Кормушкин Матвей. 409 гр

**№1.2** Исследовать устойчивость при $\theta \in [0,1]$.

$$\theta \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta) \cdot \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k.$$

Составляем хар. ур для левой части:

$$\theta \cdot (\mu^{k+1} - \mu^k) + (1-\theta) \cdot (\mu^k - \mu^{k-1}) = 0$$

+

$$\theta \cdot (\mu^2 - \mu) + (1-\theta)(\mu - 1) = 0$$

$$\theta \mu^2 + (1-2\theta)\mu - (1-\theta) = 0$$

$$D = (1-2\theta)^2 + 4(1-\theta)\cdot\theta = 1 - 4\theta + 4\theta^2 + 4\theta - 4\theta^2 = 1$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{2\theta - 1 \pm 1}{2\theta} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 1 - \frac{1}{\theta} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ чтобы $|\mu_{1,2}| \leq 1$, то нужно, чтобы $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Также заметим, что при $\theta = 0$ имеем ур-ние:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k.$$

Хар. ур: $\mu - 1 = 0$, $\Rightarrow \mu = 1$ $\leftarrow$ также подходит.

$\Rightarrow$ Схема $\alpha$-устойчива при $\theta \in \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$

---

**№1.1** $y' = f(x)$. Схема с наивысшим пор-ком аппрокс. на решении:

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}$$

Перенумеруем:

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = a_1 f_{k+1} + a_0 f_k + a_{-1} f_{k-1}, \quad f_k = f(x_k)$$

$$[y]_{y_h} = \begin{pmatrix} \vdots \\ y(x_k) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad [f]_{F_h} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f(x_k) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Аппрокс. на решении:

$$\| L_h[y]_h - f_h \|_{F_h} = \max_{x_k} \left| \frac{y(x_k+h) - y(x_k-h)}{2h} - (a_1 f(x_k+h) + a_0 f(x_k) + a_{-1} f(x_k-h)) \right|$$

Разложим все слагаемые по Тейлору:

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x_k) + O(h^5)$$

$$f(x_k \pm h) = f(x_k) \pm h f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + O(h^4)$$

Итого получим:

$$\max_{x_k} \Big| y'(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + O(h^4) - \Big( (a_1 + a_0 + a_{-1}) \underbrace{f(x_k)}_{=y'(x_k)} + (a_1 - a_{-1}) h \underbrace{f'(x_k)}_{=y''(x_k)} +$$

$$+ (a_1 + a_{-1}) h^2 \frac{\overset{=y'''(x_k)}{f''(x_k)}}{2} + (a_1 - a_{-1}) \frac{h^3}{6} \overset{=y^{IV}(x_k)}{f'''(x_k)} + O(h^4) \Big) \Big|$$

Чтобы получить max порядок, зануляем коэфф-ты при степенях $h$:

при $h^0$: $1 - a_1 - a_0 - a_{-1} = 0$

при $h$: $a_1 - a_{-1} = 0$

при $h^2$: $\frac{1}{6} - \frac{a_1}{2} - \frac{a_{-1}}{2} = 0$

при $h^3$: $\frac{a_1 - a_{-1}}{6} = 0$ (эквив. второму ур-нию)

Получим систему:

$$\begin{cases} 1 - a_1 - a_0 - a_{-1} = 0 \\ a_1 = a_{-1} \\ \frac{1}{6} - \frac{a_1}{2} - \frac{a_{-1}}{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6} \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3}$$

+ ) Надо проверить, что вып-тся: $\|[f]_h - f_h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$:

$$\max_{x_k} \Big| f(x_k) - \Big(\underbrace{\frac{1}{6} f(x_k+h)}_{\frac{1}{6}f(x_k)+O(h)} + \frac{2}{3} f(x_k) + \underbrace{\frac{1}{6} f(x_k - h)}_{\frac{1}{6}f(x_k)+O(h)}\Big) \Big| = \max\Big|f(x_k)\underbrace{\Big(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\Big)}_{=0} + O(h)\Big| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ схема

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = \frac{1}{6} f_k + \frac{2}{3} f_{k-1} + \frac{1}{6} f_{k-2}$$

имеет max порядок апр-ции на решении, равный 4.

