ЭКЗАМЕН 2021-2

Во всех задачах w - винеровский процесс, $\Lambda_t = t$, $||x||_t := \sup_{s\le t}|x_s|$, $||X||_B^2 := \mathbb{E}||X||_T^2$.

1. Пусть $X = H \cdot w$, $H > 0$, $\langle X\rangle_t = H^2 \cdot \Lambda_t < \infty$, $t < \infty$, $H^2 \cdot \Lambda_\infty = \infty$. Пусть $t \mapsto A_t(\omega)$ — функция, обратная к функции $t \mapsto H^2 \cdot \Lambda_t$. Покажите,

что процесс $\tilde{w}_t = X_{A_t}$, $t \ge 0$, — винеровский.

Решение.

Пусть $X_t = \int_0^t H_s dw_s, H > 0$ и $\langle X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds < \infty, H^2 \cdot \Lambda_\infty = \infty$. $t \mapsto A_t(\omega)$ — это функция, обратная к $t \mapsto H^2 \cdot \Lambda_t$, то есть $A_t = \inf\{0 \le s : \langle X\rangle_s > t\}$ (по определению обобщенной обратной функции), $B_t = \int_0^t H_s^2 ds$.

Покажем, что $Y_t = X_{A_t}$ — винеровский процесс. Заметим, что из определения A_t следует $\langle X\rangle_{A_t} = t$. Имеем:

$$\begin{cases} 1) B_t \text{ — непрерывная возрастающая функция} \Rightarrow A_t = B_t^{-1} \text{ тоже} \\ 2) \langle X\rangle_{A_t} = t \end{cases}$$

При этом Y_t — локальный мартингал, потому что его дифференциал содержит только слагаемое с дифференциалом от винеровского процесса и не содержит слагаемого с dt. Итак, Y_t — непрерывный локальный мартингал, у которого квадратическая вариация равна t. Таким образом, по теореме Леви: Y_t — винеровский процесс.

2. Пусть $f(s,t)$ — функция, интегрируемая по мере Лебега на $[0,T]^2$. Согласно определению через изометрию стохастический интеграл $I_T(f(t)) = \int_0^T f(s,t)dw_s$ является классом эквивалентных с.в. Произвольный выбор представителей из каждого класса не гарантирует, что при фиксированном ω траектория $t \mapsto I_T(f(t))$ будет измерима, т.е. обладать свойством, необходимым для интегрирования по Лебегу. Поэтому, конструкция интеграла, зависящего от параметра требует некоторого дополнительного рассуждения.

Доказать, что существует $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}_{[0,T]}$-измеримый процесс $I_T(f(t))$, $t \le T$, такой, что $I_T(f(s))$ при почти всех s значение процесса $I_T(f(t))$ является представителем стохастического интеграла по переменной s и

$$\int_0^T \Big(\int_0^T f(s,t)dw_s\Big)dt = \int_0^T \Big(\int_0^T f(s,t)dt\Big)dw_s.$$

Решение. Дано, что функция $f(t,u)$ определена на $[0,T]\times[0,T]$ и такова, что $f\in L^2([0,T]) = L^2([0,T]\times[0,T], \mathcal{B}_{[0,T]}\times\mathcal{B}_{[0,T]}, \mu\times\mu)$, где μ - мера Лебега, $\mathcal{B}_{[0,T]}\times\mathcal{B}_{[0,T]}$ - уже пополнена по мере $\mu\times\mu$). Предположим, что $\Delta_n = \int\limits_0^T\int\limits_0^T (f(t,u)-f_n(t,u))^2\,dsdu \to 0$ при $\delta_n\to 0$, где $f_n(s,u) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(t,u_i^{(n)}) I_{(u_i^{(n)},u_{i+1}^{(n)}]}(u), 0 = u_0^{(n)} < u_1^{(n)} < ... < u_n^{(n)} = T, \delta_n = \max_i(u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)})$

Функция $I_T(f(t)) = \int\limits_0^T f(t,u)\,dw_u$ для почти всех ω является $\mathcal{B}_{[0,T]}$ измеримой. Это вытекает из т.Фубини, так как $\int\limits_0^T E|I_T(f(t))|\,dt < \infty$. Это неравенство верно, поскольку $E|I_T(f(t))|^2 = \int\limits_0^T f^2(t,u)\,du$, а мера $\mu\times P$ - конечная мера на $\mathcal{B}_{[0,T]}\times\mathcal{F}$.

