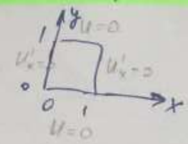
20.05.21. ЧМ. Кр3. Гонаева Александра 409

① $\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = f(x,y) \\ u_x\big|_{x=0} = 0 \\ u_x\big|_{x=1} = 0 \\ u\big|_{y=0} = 0 \\ u\big|_{y=1} = 0 \end{cases}$



$x: 0 \dots M$
$y: 0 \dots N$.

Хотим: $O(hx^2 + hy^2)$ – 2 порядка сход.

Решение: Для внутр. узлов:

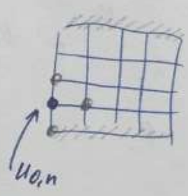
$$\boxed{-\frac{u_{m+1,n} - 2u_{mn} + u_{m-1,n}}{hx^2} - \frac{u_{m;n+1} - 2u_{mn} + u_{m;n-1}}{hy^2} = f_{mn} \quad ; m=1\dots N-1,\ n=1\dots N-1.}$$

что делать с $u'_x\big|_{x=0} = 0$?

$\frac{u_{1,n} - u_{0,n}}{hx} = 0$ – не подх, т.к $O(hx)$, а надо $O(hx^2)$.

$u(hx; n\cdot hy) = u(0; n\cdot hy) + hx \cdot u'_x(0; n\cdot hy) + \frac{hx^2}{2} \cdot u''_{xx}(0; n\cdot hy) + O(hx^3)$

$\Rightarrow u'_x\big|_{0,n} = \frac{u_{1,n} - u_{0,n}}{hx} - \frac{hx}{2} \cdot \underbrace{u_{xx}\big|_{0,n}}_{\substack{\| \\ -u_{yy}|_{0,n} - f|_{0,n} \\ \text{по 3 точкам с } O(hy^2)}} + O(hx^2)$



$$\Rightarrow \boxed{u'_x\big|_{0,n} = \frac{u_{1,n} - u_{0,n}}{hx} + \frac{hx}{2} \cdot \left(\frac{u_{0,n+1} - 2u_{0,n} + u_{0,n-1}}{hy^2} + f_{0,n} \right) = 0.} \Leftrightarrow -\frac{2}{hx^2}(u_{1,n} - u_{0,n}) + \left(\frac{u_{0,n+1} - 2u_{0,n} + u_{0,n-1}}{hy^2} + f_{0,n} \right) = 0$$

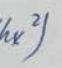
Хорошо вписывается в матрицу!

Для $u'_x\big|_{x=1}$ имеем:

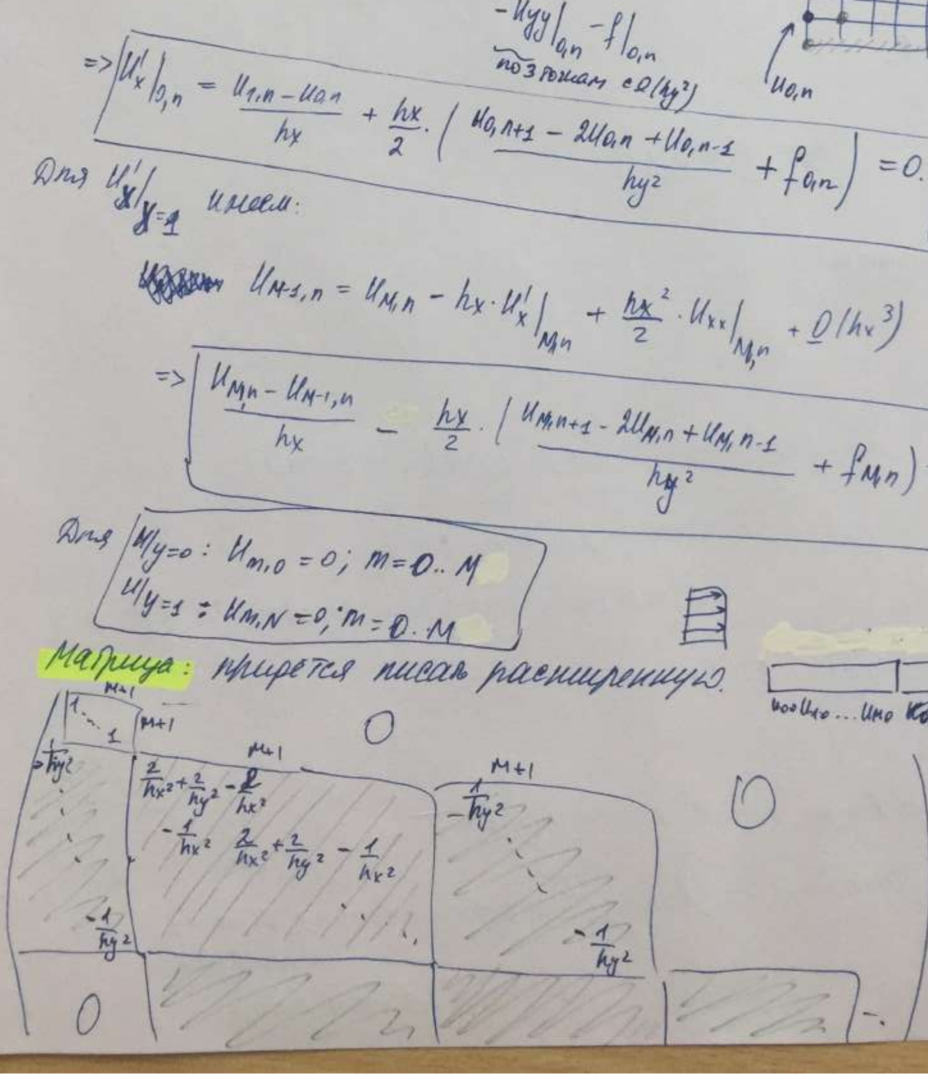
$u_{M-1,n} = u_{M,n} - hx \cdot u'_x\big|_{M,n} + \frac{hx^2}{2} \cdot u_{xx}\big|_{M,n} + O(hx^3)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_{M,n} - u_{M-1,n}}{hx} - \frac{hx}{2} \cdot \left(\frac{u_{M,n+1} - 2u_{M,n} + u_{M,n-1}}{hy^2} + f_{M,n} \right) = 0.}$$

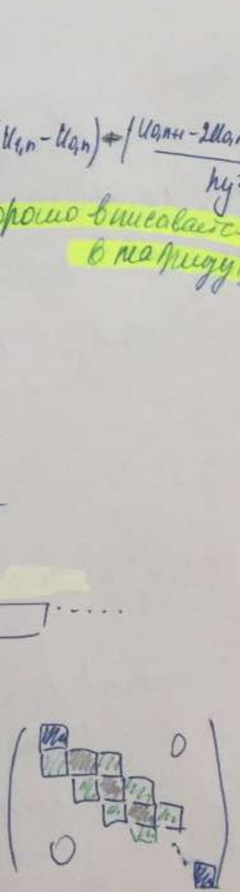
Для $\boxed{\begin{aligned} &u\big|_{y=0}: u_{m,0} = 0;\ m = 0 \dots M \\ &u\big|_{y=1}: u_{m,N} = 0;\ m = 0 \dots M \end{aligned}}$



Матрица: придется писать расширенную.



=



Устойчивость: $\varphi^{ij} = \cos\pi i x$; – по x $\quad \lambda_i = \frac{4}{h_x^2}\cdot\sin^2\frac{\pi i h_x}{2}$
$\varphi^{ij} = \sin\pi j y$ – по y $\quad \lambda_j = \frac{4}{h_y^2}\cdot\sin^2\frac{\pi j h_y}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi^{ij}_{mn} = \cos\pi i x\cdot\sin\pi j y\Big|_{mn} \\ \lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j \end{cases}$$

Хотим: $A\tilde{u} = \tilde{b} \overset{?}{\Rightarrow} \|\tilde{u}\|_{L_{2h}} \overset{?}{\le} C\|\tilde{b}\|_{L_{2h}}$.

