Лекция №1

Раздел 1. Введение.

Задача 1. Статистический анализ семипараметрических моделей.

Пусть $S_0, S_1, \ldots, S_n$ - стоимости ценных бумаг, например, акций. Положим

$$u_t := \ln S_t / S_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, n.$$

$\{u_t\}$ - логарифмические приращения.

Тогда $S_t = S_{t-1} e^{u_t} = \ldots = S_0 e^{u_1 + \ldots + u_n}$.

Эволюцию $\{u_t\}$ можно описывать разными моделями.

1) Авторегрессия порядка p ($AR(p)$-модель).

$$(1) \quad u_t = \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Здесь $\beta_j \in R^1$ - (обычно) неизвестные параметры; $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., $E\varepsilon_1 = 0$, $0 < E\varepsilon_1^2 < \infty$.

Начальные значения $u_{1-p}, u_{2-p}, \ldots, u_0$ не зависят от $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$.

Чем полезно уравнение (1)?

Ради простоты рассмотрим $AR(1)$- модель

(2) $$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \ t=1,\dots,n; \ u_0 = 0, \ \beta \in R.$$

Если задана модель (2), то какая задача для неё важнейшая? Это оптимальный прогноз!

Пусть $\mathcal{F}_n = \sigma\{u_1,\dots,u_n\}$, и $\varphi(u_1,\dots,u_n) \in R^1$ - борелевская функция. Задача построения оптимального с.к. прогноза ставится так: надо найти борелевскую φ, которая решает задачу

(3) $$E\left(u_{n+1} - \varphi(u_1,\dots,u_n)\right)^2 \xrightarrow[\substack{\varphi(u_1,\dots,u_n): \\ E\varphi^2(u_1,\dots,u_n)<\infty}]{} \min$$

Решение задачи (3) (обозначим его $u^*_{n+1} = \varphi^*(u_1,\dots,u_n)$) хорошо известно:

$$u^*_{n+1} = \varphi^*(u_1,\dots,u_n) = E(u_{n+1}/\mathcal{F}_n) =$$
$$= E(u_{n+1}/u_1,\dots,u_n)$$

Имеем: $E(u_{n+1}/u_1,\dots,u_n) = E(\beta u_n + \varepsilon_{n+1}/u_1,\dots,u_n) =$
$$= E(\beta u_n/u_1,\dots,u_n) + E(\varepsilon_{n+1}/u_1,\dots,u_n) =$$
$$= \beta u_n + E(\varepsilon_{n+1}/u_1,\dots,u_n).$$

Но $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} = \dots =$
$$= \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \dots + \beta^{t-1}\varepsilon_1.$$

Это означает, что сл. в. ε_{t+1} и $\{u_t, u_{t-1}, \dots, u_1\}$ независимы в силу независимости $\{\varepsilon_t, t \geq 1\}$.

Значит, $E(\varepsilon_{n+1} / u_1, \dots, u_n) = E\,\varepsilon_{n+1} = 0.$

Окончательно, $u^*_{n+1} = \beta u_n.$

Ответ замечательно простой, но ведь β на практике никогда мы не знаем!

(кстати, предположение о независимости $\{\varepsilon_t\}$ важно. Нет независимости, и предыдущее рассуждение не проходит).

Итак, новая задача: как оценить „хорошо" β по наблюдениям $u_1, \dots, u_n$?

Если $\hat{\beta}_n$ – „хорошая" оценка, то $\hat{u}_{n+1} = \hat{\beta}_n u_n$ – „хороший" прогноз.

Пусть $\varepsilon_1 \sim g(x)$, и пл. в. $g(x)$ (временно!) известна. Положим

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T, \quad \mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)^T, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\beta & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $\mathcal{E} = B\mathcal{U}$, $\mathcal{U} = B^{-1}\mathcal{E}$. Ясно: $g_{\mathcal{E}}(x) = \prod_{t=1}^{n} g(x_t)$

Значит $g_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n, \beta) = g_{\mathcal{E}}(Bx) \cdot \frac{1}{|\det B^{-1}|}$

$$= \prod_{t=1}^{n} g(x_t - \beta x_{t-1}), \quad x_0 = 0.$$

(Мы использовали след. факт: если $\eta = A\xi$, то $f_\eta(x) = \frac{1}{|\det A|} f_\xi(A^{-1}x)$.)

Оценка максимального правдоподобия (о.м.п.) для β, это решение задачи

$$(4) \quad \ln g_n(u_1, \ldots, u_n, \theta) = \sum_{t=1}^{n} \ln g(u_t - \theta u_{t-1}) \to \max_{\theta \in R^1}$$

Пусть $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, т.е. $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$, и дисперсия σ^2 известна. Тогда (4) имеет вид

$$\sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(u_t - \theta u_{t-1})^2}{2\sigma^2}} \to \max_{\theta \in R^1}.$$

Эта задача эквивалентна задаче

$$(5) \quad \sum_{t=1}^{n} (u_t - \theta u_{t-1})^2 \to \min_{\theta \in R^1}$$

Задача (5) эквивалентна уравнению

$$\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}(u_t - \theta u_{t-1}) = 0.$$

Т.е. окончательно, о.м.п. при $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2)$

$$\boxed{\hat{\beta}_{n,\,mh} = \sum_{t=1}^{n} u_{t-1} u_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} u_{t-1}^2}$$

Каковы свойства $\hat{\beta}_{n,mk}$?

Пусть $\mathcal{K}(0,1)$ означает распределение Коши с плотностью $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть $w(s)$, $s\in[0,1]$, стандартный винеровский процесс, т.е. гауссовский процесс с п.н. непрерывными траекториями, $Ew(s)=0$, $\mathrm{Cov}(w(t),w(s))=\min(t,s)$.

Пусть для $|\beta|=1$ $H(\beta)$ есть распределение сл.в.

$$\beta\frac{\int_0^1 w(s)\,dw(s)}{2^{1/2}\int_0^1 w^2(s)\,ds}=\beta\frac{w^2(1)-1}{2^{3/2}\int_0^1 w^2(s)\,ds}$$

Пусть $$d_n^2(\beta)=\begin{cases}\dfrac{n}{1-\beta^2}, & |\beta|<1,\\ n^2/2, & |\beta|=1,\\ \dfrac{\beta^{2n}}{(\beta^2-1)^2}, & |\beta|>1.\end{cases}$$

Будет показано, что $d_n^2(\beta)\sim J_n(\beta)$ при $n\to\infty$

<u>Теорема</u>

Если $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл.в. Тогда $\hat{\beta}_{n,mk}=\frac{\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}u_{t-1}}$

$$d_n^{\cancel{2}}(\beta)(\hat{\beta}_{n,mk}-\beta)\xrightarrow{d}\begin{cases}N(0,1), & |\beta|<1,\\ H(\beta), & |\beta|=1,\\ \mathcal{K}(0,1), & |\beta|>1\end{cases}$$

Каковы свойства $\hat{\beta}_{n,mk}$?

Пусть $\mathcal{K}(0,1)$ означает распределение Коши с плотностью $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть $w(s)$, $s\in[0,1]$, стандартный винеровский процесс, т.е. гауссовский процесс с п.н. непрерывными траекториями, $E\,w(s)=0$, $\mathrm{Cov}(w(t),w(s))=\min(t,s)$.

Пусть для $|\beta|=1$ $H(\beta)$ есть распределение сл.

$$\beta\,\frac{\int_0^1 w(s)\,dw(s)}{2^{1/2}\int_0^1 w^2(s)\,ds}=\beta\,\frac{w^2(1)-1}{2^{3/2}\int_0^1 w^2(s)\,ds}$$

Пусть $d_n^2(\beta)=\begin{cases}\frac{n}{1-\beta^2}, & |\beta|<1,\\ n^2/2, & |\beta|=1,\\ \frac{\beta^{2n}}{(\beta^2-1)^2}, & |\beta|>1.\end{cases}$

Чем больше фишероская информация

Тем меньше предельная дисперсия

фишер информ

Будет показано, что $d_n^2(\beta)\sim I_n(\beta)$ при $n\to\infty$

<u>Теорема</u>

Если $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. $N(0,1)$ сл.в. Тогда $\hat{\beta}_{n,mk}=\frac{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}}$

$$d_n^{\cancel{-1}}(\beta)\left(\hat{\beta}_{n,mk}-\beta\right)\xrightarrow{d}\begin{cases}N(0,1), & |\beta|<1,\\ H(\beta), & |\beta|=1,\\ \mathcal{K}(0,1), & |\beta|>1\end{cases}$$

Задача 3 Непараметрическое оценивание.

$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, n$; $u_0 = 0$; $|\beta| < 1$

Для гауссовских $\{\varepsilon_t\}$ о.м.п. – это решение уравнения (7) $\sum_{t=1}^{n} u_{t-1}(u_t - \theta u_{t-1}) = 0$.

Но если $\{\varepsilon_t\}$ негауссовские и их пл. в. неизвестн. Альтернатива уравнению (7) – GM уравнение

$$\sum_{t=1}^{n} \varphi(u_{t-1}) \Psi(u_t - \theta u_{t-1}) = 0 \tag{8}$$

каковы свойства оценок, определенных (8)? Будут ли они робастны?

Задача 4 Оценивание характеристик стационарных последовательности.

Пусть $\{u_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, стационарная в широком смысле последовательность (т.е. временной ряд). Пусть $E u_t = m$, $R(\tau) = \mathrm{Cov}(u_t, u_{t+\tau})$, $F(\lambda)$ и $f(\lambda)$ с $\lambda \in [-\pi, \pi]$ – среднее, ковариация, спектральная функция и спектральная плотность $\{u_t\}$.

как их оценить?

Раздел 2. Примеры стационарных последовательностей

Пусть $\{u_t\}$, $t \in Z$, $u_t \in R^1$, последовательность сл. в., определенных на одном $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Интерпретируем t как время.

Δ. */ $\{u_t\}$ стационарна в широком смысле, если $Eu_t = m\ (=const)$, $Cov(u_t, u_{t+\tau}) :=$
$= E(u_t - m)(u_{t+\tau} - m) = Cov(u_0, u_\tau) = R(\tau)\ \forall t, \tau \in Z.$

*/ $\{u_t\}$ стационарна в узком смысле (строго стационарна), если $\forall k \in N$ и $t_1, t_2, \dots, t_k, \tau \in Z$

$$(u_{t_1}, \dots, u_{t_k}) \overset{d}{=} (u_{t_1+\tau}, \dots, u_{t_k+\tau}).$$

Свойства ковариаций

① $R(\tau) = R(-\tau)$,

т.к. $R(\tau) = Cov(u_0, u_\tau) = Cov(u_\tau, u_0) = Cov(u_0, u_{-\tau}) = R(-\tau)$

② $|R(\tau)| \le R(0) = Du_t$

Следует из нер-ва Коши-Буняковского.

③ $R(\tau)$ неотрицательно определена, т.е.: $\forall$ комплексных $z_1, \dots, z_k$ и $n_1, \dots, n_k \in Z$

$$\sum_{i,j=1}^{k} z_i \overline{z_j} R(n_i - n_j) \ge 0.$$

Действ., $0 \le E\left|\sum_i z_i (u_{n_i} - m)\right|^2 =$

$$= E\sum_{i,j} z_i \bar{z}_j (u_{n_i} - m)(u_{n_j} - m) = \sum_{i,j} z_i \bar{z}_j R(n_j - n_i).$$

(4) Спектральное представление $R(\tau)$ (теорема Герглотца).

Если $\{u_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, стационарная последовательность, то существует единственная функция $F(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, такая что:

(a) $F(\lambda)$ непрерывна справа на $[-\pi, \pi)$;

(b) $F(\lambda)$ не убывает;

(c) $F(\lambda)$ имеет симметричные относительно нуля приращения;

(d) $F(-\pi) = 0$;

(f) $R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda) \left(= \int_{-\pi}^{\pi} \cos\lambda\tau \, dF(\lambda) \right)$.

Δ. */ $F(\lambda)$ из п. (4) называется спектральной функцией.

*/ Если существует борелевская ф-ия $f(\lambda) \geq 0$, такая что $F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(s) ds$,

то $f(s)$ называется спектральной плотностью

$R(0) = D u_t = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda$. Т.е. $f(\lambda)$ характеризует распределение средней мощности по частотам.

средняя мощность

Теорема 1

Пусть $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R(\tau)| < \infty$. Тогда существует и непрерывная спектральная плотность

(1) $$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau}R(\tau) = \frac{1}{2\pi}R(0) + \frac{1}{\pi}\sum_{\tau\geq 1}\cos\lambda\tau\, R(\tau)$$

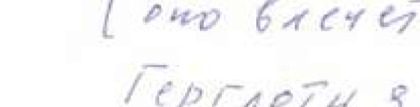
Док-во. Ряд $\frac{1}{2\pi}\sum_{\tau} e^{-i\lambda\tau}R(\tau)$ сходится равномерно по λ, а слагаемые непрерывны.

Значит, $f(\lambda)$ в (1) существует и непрерывна.
Поэтому при любом $\lambda \in [-\pi, \pi]$ определен интеграл Лебега $F(\lambda) := \int_{-\pi}^{\lambda} f(\nu)\,d\nu$.

Нам достаточно проверить справедливость условий (a), (c), (d) и (f) и условие $f(\lambda) \geq 0$ (оно влечет (b)). Тогда в силу теоремы Герглотца $F(\lambda)$ будет спектральной функцией, а $f(\lambda)$ — спектральной плотностью.

Условие (a) выполнено, т.к. $f(\lambda)$ непрерывна.

Условие (c) выполнено, т.к. $f(\lambda)$ четная.



$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\nu)\,d\nu = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$$

Условие (d) $F(-\pi) = 0$ очевидно.

Проверим (1). Имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(\tau-s)} R(s)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(s-s)} R(\tau)\, d\lambda = R(\tau).$$

Осталось проверить, что $f(\lambda) \geq 0$.

Т.к. $f(\lambda) = \overline{f(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} \sum e^{i\lambda\tau} R(\tau)$, покажем, что $\overline{f}(\lambda) \geq 0$. Пусть $S_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau| \leq n} e^{i\lambda\tau} R(\tau)$.

Ряд Фурье ф-ии $\overline{f}(\lambda)$ имеет вид $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} c_\tau e^{i\lambda\tau}$, где $c_\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(\lambda) e^{-i\lambda\tau} d\lambda =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda = \frac{1}{2\pi} R(\tau).$$

Значит, $S_n(\lambda)$ – частная сумма ряда Фурье $\overline{f}$.

В силу теоремы Фейера, если $\overline{f}(\lambda)$ непр., то

$$\frac{S_0(\lambda) + \ldots + S_{n-1}(\lambda)}{n} \to \overline{f}(\lambda) \text{ равномерно по } \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{2}$$

Но $\frac{S_0(\lambda) + \ldots + S_{n-1}(\lambda)}{n} = \frac{1}{2\pi n} \sum_{|\tau| \leq n-1} (n - |\tau|) \times$

$\times e^{i\lambda\tau} R(\tau)$. Но $\sum_{|\tau| \leq n-1} (n-|\tau|) e^{i\lambda\tau} R(\tau) =$

$$= \sum_{t,s=1}^{n} e^{i\lambda t} \cdot e^{-i\lambda s} R(s-t) \geq 0$$

в силу неотрицательной определенности $R(\tau)$.

Значит, в (2) левая часть неотрицательна, а потому $\overline{f}(\lambda) = f(\lambda) \geq 0$. Теорема доказана.

Пример 1 Белый шум.

Последовательность $\{\varepsilon_t\}$ называется белым шумом в широком смысле, если $E\varepsilon_t = 0$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \sigma^2 \delta_{ts}$. Т.к. $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = \operatorname{cov}(\varepsilon_0, \varepsilon_\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$, $\{\varepsilon_t\}$ – стационарная последовательность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} R(0) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

т.е. мощность белого шума равномерно распределена по частотам.

Пример 2. Авторегрессия $AR(p)$.

$AR(p)$ уравнение

(3) $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$,

$\beta_1, \ldots, \beta_p \in R^1$, $\{\varepsilon_t\}$ – белый шум.

Характеристическое уравнение

(4) $x^p = \beta_1 x^{p-1} + \ldots + \beta_p$.

Δ. Решение уравнения (1) - последовательность $\{u_t\}$ для которой левая часть равна правой п.н.

<u>Теорема 2</u>

① Если $\{\varepsilon_t\}$ - белый шум, а корни характеристического уравнения (2) по модулю меньше единицы, то уравнение (1) имеет п.н. единственное стационарное решение. Оно задается скользящим средним

$$(5) \quad u_t = \sum_{j\geq 0} \gamma_j \varepsilon_{t-j}.$$

Ряд в (5) сходится в ск. (в L^2), а $\{\gamma_j\}$ определяются соотношением

$$\gamma_j = \beta_1 \gamma_{j-1} + \dots + \beta_p \gamma_{j-p}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$\gamma_0 = 1$, $\gamma_j = 0$ при $j < 0$.

При этом $|\gamma_j| \leq c\lambda^j$, $0 < \lambda < 1$

② Если $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в., то $\{u_t\}$ из (5) - строго стационарная последовательность.

Замечания о с.к. сходимости (сход. в L^2)

Пусть $\xi_n, \xi \in R^1$ и определены на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E\xi_n^2 < \infty$, $E\xi^2 < \infty$.

Δ. $\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi$, $n \to \infty$, $\Leftrightarrow E(\xi_n - \xi)^2 \to 0$.

Ясно, что если $\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi$, а $\eta \stackrel{п.н.}{=} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{с.к.} \eta$.

Теорема 3 (критерий Коши).

$$\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi \Leftrightarrow E(\xi_n - \xi_m)^2 \to 0, \quad n, m \to \infty$$

Утверждение 1

① Если $\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi$, то $E\xi_n \to E\xi$, $E\xi_n^2 \to E\xi^2$.