При μ почти всех $u\in[0,T]$ функция $g(u) = \int\limits_0^T f(t,u)\,dt$ является $\mathcal{B}_{[0,T]}$ измеримой также в силу т. Фубини. Действительно, $\int\limits_0^T\int\limits_0^T |f(t,u)|\,dtdu < \infty$, поскольку $f\in L^2([0,T]^2)$. Кроме того, для μ почти всех u $\left(\int\limits_0^T f(t,u)\,du\right)^2 \le T\int\limits_0^T f^2(t,u)\,dt$. Поэтому, $g\in\mathcal{L}^2[0,T]$ как неслучайная функция, интегрируемая в квадрате.

Далее,

$$\int_0^T\left(\int_0^T f_n(t,u)dw_u\right)dt = \int_0^T\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_n(t,u_i^{(n)})(w(u_{i+1}^{(n)}) - w(u_i^{(n)}))\right)dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(w(u_{i+1}^{(n)}) - w(u_i^{(n)}))\int_0^T f_n(t,u_i^{(n)})dt \quad (1)$$

Пользуясь линейностью стохастического интеграла по винеровскому процессу, имеем

$$\int_0^T\left(\int_0^T f_n(t,u)dt\right)dw_u = \int_0^T\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T f(t,u_i^{(n)})I_{(u_i^{(n)},u_{i+1}^{(n)}]}(u)dt\right)dw_u =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(w(u_{i+1}^{(n)}) - w(u_i^{(n)}))\int_0^T f(t,u_i^{(n)})\,dt \quad (2)$$

То есть для f_n доказали, что можно поменять порядок интегрирования

$$\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f_n(t,u)dt\right) dw_u = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f_n(t,u)dw_u\right) dt$$

Далее, воспользуемся т. Фубини, неравенствами Ляпунова и Коши-Буняковского:

$$\mathbb{E}\left|\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,u)dw_u\right) dt - \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f_n(t,u),\ dw_u\right) dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T \mathbb{E}\left|\int\limits_0^T (f(t,u) - f_n(t,u))dw_u\right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T \left(\mathbb{E}\left(\int\limits_0^T (f(t,u) - f_n(t,u))dw_u\right)^2\right)^{1/2} dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T (f(t,u) - f_n(t,u))^2 du\right)^{1/2} dt \leq (T\Delta_n)^{1/2} \to 0, n \to \infty \quad (3)$$

Аналогично

$$\mathbb{E}\left|\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,u)dt\right) dw_u - \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f_n(t,u)dt\right) dw_u\right| \leq$$

$$\leq \left(\mathbb{E}\left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T (f(t,u) - f_n(t,u))dt\right) dw_u\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T (f(t,u) - f_n(t,u))dt\right)^2 du\right)^{1/2} \leq (T\Delta_n)^{1/2} \quad (4)$$

Осталось заметить, что если $\xi_n \to \xi$, $\zeta_n \to \zeta$ в $L^2(\Omega)$ и $\xi_n = \zeta_n$ п.н., то $\xi = \zeta$ п.н.

Таким образом доказано, что $\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,u)dt\right) dw_u = \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^T f(t,u)dw_u\right) dt$ с вероятностью 1.