Имеем: $\tilde{u}_{mn} = \sum c_{ij}\cdot\varphi^{ij}_{mn}$

$\tilde{b}_{mn} = \sum d_{ij}\cdot\varphi^{ij}_{mn}$

$\Rightarrow A\tilde{u} = \sum \lambda_{ij} c_{ij}\varphi^{ij}_{mn}$

Имеем: $(A\tilde{u}, \tilde{u}) = \sum \lambda_{ij}\cdot\lambda_{i'j'}\cdot c_{ij}\cdot c_{i'j'}\cdot(\varphi^{ij}_{mn}, \varphi^{i'j'}_{mn}) = \sum \lambda_{ij}^2\cdot c_{ij}^2\cdot \underline{\langle\varphi^{ij},\varphi^{ij}\rangle}$

$(\tilde{b},\tilde{b})$
$\parallel$
$\sum d_{ij}^2 \cdot \underline{\langle\varphi^{ij},\varphi^{ij}\rangle}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum c_{ij}^2}_{\|\tilde{u}\|^2} \le \frac{1}{(\lambda_{min})^2}\cdot\underbrace{\sum d_{ij}^2}_{\|\tilde{b}\|^2} \quad \Rightarrow \boxed{\|\tilde{u}\|_{L_{2h}} \le \frac{1}{\lambda_{min}}\cdot\|\tilde{b}\|_{L_{2h}}}$$

$\frac{1}{\lambda_{min}}$ = конст-ну $\frac{1}{\frac{4}{h_x^2}+\frac{4}{h_y^2}}$ – число, отделено от нуля.

② $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = 0. \end{cases}$

$= u_m^n + h\cdot u' + \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''$
$= u_m^n - h\cdot u' + \frac{h^2}{2}u'' - \frac{h^3}{6}u'''$

Схема: $\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} = \dfrac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}; \; m = 1\ldots M-1 \\ u_0^n = 0 \\ u_M^n = 0. \end{cases}$

Указать порядок аппрокс. – будет $\underline{O}(\tau^2 + h^2)$
исслед. устойчивость.

Методом разделения переменных.

$u_m^n = \mu^n(k)\cdot\sin(\pi k m h)$

$$\Rightarrow \sin\pi k m h\cdot\mu^{n-1}\frac{(\mu^2-1)}{2\tau} = \frac{\mu^n}{h^2}\Big(\underbrace{\sin(\pi k(m-1)h) - 2\sin(\pi k m h)) + \sin\pi k(m+1)h}_{}\Big)$$

$\parallel$
$-2\sin\pi k m h + 2\sin\pi k m h\cdot\cos\pi k h$
$\parallel$
$-2\sin\pi k m h(1-\cos\pi k h) = -4\cdot\sin\pi k m h\cdot\sin^2\frac{\pi k h}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\mu^2-1}{2\tau} = \frac{\mu}{h^2}\cdot\left(-4\sin^2\frac{\pi k h}{2}\right) = -\mu\cdot\lambda_k.$$

$\Rightarrow \mu^2 + 2\mu\tau\lambda_k - 1 = 0.$

$D = 4\tau^2\lambda_k^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ всегда действ. корни есть.

но по т. Виета: $\mu_1\cdot\mu_2 = -1 \Rightarrow \mu_2 = -\frac{1}{\mu_1} \Rightarrow$ один из них >1, другой <1 по модулю.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{схема неустойчива.}}$

(3.) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - p(x)\cdot u \quad ; p(x)>0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=1} = 0 \\ u^0(x) - \text{дано} \end{cases}$ — схему $O(\tau^2+h^2)$ порядка сход.

