14.05.2022. МБС. Кр2. Токаева Александра

(1) Пусть $K(x)$ – непрер. огранич. и чётная ф-ция из $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $h(x,t): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрер. огранич. и строго убывающая по t ф-ция.

$$f(x,\mu) = \int h(y, K*\mu(y))\, K(x-y)\,dy\ ;\ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$$

$$K*\mu(y) = \int K(y-x)\,d\mu(x)$$

Док-ть, что из н-ва $\int (f(x,\mu) - f(x,\sigma))\, d(\mu-\sigma) \geq 0$

следует, что $f(x,\mu) = f(x,\sigma)$.

Решение: по усл. $\int f(x,\mu)\,d\mu - \int f(x,\mu)\,d\sigma - \int f(x,\sigma)\,d\mu + \int f(x,\sigma)\,d\sigma \geq 0$ (*)

Что такое $\int f(x,\mu)\,d\mu$?

$$\int f(x,\mu)\,d\mu(x) \overset{\text{подст.}}{=} \int \left(\int h(y, K*\mu(y))\, K(x-y)\,dy \right) d\mu(x) \overset{\text{т. Фубини}}{=}$$

$$= \int \left(\int h(y, K*\mu(y))\, K(x-y)\,d\mu(x) \right) dy =$$

$$= \int h(y, K*\mu(y)) \underbrace{\int K(x-y)\,d\mu(x)}_{K*\mu(y),\ \text{т.к. } K\text{-чётная}} dy = \int h(y, K*\mu(y))\, K*\mu(y)\,dy.$$

Аналогично,

$$\int f(x,\mu)\,d\sigma = \int h(y, K*\mu(y))\, K*\sigma(y)\,dy$$

$$\int f(x,\sigma)\,d\mu = \int h(y, K*\sigma(y))\, K*\mu(y)\,dy$$

$$\int f(x,\sigma)\,d\sigma = \int h(y, K*\sigma(y))\, K*\sigma(y)\,dy$$

$\Rightarrow$ усл (*) $\Leftrightarrow \int h(y,K*\mu(y))K*\mu(y)dy - \int h(y,K*\mu(y))K*\sigma(y)dy - \int h(y,K*\sigma(y))K*\mu(y)dy + \int h(y,K*\sigma(y))K*\sigma(y)dy$

$$\Updownarrow \int \underbrace{(h(y,K*\mu(y)) - h(y,K*\sigma(y)))(K*\mu(y) - K*\sigma(y))} \geq 0.$$

это ≤ 0, т.к. $h(x,t)$ – строго убывающ. по t по усл,

т.е. если $K*\mu(y) > K*\sigma(y)$, то $h(y,K*\mu(y)) < h(y,K*\sigma(y))$ и наоборот.

$$\Rightarrow (h(y,K*\mu(y)) - h(y,K*\sigma(y)))(K*\mu(y) - K*\sigma(y)) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall y: \left[\begin{array}{l} h(y,K*\mu(y)) - h(y,K*\sigma(y)) = 0 \\ K*\mu(y) - K*\sigma(y) = 0. \end{array} \right.$$

но из обоих случаев следует, что $f(x,\mu) = f(x,\sigma)$, просто подст,

т.к. $f(x,\mu) = \int \underbrace{h(y, K*\mu(y))} K(x-y)\,dy = \int h(y,K*\sigma(y))\,K(x-y)\,dy = f(x,\sigma)$. ч.т.д.

(3) Пусть A – метрическое пр-во и $U: \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$

будем говорить, что отобр. U непрер. дифф., если $\exists$ такое непрер. отобр.

$\frac{\delta U}{\delta m}: \mathcal{P}(A) \times A \to \mathbb{R}$, что: $U(\sigma) - U(\mu) = \int_0^1 \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + s(\sigma - \mu); a)(\sigma - \mu)(da)\,ds$; $\forall \mu, \sigma \in \mathcal{P}(A)$

Пусть μ – точка минимума U.

