ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

КУРСОВАЯ РАБОТА

«СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК»

Выполнил студент

309 группы

Окшин Александр Алексеевич

____

Научный руководитель:

д.ф.м.н., проф. Фалин Геннадий Иванович

____

Москва
2020

Оглавление

Введение

Теория стохастического сравнения рисков появилась относительно недавно. Первые упоминания о попытках упорядочивания случайных величин можно встретить в 1934 году в работе Hardy и Littlewood. Впоследствии данная теория получила широкое распространение среди актуариев и экономистов, поскольку им часто нужно сравнивать риски, как случайные величины. Актуальность этой работы обусловлена тем фактом, что в силу своей молодости, это направление не так тяжело в понимании, но при этом обладает множеством прикладных применений. В то же время многие результаты имеют значение не только в актуарной теории.

Как следует из названия, суть этой теории заключается в сравнении различных случайных величин. Факт случайности представляет особенную сложность для прогнозирования, поэтому при расчетах вводятся некоторые меры риска. Цель данной работы – систематически и подробно изложить основы современного подхода к проблеме сравнения случайных рисков на примере стохастического порядка. При этом она будет следовать разделу 3.3 монографии [1], которая является ключевой для понимания теории стохастического сравнения рисков.

К сожалению, этот раздел современной теории риска в упомянутой выше книге изложен довольно кратко, важные детали и этапы рассуждений опущены. В моей работе эти пробелы будут ликвидированы. Иначе говоря, мы дадим исчерпывающе полные доказательства всех излагаемых нами утверждений. Однако я не претендую на авторство самих утверждений или общих схем их доказательств, равно как и определений используемых понятий из теории риска.

В начале работы будет приведено определение стохастической сравнимости случайных величин. Затем будут установлены связи между ней и другими разделами актуарной математики, такими как теория полезности и теория искаженного ожидания, различными способами расчета ожидаемой продолжительности жизни, а также более абстрактными темами, такими как стохастическая монотонность и порядковые статистики. На протяжении всей работы будет доказываться, что стохастический порядок обладает свойствами, перечисленными в разделе 3.2.2 данной книги. Некоторые доказательства, пропущенные авторами, будут взяты из книги [2].

Основная часть

1. Стохастический порядок и меры риска

В актуарной математики риски часто моделируются случайными величинами. Чтобы сравнить два разных риска X и Y, необходимо сравнивать соответствующие случайные величины, а для этого можно обратиться к определению VaR, напомним его:

Определение 1.1 Для риска X и уровня вероятности $p \in (0,1)$, соответствующая им сумма под риском(от анг. Value at Risk), обозначаемая как $VaR[X,p]$, определяется как $VaR[X,p] = F_x^{-1}(p)$. Она представляет из себя наименьшую сумму, превосходящую X с вероятностью, большей либо равной p.

Исходя из определения, $VaR[X,p]$ можно вычислить следующим образом

$$VaR[X,p] = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : P(X \le x) \ge p\right\}.$$

Другое название для этой величины – квантиль уровня p.

Контрпродуктивно считать, что риск X менее опасен, чем Y, если

$$\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\alpha_0] \le \mathrm{VaR}[\mathrm{Y};\alpha_0]$$

при определенном уровне достоверности α_0, ведь часто

$$\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\alpha_0] \le \mathrm{VaR}[\mathrm{Y};\alpha_0] \text{ и } \mathrm{VaR}[\mathrm{X};\alpha_1] \ge \mathrm{VaR}[\mathrm{Y};\alpha_1]$$

одновременно верно для двух разных α_0 и α_1. Проиллюстрировать это можно на следующем тривиальном примере, придуманным мной. Если необходимо сравнить два риска, по первому из них выплаты распределены как $X \sim U(0,4000)$, т.е. равномерно на отрезке $[0,4000]$, а по второму как $Y \sim U(2000,3000)$, то в таком случае

$$\mathrm{VaR}\left[\mathrm{X};\frac{1}{2}\right]=2000 \le 2500=\mathrm{VaR}\left[\mathrm{Y};\frac{1}{2}\right] \text{ и } \mathrm{VaR}\left[\mathrm{X};\frac{3}{4}\right]=3000 \ge 2750=\mathrm{VaR}\left[\mathrm{Y};\frac{3}{4}\right].$$

Поэтому разумно использовать следующее определение стохастического упорядочивания, приведенное авторами на странице 108 книги [1]:

Определение 1.2 Пусть X и Y – две случайные скалярные величины. Тогда X называется **стохастически меньшей** (или стохастически предшествующей) величине Y, если неравенство $\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\alpha] \le \mathrm{VaR}[\mathrm{Y};\alpha]$ выполнено для любого $\alpha \in [0,1]$.

