Кусмина Кристина

Начало: 12:40

Задача 1.1

построить для ур-я $y'(x) = f(x)$ разн. схему с наивысшим пор-ком аппрокс. на реш.

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}.$$

Решение: Изменим индекс для удобства $k \to k+1$

получим з-чу: $\dfrac{y_{k-1} - y_{k+1}}{2h} = a_1 f_{k+1} + a_0 f_k + a_{-1} f_{k-1}$

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm y'(x_k)\cdot h + \frac{h^2}{2} y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + O(h^4)$$

$$f(x_k \pm h) = f(x_k) \pm f'(x_k) h \ \dots \pm \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + O(h^4)$$

$$[y]_h = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y(x_k) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad f(x_k) = f_k$$

$\boxed{\begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + h \\ x_{k-1} = x_k - h \end{array}}$

(+)

$$\Rightarrow \frac{y(x_k + h) - y(x_k - h)}{2h} = a_1 f(x_k + h) + a_0 f(x_k) + a_{-1} f(x_k - h)$$

$$\Big\|$$

$$\frac{\cancel{y(x_k) - y(x_k)} + 2h\, y'(x_k) + \frac{h^3}{3} y'''(x_k) + O(h^5)}{2h} = (a_1 + a_0 + a_{-1}) f(x_k) \oplus$$

$$\oplus (a_1 - a_{-1}) h f'(x_k) + (a_1 + a_{-1}) \frac{h^2}{2} f''(x_k) + (a_1 - a_{-1}) \frac{h^3}{6} f'''(x_k) \oplus$$

$$\oplus\ O(h^4)$$

получаем:

$$y'(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + O(h^4) = (a_1 + a_0 + a_{-1}) f(x_k) + (a_1 - a_{-1}) h f'(x_k) +$$
$$+ (a_1 + a_{-1}) \frac{h^2}{2} f''(x_k) + (a_1 - a_{-1}) \frac{h^3}{6} f'''(x_k)$$
$$+ \underline{O(h^4)} \Rightarrow p = 4$$

апрокс. на решении $\Rightarrow y'(x_k) = f(x_k)$

$\Rightarrow$ можем заменить $y' = f$

$y'' = f'$

$y''' = f''$

приравниваем коэфф. при соотв. производных

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_0 + a_{-1} \\ a_1 - a_{-1} = 0 \\ \frac{1}{6} = \frac{a_1 + a_{-1}}{2} \\ a_1 - a_{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5/6 \\ a_1 = a_{-1} \\ a_1 = 1/6 \\ \cancel{a_1 = a_{-1}} \end{cases}$$

Ответ: $a_0 = \frac{5}{6}$, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6}$, $p = 4$.

Задача 1.2.

Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\theta \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta)\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k \quad \text{при } \theta \in [0, 1]$$

Решение: $\theta(\mu^{k+1} - \mu^k) + (1-\theta)(\mu^k - \mu^{k-1}) = 0$

$$\theta(\mu^2 - \mu) + (1-\theta)(\mu - 1) = 0$$

$$\theta\mu(\mu - 1) + (1-\theta)(\mu-1) = 0$$

$$\cancel{\theta\mu + 1 - \theta = 0}$$

$$\cancel{\mu = -\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$\theta\mu^2 \overbrace{-\theta\mu + (1-\theta)\mu}^{(1-2\theta)\mu} + \theta - 1 = 0$$

при $\theta = 0$: $\mu = 1 \Rightarrow$ подходит

$\theta \neq 0$: $D = (1-2\theta)^2 - 4\theta(\theta - 1) = 1 \cancel{-4\theta} \cancel{+4\theta^2} \cancel{-4\theta^2} \cancel{+4\theta} = 1.$

$$\mu_{1,2} = \frac{2\theta - 1 \pm 1}{2\theta} \nearrow 1, \quad \searrow \frac{2\theta - 2}{2\theta} = \frac{\theta - 1}{\theta} \neq 1$$

при $\left|\frac{\theta - 1}{\theta}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\theta-1}{\theta} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{1}{\theta} \leq 1$

для устойчивости

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{\theta} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta \geq \frac{1}{2}$

+

Ответ: $\theta = \{0\} \cup [\frac{1}{2}; 1]$

Задача 1.3.

Для у-ти $y' = y$, $y(0) = 1$ рассмотрим схему

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_{k+1} + y_k}{2}, \quad y_0 = 1, \quad k \geq 0$$

В разлож. ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \dots$, найти постоянную c_1 для $x_N = Nh = 1$.

