27.09.21. Шапошников лекция 2.

Принцип макс. прогонки, метод Перрона

Было: Если $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$, то $\max\limits_{\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$

Т-ма (Сильный принцип max)

Если max достигается внутри Ω, то $u = const$.

Лемма (частн. случай леммы Хопфа) ← если max достиг. на границе, то произв. по нормали >0. — верно ∀ области и ∀ эллиптич. оператора

Пусть шар B, $u \in C^2(B)\cap C(\bar{B})$:

$\Delta u = 0$ в B

$u < 0$ в B

$u(A) = 0$, если $A \in \partial B$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \nu}(A) > 0$ ← внешняя нормаль. (или $\frac{\partial u}{\partial x_1}(A) > 0$) если повернуть

Док-во:

внутри: $u<0$

на границе: $u \le 0$.

$u(A) = 0$.

Рассм. $v(x) = u(x) + \varepsilon\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1\right)$ ← размерность пр-ва.

(Что такое $\frac{1}{|x|^{n-2}}$: $\Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) = 0$ при $x \neq 0$ — т.к. $\Delta\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right) = \delta(x)$ — т.к. это фунд. решение.

! Если бы мы были на плоскости, то брали бы $\ln|x|$).

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = \Delta u + \Delta\varepsilon\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1\right) = 0 \text{ — гарм. ф-ция.} \\ v\big|_{|x|=1} = u\big|_{|x|=1} + 0 \le 0. \\ v\big|_{|x|=r} = \underbrace{u\big|_{|x|=r}}_{\text{ну } u|_{|x|=r} < 0} + \underbrace{\varepsilon\left(\frac{1}{|r|^{n-2}} - 1\right)}_{>0} \le 0. \end{cases}$$

← возьмём ε таким маленьким, чтоб сумма осталась ≤ 0.

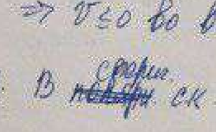
$\Rightarrow \max\limits_{|x|=r} u < 0$

Но по принципу max: max гарм. ф-ции достиг. на границе.

$\Rightarrow v \le 0$ во всей области $|x| \le R = 1$.

Зам. В ~~поляр.~~ сферич. СК: $\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}$ $\Rightarrow$ если $u(r) = \frac{1}{r^{n-2}}$ — то $\Delta u = 0$.

Итак, имеем: $\overset{v(x)}{u(x) + \varepsilon\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1\right)} \le 0$.



$\Rightarrow$ по непрер. м. : $v(A) \le 0$. И что?

? откуда тут $u(A)$?

$u(x) - u(A) \le -\varepsilon\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{|A|^{n-2}}\right)$

считаем произв.:

$\Rightarrow u(x_1, 0, \ldots 0) - u(1, 0 \ldots 0) \le -\varepsilon\left(\frac{1}{|x_1|^{n-2}} - \frac{1}{1^{n-2}}\right)$

! Решения эллипт. ур-я, $Lu=0$ – можно решать методом характеристик, только характеристиками явл. $\overset{\text{наш.}}{\text{случ.}}$ процессы

Например, задача Дирихле для ур-я Лапласа.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

τ : W_τ^x – вышло из Ω.

тогда $E g(W_\tau^x) = u(x)$ – решение.

Принцип макс. очев тут.

Т.е. принцип. макс и метод хар – это разные взгляды на одно и то же.

Итак, решаем $-\Delta u = f(u)$.

Метод итерации: $-\Delta u_{k+1} = f(u_k)$.

Вопрос: $u_k \underset{\text{сходится?}}{\longrightarrow} ?$

Ответ: либо надо неподв. точку – это наклад. огр. на f,
либо огр. компакт – т. Шаудера
либо метод Перрона – с исп. принципа макс.

Задача 7 2 опр. экв:

1) $u \in C(\Omega)$: $\int \Delta\varphi\, u\, dx \geq 0$ $\forall \varphi \geq 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

2) $\forall B\ \forall h: \Delta h = 0;\ h|_{\partial B} \geq u|_{\partial B} \Rightarrow h \geq u$ в B.