② Если $\xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{с.к.} \eta$, то $E\xi_n\eta_n \to E\xi\eta$

Док-во. ① $|E\xi_n - E\xi| \le E|\xi_n - \xi| \le$
$\le \{E(\xi_n - \xi)^2\}^{1/2} \to 0$. в силу нер-ва Коши-Буняковского. Остальные пункты доказываются аналогично.

Δ Пусть $E\xi_k^2 < \infty$. Ряд $\sum\limits_{k \ge 1} \xi_k$ сходится в с.к. к сл.в. S, $ES^2 < \infty$, если

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{с.к.} S, \quad n \to \infty$$

Тогда ряд $\sum_{k\geq 1} \xi_k$ с.к. сходится т. и т.т., когда

$$E(S_n - S_m)^2 \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Утверждение 2.

Если ряд $\sum_{k\geq 1} \xi_k$ с.к. сходится, то

$$E \sum_{k\geq 1} \xi_k = \sum_{k\geq 1} E\xi_k.$$

Док-во. $S_n \xrightarrow{с.к.} S$, значит в силу п. 1 Утверждения 1

$$ES_n = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k \to ES = E\sum_{k\geq 1} \xi_k.$$

Но это означает, что ряд $\sum_{k\geq 1} E\xi_k$ сходится и $\sum_{k\geq 1} E\xi_k = E\sum_{k\geq 1} \xi_k$. ч.т.д.

Замечание

Пусть L^2 - норм.пр. лин. пр-во классов п.н. эквивалентных сл. в. с нормой

$$\|\xi\|_{L^2} = (E\xi^2)^{1/2}$$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi \Leftrightarrow \|\xi_n - \xi\|_{L^2} = \{E(\xi_n - \xi)^2\}^{1/2} \to 0$

т.е. $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{с.к.} \xi, \quad n \to \infty$.

Док-во теоремы 2.

Докажем в случае $p=1$; общий случай см. [Андерсон, Статистика врем. рядов, М., Мир, 1976], гл. 5. Итак,

(6): $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t,\ t\in\mathbb{Z}$,

Хар. ур-ие $x=\beta$, $|\beta|<1$, $\gamma_j=\beta^j$ для $j\geq 0$.

① существование решения

Ряд (5) имеет вид $u_t=\sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$. Он ск. сходится, т.к. $E\left(u_t^{(n)}-u_t^{(m)}\right)^2=$

$$=E\left(\sum_{j=\min(m,n)}^{\max(m,n)}\beta^j\varepsilon_{t-j}\right)^2=E\varepsilon_1^2\sum_{j=\min(m,n)}^{\max(m,n)}\beta^{2j}\to 0$$

при $m,n\to\infty$ для $|\beta|<1$.

Далее, если $u_t=\sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$, то п.н.

$$u_t=\varepsilon_t+\sum_{j\geq 1}\beta^j\varepsilon_{t-j}=\varepsilon_t+\beta\sum_{j\geq 1}\beta^{j-1}\varepsilon_{t-j}=$$

$$=(j-1=j')=\varepsilon_t+\beta\sum_{j'\geq 0}\beta^{j'}\varepsilon_{t-1-j'}=\varepsilon_t+\beta u_{t-1}.$$

Т.е. $\{u_t\}$ такая посл., что

$$u_t\overset{\text{п.н.}}{=}\varepsilon_t+\beta u_{t-1},$$ т.е. $\left\{u_t=\sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}\right\}$

есть решение (6), ч.т.д.

② Стационарность. Если $u_t=\sum_{j\geq 0}\beta^j\varepsilon_{t-j}$ и ряд с.к. сходится, то

$$E u_t = E \sum_{j\geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j\geq 0} E(\beta^j \varepsilon_{t-j}) = 0.$$

Для $\tau \geq 0$ $\quad Cov(u_t, u_{t+\tau}) = E(u_t u_{t+\tau}) =$

$$= E\Big(\sum_{j\geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j} \cdot \sum_{s\geq 0} \beta^s \varepsilon_{t+\tau-s}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Big(\sum_{j=0}^{n} \beta^j \varepsilon_{t-j} \cdot \sum_{s=0}^{n} \beta^s \varepsilon_{t+\tau-s}\Big) =$$

$\left(t-j = t+\tau-s,\ \underline{s = j+\tau} \text{ и такое } s \text{ сущ.!}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} E\left(\beta^{2j+\tau} \varepsilon_1^2\right) = \frac{E\varepsilon_1^2 \beta^\tau}{1-\beta^2}.$$

Для $\tau < 0$, аналогично,

$$Cov(u_t, u_{t+\tau}) = \frac{E\varepsilon_1^2 \beta^{-\tau}}{1-\beta^2}$$

Окончательно, $Cov(u_t, u_{t+\tau}) = \dfrac{E\varepsilon_1^2 \beta^{|\tau|}}{1-\beta^2}$, от t не зав. ч.т.д.

③ Единственность стац. решения

Пусть $\tilde{u}_t$ - стац. решение. Тогда п.н. $\tilde{u}_t =$
$= \varepsilon_t + \beta \tilde{u}_{t-1} = \varepsilon_t + \beta(\varepsilon_{t-1} + \beta \tilde{u}_{t-2}) = \ldots = \sum_{j=0}^{k-1} \beta^j \varepsilon_{t-j} +$
$+ \beta^k \tilde{u}_{t-k}$. Но $E(\beta^k \tilde{u}_{t-k})^2 = \beta^{2k} E\tilde{u}_0^2 \to 0$, $k\to\infty$.

Т.е. $\tilde{u}_t = \sum_{j\geq 0} \beta^j \varepsilon_{t-j}$, и ряд с.к. сход.

ч.т.д.

④ Строгая стационарность

Пусть $u_t = \sum\limits_{j \geq 0} \beta^j \xi_{t-j}$, и $\{\xi_t\}$ н.о.р. сл.в.

Надо показать: если $U(\tau) =$
$= (u_{t_1+\tau}, u_{t_2+\tau}, \dots, u_{t_k+\tau})$, то

$$U(\tau) \stackrel{d}{=} U(0).$$

Пусть $U_n(\tau) = (u^{(n)}_{t_1+\tau}, \dots, u^{(n)}_{t_k+\tau})$, где

$$u^{(n)}_t = \sum_{j=0}^{n} \beta^j \xi_{t-j}.$$

Задача 1

Если $\{\xi_t\}$ - строго стационарна, то $\{\eta_t = f(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-k})\}$ тоже строго стационарна (f - борел.)

Значит, по сл. $\{u^{(n)}_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, строго стац. Значит, распределение вектора $U_n(\tau)$ от τ не зависит. Но $U_n(\tau) \xrightarrow{P} U(\tau) \Rightarrow$ $U_n(\tau) \xrightarrow{d} U(\tau) \Rightarrow$ распр. $U(\tau)$ от τ не зависит: $U(\tau) \stackrel{d}{=} U(0)$. ч.т.д.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1

Пусть $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл. в. Расcм. строго стац. решение $u_t = \sum_{j\geq 0} \gamma_j \varepsilon_{t-j}$. Тогда ε_t и $\{u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots\}$ независимы.

Замечание 2

Если $\mathcal{E} = \{\varepsilon_t\}$, $\mathcal{E}' = \{\varepsilon'_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Тогда $u_t(a\mathcal{E} + b\mathcal{E}') \overset{п.н.}{=} a\, u_t(\mathcal{E}) + b\, u_t(\varepsilon')$,

т.е. AR(p) - линейная модель.

<u>Оптимальный L^2-прогноз</u> u^*_{n+1} величины u_{n+1} по величинам $u_1, \ldots, u_n$ - это решение задачи

$$E(u_{n+1} - u^*_{n+1})^2 \to \inf_{\substack{u^*_{n+1} - \mathcal{F}_n\text{-изм.} \\ E(u^*_{n+1})^2 < \infty}}$$

Здесь $\mathcal{F}_n$ - сигма-алгебра, порожденная наблюдениями $u_1, \ldots, u_n$, т.е.

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{u_1, \ldots, u_n\}.$$

Тогда при $n \geq p$ имеем для н.о.р. $\{\varepsilon_t\}$:

$$\text{п.н.}\quad u^*_{n+1} = E(u_{n+1}/\mathcal{F}_n) \overset{\text{п.н.}}{=} E\left(\varepsilon_{n+1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{n+1-j} / \mathcal{F}_n\right) =$$

$$= E(\varepsilon_{n+1}/\mathcal{F}_n) + E\left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{n+1-j} / \mathcal{F}_n\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{n+1-j}.$$ Прогноз линеен!

с.к. ошибка прогноза

$$E\left(u_{n+1}-u_{n+1}^{*}\right)^2 = E\left(u_{n+1}-\sum_{j=1}^{p}\beta_j u_{n+1-j}\right)^2 =$$

$$= E\varepsilon_{n+1}^2 = \sigma^2$$

<u>Задача 1</u> (см. [А.Н. Ширяев. Вероятность, гл. VI])

Пусть $\{\xi_t\}, t\in\mathbb{Z}$, – стационарная послед. со спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$.

Пусть $\eta_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \xi_{t-j}$, $\sum_j |a_j| < \infty$.

(Это линейный фильтр с частотной характеристикой $\varphi(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\lambda j}$.)