Док-ть, что $\boxed{\int \frac{\delta U}{\delta m}(\mu, a)\,d\mu^{(a)} \le \frac{\delta U}{\delta m}(\mu, b),\ \forall b.}$

т.е. носитель меры μ сосредоточен в точках min отобр. $a \to \frac{\delta U}{\delta m}(\mu, a)$

Решение: Пишем опр. $\frac{\delta U}{\delta m}$:

$$U(\sigma) - U(\mu) = \int_0^1 \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + s(\sigma - \mu); a)(\sigma - \mu)(da)\,ds,\ \forall \mu, \sigma \in \mathcal{P}(A)$$

Применим т. о среднем для непрер. дифф. $\frac{\delta U}{\delta m}$:

$$\Rightarrow \underbrace{U(\sigma) - U(\mu)}_{\ge 0} = \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + \xi(\sigma - \mu); a)(\sigma - \mu)\,da;\ \xi \in [0, 1].$$

Пусть μ: = точка минимума ф-ции U.

$\Rightarrow U(\sigma) - U(\mu) \ge 0,\ \forall \sigma.$

σ – сейчас мы выберем сами.

У нас $\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + \xi(\sigma - \mu); a)\,\sigma(da) \ge \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + \xi(\sigma - \mu); a)\,\mu(da)$ $(*)$

А хотим: $\int \frac{\delta U}{\delta m}(\mu, a)\,d\mu(a) \le \frac{\delta U}{\delta m}(\mu, b),\ \underline{\forall b}$

Ну берём произв. b.

И положим $\sigma := \frac{1}{n}\delta_b + \frac{n-1}{n}\mu$ – вер. мера.

$\Rightarrow \sigma - \mu = \frac{1}{n}\delta_b - \frac{1}{n}\mu$.

$\Rightarrow (*)$ стало:

$$\underbrace{\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu + \xi \cdot \frac{1}{n}(\delta_b - \mu); a\right) \cdot \frac{1}{n}\delta_b(da)}_{= \frac{1}{n} \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu + \xi \frac{1}{n}(\delta_b - \mu); b\right)} + \frac{n-1}{n}\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu + \xi \cdot \frac{1}{n}(\delta_b - \mu); a\right)\mu(da) \ge \int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu + \xi \frac{1}{n}(\delta_b - \mu); a\right)\mu(da)$$

подобные слагаемые

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu + \xi \cdot \underbrace{\frac{1}{n}(\delta_b - \mu)}_{\to 0 \text{ при } n \to \infty}; b\right) \ge \frac{1}{n}\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu + \xi \cdot \underbrace{\frac{1}{n}(\delta_b - \mu)}_{\to 0 \text{ при } n \to \infty}; a\right)\mu(da)$$

$\Rightarrow$ после перехода к пределу:

$$\boxed{\frac{\delta U}{\delta m}(\mu; b) \ge \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu; a)\,\mu(da)}$$ чтд.

6. Пусть отобр. $U: \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ — непрер. дифф., отобр. $x\to \frac{\delta U}{\delta m}(\mu,x)$ дифф. и отобр. $D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu,x)$ непрер. по μ и x и ограничено.

Предположим, что непрер. кривая $t\to\mu_t$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ явл. решением ур-я непрер-ти $\partial_t\mu_t + div(b\mu_t)=0$, $(\mu_0=\nu)$

причём b — гладкое вект. поле с компактным носителем

Док-ть, что $\boxed{\frac{d}{dt}U(\mu_t)=\int\langle D_x(\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_t,x); b(x,t)\rangle d\mu_t}$

Решение: Имеем опр. $\frac{\delta U}{\delta m}$:

$$U(\sigma)-U(\mu)=\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu+s(\sigma-\mu);a)(\sigma-\mu)(da)\,ds.$$

Применяем т. о среднем:

$$\Rightarrow U(\sigma)-U(\mu)=\int_A\frac{\delta U}{\delta m}(\mu+\xi(\sigma-\mu);a)(\sigma-\mu)da,\quad \xi\in[0,1]$$

