10.04.2022 Шапошников. Кр1.

(1) Пусть $b(x) = \operatorname{sign} x$.

Опишите все решения ур-я непрер-ти $\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x (b\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \delta_0 \end{cases}$

Решение: согласно принципу суперпозиции (см. лекция 2),

$\mu_t = P \circ e_t^{-1}$, где $\begin{cases} \operatorname{supp} P \subset \{(y, x_t) \mid x_t(y) - \text{решение } \begin{cases} \dot{x} = b(x,t) \\ x(0) = y \end{cases} \} \\ e_t : (y, x_t) \longmapsto x_t \end{cases}$

Это означает, что решения ур-я нужно искать среди таких $\mu_t = \mu_0 \circ x_t^{-1}$, что $x_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{нач. точка} \\ (т.к. \ \mu_0 = \delta_0)}}{0} + \int_0^t b(x_s, s)\,ds$.

Смотрим на ур-е $x(t) = \int_0^t \operatorname{sign} x(s)\,ds$.

У него есть три решения: $x(t) \equiv 0$, $x(t) = t$, $x(t) = -t$ (т.к. если $x(0) > 0$, то $\dot{x} = 1 \Rightarrow x(t) = x(0) + t$; $x(0) < 0$, то $\dot{x} = -1 \Rightarrow x(t) = x(0) - t$)

$\Rightarrow \boxed{\mu_t = p\,\delta_t + q \cdot \delta_{-t} + (1 - p - q)\,\delta_0}$, где $p, q \in [0,1]$.

вот все решения!

(3) Пусть $b \in C(\mathbb{R})$; ϑ — имеет комп. носитель.

Док-ть, что если для μ_t — решения $\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x (b\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \vartheta \end{cases}$ выполнен принцип суперпозиции, то найдется $\tau > 0$: μ_t имеет комп. носитель $\forall t \in (0, \tau)$.

Решение: $\operatorname{sp} \mu_t$ — замкнут по опр. sp.

А критерий компактности в $\mathbb{R}^n$ — это замкнутость + ограниченность.

$\Rightarrow$ нам надо док-ть ограниченность $\operatorname{sp} \mu_t$.

Из принципа суперпозиции следует, что $\operatorname{sp} \mu_t \subset \{x_t : x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\,ds;\ y \in \operatorname{sp} \vartheta\}$.

но ϑ — имеет компактный носитель по опр. $\Rightarrow$ он огр. $\Rightarrow$ лежит в шаре $[-R; R]$

Пусть C — это константа, которой b ограничено на $[-2R; 2R]$ (такое C $\exists$, т.к. $b \in C(\mathbb{R})$).

$\Rightarrow$ раз $x_t = \underset{\in [-R;R]}{y} + \int_0^t b(x_s, s)\,ds$, то $\|x_t\| \le R + t \cdot C \overset{?}{<} 2R$

подберем τ так, чтобы $R + \tau C < 2R$, т.е. $\tau := \frac{R}{C}$.

$\Rightarrow \operatorname{sp} \mu_t$ — огр. (и замкнут) $\Rightarrow$ компакт. ч.т.д.

(4) Найти решение з.к. $\begin{cases} \partial_t \mu_t + \partial_x (b(x, \mu)\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \delta_a;\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\leftarrow$ ур-е Власова

Решение: Эта задача похожа на задачу из листочка 2, которую мы разбирали на лекции 5.

Там мы договорились, что надо искать решение в виде $\mu_t = \delta_{x(t)}$

тогда $x(t)$ удовл.: $\begin{cases} \dot{x} = b(\mu_t, t) = \int x\, d\mu_t \overset{\mu_t = \delta_{x(t)}}{=} x(t) \\ x(0) = a \text{ — т.к. } \mu_0 = \delta_{x(0)} \overset{?}{=} \delta_a \end{cases}$

$\Rightarrow$ получим ур-е: $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C \cdot e^t \\ x(0) = a \end{cases} \Rightarrow x(t) = a \cdot e^t.$

$\Rightarrow$ $\mu_t = \delta_{x(t)} = \delta_{ae^t}$ – решение.