Решение:

План: 1) необход. опр. субгармонич. (усл. со средним) $\Leftrightarrow u(x_0) \leq \frac{1}{|S_r(x_0)|}\int_{S_r(x_0)} u(x)\,ds$ – среднее по сфере.

$\left(\Leftrightarrow u(x_0) \leq \frac{1}{|B_r|}\cdot\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx\right)$

2) показать, что u можно сгладить так, что св-ва сохр.
$\Rightarrow$ будет $\Delta u_\varepsilon \geq 0$ $\Rightarrow$ умножая, интегрируя по частям получим: $\int u_\varepsilon \Delta\varphi\, dx \geq 0$ и перейти к пределу.

Докажем 1: ($\Rightarrow$) • суб $\Rightarrow u(x_0) \leq \frac{1}{|S_r|}\int_{S_r(x_0)} u\,ds$.

(если h-гарм – то $h(x_0) = \frac{1}{|S_r|}\cdot\int_{S_r(x_0)} u\,ds$)

Возьмём гарм. ф-цию h: $h|_{\partial B} = u|_{\partial B}$

$$\Rightarrow u(x_0) \leq h(x_0) = \frac{1}{|S_r|}\cdot\int_{S_r(x_0)} h\,ds \overset{h=u \text{ на } \partial B}{=} \frac{1}{|S_r|}\int u\,ds.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x_1\to 1} \dfrac{u(x_1,0\ldots0)-u(1,0\ldots0)}{x_1-1} \geq -\varepsilon \dfrac{\left(\frac{1}{|x_1|^{n-2}}-\frac{1}{1^{n-2}}\right)}{x_1-1}$

! оператор Лапласа не меняется при ортог. преобр.

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(A) \geq \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{|x_1|^{n-2}}\right) = -\varepsilon\cdot(-(n-2)) = (n-2)\varepsilon > 0$. лемма доказана

Докажем теорему:

Имеем: $\Delta u = 0$ $\quad u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$.

$u \leq 0$

$\max u = 0$. (свели к этому: вычли max)

Пусть где-то внутри Ω: $u=0$.

Рассм. мн-во $\{x: u(x)<0\}$ — открытое мн-во.

Если $u=const$ — то оно пусто, и все доказано.

Если $u\neq const$, то $\partial\{x: u(x)<0\} \cap$ внутр. $\Omega \neq \varnothing$ — ведь внутри есть точка, где $u=0$.

Пусть это x_0 — гранич. точка этого мн-ва внутри Ω.

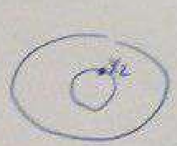
Она граничная $\Rightarrow$ сколь угодно близко есть точки, где $u<0$.

$\Rightarrow$ выберем x_1: $\|x_0-x_1\| < dist(x_1;\partial\Omega)$; $u(x_1)<0$.

$\exists B(x_1,r)$: $\begin{cases} u<0 \text{ в } B \\ u=0 \text{ в некот. точке на границе } B.\end{cases}$

(ну берем шар с $R = dist(x_1; \{u=0\})$)

И причем $\bar B\subset\Omega$. почему?



Итак: $u(x_2)=0$.

$u<0$ внутри B

$\Rightarrow$ по лемме: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_2)>0$.

но x_2 — точка лок. экстр. $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_2)=0$.

$\Rightarrow$ противоречие. $\Rightarrow$ если max достигается внутри, то u не может быть не константой. чтд

Напоминание: $u\in C(\bar\Omega)$ — субгарм., если $\forall \bar B\subset\Omega$, $\forall h$: $\Delta h=0$ на B; $h\geq u$ на ∂B верно: $h\geq u$ в B.

т.е. если $u\leq$ гарм. на границе, то и везде.

$v\in C(\bar\Omega)$ — супергарм.,

если $\forall \bar B\subset\Omega$, $\forall h$: $\Delta h=0$ на B, если $h\leq v$ на ∂B — то $h\leq v$ на B.