3. Показать, что

$$\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \int_0^r e^{-(r-s)/\varepsilon} dw_s dr = \int_0^t (1 - e^{-(t-s)/\varepsilon}) dw_s.$$

Решение.

$$\int\limits_0^t \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^r e^{\frac{-(r-s)}{\varepsilon}}dw_s dr \overset{?}{=} \int\limits_0^t (1-e^{\frac{-(t-s)}{\varepsilon}})dw_s$$

$$\int\limits_0^t \frac{1}{\varepsilon}\underbrace{e^{-\frac{r}{\varepsilon}}\int\limits_0^r e^{\frac{s}{\varepsilon}}dw_s}_{=:Y_r} dr \overset{?}{=} w_t - \underbrace{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\int\limits_0^t e^{\frac{s}{\varepsilon}}dw_s}_{=:Y_t}$$

$$\int\limits_0^t \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}Y_r dr}_{=:dw_t-dY_t} \overset{?}{=} w_t - Y_t$$

Обоснуем последнее равенство:
посмотрим на подынтегральное выражение в левой части:
из 4-ой задачи знаем, какому СДУ удовдетворяет Y_t, поэтому из этого уравнения выразим $\frac{1}{\varepsilon}Y_t dt$ следующим образом:
$dY_t = -\frac{1}{\varepsilon}Y_t dt + dw_t \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}Y_t dt = dw_t - dY_t$
Отсюда получаем последнее равенство (которое было под знаком вопроса), что доказывает требуемое.

4. Пусть $\varepsilon > 0$ и $Y = Y^\varepsilon$ — решение СДУ $dY_t = -(1/\varepsilon)Y_t dt + dw_t$, $Y_0 = 0$. Показать, что $\mathbb{E}Y_T^2 = 2\varepsilon(1-e^{-2T/\varepsilon})$. Пользуясь формулой Ито, вывести отсюда, что для любого марковского момента $\tau \le T$ (в частности, для $\tau_a := \inf\{t : Y_t \ge a\} \wedge T$) справедлива оценк $\mathbb{E}Y_\tau^4 \le 12T\varepsilon$.

Используя представление

$$E||Y||_T^2 = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_T^2 > a)da = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_{\tau_a}^2 > a)da$$

получить оценку $E||Y||_T^2 \le C\varepsilon^{1/2}$, где $C = C_T$ —- константа.

Решение.

а) $dY_t = -\frac{1}{\varepsilon}Y_t dt + dw_t,\ Y_0 = 0$. Пусть $H(t,x) = xe^{t/\varepsilon}$, тогда по формуле Ито:

$$dZ_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t,Y_t)dt + \frac{\partial H}{\partial x}(t,Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,Y_t)(dY_t)^2 = e^{t/\varepsilon}dw_t \Rightarrow$$

$$e^{t/\varepsilon}dw_t = d(Y_t e^{t/\varepsilon}) \Rightarrow Y_t e^{t/\varepsilon} - 0 = \int_0^t e^{s/\varepsilon}dw_s \Rightarrow Y_t = \int_0^t e^{(-t+s)/\varepsilon}dw_s = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\int_0^t e^{s/\varepsilon}dw_s$$

Получается:

$$\mathbb{E}Y_T^2 = \mathbb{E}e^{-2T/\varepsilon}\left(\int_0^T e^{s/\varepsilon}dw_s\right)^2 = e^{-2T/\varepsilon}\int_0^T e^{2s/\varepsilon}ds = \frac{\varepsilon}{2}e^{-2T/\varepsilon}\ e^{2s/\varepsilon}\Big|_0^T = \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{-2T/\varepsilon})$$

b)

$dY_t = -\frac{1}{\varepsilon}Y_t dt + dw_t$. Возьмем $f(x,t) := x^4$. Тогда по формуле Ито:

$$d(Y_t^4) = \left(6Y_t^2 - \frac{4}{\varepsilon}Y_t^4\right)dt + 4Y_t^3 dw_t \Rightarrow Y_t^4 = \int_0^t \left(6Y_s^2 - \frac{4}{\varepsilon}Y_s^4\right)ds + 4\int_0^t Y_s^3 dw_s$$

$$\Rightarrow \forall \tau \le T : Y_\tau^4 = \int_0^\tau \left(6Y_s^2 - \frac{4}{\varepsilon}Y_s^4\right)ds + 4\int_0^\tau Y_s^3 dw_s \le \int_0^\tau 6Y_s^2 ds + 4\int_0^\tau Y_s^3 dw_s$$

