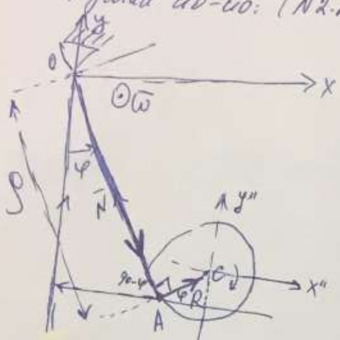
04.03.2021. Меркурьева. ДЗ 2.

Игрушка йо-йо: (№2.22)



Условимся, что в точке A: $OA \perp AC$.
У нас 2 обобщ. коорд: φ и ρ.
Пишем ур-я Лагранжа 2 рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \underbrace{Q_i}_{\text{обобщ. сила}} \quad ; \; i = 1,2.$$

Найдём T по т. Кёнига:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \underbrace{T_{кён}}_{= \frac{1}{2}\sum m_\nu (v_\nu)^2} = \frac{1}{2} M v_c^2 + \underbrace{\frac{1}{2} J_c \omega^2}_{= \frac{1}{2}(J_c \vec{\omega}_{отн}; \vec{\omega}_{отн})} = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

1) Найдём $(\vec{v_c})^2$.

$\vec{r_c} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$

Пусть $A = (x, y)$

$A = (x, y) = \rho(\sin\varphi; -\cos\varphi)$

$\vec{AC} \perp \vec{AO}$ всегда $\Rightarrow \vec{AC} = R\cdot(\cos\varphi; \sin\varphi)$

$\Rightarrow \vec{r_c} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \rho(\sin\varphi; -\cos\varphi) + R(\cos\varphi; \sin\varphi)$

$$\Rightarrow \vec{v_c} = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \dot{\rho}(\sin\varphi; -\cos\varphi) + \rho\dot{\varphi}(\cos\varphi; \sin\varphi) + R\dot{\varphi}(-\sin\varphi; \cos\varphi) =$$

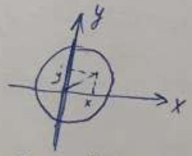
$$= (\dot{\rho} - R\dot{\varphi})\cdot\underbrace{(\sin\varphi; -\cos\varphi)}_{} + \rho\dot{\varphi}\underbrace{(\cos\varphi; \sin\varphi)}_{}$$

орт. ед. пр.

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{v_c})^2 = (\dot{\rho} - R\dot{\varphi})^2 + \rho^2(\dot{\varphi})^2}$$

2) Далее, найдём J_c:

$J_z = \frac{mR^2}{2}$ - ну



$$J_z = \sum m_\nu (d_\nu)^2 = \int_D (x^2+y^2)\,\underbrace{dm}_{= \rho\,dxdy = \frac{M}{\pi R^2}dxdy} = 4\cdot\int \underbrace{(x^2+y^2)}_{= r^2} \frac{M}{\pi R^2}\,dxdy =$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$x'_r = \cos\varphi$

$x'_\varphi = -r\sin\varphi$

$y'_r = \sin\varphi$

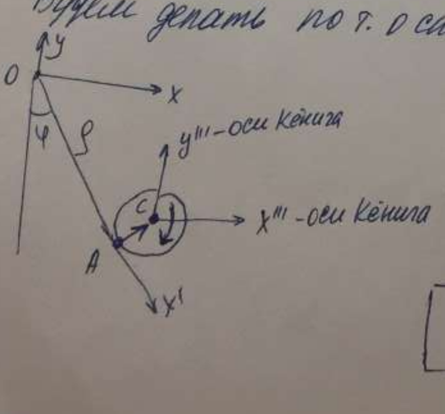
$y'_\varphi = r\cos\varphi$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$= \frac{4M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot \underbrace{r}_{\text{якобиан}}\, dr\, d\varphi = \frac{4M}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}.$$

3) Теперь найдём $\vec{\omega}$.

Будем делать по т. о сложении угловых скоростей.



$$\vec{\omega}_{абс} = \underbrace{\vec{\omega_1}}_{\text{самой подв. с.к.}} + \vec{\omega_2} \text{ в подв. с.к}$$

Введём подв. с.к (x', y'), которая связана с нитью ρ.

$\Rightarrow$ в этой с.к, колесо катится по нити без проскальзывания

$v_A = 0$ — т.к без проскальзывания

$$\boxed{|\omega_2| = |\omega_{отн}| \overset{\text{т. Эйлера}}{=} \frac{|\vec{v_c}^{\,отн}|}{R} = \frac{\dot{\rho}}{R}} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega_2} = \frac{\dot{\rho}}{R} \vec{e_z}}$$

$\vec{v_c}^{\,отн} = \overset{0}{\vec{v_A}^{\,отн}} + \vec{\omega_2} \times \vec{AC} \Rightarrow |\vec{v_c}^{\,отн}| = |\vec{\omega_2}|\cdot|\vec{AC}|$

А $\overline{\omega}^{пер}$? $|\omega_1| = \dot{\varphi} \Rightarrow \overline{\omega_1} = \dot{\varphi}\overline{e_z}$.
$\overline{\omega_1}$

но φ мы считаем против час. стрелки $\Rightarrow \dot{\varphi} > 0$.

