

Задачи на комплексный анализ

4 сентября 2022 г.

Вычеты

Вычеты в конечных и.о.т.

- Если $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $a \neq \infty$ – ряд Лорана функции f в соотв. кольце, то

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}.$$

- Если $a \neq \infty$ – полюс порядка $p \geq 1$ для функции f , то

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^p f(z)]^{(p-1)}.$$

- Пусть $a \neq \infty$ и

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}, \quad z \in B(a).$$

где $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(B(a))$: $f_2(a) = 0$, $f_2'(a) \neq 0$, $f_1(a) \neq 0$ (т. a – простой полюс f). Тогда

$$\operatorname{res}_a f = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Вычеты в $t.\infty$

СА-1

Найти коэффициент при z^6 ряда Тейлора функции $\cos^2(z)$

Решение.

$$\cos^2(z) = \frac{\cos(2z) + 1}{2} = \frac{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2z)^{2n}}{2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$$

Остаётся посмотреть на коэффициент, соответствующий $n = 3$.

Ответ: $-\frac{2}{45}$.

СА-2

Найти $f(i)$, где f — рациональная функция, в окрестности нуля задаваемая рядом $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

Решение. Знаем ряд:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Дифференцируем, а потом домножим на z :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \\ \frac{z}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} nz^n\end{aligned}$$

Получили $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. Найдем $f(i)$:

$$\frac{i}{(1-i)^2} = \frac{i(1+i)^2}{(1^2-i^2)^2} = \frac{i(1-1+2i)}{2^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

СА-3

Найти радиус сходимости ряда Тейлора в точке 0 функции $\frac{1}{e^z+1}$

Решение. Особые точки:

$$e^z + 1 = 0 \quad z = \pi i + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ближайшая к нулю — πi . Так как, функция голоморфна в круге радиуса π , то в нем и сходится ряд.

Ответ: π

СА-4

Найти площадь образа следующей области под действием e^z :

$$\{z = x + iy : x \in [0, \ln 3], y \in [0, \pi]\}.$$

Решение.

Посмотрим куда переходят границы (1), (2), (3), (4) (см. 2):

- (1): $e^x e^{i0} = e^x, \quad x \in [0, \ln 3]$.
- (2): $e^{\ln 3} e^{iy} = 3 \cdot e^{iy}, \quad y \in [0, \pi]$.

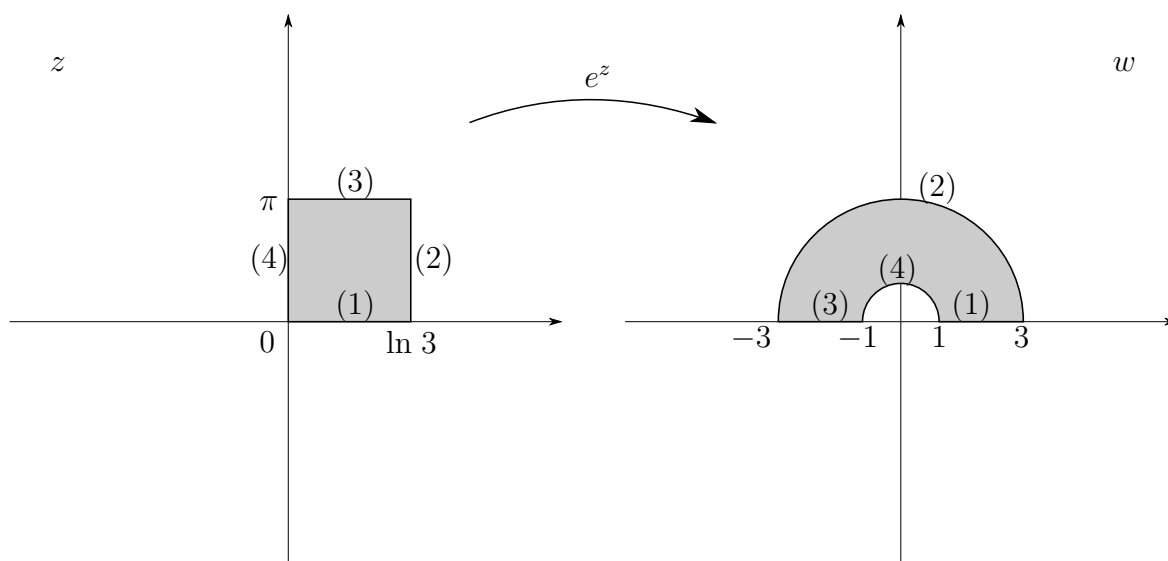


Рис. 1: Образ под действием e^z (серым выделены сами области).

