№67: Док-ть, что интеграл Стратоновича п.н. совп. с интегралом по соотв. грубой траектории.

На лекции доказали для Ито, что:

$$\int_0^T Y_t \, dB_t^{Ito} \overset{п.н.}{=} \int_0^T Y_t \, dW_t, \quad \text{где}$$

по опр.

$$\int_0^T Y_t \, dB_t^{Ito} = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \left(Y_u B_{uv} + Y'_u \mathbb{B}^{Ito}_{uv} \right), \tag{*}$$

$$\mathbb{B}^{Ito,\, ij}_{st} = \int_s^t B^i_{su} \, dB^j_u .$$

Для Стратоновича:

$$\widetilde{\mathbb{B}}^{ij,\, strat}_{st} = \mathbb{B}^{Ito,\, ij}_{st} + \frac{1}{2}(t-s) I$$

$$\widetilde{\mathbb{B}}^{strat}_{st} = \int_s^t B_{su} \circ dB_u = \int_s^t B_{su} \, dB_u + \frac{1}{2}(t-s) I, \quad \text{т.к.}$$

I — единичная матрица

$$\frac{1}{2} [B^i, B^j]_t = \begin{cases} t, & i=j \\ 0, & иначе \end{cases}$$

Тогда (для удобства возьмём $T=1$): (из (*) видно, что изменение $\mathbb{B}^{Ito}$ на $\mathbb{B}^{strat}$ повлияло только на интегр. Y'_t).

$$\int_0^1 Y_t \, dB^{strat} = \int_0^1 Y_t \, dB_t^{Ito} + \underbrace{\int_0^1 Y'_t \, dt}_{\text{интеграл Юнга } \exists}$$

$$\int_0^1 Y_t \, dB_t^{Ito} \overset{п.н.}{=} \int_0^1 Y_t \, dW_t$$

$\Rightarrow$ Осталось док-ть, что $\int_0^1 Y'_t \, dt \overset{п.н.}{=} [Y, B]_1$.

$$[Y,B]_1 = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} Y_{uv} B_{uv} = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \left((Y'_u B_{uv}) B_{uv} + R_{uv} B_{uv} \right) =$$

$$= \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \left(Y'_u (B_{uv} \otimes B_{uv}) + R_{uv} B_{uv} \right)$$

$R_{uv} B_{uv} = O(|u-v|^{3\alpha})$, $3\alpha > 1 \Rightarrow$ этот член при $\lambda(\pi)\to 0$ сх-ся к 0

$|R_{uv}| \le C|u-v|^{2\alpha}$, $|B_{uv}| \le C|u-v|^{\alpha}$

$$B_{uv} \otimes B_{uv} = 2\,Sym(B^{Strat}_{uv}) = 2\,Sym(B^{Ito}_{uv}) + (v-u)I,$$

т.к. $Sym(B^{Ito}_{uv}) = \frac{1}{2} B_{uv}\otimes B_{uv} - \frac{1}{2}(v-u)I$.

На лекции доказали, что

$$\lim_{\lambda(\pi)\to 0} \sum_{[u,v]} Y'_{uv} B^{Ito}_{uv} = 0 \quad \text{с вер-тью } 1.$$

(мартингальность, ортогональность, оценки)

По таким же аргументам для $Sym(B^{Ito}_{uv}) =$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_u^v W^i_s\,dW^j_s - W^i_u(W^j_v - W^j_u) + \int_u^v W^j_s\,dW^i_s - W^j_u(W^i_v - W^i_u)\Big)$$

верно $\lim_{\lambda(\pi)\to 0} 2\sum_{[u,v]} Y'_{uv}\, Sym(B^{Ito}_{uv}) = 0$ с вер-тью 1.

$\Rightarrow$ Остаётся только

$$\lim_{\lambda(\pi)\to 0} \sum_{[u,v]} Y'_{uv}(v-u) = \int_0^1 Y'_t\,dt \to \text{соотв. инт. Юнга.}$$

N 75:

Решить грубое ДУ:

$$dY = YZ\,dX, \text{ где}$$

$(X, \mathbb{X})$ — грубая траектория, (Z, Z') — контролируемая отн. X траектория.

$$dY_t = Y_t Z_t\, dX_t$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Y_s Z_s\, d\mathbf{X}_s \overset{\text{по } N70}{=} Y_0 + \int_0^t Y_s\, d\mathcal{U}_s, \quad \mathcal{U}_t = \int_0^t Z_s\, d\mathbf{X}_s$$

по N 71 грубый интеграл по $\mathcal{U}$ совп. с интегралом из N 69, для кот. сделали N 70.

$$\Leftrightarrow dY_t = Y_t\, d\mathcal{U}_t$$

Решение этого грубого Д.У. (из лекций):

$$Y_t = \exp\left(\mathcal{U}_t - \tfrac{1}{2}[\mathcal{U}]_t\right).$$

Из N 73, т.к. $\mathcal{U}_t = \int_0^t Z_s\, d\mathbf{X}_s$, то $[\mathcal{U}]_t = \int_0^t Z_s\otimes Z_s\, d[\mathbf{X}]_s$

$$\Rightarrow Y_t = \exp\left(\int_0^t Z_s\, d\mathbf{X}_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t Z_s\otimes Z_s\, d[\mathbf{X}]_s\right).$$

2

N 70:

Пусть $(Y, Y'), (Z, Z')$ - контролируемые отн. X.

