# Содержание

# 1 Комплексный анализ

## 1.1 21. Функции комплексного переменного. Условия Коши -Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. (Домрин)



### Лекция 2. Комплексная дифференцируемость. Геометрический смысл производной

**2.1. $\mathbb{R}$-дифференцируемость.** Рассмотрим $\mathbb{C}$-значную функцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на комплексной плоскости как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющее каждой точке $z = x + iy$ точку

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) + i \operatorname{Im} f(x, y).$$

Определение. Функция $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, называется $\mathbb{R}$-*дифференцируемой* в точке $z_0$, если $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x_0, y_0)$ как функции от $x$, $y$.

Более подробно, рассмотрим точку $z = x+iy$, достаточно близкую к $z_0$, и положим $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$. Кроме того, обозначим

$$\Delta z := z - z_0 = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f := f(z) - f(z_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Тогда $\mathbb{R}$-дифференцируемость $f$ в точке $z_0$ эквивалентна существованию констант $a, b \in \mathbb{C}$ таких, что

$$\Delta f = a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y + o(|\Delta z|) \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0.$$

Более формально, это соотношение означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\Delta f - a \cdot \Delta x - b \cdot \Delta y| < \varepsilon |\Delta z|$$

для всех $z$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$. Из него вытекает, в частности, что функция $f$ имеет частные производные по $x$ и по $y$ в точке $z_0$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y = 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0,\, \Delta x = 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = b.$$

Задача. Покажите, что из существования этих частных производных еще не следует $\mathbb{R}$-дифференцируемость $f$ в точке $z_0$.

*Указание*: Например, функция $f(z) = z^3/|z|^2$, доопределенная в точке $z_0 = 0$ по непрерывности, имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = -i$, но не является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0 = 0$.

Если выразить $\Delta x$ и $\Delta y$ через $\Delta z := \Delta x + i\Delta y$ и $\Delta\overline{z} := \Delta x - i\Delta y$, то условие $\mathbb{R}$-дифференцируемости $f$ в точке $z_0$ примет вид

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\Delta\overline{z} + o(\Delta z). \tag{2.1}$$

Введем дифференциальные операторы (формальные частные производные по $z$ и $\overline{z}$)

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Из формулы (2.1) вытекает следующее выражение для дифференциала $df(z_0)\colon T_{z_0}\mathbb{C} \to T_{f(z_0)}\mathbb{C}$ функции $f$, $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0$:

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,d\overline{z}.$$

Если отождествить касательные пространства $T_{z_0}\mathbb{C}$ и $T_{f(z_0)}\mathbb{C}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, то дифференциал $df(z_0)\colon T_{z_0}\mathbb{C} \to T_{f(z_0)}\mathbb{C}$ будет определять линейное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, действующее по формуле

$$df(z_0)\colon \zeta \in \mathbb{C} \mapsto df(z_0)\zeta = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot\zeta + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\cdot\overline{\zeta}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{C} \approx T_{z_0}\mathbb{C}$.

### 2.2. $\mathbb{C}$-дифференцируемость. Условия Коши–Римана.

Определение. Функция $f$, определенная в окрестности точки $z_0$, называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой* в точке $z_0$, если найдется комплексное число $a$ такое, что в окрестности точки $z_0$ имеет место представление

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = a\cdot\Delta z + o(\Delta z).$$

Эквивалентная переформулировка этого определения:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + o(1) \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0,$$

т.е. существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0).$$

Число $f'(z_0)$ называется *комплексной производной* функции $f$ в точке $z_0$.

Теорема. *Функция $f$, определенная в окрестности точки $z_0$, является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке $\iff$ $f$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0$ и выполняется условие Коши–Римана*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

*В этом случае имеем $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$.*

Доказательство. $\Longrightarrow$. По определению $\mathbb{C}$-дифференцируемость $f$ в точке $z_0$ означает, что функция $f$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0$ и ее дифференциал в этой точке имеет специальный вид:

$$df(z_0)\zeta = a\zeta \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{C} \approx T_{z_0}\mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.

$\Longleftarrow$. $\mathbb{R}$-дифференцируемость функции $f$ в точке $z_0$ означает, что

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\Delta \overline{z} + o(\Delta z)$$

в окрестности точки $z_0$. Отсюда в силу условия Коши–Римана вытекает, что

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + o(\Delta z),$$

т.е. функция $f$ $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z_0$. ■

Подставляя $f = u + iv$ в формулу

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

и отделяя вещественную и мнимую части, можно записать *условие Коши–Римана в вещественной форме* (т.е. в терминах вещественнозначных функций $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ и вещественных переменных $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$):

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Выпишем также *условие Коши–Римана в полярных координатах* $r$, $\varphi$, связанных с $z$, $\overline{z}$ формулами $z = re^{i\varphi}$, $\overline{z} = re^{-i\varphi}$. Дифференцируя эти формулы по $\overline{z}$ и решая полученную систему двух линейных уравнений, находим, что

$$\frac{\partial r}{\partial \overline{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} = \frac{ie^{i\varphi}}{2r}.$$

Следовательно, по теореме о производной сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial r}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right).$$

Применяя этот оператор к $f = u + iv$, получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Задачи. (1) Найдите все функции вида $f(z) = u(x) + iv(y)$, являющиеся $\mathbb{C}$-дифференцируемыми в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$.

(2) Пусть функция $f(z)$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в окрестности точки $z_0$. Определим $\mathbb{R}$-значные функции $u(z)$, $v(z)$, $\rho(z)$, $\theta(z)$ в окрестности $z_0$ формулой $f = u + iv = \rho e^{i\theta}$. Докажите, что если хотя бы одна из функций $u$, $v$, $\rho$, $\theta$ постоянна в окрестности $z_0$, то и $f(z)$ постоянна в окрестности $z_0$.

**2.3. Производная по направлению.** Пусть функция $f$ $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0$. Тогда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\Delta \overline{z} + o(\Delta z).$$

Воспользуемся полярным представлением $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$, так что

$$\Delta \overline{z} = \overline{\Delta z} = |\Delta z| e^{-i\theta} = \Delta z \cdot e^{-2i\theta},$$

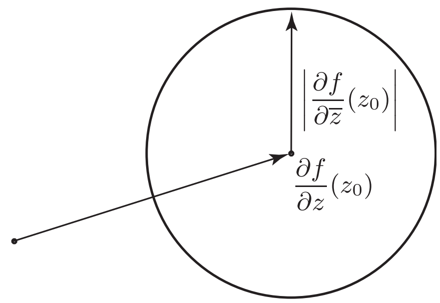


Рис. 7

и перепишем предыдущую формулу в виде

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)e^{-2i\theta}\right)\Delta z + o(\Delta z).$$

Разделим обе ее части на $\Delta z$ и перейдем к пределу при $\Delta z \to 0$ при фиксированном аргументе $\arg \Delta z = \theta = \mathrm{const}$. Получим, что из $\mathbb{R}$-дифференцируемости $f$ в точке $z_0$ вытекает существование предела

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \arg \Delta z = \theta}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)e^{-2i\theta} =: f'_\theta(z_0),$$

называемого *частной производной $f$ по направлению $\theta$*. Последняя формула показывает, что *при изменении $\theta$ от 0 до $2\pi$ точка $f'_\theta(z_0)$ описывает дважды пройденную окружность с центром в точке $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ радиуса $\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\right|$* (см. рис. 7). Этим доказано следующее

Предложение. *Пусть функция $f$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0$. Ее производная $f'_\theta(z_0)$ в этой точке по направлению $\theta$ не зависит от направления тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. В этом случае имеем*

$$f'_\theta(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{для всех} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

### 2.4. Голоморфные функции и конформные отображения.

Определение. Функция $f$ называется *голоморфной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция $f$ называется *голоморфной в области* $D$, если она голоморфна в каждой точке этой области.

Множество функций, голоморфных в области $D$, обозначается через $\mathcal{O}(D)$.

Определение. Пусть функция $f$ $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0$. Отображение окрестности этой точки в $\mathbb{C}$, задаваемое функцией $f$, называется *конформным в точке* $z_0$, если его дифференциал $df(z_0)$, рассматриваемый как линейное отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя, невырожден (т.е. взаимно однозначен) и является композицией поворота и растяжения. Отображение, задаваемое функцией $f$, *конформно в области* $D$, если оно конформно в каждой точке этой области.

Связь между конформными отображениями и $\mathbb{C}$-дифференцируемыми функциями устанавливается следующим предложением.

Предложение. *Отображение, задаваемое $\mathbb{R}$-дифференцируемой функцией $f$, конформно в точке $z_0$ $\iff$ функция $f$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. $\Longleftarrow$. Пусть функция $f$ $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда ее дифференциал

$$df(z_0)\colon \zeta \mapsto f'(z_0)\zeta = |f'(z_0)|\, e^{i \arg f'(z_0)}\zeta$$

является композицией поворота на угол $\arg f'(z_0)$ и растяжения в $|f'(z_0)|$ раз. Кроме того, он невырожден, так как эта композиция взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^2$ на себя. Следовательно, отображение $f$ конформно в точке $z_0$.

$\Longrightarrow$. Пусть функция $f$ $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0$. Ее дифференциал в этой точке имеет вид

$$df(z_0)\colon \zeta \mapsto A\zeta + B\overline{\zeta},$$

где $A := \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $B := \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)$. Отображение $\zeta \mapsto i\zeta$ геометрически является поворотом на $90^\circ$ против часовой стрелки. Поскольку любые повороты и растяжения коммутируют с этим отображением, то и дифференциал $df(z_0)$ должен коммутировать с ним ввиду конформности $f$, т.е. должно выполняться равенство

$$Ai\zeta + B\overline{i\zeta} = i(A\zeta + B\overline{\zeta}\,) \quad \text{для всех} \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что $2iB\overline{\zeta} = 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и, следовательно, $B = 0$. Таким образом, всякое конформное в точке $z_0$ отображение $f$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемым в этой точке. При этом $f'(z_0) \neq 0$, так как иначе отображение $df(z_0)$ обращалось бы в тождественный нуль, что невозможно ввиду его невырожденности. ■

Задачи. (1) Пусть отображение $f$ конформно в точке $z_0$. Покажите, что проходящие через точку $z_0$ линии уровня $\{z : u(z) = u(z_0)\}$ и $\{z : v(z) = v(z_0)\}$ функций $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$ являются гладкими кривыми в окрестности $z_0$ и пересекаются в точке $z_0$ под прямым углом.

(2) Покажите, что якобиан $Jf(z_0)$ всякой $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0$ функции $f$, рассматриваемой как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, равен

$$Jf(z_0) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\right|^2.$$

В частности, если $f$ конформно в точке $z_0$, то $Jf(z_0) > 0$. (Эквивалентная формулировка последнего утверждения: конформные отображения сохраняют ориентацию.)

