5.2.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \quad \text{где } a_j = \text{const}, \ (j = 0, \ldots, n). \tag{5.8}$$

Если правая часть $f(x)$ состоит из сумм и произведений функций вида $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, частное решение можно искать *методом неопределенных коэффициентов*.

Для уравнений с правой частью $f(x) = P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, существует частное решение вида

$$y_1 = x^rQ_m(x)e^{ax}, \tag{5.9}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени m. Число $r = 0$, если a — не корень характеристического уравнения (5.7), а если a — корень, то r равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (5.9) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят $\cos bx$ и $\sin bx$, то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера. Если же коэффициенты a_j левой части уравнения (5.8) вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx) \tag{5.10}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^re^{ax}(R_l(x)\cos bx + T_l(x)\sin bx), \tag{5.11}$$

где $r = 0$, если $a + ib$ не корень характеристического уравнения, и r равно кратности корня $a + ib$ в противном случае, а R_l и T_l — многочлены степени l, равной наибольшей из степеней m и n многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_l и T_l, надо подставить решение (5.11) в уравнение (5.8) и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида (5.10), то частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + f_2 + \cdots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Пример 5.2. *Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения*

$$y'' - 5y' + 6y = 5xe^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения y есть сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения y_1 и частного решения неоднородного уравнения y_2:

$$y = y_1 + y_2.$$

Найдем y_1. Составим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Общее решение однородного

ODE-5. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 4y = x \sin 2x - x^2.$$

ODE-10. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y''' + 4y'' = x - 1 + \cos 4x.$$

ODE-20. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x - x^2.$$

ODE-15. **Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):**

$$y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1.$$

ODE-4. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 3y' = x + e^{3x} \sin x.$$

ODE-2. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y''' - y'' - 6y' = e^{3x} - \sin 3x.$$

ODE-2.png

ODE-12. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x - 2x^2.$$

ODE-10. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y''' + 4y'' = x - 1 + \cos 4x.$$

ODE-12. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x - 2x^2.$$

ODE-11. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 3y' = x + \cos 2x.$$

Задача (ODE)

ODE-6. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 4y' + 3y = xe^{x} + \cos 2x.$$

ОТВЕТИТЬ

ODE-6.png

ODE-6. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + \cos 2x.$$

ODE-8. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x + x^3 - 2x^2 + 10.$$

ODE-8.png

ODE-17. Найти вид общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (не вычисляя коэффициентов частных решений):

$$y'' + 9y = 2x \sin 3x + xe^{3x}.$$