19.11.20. ВарОпу. д/з от семинара 11.

Задачи с своб. концами

№36 стр 133

(1) а) $\int_0^1 \dot{x}^2 dt - 2x^2(1) \to extr; \; x(0)=0.$

$$\Lambda(x) = \int_0^1 \lambda_0 \dot{x}^2 dt \underbrace{- 2\lambda_0 x^2(1) + \lambda_1 \cdot x(0)}_{= l}$$

стац. по x: $L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$, $L_x = 0$ $\Rightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} = 0.$

Трансв. по x: $\begin{cases} L_{\dot{x}(0)} = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}(1)} = -l_{x(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_1 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(1) = -(-4\lambda_0 x(1)) = 4\lambda_0 x(1). \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \ddot{x} = 0 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_1 \\ \lambda_0 \dot{x}(1) = 2\lambda_0 x(1) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из $2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_1$ будет $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = (\lambda_0; \lambda) = \bar{0}$ - так нельзя

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ 2\dot{x}(0) = \lambda_1 \\ \dot{x}(1) = 2x(1) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x(t) = c_1 t + c_2 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 2c_1 \\ &\Rightarrow c_1 = 2c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \\ &\Rightarrow c_2 = 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \hat{x}(t) = 0. \text{ - допустимая экстремаль}$$

$L(\hat{x}+h) - L(\hat{x}) = \int_0^1 \dot{h}^2 dt - 2h^2(1)$ - бывает >0, <0.

Берём $x_\lambda = \hat{x} + \lambda t \to \hat{x}$ при $\lambda \to 0$.

$\Rightarrow L(x_\lambda) - L(\hat{x}) = \lambda^2 \cdot \int_0^1 1 dt - 2\lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2 \cdot (1-2) < 0.$

Берём $x_\lambda = \hat{x} + \lambda t^3 \to \hat{x}$ при $\lambda \to 0$

$\Rightarrow L(x_\lambda) - L(\hat{x}) = \lambda^2 \cdot \int_0^1 (3t^2)^2 dt - 2 \cdot (\lambda \cdot 1)^2 = \lambda^2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} - 2\lambda^2 = 3\lambda^2 - 2\lambda^2 = \lambda^2 > 0.$

$\Rightarrow \hat{x} = 0 \notin locextr$

$S_{abs\,min} = -\infty$, т.к.

берём $x_n = nt$

$\Rightarrow L(x_n) = \int_0^1 n^2 dt - 2n^2 = -n^2 \to -\infty$ при $n \to \infty$.

$S_{abs\,max} = +\infty$, т.к.

берём $x_n = nt^3$

$\Rightarrow L(x_n) = \int_0^1 n^2 \cdot 9 \cdot t^4 dt - 2n^2 = 9n^2 \cdot \frac{1}{3} - 2n^2 = 3n^2 - 2n^2 = n^2 \to +\infty$ при $n \to \infty$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Ответ: } \hat{x} = 0 \notin locextr \\ &S_{abs\,min} = -\infty \\ &S_{abs\,max} = +\infty \end{aligned}}$$

б) $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr;\ x(0)=0;\ T+x(T)+1=0.$ №3.11 стр 134

$\Lambda(x) = \int_0^T \underbrace{\lambda_0 \dot{x}^2}_{=L} dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 (T+x(T)+1)$

Стац. по x: $L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$, $L_x = 0$ $\Rightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} = 0.$

Трансв: $\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_1 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(T) = -\lambda_2 \end{cases}$

Стац. по T: $\Lambda_T = 0:\ \lambda_0 \dot{x}^2(T) + \lambda_2 + \lambda_2 \dot{x}(T) = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \ddot{x} = 0 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda_1 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(T) = -\lambda_2 \\ \lambda_0 \dot{x}^2(T) + \lambda_2 + \lambda_2 \dot{x}(T) = 0. \\ x(0) = 0 \\ T + x(T) + 1 = 0. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то из трансв: $\lambda = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = 0$ — не подх