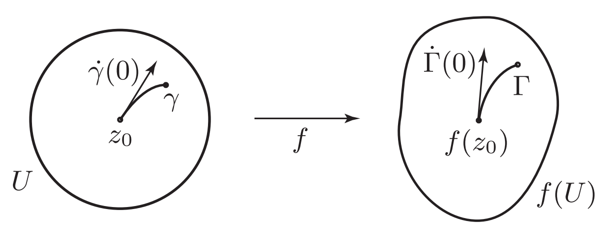


Рис. 8

**2.5. Геометрический смысл комплексной производной.** Изучим геометрические свойства конформных отображений. Пусть $f$ конформно в некоторой окрестности $U$ точки $z_0$ и производная $f'(z)$ непрерывна в $U$. Рассмотрим гладкий путь $\gamma$

в $U$ с началом в $z_0$, т.е. гладкое отображение (см. рис. 8)

$$\gamma\colon [0,1] \to U, \qquad \gamma(0) = z_0,$$

удовлетворяющее условию $\dot\gamma(t) \neq 0$ при $t \in [0,1]$. Композиция

$$\Gamma := f \circ \gamma\colon [0,1] \to f(U)$$

является гладким путем в $f(U)$, так как

$$\dot\Gamma(t) = f'(\gamma(t))\dot\gamma(t). \tag{2.2}$$

Геометрически $\dot\gamma(t)$ представляет собой касательный вектор к кривой $\gamma([0,1])$ в точке $\gamma(t)$; аналогичную интерпретацию имеет и производная $\dot\Gamma(t)$. Поскольку элемент длины дуги $\gamma$ в точке $\gamma(t)$ равен

$$ds_\gamma(t) = |\dot\gamma(t)|\,dt \quad \text{и, аналогично,} \quad ds_\Gamma(t) = |\dot\Gamma(t)|\,dt,$$

то

$$\frac{ds_\Gamma(0)}{ds_\gamma(0)} = \frac{|\dot\Gamma(0)|}{|\dot\gamma(0)|} = |f'(z_0)|,$$

т.е. *модуль производной $f'(z_0)$ есть коэффициент растяжения длины дуги в точке $z_0$ при отображении $f$.*

Из последнего утверждения следует, в частности, что все дуги, проходящие через точку $z_0$, растягиваются в этой точке в одно и то же число раз. Поэтому отображение $f$ переводит малые окружности с центром $z_0$ в гладкие кривые, совпадающие в первом порядке с окружностями с центром $f(z_0)$. Впрочем, это вытекает уже из описания дифференциала конформного отображения в п. 2.4.

Из формулы (2.2) вытекает также, что

$$\arg f'(z_0) = \arg\dot\Gamma(0) - \arg\dot\gamma(0),$$

т.е. *аргумент производной $f'(z_0)$ есть угол поворота касательных к дугам в точке $z_0$ при отображении $f$.*

В частности, все дуги, проходящие через $z_0$, поворачиваются на один и тот же угол. Иными словами, конформное отображение сохраняет углы: угол между двумя дугами, проходящими через $z_0$, равен углу между их образами.

Замечание. Геометрические свойства конформных отображений не переносятся на голоморфные отображения $f$ с $f'(z_0) = 0$. Например, отображение $f(z) = z^2$ голоморфно в точке $z_0 = 0$, но не сохраняет углы в этой точке.

## 1.2 22. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. (Домрин + Шабат)

### 1.2.1 Конформность



**2.4. Голоморфные функции и конформные отображения.**

Определение. Функция $f$ называется *голоморфной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция $f$ называется *голоморфной в области* $D$, если она голоморфна в каждой точке этой области.

Множество функций, голоморфных в области $D$, обозначается через $\mathcal{O}(D)$.

Определение. Пусть функция $f$ $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0$. Отображение окрестности этой точки в $\mathbb{C}$, задаваемое функцией $f$, называется *конформным в точке* $z_0$, если его дифференциал $df(z_0)$, рассматриваемый как линейное отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя, невырожден (т.е. взаимно однозначен) и является композицией поворота и растяжения. Отображение, задаваемое функцией $f$, *конформно в области* $D$, если оно конформно в каждой точке этой области.

Связь между конформными отображениями и $\mathbb{C}$-дифференцируемыми функциями устанавливается следующим предложением.

Предложение. *Отображение, задаваемое* $\mathbb{R}$*-дифференцируемой функцией* $f$*, конформно в точке* $z_0$ $\iff$ *функция* $f$ *является* $\mathbb{C}$*-дифференцируемой в точке* $z_0$ *и* $f'(z_0) \neq 0$.

Доказательство. $\Longleftarrow$. Пусть функция $f$ $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда ее дифференциал

$$df(z_0)\colon \zeta \mapsto f'(z_0)\zeta = |f'(z_0)|\, e^{i \arg f'(z_0)}\zeta$$

является композицией поворота на угол $\arg f'(z_0)$ и растяжения в $|f'(z_0)|$ раз. Кроме того, он невырожден, так как эта композиция взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^2$ на себя. Следовательно, отображение $f$ конформно в точке $z_0$.

$\Longrightarrow$. Пусть функция $f$ $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке $z_0$. Ее дифференциал в этой точке имеет вид

$$df(z_0)\colon \zeta \mapsto A\zeta + B\overline{\zeta},$$

где $A := \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $B := \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$. Отображение $\zeta \mapsto i\zeta$ геометрически является поворотом на $90^\circ$ против часовой стрелки. Поскольку любые повороты и растяжения коммутируют с этим отображением, то и дифференциал $df(z_0)$ должен коммутировать с ним ввиду конформности $f$, т.е. должно выполняться равенство

$$Ai\zeta + B\overline{i\zeta} = i(A\zeta + B\overline{\zeta}\,) \quad \text{для всех} \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что $2iB\overline{\zeta} = 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ и, следовательно, $B = 0$. Таким образом, всякое конформное в точке $z_0$ отображение $f$ является $\mathbb{C}$-дифференцируемым в этой точке. При этом $f'(z_0) \neq 0$, так как иначе отображение $df(z_0)$ обращалось бы в тождественный нуль, что невозможно ввиду его невырожденности. ■

Задачи. (1) Пусть отображение $f$ конформно в точке $z_0$. Покажите, что проходящие через точку $z_0$ линии уровня $\{z : u(z) = u(z_0)\}$ и $\{z : v(z) = v(z_0)\}$ функций $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$ являются гладкими кривыми в окрестности $z_0$ и пересекаются в точке $z_0$ под прямым углом.

(2) Покажите, что якобиан $Jf(z_0)$ всякой $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке $z_0$ функции $f$, рассматриваемой как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, равен

$$Jf(z_0) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\right|^2.$$

В частности, если $f$ конформно в точке $z_0$, то $Jf(z_0) > 0$. (Эквивалентная формулировка последнего утверждения: конформные отображения сохраняют ориентацию.)

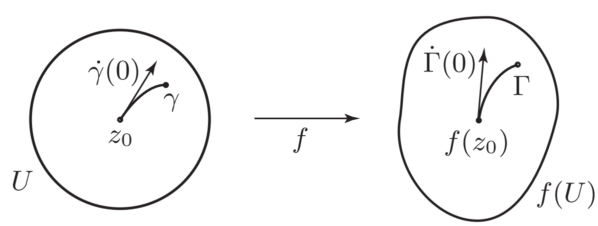


Рис. 8

**2.5. Геометрический смысл комплексной производной.** Изучим геометрические свойства конформных отображений. Пусть $f$ конформно в некоторой окрестности $U$ точки $z_0$ и производная $f'(z)$ непрерывна в $U$. Рассмотрим гладкий путь $\gamma$

### 1.2.2 Элементарные функции

**11. Некоторые рациональные функции.**

1. Степенная функция

$$w = z^n, \tag{1}$$

где $n$ — натуральное число, голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$. Ее производная $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1}$ при $n > 1$ отлична от нуля всюду при $z \neq 0$, следовательно, отображение (1) при $n > 1$ конформно в каждой точке $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Записывая функцию (1) в полярных координатах $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$:

$$\rho = r^n, \qquad \psi = n\varphi, \tag{2}$$

**12. Показательная функция.** Мы определим функцию $e^z$ тем же предельным соотношением, которым она определяется в действительном анализе:

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \tag{1}$$

2°. *Для функции $e^z$ сохраняется обычная формула дифференцирования.* В самом деле, производную, когда она существует, можно вычислять в направлении оси $x$. Поэтому

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^z. \tag{5}$$

Показательная функция не обращается в нуль, ибо $|e^z| = e^x > 0$; поэтому $(e^z)' \neq 0$ и отображение $w = e^z$ конформно в каждой точке $\mathbb{C}$.

ляется полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$. Полагая $z = x + iy$ и $w = \rho e^{i\psi}$, мы согласно (3) запишем отображение $w = e^z$ в виде

$$\rho = e^x, \qquad \psi = y. \tag{9}$$

Отсюда видно, что это отображение преобразует прямые $\{y = y_0\}$ в лучи $\{\psi = y_0\}$, а отрезки $\{x = x_0,\ 0 < y < 2\pi\}$ — в окружности с выколотой точкой $\{\rho = e^{x_0},\ 0 < \psi < 2\pi\}$ (рис. 20). Полоса $\{0 < y < 2\pi\}$

**13. Тригонометрические функции.** Из формулы Эйлера для всех действительных $x$ мы имеем $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, откуда

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы можно использовать для голоморфного продолжения косинуса и синуса в комплексную плоскость, положив по определению для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1}$$

(голоморфность в $\mathbb{C}$ правых частей очевидна).

Все свойства этих функций вытекают из этого определения и соответствующих свойств показательной функции. Так, обе

### 1.2.3 Простейшие многозначные функции

Определение. *Элементом* называется пара $F = (U, f)$, состоящая из круга $U = \{|z - a| < R\}$ с центром в точке $a$ и функции $f$, голоморфной в этом круге. Точка $a$ называется *центром* элемента, а число $R$ — его *радиусом*. Элемент $F$ называется *каноническим*, если $U$ совпадает с кругом сходимости ряда Тейлора функции $f$ с центром в точке $a$.

