30.11.21. Market Impact. Кр1. Токаева Александра 509 группа

⑥ Пусть $X \in Sem$; $Y \in \mathcal{V}^c$.

Док-ть, что $[X;Y] = 0$ (п.н.)

<u>Док-во:</u> по ф-ле из §6: $[X;Y] = \langle X^c; Y^c \rangle + \sum_{s \le \cdot} \Delta X_s \cdot \Delta Y_s$ п.н. (1)

но $Y \in \mathcal{V} \Rightarrow Y^c = 0 \Rightarrow \langle X^c; Y^c \rangle = 0$

Далее, $Y \in \mathcal{V}^c \Rightarrow Y$ - непрерывн $\Rightarrow$ его скачки $= 0 \Rightarrow \Delta Y_s = 0$.

$\Rightarrow$ оба слагаемых в (1) равны нулю $\Rightarrow [X,Y] = 0$ п.н. чтд.

⑦ W – броун. движ. относ. (F_t)

N – пуасс. процесс относ. (F_t)

W и N могут быть зависимы

$\Lambda = (\Lambda_t)$ с $\Lambda_t = t$; $t \in \mathbb{R}_+$

$X = (W + \Lambda)(W + N + \sin \Lambda)$

а) Док-ть, что $X \in Sem$ и найти X^c

б) Является ли X^c мартингалом?

<u>Решение:</u> а) $X_t = (W_t + t)(W_t + N_t + \sin t) = \underbrace{(W_t + t)}_{=A}\underbrace{(W_t + \sin t)}_{=B} + \underbrace{(W_t + t)}_{=C}\underbrace{N_t}_{=D}$

Имеем: $AB \in Sem^c \subset Sem$, т.к. $\begin{cases} W_t + t \in Sem^c \\ W_t + \sin t \in Sem^c \\ f(x;t) = (x+t)\cdot(x + \sin t) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}_+) \end{cases} \Rightarrow f(X;t) \in Sem^c$ – см. (0.15)

Далее, про CD:

$$CD = \underbrace{C_0 D_0}_{=0,\ \text{т.к. } C_0 = 0} + \underbrace{D_- \cdot \underbrace{C}_{\in M_{loc}}}_{\in M_{loc},\ \text{т.к. } D_- \text{ - предсказ. и лок. огр.}} + \underbrace{C \cdot \underbrace{D_-}_{\in \mathcal{V}}}_{\in \mathcal{V},\ \text{т.к. } C \text{ - предсказуем и лок. огр.}} + \underbrace{[C;D]}_{=0,\ \text{т.к. } C \text{ - непрер}} \Bigg\} \in Sem$$

$\Rightarrow \begin{cases} AB \in Sem \\ CD \in Sem \end{cases} \Rightarrow X_t = AB + CD \in Sem.$

Теперь считаем X^c:

$$X_t = AB + CD = \Big(\underbrace{A_0 B_0}_{=0,\ \text{т.к. } A_0 = 0} + \underbrace{A_- \cdot B}_{= A \cdot B,\ \text{т.к. } A \text{ - непрер}} + \underbrace{B_- \cdot A}_{= B \cdot A,\ \text{т.к. } B \text{ - непрер}} + \underbrace{[A,B]}_{=0,\ \text{т.к. } A \text{ - непрер}}\Big) + \Big(\underbrace{C_0 D_0}_{=0,\ \text{т.к. } C_0 = 0} + D_- \cdot C + \overbrace{C \cdot D_-}^{\in \mathcal{V},\ \text{у него нет непрер. мартингальной составляющей}} + \underbrace{[C,D]}_{=0,\ \text{т.к. } C \text{ - непрер}}\Big)$$

$$\Rightarrow X_t^c = (A\,dB)^c + (B\,dA)^c + (D_-\,dC)^c$$

Теперь посчитаем X_t, возьмем у него M-часть и A-часть, и у M-части возьмем непрерывную составляющую.

по ф-ле Ито для $f(x,t) = x+\sin t;\ x+t;\ x+t$:

$AdB = (W_t+t)(dW_t+\cos t\,dt) = (W_t+t)dW_t + (W_t+t)\cos t\,dt$

$BdA = (W_t+\sin t)(dW_t+dt) = (W_t+\sin t)dW_t + (W_t+\sin t)dt$

$D\cdot dC = N_{t-}\cdot(dW_t+dt) = N_{t-}dW_t + N_{t-}dt$

$\in M loc$ $\qquad\qquad \in V$

Видим, что м-часть и так непрерывная $\Rightarrow$ она и есть $(X_t)^c$:

$$\boxed{\Rightarrow X^c = \int_0^\cdot (2W_s + s + \sin s + N_{s-})\,dW_s}$$

б) Да, является, докажем даже, что $X^c \in M^2 \subset M$.

