29.09.21. Марганова. д/з от семинара 4.

① Выразить компоненты тензора Альманси через вектор перемещения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}\right) \longrightarrow \hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\, \overset{\circ}{\text{э}}{}^i \otimes \overset{\circ}{\text{э}}{}^j \text{ — Коши-Грина}$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{E} = \varepsilon_{ij}\, \hat{\text{э}}^i \otimes \hat{\text{э}}^j} \text{ — Альманси}$$

Хотим выразить $\hat{E}$:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\text{э}}_i &= \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi^i} \\ \overset{\circ}{\text{э}}_i &= \frac{\partial \overset{\circ}{x}}{\partial \xi^i} \end{aligned}\right\} \text{ — по опр.}$$

Нам нужно избавиться от $\overset{\circ}{g}_{ij}$, т.е от $\overset{\circ}{\text{э}}_i$; $\overset{\circ}{\text{э}}_j$:

но $\hat{x} = \overset{\circ}{x} + \bar{u} \Rightarrow \overset{\circ}{x} = \hat{x} - \bar{u}$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\text{э}}_i = \frac{\partial \overset{\circ}{x}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial(\hat{x} - \bar{u})}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i} = \hat{\text{э}}_i - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\text{э}}_i \overset{\circ}{\text{э}}_j = \left(\hat{\text{э}}_i - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\right)\left(\hat{\text{э}}_j - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\right) = \underbrace{\hat{\text{э}}_i \hat{\text{э}}_j}_{=\hat{g}_{ij}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\hat{\text{э}}_i - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\hat{\text{э}}_j + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\hat{\text{э}}_i + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\hat{\text{э}}_j - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{E} = \varepsilon_{ij}\, \hat{\text{э}}^i \otimes \hat{\text{э}}^j = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\hat{\text{э}}_i}_{??} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\hat{\text{э}}_j - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\right)\hat{\text{э}}^i \otimes \hat{\text{э}}^j$$

выразим $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}$ через ковариантную производную:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}(\bar{u}) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(\hat{u}^k \hat{\text{э}}_k\right) = \frac{\partial \hat{u}^p}{\partial \xi^j}\hat{\text{э}}_p + \hat{u}^k \underbrace{\frac{\partial \hat{\text{э}}_k}{\partial \xi^j}}_{=\Gamma^p_{kj}\hat{\text{э}}_p} = \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{u}^p}{\partial \xi^j} + \hat{u}^k \Gamma^p_{kj}\right)}_{=\nabla_j \hat{u}^p}\hat{\text{э}}_p \overset{p=k}{=} \nabla_j \hat{u}^k \hat{\text{э}}_k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\hat{\text{э}}_i = \nabla_j \hat{u}^k \underbrace{\hat{\text{э}}_k \hat{\text{э}}_i}_{=\hat{g}_{ki}} = \nabla_j \underbrace{\hat{u}^k \hat{g}_{ki}}_{\text{опустили индекс}} = \nabla_j \hat{u}_i \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\hat{\text{э}}_j = \nabla_i \hat{u}^k \hat{\text{э}}_k \hat{\text{э}}_j = \nabla_i \hat{u}^k \hat{g}_{kj} = \nabla_i \hat{u}_j \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j} = \left\langle \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^i}; \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi^j}\right\rangle = \left\langle \nabla_i \hat{u}^k \hat{\text{э}}_k; \nabla_j \hat{u}^p \hat{\text{э}}_p\right\rangle = \sum_{k,p} \nabla_i \hat{u}^k \underbrace{\hat{g}_{kp} \nabla_j \hat{u}^p}_{} \end{cases}$$

$\langle a, b\rangle = \sum_{k,l} g_{kl} a_k b_l$

$= \nabla_j(\hat{g}_{kp}\hat{u}^p)$, т.к. метрика согласована с ковар. произв. (т.е $\nabla g = 0$).

