Деревлев
409

1.1 Для ур-е $y'(x) = f(x)$ построить схему с наивысшим порядком аппроксимации на решении.

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}$$

$$\frac{y(x_k) - y(x_k - 2h)}{2h} = a_1 f(x_k) + a_0 f(x_k - h) + a_{-1} f(x_k - 2h) \quad (*)$$

$$y(x_k - 2h) = y(x_k) - 2h y'(x_k) + 2h^2 y''(x_k) - \frac{4}{3} h^3 y'''(x_k) + \frac{2}{3} h^4 y^{(4)}(x_k) + O(h^5)$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - h f'(x_k) + \frac{h^2}{2} f''(x_k) - \frac{h^3}{6} f'''(x_k) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x_k) + O(h^5)$$

$$f(x_k - 2h) = f(x_k) - 2h f'(x_k) + 2h^2 f''(x_k) - \frac{4}{3} h^3 f'''(x_k) + \frac{2}{3} h^4 f^{(4)}(x_k) + O(h^5)$$

подст. в (*), получим:

$$y'(x_k) - h y''(x_k) + \frac{2}{3} h^2 y'''(x_k) - \frac{h^3}{3} y^{(4)}(x_k) + O(h^4) =$$

$$= f(x_k)(a_1 + a_0 + a_{-1}) - (a_0 + 2a_{-1}) h f'(x_k) + \left(\frac{a_0}{2} + 2a_{-1}\right) h^2 f''(x_k) - \left(\frac{a_0}{6} + \frac{4a_{-1}}{3}\right) h^3 f'''(x_k) + O(h^4)$$

порядок аппрокс

Для аппрокс. на решении:

$$\begin{cases} a_1 + a_0 + a_{-1} = 1 \\ (a_0 + 2a_{-1}) = 1 \Rightarrow a_0 = 1 - 2a_{-1} \\ \dfrac{a_0}{2} + 2a_{-1} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3},\ a_{-1} = \frac{1}{6},\ a_1 = \frac{1}{6}$$

4

Ответ: $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_0 = \frac{2}{3}$, $a_{-1} = \frac{1}{6}$, порядок аппрокс. = 4.

(1.2) Исслед. на устойчивость:

$$\theta \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta)\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k, \text{ при } \theta \in [0,1].$$

Смотрим на α-устойчивость:

Положим $y_k = \mu^k$, получим хар. ур-е:

$$\theta\mu^2 - \theta\mu + (1-\theta)\mu - (1-\theta) = 0$$

$$\theta\mu^2 + (1-2\theta)\mu + \theta - 1 = 0$$

Если $\theta = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \alpha$-уст. есть.

Если $\theta \neq 0$: $D = (1-2\theta)^2 - 4\theta(\theta-1) = 1 - \cancel{4\theta} + \cancel{4\theta^2} - \cancel{4\theta^2} + \cancel{4\theta} = 1$

$$\mu_{1,2} = \frac{1-2\theta \pm 1}{2\theta} \Rightarrow \mu_1 = 1 \quad \mu_2 = \frac{\theta-1}{\theta}$$ — не 1, и должен быть в един. круге, то

$$\left|\frac{\theta-1}{\theta}\right| \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\theta-1}{\theta} \ge -1 \\ \frac{\theta-1}{\theta} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \ge \frac{1}{2} \\ \theta \le 1 \end{cases} \Rightarrow \theta \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

Ответ: 0, $[\frac{1}{2}; 1]$

+

(1.3) Для задачи $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ рассмотрим схему:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_{k+1} + y_k}{2}, \quad y_0 = 1, \quad k \geq 0$$

в разложении ошибки $y(x_N) - y_N = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$

найти c_1 для $x_N = N \cdot h = 1$.