Имеем: X^c — непр $\Rightarrow [X^c] = \langle X^c\rangle = \int_0^\cdot (2W_s+s+\sin s+N_{s-})^2 ds$.

Далее, $\forall t\in\mathbb{R}_+$:

$$E([X^c]_T) = E\int_0^T (2W_s + s+\sin s+N_{s-})^2 ds \overset{(a+b)^2\le 2a^2+2b^2}{\le} E\int_0^T [2\cdot(2W_s)^2 + 2(s+\sin s+N_{s-})^2]\,ds \le$$

$$\le E\int_0^T[2\cdot(2W_s)^2 + 2(2\sin^2 s + 2(s+N_{s-})^2)]\,ds \le E\int_0^T [8W_s^2 + 4\sin^2 s + 4(2s^2+2(N_{s-})^2)]\,ds =$$

$$= \int_0^T \Big[8\underbrace{E(W_s^2)}_{=s} + 4\underbrace{E\sin^2 s}_{\le 1} + 8\underbrace{Es^2}_{=s^2} + 8E(N_{s-})^2\Big]ds \le 4T^2+4T+\frac{8T^3}{3} + 8T\cdot \underbrace{E(N_{s-})^2}_{<\infty} < \infty$$

но по н-ву Буркхольдера-Дэвиса-Ганди:

$$E\Big(\sup_{t\le T}|X_t^c|^2\Big) \le C_p\cdot E([X^c]_T) < \infty \quad \text{см.}$$

$$\Rightarrow E\Big(\sup_{t\le T}|X_t^c|^2\Big)<\infty \Rightarrow E|X_t^c|^2<\infty,\ \forall t\in T \Rightarrow X_t^c\in M^2.$$ ч.т.д.

(2) W — броун. движ. относ (F_t)

H, K — предсказуемые лок. огр. процессы

$M = K\cdot W$

$K\ne 0$ $P\times\mu$-п.в., где μ — мера Лебега

$(H\cdot M)M \in M loc$

Док-ть, что $H=0$ $P\times\mu$-п.в.

Решение: по ф-ле $AB = A_0B_0 + A_-\cdot B + B_-\cdot A + [A,B]$

для $A = H\cdot M$, $B = M$ имеем:

$\Rightarrow (H\cdot M)M = (H\cdot M)_0 M_0 + \underbrace{(H\cdot M)_- \cdot M}_{\in M_{loc},\ \text{т.к. } M \in M_{loc}} + \underbrace{M_- \cdot (H\cdot M)}_{\in M_{loc},\ \text{т.к. } H\cdot M \in M_{loc}} + [H\cdot M; M]\ (*)\ \in M_{loc}$ по усл.

т.к. $M = K\cdot W \in M_{loc}$, т.к. $W \in M_{loc}$, K – прогрес. изм. огр.

$H\cdot M \in M_{loc}$, т.к. $\begin{cases} M \in M_{loc} \\ H \text{ – прогрес. изм. огр.} \end{cases}$

$(H\cdot M)M \in M_{loc}$ по усл.

$\Rightarrow [H\cdot M; M] \in M_{loc}$ – т.к. остальные слагаемые в $(*)$ $\in M_{loc}$

но $[H\cdot M; M] = [H\cdot(K\cdot W); K\cdot W] \underset{\substack{\text{св-во,} \\ \text{что } H(KW) = HKW}}{=} [HK\cdot W; K\cdot W] \underset{\substack{H \text{ и } K \text{ – прогрес. изм. огр.,} \\ \text{а там одно св-во такое}}}{=} \overset{\geq 0}{HK^2} \cdot \underbrace{[W; W]}_{= t} \overset{?}{\in} M_{loc}$

$\Rightarrow HK^2 = 0$ п.н. $\Rightarrow H = 0$ п.н. чтд.

(5) W – броун. движ. относ. F_t,

τ – <u>конечный</u> момент остановки

$\alpha > 0$ – детерм. число

$E X_\tau = ?$, где $X_\cdot := \int_0^\cdot e^{-\alpha s} W_s dW_s$

<u>Решение:</u> $X_t := \int_0^t e^{-\alpha s} W_s dW_s$

$\Rightarrow [X_t] = \langle X_t \rangle = \int_0^t e^{-2\alpha s} W_s^2 ds$

по н-ву Буркхольдера–Дэвиса–Ганди: M^τ – мартингал,

т.к. $E(\sup_{t\le\tau} |X_t|) \le C_p \cdot E\sqrt{[X_t]} \underset{\substack{\text{н-во} \\ \text{Иенсена}}}{\le} C_p \sqrt{E[X_t]} \le C_p \cdot \sqrt{\int_0^t e^{-2\alpha s} \underbrace{E W_s^2}_{= s} ds} \le$

