Краткий конспект лекций по курсу
«Грубые траектории и регулярная структура»

Лекция 12

Всегда на этой лекции считаем, что $0 < T < 1$.

Оценки Y и $f(Y)$

Пусть $X_t \in C^\alpha[0,T]$ и (Y, Y') — контролируемая относительно X кривая, то есть $Y_t, Y'_t \in C^\alpha[0,T]$ и

$$Y_{st} = Y'_s X_{st} + R^Y_{st}, \quad |R^Y_{st}| \le C|t-s|^{2\alpha}.$$

Положим

$$\|Y\|_{\mathcal{D}} = |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}.$$

Лемма 1. *Пусть кривая (Y, Y') контролируется кривой X, кривая $(\widetilde{Y}, \widetilde{Y'})$ контролируется кривой $\widetilde{X}$ и функция g — дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными. Тогда справедливы оценки:*

(a)

$$\|Y\|_\alpha \le \bigl(\|Y'_0\| + \|Y'\|_\alpha\bigr)\|X\|_\alpha + T^\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} \le \|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr),$$

(b)

$$\|g(Y)\|_\alpha \le C(g)\|Y\|_\alpha \le C(g)\|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr),$$

(c)

$$\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha \le \|Y - Y\|_{\mathcal{D}}\|X\|_\alpha + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}T^\alpha$$
$$\le \|Y - Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr) + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha,$$

(d)

$$\|g(Y) - g(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(g)|Y_0 - \widetilde{Y}_0| +$$
$$+ C(g)\Bigl(\|Y - Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr) + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha\Bigr)\Bigl(1 + \|Y\|_{\mathcal{D}}\bigl(T^\alpha + \|X\|_\alpha\bigr)\Bigr).$$

Доказательство. Обоснуем пункт (a). Имеем

$$|Y_{st}| \le |Y'_s||X_{st}| + |R^Y_{st}| \le (|Y'_0| + |Y'_{st}|)|X_s t| + |R^Y_{st}|$$

и, следовательно, $\|Y\|_\alpha \le (|Y'_0| + \|Y'\|_\alpha)\|X\|_\alpha + T^\alpha\|R^Y\|_{2\alpha}$.

Пункт (b) следует из (a) и липшицевости g.

Обоснуем пункт (c). Справедливы равенства

$$Y_{st} - \widetilde{Y}_{st} = Y'_s X_{st} - \widetilde{Y}'_s \widetilde{X}_{st} + R^Y_{st} - R^{\widetilde{Y}}_{st} = (Y'_s - \widetilde{Y}'_s)X_{st} + \widetilde{Y}'_s(X_{st} - \widetilde{X}_{st}) + R^Y_{st} - R^{\widetilde{Y}}_{st}.$$

Следовательно, верна оценка

$$\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha \le \|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X\|_\alpha + \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}T^\alpha.$$

Докажем утверждение (d). Верно неравенство

$$g(Y_t) - g(Y_s) - g(\widetilde{Y}_t) + g(\widetilde{Y}_s) = \int_0^1 \Bigl(Dg(Y_s + \tau Y_{st})Y_{st} - Dg(\widetilde{Y}_s + \tau\widetilde{Y}_{st})\widetilde{Y}_{st}\Bigr)\,d\tau.$$

Так как первые и вторые производные функции g ограничены, то справедлива оценка

$$|Dg(Y_s + \tau Y_{st})Y_{st} - Dg(\widetilde{Y}_s + \tau\widetilde{Y}_{st})\widetilde{Y}_{st}| \le C(g)\sup|Y - \widetilde{Y}||Y_{st}| + C(g)|Y_{st} - \widetilde{Y}_{st}|$$

и неравенства

$$\sup|Y - \widetilde{Y}| \le |Y_0 - \widetilde{Y}_0| + \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha, \quad |Y_{st}| \le \|Y\|_\alpha|t-s|^\alpha, \quad |Y_{st} - \widetilde{Y}_{st}| \le \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha|t-s|^\alpha.$$

Итак, получаем оценку

$$\|g(Y)-g(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(g)\big(|Y_0-\widetilde{Y}_0|+\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha\big)\|Y\|_\alpha + C(g)\|Y-\widetilde{Y}\|_\alpha.$$