Берём схему Кранка - Николсон:

$$\boxed{\underbrace{\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}}_{= u_t(t_n+\frac{\tau}{2};x_m)+O(\tau^2)} = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\Lambda_{xx}u_m^{n+1}+\Lambda_{xx}u_m^n\right]}_{= u_{xx}(t_n+\frac{\tau}{2};x_m)+O(h^2)} - p(x_m)\underbrace{\left(\frac{u_m^n+u_m^{n+1}}{2}\right)}_{= u(t_n+\frac{\tau}{2};x_m)+O(\tau^2)}}$$

=> эта схема порядка аппрокс: $O(\tau^2+h^2)$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}\right] - p(x_m)\left(\frac{u_m^n+u_m^{n+1}}{2}\right)$$

$$u_m^{n+1}-u_m^n = \frac{1}{2}\frac{\tau}{h^2}\left[u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}+u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n\right] - \tau\cdot p(x_m)\left(\frac{u_m^n+u_m^{n+1}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_m^{n+1}\left(1+\frac{\tau}{h^2}+\frac{\tau}{2}\cdot p(x_m)\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{h^2}\left[u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}\right]}_{\geq \|u_m^{n+1}\|\left(1+\frac{\tau}{2}\min p\right)} = \underbrace{u_m^n\left(1-\frac{\tau}{h^2}-\frac{\tau}{2}\cdot p(x_m)\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{h^2}\left[u_{m-1}^n+u_{m+1}^n\right]}_{\leq \|u_m^n\|\left(1-\frac{\tau}{2}\max p\right)}$$

$$\Rightarrow \|u_m^{n+1}\| \leq \|u_m^n\|\cdot\left(\frac{1-\frac{\tau}{2}\max p}{1+\frac{\tau}{2}\min p}\right) \leq \ldots \leq \left(\frac{1-\frac{\tau}{2}p_{max}}{1+\frac{\tau}{2}p_{min}}\right)^{n+1}\cdot\|u_0\| \leq \left(\frac{1-\frac{\tau}{2}p_{max}}{1+\frac{\tau}{2}p_{min}}\right)^{N^{\frac{1}{\tau}}}\cdot\|u_0\| =$$

$$= \left(\frac{1-\frac{\tau}{2}p_{min}}{1+\frac{\tau}{2}p_{min}}\right)^{\frac{1}{\tau}}\|u_0\| \leq \underbrace{(1+eps)}_{= const}\cdot\|u_0\| \quad \text{чтд.}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^x = 1.$$

(4.) Для $u_t + a u_x = 0$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + \theta a\cdot\frac{u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{h} + (1-\theta)a\cdot\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h} = 0.$$

При каком соотн. $\theta\in[0,1]$ и a — схема устойчива?

проверим спч: $u_m^n = \lambda^n\cdot e^{im\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^n(\lambda-1)\cdot e^{im\varphi}}{\tau} + \theta a\cdot\frac{\lambda^{n+1}\left(e^{im\varphi}-e^{i(m-1)\varphi}\right)}{h} + (1-\theta)\lambda^n\cdot\left(\frac{e^{im\varphi}-e^{i(m-1)\varphi}}{h}\right) = 0.$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau}+\frac{\theta a}{h}\lambda(1-e^{-i\varphi})+\frac{(1-\theta)}{h}\cdot(1-e^{-i\varphi})=0.$$

~~Итого~~

$$\lambda-1+\frac{\tau}{h}\theta a\lambda(1-e^{-i\varphi})+a\frac{\tau(1-\theta)}{h}(1-e^{-i\varphi})=0.$$

$$\lambda\left(1+\frac{\theta\tau a}{h}(1-e^{-i\varphi})\right)=1-\frac{a\tau(1-\theta)}{h}(1-e^{-i\varphi})$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{1-\frac{a\tau(1-\theta)}{h}(1-e^{-i\varphi})}{1+\frac{\theta\tau a}{h}(1-e^{-i\varphi})}\overset{?}{\in}[-1;1]$$

