Как находить функционалы влияния в общей ситуации

Пусть оценка $\hat{\beta}_n$ ищется как корень уравнения

(1) $l_n(\theta) := n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) = 0.$

Пусть выполнены следующие условия.

(i) $l_n(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) \xrightarrow{P} \Delta(\gamma,\theta)$ при всех $|\theta-\beta|<\delta$, $0\le\gamma<\gamma_0$.

(ii) $\Delta(0,\beta)=0$.

(iii) Пусть $\Delta(\gamma,\theta)$ можно продолжить на отр. малые γ так, что при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ существуют и непрерывны по паре аргументов (γ,θ) частные производные $\frac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$

(iv) Пусть $\lambda(\beta) := \frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\theta} \neq 0.$

Теорема 1 Пусть вып. усл. (i)-(iv), и ф-ии $\varphi_t(y_n,\theta)$ непр по θ. Тогда ур-ие (1) с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, имеет при дост. малых γ такое решение $\hat{\beta}_n$, что соответствующая оценка $\tilde{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, $\theta_0=\beta$, и существует функционал влияния

$$\boxed{IF(\theta_\gamma,\mu_\xi) = -(\lambda(\beta))^{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\Delta(0,\beta).}$$

Пример. (AR(1) - модель)

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, $|\beta| < 1$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р.,

$E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$. Пусть наблюдаются

$$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t, \quad t = 0, 1, \dots, n;$$

$\{z_t^\gamma\}$ - н.о.р., $z_1^\gamma \sim Bi(\gamma)$ и $0 \le \gamma \le 1$; $\{\xi_t\}$ - н.о.р.,

$\xi_1 \sim \mu_\xi$, $\mu_\xi \in M_2$, т.е. $E\xi_1^2 < \infty$;

посл. $\{u_t\}$, $\{z_t^\gamma\}$, $\{\xi_t\}$ независимы между собой.

Пусть $\hat{\beta}^y_{n,LS} = \sum_{t=1}^n y_{t-1} y_t \Big/ \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2$

- о.н.к., построенная по засоренным данным $\{y_t\}$. Найдем ее функционал влияния.

Оценка $\hat{\beta}^y_{n,LS}$ - корень уравнения

$$l_{n,LS}(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^n y_{t-1}(y_t - \theta y_{t-1}) = 0.$$

Проверим все условия Теоремы 1.

(i) ~~$\beta_{n,LS} \to \theta$~~ Предп. дополнительно, что сущ. пл. в. $\varepsilon_1 \sim g(x)$. Тогда посл. $\{u_t\}$ удовл. усл. с.п., а т.к. $\{z_t^\gamma \xi_t\}$ - послед. н.о.р. сл.в., то и посл. $\{y_t\}$ уд. усл. с.п. Значит, в силу З.Б.Ч. для посл. с с.п. выполнено

(i) $l_{n,LS}(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}(y_t - \theta y_{t-1}) \xrightarrow{P} E y_0(y_1 - \theta y_0)$, θ - любое, $0 \le \gamma \le 1$

т.е. $\Lambda_{LS}(\gamma, \theta) = E y_0(y_1 - \theta y_0)$.

Пусть $H_{00} = (z_0^\gamma = 0, z_1^\gamma = 0)$, $H_{01} = (z_0^\gamma = 0, z_1^\gamma = 1)$, $H_{10} = (z_0^\gamma = 1, z_1^\gamma = 0)$, $H_{11} = (z_0^\gamma = 1, z_1^\gamma = 1)$

Тогда $\Lambda_{LS}(\gamma, \theta) = \sum_{i,j=0}^{1} E(y_0(y_1 - \theta y_0)/H_{ij}) P(H_{ij}) =$

$= (1-\gamma)^2 E u_0(u_1 - \theta u_0) + (1-\gamma)\gamma E u_0(u_1 + \xi_1 - \theta u_0) +$

$+ \gamma(1-\gamma) E(u_0 + \xi_0)(u_1 - \theta u_0 - \theta \xi_0) +$

$+ \gamma^2 E(u_0 + \xi_0)(u_1 + \xi_1 - \theta u_0 - \theta \xi_1)$

значит, ф-ия $\Lambda_{LS}(\gamma, \theta)$ определена при всех γ и θ.

(ii) $\Lambda_{LS}(0, \beta) = E u_0(u_1 - \beta u_0) = E u_0 \xi_1 = 0$.

(iii) $\frac{\partial \Lambda_{LS}(\gamma, \theta)}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \Lambda_{LS}(\gamma, \theta)}{\partial \theta}$ сущ. и непр. по паре (γ, θ) при $\gamma \in R^1$, $\theta \in R^1$

$$\frac{\partial \Lambda_{LS}(0, \beta)}{\partial \gamma} = -\beta E \xi_0^2, \quad \frac{\partial \Lambda_{LS}(0, \beta)}{\partial \theta} = -E u_0^2.$$

(iv) $\lambda(\beta) = -E u_0^2 = -\frac{E\xi_1^2}{1-\beta^2} < 0$

Т.к. $\psi_t(y_0, \theta)$ непр., то

Док-во Теоремы 1

Шаг 1) Рассмотрим уравнение $\Delta(\gamma,\theta)=0$.

Для функции $\Delta(\gamma,\theta)$ при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ выполнены все условия Теоремы о существовании неявной функции. Поэтому в некоторой окрестности точки $(0,\beta)$ существует ф-ия $\theta(\gamma)=\theta_\gamma$ такая, что:

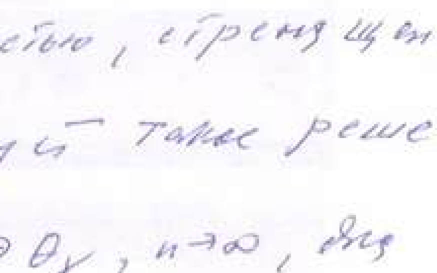
1) $\Delta(\gamma,\theta_\gamma)=0$; 2) ф-ия θ_γ непрерывна по γ, т.е. $\theta_\gamma\to\theta_0=\beta$ при $\gamma\to 0$; 3) θ_γ непрерывно дифференцируема по γ и

$$\boxed{\left.\frac{d\theta_\gamma}{d\gamma}\right|_{\gamma=0}=-\left(\lambda(\beta)\right)^{-1}\frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\gamma}}$$

Шаг 2) Покажем, что с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$ существует такое решение $\hat\beta_n$ ур-ия (1), что $\hat\beta_n\xrightarrow{P}\theta_\gamma$, $n\to\infty$, для малых $\gamma\geq 0$.

Пусть для определенности $\lambda(\beta)=\dfrac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\theta}<0$.

Т.к. $\dfrac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ непрерывна по паре (γ,θ), то при малых $\gamma\geq 0$ и θ вблизи β $\dfrac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}<0$.