У последнего слагаемого матожидание равно нулю, поэтому (используя результат пункта a)):

$$\mathbb{E}Y_\tau^4 \le \int_0^T 6\mathbb{E}Y_s^2 ds = \int_0^T 6\cdot\frac{\varepsilon}{2}(1-e^{-2s/\varepsilon})ds \le 3T\varepsilon$$

c)

$$E||Y||_T^2 = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_T^2 > a)da = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_{\tau_a}^2 > a)da$$

Обозначим $p_a := \mathbb{P}(||Y||_{\tau_a}^2 \ge a)$. Тогда

$$p_a = \frac{a}{a}\mathbb{E}\mathbb{I}\{||Y||_{\tau_a}^2 \ge a\} = \frac{1}{a}\mathbb{E}(Y_{\tau_a}^2\mathbb{I}\{||Y||_{\tau_a}^2 \ge a\})$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, а также оценку, полученную в пункте b), это выражение можно оценить следующим образом

$$p_a \le \frac{1}{a}\sqrt{\mathbb{E}Y_{\tau_a}^4}\sqrt{p_a} \le \frac{\sqrt{p_a}}{a}\sqrt{3T\varepsilon}$$

Значит, $p_a \le \frac{\sqrt{p_a}}{a}\sqrt{3T\varepsilon}$, из чего мы можем сделать вывод, что $p_a \le \frac{3T\varepsilon}{a^2}$.

Пользуясь данной оценкой, мы заключаем, что

$$E||Y||_T^2 = \int_0^\infty p_a da \le \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} p_a da + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty p_a da \le \sqrt{\varepsilon} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{3T\varepsilon}{a^2}da = (1+3T)\sqrt{\varepsilon}$$

5. Пусть процесс $(X^\varepsilon, V^\varepsilon)$ —- решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= V_t^\varepsilon dt, & X_0^\varepsilon = x, \\ \varepsilon dV_t^\varepsilon &= -V_t^\varepsilon dt + h(X_t^\varepsilon)dt + dw_t, & V_0^\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

X — решение СДУ $dX_t = h(X_t)dt + dw_t$, $X_0 = x$, где h удовлетворяет условию Липшица и линейного роста, $\Delta^\varepsilon := X^\varepsilon - X$.

Доказать, что $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} ||\Delta^\varepsilon||_B = 0$.

Решение.

$$X_t^\varepsilon = x + \int_0^t V_s^\varepsilon ds$$

$$\varepsilon V_t^\varepsilon = \int_0^t (h(X_s^\varepsilon) - V_s^\varepsilon)ds + w_t$$

$$X_t = x + \int_0^t h(X_s)ds + w_t$$

Значит,

$$X_t^\varepsilon + \varepsilon V_t^\varepsilon - X_t = \int_0^t (h(X_s^\varepsilon) - h(X_s))ds$$

Тогда

$$|\Delta_t^\varepsilon| = |X_t^\varepsilon - X_t| \le |X_t^\varepsilon - X_t + \varepsilon V_t^\varepsilon| + |\varepsilon V_t^\varepsilon| \le$$

$$\le \int_0^t |h(X_s^\varepsilon - h(X_s)|ds + \varepsilon |V_t^\varepsilon| \le L \int_0^t \sup_{u\in[0,s]} |\Delta_u^\varepsilon| ds + \varepsilon \sup_{t\in[0,T]} |V_t^\varepsilon|$$

Таким образом,

$$\sup_{u\in[0,T]} |\Delta_u^\varepsilon| \le \varepsilon \sup_{t\in[0,T]} |V_t^\varepsilon| + L \int_0^T \sup_{u\in[0,s]} |\Delta_u^\varepsilon| ds$$

