Решение 9 задачи. Пусть в игре 6 игроков, x_1 из них выбрало путь BCE, x_2 – BDE, x_3 – $BCDE$. Тогда время, потраченное в дороге людьми, которые выбрали путь BCE, равно $10(x_1 + x_3) + 50 + x_1$, BDE – $50 + x_2 + 10(x_2 + x_3)$, $BCDE$ – $10(x_1 + x_3) + 10 + x_3 + 10(x_2 + x_3)$. Для того, чтобы профиль стратегий являлся равновесием Нэша, необходимо и достаточно, чтобы эти три числа были равными. Решая систему уравнений, получаем $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. При этом, затраченное на дорогу каждой машиной время – 92.

Если убрать дорогу CD, то получится следующая система:

$$10x_1 + 50 + x_1 = 50 + x_2 + 10x_2, \;\; x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3.$$

Затраченное при этом время – 83. □

Решение 10 задачи. Воспользуемся Backward Induction. Из условия задачи следует, что второй женщине следует сказать «да», ведь $V_t - P > 0$. Первой женщине «остаётся» (предполагая, что вторая рациональна) выбирать между 0 (ответ «нет») и $-p$ (ответ «да»), и для неё оптимальным будет ответ «нет», что и требовалось. □

Решение 11 задачи. Спустя каждые два шага Backward Induction редуцированная игра на последних двух вершинах будет иметь следующий вид (для некоторых k, s): C ходит вторым и выбирает между $(k-1, s+3)$ и $(k+2, s+2)$, R ходит первым и выбирает между (k, s) и выбором C, то есть, $(k-1, s+3)$. Соответственно, оптимальное действие первого в начале игры – выбрать $(0, -3)$, что и требовалось. □

Решение 12 задачи. Если муж выберет футбол, то жена выберет тоже футбол, а если муж выберет балет, то жена тоже выберет балет. В данной модели финальный выбор за мужем, который выберет футбол. Таким образом, Backward Induction даёт решение $(3, 2)$, то есть, муж с женой вместе идут на футбол. □

Решение 13 задачи. Возьмём следующую стратегию полицейского: если гангстер идёт по часовой стрелке, то полицейский идёт вверх, а если против часовой – влево. Покажем, что полицейский окажется на одной стороне квадрата с гангстером за нужное время. Пусть полицейский дошёл до стены (без ограничения общности, до верхней), пройдя расстояние 0.5 вверх и $x < 0.5$ влево (длина стороны квадрата – 1). Тогда гангстер прошёл $1 \geq 2 - x > 0$ по часовой стрелке. Получается, что гангстер и полицейский оказались на одной стороне квадрата за требуемое время. Ясно, что максимум времени достигается, когда полицейский просто ловит гангстера в углу. □

Решение 14 задачи. Очевидно, что второму игроку выгоднее принять деньги, чем их не принять. Первому, в свою очередь, выгоднее всего предложить 1 доллар (предполагая, что второй принимает все предложения). Такой профиль стратегий будет образовывать SPNE.

Найдём все равновесия Нэша. Пусть первый игрок предлагает $i \in \overline{1,10}$, а второй принимает только предложения $S \subseteq [10]$. Тогда

1. $i \in S$, иначе второму игроку выгодно отклониться.
2. $\max S \leq i$, иначе первому игроку выгодно отклониться.

Ясно, что каждая такая стратегия является равновесием Нэша, и общее их количество – $\sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} = 2^{10} - 1$. □

Решение 15 задачи. Покажем, что (C_T, C_T) – равновесие Нэша. Пусть S – другая стратегия первого игрока, т.ч. в момент t он нарушил кооперацию. Это означает, что во все следующие моменты второй игрок будет сдавать первого. Тогда

$$\Pi_1(S, C_T) \leq \sum_{i=0}^{t-1} \delta^i s + \delta^t q + \sum_{i=t+1}^{\infty} \delta^i p = \frac{s + \delta^t(q - s - \delta(q-p))}{1-\delta} \leq \frac{s}{1-\delta} = \Pi_1(C_T, C_T),$$

что и требовалось. Покажем, что такой профиль образует SPNE.