Значит, при малом $\Delta>0$

$$(2)\quad n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\psi_t(y_n,\theta_\gamma-\Delta)\xrightarrow{P}\Delta(\gamma,\theta_\gamma-\Delta)>0.$$

Тогда левая часть (2) больше нуля на мн-ве

$$IF(\theta_\gamma^{LS}, \mu_q) = -\left(\frac{\partial \Lambda_{LS}(\theta,\beta)}{\partial \theta}\right)^{-1} \frac{\partial \Lambda_{LS}(\theta,\beta)}{\partial \gamma} =$$

$$= \left(-\beta E\xi_0^2\right) \Big/ \left(-\frac{E\xi_1^2}{1-\beta^2}\right) = \boxed{-\beta(1-\beta^2)\cdot\frac{E\xi_0^2}{E\xi_1^2}}$$

Очевидно, при $\beta \neq 0$

$GES(\theta_\gamma^{LS}, M_2) = \infty$, т.е. $\hat{\beta}^{\gamma}_{n,LS}$ не В-роб.

S_{1n}^{Δ}, и $P(S_{1n}^{\Delta}) \to 1$, $n \to \infty$. Т.е.

$P(S_{1n}^{\Delta}) \geq 1 - \delta/2$ для $n > n_0$ при любом $\delta > 0$.

Аналогично,

(3) $n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma + \Delta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma, \theta_\gamma + \Delta) < 0$.

Т.е. левая часть (3) меньше нуля на мн-ве

S_{2n}^{Δ}, $P(S_{2n}^{\Delta}) \geq 1 - \delta/2$, $n > n_0$

Получаем: на мн-ве $S_n^{\Delta} = S_{1n}^{\Delta} \cdot S_{2n}^{\Delta}$ таком, что $P(S_n^{\Delta}) \geq 1 - \delta$, $n > n_0$ вып. одновр. нер-ва:

$$\begin{cases} n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma - \Delta) > 0 \\ n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma + \Delta) < 0 \end{cases}$$

Т.к. ф-ия $n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta)$ непрерывна по θ,

то $\forall \omega \in S_n^{\Delta}$ в инт. $(\theta_\gamma - \Delta, \theta_\gamma + \Delta)$ есть корень $\hat{\beta}_n^{\Delta}$.

Пусть $S_n = \{\omega :$ ур-ие (1) имеет решение$\}$.

Тогда $P(S_n) \geq P(S_n^{\Delta}) \geq 1 - \delta$, $n > n_0$.

Т.е. $P(S_n) \to 1$, $n \to \infty$.

Пусть $\hat{\beta}_n$ - ближайший к θ_γ корень ур-ия (1)

Тогда

$$P(|\hat\beta_n - \theta_\gamma| \le \Delta, S_n) \ge P(|\hat\beta_n^\Delta - \theta_\gamma| \le \Delta, S_n^\Delta),$$

т.к. $(\omega: |\hat\beta_n^\Delta - \theta_\gamma| \le \Delta) \in (\omega: |\hat\beta_n - \theta_\gamma| \le \Delta)$, $S_n^\Delta \subseteq S_n$.

Но $P(|\hat\beta_n^\Delta - \theta_\gamma| \le \Delta, S_n^\Delta) = P(S_n^\Delta) > 1-\delta$, $n \ge n_0$.

т.е. $\boxed{P(|\hat\beta_n - \theta_\gamma| \le \Delta, S_n) \to 1, \ n \to \infty}$

<u>Шаг 3</u> Пусть $\underbrace{\tilde\beta_n}_{\text{оценка}} = \begin{cases} \hat\beta_n, & \omega \in S_n, \\ \text{любое } \beta', & \omega \in \bar S_n. \end{cases}$

$\tilde\beta_n$ – оценка, соответствующая $\hat\beta_n$. Покажем, что

$$\tilde\beta_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma, \ n \to \infty.$$

Имеем: $P(|\tilde\beta_n - \beta| \le \Delta) = P(|\hat\beta_n - \beta| \le \Delta, S_n) +$

$+ P(|\beta' - \beta| \le \Delta, \bar S_n) \ge P(|\hat\beta_n - \beta| \le \Delta, S_n) \to 1, n \to \infty$

Итак, $\boxed{\begin{aligned} &\tilde\beta_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma, \ \theta_0 = \beta, \\ &IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = -(\lambda(\beta))^{-1} \frac{\partial \Lambda(0,\beta)}{\partial \gamma} \end{aligned}}$

Теорема 1 полностью доказ.

<u>Пример</u>

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t \\ y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t \end{cases}$$

$E\xi_1 = 0$, $\xi_1 \sim g(x)$ пл.в., $g(x) = g(-x)$. Оценка θ – корень ур-ия

$$\sum_{t=1}^{n} [\Phi(y_t - \theta) - 1/2] = 0,$$

$\Phi(x)$ – ф.р. $N(0,1)$.

Это уравнение всегда имеет решение и только одно. Обозначим его $\hat{a}_n$.

Имеем: $n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\left[\Phi(y_t-\theta)-1/2\right]\xrightarrow{P}\Lambda(\gamma,\theta)$,

$$\Lambda(\gamma,\theta)=E\Phi(y_1-\theta)-\frac{1}{2}=E\Phi\left(\varepsilon_1+a+z_1^{\gamma}\overset{-\theta}{\xi_1}\right)-\frac{1}{2}=$$

$$=(1-\gamma)E\Phi(\varepsilon_1-(\theta-a))+\gamma E\Phi(\varepsilon_1-(\theta-a)+\xi_1)-\frac{1}{2}.$$

$$\Lambda(0,a)=E\Phi(\varepsilon_1)-1/2=0.$$

$$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\gamma}=-E\Phi(\varepsilon_1)+E\Phi(\varepsilon_1+\xi_1)=$$

$$=E\Phi(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial\Lambda(0,a)}{\partial\theta}=-E\varphi(\varepsilon_1),\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\Phi'(x).$$

$$IF(\theta_\gamma,\mu_\xi)=\frac{E\Phi(\varepsilon_1+\xi_1)-\frac{1}{2}}{E\varphi(\varepsilon_1)},$$ μ_ξ – любое

$GES(\theta_\gamma,\mu_\xi)<\infty$, $\hat{a}_n$ – B-робастна.

Раздел X. Обобщенные М-оценки в авторегрессии

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\quad t=1,2,\dots;\quad u_0=0,\ \beta\in R^1$$

Наблюдения $u_1,\dots,u_n$. Пусть $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1=0$, $0<E\varepsilon_1^2<\infty$, $\varepsilon_1 \sim g(x)=G'(x)$

Ур-ие правдоподобия

$$(1)\qquad \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\,\frac{g'(u_t-\theta u_{t-1})}{g(u_t-\theta u_{t-1})}=0$$

Пусть $\varepsilon_t(\theta):=u_t-\theta u_{t-1}$, это остатки.

Непараметрический аналог (1) – ОМ-ур-ие

$$(2)\qquad \sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\,\psi(\varepsilon_t(\theta))=0$$

Дальше рассм. стац. AR(1) модель

$$(3)\qquad u_t=\beta u_{t-1}+\varepsilon_t,\quad t\in Z,\quad |\beta|<1$$

Δ. Процесс $u_n(x,\theta):=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varphi(u_{t-1})\,I(\varepsilon_t(\theta)\le x)$

наз-ся остаточным эмпирическим процессом.