Это отношение обозначается как $X \preceq_{ST} Y$. Также можно ввести это понятие через обратные функции распределения, т.к.

$$\mathrm{VaR}[\mathrm{X};\alpha] \le \mathrm{VaR}[\mathrm{Y};\alpha] \text{ тогда и только тогда, когда } F_X^{-1}(\alpha) \le F_Y^{-1}(\alpha).$$

Это простейшее свойство часто было использовано в книге, однако не было вынесено отдельно.

Как уже было отмечено, не все величины сравнимы между собой в этом смысле, т.е. это отношение частичного порядка.

Для доказательства следующего утверждения авторы используют следующую лемму, однако её доказательство приведено на стр 19, главы 1, повторим его здесь.

Лемма 1.1 Для любого числа x и уровня вероятности p верно что $F_X^{-1}(p) \le x$ тогда и только тогда, когда $p \le F_X(x)$.

Доказательство. Если показать, что из того что $p > F_X(x)$ следует $x < F_X^{-1}(p)$,

то мы докажем утверждение в одну сторону. Предположим, что $p > F_X(x)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такая, что $p \le F_X(x+\varepsilon)$, а значит, $x+\varepsilon \le F_X^{-1}(p)$, откуда немедленно следует, что $x < F_X^{-1}(p)$.

В обратную сторону, если $p \le F_X(x)$, тогда в силу монотонности функции распределения, $p \le F_X(x+\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$. А значит, $F_X^{-1}(p) \le x+\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Устремив ε к нулю, получим $F_X^{-1}(p) \le x$, что и требовалось доказать.

Доказательство следующих двух утверждений будет приведено почти без изменений, так как они изложены достаточно подробно.

Утверждение 1.1 Для двух случайных величин X и Y верно что $X \preceq_{ST} Y$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{VaR}[\mathrm{X}; F_Y(x)] \le x$ для всех x.

Доказательство. Из *определении 1.2*

$$X \preceq_{ST} Y \text{ тогда и только тогда, когда } \mathrm{VaR}[\mathrm{X}; F_Y(x)] \le \mathrm{VaR}[\mathrm{Y}; F_Y(x)] = F_Y^{-1}(F_Y(x)).$$

А по общеизвестным свойствам функции распределения $F_Y^{-1}(F_Y(x)) \le x$. Таким образом, утверждение доказано в одну сторону.
Для того, чтобы доказать его в обратную сторону, заметим, что

$$\mathrm{VaR}[\mathrm{X}; F_Y(x)] \le x \text{ для всех } x \text{ тогда и только тогда, когда } F_Y^{-1}(F_Y(x)) \le x \text{ для всех } x.$$

Лемма 1.1 гласит:

$F_X^{-1}(p) \le x$ тогда и только тогда, когда $p \le F_X(x)$ для любого числа x и уровня p.

А значит,

$F_Y^{-1}(F_Y(x)) \le x$ для всех x тогда и только тогда, когда $F_Y(x) \le F_X(x)$ для всех x

что равносильно

$$\mathrm{VaR}[\mathrm{X}; p] \le \mathrm{VaR}[\mathrm{Y}; p] \text{ для всех } p,$$

что завершает доказательство.

Для непрерывных функций распределения верно следующее:

Утверждение 1.2 Для двух случайных величин X и Y с непрерывными функциями распределения $X \preceq_{ST} Y$ тогда и только тогда, когда $F_X(VaR[Y; p]) \ge p$ для всех $0 < p < 1$.

Доказательство. Используя *утверждение 1.1* и определение VaR через обратную функцию распределения, имеем

$X \preceq_{ST} Y$ что равносильно $F_X^{-1}(F_Y(x)) \le x$ для всех x, что в свою очередь *по лемме 1.1* эквивалентно $F_Y(x) \le F_X(x)$.

Подставив в это неравенство $p = F_Y(x)$, получим $p \le F_X(VaR[Y; p])$ для всех p, что завершает доказательство.

