ЭКЗАМЕН 2021-2

Во всех задачах w — винеровский процесс, $\Lambda_t = t$, $||x||_t := \sup_{s \le t} |x_s|$, $||X||_B^2 := \mathbb{E}||X||_T^2$.

1. Пусть $X = H \cdot w$, $H > 0$, $\langle X \rangle_t = \mathbb{E}H^2 \cdot \Lambda_t < \infty$, $t < \infty$, $H^2 \cdot \Lambda_\infty = \infty$. Пусть $t \mapsto A_t(\omega)$ — $t \mapsto H^2 \cdot \Lambda_t$. Покажите, что процесс $\tilde{w}_t = X_{A_t}$, $t \ge 0$, — винеровский.

Решение.

2. Пусть $f(s,t)$ — функция, интегрируемая по мере Лебега на $[0,T]^2$. Согласно определению через изометрию стохастический интеграл $I_T(f(t)) = \int_0^T f(s,t) dw_s$ является классом эквивалентных с.в. Произвольный выбор представителей из каждого класса не гарантирует, что при фиксированном ω траектория $t \mapsto I_T(f(t))$ будет измерима, т.е. обладать свойством, необходимым для интегрирования по Лебегу. Поэтому, конструкция интеграла, зависящего от параметра требует некоторого дополнительного рассуждения.

Доказать, что существует $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}_{[0,T]}$-измеримый процесс $I_T(f(t))$, $t \le T$, такой, что $I_T(f(s))$ при почти всех s значение процесса $I_T(f(t))$ является представителем стохастического интеграла по переменной s и

$$\int_0^T \Big(\int_0^T f(s,t) dw_s \Big) dt = \int_0^T \Big(\int_0^T f(s,t) dt \Big) dw_s.$$

Решение.

3. Показать, что

$$\int_0^t e^{-(r-s)/\varepsilon} dw_s dr = \int_0^t e^{-(t-s)/\varepsilon} dw_s.$$

Решение.

4. Пусть $\varepsilon > 0$ и $Y = Y^\varepsilon$ — решение СДУ $dY_t = -(1/\varepsilon) Y_t dt + dw_t$, $Y_0 = 0$. Показать, что $\mathbb{E}Y_T^2 = 2\varepsilon(1 - e^{-2T/\varepsilon})$. Пользуясь формулой Ито, вывести отсюда, что для любого марковского момента $\tau \le T$ (в частности, для $\tau_a := \inf\{t : Y_t \ge a\} \wedge T$) справедлива оценк $\mathbb{E}Y_\tau^4 \le 12T\varepsilon$.

Используя представление

$$E||Y||_T^2 = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_T^2 > a) da = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_{\tau_a}^2 > a) da$$

получить оценку $E||Y||_T^2 \le C\varepsilon^{1/2}$, где $C = C_T$ — константа.

Решение.

5. Пусть процесс $(X^\varepsilon, V^\varepsilon)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= V_t^\varepsilon dt, & X_0^\varepsilon = x, \\ \varepsilon dV_t^\varepsilon &= -V_t^\varepsilon dt + h(X_t^\varepsilon)dt + dw_t, & V_0^\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

X — решение СДУ $dX_t = h(X_t)dt + dw_t$, $X_0 = x$, где h удовлетворяет условию Липшица и линейного роста, $\Delta^\varepsilon := X^\varepsilon - X$.

Доказать, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} ||\Delta^\varepsilon||_B = 0$.

6. Пусть $M \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, $\langle M \rangle_t \to \infty$ при $t \to \infty$. Показать, что $M_t / \langle M \rangle_t \to 0$ при $t \to \infty$.

Решение.

7. Определим полиномы Эрмита формулой

$$H_n(t,x) := (-1)^n \frac{1}{n!} e^{x^2/(2t)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2/(2t)}.$$

Доказать, что $M_t := H_n(t, W_t)$ — мартингал.

Решение.