(Название по аналогии с классич. эмп. процессом $v_n(x):=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\left[I(\varepsilon_t\le x)-G(x)\right]$

У нас, кстати, $\varepsilon_t(\beta)=\varepsilon_t$.)

Как исследовать ур-ие (2)?

Частные случаи:

1) $\varphi(x)=\psi(x)=x$, $\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}(u_t-\theta u_{t-1})=0$,

$\hat{\beta}_{n,LS}=\sum_t u_{t-1}u_t \Big/ \sum_t u_{t-1}^2$.

2) $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=\operatorname{sign} x$, тогда

$$\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\operatorname{sign}(u_t-\theta u_{t-1}) \doteq 0.$$

Решение - оценка $\hat{\beta}_{n,LD}$, явл. реш. зад.

$$\sum_{t=1}^{n} |u_t-\theta u_{t-1}| \to \min_\theta$$

3) $\varphi(x)=\psi(x)=\operatorname{sign} x$,

$$\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1}\operatorname{sign}(u_t-\theta u_{t-1})=0.$$

Одно из реш. - мед. $\hat{\beta}_{n,M}$ массива $\{u_t/u_{t-1}\}$

4) $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=g'(x)/g(x)$

$$\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}\frac{g'(u_t-\theta u_{t-1})}{g(u_t-\theta u_{t-1})}=0$$ - ур-ие правд.

Как изучать ур-ие (2) при ~~разр.~~ произв. ψ?

Пусть $l_n(\theta):=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t(\theta))$.

Для непр. ψ

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,d u_n(x,\theta)=n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varphi(u_{t-1})\times$

$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,d\,I(\varepsilon_t(\theta)\le x)=$

$$= n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1}) \psi(\varepsilon_t | \theta)) = l_n(\theta).$$

Чтобы знать поведение $l_n(\beta + n^{-1/2}\tau)$ при $|\tau| \le c$ надо знать поведение $\tilde{u}_n(x, \beta + n^{-1/2}\tau)$!

Теорема об АИh о.э.пр. (MMS, Boldin, 2002)

Пусть вып. условия:

(i) $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 < \infty$;

(ii) $\sup_x |\varphi(x)| < \infty$;

(iii) $g(x) > 0$, $\sup_x |g'(x)| < \infty$.

Тогда при любом конечном $\Theta \ge 0$

$$\sup_{x, |\tau| \le \Theta} | u_n(x, \beta + n^{-1/2}\tau) - u_n(x, \beta) - g(x) E[u_1 \varphi(u_1)]\tau | \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty.$$

Итак, $u_n(x, \beta + n^{-1/2}\tau) = u_n(x, \beta) + g(x) E[u_1 \varphi(u_1)]\tau + \varepsilon_n(x, \tau)$,

$$\sup_{x, |\tau| \le \Theta} |\varepsilon_n(x, \tau)| \xrightarrow{P} 0.$$

Следствие 1 Пусть выполнены усл. теор. об АИh, $\mathrm{Var}_{-\infty}^{\infty}[\psi] < \infty$, ($\psi$ непр.) Тогда для $0 \le \Theta < \infty$

$$\sup_{|\tau|\le \Theta} \Big| l_n(\beta+n^{-1/2}\tau) - l_n(\beta) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\psi(x) \times$$

$$\times E[u_1 \varphi(u_1)]\,\tau \Big| = o_p(1),\ n\to\infty.$$

Док-во. $l_n(\beta+n^{-1/2}\tau) - l_n(\beta) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, d\left[u_n(x, \beta+n^{-1/2}\tau) - u_n(x,\beta)\right] =$$

$$= \psi(x)\left[u_n(x,\beta+n^{-1/2}\tau) - u_n(x,\beta)\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty}\left[u_n(x,\beta+n^{-1/2}\tau) - u_n(x,\beta)\right] d\psi =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ g(x)\, E[u_1\varphi(u_1)]\,\tau + \varepsilon_n(x,\tau)\right\} d\psi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\psi(x)\cdot E[u_1\varphi(u_1)]\,\tau + o_p(1),$$ где

$o_p(1)$ стрем. к нулю по вер. равн. по $|\tau|\le\Theta$.

Действительно, $\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x,\tau)\, d\psi\right| \le$

$$\le \sup_{x,\ |\tau|\le\Theta} |\varepsilon_n(x,\tau)|\ \mathrm{Var}_{-\infty}^{\infty}[\psi] = o_p(1),\ n\to\infty$$

ч. т. д.

Итак, $l_n(\beta+n^{-1/2}\tau) = l_n(\beta) + \lambda(\beta)\tau + o_p(1)$,

где $\lambda(\beta) = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\psi(x)\cdot E[u_1\varphi(u_1)]$,

$o_p(1)$ стрем. к нулю по вер. равн. по $|\tau|\le\Theta$.

△ Посл. $\{\xi_n\}$ огр. по вер. (пишем $\xi_n = O_p(1)$), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A: \ \sup\limits_n P(|\xi_n| > A) < \varepsilon$

<u>Задача</u>

① если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $\xi_n = O_p(1)$;

② Если $\sup\limits_n E|\xi_n|^\alpha < \infty$ при нек. $\alpha > 0$, то $\xi_n = O_p(1)$;

③ если $\xi_n = O_p(1)$, $\eta_n = o_p(1)$, то $\xi_n + \eta_n = O_p(1)$, $\xi_n \eta_n = o_p(1)$.

<u>Следствие 2</u>

Пусть выполн. усл. Следствия 1. Пусть $n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta) = O_p(1)$. Тогда

$$l_n(\hat\beta_n) = l_n(\beta) + \lambda(\beta)\, n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta) + \underset{n\to\infty}{o_p(1)},$$

Док-во. Очевидно,

$$\underline{l_n(\hat\beta_n) = l_n(\beta + n^{-1/2} \cdot \overbrace{n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta)}^{\tau?})}$$

Имеем: $P\left(|l_n(\hat\beta_n) - l_n(\beta) - \lambda(\beta)\, n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta)| > \varepsilon\right)$

$= P(|\ldots| > \varepsilon, \ |n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta)| \le \Theta) +$

$+ P(|\ldots| > \varepsilon, \ |n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta)| > \Theta) \le$ 26 марта 2018 г.

$\le P\left(\sup\limits_{|\tau| \le \Theta} |l_n(\beta + n^{-1/2}\tau) - l_n(\beta) - \lambda(\beta)\tau| > \varepsilon\right) +$

$+ P\left(\left|n^{1/2}(\hat{\beta}_n - \beta)\right| > \Theta\right) < \delta + \delta = 2\delta \quad \forall n > n_0.$ ч.т.д.