Используя оценки из пунктов (a) и (c), получаем

$$\|g(Y)-g(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(g)|Y_0-\widetilde{Y}_0|+$$

$$+C(g)\Big(\|Y-Y\|_{\mathcal{D}}\big(T^\alpha+\|X\|_\alpha\big)+\|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}\|X-\widetilde{X}\|_\alpha\Big)\Big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big(T^\alpha+\|X\|_\alpha\big)\Big).$$

□

Лемма 2. *Пусть (Y,Y') — контролируемая кривая относительно X и f — трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными. Тогда $(f(Y),Df(Y)Y')$ — контролируемая кривая относительно X и верны оценки*

$$\|Df(Y)Y'\|_\alpha \le C(f)\big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big), \quad \|R^{f(Y)}\|_{2\alpha} \le C(f)\big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big)^2.$$

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница

$$f(Y)_{st}=\int_0^1 Df(Y_s+\tau Y_{st})\,d\tau Y_{st}.$$

Следовательно, верно равенство

$$f(Y)_{st}-Df(Y_s)Y_s'X_{st}=\int_0^1\big(Df(Y_s+\tau Y_{st})-Df(Y_s)\big)\,d\tau Y_s'X_{st}+\int_0^1 Df(Y_s+\tau Y_{st})\,d\tau R^Y_{st},$$

из которого следует оценка

$$|f(Y)_{st}-Df(Y_s)Y_s'X_{st}| \le C(f)\Big(\|Y\|_\alpha(|Y_0'|+\|Y'\|_\alpha)\|X\|_\alpha+\|R^Y\|_{2\alpha}\Big)|t-s|^{2\alpha}.$$

Применяя пункт (a) леммы 1, получаем

$$\|R^{f(Y)}\|_{2\alpha} \le C(f)\big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big)^2.$$

Теперь оценим $\|Df(Y)Y'\|_\alpha$. Справедливо равенство

$$Df(Y_t)Y_t'-Df(Y_s)Y_s'=\big(Df(Y_t)-Df(Y_s)\big)Y_t'+Df(Y_s)Y_{st}'.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\|Df(Y)Y'\|_\alpha \le \|Df(Y)\|_\alpha\big(|Y_0'|+\|Y'\|_\alpha\big)+C(f)\|Y'\|_\alpha.$$

Применяя пункт (b) леммы 1, получаем

$$\|Df(Y)Y'\|_\alpha \le C(f)\Big(1+\|Y\|_{\mathcal{D}}\Big)^2\big(1+\|X\|_\alpha\big).$$

□

Лемма 3. *Пусть (Y,Y') — контролируемая кривая относительно X и $(\widetilde{Y},\widetilde{Y}')$ — контролируемая кривая относительно $\widetilde{X}$, причем*

$$\max\{\|Y\|_{\mathcal{D}},\|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}},\|X\|_\alpha,\|\widetilde{X}\|_\alpha\}\le M.$$

Пусть f — трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными. Тогда

$$\|Df(Y)Y'-Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha \le C(f,M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}+\|X-\widetilde{X}\|_\alpha\big),$$

$$\|R^{f(Y)}-R^{f(\widetilde{Y})}\|_{2\alpha} \le C(f,M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}+\|X-\widetilde{X}\|_\alpha\big).$$

Доказательство. Имеем

$$Df(Y_t)Y'_t - Df(\widetilde{Y}_t)\widetilde{Y}'_t - Df(Y_s)Y'_s + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s =$$
$$Df(Y)_{st}Y'_t - Df(\widetilde{Y})_{st}\widetilde{Y}'_t + Df(Y_s)Y'_{st} - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_{st} =$$
$$(Df(Y)_{st} - Df(\widetilde{Y})_{st})Y'_t + Df(\widetilde{Y})_{st}(Y'_t - \widetilde{Y}'_t) + (Df(Y_s) - Df(\widetilde{Y}_s))Y'_{st} + Df(\widetilde{Y}_s)(Y'_{st} - \widetilde{Y}'_{st}).$$

Следовательно, верна оценка

$$\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha \le \|Df(Y) - Df(\widetilde{Y})\|_\alpha(|Y_0| + \|Y'\|_\alpha) +$$
$$\|Df(\widetilde{Y})\|_\alpha(|Y'_0 - \widetilde{Y}'_0| + \|Y' - \widetilde{Y}'\|_\alpha) + \sup_s |Df(Y_s) - Df(\widetilde{Y}_s)|\|Y'\|_\alpha + \sup_s |Df(\widetilde{Y}_s)|\|Y' - \widetilde{Y}'\|_\alpha.$$

