Токаева Александра 409, КР№1, интерполяция.; Вариант №1. (1)

(1.1) $f(x) = \ln x$

$[1;2]$

$n=4$ (узлов) : $1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2$ – равноотст. узлы

Док-ть, что $\|f(x) - L_4(x)\|_C < \frac{1}{300}$

Решение: На лекции было доказано,

что $\|f - L_n\|_C \le \frac{\|f^{(n)}\|_C}{n!} \cdot \|\omega_n\|_C$ (где n – кол-во узлов)

В нашем случае $n=4$

$\Rightarrow$ нам нужно $\|f^{(4)}\|_C$ и $\|\omega_4\|_C$. (окажется, что $\|\omega_4\|_{C[1;2]} = \frac{(b-a)^4}{81} = \frac{1}{81}$)

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$

$f'''(x) = 2 \cdot x^{-3}$

$f^{(4)}(x) = -6 \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

$\Rightarrow \|f^{(4)}\|_{C[1;2]} = 6 \cdot \frac{1}{1} = 6.$ $\Rightarrow \boxed{\|f - L_4\|_C \le \frac{6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{4\cdot81} = \frac{1}{324} < \frac{1}{300} \Rightarrow \text{доказано.}}$

Зам. теперь осталось посчитать $\|\omega_4\|_C$ для равноотстоящих узлов – сразу для произв. отрезка $[a;b]$.

$a; a + \frac{b-a}{3}; a + \frac{2(b-a)}{3}; b$ – равноотст. узлы

$\Rightarrow$ ищем $\max\limits_{x\in[a,b]} \left|(x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)(x-b)\right|$

Для этого найдем точки, где производная $=0$.

Для удобства вычислений перетянем отрезок $[a,b]$ в отрезок $[-1;1]$:

$$t = \frac{x - \frac{a+b}{2}}{(b-a)/2} \in [-1;1]$$

т.е $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \in [a,b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-a = \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}(t+1) \\ x - \left(\frac{2a+b}{3}\right) = \frac{b-a}{2}t + \frac{3a+3b-4a-2b}{6} = \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{6} = \frac{b-a}{6}(3t+1) \\ x - \left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} - \frac{a+2b}{3} = \frac{b-a}{2}t + \frac{3a+3b-2a-4b}{6} = \frac{b-a}{2}t + \frac{-b+a}{6} = \frac{b-a}{6}(3t-1) \\ x-b = \frac{b-a}{2}t - \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}(t-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_4(t) = (x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)(x-b) = \frac{(b-a)^4}{4\cdot36}(t^2-1)(9t^2-1) = \frac{(b-a)^4}{16\cdot9}(9t^4 - 10t^2 + 1)$$

$$\Rightarrow w_4'(t) = \frac{(b-a)^4}{16\cdot 9}(36t^3-20t) = \frac{(b-a)^4}{16\cdot 9}\cdot 4t(9t^2-5)=0.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\pm\frac{\sqrt{5}}{3} \end{array}\right.$$

И ещё надо проверить концы отрезка, т.е $t=\pm 1$.

$$w_4(0) = \frac{(b-a)^4}{16\cdot 9} = \frac{(b-a)^4}{144}$$

$$w_4\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{(b-a)^4}{16\cdot 9}\left(\cancel{9}\cdot\frac{25}{\cancel{9}\cdot 9} - 10\cdot\frac{5}{9}+1\right) = \frac{(b-a)^4}{\cancel{16}\cdot 9}\cdot\frac{-\cancel{16}}{9} = \frac{-(b-a)^4}{81}.$$

$$w_4(\pm 1) = \frac{(b-a)^4}{16\cdot 9}(9-10+1)=0.$$

$$\Rightarrow \|w_4\|_{C[a,b]} = \frac{(b-a)^4}{81}.$$

(1.2) $f(x) = \sin 2x$

$[0, 2]$

по n чебыш. узлам

Выписать ф-лу для узлов

Найти наиб. целое p: $\varepsilon_n = 10^{-p}$

$n=6$.

