Задача №1.

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = \overline{1,n}$, $u_0 = 0$, $\beta \in \mathbb{R}^1$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р.с.в., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$.

① $u^*_{n+k} = E(u_{n+k} / \overbrace{u_1, \ldots, u_n}^{\mathcal{F}_n}) = E(\beta u_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} / \mathcal{F}_n) = E(\beta^2 u_{n+k-2} + \beta \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} / \mathcal{F}_n) = \ldots$

$= E(\beta^k u_n + \sum_{s=0}^{k-1} \beta^s \varepsilon_{n+k-s} / \mathcal{F}_n) = \beta^k u_n$,

потому что $\varepsilon_i \perp\!\!\!\perp u_1, \ldots, u_n$ при $i > n$, а u_n измерима отн $\mathcal{F}_n = \sigma(u_1, \ldots, u_n)$.

Ответ: $u^*_{n+k} = \beta^k u_n$.

② $\Delta_k = E(u^*_{n+k} - u_{n+k})^2 = E(\sum_{s=0}^{k-1} \beta^s \varepsilon_{n+k-s})^2 =$

$= (E\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{i,j} \cdot \sigma^2) = \sigma^2 \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{2s}$.

Если $|\beta| = 1$, то $\Delta_k = k\sigma^2 \to \infty$, $k \to \infty$

Иначе $\Delta_k = \sigma^2 \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{2s} = \sigma^2 \cdot \dfrac{(1-\beta^{2k})}{1-\beta^2}$, и

при $|\beta| < 1$ $\Delta_k \sim \dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}$, $k \to \infty$,

при $|\beta| > 1$ $\Delta_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Задача №2

$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р, $E\varepsilon_1 = D$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

1. Рассмотрим такую модель: $\varepsilon_t = D + \tilde{\varepsilon}_t$

$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + D + \tilde{\varepsilon}_t$,

$\{\tilde{\varepsilon}_t\}$ - н.о.р, $E\tilde{\varepsilon}_1 = 0$, $0 < E\tilde{\varepsilon}_1^2 = \sigma^2 < \infty$

Пусть μ: $(1-\beta_1-\beta_2)\mu = D$, а $v_t := u_t - \mu$.

Тогда $\begin{cases} u_t = \mu + v_t \\ v_t = \beta_1 v_{t-1} + \beta_2 v_{t-2} + \tilde{\varepsilon}_t \end{cases}$

Стационарное решение имеет вид

$u_t = \mu + \sum_{j \geq 0} \gamma_j \varepsilon_{t-j}$, и $cov(u_{t+\tau}, u_t) =$

$= cov(v_{t+\tau}, v_t) \Rightarrow f_u(\lambda) = f_v(\lambda) = f(\lambda)$.

Значит, достаточно найти $f_v(\lambda)$, а

$f_v(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi}$, где $\varphi(\lambda) = \sum_{j \geq 0} \gamma_j e^{-i\lambda j}$.

$\varepsilon_t = v_t - \beta_1 v_{t-1} - \beta_2 v_{t-2} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2\pi} = \left|\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right|^2 \cdot f(\lambda)$,

где $\left|\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right|^2 = 1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda} \Rightarrow$

$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi \cdot |1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|}$ Ответ: $\frac{\sigma^2}{2\pi |1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|}$

(2) $E u_t = \frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2}$, и

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{L^2} \frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2} \iff \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} R(\tau) \to 0,$$

а это так, потому что $\exists\, f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau} e^{-i\lambda\tau} R(\tau)$

Ответ: "да", к $\frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2}$

(3) В силу th. про стационарное решение $\{v_t\}$ уд. усл. с. п. с $\alpha(\tau) \le c\lambda^{\tau}$, $0<\lambda<1$. Значит, ряд $\sum_{t\ge1} (\alpha(\tau))^{\frac{2}{2+\delta}} < \infty$, и $E|u_1 - m|^{2+\delta} < \infty$.

Отсюда следует асимптотическая нормальность $n^{1/2}(\overline{u}_n - m)$ (из ЦПТ для стац. последовательностей, уд. уа с. п.

