SER1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$

Правило Лопиталя:

$g'(n) \neq 0$, $g(n) \to 0$, $f(n) \to 0 \Rightarrow \lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{(\sqrt[n]{2}-1)}}{\underset{\to 0}{(1/n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 \cdot e^{\frac{\ln 2}{n}} \cdot -\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln 2 \cdot e^{\frac{\ln 2}{n}} = \ln 2 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

SER2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \frac{e^{(n+\frac{1}{n})\ln n}}{e^{n\ln(n+\frac{1}{n})}} = e^{n\ln n + \frac{\ln n}{n} - n\ln(n+\frac{1}{n})} =$$

$$= e^{\cancel{n\ln n} + \frac{\ln n}{n} - \cancel{n\ln n} - n\ln(1+\frac{1}{n^2})} =$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln n - n(\frac{1}{n^2} + \bar{o}(\frac{1}{n^2}))} = e^{\frac{1}{n}(\ln n - \frac{1}{n} + \bar{o}(\frac{1}{n}))} \to e \neq 0$$

$\Rightarrow$ расходится

SER3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{2}{2n^2+3}\right)^{\left(-\frac{2n^2+3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2n^2}{2n^2+3}\right)} \to e^{-\frac{2n^2}{2n^2+3}} \to e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow$ расходится

SER4 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

SER5 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,(2n+3)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)\,(2n+3)\,(2n+2)}{(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)} \to \frac{4}{9} < 1$$

$\Rightarrow$ по признаку Д'Аламбера сходится

SER6 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,3^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)!\,\cancel{3^n}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{3^n}}{n^n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ по priz. Д'Аламбера сходится

SER7
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(5-(-1)^n\right)^n}{n^2\cdot 4^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(5-(-1)^{2n+1}\right)^{2n+1}}{(2n+1)^2\; 4^{2n+1}} =$$

$$= \sum \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

расходится

$\Rightarrow$ исходный ряд тоже расходится

SER 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim 3 \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = 3e > 1$$

$\Rightarrow$ расходится

SER 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) - e \le e\left(1+\frac{1}{n}\right) - e = \frac{e}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\frac{3}{2}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3/2}}{n^{3/2}} \text{ - сход}$$

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сход. при $p>1$, расход при $p \le 1$

сходится

SER 10

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

Логарифмический признак:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 1 \Rightarrow \Sigma a_n$ сход.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1 \Rightarrow \Sigma a_n$ расход.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim \frac{(\ln \ln n)^2 \to \infty}{\ln n \to \infty} \overset{\uparrow}{=} \lim \frac{2 \ln\ln n \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} =$$

правило Лопиталя

$$= 2 \lim \frac{\ln \ln n \to \infty}{\ln n \to \infty} = 2 \lim \frac{\frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2 \lim \frac{1}{\ln n} =$$

$= 0 < 1 \Rightarrow$ расходится

SER11 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Логарифмич. признак:

$\lim \frac{\ln \frac{1}{\ln n}}{\ln n} = \lim \frac{\ln \ln n \cdot \ln n}{\ln n} = \infty > 1 \Rightarrow$ сход.

SER12 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

Интегральный признак Коши:

Если $\exists \int\limits_1^{+\infty} a_n \, dn$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расх. с интегралом одновременно

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \, dn = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d \ln n}{\ln^2 n} = - \frac{1}{\ln n} \Big|_2^{+\infty} =$

$= -0 + \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow$ сходится

SER13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^{2020} n}{n}$

Признак Лейбница: $\left.\begin{array}{l}\text{члены ряда монотонно убывают} \\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n$ сходится

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^{2020} n}{n} \underset{\text{Лопиталь}}{=} \lim \frac{\ln^{2019} n}{n} = \ldots = \lim \frac{\ln n}{n} =$

$= \lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ сходится

монотонно убыв $\Leftrightarrow y' < 0$

монот. уб при $n > e^{2020}$

SER14 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n}$

Признак Дирихле: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сход, если

1) $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ограничены

2) b_n монотонно $\to 0$ при $n \to \infty$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \ln n} = 0$ монотонно

• $A_n = \sum\limits_{n=4}^{n} \cos 2k = \cos 8 + \cos 10 + \dots + \cos 2n =$

$= \frac{1}{\sin 1}(\sin 1 \cos 8 + \sin 1 \cos 10 + \dots + \sin 1 \cos 2n) =$

$= [\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)] =$

$= \frac{1}{2\sin 1}(-\sin 7 + \cancel{\sin 9} - \cancel{\sin 9} + \cancel{\sin 11} + \dots + \sin(2n+1))$

$= \frac{\sin(2n+1) - \sin 7}{2\sin 1} \leq \frac{2}{2\sin 1} \leq \frac{1}{\sin 1}$

$\Rightarrow$ ряд сходится

$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x \ln^2 x}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln^2 x}{x} - 1\right)$

SER 15 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$

$\exists x_0 : f'(x) < 0$ нач. с $n > [x_0] + 1$

Признак Лейбница: $\left.\begin{array}{l}|a_n| \text{ монотонно уб.} \\ \lim |a_n| = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ сход

$\lim \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \lim \frac{e^{\frac{1}{n}\ln n \to 0}}{\ln n} = 0 \Rightarrow$ сходится

SER 16 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) =$

$= \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) =$

$= \underbrace{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{сход. по Лейбницу}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{расход.}} + \underbrace{\sum \bar{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{сход.}}$

$\lim |a_n| = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow$ расходится

SER17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} =$

$= \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}}_{} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{}$ $\Rightarrow$ расходится

сход. по Лейбницу!

$\lim|a_n| = 0$

расход.

SER18

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}(-1)^{n+1}}{n!}$

Рассм $n_k = 2k$

$\lim\limits_{n_k\to\infty} a_k = \lim\limits_{n_k\to\infty}\frac{2^{n_k^2}}{n_k!} = \lim\frac{(2^{n_k})^{n_k}}{n_k!} = \infty$

$\Rightarrow$ точно расход.

SER19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \cos\frac{\pi}{n}$

$\sum a_n$ сход.

$\sum b_n$ монот. растет и ограничен

$\Rightarrow$ по признаку Абеля сходится

SER20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{x\to 0+}\cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}$ монотонно $\to 0$

$\Rightarrow$ сходится по признаку Лейбница