Определение. Элементы $F = (U, f)$ и $G = (V, g)$ являются *непосредственным аналитическим продолжением* (сокращенно: *НАП*) друг друга, если (см. рис. 35)

$$U \cap V \neq \varnothing \quad \text{и} \quad f = g \ \text{ на } \ U \cap V.$$

Элемент $G$ называется *аналитическим продолжением элемента $F$ по цепочке* $F_0 = F, F_1, \ldots, F_{N-1}, F_N = G$, если (см. рис. 36)

$$F_{n+1} \quad \text{есть НАП} \quad F_n \quad \text{при} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Определение. Семейство канонических элементов

$$F_t = (U_t, f_t), \qquad t \in I = [0, 1],$$

называется *аналитическим продолжением канонического элемента $F_0$ вдоль пути* $\gamma \colon I \to \mathbb{C}$ (см. рис. 39), если:

(1) центр $a_t$ элемента $F_t$ совпадает с $\gamma(t)$, а его радиус $R(t)$ строго положителен для всех $t \in I$;

(2) для любого $t_0 \in I$ найдется связная окрестность $u_{t_0} \subset I$ точки $t_0$ такая, что для всех $t \in u_{t_0}$ имеем

$$\gamma(t) \in U_{t_0} \quad \text{и} \quad F_t \ \text{ есть } \ \text{НАП} \ \ F_{t_0}.$$

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область и $F_0 = (U_0, f_0)$ — канонический элемент с центром в точке $a \in D$ и $U_0 \subset D$, допускающий аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma$ в области $D$ с началом в точке $a$. Множество $\mathcal{F}$ канонических элементов, получаемых продолжением $F_0$ вдоль всех таких путей, называется (*многозначной*) *аналитической функцией* в области $D$, порожденной элементом $F_0$.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ есть аналитическая функция в области $D \subset \mathbb{C}$ и $D_1 \subset D$ — подобласть. Если существует канонический элемент $F_1 = (U_1, f_1) \in \mathcal{F}$, совокупность продолжений которого вдоль всех путей $\gamma \subset D_1$ задает в указанном выше смысле некоторую голоморфную функцию $g \in \mathcal{O}(D_1)$, то будем говорить, что аналитическая функция $\mathcal{F}$ *допускает выделение однозначной ветви* в области $D_1$, а пару $(D_1, g)$ называть *ветвью* (или *аналитическим элементом*) аналитической функции $\mathcal{F}$ в области $D_1$.

**Логарифм**

**11.3. Пример: аналитическая функция** $\ln z$. В исходном каноническом элементе $(U_0, f_0)$ этой функции $U_0$ есть круг $U_0 = \{|z-1| < 1\}$ радиуса 1 с центром в точке $z = 1$, а ряд Тейлора $f_0$ задается формулой

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n = \ln|z| + i \arg z, \quad \text{где} \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

(см. п. 9.3). Этот элемент можно продолжать вдоль любого пути $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке $z = 1$ либо с помощью формулы

$$f_t(z) = \ln|z| + i \arg z \quad \text{с} \quad -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t)$$

(аналогично п. 11.2), либо с помощью интеграла

$$f_t(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

взятого вдоль композиции пути $\gamma([0,t])$ и прямолинейного отрезка, соединяющего точку $\gamma(t)$ с $z$. В итоге получаем аналитическую функцию $\ln z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, имеющую бесконечное (счетное) число различных элементов в каждой точке $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

**11.2. Пример: аналитическая функция $\sqrt{z}$.** Зададим начальный аналитический элемент $f$ этой функции формулой

$$f(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i \arg z/2}, \quad \text{где} \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Функция $f$, задаваемая этой формулой, голоморфна в плоскости с выброшенной отрицательной вещественной полуосью $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Из равенства $f(z)^2 = z$ следует, что

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}\,.$$

Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z = 1$. Указанный ряд сходится в круге $U_0 = \{|z-1| < 1\}$ (по общей теореме из п. 6.2), который совпадает с кругом сходимости, поскольку $f'(z) \to \infty$ при $z \to 0$. Обозначим сумму этого ряда через $f_0(z)$.

Утверждение. *Канонический элемент $(U_0, f_0)$ допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке $z = 1$ и не допускает продолжения ни по какому пути $\gamma \subset \mathbb{C}$, проходящему через $0$.*

Доказательство. Произвольный непрерывный путь $\gamma\colon I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с началом в точке $\gamma(0) = 1$ можно записать в виде

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|\, e^{i\theta(t)},$$

где $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с $\theta(0) = 0$. Положим (см. рис. 43)

$$U_t := \{z \in \mathbb{C} : |z - \gamma(t)| < |\gamma(t)|\}$$

и зададим семейство элементов $f_t \in \mathcal{O}(U_t)$, осуществляющих аналитическое продолжение элемента $(U_0, f_0)$ вдоль пути $\gamma$, формулой

$$f_t(z) = \sqrt{|z|}\, e^{i \arg z/2}, \quad \text{где} \quad -\pi + \theta(t) < \arg z < \pi + \theta(t).$$

Функция $f_t$, задаваемая этой формулой, голоморфна в плоскости с выброшенным лучом $\mathbb{R}_{\theta(t)} = e^{i\theta(t)}\mathbb{R}_-$, выходящим из начала координат под углом $\pi + \theta(t)$. В качестве окрестности $u_{t_0}$ (фигурирующей в определении из п. 10.4) годится любая связная окрестность точки $t_0$ в $I$ такая, что $\gamma(u_{t_0}) \subset U_{t_0}$; существование такой окрестности вытекает из непрерывности функции $\theta(t)$.

Если же путь $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ таков, что $\gamma(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$, то для любого продолжения $\{F_t : t \in I\}$ вдоль $\gamma$ мы должны иметь

$$f'_{t_0}(z) = \frac{1}{2f_{t_0}(z)} \to \infty \quad \text{при} \quad z \to \gamma(t_0) = 0$$

(равенство $f'_t(z) = 1/(2f_t(z))$ остается верным для всех $f_t$ по теореме единственности), что доказывает невозможность продолжения вдоль $\gamma$. ∎

### 1.2.4 Дробно-линейные преобразования.



## Лекция 3. Дробно-линейные функции

Геометрия евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ (планиметрия) тесно связана с линейными преобразованиями, переводящими прямые на плоскости снова в прямые. В случае комплексной плоскости $\mathbb{C}$ эту роль выполняют комплексные линейные преобразования вида $z \mapsto az + b$ с комплексными $a$, $b$. Точно так же, геометрия расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (конформная геометрия) связана с дробно-линейными преобразованиями, задаваемыми дробно-линейными функциями вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{с комплексными} \quad a, b, c, d.$$

Роль "прямых" в конформной геометрии $\overline{\mathbb{C}}$ играют обобщенные окружности, т.е. прямые или окружности на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. (Они отвечают окружностям на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$.) Дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности снова в обобщенные окружности (см. п. 3.4).

**3.1. Дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости.**

Определение. *Дробно-линейное отображение* задается функцией вида

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Условие $ad - bc \neq 0$ исключает вырожденный случай постоянного отображения $w \equiv \text{const}$. Случай $c = 0$ отвечает линейному отображению

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

(заметим, что в этом случае $d \neq 0$).

Дробно-линейное отображение определено во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, кроме $z = -d/c$ (в случае $c \neq 0$) и $z = \infty$. Доопределим его в этих точках. Если $c \neq 0$, то положим

$$w = \infty \quad \text{при} \quad z = -\frac{d}{c} \qquad \text{и} \qquad w = \frac{a}{c} \quad \text{при} \quad z = \infty.$$

Если же $c = 0$, то положим $w = \infty$ при $z = \infty$.

Предложение 3.1. *Дробно-линейное отображение задает гомеоморфизм (т.е. взаимно однозначное непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.*

Доказательство. Пусть $c \neq 0$ (случай $c = 0$ разберите самостоятельно). Проверим взаимнооднозначность рассматриваемого отображения. Действительно, каждому значению $w \neq \frac{a}{c}, \infty$ отвечает единственное

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

такое, что $w = f(z)$ (заметим, что $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$). Точке $w = \frac{a}{c}$ отвечает, по определению, $z = \infty$, а точке $w = \infty$ отвечает $z = -\frac{d}{c}$. Проверим теперь непрерывность отображения $z \mapsto w$. В точках $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ она очевидна, а в точках $z = -\frac{d}{c}, \infty$ вытекает из предельных соотношений

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}\,.$$

Непрерывность обратного отображения $w \mapsto z$ проверяется аналогично. ■

**3.2. Конформность дробно-линейных отображений.** При $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ конформность отображения

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

вытекает из голоморфности $w = f(z)$ и того, что комплексная производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

не равна нулю в этих точках. (Мы видим, что условие $ad - bc \neq 0$ необходимо для конформности отображения $w = f(z)$.)

Проверим конформность $w = f(z)$ в точке $z = -\frac{d}{c}$, считая, что $c \neq 0$ (случай $c = 0$ разберите самостоятельно). Для этого согласно п. 2.6 надо проверить конформность отображения

$$W = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}$$

в точке $z = -\frac{d}{c}$. Она вытекает из того, что производная

$$\frac{dW}{dz} = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}$$

при $z = -\frac{d}{c}$ существует и равна $\frac{c^2}{bc-ad} \neq 0$. Следовательно, исходное отображение $w = f(z)$ конформно в точке $z = -\frac{d}{c}$.

Конформность $w = f(z)$ в точке $z = \infty$ (снова в предположении, что $c \neq 0$) эквивалентна конформности отображения

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + bz}{c + dz}$$

в нуле, которая проверяется так же, как и выше. Можно доказать ее и по-другому, сославшись на конформность обратного отображения

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

в точке $w = \frac{a}{c}$, которая вытекает из предыдущего случая. Итак, доказано следующее

Предложение 3.2. *Дробно-линейное отображение конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости.*

Задача. Можно ли дробно-линейно отобразить:

(1) единичный круг $U$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$;
(2) единичный круг $U$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$;
(3) комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$?

**3.3. Группа дробно-линейных отображений.** *Множество $\Lambda$ всех дробно-линейных отображений является группой относительно операции композиции.* Действительно, прямое вычисление показывает, что если

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \qquad \text{и} \qquad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

— два дробно-линейных отображения, то их композиция $f_1 \circ f_2$ и обратное отображение $f_1^{-1}$ тоже дробно-линейны.

Это утверждение становится очевидным, если *реализовать дробно-линейные отображения в виде комплексных $2\times2$-матриц.*

Указанная реализация строится следующим образом. Сопоставляя каждой обратимой матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$$

дробно-линейное отображение

$$w = \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

мы получим гомоморфизм групп

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \Lambda.$$

Этот гомоморфизм сюръективен, а его ядро состоит из всех ненулевых скалярных матриц, т.е. совпадает с $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, где $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$, а $I$ — единичная $2\times 2$-матрица. Более того, сужение указанного гомоморфизма на группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ всех матриц с определителем 1 тоже сюръективно (поскольку числитель и знаменатель в формуле для $w$ можно делить на одно и то же ненулевое комплексное число), а его ядро состоит всего из двух элементов: $\pm I$. Это означает, что имеют место изоморфизмы групп

$$\Lambda \cong \frac{\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*} \cong \frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}{\{\pm I\}} =: \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).$$

Группа дробно-линейных отображений $\Lambda$ не коммутативна. Линейные отображения образуют подгруппу $\Lambda_0 \subset \Lambda$, состоящую в точности из отображений, оставляющих точку $z = \infty$ неподвижной. В матричной реализации элементы $\Lambda_0$ изображаются верхнетреугольными матрицами из $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

### 3.4. Круговое свойство дробно-линейных отображений.

Определение. *Обобщенной окружностью* (или *окружностью на расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$) называется любая окружность или прямая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Это определение мотивируется тем, что при стереографической проекции окружностям и прямым на $\mathbb{C}$ отвечают окружности на сфере Римана.

Предложение 3.3. *Каждое дробно-линейное отображение переводит любую окружность на* $\overline{\mathbb{C}}$ *снова в окружность на* $\overline{\mathbb{C}}$.

# 2 Дифференциальная геометрия

## 2.1 25. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. (Иванов Тужилин)

# 3 Поверхности. Первая фундаментальная фор

Понятие кривых естественным образом обобщается на объекты большей размерности, которые называются поверхностями. Будем действовать в соответствие с планом построения теории кривых, реализованным на предыдущих лекциях.

## 3.1 Параметрические поверхности

Мы начнем с определения так называемых параметрических поверхностей, т.е. поверхностей, заданных с помощью подходящего отображения (сравните со случаем кривых).

**Определение.** *Непрерывной параметрической поверхностью* размерности $k$ в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge k$, называется произвольное непрерывное отображение $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ из некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что каждое такое $r$ задается набором из $n$ *координатных функций* $x^i(u^1, \dots, u^k)$, где $u^i$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^k \supset \Omega$, а $x^1, \dots, x^n$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. При этом непрерывность отображения $r$ равносильна непрерывности всех функций $x^i(u^1, \dots, u^k)$. Координаты $u^i$ называются *параметрами* для $r$ или *координатами* на параметрической поверхности $r$.

Непрерывная параметрическая поверхность $r$, может, вообще говоря, иметь самопересечения, т.е. могут существовать такие точки $P$ и $P'$ из $\Omega$, что $r(P) = r(P')$. Если самопересечений нет, т.е. отображение $r$ взаимно однозначно с образом, то параметрическая поверхность $r$ называется *простой*.

**Определение.** Непрерывная параметрическая поверхность $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *гладкой*, если все ее координатные функции $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — гладкие. В этом случае определены векторы $r_{u^i} = \left(x^1_{u^i}, \dots, x^n_{u^i}\right)$, называемые *базисными касательными векторами для $r$ в точке $r(u^1, \dots, u^k)$*. Здесь через $x^j_{u^i}$ мы обозначили частную производную функции $x^j$ по параметру $u^i$.

Отметим, что интуитивное представление о гладкости поверхности не соответствует данному определению, что иллюстрируется следующим упражнением.

**Упражнение 3.1.** Доказать, что конус и двугранный угол можно представить как образы гладких параметрических поверхностей.

Легко видеть, что для поверхностей “изломы” могут возникать лишь в тех точках, в которых базисные касательные векторы линейно зависимы.

Такие точки называются *особыми* или *сингулярными*, а все остальные — *регулярными* или *неособыми*. Запрещая такие точки, мы приходим к следующему определению.

**Определение.** Гладкая параметрическая поверхность называется *регулярной*, если ее базисные касательные векторы всюду линейно независимы. Это равносильно тому, что матрица Якоби $\left(x^i_{u_j}\right)$ имеет во всех точках поверхности максимальный ранг (равный, очевидно, $k$).

Пусть $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная параметрическая поверхность. Рассмотрим произвольное взаимно-однозначное непрерывное вместе со своим обратным отображение $\varphi\colon \Omega' \to \Omega$ области $\Omega' \subset \mathbb{R}^k$ на область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Каждое такое отображение порождает новую непрерывную параметрическую поверхность $r\circ\varphi\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$ и называется *заменой параметризации для* $r$. Отметим, $r$ и $r\circ\varphi$ имеют совпадающие образы. Кроме того, если $\varphi$ — замена параметризации, то $\varphi^{-1}$ также является заменой параметризацией. В случае, когда поверхность $r$ — гладкая, мы будем дополнительно предполагать, что замены параметризации $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ — гладкие. При этом, как вытекает из теоремы об обратной функции, дифференциалы отображений $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ всюду невырождены, т.е. задаются невырожденными матрицами. Поэтому, в сделанных предположениях, замена параметризации сохраняет свойство параметрической поверхности быть непрерывной, гладкой или регулярной.

## 3.2 Поверхности–графики и неявные поверхности

Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, заданная на области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, и $(u^1,\dots,u^{n-1})$ — стандартные координаты на $\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда ее график

$$\Gamma_f = \Big\{\big(u^1,\dots,u^{n-1}, f(u^1,\dots,u^{n-1})\big) \mid (u^1,\dots,u^{n-1}) \in \Omega\Big\}$$

называется *поверхностью–графиком* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Ясно, что поверхно график произвольной гладкой функции $f$ может быть задана как образ регулярной параметрической поверхности $r_f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$r_f\colon (u^1,\dots,u^{n-1}) \mapsto \big(u^1,\dots,u^{n-1}, f(u^1,\dots,u^{n-1})\big).$$

Размерность поверхности $r_f$ равна $n-1$. Такие поверхности часто называют *гиперповерхностями.*

Не у всякой регулярной поверхности образ представим в виде графика функции. Например, образ следующей простой регулярной поверхности

$$r\colon (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R},$$

(это — прямой круговой цилиндр с выброшенной прямой) не представим таким образом, так как его проекция на любую плоскость не взаимно однозначна с образом. Тем не менее, *локально* образ регулярной поверхности всегда является графиком.

**Утверждение 3.1** *Для любой регулярной параметрической гиперповерхности $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ и любой точки $P \in \Omega$ существует такая окрестность $\Omega'$ этой точки, что образ отображения $r|_{\Omega'}$ является графиком некоторой гладкой функции.*

**Доказательство.** Пусть $x^i$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$, а $u^i$ — координаты на поверхности $r$. В силу регулярности поверхности $r$, ранг матрицы $\bigl(x^i_{u_j}(P)\bigr)$ равен $n-1$. Без ограничения общности будем считать, что квадратная матрица $\bigl(x^i_{u^j}(P)\bigr)_{i,j=1}^{n-1}$ невырождена. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности $\Omega'$ точки $P$ отображение

$$(u^1,\dots,u^{n-1}) \mapsto \bigl(x^1(u^1,\dots,u^{n-1}),\dots,x^{n-1}(u^1,\dots,u^{n-1})\bigr)$$

имеет гладкое обратное отображение

$$\varphi\colon (x^1\dots,x^{n-1}) \mapsto \bigl(u^1(x^1,\dots,x^{n-1}),\dots,u^{n-1}(x^1,\dots,x^{n-1})\bigr),$$

являющееся, по определению, заменой параметризации поверхности $r\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$. По определению отображения $\varphi$ имеем:

$$x^i\bigl(u^1(x^1,\dots,x^{n-1}),\dots,u^{n-1}(x^1,\dots,x^{n-1})\bigr) = x^i, \quad i=1,\dots,n-1,$$

поэтому параметрическая поверхность $r\circ\varphi$ задается так:

$$\begin{aligned} r\circ\varphi\colon (x^1,\dots,x^{n-1}) &\mapsto \\ \mapsto \Bigl(x^1,\dots,x^{n-1},x^n\bigl(u^1(x^1,\dots,x^{n-1}),\dots,u^{n-1}(x^1,\dots,x^{n-1})\bigr)\Bigr) &= \\ = \bigl(x^1,\dots,x^{n-1},f(x^1,\dots,x^{n-1})\bigr)&, \end{aligned}$$

т.е. является графиком функции $f$, где

$$f(x^1,\dots,x^{n-1}) = x^n\bigl(u^1(x^1,\dots,x^{n-1}),\dots,u^{n-1}(x^1,\dots,x^{n-1})\bigr).$$

Доказательство закончено.

Пусть $F\colon U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, заданная на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $c$ — некоторая вещественная постоянная. Обозначим через $M_c$ множество решений уравнения $F(x^1,\dots,x^n) = c$, т.е. $M_c = \bigl\{(x^1,\dots,x^n) \mid F(x^1,\dots,x^n) = c\bigr\}$. Множество $M_c$ называется *неявной поверхностью*. Неявная поверхность $M_c$ называется *регулярной*, если в каждой точке $P$ поверхности $M_c$ дифференциал $dF(P) = \bigl(F_{x^1}(P),\dots,F_{x^n}(P)\bigr)$ функции $F$ отличен от нуля.

Ясно, что поверхность–график произвольной гладкой функции $f$ является регулярной неявной поверхностью, так как может быть задана как множество решений уравнения $x^n - f(x^1,\dots,x^{n-1}) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, стандартная двумерная сфера, заданная уравнением $x^2+y^2+z^2 = R^2$, не является графиком функции. Тем не менее, *локально* каждая *регулярная* неявная поверхность является поверхностью–графиком.

**Утверждение 3.2** *Для каждой регулярной неявной поверхности $M_c$, заданной уравнением $F = c$, и каждой точки $P \in M_c$ существует окрестность $U$ точки $P$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, такая что множество $U \cap M_c$ является графиком некоторой гладкой функции.*

**Доказательство.** По условию, $dF(P) = \big(F_{x^1}(P), \dots, F_{x^n}(P)\big) \neq 0$. Для определенности предположим, что $F_{x^n}(P) \neq 0$. Обозначим через $P'$ проекцию точки $P$ на координатную гиперплоскость $x^n = 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности $U'$ точки $P'$ определена гладкая функция $f\colon U' \to \mathbb{R}$, такая что

$$F\big(x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1})\big) = c \qquad \text{для всех } (x^1, \dots, x^{n-1}) \in U'.$$

Другими словами, точки $\big(x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1})\big)$, где $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in U'$ лежат на $M_c$. Таким образом, положив $U = U' \times \mathbb{R}^1$, заключаем что множество $U \cap M_c$ является графиком гладкой функции $f$. Утверждение доказано.

## 3.3 Определение регулярной поверхности

Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *регулярной (гипер-)поверхностью*, если оно представимо в виде или поверхности–графика, или регулярной неявной поверхности, или образа регулярной $(n-1)$-мерной поверхности. Хотя "в целом" все три перечисленных способа задания поверхностей отличаются друг от друга, из утверждений 3.1 и 3.2 вытекает, что с "локальной" точки эти три способа эквивалентны.

**Упражнение 3.2.** Обобщить утверждение 3.1 на случай регулярных $k$-мерных поверхностей в $\mathbb{R}^n$. Обобщить утверждение 3.2 на случай подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, заданного системой уравнений. См. Дополнительные материалы к данной лекции.

**Следствие 3.1** *В некоторой окрестности каждой точки области $\Omega$ параметризующее отображение $r\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ регулярной поверхности взаимно-однозначно с образом.*

**Доказательство.** Это очевидно, так как в силу утверждения 3.1 любая регулярная поверхность в окрестности каждой своей точки может быть задана в виде графика некоторой гладкой функции. Соответствующая параметризация, очевидно, взаимно-однозначна.

Мы изучим сначала локальные свойства поверхностей (их глобальными характеристиками занимается теория многообразий, см. ниже). При этом мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые поверхности могут быть заданы любым из оговоренных в определении способов. В силу сказанного выше, с локальной точки зрения это наше предположение не ограничивает общности. В частности, в сделанных предположениях, каждую регулярную поверхность $M \subset \mathbb{R}^n$ можно задать как образ простой регулярной параметрической поверхности $r_M$, координаты на которой мы будем называть *координатами на регулярной поверхности* $M$. Если координаты фиксированы, то мы также часто будем отождествлять точки параметрической области $\Omega$ и их образы в пространстве, т.е. соответствующие точки регулярной поверхности. Замену параметризации параметрической поверхности $r_M$ будем называть *заменой координат на поверхности* $M$.

## 3.4 Отображения регулярной поверхности

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность, $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ — (векторнозначная) функция на поверхности. Пусть $r_M\colon \Omega_M \to \mathbb{R}^n$ — параметризующее отображение поверхности $M$. Положим $\tilde f = f \circ r_M$. Обратно, так как отображение $r_M$ взаимно однозначно с образом, то для каждой функции $\tilde f\colon \Omega_M \to \mathbb{R}^k$ однозначно определена функция $f\colon M \to \mathbb{R}^k$, такая что $\tilde f = f \circ r_M$, а именно, $f = \tilde f \circ r_M^{-1}$, где $r_M^{-1}\colon M \to \Omega_M$.

Более общо, пусть $N \subset \mathbb{R}^n$ — другая регулярная поверхность, $r_N : \Omega_N \to \mathbb{R}^n$ — ее параметризующее отображение, и $F\colon M \to N$ отображение поверхности $M$ в поверхность $N$. Тогда, в силу взаимной однозначности параметризующих отображений, определено отображение $\tilde F\colon \Omega_M \to \Omega_N$ следующего вида: $\tilde F = r_N^{-1} \circ F \circ r_M$. Обратно, для каждого отображения $\tilde F\colon \Omega_M \to \Omega_N$ однозначно определено отображение поверхностей $F\colon M \to N$, такое что $\tilde F = r_N^{-1} \circ F \circ r_M$.

Функция $\tilde f$ и отображение $\tilde F$ называются *координатными представлениями* функции $f$ и отображения $F$ соответственно. Поскольку соответствие между отображениями и их координатными представлениями взаимно однозначно, мы, как правило, не будем их различать. Отметим при этом, что координатное представление представляет собой обычное отображение из области в $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^k$ или в область. Именно такие отображения рассматриваются в математическом анализе, и поэтому можно говорить об их непрерывности, дифференцируемости и т.п. без каких либо оговорок. Гладкое отображение $F$ одной регулярной поверхности в другую называется *регулярным*, если регулярным является его координатное представление, т.е. если ранг матрицы Якоби отображения $\tilde F$ максимален в каждой точке.

## 3.5 Кривые, координатные линии, касательное пространство и канонический репер на регулярной поверхности

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность. Говорят, что *кривая* $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ *лежит на* $M$, если $\gamma \subset M$. В силу взаимной однозначности параметризующего поверхность $M$ отображения $r_M\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, каждая такая кривая

$\gamma$ задает кривую $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ в области $\Omega$, такую что $r_M(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Обратно, каждая кривая $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ задает кривую $\gamma = r_M(\tilde{\gamma})$ в $\mathbb{R}^n$, лежащую на поверхности $M$. В силу регулярности поверхности $M$, кривые $\gamma$ и $\tilde{\gamma}$ являются гладкими (регулярными) одновременно. В дальнейшем мы, как правило, не будем различать кривые $\tilde{\gamma}$ и $\gamma$ и будем называть каждую из них *кривой на поверхности* $M$.

Если $(u^1, \dots, u^k)$ — координаты в области $\Omega$, то для того чтобы задать кривую на поверхности достаточно задать набор функций $u^i(t)$, $t \in I$, $i = 1, \dots, k$, которые называются *координатными функциями* кривой. Ясно, что эти координатные функции определяют соответствующее отображение $r_M\big(u^1(t), \dots, u^k(t)\big)$ интервала $I$ в $\mathbb{R}^n$, которое в координатах $(x^1, \dots, x^n)$ выглядит так: $x^i(t) = x^i\big(u^1(t), \dots, u^k(t)\big)$, где $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — координатные функции поверхности $r$.

**Пример.** Через каждую точку поверхности $M$ с координатами $(u^1, \dots, u^k)$ проходит $k$ так называемых *координатных линий*, вдоль каждой из которых меняется ровно одна координата $u^i$, а остальные — постоянны. Более формально, если $P \in M$ — точка на поверхности с координатами $(u_0^1, \dots, u_0^k)$, то *$i$-ой координатной линией*, проходящей через точку $P$, называется кривая, заданная так:

$$u^j(t) = u_0^j, \quad j \neq i; \qquad u^i(t) = t, \quad t \in (u_0^i - \varepsilon, u_0^i + \varepsilon).$$

Пусть $P \in M$ — произвольная точка, и $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, лежащая на $M$. Пусть $\gamma(t_0) = P$, т.е. $\gamma$ проходит через $P$. Вектор скорости $\dot{\gamma}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ кривой $\gamma$ в точке $P$ назовем *касательным вектором к $M$ в точке $P$*. Совокупность касательных векторов в точке $P$, построенных по всем гладким кривым на поверхности $M$, проходящим через эту точку, называется *касательным пространством* к поверхности $M$ в точке $P$ и обозначается через $T_PM$.

Изучим структуру касательного пространства $T_PM$. Пусть, как и выше, $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции поверхности $M$. Возьмем произвольную кривую $\gamma(t)$ на поверхности, проходящую через точку $P$, и пусть $u^j = u^j(t)$ — координатные функции этой кривой, а $P = \gamma(t_0)$. Тогда $i$-ая координата соответствующего касательного вектора имеет вид:

$$\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^{k} \left.\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right|_P \left.\frac{du^j}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Таким образом, касательный вектор к кривой $\gamma$ — произвольный элемент касательного пространства $T_PM$, — это линейная комбинация следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^k}{\partial u^1} \end{pmatrix} \frac{du^1}{dt} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \frac{du^n}{dt},$$

где векторы-столбцы $\left(\partial x^1/\partial u^i, \dots, \partial x^n/\partial u^i\right)^T$, $i = 1, \dots, k$, не зависят от выбора кривой $\gamma$ и однозначно определяются координатными функциями $x^i(u^1, \dots, u^k)$ поверхности $M$ и точкой $P$. С другой стороны, в силу произвольности гладкой кривой $\gamma$, числа $du^i/dt|_{t=t_0}$ произвольны. Поэтому касательное пространство $T_PM$ — это линейное пространство, натянутое на векторы $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$, где через $\partial_{u^i}$ обозначен вектор столбец

$$\left(\partial x^1/\partial u^i, \dots, \partial x^n/\partial u^i\right)^T.$$

Отметим, что матрица, составленная из векторов столбцов $\partial_{u^i}$, — это в точности матрица Якоби отображения $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, задающего поверхность $M$. Ранг этой матрицы, в силу регулярности поверхности $M$, равен $k$, поэтому векторы $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $T_PM$. Этот базис называется ***каноническим базисом в точке*** $P$, соответствующим координатам $(u^1, \dots, u^k)$ на поверхности. Коэффициенты разложения касательного вектора к поверхности по элементам канонического базиса $\left(\partial_{u^i}\right)$ называются ***компонентами*** или ***координатами*** этого вектора в этом каноническом базисе или его ***координатами*** (***компонентами***) ***относительно системы координат*** $(u^1, \dots, u^k)$.

Что же это за замечательные векторы, образующие канонический базис? Чтобы понять это, вычислим вектор скорости $i$-ой координатной линии. Из сказанного выше вытекает, что этот вектор равен линейной комбинации векторов $\partial_{u^p}$ с коэффициентами $du^p/dt$. Но, по определению $i$-ой координатной линии, $du^p/dt = \delta_i^p$, поэтому касательный вектор к $i$-ой координатной линии совпадает с $\partial_{u^i}$. Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 3.1** *Пусть $P \in M$ — произвольная точка регулярной $k$-мерной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда касательное пространство $T_PM$ является линейным пространством размерности $k$, базис в котором образуют, например, векторы скорости координатных линий, проходящих через точку $P$.*

Пусть теперь $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ — замена координат на регулярной поверхности $M$. Тогда в каждой точке $P \in M$ определены сразу два канонических базиса: $\left(\partial_{u^i}\right)$ и $\left(\partial_{v^i}\right)$. Установим, как они связаны между собой. Из определения векторов канонических базисов и теоремы о дифференцировании сложной функции получаем:

$$\partial_{v^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial v^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \\ \vdots \\ \sum_j \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \end{pmatrix} \frac{\partial u^j}{\partial v^i},$$

т.е., окончательно,

$$\partial_{v^i} = \sum_j \partial_{u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i}.$$

Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 3.2** *При замене координат на регулярной поверхности, векторы канонического базиса в каждой точке поверхности преобразуются с помощью матрицы Якоби этой замены координат, которая играет роль матрицы перехода от одного базиса к другому.*

## 3.6 Индуцированная метрика или первая фундаменталь ная форма регулярной поверхности

Пусть, как и выше, $P$ — произвольная точка регулярной $k$-мерной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$ порождает скалярное произведение касательных векторов из $T_P M$. А именно, пусть $\xi$ и $\eta$ — касательные векторы к поверхности $M$ в точке $P$. Пусть $(u^1, \dots, u^k)$ — координаты на поверхности $M$, а $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ и $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$ — компоненты касательных векторов $\xi$ и $\eta$ в относительно этих координат. Тогда $\xi = \sum_i \xi^i \, \partial_{u^i}$ и $\eta = \sum_j \eta^j \, \partial_{u^j}$, где $\{\partial_{u_i}\}$ — канонический базис в точке $P$. Поэтому скалярное произведение векторов $\xi$ и $\eta$ (как векторов в $\mathbb{R}^n$) может быть вычислено так:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^k \xi^i \, \partial_{u^i}, \sum_{j=1}^k \eta^j \, \partial_{u^j} \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle \xi^i \eta^j.$$

Числа $\langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle$, образующие матрицу Грамма канонического базиса $\{\partial_{u^i}\}$, обозначаются через $g_{ij}(P)$ и называются *компонентами индуцированной метрики*, или *компонентами первой фундаментальной формы поверхности* $M$ или *компонентами первой квадратичной формы поверхности* $M$ *в координатах* $(u^1, \dots, u^k)$. Если поверхность задана отображением $r$ с координатными функциями $x^i(u^1, \dots, u^k)$, то

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle = \sum_{p=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial u^i} \frac{\partial x^p}{\partial u^j}.$$

Отметим, что компоненты метрики — гладкие функции координат $u^i$, т.е. гладко зависят от точки $P$.

Таким образом, если фиксированы координаты $(u^1, \dots, u^k)$ на поверхности $M$, то в каждой ее точке $P = (u^1, \dots, u^k)$ определена квадратная $(k \times k)$ матрица $G(u) = \big(g_{ij}(u)\big)$ — *матрица индуцированной метрики* или *матрица первой фундаментальной формы* поверхности. Матрица $G$ по определению — это матрица Грамма, поэтому она симметрична (что очевидно), невырождена и положительно определена (что известно из линейной алгебры). Далее, если задана замена параметризации $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ поверхности $M$, то в каждой точке определено две матрицы: $G(u) = \big(g_{ij}(u) =$

$\langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle\big)$ и $\tilde{G}(v) = \big(\tilde{g}_{pq}(v) = \langle \partial_{v^p}, \partial_{v^q} \rangle\big)$. Так как $G(u)$ и $\tilde{G}(v)$ — матрицы Грамма двух разных канонических базисов, связанных в силу предложения 3.2 с помощью матрицы Якоби замены параметризации, заключаем, что $G(u) = J^T \tilde{G}(v(u)) J$, где $J = \big(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\big)$ — матрица Якоби замены параметризации. Этот результат можно легко получить и непосредственно, воспользовавшись теоремой о дифференцировании сложной функции. В покомпонентной записи он выглядит так:

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \sum_{pq} \tilde{g}_{pq}\big(v^1(u^1, \dots, u^k), \dots, v^k(u^1, \dots, u^k)\big) \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j},$$

где частные производные вычисляются в точке $(u^1, \dots, u^k)$.

Итак, мы показали, что при замене координат на поверхности матрица ее первой фундаментальной формы меняется так, как меняется матрица билинейной формы на линейном пространстве при замене базиса. Подведем итог, сформулировав следующее предложение.

**Предложение 3.3** *Пусть $M$ — произвольная регулярная поверхность в $\mathbb{R}^n$, и $P$ — любая ее точка. Тогда на касательном пространстве $T_PM$, рассматриваемом как линейное пространство, корректно определена невырожденная положительно определенная симметричная билинейная форм $\mathfrak{G}$, матрица $G$ которой в каноническом базисе $\{\partial_{u^i}\}$ произвольной системы координат $(u^1, \dots, u^k)$ — это матрица Грамма этого канонического базиса. При замене параметризации $v_i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ матрица первой фундаментальной формы меняется по закону изменения матриц билинейных форм: $G(u) = J^T \tilde{G}\big(v(u)\big) J$, где $\tilde{G}$ — матрица формы $\mathfrak{G}$ в координатах $(v^1, \dots, v^k)$, а $J = \big(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\big)$ — матрица Якоби замены координат.*

**Определение.** Билинейная форма $\mathfrak{G}$ из предложения 3.3 и соответствующая квадратичная форма называются *первой фундаментальной формой поверхности* или *индуцированной метрикой.*

**Замечание.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — касательные векторы к регулярной поверхности $M$ в точке $P$. Тогда их скалярное произведение может быть вычислено с помощью первой фундаментальной формы так: $\langle \xi, \eta \rangle = \mathfrak{G}(\xi, \eta)$. С точки зрения линейной алгебры это — скалярное произведение, заданное в линейном пространстве $T_PM$ билинейной формой $\mathfrak{G}$. Отметим, что по определению это скалярное произведение совпадает со стандартным скалярным произведением векторов $\xi$ и $\eta$, как векторов в $\mathbb{R}^n$.

Если фиксированы координаты $(u^1, \dots, u^k)$ на поверхности, $(\xi^1, \dots, \xi^k)$ и $(\eta^1, \dots, \eta^k)$ — компоненты векторов $\xi$ и $\eta$ соответственно, а $(g_{ij})$ — матрица первой квадратичной формы поверхности $M$ в точке $P$ в координатах $(u^1, \dots, u^k)$, то скалярное произведение вычисляется так:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathfrak{G}(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}(P) \xi^i \eta^j.$$

Отметим, что полученное число не зависит от выбора координат на поверхности. Отметим также, что если задана индуцированная метрика, то для вычисления скалярного произведения касательных векторов, их длин и углов между ними нет необходимости вычислять их координаты в объемлющем пространстве. Достаточно знать их компоненты относительно системы координат на поверхности. В частности, нам не важен конкретный вид отображения $r$, задающего поверхность. Иногда, чтобы подчеркнуть этот факт, говорят, что *скалярное произведение вычисляется во внутренних терминах*, а индуцированную метрику называют *внутренней метрикой поверхности* или *внутренним скалярным произведением.* Здесь слово "внутренний" подчеркивает независимость вычисления скалярных произведений от объемлющего пространства.

С помощью метрики легко записываются длины касательных векторов и углы между ними. В частности, через компоненты метрики удобно записать длину кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, лежащей на поверхности $M$, а также величину угла между пересекающимися кривыми. Если $\big(u^1(t),\dots,u^k(t)\big)$ — координатные функции $\gamma$ в координатах $u^i$ поверхности $M$, то

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\dot u^i(t)\dot u^j(t)}\,dt.$$

Далее, пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — две кривые на поверхности, пересекающиеся в точке $P$. Тогда *углом между кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в точке $P$* называется меньший из двух углов между касательными векторами к этим кривым в точке $P$.

Напомним, что угол между векторами определяется через скалярное произведение. А именно, если $a$ и $b$ — произвольные векторы, то косинус угла между ними по определению равен

$$\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\,\|b\|}.$$

Ясно, что если $P$ — точка регулярной поверхности $M$, кривые $\gamma_p$ заданы координатными функциями, т.е. в виде $u_p^i = u_p^i(t)$, $p = 1,2$, и касательные векторы $\dot\gamma_p$ записаны в виде столбцов координат относительно канонического базиса $\big(\partial_{u^i}\big)$, то косинус угла $\varphi$ между кривыми $\gamma_p$ может быть вычислен так:

$$\cos\varphi = \frac{\sum g_{\alpha\beta}(P)\dot u_1^\alpha \dot u_2^\beta}{\sqrt{\sum g_{\alpha\beta}(P)\dot u_1^\alpha \dot u_1^\beta}\sqrt{\sum g_{\alpha\beta}(P)\dot u_2^\alpha \dot u_2^\beta}}$$

**Замечание.** В дифференциальной геометрии первую квадратичную форму часто называют "квадратом элемента длины" поверхности. В этом случае используют так называемую "запись в дифференциалах". При этом саму форму $\mathfrak{G}$ обозначают через $ds^2$ — "квадрат элемента длины" — и, в координатах $(u^1, \dots, u^k)$, записывают форму $\mathfrak{G}$ в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha\,\beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Эта запись приобретает смысл, если договориться обозначать через $\{du^i\}$ линейные функционалы на касательном пространстве $T_P M$, образующие в двойственном пространстве $T_P^* M$ двойственный базис по отношению к каноническому базису $\{\partial_{u^i}\}$. Напомним, что двойственный базис в $T_P^* M$ однозначно определяется из соотношений $du^i(\partial_{u^j}) = \delta^i_j$ (здесь, как обычно, через $\delta^i_j$ обозначены символы Кронекера). При этом, очевидно, если $a = (a^1, \dots, a^k)$ — касательный вектор, заданный своими координатами в каноническом базисе $\{\partial_{u^i}\}$, то значение функционала $du^j$ на векторе $a$ равно $a^j$. Теперь выражение для $ds^2$ можно воспринимать как запись билинейной формы в виде комбинации произведений линейных форм (т.е. как элемент пространства $T_P^* M \otimes T_P^* M$). Значение формы $ds^2$ на паре векторов $a$ и $b$ вычисляется так:

$$ds^2(a, b) = \sum_{\alpha\,\beta} g_{\alpha\beta}\, du^\alpha(a)\, du^\beta(b) = \sum_{\alpha\,\beta} g_{\alpha\beta}\, a^\alpha\, b^\beta,$$

где $a = (a^i)$, и $b = (b^i)$, что полностью согласуется с данными выше определениями.

Отметим, что запись в дифференциалах удобно использовать для непосредственных вычислений индуцированной метрики: если записать квадрат элемента длины в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартными координатами $(x^1, \dots, x^n)$ в виде

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

подставить в это выражение явный вид задающих поверхность координатных функций $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, честно вычислить дифференциалы $dx^i = \sum_j \partial x^i/\partial u^j\, du^j$ и записать полученную формулу как полином от $du^j$, то получится выражение для первой фундаментальной формы поверхности (проверьте это).

В Дополнительных материалах к лекции 3 приведены примеры вычисления первой фундаментальной формы и угла между кривыми.

## 3.7 Изометрии поверхностей

Пусть заданы две $k$-мерные регулярные поверхности: $M_i$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что поверхности $M_1$ и $M_2$ ***изометричны***, если существует гладкое, взаимно-однозначное, регулярное отображение $\psi\colon M_1 \to M_2$, сохраняющее длины всех переходящих друг в друга кривых. Последнее означает,

### 2.2 26. Вторая квадратичная форма поверхности Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. (Иванов Тужилин)



# 4 Поверхности. Вторая фундаментальная фор

В данном разделе мы ограничимся рассмотрением гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$. Общий случай будет кратко разобран в дополнении к этому параграфу.

## 4.1 Определение второй фундаментальной формы регулярной поверхности

Пусть $M$ — регулярная гиперповерхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Как обычно, обозначим через $(x^1,\dots,x^n)$ стандартные координаты $\mathbb{R}^n$, а через $(u^1,\dots,u^{n-1})$ — координаты на поверхности. Как мы уже знаем, в каждой точке $P$ на $M$ определен канонический базис $\{\partial_{u^i}\}$ каксательного пространства $T_PM$. Поэтому в каждой точке $P$ поверхности однозначно определен единичный вектор $N(P)$, ортогональный всем векторам $\partial_{u^i}$, и дополняющий систему векторов $\{\partial_{u^i}\}$ до положительного базиса в $\mathbb{R}^n$. Другими словами, вектор $N(P)$ однозначно определяется из соотношений $\langle\partial_{u^i}, N(P)\rangle = 0$, $\langle N(P), N(P)\rangle = 1$, и, наконец,

$$\det\bigl(\partial_{u^1},\dots,\partial_{u^{n-1}}, N(P)\bigr) > 0.$$

Векторы $\partial_{u^i}$ гладко зависят от точки поверхности, поэтому и вектор $N(P)$ тоже гладко зависит от точки. Векторы $N(P)$ образуют (***ориентированное***) ***поле нормалей*** на поверхности $M$, соответствующее координатам $(u_i)$. Имеет место следующее несложное утверждение. утверждение.

**Утверждение 4.1** *Пусть на поверхности $M$ заданы две системы координат: $(u^1,\dots,u^{n-1})$ и $(v^1,\dots,v^{n-1})$, причем $v^i = v^i(u^1,\dots,u^{n-1})$. Тогда векторы ориентированных нормалей в точке $P$, соответствующие координатам $(u^i)$ и $(v^i)$, отличаются на знак определителя матрицы Якоби $(\partial v^i/\partial u^j)$ замены координат.*

**Доказательство.** Это очевидно, так как направление вектора $N(P)$ в точке $P$ однозначно определяется касательным пространством $T_PM$ и не зависит от выбора базиса в нем. Вторая часть утверждения вытекает из предложения 3.2. Доказательство закончено.

**Следствие 4.1** *На регулярной поверхности $M$ существует ровно два ориентированных поля нормалей, которые в каждой точке поверхности противонаправлены.*

**Замечание.** Пусть $(u^1,\dots,u^{n-1})$ — координаты на поверхности $M$. Ясно, что все замены $v^i = v^i(u^1,\dots,u^{n-1})$ координат на $M$ можно разделить на два непересекающихся класса в зависимости от знака определителя матрицы Якоби. Замена координат внутри каждого из классов имеет, очевидно, положительный якобиан. Из сказанного выше вытекает, что выбор одного из двух полей нормалей равносилен выбору одного из классов замен координат. Такой выбор часто называют ***выбором ориентации поверхности*** $M$. Отметим, что в дальнейшем аналогично будет введено понятие ориентации гладкого многообразия.

Пусть $M$ — регулярная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, и $P \in M$ — некоторая ее точка. Обозначим через $N$ одно из двух полей нормалей к поверхности $M$. Пусть $\gamma(t)$ — произвольная кривая, лежащая на $M$, такая что $\gamma(t_0) = P$, и $\xi$ — вектор скорости $\dot\gamma(t_0)$ кривой $\gamma$ в точке $P$. Обозначим через $\mathfrak{q}(\xi)$ величину $\langle \ddot\gamma, N\rangle$.

Пусть $(u^1, \dots, u^{n-1})$ координаты на поверхности $M$, и $u^i(t)$ — координатные функции кривой $\gamma$. Тогда $\xi = \bigl(\dot u^1, \dots, \dot u^{n-1}\bigr)$, и

$$\ddot\gamma = \Bigl(\sum_i r_{u^i}\, \dot u^i\Bigr)^{\cdot} = \sum_{ij} r_{u^iu^j}\, \dot u^i \dot u^j + \sum_i r_{u^i}\, \ddot u^i,$$

поэтому

$$\mathfrak{q}(\xi) = \langle \ddot\gamma, N\rangle = \sum_{ij} \langle r_{u^iu^j}, N\rangle\, \dot u^i \dot u^j,$$

поскольку $\langle r_{u^i}, N\rangle = 0$.

Таким образом, $\mathfrak{q}(\xi)$ зависит лишь от компонент вектора $\xi$ и величин $\bigl\langle r_{u^iu^j}(P), N(P)\bigr\rangle$, причем эта зависимость имеет вид значения некоторой квадратичной формы, имеющей в координатах $(u^i)$ матрицу $Q(u) = \Bigl(\bigl\langle r_{u^iu^j}(P), N(P)\bigr\rangle\Bigr)$, на векторе $\xi$.

С другой стороны, $\mathfrak{q}(\xi) = \langle \ddot\gamma, N\rangle$ не зависит от выбора координат (напомним, что мы зафиксировали поле нормалей $N$, т.е. мы рассматриваем только замены координат с положительным якобианом). Поэтому, если $(v^1, \dots, v^{n-1})$ — другие регулярные координаты на поверхности, то

$$\mathfrak{q}(\xi) = \langle \ddot\gamma, N\rangle = \sum_{ij} \langle r_{v^iv^j}, N\rangle\, \dot v^i \dot v^j,$$

где $\dot v^i$ — компоненты того же касательного вектора $\xi$ в координатах $v^i$. Поэтому числа $\Bigl(\bigl\langle r_{v^iv^j}(P), N(P)\bigr\rangle\Bigr)$ образуют матрицу $\tilde Q(v)$ той же квадратичной формы в координатах $(v^i)$.

Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 4.1** *Соотношение $\mathfrak{q}(\xi) = \langle \ddot\gamma, N\rangle$, $\xi \in T_PM$, корректно определяет в произвольной точке $P$ гиперповерхности $M$ некоторую квадратичную форму $\mathfrak{q}$ на касательном пространстве $T_PM$. Если $(u^1, \dots, u^{n-1})$ — координаты на $M$, то матрица квадратичной формы $\mathfrak{q}$ в базисе $\bigl(\partial_{u^i}\bigr)$ имеет вид $q_{ij} = \langle r_{u^iu^j}, N\rangle$.*

Отметим, что закон преобразования чисел $\langle r_{u^iu^j}, N\rangle$ при замене координат легко проверить и прямым подсчетом, см. Дополнительный материал.

**Определение.** Квадратичная форма $\mathfrak{q}$ на касательном пространстве $T_PM$ называется ***второй фундаментальной формой*** или ***второй квадратичной формой*** гиперповерхности $M$ в точке $P$ (по отношению к нормали $N$).

Отметим, что если заменить $N$ на $-N$, то вторая фундаментальная форма изменит знак.

**Замечание.** В отличие от первой фундаментальной формы поверхности, вторая фундаментальная форма, вообще говоря, не обязана быть ни невырожденной, ни положительно определенной.

**Замечание.** Вторую фундаментальную форму также часто записывают в дифференциальном виде так:

$$dq^2 = \sum_{ij} q_{ij}\, du^i\, du^j.$$

**Пример.** Пусть двумерная гиперповерхность задана в виде графика $z = f(x, y)$. Тогда соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$\begin{gathered} r = \big(x, y, f(x,y)\big), \quad r_x = (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y), \\ r_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad r_{xy} = (0, 0, f_{xy}), r_{yy} = (0, 0, f_{yy}), \\ N = \frac{[r_x, r_y]}{\big\|[r_x, r_y]\big\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \end{gathered}$$

и, значит, матрица второй фундаментальной формы в координатах $(x, y)$ выглядит так:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 4.1.** Вычислить вторую фундаментальную форму гиперповерхности, заданной в виде графика гладкой функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$.

**Упражнение 4.2.** Вычислить вторую фундаментальную форму гиперповерхности, заданной неявно в виде $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$, $dF \neq 0$, в окрестности любой ее точки.

Итак, в каждой точке поверхности $M$ определены две квадратичные формы: первая фундаментальная форма $\mathfrak{G}$, которая, напомним, невырождена и положительно определена, и вторая фундаментальная форма $\mathfrak{q}$. Чтобы выяснить геометрический смысл второй фундаментальной формы, нам потребуется рассмотреть на поверхности кривые специального вида.

## 4.2 Геометрический смысл второй формы — кривизны плоских сечений

Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная проходящая через $P \in M$ двумерная аффинная плоскость, не лежащая в $T_P M$. Несложно показать, что $\Pi$ пересекает поверхность $M$ около точки $P$ по некоторой регулярной кривой $\gamma$. Каждая такая кривая называется *плоским сечением*, проходящим через $P$. Если плоскость $\Pi$ проходит через нормаль $N$ к поверхности $M$ в точке $P$, то плоское сечение $\gamma$ называется *нормальным*. Если $t$ — произвольный параметр на $\gamma$, такой что $\gamma(t_0) = P$, то будем говорить, что сечение $\gamma$ проведено *в направлении вектора* $\dot\gamma(t_0)$.

**Теорема 4.1 (Об отношении форм)** *Пусть $\xi \in T_P M$ — произвольный ненулевой вектор, $\gamma$ — плоское сечение, проведенное через $P$ в направлении $\xi$, и $k$ — кривизна сечения $\gamma$ в точке $P$. Тогда или $k$ и $\mathfrak{q}(\xi)$ одновременно равны нулю, или*

$$k\cos\theta = \frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)},$$

*где $\theta$ — угол между главной нормалью $m$ к сечению $\gamma$ и нормалью $N$ к поверхности $M$ в точке $P$ (напомним, что вторая фундаментальная форма вычисляется по отношению к $N$).*

**Доказательство.** Рассмотрим первую возможность. Условие $k = 0$ равносильно линейной зависимости векторов $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$, что, в свою очередь, возможно если и только если $\ddot\gamma$ лежит в касательной плоскости $T_P M$ (так как задающая $\gamma$ плоскость $\Pi$ не содержится в $T_P M$). Значит, условие $k = 0$ равносильно перпендикулярности векторов $\ddot\gamma$ и $N$, что, в свою очередь, равносильно условию $\mathfrak{q}(\xi) = 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай $k \neq 0$. Каждая квадратичная форма — однородная функция степени однородности 2, поэтому $\mathfrak{q}(\lambda\xi) = \lambda^2\,\mathfrak{q}(\xi)$ и $\mathfrak{G}(\lambda\xi) = \lambda^2\,\mathfrak{G}(\xi)$ для любых вектора $\xi \in T_P M$ и числа $\lambda$. Поэтому

$$\frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = \frac{\mathfrak{q}\big(\xi/\|\xi\|\big)}{\mathfrak{G}\big(\xi/\|\xi\|\big)},$$

и, значит, теорему достаточно доказать лишь для единичных векторов $\xi$.

Выберем на кривой $\gamma$ натуральный параметр $s$, такой что $\gamma(s_0) = P$, $\dot\gamma(s_0) = \xi$, тогда $\ddot\gamma(s_0) = k\,m$, $\mathfrak{G}(\xi) = 1$, и

$$\frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = \big\langle\ddot\gamma(s_0), N\big\rangle = \langle k\,m, N\rangle = k\,\langle m, N\rangle = k\cos\theta,$$

что и требовалось.

Если в теореме 4.1 в качестве $\gamma$ выбрать плоское нормальное сечение, то векторы $m$ и $N$ окажутся колинеарны, поэтому $\cos\theta = \pm 1$, где “+1” получается тогда и только тогда, когда $N$ — главная нормаль к $\gamma$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Следствие 4.2** *Значение $\mathfrak{q}(\xi)$ второй фундаментальной формы поверхности $M$ на единичном векторе $\xi \in T_P M$ равно плюс или минус кривизне $k$ плоского нормального сечения $\gamma$, проведенного через $P$ в направлении $\xi$. При этом знак "плюс" выбирается тогда и только тогда, когда $N$ является главной нормалью сечения $\gamma$. В частности, $k = \big|\mathfrak{q}(\xi)\big|$.*

Обозначим через $\gamma_n$ плоское нормальное сечение, проведенное через $P$ в направлении $\xi$, и пусть $k_n$ — кривизна сечения $\gamma_n$ в точке $P$. Приводимое ниже следствие из теоремы 4.1 называется *теоремой Менье.*

**Следствие 4.3 (Теорема Менье)** *Пусть $\xi \in T_P M$ — ненулевой вектор, а $\gamma$ и $\gamma_n$ — некоторое плоское сечение и плоское нормальное сечение, проведенные через $P$ в одном и том же направлении $\xi$. Тогда или одновременно $k = 0$ и $k_n = 0$, или $k_n = k\cos\theta$, где $\theta$ — угол между главными нормалями $m$ и $n$ к сечениям $\gamma$ и $\gamma_n$ соответственно.*

**Доказательство.** Случай $k = 0$ разбирается так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.

Пусть теперь $k \neq 0$. Выберем в качестве нормали $N$ к поверхности в точке $P$ главную нормаль $n$ к плоскому нормальному сечению $\gamma_n$. По теореме 4.1,

$$k\,\cos\theta = \frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = k_n\,\cos 0 = k_n,$$

что и требовалось.

