# ЭКЗАМЕН 2021

Во всех задачах $w$ — винеровский процесс, $\Lambda_t = t$.

**1.** Покажите, что процесс $B_t = w_1 - w_{1-t}$ — винеровский на отрезке $[0,1]$.

**2.** Выпишите решение СДУ $dX_t = -(1/2)X_t dt + w_t$, $X_0 = 0$, и покажите, что $X_{\ln(t+1)}\sqrt{t+1}$ — винеровский процесс. Пользуясь законом повторного логарифма вычислите $\limsup_{t\to\infty} X_t/\sqrt{t}$.

**3.** Докажите, что $w$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}^o_{t+})$, где $\mathcal{F}^o_t := \sigma\{w_s,\ s \le t\}$.

**4.** Пусть $(w, \mathcal{F})$ — измеримое пространство с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$. На множестве $w \times \mathbb{R}_+$ определены $\sigma$-алгебры $\mathcal{P} := \sigma\{A \times ]s, \infty[,\ A \in \mathcal{F}_s,\ s \ge 0,\ B \times \{0\},\ B \in \mathcal{F}_0\}$ (предсказуемая) и $\mathcal{O} := \sigma\{A \times [s, \infty[,\ A \in \mathcal{F}_s,\ s \ge 0\}$ (опциональная). Какая из них включает другую?

**5.** Пусть $M^n \in \mathcal{M}^{2,c}_0$, $\langle M^n \rangle \le C = \mathrm{const}$ и $\langle M^n \rangle_t \to t$ при $n \to \infty$. Показать, что распределения случайных величин $M^n_t$ слабо сходятся к гауссовскому распределению с нулевым средним и дисперсией $t$.

**6.** Пусть $X^x$ — решение СДУ $dX^x_t = f(X^x_t)dt + g(X^x_t)dw_t$, $X^x_0 = x$, где $f, g \in C^1$, $f'$ и $g'$ ограничены, и пусть $Y$ — решение СДУ $dY_t = f'(X^x_t)Y_t dt + g(X^x_t)Y_t dw_t$, $Y_0 = 1$. Показать, что $Y_t$ — производная функции $x \mapsto X^x_t$.

**7.** По теореме о предсказуемом представлении $w_1^4 = Ew_1^4 + \varphi \cdot w_1$, где $\varphi \in L^{2,2}$. Найти $\varphi$.

**8.** Пусть динамика управляемого процесса задаётся СДУ $dX_t = (u_t - \rho X_t)dt + \sigma X_t dw_t$, где управление $(u_t)_{t\le T}$ — предсказуемый процесс со значениями в $[0, M]$. Цель: при заданном начальном условии максимизировать

$$\mathbb{E}\Big(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt\Big).$$

Записать уравнение Беллмана.

**9.** Цена рискового актива $S = x + a\Lambda + \sigma w$. Процентная ставка равна нулю. Получить формулу для цены опциона колл.

**10.** Определить цену опциона колл с погашением через 180 дней по модели BS. Цена акции 95, страйк 105, волатильность 11, процентная ставка 2.

# 1 Решения

## 1.1 Задача 1

Отметим, что процесс $B$ согласован с фильтрацией $\mathcal{G}_t = \sigma(w_1 - w_{1-s} : s \leq t)$. Также для $0 < t \leq 1$ выполнено

$$B_t - B_s = w_{1-s} - w_{1-t}$$

и так как винеровский процесс $w$ имеет независимые приращения, нетрудно проверить, что $B_t - B_s$ независим с $\mathcal{G}_s$. Очевидно, что $B_t - B_s$ имеет Гауссово распределение $\mathcal{N}(0, t-s)$ и $B_0 = 0$, значит, по определению заключаем, что $B$ есть винеровский процесс.

