

Аналитическая механика.
Программа 8-го семестра 2020– 2021 г
Е.И. Кугушев

Уравнения Лагранжа 2-го рода

1. Принцип Даламбера-Лагранжа.
2. Уравнения Лагранжа второго рода. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно старших производных. Обобщенные силы. Случай потенциальных сил, лагранжиан. Первые интегралы уравнений Лагранжа: обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби), циклические координаты и циклические интегралы.
3. Понижение порядка по Раусу.

Вариационные принципы. Симметрии.

4. Поле симметрий. Теорема Нётер о первых интегралах.
5. Вариационные принципы. Функционал действия и его вариация. Принцип Гамильтона. Метрика Якоби. Вариация по Гамильтону и по Мопертюи-Якоби. Принцип Мопертюи-Якоби.

Устойчивость положений равновесия. Малые колебания.

6. Положения равновесия натуральных лагранжевых систем. Устойчивость положения равновесия по Ляпунову. Теорема Лагранжа-Дирихле.
7. Линеаризация уравнений Лагранжа около положения равновесия. Нормальные координаты. Уравнение малых колебаний.
8. Диссипативные и гироскопические силы. Диссипативность сил Релея. Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость положения равновесия (обобщение теоремы Лагранжа-Дирихле при наложении диссипативных и гироскопических сил).
9. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению (формулировка). Степень неустойчивости. Теорема о невозможности гироскопической стабилизации. Четность характеристического полинома линеаризованных уравнений в потенциальном случае. Парность корней характеристического уравнения.

Инвариантная мера

10. Инвариантная мера. Мера с гладкой плотностью. Плотность при замене координат. Теорема Лиувилля об инвариантной мере. Построение инвариантной меры на многообразии уровней первых интегралов – локально (Существование инвариантной меры у ограничения системы на инвариантное многообразие.)
11. Интегрируемость в квадратурах. Теорема Якоби о последнем множителе.
12. Теорема Пуанкаре о возвращении.

Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой

13. Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера. Уравнения Пуассона. Первые интегралы уравнений Эйлера-Пуассона.
14. Инвариантная мера уравнений Эйлера-Пуассона и интегрируемость в квадратурах. Понятие о трех классических случаях интегрируемости: Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.
15. Случай волчка Эйлера. Уравнения движения, первые интегралы, стационарные вращения. Фазовый портрет уравнений Эйлера. Устойчивость стационарных вращений. Эллипсоид инерции. Геометрическая интерпретация Пуансо движения волчка Эйлера. Регулярная прецессия в случае Эйлера.
16. Случай Лагранжа. Функция Лагранжа. Циклические интегралы. Понижение порядка по Раусу. Фазовый портрет приведенной системы. След оси динамической симметрии на сфере.

Гамильтонова механика I

17. Функция Гамильтона, канонические уравнения движения Гамильтона. Гамильтониан натуральной системы.

18. Свойства уравнений Гамильтона: интеграл энергии; циклические интегралы и понижение порядка в уравнениях Гамильтона; инвариантная мера уравнений Гамильтона (теорема Лиувилля о сохранении фазового объема)

19. Принцип Гамильтона в фазовом пространстве.

20. Лемма об аннуляторе канонической 2-формы. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Интегральный инвариант Пуанкаре.

21. Канонические преобразования. Производящая функция. Свободные канонические преобразования. Производящая функция тождественного преобразования.

22. Уравнение Гамильтона-Якоби. Его полный интеграл. Разрешимость в квадратурах.