ГЭК 4

Махмутова Полина Викторовна

СА-13. В каких т. комплексной плоскости функция $f(z)=\overline{z}^2+2i\overline{z}$ имеет производную по z?

Решение. $z=x+iy$

$$f(z)=(x-iy)^2+2i(x-iy)=(x^2-y^2+2y)-2ixy+2ix=$$

$$=\underbrace{(x^2-y^2+2y)}_{u(x,y)}+\underbrace{(2x-2xy)}_{v(x,y)}i$$

Исп. условие Коши-Римана:

f - диф. в т. a ($\mathbb{C}$-диф.) $\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u(a)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(a)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(a)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(a)}{\partial x}. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=-2x \\ -2y+2=-2+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\text{функция дифференцируема (только) в т. } z=i}$

$$z=0+1\cdot i=i$$

Махмутова Полина Викторовна, ГЭК 4

DER-13 Найти производную функции

$y = 2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$

$(a^x)' = a^x \log a$

$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{x^2+1}$

Реш.-е $y' = \left(2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}\right)' =$

$= 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \log 2 \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}\right)' =$

$= \frac{2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \cdot \log 2 \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+1} = \frac{\log 2 \cdot 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2}x}{(x^2+1+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)} =$

$= \boxed{\frac{x \cdot \log 2 \cdot 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+2)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}}$

Махмутова Тамила Викторовна, ГЭК 4

INT-14. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan(x)}{\frac{1}{\cos x} + \tan(x)} \, dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} tg(x)}{\frac{1}{\cos x} + tg(x)} \, dx =$$

замена перем.: $u = \frac{1}{\cos x} + tg(x)$

$$du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \left(\frac{\sin(x) + 1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx = \left(\frac{tg(x)}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \boxed{\ln \left| \frac{1}{\cos x} + tg(x) \right| + c}$$

Махмутова Полина Викторовна ГЭК-4

ODE-15. Найти вид общего реш-я линейного неоднородного дифференц. ур-а (не вычис. коэф. част. реш-й):

$$y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$$

Решение. Решаем однородное ур-е:

$$y'' + 4y = 0.$$

$\lambda^2 + 4 = 0$ $\quad \lambda = \pm 2i \Rightarrow y_{одноp.} = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x.$

Найдем частное реш-е. $\quad y'' + 4y = f(x).$

~~Для части y''+4y 1-я часть~~ 1-я часть $f(x) = 2\sin 2x - 3\cos 2x$; 2-я $_{част}$ $= 1$

т.к. $\lambda = \pm 2i \rightarrow$ реш-е хар. ур-я $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{1\text{-я част}} = A_1 x \cdot \sin 2x + A_2 x \cos 2x$$

$$y_{2\text{-я част.}} = B_1.$$

Ответ. $\boxed{y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + A_1 x \sin 2x + A_2 x \cos 2x + B_1,}$

где C_1, C_2 - произв. величины,

A_1, A_2, B_1 - фиксир. коэф.

Махмутова Полина Викторовна ГЭК 4

SER. 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, 3^n}$$

Решение Применим признак сх-ти рядов D'Аламбера.:

Если для чис. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ существует такое число q, $0<q<1$, что, начиная с некот номера ($\exists N: \forall n>N$) вып. нер-во:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$, то ряд абс. сход., если нее

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 \Rightarrow$ расход.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, 3^{n+1}} \cdot \frac{n!\, 3^n}{n^n} = \lim \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{3\cdot \cancel{(n+1)}\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ряд сходится.}}$