## 1.2 Задача 2

Ищем такую замену, чтобы в правой части $X_t$ не было и мы смогли проинтегрировать.
a) Пусть $Y_t = f(x,t) = xe^{\frac{t}{2}}$, следовательно $f'_t = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x, \quad f'_x = e^{\frac{t}{2}}, \quad f''_{xx} = 0.$
Получаем

$$dY_t = f'_t dt + f'_x dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(dX_t)^2$$

$$dY_t = (\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}X_t)dt + e^{\frac{t}{2}}(-\frac{1}{2}X_t dt + dw_t)$$

$$dY_t = (\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}X_t - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}X_t)dt + e^{\frac{t}{2}}dw_t = e^{\frac{t}{2}}dw_t$$

Получили, что $d(e^{\frac{t}{2}}X_t) = e^{\frac{t}{2}}dw_t$, следовательно $e^{\frac{t}{2}}X_t - e^0 X_0 = \int\limits_0^t e^{\frac{s}{2}}dw_s$

Ответ: $X_t = \int\limits_0^t e^{\frac{s-t}{2}}dw_s$
b.1) Первый способ:
$Z_t = X_{\ln(t+1)}\sqrt{t+1} \Rightarrow Z_t = \sqrt{t+1}X_{\ln(t+1)} = \sqrt{t+1}e^{-\ln\frac{(t+1)}{2}} \int\limits_0^{ln(t+1)} e^{s/2}dw_s = \int\limits_0^{ln(1+t)} e^{\frac{u}{2}}dw_u = f \cdot w_{ln(1+t)}$, где $f = e^{\frac{u}{2}}$.
Посчитаем $< Z_t >= \int\limits_0^{ln(t+1)} e^u du = t \Rightarrow$ по теореме Леви $Z_t$ — винеровский процесс.

b.2) Второй способ:
Покажем, что $Z_t = X_{\ln(t+1)}\sqrt{t+1}$ винеровский процесс.

Мы уже знаем, что
$X_t = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t e^{\frac{s}{2}} dw_s$

Значит
$Z_t = \sqrt{t+1} X_{ln(t+1)} = \sqrt{t+1} e^{-\frac{\ln(t+1)}{2}} \int_0^{\ln(t+1)} e^{\frac{s}{2}} dw_s = \int_0^{\ln(t+1)} e^{\frac{u}{2}} dw_u$

Пусть $s < t$
Тогда $Z_t - Z_s$ Гауссовский процесс, ведь $Z_t$ Гауссовский как предел гауссовских величин.

Итак:
$E(Z_t - Z_s) = 0$

Далее по свойству изометрии Ито:

$E(Z_t - Z_s)^2 = \int_{\ln(s+1)}^{\ln(t+1)} e^u du = t - s$

Значит

$Law(Z_t - Z_s) = N(0, t - s)$

Итак, $Z_t$ винеровский процесс.

c) Найти $\limsup_{t \to \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}}$
Имеем: $\limsup_{t \to \infty} \frac{w_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$ верно п.н. в силу закона повторного логарифма.

$$w_t = X_{\ln(t+1)} \sqrt{t+1} \Rightarrow w_{e^t - 1} = X_{\ln e^t} \sqrt{e^t} = X_t e^{\frac{t}{2}} \Rightarrow X_t = \frac{w_{e^t - 1}}{e^{\frac{t}{2}}}$$

Получается, что нужно найти: $\limsup_{t \to \infty} \frac{w_{e^t-1}}{\sqrt{t} e^{\frac{t}{2}}}$. Сделаем замену $s = e^t - 1 \Rightarrow t = \ln(s+1)$. Получаем

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{w_{e^t-1}}{\sqrt{t} e^{\frac{t}{2}}} = \limsup_{s \to \infty} \frac{w_s}{\sqrt{s+1} \sqrt{\ln(s+1)}} = \limsup_{s \to \infty} \frac{w_s}{\sqrt{2s \ln \ln s}} \sqrt{\frac{2s \ln \ln s}{(s+1) \ln(s+1)}} \to 0$$

Так как $\limsup_{s\to\infty} \frac{w_s}{\sqrt{2s\ln\ln s}} \to 1$, а $\frac{2s\ln\ln s}{(s+1)\ln(s+1)} \to 0$ п.н.
Ответ: $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} = 0$