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1.$

$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 & \Rightarrow x(t) = c_1 t + c_2 \Rightarrow \dot{x} = c_1 \\ 2\dot{x}(0) = \lambda_1 & \Rightarrow \lambda_1 = 2c_1 \\ 2\dot{x}(T) = -\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 = -2c_1 \\ \dot{x}^2(T) + \lambda_2(1+\dot{x}(T)) = 0 & \Rightarrow c_1^2 - 2c_1(1+c_1) = 0. \\ x(0) = 0 & \Rightarrow c_2 = 0. \\ T + x(T) + 1 = 0 & \end{cases}$

$c_1^2 - 2c_1 - 2c_1^2 = 0.$

$c_1^2 = -2c_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \Rightarrow T = -x(T) - 1 = -1 < 0 \text{ — не подх} \\ c_1 = -2 \Rightarrow x(t) = -2t \Rightarrow T = -x(T) - 1 = 2T - 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow T = 1$

$\Rightarrow \hat{x}(t) = -2t$, $\hat{T} = 1$ — допустимая экстремаль.

$J(\hat{x}, \hat{T}) = \int_0^1 4\,dt = 4.$

Доставляет ли оно экстремум?

$\cancel{J(\hat{x}+h, \hat{T}+\tau) - J(\hat{x}, \hat{T}) = \int_0^{1+\tau} (\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 dt - \int_0^1 \underbrace{\dot{\hat{x}}^2}_{=4} dt = \ldots}$

$\cancel{= \int_0^{1+\tau} (4 + 2\dot{h}\dot{\hat{x}} + \dot{h}^2) dt - 4 = \underbrace{2\dot{\hat{x}} h \Big|_0^{1+\tau}}_{=0,\ \text{т.к. } h(T)=h(0)=0} - \underbrace{\int_0^{1+\tau} 2\ddot{\hat{x}} h\, dt}_{=0,\ \text{т.к. } \ddot{x}=0} + \int_0^{1+\tau} (4 + \dot{h}^2) dt - 4}$

$J(\hat{x}+h; \hat{T}+\tau) \cancel{- J(\hat{x}, \hat{T}) =}$

Берем допустимую пару: $x(t) = c_1 t + c_2$, $x(0) = 0$, $x(T) = -1 - T$ $\Rightarrow x(T) = c_1 T = -1 - T \Rightarrow c_1 = -\frac{1+T}{T} \Rightarrow x(t) = -\frac{1+T}{T} t$

стр 2

$\Rightarrow \mathcal{J}(x,T)-\mathcal{J}(\hat{x},\hat{T}) = \int_0^T (c_1)^2 dt - \int_0^1 \underbrace{\dot{\hat{x}}^2}_{=4} dt = \int_0^T \left(\frac{1+T}{T}\right)^2 dt - 4 =$

$= T\cdot\frac{(1+T)^2}{T^2} - 4 = \frac{(1+T)^2}{T} - 4 = \frac{T^2+2T+1-4T}{T} = \frac{(T-1)^2}{T} \geq 0 \quad (\text{т.к } T \geq 0)$

$\Rightarrow (\hat{x},\hat{T}) = (-2t;1) \in absmin$

$S_{absmin} = 4.$

$S_{absmax} = +\infty$:

Берем $T_n := n \Rightarrow x_n(t) = -\left(\frac{1+n}{n}\right)t$

$\Rightarrow \mathcal{J}(x_n,T_n) = \mathcal{J}(\hat{x},\hat{T}) + \frac{(T-1)^2}{T} = 4 + \frac{(n-1)^2}{n} \longrightarrow +\infty$ при $n\to\infty$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ответ: } (\hat{x},\hat{T}) = (-2t;1) \in absmin \\ S_{absmin} = 4 \\ S_{absmax} = +\infty\end{array}}$$

N 3.3 стр 133

(2) а) $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x)dt \to extr;\ x(1) = 0.$

