Летний научный выезд Фонда "Институт "Вега"

Ценообразование и хеджирование Автоколла

Владимир Шин, Дарья Юневич

Кураторы: Еркин Китапбаев, Владимир Шангин

Vega Institute Foundation

24 июля 2023г

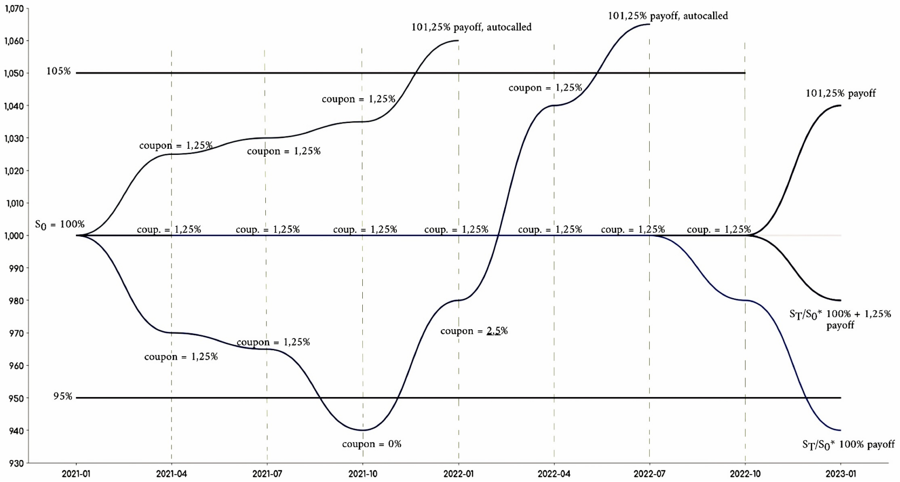
Содержание

Введение

В данной исследовательской работе:

- Рассматривается структурный продукт, имеющий большой спрос со стороны инвесторов
- С помощью векторизации достигнуто ускорение вычисления ошибки дельта-хеджирования в 5 раз

Схема выплат продукта



Описание продукта

Базовые активы	Индекс «Интерфакс Российские Лидеры 1»
Номинал	1000
Срок погашения	2 года
Автоколл барьер	105%
Купонный барьер	95%
Защитный барьер	95% geared put
Купонный доход	5% (годовых) с эффектом памяти
Даты наблюдения	Каждые 3 месяца

Модель ценообразования

Наш продукт зависит от одного базового актива:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \ , \quad S_0 = x,$$

где $\mu = 0, \ \sigma = 10\%$. Обозначим даты наблюдения за t_i, тогда $t_{i+1} - t_i = 3$ месяца

$$\text{Payoff} = P(S_{t_1}, ..., S_{t_n}).$$

В риск-нейтральной мере цена деривативa с функцией выплат P, зависящей от значений базового актива $S_{t_1}, ..., S_{t_n}$, вычисляется по формуле

$$A(x) = \mathbb{E}[P(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) \mid S_{t_0} = x].$$

Для вычисления цены используется метод Монте−Карло. Для этого, симулируем траектории цены базового актива:

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\sqrt{dt}\,\epsilon_i\right), \quad i = 1, ..., n, \quad S_{t_0} = x$$

где ϵ_i – н.о.р.с.в. со стандартным нормальным распределением. В данной работе было проведено сравнение между псевдослучайными и квазислучайными числами.

Квазислучайные числа

Искомое матожидание можно представить следующим образом:

$$\mathbb{E}[P(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \mid S_{t_0} = x] = \mathbb{E}[P_1(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)]$$
$$= \mathbb{E}[P_1(\Phi^{-1}(\gamma_1), \dots, \Phi^{-1}(\gamma_n))] \quad = \int_{[0,1]^n} P_2(y_1, \dots, y_n)\, dy,$$

где γ_i – н.о.р.с.в. с равномерным на $[0, 1]$ распределением.