Если $u,v\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ — то это опр. экв. старому опр.

Св-ва суб и супер-решений:

1) Принцип сравнения: u-суб, v-супер;
$u \leq v$ на $\partial\Omega$
$\Rightarrow u \leq v$ в Ω

(ну в старом опр, для C^2: $\Delta u \geq 0$; $\Delta v \leq 0$; $u \leq v$ на $\partial\Omega \Rightarrow u \leq v$ на Ω – очев)

<u>Док-во:</u> от противного.
пусть $M = \max\limits_{\bar\Omega} (u - v) > 0$.

Рассм. $\{x \in \bar\Omega : u(x) - v(x) = M\}$ – замкн. мн-во, т.к $u \leq v$. лежит внутри Ω.

Если бы оно было еще и открыто, – то оно тогда либо пусто, либо всё.
но всем оно быть не может, т.к на границе не так $\Rightarrow$ пусто противо.
$\Rightarrow$ оно точно не открыто.
$\Rightarrow$ у него есть точка, кот. не внутренняя,
пусть это точка x_0.

$\Rightarrow$ сколь угодно близко к x_0 есть точки, кот. не такие.
Сделаем шарик; $u(x_0) - v(x_0) = M$. – т.к x_0 – внутри
$u(x_1) - v(x_1) < M$.
$\Rightarrow$ окр-ть внутри
$\Rightarrow$ внутри окр-ти можно найти сколь угодно близко точку не из нашего мн-ва $\Rightarrow$ шарик B, кот. целиком лежит в Ω)

$h - g = \max\limits_{\bar B} h - g$

Построим $h : \begin{cases} \Delta h = 0 \\ h|_{\partial B} = u \end{cases}$ и $g : \begin{cases} \Delta g = 0 \\ g|_{\partial B} = v \end{cases}$ – научились в прошлой РУ задачу Дирихле на шаре решать.

Рассм. $\max\limits_{\bar B} (h - g) \overset{\text{св-ва гарм.}}{=} \max\limits_{\partial B} u - v \leq M$.

но $\begin{cases} u \leq h, \\ v \geq g \end{cases}$

$\Rightarrow u - v \leq h - g$.

но в точке x_0: $(h - g)(x_0) = M$.

$\Rightarrow$ гарм. ф-ция внутри области приняла max знач.

$\Rightarrow$ по силь. принципу max. $h - g = const = M$.

но $h - g = const = M$ – но на границе-то $u - v(x_1) < M$. против.

($\Leftarrow$) Знаем, что $u \in C(\bar{\Omega})$

Дано $\forall B \subset \Omega;\ B = B(x_0):\ u(x_0) \le \frac{1}{|B_r|} \cdot \int\limits_{B_r} u(y)dy$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ Хотим: u - субгарм. (не опр. со сферами)

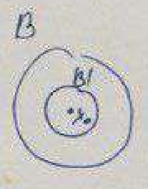
(ср. по сфере $\Rightarrow$ ср. по шару:

$$u(x_0) \le \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r} u(x)dx$$

$$u(x_0) \underbrace{\int_0^R |S_r| dr}_{|B_r|} = \int_0^R \int\limits_{S_r} u ds dr$$

Док-во: берем шар B, берем h гарм, $h \ge u$ на $\partial B \overset{?}{\Rightarrow} h \ge u$ на B.

Смотрим на $\max\limits_{\bar{B}} (u-h) = M$ - предп., что $M > 0$ (иначе $u \le h$ - всё ок)



т.е. в т. x_0 внутри - дост. $\max\limits_{\bar{B}} (u-h)$

$u(x_0) - h(x_0) = M$.

ну $M = u(x_0) - h(x_0) \le \frac{1}{|B'|} \int\limits_{B'} (u(x) - h(x)) dx \le M$

$\Rightarrow$ везде равенство

$\Rightarrow \int\limits_{B'} (u(x) - h(x)) dx = \max\limits_{B'} (u-h)$

$\Rightarrow u(x) - h(x) \equiv M$ в B'!