- (3): $e^x e^{i\pi} = -e^x$, $x \in [0, \ln 3]$.
- (4): $e^0 e^{iy} = e^{iy}$, $x \in [0, \pi]$.

Искомая площадь:

$$S = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi.$$

Ответ: 4π .

СА-5

Найти радиус окружности, являющейся образом окружности $\{z : |z| = 1\}$ при отображении $z \rightarrow z/(z-2)$.

Решение. Так как

$$\frac{z}{z-2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{z-2},$$

то нам достаточно рассмотреть образ под действием $\Lambda(z) = 1/(z-2)$. **А зачем?** Все эти рассуждения с симметрией, диаметром на \mathbb{R} и образом конечного числа точек и для исходной функции прекрасно работают. Это какое-то избыточное решение (но правильное, конечно).

z	$\Lambda(z)$
1	-1
0	-1/2
-1	-1/3
i	$1/(i-2) = (2+i)/5$

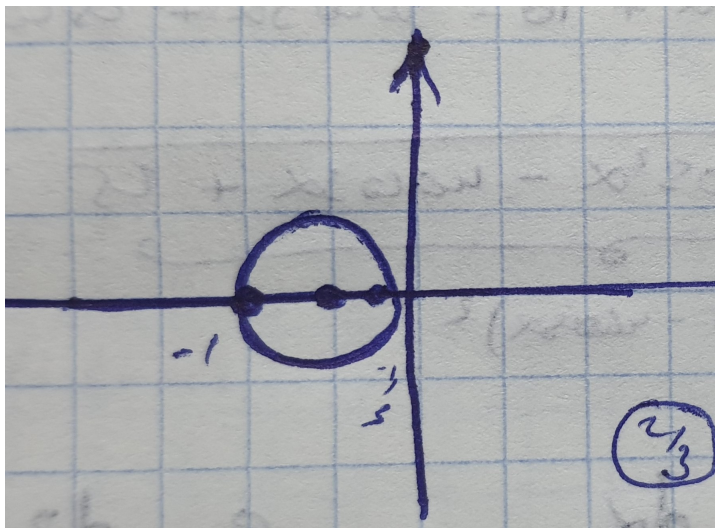


Рис. 2: Образ под действием Λ .

Так как $\overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\Lambda} \overline{\mathbb{R}}$, точки симметричные относительно \mathbb{R} переходят в точки также симметричные относительно \mathbb{R} .

Если смотреть по выписанным точкам, то наша окружность O перешла в другую окружность $\Lambda(O)$, образ внутренности – внутри образа окружности (см. точку 0). А из свойства симметрии – диаметр $\Lambda(O)$ лежит на \mathbb{R} . Осталось понять, что точки $\Lambda(1)$ и $\Lambda(-1)$ – концы диаметра. Так что

$$r = \frac{1}{2} \left| -1 + \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}.$$

Осталось применить $z \rightarrow 2z$ и получить $r = 2/3$.

Ответ: $2/3$.

СА-6

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z} dz.$$

Решение. Особые точки функции $f(z) = \frac{z+1}{z^2-z}$ — это простые полюса $z=0$ и $z=1$. Обе эти точки лежат внутри контура $|z|=2$. По теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z} dz = \operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=1} f(z).$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{z+1}{2z-1} \Big|_{z=0} = -1 \text{ и } \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{z+1}{2z-1} \Big|_{z=1} = 2. \text{ Итак,}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z} dz = -1 + 2 = 1.$$

Ответ: 1.

СА-7

Найти образ круга $\{z: |z| < 1\}$ при отображении $z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$.

Решение.