Стохастическая сравнимость связана с более узкими понятиями – *сравнимостью с вероятностью единица* и *комонотонными* величинами, напомним два этих определения.

Определение 1.3 $X \preceq_1 Y$, если $X \le Y$ почти наверное (далее п.н.).

Определение 1.4. Множетсво в $\mathbb{R}^n$ называется комонотонным, если любые два вектора в нем покомпоненто упорядочены, т.е. все компоненты одного не меньше чем соответствующие компоненты второго. Распределение назыается комонотонным, если его носитель- комонотонное множетсво. Так же комонотонной будет называться любая случайная величина с таким распределением.

Отношение сравнимости с вероятностью 1 гораздо более строгое, чем стохастическая сравнимость. Оно даже не является отношением порядка между распределениями. Оно сопоставляет две случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве, и учитывает их взаимосвязь – одна величина должна *гарантированно* быть больше другой. В противоположность этому стохастический порядок не подразумевает никаких сведений о величинах, кроме их распределений – они могут даже быть заданы на разных вероятностных пространствах, что позволяет рассматривать величины, никак не связанные между собой. Очевидным образом из стохастической сравнимости не следует сравнимость с вероятностью 1. Однако верно следующее утверждение, доказательство которого было опущено авторами, однако его можно найти в работе [2] на странице 32

Утверждение 1.3 $X \preceq_{ST} Y$ тогда и только тогда, когда существуют величины $\tilde{X} =_d X$, $\tilde{Y} =_d Y$, такие, что $\tilde{X} \preceq_1 \tilde{Y}$.

Доказательство. Заметим, что

$$F_Y(t) = P(\tilde{Y} \le t) = P(Y \le t) \le P(X \le t) = P(\tilde{X} \le t) = F_X(t).$$

В силу монотонности обратных функций распределения, верно неравенство

$$F_X^{-1}(t) \le F_Y^{-1}(t).$$

То есть импликация верна в одну сторону. Теперь докажем в другую сторону. Пусть $\Omega = [0,1]$ и А – σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[0,1]$, а $P = \mu$ - мера Лебега. Предположим, что

$$\tilde{X}(\omega) = F_X^{-1}(\omega) \text{ и } \tilde{Y}(\omega) = F_Y^{-1}(\omega).$$

Как известно, обратную функцию распределения можно найти как

$$F^{-1}(\omega) = \inf\{t : F(t) > \omega\}.$$

Из условия имеем, что $F_X^{-1}(t) \le F_Y^{-1}(t)$. Поскольку

$$P(X \le x) = \mu(\omega : F_X^{-1}(\omega) \le x) = F_X(x) \text{ и}$$

$$P(Y \le x) = \mu(\omega : F_Y^{-1}(\omega) \le x) = F_Y(x),$$

то утверждение доказано, ведь мы показали, что если $X \preceq_{ST} Y$, то существуют такие $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, что их функции распределения совпадают с X и Y, для которых верно $P(\tilde{X} \le \tilde{Y}) = 1$.

Если переписать предыдущее утверждение в терминах комонотонных функций, получим следующее

Утверждение 1.4 $X \preceq_{ST} Y$ тогда и только тогда, когда существует пара комонотонных величин X^C и Y^C, таких, что $P[X^C \le Y^C] = 1$.

Напомним, что **мерой риска** называют отображение, сопоставляющее каждой неотрицательной случайной величине X неотрицательное число $\rho(X)$.

Подробное изложение теории измерения риска не входит в цели этой работы; на данном этапе достаточно отметить, что мера риска должна отражать, насколько велик риск. Разумно рассматривать *монотонные* меры риска, то есть если $X \le Y$ п.н., то $\rho(X) \le \rho(Y)$. Также хотелось бы, чтобы мера риска не различала две разных величины с одинаковым распределением, и это позволяет установить полученный ранее результат. Доказательство приведенное авторами на странице 110 достаточно подробно.

Утверждение 1.5. Для монотонной меры риска ρ верно, что

$$\text{если } X \preceq_{ST} Y\text{, то } \rho(X) \le \rho(Y).$$

Доказательство. Это прямо следует из утверждения 1.3, так как

$$\rho(X)=\rho(\tilde{X})\le\rho(\tilde{Y})=\rho(Y),$$

где неравенство следует из монотонности меры риска.