$\Lambda(x) = \int_0^1 \lambda_0(\dot{x}^2+x)dt + \lambda_1\cdot x(1)$

Стац. по x: $L_{\dot{x}} = 2\lambda_0\dot{x}$, $L_x = 1$ $\Rightarrow -2\lambda_0\ddot{x}+1=0.$

Трансв: $\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0\dot{x}(0) = 0 \\ 2\lambda_0\dot{x}(1) = -\lambda_1.\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(1) = 0 \\ 2\lambda_0\ddot{x} = 1 \\ 2\lambda_0\dot{x}(0) = 0 \\ 2\lambda_0\dot{x}(1) = -\lambda_1\end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то из трансв: $\lambda = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{0}$ — плохо

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1.$

$\Rightarrow \begin{cases} x(1) = 0 \\ 2\ddot{x} = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ 2\dot{x}(1) = -\lambda_1\end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \dot{x} = \frac{t}{2} + C_1 \Rightarrow x = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2.$ $\Rightarrow \frac{1}{4} + \overset{0}{C_1} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4}.$ $C_1 = 0$

$\Rightarrow$ $x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}$ — допустимая экстремаль.

Доставляет ли она экстремум?

$\mathcal{J}(\hat{x}+h) - \mathcal{J}(\hat{x}) = \int_0^1 ((\dot{\hat{x}}+\dot{h})^2 + \cancel{\hat{x}}+h - \dot{\hat{x}}^2 - \cancel{\hat{x}})dt = \int_0^1 (2\dot{\hat{x}}\dot{h} + \dot{h}^2 - h)dt = \underset{\frac{t}{2}}{2\dot{\hat{x}}}h\Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 2\ddot{\hat{x}}h\,dt + \int_0^1 h\,dt}_{\text{п.о, неуре-я}} + \int_0^1 \dot{h}^2 dt =$

$= th\Big|_0^1 + \int_0^1 \dot{h}^2 dt = \underset{0}{h(1)} - 0 + \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq 0 \quad \Rightarrow \hat{x}(t) \in absmin$

$S_{absmin} = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}\right)dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$

$S_{abs\max} = +\infty$:

Берем $x_n := \frac{t^2}{4} + nt - \frac{1}{4} - n$ — допустимая, т.к. $\begin{cases} x(1)=0 \\ \ddot{x}=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \dot{x}_n = \frac{t}{2} + n$

$\Rightarrow \mathcal{J}(x_n) = \int_0^1 \left(\left(\frac{t}{2}+n\right)^2 + \frac{t^2}{4} + nt - \frac{1}{4} - n \right) = n^2 - 0{,}8333\ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Ответ: $\hat{x}(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4} \in abs\min$

$S_{abs\min} = -\frac{1}{12}$

$S_{abs\max} = +\infty$

№3.17 стр. 134

б) $\int_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to extr;\ x(T) = T$

$\Lambda(x) = \int_0^T \lambda_0 (\dot{x}^2 + x)\,dt + \lambda_1 (x(T) - T)$

стац по x: $L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x}$, $L_x = \lambda_0$ $\Rightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_0 = 0.$

Трансв: $\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = \ell_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(T) = -\ell_{x(T)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 \dot{x}(0) = 0 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(T) = -\lambda_1 \end{cases}$

Стац. по T: $\Lambda'_T = 0$: $(\dot{x}(T))^2 + x(T) + \lambda_1(\dot{x}(T) - 1) = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} x(T) = T \\ 2\lambda_0 \ddot{x} = \lambda_0 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(0) = 0 \\ 2\lambda_0 \dot{x}(T) = -\lambda_1 \\ (\dot{x}(T))^2 + x(T) + \lambda_1 \cdot (\dot{x}(T) - 1) = 0. \end{cases}$

Если $\lambda_0 = 0$, то из усл. трансв: $\lambda = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{0}$ — так нельзя

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x(T) = T \\ 2\ddot{x} = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ 2\dot{x}(T) = -\lambda_1 \\ (\dot{x}(T))^2 + x(T) + \lambda_1 \cdot (\dot{x}(T) - 1) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$ $\Rightarrow \frac{T^2}{4} + C_2 = T \Rightarrow C_2 = T - \frac{T^2}{4}$