<u>Решение:</u> Узлы Чебышёва на $[-1;1]$: $t_i = \cos\frac{(2i-1)\cdot\pi}{2n}$; $i=1\ldots n$

Переведём их заменой $t = \frac{x-\frac{a+b}{2}}{(b-a)/2} \in [-1;1]$

на отрезок $[a;b]$: $x = \frac{a+b}{2} + t\cdot\frac{b-a}{2}$

У нас $\begin{array}{l} a=0 \\ b=2 \end{array}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_i = 1 + \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}\ ;\ i=1\ldots n}$ – на отрезке $[0;2]$.

Для случая $n=6$:

$$\boxed{x_i = 1+\cos\frac{(2i-1)\pi}{12}\ ;\ i=1,2,3,4,5,6}$$

Теперь будем искать оценку погрешности в равном. норме.

Из лекций: $\|f(x)-L_n(x)\|_C \leq \frac{\|f^{(n)}\|_C}{n!}\cdot\|\omega_n\|_C$

$$\|f^{(n)}\|_C = \|(\sin 2x)^{(6)}\|_{C[0;2]} = 2^6.$$

Заметим, что поскольку узлы Чебышёвские – то $\|\omega_n\|_C$ = норме приведённого (т.е того, у которого старший коэф $= x^n$) многочлена Чебышёва на $[a,b]$. (т.к ω_n – это приведённый Чебышёва)

то ω_n – это и есть приведённый Чебышёв на $[a,b]$, приведенный многочлен Чебышева на $[a,b] = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{b-a}\right)^n} \cdot T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot T_n(t); t\in[-1;1]$.

поскольку $\|T_n(t)\|_C = 1$ (т.к. $T_n(t) = \cos(n \cdot \arccos t)$); $t \in [-1;1]$,

то $\|\omega_n\|_C = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ — по чебыш. узлам

$$\Rightarrow \|\sin 2x - L_6(x)\|_{C[0;2]} \le \frac{\overbrace{\|f^{(6)}(x)\|_{C[0,2]}}^{=2^6}}{6!} \cdot \underbrace{\|\omega_6\|_{C[0,1]}}_{=\frac{1}{2^5}\cdot\left(\frac{2}{2}\right)^6} = \frac{2^6}{6!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{2}{6!} = \frac{1}{6\cdot5\cdot4\cdot3} = \frac{1}{360} < \frac{1}{100} \Rightarrow p=2.$$

Ответ: $p=2$.

(1.3) наименее уклон. от нуля на $[3;5]$ среди $a_3x^3 + \underline{\underline{2x^2}} + a_1x + a_0$.

<u>Решение:</u> $T_0 = 1$

$T_1 = x$

$T_2 = 2x\cdot x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3 = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$

$$\Rightarrow T_3\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) = T_3\left(\frac{2x-8}{2}\right) = T_3(x-4) = 4(x-4)^3 - 3(x-4) =$$

$$= 4(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 3x \overset{+12}{=} 4x^3 - 48x^2 + (192-3)x + (-256+12) = 4x^3 - \underline{\underline{48}}x^2 + 189x - 244$$

У этого многочлена коэф при x^2 равен -48, а нам нужен 2

$$\Rightarrow \text{ответ} = P(x) = \frac{2}{-48}(4x^3 - 48x^2 + 189x - 244) = \frac{-1}{24}(4x^3 - 48x^2 + 189x - 244) =$$

$$= \boxed{-\frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{63}{8}x + \frac{61}{6}}$$

то есть $P(x) = \frac{-1}{24} \cdot T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$

$\Rightarrow \|P(x)\| = \frac{1}{24}$.

Докажем, что $P(x)$ — действительно искомый.