Решение: $\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} = \frac{y_{k+1}}{2} + \frac{y_k}{2}$

$$y_{k+1}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\right) = y_k\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k \cdot \frac{\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_N = y_{N-1} \cdot \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}} = y_0 \cdot \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}\right)^N$$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^x$$

$$\Rightarrow y(x_N) - y_N = e - \left(\frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}\right)^{\frac{1}{h}} = e - e^{\frac{1}{h} \ln \frac{1 + \frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}}} =$$

$$= e - e^{\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{h}\ln\left(1 - \frac{h}{2}\right)}$$

$$\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4} +$$

$$+ O(h^5) + \frac{h}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \cancel{\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^4} + O(h^5) = h + \frac{2}{3} \cdot \frac{h^3}{8} + O(h^5)$$

$= h + \frac{h^3}{12} + O(h^5)$

$y(x_N) - y_N = e - e^{1+\frac{h^2}{12}+O(h^4)} = e\left(1 - e^{\frac{h^2}{12}+O(h^4)}\right) =$

$e^{\frac{h^2}{12}+O(h^4)} = 1 + \frac{h^2}{12} + O(h^4)$

$= -\frac{eh^2}{12} + O(h^4) \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

Ответ: $C_1 = 0$

Задача 1.4. Для задачи $\begin{cases} y' + 5y = \sin 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$ построить

двухточечную разностную схему второго пор-ке ап-ти

Рассмотрим схему $x_k = kh$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 5\,\frac{y_{k+1} + y_k}{2} = f_k \quad \to f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \text{ лучше.}$$

$$f_k := \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2} = \frac{\sin(2h(k+1)) + \sin(2kh)}{2}$$

Ответ!

$y(x_k) =: y_k$

проверяем аппрокс на решении; тейлор, дробь

$$\frac{y(x_k+h) - y(x_k)}{h} + 5\,\frac{y(x_k+h) + y(x_k)}{2} = \frac{\cancel{y(x_k+\frac{h}{2})} + \frac{h}{2}y'(x_k+\frac{h}{2})}{}$$

$$+ \frac{h^2}{8}y''\left(x_k+\frac{h}{2}\right) + O(h^3) - \cancel{y(x_k+\frac{h}{2})} + \frac{h}{2}y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{8}y''\left(x_k+\frac{h}{2}\right)$$

$$+ 5 \cdot \frac{2y(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{4}y''(x_k+\frac{h}{2}) + O(h^2)}{2} = y'\left(x_k+\frac{h}{2}\right) + O(h^2) +$$

$\oplus\ 5y(x_k+\frac{h}{2}) = f(x_k+\frac{h}{2}) + h\cdot 0 + O(h^2)$

Получим:

$$\underbrace{y'(x_k+\frac{h}{2}) + 5y(x_k+\frac{h}{2})}_{= f(x_k+\frac{h}{2})} + O(h^2) = \cancel{f(x_k+\frac{h}{2})} + O(h^2)$$

т.к. аппрокс. на реш.

$\Rightarrow$ аппрокс. на реш. с пор-ком $O(h^2)$.

Проверим λ-устойчивость:

$\exists\, y_k = \mu^k \Rightarrow \boxed{\frac{\mu-1}{h}} + \frac{5}{2}\mu - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \mu\left(\frac{1}{h}+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{h}+\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow$ схема устойчива.

0

Задача 1.5

Построить аппрокс. на реш 2-го пор-ка по точкам $x_0=0$, $x_1=h$ краевого условия $u'(0)-u(0)=0$ для ур-я

$u''-2u=\sin x-1$

Решение:

будем аппрокс. ~~кр.усл~~ кр.усл. как: $\frac{u_1-u_0}{h}-u_0=\delta$

нужно получить $l_h[u]_h-\varphi_h=O(h^2)$

$$\frac{u(h)-u(0)}{h}-u(0)-\delta=O(h^2)$$

$$u(h)=u(0)+hu'(0)+\frac{h^2}{2}u''(0)+O(h^3)$$

Сл-но: $u'(0)+\frac{h}{2}u''(0)-u(0)-\delta=0$

$u'(0)-u(0)=0 \Rightarrow \delta=\frac{h}{2}u''(0)$

Из данного ур-я $u''(0)=2u(0)-1 \Rightarrow \delta=\frac{h}{2}(2u(0)-1)$

Получим аппрокс. на кр. усл. $\frac{u_1-u_0}{h}-u_0=\frac{h}{2}(2u(0)-1)$

$[u]_h-\varphi_h=0\cdot-hu_0\frac{h}{2}\to 0$, $h\to 0$ – нормир-ка правых частей

V

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{u_1-u_0}{h}-u_0=\frac{h}{2}(2u_0-1)}$ +

с б не справилась в итоге

Конец: 14:13