Дельта-хеджирование

Опишем более подробно эволюцию стоимости хеджирующего портфеля P_i :

1. В момент t_0: $P_0 = A(t_0, S_{t_0}) - \Delta_0 S_{t_0}$. Продали автоколл, лонг позиция с Δ_0 акциями. По этому остатку P_0 начисляется процент по вкладу/займу: $r \cdot P_0$.
2. В момент t_1 нужно перейти к позиции лонг с Δ_1 акциями, что приведет к изменению стоимости на $(\Delta_0 - \Delta_1)S_{t_1}$: $P_1 = (1 + r)P_0 + (\Delta_0 - \Delta_1)S_{t_1}$. И так далее.
3. В момент t_{N-1}: $P_{N-1} = (1 + r)P_{N-2} + (\Delta_{N-2} - \Delta_{N-1})S_{t_{N-1}}$
4. В момент t_N продаем всю имеющуюся лонг позицию в акциях, т.е. Δ_{N-1} акций: $P_N = (1 + r)P_{N-1} + \Delta_{N-1}S_{t_N}$

Таким образом, ошибка хеджирования высчитывается как P_N − Payoff.

Методы вычисления дельты

Стандартный *метод конечных разностей* из теории численного дифференцирования:

$$\Delta_S = \frac{\partial A}{\partial S} \approx \frac{A(S+\epsilon) - A(S-\epsilon)}{2\epsilon}.$$

Метод коэффициента правдоподобия дифференцирует плотность вероятности цен активов под матожиданием, что приводит к

$$\Delta_x = \mathbb{E}\left[P(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) \frac{Z_1}{x\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}\right],$$

где Z_1 – стандартная нормальная случайная величина, использованная для генерации S_{t_1} из S_{t_0}.
Матожидания в обоих методах будем вычислять методом Монте–Карло на псевдослучайных и квазислучайных числах.

Практическое применение

Значения индекса «Интерфакс Российские Лидеры 1»

- Красной пунктирной линией обозначен барьер досрочного погашения, зеленым цветом - защитный барьер.

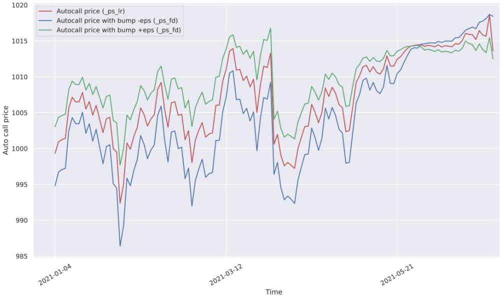
Значения первых шести месяцев индекса «Интерфакс Российские Лидеры 1»

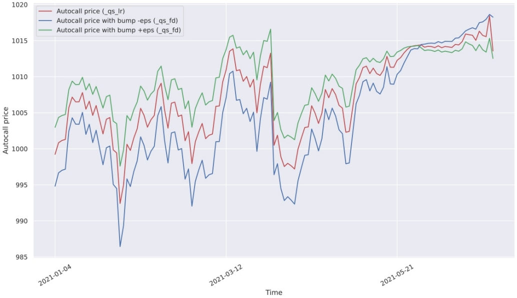
Графики параметров индекса «Российские Лидеры 1»

Обозначения, используемые в графиках:
_ps - псевдослучайные числа (pseudo-random),
_qs - квазислучайные числа (quasi-random),
_fd - метод конечных разностей (finite difference),
_lr - метод коэффициента правдоподобия (likelihood ratio).

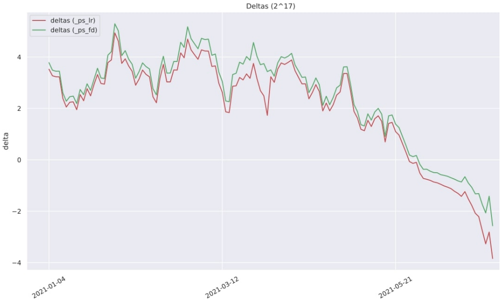
На слайдах графики будут продемонстрированы в следующем формате: слева – результаты, полученные при использованиии псевдослучайных чисел, справа – квазислучайных чисел.

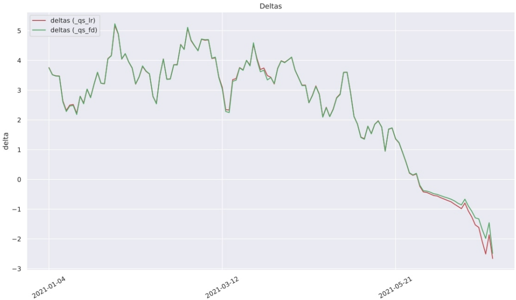
Стоимость Автоколла Феникс на индекс «Российские Лидеры 1»





