06.10.20. Спецкурс Бул. ДЗ 5. Токаева Александра 409

① Пусть $\le_b$ — полный порядок всех рисков для лица $b \in B$

Определим $\le_a$ так: $X \le_a Y \Leftrightarrow X \le_b Y \ \forall b \in B$.

Док-ть, что $\le_a$ — это частичный порядок.

Решение: 1) Транзитивность $\begin{cases} X \le_a Y \\ Y \le_a Z \end{cases} \Rightarrow X \le_a Z$

имеем: $\begin{cases} X \le_a Y \Leftrightarrow X \le_b Y \ \forall b \in B \\ Y \le_a Z \Leftrightarrow Y \le_b Z \ \forall b \in B \end{cases} \underset{\text{фикс}}{\Rightarrow} \forall b \in B: \ X \le_b Y \le_b Z$

$\Rightarrow X \le_b Z \ \forall b \in B$ — а это и есть $X \le_a Z$.
(т.к $\le_b$ — порядок)

2) рефлексивность: $X \le_a X$

да, т.к $X \le_a X \Leftrightarrow X \le_b X \ \forall b \in B$ — а это верно, т.к $\le_b$ — порядок

3) антисимм: $\begin{cases} X \le_a Y \\ Y \le_a X \end{cases} \Rightarrow X = Y$.

да, т.к $\begin{cases} X \le_b Y \ \forall b \in B \\ Y \le_b X \ \forall b \in B \end{cases} \Rightarrow$ поскольку $\le_b$ — порядок, то $\forall b \in B: X = Y$.

Причем $\le_b$ — неполный порядок, т.к не обязательно $\begin{cases} \text{либо } X \le_b Y \ \forall b \in B \\ \text{либо } Y \le_b X \ \forall b \in B \end{cases}$,

т.к может для некот $\begin{cases} b_1 \in B: X \le_{b_1} Y \\ b_2 \in B: X \ge_{b_2} Y. \end{cases}$

② Пусть $X \le_{st} Y$
можно ли (на том же самом вер. пр-ве) найти $\tilde{Y}: \begin{cases} X \le_s \tilde{Y} \\ \tilde{Y} \overset{d}{=} Y \end{cases}$

Решение: $X_1 \le_{st} X_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_1 \le_{st} F_2$

т.е $F_1(t) \ge F_2(t) \ \forall t$

$X_1 \le_s X_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} P(X_1 \le X_2) = 1$.

имеем: $F_X(t) \ge F_Y(t) \ \forall t$ — т.к $X \le_{st} Y$

подставим $t := X$

$\Rightarrow F_X(X) \ge F_Y(X)$

$\Rightarrow$ (поскольку F_Y^{-1} — возрастающая, т.к F_Y — это ф.р):

$\tilde{Y} := F_Y^{-1}(F_X(X)) \ge X$

Заметим, что $F_{\tilde{Y}}(x) = P(F_Y^{-1}(F_X(X)) \le x) = P(F_X(X) \le F_Y(x)) = P(X \le F_X^{-1}(F_Y(x))) =$

$= F_X(F_X^{-1}(F_Y(x))) = F_Y(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{Y} \overset{d}{=} Y \\ \tilde{Y} \ge X \end{cases}$ чтд.

③ Док-ть св-во 3° через опр. свертки.

Верны ли св-ва 1°; 2°; 4° для стох. порядка?

Решение: (3°): Для $F_1 F_2 G \in B_<$: $F_k * G \in B_<$; $k=1,2$

$$F_1 < F_2 \Rightarrow F_1 * G < F_2 * G$$

У нас $<$ - это $\underset{st}{<}$ $\quad F(t) \geq G(t)\ \forall t$

Хотим: $F \underset{st}{<} G \Rightarrow F*P \underset{st}{<} G*P$

$$(F*P)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-x)\,dP(x) \underset{\substack{\uparrow \\ F \underset{st}{<} G}}{\geq} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-x)\,dP(x) = (G*P)(t)\quad \forall t$$

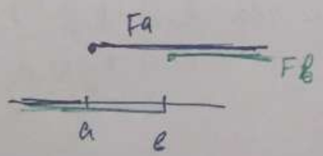
$$\Rightarrow F*P \underset{st}{<} G*P$$

Св-ва 1°; 2°; 4°: (1°): $F_1 \underset{st}{<} F_2 \Rightarrow m_1 \le m_2$

Верно, т.к. $EX = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\,dx = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x)\,dx$

$\Rightarrow$ если $F_1 \underset{st}{<} F_2$, т.е. $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$, то и $m_1 = EX_1 = \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\,dx \le \int_0^{+\infty} \bar{F}_2(x)\,dx = EX_2 = m_2$.

