11.11.21 Виноградов ДЗ от лекции 7.

Задача: В усл. теорема 3.5, если $\xi \sim Exp(\frac{1}{m})$, док-ть, что $A=B$,

где $A = \sup\limits_{x\geq 0} \frac{\bar{G}(x) e^{Rx}}{\int_x^{+\infty} e^{Ry} g(y) dy}$

$B = \inf\limits_{x\geq 0} \frac{\bar{G}(x) e^{Rx}}{\int_x^{+\infty} e^{Ry} g(y) dy}$, где $(\alpha; G(x))$ – удовл. усл. Крамера: $\frac{1}{\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{Ry} dG(x)$ (т.к.)

Решение: а) Итак, у нас $\xi \sim Exp(\lambda)$, где $\lambda = \frac{1}{m}$, т.е. $f(x) = \frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{x}{m}} \cdot I\{x \geq 0\}$

$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{t}{m}} dt = -e^{-\frac{t}{m}}\Big|_0^x = -e^{-\frac{x}{m}} + 1 = \begin{cases} (1-e^{-\frac{x}{m}}); & x\geq 0 \\ 0; & x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1-(1-e^{-\frac{x}{m}}) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{m}}; & x \geq 0 \\ 1; & x<0. \end{cases}$

$E\xi = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/m} = m.$

$\Rightarrow g(x) = \frac{\bar{F}(x)}{m} = \frac{e^{-\frac{x}{m}}}{m} \cdot I\{x\geq 0\}$ – является плотностью некой сл. вел. – т.к. $E\xi = \int_0^{+\infty} \bar{F}(t) dt$. (для неотр. ξ)

$\Rightarrow G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{m}}}{m} dt = -e^{-\frac{t}{m}}\Big|_0^x = -e^{-\frac{x}{m}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x}{m}}$ – эта $G(x)$

$\Rightarrow \bar{G}(x) = 1 - G(x) = 1-(1-e^{-\frac{x}{m}}) = e^{-\frac{x}{m}}$

б) Найдём константу R, для которой $(\alpha; G(x))$ удовл. усл. Крамера:

$\frac{1}{\alpha} \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} e^{Ru} g(u) du$ $\Rightarrow$ чему равно R?

Ну $\int_0^{+\infty} e^{Ru} g(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{Ru} \cdot e^{-\frac{u}{m}}}{m} du = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{u(R-\frac{1}{m})} du = \frac{1/m}{R-\frac{1}{m}} e^{u(R-\frac{1}{m})}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1/m}{R-\frac{1}{m}}(0-1) = \frac{1/m}{\frac{1}{m}-R}$

(Требуем: $R - \frac{1}{m} < 0$, иначе интеграл расх.)

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \overset{?}{=} \frac{1/m}{\frac{1}{m}-R}$. и причём $R - \frac{1}{m} < 0$, т.е. всё ок.

$\Rightarrow \frac{1}{m} - R = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow R = \frac{1-\alpha}{m}$ – вот константа Крамера

в) Считаем A и B:

- числитель $= \bar{G}(x) \cdot e^{Rx} = e^{-\frac{x}{m}} \cdot e^{\left(\frac{1-\alpha}{m}\right)x} = e^{-\frac{\alpha x}{m}}$
- знаменатель $= \int_x^{+\infty} e^{Ry} g(y) dy = \int_x^{+\infty} e^{\left(\frac{1-\alpha}{m}\right)y} \frac{e^{-\frac{y}{m}}}{m} dy = \frac{1}{m} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{\alpha y}{m}} dy = \frac{1}{m} \left(-\frac{m}{\alpha}\right) \cdot e^{-\frac{\alpha y}{m}}\Big|_x^{+\infty} = \frac{e^{-\frac{\alpha x}{m}}}{\alpha}$

$\Rightarrow \frac{\bar{G}(x) e^{Rx}}{\int_x^{+\infty} e^{Ry} g(y) dy} = \frac{e^{-\frac{\alpha x}{m}}}{e^{-\frac{\alpha x}{m}}/\alpha} = \boxed{\alpha}\,!$ $\Rightarrow \boxed{A = B = \alpha}$ чтд.