Теория арбитража для больших рынков

November 18, 2020

Arbitrage Pricing Theory Росса–Губермана (1976,1982), 1

Модель - последовательность $R^n \subset L^2(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$. В k-факторной модели $R^n = \{\mathbf{H}^n \Delta \mathbf{S}^n : \ \mathbf{H}^n \mathbf{1} = 0\}$, $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$,

$$\Delta \mathbf{S}^n = \mathbf{m}^n + \sum_{1 \le j \le k} Z_j^n \mathbf{b}_j^n + \mathbf{Y}^n.$$

$E^n Z_j^n = 0$, $E^n (Z_j^n)^2 < \infty$, $E^n |\mathbf{Y}^{ni}|^2 \le C$, компоненты $\mathbf{Y}^n$ некорелированы, жирным шрифтом — d-мерные вектора, $d = d(n)$. *Последовательность* $\xi^n \in R^n$ *— асимптотическая арбитражная возможность (AAO), если (a)* $\lim_n E^n \xi^n = \infty$, *(b)* $\lim_n D^n \xi^n = 0$.

Lemma

Пусть $\mathbf{c}^n$ *— проекция* $\mathbf{m}^n$ *на* $\mathcal{L}_n^{\perp}$, *где* $\mathcal{L}_n = \mathrm{Lin}\,\{\mathbf{1},\ \mathbf{b}_j^n,\ j \le k\}$. *Пусть NAA выполняется. Тогда* $\sup_n |\mathbf{c}^n| < \infty$, *то есть существуют последовательности* r^n, g_j^n, $j \le k$, *и константа* A *такие, что*

$$|\mathbf{c}^n| = \Big|\mathbf{m}^n - r^n \mathbf{1} - \sum_{1 \le j \le k} g_j^n \mathbf{b}_j^n\Big|_d^2 \le A.$$

Arbitrage Pricing Theory Росса–Губермана, 2

Док-во. Пусть $|\mathbf{c}^n| \to \infty$. Тогда $\mathbf{H^n} = a^n\mathbf{c}^n$, $a^n = |\mathbf{c}^n|^{-3/2}$ является асимптотической арбитражной стратегией:

$$V^n := \mathbf{H}^n \Delta \mathbf{S}^n = a^n|\mathbf{c}^n|^2 + a^n\mathbf{c}^n\mathbf{Y^n},$$

$$E^nV^n = a^n|\mathbf{c}^n|^2 \to \infty, \quad D^nV^n = E^n(a^n\mathbf{c}^n\mathbf{Y^n})^2 \le C(a^n)^2|\mathbf{c}^n|^2 \to 0.$$

Наиболее интересным является стационарный случай, когда вместо общей схемы серий мы имеем вложенные расширяющиеся модели с добавлением новых активов: $d(n) = n$, $\mathbf{m}^n = (m_1, ..., m_n)$ etc.
Центральный результат APT:

Theorem

Пусть в схеме расширяющихся моделей выполнено условие NAA. Тогда существуют константы r и g_j, $j \le k$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(m_i - r - \sum_{1\le j\le k} g_j b_j^i\Big)^2 < \infty.$$

Proof.

Let us consider the vector space spanned by the infinite-dimensional vectors $\mathbf{1}_\infty = (1, 1, ...)$, $b_j = (b_j^1, b_j^2, ...)$, $j \le k$. Without loss of generality we may assume that $\mathbf{1}_\infty$, b_j, $j \le l$, is a basis in this space. There is n_0 such that for every $n \ge n_0$ the vectors formed by the first n components of the latter are linearly independent. For every $n \ge n_0$ we define the set

$$K^n := \left\{ (r, g_1, ..., g_l, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^{k+1} : \sum_{i=1}^{n} \left(\mu^i - r - \sum_{j=1}^{k} g_j b_j^i \right)^2 \le A \right\}$$

where choosing A as in the lemma ensures that K^n is non-empty. Clearly, K^n is closed and $K^{n+1} \subseteq K^n$. It is easily seen that K^n is bounded (otherwise we could construct a linear relation between the vectors assumed to be linearly independent). Thus, the sets K^n are compact, $\cap_{n \ge n_0} K^n \ne \emptyset$, and the result follows.

Связь между CAPM и APM

Рассмотрим однофакторную стационарную модель с торгуемым реперным активом (with traded numéraire):

$$
\begin{aligned}
\Delta S^0 &= \mu_0 + b_0\zeta, \\
\Delta S^i &= \mu_i + b_i\zeta + \eta_i, \quad i \geq 1.
\end{aligned}
$$

где с.в. ζ и η_i некоррелированы и имеют нулевые средние, $D\eta_i \leq C$. При фиксировании значения "индекса" ΔS^0 цены остальных активов некоррелированы.

При отсутствии АА найдётся константа g такая, что

$$
\sum_{i=0}^{\infty}(\mu_i - gb_i)^2 < \infty,
$$

то есть $\mu_i = gb_i + u_i$, $u_i \to 0$. Если остаток u_0 мал, то $g \approx \mu_0/b_0$ и можно заключить, что $\mu_i \approx \mu_0\beta_i$ (по крайней мере для больших i), где $\beta_i := b_i/b_0 = b_ib_0/b_0^2$.

Современная версия APT

APT — важный результат, но обладает существенными недостатками: в частности, определением арбитража, резко отличающимся от концепций Харрисона и Плиски, и трудностью распространения на модели с непрерывным трейдингом, успех которых был обусловлен работами Блэка, Шоулса и Мертона. Проблема "примирения" двух теорий и распространения APT на модели с непрерывным временем решена в работе Kabanov–Kramkov (1994) на основе концепции асимптотического арбитража и использования техники, разработанной Липцером и Ширяевым при исследовании контигуальности вероятностных мер на пространстве с фильтрацией, и её обобщений. В рамках этой теории, которая получила дальнейшее развитие в работах Klein–Schachermayer (1996) и Kabanov–Kramkov (1998), были установлены критерии отсутствия асимптотического арбитража 1-го и 2-го рода. В модели "большого рынка Блэка–Шоулса" было получено условие ограниченности в терминах коэффициентов, аналогичное условию Росса–Губермана.

Определения, 1

Схема серий: $V^n_T = x^n + \varphi^n \cdot S^n_T,\ T = T^n$...

Definition

Последовательность стратегий φ^n реализует *асимптотический арбитраж 1-го рода*, если
1a) $V^n_t(\varphi^n) \geq 0\ \forall\ t \leq T$;
1b) $\lim_n V^n_0(\varphi^n) = 0$ (i.e. $\lim_n x^n = 0$);
1c) $\lim_n P^n(V^n_T(\varphi^n) \geq 1) > 0$.

Можно стать бесконечно богатым...

Definition

Последовательность стратегий φ^n реализует *асимптотический арбитраж 2-го рода*, если
2a) $V^n_t(\varphi^n) \geq -1\ \forall\ t \leq T$;
2b) $\lim_n V^n_0(\varphi^n) < 0$;
2c) $\lim_n P^n(V^n_T(\varphi^n) \leq -\varepsilon) = 0\ \forall\ \varepsilon > 0$.

Определения, 2

Definition

Последовательность стратегий φ^n реализует *сильный асимптотический арбитраж 1-го рода*, если
3a) $V_t^n(\varphi^n) \geq 0 \ \forall\ t \leq T$;
3b) $\lim_n V_0^n(\varphi^n) = 0$ (i.e. $\lim_n x^n = 0$);
3c) $\lim_n P^n(V_T^n(\varphi^n) \geq 1) = 1$.

Можно стать бесконечно богатым наверняка ...

Definition

Последовательность стратегий φ^n реализует *сильный асимптотический арбитраж 2-го рода*, если
4a) $V_t^n(\varphi^n) \geq -1 \ \forall\ t \leq T$;
4b) $\lim_n V_0^n(\varphi^n) = -1$;
4c) $\lim_n P^n(V_T^n(\varphi^n) \leq -\varepsilon) = 0 \ \forall\ \varepsilon > 0$.

Определения 3

Definition

$\overline{\mathbf{Q}}(A) := \sup_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A), \qquad \underline{\mathbf{Q}}(A) := \inf_{Q\in\mathcal{Q}} Q(A)$

$\mathcal{Q}$ — множество (локально) мартингальных мер.

Definition

Последовательность (P^n) *контигуальна* относительно $(\overline{\mathbf{Q}}^n)$ (обозначение: $(P^n) \lhd (\overline{\mathbf{Q}}^n)$), если импликация

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathbf{Q}}^n(A^n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P^n(A^n) = 0$$

имеет место для любой последовательности $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \geq 1$.

Контигуальность $(\underline{\mathbf{Q}}^n \lhd (P^n)$ определяется аналогично.

Определения, 4

Definition

Последовательность (P^n) *(вполне) асимптотически отделима от* $(\overline{\mathbf{Q}}^n)$ (обозначение: $(P^n) \triangle (\overline{\mathbf{Q}}^n)$), если существует подпоследовательность (m) с множествами $A^m \in \mathcal{F}^m$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\mathbf{Q}}^m(A^m) = 0, \quad \lim_{m\to\infty} P^m(A^m) = 1.$$

Критерии NAA1

Proposition

Следующие свойства эквивалентны:
(a) NAA1;
(b) $(P^n) \lhd (\overline{\mathbf{Q}}^n)$;
(c) существуют $R^n \in \mathcal{Q}^n$ такие, что $(P^n) \lhd (R^n)$.

Импликации $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ очевидны.
Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ вытекает из опционального разложения процесса $X_t^n = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}^n} E_Q(I_{\Gamma^n}|\mathcal{F}_t^n)$, который является Q-супермартингалом $\forall\ Q \in \mathcal{Q}$:

$$I_{\Gamma^n} = \overline{\mathbf{Q}}^n(\Gamma^n) + \varphi^n \cdot S_T^n - C_T^n \le \overline{\mathbf{Q}}^n(\Gamma^n) + \varphi^n \cdot S_T^n.$$

Импликация $(b) \Rightarrow (c)$ следует из минимаксной теоремы.

Критерии NAA2

Definition

Последовательность $(\mathcal{Q}^n)$ слабо контигуальна относительно (P^n) обозначение: $(\mathcal{Q}^n) \lhd_w (P^n))$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и последовательность $Q^n \in \mathcal{Q}^n$ такие, что для любой последовательности $A^n \in \mathcal{F}^n$ с $\limsup_n P^n(A^n) < \delta$ мы имеем $\limsup_n Q^n(A^n) < \varepsilon$.

Proposition

Следующие свойства эквивалентны:
(a) NAA2;
(b) $(\underline{\mathbf{Q}}^n) \lhd (P^n)$*;*
(c) $(\mathcal{Q}^n) \lhd_w (P^n)$*.*

Импликации $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ очевидны.
Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ — опциональном разложение.
$(b) \Rightarrow (c)$ — утверждение общего характера.

Критерии SAA1

Proposition

Следующие свойства эквивалентны:
(a) SAA1;
(b) $(P^n) \vartriangle (\overline{\mathbf{Q}}^n)$*;*
(c) SAA2)
(d) $(\underline{\mathbf{Q}}^n) \vartriangle (P^n)$*;*
(e) $(P^n) \vartriangle (Q^n)$ *для любой последовательности* $Q^n \in \mathcal{Q}^n$*.*

Большой БС-рынок, 1

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t), P)$ — стохастический базис со счётным числом независимых винеровских процессов w^i, $i \geq 0$, $\mathbf{w}^n := (w^0, \dots, w^n)$; пусть $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}^n_t)$ — подфильтрация $\mathbf{F}$ такая, что $(\mathbf{w}^n, \mathbf{F}^n)$ — винеровский процесс, т.е. мартингал с $\langle \mathbf{w}^n \rangle_t = tI_{n+1}$. Заметим, что $\mathbf{F}^n$ может быть шире фильтрации , порождённой $\mathbf{w}^n$.

Динамика цен активов:

$$dX^0_t = \mu_0 X^0_t dt + \sigma_0 X^0_t dw^0_t,$$

$$dX^i_t = \mu_i X^i_t dt + \sigma_i X^i_t (\gamma_i dw^0_t + \bar{\gamma}_i dw^i_t), \quad i \geq 1,$$

начальные условия — детерминированные,

$$\int_0^t |\mu_i(s)|^2 ds < \infty, \qquad \int_0^t |\sigma_i(s)|^2 ds < \infty, \qquad t < \infty,$$

$\gamma_i^2 + \bar{\gamma}_i^2 = 1$, $\sigma_i > 0$, $\bar{\gamma}_i > 0$.

Большой БС-рынок, 2

Положим
$$\beta_i := \frac{\gamma_i \sigma_i}{\sigma_0} = \frac{\gamma_i \sigma_i \sigma_0}{\sigma_0^2}.$$
В случае детерминированных коэффициентов β_i — ковариация между доходами от i-го актива и индекса, деленная на дисперсию дохода от индекса.
Пусть $T^n = T$,
$$U_T := \int_0^T \left[\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_i - \beta_i \mu_0}{\sigma_i \bar{\gamma}_i} \right)^2 \right] ds.$$

Proposition

NAA1 $\Leftrightarrow$ $U_T < \infty$ *P-п.н.*

Proposition

SAA1(2) $\Leftrightarrow$ $U_T < \infty$ *P-п.н.*

Критерии контигуальности $(\underline{\mathbf{Q}}^n) \lhd (P^n)$

Proposition

Предположим, что для каждого $n \geq 1$ задано вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ с выпуклым доминированным множеством $\mathcal{Q}^n$ вероятностных мер. Тогда следующие свойства эквивалентны:

(a) $(\underline{\mathbf{Q}}^n) \lhd (P^n)$;

(b) $(\mathcal{Q}^n) \lhd_w (P^n)$;

(c) имеет место равенство:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \liminf_n \sup_{Q \in \mathcal{Q}^n} H(\alpha, P^n, Q) = 1;$$

(d) имеет место равенство:

$$\lim_{K \to \infty} \limsup_n \inf_{Q \in \mathcal{Q}^n} Q\left(\frac{dQ}{dP^n} \geq K\right) = 0.$$

Процесс Хеллингера

Пусть P и Q — вероятностные меры на пространстве с фильтрацией, $Y(\alpha) := z_P^{\alpha} z_Q^{1-\alpha}$, где $\alpha \in]0,1[$, z_P, z_Q - процессы плотности P и Q относительно $\nu = (P+Q)/2$. Ограниченный ν-супермартингал $Y(\alpha)$ допускает представление

$$Y(\alpha) = M(\alpha)\mathcal{E}(-h(\alpha))$$

где $M(\alpha)$ — локальный ν-мартингал до момента σ, когда $Y(\alpha)$ достигнет нуля, $h(\alpha)$ - предсказуемый возрастающий процесс, $\mathcal{E}(-h(\alpha))$ — стохастическая экспонента, т.е. решение линейного уравнения

$$\mathcal{E}(-h(\alpha)) = 1 - \mathcal{E}_-(-h(\alpha)) \cdot h(\alpha),$$

Мультипликативное разложение вытекает из разложения Дуба–Мейера

$$Y(\alpha) = 1 - A(\alpha) + M(\alpha) = 1 - Y_-(\alpha) \cdot h(\alpha) + M(\alpha). \qquad (1)$$

Процесс $h(\alpha) = h(\alpha, Q, P)$ называется *процессом Хеллингера*.

Критерии контигуальности и процесс Хеллингера

Theorem

Следующие свойства эквивалентны: (a) $(P^n) \lhd (\overline{\mathbf{Q}}^n)$;
(b) $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \limsup_n \inf_{Q\in \mathrm{conv}\, \mathcal{Q}^n} P^n(h_\infty(\alpha, Q, P^n) \geq \varepsilon) = 0.$$

Theorem

Предположим, что семейство $\mathcal{Q}^n$ *выпукло и доминировано при каждом* n*. Тогда следующие свойства эквивалентны:*
(a) $(\underline{\mathbf{Q}}^n) \lhd (P^n)$;
(b) $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \limsup_n \inf_{Q\in \mathcal{Q}^n} Q(h_\infty(\alpha, P^n, Q) \geq \varepsilon) = 0.$$

Huberman G.
A simple approach to Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Economic Theory*, **28** (1982), 1.

Kabanov Yu. M., Kramkov D.O.
No-arbitrage and equivalent martingale measure: an elementary proof of the Harrison–Pliska theorem. *Probability Theory and Its Applications*, **39** (1994), 3.

Kabanov Yu. M., Kramkov D.O.
Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance and Stochastics*, **2** (1998), 2.

Klein I., Schachermayer W.
Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets. *Probability Theory and its Applications*, **41** (1996), 4.

Ross S. A.
The arbitrage theory of asset pricing. *Journal of Economic Theory*, **13** (1976), 1.

Мартингальный дефлятор

В недавних статьях Кардарас и Такаока показали, что условие NAA1 (называемое в также BK, NUPR) в "стационарной" модели эквивалентно существованию (локально-)мартингального дефлятора, т .е. строго положительного процесса, умножение на который превращает стоимость любого портфеля в локальный мартингал. Хотя Кардарас рассматривал только скалярный случай, его результат более точный:

Theorem

В любой окрестности базисной вероятностной меры можно найти эквивалентную ей вероятностную меру для которой существует реперный портфель (market portfolio), т.е. строго положительный процесс вида $1 + H \cdot S$ такой, что обратный к нему является мартингальным дефлятором.

NAA1

Условие NAA1 может быть записано в следующем виде:

(BK) Множество $K_0^1 := \{H \cdot S_T : \ H \cdot S \geq -1\}$ ограничено по вероятности.

Помимо прочего, интерес к свойству обусловлен следующим утверждением:

Lemma

(Delbaen–Schachermayer) NFLVR $\quad\Leftrightarrow\quad$ *NA & NAA1.*

NFLVR означает, что $\bar{C}^* \cap L_+^0 = 0$, где $C := (K_0^1 - L_+^0) \cap L^\infty$. В отличие от Такаока, Кардарас не использовал теорему Дельбана–Шахермайера. Его результат даёт новое доказательство последней, но, к сожалению, только для скалярного случая...