Оно единств., т.к. $b(x,\mu) = \int x\, d\mu$ = число – не зависит от x,

x бегает по всему $\mathbb{R}$ в μ

а у нас в лекции 3 была теорема про ∃! решения ур-я Власова. чтд.

⑤ Найти ф-цию $u(x,t) = \inf\limits_{\alpha} g(y_x(T))$, где $\begin{cases} \dot{y}_x(s) = \alpha(s); \ s \in [t,T] \\ y_x(t) = x \end{cases}$

Исследовать непрер-ть и дифф-ть u.

$\alpha \in [-1;1]$ – ф-ция

$g(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение: $y_x(T) = x + \int\limits_t^T \alpha(s)\, ds$.

$g(y_x(T)) = \operatorname{arctg}\left(x + \int\limits_t^T \alpha(s)\, ds\right)$

В силу монотонности arctg: $\operatorname{arctg}\left(x + \int\limits_t^T \alpha(s)\, ds\right) \geq \operatorname{arctg}(x - (T-t))$.

Причем оценка достигается при $\alpha(s) \equiv -1$.

$\Rightarrow$ это и есть inf.

$\Rightarrow u(x,t) = \operatorname{arctg}(x - (T-t))$.

Эта ф-ция непрер. и дифф. чтд.

⑥ Пусть g – липшицева огр. ф-ция на $\mathbb{R}$.

1) Проверьте, что ф-ция $u(x,t) = \inf\limits_{y} \left\{ \frac{|x-y|^2}{2t} + g(y) \right\}$ – явл. вязк. решением ур-я $u_t + \frac{|u_x|^2}{2} = 0$ на $(0,T) \times \mathbb{R}$.

2) Проверьте, что это единств. вязк. огр. равном. непрер. решение этого ур-я с нач. усл. $u(x,0) = g(x)$.

3) Постройте пример g, когда u не явл. непрер. дифф.

Решение: 1) Мы ур-е $u_t + \frac{|u_x|^2}{2} = 0$ решали методом исчезающей вязкости в лекции 4 в осенним семестре.

И ещё у нас была теорема,

что если F_ε, F - непрер. ф-ции, $F_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F$ лок. равномерно,

u^ε - вязкостное решение ур-я $F_\varepsilon(x, u^\varepsilon(x), Du^\varepsilon(x), D^2u^\varepsilon(x)) = 0$ в Ω,

$u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u$ лок. равном. в Ω, то u - вязк. решение ур-я $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$.

Найдём вязкостное решение ур-я $\begin{cases} w_t + \frac{(w_x)^2}{2} = \varepsilon w_{xx} \\ w|_{t=0} = g \end{cases}$ с помощью преобразования

Флорина-Хопфа-Коула, оно будет стремиться к $\inf_y \left\{ \frac{|x-y|^2}{2t} + g(y) \right\}$

поточечно и монотонно, а значит лок. равном., и поэтому из

Теоремы мы получим, что w_t - вязк. решение ур-я $w_t + \frac{(w_x)^2}{2} = 0$.

Итак, берём $\overset{a=\varepsilon,\ b=1/2}{z = e^{-\frac{b}{a}w} = e^{-\frac{1}{2\varepsilon}w}} \Rightarrow w = -2\varepsilon \ln z$.

Для ур-я $\begin{cases} z_t = a z_{xx} \\ z|_{t=0} = e^{-\frac{b}{a}g} \end{cases}$ - есть ф-ла Пуассона: $z(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} \cdot e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy$.

$\Rightarrow w(x,t) = -2\varepsilon \cdot \ln\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{g(y)}{2\varepsilon}} dy \right)$.