## 1.3 Задача 3

$\mathcal{F}_t^o = \cap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^o_{t+\frac{1}{m}}$, где $\mathcal{F}_t^o := \sigma\{w_s,\ s \le t\}$.
$E(w_t|\mathcal{F}_{s+}) = E(w_t - w_s|\mathcal{F}_{s+}) + E(w_s|\mathcal{F}_{s+}) = E(w_t - w_s|\mathcal{F}_{s+}) + w_s$.
Т.е. достаточно доказать, что $E(w_t - w_s|\mathcal{F}_{s+}) = 0$
$E(w_t - w_s|\mathcal{F}_{s+}) = E(w_t - w_{s+\frac{1}{n}}|\mathcal{F}_{s+}) + E(w_{s+\frac{1}{n}} - w_s|\mathcal{F}_{s+}) = E(w_{s+\frac{1}{n}} - w_s|\mathcal{F}_{s+})$ т.к. первое УМО равно 0 в силу независимости $w_t - w_{s+\frac{1}{n}}$ и $\mathcal{F}_{s+}$.
$E(w_{s+\frac{1}{n}} - w_s|\mathcal{F}_{s+}) \to 0, \quad n \to 0$. по теореме Лебега.

## 1.4 Задача 4

Покажем, что любой порождающий элемент $\mathcal{P}$ можно составить из порождающих элементов $\mathcal{O}$.
Порождающие элементы $\mathcal{P}$ бывают двух типов:
1) $A\times]s,\infty[= \cap_{n\in\mathbb{N}} A \times [s+\frac{1}{n},\infty[$, при этом $A \in \mathcal{F}_s \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}} \forall n \Rightarrow A\times]s,\infty[\in \mathcal{O}$.
2)$B \times \{0\} = B \times [0,\infty] \setminus B\times]0,\infty[$. Они оба принадлежат $\mathcal{O}$, первое по определению, а про второе доказали в пункте 1, сделовательно разность принаджежит $\mathcal{O}$.

## 1.5 Задача 5

Имеем:

$$e^{i\lambda M_t^n} = 1 + i\lambda \int\limits_0^t e^{i\lambda M_s^n}\, dM_s^n - \frac{1}{2}\lambda^2 \int\limits_0^t e^{i\lambda M_s^n}\, d < M_s^n >$$

$$\phi_t^n = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{E} \int\limits_0^t e^{i\lambda M_s^n}\, d < M_s^n >$$

$$\phi_0^n = 1$$

По определению стохастического интеграла

$$\int_0^t e^{i\lambda M_s^n} d < M_s^n > = \lim_{max_i|t_{i+1}-t_i|\to 0} \sum_{j=0}^{k} e^{i\lambda M_{t_j}^n} (< M_{min(t_{j+1},t)}^n > - < M_{min(t_j,t)}^n >)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = T$.

Перейдем к пределу $n \to \infty$ : Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t e^{i\lambda M_s^n} d < M_s^n > = \lim_{n\to\infty} \lim_{max_i|t_{i+1}-t_i|\to 0} \sum_{j=0}^{k} e^{i\lambda M_{t_j}^n} (< M_{min(t_{j+1},t)}^n > - < M_{min(t_j,t)}^n >)$$

Так как $< M_s^n > \leqslant C$ и сумма конечная, то внутренний предел существует, значит имеем право поменять пределы местами.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t e^{i\lambda M_s^n} d < M_s^n > = \lim_{max_i|t_{i+1}-t_i|\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} e^{i\lambda M_{t_j}^n} (< M_{min(t_{j+1},t)}^n > - < M_{min(t_j,t)}^n >) =$$

Возьмем МО от обеих частей и перейдем к пределу по n.

$$= \lim_{max_i|t_{i+1}-t_i|\to 0} \sum_{j=0}^{k} \phi_{t_j} (min(t_{j+1},t) - min(t_j,t)) = \int\limits_0^t \phi_s \, ds$$

$$\phi_t = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \int\limits_0^t \phi_s \, ds$$

Это верно, так как $< M_s^n > \to s$ и $< M_s^n > \leqslant C$

$$\phi_0 = 1$$

Следовательно $\phi_t = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$, то есть получили характеристическую функцию Гауссовского распределения с нулевым средним и дисперсией t.

## 1.6 Задача 6

Остается для следующих поколений.

## 1.7 Задача 7

Пишем формулу Ито для $f(x) = x^4$.
$f'_x = 4x^3, \quad f''_{xx} = 12x^2$
Следовательно $d(w_t^4) = 4X_t^3 dw_t + 6w_t^2 dt$.
Хотим что-то вычесть так, чтобы получился мартингал. Нужно вычесть $f = 6\int\limits_0^t W_s^2 ds$.
Рассмотрим $M_t = w_t^4 - 6\int\limits_0^t W_s^2 ds$. – это матрингал, поэтому у него коэффициента при $dt$ не будет, а коэффициент при $dw_t$ то, что нам нужно и это $4w_t^3$.
Ответ: $\phi = 4w_t^3$.

