Задачи на комплексный анализ

17 мая 2022 г.

Вычеты

Вычеты в конечных и.о.т.

- Если $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,\ \ a \neq \infty$ – ряд Лорана функции f в соотв. кольце, то

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1}.$$

- Если $a \neq \infty$ – полюс порядка $p \geq 1$ для функции f, то

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)}.$$

- Пусть $a \neq \infty$ и

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},\ \ z \in B(a).$$

где f_1, $f_2 \in \mathcal{A}(B(a))$: $f_2(a) = 0,\ \ f_2'(a) \neq 0,\ \ f_1(a) \neq 0$ (т. a - простой полюс f). Тогда

$$\operatorname{res}_a f = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Вычеты в т.∞

CA-1

Найти коэффициент при z^6 ряда Тейлора функции $cos^2(z)$
Решение.

$$\cos^2(z) = \frac{\cos(2z)+1}{2} = \frac{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}}{2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$$

Остаётся посмотреть на коэффициент, соответствующий $n = 3$.
Ответ: $-\frac{2}{45}$.

CA-2

Найти $f(i)$, где f — рациональная функция, в окрестности нуля задаваемая рядом $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
Решение. Знаем ряд:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Дифференцируем, а потом домножим на z:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$
$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

Получили $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Найдем $f(i)$:

$$\frac{i}{(1-i)^2} = \frac{i(1+i)^2}{(1^2-i^2)^2} = \frac{i(1-1+2i)}{2^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

CA-3

Найти радиус сходимости ряда Тейлора в точке 0 функции $\frac{1}{e^z+1}$
Решение. Особые точки:

$$e^z + 1 = 0 \qquad z = \pi i + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ближайшая к нулю — πi. Так как, функция голоморфна в круге радиуса π, то в нем и сходится ряд.
Ответ: π

CA-4

Найти площадь образа следующей области под действием e^z:

$$\{z = x + iy : \ x \in [0, \ln 3], \ y \in [0, \ \pi]\}.$$

Решение.

Посмотрим куда переходят границы (1), (2), (3), (4) (см. 2):

- $(1): e^x e^{i0} = e^x, \ x \in [0, \ln 3]$.
- $(2): e^{\ln 3} e^{iy} = 3 \cdot e^{iy}, \ y \in [0, \pi]$.

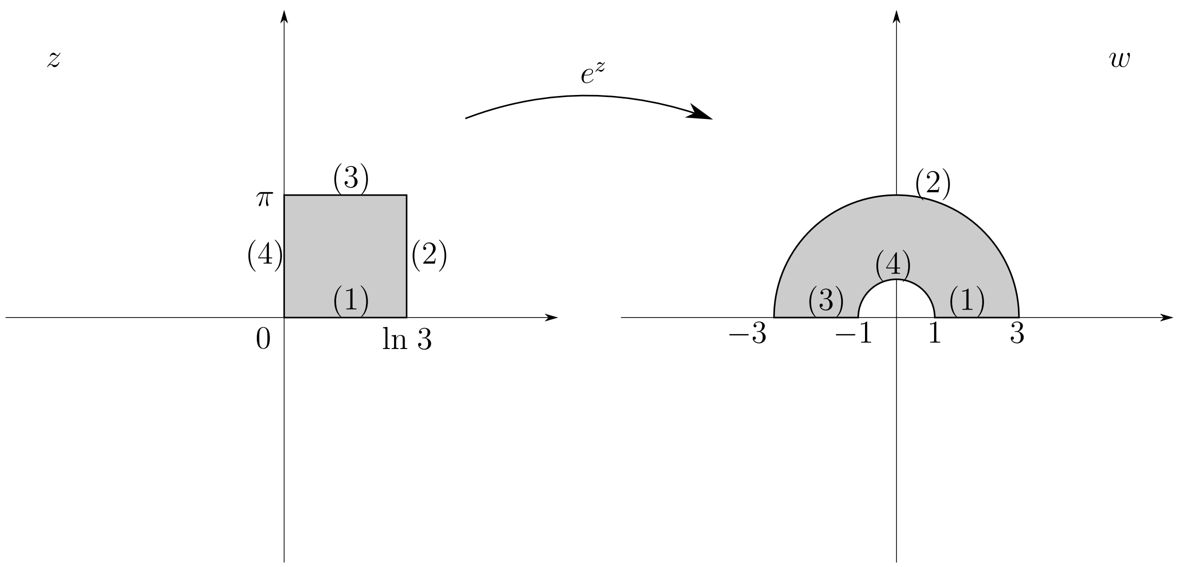

Рис. 1: Образ под действием e^z (серым выделены сами области).

