Листок 5

Задача 1. Пусть $l(x)$ — гладкая, четная функция, равная нулю вне $[-R,R]$, причем $xl'(x)>0$ при $0<|x|<R/2$ и $\max l(x)=l(0)>0$. Рассмотрим функцию

$$v(x)=\inf_\alpha \int_0^{+\infty} l(y_x(t))e^{-t}\,dt,$$

где inf берется по всем измеримым на $[0,+\infty)$ функциям α, принимающим значения ± 1, и $y_x'=\alpha$, $y(0)=x$. Докажите, что v не имеет производной в нуле.

Задача 2. Пусть

$$v(x)=\inf_\alpha \int_0^{+\infty} l(y_x(t),\alpha(t))e^{-\lambda t}\,dt,$$

где inf берется по всем измеримым на $[0,+\infty)$ функциям α, принимающим значения в некотором компактном множестве в $\mathbb{R}^m$, число λ положительно и

$$y_x'=f(y_x,\alpha),\quad y_x(0)=x.$$

Предположим, что $|f(y,\alpha)-f(z,\alpha)|\le L|y-z|$, $l(y,\alpha)-l(z,\alpha)|\le L'|y-z|$, $|l(y,\alpha|\le M$. Докажите, что $|v(x)-v(y)|\le C|x-y|^\gamma$, где $\gamma=1$ при $\lambda>L$, γ — произвольное число из $(0,1)$ при $\lambda=L$ и $\gamma=\lambda/L$ при $\lambda<L$.

Задача 3. Будем в условиях задачи 2 считать, что вместо $e^{-\lambda t}$ теперь функция

$$\exp\Bigl(-\int_0^t \lambda(y_x(s),\alpha(s))\,ds\Bigr),$$

причем

$$0<\lambda_0\le\lambda(y,\alpha)\le\lambda_1,\quad |\lambda(y,\alpha)-\lambda(z,\alpha)|\le L''|y-z|.$$

Сформулируйте и обоснуйте принцип динамического программирования для функции v.

Задача 4. В условиях предыдущей задачи проверьте, что функция v является вязкостным решением уравнения

$$F(x,v,Dv)=\sup_\alpha\Bigl\{\lambda(x,\alpha)v-f(x,\alpha)Dv-l(x,\alpha)\Bigr\}=0$$

Задача 5. В условиях предыдущей задачи обоснуйте принцип сравнения на $\mathbb{R}^n$ для ограниченных вязкостных субрешений и суперрешений уравнения $F(x,v,Dv)=0$.

Задача 6. Обозначим через $[0,1)_h$ множество точек вида mh, где $m\in\mathbb{Z}$ и $h>0$, принадлежащих $[0,1)$. Рассмотрим разностную схему

$$\Bigl|\frac{u_h(x+h)-u_h(x)}{h}\Bigr|=1,\quad x\in[0,1)_h,\quad u_h(0)=u_h(1)=0.$$

Покажите, что такая разностная схема может не иметь решений вовсе или иметь несколько решений.

Задача 7. Положим

$$m(a,b)=\begin{cases} a, & a+b<0,\ \text{и}\ a\le 0\\ b, & a+b>0,\ \text{и}\ b\ge 0\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}\qquad \nabla^m u_h(x)=m\bigl(\tfrac{u(x+h)-u(x)}{h},\tfrac{u(x)-u(x-h)}{h}\bigr).$$

Рассмотрим разностную схему

$$\Bigl|\nabla^m u_h(x)\Bigr|=1,\quad x\in[0,1)_h,\quad u_h(0)=u_h(1)=0.$$

Найдите решение $u_h(x)$ и предел $\lim_{h\to 0+}u_h(x)$.