подставляем $\mu:=\mu_{t_0}=\nu$

$\sigma:=\mu_t=X_t^{-1}(\nu)$, где $X_t: \begin{cases}\dot X=b\\ X(t_0)=0\end{cases}$; $X_t=X_{t_0}+\int_{t_0}^t b(X,s)ds$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{U(\mu_t)-U(\mu_{t_0})}{t-t_0}=\frac{\int_A\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});a)(\mu_t-\mu_{t_0})da}{t-t_0}}\quad (*)$$

$\int f(a)\,d\mu_t(a)=\int f(X_t(y))\,d\nu(y)$

формула замены переменных в интеграле

Имеем: $\int_A\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});a)(\mu_t-\mu_{t_0})da=$

$$=\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});a)\,d\mu_t(a)-\int_A\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});a)\,d\mu_{t_0}(a)=$$

$$=\int_A\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_t(a))\,d\nu(a)-\int_A\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_{t_0}(a))\,d\nu(a)=$$

$$=\int_A\Big[\underbrace{\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_t(a))-\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_{t_0}(a))}_{=\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_{t_0}(a));\underbrace{\dot X_{t_0}(a)}_{=b(X_{t_0},t_0)}\rangle\cdot(t-t_0)+\bar o((t-t_0)^2)}\Big]d\nu(a)=$$

ф-ла Тейлора в точке $\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0}); X_{t_0}(a)$

$$=\int_A\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_{t_0}(a)); b(X_{t_0},t_0)\rangle d\nu(a)\cdot(t-t_0)+\bar o((t-t_0)^2)=$$

$$=\int_A\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0},X_{t_0}(a)); b(X_{t_0},t_0)\rangle d\nu(a)\cdot(t-t_0)+\int_A\underbrace{\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0}+\xi(\mu_t-\mu_{t_0});X_{t_0}(a))-D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0};X_{t_0}(a)); b(X_{t_0},t_0)\rangle}_{=\bar o(t-t_0)}d\nu(a)\cdot(t-t_0)+\bar o((t-t_0)^2)=$$

$$=\boxed{\int_A\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0},X_{t_0}(a)); b(X_{t_0},t_0)\rangle d\nu(a)\cdot(t-t_0)+\bar o((t-t_0)^2)}$$

$$\Rightarrow \text{в } (*):\ \frac{U(\mu_t)-U(\mu_{t_0})}{t-t_0}=\frac{\int_A\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0},X_{t_0}(a)); b(X_{t_0},t_0)\rangle d\nu(a)\cdot(t-t_0)+\bar o((t-t_0)^2)}{\cancel{t-t_0}}\overset{\text{обратная замена переменных в интеграле}}{=}\int_A\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0};a); b(a,t_0)\rangle d\mu_{t_0}(a)+\bar o(t-t_0)$$

$\Rightarrow$ при $t\to t_0$: $\boxed{\frac{d}{dt}U(\mu_{t_0})=\int_A\langle D_x\frac{\delta U}{\delta m}(\mu_{t_0};a); b(a,t_0)\rangle d\mu_{t_0}(a)}$ чтд.

(7) Пусть отобр. $b: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – огранич. и липшиц.
Пусть W_t – классич. d-мерный винер. процесс и $\mathcal{F}_t$ – порожденная им фильтрация.
Док-ть $\exists!$ решения З.Коши для стох. ур-я

$$dX_t = B(X_t, \mu_t)dt + dW_t$$

$$B(x,\mu) = \int b(x,y)\mu(dy)$$

$$\mu_t = P \circ X_t^{-1}$$

Решение: существование

Будем строить его так:

$$X_t^0 := x_0$$

$$X_t^{n+1} := x_0 + \int_0^t B(X_s^n, \underbrace{\mu_s}_{P\circ(X_s^n)^{-1}})ds + W_t$$

$$\Rightarrow |X_t^{n+1} - X_t^n| = \left|\int_0^t \left(B(X_s^n; P\circ(X_s^n)^{-1}) - B(X_s^{n-1}; P\circ(X_s^{n-1})^{-1})\right) ds\right| =$$