пусть есть $P^*(x)$ из класса $\{a_3x^3 + 2x^2 + a_1x + a_0\}$ такой, что $\|P^*(x)\| < \|P(x)\|$

тогда рассм. $R(x) = P(x) - P^*(x). = b_3x^3 + b_1x + b_0$

коэф. при x^2 — равен нулю, т.к. сократился тогда $\begin{cases} R(x) - \text{степени } \leq n = 3. \\ \text{Знак } R(x) \text{ в экстремумах многочлена Чебышёва на } [3,5], \end{cases}$

т.е в точках $x_i = 4 + \cos\left(\frac{\pi i}{3}\right)$; $i = 0,1,2,3$ —

равен знаку $P(x)$ в этих точках

(т.к $\|P^*(x)\|$ строго $< \|P(x)\|$,

поэтому если $P(x_i) > 0$, то и $R(x_i) > 0$,

а если $P(x_i) < 0$, то и $R(x_i) < 0$).

$\Rightarrow R(x)$ — имеет 4 перемены знака на $[3,5]$

$\Rightarrow R'(x)$ — по т. Ролля имеет 3 перемены знака на $[3,5]$.

$R''(x)$ — имеет 2 перемены знака на $[3,5]$.

$\Rightarrow R''(x)$ имеет 1 корень на $[3,5]$.

но $R''(x)$ — это многочлен $\leq n-2 = 1$ степени,

он имеет 1 корень на $[3,5]$

и ещё 1 корень в $x = 0$ (т.к $P(x)$ и $P^*(x)$ имели одинаковый коэф. при x^2; который ~~…~~

(ну $R(x) = b_3x^3 + b_1x + b_0$

$\Rightarrow R''(x) = 6b_3x$

причём $x = 0 \notin [3;5]$

$\Rightarrow \begin{cases} R''(x) - \text{степени} \leq 1 \\ \text{имеет 2 различных корня} \end{cases}$

$\Rightarrow R''(x) \equiv 0.$

$\Rightarrow R'(x) = const = k_1$

но $R'(x)$ — имеет 3 перемены знака на $[3,5]$

$\Rightarrow$ 2 корня (на $[3;5]$)

$\Rightarrow k_1 \equiv 0$

$\Rightarrow R'(x) \equiv 0$

$\Rightarrow R(x) = const$ — но $R(x)$ имеет 4 перемены знака

$\Rightarrow$ 3 корня (на $[3,5]$)

$\Rightarrow R(x) \equiv 0.$

Но это противоречие,

поскольку $R(x) = P(x) - P^*(x)$ не может быть $\equiv 0$,

т.к у $P(x)$ и $P^*(x)$ — нормы разные по предп.

$\Rightarrow$ никакого $P^*(x)$ — нет.

$\Rightarrow \boxed{P(x) = -\frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{63x}{8} + \frac{61}{6} \text{ — искомый}}$ ответ.

(1.4) построить МНРП

$n=2$

$[0,3]$

$f(x)=3x^3$.

Решение: $Q_2^0(x) = ax^2+bx+c$

⇒ по опр. МНРП: $3x^3 - Q_2^0(x) = 3x^3 + ax^2 - bx + c$ — должно наименее уклоняться от нуля на $[0,3]$.

⇒ $3x^3 - Q_2^0(x) = 3\cdot$ нормированный (т.е со старшим коэф $=x^3$) многочлен Чебышева на $[0,3]$)

Имеем: $T_3 = 4x^3 - 3x$

$$\Rightarrow T_3\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right) = T_3\left(\frac{2x-3}{3}\right) = \frac{4(2x-3)^3}{27} - \frac{\cancel{3}(2x-3)}{\cancel{3}}$$

