гладкий случайный процесс, что $(B^n, \mathbb{B}^n)$ сходится с вероятностью единица к $(B, \mathbb{B})$ в $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$, где $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ и $\mathbb{B}^n_{st} = \displaystyle\int_s^t B^n_{s\tau} \otimes dB^n_\tau$, причем последний интеграл является интегралом Римана–Стилтьеса. Тогда полученное при каждом ω решение $Y^n_t(\omega)$ классического дифференциального уравнения*

$$dY^n_t(\omega) = f(Y^n_t(\omega))\dot{B}^n_t(\omega)\, dt, \quad Y^n_0 = y,$$

с вероятностью единица сходится в $C^\gamma[0,T]$, где $\gamma < \alpha$, к решению Y_t стохастического дифференциального уравнения в форме Стратоновича

$$dY_t = f(Y_t) \circ dw_t, \quad Y_0 = y.$$

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из теоремы о непрерывности отображения Ito–Lyons. □

Для применения теоремы достаточно предъявить какое-нибудь приближение процесса $(B, \mathbb{B})$ в $\mathfrak{C}^\alpha[0,T]$ кусочно гладким процессом. Пусть для простоты обозначений $T = 1$ и

$$B^n_t(\omega) = w_{\frac{k}{2^n}}(\omega) + 2^n(t - \tfrac{k}{2^n})\big(w_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - w_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\big), \quad t \in [\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}].$$

Положим

$$\mathbb{B}^n_{st} = \int_s^t B^n_{s\tau} \otimes dB^n_\tau,$$

где интеграл является обычным интегралом Римана–Стилтьеса.

Предложение 2. *Для всякого $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\|B^n - B\|_\alpha + \|\mathbb{B}^n - \mathbb{B}\|_{2\alpha} \Big) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$B^n = \mathbb{E}\big(w|\sigma_n\big), \quad \sigma_n = \sigma(w_{\frac{k}{2^n}}, k = 0, 1, \dots, 2^n).$$

Кроме того, выполнено

$$(\mathbb{B}^n_{st})^{ij} = \mathbb{E}\Big(\int_s^t w^i_{s\tau} \circ dw^j_\tau \Big| \sigma_n \Big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{B}^{ij}_{st}|\sigma_n\big).$$

По теореме Колмогорова для всякого $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$$|B_{st}(\omega)| \le K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha, \quad |\mathbb{B}_{st}(\omega)| \le \mathbb{K}_{2\alpha}(\omega)|t-s|^{2\alpha}.$$

Следовательно, аналогичные оценки верны для B^n и $\mathbb{B}^n$ с величинами

$$K^n_\alpha = \mathbb{E}(K_\alpha|\sigma_n), \quad \mathbb{K}^n_\alpha = \mathbb{E}(\mathbb{K}_\alpha|\sigma_n).$$

По теореме Дуба

$$\mathbb{E}\sup_n |K^n_\alpha|^2 \le C\mathbb{E}|K_\alpha|^2, \quad \mathbb{E}\sup_n |\mathbb{K}^n_\alpha|^2 \le C\mathbb{E}|\mathbb{K}_\alpha|^2.$$

Следовательно, с вероятностью единица

$$\sup_n \Big(\|B^n\|_\alpha + \|\mathbb{B}^n\|_{2\alpha} \Big) < \infty.$$

Вместе с уже известным нам свойством, что B^n и $\mathbb{B}^n$ сходятся почти наверное к B и $\mathbb{B}$ соответственно, доказанная выше равномерная ограниченность дает сходимость в $\mathfrak{C}^\gamma[0,1]$ при $\gamma < \alpha$. □

Следующее приложение теории грубых траекторий связано с задачей оценки параметра в коэффициенте сноса.

Оценка параметра

Предположим, что мы наблюдаем траектории процесса X_t, управляемого стохастическим уравнением Ито

$$dX_t = b(X_t)A\,dt + dw_t, \quad X_0 = x_0,$$

где A — постоянный параметр, а b — ограниченное гладкое отображение с ограниченными производными.

