ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И СЛУЧАЙНЫХ
ПРОЦЕССОВ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЕ УМЕРЕННЫХ ПРАВЫХ ХВОСТОВ

Выполнила студентка
603 группы
Егорова Ирина Алексеевна

(подпись студента)

Научный руководитель:
с.н.с., к.ф.-м.н.
Шкляев Александр Викторович

(подпись научного руководителя)

Москва
2022

Содержание

1 Введение

Введем максимальный ветвящийся процесс. Положим $Z_0 = 1$, ..., $Z_{n+1} = \max(X_{n,1}, ..., X_{n,Z_n})$, где $X_{i,j}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (с.в.) с некоторой функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Данная модель была рассмотрена Ламперти [1], которым было показано, что

- если $\liminf x(1 - F(x)) \geq \exp(-\gamma)$, при $x \to \infty$, то число частиц в максимальном ветвящемся процессе почти наверное стремится к бесконечности;
- если $\limsup x(1 - F(x)) < \exp(-\gamma)$, при $x \to \infty$, то число частиц в рассматриваемом процессе почти наверное вырождается в ноль.

Здесь γ — константа Эйлера-Маскерони ($\gamma \approx 0.58$).
Максимальные ветвящиеся процессы рассматривались рядом авторов (см, например, [2], [3]). Нам понадобится результат ([2]), из которого мы получаем, что существует такое вероятностное пространство, на котором максимальный ветвящийся процесс с ф.р. $F(x)$ можно задать соотношением:

$$Z_{n+1} = F^{-1}(U_n^{1/Z_n}),$$

где U_n — н.о.р. стандартные равномерные с.в.
В работе рассматривается частный случай ф.р. $F(x)$:

$$F(x) = 1 - \frac{c_f + r(x)}{x}, \tag{1}$$

где c_f — некоторая положительная константа, $c_f > 1$, $r(x)$ — функция, для которой выполнено условие: $r(x) \cdot x^\alpha \to 0, x \to \infty$, при некотором $\alpha \in [0, 1]$.
В работе показано, что соотношение (1) позволяет представить рассматриваемый процесс в виде рекуррентной случайной последовательности, теория больших уклонений для которой исследовалась рядом авторов ([4], [5]).
В данной работе получена асимптотика вероятностей для максимального ветвящегося процесса с заданной ф.р. (1), в общем случае исследование такой вероятности, по-видимому, представляется невозможным. Показано, что

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n+1} \in [x, x + \Delta_n)) \sim$$
$$D\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\Delta_n \exp\left((1 - \psi^{-1}(\ln c_f - x/n))(x - n \ln c_f)\right)}{\sqrt{2\pi n \psi'(\psi^{-1}(\ln c_f - x/n))}(\Gamma(\psi^{-1}(\ln c_f - x/n)))^n},$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, стремящихся к 0 достаточно медленно, где $D(\cdot)$— некоторая положительная и непрерывная на $[\theta_1, \theta_2]$ функция, θ_1, θ_2 — некоторые константы, $\psi(h) = (\ln \Gamma(h))'$. При этом эквивалентность равномерна по $x/n \in [\theta_1,\ \theta_2] \subset (\ln c_f + \gamma, +\infty)$.
Замечание 1. *Говорят, что утверждение выполнено при Δ_n, стремящихся к 0 достаточно медленно, если существует некоторая последовательность $\widetilde{\Delta_n} \to 0$, такая что при всех $\Delta_n > \widetilde{\Delta_n}$, $\Delta_n \to 0$ выполнено наше утверждение.*

2 Предварительные сведения

Рассмотрим максимальный ветвящийся процесс, определенный выше. Нам потребуются следующие утверждения.

2.1 Метод обратной функции

Лемма 1. *$F^{-1}(R)$ имеет ф.р. $F(x)$, где $R \sim R[0,1]$.*

Доказательство. Пусть $G(x)$ — ф.р. $F^{-1}(R)$, тогда $G(x) = \mathbf{P}(F^{-1}(R) \leqslant x) = \mathbf{P}(R \leqslant F(x))$. Так как $R \sim R[0,1]$, то

$$G(x) = \begin{cases} 0, & F(x) < 0 \\ 1, & F(x) > 1 \\ F(x), & F(x) \in [0,1] \end{cases}$$

поскольку $F(x) \in [0,1]$. Значит $F(x)$ — ф.р. случайной величины $F^{-1}(R)$. ■

2.2 Максимальный ветвящийся процесс

Лемма 2. *$\mathbf{P}(Z_{n+1} \leq x | Z_n = i) = F(x)^i$, где F — ф.р. X_i.*

Доказательство.