т.е. вокруг т. max - есть кружочек с констой.

$\Rightarrow \{x: u(x) - h(x) = M\}$ - открыто и замкнуто.

$\Rightarrow$ либо $\varnothing$, либо всё - но на границе не так $\Rightarrow$ не всё

$\Rightarrow$ оно $\varnothing$. ч.т.д.

$\Rightarrow$ Опр u - субрешение $\Leftrightarrow u(x_0) \le \frac{1}{|B|} \int\limits_{B(x_0)} u dx,\ \forall \bar{B} \subset \Omega$

$\Leftrightarrow u(x_0) \le \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r} u dx\ \forall \bar{B} \subset \Omega$

2) Хотим сглаживать ф-цию, сохраняя св-во:

$u_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \omega_\varepsilon(x-y) u(y) dy$, где $\omega \ge 0$

$\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $\quad \int \omega dx = 1$, $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow u_\varepsilon \rightrightarrows u;\ u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$.

А мы не испортили ли, что это субрешение?

т.е. точнее u, v - субрешения, взяли $\alpha u + (1-\alpha) v$, где $\alpha \in [0,1]$ - и лин. комб. является ли субреш?

② u - суб-решение
v - субрешение
$\Rightarrow \max\{u,v\}$ - тоже субрешение. !

Док-во: ну $\begin{cases} u \le h \leftarrow h\text{-гарм} \\ v \le h \end{cases} \Rightarrow \max\{u,v\} \le h.$

А если max на границе $\le h$ - то и внутри $\le h$.

③. Гармоническая срезка:
пусть u - субгарм.
$\bar{B} \subset \Omega$.

$$u_B(x) = \begin{cases} u(x), & x \notin \bar{B}, \ \bar{B} \subset \Omega. \\ h(x), & x \in B, \text{ где } h = u \text{ на } \partial B \\ & \Delta h = 0 \text{ в } B. \end{cases}$$

Тогда: $\begin{cases} u_B \ge u \\ u_B - \text{субгарм.} \end{cases}$

Док-во: • Ну $u_B \ge u$: т.к. вне шара ничего не поменялось
на шаре $h \ge u$. не меньше, чем было. почему?

• почему u_B - субгарм?

$\leftarrow$ тут $\begin{cases} \Delta g = 0 \\ g|_{\partial B'} \ge u_B \end{cases}$

Хотим: $g \ge u_B$ в B.

$\Rightarrow g \ge u$ в B'!

Что?

на пересечении: u_B - гарм.
g - гар.

$g \ge u \Rightarrow$ на $\partial B \subset B'$: $g \ge u_B$
на $\partial B' \subset B$: $g \ge u_B$ по усл. $\Rightarrow g \ge u_B$ $B \cap B'$! чтд

Теорема Перрона

пусть $g \in C(\partial\Omega)$ и

$$S_g = \{u - \text{субгарм в } \bar{\Omega} \text{ и } u \le g \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Функция $v(x) = \sup\limits_{u \in S_g} u(x)$ - явл. гарм. Ω.

(Зам. если предположить, что всё гладко, то это очев.?
$u|_{\partial\Omega} \le g$
$v(x) = \sup\limits_{u} u(x)$

Предположим, что $v \in C^2(\Omega)$.

Очевидно, что $\Delta v = 0$.

• Правда ли, что v – субгарм?

Берём шар B, гарм. ф-цию h: $\Delta h = 0$.

Правда ли, что $h \geq v$ на ∂B? $\overset{?}{\Rightarrow} h \geq v$ в B.

Ну $h \geq v$ на ∂B

$\Rightarrow h \geq u$ на ∂B

$\Rightarrow h \geq u$ на B $\forall u$

• $\exists v \in C^2$

$\Rightarrow$ раз для любой u, то и для sup: $h(x) \geq \sup_u u(x)$.

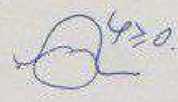
Знаем: $\Delta v \geq 0$.