1) если $a>0$:

$$\begin{cases}\dfrac{1-\frac{a\tau(1-\theta)}{h}(1-e^{-i\varphi})}{1+\frac{\theta\tau a}{h}(1-e^{-i\varphi})}\leq 1 - \text{т.к. } \dfrac{a\tau(1-\theta)}{h}(1-e^{-i\varphi})>0. \\ \dfrac{1-\frac{a\tau}{h}(1-\theta)(1-e^{-i\varphi})}{1+\frac{\theta\tau a}{h}(1-e^{-i\varphi})}\geqslant -1.\end{cases}$$

$$1-\frac{a\tau}{h}(1-e^{-i\varphi})+\frac{a\tau}{h}\theta(1-e^{-i\varphi})\geqslant -1-\frac{a\tau\theta}{h}(1-e^{-i\varphi})$$

$$\frac{2a\tau}{h}\theta(1-e^{-i\varphi})\overset{?}{\geqslant}2+\frac{a\tau}{h}(1-e^{-i\varphi})$$

значит $\forall\tau,h$: $\theta\in[\frac{1}{2};1]$

2) если $a<0$: Вообще у нас разност. назад, но она ~~...~~ устойчива только против потока, т.е когда $a>0$ => не будет работать.

но это и так верно: $$-1\overset{?}{\leq}\frac{h-a\tau(1-e^{-i\varphi})}{h+\theta a\tau(1-e^{-i\varphi})}\overset{?}{\leq}1$$

1) $$\frac{\overset{<0}{a}\tau\underset{>0}{(1-e^{-i\varphi})}}{h+\theta a\tau(1-e^{-i\varphi})}\overset{?}{>}0.$$

$\Rightarrow h+\theta a\tau(1-e^{-i\varphi})\overset{?}{<}0.$ => безусл. уст. – нет.

$$\boxed{\text{ответ: безусл. уст. при } a>0 \text{ и } \theta\in[\tfrac{1}{2};1]}$$

5. $u_t + a u_x = 0.$ $\qquad u_t = -a u_x \Rightarrow u_{tt} = a^2 u_{xx}$ (стр3)

схема: $\begin{cases} \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \cdot \dfrac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \dfrac{a^2\tau}{2} \cdot \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0. \\ u_m^0 = u(0, x_m). \end{cases}$

Сходимость = ?

Аппрокс: $u_t'(m,n) + u_{tt}''(m,n) \cdot \frac{\tau}{2} + u_{ttt}'''(m,n) \cdot \frac{\tau^2}{6} + \ldots$

$+ a\left(u_x'(m,n) + \frac{h^2}{6} \cdot u_{xxx}'''(m,n) + \frac{h^4}{120} \cdot u_{xxxxx}^{(5)}(m,n) + \ldots\right.$

$- \frac{a^2\tau}{2}\left(u_{xx}''(m,n) + \frac{h^2}{12} \cdot u_{xxxx}^{(4)}(m,n) + \ldots\right.$

$\Rightarrow$ схема аппрокс. порядка $O(\tau^2 + h^2)$.

Устойчивость: спч: $u_m^n = \lambda^n \cdot e^{im\varphi}$

$\Rightarrow \dfrac{\lambda^{n}(\lambda-1) \cdot e^{im\varphi}}{\tau} + a \cdot \lambda^n \cdot \dfrac{(e^{i(m+1)\varphi} - e^{i(m-1)\varphi})}{2h} - \dfrac{a^2\tau}{2} \cdot \lambda^n \cdot \dfrac{(e^{i(m+1)\varphi} - 2e^{im\varphi} + e^{i(m-1)\varphi})}{h^2} = 0.$

$\dfrac{\lambda - 1}{\tau} + a \cdot \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} - \dfrac{a^2\tau}{2} \cdot \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2}{h^2} = 0.$

$\dfrac{\lambda - 1}{\tau} + \dfrac{a i \sin\varphi}{h} - \dfrac{a^2\tau}{2h^2}(2\cos\varphi - 2) = 0.$