- $(3): e^x e^{i\pi} = -e^x,\ \ x \in [0, \ln 3]$.
- $(4): e^0 e^{iy} = e^{iy},\ \ x \in [0, \pi]$.

Искомая площадь:

$$S = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi.$$

Ответ: 4π.

CA-5

Найти радиус окружности, являющейся образом окружности $\{z : |z| = 1\}$ при отображении $z \to z/(z-2)$.
Решение. Так как

$$\frac{z}{z-2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{z-2},$$

то нам достаточно рассмотреть образ под действием $\Lambda(z) = 1/(z-2)$. А зачем? Все эти рассуждения с симметрией, диаметром на $\mathbb{R}$ и образом конечного числа точек и для исходной функции прекрасно работают. Это какое-то избыточное решение (но правильное, конечно).

z	$\Lambda(z)$
1	-1
0	$-1/2$
-1	$-1/3$
i	$1/(i-2) = (2+i)/5$

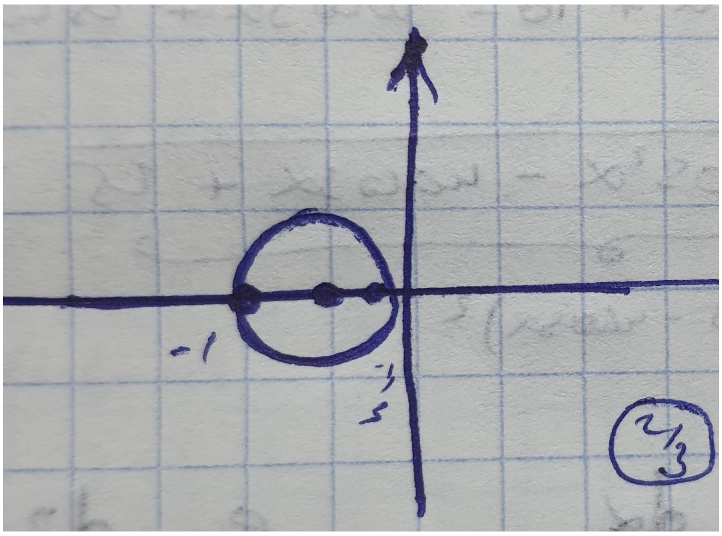

Рис. 2: Образ под действием Λ.

Так как $\overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\Lambda} \overline{\mathbb{R}}$, точки симметричные относительно $\mathbb{R}$ переходят в точки также симметричные относительно $\mathbb{R}$.

Если смотреть по выписанным точкам, то наша окружность O перешла в другую окружность $\Lambda(O)$, образ внутренности – внутри образа окружности (см. точку 0). А из свойства симметрии – диаметр $\Lambda(O)$ лежит на $\mathbb{R}$. Осталось понять, что точки $\Lambda(1)$ и $\Lambda(-1)$ – концы диаметра. Так что

$$r = \frac{1}{2}\left|-1+\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}.$$

Осталось применить $z \to 2z$ и получить $r = 2/3$.

Ответ: 2/3.

CA-6

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z.$$

Решение. Особые точки функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2-z}$ — это простые полюса $z=0$ и $z=1$. Обе эти точки лежат внутри контура $|z|=2$. По теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z = \operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=1} f(z).$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{z+1}{2z-1}\right|_{z=0} = -1 \text{ и } \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \left.\frac{z+1}{2z-1}\right|_{z=1} = 2. \text{ Итак,}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2-z}\,\mathrm{d}\,z = -1+2 = 1.$$

Ответ: 1.

CA-7

Найти образ круга $\{z:|z|<1\}$ при отображении $z \to \dfrac{z-i}{z+i}$.

Решение.

Сначала найдем образ окружности $\{z:|z|=1\}$. Поскольку дробно-линейные преобразования сохраняют обобщенные окружности, достаточно найти образ трех точек:

$$1 \to \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i,$$

$$i \to \frac{i-i}{i+i} = 0,$$

$$-i \to \frac{-i-i}{-i+i} = \infty.$$

Тогда образ окружности $\{z:|z|=1\}$ является обобщенной окружностью, проходящей через точки $\{-i, 0, \infty\}$, то есть прямой $\mathrm{Re}\, z=0$. Посмотрим, куда перейдет внутренность круга:

$$0 \to \frac{0-i}{0+i} = -1,$$

следовательно, круг $\{z:|z|<1\}$ перейдет в левую полуплоскость $\{z:\mathrm{Re}\, z<0\}$.