Тогда:

① Ряд для $\{\eta_t\}$ сходится в L^2 (в с.к.), последовательность $\{\eta_t\}$ стационарна.

② Существует спектральная плотность

$$f_\eta(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda).$$

<u>Вернемся к AR(p)-модели.</u> Ввиду теоремы

$$u_t = \sum_{j\geq 0}\gamma_j\varepsilon_{t-j},\ \{\varepsilon_t\} \text{ – белый}$$

шум, $|\gamma_j| \leq c\lambda^j$, $0<\lambda<1$.

Значит, $\sum_{j\geq 0}|\gamma_j| < \infty$, и в силу задачи 1 $\{u_t\}$ - стационарная последовательность (это мы уже знаем), и существует сп. плотность

$$f_u(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi},$$

где частотная характеристика

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j \geq 0} \gamma_j e^{-i\lambda j}, \quad \sigma^2 = E\xi_1^2.$$

Но как найти явно $\varphi(\lambda)$?

Т.к. $\varepsilon_t = u_t - \beta_1 u_{t-1} - \ldots - \beta_p u_{t-p}$, то

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} = |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 f_u(\lambda),$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j e^{-i\lambda j}$$

Значит, $f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|\tilde{\varphi}(\lambda)|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi\left|1 - \sum_{j=1}^{p} \beta^j e^{-i\lambda j}\right|}$

Заметим, что если знаменатель ноль, то $e^{i\lambda}$ корень характеристич. уравнения

$$x^p = \beta_1 x^{p-1} + \ldots + \beta_p,$$

и, притом, $|e^{i\lambda}| = 1$.

По предположениям теоремы 2 это невозможно

Замечание о терминологии.

Пусть Y - сл.в., а X - случайный вектор. Борелевская ф-ия $f(x) := E(Y/X=x)$ называется регрессией Y на X. Иногда говорят о регрессии $f(X)$.

Если $\{u_t\}, t \in \mathbb{Z}$, врем. ряд, то ф-ию

$$f(u_{t-1}, \dots, u_{t-p}) := E(u_t / u_{t-1}, \dots, u_{t-p})$$

называют авторегрессией.

Рассмотрим стох. ур-ие вида

$$u_t = f(u_{t-1}, \dots, u_{t-p}) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $f(\cdot)$ - бор., $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, ε_t и $\{u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$ независимы. Тогда

$$E(u_t / u_{t-1}, \dots, u_{t-p}) = f(u_{t-1}, \dots, u_{t-p})$$ и

потому ур-ие называют авторегрессионным уравнением. Саму посл. $\{u_t\}$ называют авторегрессионной последовательностью или кратко авторегрессией.

Частный случай этой ситуации - AR(p) модель вида

$$u_t = \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Это линейная авторегрессия порядка p.

AR(p)-модель с ненулевым средним.

$$v_t = \beta_1 v_{t-1} + \dots + \beta_p v_{t-p} + \nu + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

здесь $\nu \in \mathbb{R}$, ν - неизвестная константа; $\{\varepsilon_t\}$ - белый шум; корни хар. ур-ия

$$x^p = \beta_1 x^{p-1} + \dots + \beta_p$$

по модулю меньше единицы.

Пусть μ: $\nu = (1 - \beta_1 - \dots - \beta_p)\mu$, причем $1 - \beta_1 - \dots - \beta_p \neq 0$. Тогда

$$v_t - \mu = \beta_1 (v_{t-1} - \mu) + \dots + \beta_p (v_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Обозначим $v_t - \mu := u_t$, тогда

$$\begin{cases} v_t = \mu + u_t \\ u_t = \sum_{j=1}^{p} \beta_j u_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ясно, что стац. решение этой системы

$$v_t = \mu + \sum_{j \geq 0} \gamma_j \varepsilon_{t-j}.$$

Т.е. $E v_t = \mu = \dfrac{\nu}{1 - \beta_1 - \dots - \beta_p}$;

$$\mathrm{Cov}(v_t, v_{t+\tau}) = \mathrm{Cov}(u_t, u_{t+\tau}),$$

$$f_v(\lambda) = f_u(\lambda).$$

Пример 3. Скользящее среднее

$MA(q)$-уравнение

$$u_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

здесь $\{\varepsilon_t\}$ - белый шум; $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in R$.

Ясно, что $Eu_t = 0$,

$$\operatorname{cov}(u_t, u_{t+\tau}) = R(\tau) = \begin{cases} 0, & |\tau| > q \\ \sigma^2 \sum\limits_{j=0}^{q-|\tau|} \alpha_j \alpha_{j+|\tau|}, & |\tau| \le q, \end{cases}$$

$$\alpha_0 = 1$$

Значит, $\{u_t\}$ - стационарная последов.

Если $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., то $\{u_t\}$ - строго стационарна.

$$f_u(\lambda) = f_\varepsilon(\lambda) \left| 1 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j e^{-i\lambda j} \right|^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j e^{-i\lambda j} \right|^2.$$

Пример 4. $ARMA(p,q)$ - модель

$$u_t = \beta_1 u_{t-1} + \ldots + \beta_p u_{t-p} + \overbrace{\varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}}^{\delta_t}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Пусть корни характ. ур-ия авторегрессионной части

$$x^p = \beta_1 x^{p-1} + \ldots + \beta_p$$

по модулю меньше единицы.

Рассмотрим ряд

$$u_t = \sum_{j\geq 0} \gamma_j \delta_{t-j}.$$

Очевидно, он сходится в L^2 (в с.к.)

Непосредственно проверяется, что это решение ARMA-уравнения. $Eu_t =$

$= \sum_{j\geq 0} \gamma_j E\delta_{t-j} = 0$. Т.к. $\{\delta_t\}$ - стац. посл. со спектр. плотностью $f_\delta(\lambda)$, то

$$f_u(\lambda) = \Big|\sum_{j\geq 0} \gamma_j e^{-i\lambda j}\Big|^2 f_\delta(\lambda) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\big|1 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j e^{-i\lambda j}\big|^2}{\big|1 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j e^{-i\lambda j}\big|^2}.$$

Эта дробь несократима, если корни уравнений

$x^p = \beta_1 x^{p-1} + \dots + \beta_p$ (хар. ур-ие AR)

$x^q = -\alpha_1 x^{q-1} - \dots - \alpha_q$ (хар. ур-ие MA)

не имеют общих корней.

Пример 5 (ARCH-модель)

Engle (1982):
$$\begin{cases} u_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j u_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad u_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Здесь $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$;

$\alpha_j \geq 0$, $\alpha_p \neq 0$. Это ARCH(p)-модель.

ARCH(1):
$$(6) \quad \begin{cases} u_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2 \end{cases} \quad (\text{т.е. } \alpha = \alpha_0,\ \alpha_1 = \beta)$$

Решение (6) – любая пос. $\{u_t\}$, для которой равенства в (6) выполнены п.н.

Теорема 3

1. При $\alpha > 0$ и $0 < \beta < 1$ существует п.н. единственное строго стационарное решение (6).

Оно имеет вид:

$$(7) \quad u_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

где

$$(8) \quad \sigma_t^2 = \alpha + \alpha\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha\beta^3 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \ldots$$

Ряд в (8) сходится в L^1.

~~Замечание. Из (8)~~ $\cancel{\sigma_t^2 = \sigma_t^2(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots)}$,

Сл.в. ε_t и $\{\sigma_t, \sigma_{t-1}, \ldots\}$ независимы

2. Последовательность $\{u_t\}$ из (7)-(8) стационарна и в широком смысле, причем $Eu_t = 0$, $Eu_t^2 = \alpha/(1-\beta)$, $cov(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$.

3. существует п.н. единственное решение ARCH-уравнений (6), являющееся стационарным в широком и узком смыслах, для которого ε_t и $\{\sigma_t, \sigma_{t-1}, \ldots\}$ независимы.

существование решения)

Док-во. Напомним, что если $E|\xi_n|<\infty$, $E|\xi|<\infty$, то $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$, если $E|\xi_n-\xi|\to 0$, $n\to\infty$.

Эта сходимость эквивалентна фундаментальности $\{\xi_n\}$ в L^1, т.е. условию

$$E|\xi_n-\xi_m|\to 0,\ n,m\to\infty.$$

Пусть $\zeta_t^{(n)} = \alpha+\alpha\beta\varepsilon_{t-1}^2+\ldots+\alpha\beta^n\varepsilon_{t-1}^2\cdots\varepsilon_{t-n}^2$.

Ряд в (8) сходится в $L^1 \Leftrightarrow E|\zeta_t^{(n)}-\zeta_t^{(m)}|\to 0$.

Имеем: $E|\zeta_t^{(n)}-\zeta_t^{(m)}| = [k=\min(m,n),\ l=\max(m,n)]$

$=E(\alpha\beta^{k+1}\varepsilon_{t-1}^2\cdots\varepsilon_{t-k-1}^2+\ldots+\alpha\beta^l\varepsilon_{t-1}^2\cdots\varepsilon_{t-l}^2)=$

$=\alpha\beta^{k+1}+\ldots+\alpha\beta^l\to 0$ при $0<\beta<1$.