Хотим: $\Delta v = 0$.

От противного: пусть $\exists x_0 \in \Omega$: $\Delta v(x_0) > 0$.

Имеем: $v(x) = \sup\limits_{u \in S_g} u(x)$, где $S_g = \{u$ – суб; $u \leq g$ на $\partial\Omega\}$

$\Rightarrow v \in S_g$

Окружим точку x_0 окр-тью, в этой окр-ти возьмём φ  $\varphi \geq 0$.

$\Rightarrow \Delta(v(x) + \varepsilon\varphi(x)) \geq 0$.

$\Rightarrow v + \varepsilon\varphi \in S_g$ – против., т.к. v – это самое большое, что можно взять.

Но мы тут избыточную гладкость от v требовали.

Нормальное док-во:

Берём $y \in \Omega$.

По опр $\exists$ посл-ть: $u_n(y) \to v(y)$, где $u_n \in S_g$.

• $S_g \neq \varnothing$ – т.к. там лежат константы, кот $\leq \min g$ (т.к. им – субгарм.)

• оно огр. сверху: все $u_n \leq \sup\limits_{\partial\Omega} g$ – и эта гарм. функция оценивает субгарм. ф-ции по принципу максим.

$\Rightarrow \sup$ – определён.

• $u_n \leftrightarrow \max\{u_n; \inf\limits_{\partial\Omega} g\} \geq u_n$, а $v(y)$ – это sup, то это $\to v(y)$

это опять субгарм.

Т.е. $\{u_n \leq \sup\limits_{\partial\Omega} g$

после срезки: $u_n \geq \inf g$.

Что такое g?

$\Rightarrow$ можно считать, что $\inf\limits_{\partial\Omega} g \leq u_n \leq \sup\limits_{\partial\Omega} g$

$\Rightarrow u_n$ – огр посл-ть (после срезки)

Сделаем $u_n^B :=$ гарм. срезка на шаре $B \ni y$. (y B)

$\Rightarrow u_n \le u_n^B$
$\in S_g$

$\Rightarrow u_n^B(y) \to v(y)$

На B это огр. посл-ть гарм. ф-ций.

Ну если задано сем-во гарм. ф-ций – то оно на любом шаре вполне огр.

$\Rightarrow$ они сход. равном. к гарм. ф-ции

$\Rightarrow$ переходя к подпосл-тям, можно считать, что $u_n^B \xrightarrow{\text{внутри } B} w$ – гарм. ф-ция в B.

Знаем: $w \le v$

$w(y) = v(y)$

Хотим: $w \equiv v$.

От противного: пусть в B $\exists z$: $w(z) < v(z)$.

$\Rightarrow$ по опр. sup: $\exists u$ – субгарм. ф-ция из S_g: $w(z) < u(z) \le v(z)$

Тогда возьмём $\underbrace{\max\{u_n; u\}}_{\tilde u_n} \ge u_n$ – не вышли из S_g, u_n – не уменьшились.

$\Rightarrow \tilde u_n(y) \to v(y)$

$\tilde u_n^B(x) \xrightarrow{\text{внутри } B} \tilde w$ – гарм.

Тогда: $\tilde w \ge w$

$\tilde w(y) = w(y) = v(y)$.

$\tilde w(z) \ge u(z) > w(z)$.

B (y) $\tilde w(z) \ge w(z)$

Их разность – гарм,

и в точке y – достигла max/min.

$\Rightarrow$ они равны. – против. с этим $\Rightarrow$ нет такой точки z. чтд

Итак, есть Ω.

Хотим для Ω (а раньше – шар) задачу: $\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$; $g \in C(\partial\Omega)$.

Берём $v(x) = \sup\limits_{u \in S_g} u(x)$ – гарм. в Ω.