$$= \left|\int_0^t \int \left(B(X_s^n; X_s^n(\omega)) - B(X_s^{n-1}; X_s^{n-1}(\omega))\right) P(d\omega) ds\right| \le$$

$$\le \int_0^t \int \underbrace{\left|B(X_s^n; X_s^n(\omega)) - B(X_s^{n-1}; X_s^{n-1}(\omega))\right|}_{\le c_1|X_s^n - X_s^{n-1}| + c_2|X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega)|} P(d\omega) ds \le$$

$$\le c_1 \int_0^t \int \underbrace{|X_s^n - X_s^{n-1}|}_{\text{не зав от } \omega} P(d\omega) ds + c_2 \int_0^t \int |X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega)| P(d\omega) ds =$$

$$= c_1 \int_0^t \underbrace{|X_s^n - X_s^{n-1}|}_{\le \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|} ds + c_2 \int_0^t \int \underbrace{|X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega)|}_{\le \sup_{s\le t} |X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega)|} P(d\omega) ds$$

$$\Rightarrow |X_t^{n+1} - X_t^n| \le c_1 \cdot \int_0^t \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}| ds + c_2 \int_0^t \int \sup_{s\le t} |X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega)| P(d\omega) ds$$

$$\Rightarrow \sup_{s\le t} |X_s^{n+1} - X_s^n| \le c_1 \cdot \int_0^t \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}| ds + c_2 \int_0^t E \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}| ds$$

$$\Rightarrow E \sup_{s\le t} |X_s^{n+1} - X_s^n| \le c_1 \int_0^t E \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}| ds + c_2 \int_0^t E \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}| ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{E \sup_{s\le t} |X_s^{n+1} - X_s^n|}_{\text{обозн. } f_n(t)} \le C \cdot \int_0^t \underbrace{E \sup_{s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|}_{\text{"} f_{n-1}(s)} ds$$

$$\Rightarrow f_n(t) \le C \cdot \int_0^t f_{n-1}(s) ds \le C^2 \int_0^t \int_0^{s} f_{n-2}(q) dq\, ds \le \ldots \le \frac{C^n}{n!}$$

$$\Rightarrow E \sup_{s\le t} |X_s^{n+1} - X_s^n| \le \frac{C^n}{n!}$$

$\Rightarrow$ ряд $X_t^0 + (X_t^1 - X_t^0) + (X_t^2 - X_t^1) + \dots$ — сход. в $L^1(\Omega, C[0,T])$

Причем равномерно, т.к.:

$$P\left(\omega: \sup_{[0,T]} |X_t^{n+1} - X_t^n| \geq \frac{1}{2^n}\right) \underset{\text{н-во Маркова}}{\leq} \frac{(2C)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum_n P\left(\omega: \sup_{[0,T]} |X_t^{n+1} - X_t^n| \geq \frac{1}{2^n}\right) < \infty$$

$\Rightarrow$ по лемме Бореля–Кантелли: $\exists N$, т.что $\forall n > N$: $\sup_{[0,T]} |X_t^{n+1} - X_t^n| < \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow$ ряд $X_t^0 + (X_t^1 - X_t^0) + \dots + (X_t^{n+1} - X_t^n) + \dots$ — с вер-тью 1 сход равном. $X_t^n \rightrightarrows X_t$.

Теперь в равенстве $\underset{\downarrow\, X_t}{X_t^{n+1}} = X_0 + \int_0^t B(\underset{\downarrow\, X_s}{X_s^n}; \underset{\downarrow\, \mu_s}{\mu_s^n})ds + W_t$ переходим к пределу в $L^1(\Omega, C[0,T])$

$\Rightarrow$ получим $\boxed{X_t = X_0 + \int_0^t B(X_s; \mu_s)ds + W_t}$ $\Rightarrow$ $\exists$-е доказано.