Теорема 1 (об ас. норм. ВМ-оценок)

Пусть вып. усл. теор. об АИЛ. Пусть

$E\psi(\varepsilon_1) = 0$, $\lambda(\beta) = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,d\psi(x) \cdot E[u_1 \varphi(u_1)] \neq 0$

$\mathrm{Var}_{-\infty}^{\infty}[\psi] < \infty$. Пусть $\psi(x)$ непр. Тогда:

① С вероятн., стрем. к ед. при $n \to \infty$, ур-ие $L_n(0) = 0$ имеет $n^{1/2}$-сост. решение;

② Для соотв. оценки $\hat{\beta}_{n,BM}$ справедливо разложение

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,BM} - \beta) = -[\lambda(\beta)]^{-1} L_n(\beta) + o_p(1);$$

③ $n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,BM} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2_{\varphi,\psi}(\beta))$, где

$$\sigma^2_{\varphi,\psi}(\beta) = \frac{E\varphi^2(u_1)\, E\psi^2(\varepsilon_1)}{\lambda^2(\beta)}.$$

Каковы опт. $\varphi(x)$, $\psi(x)$?

Надо решить задачу

$$\left\{ \sigma^2_{\varphi,\psi}(\beta) = \frac{E\varphi^2(u_1)\, E\psi^2(\varepsilon_1)}{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,d\psi(x) \cdot E[u_1 \varphi(u_1)]\right\}^2} \to \min_{\varphi,\psi} \right.$$

Имеем:

1) $\left|E[u_1\varphi(u_1)]\right|^2 \le Eu_1^2\, E\varphi^2(u_1)$ и рав.

при $\varphi(x) = c_1 x$, [illegible]

2) $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,d\psi(x)\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,g'(x)\,dx\right)^2 =$

$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\sqrt{g(x)}\cdot g'(x)/\sqrt{g(x)}\,dx\right)^2 \le$

$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)\,g(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(g'(x)\right)^2/g(x)\,dx =$

$= E\psi^2(\varepsilon_1)\cdot i(g)$, $i(g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(g')^2}{g}\,dx$.

Итак, $\left\{\int g\,d\psi\, E[u_1\varphi(u_1)]\right\}^2 \le E\psi^2(\varepsilon_1)\cdot i(g)$

т.е. $\sigma^2_{\varphi,\psi}(\beta) \ge \frac{E\varphi^2(u_1)\,\cancel{E\psi^2(\varepsilon_1)}}{i(g)\,\cancel{E\psi^2(\varepsilon_1)}\cdot Eu_1^2} =$

$E\varphi^2(u_1)$

$= \cancel{E\varphi^2(u_1)\,E\,g'(\varepsilon_1)/g(\varepsilon_1)}$

$= \frac{1-\beta^2}{E\varepsilon_1^2\cdot i(g)}$

и рав. дост. при $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = g'(x)/g(x)$.

Т.е. для о.н.п. !

Док-во теоремы 2

1) Напомним, $l_n(\theta) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi(u_t - \theta u_{t-1})$.

Значит, $l_n(\beta) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t)$.

Последоват. $\{\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t)\} = \{\varphi(u_{t-1})\psi(u_t - \beta u_{t-1})\}$ - строго стац. посл. с с.п., коэффиц. перемешивания $\alpha(\tau) \le C\lambda^\tau$, $0<\lambda<1$.

Далее, $E\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) = E\varphi(u_{t-1})E\psi(\varepsilon_t) = 0$, т.к. $E\psi(\varepsilon_1)=0$; $E|\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t)|^{2+\delta}<\infty$, $\delta>0$, т.к. φ и ψ ограничены. В силу ц.п.т. для последоват. с с.п.

$$n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varphi(u_{t-1})\psi(\varepsilon_t) \xrightarrow{d} N(0,\Delta^2),\quad n\to\infty,$$

где
$$\Delta^2 = E[\varphi(u_0)\psi(\varepsilon_1)]^2 + 2\sum_{\tau\ge 1} E[\varphi(u_0)\psi(\varepsilon_1)\times \varphi(u_\tau)\psi(\varepsilon_{1+\tau})] = \underline{E\varphi^2(u_0)E\psi^2(\varepsilon_1)} > 0.$$

2) Пусть $S_n = \{\omega:$ ур-ие $l_n(\theta)=0$ имеет решение$\}$.

Пусть для определенности

$$\lambda(\beta) := -\int_{-\infty} g(x)\,d\psi(x)\,E[u_1\varphi(u_1)] < 0.$$

В силу Следствия 2, если $n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta) = O_p(1)$, то

(4) $$l_n(\hat\beta_n) = l_n(\beta) + \lambda(\beta)\,n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta) + o_p(1),$$

Положим $\hat{\beta}_n := \beta - n^{-1/2}A$, конс. $A>0$.

В силу (4)

(5) $$l_n(\underbrace{\beta - n^{-1/2}A}_{\overset{\shortparallel}{\hat{\beta}_n}}) = l_n(\beta) \underbrace{-\lambda(\beta)A}_{>0} + o_p(1) > 0$$

с вероятн. $\geq 1-\delta$ для $n \geq n_0$ при любом $\delta>0$

и дост. большом A. Действ., $l_n(\beta) = O_p(1)$,

а $\underline{-\lambda(\beta)A}$ >0 можно сделать сколь угодно большим, выбирая A.

Аналогично,

(6) $$l_n(\beta + n^{-1/2}A) = l_n(\beta) + \underbrace{\lambda(\beta)A}_{<0} + o_p(1) < 0$$

с вер. $\geq 1-\delta$ для $n \geq n_0$

при дост. большом $A>0$.

Задача. Если $P(C) \geq 1-\delta$, $P(D) \geq 1-\delta$, то $P(CD) \geq 1-2\delta$

Значит, (5)-(6) вып. одн. на мн-ве S_n^A, $P(S_n^A) \geq 1-2\delta$, $n \geq n_0$.

Тогда при любом $\omega \in S_n^A$ в интервале

(7) $(\beta - n^{-1/2}A, \beta + n^{-1/2}A)$

есть корень $\hat{\beta}_n^A$. (Здесь использ. непр. $l_n(\cdot)$!)

Корень $\hat{\beta}_n^A$ определен на S_n^A и зависит от A

~~Пусть $\hat{\beta}_n$ будет ближ. к β корень в инт. (7) от не зав. от A.~~

~~Тогда $\hat\beta_n$ определен S_n~~ Иначе: $S_n^A \subseteq S_n$, и поэтому

$$P(S_n) \geq \underbrace{}_{P(S_n^A)\geq} 1-2\delta, \quad n \geq n_0. \quad \text{Т.е. } P(S_n) \to 1, \; n\to\infty$$

Пусть $\hat\beta_n$ будет ближ. к β корень ур-ия $l_n(\theta)=0$. Он определен на S_n.