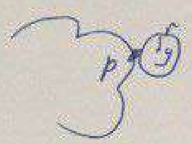
Вопрос: $v|_{\partial\Omega} \overset{?}{=} g$? – важно строение границы

Скажем, что точка $p \in \partial\Omega$ — регулярна, если $\exists$ супергарм w в Ω: (стр 4)

$$\begin{cases} w(p)=0 \\ w(x)>0 \ \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{p\}. \end{cases}$$

w — барьер! (усл. внешней сферы)

<u>пример</u>



В качестве w берем:

$$w(x) = \frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|}$$

Она гарм: $\Delta w = 0$, $x \neq y$.

Шип Лебега — примеры нерег. ф-ций.

<u>Теорема</u> Пусть v — ф-ция, построенная в т. Перрона.

Если p — регулярная точка $\partial\Omega$, то $v(x) \to g(p)$ при $x \to p$.

<u>следствие</u> Если все т. границы регул, то v явл. решением $\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$

<u>Док-во:</u>

$g \in C(\partial\Omega)$

Берем $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: если $|x-p| < \delta$, то $|g(x) - g(p)| < \varepsilon$.

Выберем $\alpha > 0$ так, что: $\alpha \min\limits_{\partial\Omega \setminus \{|x-p|<\delta\}} w(x) > 2 \max\limits_{\partial\Omega} |g|$ — т.к. $w > 0$ вне точки p, то на компакте > 0 $\Rightarrow \alpha \cdot 20 \to \infty$.

w — суперреш $\Rightarrow -w$ — субреш.

$\Rightarrow u(x) = g(p) - \alpha w(x) - \varepsilon$ — субрешение

На границе: $u|_{\partial\Omega} \leq g$

$\Rightarrow$ по постр: $u \leq v$.

$\Rightarrow g(p) - \alpha w(x) - \varepsilon \leq v(x)$.

Берем теперь $\tilde{v}(x) = g(p) + \alpha w(x) + \varepsilon$

$\alpha w > 2\max|g|$.

$\tilde{v}$ — супергарм.

$\tilde{v}|_{\partial\Omega} \geq g$.

$\Rightarrow$ в частности, $\forall$ субреш $u \leq g$: $\tilde{v}$ по больше (по принципу сравнения)

$\Rightarrow \tilde{v} \geq v$ (т.к. $v = \sup\limits_{\leq g}$)

$\Rightarrow g(p) - \alpha w(x) - \varepsilon \leq v(x) \leq g(p) + \alpha w(x) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ при $x \to p$: $v(x)$ мало отличается от $g(x)$ ч.т.д.

Что в методе Перрона произошло:

мы брали класс $S_g = \{u$ - субгарм., $u|_{\partial\Omega} \le g\}$

цель: построить гарм. ф-цию: $\Delta v = 0$.

мы брали $\sup\limits_{u \in S_g} u(x) \overset{?}{=}$ явл. гарм. ф-цией.

В т. Перрона мы ограничивались тем, что рассм. субгарм. ф-ции.

$\inf\limits_{\partial\Omega} g \le u \le \sup\limits_{\partial\Omega} g$

но эти константы — они гарм. ф-ции

т.е проверяя, что v - гарм — использовала только это.

Метод суб. и супер-решений в теории нелин. ур-й.

Метод Перрона для нелин. задач даёт возможность обосновывать $\exists$-е решения.

Хотим решение: $\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$, где f - гладкая $|f'| \le c$.

т.е хотим $\exists$-е реш. такой задачи Дирихле: $\begin{cases} -\Delta u = \sin u + 1 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$; $|f'| \le c$.

Скажем, что $\underline{u}$ — субрешение этой задачи, если $-\Delta \underline{u} \le f(\underline{u})$

$\overline{u}$ — суперрешение, если $-\Delta \overline{u} \ge f(\overline{u})$.

(если $f \equiv 0$, то $-\Delta \underline{u} \le 0$ - совп. с класс. опр. субрешения).

Если у f есть нули.

(если $f(u) = \sin u$, то $\underline{u} = \overline{u} = \pi$ — подх)

Если у f есть полож. реш — то такая константа явл. субреш.)

