Лемма 1. *Если Z_t - квадратично интегрируемый случайный процесс, то $\sum_{u=1}^{t-1}\Big[Z_{u+1} - \mathrm{E}_u Z_{u+1}\Big]$ также квадратично интегрируемый.*

Доказательство. По свойству условной дисперсии имеем

$$\mathrm{E}\Big[Z_{t+1} - \mathrm{E}_t Z_{t+1}\Big]^2 = \mathrm{E}\, Z_{t+1}^2 - \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}_t Z_{t+1}\Big]^2 < \infty \iff \mathrm{E}\, Z_{t+1}^2 < \infty.$$

Пусть $t < s$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big(Z_{t+1} - \mathrm{E}_t Z_{t+1}\Big)\Big(Z_{s+1} - \mathrm{E}_s Z_{s+1}\Big) = \\
&\mathrm{E}\, Z_{t+1}Z_{s+1} - \mathrm{E}\,\mathrm{E}_t(Z_{t+1})Z_{s+1} - \mathrm{E}\, Z_{t+1}\,\mathrm{E}_s(Z_{s+1}) + \mathrm{E}\,\mathrm{E}_t(Z_{t+1})\,\mathrm{E}_s(Z_{s+1}) = \\
&\mathrm{E}\, Z_{t+1}Z_{s+1} - \mathrm{E}\, Z_{t+1}Z_{s+1} - \mathrm{E}\, Z_{t+1}\,\mathrm{E}_s(Z_{s+1}) + \mathrm{E}\,\mathrm{E}_t(Z_{t+1}\,\mathrm{E}_s(Z_{s+1})) = \\
&- \mathrm{E}\, Z_{t+1}\,\mathrm{E}_s(Z_{s+1}) + \mathrm{E}\, Z_{t+1}\,\mathrm{E}_s(Z_{s+1}) = 0.
\end{aligned}$$

□

Лемма 2. *Z_t - квадратично интегрируемый случайный процесс, то есть для любого $t > 0$ $\mathrm{E}\, Z_t^2 < \infty$.*

Для доказательства этой леммы нам понадобится следующее утверждение

Предложение 1. *Пусть $\partial_\gamma \Delta^N$ - точки симплекса, отстающие от границы на не более чем γ. Тогда найдется достаточно маленькое число γ, для которого $\mu_t(\partial_\gamma \Delta^N) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Доказательство.

$$\int \varphi(s)\,\mu_{t+1}(ds) = \frac{\int \varphi(s) s_{n_{t+1}(\omega)}\,\mu_t(ds)}{\int s_{n_{t+1}(\omega)}\,\mu_t(ds)} = \frac{\int \varphi(s) s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)} \frac{\mu_{t-1}(ds)}{\int s_{n_t(\omega)}\,\mu_{t-1}(ds)}}{\int s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)} \frac{\mu_{t-1}(ds)}{\int s_{n_t(\omega)}\,\mu_{t-1}(ds)}} = \frac{\int \varphi(s) s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)}\,\mu_{t-1}(ds)}{\int s_{n_{t+1}(\omega)} s_{n_t(\omega)}\,\mu_{t-1}(ds)}.$$

Значит, можно явно выразить μ_t через начальную меру μ_0 :

$$\mu_t = \frac{s_{n_t(\omega)} \ldots s_{n_1(\omega)}\,\mu_0}{\int s_{n_t(\omega)} \ldots s_{n_1(\omega)}\,\mu_0(ds)}.$$

Введем случайную величину ξ, которая принимает значения из множества $\{1, \ldots, N\}$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - н.о.р.с.в, причем $\xi_i = \xi$ по распределению. Тогда меру μ_t можно записать, используя $\xi_1, \xi_2, \ldots$:

$$\mu_t = \frac{s_{\xi_1(\omega)} \ldots s_{\xi_t(\omega)}\,\mu_0}{\int s_{\xi_1(\omega)} \ldots s_{\xi_t(\omega)}\,\mu_0(ds)}.$$