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \leq x | Z_n = i) = \mathbf{P}(\max(X_{n,1}, ..., X_{n,Z_n}) \leq x | Z_n = i) = \prod_{k=1}^{i} \mathbf{P}(X_{n,k} \leq x | Z_n = i) = F(x)^i.$$

■

Лемма 3. *$(Z_n, Z_{n+1}) \stackrel{d}{=} (Z_n, F^{-1}(U_n^{1/Z_n}))$, где F — ф.р. X_i, U_n — н.о.р. $R[0,1]$.*

Доказательство. Требуемое соотношение вытекает из лемм 1 и 2. ■

2.3 Сопряженное распределение

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots)$ — последовательность н.о.р. невырожденных случайных величин с конечным $\mu = \mathbf{E}\xi$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, удовлетворяющих условию $R(h) = \mathbf{E}\exp(h\xi) < \infty$, $h \in (0, h+)$. Положим при $h \in (0, h+)$: $m(h) = (\ln R(h))'$, $\sigma^2(h) = m'(h) > 0$, $m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h)$.

Функция $m(h)$ непрерывна и монотонно возрастает при $h \in [0, h^+)$ и $m(0) = \mu$. Следовательно, для любого $\theta \in [\mu, m^+)$ найдется такое $h_\theta \in [0, h^+)$, что $m(h_\theta) = \theta$.
Сопряженное распределение $P^{(h)}$, $h \in (0, h+)$ задается ф.р.

$$F^{(h)}(x) = R^{-1}(h) \int_{-\infty}^{x} e^{hy} dF(y).$$

Введем функцию уклонений $\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta)$.

2.4 Интегро-локальная теорема для рекуррентных последовательностей

Рассмотрим последовательность $Z_{n+1} = P_m(Z_n)$, где P_m — параметрическая функция вида

$$P_{m,n}(x_n) = A_{n,m} x_n + A_{n,m-1} x_n^{(m-1)/m} + ... + A_{n,1} x_n^{1/m} + A_{n,0},$$

где m>0 и $\{(A_{i,1}, ..., A_{i,m}), i \geq 0\}$ — набор случайных векторов. Положим $\xi_n = \ln A_{n-1,m}$, $R(h) = \mathbf{E} e^{\xi h}$ и $\mu = \mathbf{E}\xi$, где ξ — величина с тем же распределением, что и ξ_1. Будем предполагать, что величины ξ_i независимы и одинаково распределены. Случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ назовем сопровождающим для последовательности Z_n.
Мы будем рассматривать условия при которых предельное поведение Z_{n+1} определяется старшими коэффициентами $A_{n,m}$ и не будет существенно зависеть от $A_{i,j}$, где $j < m$. В связи с этим введем случайные величины $A'_{i,j}$, для которых п.н. выполнено условие $|A_{i,j}| \leq A'_{i,j}$ при $i \geq 0, j < m$.
Пусть $\max(0, \mu) < \theta_1 < \theta_2$. Введем следующие условия:

- b_1. $A_{i,m}$ — неотрицательная случайная величина, где $i \geq 0$;
- b_2. Величины $\xi_i, i \geq 0$ являются нерешетчатыми и удовлетворяют условию Крамера: $R(h) = \mathbf{E} e^{\xi_1 h} < \infty, h \in [0, h^+)$;
- b_3. При $i > 0$ имеет место оценка:

$$\mathbf{E}|A'_{n,m-i}|^h \leq C \frac{R^{in/m}(h)}{(in/m)^{j(h)}},$$

  где C — некоторая неотрицательная константа, $j(h) = (1+\epsilon)h$, $\epsilon > 0$, $h \in [0, h^+)$;
- b_4. величина Z_0 такова, что $\mathbf{E}|Z_0|^h < \infty, h \in [0, h^+)$;

b_5. при любом n величины $\{A'_{i,1}, ..., A'_{i,m-1}, A_{i,m}, i \geq n\}$ не зависят от $\{A'_{i,0}, A'_{i,1}, ..., A'_{i,m-1}, A_{i,m}, i < n\}$;

b_6. предел Z^* величин $Z_n \exp(-S_n)$ по мере $P^{(h)}$ не сосредоточен на $(-\infty, 0]$.

Отметим, что из выполнения условий $b_1 - b_5$ вытекает существование указанного предела Z^* в условии b_6.

Теорема 1. *[5] Для последовательности, заданной соотношением*

$$Z_{n+1} = P_{m,n}(Z_n),$$

удовлетворяющей условиям $b_1 - b_6$, выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n+1} \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{D\,(x/n)\,\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma\left(h_{x/n}\right)} \exp\left(-\Lambda\,(x/n)\,n\right)$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, стремящихся к 0 достаточно медленно, где $D\,(\cdot)$— некоторая положительная и непрерывная на $[\theta_1, \theta_2]$ функция. При этом эквивалентность равномерна по $x/n \in [\theta_1,\ \theta_2]$.

3 Основной результат

Теорема 2. *Для максимального ветвящегося процесса с ф.р. вида $F(x) = 1 - (c_f + r(x))/x$, где $c_f > 1$, $r(x) \cdot x^\alpha \to 0, x \to \infty$, при некотором $\alpha \in [0, 1]$, верна следующая асимптотика при $h \in [0, 1)$:*

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n+1} \in [x, x + \Delta_n)) \sim$$
$$D\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\Delta_n \exp\left((1 - \psi^{-1}(\ln c_f - x/n))(x - n \ln c_f)\right)}{\sqrt{2\pi n \psi'(\psi^{-1}(\ln c_f - x/n))}(\Gamma(\psi^{-1}(\ln c_f - x/n)))^n},$$

при $n \to \infty$ и всех Δ_n, стремящихся к 0 достаточно медленно, где $D\,(\cdot)$— некоторая положительная и непрерывная на $[\theta_1, \theta_2]$ функция, θ_1, θ_2 - некоторые константы, $\psi(h) = (\ln \Gamma(h))'$. При этом эквивалентность равномерна по $x/n \in [\theta_1,\ \theta_2] \subset (\ln c_f + \gamma, +\infty)$.

4 Доказательство

4.1 Предварительные оценки

Рассмотрим максимальный ветвящийся процесс с ф.р. $F(x) = 1 - (c_f + r(x))/x$, где $c_f > 1$. Наложим на функцию $r(x)$ условие: $r(x) \cdot x^\alpha \to 0, x \to \infty$, при некотором $\alpha \in [0,1]$. Получим выражение для обратной функции такого вида:

$$y = F(x) = 1 - \frac{(c_f + r(x))}{x},$$
$$x = F^{-1}(y) = \frac{c_f + r(x)}{1-y} = \frac{c_f + r(F^{-1}(y))}{1-y}.$$

Введем функцию $g(u) = r(F^{-1}(e^{-u}))$. Поскольку $r(x) \sim c_r/x^\alpha, \alpha \in [0,1], x \to \infty$:

$$g(u) = r(F^{-1}(e^{-u})) \sim \frac{c_r}{(F^{-1}(e^{-u}))^\alpha} = \frac{c_r}{\left(\dfrac{c_f + r(F^{-1}(e^{-u}))}{1-e^{-u}}\right)^\alpha}, u \to 0-.$$

Имеем $u \to 0-$, $e^{-u} \to 1$, $F(e^{-u}) \to \infty$, следовательно $r(F(e^{-u})) \to 0$ и

$$g(u) \sim \frac{c_r}{\left(\dfrac{c_f}{1-e^{-u}}\right)^\alpha} \to c_g u^\alpha, u \to 0-,$$

где c_g — некоторая константа.
Поскольку $\alpha \in [0,1]$ для некоторого m: $|g(u)| < c_g u^{1/m}$.
Воспользуемся леммой 3:

$$Z_{n+1} = F^{-1}(U_n^{1/Z_n}) = \frac{c_f + r(F^{-1}(U_n^{1/Z_n}))}{1-U_n^{1/Z_n}}.$$

Поскольку $g(u) = r(F^{-1}(e^{-u})) = r(F^{-1}(U_n^{1/Z_n}))$, то $u = -\ln U_n^{1/Z_n}$.

$$Z_{n+1} = \frac{c_f + g(-\ln U_n^{1/Z_n})}{1-U_n^{1/Z_n}}.$$

4.2 Рекуррентное представление

Представим ветвящийся процесс в виде $Z_{n+1} = A_n Z_n + B_n Z_n^{(m-1)/m} + C_n$, где

$$A_n = \frac{c_f}{-\ln U_n}, \quad U_n \sim R[0,1].$$

Тогда для оставшейся части имеем:

$$Z_{n+1} - A_n Z_n = \frac{c_f(\ln U_n + Z_n - Z_n \exp(\ln U_n/Z_n)) + g(-\ln U_n/Z_n)\ln U_n}{(1-\exp(\ln U_n/Z_n))\ln U_n}.$$

Отметим, что при $Z_n = 0$ эта разность равна 0 и можно положить $B_n = C_n = 0$.
Рассмотрим случай $Z_n \geq 1$, преобразуем получившееся выражение.
По теореме Лагранжа существует такая точка $d \in (a, b)$, что

$$f'(d) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, f(a) = f(b) + (a - b) \cdot f'(d).$$

Тогда при $a = \ln U_n / Z_n,\ b = 0:$

$$f\left(\frac{\ln U_n}{Z_n}\right) = f(0) + \left(\frac{\ln U_n}{Z_n}\right) \cdot f'(d).$$

Для функции $f(x) = \exp(x)$ получаем

$$\exp\left(\frac{\ln U_n}{Z_n}\right) = 1 + \frac{\ln U_n}{Z_n} \cdot \exp(d),\ d \in \left(\frac{\ln U_n}{Z_n}, 0\right).$$

Тогда имеем:

$$B_n Z_n^{(m-1)/m} + C_n = \frac{c_f g(-\ln U_n / Z_n) Z_n}{\exp(d) \ln U_n} + \frac{c_f(\exp(d) - 1) Z_n}{\exp(d) \ln U_n} =: T_1 + T_2.$$

Для оценки T_1 пользуемся тем, что $|g(u)| < c_g u^{1/m}$:

$$T_1 = \frac{c_f g(-\ln U_n / Z_n) Z_n}{\exp(d) \ln U_n} < \frac{c_f c_g (-\ln U_n / Z_n)^{1/m} Z_n}{\exp(d)(-\ln U_n)} =$$
$$\frac{c_f c_g}{\exp d}\left(\frac{Z_n}{-\ln U_n}\right)^{(m-1)/m} < \frac{c_f c_g}{U_n}\left(\frac{Z_n}{-\ln U_n}\right)^{(m-1)/m}.$$

В последнем неравенстве воспользовались оценкой $\exp(-d) < 1/U_n$, поскольку $d \in (\ln U_n / Z_n, 0)$ и $Z_n \geq 1$. Получили необходимую степень у Z_n, слагаемое T_1 соответствует B_n.
Для оценки T_2 еще раз применим теорему Лагранжа:

$$\exp(-d) - 1 = -d \exp(-\xi) \leqslant -d \exp(-d),$$

при $\xi \in [0, -d], d \in (\ln U_n / Z_n, 0)$. Следовательно,

$$T_2 = \frac{c_f(\exp(-d) - 1)}{-\ln U_n / Z_n} \leqslant \frac{c_f \exp(-\ln U_n / Z_n)(-\ln U_n / Z_n)}{-\ln U_n / Z_n} =$$
$$c_f \exp(-\ln U_n / Z_n) \leqslant \frac{c_f}{U_n}.$$

В последнем неравенстве пользуемся тем, что $Z_n \geq 1$. Получаем соответствие T_2 свободному члену C_n.

В итоге получаем рекуррентное представление:

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1} = A_n Z_n + B_n Z_n^{(m-1)/m} + C_n, \\
A_n = \frac{c_f}{-\ln U_n}, \\
|B_n| < |B_n^{'}| = \frac{c_b}{U_n \cdot (-\ln U_n)^{(m-1)/m}}, c_b = c_f c_g, \\
|C_n| < |C_n^{'}| = \frac{c_f}{U_n}.
\end{aligned}
$$

4.3 Поиск параметров асимптотики

При выполнении необходимых ограничений на последовательность (A_n, B_n, C_n) можем применить теорему 1. Проверка условий будет произведена в следующем разделе, в данном разделе найдем соответствующие параметры асимптотики. Посчитаем функцию $R(h)$ для нашего случая:

$$
R(h) = \mathbf{E}\exp(h\xi_1) = \mathbf{E}\exp\left(h\ln\left(-\frac{c_f}{\ln U_0}\right)\right) = \mathbf{E}\left(-\frac{c_f}{\ln U_0}\right)^h = \int_0^1 \left(-\frac{c_f}{\ln x}\right)^h dx =
$$

$$
= c_f^h \cdot \int_0^1 \left(-\frac{1}{\ln x}\right)^h dx = c_f^h \int_0^\infty u^{-h} \cdot \exp(-u) du = c_f^h \cdot \Gamma(1-h), h \in [0,1).
$$

Тогда имеем:

$$
\begin{aligned}
m(h) = (\ln(c_f^h \Gamma(1-h)))' = (h\ln c_f + \ln\Gamma(1-h))' = \ln c_f - \psi(1-h), \\
\psi(h) = (\ln\Gamma(h))', \\
\sigma^2(h) = (\ln R(h))'' = (h\ln c_f + \ln\Gamma(1-h))'' = \psi'(1-h), \\
\mu = \mathbf{E}\xi = \ln c_f + \exp(-\gamma),
\end{aligned}
$$

где γ — константа Эйлера-Маскерони.
Нужно найти решение уравнения $x/n = m(h_{x/n})$:

$$
\begin{aligned}
x/n = m(h_{x/n}) = \ln c_f - \psi(1 - h_{x/n}), \\
h_{x/n} = 1 - \psi^{-1}(\ln c_f - x/n).
\end{aligned}
$$

Выразим функцию уклонений:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(x/n) = x/n \cdot h_{x/n} - \ln R(h_{x/n}) = x/n \cdot h_{x/n} - \ln(c_f^{h_{x/n}}\Gamma(1-h_{x/n})) = \\
h_{x/n}(x/n - \ln c_f) - \ln\Gamma(1-h_{x/n})) = \\
(1-\psi^{-1}(\ln c_f - x/n))(x/n - \ln c_f) - \ln\Gamma(\psi^{-1}(\ln c_f - x/n)).
\end{aligned}
$$

Подставляя полученные параметры асимтотики в теорему 1, получаем теорему 2.

5 Проверка условий

Проверим, выполняются ли условия b1)-b6) для максимального ветвящегося процесса Z_n с условиями из теоремы 2.

5.1 Проверка условия b1

Нужно проверить, что $A_{i,m}, i \geq 0$ — неотрицательная случайная величина. В нашем случае:

$$A_{i,m} = A_i = \frac{c_f}{-\ln U_i},$$

$c_f > 1, -\ln U_i > 0$, поскольку $U_i \in [0,1]$.

5.2 Проверка условия b2

Проверим выполнение условие Крамера $R(h) = \mathbf{E}e^{\xi h} < \infty, h \in [0, h^+)$:

$$R(h) = \mathbf{E}\exp(h\xi_1) = \mathbf{E}\exp\left(h\ln\left(-\frac{c_f}{\ln U_0}\right)\right) = \mathbf{E}\left(-\frac{c_f}{\ln U_0}\right)^h =$$
$$\int_0^1 \left(-\frac{c_f}{\ln x}\right)^h dx = c_f^h \int_0^\infty u^{-h} \cdot \exp(-u)du = c_f^h \cdot \Gamma(1-h) < \infty, \qquad (2)$$

при $0 \leqslant h < 1$.

5.3 Проверка условия b3

При $i > 0$ должна выполняться оценка:

$$\mathbf{E}|A'_{n,m-i}|^h \leq C\frac{R^{in/m}(h)}{(in/m)^{j(h)}}, \qquad (3)$$

где С — некоторая неотрицательная константа, $j(h) = (1+\epsilon)h$, $\epsilon > 0$, $h \in [0, h^+)$. В нашем представлении есть коэффициенты A_n, B_n, C_n, которые соотвествуют $i = 0, 1, m$. Проверим выполнение условия для мажорант B'_n, C'_n.

5.3.1 Проверка условия b3 для $B_n^{'}$

Получаем, что нужно проверить выполнение неравенства:

$$\mathbf{E}|B_n^{'}|^h < \frac{C(R(h))^{n/m}}{(n/m)^{j(h)}}. \tag{4}$$

Для коэфициента $B_n^{'}$ имеем :

$$\mathbf{E}|B_n^{'}|^h = \mathbf{E}\left(\frac{c_b}{U_n \cdot (-\ln U_n)^{(m-1)/m}}\right)^h = \int_0^1 \left(\frac{c_b}{x(-\ln x)^{(m-1)/m}}\right)^h dx =$$

$$c_b^h \int_0^\infty u^{-\left(\frac{m-1}{m}\right)h} \cdot \exp(-u(1-h))du = \frac{c_b^h}{(1-h)^{1-\left(\frac{m-1}{m}\right)h}} \int_0^\infty t^{-\left(\frac{m-1}{m}\right)h} \cdot \exp(-t)dt =$$

$$\frac{c_b^h}{(1-h)^{1-\left(\frac{m-1}{m}\right)h}} \cdot \Gamma\left(1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)h\right).$$

В левой части неравенства (4) получили сходящийся интеграл. В правой части для функции $R(h)$ получили выражение через гамма-функцию (2), можем оценить ее:

$$R(h) = c_f^h \cdot \Gamma(1-h) > 1,$$

т.к. при $0 \leqslant h < 1$ имеем $\Gamma(1-h) > 1$, и коэффициент $c_f > 1$.
Неравенство (4) будет выполняться при всех натуральных n и достаточно больших C в силу расходимости последовательности в правой части неравенства в бесконечность.

