

23.09.21. Вспомогат. ДУ от семинара 2.

$T_1, T_2, \dots (0 < T_1 < T_2 < \dots)$ - случайные моменты времени, в которые происходят страховые случаи.
 Положим $\Delta_1 = T_1; \Delta_i = T_i - T_{i-1}; i \geq 2$.

$\{\Delta_i\}$ - независимые случайные величины, каждая принимает только целое неотрицательное значение.
 $p_k = P(\Delta_i = k)$

$$\varphi(z) = M(z^{\Delta_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

q_i - вер-ть того, что в момент $t=i$ произойдет страховой случай.

(2) Найти производящую функцию вер-тей q_i .

Решение: Положим $Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i$ - производящая функция.

Событие $\{ \text{в } t=i \text{ произошел страховой случай} \} = \bigcup_{m=1}^i \{ T_m = i \}$

Но все события $\{ T_m = i \}$ - несовместные, т.к. $0 < T_1 < T_2 < \dots$

$$\Rightarrow q_i = \sum_{m=1}^i P(T_m = i)$$

\parallel
 $\Delta_1 + \dots + \Delta_m$

Вспомогат. поскольку $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ - независимы, то произв. р-числ. сл. вел. $T_m = \Delta_1 + \dots + \Delta_m$ - равна $(\varphi(z))^m$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^i P(T_m = i) \right) z^i = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=m}^{\infty} P(T_m = i) z^i \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=m}^{\infty} P(\Delta_1 + \dots + \Delta_m = i) z^i \right) = \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi(z))^m = \frac{\varphi(z)}{1 - \varphi(z)} \end{aligned}$$

(переставляем порядок суммиров.)

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - \varphi(z)} \quad \text{ответ:}$$

(3) Найти q_i , если $p_k = q^{k-1} p$ ($p+q=1; k \geq 1$)

Решение: Если $p_k = q^{k-1} p$,

$$\text{то } \varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i z^i = \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} p z^i = p z \cdot \sum_{t=0}^{\infty} (q z)^t = \frac{p z}{1 - q z}$$

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - \varphi(z)} = \frac{\frac{p z}{1 - q z}}{1 - \frac{p z}{1 - q z}} = \frac{p z}{1 - q z - p z} = \frac{p z}{1 - z}$$

$$\text{Но } Q(z) = \frac{p z}{1 - z} = p z \cdot \sum_{t=0}^{\infty} z^t = \sum_{i=1}^{\infty} p z^i$$

$$\parallel \sum_{i=1}^{\infty} q_i z^i$$

приравняем коэф. при $z^i \Rightarrow q_i = p$ - т.е. q_i не зависят от i !