Заметим, что

$$\sup_s |Df(Y_s) - Df(\widetilde{Y}_s)| \le C(f)(|Y_0 - \widetilde{Y}_0| + \|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha), \quad \sup_s |Df(\widetilde{Y}_s)| \le C(f)(|\widetilde{Y}_0| + \|\widetilde{Y}\|_\alpha).$$

Применяя оценки из леммы 1, получаем

$$\|Df(Y) - Df(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(f,M)(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha), \quad \|Df(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(f,M),$$
$$\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha \le C(M)(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha), \quad \|\widetilde{Y}\|_\alpha \le C(M).$$

Итак, верна оценка

$$\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha \le C(f,M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha\big).$$

Теперь рассмотрим выражение $R^{f(Y)} - R^{f(\widetilde{Y})}$. Справедливы следующие равенства:

$$R^{f(Y)}_{st} - R^{f(\widetilde{Y})}_{st} = f(Y)_{st} - Df(Y_s)Y'_sX_{st} - f(\widetilde{Y})_{st} + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s\widetilde{X}_{st} =$$
$$f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st} + Df(Y_s)R^Y_{st} - f(\widetilde{Y}_s) + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st} - Df(\widetilde{Y}_s)R^{\widetilde{Y}}_{st}.$$

По формуле Тейлора

$$f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st} = \int_0^1 (1-\tau)D^2f(Y_s + \tau Y_{st})\,d\tau Y_{st} \otimes Y_{st},$$
$$f(\widetilde{Y}_s) - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st} = \int_0^1 (1-\tau)D^2f(\widetilde{Y}_s + \tau \widetilde{Y}_{st})\,d\tau \widetilde{Y}_{st} \otimes \widetilde{Y}_{st}.$$

Следовательно,

$$(f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st}) - (f(\widetilde{Y}_s) - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st}) =$$
$$\int_0^1 (1-\tau)D^2f(Y_s + \tau Y_{st})\,d\tau Y_{st} \otimes Y_{st} - \int_0^1 (1-\tau)D^2f(\widetilde{Y}_s + \tau \widetilde{Y}_{st})\,d\tau \widetilde{Y}_{st} \otimes \widetilde{Y}_{st}$$

и справедлива оценка

$$|f(Y_s) - Df(Y_s)Y_{st}) - (f(\widetilde{Y}_s) - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}_{st}| \le$$
$$C(f)\sup_s |Y_s - \widetilde{Y}_s|\|Y\|^2_\alpha |t-s|^{2\alpha} +$$
$$C(f)(\|Y\|_\alpha + \|\widetilde{Y}\|_\alpha)\|Y - \widetilde{Y}\|_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Кроме того,

$$|Df(Y_s)R^Y_{st} - Df(\widetilde{Y}_s)R^{\widetilde{Y}}_{st}| \le$$
$$C(f)\sup_s |Y_s - \widetilde{Y}_s|\|R^Y\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} + C(f)\|R^Y - R^{\widetilde{Y}}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}.$$

Вновь применяя оценки из леммы 1, получаем

$$\|R^{f(Y)} - R^{f(\widetilde{Y})}\|_{2\alpha} \le C(f,M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha\big).$$

$\square$

Оценки грубого интеграла от $f(Y)$

Лемма 4. *Пусть $(X, \mathbb{X})$ — грубая траектория из $\mathfrak{C}^\alpha$, пара (Y, Y') — контролируемая кривая относительно X и функция f трижды непрерывно дифференцируема с ограниченными производными. Тогда пара*

$$\Big(\int_0^t f(Y_u)\,dX_u, Df(Y_t)Y'_t\Big)$$

является контролируемой кривой относительно X и справедливы оценки

$$\|f(Y)\|_\alpha \le C(f)\|Y\|_{\mathcal{D}}(\|X\|_\alpha + T^\alpha),$$

$$\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha} \le C(f)(1+\|Y\|_\alpha)^2(1+\|X\|_\alpha)^2(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

Доказательство. Оценка $\|f(Y)\|_\alpha$ следует из пункта (b) леммы 1. Поскольку

$$R_{st}^{\int f(Y)\,dX} = \int_s^t f(Y_u)\,dX_u - f(Y_s)X_{st}$$

и

$$|R_{st}^{\int f(Y)\,dX} - Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st}| \le |t-s|^{3\alpha}\big(\|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|Df(Y)Y'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\big),$$