Стохастический порядок можно интерпретировать в терминах страхования «стоп-лосс». Необходимо напомнить, что это такое. Буквальный перевод термина «*stop-loss insurance»* это «страхование, останавливающее потери». Часто страхование происходит по следующей схеме: страховщик покрывает лишь превосходящую порог d часть ущерба. В таком случае d называется *франшизой* или *простым вычетом*. Эта практика позволяет экономить огромные средства страховщику, не приводя к большим потерям у его клиентов. При таком страхование, если ущерб составил X, то выплаты считаются по формуле $(X-d)_+$. В дальнейшем нам понадобится функция, известная под названием преобразование стоп-лосс: $\pi_X(d)=E\left[\left(X-d\right)_+\right]$. Она представляет из себя математическое ожидание выплат по договору страхования «стоп-лосс». Также нам понадобится формула $\pi_X(d)=\int_d^{+\infty}\bar{F}_X(x)dx$, где $\bar{F}_X(x)$ – дополнительная функция распределения или функция выживания. В страховании она обычно обозначается как $s(x)$. Получить эту формулу можно следующим образом:

$$\pi_X(d)=E\left[(X-d)_+\right]=\int_d^{+\infty}(x-d)dF_k(x)=\int_d^{+\infty}(1-F_k(x))dx=\int_d^{+\infty}\bar{F}_k(x)dx.$$

На странице 110 главы 3, приведено утверждение связывающее преобразование стоп-лосс и стохастический порядок. В его доказательстве опущены использованные формулы и взятие производной. Приведенное мной доказательство восполняет эти пробелы.

Утверждение 1.6 Для двух случайных величин X и Y верно следующее что $X\preceq_{ST}Y$ тогда и только тогда, когда $\pi_X(t)-\pi_Y(t)$ не убывает по t на $\mathbb{R}^+$.

Доказательство. Если $X\preceq_{ST}Y$, то $\bar{F}_X-\bar{F}_Y$ – не отрицательная функция, а следовательно по формуле выше,

$$\int_t^{+\infty}\left(\bar{F}_X(x)-\bar{F}_Y(x)\right)dx=\pi_X(t)-\pi_Y(t)\text{ не убывает.}$$

Теперь предположим, что $\pi_X(t)-\pi_Y(t)$ не убывает. Если продифференцировать эту разность по t, то получим

$$\left(\int_t^{+\infty}\left(\bar{F}_X(x)-\bar{F}_Y(x)\right)dx\right)'=\bar{F}_Y(t)-\bar{F}_X(t)\le 0.$$

Этому утверждению можно дать актуарную интерпретацию. По сути оно гласит, что, если $X \preceq_{ST} Y$, то разница между премиями в случае страхования с простым вычетом убывает при увеличении размера вычета:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(E[(Y-t)_+]-E[(X-t)_+]\right)=0.$$

Наибольшая разница будет при отсутствии вычета ($t=0$) и будет равна $E[Y]-E[X]$. Таким образом, премии по договорам стоп-лосс будут сильно отличаться друг от друга при малом размере вычета, но их разница будет уменьшаться при увеличении вычета.

2. Стохастический порядок и выбор в условиях риска

Для начала напомним основы *теории ожидаемой полезности.* Основную роль в этой теории играет **функция полезности** (англ. *utility function*). Стандартное обозначение – $u(x)$. Ее смысл заключается в том, что она сопоставляет детерминированному доходу число – «полезность». Потери моделируются отрицательными значениями дохода. Случайный доход X характеризуется средним значением полезности $E[u(X)]$. Когда речь заходит о страховании, «доход» складывается из детерминированной премии и случайных страховых выплат. Логично потребовать от функции полезности, чтобы она была непрерывной и возрастающей – чем больше доход, тем лучше, а также оценить нулевой доход нулем: тогда потери будут неположительные, а прибыль неотрицательной.

Наиболее часто встречающиеся функции полезности получаются линейным преобразованиями из следующих функций:

Линейная	$u(x)=x$
Квадратичная	$u(x)=-(x-b)^2$
Логарифмическая	$u(x)=\ln(a+x)$
Экспоненциальная	$u(x)=-e^{ax}$

Разумеется, рассматриваются лишь те значения x, при которых функции определены и удовлетворяют перечисленным выше условиям. Например, если квадратичная функция задает функцию полезности с *точкой насыщения* b, то по определению считаем, что дальше эта функция постоянна. Таким образом, владельцу дохода безразлично, сколько заработать, если доход превысит этот порог.

