

Задачи предлагавшиеся на государственном экзамене и вступительном экзамене в аспирантуру

Задача 1. Дифференцируема ли функция $\sqrt{x^2 + y^2}$?

Задача 2. Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$;

Задача 3. Когда и как (условно или нет) сходятся ряды? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
Второй ряд исследовать на равномерную сходимость, считая p переменной.

Задача 4. Найти интегралы $\int \frac{dx}{16-x^4}$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача 5. Вычислить несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Задача 6. Верно ли, что если $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сходится, то $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Задача 7. Верно ли, что если действительная функция двух переменных имеет частные производные, то она дифференцируема?

Задача 8. Найти спектр антисимметрической матрицы.

Задача 9. Дана группа порядка 7, может ли она быть коммутативной? Если да, то приведите пример.

Задача 10. Чему изоморфна \mathbf{C}/\mathbf{R} по сложению и умножению?

Задача 11. Какую кривую определяет уравнение $x^2 - xy = 1$.

Задача 12. Дана квадратичная форма $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, когда она положительно определена?

При условии положительной определенности $f(x, y)$, доказать, что частные производные функции $\sqrt{f(x, y)}$ ограничены.

Задача 13. Верно ли, что если последовательность функций сходиться к некоторой функции равномерно на отрезке, то она будет сходиться к этой же функции в L_2 .

Задача 14. Сформулировать теорему Егорова. Можно ли ослабить условие $\mu(X) < \infty$.

Задача 15. Определить тип поверхности $xy + yz + zx = 1$.

Задача 16. Привести пример функции равномерно непрерывной на отрезке, но не липшицевой на отрезке.

Задача 17. Сформулировать теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Задача 19. Сколько решений имеет задача $y'' + y' \sqrt{16 - x^2} - y \ln(3-x) = e^{\frac{1}{x}}$, $y(2) = -4$?

Задача 20. Как связан определитель Вронского с решением линейного дифференциального уравнения?

Задача 21. Решить дифференциальные уравнения $xy' + 2y = x^2$; $y'' - 2y + 1 = 0$; $y'' + y = 2$; $y'' - 2y' + y = e^x$; $y'' - 3y' + 2y = 5x + 3$; $y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$.

22.* $y' = 0$ - решить в обобщенных функциях.

23.* Исследовать на устойчивость особые точки уравнения $y' = \sin y$.

Задача 24. Найти все группы порядка 5.

25.* Дана следующая краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, x) = \phi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = 0.$$

Всегда ли $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$?

26.* Доказать, что функция Грина $G(x, x_0)$ знакопостоянна в некоторой ограниченной области.

27.* Дан предельный цикл, причем траектории снаружи и изнутри приближаются к нему. Будут ли решения отвечающие ему асимптотически устойчивыми?

28.* На плоскости задана окружность Γ с центром в точке $(3, 4)$ и радиуса 1. Найти интеграл $\int_{\Gamma} \ln |r| ds_r$.

29.* Построить функцию Грина задачи Дирихле для четверти.

Задача 30. Чему равен поток $\vec{A} = \frac{\vec{v}}{|r|^3}$ через сферу S с центром в точке $(1, 0, 0)$ и радиуса $R = 3$.

Задача 31. Дано множество π -периодических k -раз дифференцируемых функций $C^k(-\pi, \pi)$, с какой скоростью сходится ряд Фурье?

Задача 32. Во что $\frac{z+1}{z_1}$ отображает окружность.

Задача 33. Дана функция $\frac{1}{z}$ существует ли ее первообразная в кольце $0 < |z| < 1$.

Задача 34. Найти все $z \in \mathbf{C}$ такие, что $\sin z = 2$.

Задача 35. Определить тип особых точек функций $\cos \frac{1}{z}$, $\frac{1}{e^z - 1}$.

Задача 36. $f(z) = z\bar{z}$, где $z \in \mathbf{C}$, будет ли это отображение конформным?

Задача 37. Доказать, что функция $|z|^2$ не голоморфна в окрестности нуля.

Задача 38. Будет ли ноль изолированной особой точкой логарифма?

** помечены задачи предлагавшиеся на вступительном экзамене по кафедре дифференциальных уравнений.*