$\Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2\dot{x}(T) = -2 \cdot \frac{2T}{4} = -T$

$\Rightarrow \left(\frac{T}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{T^2}{4}} + T - \cancel{\frac{T^2}{4}} - T\left(\frac{T}{2} - 1\right) = 0.$

$\frac{T^2}{4} + T - \frac{T^2}{2} + T = 0.$

$-\frac{T^2}{4} + 2T = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} T = 0 \\ T = 8 \end{array}\right.$ $\Rightarrow (\hat{x}, \hat{T}) = \left(\frac{t^2}{4} - 8;\ \hat{T} = 8\right)$ — допустимая экстремаль.

А $(\hat{x}, \hat{T}) = \left(\frac{t^2}{4}; 0\right)$? — тоже экстр.

Доставляет ли она экстремум?

$$\begin{cases} x(t)=\frac{t^2}{4}+c_1t+c_2 \Rightarrow \dot x(t)=\frac{t}{2}+c_1 \\ x(T)=T \Rightarrow T=\frac{T^2}{4}+c_1T+c_2 \Rightarrow c_2=T(1-c_1)-\frac{T^2}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}(x,T)-\mathcal{J}(\hat x,\hat T)=\int_0^T(\dot x^2+x)\,dt-\underbrace{\int_0^8\left(\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{4}-8\right)dt}_{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 64\cdot 8^2-64=64}=\int_0^T\left(\left(\frac{t}{2}+c_1\right)^2+\frac{t^2}{4}+c_1t+\underset{T(1-c_1)-\frac{T^2}{4}}{c_2}\right)dt-64=$$

$$=\int_0^T\left(\frac{t^2}{2}+2c_1t+c_1^2+T-Tc_1-\frac{T^2}{4}\right)dt-64=\frac{T^3}{6}+c_1\cdot T^2+\cancel{c_1^2\cdot T}+T^2-\cancel{T^2c_1}-\frac{T^3}{4}-64=\underbrace{-\frac{T^3}{12}+T^2(1+c_1)-64}_{\text{может быть и >0, и <0 за счет выбора T и } c_1\text{ — произв.}}$$

Т.е если $T_n:=n$; $c_n:=T_n=n$ – то будет $>0 \Rightarrow S_{absmax}=+\infty$.

если $T_n:=n$; $c_n=-T_n=-n$ – то будет $<0 \Rightarrow S_{absmax}=-\infty$

Ответ: $(\hat x,\hat T)=\left(\frac{t^2}{4}-8;\,8\right)\notin locextr$

$S_{absmin}=-\infty$

$S_{absmax}=+\infty$.

N3.35 стр 136

③ Найти допустимую экстремаль в задаче:

$$\int_0^T\sqrt{1+\dot x^2}\,dt\to extr;\ x(0)=0;\ T^2\cdot x(T)=1.$$ – исп. интеграл импульса

$$\Lambda(x)=\int_0^T\underbrace{\lambda_0\sqrt{1+\dot x^2}}_{=L}dt+\lambda_1\cdot x(0)+\lambda_2\,(T^2\cdot x(T)-1)$$

Стац. по x: вместо ур-я Эйлера – Лагранжа пишем интеграл импульса,

т.к L не зав. от x: $L_{\dot x}=c_1$

$$\Rightarrow \lambda_0\cdot\frac{1\cdot 2\dot x}{2\sqrt{1+\dot x^2}}=c_1.$$

Трансв: $\begin{cases}L_{\dot x}(0)=l_{x(0)}\\ L_{\dot x}(T)=-l_{x(T)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\lambda_0\dot x(0)}{\sqrt{1+\dot x^2(0)}}=c_1=\lambda_1\\ \frac{\lambda_0\cdot\dot x(T)}{\sqrt{1+\dot x^2(T)}}=c_1=-\lambda_2\cdot T^2\end{cases}$

Стац. по T: $\Lambda'_T=0$: $\lambda_0\sqrt{1+\dot x(T)^2}+\lambda_2\left(2T\,x(T)+T^2\cdot\dot x(T)\right)=0.$

Если $\lambda_0=0$, то из усл. трансв: $\lambda_1=\lambda_2=0\Rightarrow\bar\lambda=\bar 0$ – так нельзя.