Имеем:

$$P\left(S_n, \left|n^{1/2}(\hat\beta_n-\beta)\right|<A\right) \geq P\left(S_n^A, \left|n^{1/2}(\hat\beta_n^A-\beta)\right|<A\right),$$

т.к. $S_n^A \subseteq S_n$, $\left(\omega: \left|n^{1/2}(\hat\beta_n^A-\beta)\right|<A\right) \subseteq$

$\left(\omega: \left|n^{1/2}(\hat\beta_n-\beta)\right|<A\right)$.

Но $P\left(S_n^A, \left|n^{1/2}(\hat\beta_n^A-\beta)\right|<A\right) = P\left(S_n^A\right) \geq 1-2\delta$,

$n \geq n_0$.

Последнее соотн. означает $n^{1/2}$-состоятельность корня $\hat\beta_n$.

Итак, $n^{1/2}$-сост. корень ур-ия $l_n(\theta)=0$ сущ. с вер., стрем. к единице при $n\to\infty$.

3) Пусть оценка

$$\hat\beta_{n,ВМ} = \begin{cases} \hat\beta_n, & \omega \in S_n, \\ \text{люб. } \beta', & \omega \notin S_n. \end{cases}$$

Тогда имеем:

① $l_n(\hat\beta_{n,ВМ}) = o_p(1)$, т.к.

$$P\left(|l_n(\hat\beta_{n,ВМ})|>\delta\right) = \overbrace{P\left(|l_n(\hat\beta_n)|>\delta, S_n\right)}^{0} +$$

$$+P\left(|l_n(\beta')|>\delta, \overline{S_n}\right) \leq P\left(\overline{S_n}\right) \leq 2\delta, \quad n \geq n_0.$$

② $n^{1/2}(\hat\beta_{n,ВМ}-\beta) = O_p(1)$, т.к. $\forall \delta>0$

$$P\left(\left|n^{1/2}(\hat\beta_{n,ВМ}-\beta)\right|<A\right) = P\left(\left|n^{1/2}(\hat\beta-\beta)\right|<A, S_n\right),$$

$+ P\left(|n^{1/2}(\hat\beta_n - \beta)| < A, \bar S_n\right) \ge 1 - 2\delta, \quad n \ge n_0$

и) В силу Следствия 2

$$l_n(\hat\beta_{n,BM}) = o_p(1) = l_n(\beta) + \lambda(\beta)\, n^{1/2}(\hat\beta_{n,BM} - \beta) + o_p(1),$$

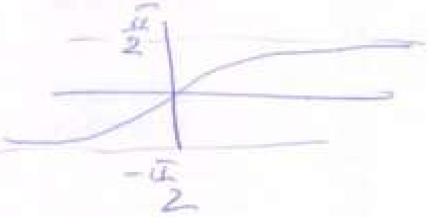
т.е.

$$n^{1/2}(\hat\beta_{n,BM} - \beta) = \frac{1}{\lambda(\beta)}\, l_n(\beta) + o_p(1) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2_{\varphi,\psi}(\beta)\right),$$

$$\sigma^2_{\varphi,\psi}(\beta) = \frac{E\varphi^2(u_0)\, E\psi^2(\varepsilon_1)}{\lambda^2(\beta)}.$$

Теорема 2 доказана.

<u>Пример</u> $\psi(x) = \operatorname{arctg} x$, $\psi(x)$ - неч., $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Пусть $g(x)$ - четн., $g(x) > 0\ \forall x$.

$\varphi(x)$ любая огр., $E[u_1 \varphi(u_1)] \ne 0$, напр. $\varphi(x) = \operatorname{sign} x$.

<u>О медианной оценке в AR(1)</u>

Пусть $\hat\beta_{n,M}$ - медиана массива $\{u_t/u_{t-1},\ t = 1, \dots, n\}$.

Тогда $\hat\beta_{n,M}$ удовл. ур-ию

$$l_n^M(\theta) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign}\left(\frac{u_t}{u_{t-1}} - \theta\right) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \times$$

$\times \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1}) = 0$. Т.е. $\hat\beta_{n,M}$ - ВМ-оценка.

О робастности GM-оценок

Как находить функционалы влияния в общей ситуации

Пусть оценка $\hat{\beta}_n$ ищется как корень уравнения

(8) $$l_n(\theta) := n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) = 0.$$

Пусть выполнены следующие условия.

(i) $l_n(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n,\theta) \xrightarrow{P} \Delta(\gamma,\theta)$ при всех $|\theta-\beta|<\delta$, $0\le\gamma<\gamma_0$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

(ii) $\Delta(0,\beta)=0$.

(iii) Пусть $\Delta(\gamma,\theta)$ можно продолжить на ~~[illegible]~~ отр. малые γ так, что при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ существуют и непрерывны по паре аргументов (γ,θ) частные производные $\dfrac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$, $\dfrac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$.

(iv) Пусть $\lambda(\beta) := \dfrac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\theta} \neq 0$.

Теорема 2. Пусть вып. усл. (i)-(iv), и ф-ии $\varphi_t(y_n,\theta)$ непр. по θ. Тогда ур-ие (8) с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, имеет ~~[illegible]~~ при дост. малых $\gamma\ge 0$ такое решение $\hat{\beta}_n$, что соответствующая оценка $\tilde{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, $\theta_0=0$, и существует функционал влияния

$$\boxed{IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = -(\lambda(\beta))^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\gamma}\Delta(0,\beta).}$$

Док-во Теоремы 2

Шаг 1) Рассмотрим уравнение $\Delta(\gamma,\theta)=0$.

Для функции $\Delta(\gamma,\theta)$ при $|\theta-\beta|<\delta$, $|\gamma|<\gamma_0$ выполнены все условия Теоремы о существовании неявной функции. Поэтому в некоторой окрестности точки $(0,\beta)$ существует ф-ия $\theta(\gamma)=\theta_\gamma$ такая, что:

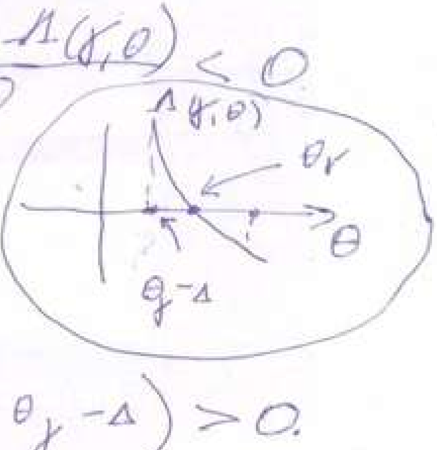
1) $\Delta(\gamma,\theta_\gamma)\equiv 0$; 2) ф-ия θ_γ непрерывна по γ, причем $\theta_\gamma\to\theta_0=\beta$ при $\gamma\to 0$; 3) θ_γ непрерывно дифференцируема по γ и

$$\boxed{\left.\frac{d\theta_\gamma}{d\gamma}\right|_{\gamma=0}=-(\lambda(\beta))^{-1}\frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\gamma}}$$

Шаг 2) Покажем, что с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, существует такое решение $\hat\beta_n$ ур-ия (8), что $\hat\beta_n\xrightarrow{P}\theta_\gamma$, $n\to\infty$, для малых $\gamma\geq 0$.

