14.02.2023. ПМФ2. ДЗ 1.

① Док-ть: $E_t^{Q_2}[X_T] \overset{?}{=} \dfrac{E_t^{Q_1}\left[\dfrac{dQ_2}{dQ_1}X_T\right]}{E_t^{Q_1}\left[\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\right]}$

Решение: Хотим: $E_t^{Q_1}\left[\dfrac{dQ_2}{dQ_1}X_T\right] \overset{?}{=} \underbrace{E_t^{Q_2}[X_T]\cdot E_t^{Q_1}\left[\dfrac{dQ_1}{dQ_1}\right]}$

т.е. ~~это~~ надо док-ть, что это ↑ – это УМО отн. F_t от $\dfrac{dQ_2}{dQ_1}X_T$ по Q_1.

т.е. надо док-ть, что $\forall G \in F_t$: $E^{Q_1}\left(E_t^{Q_1}\left(\dfrac{dQ_2}{dQ_1}X_T\right)\cdot \mathbb{1}_G\right) \overset{?}{=}$

$$E^{Q_1}\left(E_t^{Q_2}[X_T]\cdot E_t^{Q_1}\left[\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\right]\cdot \mathbb{1}_G\right)$$

Ну имеем:

- $E^{Q_1}\left(E_t^{Q_1}\left(\dfrac{dQ_2}{dQ_1}X_T\right)\cdot \mathbb{1}_G\right) \overset{\text{измер.}}{=} E^{Q_1}\left(E_t^{Q_1}\left(\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\cdot X_T\cdot \mathbb{1}_G\right)\right) = E^{Q_1}\left(\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\cdot X_T \cdot \mathbb{1}_G\right) = E^{Q_2}(X_T\cdot \mathbb{1}_G)$
- $E^{Q_1}\left(E_t^{Q_2}[X_T]\, E_t^{Q_1}\left[\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\right]\mathbb{1}_G\right) \overset{\text{измер}}{=} E^{Q_1}\left(E_t^{Q_1}\left(E_t^{Q_2}[X_T]\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\cdot\mathbb{1}_G\right)\right) = E^{Q_1}\left(E_t^{Q_2}[X_T]\cdot\dfrac{dQ_2}{dQ_1}\cdot\mathbb{1}_G\right) =$

$= E^{Q_2}\left(E_t^{Q_2}(X_T)\,\mathbb{1}_G\right) = E^{Q_2}\left(E_t^{Q_2}(X_T\cdot \mathbb{1}_G)\right) = E^{Q_2}(X_T\cdot \mathbb{1}_G)$. Они равны! ч.т.д.

② Исп. risk-neutral argument derive the formula for swap rate:

$$S_{k,m}(t) = \frac{p(t,T_k) - p(t,T_{k+m})}{\sum_{n=k}^{k+m-1} p(t,T_{n+1})\tau_n}$$

свопплатит $(L(T_i;T_{i+1})-K)\tau_i$ в момент T_{i+1}; $i=k\ldots k+m-1$

Решение: в обозначениях Киода. в моменты $\tau_i \in \{\tau_{m+1},\ldots \tau_n\}$, своп платит $(L_{\tau_{i-1}}(\tau_{i-1};\tau_i)-K)(\tau_i-\tau_{i-1})$

// если мы докажем, что справедливая цена потока, равного $(L_{\tau_{i-1}}(\tau_{i-1};\tau_i)-K)(\tau_i-\tau_{i-1})$, выплачиваемого в момент τ_i,

то fair price of payer IRS будет $\sum_{i=m+1}^{n} B_t(\tau_i)(L_t(\tau_{i-1};\tau_i)-K)(\tau_i-\tau_{i-1})$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=m+1}^{n} B_t(\tau_i)(L_t(\tau_{i-1};\tau_i)-K)(\tau_i-\tau_{i-1})$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}(B_t(\tau_{i-1})-B_t(\tau_i)) - K\cdot\sum_{i=m+1}^{n} B_t(\tau_i)\cdot(\tau_i-\tau_{i-1}) = 0.$$

$$\Rightarrow K_{\text{атм}}(t) = \frac{B_t(\tau_m)-B_t(\tau_n)}{\sum_{i=m+1}^{n} B_t(\tau_i)(\tau_i-\tau_{i-1})}$$

Осталось показать, что справедливая цена $L_{\tau_{i-1}}(\tau_{i-1};\tau_i)-K$ в момент τ_i — равна $B_t(\tau_i)\left(L_t(\tau_{i-1};\tau_i)-K\right)=\dfrac{B_t(\tau_{i-1})-B_t(\tau_i)}{\tau_i-\tau_{i-1}}-B_t(\tau_i)K$.

Имеем: поток $-K$ в момент τ_i стоит $-B_t(\tau_i)K$ в момент t.

$\Rightarrow$ осталось док-ть, что $L_{\tau_{i-1}}(\tau_{i-1};\tau_i)$ в момент τ_i стоит $\dfrac{B_t(\tau_i)-B_t(\tau_{i-1})}{\tau_i-\tau_{i-1}}$ в t.

Ну как нам получить $(\tau_i-\tau_{i-1})L_{\tau_{i-1}}(\tau_{i-1};\tau_i)=\dfrac{1}{B_{\tau_{i-1}}(\tau_i)}-1$ в τ_i:

Надо просто продать один бонд с maturity τ_i и купить бонд с maturity τ_{i-1}, который в момент τ_{i-1} мы реинвестируем в бонд с истечением в τ_i. т.е. мы получим 1 в τ_{i-1} и $\dfrac{1}{B_{\tau_{i-1}}(\tau_i)}$ в τ_i.

А стоит такая стратегия $B_t(\tau_{i-1})-B_t(\tau_i)$.

$\Rightarrow \dfrac{B_t(\tau_{i-1})-B_t(\tau_i)}{\tau_i-\tau_{i-1}}$ — это справ. цена $L_{\tau_{i-1}}(\tau_{i-1};\tau_i)$ в момент τ_i.

чтд.

Правильный способ:

$L(T,T+\tau)=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{p(T,T+\tau)}-1\right)$

$$0=PV_t=\sum_{i=k}^{k+m-1}B_t\cdot E_t^Q\left[\frac{(L(T_i;T_{i+1})-K)\tau_i}{B_{T_{i+1}}}\right]=$$

$$=\sum_{i=k}^{k+m-1}B_t\cdot E_t^Q\left[\frac{\frac{1}{p(T_i,T_{i+1})}-1-K\tau_i}{B_{T_{i+1}}}\right]=$$

$$=\sum_{i=k}^{k+m-1}\frac{B_t}{B_{T_{i+1}}}\cdot\left(\frac{1}{p(T_i;T_{i+1})}-1\right)-K\cdot\sum_{i=k}^{k+m-1}\frac{B_t}{B_{T_{i+1}}}\cdot\tau_i=$$

$$=\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})\left(\frac{1}{p(T_i;T_{i+1})}-1\right)-K\cdot\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})\cdot\tau_i=$$

$$=\sum_{i=k}^{k+m-1}\left(\frac{p(t,T_{i+1})}{p(T_i,T_{i+1})}-p(t,T_{i+1})\right)-K\cdot\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})\tau_i=$$

$$=\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_i)-\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})-K\cdot\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})\tau_i=$$

$$=p(t,T_k)-p(t,T_{k+m})-K\cdot\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})\cdot\tau_i=0.$$

$$\Rightarrow \boxed{K=\frac{p(t,T_k)-p(t,T_{k+m})}{\sum_{i=k}^{k+m-1}p(t,T_{i+1})\tau_i}}$$ чтд.