Введение в финансовую математику

Лекция 2: Дополнения к модели Блэка–Шоулса и проверка на данных

19 мая 2020

Фьючерсы

Определение (фьючерс $\approx$ форвард)

Фьючерс – это торгуемый на бирже контракт на поставку базового актива S в момент экспирации T.

Принцип расчета – ежедневное перечисление прибыли или убытка ("вариационной маржи") из-за изменения рыночной стоимости фьючерса в размере

$$M_t = F_t - F_{t-1} \quad \text{(для покупателя фьючерса)},$$

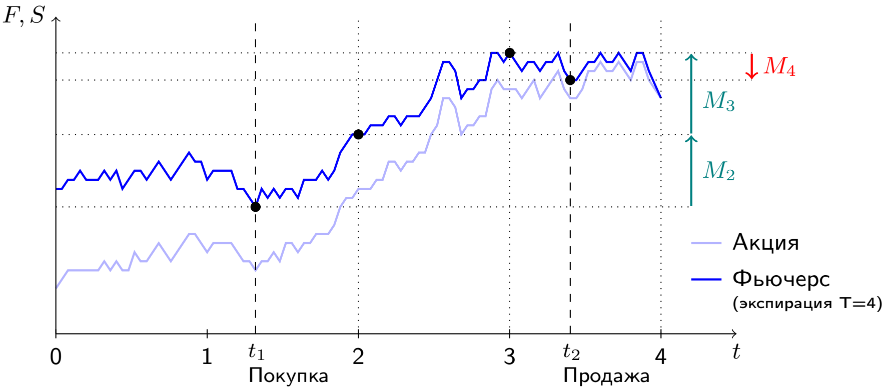
где F_t – цена последней сделки по фьючерсу в день t, и $F_T = S_T$.

Типы фьючерсов

- поставочный – в последний день происходит сделка по базовому активу;
- расчетный – происходит только перечисление вариационной маржи.

В теоретических моделях будем рассматривать только расчетные фьючерсы.

Пример расчетов по фьючерсу



Прибыль покупателя: $M_2 + M_3 - M_4 = F_{t_2} - F_{t_1}$.

Справедливые цены фьючерсов в модели Блэка–Шоулса

Утверждение. В модели Блэка–Шоулса справедливая цена фьючерса

$$F_t = e^{r(T-t)} S_t,$$

Доказательство 1: обратной индукцией, сводя к оценке платежного обязательства $X = F_t$ на отрезке $(t-1, t]$.

Доказательство 2. Предположим $F_t = F(t, S_t)$ и найдем стратегию (G, H), где $G_t = G(t, S_t)$, $H_t = H(t, S_t)$, хеджирующую фьючерс, т.е.

$$dV_t = dF_t \ \text{ с условием } \ V_t = G(t, S_t) B_t + H(t, S_t) S_t = 0.$$

Из формулы Ито и условия самофинансирования получаем уравнение

$$\begin{cases} F'_t + rxF_x + \frac{\sigma^2 x^2}{2} F''_{xx} = 0, \\ F(T, x) = x. \end{cases}$$

Из формулы Фейнмана–Каца $F(t, x) = E^Q(S_T \mid S_t = x) = e^{r(T-t)} x$.

Замечания о ценах фьючерсов и форвардов

- Доказательство 2 предполагает, что перечисление вариационной маржи происходит непрерывно, хотя в реальности происходит дискретно.

- Если процентная ставка детерминирована, то цены фьючерсов и форвардные цены совпадают. В общем случае

$$\text{форвардная цена} = B_t E^Q\left(\frac{S_T}{B_T} \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right),$$

$$\text{фьючерсная цена} = E^Q(S_T \mid \mathscr{F}_t).$$

- Цены фьючерсов являются мартингалами относительно мартингальной меры Q и, в частности,

$$dF_t = \sigma F_t d\widetilde{W}_t, \qquad \widetilde{W}_t \text{ – броуновское движение по } Q.$$

Разные виды опционов

Маржируемые опционы

Можно рассмотреть опционы, расчеты по которым ведутся не в начале и конце срока, а так же как у фьючерсов – перечислением вариационной маржи

$$M_t = V_t - V_{t-1} \quad \text{(для покупателя опциона)},$$

где V_t – цена последней сделки по опциону в день t, и $V_T = (S_T - K)^+$ для опциона колл или $V_T = (K - S_T)^+$ для опциона пут.