5.3.2 Проверка условия b3 для $C_n^{'}$

Для $C_n^{'}$ имеем:

$$\mathbf{E}|C_n^{'}|^h = \mathbf{E}\left(\frac{c_f}{U_n}\right)^h = \int_0^1 \left(\frac{c_f}{x}\right)^h dx = \frac{c_f^h}{1-h}.$$

Неравенство для C_n^h

$$\mathbf{E}|C_n^{'}|^h < \frac{C(R(h))^n}{n^{j(h)}},$$

также будет выполняться при всех натуральных n и достаточно больших C в силу расходимости последовательности в правой части неравенства в бесконечность.

5.4 Проверка условия b4

В рассматриваемом ветвящемся процессе $Z_0 = 1$, поэтому имеем выполнение неравенства $\mathbf{E}|Z_0|^h < \infty, h \in [0, h^+)$.

5.5 Проверка условия b5

Нужно проверить, что $\{A_i, B'_i, i \geq n\}$ не зависит от $\{A_{i-1}, B'_{i-1}, C'_{i-1}, i < n\}$:

$$A_n = \frac{c_f}{-\ln U_n},$$
$$B'_n = \frac{c_b}{U_n \cdot (\ln U_n)^{(m-1)/m}},$$
$$C'_n = \frac{c_f}{U_n}.$$

Поскольку в выражениях из случайных величин присутствует только U_n, являющиеся независимыми величинами, данное условие выполнено.

5.6 Проверка условия b6

Предел величин $Z_n \exp(-S_n)$ по мере $P^{(h)}$ неотрицателен, нужно показать, что он не равен 0. Для этого оценим величину снизу.
Поскольку $\xi_n = \ln A_{n-1}$, то $A_{n-1} = \exp(\xi_n)$, тогда

$$Z_{n+1} = A_n Z_n + B_n Z_n^{(m-1)/m} + C_n = \exp(\xi_{n+1}) Z_n + B_n Z_n^{(m-1)/m} + C_n,$$
$$\frac{Z_{n+1}}{\exp(S_{n+1})} = \frac{Z_n}{\exp(S_n)} + \frac{B_n Z_n^{(m-1)/m}}{\exp(S_{n+1})} + \frac{C_n}{\exp(S_{n+1})} =$$
$$\frac{Z_n}{\exp(S_n)} + \frac{c_f g(-\ln U_n/Z_n) Z_n}{\exp(d)\ln U_n \exp(S_{n+1})} + \frac{c_f(\exp(d)-1) Z_n}{\exp(d)\ln U_n \exp(S_{n+1})}. \qquad (5)$$

Заметим, что

$$C_n = \frac{c_f(\exp(d)-1)Z_n}{\exp(d)\ln U_n} = \frac{c_f(\exp(-d)-1)Z_n}{-\ln U_n} \geq 0,$$

поскольку $d \in (\ln U_n/Z_n, 0)$.
Далее оценим второе слагаемое выражения (5):

$$-\frac{c_f g(-\ln U_n/Z_n) Z_n}{\exp(d)(-\ln U_n)\exp(S_{n+1})} > -\frac{c_b(-\ln U_n/Z_n)^{1/m} Z_n}{\exp(d)(-\ln U_n)\exp(S_{n+1})},$$

поскольку $|g(u)| < c_g u^{1/m}, c_b = c_f c_g$.
Также воспользуемся тем, что $\exp \xi_{n+1} = A_n = c_f/(-\ln U_n)$ и $d \in (\ln U_n/Z_n, 0)$:

$$\frac{c_f g(-\ln U_n/Z_n) Z_n}{\exp(d) \ln U_n \exp(S_{n+1})} > -\frac{c_b(-\ln U_n/Z_n)^{1/m} Z_n}{U_n^{1/Z_n}(-\ln U_n) \exp(S_{n+1})} = -\frac{c_g(-\ln U_n/Z_n)^{1/m} Z_n}{U_n^{1/Z_n} \exp(S_n)} \geq -\frac{c_g(-\ln U_n/Z_n)^{1/m} Z_n}{U_n \exp(S_n)}.$$

В последнем неравенстве используется $Z_n \geq 1$. Получаем оценку для выражения $Z_{n+1}/\exp(S_{n+1})$:

$$\frac{Z_{n+1}}{\exp(S_{n+1})} \geq \frac{Z_n}{\exp(S_n)} - \frac{c_b(-\ln U_n/Z_n)^{1/m} Z_n}{U_n \exp(S_n)} = \frac{Z_n}{\exp(S_n)} \left(1 - \frac{c_b(-\ln U_n/Z_n)^{1/m}}{U_n}\right). \tag{6}$$

Применяя n раз оценку (6), имеем:

$$\frac{Z_{n+1}}{\exp(S_{n+1})} \geq \frac{Z_1}{\exp(S_1)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{c_b(-\ln U_k/Z_k)^{1/m}}{U_k}\right). \tag{7}$$

Используя (7), покажем, что

$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Z_{n+1}}{\exp(S_{n+1})} > 1, \forall n\right) > 0.$$

Для этого необходимо оценить снизу произведение

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{c_b(-\ln U_k/Z_k)^{1/m}}{U_k}\right).$$

Логарифмированием перейдем к ряду P_n, нужно показать, что он сходится:

$$P_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{c_b(-\ln U_k/Z_k)^{1/m}}{U_k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{c_b(-\ln U_k/Z_k)^{1/m}}{U_k}\right).$$

Введем ряд Q_n:

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{c_b(\ln(c_u k^2))^{1/m}(c_u k^2)}{\exp\left(\frac{\mu k}{2} - d\right)}\right).$$

Лемма 4. *Рассматриваемый ряд Q_n сходится.*

Доказательство. Заметим, что начиная с некоторого номера $k > N$, будет выполнено $\ln(c_u k^2) < k$, $\exp(\mu k/2 - d) > k^{4m}$, поэтому имеем:

$$Q_n > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{\widetilde{c}}{k^{2-(1/m)}}\right).$$

Поскольку $m > 1$, выражение $\widetilde{c}/k^{2-(1/m)}$ стремится к нулю при $k \to \infty$, тогда

$$\ln\left(1 - \frac{\widetilde{c}}{k^{2-(1/m)}}\right) \sim -\frac{\widetilde{c}}{k^{2-(1/m)}}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{n}(-\widetilde{c}/k^{2-(1/m)})$ сходится, поэтому ряд Q_n тоже сходится. ∎

Поскольку ряд Q_n сходится, можем оценить его снизу $Q_n > q$, где q — некоторая константа, $q < 0$.
Рассмотрим пересечение следующих событий:

$$\left\{\frac{Z_1}{\exp(S_1)} > 1/b\right\}, \left\{\forall k : S_k > \frac{\mu k}{2} - d\right\}, \left\{\forall k : U_k > \frac{1}{c_u k^2}\right\}, \qquad (8)$$

где $b = \exp(q)$, $\mu = m(0) = \ln c_f - \psi(1) = \ln c_f + \gamma > 0$, $\psi(h) = (\ln\Gamma(h))'$, γ — константа Эйлера-Маскерони, c_u и d — некоторые положительные константы.
Лемма 5.

$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Z_1}{\exp(S_1)} > \frac{1}{b}; \forall k : S_k > \frac{\mu k}{2} - d; \forall k : U_k > \frac{1}{c_u k^2}\right) =$$
$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Z_1}{\exp(S_1)} > \frac{1}{b}; \forall k : S_k > \frac{\mu k}{2} - d; \forall k : U_k > \frac{1}{c_u k^2}; \forall k : \frac{Z_k}{\exp(S_k)} > 1\right)$$

Доказательство. Покажем по индукции что при пересечении событий (8) при всех $k > 0$ выполнено соотношение:

$$\frac{Z_k}{\exp(S_k)} > 1.$$

База индукции: при $k = 1$ имеем $Z_1/\exp(S_1) > 1/b$, где $b = \exp(q) < 1$, поскольку $q < 0$. Значит $1/b > 1$, и утверждение выполнено.
Далее предположим, что утверждение верно для $k = n$, докажем, что тогда будет верно для $k = n + 1$.
При пересечении событий (8) и предположения индукции имеем:

$$Z_n > \exp\left(\frac{\mu n}{2} - d\right),$$
$$\frac{1}{U_n} < c_u n^2, -\ln U_n < \ln(c_u n^2).$$

Тогда сумму ряда P_n можно оценить снизу:

$$P_n > Q_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{c_b(\ln(c_u k^2))^{1/m}(c_u k^2)}{\exp\left(\frac{\mu k}{2} - d\right)}\right).$$