Для σ_t^2 из (8) имеем п.н.:

(9) $\sigma_t^2=\alpha+\beta\varepsilon_{t-1}^2(\alpha+\alpha\beta\varepsilon_{t-2}^2+\alpha\beta^2\varepsilon_{t-2}^2\varepsilon_{t-3}^2+\ldots)$

$=\alpha+\beta\varepsilon_{t-1}^2\sigma_{t-1}^2$.

Положим $u_t:=\varepsilon_t\sigma_t$, тогда в силу (9)

$\sigma_t^2=\alpha+\beta u_{t-1}^2$. Значит, посл. $\{u_t\}$ из (7) с $\{\sigma_t^2\}$ из (8) удовл. ARCH(1) ч.т.д.

уравнениям (6)

Независимость ε_t и $\{\sigma_t,\sigma_{t-1},\ldots\}$, $\sigma_t^2=\sigma_t^2(\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\ldots)$. ч.т.д.

Строгая стационарность.

Рассмотрим последовательность $u_t^{(n)}:=\varepsilon_t\left(\zeta_t^{(n)}\right)^{1/2}$

Тогда $u_t^{(n)} = u_t^{(n)}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-n})$.

Значит, $\{u_t^{(n)}\}$ есть строго стац. послед.,

и вектор $U_n := \left(u^{(n)}_{t_1+\tau}, \dots, u^{(n)}_{t_k+\tau}\right)$

имеет распределение, не зависящие от τ.

Но $E|u_t - u_t^{(n)}| = E\left|\varepsilon_t\left(\sigma_t - \left(S_t^{(n)}\right)^{1/2}\right)\right| =$

$= E|\varepsilon_t| \cdot E\left|\dfrac{\sigma_t^2 - S_t^{(n)}}{\sigma_t + \left(S_t^{(n)}\right)^{1/2}}\right| \le \dfrac{E|\varepsilon_t|}{\sqrt{\alpha}} E|\sigma_t^2 - S_t^{(n)}| \to 0,$
$n \to \infty.$

Значит, $U_n \xrightarrow{P} U := (u_{t_1+\tau}, \dots, u_{t_k+\tau})$.

Следовательно, распределение U от τ не зависит. ч.т.д.

Задача 2

Доказать, что (7)-(8) ет. единственное строго стационарное решение (6).

ч.т.д.

Стационарность в широком смысле

Пусть $\{u_t\}$ - строго стационарное решение (6) (из (7)-(8)),

а $\mathcal{F}_t = \sigma\{\varepsilon_s, s \le t\}$. Тогда σ_t - $\mathcal{F}_{t-1}$ - измер,

$Eu_t = EE(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t E(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1})) = 0.$

При этом $E|u_t| = E|\varepsilon_t \sigma_t| = E|\varepsilon_t| E\sigma_t < \infty$, т.к

$E\sigma_t \le (E\sigma_t^2)^{1/2} < \infty$ (см. далее).

Аналогично, для $\tau > 0$ $\boxed{t+\tau-1 \geq t}$

$$E u_t u_{t+\tau} = E\, E\left(\varepsilon_t \sigma_t \varepsilon_{t+\tau} \sigma_{t+\tau} / \mathcal{F}_{t+\tau-1}\right) =$$

$$= E\left(\varepsilon_t \sigma_t \sigma_{t+\tau} E\left(\varepsilon_{t+\tau} / \mathcal{F}_{t+\tau-1}\right)\right) = 0.$$

т.е. $\operatorname{cov}(u_t, u_{t+\tau}) = 0$ при $t \neq s$.

$$E u_t^2 = E(\varepsilon_t^2 \sigma_t^2) = E\varepsilon_t^2 \cdot E\sigma_t^2 = \alpha/(1-\beta)\text{, т.к.}$$

$$E\sigma_t^2 = E\left(\alpha + \alpha\beta\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots\right) =$$

$$= \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \ldots = \alpha/(1-\beta).$$

Здесь использованы следующие факты.

1) Если $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$, то $|E\xi_n - E\xi| \leq E|\xi_n - \xi| \to 0$, т.е. $E\xi_n \to E\xi$.

2) Если ряд $\sum_{k \geq 1} \xi_k$ сходится в L^1 к ξ, то

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{L^1} \xi\text{, а потому } ES_n =$$

$$E\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k \to E\xi\text{, т.е.}$$

$$E\sum_{k \geq 1} \xi_k = \sum_{k \geq 1} E\xi_k.$$

П.н. единственность.

Пусть $\{\tilde{u}_t\}$ - стацион. решение (6), т.е. п.н.

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \varepsilon_t \tilde{\sigma}_t \\ \tilde{\sigma}_t^2 = \alpha + \beta \tilde{u}_{t-1}^2. \end{cases}$$

Очевидно, $E\tilde{\sigma}_t^2 = E\tilde{u}_t^2 = E\tilde{u}_0^2$ ($=$ const).

По усл. ε_t и $\{\tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_{t-1}, \dots\}$ незав. Имеем:

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \alpha + \beta \varepsilon_{t-1}^2 \tilde{\sigma}_{t-1}^2 = \alpha + \beta \varepsilon_{t-1}^2 \left(\alpha + \beta \varepsilon_{t-2}^2 \tilde{\sigma}_{t-2}^2\right) = \dots$$

$$= \alpha + \alpha\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\beta^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha\beta^k \varepsilon_{t-1}^2 \cdots \varepsilon_{t-k}^2 +$$

$$+ \beta^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 \cdots \varepsilon_{t-k-1}^2 \tilde{\sigma}_{t-k-1}^2.$$

$$E\left(\beta^{k+1} \varepsilon_{t-1}^2 \cdots \varepsilon_{t-k-1}^2 \tilde{\sigma}_{t-k-1}^2\right) = \beta^{k+1} E\left(\varepsilon_{t-1}^2 \cdots \varepsilon_{t-k-1}^2\right) \times$$

$$\times E\tilde{\sigma}_{t-k-1}^2 = \beta^{k+1} E\tilde{\sigma}_0^2 \to 0, \quad k \to \infty.$$ Т.е.

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \alpha + \alpha\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \dots$$, ряд L^1-сходится.

Теорема 3 доказана. ч.т.д.

Т.е. $\{u_t\}$ — белый шум! Но $\{u_t\}$ зависимы! Чтобы характеризовать эту зависимость,

будем рассматривать u_t^2. Имеем:

$$u_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 + \sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2 + \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1).$$

Положим $u_t^2 := z_t$, $\sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1) := \eta_t$. Тогда при $E\varepsilon_1^4 < \infty$

$E\eta_t = 0$, $\mathrm{Cov}(\eta_s, \eta_t) = 0$ при $t \neq s$, $E\eta_t^2 = \sigma_\eta^2 < \infty$.

Получаем AR(1)-модель с ненул. ср. для z_t:

$$(10) \quad z_t = \alpha + \beta z_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}; \ \underline{0 < \beta < 1}, \ \alpha > 0.$$

Здесь $\{\eta_t\}$ — белый шум. Стац. решение ур-ия (10) имеет вид:

$$z_t = u_t^2 = \frac{\alpha}{1-\beta} + \sum_{j \geq 0} \beta^j \eta_{t-j}, \text{ ряд с.к. сход.}$$

$$E z_t = E u_t^2 = \frac{\alpha}{1-\beta}; \quad \mathrm{Cov}(z_t, z_{t+\tau}) = \frac{E\eta_1^2 \beta^{|\tau|}}{1-\beta^2}$$

$$f_z(\lambda) = \frac{E\eta_1^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1-\beta e^{-i\lambda}|^2}.$$

Кластерность траекторий.

Действительно, $\sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2$, потому большие u_{t-1}^2 влекут большие σ_t^2. Отсюда получаются большие u_t, т.к. $u_t = \sigma_t \xi_t$, а ξ_t умеренные. Малое ξ_t даст малое u_t, отсюда получается умеренное σ_{t+1}^2 и умеренное u_{t+1}.

Тяжелые хвосты

Δ. Если для сл. в. ξ $P(\xi > x) \sim \frac{c(x)}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, $x \to \infty$, то ξ имеет тяжелый правый хвост.
($c(x)$: $c(yx)/c(x) \to 1$ $\forall y > 0$.)

Рассмотрим AR(1) модель $u_t = \beta u_{t-1} + \xi_t$, $t \in \mathbb{Z}$;
$|\beta| < 1$; $\{\xi_t\}$ - н.о.р., $\xi_1 \sim N(0, \sigma^2)$.

Тогда стационарное решение

$$u_t = \sum_{j \geq 0} \beta^j \xi_{t-j} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\beta^2}\right) \text{ - гаусс. вел.!}$$

Но если $\xi \sim N(0, \Delta^2)$, то для $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$

$$P(\xi > x) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{\Delta}\right) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-x^2/2\Delta^2} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Т.е. у гауссовских величин легкий правый хвост!