то

$$\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha} \le \|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|Df(Y)Y'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \sup_s |Df(Y_s)Y'_s|\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}.$$

Применяя оценки из леммы 3, получаем

$$\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha} \le C(f)(1+\|Y\|_\alpha)^2(1+\|X\|_\alpha)^2(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

$\square$

Лемма 5. *Пусть $(X, \mathbb{X}), (\widetilde{X}, \widetilde{\mathbb{X}}) \in \mathfrak{C}^\alpha$. Пусть (Y, Y') — контролируемая кривая относительно X и $(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}')$ — контролируемая кривая относительно $\widetilde{X}$, причем $Y_0 = \widetilde{Y}_0$, $Y'_0 = \widetilde{Y}'_0$ и*

$$\max\{\|Y\|_{\mathcal{D}}, \|\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}, \|X\|_\alpha, \|\widetilde{X}\|_\alpha, \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}, \|\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\} \le M.$$

Пусть f — трижды непрерывно дифференцируемое отображение с ограниченными производными. Тогда

$$\|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_\alpha \le C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(T^\alpha + \|X\|_\alpha) + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha\big),$$

$$\|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha} \le C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(T^\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

Доказательство. Оценка $\|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_\alpha$ следует из пункта (d) леммы 1. На прошлой лекции при обосновании непрерывности грубого интеграла с помощью леммы о сшивке получили оценку, которая в данном случае имеет вид:

$$|R^{\int f(Y)\,dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}} - Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st} + Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s\widetilde{\mathbb{X}}_{st}| \le$$

$$|t-s|^{3\alpha}C(M)\big(\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha + \|R^{f(Y)} - R^{f(\widetilde{Y})}\|_{2\alpha} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

С помощью леммы 3 правая часть оценивается сверху выражением

$$|t-s|^{3\alpha}C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}} + \|X - \widetilde{X}\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$

Теперь заметим, что

$$|t-s|^{-2\alpha}|Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st} - Df(\widetilde{Y}_s)\widetilde{Y}'_s\widetilde{\mathbb{X}}_{st}| \le$$

$$\|Df(Y)Y' - Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + (|Df(\widetilde{Y}_0)\widetilde{Y}'_0| + \|Df(\widetilde{Y})\widetilde{Y}'\|_\alpha)\|\mathbb{X} - \widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}.$$

Вновь применяя лемму 3, правую часть оцениваем выражением
$$C(f,M)(\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}+\|X-\widetilde{X}\|_{\alpha}+\|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha})$$
Следовательно, приходим к оценке
$$\|R^{\int f(Y)\,dX}-R^{\int f(\widetilde{Y})\,d\widetilde{X}}\|_{2\alpha}\le C(f,M)\big(\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(T^{\alpha}+\|\mathbb{X}\|_{2\alpha})+\|X-\widetilde{X}\|_{\alpha}+\|\mathbb{X}-\widetilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\big).$$
$\square$

Теперь все вспомогательные результаты для обсуждения грубых дифференциальных уравнений получены.

Грубые дифференциальные уравнения

Пусть $0<\tau<T<1$ и $\frac{1}{3}<\beta<\frac{1}{2}$. Предположим, что $(X,\mathbb{X})\in\mathfrak{C}^{\beta}[0,T]$ и функция f трижды непрерывно дифференцируема и ее производные ограниченны. Контролируемая относительно X кривая $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\beta}[0,\tau]$ является на $[0,\tau]$ решением **грубого дифференциального уравнения**
$$dY_t=f(Y_t)\,dX_t$$
и удовлетворяет начальному условию $Y_0=y$, если для всех $t\in[0,\tau]$ справедливо равенство
$$Y_t=y+\int_0^t f(Y_u)dX_u,$$
где интеграл в правой части является грубым интегралом по грубой кривой $(X,\mathbb{X})$ от контролируемой кривой $(f(Y),Df(Y)Y')$.