Единственность. Пусть их два: X_t и Y_t

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t B(X_s, \mu_s)ds + W_t \\ Y_t = X_0 + \int_0^t B(Y_s; \mu_s)ds + W_t \end{cases}$$

пишем, что такое $B(x, \mu)$

$$\Rightarrow |X_t - Y_t| = \left|\int_0^t \left(B(X_s; P\circ X_s^{-1}) - B(Y_s; P\circ Y_s^{-1})\right)ds\right| =$$

$$= \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(X_s; x) P\circ X_s^{-1}(dx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(Y_s; x) P\circ Y_s^{-1}(dx)\right| =$$

$$= \left|\int_0^t \int_\Omega b(X_s; X_s(\omega)) P(d\omega)\,ds - \int_0^t \int_\Omega b(Y_s; Y_s(\omega)) P(d\omega)\,ds\right| \leq$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega \left(c_1 |X_s - Y_s| + c_2 |X_s(\omega) - Y_s(\omega)|\right) P(d\omega)\,ds$$

Теперь навешиваем sup, сначала справа, потом слева

$$\Rightarrow \underbrace{E \sup_{[0,T]} |X_t - Y_t|}_{=: f(T)} \leq C \cdot \int_0^T E \sup_{[0,t]} |X_q - Y_q|\,dt$$

$$\Rightarrow f(T) \leq C \int_0^T f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ по н-ву Гронуолла: $f \leq 0$

$\Rightarrow f = 0$

$\Rightarrow$ с вер-тью 1: $\sup = 0$

$\Rightarrow (X_t = Y_t\ \forall t)$ п.н. $\Rightarrow$ единственность. ЧТД.

4. В условиях задачи 3 док-ть, что выпуклость опр. U равносильна монотонности:

$$\boxed{U((1-s)\mu+s\sigma) \le (1-s)U(\mu)+sU(\sigma);\ s\in[0,1] \overset{?}{\Longleftrightarrow} \int_A \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\mu,a)-\frac{\delta U}{\delta m}(\sigma,a)\right)(\mu-\sigma)(da)\ge 0.}$$

Решение: ($\Leftarrow$) Пусть мы знаем, что $\int_A \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\mu,a)-\frac{\delta U}{\delta m}(\sigma,a)\right)(\mu-\sigma)(da)\ge 0$

Хотим: $U((1-t)\mu+t\sigma) \overset{?}{\le} (1-t)U(\mu)+t\cdot U(\sigma),\ t\in[0,1]$.

$$\Updownarrow \quad U((1-t)\mu+t\sigma) \le U(\mu)-t\cdot U(\mu)+t\cdot U(\sigma)$$

$$\Updownarrow \quad \underbrace{U((1-t)\mu+t\sigma)-U(\mu)}_{=\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}((1-t)\mu+t\sigma+s((1-t)\mu+t\sigma-\mu);a)\cdot((1-t)\mu+t\sigma-\mu)(da)ds} \overset{?}{\le} \underbrace{t\cdot(U(\sigma)-U(\mu))}_{=t\cdot\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu+s(\sigma-\mu);a)(\sigma-\mu)(da)ds}$$

$$\Updownarrow \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}((1-t)\mu+t\sigma+st(\sigma-\mu);a)\cdot \cancel{t}(\sigma-\mu)(da)ds \overset{?}{\le} \cancel{t}\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu+s(\sigma-\mu);a)(\sigma-\mu)(da)ds$$

$$\Updownarrow \int_0^1\int_A \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\underbrace{\mu+t(\sigma-\mu)(s+1)}_{=:\tilde\mu};a)-\frac{\delta U}{\delta m}(\underbrace{\mu+s(\sigma-\mu)}_{=:\tilde\sigma};a)\right)\cdot(\sigma-\mu)(da)ds \overset{?}{\le} 0$$

