Новикова А., 509гр

1. $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, n$

$u_0 = 0$, $\beta \in \mathbb{R}^1$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

1) u^*_{n+k} - опт. прогн. u_{n+k} по $u_1, \dots, u_n$

2) $\Delta_k = E(u^*_{n+k} - u_{n+k})^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} ?$

□ 1) т.к. оптимальн. оценкой по дан. набл. будет УМО, то

$$u^*_{n+k} = E(u_{n+k} \mid u_1, \dots, u_n) = E(\beta u_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} \mid u_1, \dots, u_n) = \dots =$$

$$= E(\underbrace{\beta^k u_n}_{\text{изм}} + \underbrace{\beta^{k-1}\varepsilon_{n+1} + \dots + \beta\varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k}}_{\text{не зав. от } \sigma(u_1, \dots, u_n)} \mid u_1, \dots, u_n) = \beta^k u_n +$$

$$+ E\varepsilon_{n+1} \cdot \beta^{k-1} + \dots + E\varepsilon_{n+k} \overset{\text{нор}}{=} \beta^k u_n + \underbrace{E\varepsilon_1}_{=0} \sum_{j=0}^{k-1} \beta^j = \beta^k u_n$$

2) $$\Delta_k = E(\beta^k u_n - u_{n+k})^2 = E(\cancel{\beta^k u_n} - \cancel{\beta^k u_n} - \beta^{k-1}\varepsilon_{n+1} - \dots - \beta\varepsilon_{n+k-1} - \varepsilon_{n+k})^2 \overset{\text{н.о.р.}}{=} E\varepsilon_1^2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \beta^{2j} \overset{|\beta| \ne 1}{=} E\varepsilon_1^2 \frac{1 - \beta^{2k}}{1 - \beta^2}$$

$\Rightarrow$ а) $|\beta| < 1$: $\Delta_k = E\varepsilon_1^2 \cdot \frac{1 - \beta^{2k}}{1 - \beta^2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2}$

б) $|\beta| = 1$: $\Delta_k = E\varepsilon_1^2 \cdot \sum_{j=1}^{k} 1 \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

в) $|\beta| > 1$: $\Delta_k = E\varepsilon_1^2 \cdot \frac{1 - \beta^{2k}}{1 - \beta^2} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ ◁

Ответ: 1) $u^*_{n+k} = \beta^k u_n$

2) $|\beta| < 1$: $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2}$

$|\beta| \geq 1$: $\lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = \infty$

2. $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = \nu$, $0 < D\varepsilon_1 = \sigma^2 < \infty$

Хар. у-ие: $x^2 = \beta_1 x + \beta_2$ с кор. $|\,| < 1$

1) $f(\lambda)$ - ?

2) $\bar{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t$ сх. в с.к?

3) $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ при нек. $\delta > 0$

$n^{1/2}(\bar{u}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \Delta^2)$?

▷ Пусть $\eta_t = \varepsilon_t - \nu$, $E\eta_t = 0$, $E\eta_t^2 = D\eta_t = \sigma^2$

$\Rightarrow u_t = \nu + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \eta_t$ - $AR(2)$ с ненул. ср.

$\nu := \underbrace{(1 - \beta_1 - \beta_2)}_{\neq 0, \text{ т.к. } 1 \text{ не кор. хар. ур.}} \mu$, $v_t := u_t - \mu$

$\Rightarrow v_t + \mu = \beta_1(v_{t-1} + \mu) + \beta_2(v_{t-2} + \mu) + \mu(1 - \beta_1 - \beta_2) +$

$+ \eta_t$

$\Rightarrow \begin{cases} v_t = \beta_1 v_{t-1} + \beta_2 v_{t-2} + \eta_t \\ v_t = -\mu + u_t \end{cases}$

Хар. у-ие для $\{v_t\}$ такое же, а значит по Тh о решении у-ия $AR(p)$ оно есть строго стац. и

$v_t = \sum_{j\geq 0} \gamma_j \eta_{t-j}$, $\begin{cases} \gamma_j = \beta_1 \gamma_{j-1} + \beta_2 \gamma_{j-2}, & j \geq 0 \\ \gamma_0 = 1 \\ \gamma_j = 0, & j < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_t = \mu + \sum_{j\geq 0} \gamma_j \eta_{t-j} = \mu + \sum_{j\geq 0} \gamma_j \cdot (\varepsilon_{t-j} - \nu)$ - тоже стац.