$\le C_p \sqrt{\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha s} \cdot s ds}_{= \frac{1}{4\alpha^2},\ \alpha > 0 \text{ (погасим интегрирдем)}}} = C_p \sqrt{\frac{1}{4a^2}} = \frac{C_p}{4a} < \infty.$

$\Rightarrow X^\tau$ – мартингал

~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ по теореме Дуба: $E X_{\tau\wedge n} = E X_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

но $\begin{cases} X_{\tau\wedge n} \to M_\tau \text{ п.н.} \\ |X_{\tau\wedge n}| \le \sup_{t\le\tau} |X_t| \text{ что } \in L_1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ по т. Лебега о мажор. сход.: $\overbrace{E(M_{\tau\wedge n})}^{\parallel 0} \to E(M_\tau)$

$\Rightarrow E M_\tau = 0$. чтд.

(4) $X, Y \in \mathcal{V}$.

Верно ли: $XY = X_0Y_0 + \underbrace{X \cdot Y + Y \cdot X}$ п.н.?

аут минусов нет!

Решение: нет.

Берём $X_t = Y_t = \underbrace{N_t - \lambda t}_{\in \mathcal{V}}$ — чисто разрывный процесс

Всегда: $XY = \underset{0}{X_0Y_0} + X_- \cdot Y + Y_- \cdot X + \underbrace{[X,Y]}$

$X, Y \in \mathcal{V} \Rightarrow X^c; Y^c = 0.$

$[X,Y] = [N_t - \lambda t; N_t - \lambda t] = [N_t; N_t] = N_t$

$Y_- + \Delta Y = Y$

$X_- + \Delta X = X$

Но $X \cdot Y + Y \cdot X = \cancel{\ldots} X_- \cdot Y + Y_- \cdot X + 2 \sum_{s \le \cdot} \Delta X_s \cdot \Delta Y_s =$

$= X_- \cdot Y + Y_- \cdot X + 2N \neq X_- \cdot Y + Y_- \cdot X + \underset{N}{[X;Y]} \Rightarrow$ ф-ла неверна.

(1.) M, N — чисто разрывные лок. мартингалы.

$M_0 = N_0 = 0$.

$\Delta M = \Delta N$ п.н.

Док-ть: $M = N$ п.н.

Решение: M, N — чисто разрывные $\Rightarrow M = M_0 + \sum_{s \le \cdot} \Delta M$

$N = N_0 + \sum_{s \le \cdot} \Delta N$

но $M_0 = N_0$ п.н.

$\Delta M = \Delta N$ п.н. $\Rightarrow$ выберем общее мн-во п.н.: $\Rightarrow M = N$ п.н. чтд.

(3.) $X^i \in \mathcal{S}_{em}$.

Док-ть:

$[[X^1; X^2]; X^3] = [X^1; [X^2; X^3]]$

Решение: $AB = A_0B_0 + A_- \cdot B + B_- \cdot A + [A,B]$

$\Rightarrow [A,B] = AB - A_0B_0 - A_- \cdot B - B_- \cdot A \quad ; [B;C] = BC - B_0C_0 - B_- \cdot C - C_- \cdot B$

~~$\Rightarrow [X^1; X^2] =$~~

• $\Rightarrow [[A;B];C] = (AB - A_0B_0 - A_- \cdot B - B_- \cdot A)C - \underset{0}{(A_0B_0 - A_0B_0 - A_- \cdot B - B_- \cdot A)|_0 C_0} -$

$- ((AB - A_0B_0 - A_- \cdot B_- - B_- \cdot A)_- C) - C_- \cdot (AB - A_0B_0 - A_- \cdot B - B_- \cdot A)$

• $[A; [B;C]] = A(BC - B_0C_0 - B_- \cdot C - C_- \cdot B) - A_0 \underset{0}{(BC - B_0C_0 - B_- \cdot C - C_- \cdot B)|_0} -$

$- A_- \cdot (BC - B_0C_0 - B_- \cdot C - C_- \cdot B) - (BC - B_0C_0 - B_- \cdot C - C_- \cdot B)_- \cdot A$

} одинаковые

(8) У нас сейчас: $\xi_k \in L^\infty$; S^0 – произвольный мартингал

А раньше было $\xi_k \in L^p$, $S^0 \in L^q$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

И там было $\left.\begin{matrix} X_{n-1} \in L^p \\ \Delta S^0_n \in L^q \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta M_n \in L^1$, а нам это надо было, чтобы мартингальное преобразование было мартингалом.

А сейчас $X \in L^\infty$, S^0 – произв. мартингал.

$\Rightarrow$ по опр. мартингала: $S^0 \in L^1$.

$\Rightarrow \Delta M_n \in L^1$ по н-ву Гёльдера

$\Rightarrow$ теперь всё так же, как в лекциях

$\Rightarrow \xi_k^* = \frac{-x}{N+1}$ – обеспечивающий, ч.т.д.