Теорема 1. *Для всякого $y\in\mathbb{R}^m$ существует такое $\tau\in(0,T)$, что грубое уравнение $dY_t=f(Y_t)dX_t$ на $[0,\tau]$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $Y_0=y$.*

Доказательство. Фиксируем $\alpha\in(\frac{1}{3},\beta)$. Пусть
$$M>|y|+|f(y)|+\|X\|_{\beta}+\|\mathbb{X}\|_{2\beta}.$$
Заметим, что
$$\|X\|_{\alpha}\le\tau^{\beta-\alpha}M,\quad \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\le\tau^{2\beta=2\alpha}M.$$
Рассмотрим множество
$$S_{M,\tau}=\{(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}[0,\tau]\colon\ Y_0=y,\ Y_0'=f(y),\ \|Y\|_{\mathcal{D}}=|y|+|f(y)|+\|Y'\|_{\alpha}+\|R^Y\|_{2\alpha}\le M\}.$$
Множество $S_{M,\tau}$ замкнуто в полном пространстве $\mathcal{D}_X^{2\alpha}[0,\tau]$ и, следовательно, является полным метрическим пространством с метрикой $\|Y-\widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}$. Отметим, что множество $S_{M,\tau}$ непусто, например $Y_t=y+f(y)X_{0t}\in S_{M,\tau}$. Положим
$$\Phi\colon(Y,Y')\to\Big(\int f(Y)\,dX,f(Y)\Big).$$
Имеем
$$\|\Phi(Y,Y')\|_{\mathcal{D}}=|f(y)|+\|f(Y)\|_{\alpha}+\|R^{\int f(Y)\,dX}\|_{2\alpha}.$$
По лемме 4
$$\|\Phi(Y,Y')\|_{\mathcal{D}}\le|f(y)|+C(f)\|Y\|_{\mathcal{D}}(\tau^{\alpha}+\|X\|_{\alpha})+C(f)(1+\|Y\|_{\alpha})^2(1+\|X\|_{\alpha})^2(\|X\|_{\alpha}+\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$
Следовательно,
$$\|\Phi(Y,Y')\|_{\mathcal{D}}\le|f(y)|+C(f)M(\tau^{\alpha}+\tau^{\beta-\alpha}M)+C(f)(1+M)^4(\tau^{\beta-\alpha}+\tau^{2\beta-2\alpha})M.$$
Поскольку $M>|f(y)|$, то для достаточно малого τ получаем оценку
$$\|\Phi(Y,Y')\|_{\mathcal{D}}\le M,$$

из которой следует, что Φ отображает множество $S_{M,\tau}$ в себя.

Пусть теперь $(Y, Y'), (\widetilde{Y}, \widetilde{Y}') \in S_{M,\tau}$. Согласно лемме 5

$$\|\Phi(Y, Y') - \Phi(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}')\|_{\mathcal{D}} = \|f(Y) - f(\widetilde{Y})\|_{\alpha} + \|R^{\int f(Y)\, dX} - R^{\int f(\widetilde{Y})\, dX}\|_{2\alpha} \leq$$
$$C(f, M)\big(\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}(\tau^{\alpha} + \|X\|_{\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}).$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\|\Phi(Y, Y') - \Phi(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}')\|_{\mathcal{D}} \leq C(f, M)M(\tau^{\alpha} + \tau^{\alpha} + \tau^{2\alpha})\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}.$$

Для достаточно малого τ получаем

$$\|\Phi(Y, Y') - \Phi(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}')\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{1}{2}\|Y - \widetilde{Y}\|_{\mathcal{D}}.$$

Итак, при достаточно малом τ отображение Φ является сжимающим отображением полного пространства $S_{M,\tau}$ в себя и по теореме Банаха существует единственная неподвижная точка.

Таким образом, существует такая кривая $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}[0, \tau]$, что

$$Y_t = y + \int_0^t f(Y_u)\, dX_u.$$

Поскольку

$$\Big|\int_s^t f(Y_u)\, dX_u - f(Y_s)X_{st} - Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st}\Big| \leq C|t - s|^{3\alpha},$$
$$|f(Y_s)X_{st} + Df(Y_s)Y'_s\mathbb{X}_{st}| \leq C|t - s|^{2\beta},$$

то $Y'_t = f(Y_t)$, то $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\beta}[0, \tau]$.

Предположим, что существуют два решения $(Y, Y'), (Z, Z')$. Множество $E = \{t \in [0, \tau]\colon\ Y_t = Z_t\}$ непусто (содержит $t = 0$) и замкнуто. Пусть $t_0 = \inf\{t > 0\colon t \notin E\}$. Тогда $t_0 \in E$. По доказанному выше найдется такое число $\delta > 0$, что $Y_t = Z_t$ на $[t_0, t_0 + \delta]$, а это противоречит определению t_0. Следовательно, $Y_t = Z_t$ (а значит и $Y'_t = f(Y_t) = f(Z_t) = Z'_t$) на всем отрезке $[0, \tau]$. $\square$