Рассмотрим самый простой случай – когда функция полезности л*ица, принимающего решения* (англ. decision-maker) кусочно-постоянна:

$$u_t(x)=\begin{cases}0, x\le t\\ 1, x>t\end{cases}$$

Такие лица всегда предпочитают доход, превышающий t, доходу ниже этого значения, но два разных дохода оба выше (или ниже) t они находят одинаково полезными. Для них имеет значение, только чтобы их доход превысил t: как только они достигнут своей цели, они будут удовлетворены, и их не будет интересовать увеличение их дохода. Такие люди основывают свои решения на функции выживания уровня t. Они предпочтут риск Y риску X, если

$$E[u(X)] = \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) = E[u(Y)].$$

В экономической литературе таких лиц часто называют *satisfiers*. Этот термин в обращение ввел нобелевский лауреат Herbert A. Simon в 1957 году, буквальный перевод – удовлетворители.

Утверждение 2.1 Если для всех лиц, принимающих решения с функций полезности $u_t(x)$ определённой выше (то есть для *satisfiers*), риск X предпочтительнее Y, то $X \preceq_{ST} Y$.

Доказательство. Если все *satisfiers* предпочитают X вместо Y, то

$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$ для всех t равносильно тому, что $F_X(t) \geq F_Y(t)$ для всех t, что в свою очередь равносильно $\mathrm{VaR}[X;\alpha] \leq \mathrm{VaR}[Y;\alpha]$ для всех α, что завершает доказательство.

Верен тот факт, что отношение $\preceq_{ST}$ удовлетворяет свойству **устойчивости при взятии предела**, введенному в *разделе 3.3.2 Desirable Properties for stochastic orderings* в рассматриваемой книге. Авторы пропустили доказательство этого факта, однако его можно найти в книге [2] на странице 33. Приведем его здесь.

Свойство 2.1 Пусть $X_n \xrightarrow{d} X_1$, $\mathrm{Y}_n \xrightarrow{d} X_2$ при $n \to \infty$. Если $X_n \preceq_{ST} Y_n$, $n \geq 1$, то $X \preceq_{ST} Y$.

Доказательство. Если x – точка непрерывности для функций X и Y, то верно неравенство $F_X(x) \leq F_Y(x)$. Предположим, что в точке разрыва выполнено обратное неравенство, т.е. $F_X(x) > F_Y(x)$. Тогда в силу непрерывности справа функции распределения существовал бы интервал, для которого так же выполнено это неравенство. Однако на интервале всегда найдутся точки непрерывности, что приводит к противоречию с предположением. А значит $X \preceq_{ST} Y$.

Стохастический порядок в экономике часто называют стохастическим превосходством первой степени и обозначают $\preceq_{PSD}$ или $\preceq_1$.

Отношение порядка $\preceq_{ST}$ отражает предпочтения всех удовлетворителей. Далее авторы приводят доказательство того, что все лица принимающие решения, нацеленные на прибыль, будут солидарны с удовлетворителями. В доказательстве авторов пропущены многие выкладки, а так же без доказательства используется *стохастическая формула Тейлора*.

Утверждение 2.2 Для любых двух случайных величин X и Y следующие утверждения эквивалентны:

1. $X \preceq_{ST} Y$
2. $E[v(X)] \le E[v(Y)]$ для всех невозрастающих функций v, при которых указанные математические ожидания существуют.
3. $E[v(X)] \le E[v(Y)]$ для всех функций v, при которых указанные математические ожидания существуют и $v' \ge 0$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать что из 1) следует 2), воспользуемся *утверждением 1.3*. Существуют величины $\tilde{X} =_d X$, $\tilde{Y} =_d Y$, такие, что $\tilde{X} \preceq_1 \tilde{Y}$, а значит,

$$E[v(X)] = E[v(\tilde{X})] \le E[v(\tilde{Y})] \text{ т.к. } P(\tilde{X} \le \tilde{Y}) = 1, \text{ а } E[v(\tilde{Y})] = E[v(Y)] .$$

Т.к. производная неубывающей функции всегда неотрицательна, то очевидно, что из 2) следует 3).

