18.10.20. Спецкурс Бур. д/з 7   Токаева Александра 409

① Стохастический порядок не сохраняется для премии Эшера.

Пример: $P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$

$P(X=0;\ Y=\frac{2}{3h}) = \frac{1}{3}$

$P(X=\frac{3}{h};\ Y=\frac{3}{h}) = \frac{1}{3}$

X \ Y	0	$\frac{2}{3h}$	$\frac{3}{h}$
0	1/3	1/3	–
$\frac{3}{h}$	–	–	1/3

Тогда $X \underset{st}{\leq} Y$, но $\Pi_X > \Pi_Y$.

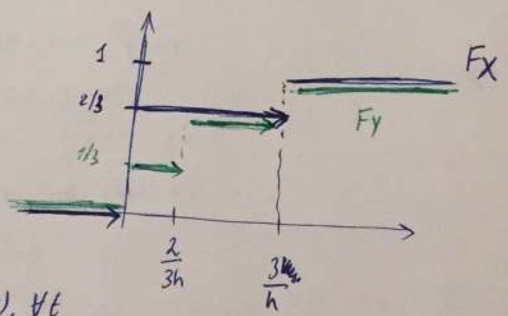
Решение: • $X \underset{st}{\leq} Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_X(t) \geq F_Y(t)\ \forall t$

• $\Pi_X = E X_h$, где $X_h \underset{\text{бр}}{\sim} F_{X,h}$: $dF_{X,h}(x) = \dfrac{e^{hx} dF_X(x)}{E e^{hX}}$

$$\Rightarrow \Pi_X = \frac{\int x \cdot e^{hx} dF_X(x)}{E e^{hX}} = \frac{E(X e^{hX})}{E e^{hX}} = \frac{g'_X(h)}{g_X(h)}, \text{ где } g_X(h) = E e^{hX}$$

Имеем: $X = \begin{cases} 0, & \text{с вер-тью } \frac{2}{3} \\ \frac{3}{h}, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3} \end{cases}$

$Y = \begin{cases} 0, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3h}, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3} \\ \frac{3}{h}, & \text{с вер-тью } \frac{1}{3} \end{cases}$



а) Из картинки: $F_X(t) \geq F_Y(t),\ \forall t$

$\Rightarrow X \underset{St}{\leq} Y$

б) $g_X(t) = E e^{tX} = \frac{2}{3} \cdot e^0 + \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{3t}{h}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{\frac{3t}{h}}$

$\Rightarrow g'_X(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{h} e^{\frac{3t}{h}} = \frac{1}{h} \cdot e^{\frac{3t}{h}}$

$$\Rightarrow \Pi_X = \frac{g'_X(h)}{g_X(h)} = \frac{\frac{1}{h} \cdot e^3}{\frac{1}{3}(2+e^3)} = \frac{3e^3}{h(2+e^3)}$$

$g_Y(t) = E e^{tY} = \frac{1}{3} e^0 + \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{2}{3h}t} + \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{3}{h}t}$

$\Rightarrow g'_Y(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3h} \cdot e^{\frac{2t}{3h}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{h} \cdot e^{\frac{3}{h}t}$

$$\Rightarrow \Pi_Y = \frac{g'_Y(h)}{g_Y(h)} = \frac{\frac{2}{3h} \cdot e^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{h} \cdot e^3}{1 + e^{\frac{2}{3}} + e^3}$$

$\Pi_X\ ?\ \Pi_Y$

$$\frac{3e^3}{h(2+e^3)}\ ?\ \frac{\frac{2}{3h} e^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{h} e^3}{1 + e^{\frac{2}{3}} + e^3}$$

$$3e^3 + 3e^{\frac{11}{3}} + 3e^6\ ?\ (2+e^3)\left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}} + 3e^3\right)$$

$3e^{3} + 3e^{\frac{11}{3}} + \cancel{3e^{6}} \;?\; \frac{4}{3}e^{\frac{2}{3}} + 6e^{3} + \frac{2}{3}e^{\frac{11}{3}} + \cancel{3e^{6}}$

$\frac{7}{3}e^{\frac{11}{3}} \;?\; \frac{4}{3}e^{\frac{2}{3}} + 3e^{3}$

$7e^{\frac{11}{3}} \;?\; 4e^{\frac{2}{3}} + 9e^{3}$

~~[illegible]~~

$273,8499\ldots \;?\; 7,7909\ldots + 180,769\ldots$

$>$

$\Rightarrow \begin{cases} X \le_{st} Y \\ \Pi_X > \Pi_Y \end{cases} \Rightarrow$ премия Эшера не сохраняет стох. порядок.

② Сохраняется ли стох. порядок при подсчёте премии по принципу среднеквадр.?

