15.09.21. Физика. ДЗ 1. Токаева Александра [illegible] гр.

① а) каким вектором является 4-скорость (пространственноподобным или времениподобным)?

б) Написать ф-лу для 4-ускорения

в) Док-ть, что $u \cdot w = 0$ (т.е. $u^\mu w_\mu = 0$).

Решение: (Зам: движущаяся с.к. – сейчас это сопутствующая с.к., т.е. летящая вместе с точкой, т.е. $\bar{V}$ – это $\bar{v}$, а $\bar{v}' = 0$ – их относительная скорость)

б) $x^\mu = (x^0; x^1; x^2; x^3) = (ct; x, y, z) = (ct; \bar{r})$

$$ds^2 = c^2dt^2 - (d\bar{r})^2 = c^2(dt)^2\left(1 - \frac{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2}{c^2}\right) \Rightarrow \boxed{ds = cdt \cdot \sqrt{1 - \frac{(\bar{v},\bar{v})}{c^2}} = \frac{cdt}{\gamma}}, \text{ где } \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{v},\bar{v})}{c^2}}}}$$

Заметим сразу, что $d\gamma = \frac{-1}{2\left(\sqrt{1 - \frac{(\bar{v},\bar{v})}{c^2}}\right)^3} \cdot \left(-\frac{2(\bar{v}, d\bar{v})}{c^2}\right) = \boxed{\frac{\gamma^3 (\bar{v}, d\bar{v})}{c^2}}$

Имеем:

$$\underbrace{u^\mu}_{\text{4-скорость}} = \frac{d(x^\mu)}{ds} = \frac{(cdt; dx; dy; dz)}{cdt/\gamma} = \left(\gamma, \frac{\gamma}{c}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v^1}, \frac{\gamma}{c}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v^2}, \frac{\gamma}{c}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=v^3}\right) = \boxed{\left(\gamma, \frac{\gamma}{c}\underbrace{\bar{v}}_{\text{3-скорость}}\right)}$$

$$\Rightarrow w^\mu = \frac{d(u^\mu)}{ds} = ?$$

$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$ ($\bar{v}$ и $\bar{a}$ – они 3-мерные)

$$w^0 = \frac{d(u^0)}{ds} = \frac{d(\gamma)}{cdt/\gamma} = \frac{\gamma^3 (\bar{v}, d\bar{v})}{c^2} \cdot \frac{1}{cdt/\gamma} = \boxed{\frac{\gamma^4}{c^3} \cdot (\bar{v}, \bar{a})}$$

$$\bar{w}^{123} = \frac{d\left(\frac{\gamma}{c}\bar{v}\right)}{ds} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d(\gamma \cdot \bar{v})}{cdt/\gamma} = \frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{(d\gamma \cdot \bar{v} + \gamma \cdot d\bar{v})}{dt} = \frac{\gamma}{c^2}\left(\frac{\gamma^3(\bar{v}, d\bar{v})}{c^2 \cdot dt} \cdot \bar{v} + \gamma \cdot \bar{a}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\gamma}{c^2}\left(\frac{\gamma^3}{c^2}(\bar{v}, \bar{a})\bar{v} + \gamma\bar{a}\right) = \frac{\gamma^4}{c^4}(\bar{v}, \bar{a})\bar{v} + \frac{\gamma^2}{c^2}\bar{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{w^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c^3}(\bar{v}, \bar{a}); \frac{\gamma^4}{c^4}(\bar{v}, \bar{a})\bar{v} + \frac{\gamma^2}{c^2}\bar{a}\right)}$$

$$\Rightarrow w^\mu \cdot w_\mu = \frac{\gamma^8}{c^6} \cdot (\bar{v}, \bar{a})(\bar{v}, \bar{a}) - \frac{\gamma^8}{c^8}(\bar{v}, \bar{a})(\bar{v}, \bar{v}) - \frac{\gamma^4}{c^4}(\bar{a}, \bar{a}) - \frac{2\gamma^6}{c^6}(\bar{v}, \bar{a})(\bar{v}, \bar{a}) =$$

$$= \frac{\gamma^6}{c^6}(\gamma^2 - 2)(\bar{v}, \bar{a})(\bar{v}, \bar{a}) - \frac{\gamma^8}{c^8}(\bar{v}, \bar{a})(\bar{v}, \bar{v}) - \frac{\gamma^4}{c^4}(\bar{a}, \bar{a}) < 0 \Rightarrow$$ 4-ускорение – пространственноподобный 4-вектор!

в) 1 способ:

$u^\mu = \left(\gamma; \frac{\gamma}{c}\bar{v}\right)$

$$\Rightarrow w^\mu \cdot u_\mu = w^0 \cdot u_0 - \bar{w}^{123} \cdot u_{123} = \frac{\gamma^5}{c^3}(\bar{v}, \bar{a}) - \frac{\gamma^5}{c^5}(\bar{v}, \bar{a})(\bar{v}, \bar{v}) - \frac{\gamma^3}{c^3}(\bar{a}, \bar{v}) =$$

$$= \frac{\gamma^5}{c^3}(\bar{v}, \bar{a})\underbrace{\left(1 - \frac{(\bar{v}, \bar{v})}{c^2}\right)}_{=1/\gamma^2} - \frac{\gamma^3}{c^3}(\bar{a}, \bar{v}) = \frac{\gamma^3}{c^3}(\bar{v}, \bar{a}) - \frac{\gamma^3}{c^3}(\bar{a}, \bar{v}) = 0!$$ Ура!

2 способ:

по опр.: $w^\mu = \frac{d(u^\mu)}{ds}$

но $u^\mu u_\mu = 1$ (← см. далее)

$\Rightarrow$ продиф. с обеих частей: $\frac{d(u^\mu)}{ds} \cdot u_\mu = 0. \Rightarrow w^\mu \cdot u_\mu = 0.$ ч.т.д.

а) почему $u_\mu \cdot u^\mu = 1$?

1 способ: $u^\mu = \left(\gamma; \frac{\gamma}{c}\bar{v}\right) \Rightarrow u^\mu u_\mu = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} \cdot (\bar{v}, \bar{v}) = \gamma^2 \underbrace{\left(1 - \frac{(\bar{v}, \bar{v})}{c^2}\right)}_{=1/\gamma^2} = \gamma^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} = 1 > 0$ ч.т.д. $\Rightarrow$ 4-скорость – это времениподобный 4-вектор!

2 способ: $u^\mu \cdot u_\mu = \frac{d(x^\mu)}{ds} \cdot \frac{d(x_\mu)}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$ ч.т.д.