По лемме из лекций, $w(x,t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sup_y \left\{ 2\varepsilon \cdot \left(-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{g(y)}{2\varepsilon} \right) \right\} = \sup_y \left\{ -\frac{|x-y|^2}{2t} - g(y) \right\}$.

Но $\sup_y \left\{ -\frac{|x-y|^2}{2t} - g(y) \right\} = \inf_y \left\{ \frac{|x-y|^2}{2t} + g(y) \right\}$.

$\Rightarrow$ по теореме: $\inf_y \left\{ \frac{|x-y|^2}{2t} + g(y) \right\}$ явл. вязк. решением ур-я $w_t + \frac{|w_x|^2}{2} = 0$.

2) Мы на лекции 7 доказали, что

$u(x,t) = \inf_\alpha \left\{ \int_t^T \ell(\dots) ds + u(y_x(T), T) \right\}$ - явл. вязк. решением ур-я Гам-Якоби $-u_t + H(x,t,Du) = 0$. в $\mathbb{R}^d \times (0,T)$

А единственность $\sqrt{\text{огр. равном. непр.}}$ решения мы получали как следствие принципа сравнения на лекции 5.

$\Rightarrow$ нам нужно убедиться, что принцип сравнения работает для нашего гамильтониана $H(x,t,p) = \frac{-p^2}{2}$.

Мы там сначала доказали оценки $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = \bar{o}(\sqrt{\varepsilon})$

$|x_\varepsilon| + |y_\varepsilon| = \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$,

а потом получали противоречие с тем, что

$-\lambda + H\left(x_\varepsilon, t_\varepsilon; \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\varepsilon x_\varepsilon\right) \le 0 \le -\lambda + H\left(y_\varepsilon; s_\varepsilon; \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} - 2\varepsilon y_\varepsilon\right)$,

т.е. $\underset{0}{\overset{\wedge}{}} 2\lambda \le$ что-то там $\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Для нашего гамильтониана $H(x,t,p) = -\frac{p^2}{2}$:

$$2\lambda \le H\left(y_\varepsilon, s_\varepsilon; \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} - 2\varepsilon y_\varepsilon\right) - H\left(x_\varepsilon; t_\varepsilon; \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\varepsilon x_\varepsilon\right) = -\frac{\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} - 2\varepsilon y_\varepsilon\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon} + 2\varepsilon x_\varepsilon\right)^2}{2} =$$

$$= 2\varepsilon^2 x_\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 y_\varepsilon^2 + 2x_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) + 2y_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) =$$

$$= 2\varepsilon^2(x_\varepsilon^2 - y_\varepsilon^2) + 2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)(x_\varepsilon + y_\varepsilon) = 2\underbrace{(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}_{\to 0}\underbrace{(x_\varepsilon + y_\varepsilon)}_{\to 0}(1+\varepsilon^2) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

~~При~~ получаем $0 \le \lambda \to 0$ — противоречие. чтд.

3) возьмем $g(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & y \in (0, N] \\ N, & y > N. \end{cases}$

тогда $u(x,t) = 0$ при $x \le 0$ — т.к. $u(x,t) = \inf\limits_y \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + g(y) \right\}$.

А при $x > 0$, $t > 0$ — маленьком: $u(x,t) = x - \frac{t}{2}$ — не дифф. в нуле. Всё.

(8) $A = [0,1]$; $F(a,\mu) = -a \int_A a\, d\mu$.

Найти все решения задачи MFG: $\operatorname{sp}\mu \subset \{a: F(a,m) = \min\limits_b F(b,m)\}$.

Какие из них получаются как предел равнов. Нэша в игре N игроков?

Решение: 1) В лекции 7 мы доказали экв. условие к $\operatorname{sp}\mu \subset \{a: F(a,m) = \min\limits_b F(b,m)\}$:

$$\int_A F(a,\mu)\, d\mu \le F(b,\mu), \forall b.$$

В нашем случае: $-\int_A a\left(\int_A a\, d\mu\right) d\mu \le -b \cdot \int_A b\, d\mu$

$\Rightarrow -\left(\int_A a\, d\mu\right)^2 \le -b \cdot \int_A a\, d\mu$

$\Rightarrow$ [либо $\int_A a\, d\mu = 0$, тогда $\mu = \delta_0$

либо $\int_A a\, d\mu \ne 0$, мы на него сокращаем,

получаем $b \le \int_A a\, d\mu, \forall b$.