Имеем: $2y_{k+1} - 2y_k = h \cdot y_{k+1} + h \cdot y_k$

$$y_{k+1}(2-h) = y_k(2+h)$$

$$y_{k+1} = \frac{2+h}{2-h} y_k \Rightarrow y_N = \frac{2+h}{2-h} y_{N-1} = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N y_0 =$$

$$= \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N$$

Точное реш-е задачи при $x = x_N$:

$y(x_N) = y(1) = e$, тогда:

$$y(x_N) - y_N = e - \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^N = e - e^{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right)} =$$

$$= e - e^{\frac{1}{h}\left(\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)} = e - e^{\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2} - \cancel{\frac{h^2}{8}} + \frac{h^3}{24} + o(h^4) + \frac{h}{2} + \cancel{\frac{h^2}{8}} + \frac{h^3}{24} + o(h^4)\right)} =$$

$$= e - e^{1 + \frac{h^2}{12} + o(h^3)} = e - e \cdot e^{\frac{h^2}{12} + o(h^3)} =$$

$$= e - e\left(1 + \frac{h^2}{12} + o(h^3)\right) = -\frac{eh^2}{12} + o(h^3) \Rightarrow C_1 = 0$$

+

Ответ: ↑

ивость:

1.4 $y' + 5y = \sin 2x$, $y(0) = 2$
построить двухточечную разност. схему второго порядка сх-ти.

Возьмём схему: $\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + 5\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = \underbrace{\frac{\sin(2h(n+1)) + \sin(2hn)}{2}}_{f_n}$

Проверим аппрокс. на реш-ии:

$$\frac{y(x_n+h) - y(x_n)}{h} + 5\frac{y(x_n+h) + y(x_n)}{2} - \frac{f(x_n+h) + f(x_n)}{2} =$$

$$\underset{\text{по ф-ле Тейлора}}{=} y'(x_n+\tfrac{h}{2}) + O(h^2) + 5y(x_n+\tfrac{h}{2}) + O(h^2) - \underbrace{f(x_n+\tfrac{h}{2})}_{\text{" по ур-ю } y'(x_n+\frac{h}{2}) + 5y(x_n+\frac{h}{2})} + O(h^2) = O(h^2)$$

согласованность:

$$f(x_n) - \frac{f(x_n+h) + f(x_n)}{2} \underset{\text{по ф-ле Тейлора}}{=} f(x_n) - f(x_n) + O(h) = O(h)$$

+

Сх-ма есть аппрокс. на реш-ии 2-го порядка.

проверим α-уст:

$y_n = \mu^n \Rightarrow$ ур-е $\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow$ есть

Тогда по т-ме Филиппова схема из начала имеет 2-й порядок сх-ти

Ответ: $\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + 5\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = \frac{\sin(2h(n+1)) + \sin(2hn)}{2}$

$y_0 = 2$

1.5 Для $u'' - 2u = \sin x - 1$ построить аппрокс. на решения второго порядка по точкам $x_0 = 0$, $x_1 = h$ и краевого условия $u'(0) - u(0) = 0$

$$u(h) = u(0) + h u'(0) + \frac{h^2}{2} u''(0) + O(h^3)$$

$$u'(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \frac{h}{2} u''(0) + O(h^2)$$

Имеем. $u''(0) - 2u(0) = \cancel{\sin 0} - 1$ +

$$u''(0) = 2u(0) - 1$$

Получим: $u'(0) = \dfrac{u(h) - u(0)}{h} - \dfrac{h}{2}(2u(0) - 1) + O(h^2)$

$$u'(0) - u(0) = \frac{u(h) - u(0)}{h} - \frac{h}{2}(2u(0) - 1) - u(0) + O(h^2)$$

Если $u(0) = u(x_0) = u_0$, $u(h) = u(x_1) = u_1$ $\Rightarrow \underline{\dfrac{u_1 - u_0}{h} - \dfrac{h}{2}(2u_0 - 1) - u_0 = 0}$

аппроксимирует с точностью $O(h^2)$

Ответ: