Искорнев М., 409.

№1.

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n; \quad u_0 = 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0, \quad 0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$

① По $u_1, \dots, u_n$ построить с.к. опт. прогноз ненаблюдаемой сл. в. u_{n+k}, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим этот прогноз u^*_{n+k}.

② $\Delta_k = E(u_{n+k} - u^*_{n+k})^2$ с.к. ошибка прогноза. Чему равен Δ_k при $k \to \infty$ для $|\beta| < 1$, $|\beta| = 1$, $|\beta| > 1$?

Решение: 1) оптим. с.к. прогноз u^*_{n+k} величины u_{n+k} по $u_1, \dots, u_n$ – это решение задачи:
$$E(u_{n+k} - u^*_{n+k})^2 \longrightarrow \min_{\substack{u^*_{n+k} \text{ - } \mathcal{F}_n \text{ измерим.} \\ E(u^*_{n+k})^2 < \infty}},$$

где $\mathcal{F}_n = \sigma(u_1, \dots, u_n)$.

$u^*_{n+k} = E(u_{n+k} \mid \mathcal{F}_n)$

$u_{n+k} = \beta u_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} = \beta^2 u_{n+k-2} + \beta \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} = \dots = \beta^k u_n + \beta^{k-1} \varepsilon_{n+1} + \dots + \beta \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k} = \beta^k u_n + \sum_{l=1}^{k} \beta^{k-l} \varepsilon_{n+l}$

Сл-но, $u^*_{n+k} = E(\beta^k u_n + \sum_{l=1}^{k} \beta^{k-l} \varepsilon_{n+l} \mid \mathcal{F}_n) = E(\beta^k u_n \mid \sigma(u_1, \dots, u_n)) + E(\sum_{l=1}^{k} \beta^{k-l} \varepsilon_{n+l} \mid \sigma(u_1, \dots, u_n))$

В силу измеримости $E(\beta^k u_n \mid \sigma(u_1, \dots, u_n)) = \beta^k u_n$

Т.к. $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots$ не зависят от $u_1, \dots, u_n$, то $E(\sum_{l=1}^{k} \beta^{k-l} \varepsilon_{n+l} \mid \sigma(u_1, \dots, u_n)) = E(\sum_{l=1}^{k} \beta^{k-l} \varepsilon_{n+l}) = 0$

Итак, $u^*_{n+k} = \beta^k u_n$.

2) $E(u_{n+k} - u^*_{n+k})^2 = E(\sum_{l=1}^{k} \beta^{k-l} \varepsilon_{n+l})^2$, т.к. $\{\varepsilon_k\}$ – н.о.р., то

$E(u_{n+k} - u^*_{n+k})^2 = E\varepsilon_1^2 \cdot \sum_{l=1}^{k} (\beta^2)^{k-l} = \sigma^2 \cdot (1 + \beta^2 + \dots + (\beta^2)^{k-1}) = \sigma^2 \cdot \dfrac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2}$

- $|\beta| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma^2 \dfrac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2} = \dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}$,
- $|\beta| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma^2 (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k}) = \lim\limits_{k\to\infty} k\sigma^2 = \infty$
- $|\beta| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \Delta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma^2 \dfrac{1-\beta^{2k}}{1-\beta^2} = \infty$

Ответ: 1) $u^*_{n+k} = \beta^k u_n$.

2) $|\beta| < 1 \Rightarrow \Delta_k \to \dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}, \ k\to\infty, \quad \Delta_k \sim \dfrac{\sigma^2}{1-\beta^2}$

$|\beta| = 1 \Rightarrow \Delta_k \to \infty, \ k\to\infty, \quad \Delta_k \sim k\sigma^2$

$|\beta| > 1 \Rightarrow \Delta_k \to \infty, \ k\to\infty, \quad \Delta_k \sim \dfrac{\beta^{2k}}{1-\beta^2}\sigma^2$.

№2.

$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t\in\mathbb{Z},$

$\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = \nu$, $0 < E\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$, корни хар. ур-я по $|\,| < 1$.

1) Вычислить спектр. пл-ть стац. решения.

2) Пусть $\bar u_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t$. Сх-ся ли $\bar u_n$ в с.к.? Если "да", то куда?

3) Пусть $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ при нек. $\delta > 0$ и $\exists$ пл. вер-ти $g(x)$ у ε, по мере Лебега. Яв. ли $\bar u_n$ асимпт. норм. сл. в.? Если "да", то с какими параметрами?

Решение: 1) $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \varepsilon_t - \nu + \nu$

Положим $\hat\varepsilon_t = \varepsilon_t - \nu \Rightarrow \{\hat\varepsilon_t\}$ н.о.р. и $E\hat\varepsilon_t = 0$.

Имеем: $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \nu + \hat\varepsilon_t$,

выберем μ, т.ч. $\nu = (1-\beta_1-\beta_2)\mu$. Такое μ существует, т.к. корни хар. ур-я по модулю меньше 1, а значит $1-\beta_1-\beta_2 \neq 0$.

Тогда $u_t - \mu = \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} - (\beta_1+\beta_2)\mu + \hat\varepsilon_t$

$$u_t - \mu = \beta_1(u_{t-1}-\mu) + \beta_2(u_{t-2}-\mu) + \hat\varepsilon_t$$

Положим $w_t := u_t - \mu$

$$\begin{cases} w_t = \beta_1 w_{t-1} + \beta_2 w_{t-2} + \hat\varepsilon_t & (*) \\ u_t = w_t + \mu \end{cases}$$

Т.к. $\{\hat\varepsilon_t\}$ - н.о.р. и корни хар. ур-я по модулю меньше 1, то ур-е $(*)$ имеет п.н. единств. строго стац. решение: $w_t = \sum_{j\ge 0} \gamma_j \hat\varepsilon_{t-j}$, причём $|\gamma_j| \le c\alpha^j$, $\alpha<1$.

Сл-но, $u_t = \mu + \sum_{j\ge 0} \gamma_j \hat\varepsilon_{t-j}$

Заметим, что $Cov(w_t, w_{t+\tau}) = Cov(u_t, u_{t+\tau})$, т.е. $R_w(\tau) = R_u(\tau)$.

$$Cov(u_t, u_{t+\tau}) = E(u_t-\mu)(u_{t+\tau}-\mu) = E w_t w_{t+\tau} = Cov(w_t, w_{t+\tau}).$$

Поэтому $f_w(\lambda) = f_u(\lambda)$.

Найдём $f_w(\lambda)$:

Мы знаем, что если $\{\xi_t\}$ – стац. в шир. см. посл-ть со спектр. пл-тью $f_\xi(\lambda)$,

$\eta_t = \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \xi_{t-j}$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} |a_j| < \infty$, тогда $\left(\varphi(\lambda) = \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{-i\lambda j}\right)$

1) ряд для η_t сх-ся в L^2, посл-ть $\{\eta_t\}$ – стац.,

2) $f_\eta(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda)$.

$$\tilde{\varepsilon}_t = w_t - \beta_1 w_{t-1} - \beta_2 w_{t-2} \Rightarrow f_{\tilde{\varepsilon}}(\lambda) = |1 - \beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|^2 f_w(\lambda)$$

$$f_w(\lambda) = \frac{f_{\tilde{\varepsilon}}(\lambda)}{|1-\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|^2}, \quad f_{\tilde{\varepsilon}}(\lambda) = \frac{R_\varepsilon(0)}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

Итак, $$f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1-\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|^2}$$

2) По ЗБЧ в с.к. смысле:

$$\overline{w}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} w_t \xrightarrow{\text{с.к.}} Z(0) - Z(-0), \; n \to \infty.$$

Т.к. существует спектр. пл-ть, то $F(\lambda)$ непр. $\Rightarrow F(0) - F(-0) = 0$,

причем $E|Z(0) - Z(-0)|^2 = F(0) - F(-0) = 0 \Rightarrow Z(0) - Z(-0) = 0$ п.н.

Итак, $$\overline{w}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} w_t \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$$

Так как $w_t = u_t - \mu$, то

$$\overline{u}_n \xrightarrow{\text{с.к.}} \mu = \frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2}.$$

3) Чтобы проверить асимпт. нормальность, воспользуемся ЦПТ для послед. с сильным перемешиванием:

Имеем $E u_1 = E(w_1 + \mu) = E\left(\sum\limits_{j\ge 0} \gamma_j \tilde{\varepsilon}_{1-j}\right) + \mu = \mu$,

$E|u_1 - \mu|^{2+\delta} = E|w_1|^{2+\delta} = E\left|\sum\limits_{j\ge0}\gamma_j \tilde{\varepsilon}_{1-j}\right|^{2+\delta} = E|\varepsilon_{1-j} - \nu|^{2+\delta} \cdot \cancel{E\left|\sum\limits_{j\ge0}\gamma_j\right|} \cdot$

$\cdot \left|\sum\limits_{j\ge 0}\gamma_j\right|^2$, т.к. $|\gamma_j| \le c\lambda^j$, $0<\lambda<1$, то $E|u_1 - \mu|^{2+\delta} < \infty$

Далее, т.к. мы рас-м $AR(2)$, то $\{w_t\}$ удовл. усл. с.п. с $\alpha(\tau) \le c\hat{\lambda}^\tau$,

$0<\hat{\lambda}<1$. Т.к. u_t – борелевская ф-ция от w_t, то u_t также удовл. усл. с.п., причем $\alpha_u(\tau) \le \alpha_w(\tau) \le c\hat{\lambda}^\tau$.

Сл-но, $\sum\limits_{\tau\ge1} \left(\alpha_u(\tau)\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$.

$$\hat{\Delta}^2 = Du_0 + 2\sum_{\tau\ge1} R(\tau) = E(u_0-\mu)^2 + 2\sum_{\tau\ge1} R(\tau) = R(0) + 2\sum_{\tau\ge1} R(\tau) =$$
$$= 2\pi f_u(0) = \frac{\sigma^2}{|1-\beta_1-\beta_2|^2} > 0$$

Сл-но, по ЦПТ для посл. с с.п.:

$\sqrt{n}(\bar{u}-\mu) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\delta^2}{|1-\beta_1-\beta_2|^2}\right)$, т.е. $\bar{u}_n$ - асимптотически нормальная.

<u>Ответ:</u> 1) $f_u(\lambda) = \frac{\delta^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1-\beta_1 e^{-i\lambda} - \beta_2 e^{-2i\lambda}|^2}$,

2) $\bar{u}_n \xrightarrow{c.н.} \mu = \frac{\nu}{1-\beta_1-\beta_2}$,

3) $\sqrt{n}(\bar{u}-\mu) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\delta^2}{|1-\beta_1-\beta_2|^2}\right)$.

№3.

$u_t = \varepsilon_t \mp \alpha \varepsilon_{t-1}$, $t = 1, 2, ..., n$; $\varepsilon_0 = 0$, $\{\varepsilon_t\}, t \geq 1$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл. вел. Выписать ур-е правдоподобия для оценки α методом макс. правдоп.

<u>Решение:</u>
$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_1 - \alpha\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \\ u_2 = \varepsilon_2 \mp \alpha\varepsilon_1 \\ u_3 = \varepsilon_3 \mp \alpha\varepsilon_2 \\ \vdots \\ u_n = \varepsilon_n \mp \alpha\varepsilon_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = u_1 \\ \varepsilon_2 = u_2 + \alpha u_1 \\ \varepsilon_3 = u_3 + \alpha u_2 + \alpha^2 u_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n = u_n + \alpha u_{n-1} + ... + \alpha^{n-1} u_1 \end{cases}$$

$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ и $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$

$$\mathcal{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha & 1 & & 0 & \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что если $\eta = A\xi$, то $f_\eta(x) = \frac{1}{|\det A|} \cdot f_\xi(A^{-1}x)$

В нашем случае $\mathcal{U} = A^{-1}\mathcal{E}$, поэтому

$$g_u(x, \alpha) = \frac{1}{|\det A^{-1}|} \cdot g_\varepsilon(Ax, \alpha), \text{ где}$$

$x = (x_1, ..., x_n)$.

Т.к. $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., то $g_u(x,\alpha) = 1 \cdot \prod_{t=1}^{n} g_{\varepsilon_1}(\alpha^{t-1}x_1 + ... + \alpha x_{t-1} + x_t)$

Сл-но, О.М.П. для α - это решение задачи:

$$\ln g_u(u, \theta) = \sum_{t=1}^{n} \ln g_{\varepsilon_1}(\theta^{t-1}u_1 + ... + \theta u_{t-1} + u_t) \longrightarrow \max_{\theta \in \mathbb{R}}$$

Т.к. $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, то $g_{\varepsilon_1}(\theta^{t-1}u_1 + \dots + \theta u_{t-1} + u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta^{t-1}u_1+\dots+\theta u_{t-1}+u_t)^2}{2}}$

Т.е. экстрем. задача: $\sum_{t=1}^{n} (\theta^{t-1}u_1 + \dots + \theta u_{t-1} + u_t)^2 \to \min_{\theta\in\mathbb{R}}$

Продифф.: $\sum_{t=1}^{n} (\theta^{t-2}(t-1)u_1 + \theta^{t-3}(t-2)u_2 + \dots + \theta u_{t-2} + u_{t-1})(\theta^{t-1}u_1 + \dots + \theta u_{t-1} + u_t) = 0$ –

– решением будет О.М.П. для α.

<u>Ответ:</u> $\sum_{t=1}^{n} (\theta^{t-2}(t-1)u_1 + \theta^{t-3}(t-2)u_2 + \dots + \theta u_{t-2} + u_{t-1})(\theta^{t-1}u_1 + \dots + \theta u_{t-1} + u_t) = 0$.

№4

$$\begin{cases} u_t = a + \varepsilon_t, \\ y_t = u_t + z_t^{\gamma}\xi_t, \quad t = 1, \dots, n \end{cases}$$

$\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1 \sim G(x)$ и $\exists\, g(x) = G'(x)$, причем $g(x) = g(-x)$. Си в $\{\xi_t\}$ – н.о.р. с неизв. распред. μ_t, $\{z_t^{\gamma}\}$ – н.о.р. $\sim B_i(\gamma)$, послед. $\{u_t\}$, $\{z_t^{\gamma}\}$, $\{\xi_t\}$ – независимы.

F – $\forall$ строго возраст. симм. отн. 0 ($F(x) + F(-x) = 1$) функция распределения. Ур-е для оценивания a:

$$\sum_{t=1}^{n} \left[F(y_t - \theta) - \frac{1}{2}\right] = 0 \qquad (*)$$

1) Сколько решений?

2) Есть ли решение, которое B-робастно? Если "да", то найти его IF и GES.

<u>Решение:</u>

1) F - ф-ция распред. $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \Rightarrow F(x) - \frac{1}{2}$ будет положительна на $+\infty$ и отрицательна на $-\infty$. Кроме того, F – <u>строго</u> монотонна, поэтому решение у ур-я $(*)$ <u>единственно</u>.