Сначала найдем образ окружности $\{z: |z| = 1\}$. Поскольку дробно-линейные преобразования сохраняют обобщенные окружности, достаточно найти образ трех точек:

$$1 \rightarrow \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i,$$

$$i \rightarrow \frac{i-i}{i+i} = 0,$$

$$-i \rightarrow \frac{-i-i}{-i+i} = \infty.$$

Тогда образ окружности $\{z: |z| = 1\}$ является обобщенной окружностью, проходящей через точки $\{-i, 0, \infty\}$, то есть прямой $\operatorname{Re} z = 0$. Посмотрим, куда перейдет внутренность круга:

$$0 \rightarrow \frac{0-i}{0+i} = -1,$$

следовательно, круг $\{z: |z| < 1\}$ перейдет в левую полуплоскость $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$.

Ответ: левая полуплоскость $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$.

СА-8

Найти коэффициент при z^{-2} ряда Лорана функции

$$2 \sin \frac{z-1}{z}$$

в кольце $0 < |z| < \infty$.

Решение.

Воспользуемся тем, что экспоненту можно раскладывать в ряд Тейлора.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{z-1}{z} &= 2 \sin \left(1 - \frac{1}{z} \right) = 2 \frac{e^{i(1-\frac{1}{z})} - e^{-i(1-\frac{1}{z})}}{2i} = \frac{e^i}{i} e^{-\frac{i}{z}} - \frac{e^{-i}}{i} e^{\frac{i}{z}} = \\ &= \frac{e^i}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i}{z}\right)^n}{n!} - \frac{e^{-i}}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{z}\right)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Так как представление верно для всех $z \neq 0$, то получившиеся выражение и есть ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$, который перегруппирован (ряды сходятся абсолютно, так что переставлять можно).

Осталось посмотреть коэффициент при z^{-2} :

$$\frac{e^i}{i} \frac{1}{2} - \frac{e^{-i}}{i} \frac{1}{2} = \frac{e^{-i} - e^i}{2i} = -\sin 1.$$

Ответ: $-\sin 1$.

СА-9

Найти ближайшие к 0 корни уравнения $\sin(z) = 2$

Решение.

$$\sin(z) = 2$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

$$e^{iz} = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = i(2 \pm \sqrt{3})$$

Произведем замену $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos(x) + i \sin(x))$$

Теперь уравнение имеет вид

$$\begin{cases} e^{-y} \cos(x) = 0 \\ e^{-y} \sin(x) = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ e^{-y} = (-1)^k (2 \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in 2\mathbb{Z} \\ y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$

Заметим, что поскольку $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, $\ln(2 + \sqrt{3}) = |\ln(2 - \sqrt{3})|$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$.

СА-10

Найти такую голоморфную функцию f комплексного переменного $z = x + iy$, что $\operatorname{Re} f(x, y) = y - xy$ и $f(0) = 0$

Решение.

Пусть $f(z) = u(x + iy) + iv(x + iy)$. Тогда $u(x + iy) = y - xy$ и

$$f(0) = 0 \implies v(0) = 0.$$

Кроме того, так как f – голоморфна, то она удовлетворяет условиям Коши-Римана, то есть

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases},$$

следовательно, $v_y = -y$ и $v_x = x - 1 \implies v = -\frac{y^2}{2} + P(x) = \frac{x^2}{2} - x + Q(y) \implies$

$\implies v = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x + C$, но $v(0) = 0 \implies C = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} f = u + iv &= y - xy + i \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x \right) = y - ix + \frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) = \\ &= (x + iy)(-i) + \frac{i}{2}(x + iy)^2 = -iz + \frac{iz^2}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-iz + iz^2/2$.

СА-11

Вычислить $17 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2 \right)$.

Решение.

$$17 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2 \right) = 17 \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} (i \ln 2)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tg} (i \ln 2)} = 17 \frac{1 - \operatorname{tg} (i \ln 2)}{1 + \operatorname{tg} (i \ln 2)}.$$

Вычислим теперь $\operatorname{tg} (i \ln 2)$. Вспомним, что

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

и подставим $i \ln 2$ в получившееся выражение. Получим

$$\operatorname{tg} (i \ln 2) = i \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{3}{5}i.$$

Итак,

$$17 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2 \right) = 17 \frac{1 - \frac{3}{5}i}{1 + \frac{3}{5}i} = 17 \frac{(1 - \frac{3}{5}i)^2}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{25(1 - \frac{9}{25} - \frac{6}{5}i)}{2} = 8 - 15i.$$

Ответ: $8 - 15i$.

СА-12

Кривая является образом окружности $\{z: |z| = 2\}$ под действием функции Жуковского $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Найти площадь области, ограниченной этой кривой.