Напомним теорему Гирсанова.

Теорема 4. *Пусть ξ_t ограниченный случайный процесс на $(C[0,T], P_W)$, согласованный с $\mathcal{F}_t$, где P_W — мера Винера, а $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \le t)$. Тогда относительно меры*

$$Q = P_W \exp\Big(-\int_0^t \xi_s\,dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\xi_s|^2\,ds\Big)$$

процесс

$$\eta_t = w_t + \int_0^t \xi_s\,ds$$

является винеровским процессом, то есть $Q \circ \eta^{-1} = P_W$.

Итак, на $C[0,T]$ есть такая вероятностная мера Q, что процесс

$$X_t - x_0 = w_t + \int_0^t h(X_s)A\,ds.$$

является винеровским процессом. Итак, $Q(X(\omega) \in S) = P_W(\omega \in S - x_0)$,

Переформулируем исходную задачу следующим образом. Считаем, что вероятностное пространство — $C[0,T]$ с мерой Q. Тогда $X_t = x_0 + w_t$, процесс

$$\widetilde{w}_t = w_t - \int_0^t b(X_s)A\,ds$$

является винеровским относительно меры

$$Q_A = \exp\Big(\int_0^t b(X_s)A\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s)A|^2\,ds\Big)Q.$$

Оценкой максимального правдоподобия называется величина $\widehat{A}_T(X)$, равная значению A, при котором функция

$$A \to \log\frac{dQ_A}{dQ} = \int_0^T b(X_s)A\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T |b(X_s)A|^2\,ds$$

достигает максимума. Ясно, что

$$\widehat{A}_T(X) = \Big(\int_0^T b(X_s)b(X_s)^t\,ds\Big)^{-1}\int_0^T b(X_s)^t\,dX_s,$$

При некоторых условиях на b можно показать, что $\widehat{A}_T(X)$ сходится к A по вероятности, когда $T \to +\infty$. Например, в одномерном случае имеет место равенство

$$\widehat{A}_T(X) - A = \Big(\int_0^T b(X_s)^2\,ds\Big)^{-1}\int_0^T b(X_s)\,dw_s.$$

Пусть $0 < c_1 \le |b(x)|^2 \le c_2$. Тогда

$$\mathbb{E}|\widehat{A}_T(X) - A|^2 \le c_1^{-1}T^{-2}\mathbb{E}\int_0^T b(X_s)^2\,ds \le c_1^{-1}c_2T^{-1}$$

и $\mathbb{E}|\widehat{A}_T(X) - A|^2 \to 0$ при $T \to +\infty$.

Поскольку наблюдение за траекторий X_t не является точным, то важнейшим свойством оценки $\widehat{A}_T(X)$ должна быть непрерывная зависимость от X. Однако, в многомерном случае стохастический интеграл

$$\int_0^T h(X_s)^t \, dX_s$$

не является непрерывным относительно нормы $\max_{[0,T]} |X_s|$. Для восстановления свойства непрерывности надо перейти от стохастического интеграла к грубому интегралу, предварительно подняв процесс X_t до грубой траектории $(X, \mathbb{X})$. Тогда получаем оценку

$$\widehat{A}_T(X, \mathbb{X}) = \Big(\int_0^T b(X_s) b(X_s)^t \, ds \Big)^{-1} \int_0^T b(X_s)^t \, dX_s,$$

где последний интеграл является грубым интегралом по $(X, \mathbb{X})$. Отображение

$$(X, \mathbb{X}) \to \widehat{A}_T(X, \mathbb{X})$$

является непрерывным относительно метрики пространства грубых траекторий. Кроме того, можно перейти от интеграла Ито к интегралу Стратоновича и воспользоваться приближением такого интеграла интегралами по гладким кривым.