2) Проверим условия теоремы: если $\hat{a}_n$ ищется как корень ур-я:

$$l_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \varphi_t(Y_n, \theta) = 0,$$

и вып. условия: (i) $l_n(\theta) \xrightarrow{P} \Lambda(\gamma, \theta)$ при $|\theta - a| < \delta$, $0 \le \gamma < \gamma_0$,

(ii) $\Lambda(0, a) = 0$,

(iii) $\exists$ и непр. $\frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\gamma}$ и $\frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}$ в $|\theta - a| < \delta$, $|\gamma| < \gamma_0$

$$(iv)\quad \lambda(a) = \frac{\partial \Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}\Big|_{(0,a)} = 0,$$

тогда если ψ_t непр., то с вер-тью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, ур-е имеет такое решение $\hat{a}_n$, что соотв. оценка $\hat{a}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma$, $\theta_0 = a$ и

$$\exists \quad IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = -(\lambda(a))^{-1} \frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma}(0,a).$$

Т.к. $\{\varepsilon_t\}$ - нор., то по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{P} E\left(F(y_t-\theta)-\frac{1}{2}\right) = \Lambda(\gamma,\theta)$$

$$\Lambda(\gamma,\theta) = E\left(F(u_t + z_t^\gamma \xi_t - \theta) - \frac{1}{2}\right)$$

Если ξ и η - нез., а η - дискретно, то $E\varphi(\xi,\eta) = E\left[\varphi(\xi,\eta)\sum_k I(\eta=\eta_k)\right] =$
$= \sum_k E\left[\varphi(\xi,\eta_k) I(\eta=\eta_k)\right] = \sum_k E\varphi(\xi,\eta_k)\cdot P(\eta=\eta_k)$

Сл-но, $\Lambda(\gamma,\theta) = E\left[F(u_t-\theta)-\frac{1}{2}\right](1-\gamma) + \gamma\cdot E\left[F(u_t+\xi_t-\theta)-\frac{1}{2}\right]$.

$$\Lambda(0,a) = E\left[F(\varepsilon_t)-\frac{1}{2}\right].$$

$F(\varepsilon_t) = 1 - F(-\varepsilon_t)$, т.к. $\varepsilon_t \overset{d}{=} -\varepsilon_t$ (ибо $g(x) = g(-x)$), то $F(\varepsilon_t) = \frac{1}{2}$ и, сл-но, $\Lambda(0,a) = 0$.

Очевидно, что $\frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma}$ $\exists$ и непр., т.к. $\Lambda(\gamma,\theta)$ - полином по γ.

$E\left(F(u_t-\theta)-\frac{1}{2}\right)$ - инт. по парам. θ, по призн. Вейерштрасса инт. от подынт. ф-ции после дифф. сх-ся $\Rightarrow$ $\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}$ $\exists$ и непр.

Итак, $\frac{\partial\Lambda(\gamma,\theta)}{\partial\theta}\Big|_{(0,a)} = -E(f(\varepsilon_t)) < 0$, т.к. F - строго мон.

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma}\Big|_{(0,a)} = -E\left[F(u_t-\theta)-\frac{1}{2}\right] + E\left[F(u_t+\xi_t-\theta)-\frac{1}{2}\right]\Big|_{(0,a)} =$$

$$= E\left[F(\varepsilon_t+\xi_t)-\frac{1}{2}\right] = E(F(\varepsilon_t+\xi_t)) - \frac{1}{2}$$

Сл-но, $IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = \dfrac{E(F(\varepsilon_t+\xi_t)) - \frac{1}{2}}{Ef(\varepsilon_t)}$

$$GES(\theta_\gamma, M_\xi) = \sup_{\mu_\xi\in M_\xi} |IF(\theta_\gamma, \mu_\xi)| = \cancel{\frac{1}{Ef(\varepsilon_t)}}\ \frac{1}{2\,Ef(\varepsilon_t)} < \infty$$

$\Downarrow$ $\hat{a}_n$ - В-робастно

<u>Ответ</u>: 1) У этого ур-е <u>одно</u> решение.