Решение.

Введём на окружности параметризацию отрезком $[0, 2\pi]$:

$$\{z: |z| = 2\} = \{z: z = 2e^{it}\}$$

После применения функции Жуковского получим следующую кривую:

$$\frac{1}{2} \left(2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \right) = e^{it} + \frac{1}{4}e^{-it} = \cos t + i \sin t + \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4}i \sin t = \frac{5}{4} \cos t + \frac{3}{4}i \sin t$$

Это соответствует следующей параметрически-заданной действительной кривой на комплексной плоскости $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$:

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{5}{4} \cos t, \frac{3}{4} \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Параметризация $[0, 2\pi]$ задаёт положительное направление обхода, а значит, мы вправе (не будем ставить знак модуля на интеграл) применить следующую формулу для поиска площади, ограниченной параметрически-заданной кривой:

$$|D| = - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt = - \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} \sin t \cdot \frac{5}{4} \cdot (-\sin t)dt = \frac{15\pi}{16}$$

Ответ не совпадает с тем, что в файле от RusFort. Но проверка в Wolfram говорит, что площадь выше посчитана верно.

P.S. Можно заметить, что

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{5}{4} \cos t, \frac{3}{4} \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

задаёт эллипс с полуосями $(5/4, 3/4)$, так что его площадь

$$S = \pi \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15\pi}{16}.$$

Ответ: $\frac{15\pi}{16}$.

СА-13

В каких точках комплексной плоскости функция $f(z) = \bar{z}^2 + 2i\bar{z}$ имеет производную по z ?

Решение.

Распишем приращение нашей функции в произвольной точке z_0 :

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= (\overline{z_0 + \Delta z})^2 + 2i\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0^2 - 2i\bar{z}_0 = \\ &= 2\bar{z}_0\overline{\Delta z} + (\overline{\Delta z})^2 + 2i\overline{\Delta z} = 0 * \Delta z + (2\bar{z}_0 + 2i)\overline{\Delta z} + \bar{o}(\Delta z). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $f(z)$ является \mathbb{R} -дифференцируемой в любой точке $z_0 \in \mathbb{C}$, поэтому \mathbb{C} -дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z_0 равносильна тому, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} = 0$, т.е. $2\bar{z}_0 + 2i = 0$, откуда $z_0 = i$.

Ответ: i .

СА-14

Найти образ прямой $\{z = x + iy : y = 1\}$ при отображении $z \mapsto z^2$.

Решение.

Параметризация нашей прямой — это $z = t + i$. Тогда $z^2 = t^2 - 1 + 2it$. Обозначим $u = 2t$ и запишем $z^2 = \frac{u^2}{4} - 1 + iu$, то есть

$$x = \frac{y^2}{4} - 1,$$

откуда $y^2 = 4x + 4$.

Ответ: парабола $y^2 = 4x + 4$.

СА-15

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (2\bar{z} + 1) dz.$$

Решение.

Рассмотрев параметризацию единичной окружности, можно доказать, что

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (2\bar{z} + 1) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} 2 \frac{|z|^2}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} dz = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{2}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} dz &= \frac{1}{\pi i} 2\pi i + 0 = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

СА-16

Найти ближайший к единице полюс функции

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1} + \frac{i}{z}.$$

Решение. Все решения уравнения $e^{iz} - 1 = 0$ — это в точности $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Второе слагаемое $\frac{i}{z}$ уходит на бесконечность в точке $z_0 = 0$. При этом при $z \neq z_k$ функция f заведомо является аналитической т.к. линейная комбинация аналитических функций аналитична, равно как и композиция. Значит все z_k изолированы. Причем для всех $k \neq 0$ заведомо имеем $\lim_{z \rightarrow z_k} f(z) = \infty$, т.е. в эти точки являются полюсами нашей функции. Отсюда также получаем, что ∞ —

не изолированная особая точка. Осталось посмотреть, что происходит в точке $z_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^{iz} - 1} + \frac{i}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + ie^{iz} - i}{z(e^{iz} - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + i \left(1 + iz - \frac{z^2}{2} + o(z^2) - 1\right)}{z(1 + iz + o(z))} = \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{-i}{2}z^2 + o(z^2)}{iz^2 + o(z^2)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{-i}{2} + o(1)}{i + o(1)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Получается, что в точке 0 функция f имеет устранимую особенность.