подставим $b = 1$ — т.к. $\forall b$ верно.

$\Rightarrow \int_A a\, d\mu \ge 1$.

но все $a \le 1 \Rightarrow$ отсюда $\mu = \delta_1$

Итак, мы нашли два решения: $\mu = \delta_0$ и $\mu = \delta_1$.

2) $J_k(a_1 \ldots a_N) = F(a_k; \mu^N)$; $\mu^N = \frac{1}{N}(\delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_N})$.

Усл. на равнов. Нэша: $F\left(a_k; \frac{\delta_{\hat a_1} + \ldots + \delta_{a_k} + \ldots + \delta_{\hat a_N}}{N}\right) \overset{?}{\ge} F\left(\hat a_k, \frac{\delta_{\hat a_1} + \ldots + \delta_{\hat a_k} + \ldots + \delta_{\hat a_N}}{N}\right)$

Для нашей F: $-a_k \frac{(\hat a_1 + \ldots + a_k + \ldots + \hat a_N)}{N} \overset{?}{\ge} \hat a_k \frac{(\hat a_1 + \ldots + \hat a_k + \ldots + \hat a_N)}{N}$, $\forall k$.

Из-за монотонности этой ф-ции по a_k, видно, что $\hat a_k = 1, \forall k$.

$\Rightarrow$ равнов. Нэша: $\hat a_1 = \ldots = \hat a_N = 1$.

$\Rightarrow \mu_N = \frac{1}{N}(\delta_1 + \ldots + \delta_1) = \frac{N \cdot \delta_1}{N} = \delta_1 \xrightarrow[N \to \infty]{} \delta_1 \Rightarrow \mu = \delta_1$ — предел равнов. Нэша.

Ответ: а) $\mu = \delta_0$, $\mu = \delta_1$

б) только $\mu = \delta_1$.

7. $A = \{1, 2 \dots k\}$.

вер. мера m на A – отождествляется с $(m_1 \dots m_k)$, $m_i \geq 0$; $m_1 + \dots + m_k = 1$.

G – дифф. ф-ция на $\mathbb{R}^k$.

$F(k, m) = \partial_{x_k} G(m)$.

Док-ть, что мера μ – решение задачи MFG $\Leftrightarrow \mu \subset \{a : F(a,m) = \min\limits_{b \in A} F(b,m)\}$

$\Leftrightarrow \mu$ – точка лок. min ф-ции G.

Решение: Опять выпишем экв. условие:

$$\int_A F(a,\mu)\,d\mu \leq F(b,\mu), \ \forall b.$$

Заметим, что у нас дискр. пр-во,

т.е. вместо интеграла – скалярное произв. $F(a,\mu)$ с $(m_1 \dots m_k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_A F(a,\mu)\,d\mu = \int_A \frac{\partial}{\partial a} G(\mu)\,d\mu = \langle \operatorname{grad} G; \bar{m} \rangle. \\ F(b,\mu) = \frac{\partial}{\partial b} G(\mu) = \langle \operatorname{grad} G; (0 \dots \underset{n_b}{1} \dots 0) \rangle. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ~~все~~ ищем такие $\bar{m}$, что: $\langle \operatorname{grad} G; \bar{m} \rangle \leq \langle \operatorname{grad} G; (0 \dots \underset{n_b}{1} \dots 0) \rangle, \forall b$.

Это экв. тому, что $m_i \neq 0$ – только там, где $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ – минимальн.

а это экв. тому, что $m = (0 \dots \underset{n_i}{m_i} \dots 0)$ – точка лок. min ф-ции G. Чтд.