Семинар 4. 14.10.2021

Э/м потенциалы:

$\vec{E}$ — напряжённость элек. поля

$\vec{B}$ — магнитная индукция

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \end{aligned}}$$

φ — скал. потенциал

$\vec{A}$ — вект. потенциал

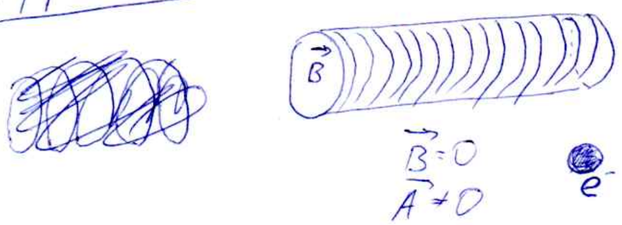
$\varphi = \varphi_0 + \text{const}$ — опр. до константы

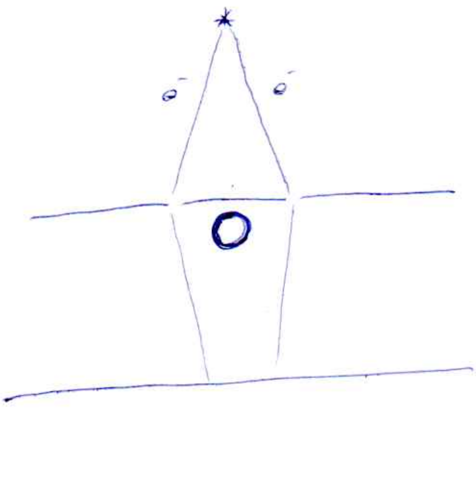
φ — имеет смысл только разница потенциалов ($\Delta\varphi$)

Аналогично: $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$

$$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \\ \varphi \to \varphi + \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

Эффект Ааронова - Бома





$$\boxed{\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\,\vec{v} - e\varphi}$$

Ур. Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{d q} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\Downarrow$$

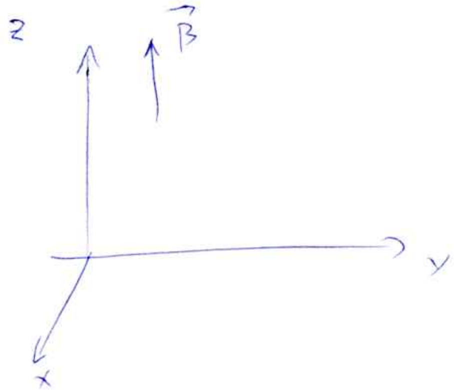
$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\times\vec{B}]} \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Рассмотрим:

$$\underbrace{\frac{dE_{кин}}{dt}} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{e\vec{E}\vec{v}}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = e\vec{E}\vec{v}}$$

Заряженная частица в $B = const$



$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \frac{e}{c}[\vec{v}\cdot\vec{B}]$$

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\frac{E}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\vec{v}\,\vec{B}] \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_z = 0 \\ \dot{v}_x = \omega v_y \\ \dot{v}_y = \omega v_x \end{cases} ; \quad \omega = \frac{ecH}{E}$$

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y)$$

$\Rightarrow v_x + iv_y = a e^{-i\omega t}$, где a – произв. (комплексная величина) ; $a = v_{0t}e^{i\alpha}$

$$\begin{cases} v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha) \\ v_y = v_{0t}\sin(\omega t + \alpha) \end{cases} \qquad v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0$$

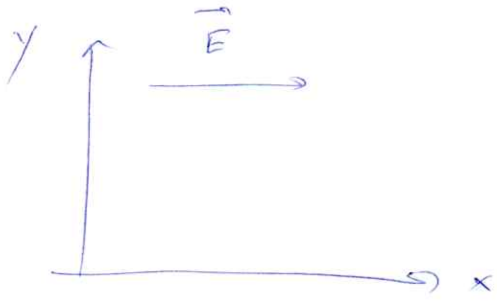
$v_x^2 + v_y^2 = v_{0t}$ — нач. скорость

α – нач. фаза.

с.4

14.10.21

Заряд в $E = const$



$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = eE \\ \dot p_y = \dot p_z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{p_x = eEt;\ p_y = p_0}$ $\qquad \vec v = \frac{\vec p c^2}{\mathcal{E}_{кин.}}$

$$\mathcal{E}^2_{кин.} = m^2c^4 + p^2c^2$$

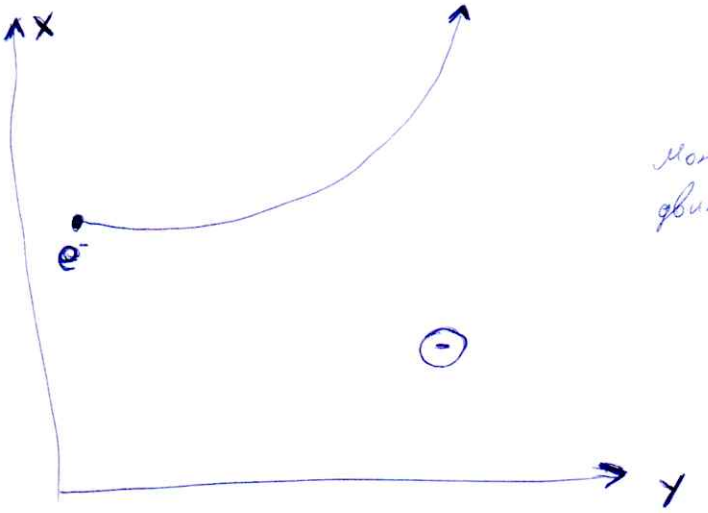
$$\mathcal{E}_{кин} = c\sqrt{m^2c^2 + p_x^2 + p_y^2}$$

$$\mathcal{E}_{кин} = c\sqrt{m^2c^2 + (eEt)^2 + p_0^2} = \sqrt{m^2c^4 + (ceEt)^2 + (p_0c)^2} =$$

$$\mathcal{E}_{кин.} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} \\ v_y = \frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \\ y = \frac{p_0c}{eE}\,\mathrm{Arsh}\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right) \end{cases}$$

Заряженная частица в Кулоновском поле



Можно показать, что частица движется в одной плоскости.

Пусть $H(q_i p_i) \neq f(t)$, тк

$$\boxed{H(q_i p_i) = const}$$

даёт сис-му уравнений.

Пусть $H(q_i, p_i) \neq f(q_a)$, тк

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = 0 \Rightarrow \boxed{p_a = const}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{eQ}{r}$$

в цилиндр. коорд.:

$$\begin{cases} H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2}{c^2}}} + \frac{eQ}{\rho} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{m\rho^2\dot\varphi}{\sqrt{1-\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2}{c^2}}} = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = const \\ p_\varphi = const \end{cases}$$