06.09.20 Дискр. матем. д/з от семинара 1. Токаева Александра 409

① Док-ть: $\sum_{k=0}^{\infty} C_n^{r+km} = \frac{2^n}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n \cos\left(\frac{(n-2r)\pi k}{m}\right)$

Решение: Мы хотим найти сумму $C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \dots$

Вспомним, что для подсчёта суммы $C_n^0 + C_n^m + C_n^{2m} + C_n^{3m} + \dots$ мы взяли корни m-й степени из 1: $\varepsilon_k := \varepsilon^k = e^{k\cdot\frac{2\pi i}{m}}$, где $\varepsilon = \frac{2\pi i}{m}$

и записали:
$$\sum_{k=1}^{m}(1+\varepsilon_k)^n = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{n} C_n^s\cdot\varepsilon_k^s = \sum_{s=0}^{n} C_n^s \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^s}_{=\left[\begin{array}{l} m,\ \text{если } s \vdots m \\ 0,\ \text{если } s \not\vdots m\end{array}\right.} = m\cdot\sum_{\substack{s \vdots m \\ 0\le s\le n}} C_n^s = m\cdot(C_n^0 + C_n^m + C_n^{2m} + \dots)$$

$$\Rightarrow C_n^0 + C_n^m + C_n^{2m} + \dots = \frac{\sum_{k=1}^{m}(1+\varepsilon_k)^n}{m}$$

В нашей задаче рассмотрим похожую сумму:
$$\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}\cdot(1+\varepsilon_k)^n = \sum_{k=1}^{m}\left\{\varepsilon_k^{-r}\sum_{s=0}^{n} C_n^s\cdot\varepsilon_k^s\right\} = \sum_{s=0}^{n} C_n^s \underbrace{\left\{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{s-r}\right\}}_{=\left[\begin{array}{l} m,\ \text{если } s-r \vdots m \\ 0,\ \text{иначе}\end{array}\right.} = \sum_{\substack{s:\{s-r \vdots m \\ 0\le s\le n}} m C_n^s = m(C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \dots)$$

$$\Rightarrow C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \dots = \frac{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}\cdot(1+\varepsilon_k)^n}{m}$$

сгруппируем в этой сумме члены с номерами k и $m-k$ (они компл. сопр, поэтому в сумме дадут веществ. число, равное удвоенной вещ. части)

$$\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n + \varepsilon_{m-k}^{-r}(1+\varepsilon_{m-k})^n = 2\,\mathrm{Re}\left(\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n\right)$$

Найдем эту вещ. часть:
$$\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n = e^{-r\cdot\frac{2\pi i}{m}\cdot k}\cdot\left(1+e^{k\cdot\frac{2\pi i}{m}}\right)^n = e^{-rk\cdot\frac{2\pi i}{m}}\left(1+\cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m}\right)^n =$$
$$= e^{-rk\cdot\frac{2\pi i}{m}}\left(2\cos^2\frac{\pi k}{m} + 2i\sin\frac{\pi k}{m}\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n = e^{-rk\cdot\frac{2\pi i}{m}}\cdot\left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\left(\cos\frac{\pi k}{m} + i\sin\frac{\pi k}{m}\right)^n =$$
$$= e^{-rk\cdot\frac{2\pi i}{m}}\cdot\left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\cdot e^{\frac{i\pi k}{m}\cdot n} = \left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\cdot e^{\frac{i\pi k}{m}(n-2r)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n e^{i\frac{\pi k}{m}(n-2r)}\right) = \left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\cos\frac{\pi k}{m}(n-2r)$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n = \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n + \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n \underset{\text{сгруппируем}}{=} \sum_{k=1}^{m}2\,\mathrm{Re}\left(\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n = \sum_{k=1}^{m}\cancel{2}\,\mathrm{Re}\left(\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n\right) = \sum_{k=1}^{m}\cancel{2}\cdot\left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\cos\frac{\pi k}{m}(n-2r)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n = \sum_{k=1}^{m}\left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\cos\frac{\pi k}{m}(n-2r)$$

$$\Rightarrow C_n^r + C_n^{r+m} + C_n^{r+2m} + \dots = \frac{\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k^{-r}(1+\varepsilon_k)^n}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left(2\cos\frac{\pi k}{m}\right)^n\cos\frac{\pi k}{m}(n-2r)}{m}$$ чтд.