Пусть для определенности $\lambda(\beta)=\frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\theta}<0$.

Т.к. $\frac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ непрерывна по паре (γ,θ), то при малых $\gamma\geq 0$ и θ вблизи β $\frac{\partial\Delta(\gamma,\theta)}{\partial\theta}<0$.



Значит, при малом $\Delta>0$

$$(9)\quad n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\psi_t(y_n,\theta_\gamma-\Delta)\xrightarrow{P}\Delta(\gamma,\theta_\gamma-\Delta)>0.$$

Тогда левая часть (9) больше нуля на мн-ве

S_{1n}^{Δ}, и $P(S_{1n}^{\Delta}) \to 1$, $n \to \infty$. Т.е.

$P(S_{1n}^{\Delta}) \geq 1 - \delta/2$ для $n > n_0$ при любом $\delta > 0$.

Аналогично,

(10) $n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma + \Delta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma, \theta_\gamma + \Delta) < 0$.

Т.е. левая часть (10) меньше нуля на мн-ве S_{2n}^{Δ}, $P(S_{2n}^{\Delta}) \geq 1 - \delta/2$, $n > n_0$

Получаем: на мн-ве $S_n^{\Delta} = S_{1n}^{\Delta} \cdot S_{2n}^{\Delta}$ таком, что $P(S_n^{\Delta}) \geq 1 - \delta$, $n > n_0$, вып. одновр. нер-ва:

$$\begin{cases} n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma - \Delta) > 0 \\ n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta_\gamma + \Delta) < 0 \end{cases}$$

Т.к. ф-ия $n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t(y_n, \theta)$ непрерывна по θ, то $\forall \omega \in S_n^{\Delta}$ в инт. $(\theta_\gamma - \Delta, \theta_\gamma + \Delta)$ есть корень $\hat{\beta}_n^{\Delta}$.

Пусть $S_n = \{\omega$: ур-ие (8) имеет решение$\}$.

Тогда $P(S_n) \geq P(S_n^{\Delta}) \geq 1 - \delta$, $n > n_0$.

$\boxed{\text{Т.е. } P(S_n) \to 1,\ n \to \infty.}$

Пусть $\hat{\beta}_n$ - ближайший к θ_γ корень ур-ия (8)

Тогда

$$P(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta, S_n) \ge P(|\hat\beta_n^\Delta-\theta_\gamma|\le\Delta, S_n^\Delta),$$

т.к. $(\omega: |\hat\beta_n^\Delta-\theta_\gamma|\le\Delta) \in (\omega: |\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta)$, $S_n^\Delta \subseteq S_n$.

Но $P(|\hat\beta_n^\Delta-\theta_\gamma|\le\Delta, S_n^\Delta) = P(S_n^\Delta) > 1-\delta$, $n > n_0$.

т.е. $\boxed{P(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta, S_n)\to 1,\ n\to\infty.}$

Шаг 3 Пусть $\tilde\beta_n = \begin{cases}\hat\beta_n, & \omega\in S_n,\\ \text{любое } \beta', & \omega\notin S_n.\end{cases}$

оценка

$\tilde\beta_n$ - оценка, соответствующая $\hat\beta_n$. Покажем, что

$$\tilde\beta_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma,\ n\to\infty.$$

Имеем: $P(|\tilde\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta) = P(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta, S_n) +$

$+ P(|\beta'-\beta|\le\Delta, \bar S_n) \ge P(|\hat\beta_n-\theta_\gamma|\le\Delta, S_n)\to 1,\ n\to\infty$

Итак, $\boxed{\begin{aligned}&\tilde\beta_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma,\quad \theta_0=\beta,\\ &IF(\theta_\gamma,\mu_\xi) = -(\lambda(\beta))^{-1}\frac{\partial\Delta(0,\beta)}{\partial\gamma}\end{aligned}}$

Теорема 2 полностью доказ.

~~Пример~~ Задача

$$\begin{cases} u_t = a+\varepsilon_t\\ y_t = u_t + z_t^\gamma\xi_t\end{cases}$$

~~$E\xi_t=0$, $\varepsilon_t\sim g(x)$ пл.в., $g(x)=g(-x)$. Оценка θ - корень ур-ия $\sum_{t=1}^n[\Phi(y_t-\theta)-1/2]=0$,~~

$\Phi(x)$ ~~ф.р.~~ $N(0,1)$ $\sum\psi(y_t-\theta)=0$.

Пример В-робастной ВМ-оценки в AR(1)

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, $|\beta|<1$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1=0$, $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$, ε_1 имеет ф.р. $G(x)$, $g(x)=G'(x)$, $G(x)$ неизвестна.

$$y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t, \quad t=0,1,\dots,n.$$

ВМ-оценка, постр. по $\{y_t\}$, решение ур-ия

$$(11) \qquad \sum_{t=1}^{n} \varphi(y_{t-1})\,\psi(y_t - \theta y_{t-1}) = 0.$$

Будем рассматривать след. предп.

① $\sup\limits_x |\varphi(x)| < \infty$, $\sup\limits_x \{|\psi'(x)| + |\psi(x)|\} < \infty$, $\psi'(x)$ непр.

② $E\psi(\varepsilon_1) = 0$, $E\psi'(\varepsilon_1)\cdot E(u_0\varphi(u_0)) \neq 0$.

③ $E|\xi_1| < \infty$, т.е. $\mu_\xi \in M_1$.

Теорема 3

Пусть выполнены усл. ① - ③. Тогда при дост. малом $\gamma \geq 0$ с вероятностью, стремящейся к единице при $n\to\infty$, существует такое решение $\hat\beta_n$ ур-ия (11), что соотв. оценка $\hat\beta_{n,BM}$ обладает свойствами:

① $\hat\beta_{n,BM} \xrightarrow{P} \theta_\gamma^{BM}$, $\theta_0^{BM} = \beta$;

② Существует функционал влияния

$$IF(\theta_\gamma^{BH}, \mu_\xi) = \frac{E\varphi(u_0+\xi_0)\psi(\varepsilon_1-\beta\xi_0)+E\varphi(u_0)E\psi(\varepsilon_1+\xi_1)}{E\psi'(\varepsilon_1)E(u_0\varphi(u_0))};$$

③ $GES(\theta_\gamma^{BH}, M_1) < \infty$.

Док-во. Проверим усл. теоремы 2.

(i) Посл. $\{u_t\}$ удовл. усл. с.п., а потому и $\{y_t\}$ удовл. усл. с.п. Значит и посл.

$$\{\varphi(y_{t-1})\psi(y_t-\theta y_{t-1})\}$$ уд. усл. с.п.