решение: Ответ: нет.

пусть $X = \begin{cases} 0, & \text{с вер-тью } p \\ \frac{10}{\beta}, & \text{с вер-тью } 1-p \end{cases}$

$\Rightarrow EX = \frac{10}{\beta}(1-p)$

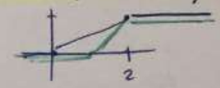
$EX^2 = \frac{100}{\beta^2}(1-p)$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{100}{\beta^2}(1-p) - \frac{100}{\beta^2}(1-p)^2 = \frac{100}{\beta^2}(1-p)p$

$\Rightarrow P_X = EX + \beta\sqrt{DX} = \frac{10}{\beta}(1-p) + \beta\cdot\frac{10}{\beta}(1-p)p = \frac{10}{\beta}(1-p) + 10(p-p^2)$

2 способ $X \sim R(0,2)$

$Y \sim R(1,2)$



$\Rightarrow X \le_{st} Y$ — см. картину

$EX = 1;\ DX = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$EY = 1,5;\ DY = \frac{1}{12}.$

$EX + \beta\sqrt{DX} \;?\; EY + \beta\sqrt{DY}$

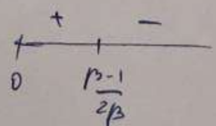
$1 + \beta\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \;?\; \frac{3}{2} + \beta\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\frac{\beta}{2\sqrt{3}} \;?\; \frac{1}{2}.$

$\beta \;?\; \sqrt{3} \Rightarrow$ при $\beta > \sqrt{3}$: $\begin{cases} X \le_{st} Y \\ P_X > P_Y \end{cases}$

$\Rightarrow$ не сохраняется стох. порядок

$\Rightarrow \frac{\partial P_X}{\partial p} = -\frac{10}{\beta} + 10(1-2p) \stackrel{?}{=} 0.$



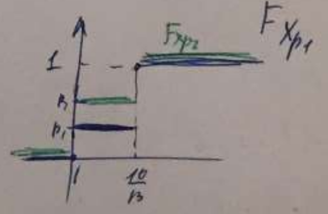
$1 - 2p = \frac{1}{\beta}$

$1 - \frac{1}{\beta} = 2p \Rightarrow p = \frac{\beta-1}{2\beta} < 1.$

$\Rightarrow$ при $0 < p_1 < p_2 < \frac{\beta-1}{2\beta}$:

$P_{X_{p_1}} < P_{X_{p_2}}$

но $X_{p_1} \ge_{st} X_{p_2}$, т.к. $F_{X_{p_1}}(t) \le F_{X_{p_2}}(t),\ \forall t.$



$\Rightarrow \begin{cases} X_{p_1} \ge_{st} X_{p_2} \\ P_{X_{p_1}} < P_{X_{p_2}} \end{cases} \Rightarrow$ стох. порядок не сохр.

③ Всегда ли принцип нулевой полезности обеспечивает премию с нагрузкой? Стр2

нет, это так только если ф-ция полезности вогнутая.

Решение: принцип нулевой полезности: $Eu(P-X)=u(0)$

$u(x)$ – вогнутая => по н-ву Йенсена $f(EZ)\geqslant Ef(Z)$ – т.к. $f(EX)\leqslant Ef(X)$ для выпуклых (вниз)

$$\Rightarrow u(0)=Eu(P-X)\leqslant u(E(P-X))=u(P-EX)$$

$$\Rightarrow u(0)\leqslant u(P-EX)$$

но u – возрастает по опр $\Rightarrow P-EX\geqslant 0$

$\Rightarrow P\geqslant EX \Rightarrow P$ – с нагрузкой.

Если u – выпуклая, например, $u(x)=e^x$

Возьмём $X\sim R[1,2]$.

$\Rightarrow EX=\frac{3}{2}$.

Ищем P_X: $Eu(P-X)=u(0)$

$$\underset{\parallel}{}\;Ee^{P-X}\qquad \overset{\parallel}{e^0}=1.$$

$$\Rightarrow e^P\cdot Ee^{-X}=1.$$

$$Ee^{-X}=\int_1^2 1\cdot e^{-x}dx=-1\cdot e^{-x}\Big|_1^2=-(e^{-2}-e^{-1})=e^{-1}-e^{-2}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}$$

$$\Rightarrow e^P\cdot\frac{e-1}{e^2}=1.$$

$$e^{P-2}=\frac{1}{e-1}.$$

$$P-2=-\ln(e-1)$$

$$P=2-\ln(e-1)=1{,}4586\ldots<1{,}5=EX.$$

$\Rightarrow P<EX\Rightarrow$ для выпуклой ф-ции полезности принцип нулевой полезности не даёт премию с нагрузкой.

