14.10.2021. Виноградов. ДЗ от семинара 5.

① Дан процесс восстановления $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$

$\xi \sim F(x)$, $E\xi = m$; $F(0+) = 0$.

Введём операцию прореживания: на одном шаге на каждую точку выбрасываем с вер-тью p, и с вер-тью q оставляем.

Теперь устремим кол-во выбрасываний в ∞.

Док-ть, что в пределе получится пуассоновский процесс.

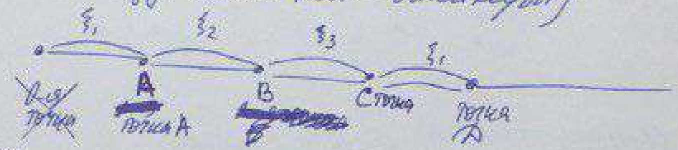
Решение: Обозначим процесс, получившийся после n-го выкидывания за $Z^{(n)}_{n=1,2,3,4,5,6\dots}$

Посмотрим, что будет после 1-го выбрасывания.

У исх. процесса ξ_k — это скачки.

А у процесса $Z^{(1)}$ скачки — это сумма каких-то соседних кси (если внутренние точки между ними кси — выкинуты)

т.е. так:



т.е. $Z^{(1)}_1$ = 1-й скачок $= \xi_1+\dots+\xi_\gamma$, где γ — случ. величина, показывающая, сколько первых кусочков слиплись.

т.е.
$$\begin{cases} Z_1^{(1)} = \xi_1, \text{ с вер-тью } q \text{ (т.е. точку не выкинули)} \\ Z_1^{(1)} = \xi_1+\xi_2 \text{ с вер-тью } pq \text{ (т.е. точку A выкинули, а точку B — нет)} \\ Z_1^{(1)} = \xi_1+\xi_2+\xi_3 \text{ с вер-тью } p^2q \text{ (т.е. точки A, B — выкинули, а C — нет)} \end{cases}$$
$\vdots$

$Z_1^{(1)} = \xi_1+\dots+\xi_n$, с вер-тью $p^{n-1}q$.

т.е. γ — имеет геометрическое распределение.

$\Rightarrow$ преобр. Лапласа (в силу независимости ξ_k): $\boxed{f^*_{Z^{(1)}}(s) = \varphi_\gamma(f^*_\xi(s))}$, где $\varphi_\gamma(s)$ — произв. ф-ция, $f^*_\xi(s)$ — преобр. Лапласа для ξ.

но $\gamma \sim Geom$

$$\Rightarrow \varphi_\gamma(z) = Ez^\gamma = z^1 q + z^2 pq + z^3 p^2 q = zq(1+zp+z^2p^2+\dots) = \frac{zq}{1-zp} = \frac{zq}{1-(1-q)z}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^*_{Z^{(1)}}(s) = \varphi_\gamma(f^*_\xi(s)) = \frac{q \cdot f^*_\xi(s)}{1-(1-q)f^*_\xi(s)}}$$

Мы сжимаем ось времени, т.е. $s \rightsquigarrow sq$: $f^*_{Z^{(1)}}(sq) = \dfrac{q \cdot f^*_\xi(sq)}{1-(1-q)f^*_\xi(sq)}$

Пусть теперь прошло k итераций, т.е. на k-й итерации вер-ть, что точка осталась — равна q^k, а что она вылетела в какую-то из этих k итераций — равна $1-q^k$. $\Rightarrow f^*_{Z^{(k)}}(sq^k) = \dfrac{q^k \cdot f^*_\xi(sq^k)}{1-(1-q^k)f^*_\xi(sq^k)}$

Чтобы узнать, что получится в пределе, разложим $f^*_\xi(sq^k)$ в ряд Тейлора в нуле:

$$f^*_\xi(sq^k) = f^*_\xi(0) + \underbrace{f^{*\prime}_\xi(0)}_{m} \cdot sq^k + \bar{o}(q^k).$$

но производная в нуле от преобр. Лапласа — равна ~~матожиданию~~ минус матожиданию

$$\left(\xi:\ f^*_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_\xi(t)\,dt \Rightarrow f^{*\prime}_\xi(0) = \underbrace{-\int_0^\infty t\,e^{0} f_\xi(t)\,dt}_{-m}\right)$$

$$\Rightarrow f^*_\xi(sq^k) = f^*_\xi(0) + msq^k + \bar{o}(q^k)$$

но $f^*_{z(k)}(sq^k) = \dfrac{q^k \cdot f^*_\xi(sq^k)}{1-(1-q^k)f^*_\xi(sq^k)} = \dfrac{q^k(1-msq^k+\bar{o}(q^k))}{1-(1-q^k)(1-msq^k+\bar{o}(q^k))} =$

$$= \frac{q^k(1-msq^k+\bar{o}(q^k))}{\cancel{1-1}+msq^k+q^k(1-msq^k+\bar{o}(q^k))+\bar{o}(q^k)} = \frac{1-msq^k+\bar{o}(q^k)}{1-msq^k+ms+\bar{o}(q^k)+\bar{o}(1)}$$

Если $q<1$, то переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем:

$$\lim_{k\to\infty} f^*_{z(k)}(sq^k) = \frac{1}{1+ms}$$ — а это преобр. Лапласа от $\frac{1}{m}e^{-\frac{t}{m}}$, т.е. скачки

предельного процесса имеют эксп. распр.

$\Rightarrow$ предельный процесс — пуассоновский. Чтд.