## 1.8 Задача 8

Данное СДУ $dX_t = (\mu_t - \rho X_t)dt + \sigma X_t dw_t$, а мы хотим:

$$E(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt) \to max.$$

Пусть $W(t, X) = \sup_{X_t = x, \pi \in A(x,t)} E(\gamma X_T - \int_t^T e^{-cs} u_s ds)$. Пусть $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+)$ и $f(T, x) = \gamma x$. Рассмотрим $Y_t = f(t, X_t) - \int_0^t e^{-cs} u_s ds$ и $X_0 = x$.

Если для всех стратегий это супермартингал, то

$$EY_T = E(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt) \leq f(0, x) = EY_0$$

Если для какой-то стратегии это мартингал, то для неё

$$E(\gamma X_T - \int_0^T e^{-ct} u_t dt) = f(0, x) \Rightarrow W(0, x) = f(0, x)$$

По формуле Ито:

$$dY_t = \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 X_t^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(u_t - \rho X_t) - e^{-ct} u_t \right)}_{=:L^{u_t} f(t, X_t)} dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma X_t dw_t$$

В итоге, уравнение Беллмана имеет вид:

$$\sup_u \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(u - \rho x) - e^{-ct} u \right) = 0$$

## 1.9 Задача 9

$\xi = p + H \cdot S_t$

$H \cdot S_t = H(a \cdot \Lambda_T + \sigma \cdot w_T) = Ha \cdot \Lambda_T + H\sigma \cdot w_T$

$\tilde{w}_t := w_t + \frac{a}{\sigma} \cdot \Lambda_t \Rightarrow \phi_t = H_t \cdot \sigma \Rightarrow \xi = p + \phi \cdot \tilde{w}_T \Rightarrow \tilde{W}$ — винеровский по теореме Гирсанова

$\Rightarrow$ по теореме о предсказуемом представлении $p = \tilde{E}\xi$, по мере $\tilde{P} = Pe^{\frac{-a}{\sigma} \cdot W - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2} \cdot \Lambda}$.

Свели задачу к случаю, когда

$$dS_t = S_t(adt + \sigma dw_t)$$

Далее получаем цену опциона в момент $t$

$$C(t, x, \sigma) = x\Phi(d) - K\Phi(d - \sigma\sqrt{T - t}),$$

$d = d(t, x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \frac{x}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T - t}$.

## 1.10 Задача 10

Решение: Для того, чтобы определить цену опциона "колл" с дисконтированным платежом воспользуемся формулой

$$C(0, T, \sigma) = x\Phi(d_1(0, x)) - Ke^{-rT}\Phi(d_2((0, x)), \text{ где}$$

$$d_1(0, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln \frac{x}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} + \frac{r}{\sigma}\sqrt{T}, \ d_2(0, x) = d_1(0, x) - \sigma\sqrt{T}$$

Вычислим сначала $d_1$ и $d_2$:

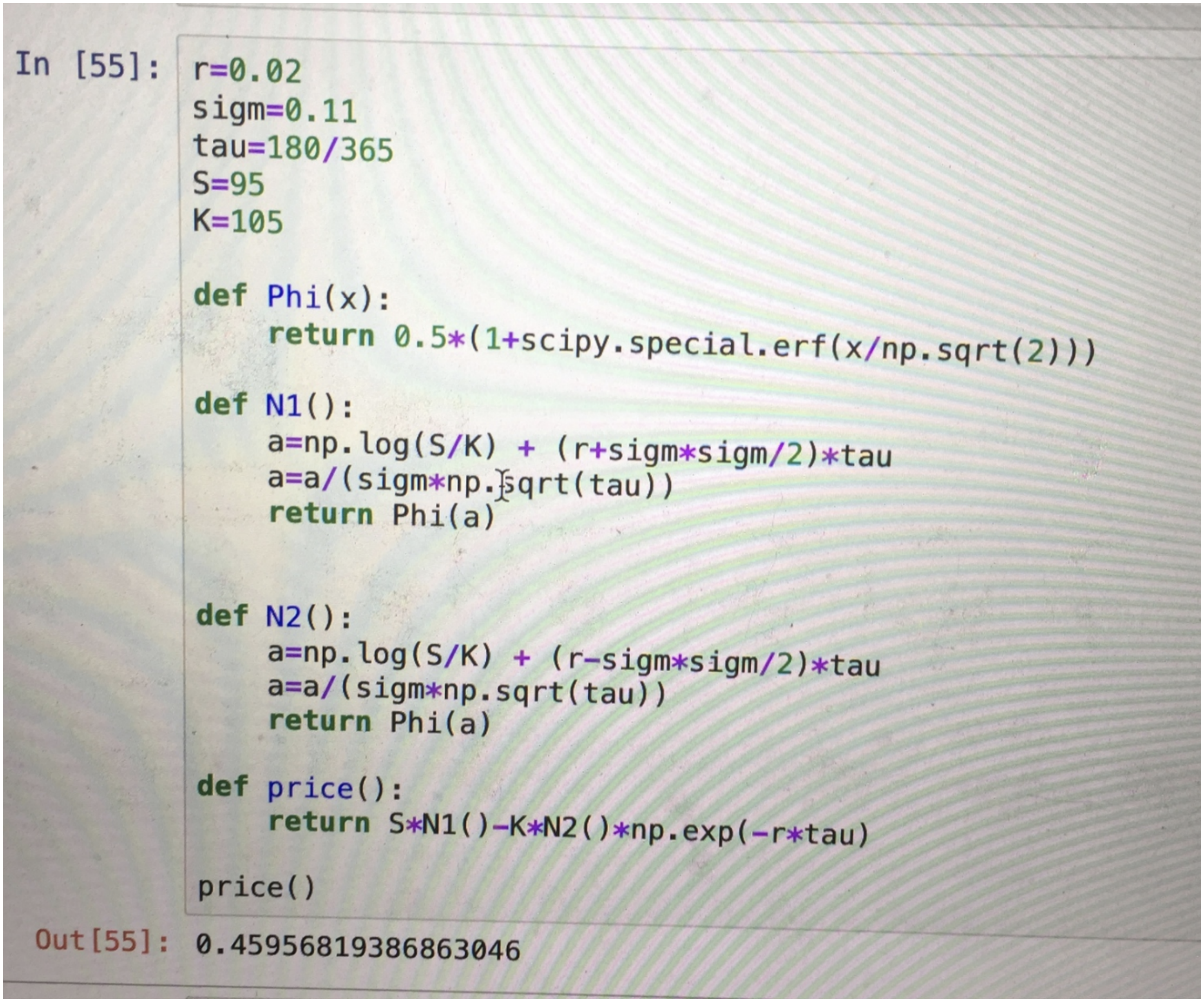
$$d_1(0, x) = \frac{1}{0,11\sqrt{\frac{180}{365}}} \ln \frac{95}{105} + \frac{1}{2} 0,11\sqrt{\frac{180}{365}} + \frac{0,02}{0,11}\sqrt{\frac{180}{365}} \approx -1,295626431 + 0,16630483 \approx -1,129321601$$

$$d_2(0, x) = -1,129321601 - 0,11\sqrt{\frac{180}{365}} \approx -1,206568759$$

Следовательно,

$$C(0, \frac{180}{365}, 0,11) = 95\Phi(-1,129321601) - 105e^{-\frac{360}{365}}\Phi(-1,206568759) \approx 0,459568194$$

Также приведем программный код, подтверждающий наши выкладки



```
In [55]: r=0.02
         sigm=0.11
         tau=180/365
         S=95
         K=105

         def Phi(x):
             return 0.5*(1+scipy.special.erf(x/np.sqrt(2)))

         def N1():
             a=np.log(S/K) + (r+sigm*sigm/2)*tau
             a=a/(sigm*np.sqrt(tau))
             return Phi(a)


         def N2():
             a=np.log(S/K) + (r-sigm*sigm/2)*tau
             a=a/(sigm*np.sqrt(tau))
             return Phi(a)

         def price():
             return S*N1()-K*N2()*np.exp(-r*tau)

         price()

Out[55]: 0.45956819386863046
```

Figure 1: Численные выкладки в 10 задаче.