Осталось доказать что из 3) следует 1), Для этого нам понадобится воспользоваться **стохастической формулой Тейлора**:

$$Eg(X) = \sum_{k=0}^{s} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} EX^k + \int_0^{+\infty} \frac{E\left[(X-t)_+^{s-1} \right]}{(s-1)!} g^{(s)}(t)dt .$$

Запишем для $g(x)$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^{+\infty} \frac{(x-t)_+^{s-1}}{(s-1)!} g^{(s)}(t)dt .$$

По теореме Фубини среднее и интеграл коммутируют. Отсюда устанавливается справедливость формулы.

В частности, когда $s = 1$, мы имеем разложение

$$Eg(X) = g(0) + \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(t) g'(t)dt .$$

Воспользуемся им и получим следующее:

$$Ev(Y) - Ev(X) = \int_0^{+\infty} (\bar{F}_Y(t) - \bar{F}_X(t)) v'(t)dt \ge 0 .$$

Допустим, что в некоторой точке t выполнено $\bar{F}_Y(t) - \bar{F}_X(t) < 0$. Так как функции распределения непрерывны справа, то найдется такая окрестность $(t, t+\delta)$, что $\bar{F}_Y(t) - \bar{F}_X(t) \le \varepsilon < 0$ во всей окрестности. Тогда подберем кусочно-линейную v таким образом, что $v' > 0$ в этой окрестности и $v' = 0$ вне окрестности. Тогда

$$\int_0^{+\infty} (\bar{F}_Y(t) - \bar{F}_X(t)) v'(t)dt < 0,$$

что и приводит к противоречию.

Смысл теоремы заключается в том, что стохастический порядок основан на единогласном решении всех инвесторов с «адекватными» функциями полезности.

Необходимо прокомментировать значение $\preceq_{ST}$ в экономике и актуарной математике. В экономике случайные величины обычно представляют доход, прибыль; так $X \preceq_{ST} Y$ значит, что все инвесторы, нацеленные на прибыль, предпочтут Y перед X, так как он «больше». В актуарных вычислениях же случайные величины обычно представляют собой будущие случайные потери, так что, если $X \preceq_{ST} Y$, то все «адекватные» актуарии предпочтут X, так как такие потери «меньше». Связь между этими двумя дисциплинами можно проложить при помощи следующей эквивалентности:

$$X \preceq_{ST} Y \Leftrightarrow -Y \preceq_{ST} -X .$$

Проведенная в 1947 году фон Нейманом и Моргенштетрмом аксиоматизация теории ожидаемой полезности была встречена многочисленными замечаниями. Большинство из них относились к описательной ценности теории, то есть к эмпирическим доказательствам того, в какой степени агенты действуют согласно теории ожидаемой полезности. И, исходя из эмпирических данных, индивиды часто нарушают гипотезы теории ожидаемой полезности. Многие исследователи развивали альтернативные теории выбора в условиях риска, которые объясняли бы наблюдаемые паттерны поведения. Одной из таких стала *теория искаженного ожидания*. В ней предполагается, что каждый агент имеет неубывающую *функцию искажения* $g:[0,1]\to[0,1]$, такую, что $g(0)=0$ и $g(1)=1$. Эта теория моделирует когнитивные ошибки нашего сознания, при которых ожидания риска искажаются. **Искаженным ожиданием** величины $X \ge 0$ относительно искажения $g(x)$ называется

$$\rho_g[X] = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_X(x))dx .$$

Лицо, принимающее решения на основе «теории искаженного ожидания», действует так, чтобы максимизировать *искаженное* ожидание дохода. Иначе говоря, оно предпочтет Y вместо X тогда и только тогда, когда $\rho_g[X] \le \rho_g[Y]$.

Аналогично предыдущему случаю, авторы показывают, что $\preceq_{ST}$ отражает интересы всех «адекватных» лиц, принимающих решения в теории искаженного ожидания.

Утверждение 2.3 Пусть даны две величины $X, Y \ge 0$. Тогда

$$X \preceq_{ST} Y \Leftrightarrow \rho_g(X) \le \rho_g(Y)$$ для любого неубывающего искажения $g(x)$.