$\Rightarrow\lambda_0\neq0\Rightarrow\lambda_0=1$:

$$\begin{cases}x(0)=0\\ T^2\cdot x(T)=1\\ \dot x=c_1\sqrt{1+\dot x^2}\Rightarrow\dot x^2=c_1^2(1+\dot x^2)\Rightarrow\dot x^2(1-c_1^2)=c_1^2\Rightarrow\dot x=\frac{|c_1|}{\sqrt{1-|c_1|^2}}=\tilde c_1\Rightarrow x(t)=c_1t+c_2\\ \dot x(0)=\lambda_1\sqrt{1+\dot x^2(0)}\\ \frac{\dot x(T)}{\sqrt{1+\dot x(T)^2}}=-\lambda_2T^2\\ \sqrt{1+\dot x(T)^2}+\lambda_2T\left(2x(T)+T\dot x(T)\right)=0.\end{cases}$$

$x(0)=0\Rightarrow c_2=0;$

$x(T)=\frac{1}{T^2}\Rightarrow c_1T=\frac{1}{T^2}\Rightarrow c_1=\frac{1}{T^3}\Rightarrow x(t)=\frac{t}{T^3}$

$\Rightarrow x(t)=\dfrac{t}{T^3} \Rightarrow \dot{x}(t)=\dfrac{1}{T^3}$

$\lambda_2=-\dfrac{\dot{x}(T)}{\sqrt{1+\dot{x}(T)^2}}\cdot\dfrac{1}{T^2} = \dfrac{-\frac{1}{T^3}}{\sqrt{1+\frac{1}{T^6}}}\cdot\dfrac{1}{T^2}=-\dfrac{1\cdot T^3}{T^5\cdot\sqrt{T^6+1}}=\dfrac{-1}{T^2\cdot\sqrt{T^6+1}}$

$\sqrt{1+\dot{x}(T)^2}+\lambda_2\cdot T(2x(T)+T\cdot\dot{x}(T))=0.$

$\Rightarrow \sqrt{1+\dot{x}(T)^2}-\dfrac{\dot{x}(T)}{T\cdot\sqrt{1+\dot{x}(T)^2}}\cdot(2x(T)+T\cdot\dot{x}(T))=0.$

$T(1+\dot{x}(T)^2)-\dot{x}(T)(2x(T)+T\cdot\dot{x}(T))=0.$

$T\cdot\left(1+\dfrac{1}{T^6}\right)-\dfrac{1}{T^3}\cdot\left(2\dfrac{T}{T^3}+T\cdot\dfrac{1}{T^3}\right)=0.$

$T+\dfrac{1}{T^5}-\dfrac{1}{T^3}\left(\dfrac{2}{T^2}+\dfrac{1}{T^2}\right)=0.$

$T+\cancel{\dfrac{1}{T^5}}-\dfrac{2}{T^5}-\cancel{\dfrac{1}{T^5}}=0$

$T-\dfrac{2}{T^5}=0.$

$T^6=2 \quad \Rightarrow \begin{cases} T=\sqrt[6]{2} \\ \hat{x}(t)=\dfrac{t}{\sqrt{2}} \end{cases}$ — допустимая экстремаль.