$= \nabla_j \hat{u}_k$ (индекс опустился) + ф-ла Лейб-Лейб

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j \hat{u}_i + \nabla_i \hat{u}_j - \nabla_i \hat{u}^k \nabla_j \hat{u}_k\right)}$$

ответ:

$$\Rightarrow \hat{E} = \varepsilon_{ij}\, \hat{\text{э}}^i \otimes \hat{\text{э}}^j = \frac{1}{2}\left(\nabla_j \hat{u}_i + \nabla_i \hat{u}_j - \nabla_i \hat{u}^k \nabla_j \hat{u}_k\right)\hat{\text{э}}^i \otimes \hat{\text{э}}^j.$$

② № 4.10

а) Найти компоненты поля перемещения в лагр. и эйлеровом описании при простом сдвиге
$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2 \\ x_2 = \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \xi_1 = x_1 - a x_2 \\ \xi_2 = x_2 \\ \xi_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) определить компоненты тензоров деформации Грина и Альманси, выразив их через производные поля перемещения.

в) Найти тензор малых деформаций. ← ну $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u^j}{\partial \xi_i}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Решение: а) $\bar{x} = \bar{u} + \bar{\xi}$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} - \bar{\xi} = \begin{pmatrix} a(t)\xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – в лагр. описании} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_2} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \hat{\partial}_1; \ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В эйлеровом: $\xi_2 = x_2 \Rightarrow \bar{u} = \begin{pmatrix} a(t)x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

б)

$\hat{\partial}_1 = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi_1} = (1; 0; 0)$

$\hat{\partial}_2 = (a; 1; 0)$

$\hat{\partial}_3 = (0; 0; 1)$

Тензор Альманси: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i}\hat{\partial}_j + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j}\hat{\partial}_i - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j}\right)$

$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$

$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} + (a,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (0,0,0)\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{a}{2}.$

$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$

$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left((a,0,0)\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} + (a,0,0)\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} - (a,0,0)\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \overset{?}{\frac{a^2}{2}}$?

$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon^{A}_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

не совпало!

Проверка: $\varepsilon^{A} = \frac{1}{2}(I - \hat{B}^T\hat{B}) = \frac{1}{2}\left(I - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(I - \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$\varepsilon^{K\Gamma} = \frac{1}{2}(\hat{A}^T\hat{A} - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I\right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

совпало!

Тензор Коши-Грина: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i}\mathring{\partial}_j + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j}\mathring{\partial}_i + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j}\right)$

$\mathring{\partial}_1 = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi_1} = (1, 0, 0)$

$\mathring{\partial}_2 = (0, 1, 0)$

$\mathring{\partial}_3 = (0, 0, 1)$

$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$

$\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (a,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{a}{2}$

$\varepsilon_{31}, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$

$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left((a,0,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (a,0,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (a,0,0)\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{a^2}{2}$

$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left((0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon^{K\text{-}\Gamma}_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ср. 2

в) $\varepsilon_{ij}^{\text{МД}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u^j}{\partial \xi_i}\right)$

$\bar{u} = \bar{x} - \bar{\xi} = \begin{pmatrix} a(t)\xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Вопрос: 1) $\hat{A}\,\overset{\circ}{\delta x_0}$ – имеет коорд. в каком базисе? в новом? в старом? или в ДСК?

2) $d\vec{\xi} \rightsquigarrow d\vec{x}$. $d\vec{x}$ – это новые оси? или новые оси – это $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i}$?

③ №4.11 при простом сдвиге $\begin{cases} x_1 = \xi_1 + a(t)\xi_2 \\ x_2 = \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 \end{cases}$ найти:

а) относит. удлинение матер. элемента с началом во всевозможных частицах ξ и ~~до~~ до деформации ∥ осям x_1, x_2, x_3 и это не $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3$?

б) всевозможные матер. элементы, для которых относит. удлинение в момент t – равно нулю

Решение: а) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}^T\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

было $d\bar{x}_1 \rightsquigarrow$ стало $\hat{A}\,d\bar{x}_1$

$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{|\hat{A}\,d\bar{x}_1|^2}{|d\bar{x}_1|^2} = \frac{d\bar{x}_1^T \hat{A}^T \hat{A}\, d\bar{x}_1}{|d\bar{x}_1|\cdot|d\bar{x}_1|} = \left(\frac{dx_1}{|d\bar{x}_1|}\right)^T \hat{A}^T\hat{A}\left(\frac{d\bar{x}_1}{|d\bar{x}_1|}\right)$

единичный вектор e_{x_1}, но в старых коорд. т.е. стоящ. матрицу $\hat{A}$.