Обозначим η_t^i - сколько раз выпал i-й актив за время t. Тогда

$$s_{\xi_1(\omega)} \ldots s_{\xi_t(\omega)} = s_1^{\eta_t^1} \ldots s_N^{\eta_t^N}.$$

Заметим, что в силу ЗБЧ $\eta_t^i \approx tP(\xi = i) = t\,\mathrm{E}\,X_i$. Под этой записью имеется в виду

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_t^i}{t} = \mathrm{E}\,X_i.$$

Данное равенство легко увидеть, если ввести новую случайную величину, принимающую 1, если $\xi = i$, и 0 иначе. Имеем

$$s_1^{\eta_t^1} \ldots s_n^{\eta_t^n} \approx \left[s_1^{\mathrm{E}\,X_1} \ldots s_N^{\mathrm{E}\,X_N}\right]^t.$$

Тогда меру μ_t можно записать следующий образом

$$\mu_t(A) \approx \frac{\displaystyle\int_A \left[s_1^{\mathrm{E}\,X_1} \ldots s_N^{\mathrm{E}\,X_N}\right]^t \mu_0(ds)}{\displaystyle\int \left[s_1^{\mathrm{E}\,X_1} \ldots s_N^{\mathrm{E}\,X_N}\right]^t \mu_0(ds)}$$

Здесь A - произвольное μ_t - измеримое множество.
Из данного выражения видно, что если точка максимума выраженией $s_1^{\mathrm{E}\,X_1} \ldots s_n^{\mathrm{E}\,X_N}$ не принадлежит замыканию множества A, то $\mu_t(A) \to 0$.
Осталось решить задачу вариационного исчисления

$$s_1^{\mathrm{E}\,X_1} \ldots s_n^{\mathrm{E}\,X_n} \to \max_{\Delta^N}$$

То есть $s_1 \geq 0, \ldots, s_N \geq 0$ и $s_1 + \ldots + s_N = 1$.
Нетрудно видеть, что единственным решением будет точка $s = (\mathrm{E}\,X_1, \ldots \mathrm{E}\,X_N) = s^*$. Отсюда следует, что если $s^* \notin A$, то $\mu_t(A) \to 0$. Осталось вспомнить, что s^* не принадлежит границе симплекса. $\square$

Доказательство леммы 2. В силу предложения 1 можно считать, что A и B_i не пересекают границу симплекса.

$$\mathrm{E}\,Z_t^2 = \mathrm{E}\Big[\ln \frac{\mu_t(A)}{\mu_t(B_i)}\Big]^2 = \mathrm{E}\Big[\ln \frac{\int_A s_{n_1(\omega)} \ldots s_{n_t(\omega)}\,\mu_0(ds)}{\int_{B_i} s_{n_1(\omega)} \ldots s_{n_t(\omega)}\,\mu_0(ds)}\Big]^2 =$$
$$\mathrm{E}\Big[\ln \int_A s_{n_1(\omega)} \ldots s_{n_t(\omega)}\,\mu_0(ds) - \ln \int_{B_i} s_{n_1(\omega)} \ldots s_{n_t(\omega)}\,\mu_0(ds)\Big]^2$$

Данное выражение конечно, так как A и B_i не пересекают границу симплекса. $\square$

Следствие 1. $\sum_{u=1}^{t-1}\Big[Z_{u+1} - \mathrm{E}_u\,Z_{u+1}\Big]$ *является квадратично интегрируемым мартингалом.*

Доказательство. Осталось проверить мартингальное свойство.

$$\mathrm{E}_{t-1}\sum_{u=1}^{t-1}\Big[Z_{u+1}-\mathrm{E}_u\,Z_{u+1}\Big]=\sum_{u=1}^{t-2}\Big[Z_{u+1}-\mathrm{E}_u\,Z_{u+1}\Big]+\mathrm{E}_{t-1}\Big[Z_t-\mathrm{E}_{t-1}\,Z_t\Big].$$

Последнее слагаемое равно нулю. Значит, мартингальное свойство выполнено. □