Утв. предп., что $\exists \underline{u}, \overline{u}$: $\begin{cases} \underline{u}|_{\partial\Omega} \le 0 \\ \overline{u}|_{\partial\Omega} \ge 0. \end{cases}$

Тогда $\exists$ решение такой нелин. задачи $\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$

(пока решение предп. гладким, и всюду всё гладкое)

Док-во: из усл. $|f'| \le c$

$\Rightarrow \exists \lambda > 0$: $\overset{F(u)}{f(u) + \lambda t}$ — строго возр. ф-ция.

Решаем новую задачу: $\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = F(u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

Возьмём u_1 - решение $\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda u_1 = F(\underline{u}) \\ u_1|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ ← уже лин. ур-е.

- ну мы научились решать задачу Дирихле для гарм. ф-ций, а для этих ф-ций всё так же.

стр. 5

u_2 решение $\begin{cases} -\Delta u_2 + \lambda u_2 = F(u_1) \\ u_2|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$

и т.д.

Те строим посл-ть u_k : $u_0 = \underline{u}$

u_{k+1} - решение $\begin{cases} -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = F(u_k) \\ u_{k+1}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$

Заметим, что $u_0 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le$?

ну по принципу max: $-\Delta u_0 \le f(u_0)$, т.е $-\Delta u_0 + \lambda u_0 \le F(u_0)$

$-\Delta u_1 + \lambda u_1 = F(u_0) \geqslant -\Delta u_0 + \lambda u_0.$

$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta(u_1 - u_0) + \lambda(u_1 - u_0) \geqslant 0 \\ (u_1 - u_0)|_{\partial\Omega} \geqslant (\geqslant 0 + 0) \geqslant 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ из принципа max: $u_1 \geqslant u_0$.

Далее: $-\Delta u_2 + \lambda u_2 = F(u_1)$

но $u_1 \geqslant u_0$ $\Rightarrow F(u_1) \geqslant F(u_0) = -\Delta u_1 + \lambda u_1$

$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta(u_2 - u_1) + \lambda(u_2 - u_1) \geqslant 0. \\ (u_2 - u_1)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ из принципа max: $u_2 \geqslant u_1$.

$\Rightarrow$ имеем: $\begin{cases} -\Delta u_k + \lambda u_k = F(u_{k-1}) \\ u_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$

со св-вом: $\underline{u_0} \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le \bar{u}$ - тоже из принципа max.

$\Rightarrow$ имеем монот. огр. посл-ть.

$\Rightarrow \forall x: \exists \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ - по т. Вейерштр.

но мы предп, что всё гладкое

$\Rightarrow$ по т. о мажор. сход, если есть ограниченность, то $u_k \to u$ в $L^1(\Omega)$

перепишем: $-\Delta u_k + \lambda u_k = F(u_{k-1})$ $\big|\, \varphi \in \overset{\text{финитная}}{C_0^\infty(\Omega)}$

и проинтегрируем по частям:

$$-\int_\Omega \Delta\varphi\, u_k\, dx + \int_\Omega \lambda\varphi\, u_k\, dx = \int_\Omega \varphi F(u_{k-1})\, dx$$

$\{ k\to\infty$; φ-гладкая, огр $\Rightarrow$ все немало. переходим к пределу в L_1.

$$-\int_\Omega \Delta\varphi\, u\,dx + \int \lambda\varphi\, u\,dx = \int \varphi F(u)\,dx$$

λ-уйдёт.

$\Rightarrow u$ - обобщ. решение: $\begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

! $\exists$-е есть, а единств. - может не быть.

<u>когда есть единств.</u>: $\exists\, |f'| \le q < 1$
в нелин. случае

берём 2 реш.: $\begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} -\Delta v = f(v) \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$

Хотим: единственность.

Тогда: $\begin{cases} -\Delta(u-v) = f(u)-f(v) \\ (u-v)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{принцип max}}$ $\sup_\Omega |u-v| \le C(\Omega)\cdot \underbrace{\sup_\Omega |f(u)-f(v)|}_{\le q\cdot\sup_\Omega|u-v|}$

Если $q\cdot C(\Omega) < 1$ - то будет единственность.