**Замечание.** В дифференциальной геометрии поверхностей сложилась следующая терминология. Объекты и величины, определяемые первой фундаментальной формой, принято называть элементами *внутренней геометрии.* Напомним, что саму первую форму называют иногда *внутренним скалярным произведением.* К внутренней геометрии, например, принадлежат такие понятия как длина кривых, углы между кривыми, площади областей. Однако, как мы видели, первая фундаментальная форма определяет не все. Например, в терминах первой фундаментальной формы нельзя вычислить кривизну кривой на поверхности. Объекты и величины, для определения которых недостаточно первой фундаментальной формы, называют элементами *внешней геометрии поверхности* или *геометрии погружения.*

## 4.3 Главные кривизны и главные направления

Пусть, как и выше, $P$ — произвольная точка регулярной гиперповерхности $M$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда, как мы уже знаем, в точке $P$ определены две квадратичные

## 2.3 27. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.(Иванов Тужилин)



получается тогда и только тогда, когда $N$ — главная нормаль к $\gamma$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Следствие 4.2** *Значение $\mathfrak{q}(\xi)$ второй фундаментальной формы поверхности $M$ на единичном векторе $\xi \in T_PM$ равно плюс или минус кривизне $k$ плоского нормального сечения $\gamma$, проведенного через $P$ в направлении $\xi$. При этом знак "плюс" выбирается тогда и только тогда, когда $N$ является главной нормалью сечения $\gamma$. В частности, $k = \bigl|\mathfrak{q}(\xi)\bigr|$.*

Обозначим через $\gamma_n$ плоское нормальное сечение, проведенное через $P$ в направлении $\xi$, и пусть $k_n$ — кривизна сечения $\gamma_n$ в точке $P$. Приводимое ниже следствие из теоремы 4.1 называется *теоремой Менье.*

**Следствие 4.3 (Теорема Менье)** *Пусть $\xi \in T_PM$ — ненулевой вектор, а $\gamma$ и $\gamma_n$ — некоторое плоское сечение и плоское нормальное сечение, проведенные через $P$ в одном и том же направлении $\xi$. Тогда или одновременно $k = 0$ и $k_n = 0$, или $k_n = k\cos\theta$, где $\theta$ — угол между главными нормалями $m$ и $n$ к сечениям $\gamma$ и $\gamma_n$ соответственно.*

**Доказательство.** Случай $k = 0$ разбирается так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.

Пусть теперь $k \neq 0$. Выберем в качестве нормали $N$ к поверхности в точке $P$ главную нормаль $n$ к плоскому нормальному сечению $\gamma_n$. По теореме 4.1,

$$k\,\cos\theta = \frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = k_n\,\cos 0 = k_n,$$

что и требовалось.

**Замечание.** В дифференциальной геометрии поверхностей сложилась следующая терминология. Объекты и величины, определяемые первой фундаментальной формой, принято называть элементами *внутренней геометрии.* Напомним, что саму первую форму называют иногда *внутренним скалярным произведением.* К внутренней геометрии, например, принадлежат такие понятия как длина кривых, углы между кривыми, площади областей. Однако, как мы видели, первая фундаментальная форма определяет не все. Например, в терминах первой фундаментальной формы нельзя вычислить кривизну кривой на поверхности. Объекты и величины, для определения которых недостаточно первой фундаментальной формы, называют элементами *внешней геометрии поверхности* или *геометрии погружения.*

### 4.3 Главные кривизны и главные направления

Пусть, как и выше, $P$ — произвольная точка регулярной гиперповерхности $M$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда, как мы уже знаем, в точке $P$ определены две квадратичные формы: первая форма $\mathfrak{G}$ и вторая форма $\mathfrak{q}$. Из линейной алгебры известна так называемая теорема о паре квадратичных форм, которая, напомним, формулируется так.

**Предложение 4.2** *Пусть в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, в котором фиксирован произвольный базис, задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с помощью симметричной невырожденной положительно определенной матрицы $G$. Пусть, кроме того, задана квадратичная форма $\mathfrak{q}$. Тогда в $\mathbb{R}^n$ существует базис $(e_i)$, ортонормальный относительно указанного скалярного произведения, и такой что форма $\mathfrak{q}$ имеет в нем диагональный вид. При этом, если $Q$ — эта матрица формы $\mathfrak{q}$ в исходном базисе, то базис $(e_i)$ и соответствующие собственные числа формы $Q$ относительно формы $G$ могут быть найдены из следующего характеристического уравнения:*

$$\det(Q - \lambda G) = 0.$$

**Доказательство.** Как известно из линейной алгебры (теорема о собственном базисе квадратичной формы) в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис $(f_i)$, ортонормированный относительно невырожденной положительно определенной квадратичной формы, задающей скалярное произведение. Пусть $A$ — матрица перехода к этому базису, другими словами, компоненты $X$ произвольного вектора в исходном базисе связаны с его компонентами $X_f$ в базисе $(f_i)$ так: $X_f = AX$. Тогда, матрица $G_f$ квадратичной формы $\mathfrak{G}$, задающей скалярное произведение, связана с матрицей $G$ этой квадратичной формы в исходном базисе так: $A^T G_f A = G$. Аналогично, $A^T Q_f A = Q$. Отметим, что, так как мы выбрали базис $(f_i)$ ортонормированным относительно нашего скалярного произведения, матрица $G_f$ — это единичная матрица, т.е. $A^T A = G$.

Теперь воспользуемся теоремой о приведении квадратичной формы $\mathfrak{q}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ к главным осям. В силу этой теоремы, форма $\mathfrak{q}$ имеет ортонормированный собственный базис $(e_i)$. Отметим, что, так как базис $(e_i)$ ортонормированный, матрица формы $\mathfrak{G}$ в нем по прежнему единичная. Собственные числа и собственные векторы формы $\mathfrak{q}$ могут быть найдены, как известно, при решении характеристического уравнения $\det(Q_f - \lambda E) = 0$. Умножив это уравнение на не равный нулю квадрат определителя матрицы перехода $A$ и внеся матрицу $A$ под знак определителя, получим

$$\det A^T \det(Q_f - \lambda E) \det A = \det(A^T Q_f A - \lambda A E A^T) = \det(Q - \lambda G),$$

таким образом, характеристическое уравнение эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda G) = 0$, что и требовалось.

Применим предложение 4.2 к каноническим формам регулярной гиперповерхности $M$ в произвольной ее точке.

**Определение.** Пусть $G$ и $Q$ — матрицы первой и второй фундаментальных форм регулярной гиперповерхности $M$ в некоторой ее точке $P$. Корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$ называются *главными кривизнами* поверхности $M$ в точке $P$. Если $\lambda_0$ — главная кривизна, то векторы из $T_P M$ соответствующе нетривиальным решениям линейного уравнения $(Q - \lambda_0 G)X = 0$, которые, очевидно, существуют, называются *главными направлениями* поверхности $M$ в точке $P$.

**Замечание.** Из предложения 4.2 вытекает, что главные кривизны и главные направления поверхности не зависят от выбора координат на поверхности.

**Следствие 4.4** *Пусть $P$ — произвольная точка регулярной гиперповерхности $M$. Тогда в касательном пространстве $T_P M$ можно выбрать такой базис, что первая и вторая фундаментальные формы поверхности в этом базисе будут иметь вид*

$$ds^2 = \sum_i (du^i)^2, \qquad dq^2 = \sum_i \lambda_i (du^i)^2$$

*соответственно. При этом, указанный базис состоит из векторов главных направлений, а числа $\lambda_i$ являются главными кривизнами поверхности $M$ в точке $P$.*

Из следствия 4.2 вытекает следующий результат, поясняющий геометрический смысл главных кривизн.

**Следствие 4.5** *Главная кривизна $\lambda_i$ поверхности $M$ в точке $P$ равна, с точностью до знака, кривизне нормального сечения поверхности в точке $P$ вдоль соответствующего главного направления.*

С помощью главных кривизн и главных направлений можно легко вычислить кривизну любого нормального сечения. Действительно, пусть $V \in T_P M$ — произвольный касательный вектор к поверхности $M$ в точке $P$, и предположим, что длина вектора $V$ равна единице. Выберем в касательном пространстве $T_P M$ ортонормированный базис, состоящий из единичных векторов главных направлений. Тогда, очевидно, координаты вектора $V$ в этом базисе могут быть записаны в виде:

$$V = \big(\cos\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_{n-1}\big),$$

где $\varphi_i$ — угол между вектором $V$ и $i$-ым базисным вектором. В силу следствия 4.2 и следствия 4.4, кривизна $k_n(V)$ нормального сечения поверхности в точке $P$ в направлении $V$ может быть вычислена следующим образом:

$$\pm k_n(V) = dq^2(V, V) = \sum_i \lambda_i (\cos\varphi_i)^2.$$

Особенно полезна эта формула в случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$.

**Следствие 4.6 (Формула Эйлера)** *Пусть $M^2$ — двумерная регулярная поверхность в $\mathbb{R}^3$, и $P$ — точка из $M$. Тогда кривизна $k_n(V)$ нормального сечения в точке $P$ в направлении $V \in T_P M$ может быть вычислена так:*

$$\pm k_n(V) = \lambda_1(\cos\varphi)^2 + \lambda_2(\sin\varphi)^2,$$

*где $\lambda_1$, $\lambda_2$ — главные кривизны поверхности в точке $M$, а $\varphi$ — угол между вектором $V$ и главным направлением, соответствующим главной кривизне $\lambda_1$.*

Из формулы Эйлера легко получить следующее интересное следствие.

**Следствие 4.7** *Главные кривизны и главные направления двумерной регулярной поверхности в точке $P$ соответствуют наибольшему и наименьшему значениям функции $\lambda_1(\cos\varphi)^2 + \lambda_2(\sin\varphi)^2$, значение которой равно кривизне нормального сечения, взятой со знаком $< m, N >$, где $m$ — главная нормаль этого сечения, а $N$ — та нормаль к поверхности, относительно которой определена ее вторая фундаментальная форма.*

**Доказательство.** Действительно, для доказательства достаточно продифференцировать функцию $k_n(\varphi) = \lambda_1(\cos\varphi)^2 + \lambda_2(\sin\varphi)^2$ по $\varphi$. Имеем:

$$k_n'(\varphi) = 2(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\varphi\ \sin\varphi = (\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2\varphi,$$

поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то точки экстремума функции $k(\varphi)$ — это точки вида $\varphi = k\pi$ и $\varphi = \pi/2 + k\pi$, т.е. как раз главные направления. Если же $\lambda_1 = \lambda_2$, то все кривизны нормальных сечений одинаковы. Доказательство закончено.

**Замечание.** Если $k_n$ — кривизна нормального сечения, проведенного в направлении вектора $V$, то величина $k_n$, взятая со знаком выражения $\langle m, N\rangle$, — это ориентированная кривизна этого нормального сечения относительно ориентации, задаваемой в секущей плоскости базисом $(V, N)$.

## 4.4 Средняя и гауссова кривизна гиперповерхности

В предыдущем пункте мы в каждой точке регулярной гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ определили базис из главных направлений и главные кривизны. Однако, как и в линейной алгебре, иногда бывает полезно изучать инвариантные функции главных кривизн, а не сами главные кривизны. Мы рассмотрим две такие функции — так называемые среднюю и гауссову кривизны.

**Определение.** Сумма главных кривизн поверхности $M$ в точке $P$ называется *средней кривизной* поверхности $M$ в точке $P$ и обозначается через $H(P)$. Произведение главных кривизн называется *гауссовой кривизной* и обозначается через $K(P)$.