Ответ: левая полуплоскость $\{z:\mathrm{Re}\, z<0\}$.

CA-8

Найти коэффициент при z^{-2} ряда Лорана функции

$$2\,\sin\frac{z-1}{z}$$

в кольце $0<|z|<\infty$.

Решение.

Воспользуемся тем, что экспоненту можно раскладывать в ряд Тейлора.

$$2\,\sin\frac{z-1}{z} = 2\,\sin\left(1-\frac{1}{z}\right) = 2\frac{e^{i\left(1-\frac{1}{z}\right)} - e^{-i\left(1-\frac{1}{z}\right)}}{2i} = \frac{e^i}{i}e^{-\frac{i}{z}} - \frac{e^{-i}}{i}e^{\frac{i}{z}} =$$
$$\frac{e^i}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{i}{z}\right)^n}{n!} - \frac{e^{-i}}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i}{z}\right)^n}{n!}.$$

Так как представление верно для всех $z\neq 0$, то получившиеся выражение и есть ряд Лорана в кольце $0<|z|<\infty$, который перегруппирован (ряды сходятся абсолютно, так что переставлять можно).

Осталось посмотреть коэффициент при z^{-2}:

$$\frac{e^i}{i}\frac{-1}{2} - \frac{e^{-i}}{i}\frac{-1}{2} = \frac{e^{-i}-e^i}{2i} = -\,\sin 1.$$

Ответ: $-\,\sin 1$.

CA-9

Найти ближайшие к 0 корни уравнения $\sin(z)=2$
Решение.

$$\sin(z) = 2$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$$

$$e^{iz} = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = i(2 \pm \sqrt{3})$$

Произведем замену $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x))$$

Теперь уравнение имеет вид

$$\begin{cases} e^{-y}\cos(x) = 0 \\ e^{-y}\sin(x) = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ e^{-y} = (-1)^k(2 \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in 2\mathbb{Z} \\ y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \end{cases}$$

Заметим, что поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$, $|\ln(2+\sqrt{3})| = \ln(2-\sqrt{3})$.
Ответ: $\frac{\pi}{2} - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$.

CA-10

Найти такую голоморфную функцию f комплексного переменного $z = x + iy$, что $\mathrm{Re} f(x, y) = y - xy$ и $f(0) = 0$
Решение.

Пусть $f(z) = u(x+iy) + iv(x+iy)$. Тогда $u(x+iy) = y - xy$ и

$$f(0) = 0 \implies v(0) = 0.$$

Кроме того, так как f – голоморфна, то она удовлетворяет условиям Коши-Римана, то есть

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases},$$

следовательно, $v_y = -y$ и $v_x = x - 1 \implies v = -\frac{y^2}{2} + P(x) = \frac{x^2}{2} - x + Q(y) \implies$

$\Longrightarrow v = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x + C$, но $v(0) = 0 \Longrightarrow C = 0$. Значит,

$$f = u + iv = y - xy + i\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x\right) = y - ix + \frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) =$$

$$= (x+iy)(-i) + \frac{i}{2}(x+iy)^2 = -iz + \frac{iz^2}{2}.$$

Ответ: $-iz + iz^2/2$.

CA-11

Вычислить $17\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$.

Решение.

$$17\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right) = 17\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{tg}\,(i\ln 2)}{1 + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}\,(i\ln 2)} = 17\frac{1 - \mathrm{tg}\,(i\ln 2)}{1 + \mathrm{tg}\,(i\ln 2)}.$$

Вычислим теперь $\mathrm{tg}\,(i\ln 2)$. Вспомним, что

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}} = i\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

и подставим $i\ln 2$ в получившееся выражение. Получим

$$\mathrm{tg}\,(i\ln 2) = i\frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{3}{5}i.$$

Итак,

$$17\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right) = 17\frac{1 - \frac{3}{5}i}{1 + \frac{3}{5}i} = 17\frac{(1 - \frac{3}{5}i)^2}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{25(1 - \frac{9}{25} - \frac{6}{5}i)}{2} = 8 - 15i.$$

Ответ: $8 - 15i$.

CA-12

Кривая является образом окружности $\{z\colon |z| = 2\}$ под действием функции Жуковского $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

Найти площадь области, ограниченной этой кривой.