Ответ: да, $m = \frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2} = E u_1$

Задача №3

$$u_t = \varepsilon_t - \alpha\varepsilon_{t-1}, \quad t=\overline{1,n}, \quad \varepsilon_0 = 0$$

$\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$ – н.о.р. $N(0,1)$ с.в

$$g_\varepsilon(x_1, .., x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2}$$

При этом, $u_1 = \varepsilon_1$, $u_2 = \varepsilon_2 - \alpha\varepsilon_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_2 = u_2 + \alpha u_1$, $u_3 = \varepsilon_3 - \alpha\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_3 = u_3 + \alpha u_2 + \alpha^2 u_1$

и т.д., т.е.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = u_1 \\ \varepsilon_2 = u_2 + \alpha u_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n = u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i u_{n-i} \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & 1 & & \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \\ \vdots & & & \\ \alpha^{n-1} & \dots & & \alpha \; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Значит, $g_u(x_1, .., x_n; \alpha) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \sum_{s=1}^{i-1}\alpha^s x_{i-s}\right)^2} \to \max_\alpha$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \sum_{s=1}^{i-1}\alpha^s x_{i-s}\right)^2 \to \min_\alpha$$

Ответ: $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \sum_{s=1}^{i-1}\alpha^s x_{i-s}\right)^2 \to \min_\alpha$

Задача №4.

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t \end{cases}, \quad t = \overline{1, n}$$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. с.в; $E\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 \sim G(x)$

$G' = g$ - чётная $\{\xi_t\}$ - н.о.р. $\sim \mu_\xi$

$\{z_i^\gamma\} \sim Br(\gamma)$

$\{u_t\}, \{z_t^\gamma\}, \{\xi_t\}$ ⫫, $F(x): F(x) + F(-x) = 1$

$$\sum_{t=1}^{n} \left(F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right) = 0$$

① $F \nearrow \Rightarrow \sum_{t=1}^{n} \left(F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right) \searrow$.

При этом (и непрерывна)

$\sum \left(F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right) \to -\frac{3n}{2} < 0$ при $\theta \to +\infty$

и $\sum \left(F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right) \to \frac{n}{2} > 0$ при $\theta \to -\infty$

Значит, решение $\exists!$ Ответ: одно.

② $\Lambda(\gamma, \theta) = \operatorname{plim} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right) =$

$= E\left(F(y_1 - \theta) - \frac{1}{2}\right)$ в силу ЗБЧ.

По формуле полной вероятности

$\Lambda(\gamma, \theta) = E(\cdot / z_1^\gamma = 1) \cdot P(z_1^\gamma = 1) + E(\cdot / z_1^\gamma = 0) \cdot P(z_1^\gamma = 0) =$

$= \gamma \cdot E\left(F(a+\varepsilon_1+\zeta_1-\theta)-\frac{1}{2}\right) +$
$+ (1-\gamma)\, E\left(F(a+\varepsilon_1-\theta)-\frac{1}{2}\right)$

$\cancel{\ldots}$ $E\left(F(\varepsilon_1)-\frac{1}{2}\right) = \Lambda(0,a) =$
$= 0$, поскольку $\varepsilon_1 \sim g(x)$ – чётная ф-я, а интегрируем нечётную. ($F(x)+F(-x)=1$
$\Rightarrow \left(F(x)-\frac{1}{2}\right) + \left(F(-x)-\frac{1}{2}\right)=0$)

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}\right|_{(0,a)} = -\left(EF(\varepsilon_1)\right)'$$

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}\right|_{(0,a)} = E\left(F(\varepsilon_1+\zeta_1)-\frac{1}{2}\right) - E\left(F(\varepsilon_1)-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= E\left(F(\varepsilon_1+\zeta_1)\right)-\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\left|\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}\right|_{(0,a)}\right| \le \frac{1}{2} \quad (\text{т.к. } |F| \le 1)$$

и $IF = -\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}\right|_{(0,a)} \Big/ \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}\right|_{(0,a)} < \infty.$

Значит, оценка B-робастна.

Ответ: B-робастна