Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 7

Продолжение мультипликативного функционала

Предложение 1. *Если $(k+1)\alpha > 1$ и X_{st} — мультипликативный функционал степени k, то существует такой мультипликативный функционал Y_{st} степени $k+1$, что*

$$X_{st}^{(1)} = Y_{st}^{(1)}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{st}^{(2)}, \quad \ldots \quad X_{st}^{(k)} = Y_{st}^{(k)}.$$

Разберем подробно случай $\alpha > 1/2$ и $k = 1$. В конце прошлой лекции было доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $y_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ и $x_t\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, причем*

$$|y_{st}| \le \|y\|_\alpha |t-s|^\alpha, \quad |x_{st}| \le \|x\|_\alpha |t-s|^\alpha,$$

где $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $x_{st} = x_t - x_s$, $y_{st} = y_t - y_s$. Тогда существует число M такое, что для всех $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$ справедлива оценка

$$\Bigl|\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st}\Bigr| \le M \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Отметим, что $\sum_{k=0}^{N-1} x_{u_k u_{k+1}} = x_{st}$ и

$$\sum_{k=0}^{N-1} y_{u_k} x_{u_k u_{k+1}} - y_s x_{st} = \sum_{k=0}^{N-1} y_{s u_k} x_{u_k u_{k+1}}.$$

Таким образом, выше доказано, что

$$\Bigl|\sum_{k=0}^{N-1} y_{s u_k} x_{u_k u_{k+1}}\Bigr| \le M \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Лемма 2. *В условиях предыдущей леммы существует предел*

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sum_{[s,t] \in \mathbb{T}} y_s x_{st},$$

где $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[0,T]$, а запись $[s,t] \in \mathbb{T}$ означает, что $[s,t]$ — отрезок разбиения. Этот предел называют интегралом Юнга от y_t по x_t на $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$. Через $\mathbb{T}_3$ обозначим разбиение, которое получается объединением точек разбиений $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$. Имеем

$$\Bigl|\sum_{[s,t] \in \mathbb{T}_1} y_s x_{st} - \sum_{[u,v] \in \mathbb{T}_3} y_u x_{uv}\Bigr| \le \sum_{[s,t] \in \mathbb{T}_1} \Bigl| y_s x_{st} - \sum_{[u,v] \subset [s,t]} y_u x_{uv}\Bigr|.$$

По предыдущей лемме правая часть оценивается через

$$\sum_{[s,t] \in \mathbb{T}_1} M \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Поскольку $2\alpha > 1$, получаем оценку

$$\Bigl|\sum_{[s,t] \in \mathbb{T}_1} y_s x_{st} - \sum_{[u,v] \in \mathbb{T}_3} y_u x_{uv}\Bigr| \le MT \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \lambda(\mathbb{T}_1)^{2\alpha - 1}$$

Аналогичным образом выводим оценку

$$\Big|\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_2} y_s x_{st} - \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}_3} y_u x_{uv}\Big| \le MT\|x\|_\alpha\|y\|_\alpha\lambda(\mathbb{T}_2)^{2\alpha-1}.$$

Объединяем эти оценки:

$$\Big|\sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_1} y_s x_{st} - \sum_{[s,t]\in\mathbb{T}_2} y_u x_{uv}\Big| \le MT\|x\|_\alpha\|y\|_\alpha\Big(\lambda(\mathbb{T}_1)^{2\alpha-1}+\lambda(\mathbb{T}_2)^{2\alpha-1}\Big).$$

Следовательно, выполняется условие Коши существования предела по базе разбиений отрезка $[0,T]$. $\square$

Докажем теперь утверждение о существовании продолжения.

Доказательство. Пусть $(1, X_{st}^{(1)})$ — мультипликативный функционал степени 1, причем $|X_{st}^{(1)}| \le \|X^{(1)}\|_\alpha|t-s|^\alpha$ и $\alpha > 1/2$. Искомое продолжение задается равенствами $Y_{st}^{(1)} = X_{st}^{(1)}$ и

$$Y_{st}^{ij} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\sum_{k=0}^{N-1} X_{su_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j,$$

где $\mathbb{T}$: $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$. По доказанному выше этот предел существует. Поскольку

$$\Big|\sum_{k=0}^{N-1} X_{su_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j\Big| \le M\|X^i\|_\alpha\|X^j\|_\alpha|t-s|^{2\alpha},$$

то

$$|Y_{st}^{ij}| \le M\|X^i\|_\alpha\|X^j\|_\alpha|t-s|^{2\alpha}.$$

Остается проверить, что для Y_{st} выполняются соотношения Чена. Пусть $s < u < t$ и разбиение $s = u_0 < \ldots < u_N = t$ отрезка $[s,t]$ содержит точку $u = u_m$. Выполнено

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_{su_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j = \sum_{k=0}^{m-1} X_{su_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j + \sum_{k=m}^{N-1} X_{su_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} X_{su_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j + \sum_{k=m}^{N-1} X_{uu_k}^i X_{u_k u_{k+1}}^j + X_{su}^i X_{ut}^j.$$

Устремляя масштаб разбиения к нулю, получаем равенство

$$Y_{st}^{ij} = Y_{su}^{ij} + Y_{ut}^{ij} + X_{su}^i X_{ut}^j.$$

Обсудим кратко общий случай. Положим

$$\widehat{X}_{st} = (1, X_{st}^{(1)}, \ldots, X_{st}^{(k)}, 0).$$

Продолжение Y_{st} определяется равенством

$$Y_{st} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}\widehat{X}_{su_1}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{N-1}t}.$$

Здесь $\mathbb{T}$: $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_N = t$. Заметим, что в силу соотношений Чена при $m \le k$ справедливо равенство

$$\Big(\widehat{X}_{su_1}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{N-1}t}\Big)^{(m)} = X_{st}^{(m)}.$$

Когда $m = k+1$ существование предела требует обоснования, но мы ограничимся лишь проверкой соотношений Чена.

Пусть $s < u < t$ и разбиение $s = u_0 < \ldots < u_N = t$ отрезка $[s,t]$ содержит точку $u = u_m$. Так как

$$\widehat{X}_{su_1}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{N-1}t} = \Big(\widehat{X}_{su_1}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{m-1}u}\Big)\otimes\Big(\widehat{X}_{uu_{m+1}}\otimes\widehat{X}_{u_1u_2}\otimes\ldots\otimes\widehat{X}_{u_{N-1}t}\Big),$$

то после перехода к пределу при $\lambda(\mathbb{T}) \to 0$ получаем равенство

$$Y_{st} = Y_{su} \otimes Y_{ut},$$

которое и является одной из форм соотношений Чена. □

Предложение 2. *Пусть $(k+1)\alpha > 1$ и X_{st} — мультипликативный функционал степени k. Тогда существует такое число $C > 0$, что для всякого мультипликативного функционала Y_{st} степени k из неравенств*

$$|X_{st}^{(m)} - Y_{st}^{(m)}| \leq \varepsilon |t-s|^{m\alpha}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

следует неравенство

$$|\widetilde{X}_{st}^{(k+1)} - \widetilde{Y}_{st}^{(k+1)}| \leq \varepsilon C |t-s|^{(k+1)\alpha},$$

где $\widetilde{X}_{st}$ — продолжение X_{st} и $\widetilde{Y}_{st}$ — продолжение Y_{st} до мультипликативных функционалов степени $k+1$.

Доказательство. Ограничимся случаем $k = 1$. По доказанному выше

$$\widetilde{X}_{st}^{ij} - \widetilde{Y}_{st}^{ij} = \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} \Big(X_{su}^i X_{uv}^j - Y_{su}^i Y_{uv}^j \Big).$$

Заметим, что

$$X_{su}^i X_{uv}^j - Y_{su}^i Y_{uv}^j = (X-Y)_{su}^i X_{uv}^j + Y_{su}^i (X-Y)_{uv}^j.$$

Следовательно, верно равенство

$$\sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} \Big(X_{su}^i X_{uv}^j - Y_{su}^i Y_{uv}^j \Big) = \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} (X-Y)_{su}^i X_{uv}^j + \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} Y_{su}^i (X-Y)_{uv}^j.$$

Применяя полученные выше оценки, приходим к неравенству

$$\Big| \sum_{[u,v]\in\mathbb{T}} \Big(X_{su}^i X_{uv}^j - Y_{su}^i Y_{uv}^j \Big) \Big| \leq M \big(\|X^i - Y^i\|_\alpha \|X^j\|_\alpha + \|X^j - Y^j\|_\alpha \|Y^i\|_\alpha \big) |t-s|^{2\alpha}.$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и $\|X^i - Y^i\|_\alpha \leq \varepsilon$. Тогда

$$\Big| \widetilde{X}_{st}^{ij} - \widetilde{Y}_{st}^{ij} \Big| \leq M(1 + 2\|X^{(1)}\|_\alpha)\varepsilon.$$

□

Таким образом, если $(k+1)\alpha > 1$, то мультипликативный функционал X_{st} степени $m > k$ однозначно определяется элементами $(1, X_{st}^{(1)}, \ldots, X_{st}^{(k)}$.

Грубые траектории или кривые

Пусть $\alpha \in (0,1)$ и k — наименьшее натуральное число, для которого $(k+1)\alpha > 1$. Мультипликативный функционал X_{st} степени k, удовлетворяющий условиям

$$|X_{st}^{(m)}| \leq C_m |t-s|^{m\alpha}, \quad m = 1, 2, \ldots, k,$$

называется грубой траекторией или грубой кривой степени k.

Отметим, что благодаря соотношениям Чена грубая кривая может быть представлена именно в виде кривой, то есть отображения из $[0,T]$ в $T^{(k)}(V)$. Действительно, все элементы X_{st} выражаются через X_{0t}:

$$X_{st}^{(1)} = X_{0t} - X_{0s}, \quad X_{st}^{(2)} = X_{0t}^{(2)} - X_{0s}^{(2)} - X_{0s}^{(1)} \otimes (X_{0t}^{(1)} - X_{0s}^{(1)}), \quad \ldots$$

Таким образом, вместо X_{st} можно рассматривать $t \to X_{0t}$.

Далее мы в основном ограничимся случаем

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}, \quad k = 2.$$

Вместо записи $(1, X_{st}^{(1)}, X_{st}^{(2)})$ будем использовать обозначение $(X, \mathbb{X})$. Итак, мы рассматриваем грубые траектории $(X, \mathbb{X})$ на отрезке $[0, T]$, где $X\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $\mathbb{X}\colon \Delta_T \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, верны оценки

$$|X_{st}^i| \le C|t-s|^{\alpha}, \quad |\mathbb{X}_{st}^{ij}| \le C|t-s|^{2\alpha},$$

и выполнены соотношения Чена

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \mathbb{X}_{su}^{ij} + \mathbb{X}_{ut}^{ij} + X_{su}^i X_{ut}^j, \quad s < u < t.$$

Грубые траектории, соответствующие винеровскому процессу

Пусть $(w_t^1, \dots, w_t^d)$ — винеровский процесс. Положим

$$B_t^i = w_t^i, \quad \mathbb{B}_{st}^{ij} = \int_s^t (w_r^i - w_s)\, dw_r^j.$$

Интеграл в определении $\mathbb{B}_{st}^{ij}$ понимается в смысле Ито. Несложно проверить, что почти наверно выполняются соотношения Чена. Для проверки непрерывности по Гёльдеру нам потребуется обобщение теоремы Колмогорова.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Предположим, что для всех $\omega \in \Omega$ и $s, t \in [0,T]$, $s \le t$, определены $X_t^i(\omega)$ и $\mathbb{X}_{st}^{ij}(\omega)$ и выполнены соотношения Чена. Предположим также, что отображение $(\omega, t) \to (X_t^i(\omega), \mathbb{X}_{0t}^{ml}(\omega))$ измеримо относительно сигма-алгебры $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,T]$.

Теорема 1. *Если для некоторых чисел $q \ge 2$ и $\beta > \frac{1}{q}$ справедливы оценки*

$$\big(\mathbb{E}|X_{st}^i|^q\big)^{1/q} \le C|t-s|^{\beta}, \quad \big(\mathbb{E}|\mathbb{X}_{st}^i|^{q/2}\big)^{2/q} \le C|t-s|^{2\beta},$$

то для всякого $\alpha \in (0, \beta - \frac{1}{q})$ найдутся такие модификации $\widetilde{X}_t$ и $\widetilde{\mathbb{X}}_{st}$ процессов X_t и $\mathbb{X}_{st}$, что почти наверное

$$|X_{st}| \le K_{\alpha}|t-s|^{\alpha}, \quad |\mathbb{X}_{st}| \le \mathbb{K}_{\alpha}|t-s|^{2\alpha},$$

и $\mathbb{E}|K_{\alpha}|^q < \infty$, $\mathbb{E}|\mathbb{K}_{\alpha}|^{q/2} < \infty$.

Применим эту теорему к $(B_t, \mathbb{B}_{st})$. Имеем

$$\mathbb{E}|w_t^i - w_s^i|^q = C_1(q)|t-s|^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\Big|\int_s^t (w_r^i - w_s^i)\, dw_r^j\Big|^{q/2} \le C_2(q)\mathbb{E}\Big|\int_s^t (w_r^i - w_s^i)^2\, dr\Big|^{q/4} \le$$
$$\le C_2(q)|t-s|^{q/4}\mathbb{E}\sup_{[s,t]}(w_r^i - w_s^i)^{q/2} \le C_3(q)|t-s|^{q/2}.$$

Таким образом, теорема применима с $\beta = 1/2$ и произвольным $q \ge 2$. Следовательно, для всякого $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ почти наверное

$$|B_{st}| \le C|t-s|^{\alpha}, \quad |\mathbb{B}_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha},$$

то есть почти наверно пара $(B, \mathbb{B})$ является грубой траекторией.