Рассмотрим ARCH(1) модель

$$u_t = \sqrt{\alpha + \beta u_{t-1}^2}\, \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$, ε_1 распределена симметрично относительно нуля. Пусть $\{u_t\}$ – строго стац. решение. Тогда, если k – единственное положительное решение уравнения $E|\sqrt{\beta}\varepsilon_1|^k = 1$, то

$$P(u_1 > x) \sim \frac{C(x)}{x^k} \text{ при } x \to \infty.$$

Хвост у u_1 тяжелый!

Объяснение названию. Пусть $\mathcal{F}_t = \sigma\{u_s, s \le t\}$. Тогда условное среднее

$$E(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t \varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t(u_{t-1}) E(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Условная дисперсия (волатильность) $\sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2$

$$D(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) := E\left(\left(u_t - E(u_t / \mathcal{F}_{t-1})\right)^2 / \mathcal{F}_{t-1}\right) =$$

$$= E(u_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 \sigma_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2.$$

Усл. дисперсия зависит от u_{t-1}!

Для AR(1): $E(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \beta u_{t-1}$;

$$D(u_t / \mathcal{F}_{t-1}) = E\left((u_t - \beta u_{t-1})^2 / \mathcal{F}_{t-1}\right) = E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2$$

Для AR(1) усл. дисперсия пост.!

Прогнозы: $E(u_{n+1} / u_1, \ldots, u_n) = E(\varepsilon_{n+1} \sigma_{n+1} / u_1, \ldots, u_n) = 0.$

Рассмотрим ARCH(1) модель

$$u_t = \sqrt{\alpha + \beta u_{t-1}^2}\, \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$, ε_1 распределена симметрично относительно нуля.
Пусть $\{u_t\}$ - строго стац. решение.
Тогда, если k - единственное положительное решение уравнения $E|\sqrt{\beta}\,\varepsilon_1|^k = 1$, то

$$P(u_1 > x) \sim \frac{C(\alpha)}{x^k} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Хвост у u_1 тяжелый!

Объяснение названию. Пусть $\mathcal{F}_t = \sigma\{u_s, s \le t\}$. Тогда условное среднее

$$E(u_t/\mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t \varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t(u_{t-1}) E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

Условная дисперсия (волатильность) $\sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2$

$$D(u_t/\mathcal{F}_{t-1}) := E\big((u_t - E(u_t/\mathcal{F}_{t-1}))^2/\mathcal{F}_{t-1}\big) =$$
$$= E(u_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 \sigma_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha + \beta u_{t-1}^2.$$

Усл. дисперсия зависит от u_{t-1}!

Для AR(1): $E(u_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \beta u_{t-1}$;

$$D(u_t/\mathcal{F}_{t-1}) = E\big((u_t - \beta u_{t-1})^2/\mathcal{F}_{t-1}\big) = E(\varepsilon_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2$$

Для AR(1) усл. дисперсия пост.!

Прогнозы: $E(u_{n+1}/u_1, \dots, u_n) = E(\varepsilon_{n+1}\sigma_{n+1}/u_1, \dots, u_n) = 0.$

$$E(u_{n+1}^2/u_1,\dots,u_n) = E(\varepsilon_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2/u_1,\dots,u_n) = \alpha+\beta u_n^2$$

Раздел 3. Закон больших чисел для стационарных последовательностей

Пусть $\{u_t\}$, $t\in \mathbb{Z}$, стационарная послед., $Eu_t=0$, $R(\tau)=Cov(u_t,u_{t+\tau})$, $F(\lambda)$ - спектр. функция. Тогда существует процесс $Z(\lambda)$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$, со свойствами.

① $EZ(\lambda)=0$, для $\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le\lambda_4$
$$E(Z(\lambda_2)-Z(\lambda_1))\overline{(Z(\lambda_4)-Z(\lambda_3))}=0.$$

② $E|Z(\lambda_2)-Z(\lambda_1)|^2=F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$ для $\lambda_2\ge\lambda_1$

③ а) $Z(\lambda)$ непрерывен справа в с.к. смысле. Т.е. для $\lambda_n\downarrow\lambda$ $\lim\limits_{n\to\infty}E|Z(\lambda_n)-Z(\lambda)|^2=$
$$=\lim_{n\to\infty}(F(\lambda_n)-F(\lambda))=0$$

б) $Z(\lambda)$ имеет с.к. предел слева $Z(\lambda-0)=\underset{\lambda_n\uparrow\lambda}{\text{l.i.m.}}\,Z(\lambda_n)$. При этом, $E|Z(\lambda)-Z(\lambda-0)|^2=$
$$=E\Big|\underset{\lambda_n\uparrow\lambda}{\text{l.i.m.}}(Z(\lambda)-Z(\lambda_n))\Big|^2=\lim_{\lambda_n\uparrow\lambda}E|Z(\lambda_n)-Z(\lambda)|^2=$$
$$=\lim_{\lambda_n\uparrow\lambda}(F(\lambda)-F(\lambda_n))=F(\lambda)-F(\lambda-0).$$

Итак, $E|Z(\lambda) - Z(\lambda-0)|^2 = F(\lambda) - F(\lambda-0)$,

и $Z(\lambda)$ с.к. непрерывен в т. $\lambda \Leftrightarrow F$ непр. в т. λ.

④ $$u_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \text{ п.н.}$$

Последнее соотношение - спектральное представление посл. $\{u_t\}$.

⑤ Если потребовать, чтобы $Z(-\pi)=0$, то $Z(\lambda)$ п.н. единственен.

Теорема 1 (З.б.ч. в с.к. смысле)

$$n^{-1}\sum_{t=0}^{n-1} u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} Z(0) - Z(-0),$$

$$n^{-1}\sum_{\tau=0}^{n-1} R(\tau) \to F(0) - F(-0), \; n \to \infty.$$

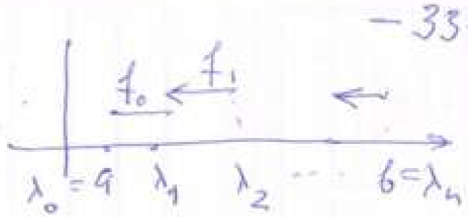
Замечания об $\int_a^b f(\lambda)\, d\zeta(\lambda)$.

Пусть $\zeta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, процесс с ортогональными приращениями, с.к. непр. справа, имеет кон. с.к. предел слева. Тогда

$$E|\zeta(\lambda_2) - \zeta(\lambda_1)|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1),$$

структурная функция $F(\lambda)$ неубывает, непрерывна справа, имеет конечный предел слева.

Пусть $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i I_{[\lambda_i, \lambda_{i+1}]}$



Тогда $I(f) := \int_a^b f(\lambda)\, d\zeta(\lambda) :=$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f_i \left(\zeta(\lambda_{i+1}) - \zeta(\lambda_i)\right).$$

Свойства.

① $I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I(f_1) + c_2 I(f_2)$.

② $E I(f) = 0$, $E|I(f)|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2 dF(\lambda)$.

③ $E I(f)\overline{I(g)} = \int_a^b f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, dF(\lambda)$.

Для любой $f \in L^2(dF)$ пусть $\{f_n\}$ послед. ступенчатых, таких что $f_n \xrightarrow{L^2(dF)} f$, т.е.

$$\int_a^b |f(\lambda) - f_n(\lambda)|^2 dF \to 0.$$

Такая посл. всегда существует. Тогда

$$I(f) := \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, I(f_n).$$

Св-ва ①-③ останутся верными, причем ① верно п.н.

④ Если $f_n \xrightarrow{L^2(dF)} f$ (f_n не обязат. ступ.), то

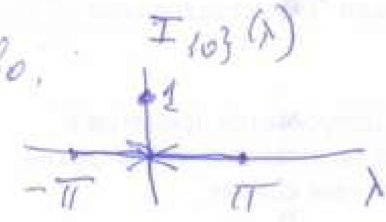
$$I(f_n) \xrightarrow{\text{с.к.}} I(f).$$

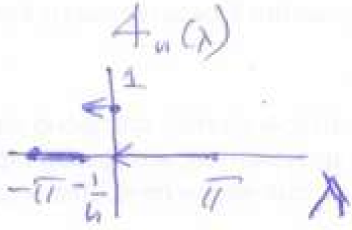
<u>Упражнение.</u>

Пусть $Z(\lambda)$ соотв. $\{u_t\}$. Доказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} I_{\{0\}}(\lambda)\, dZ(\lambda) = Z(0) - Z(-0).$$

Док-во.





Тогда $f_n(\lambda) - I_{\{0\}}(\lambda) \to 0 \quad \forall \lambda$,

и в силу теоремы Лебега $\int_{-\pi}^{\pi} [f_n(\lambda) - I_{\{0\}}(\lambda)]^2 dF(\lambda) \to 0$

т.е. $f_n(\lambda) \xrightarrow{L^2(dF)} I_{\{0\}}(\lambda) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda) dZ(\lambda) \xrightarrow{с.к.} \int_{-\pi}^{\pi} I_{\{0\}}(\lambda) dZ$

Но $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda) dZ(\lambda) = 1 \cdot \left(Z(0) - Z\left(-\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{с.к.} Z(0) - Z(-0)$

т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} I_{\{0\}}(\lambda) dZ(\lambda) = Z(0) - Z(-0)$. ч.т.д.