④ Как меняется в смысле порядка $\leqslant_e$ семейство эксп. расп. при росте параметра?

ответ: возрастает.

Решение: $X\leqslant_e Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} Ee^{\alpha X}\leqslant Ee^{\alpha Y},\ \forall\alpha>0$.

пусть $a<b$.

$X\sim Exp(a)$; $Y\sim Exp(b)$

$p_X(x)=a\cdot e^{-ax}\cdot I\{x>0\}$

$$\Rightarrow Ee^{\alpha X}=\int_0^{+\infty}e^{\alpha x}\cdot a\cdot e^{-ax}dx=a\cdot\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-a)x}dx=\frac{a}{\alpha-a}\cdot e^{(\alpha-a)x}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\frac{a}{a-\alpha}, & \text{если } \alpha<a\\ \infty, & \text{если } \alpha\geqslant a.\end{cases}$$

$$Ee^{\alpha Y}=\begin{cases}\frac{b}{b-\alpha}, & \text{если } \alpha<b\\ \infty, & \text{если } \alpha\geqslant b.\end{cases}$$

пусть $0<\alpha<a<b$ | пусть $a\leq\alpha<b$ | пусть $a\leq b\leq\alpha$.

$\Rightarrow \frac{a}{a-\alpha} \; ? \; \frac{b}{b-\alpha}$. | $\Rightarrow \infty > \frac{b}{b-\alpha}$ | $\Rightarrow \infty = \infty$.

$$\frac{a}{a-\alpha}-\frac{b}{b-\alpha} \; ? \; 0.$$

$$\frac{\cancel{ab}-a\alpha-\cancel{ba}+b\alpha}{(a-\alpha)(b-\alpha)} \; ? \; 0.$$

$$\frac{\alpha(b-a)}{(a-\alpha)(b-a)} \; ? \; 0$$

$>$

$\Rightarrow$ возрастает.

5. Эксп. порядок не явл. полным

пример: $X\sim Exp(1)$ $\quad P(Y_1=0)=1.$

$Y=\frac{2}{3}\cdot\delta_0+\frac{1}{3}Exp(\frac{1}{2})$ — не упор. в смысле эксп. порядка.

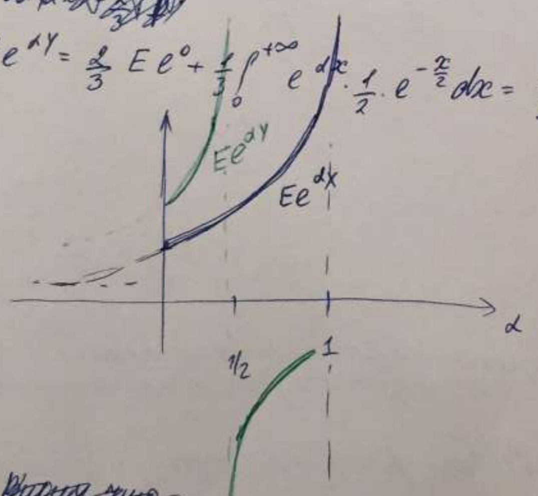
; $F_Y(x)=\frac{2}{3}F_{Y_1}(x)+\frac{1}{3}F_{Y_2}(x)$

$dF_Y(x)=\frac{2}{3}P(Y_1=x)+\frac{1}{3}p_{Y_2}(x)$

Решение: $X\leq_e Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} Ee^{\alpha X}\leq Ee^{\alpha Y}$

$$Ee^{\alpha X}=\int_0^{+\infty}e^{\alpha x}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-1)x}dx=\frac{1}{\alpha-1}e^{(\alpha-1)x}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha<1.\\ \infty, & \text{если } \alpha\geq1.\end{cases}$$

$$Ee^{\alpha Y}=\frac{2}{3}Ee^0+\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}e^{\alpha x}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}e^{x(\alpha-\frac{1}{2})}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{6(\alpha-\frac{1}{2})}e^{x(\alpha-\frac{1}{2})}\Big|_0^{+\infty}=\begin{cases}\frac{2}{3}+\frac{1}{3-6\alpha}, & \text{если } \alpha<\frac{1}{2}\\ \infty, & \text{если } \alpha\geq\frac{1}{2}.\end{cases}$$



~~Видно, что~~

Видим, что неверно, что $Ee^{\alpha X}\leq Ee^{\alpha Y}$, $\forall\alpha>0$.

(т.к. $Ee^{\alpha X}>Ee^{\alpha Y}$ при $\alpha\in(0;\frac{1}{2})$)

$\Rightarrow$ X и Y не упорядоч. в смысле эксп. порядка

$\Rightarrow$ эксп. порядок не полный