Потому при любых $1 \le \gamma \le 1$ и любом θ

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\varphi(y_{t-1})\psi(y_t-\theta y_{t-1}) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma,\theta) = E\varphi(y_0)\psi(y_1-\theta y_0).$$

Введем гипотезы $H_{00} = (z_0^\gamma = 0,\ z_1^\gamma = 0)$, H_{10}, H_{01}, H_{11}. Тогда

$$\Lambda(\gamma,\theta) = \sum_{i,j} E\left(\varphi(y_{t-1})\psi(y_t-\theta y_{t-1})/H_{ij}\right)P(H_{ij}) =$$

$$=(1-\gamma)^2 E\varphi(u_0)\psi(u_1-\theta u_0) + \gamma(1-\gamma)E\varphi(u_0+\xi_0)\psi(u_1 - \theta u_0 - \theta\xi_0) + (1-\gamma)\gamma E\varphi(u_0)\psi(u_1+\xi_1-\theta u_0) +$$

$$+\gamma^2 E\varphi(u_0+\xi_0)\psi(u_1+\xi_1-\theta u_0-\theta\xi_0).$$

Ф-ия $\Lambda(\gamma,\theta)$ опред. при всех γ, θ.

(ii) $\Lambda(0,\beta) = E\varphi(u_0)E\psi(\varepsilon_1) = 0$.

(iii) $\dfrac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \gamma}$ и $\dfrac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial \theta}$ сущ. и непр. по паре (γ,θ).

$$\frac{\partial \Lambda(0,\beta)}{\partial \gamma} = E\varphi(u_0+\xi_0)\psi(\varepsilon_1-\beta\xi_0) + E\varphi(u_0)E\psi(\varepsilon_1+\xi_1).$$

(iv) $$\frac{\partial \Lambda(0,\beta)}{\partial \theta} = \lambda(\beta) = E\varphi(u_0)\psi'(u_1-\theta u_0)(-u_0)\Big|_{\theta=\beta} =$$

$$= -E\psi'(\varepsilon_1)E\big(u_0\varphi(u_0)\big) \neq 0.$$

Утверждение теоремы 3 следует теперь из теор. 2

Раздел 8. О ~~некоторых локальных ВМ-оценках~~ медианных оценках в авторегрессии.

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}, \ |\beta| < 1,$$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р.; $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$; $\varepsilon_1 \sim G(x)$,

$G'(x) = g(x)$. Набл. $u_0, u_1, \dots, u_n$.

Оценкой β возьмем $\hat\beta_{n,M}$ – медиану массива

$\{u_t / u_{t-1}, \ t = 1, \dots, n\}$. Тогда $\hat\beta_{n,M}$ – корень

ур-ия (1) $\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign}(u_t/u_{t-1} - \theta) = 0$.

Поскольку $\sum_t \operatorname{sign}(u_t/u_{t-1} - \theta) = \sum \operatorname{sign}(1/u_{t-1}) \times$

$\times \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1}) = \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1})$,

то $\hat\beta_{n,M}$ – корень ур-ия

(2) $$\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1}) = 0.$$

Значит, $\hat\beta_{n,M}$ – ВМ-оценка с $\varphi(x) = \psi(x) = \operatorname{sign} x$.

Ф-ия $\psi(x)$ разрывна и осн. теор. пред. разд. неприменима!

~~Поскольку при $x \neq 0$ $\operatorname{sign} x = 1 - 2I(x<0)$, то~~

~~(3) $\tilde{L}_n(\theta) := n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1})$~~

Теорема 1 (асимптот. нормальность мед. оценки)

Пусть выполнены условия: $|\beta|<1$;

Анн. $\begin{cases} \{\varepsilon_t\} \text{ - н.о.р.}, E\varepsilon_1 = 0, \ 0 < E\varepsilon_1^2 < \infty; \\ \varepsilon_1 \sim G(x), \text{ сущ. } g(x) = G'(x), \ g(x) > 0, \ \sup_x |g'(x)| < \infty \end{cases}$

Пусть $G(0) = 1/2$.

Тогда

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,M} - \beta) = \frac{1}{2g(0)E|u_1|} n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \times$$

$$\times \operatorname{sign} \varepsilon_t + o_p(1) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_M^2(\beta)), \ n \to \infty$$

$$\sigma_M^2(\beta) = \frac{1}{(2g(0)E|u_1|)^2}.$$

Док-во. При $x \neq 0$ $\operatorname{sign} x = 1 - 2I(x<0)$.

Поэтому $n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign}(u_t - \theta u_{t-1}) \simeq$

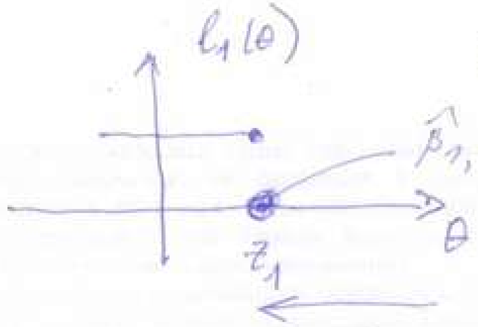
$$\simeq \ell_n(\theta) := n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \left[1 - 2I(u_t - \theta u_{t-1} < 0)\right]$$

Знак „$\simeq$" означает, что последнее рав-во верно при всех θ, кроме

$\theta \in \{z_t, \ t = 1, 2, \ldots, n\}$, $z_t := u_t / u_{t-1}$.

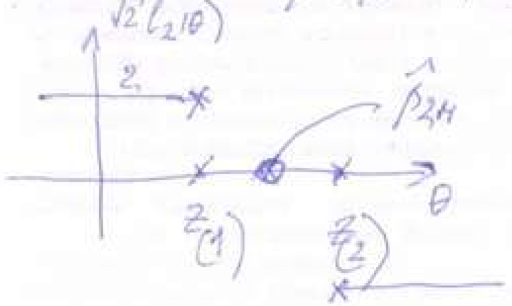
Ф-ия $\ell_n(\theta)$ кусочно постоянна, не возрастает с разрывами в точках $z_{(1)}, \ldots, z_{(n)}$.

Например,



Здесь $\operatorname{sign} u_0 = 1$.

Т.е. возможно, что $l_n(\theta)$ не обращается в ноль ни при каком θ. Но всегда (для нечет. n) определен момент перехода $l_n(\theta)$ через ноль.



При четных n мед. $\hat\beta_{n,n}$ — середина отр.

Поэтому можно ~~нала~~ понимать $\hat\beta_{n,n}$ как решение ур-ия $l_n(\theta) \doteq 0$, где знак "$\doteq$" означает момент перехода через ноль.

Найдем разложение ф-ии $l_n(\beta + n^{-1/2}\tau)$.