$\boxed{\text{N1.3}}$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

схема: $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_{k+1} + y_k}{2}$, $y_0 = 1$, $k \geq 0$

Перепишем схему как: $y_{k+1}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\right) = y_k\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow y_{k+1} = \frac{\frac{1}{h} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{h} - \frac{1}{2}} \cdot y_k = \left(\frac{2+h}{2-h}\right) \cdot y_k$$

$$\longrightarrow y_N = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N \cdot \overset{=1}{y_0} = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N$$

Решение дифф. ур-ния: $y(x) = e^x$, $x_N = Nh = 1 \Rightarrow y(x_N) = e$. $\longrightarrow$

$$\Rightarrow y(x_N)-y_N = e-\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N = e-e^{N\cdot \ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right)} =$$

$$\frac{h}{2}-\left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{h}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+O(h^4)$$

$$= e-e^{\frac{1}{h}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)\right)} = e-e^{\frac{1}{h}\left(\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)-\ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)} =$$

$$= e-e^{\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+\left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{3}+O(h^4)\right)} = e-e^{1+O(h^3)} =$$

$$= e\Big(1-\underbrace{e^{O(h^2)}}_{1-O(h^2)}\Big) = e\cdot(1-1+O(h^2)) = O(h^2)$$

$$\Longrightarrow C_1 = 0$$

**N4** $\begin{cases} y'+5y=\sin 2x \\ y(0)=2 \end{cases}$ . Построить двухточечн. схему 2-го пор-ка сход-ти.

По т-ме Филиппова надо док-ть аппр-цию на решении 2ого пор-ка и α-устойчивость.

Рассм-м схему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1}-y_k}{h}+5\,\dfrac{y_{k+1}+y_k}{2}=\dfrac{f_{k+1}+f_k}{2}, \text{ где } f_k=f(x_k)=\sin 2x_k \\ y_0=2 \end{cases}$$

Берем стандартные проекторы. Аппр-ция на решении:

$$\|L_h[y]_h-f_h\| = \max_{x_k}\left|\frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h}+5\cdot\frac{y(x_k+h)+y(x_k)}{2}-\frac{f(x_k+h)+f(x_k)}{2}\right| \longrightarrow$$

Ряд Тейлора:

$y(x_k+h) = y(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h}{2}y'(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{1h^2}{24}\cdot y''(x_k+\frac{h}{2}) +$

$y(x_k) = y(x_k+\frac{h}{2}) - \frac{h}{2}y'(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8}y''(x_k+\frac{h}{2}) -$

и анал-но для f:

Получаем: $\max\limits_{x_k} \left| y'(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^2) + 5y(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^2) - \right.$

$\left. - \left( \underset{\substack{\| \\ y'(x_k+\frac{h}{2})+5y(x_k+\frac{h}{2})}}{f(x_k+\frac{h}{2})} + O(h^2) \right) \right| = O(h^2).$

Проверим теперь: $\|[f]_h - f_h\| = \max\limits_k \left| f(x_k) - \frac{f(x_k+h)+f(x_k)}{2} \right| = O(h) \to 0$ при $h \to 0$.

$= f(x_k) + \cancel{\ \ } + O(h)$

нач. условия совп. => аппроксим-ция на решении 2ого пор-ка

2-устойчивость:

Хар-ур: $\mu - 1 = 0$, => $|\mu| \le 1$ => она есть.

=> по т-ме Филиппова схема:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1}-y_k}{h} + 5\cdot\frac{y_{k+1}+y_k}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin(2kh)+\sin(2(k+1)h)\right) \\ y(0)=2 \end{cases}$$

имеет 2ой порядок сх-ти.

$\boxed{N5}$ $u''-2u = \sin x - 1$. Положим $x_0=0$, $x_1=h$ построить аппрокс-цию условия: $u'(0)-u(0)=0$.

$u(h) = u(0) + hu'(0) + \frac{h^2}{2}u''(0) + O(h^3)$

$\Rightarrow u'(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2)$ (*)

Для $u''(0)$ справедливо:

$u''(0) - 2u(0) = \sin(0) - 1 = -1$

$\Rightarrow u''(0) = 2u(0) - 1$. Подставляем это в (*):

Получим: $u'(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0)-1) + O(h^2) \to$

$\Rightarrow u'(0) - u(0) = \frac{u(h)-u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0)-1) - u(0) + O(h^2)$

Обозначим $\cancel{u(0)=u_0}$ $u(0)=u(x_0)=u_0$

$u(h)=u(x_1)=u_1$

и получим, что ур-ние $\frac{u_1-u_0}{h}-\frac{h}{2}(2u_0-1)-u_0=0$

аппроксимирует краевое усл-ие $u'(0)-u(0)=0$

~~с порядком~~ с точностью $O(h^2)$.