Значения дельт в каждый исторический день работы Автоколла

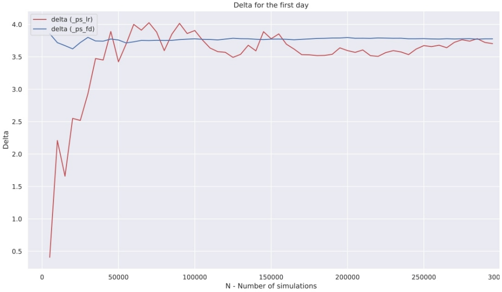


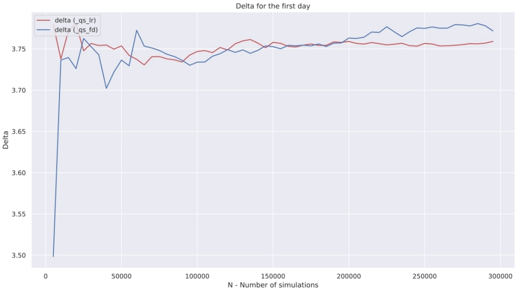


Результаты подсчета ошибки хеджирования

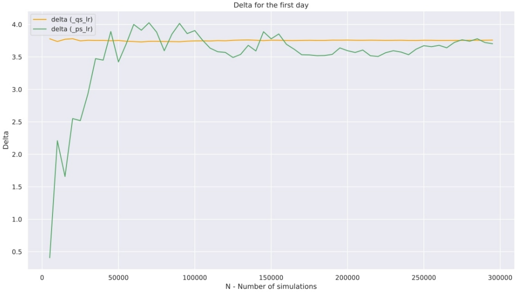
	Метод конечных разностей	Метод конечных разностей (вект.)	Метод коэффициента правдоподобия	Метод коэффициента правдоподобия (вект.)
Кол-во симуляций	2^{20}	2^{20}	2^{20}	2^{20}
Время подсчета массива дельт	–	59мин. 36сек.	–	30мин. 48сек.
Ошибка хэджирования (Псевд.)	–	20.6 [2 %]	–	20.83 [2 %]
Ошибка хэджирования (Кваз.)	–	20.3 [2 %]	–	20.74 [2 %]
Кол-во симуляций	2^{17}	2^{17}	2^{17}	2^{17}
Время подсчета массива дельт	29мин. 3сек.	6мин. 56сек.	18мин. 9сек.	3мин. 38сек.
Ошибка хэджирования (Псевд.)	20.78 [2 %]	20.78 [2 %]	20.48 [2 %]	20.48 [2 %]
Ошибка хэджирования (Кваз.)	21.07 [2.1 %]	21.07 [2.1 %]	21.46 [2.1 %]	21.46 [2.1 %]
Кол-во симуляций	2^{12}	2^{12}	2^{12}	2^{12}
Время подсчета массива дельт	1мин. 59сек.	0мин. 13сек.	1мин. 45сек.	0мин. 13сек.
Ошибка хэджирования (Псевд.)	21.59 [2.2 %]	21.59 [2.2 %]	10.16 [1 %]	10.16 [1 %]
Ошибка хэджирования (Кваз.)	21.83 [2.2 %]	21.83 [2.2 %]	20.27 [2 %]	20.27 [2 %]

Сходимость дельты в первый день работы Автоколла Феникс на разных случайных числах





Сходимость дельты в первый день работы Автоколла Феникс разными методами подсчета



Заключение

В данной работе были проведены вычислительные эксперименты, указывающие на состоятельность данных методов. Анализируя графики сходимости дельты, можно построить следующую схему:

$$
\begin{array}{ccc}
FD\_qs & \succ & FD\_ps \\
\curlywedge & & \curlyvee \\
LR\_qs & \succ & LR\_ps
\end{array}
$$

Выходит, что из всех четырех случаев предпочтительнее использовать метод *LR на квазислучайных последовательностях.*

Литература

[JBT96] C Nwabueze Joy, Phelim P. Boyle и Ken Seng Tan. «Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance». В: *Management Science* 42 (1996), с. 926—938.

[BG97] Mark Broadie и Paul Glasserman. «Monte Carlo methods for security pricing». В: *Journal of Economic Dynamics and Control* 21 (1997), с. 1267—1321.

[Lin13] Henri Linnainmaa. «Calibration and Implementation of Stochastic Volatility Models for Pricing Autocallable Structures». В: *TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY* (2013).

[Ber16] Lorenzo Bergomi. «Stochastic Volatility Modeling». В: *CRC/Chapman & Hall* (2016).

[SH21] Andreas Garborg Sie и Jonas Blom Helmersen. «Analysis of Autocallable Notes». В: *Norwegian School of Economics Bergen* (2021).