Причем $\tilde\mu-\tilde\sigma = \cancel{\mu}+t(\sigma-\mu)(s+1)-\cancel{\mu}-s(\sigma-\mu) = (\sigma-\mu)\underbrace{(t(s+1)-s)}_{\text{число}}$

$$\Updownarrow \ (t(s+1)-s)\cdot\int_0^1\int_A \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\tilde\mu;a)-\frac{\delta U}{\delta m}(\tilde\sigma;a)\right)\underbrace{(\sigma-\mu)}_{=\tilde\mu-\tilde\sigma}(da)ds \overset{?}{\le} 0$$

$$\Updownarrow \ \underbrace{\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\tilde\mu;a)-\frac{\delta U}{\delta m}(\tilde\sigma;a))(\tilde\sigma-\tilde\mu)(da)}_{\text{это } \le 0, \text{ по предположению} \Rightarrow \text{доказано}}ds \overset{?}{\le} 0$$

($\Rightarrow$) Пусть мы знаем, что $\underset{\substack{\| \\ ((1-t)+t)\,U((1-t)\mu+t\sigma)}}{U((1-t)\mu+t\sigma)} \le (1-t)U(\mu)+tU(\sigma);\ t\in[0,1]$

$$\Rightarrow (1-t)\left(U((1-t)\mu+t\sigma)-U(\mu)\right) \le t\left(U(\sigma)-U((1-t)\mu+t\sigma)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{U((1-t)\mu+t\sigma)-U(\mu)}{t} \le \frac{U(\sigma)-U((1-t)\mu+t\sigma)}{1-t}$$

Теперь пишем опр. $\frac{\partial U}{\partial m}$

т.е. что $U(\sigma)-U(\mu) = \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu+s(\sigma-\mu))(a)(\sigma-\mu)(da)ds$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left((1-t)\mu+t\sigma+s(\cancel{(1-t)\mu+t\sigma-\mu});a\right)(\cancel{(1-t)\mu+t\sigma-\mu})(da)\,ds}{t} \le$$

$$\le \frac{\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\sigma+s(\sigma-(1-t)\mu-t\sigma);a\right)(\sigma-(1-t)\mu-t\sigma)(da)\,ds}{1-t}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left((1-t)\mu+t\sigma+st(\sigma-\mu);a\right)\cdot \cancel{t}(\sigma-\mu)(da)\,ds}{\cancel{t}} \le \frac{\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\sigma+s(1-t)(\sigma-\mu);a\right)\cancel{(1-t)}(\sigma-\mu)(da)\,ds}{\cancel{1-t}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu+t(\sigma-\mu)(s+1);a\right)\cdot(\sigma-\mu)(da)\,ds \le \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\sigma+s(1-t)(\sigma-\mu);a\right)(\sigma-\mu)(da)\,ds.$$

Возьмем $t=0$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu;a)(\sigma-\mu)(da)\,ds \le \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\sigma+s(\sigma-\mu);a\right)(\sigma-\mu)(da)\,ds.$$

Возьмем $t=1$

это одно и то же!

$$\Rightarrow \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu+(\sigma-\mu)(s+1);a\right)(\sigma-\mu)(da)\,ds \le \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\sigma;a)(\sigma-\mu)(da)\,ds.$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu;a)(\sigma-\mu)(da)\,ds \le \int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\sigma;a)(\sigma-\mu)(da)\,ds$$

но подынтегральное выражение не зависит от s

$$\Rightarrow \boxed{\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu;a)(\sigma-\mu)\,da \le \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\sigma,a)(\sigma-\mu)\,da}$$ чтд.

5. (a) Пусть в условиях задачи 4 мн-во A конечно и состоит из $1,2\ldots N$, а вероятностная мера μ задаётся набором чисел $(m_1\ldots m_N)$, где $m_i \ge 0$, $\sum_i m_i = 1$.
Пусть ϑ — непрер. дифф. на $\mathbb{R}^N$.
Положим $U(\mu) := \vartheta(m_1 \ldots m_N)$.
Найти $\frac{\delta U}{\delta m}$.