У него старший коэф $= \frac{4}{27}\cdot 8 = \frac{32}{27}$ — а нужен 3

$$\Rightarrow \text{берем } \frac{3\cdot 27}{32}\left(\frac{4}{27}(8x^3-36x^2+54x-27) - 2x+3\right) =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{8}(8x^3-36x^2+54x-27) + \frac{81}{32}(-2x+3) =$$

$$= 3x^3 - \frac{27}{2}x^2 + \frac{81}{4}x - \frac{81}{8} - \frac{81x}{16} + \frac{243}{32} =$$

$$= \boxed{3x^3 - \frac{27}{2}x^2 + \frac{243}{16}x - \frac{81}{32}} =: P_3(x)$$

~~ответ~~

А почему надо брать именно $\frac{3}{2^{3-1}\cdot\left(\frac{2}{b-a}\right)^3}\, T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$?

потому что если есть $P_3^*(x)$ с усл. $\begin{cases} P_3^*(x) = 3x^3 + \dots \\ \|P_3^*(x)\| < \|P(x)\| \end{cases}$,

то $R(x) := P_3(x) - P_3^*(x)$ — $\begin{cases} \text{степени} \le 2 \text{ (т.к старший коэф. сократился)} \\ \text{имеет } (n+1)_{=4} \text{ перемен знака на } [0,3] \end{cases}$

⇒ имеет на $[0,3]$ 3 корня.

но $R(x)$ — $\begin{cases} \text{степени} \le 2 \\ \text{имеет 3 корня} \end{cases}$

⇒ $R(x) \equiv 0$.

но это противоречие,

т.к $R(x) \not\equiv 0$, поскольку $P_3^*(x)$ и $P_3(x)$ имеют разные нормы.

$$\Rightarrow \boxed{Q_2^0(x) = 3x^3 - P_3(x) = \frac{27}{2}x^2 - \frac{243}{16}x + \frac{81}{32}}$$ ответ

чтд.

(1.5) $f^{(n+1)}(x)$ – непрер, не меняет знак

Q_n – МНРП степени n для $f(x)$.

оценить $c_1 \le \|f(x) - Q_n(x)\| \le c_2$.

Я пользуюсь задачником)
Я уже помнила какую
ф-лу из 3.62.

Решение: по теореме Чебышева, если Q_n – МНРП степени n,
а) то есть $n+2$ точки альтернанса, т.е $n+2$ перемена знака

$\Rightarrow$ на $[a,b]$ $f(x) - Q_n(x)$ меняет знак $n+2$ раза

$\Rightarrow f(x) - Q_n(x)$ – имеет $(n+1)$ нуль (назовем эти точки $y_1 \dots y_{n+1}$).

$\Rightarrow Q_n(x)$ – можно расс. как как интерполяционный многочлен с узлами $y_1 \dots y_{n+1}$

Но из лекций: $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi \in [a,b]$.

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \omega_n(x).$$

А у нас L_{n+1}

$$\Rightarrow f(x) - Q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))\, \omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

б) с другой стороны

А еще мы знаем (из д/з), что $\|\omega_{n+1}\| \le \frac{(b-a)^n}{4(n-1)^n} n_{-1}$

$$\Rightarrow \|\omega_{n+1}\| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{4 \cdot n^{n+1}} \cdot n!$$

$$\Rightarrow \Delta \le \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!\, 4 \cdot n^{n+1}}$$

а) пусть x_0 такова: $|\omega_{n+1}(x_0)| = \|\omega_{n+1}(x)\|$ $\Rightarrow \|f(x) - Q_n(x)\| \ge |f(x_0) - Q_n(x_0)| =$

$$= |f^{(n+1)}(\xi(x_0))| \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

Но (см. 3,62):

$$\|\omega_n(x)\| \ge \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}$$

$$\Rightarrow \|f(x) - Q_n(x)\| \ge \min_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1} \cdot (n+1)!}$$

Ответ:

$$\boxed{\min_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1} \cdot (n+1)!} \le \|f(x) - Q_n(x)\| \le \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{4(n+1)\, n^{n+1}}}$$

Конец: 18.06