Получим оценку:

$$||\Delta^\varepsilon||_B \le \varepsilon \sup_{t\in[0,T]} |V_t^\varepsilon| + L \int_0^T \sup_{u\in[0,s]} ||\Delta^\varepsilon||_B ds =>$$

$$=> \sup_{u\in[0,T]} |\Delta_u^\varepsilon| \le \varepsilon \sup_{t\in[0,T]} |V_t^\varepsilon| \cdot \int_0^T e^{Ls} ds$$

Оценка выше справедлива, поскольку V_t^ε как решение стохастического дифференциального уравнения удовлетворяет условию $\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |V_t^\varepsilon|^2 < \infty$, а значит $\sup_{t\in[0,T]} |V_t^\varepsilon|$ ограничено, и можно применить лемму Гронуолла-Беллмана.

Итого

$$||\Delta^\varepsilon||_B^2 = \mathbb{E}(\sup_{s\le T}|\Delta_s^\varepsilon|^2) \le \varepsilon^2 \cdot K^2 \cdot \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]}|V_t^\varepsilon|)^2$$

где $K := \int_0^T e^{Ls}ds = const.$

В предположении равномерной ограниченности $\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|V_t^\varepsilon|^2$ по всем ε из оценки выше следует, что $||\Delta^\varepsilon||_B^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

6. Пусть $M \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, $\langle M\rangle_t \to \infty$ при $t \to \infty$. Показать, что $M_t/\langle M\rangle_t \to 0$ при $t \to \infty$.

Решение.

Докажем сначала вспомогательное утверждение: $P\left(M_t > \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) \to 0$

Действительно, от противного: пусть существует $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $P\left(M_{t_n} > \langle M\rangle_{t_n}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) > 2p$ для некоторого $p \ge 0$. По условию $\langle M\rangle_t \to \infty \Rightarrow P\left(\langle M\rangle_t \le \frac{2}{p^4}\right) \to 0, t \to \infty$

Значит, для достаточно больших n существует множество A_n меры хотя бы p, на котором одновременно $M_{t_n} \ge \langle M\rangle_{t_n}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ и $\langle M\rangle_t \ge \frac{2}{p^4}$

Тогда для таких n выполняется:

$M_{t_n}^2 - \langle M\rangle_{t_n} \ge \left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}} - \langle M\rangle_{t_n}\right) \cdot I_{A_n} + (-\langle M\rangle_{t_n}) \cdot I_{\overline{A_n}}$

Поэтому:

$0 = \mathbb{E}\left(M_{t_n}^2 - \langle M\rangle_{t_n}\right) \ge \mathbb{E}\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}} \cdot I_{A_n} - \mathbb{E}\langle M\rangle_{t_n} \ge \mathbb{E}\left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}} \cdot p - \langle M\rangle_{t_n}\right) = \mathbb{E}\left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}} \cdot p - \langle M\rangle_{t_n}\right) \cdot I_{A_n} + \mathbb{E}\left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}} \cdot p - \langle M\rangle_{t_n}\right) \cdot I_{\overline{A_n}} \ge \left(p \cdot \left(\frac{2}{p^4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{p^4}\right) \cdot p - \frac{2(1-p)}{9p^2} = \frac{2\sqrt{2}}{p^4} - \frac{2}{p^3} - \frac{2}{9p^2} + \frac{2}{9p} > 0$ при достаточно маленьких p

Противоречие.

Значит, для любого N : $P\left(\langle M\rangle_t \le N\right) \to 0$ и $P\left(M_t \ge \langle M\rangle_{t_n}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) \to 0$

Отсюда для любого N :

$P\left(\langle M\rangle_t \ge N; M_t \le \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) \to 1$

Но из $\langle M\rangle_t \geq N$ и $M_t \leq \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ следует, что:
$\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \leq \frac{1}{\langle M\rangle_t^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{N^{\frac{1}{4}}}$

То есть для любого N :
$P\left(\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \leq \frac{1}{N^{1/4}}\right) \to 1$
Получаем, что $\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \to 0$

7. Определим полиномы Эрмита формулой

$$H_n(t,x) := (-t)^n \frac{1}{n!} e^{x^2/(2t)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{-x^2/(2t)}\right).$$

Доказать, что $M_t := H_n(t, W_t)$ — мартингал.