Очередная subgame может следовать за одним из четырёх исходов: (c,c), (d,d), (c,d), (d,c). Ясно, что в первом случае получаем исходную игру с масштабированными на степень δ платежами и так же устроенными стратегиями (ведь ещё никто никого не сдал). В остальных случаях каждый из игроков будет сдавать друг друга, что тоже является равновесием Нэша. □

Решение 16 задачи. Пусть S – описанная в условии стратегия. Постоянную d-стратегию обозначим C_d.

Наблюдение: любое поддерево игры, на пути к которому есть исход (c,d) или (d,c), является прототипом исходной игры с профилем стратегий (C_d, C_d), который, очевидно, является SPNE.

В свою очередь, оставшиеся поддеревья – прототипы исходной игры с профилем стратегий (S,S) (возможно, с первым действием d вместо c). Проверим, что такой профиль являются равновесием Нэша при δ, достаточно близком к 1. Для этого возьмём произвольную стратегию $\widehat{S}$ и рассмотрим два случая первого отклонения от исходной стратегии:

1. Первый игрок отклонился, сдав второго, в некоторый момент t. Пусть $\widehat{\Pi}_1(S)$ – платёж, который игрок 1 получит с момента времени t, используя стратегию S. Тогда

$$\widehat{\Pi}_1(\widehat{S}) \le \delta^t q + \delta^{t+1}\frac{p}{1-\delta} \le \delta^t \frac{s}{1-\delta^2} + \delta^{t+1}\frac{p}{1-\delta^2} = \widehat{\Pi}_1(S)$$

   при $\delta^2 \ge \frac{q-s}{q-p}$.

2. Первый игрок отклонился, скооперировавшись. В тех же обозначениях

$$\widehat{\Pi}_1(\widehat{S}) \le \delta^t r + \delta^{t+1}\frac{p}{1-\delta} \le \delta^t \frac{p}{1-\delta^2} + \delta^{t+1}\frac{s}{1-\delta^2} = \widehat{\Pi}_1(S)$$

   при любом δ.

Таким образом, (S, S) – SPNE в исходной игре.

□

Решение 17 задачи. Покажем, что (T, T) не всегда является NE. Пусть первый игрок отклоняется в самом начале, а затем играет d до конца игры. Обозначим такую стратегию S. Тогда

$$\Pi_1(S, T) = q + \frac{\delta p}{1-\delta} > \frac{s}{1-\delta} = \Pi_1(T, T)$$

при δ, достаточно близком к нулю. □

Решение 18 задачи. Фактически, между каждым раундом ходит «природа», заканчивая игру с вероятностью $p = 1 - \delta$. Отсюда вероятность, что игра продлится хотя бы k итераций, равна δ^k, откуда и следует равенство платежей. □

Аукцион третьей цены. Пусть в случае ничьей товар достаётся тому, кто его больше всего ценит, а ценность товара для него обозначим $v_{\max}$. Докажем, что $(v_{\max}, \dots, v_{\max})$ – равновесие Нэша. В такой ситуации каждый игрок получает платёж, равный нулю. Если победитель повысит ставку, то его платёж не изменится (всё равно заплатит $v_{\max}$), если понизит – тоже не изменится (он проиграет аукцион). Если кто-то другой повысит ставку, то его платёж не увеличится (потому что он ценит товар не выше, чем $v_{\max}$, а заплатит именно столько), если понизит – останется с 0.

Если от изначального предположения отказаться, то такая стратегия, конечно, в общем случае NE являться не будет – если победитель ценит товар меньше, то ему выгоднее такой аукцион проиграть.

Если отказаться от предположения, то, по крайней мере, можно сказать, что truth-telling не является NE. Дело в том, что игроку, ценность товара для которого – «второй максимум», выгодно свою стратегию изменить и выиграть такой аукцион (допустим, что третий максимум отличается от второго). Тогда он заплатит третью ценность и получит положительный платёж. $\square$