(4) Найти допустимую экстремаль

а) $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}dt \to extr;\ x(0)=1.$ N3.36 стр 136

$\Lambda(x)=\int_0^1 \underbrace{\dfrac{\lambda_0\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}}_{=L}dt+\lambda_1\cdot(x(0)-1)$

Стац. по x: вместо ур-я ЭЛ пишем интеграл энергии, т.к L - не зав от t

$\dot{x}L_{\dot{x}}-L=C.$

$\Rightarrow \dot{x}\cdot\lambda_0\cdot\dfrac{2\dot{x}}{2x\sqrt{1+\dot{x}^2}}-\dfrac{\lambda_0\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}=C$

$\lambda_0\dfrac{(\dot{x}^2-1-\dot{x}^2)}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C$

$\sqrt{1+\dot{x}^2}=-\dfrac{\lambda_0}{Cx}$

Трансв: $\begin{cases} L_{\dot{x}}(0)=l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(1)=-l_{x(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda_0\dot{x}(0)}{x(0)\sqrt{1+\dot{x}^2(0)}}=\lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_0\dot{x}(1)}{x(1)\sqrt{1+\dot{x}^2(1)}}=0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(0)=1 \\ \sqrt{1+\dot{x}^2}=-\dfrac{\lambda_0}{Cx} \\ \dfrac{\lambda_0\dot{x}(0)}{x(0)\sqrt{1+\dot{x}^2(0)}}=\lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_0\dot{x}(1)}{x(1)\sqrt{1+\dot{x}^2(1)}}=0. \end{cases}$

Если $\lambda_0=0$, то из усл. трансв: $\lambda_1=0 \Rightarrow \bar{\lambda}=\bar{0} \Rightarrow$ так нельзя

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0)=1 \\ \sqrt{1+\dot{x}^2} = -\dfrac{1}{Cx} \\ \dfrac{\dot{x}(0)}{x(0)\sqrt{1+\dot{x}^2(0)}} = \lambda_1 \\ \dfrac{\dot{x}(1)}{x(1)\sqrt{1+\dot{x}^2(1)}} = 0. \end{cases} \Rightarrow 1+\dot{x}^2 = \frac{C_1^2}{x^2} \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{C_1^2-x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm\frac{\sqrt{C_1^2-x^2}}{x}.$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx}{\pm\sqrt{C_1^2-x^2}} = dt$$

$$\Rightarrow \mp\sqrt{C_1^2-x^2} = t+C_2$$

$$\Rightarrow x^2+(t+C_2)^2 = C_1^2$$ — это ур-е окр-ти с центром на оси t.

Причем $\begin{cases} x(0)=1 \\ \dot{x}(1)=0 \end{cases}$: $1+C_2^2 = C_1^2 \Rightarrow C_1^2 = 1+C_2^2$

$$x = \pm\sqrt{C_1^2-(t+C_2)^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm\frac{1\cdot(-2(t+C_2))}{2\sqrt{C_1^2-(t+C_2)^2}} = \pm\frac{-(t+C_2)}{\sqrt{C_1^2-(t+C_2)^2}}$$

$$\Rightarrow 0 = \pm\frac{-(1+C_2)}{\sqrt{C_1^2-(t+C_2)^2}} \Rightarrow C_2=-1. \Rightarrow C_1^2 = 1+C_2^2 = 2.$$

$$\Rightarrow x^2+(t-1)^2 = 2.$$

$$x^2+2t^2-2t+1 = 2.$$

$$x^2 = 1+2t-t^2$$ — допустимая экстремаль.

N238 стр 137

б) $\displaystyle\int_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to extr;\ x(0)=1;\ x(T)=T-1.$

$$\Lambda(x) = \int_0^T \underbrace{\frac{\lambda_0\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}}_{L}\,dt + \lambda_1\cdot(x(0)-1) + \lambda_2\cdot(x(T)-T+1)$$

Стац. по x: вместо ур-я Э-Л пишем интеграл энергии, т.к. L - не зав. от t:

$$\dot{x}L_{\dot{x}} - L = C$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}\cdot\frac{\lambda_0\cdot 2\dot{x}}{2\sqrt{1+\dot{x}^2}\,x} - \frac{\lambda_0\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} = C$$

$$\frac{\lambda_0(\dot{x}^2-1-\dot{x}^2)}{x\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\dot{x}^2} = -\frac{\lambda_0}{Cx}$$