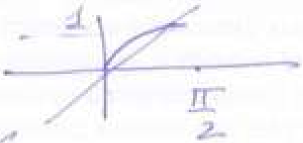
Док-во теоремы 1.

П.ч. $n^{-1} \sum_{t=0}^{n-1} u_t = \int_{-\pi}^{\pi} n^{-1} \sum_{t=0}^{n-1} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda) dZ(\lambda)$,

где $\varphi_n(\lambda) = n^{-1} \sum_{t=0}^{n-1} e^{i\lambda t} = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ n^{-1} \dfrac{1 - e^{i\lambda n}}{1 - e^{i\lambda}}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$

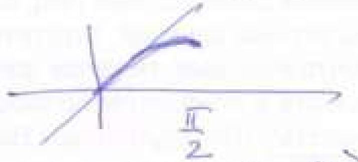
Справедливы неравенства:

1) $|\sin \lambda| \geq \frac{2}{\pi}|\lambda|$ для $|\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$



$\lambda \geq 0$

2) $|\sin \lambda| \leq |\lambda| \quad \forall \lambda$



$\lambda \geq 0$

Поэтому при $\lambda \neq 0$ $|\varphi_n(\lambda)| = \left| \dfrac{\sin\left(n\frac{\lambda}{2}\right)}{n \sin\frac{\lambda}{2}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \dfrac{\sin\left(n\frac{\lambda}{2}\right)}{n\frac{\lambda}{2}} \right| \leq$

Очевидно, $\varphi_n(\lambda) \to \begin{cases} 1, & \lambda = 0, \\ 0, & \lambda \neq 0 \end{cases} = I_{\{0\}}(\lambda)$.

Тогда $|\varphi_n(\lambda) - I_{\{0\}}(\lambda)|^2 \to 0$ и $|\varphi_n(\lambda) - I_{\{0\}}(\lambda)|^2 \leq C$.

По теор. Лебега $\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\lambda) - I_{\{0\}}(\lambda)|^2 dF(\lambda) \to 0$, т.е.

$\varphi_n(\lambda) \xrightarrow{L^2(dF)} I_{\{0\}}(\lambda) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\lambda) dZ(\lambda) \xrightarrow{с.к.} \int_{-\pi}^{\pi} I_{\{0\}}(\lambda) dZ(\lambda) = Z(0) - Z(-$

ч.т.д.

Оценивание среднего

Итак, $n^{-1}\sum_{t=0}^{n-1} u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} Z(0)-Z(-0)$. Значит,

$n^{-1}\sum_{t=0}^{n-1} u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} 0 \Leftrightarrow Z(0)-Z(-0)=0$ п.н. Но

$E|Z(0)-Z(-0)|^2 = F(0)-F(-0)$. Окончательно,

$n^{-1}\sum_{t=0}^{n-1} u_t \xrightarrow{\text{с.к.}} 0 \Leftrightarrow F(\lambda)$ непр. в нуле $\Leftrightarrow$

$n^{-1}\sum_{\tau=0}^{n-1} R(\tau) \to 0.$

Пусть теперь стацион. посл. $\{u_t\}, t\in Z$, имеет неизвестное среднее m, ковар. $R(\tau)$ и сп. функцию $F(\lambda)$.

Оценкой m по наблюдениям $u_1,\dots,u_n$ возьмем $\bar{u} := n^{-1}\sum_{t=1}^{n} u_t$. Из предыдущего

$\bar{u}-m = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(u_t-m) \xrightarrow{\text{с.к.}} 0 \Leftrightarrow \bar{u} \xrightarrow{\text{с.к.}} m \Leftrightarrow$

$F(\lambda)$ непр. в нуле $\Leftrightarrow n^{-1}\sum_{\tau=0}^{n-1} R(\tau) \to 0.$

Мы получили н. и д. условия с.к. состоятельности несмещенной оценки $\bar{u}$.

Пример. Пусть $u_t = m + v_t$, $t\in Z$. Тогда

$\bar{u} = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} v_t \xrightarrow{\text{с.к.}} m$, если: 1) $\{v_t\}$ - белый шум;

2) $\{v_t\}$ - $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p,q)$, $ARCH(p)$;

3) $R(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$ (т.к. в этом случае $n^{-1} \sum_{\tau=0}^{n-1} R(\tau) \to 0$.)

Оценивание ковариаций.

Пусть $\{u_t\}, t \in \mathbb{Z}$, стац. в широком смысле посл., $Eu_t = 0$, $Cov(u_t, u_{t+\tau}) = R(\tau)$, $\tau = 0, \pm 1, \ldots$

Оценкой $R(\tau)$ по наблюдениям $u_1, \ldots, u_n$ возьмем

$$\hat{R}_n(\tau) := \frac{1}{n-|\tau|} \sum_{t=1}^{n-|\tau|} u_t u_{t+|\tau|}, \quad \tau = 0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1).$$

Ясно, что $E\hat{R}_n(\tau) = R(\tau)$, т.е. $\hat{R}_n(\tau)$ – несм. оценка.

Т.к. $\hat{R}_n(\tau) = \hat{R}_n(-\tau)$, будем изучать $\hat{R}_n(\tau)$ для $\tau = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} u_t u_{t+\tau}, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Стационарность 4-го порядка (предп S).

Предположим, что при любом фиксированном $\tau \in \mathbb{Z}$ последоват. $\{u_t u_{t+\tau}\}, t \in \mathbb{Z}$, стационарна по t. Т.к. $Eu_t u_{t+\tau} = R(\tau)$ от t не зависит, получаем, что

$\mathrm{cov}(u_t u_{t+\tau}, u_{t+k} u_{t+k+\tau}) = E u_t u_{t+\tau} u_{t+k} u_{t+k+\tau} - R^2(\tau))$ не должна зависеть от t.

Т.е. $E u_t u_{t+\tau} u_{t+k} u_{t+k+\tau}$ не зав. от t $\forall \tau$.

Это объясняет название!

Если предп. (S) верно, то из предыд. свойств эмпир. среднего для фикс $\tau = 0, 1, \dots$

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} u_t u_{t+\tau} \xrightarrow{\text{с.к.}} E u_t u_{t+\tau} = R(\tau) \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(E u_0 u_\tau u_k u_{k+\tau} - R^2(\tau) \right) \to 0.$$

Задача 1 ([Ширяев, Вероятность, гл. II, сооб. 12.5.1)

Если $\{u_t\}$ - гауссовская стационарная посл., то $E u_0 u_\tau u_k u_{k+\tau} = E u_0 u_\tau \cdot E u_k u_{k+\tau} + E u_0 u_k E u_\tau u_{k+\tau} + E u_0 u_{k+\tau} E u_\tau u_k =$

$$= R^2(\tau) + R^2(k) + R(k+\tau) R(k-\tau)$$

Теперь (1) приобретает вид (усл. (S) вып.!):

$$(2) \quad n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(R^2(k) + R(k+\tau) R(k-\tau) \right) \to 0 \quad \forall \tau = 0, 1, \dots$$

Покажем, что (2) верно $\Leftrightarrow$

$$(3) \quad n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} R^2(k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Действительно, если верно (2), то при $\tau=0$ получаем (3). Обратно, если верно (3), то т.к. $2|R(k+\tau)R(k-\tau)| \le R^2(k+\tau)+R^2(k-\tau)$, то (3) влечёт (2) ($\tau$ - фикс.!)

Получили: если $\{u_t\}$ - стац. гаусс. посл., то $\hat{R}_n(\tau) \xrightarrow{c.к.} R(\tau) \Leftrightarrow n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} R^2(k) \to 0$.

Дост. усл. $R(k) \to 0$ при $k\to\infty$.

Видно, что надо уходить в класс строго стац. посл.!

<u>Замечания о последовательностях с сильным перемешиванием (с.п.)</u>

1. Пусть $\{u_t\}$, $t\in\mathbb{Z}$, строго стацион. посл. Если $\alpha(\tau) := \sup\limits_{\substack{A\in M_{-\infty}^{0},\\ B\in M_{\tau}^{\infty}}} |P(AB)-P(A)P(B)| \to 0$ при $\tau\to\infty$, то $\{u_t\}$ удовл. условию сильного перемешивания с коэффициентом пер. $\alpha(\tau)$. Здесь $M_a^b = \sigma\{u_t, a\le t\le b\}$.

<u>Примеры.</u>

*/ $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р. сл.в. Здесь $\alpha(\tau)=0$ при $\tau>0$.

$\operatorname{cov}(u_t u_{t+\tau}, u_{t+k} u_{t+k+\tau}) = E u_t u_{t+\tau} u_{t+k} u_{t+k+\tau} - R^2(\tau))$ не должна зависеть $\underline{\underline{\text{от } t}}$.

т.е. $\underline{E u_t u_{t+\tau} u_{t+k} u_{t+k+\tau} \text{ не зав. от } t \ \forall \tau}$.

Это объясняет название!