$(\hat{e}_{x_1})^{-1} = \hat{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^2 = (1\,0\,0)\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \Rightarrow \lambda_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 0.$

это вектор, который после деформации волошо ∥ e_{x_2}. или ξ_2?

$(\hat{e}_{x_2})^{-1} = \hat{A}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ нормируем: $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (т.к. в исх. ск g была $= I$)

или тут брать (0,1,0)? $(a\,1\,0)\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2a;\ 2a^2+1;\ 1)\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a^2+1$

$\Rightarrow \lambda_2^2 = \frac{1}{a^2+1}(-a\,1\,0)\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}(0\,1\,0)\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} - 1$

$(\hat{e}_{x_3})^{-1} = \hat{A}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_3^2 = (0\,0\,1)\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1 \Rightarrow e_3 = 0$

б)

$\overset{\circ}{e}_1 \rightsquigarrow \hat{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{e}_1$

$\overset{\circ}{e}_2 \rightsquigarrow \hat{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\hat{e}_1 + \hat{e}_2$

вот эти коорд. – в старом или в новом базисе? вроде в новом, да?

$\overset{\circ}{e}_3 \rightsquigarrow \hat{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{e}_3$

$\lambda^2 = \frac{|d\bar{x}|^2}{|d\bar{\xi}|^2} = \frac{d\bar{\xi}^T \hat{A}^T\hat{A}\, d\bar{\xi}}{|d\bar{\xi}|^2} = \overset{\circ}{d\xi}{}^T \hat{A}^T\hat{A}\, \overset{\circ}{d\xi} \Rightarrow (x\,y\,z)\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{?}{=} 1 = (x+ya;\ ax+y(a^2+1);\ z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$= \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{1} + 2axy + y^2a^2 \overset{?}{=} 1 \Leftrightarrow$ ответ: $\boxed{ya(2x+ya)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y=0 \\ 2x+ya=0 \end{matrix}\right.}$

Вопросы:

1) Вот $d\vec{\xi} \rightsquigarrow d\vec{x}$.

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

новые базисные вектора в старых коорд?

$d\vec{x}$ – это новые оси?

Или новые оси – это $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i}$? Вроде же $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i}$? Или $\frac{\partial}{\partial x_i}$?

2) $\delta\vec{x} = \hat{A}\,\delta\vec{x}^{\,0}$.

$\hat{A}\begin{pmatrix} \text{вектор} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{вектор} \end{pmatrix}$ ← этот вектор в каком базисе? Вроде в новом уже?

То есть нужно $\hat{A}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ подставлять?

Или $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Или $\hat{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Вроде от $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

3) $x \overset{\text{коорд.}}{\rightsquigarrow} y$

$\Rightarrow \bar{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x_i} = a^i \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \underbrace{\left(a^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{новые коорд}} \frac{\partial}{\partial y_j}$

$\hat{A} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dots & \end{pmatrix}$

$\tilde{e}_1$

$\hat{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$?

И тут как будто $\hat{A}\begin{pmatrix} \text{старое} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{новое} \end{pmatrix}$ в новом базисе.

$\frac{\partial \vec{y}}{\partial x_1}$ ← не разложение нового базисного вектора по старому

$x = c\tilde{x}$

$\tilde{e} = ec$

$\frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_j}$

$\hat{B} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \; \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \; \frac{\partial x_3}{\partial y_1}\right.$

4) Вот вектор $(0,1,0) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – это в старом базисе или в новом?

вроде в старом т.к. мы так столбцы $\hat{A}$ строили.

но $\delta\vec{x} = \hat{A}\,\delta\vec{x}^{\,0}$

$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – в раскладе по новому базису должен иметь $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

но $\hat{A}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Проблема?

$\delta\hat{x} = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}}{\partial x^0_i}}_{\text{новый базис}} \underbrace{\delta x^{0i}}_{\text{старые коорд.}}$ Что за бред?