! Без ограничения на произв; что $|f'|\le q$ - даже в лин. случае не будет единственности.

например, $\begin{cases} -u'' - u = 0 \text{ на } (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$

Решения: $u \equiv 0$
$u = \sin x$ - нет единств.

<u>Зам.</u> пока у нас принцип макс - прерогатива опер. Лапласа / или L.

$L = tr(AD^2u) + \langle b; Du\rangle + c$; $c \le 0$, $A \ge 0$.

Наблюдение: в т max: $D^2u \le 0 \Rightarrow Lu \le 0$.

Посмотрим на ур-е: $u_x + u_y = 0$.

$\vec{\xi} = (1,1)$

$\Rightarrow$ написано: $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \langle Du, \xi\rangle = 0$.

т.е. вдоль таких /// линий: u-постоянно.

$\Rightarrow u(A) = g(B)$ - метод характеристик

Тут очевидно, что $\sup u = \sup g$. - вот принцип макс в области

! Для ур-й 1 порядка, решения состоят из кривых, наз. характеристиками, или они пост. вдоль спец. кривых

тут на гран: $u = g$ — т.е. чтобы узнать значение - надо дойти до этой кривой

$\{k\to\infty$; Ψ-гладкая, огр $\Rightarrow$ все лишнее. переходим к пределу в L_1.

$$-\int_\Omega \Delta\Psi u\,dx+\int \lambda\Psi u\,dx=\int \Psi F(u)\,dx$$

λ-уйдет.

$\Rightarrow u$ - обобщ. решение : $\begin{cases} \Delta u=f(u)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$

! $\exists$-е есть, а единств. - может не быть.

<u>когда есть единств.</u>: $\exists\ |f'|\le q<1$

в неприм. случае

берем 2 реш: $\begin{cases}-\Delta u=f(u)\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$ $\begin{cases}-\Delta v=f(v)\\ v|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$

Хотим: единственность.

тогда: $\begin{cases}-\Delta(u-v)=f(u)-f(v)\\ (u-v)|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{принцип max}}$ $\sup|u-v|\le C(\Omega)\cdot\underbrace{\sup_\Omega|f(u)-f(v)|}_{\le q\cdot\sup_\Omega|u-v|}$

Если $q\cdot C(\Omega)<1$ - то будет единственность.

! Без ограничения на произв; что $|f'|\le q$ - даже в лин. случае не будет единственности.

например, $\begin{cases}-u''-u=0 \text{ на } (0,\pi)\\ u(0)=u(\pi)=0.\end{cases}$

Решения: $u\equiv0$
$u=\sin x$ - нет единств.

<u>Зам.</u> пока у нас принцип макс - прерогатива опер. лапласа / или L.

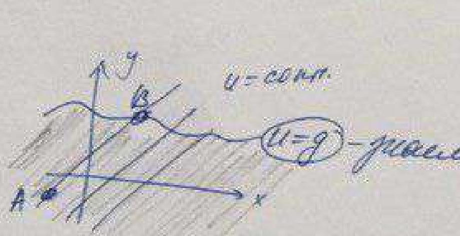
$L=\operatorname{tr}(AD^2u)+\langle b;Du\rangle+c$; $c\le0$
$A\ge0.$

наблюдение: в т max: $D^2u\le0\Rightarrow Lu\le0$

посмотрим на ур-е: $u_x+u_y=0$.

$\vec\xi=(1,1)$

$\Rightarrow$ написано: $\frac{\partial u}{\partial\xi}=\langle Du,\xi\rangle=0.$



т.е. вдоль таких /// линий: u-постоянно.

$\Rightarrow u(A)=g(B)$ - метод характеристик

Тут очевидно, что $\sup u=\sup g$. - вот принцип макс в области

! Для ур-й 1 порядка, решения состоят из кривых, наз. характеристиками, или они пост. вдоль спец. кривых

тут на знач: $u=g$ - т.е чтобы узнать значение - надо дойти до этой кривой.