Ответ: 2π

СА-17

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \sin \frac{z+1}{z} dz.$$

Решение.

У данной функции внутри единичного круга есть особая точка $z = 0$. Разложим в ряд Лорана в этой точке.

$$\begin{aligned}\sin \frac{z+1}{z} &= \sin \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{e^{i(1+\frac{1}{z})} - e^{-i(1+\frac{1}{z})}}{2i} = \frac{e^i}{2i} e^{\frac{i}{z}} - \frac{e^{-i}}{2i} e^{-\frac{i}{z}} = \\ \frac{e^i}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i}{z}\right)^n}{n!} - \frac{e^{-i}}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-i}{z}\right)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Так как представление верно для всех $z \neq 0$, то получившееся выражение и есть ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$, который перегруппирован (ряды сходятся абсолютно, так что переставлять можно).

Таким образом, $z = 0$ – существенно особая, а вычет

$$\operatorname{res}_{z=0} \left(\sin \frac{z+1}{z} \right) = c_{-1} = \frac{e^i}{2i} i - \frac{e^{-i}}{2i} (-i) = \cos 1.$$

По теореме Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \sin \frac{z+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \left(\sin \frac{z+1}{z} \right) = \cos 1.$$

Ответ: $\cos 1$.

СА-18

Найти функцию, голоморфную в окрестности нуля и удовлетворяющую функциональному уравнению.

$$f(z) = 2f(iz) + 3z^6.$$

Решение. $f(z)$ и $f(iz)$ голоморфны в окрестности нуля \implies аналитические в окрестности 0. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iz)^n + 3z^6.$$

Коэффициенты ряда Тейлора находятся однозначно, осталось сравнить их справа и слева.

$$\begin{aligned} n = 4k : & & c_n = 2c_n & \implies c_n = 0, \\ n = 4k + 1 : & & c_n = 2ic_n & \implies c_n = 0, \\ n = 4k + 2, \ n \neq 6 : & & c_n = -2c_n & \implies c_n = 0, \\ n = 4k + 3 : & & c_n = -2ic_n & \implies c_n = 0, \\ n = 6 : & & c_6 = -2c_6 + 3 & \implies c_6 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $f(z) = z^6$.

Ответ: z^6 .

СА-19

Найти рациональную функцию, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, простой полюс в -1 с вычетом -1 , не имеющую других полюсов и равную 0 в 0.

Решение.

Пусть искомая функция $f(z)$. Она имеет простые полюса в 1 и -1, значит

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \cdot g(z),$$

где $g(z)$ не имеет полюсов. Далее, $f(0) = 0$, следовательно,

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)} \cdot h(z).$$

Найдем $h(z)$ в виде $az + b$:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z-1} \cdot \frac{z(az+b)}{z+1} = \frac{a+b}{2} = 1, \\ \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{z+1} \cdot \frac{z(az+b)}{z-1} = \frac{-a+b}{2} = -1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow f(z) = \frac{2z^2}{z^2-1}.$$

Ответ: $\frac{2z^2}{z^2-1}$.

СА-20

Найдите конформное отображение f верхней полуплоскости на единичный круг, удовлетворяющее условиям $f(i) = 0$, $f'(i) = 1/2$.

Решение. Будем искать это отображение в виде дробно-линейного. Вещественная прямая перейдет в единичную окружность. Тогда, если некоторое z_0 , $\operatorname{Im} z_0 > 0$, переходит в 0, то по свойству симметрии $\overline{z_0}$ переходит в ∞ . Пусть b – это точка, переходящая в 1. Тогда

$$f(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \cdot \frac{b - \overline{z_0}}{b - z_0}.$$

Т.к. в единичную окружность переходит вещественная прямая, то $b \in \mathbb{R}$. Поэтому вторая дробь в формуле равна по модулю 1 (ведь $b - \overline{z_0} = \overline{b - z_0}$). Тогда для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}.$$

В нашем случае $f(i) = 0$, т.е. $z_0 = i$. Далее

$$\frac{1}{2} = f'(i) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z + i - z + i}{(z + i)^2} \Big|_{z=i} = -e^{i\alpha} \cdot \frac{i}{2},$$

откуда $e^{i\alpha} = i$. Поэтому

Ответ: $f(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$