Имеем: $l_n(\beta + n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2} \sum \operatorname{sign} u_{t-1} - 2u_n(\tau)$, где ост. эмп. пр.

$$u_n(\tau) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} I(\varepsilon_t \le n^{-1/2}\tau u_{t-1}),$$

В силу теоремы об АИЛ (при $\varphi(x) = \operatorname{sign} x$)

(3) $$u_n(\tau) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} I(\varepsilon_t \le 0) + g(0) E|u_1|\tau + \varepsilon_n(\tau), \quad \sup_{|\tau| \le \Theta} |\varepsilon_n(\tau)| = o_p(1)$$

Подставляя в $l_n(\beta+n^{-1/2}\tau)$ разложение (3), получим п.н.:

(4) $$l_n(\beta+n^{-1/2}\tau) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \varepsilon_t - 2g(0)\times$$
$$\times E|u_1|\tau + \tilde{\varepsilon}_n(\tau), \quad \sup_{|\tau|\le C} |\tilde{\varepsilon}_n(\tau)| = o_p(1)$$

Повторяя рассуждения из Следствия 2 на с. 86 получим из (4), что если посл. $\hat{\beta}_n$ такова, что $n^{1/2}(\hat{\beta}_n-\beta) = O_p(1)$, то

(5) $$l_n(\hat{\beta}_n) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \varepsilon_t - 2g(0) E|u_1|\times$$
$$\times n^{1/2}(\hat{\beta}_n-\beta) + o_p(1)$$

(6) Покажем, что $n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,M}-\beta) = O_p(1)$.

Вследу (5) для большого $A>0$

$$\begin{cases} l_n(\beta - An^{-1/2}) = n^{-1/2}\sum_t \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \varepsilon_t + \\ +2g(0)E|u_1|A + o_p(1) > 0 \\ l_n(\beta + An^{-1/2}) = n^{-1/2}\sum_t \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \varepsilon_t - \\ - 2g(0)E|u_1|A + o_p(1) < 0 \end{cases}$$

т.к. $n^{-1/2}\sum \operatorname{sign} u_{t-1} \times \operatorname{sign} \varepsilon_t = O_p(1)$

с вер. сколь угодно близкой к един., $n > n_0$, значит, в отр. $[\beta - An^{-1/2}, \beta + An^{-1/2}]$ лежат все переходы знака $l_n(\theta)$ и мед. $\hat{\beta}_{n,M}$.

Т.е. (6) верно.

Но $|l_n(\hat\beta_{n,M})| \le n^{-1/2} \max\limits_t |\operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \hat\beta_{n,M}| \le n^{-1/2}$

значит, в силу (5)

$$o(1) = l_n(\hat\beta_{n,M}) = n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \varepsilon_t -$$

$$- 2g(0)E|u_1|\, n^{1/2}(\hat\beta_{n,M} - \beta) + o_p(1).$$

Т.е.

$$n^{1/2}(\hat\beta_{n,M} - \beta) = \frac{1}{2g(0)E|u_1|} n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \operatorname{sign} u_{t-1} \operatorname{sign} \varepsilon_t + o_p(1) \xrightarrow{d}$$

$$\to N(0, \sigma^2_M(\beta)).$$ ч.т.д.

<u>АОЭ медианной оценки.</u>

Асимп. гауссовские оценки можно сравнивать между собой. Пусть

$$n^{1/2}(\hat\theta_{1n} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta)),$$

$$n^{1/2}(\hat\theta_{2,n'} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\theta)), \quad n \to \infty,$$

где $n' = n'(n) \to \infty$ при $n \to \infty$

АОЭ $e_{1,2} := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n'(n)}{n}$, если этот предел существует, конечен и не равен нулю.

Например, если $e_{1,2} = 2$, то $n' \approx 2n$ при больших n. Т.е. для $\hat\theta_{2n}$ нужно в два раза больше наблюдений (чем для $\hat\theta_{1n}$), чтобы достичь той же точности, чем у $\hat\theta_{1n}$.

Задача

Пусть $n^{1/2}(\hat{\theta}_{in} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_i^2(\theta))$, $i = 1, 2$, $\sigma_i^2(\theta) > 0$. Показать, что $e_{1,2} = \dfrac{\sigma_2^2(\theta)}{\sigma_1^2(\theta)}$.

Пусть теперь в AR(1) модели

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}, \ |\beta| < 1,$$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$, по наблюдениям $u_0, u_1, \ldots, u_n$ строятся две оценки β:

$$\hat{\beta}_{n,LS} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2,$$

$\hat{\beta}_{n,M}$ - медиана массива $\{u_t / u_{t-1}, \ t = 1, \ldots, n\}$.

При надлежащих условиях регул.

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,LS} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{LS}^2(\beta)), \quad \sigma_{LS}^2(\beta) = 1 - \beta^2;$$

$$n^{1/2}(\hat{\beta}_{n,M} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_M^2(\beta)), \quad \sigma_M^2(\beta) = \frac{1}{(2g(0) E|u_1|)^2}$$

Значит,
$$\boxed{e_{M,LS} = (1-\beta^2)(2g(0))^2 (E|u_1|)^2}$$

1) Пусть $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$. Тогда $u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}\right)$,

$E|u_1| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (т.к. для $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ $E|\xi| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$)

Значит, $e_{M,LS} = (1-\beta^2)\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sigma^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 < 1$ (!)

Мед. оценка в $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ хуже о.н.к.

2) Если $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, то для стац. посл. $\{u_t\}$ $|u_t| \geq -|\beta|\,|u_{t-1}| + |\varepsilon_t|$, $E|u_1| \geq E|\varepsilon_1| / (1+|\beta|)$.

Значит, $e_{M,LS} \geq \frac{1-|\beta|}{1+|\beta|}\left(E|\varepsilon_1|\right)^2 \left(2g(0)\right)^2.$

Если $\varepsilon_1 \sim T(\delta, \tau)$, т.е. $g(x)$ есть смесь,

$$g(x) = (1-\delta)\varphi(x) + \frac{\delta}{\tau}\varphi\left(\frac{x}{\tau}\right), \quad 0<\delta<1, \ \tau>0,$$

то $g(0) \to \frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi}}$ при $\tau\to\infty$,

а $E|\varepsilon_1| = 2\int_0^\infty x\left[(1-\delta)\varphi(x) + \frac{\delta}{\tau}\varphi\left(\frac{x}{\tau}\right)\right]dx \to$

$\to \infty$ при $\tau\to\infty$. Значит, при $\tau\to\infty$

$e_{M,LS} \to \infty$.

О робастности мед. оценки

Задача

$g(x)$ – четная, $g(0)>0$, $g(x)$ непр. в 0,

Пусть $\hat\beta^y_{n,M}$ – медиана массива $\{y_t/y_{t-1},\ t=1,\dots,n\}$,

где $y_t = u_t + z_t^\gamma \xi_t$.

Показать, что $IF(\theta^M_y, M_1) = \frac{E\,\mathrm{sign}(u_0+\xi_0)(1-2G(\beta\xi_0))}{2g(0)\,E|u_1|}$

т.е. $GES(\theta^M_y, M_1) = \frac{1}{2g(0)\,E|u_1|} < \infty$

Выб. мед. $\hat\beta_{n,M}$ В-робастна!

① Авторегрессионные модели (AR, MA, ARMA, ARCH, и их св-ва.

② З. Б. Ч. для последов. из L^2.

Оценки среднего и ковариаций.

③ Оценки макс. правд. и о.н.к. в авторегр. моделях.

④ Робастность (найти ф-ии влияния, чувствит. и т.д)

⑤ Разные задачи.