А в подв. с.к. колесо вращается по час. стрелке $\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{R}$ надо брать с минусом
$\Rightarrow \overline{\omega}$ - от нас направлена

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\omega_{абс}} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} = \left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{\rho}}{R}\right)\overline{e_z}}$$

4) $\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\cdot(\overline{v_c})^2 + \frac{1}{2}J_z\cdot\overline{\omega}_{абс}^2 =$

$= \frac{1}{2}M\cdot\left((\dot{\rho} - R\dot{\varphi})^2 + \rho^2(\dot{\varphi})^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{MR^2}{2}\cdot\left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{\rho}}{R}\right)^2 =$

$= \frac{M}{2}(R\dot{\varphi} - \dot{\rho})^2 + \frac{1}{2}M\rho^2(\dot{\varphi})^2 + \frac{M}{4}(R\dot{\varphi} - \dot{\rho})^2 =$

$= \frac{3}{4}M(R\dot{\varphi} - \dot{\rho})^2 + \frac{1}{2}M\rho^2(\dot{\varphi})^2 =$

$= \frac{3}{4}MR^2(\dot{\varphi})^2 - \frac{3}{2}MR\dot{\varphi}\dot{\rho} + \frac{3}{4}M\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}M\rho^2(\dot{\varphi})^2 =$

$$= \boxed{\frac{1}{2}M\left[\frac{3}{2}\left((\dot{\rho})^2 - 2R\dot{\rho}\dot{\varphi} + R^2(\dot{\varphi})^2\right) + \rho^2(\dot{\varphi})^2\right]}$$

5) пишем 1-е ур-е Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho$$

$$\boxed{Q_i = \sum_j \frac{\partial \overline{r_j}}{\partial q_i}\overline{F_j}}$$

$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{1}{2}M\cdot 2\rho\cdot(\dot{\varphi})^2 = M\rho(\dot{\varphi})^2$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = \frac{3}{4}M\cdot(2\dot{\rho} - 2R\dot{\varphi}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{3}{2}M(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi})$

У нас $j=1$; $\overline{F_1} = (0; -Mg; 0)$

$\overline{r_1} = (x_c; y_c; 0) = (\rho\sin\varphi + R\cos\varphi; -\rho\cos\varphi + R\sin\varphi; 0)$

$\Rightarrow Q_\rho = \frac{\partial \overline{r_1}}{\partial \rho}\cdot\overline{F_1} = (\sin\varphi; -\cos\varphi; 0)\begin{pmatrix}0\\-Mg\\0\end{pmatrix} = Mg\cos\varphi$

$\Rightarrow$ ур-е: $\frac{3}{2}M(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) - M\rho(\dot{\varphi})^2 = Mg\cos\varphi \Rightarrow \frac{3}{2}(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) - \rho(\dot{\varphi})^2 = g\cos\varphi$

$$\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho(\dot{\varphi})^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi$$

6) пишем 2-е ур-е Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}M\left(\frac{3}{2}(-2R\dot{\rho} + 2R^2\dot{\varphi}) + 2\rho^2\dot{\varphi}\right) = -\frac{3}{2}MR\dot{\rho} + \frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi} + M\rho^2\dot{\varphi}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{3}{2}MR\ddot{\rho} + \frac{3}{2}MR^2\ddot{\varphi} + M\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$

$Q_\varphi =$

$$Q_\varphi = \frac{\partial \bar r_1}{\partial \varphi}\cdot \bar F_1 = (\rho\cos\varphi - R\sin\varphi;\ \rho\sin\varphi + R\cos\varphi;\ 0)\begin{pmatrix}0\\-Mg\\0\end{pmatrix} = -Mg\rho\sin\varphi - MgR\cos\varphi$$

=> 2-е ур-е Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \varphi}}_{=0.} = Q_\varphi$$

$$-\frac{3}{2}MR\ddot\rho + \frac{3}{2}MR^2\ddot\varphi + M\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) = -Mg\rho\sin\varphi - MgR\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) - \frac{3}{2}R\ddot\rho + \underbrace{\frac{3}{2}R^2\ddot\varphi + gR\cos\varphi} = -g\rho\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot\rho - R\ddot\varphi - \frac{2}{3}\rho(\dot\varphi)^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) - \frac{3}{2}R\ddot\rho + \underbrace{\frac{3}{2}R^2\ddot\varphi + gR\cos\varphi}_{=\frac{3}{2}\ddot\rho - \rho(\dot\varphi)^2 \cdot R} = -g\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}\ddot\rho - \rho(\dot\varphi)^2 = \frac{3}{2}R\ddot\varphi + gR\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot\rho - R\ddot\varphi - \frac{2}{3}\rho(\dot\varphi)^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) - \rho R(\dot\varphi)^2 = -g\rho\sin\varphi \end{cases}}$$

вот ур-я движения
2 ур-я на ρ, φ.