Тогда, аналогично утверждению для фьючерсов, цены европейских маржируемых опционов колл C и пут P:

$$C(t, x) = E^Q((S_T - K)^+ \mid S_t = x),$$

$$P(t, x) = E^Q((K - S_T)^+ \mid S_t = x).$$

Маржируемые опционы на фьючерсы

Возьмем в качестве базового актива фьючерс. Тогда

$$C(t,x) = E^Q((F_T - K)^+ \mid F_t = x),$$
$$P(t,x) = E^Q((K - F_T)^+ \mid F_t = x).$$

Эти выражения совпадают с формулой Блэка-Шоулса для $r = 0$, и тогда для маржируемых опционов на фьючерсы получаем

$$C(t,x) = x\Phi(d_1) - R\Phi(d_2), \qquad P(t,x) = K\Phi(-d_2) - x\Phi(-d_1),$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\frac{F}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right), \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\frac{F}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right).$$

Формула для опционов на фьючерсы была получена Блэком (1976 г.).

Маржируемые американские опционы на фьючерсы

Американский опцион может быть исполнен в любой момент $\theta \in [0,T]$, где θ – момент остановки.

Справедливая цена:

$$C(t,x) = \sup_{\theta\in[t,T]} E^Q((F_\theta - K)^+) \mid F_t = x),$$

$$P(t,x) = \sup_{\theta\in[t,T]} E^Q((K - F_\theta)^+) \mid F_t = x).$$

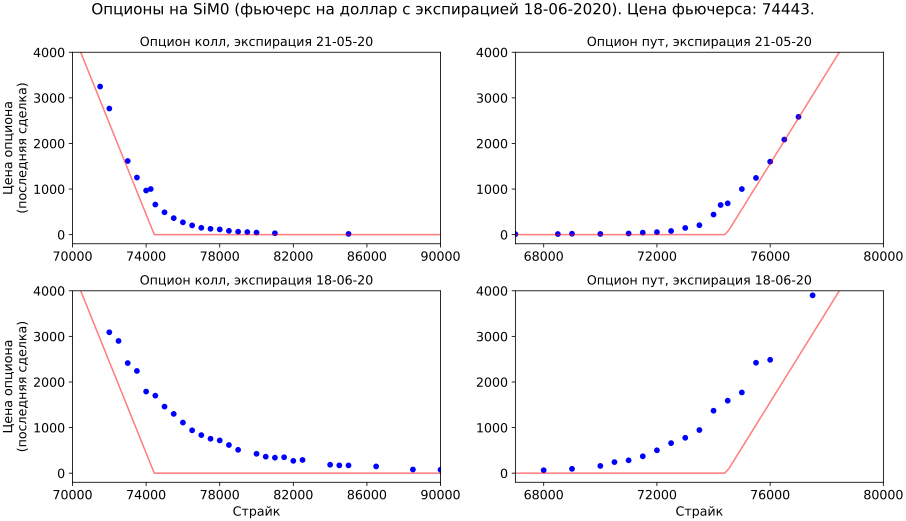
Утверждение. Для маржируемых опционов на фьючерсы цены американских и европейских опционов равны.

Доказательство. F_t – мартингал $\implies$ $(F_t - K)^+$ и $(K - F_t)^+$– субмартингалы по неравенству Йенсена $\implies$ оптимальный момент $\theta = T$.

Замечание. В общем случае для опционов на акции при $r > 0$: колл оптимально держать до конца, пут может быть выгодно продать если $S_t \ll K$.

Согласуется ли модель Б.-Ш. с реальными данными?

Пример данных по ценам некоторых опционов



Предполагаемая волатильность (IV – implied volatility)