Если предп. (S) верно, то из предыд. свойств эмпир. среднего для фикс $\tau = 0, 1, \ldots$

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} u_t u_{t+\tau} \xrightarrow{\text{с.к.}} E u_t u_{t+\tau} = R(\tau) \Leftrightarrow$$

$$(1) \quad n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(E u_0 u_\tau u_k u_{k+\tau} - R^2(\tau) \right) \to 0.$$

Задача 1 ([Ширяев, Вероятность, гл. II, соот. 12.5.1)

Если $\{u_t\}$ - гауссовская стационарная посл., то $E u_0 u_\tau u_k u_{k+\tau} = E u_0 u_\tau \cdot E u_k u_{k+\tau} + E u_0 u_k E u_\tau u_{k+\tau} + E u_0 u_{k+\tau} E u_\tau u_k =$

$$= R^2(\tau) + R^2(k) + R(k+\tau) R(k-\tau)$$

Теперь (1) приобретает вид (усл. (S) вып.!):

$$(2) \quad n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(R^2(k) + R(k+\tau) R(k-\tau) \right) \to 0$$

$$\forall \tau = 0, 1, \ldots$$

Покажем, что (2) верно $\Leftrightarrow$

$$(3) \quad n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} R^2(k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Действительно, если верно (2), то при $\tau=0$ получаем (3). Обратно, если верно (3), то т.к. $2|R(k+\tau)R(k-\tau)| \le R^2(k+\tau)+R^2(k-\tau)$, то (3) влечёт (2) ($\tau$-фикс.!)

Получили: если $\{u_t\}$ - стац. гаусс. посл., то $\hat{R}_n(\tau) \xrightarrow{c.к.} R(\tau) \Leftrightarrow n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} R^2(k) \to 0$.

Дост. усл. $R(k)\to 0$ при $k\to\infty$.

Видно, что надо уходить в класс строго стац. посл.!

<u>Замечания о последовательностях с сильным перемешиванием (с.п.)</u>

1. Пусть $\{u_t\}, t\in Z$, строго стацион. посл.

Если $\alpha(\tau) := \sup_{\substack{A\in M_{-\infty}^0,\\ B\in M_\tau^\infty}} |P(AB)-P(A)P(B)| \to 0$ при $\tau\to\infty$,

то $\{u_t\}$ удовл. условию сильного перемешивания с коэффициентом пер. $\alpha(\tau)$.

Здесь $M_a^b = \sigma\{u_t, a\le t\le b\}$.

<u>Примеры.</u>

*/ $\{\eta_t\}$ - н.о.р. сл.в. Здесь $\alpha(\tau)=0$ при $\tau>0$.

*/ $u_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р.

Здесь $\alpha(\tau) = 0$ при $\tau > q$.

*/ $u_t = \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ - н.о.р.

ε_1 имеет Лебегову пл-в., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 < \infty$.

Mokkadem: $\exists$ стр. стац. реш. $\{u_t\}$ уд. усл. с.п. с $\alpha(\tau) \le c\lambda^\tau$, $0 < \lambda < 1$.

3.6.4.

Если $\{u_t\}$, $t \in Z$, строго стац. посл. с с.п., $E|u_1| < \infty$, то $n^{-1} \sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{п.н.} Eu_1$, $n \to \infty$.

Ц.п.т. (Ибрагимов, Линник. Нез. и стац. св. сл. вел. Т. 18.5.3)

Пусть $\{u_t\}$, $t \in Z$, стр. стац. посл. с с.п., $Eu_1 = 0$, $E|u_1|^{2+\delta} < \infty$ при нек. $\delta > 0$. Пусть $\sum_{\tau \ge 1} (\alpha(\tau))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$.

Тогда:

① Ряд $\Delta^2 := Eu_0^2 + 2\sum_{\tau \ge 1} Eu_0 u_\tau$ абс. сход.

② Если $\Delta > 0$, то $n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} u_t \xrightarrow{d} N(0, \Delta^2)$.

Следствие.

Если $\{u_t\}$ уд. с.п., $Eu_1 = m$, $E|u_1 - m|^{2+\delta} < \infty$, $\sum_{\tau \ge 1} (\alpha(\tau))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty$, $\tilde{\Delta}^2 = Du_0 + 2\sum_{\tau \ge 1} R(\tau)$, то при $\tilde{\Delta} > 0$

$$\sup_x \left| P\left(n^{1/2}(\bar{u} - m) \le x\right) - \Phi(x/\tilde{\Delta}) \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

В условиях следствия сущ. сп. плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R(\tau).$$

Значит, $\tilde{\Delta}^2 = 2\pi f(0)$. Пусть $\hat{\Delta}_n \xrightarrow{P} \tilde{\Delta}$.

Тогда $$\frac{n^{1/2}(\overline{u} - m)}{\hat{\Delta}_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$ (лемма Слуцкого!)

Если $\Phi(\xi_\alpha) = \alpha$, $0<\alpha<1$ (т.е. ξ_α - квантиль уровня α), то

$$P\left(-\xi_{1-\alpha/2} < \frac{n^{1/2}(\overline{u}-m)}{\hat{\Delta}_n} < \xi_{1-\alpha/2}\right) \to$$

$$\to \Phi(\xi_{1-\alpha/2}) - \Phi(-\xi_{1-\alpha/2}) = 2\Phi(\xi_{1-\alpha/2}) - 1 = 1-\alpha$$

Значит, асимпт. довер. инт. для m ур-ня $1-\alpha$ имеет вид:

$$-\xi_{1-\alpha/2} < \frac{n^{1/2}(\overline{u}-m)}{\hat{\Delta}_n} < \xi_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow$$

$$\overline{u} - \frac{\hat{\Delta}_n \xi_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m < \overline{u} + \frac{\hat{\Delta}_n \xi_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Проверим $H_0: m = m_0$ против $H_1: m \neq m_0$

Пусть $U = (u_1, \dots, u_n)$ - наб. критическая обл.

$$\mathcal{X}_{1\alpha} := \left\{ U : \left| \frac{n^{1/2}(\bar{u} - m_0)}{\hat{\Delta}_n} \right| > \xi_{1-\alpha/2} \right\}.$$

Здесь α - уровень значимости.

Тогда $P(H_1 | H_0) = P\left(\left| \frac{n^{1/2}(\bar{u} - m_0)}{\hat{\Delta}_n} \right| > \xi_{1-\alpha/2} \right) \to \alpha.$

$$P(H_0|H_1) = P\left(\left| \frac{n^{1/2}(\bar{u} - m_0)}{\hat{\Delta}_n} \right| \le \xi_{1-\alpha/2} \Big| H_1 \right) =$$

$$= P\left(\left| \frac{n^{1/2}(\bar{u} - m_0)}{\Delta} \right| \le \frac{\hat{\Delta}_n}{\Delta} \xi_{1-\alpha/2} \Big| H_1 \right) = \quad P(AB) \le P(A)$$

$$= P\left(|\dots| \le \frac{\hat{\Delta}_n}{\Delta} \xi_{1-\alpha/2},\ \left| \frac{\hat{\Delta}_n}{\Delta} - 1 \right| < \varepsilon \Big| H_1 \right) + o(1) \le$$

$$\le P\left(\left| \frac{n^{1/2}(\bar{u} - m_0)}{\Delta} \right| \le (1+\varepsilon) \xi_{1-\alpha/2} \Big| H_1 \right) + o(1) =$$

$$= P\left(-(1+\varepsilon)\xi_{1-\alpha/2} + \frac{n^{1/2}(m_0 - m)}{\Delta} < \frac{n^{1/2}(\bar{u} - m)}{\Delta} \le (1+\varepsilon)\xi_{1-\alpha/2} + \frac{n^{1/2}(m_0 - m)}{\Delta} \right) + o(1) =$$

$$= \Phi\left(\frac{n^{1/2}(m_0 - m)}{\Delta} + (1+\varepsilon)\xi_{1-\alpha/2} \right) - \Phi\left(\frac{n^{1/2}(m_0 - m)}{\Delta} - (1+\varepsilon)\xi_{1-\alpha/2} \right) + o(1) = o(1), \quad n \to \infty.$$

Т.е. $\begin{cases} P(H_0|H_0) \to 1 - \alpha \\ P(H_1|H_1) \to 1 \end{cases}$ Вер. принять прав. гип. близка ~~вероятн.~~ к едини.!

Раздел 4. Оценивание спектральной плотности

Пусть $\{u_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, – стационарная последоват.,
$E u_t = 0$, $\operatorname{cov}(u_t, u_{t+\tau}) = R(\tau)$. Пусть
$u_1, \dots, u_n$ – наблюдения.

Пусть дальше $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R(\tau)| < \infty$, тогда существ.
спектральная плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Эквивалентная запись

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \lambda\tau = \frac{1}{2\pi} R(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau \geq 1} R(\tau) \cos \lambda\tau.$$

Пусть $\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n-|\tau|} \sum_{t=1}^{n-|\tau|} u_t u_{t+|\tau|}$,

$$\tau = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)$$

– несмещенная оценка $R(\tau)$.

Периодограммой или выборочной спектральной плотностью называется ф-ия

$$\hat{f}_n(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau| < n} \left(1 - \frac{|\tau|}{n}\right) \hat{R}_n(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Разумеется,

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau| < n} \left(1 - \frac{|\tau|}{n}\right) \hat{R}_n(\tau) \cos \lambda\tau.$$