(2°) $a \le b \Leftrightarrow \theta_a < \theta_b$.



Ну верно, что $F_a(t) \geq F_b(t)$

$\Updownarrow_{a \le b} \Rightarrow$ верно

(4°) $\forall c > 0 \in \mathbb{R}$: $F_1 \underset{st}{<} F_2 \overset{?}{\Rightarrow} F_1^c \underset{st}{<} F_2^c$, где $F^c(x) = F(\frac{x}{c})$.

$F_1 \underset{st}{<} F_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} F_1(t) \geq F_2(t)\ \forall t$.

$\Rightarrow F_1(\frac{t}{c}) \geq F_2(\frac{t}{c})\ \forall t, \forall c > 0$ — т.к. просто замена $\tilde{t} = \frac{t}{c}$.

А это и есть опр того, что $F_1^c \underset{st}{<} F_2^c$

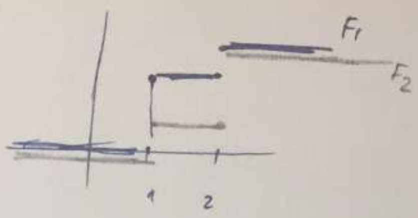
$\Rightarrow$ Св-ва 1°; 2°; 3°; 4° - все верны для $\underset{st}{<}$.

④ Сохраняется ли стохаст. порядок при взятии составных распр?

Хотим:
$$\left.\begin{array}{l} N_1 \underset{st}{<} N_2 \\ X_k \underset{st}{<} Y_k \\ \{X_k\}, \{Y_k\} \perp\!\!\!\perp N_1; N_2 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{N_1} X_k \underset{st}{<} \sum_{k=1}^{N_2} Y_k.$$

Ответ: нет

Пусть $N_1 = \begin{cases} 1, & p = \frac{3}{4} \\ 2, & p = \frac{1}{4} \end{cases}$



$N_2 = \begin{cases} 1, & p = 1/4 \\ 2, & p = 3/4 \end{cases}$

Тогда $F_1(t) \geq F_2(t)\ \forall t \Rightarrow N_1 \leq_{st} N_2$ по опр.

Пусть $X_1 = Y_1$; $X_2 = Y_2$ $\Rightarrow \begin{cases} X_1 \leq_{st} Y_1 \\ X_2 \leq_{st} Y_2 \end{cases}$; $X_1 = \begin{cases} 0, & p = \frac{1}{2} \\ 1, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 0, & p = \frac{1}{2} \\ -3, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$

но $F_1(-1) = P\left(\sum_{k=1}^{N_1} X_k \leq -1\right) \underset{X_k \perp N_1}{=} P(N_1 = 1) \cdot P(X_1 \leq -1) + P(N_1 = 2) \cdot P(X_1 + X_2 \leq -1)$

$= \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot P(X_2 = -3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$F_2(-1) = P\left(\sum_{k=1}^{N_2} X_k \leq -1\right) = P(N_2 = 1) \cdot P(X_1 \leq -1) + P(N_2 = 2) \cdot P(X_1 + X_2 \leq -1) =$

$= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot P(X_2 = -3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$

$\Rightarrow F_1(-1) = \frac{1}{8} < \frac{3}{8} = F_2(-1)$ $\Rightarrow$ не верно, что $F_1(t) \geq F_2(t)\ \forall t$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N_1} X_k \not\leq_{st} \sum_{k=1}^{N_2} Y_k.$

5. Док-ть: $EX \leq_{sl} X$.

Решение: $X_1 \leq_{sl} X_2$, если $E(X_1 - d)^+ \leq E(X_2 - d)^+\ \forall d$.

Хотим: $E(EX - d)^+ \overset{?}{\leq} E(X - d)^+$

Если $EX \geq d$, то $\begin{cases} E(EX - d)^+ = E(EX - d) = EX - d \\ E(X - d)^+ \geq E(X - d) = EX - d \end{cases}$ $\Rightarrow E(EX - d)^+ \leq E(X - d)^+$

Если $EX < d$, то $\begin{cases} E(EX - d)^+ = 0. \\ E(X - d)^+ \geq 0 \text{ всегда} \end{cases}$ $\Rightarrow E(EX - d)^+ \leq E(X - d)^+$ чтд.