Решение.

Введём на окружности параметризацию отрезком $[0, 2\pi]$:

$$\{z\colon |z| = 2\} = \{z\colon z = 2e^{it}\}$$

После применения функции Жуковского получим следующую кривую:

$$\frac{1}{2}\left(2e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}\right)=e^{it}+\frac{1}{4}e^{-it}=\cos t+i\sin t+\frac{1}{4}\cos t-\frac{1}{4}i\sin t=$$
$$\frac{5}{4}\cos t+\frac{3}{4}i\sin t$$

Это соответствует следующей параметрически-заданной действительной кривой на комплексной плоскости $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$:

$$(x(t),\,y(t))=\left(\frac{5}{4}\cos t,\,\frac{3}{4}\sin t\right),\ \ t\in[0,\,2\pi].$$

Параметризация $[0,\,2\pi]$ задаёт положительное направление обхода, а значит, мы вправе (не будем ставить знак модуля на интеграл) применить следующую формулу для поиска площади, ограниченной параметрически-заданной кривой:

$$|D|=-\int_{t_0}^{t_1}y(t)x'(t)dt=-\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\sin t\cdot\frac{5}{4}\cdot(-\sin t)dt=\frac{15\pi}{16}$$

Ответ не совпадает с тем, что в файле от RusFort. Но проверка в Wolfram говорит, что площадь выше посчитана верно.

P.S. Можно заметить, что

$$(x(t),\,y(t))=\left(\frac{5}{4}\cos t,\,\frac{3}{4}\sin t\right),\ \ t\in[0,\,2\pi]$$

задает эллипс с полуосями $(5/4,\,3/4)$, так что его площадь

$$S=\pi\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15\pi}{16}.$$

Ответ: $\frac{15\pi}{16}$**.**

CA-13

В каких точках комплексной плоскости функция $f(z)=\overline{z}^2+2i\overline{z}$ имеет производную по z?

Решение.

Распишем приращение нашей функции в произвольной точке z_0:

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=(\overline{z_0+\Delta z})^2+2i(\overline{z_0+\Delta z})-\overline{z_0}^2-2i\overline{z_0}=$$
$$2\overline{z_0}\overline{\Delta z}+(\overline{\Delta z})^2+2i\overline{\Delta z}=0*\Delta z+(2\overline{z_0}+2i)\overline{\Delta z}+\overline{\overline{o}}(\Delta z).$$

Таким образом, функция $f(z)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в любой точке $z_0\in\mathbb{C}$, поэтому $\mathbb{C}$-дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z_0 равносильна тому, что $\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\Big|_{z_0}=0$, т.е. $2\overline{z_0}+2i=0$, откуда $z_0=i$.

Ответ: i.

CA-14

Найти образ прямой $\{z = x + iy \;:\; y = 1\}$ при отображении $z \mapsto z^2$.
Решение.

Параметризация нашей прямой – это $z = t + i$. Тогда $z^2 = t^2 - 1 + 2it$. Обозначим $u = 2t$ и запишем $z^2 = \frac{u^2}{4} - 1 + iu$, то есть

$$x = \frac{y^2}{4} - 1,$$

откуда $y^2 = 4x + 4$.
Ответ: парабола $y^2 = 4x + 4$.

CA-15

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (2\overline{z} + 1)\, dz.$$

Решение.

Воспользуемся формулой Коши. Для $f(z) = 1/z$ т.0 – полюс первого порядка.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (2\overline{z} + 1)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} 2\frac{|z|^2}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} dz =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{2}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} dz = \frac{1}{\pi i} 2\pi i \underbrace{\operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z}\right)}_{1} + 0 = 2.$$

Ответ: 2.

CA-16

Найти ближайший к единице полюс функции

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1} + \frac{i}{z}.$$

Решение. Все решения уравнения $e^{iz} - 1 = 0$ — это в точности $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Второе слагаемое $\dfrac{i}{z}$ уходит на бесконечность в точке $z_0 = 0$. При этом при $z \neq z_k$ функция f заведомо является аналитической т.к. линейная комбинация аналитических функций аналитична, равно как и композиция. Значит все z_k изолированы. Причем для всех $k \neq 0$ заведомо имеем $\lim\limits_{z \to z_k} f(z) = \infty$, т.е. в эти точки являются полюсами нашей функции. Отсюда также получаем, что ∞ —

не изолированная особая точка. Осталось посмотреть, что происходит в точке $z_0 = 0$.