Проверим равенство:

$$\int_0^T Y_t \, dU_t = \int_0^T Y_t Z_t \, dX_t, \quad U_t = \int_0^t Z_s \, dX_s.$$

↓ грубый интеграл ↑ грубый интеграл

$(YZ, \underbrace{Y'Z + YZ'}_{\text{контроль для его опр.}})$.

Из N 69:

$$(*) \quad \Big| \int_s^t Y \, dU - Y_s U_{st} - Y'_s \underset{\substack{\| \\ Z_s}}{U'_s} \mathbb{X}_{st} \Big| \le C|t-s|^{3\alpha}$$

Из опр. грубого интеграла:

$$|U_{st} - Z_s X_{st} - Z'_s \mathbb{X}_{st}| \le C|t-s|^{3\alpha}$$

$$\Big| \int_s^t YZ \, dX - \underline{Y_s Z_s X_{st}} - \underbrace{(Y'_s Z_s + Y_s Z'_s) \mathbb{X}_{st} \Big|}_{\le C|t-s|^{3\alpha}}$$

Но заменив в (*) U_{st} экв. ей именами, получим:

$$\Big| \int_s^t Y \, dU - \underline{Y_s Z_s X_{st}} - \underbrace{Y_s Z'_s \mathbb{X}_{st} - Y'_s Z_s \mathbb{X}_{st} \Big|}_{\le C|t-s|^{3\alpha}}$$

$$\Rightarrow \Big| \int_s^t Y \, dU - \int_s^t YZ \, dX \Big| \le C|t-s|^{3\alpha},$$

что и требовалось при $s = 0$, $t = T$, т.к. $3\alpha > 1$, а, значит

$$\int_0^T Y_t \, dU_t = \int_0^T Y_t Z_t \, dX_t \text{ при } U_t = \int_0^t Z_s \, dX_s.$$

№62: Верно ли, что производная Губинелли определена единственным образом?

Доказать, что если для всякого ненулевого вектора v выполнено

$$\overline{\lim_{t\to s^+}} \frac{|\langle X_{st}, v\rangle|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty,$$

то производная Губинелли опр. однозначно.

Убедиться, что производная Губинелли отн. винеровского процесса опр. однозначно.

Неединственность (пример с семинара):

$X_t = t^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $t\in[0,1]$

$Y_t = t$.

Пусть $\alpha = 1/2$, тогда под $|R_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha}$

$Y_{st} = Y_s' X_{st} + R_{st}$,

$Y_t - Y_s$

для этих ф-ций подходит:

1) $t-s = 0\cdot(t^{\alpha}-s^{\alpha}) + \underset{R_{st}}{t-s}$, $|R_{st}| \le C|t-s|$,

т.е. $Y_s' \equiv 0$

2) в $|t-s - Y_s'(t^{\alpha}-s^{\alpha})| \le C|t-s|^{2\alpha}$, при $t\ne s$, $0\le s< t\le T$, $2\alpha = 1$.

$$\left|1 - Y_s' \frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{t-s}\right| \le C$$

подходит $Y_s' = \sqrt{s}$, т.к.

$$\sqrt{s}\,\frac{\sqrt{t}-\sqrt{s}}{t-s} = \sqrt{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{s}} < 1$$

$$\Rightarrow \left|1-\sqrt{s}\cdot\frac{\sqrt{t}-\sqrt{s}}{t-s}\right| \le C.$$

3) ... и все Y_s', т.ч. $\sup\left|\frac{Y_s'}{\sqrt{s}}\right| < \infty$

Пусть для всякого ненулевого вектора v выполнено:

$$\circledast \quad \overline{\lim_{t\to s^+}} \frac{|\langle X_{st}, v\rangle|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty ,$$

но $Y_{st} = Y_s' \cdot X_{st} + R_{st}$

$$Y_{st} = \tilde{Y}_s' X_{st} + \tilde{R}_{st}, \quad Y_s' \neq \tilde{Y}_s'.$$

Тогда $(Y_s' - \tilde{Y}_s') X_{st} = \tilde{R}_{st} - R_{st}$.

$$|\tilde{R}_{st} - R_{st}| \leq C|t-s|^{2\alpha},$$

$$\underbrace{\frac{|(Y_s' - \tilde{Y}_s') \cdot X_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}}}_{\downarrow \infty} = \underbrace{\frac{|\tilde{R}_{st} - R_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}}}_{\leq C}$$

$\downarrow \infty$ при $t \to s^+$,

если $Y_s' - \tilde{Y}_s'$ – ненулевой вектор.

Противоречие $\Rightarrow Y_s' = \tilde{Y}_s'$.

Для винеровского процесса:

по закону повторного логарифма

$$\forall t \geq 0: \quad P\Big(\underbrace{\overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{|W_{t,t+h}|}{h^{1/2}(\ln\ln 1/h)^{1/2}} = \sqrt{2}}\Big) = 1.$$

Рассм. траекторию W_s, что $\uparrow$ вып. $\forall t \geq 0$.

Тогда проверим $\circledast$ в одномерном случае: (или в частном случае для $v = (1, 0, \ldots 0)$).

$$\frac{|W_{t,t+h}|}{h^{2\alpha}} = \underbrace{\frac{W_{t,t+h}}{h^{1/2}(\ln\ln 1/h)^{1/2}}}_{\sqrt{2}} \frac{h^{1/2}(\ln\ln 1/h)^{1/2}}{h^{2\alpha}} \xrightarrow[h\downarrow 0]{} \infty$$

при $2\alpha > 1/2 \to \alpha > 1/4$, что выполнено в усл. $\alpha > 1/3$.