$$\mu_{t+1}(\omega;A) = \sum_n \frac{\int\limits_A \operatorname{Pr}_n(s)\mu_t(ds)}{\int \operatorname{Pr}_n(s)d\mu_t(ds)} X^n_{t+1}(\omega)$$

Здесь $\operatorname{Pr}_n : S \to \mathbb{R}$ - n-я координата.
Пусть $\varphi(s) = \sum_i \varphi_i I_{A_i}(s)$. Тогда

$$\int \varphi(s)\mu_{t+1}(ds) = \sum_i \varphi_i \mu_{t+1}(A_i) = \sum_i \varphi_i \sum_n \frac{\int\limits_{A_i} \operatorname{Pr}_n(s)\mu_t(ds)}{\int \operatorname{Pr}_n(s)d\mu_t(ds)} X^n_{t+1}(\omega) = \sum_n X^n_{t+1}(\omega) \frac{\int \varphi(s)\operatorname{Pr}_n(s)\mu_t(ds)}{\int \operatorname{Pr}_n(s)d\mu_t(ds)}$$

$$\Big|\int \varphi(s)\mu_{t+1}(ds)\Big| \leq \sum_n X^n_{t+1}(\omega) \frac{\int |\varphi(s)| \operatorname{Pr}_n(s)\mu_t(ds)}{\int \operatorname{Pr}_n(s)d\mu_t(ds)} \leq \sum_n X^n_{t+1}(\omega) \frac{\Big(\int \operatorname{Pr}_n(s)^2 \mu_t(ds)\Big)^{1/2}}{\int \operatorname{Pr}_n(s)d\mu_t(ds)} ||\varphi||_{L_2(\mu_t)}$$

Из теоремы Рисса следует

$$\int \varphi(s)\mu_{t+1}(ds) = \int \varphi(s) b_{t+1}(s)\mu_t(ds)$$

Тогда $\mu_t(ds) = b_t(s)\cdots b_1(s)\mu_0(ds)$. Тем самым доказано следующее утверждение

Предложение 1. *Если $\mu_0(ds) = \rho_0(s)ds$, то $\mu_t(ds) = \rho_t(s)ds$.*

$$W_2^2(\mu,\sigma) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\sigma)} \int |x-y|^2 \pi(dxdy)$$

Теорема 1. *Для любых $\mu_0, \mu_1 \in P_2(\mathbb{R}^d)$ существвует геодезическая постоянной скорости, соединяющаяя их. Более того, если μ_t - геодезическая постоянной скорости, то существует оптимальный план $\pi \in \Pi(\mu_0,\mu_1)$ такой, что $\mu_t = \pi \circ ((1-t)x + y)^{-1}$.*

В качестве примера рассмотрим $\mu_0 = \delta_0, \mu_1 = \lambda_{[-1,1]}$. Тогда $\Pi(\mu_0, \mu_1) = \{\delta_0 \otimes \lambda_{[-1,1]}\}$. Тем самым, геодезическая постоянной скорости имеет вид $\mu_t = \delta_0 \otimes \lambda_{[-1,1]} \circ ((1-t)x + ty)^{-1}$. Тогда

$$\int \varphi(z)\, \delta_0 \otimes \lambda_{[-1,1]} \circ ((1-t)x+ty)^{-1}(dz) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int \varphi((1-t)x+ty)\delta_0(dx)dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(ty)dy$$

То есть

$$\int \varphi\, d\mu_t = \frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\varphi(x)dx$$

Значит, $\mu_t = \lambda_{[-t,t]}$.
Аналогично в случае $\mu_0 = \delta_1, \mu_1 = \lambda_{[-1,1]}$ геодезическая постоянной скорости имеет вид $\mu_t = \lambda_{[1-2t,1]}$.

Вернемся к изначальной задаче. Обозначим $\mu_0(ds) = \rho(s)ds$. Построим оптимальный план $\pi \in \Pi(\lambda_S, \mu_0)$, где λ_S - мера Лебега на симплексе S.

В данном случае в силу теоремы Бренье существует оптимальное отображение $T(u) = \nabla\psi(u)$, то есть $\mu_0 = \lambda \circ T^{-1}$. Тогда

$$\int \varphi(s)\rho(s)ds = \int \varphi\, \lambda \circ T^{-1} = \int \varphi(T(u))du = \int \varphi(s)\frac{du}{ds}ds = \int \varphi(s)\Big(\frac{dT}{du}\Big)^{-1}ds$$

Получаем уравнение типа Монжа-Ампера

$$\rho(\nabla\psi(u))\,\frac{d^2\psi}{du^2} = E$$

В этом случае геодезическая имеет вид

$$\mu_t = \lambda \circ ((1-t)x + t\nabla\psi(x))^{-1}$$

Как найти плотность $\rho_t(s)$?

$$\int \varphi(s)\mu_{t+1}(ds) = \int \varphi(s)b_{t+1}(s)\rho_t ds = \sum_n X^n_{t+1}(\omega)\frac{\int \varphi(s)\,\mathrm{Pr}_n(s)\rho_t(s)ds}{\int \mathrm{Pr}_n(s)\rho_t(s)ds}$$

Тем самым плотность $\rho_{t+1} = b_{t+1}\rho_t$ можно вычислить индуктивно

$$b_{t+1}(s) = \sum_n X^n_{t+1}(\omega)\frac{\mathrm{Pr}_n(s)}{\int \mathrm{Pr}_n(s)\rho_t(s)ds}$$

$$b_1(s) = \sum_n X^n_1(\omega)\frac{\mathrm{Pr}_n(s)}{\int \mathrm{Pr}_n(s)\rho_0(s)ds}$$