2) Решение ур-я В-робастно,

$IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = \dfrac{E(F(\varepsilon_t+\xi_t)) - \frac{1}{2}}{Ef(\varepsilon_t)}$, $\quad GES(\theta_\gamma, M_\xi) = \dfrac{1}{2\,Ef(\varepsilon_t)}$

№ 5.

Решение: $\sum_{t=1}^{n} y_{t-2}(y_t - \theta y_{t-1}) = 0$, считаем что $E\varepsilon_i^2 = \delta^2$

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_t}{\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_{t-1}}$$

По ЗБЧ для посл. с о.н.: $\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_t \xrightarrow{P} E y_{-1} y_1$

$$\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_{t-1} \xrightarrow{P} E y_{-1} y_0$$

Покомпонентная сх-ть по вер-ти эквивалентна сх-ти векторов по вер-ти: ~~$\left(\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_t\right) \longrightarrow$~~

$$\left(\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_t, \sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_{t-1}\right) \xrightarrow{P} \left(E y_{-1} y_1, E y_{-1} y_0\right)$$

Применяем теор-о наследовании сх-ти: $\frac{\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_t}{\sum_{t=1}^{n} y_{t-2} y_{t-1}} \xrightarrow{P} \cancel{\frac{E y_{t-2} y_t}{E y_{t-2} y_{t-1}}}$

$$\frac{E y_{-1} y_1}{E y_{-1} y_0}$$

$y_{-1} = u_{-1} + z_{-1}^{\gamma} \xi_{-1}$, $y_1 = u_1 + z_1^{\gamma} \xi_1$, $y_0 = u_0 + z_0^{\gamma} \xi_0$

$E y_{-1} y_0 = E(u_{-1} + z_{-1}^{\gamma} \xi_{-1})(u_0 + z_0^{\gamma} \xi_0) = \cancel{E(u_{-1} + z_{-1}^{\gamma}\xi_{-1})\, E(u_0 + z_0^{\gamma}\xi_0)} =$

$= E(u_{-1} + z_{-1}^{\gamma} \xi_{-1})(\beta u_{-1} + \varepsilon_0 + z_0^{\gamma} \xi_0) = \beta E u_{-1}^2 + E z_{-1}^{\gamma} z_0^{\gamma} \xi_{-1} \xi_0 =$

$= \beta \cdot \frac{\delta^2}{1-\beta^2} + (E z_0^{\gamma} \xi_0)^2 = \beta \frac{\delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2$

$E y_{-1} y_1 = E(u_{-1} + z_{-1}^{\gamma} \xi_{-1})(u_1 + z_1^{\gamma} \xi_1) = E\left[(u_{-1} + z_{-1}^{\gamma} \xi_{-1})\right.\cdot$

$\cdot(\beta^2 u_{-1} + \beta \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + z_1^{\gamma} \xi_1) = \beta^2 E(u_{-1})^2 + \gamma^2 (E\xi_0)^2 = \frac{\beta^2 \delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2$

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{P} \theta_\gamma = \frac{\frac{\beta^2 \delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2}{\frac{\beta \delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2}$$

$$\frac{\partial \theta_\gamma}{\partial \gamma} = \frac{2\gamma (E\xi_0)^2 \left(\frac{\beta \delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2\right) - \left(\frac{\beta^2 \delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2\right) \cdot 2\gamma \cdot (E\xi_0)^2}{\left(\frac{\beta \delta^2}{1-\beta^2} + \gamma^2 (E\xi_0)^2\right)}$$

$$\left.\frac{\partial \theta_\gamma}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0} = 0 \Rightarrow IF(\theta_\gamma, \mu_\xi) = 0$$

Поэтому $GES(\theta_r, \mu_t) = 0$

<u>Ответ:</u> $IF(\theta_r, \mu_t) = 0$ и $GES(\theta_r, \mu_t) = 0$.