1) Для нахожд. $f_u(\lambda)$ дост. найти $f_v(\lambda)$, т.к.

$$\begin{cases} f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} R(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau \geq 1} \cos \lambda\tau \, R(\tau), \text{ если } \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R(\tau)| < \infty \\ R_v(\tau) = \operatorname{cov}(v_0, v_\tau) - \text{ков. ф-ция } (\exists \text{ в силу стац реш}) \\ \operatorname{cov}(v_0, v_\tau) = \operatorname{cov}(u_0 - \mu, u_\tau - \mu) = \operatorname{cov}(u_0, u_\tau) \end{cases}$$

т.е. $f_u(\lambda) = f_v(\lambda)$

В силу того, что $\eta_t = v_t - \beta_1 v_{t-1} - \beta_2 v_{t-2}$

частот. ф-ция $\varphi(\lambda) = 1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}$

Тогда $f_v(\lambda) = \frac{f_\eta(\lambda)}{|\varphi(\lambda)|}$, где $f_\eta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} R_\eta(0) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$, т.к. η_t - н.к.з.

$$\Rightarrow f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi \, |1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|}$$

$\neq 0$, т.к. иначе бы это были корни $1 - \beta_1 x - \beta_2 x^2 = 0$

$\Updownarrow$ для $e^{i\lambda}$

$x^2 - \beta_1 x - \beta_2 = 0$ - хар. ур.

а его корни $|\;| < 1$, $|e^{i\lambda}| = 1$

г) Тогда ЗБЧ в с.к. для $\{v_t\}$ $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} v_t \xrightarrow{\text{с.к.}} Z(0) - Z(0-)$

А для $\{u_t\}$ будет поправка $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (u_t - \mu) \nearrow^{\text{с.к.}}$

Как получили на лекции $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} v_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (u_t - \mu) \rightarrow$

$\xrightarrow{\text{с.к.}} 0$, т.е. $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} u_t = \overline{u}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \mu = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1 - \beta_2}$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} R(\tau) \longrightarrow 0$ (т.к. $E|Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$, $\lambda_2 \geq \lambda_1$,

а $\frac{1}{n} \sum R(\tau) \rightarrow F(0) - F(0-)$)

Да и вообще $\exists f(x) \Rightarrow F(x)$ непр.

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{c.k.} \mu.$$

3) $n^{1/2}(\bar{u}_n - \mu) = n^{1/2}\bar{v}_n$ - среднее стац. посл. $\{v_t\}$

$$E v_t = 0$$

$E|v_1|^{2+\delta} < \infty$: $v_t = \sum_{j \geq 0} \gamma_j \eta_{t-j}$, $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty \Leftrightarrow E|\eta_1|^{2+\delta} < \infty$

По н-ву Минковского для $S_n = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \eta_{t-j}$

$$\{E|S_n - S_m|^{2+\delta}\}^{1/2+\delta} = \{E|\sum_{j=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \gamma_j \eta_{t-j}|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)} \leq$$

$$\leq \sum_{j=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} (E|\gamma_j \eta_{t-j}|^{2+\delta})^{1/2+\delta} = \{E|\eta_1|^{2+\delta}\}^{1/(2+\delta)} \sum |\gamma_j| \longrightarrow 0$$

$$\xRightarrow{cx.\, B\, L^{2+\delta}} E|v_1|^{2+\delta} < \infty$$

По р-ии Монкадена $\{v_t\}$ - посл с.с.п.:

$$\alpha(\tau) \leq C\lambda^{\tau} \quad \lambda \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \sum(\alpha(\tau))^{2+\delta} \leq \frac{C' \lambda^{2+\delta}}{1-\lambda^{2+\delta}} < \infty$$

$\Rightarrow$ по ЦПТ для посл. с.с.п. $\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{t=1}^{n}(u_t - \mu) = \frac{1}{n^{1/2}}\sum_{t=1}^{n} v_t \rightarrow$

$$\xrightarrow{d} N(0, \Delta^2), \quad \Delta^2 = E v_0^2 + 2\sum_{\tau \geq 1} E v_0 v_\tau = R(0) + 2\sum_{\tau \geq 1} R(\tau)$$

$$= 2\pi f_v(\lambda) = \frac{\sigma^2}{|1-\beta_1 e^{i\lambda} - \beta_2 e^{2i\lambda}|}$$

$$\Rightarrow n^{1/2}(\bar{u}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2)$$

Ответ:

1) $f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi|1-\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|}$

2) $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{c.k.} \mu$

3) $n^{1/2}(\bar{u}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \frac{\sigma^2}{|1-\beta_1 e^{i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|})$

3. $u_t = \varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, n$

$\varepsilon_0 = 0$, $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$ – н.о.р. $N(0,1)$ с.в.

У-ие ML – ?

$\triangleright$ $u_n = (u_1, \ldots, u_n)$, $\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$u_n = A \varepsilon_n, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -\alpha & \ddots & \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad |\det A| = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \alpha & \ddots & \\ \vdots & & \\ \alpha^{n-1} & \ldots & \alpha \ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ если $g_u(x_1, \ldots, x_n)$ – плотн. u_n

$g_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{н.о.р.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$ – плотн. ε_n, то

$$g_u(\bar{x}) = \frac{g_\varepsilon(A^{-1}x)}{|\det A|} = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i + \alpha x_{i-1} + \ldots + \alpha^{i-1} x_1)$$

$$g_u(u_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(u_i + \theta u_{i-1} + \ldots + \theta^{i-1} u_1)$$

$$\ln g_u(u_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \varphi(u_i + \theta u_{i-1} + \ldots + \theta^{i-1} u_1) \to \max_{\theta \in \mathbb{R}^1}$$

$$\Rightarrow \text{У. ML: } \frac{\partial \ln g_u}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} (u_i + \theta u_{i-1} + \ldots + \theta^{i-1} u_1) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \theta^{j-1} u_{i-j}\, j = 0$$

$\triangleleft$

Ответ: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} j \theta^{j-1} u_{i-j} (u_i + \theta u_{i-1} + \ldots + \theta^{i-1} u_1) = 0$

Сканировано с CamScanner

4. $\begin{cases} u_t = a + e_t & \{e_t\} \text{ - н.о.р.}, Ee_1 = 0,\ e_1 \sim G(x) \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma} \xi_t, & t = 1, \dots, n, \quad \{\xi_t\} \text{ - н.о.р.}, \xi_1 \sim \mu_\xi \end{cases}$

$\{z_t^{\gamma}\}$ - н.о.р, $z_t^{\gamma} \sim Bern(\gamma)$

$l_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} [F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}] = 0$

$\exists\, G'(x) = g(x)$ - непр, огр., чётн

$\{u_t\}, \{z_t^{\gamma}\}, \{\xi_t\}$ - нез.

$F(x)$ - непр. и симм. : $F(x) = 1 - F(-x)$ - ф.р.

1) Сколько реш. $l_n(\theta)$?

2) $\exists\ \hat{a}_n$ робастн.?

$IF(a_\gamma, \mu_\xi)$, $GES(a_\gamma, \mu_\xi)$ - ?

▷ 1) Рассм. у-ие на искан. оценку:

$$l_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} (\underbrace{F}_{\text{ф.р.}}(y_t - \theta) - \frac{1}{2}) = 0$$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \theta \to +\infty \quad F \to 0 \Rightarrow l_n < 0 \\ \theta \to -\infty \quad F \to 1 \Rightarrow l_n > 0 \\ \qquad\qquad l_n \text{ непр.} \end{array}\right\}$ $\exists$ решение $\hat{a}_n$

Единственно? $l_n'(\theta) = -\sum_{t=1}^{n} \underset{\substack{\vee \\ 0, \text{ т.к. плот.}}}{f(y_t - \theta)} < 0$

$\Rightarrow$ один корень

2) Проб. робастн. по Th из лекций:

(i) $\frac{1}{n} l_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}) \xrightarrow{P} E(F(y_1 - \theta) - \frac{1}{2}) = \Lambda(\gamma, \theta)$

по ЗБЧ для посл. с с.н. ($\{u_t\}$ с.н., т.к. н.о.р.

$\{z_t^{\gamma}\xi_t\}$ - н.о.р

$\Rightarrow \{y_t\}$ - с.н. посл

F - изм и непр $\Rightarrow F(y_t-\theta)$ из
измерим с.в. по опр.)

$$-\Lambda(\gamma,\theta) = E F(y_1-\theta) - \frac{1}{2} = E F(u_1-\theta)\cdot(1-\gamma) +$$

$$+ \gamma E F(u_1+\xi_1-\theta) - \frac{1}{2}$$

(ii) $$-\Lambda(0,a) = E\left(F(u_1-a)-\frac{1}{2}\right) = E\left(F(\varepsilon_1)-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(F(x)-\frac{1}{2}\right)}_{\text{неч.}} \underbrace{g(x)}_{\text{чет}}\,dx = 0$$

(iii) $$\frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma} = -EF(u_1-\theta) + EF(u_1+\xi_1-\theta) \text{ - непр}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta} = -(1-\gamma)E F'(u_1-\theta) - \gamma E F'(u_1+\xi_1-\theta) \text{ - непр}$$

т.к. F - ф.р. непр.

$$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\gamma} = -EF(\varepsilon_1) + EF(\varepsilon_1+\xi_1) = EF(\varepsilon_1+\xi_1) - \frac{1}{2}$$

(iv) $$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\theta} = -EF'(\varepsilon_1) \neq 0$$

$$\Rightarrow IF(a_r, \mu_\xi) = \frac{EF(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}}{EF'(\varepsilon_1)}$$

$$GES(a_r, M_\xi) = \sup_{\mu_\xi\in M_\xi} |IF(a_r,\mu_\xi)| < \infty, \text{ т.к. } EF(\xi_1+\xi_1)$$

ограничен, т.к. F - это ф.р., а не просто ф-ция

Ответ: 1) Одно

2) Да,

$$IF = \frac{EF(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}}{EF'(\varepsilon_1)}$$

$$GES < \infty$$

5. $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, $|\beta| < 1$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. , $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

$\varepsilon_1 \sim G(x)$, $G'(x)\big|_{x=0} = g(0) > 0$

По $u_1, \dots, u_n$ оценив. $\theta = \beta^2$

$\theta_{1n} = \hat{\beta}^2_{n,LD}$, $\theta_{2n} = \hat{\beta}^2_{n,LS}$

о.н.м. , о́нк

АОЭ $\hat{\theta}_{1n}$ отн $\hat{\theta}_{2n}$ - ?

▷ Известно, что $n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 1-\beta^2)$

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1-\beta^2}{E\varepsilon_1^2 (2g(0))^2}\right)$$

Нас интерес. $\hat{\beta}^2_{n,LS}$ и $\hat{\beta}^2_{n,LD}$:

$$n^{1/2}(\hat{\beta}^2_{n,LS} - \beta^2) = \underbrace{n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS} - \beta)}_{\downarrow d \atop N(0,1-\beta^2)} \underbrace{(\hat{\beta}_{n,LS} + \beta)}_{\downarrow P \atop 2\beta = const}$$

(но постановке зад. и ЗБЧ вс.н. $\hat{\beta}_{n,LS} \xrightarrow{P} \beta$)

$\overset{\text{л. Слуцкого}}{\Rightarrow}$ $n^{1/2}(\hat{\theta}_{1,n} - \beta^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\beta^2(1-\beta^2))$

Аналогично, $n^{1/2}(\hat{\theta}_{2,n} - \beta^2) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{4\beta^2(1-\beta^2)}{E\varepsilon_1^2 (2g(0))^2}\right)$

По лемме из лекций:

$$e_{12} = \lim_{n\to\infty} \frac{n'(n)}{n} = \frac{\sigma_2^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta)} = \frac{\sigma^2_{LS}(\theta)}{\sigma^2_{LD}(\theta)} = E\varepsilon_1^2 \cdot 4g^2(0)$$

◁

Ответ: $e_{1,2} = E\varepsilon_1^2 \, (2g(0))^2$