Ответ: $\frac{u_1-u_0}{h}-\frac{h}{2}(2u_0-1)-u_0=0$.

$\boxed{N6}$ $-u''(x)+pu(x)=f(x),\ p=const>0.$

$u(0)=a$

$u'(1)=b$.

Берем схему:

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+py_k=f_k \\ y_0=a \\ \frac{y_N-y_{N-1}}{h}=b+\delta,\ \delta \text{ определим позднее.} \end{cases}$$

Аппр. на решении:

- $\|L_h[y]_h-f_h\|=\max\limits_{x_k}\big|\underbrace{-y''(x_k)+O(h^2)+py(x_k)}_{-y''(x_k)+py(x_k)}-f(x_k)\big|=O(h^2)$
- $\|l_h[y]_h-\varphi_h\|=\max\limits_{x_k}\{|\overset{=0}{y(0)-a}|,\ |\frac{y(1)-\overbrace{y(1-h)}^{y(1)-hy'(1)+y''(1)\frac{h^2}{2}+O(h^3)}}{h}-b-\delta|\}=$

$=|y'(1)+y''(1)\frac{h}{2}-\delta-b+O(h^2)|$

$\Rightarrow$ возьмем $\delta=y''(1)\frac{h}{2}$

$\underset{(f(1)-py(1))\frac{h}{2}}{\parallel}$

$$\Rightarrow \text{схема} \begin{cases} -\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+py_k=f_k \\ y_0=a \\ \frac{y_N-y_{N-1}}{h}=b+\frac{h}{2}(f(1)-py(1)) \end{cases}$$

- $\|[f]_h-f_h\|=0$

Устойчивость: Н.д. что: $\|y^1-y^2\|\leq C\cdot\|f^1-f^2\|$

где $y^1,y^2$ – ~~реш~~ реш-ние задач:

1) $Ay^1=f^1$

2) $Ay^2=f^2$

Вычтем: 1) − 2) получим что: $A(\underset{\overset{\parallel}{y}}{y^1 - y^2}) = (\underset{\overset{\parallel}{F}}{F^1 - F^2})$

т.е. ~~ур~~ разность тоже удовл. системе ур-ний.

т.е. надо док-ть, что:

$$\|y\| \le C \cdot \|F\|.$$

М-ца $A$ в нашем случае:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + p & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p & -\frac{1}{h^2} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p \end{pmatrix}$$

$\|A\|_2 = \lambda_{max}(A) \Rightarrow \|A^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_{min}(A)}$, если $A = A^T$

↑ наш случай.

Собств. значения м-цы $A$:

$$\lambda_{min}(A) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2} + p \ge \frac{4}{h^2}\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2 h^2}{4} + p$$

$\sin\beta > \frac{2}{\pi}\beta$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$

Заметим, что если $Ay = F$

то $y = A^{-1}\cdot F \Rightarrow \|y\| \le \|A^{-1}\|\cdot F$.

А мы только что док-ли оценку сверху для $\|A^{-1}\|_2$

а согласованность норм: возьмем $\|u\|_{2,h} = \left(\sum u_i h\right)^{\frac{1}{2}}$

и $\|A^{-1}\|_2 \overset{\le C}{=} \|A^{-1}\|_{2,h}$

$\Rightarrow \|y\|_{2,h} \le C\cdot\|f\|_{2,h}$

$\Rightarrow$ по Т-ме Филиппова:

$$\begin{cases} 1)\; Ly = F \\ 2)\; ly = \varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} 3)\; L_h y_h = f_h \\ 4)\; l_h y_h = \varphi_h \end{cases}$$

решение 3-4 сх-тся к решению 1-2 с порядком не хуже чем 2, т.е. $\|[y]_h - y_h\| \le C\cdot h^2$.

Т.к. вып-ны все условия:

1) 1-2 и 3-4 линейная ✓
2) ∃! реш-ние задачи 1-2 ✓
3) есть апр-ция на решении с порядком 2 ✓
4) разн. схема устойчива ✓