$\dfrac{\lambda - 1}{\tau} + \dfrac{a i \sin\varphi}{h} - \dfrac{a^2\tau}{h^2} \cdot (\cos\varphi - 1) = 0.$

$\Rightarrow \lambda = 1 - \frac{a\tau}{h} \cdot i\sin\varphi + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \cdot (\cos\varphi - 1)$

$|\lambda|^2 = \left(1 + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 (\cos\varphi - 1)\right)^2 + \frac{a^2\tau^2}{h^2} \cdot \sin^2\varphi =$

$= 1 + 2\frac{a^2\tau^2}{h^2}(\cos\varphi - 1) + \frac{a^4\tau^4}{h^4} \cdot (\cos\varphi - 1)^2 + \frac{a^2\tau^2}{h^2} \cdot \sin^2\varphi =$

$= 1 + \underbrace{\frac{2a^2\tau^2}{h^2}(\cos\varphi - 1)}_{} + \frac{a^4\tau^4}{h^4}\cos^2\varphi - \underbrace{2\frac{a^4\tau^4}{h^4} \cdot \cos\varphi}_{} + \underbrace{\frac{a^4\tau^4}{h^4}}_{} + \frac{a^2\tau^2}{h^2} \cdot \sin^2\varphi \le$

$< \frac{a^2\tau^2}{h^2}$ $\qquad < \frac{a^2\tau^2}{h^2}$

$\le 1 + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^4 - \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \overset{?}{\le} 1.$

хотим

$\left(\frac{a\tau}{h}\right)^4 \overset{?}{\le} \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \le 1 \Rightarrow \left|\frac{a\tau}{h}\right| \le 1.$

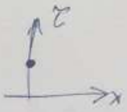
Ответ: сходимость порядка $O(\tau^2 + h^2)$ при $\left|\frac{a\tau}{h}\right| \le 1$.

6. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = v_0(x) \end{cases}$

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}.$$

Хотим: сход. $O(\tau^2+h^2)$.

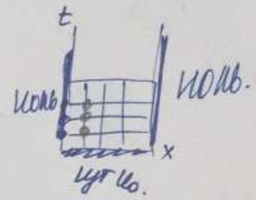
по аппрокс: $O(\tau^2+h^2)$.



Что с нач. усл. на нецелу. сетке:

$u_t|_{t=0} = ?$

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \underset{\substack{\parallel \\ v_0(mh)}}{u_t'(m,0)} + \frac{\tau}{2}\cdot \underset{\substack{\parallel \\ u_{xx}(m,0) \\ \parallel \\ \frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2}}}{u_{tt}''(m,0)} + O(\tau^2)$$



Устойчивость:

$u_m^n = \mu^n \cdot \sin \pi k m h$

$$\Rightarrow \frac{\mu^{n+1}\cdot \sin \pi k m h - 2\mu^n \sin \pi k m h + \mu^{n-1}\cdot \sin \pi k m h}{\tau^2} = \mu^n \frac{(\sin \pi k (m+1) h - 2\sin \pi k m h + \sin \pi k (m-1) h)}{h^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^2 - 2\mu + 1}{\tau^2} = -\lambda_k \cdot \mu.$$

$\mu^2 + (\tau^2\lambda_k - 2)\mu + 1 = 0.$

$D = (\lambda_k\tau^2 - 2)^2 - 4 = \lambda_k^2\tau^4 - 4\lambda_k\tau^2 = \tau^2\lambda_k(\lambda_k\tau^2 - 4)$

Если $D \geq 0$: $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow$ не подх (один из них по модулю >1)

$\Rightarrow$ надо $D<0$: $0 < \lambda_k \cdot \tau^2 - 2 < 2$

$$0 < \underset{\substack{\parallel \\ \frac{4}{h^2}\cdot \sin^2\frac{\pi k h}{2}}}{\lambda_k}\tau^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau^2}{h^2} \leq 1$$

Ответ: сходимость порядка $O(\tau^2+h^2)$ при $\left|\frac{\tau}{h}\right| \leq 1$.

Конц: 15.03.