Решение: пишем опр $\frac{\delta U}{\delta m}$:

$$U(\sigma)-U(\mu)=\int_0^1\int_A \frac{\delta U}{\delta m}\left(\mu+s(\sigma-\mu);a\right)(\sigma-\mu)(da)\,ds$$

но $U(\mu)=G(m_1\ldots m_N)$; $m_i^\circ = m_i^\circ + \Delta m_i$

$$\Rightarrow G(m_1\ldots m_N) - G(m_1^\circ\ldots m_N^\circ) = \int_0^1 \left[\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + s(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); a)\,\sigma(da) - \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu+s(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); a)\,\mu(da)\right] ds$$

$$\Rightarrow G(m_1\ldots m_N) - G(m_1^\circ\ldots m_N^\circ) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ + s(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); i)\cdot \underbrace{(m_i - m_i^\circ)}_{=\Delta m_i}\, ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{G(m_1\ldots m_N) - G(m_1^\circ\ldots m_N^\circ)}_{=\sum_{i=1}^N \frac{\partial G}{\partial x_i}\cdot \Delta m_i + \bar{o}(\max_i \Delta m_i)} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ + s(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); i)\,\Delta m_i\, ds}_{=\sum_{i=1}^N \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ + \xi(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); i)\,\Delta m_i}$$

– по т. о среднем для непр. дифф. $\frac{\delta U}{\delta m}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial G(m_1^\circ\ldots m_N^\circ)}{\partial x_i}\Delta m_i + \bar{o}(\max_i \Delta m_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ + \xi(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); i)\,\Delta m_i}_{=\sum_{i=1}^N \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ; i)\Delta m_i + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ + \xi(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); i) - \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ; i)\right)\Delta m_i}$$

$\left(\frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ + \xi(\Delta m_1\ldots\Delta m_N); i) - \frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ; i)\right) = \bar{o}(1)$, т.к. $\frac{\delta U}{\delta m}$ – непр. дифф.; сумма $= \bar{o}(\max_i \Delta m_i)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta U}{\delta m}(\overline{m}^\circ; i) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(\overline{m}^\circ)} \leftarrow \text{ответ}$$

б) Пусть A – произв. метрическое пр-во; g – непр. и огр. ф-ция на A, F – непр. дифф. на $\mathbb{R}$.

Положим $U(\mu)=F\left(\int_A g\,d\mu\right)$; найти $\frac{\delta U}{\delta m}$.

Докажем, что $\boxed{\frac{\delta U}{\delta m}(\mu, a) = F'\left(\int_A g\,d\mu\right)\cdot g(a)}$

Решение:

Ну по опр. $\frac{\delta U}{\delta m}$: $U(\sigma) - U(\mu) = \int_0^1 \int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + s(\sigma-\mu); a)(\sigma-\mu)(da)\,ds$

$$\Rightarrow \underbrace{F\left(\int_A g\,d\sigma\right) - F\left(\int_A g\,d\mu\right)}_{=F'\left(\int_A g\,d\mu\right)\int_A g\,d(\sigma-\mu) + \bar{o}(1) \text{ при } \sigma\to\mu} = \underbrace{\int_A \frac{\delta U}{\delta m}(\mu + \xi(\sigma-\mu); a)(\sigma-\mu)(da)}_{=\int_A \boxed{\frac{\delta U}{\delta m}(\mu, a)}\, d(\sigma-\mu)(a) + \int_A \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\mu+\xi(\sigma-\mu); a) - \frac{\delta U}{\delta m}(\mu; a)\right) d(\sigma-\mu)(a)}$$

$$= \int_A \boxed{F'\left(\int_A g\,d\mu\right) g(a)}\, d(\sigma-\mu)(a) + \bar{o}(1) \text{ при } \sigma\to\mu$$

$\int_A \left(\frac{\delta U}{\delta m}(\mu+\xi(\sigma-\mu); a) - \frac{\delta U}{\delta m}(\mu; a)\right) d(\sigma-\mu)(a) = \bar{o}(1)$ при $\sigma\to\mu$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta U}{\delta m}(\mu; a) = F'\left(\int_A g\,d\mu\right)\cdot g(a)} \leftarrow \text{Ответ}$$