② $\boxed{\text{Док-ть: } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

Решение: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{k+1} x^{k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot (1+x)^{n+1}\Big|_0^1$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{n+1} (2^{n+1}-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1). \text{ чтд.}$$

③ $\boxed{\text{Док-ть: } C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (n-k+1)C_{k-2}^{k-2} = C_n^k}$

Решение: индукция по n.

База: $n=k \Rightarrow C_{k-2}^{k-2} \overset{?}{=} C_n^k$ – верно.

Шаг: пусть верно для n: $C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (n-k+1)C_{k-2}^{k-2} = C_n^k$

Хотим для $n+1$: $C_{n-1}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-2} + \ldots + (n-k+2)C_{k-2}^{k-2} \overset{?}{=} C_{n+1}^k$.

Вычтем из второго первое, получим:

$$C_{n-1}^{k-2} + C_{n-2}^{k-2} + C_{n-3}^{k-2} + \ldots + C_{k-2}^{k-2} = ?$$

Но мы уже доказывали (см. сем. 1, №8), что

$$C_a^a + C_{a+1}^a + C_{a+2}^a + \ldots + C_{a+m}^a = C_{a+m+1}^{a+1}$$ – в нашем случае $a=k-2$; $m=(n-1)-(k-2)=n-k+1$.

$$\Rightarrow C_{n-1}^{k-2} + C_{n-2}^{k-2} + \ldots + C_{k-2}^{k-2} = C_{(k-2)+(n-k+1)+1}^{k-1} = C_n^{k-1}$$

$\Rightarrow$ искомая сумма $- C_n^k = C_n^{k-1}$.

Но (см. сем 1, №2): $C_{b-1}^a + C_{b-1}^{a-1} = C_b^a$.

$\Rightarrow$ искомая сумма $= C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. чтд.

④ $\boxed{\text{Найти } \max\limits_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}}$ Ответ: $\frac{n!}{([\frac{n}{k}]+1)^p \cdot ([\frac{n}{k}])^{k-p}}$, где $p = n\%k$.

Решение: Рассм. наборы $(n_1; n_2 \ldots n_k)$ с усл. $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ как точки в k-мерном пр-ве. И точки соединены ребром, если они имеют вид $(\ldots a, b \ldots)$ и $(\ldots a+1, b-1 \ldots)$. В поиске точки, в которой достигается max, начнём движение из какой-то точки и будем переходить по ребру, если переход увеличивает значение максимизируемой функции. Заметим, что при переходе по ребру все компоненты, кроме двух – постоянны. Т.е происходит так: $\frac{n!}{a!\,b!\,(\ldots)} \rightsquigarrow \frac{n!}{(a+1)!\,(b-1)!\,(\ldots)}$, где $(\ldots)$ – одинаковое (и равно $c=n-a-b$).

Есть смысл переходить по ребру, если $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, т.е $a<b=n-a-c$, т.е $2a<n-c$, т.е $a<\frac{n-c}{2}$.

То есть пока 2 коорд. не сравняются (или не будут отличаться на 1), стоит переходить по ребру, продолжая уравновешивать отличающиеся больше, чем на 1, компоненты, придём к набору: $n_1 \ldots n_p = [\frac{n}{k}]+1$, $n_{p+1} \ldots n_k = [\frac{n}{k}]$, где $p = n\%k$ $\Rightarrow \max\limits_{n_1+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} = \frac{n!}{([\frac{n}{k}]+1)^p \cdot ([\frac{n}{k}])^{k-p}}$ чтд.