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{e^{iz}-1} + \frac{i}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z+ie^{iz}-i}{z(e^{iz}-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z+i\left(1+iz-\frac{z^2}{2}+o(z^2)-1\right)}{z(1+iz+o(z))} =$$
$$\lim_{z\to 0} \frac{\frac{-i}{2}z^2+o(z^2)}{iz^2+o(z^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{-i}{2}+o(1)}{i+o(1)} = -\frac{1}{2}.$$

Получается, что в точке 0 функция f имеет устранимую особенность.
Ответ: 2π

CA-17

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \sin\frac{z+1}{z} dz.$$

Решение.

У данной функции внутри единичного круга есть особая точка $z = 0$. Разложим в ряд Лорана в этой точке.

$$\sin\frac{z+1}{z} = \sin\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{i\left(1+\frac{1}{z}\right)} - e^{-i\left(1+\frac{1}{z}\right)}}{2i} = \frac{e^i}{2i}e^{\frac{i}{z}} - \frac{e^{-i}}{2i}e^{-\frac{i}{z}} =$$
$$\frac{e^i}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i}{z}\right)^n}{n!} - \frac{e^{-i}}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-i}{z}\right)^n}{n!}.$$

Так как представление верно для всех $z \neq 0$, то получившиеся выражение и есть ряд Лорана в кольце $0 < |z| < \infty$, который перегруппирован (ряды сходятся абсолютно, так что переставлять можно).

Таким образом, $z = 0$ – существенно особая, а вычет

$$\mathrm{res}_{z=0}\left(\sin\frac{z+1}{z}\right) = c_{-1} = \frac{e^i}{2i}i - \frac{e^{-i}}{2i}(-i) = \cos 1.$$

По теореме Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \sin\frac{z+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\ \mathrm{res}_{z=0}\left(\sin\frac{z+1}{z}\right) = \cos 1.$$

Ответ: $\cos 1$.

CA-18

Найти функцию, голоморфную в окрестности нуля и удовлетворяющую функциональному уравнению.

$$f(z) = 2f(iz) + 3z^6.$$

Решение. $f(z)$ и $f(iz)$ голоморфны в окрестности нуля $\Longrightarrow$ аналитические в окрестности 0. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (iz)^n + 3z^6.$$

Коэффициенты ряда Тейлора находятся однозначно, осталось сравнить их справа и слева.

$$\begin{aligned}
&n = 4k: & c_n = 2c_n &\implies c_n = 0,\\
&n = 4k+1: & c_n = 2ic_n &\implies c_n = 0,\\
&n = 4k+2,\ n \neq 6: & c_n = -2c_n &\implies c_n = 0,\\
&n = 4k+3: & c_n = -2ic_n &\implies c_n = 0,\\
&n = 6: & c_6 = -2c_6 + 3 &\implies c_6 = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, $f(z) = z^6$.

Ответ: z^6.

CA-19

Найти рациональную функцию, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, простой полюс в -1 с вычетом -1, не имеющую других полюсов и равную 0 в 0.

Решение.

Пусть искомая функция $f(z)$. Она имеет простые полюса в 1 и -1, значит

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} \cdot g(z),$$

где $g(z)$ не имеет полюсов. Далее, $f(0) = 0$, следовательно,

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)} \cdot h(z).$$

Найдем $h(z)$ в виде $az + b$:

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z-1} \cdot \frac{z(az+b)}{z+1} = \frac{a+b}{2} = 1,$$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{z+1} \cdot \frac{z(az+b)}{z-1} = \frac{-a+b}{2} = -1.$$

Тогда

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow f(z) = \frac{2z^2}{z^2-1}.$$

Ответ: $\dfrac{2z^2}{z^2-1}$.

CA-20

Найдите конформное отображение f верхней полуплоскости на единичный круг, удовлетворяющее условиям $f(i)=0$, $f'(i)=1/2$.

Решение. Будем искать это отображение в виде дробно-линейного. Известно, что любое дробно-линейное отображение верхней полуплоскости на единичный круг имеет вид

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}.$$

Т. к. $f(i)=0$, то получаем, что $z_0=i$. Далее

$$\frac{1}{2} = f'(i) = e^{i\alpha}\cdot\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = -e^{i\alpha}\cdot\frac{i}{2},$$

откуда $e^{i\alpha}=i$. Поэтому

Ответ: $f(z)=\dfrac{iz+1}{z+i}$