Цена опционов колл и пут в формуле Блэка–Шоулса задается функцией

$$V = V(S, \tau, K, r, \sigma),$$

где

S – текущая цена базового актива,

τ – время до экспирации ($\tau = T - t$),

K – страйк,

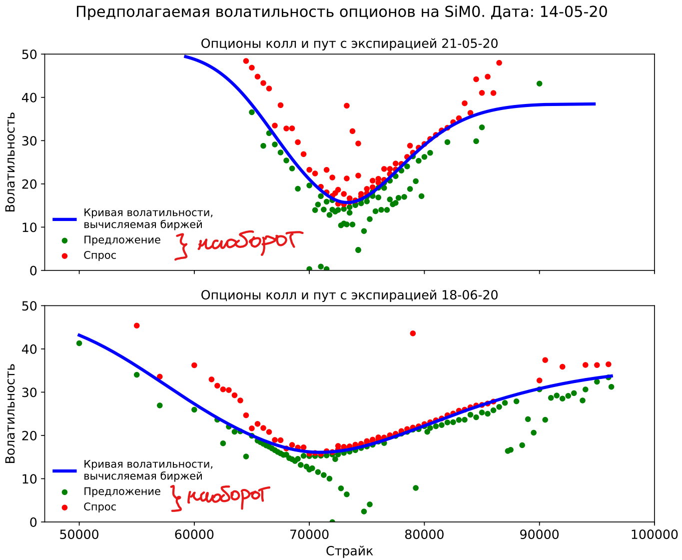
r – безрисковая ставка ($r = 0$ для маржируемых опционов на фьючерсы),

σ – волатильность.

Значения V, S, τ, K, r известны из рыночных данных, поэтому можно решить уравнение относительно σ. Его решение $\widehat{\sigma}$ называется предполагаемой волатильностью.

Согласно модели Б.-Ш. значение $\widehat{\sigma}$ должно быть одним и тем же для всех опционов на данный рисковый актив. Но на практике это не так.

Волатильность зависит как от страйка, так и от экспирации



Замечания

- Формулу Блэка–Шоулса нужно рассматривать не как метод оценки опционов, а как преобразование “цена $\to$ предполагаемая волатильность”.
- Выпуклость кривой волатильности $\widehat{\sigma}(K)$ при фиксированном τ называют эффектом “улыбки волатильности”.
- Важна также поверхность волатильности – функция $\widehat{\sigma}(K,\tau)$.
- Улучшения модели Блэка–Шоулса должны давать кривую (поверхность) волатильности, которая была бы ближе к наблюдаемым данным.

Технические детали

- Для нахождение $\widehat{\sigma}$ можно использовать численный метод Ньютона или его модификацию с двумя производными (метод Halley).

- Хорошее начальное приближение $\widehat{\sigma}_0$ для метода Ньютона задается формулой (Corrado & Miller, 1996)

$$\widehat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} \cdot \frac{V - (S-z)/2 + \sqrt{a}}{S+z},$$

где $\quad z = Ke^{-r\tau}, \quad a = ((V - (S-z)/2)^2 - (S-z)^2/\pi)^+.$

- Кривая волатильности, вычисляемая Московской биржей, приближается по волатильностям цен спроса и предложения опционов формулой

$$\sigma(K) = p_1 + p_2(1 - e^{-p_3 y^2}) + \frac{p_4 \operatorname{arctg}(p_5 y)}{p_5}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(\ln(K/S) - p_0),$$

где p_i – параметры, подбираемые при помощи МНК.
(Детали - см. в папке extra на OneDrive)

Дополнение: модель CEV

Уравнение CEV для рискового актива

Модель CEV (constant elasticity of variance) – одна из первых моделей, учитывающих непостоянную волатильность (Cox, 1975).

В ней дисконтированные цены (или цены фьючерсов) относительно мартингальной меры имеют вид

$$dS_t = aS_t^{1+\beta} dW_t,$$

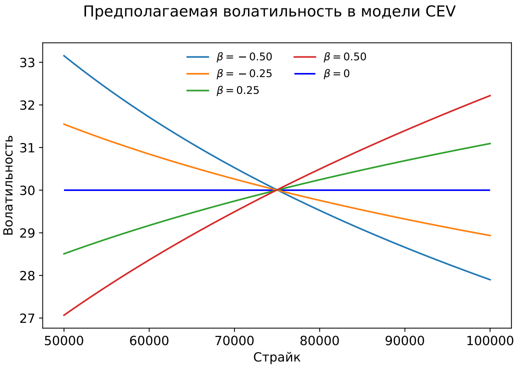
где $a > 0$, $\beta \in [-1, \infty)$ – параметры. Тогда волатильность $\sigma(x) = ax^{\beta}$.

Значения параметра β

- $\beta = 0$ – модель Блэка-Шоулса, $\beta = -1$ – модель Башелье.
- $\beta < 0$ – волатильность растет, когда цена падает; соответствует поведению цен на акции (Cox, 1975).
- $\beta > 0$ – волатильность растет, когда цена растет; соответствует поведению цен на товары (Emanuel, MacBeth, 1982).

Предполагаемая волатильность

График предполагаемой волатильности для разных β с остальными параметрами близкими к примеру на слайде 10:



Видно, что модель CEV не может воспроизвести улыбку волатильности.