Трансв: $\begin{cases} L_{\dot{x}(0)} = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}(T)} = -l_{x(T)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda_0\dot{x}(0)}{x(0)\sqrt{1+\dot{x}^2(0)}} = \lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_0\dot{x}(T)}{x(T)\sqrt{1+\dot{x}^2(T)}} = -\lambda_2 \end{cases}$

стац по T: $\Lambda'_T = 0.$

$$\frac{\lambda_0\sqrt{1+\dot{x}(T)^2}}{x(T)} + \lambda_2(\dot{x}(T)-1) = 0$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из усл. трансв: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \bar{0}$ — так нельзя

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 := 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = 1 \\ x(T) = T-1 \\ \sqrt{1+\dot{x}^2} = -\dfrac{1}{Cx} \\ \dfrac{\dot{x}(0)}{x(0)\sqrt{1+\dot{x}^2(0)}} = \lambda_1 \\ \dfrac{\dot{x}(T)}{x(T)\sqrt{1+\dot{x}^2(T)}} = -\lambda_2 \\ \dfrac{\sqrt{1+\dot{x}^2(T)}}{x(T)} + \lambda_2(\dot{x}(T)-1) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1+\dot{x}^2 = \frac{C_1^2}{x^2} \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{C_1^2 - x^2}{x^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm\frac{\sqrt{C_1^2-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx}{\pm\sqrt{C_1^2-x^2}} = dt$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{C_1^2-x^2} = t + C_2$$

$\Rightarrow x^2 + (t+C_2)^2 = C_1^2$ — ур. е окр-ти с центром на оси t.

Выразим λ_2 из усл. трансв. и подставим в усл. стац по T:

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(T)}}{x(T)} - \frac{\dot{x}(T)}{x(T)\cdot\sqrt{1+\dot{x}^2(T)}}(\dot{x}(T)-1) = 0.$$

$$1 + \dot{x}^2(T) - \dot{x}(T)(\dot{x}(T)-1) = 0.$$

$$1 + \cancel{\dot{x}^2(T)} - \cancel{\dot{x}^2(T)} + \dot{x}(T) = 0.$$

$$\dot{x}(T) = -1$$

Имеем: $x^2 + (t+C_2)^2 = C_1^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{C_1^2-(t+C_2)^2} \Rightarrow \dot{x} = \pm\dfrac{-(t+C_2)}{\sqrt{C_1^2-(t+C_2)^2}}$

$x(0) = 1 \Rightarrow 1 + C_2^2 = C_1^2 \Rightarrow C_1^2 = 1 + C_2^2$

$x(T) = T-1 \Rightarrow (T-1)^2 + (T+C_2)^2 = 1 + C_2^2 \Rightarrow 2T^2 - 2T + 2TC_2 = 0 \Rightarrow T^2 = T(1-C_2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} T=0 \\ T=1-C_2 \end{array}\right.$

$\dot{x}(T) = -1 \Rightarrow -1 = \pm\dfrac{-(T+C_2)}{\sqrt{1+C_2^2-(T+C_2)^2}}$

$$1 = \pm\frac{T+C_2}{\sqrt{1+C_2^2-(T+C_2)^2}} \underset{C_2 = 1-T}{=} \pm\frac{1}{\sqrt{1+(T-1)^2-1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{(T-1)^2}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{(T-1)^2} \Rightarrow (T-1)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} T-1=1 \\ T-1=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} T=2 \\ T=0 \text{ — не подх} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (\hat{x}, \hat{T}) = (x^2 + (t+1-T)^2 = 1 + (1-T)^2;\ \hat{T} = 2)$ — допустимая экстремаль.

$$x^2 + t^2 + 2t(1-T) + \cancel{(1-T)^2} = 1 + \cancel{(1-T)^2}$$

$$x^2 + t^2 + 2t\cdot(-1) = 1.$$

$$x^2 + t^2 - 2t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 + 2t - t^2$$

$\Rightarrow (\hat{x}, \hat{T}) = (\sqrt{1+2t-t^2};\ \hat{T} = 2)$ — допустимая экстремаль