По предыдущей лемме получаем, что $P_n > q$, значит

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{c_b(-\ln U_k/Z_k)^{1/m}}{U_k}\right) > \exp(q) = b.$$

Тогда, используя оценку (7), имеем:

$$\frac{Z_{n+1}}{\exp(S_{n+1})} \geq \frac{Z_1}{\exp(S_1)} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{c_b(-\ln U_k/Z_k)^{1/m}}{U_k}\right) > \frac{1}{b} \cdot b = 1. \qquad (9)$$

Получаем, что из событий (8) следует, что $Z_k > \exp(S_k)$ при всех k. Отсюда вытекает необходимое равенство вероятностей. ∎

Исследуем вероятности событий, описанных в (8).
По усиленному закону больших чисел для величины S_n при достаточно большом d имеем:

$$\mathbf{P}^{(h)}\left(S_n > \frac{\mu n}{2} - d, \forall n\right) > \frac{1}{2}. \qquad (10)$$

Лемма 6. *Для последовательности величин U_n (равномерные с.в.) найдется такое c_u:*

$$\mathbf{P}^{(h)}\left(U_n > \frac{1}{c_u n^2}, \forall n\right) > \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим события $E_n = \{U_n \leq a_n\}$, где последовательность a_n задается формулой $a_n = 1/(c_u n^2)$. Пусть E есть событие, состоящее в том, что наступит бесконечно много событий E_k, то есть:
$E = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k \geq n} E_k$.
Оценим сумму: $\sum_{k\geq 1} \mathbf{P}^{(h)}(E_k) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{P}^{(h)}(U_k \leq a_k) = \sum_{k\geq 1} a_k < \infty$, поскольку ряд сходится.
По лемме Бореля-Кантелли, если $\sum_{k\geq 1} \mathbf{P}^{(h)}(E_k) < \infty$, то $\mathbf{P}^{(h)}(E) = 0$. Остается выбрать c_u достаточно большим, чтобы число рассматриваемых событий оказалось нулем с вероятностью больше $1/2$. ∎

Из леммы 6 и соотношения (10) получаем, что пересечение событий

$$\left\{\forall k : S_k > \frac{\mu k}{2} - d\right\}, \left\{\forall k : U_k > \frac{1}{c_u k^2}\right\}$$

имеет положительную вероятность.
Далее, используя лемму 5 и выражение (7), произведем следующие оценки:

$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\forall k : \frac{Z_k}{\exp{(S_k)}} > 1\right) \geq$$
$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Z_1}{\exp{(S_1)}} > \frac{1}{b}; \forall k : S_k > \frac{\mu k}{2} - d; \forall k : U_k > \frac{1}{c_u k^2}; \forall k : \frac{Z_k}{\exp{(S_k)}} > 1\right) =$$
$$\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Z_1}{\exp{(S_1)}} > \frac{1}{b}; \forall k : S_k > \frac{\mu k}{2} - d; \forall k : U_k > \frac{1}{c_u k^2}\right) =$$
$$\mathbf{E}\left(\mathbf{P}^{(h)}\left(\frac{Z_1}{\exp{(S_1)}} > \frac{1}{b}\middle| U_1\right) \cdot \mathbf{I}_{\forall k : S_k > (\mu k/2) - d; \forall k : U_k > 1/(c_u k^2)}\right) > 0.$$

Величина под знаком математического ожидания п.н положительна, поскольку распределение Z_1 не ограничено. Интегрируя ее по событию положительной меры, получаем положительную константу.
Таким образом, получили оценку снизу на величину $Z_n \exp(-S_n)$, поэтому предел Z^* величин $Z_n \exp(-S_n)$ по мере $P^{(h)}$ больше нуля с положительной вероятностью.

Список литературы

[1] Lamperti, “Maximal branching processes and ’long-range percolation’”, Journal of Applied Probability, (1970), 89 - 98

[2] А. В. Лебедев, “Максимальные ветвящиеся процесы с неотрицательными значениями”, Теория вероятн. и ее примен., 50:3 (2005), 564–570; Theory Probab. Appl., 50:3 (2006), 482–488

[3] А. В. Лебедев, “Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов”, Дискрет. матем., 14:3 (2002), 143–148; Discrete Math. Appl., 12:4 (2002), 415–420

[4] Шкляев А. В. Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I, Дискретная математика (2019), Т. 31., №. 4., С. 102-115.

[5] Трошина Д.И. Большие уклонения рекуррентных последовательностей, заданных уравнением полиномиального типа, дипломная работа (2021)