Решение.

Используя формулу Ито, видим, что для мартингальности достаточно проверить равенство нулю коэффициента при dt, то есть $\frac{\partial H_n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = 0$

Для $n \geq 2$ сначала выведем рекуррентную формулу для многочленов Эрмита:

$$H_n = (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) =_{...}=$$

$$= (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \left(-\frac{x}{t} \cdot \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right) - \frac{n-1}{t} \cdot \frac{\partial^{(n-2)}}{\partial x^{(n-2)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)\right) =$$

$$= \frac{x}{n} H_{n-1} - \frac{t}{n} H_{n-2} \text{ при } n \geq 2$$

Для $\frac{\partial H_n}{\partial x}$:

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial x^{(n+1)}}\left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) + (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{x}{t} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) =$$

$$-\frac{n+1}{t} H_{n+1} + \frac{x}{t} H_n = \text{ используем рекуррентную формулу для } H_{n+1} =$$

$$= -\frac{n+1}{t}\left(\frac{x}{n+1} H_n - \frac{t}{n+1} H_{n-1}\right) + \frac{x}{t} H_n = H_{n-1} \text{ при } n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_n}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(H_{n-1}) = H_{n-2} \text{ при } n \geq 2$$

$$\text{Далее: } \frac{\partial H_n}{\partial t} = \text{три слагаемых} = n\cdot(-1)\cdot(-t)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\cdot e^{x^2/(2t)}\cdot\frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)+$$

$$+(-t)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot e^{x^2/(2t)}\cdot\frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(\cdot e^{-x^2/(2t)}\right)+(-t)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot e^{x^2/(2t)}\cdot\frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(-\frac{x^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot e^{-x^2/(2t)}\right)=$$

$$=\frac{n}{t}H_n+(-t)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot e^{x^2/(2t)}\cdot\left(-\frac{x^2}{2t^2}\cdot\frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)+\frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(\frac{x^2}{2t^2}\cdot e^{-x^2/(2t)}\right)\right)=$$

$$=\frac{n}{t}H_n+(-t)^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot e^{x^2/(2t)}\cdot\left(n\cdot\frac{x}{t^2}\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)+\frac{n(n-1)}{2t^2}\frac{\partial^{(n-2)}}{\partial x^{(n-2)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)\right)=$$

$$=\frac{n}{t}H_n-\frac{x}{t}H_{n-1}+\frac{1}{2}H_{n-2}=\text{применяем рекуррентную формулу для } H_n=$$

$$=\frac{n}{t}\left(\frac{x}{n}H_{n-1}-\frac{t}{n}H_{n-2}\right)-\frac{x}{t}H_{n-1}+\frac{1}{2}H_{n-2}=-\frac{1}{2}H_{n-2}\text{ при } n\geq 2$$

Поэтому при $n \geq 2$:

$$\frac{\partial H_n}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}H_{n-2}+\frac{1}{2}H_{n-2}=0\ \Rightarrow H_n(t,W_t)\text{ — мартингал.}$$

При $n = 0, 1$ проверим мартингальность отдельно:

$$H_0(t,x)=e^{x^2/(2t)}\cdot e^{-x^2/(2t)}=1\text{ — мартингал,}$$

$$H_1(t,x)=(-t)\cdot e^{x^2/(2t)}\cdot\left(-\frac{x}{t}\cdot e^{-x^2/(2t)}\right)=x\ \Rightarrow H_1(t,W_t)=W_t\text{ — мартингал. Чтд.}$$