Доказательство. Из определение стохастического упорядочивания имеем

$X \preceq_{ST} Y$, следовательно $\bar{F}_X(t) \le \bar{F}_Y(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, а тогда

$g\left(\bar{F}_X(t)\right) \le g\left(\bar{F}_Y(t)\right)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, откуда следует что

$\rho_g[X] \le \rho_g[Y]$,

Что заканчивает доказательство утверждения в одну сторону. Для того, чтобы доказать в другую, заметим что функция VaR не убывает по p, а значит, $X \preceq_{ST} Y$.

Другими словами это утверждение гласит что Y стохастически превосходит X, тогда и только тогда, когда Y вместо X предпочитают все лица с неубывающей функцией искажения.

3. Сравнение частоты наступления страховых случаев

В этом разделе исследуется отношение стохастического порядка между целочисленными случайными величинами. В актуарной науке такие величины используются для моделирования случайного числа рисков. Стохастический порядок распространяется и на неотрицательные целочисленные величины. Для таких величин доказанные выше утверждения примут следующий вид:

Утверждение 3.1 Пусть N, M – неотрицательные целочисленные величины. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $N \preceq_{ST} M$
2. $\sum_{j=0}^{n} P(N = j) \ge \sum_{j=0}^{n} P(M = j) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\sum_{j=n}^{\infty} P(N = j) \le \sum_{j=n}^{\infty} P(M = j) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
4. $E[v(N)] \le E[v(M)]$ для любой функции $v: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, такой, что средние существуют и $\Delta v(i) \ge 0$ для любого целого i.

Авторы пропустили доказательство этого утверждения, я восстановлю его собственными силами.

Доказательство. Четвертый пункт эквивалентен первому, по *утверждению 2.2*. Второй и третий пункт эквивалентны, так как

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(X = j) = 1 \ .$$

Из четвертого следует второй и третий, так как для функции

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, x < n \\ \dfrac{1}{x}, x \geq n \end{cases}$$

математическое ожидание равно $E\left[v_n(X)\right] = \sum_{j=n}^{\infty} P(X=j)$, и при этом $\Delta v(i) \geq 0$. Из второго пункта следует первый, так как

$$\sum_{j=0}^{k} P\left(N=j\right) = F_N(k) \geq F_Y(t) = \sum_{j=0}^{k} P\left(M=j\right) \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow N \preceq_{ST} M \ .$$

4. Некоторые свойства стохастического порядка

Основные свойства стохастического порядка можно выделить в одну теорему, доказательство которой можно найти в разделе 3.3.4 монографии [1] на странице 114. Здесь оно приведено почти без изменений, однако были восстановлены некоторые пропущенные авторами выкладки.

Теорема 4.11

1. Из $X \preceq_{ST} Y$ следует, что $t(X) \preceq_{ST} t(Y)$ для любой неубывающей функции $t(x)$
2. Пусть $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые случайные величины и $X_i \preceq_{ST} Y_i$ $\forall i = 1, 2 \ldots n$. Тогда для любой функции $\Psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, возрастающей по каждому аргументу, верно, что $\Psi(X_1, \ldots, X_n) \preceq_{ST} \Psi(Y_1, \ldots, Y_n)$
3. Если $X \preceq_{ST} Y$ и $EX = EY$, то $X =_d Y$.

Доказательство. Первая часть следует из *Утверждения 2.2,* того что для любой неубывающей функции v, композиция $v \ \ t(x)$ неубывающая, и

$$E\left[v\left(t(X)\right)\right] \leq E\left[v\left(t(Y)\right)\right].$$

Для доказательства второй части воспользуемся индукцией. Для n=1 результат уже доказан, это первая часть утверждения. Теперь предположим, что утверждение верно для n; докажем что оно так же верно для n+1. Рассмотрим неубывающую функцию v. Если заменить в $\Psi(X_1,\ldots,X_n)$ последний аргумент числом, то такая функция уже будет удовлетворять предположению индукции, тогда

$$E\left[v(\Psi(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}))\right]=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} v(\Psi(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}))dF_{X_1}(x_1)\ldots dF_{X_{n+1}}(x_{n+1})=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}} E\left[v(\Psi(X_1,\ldots,X_n,x_{n+1}))\right]dF_{X_{n+1}}(x_{n+1})$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}} E\left[v(\Psi(Y_1,\ldots,Y_n,x_{n+1}))\right]dF_{X_{n+1}}(x_{n+1})=$$

$$=E\left[v(\Psi(Y_1,\ldots,Y_n,X_{n+1}))\right],$$

так как $E\left[v(\Psi(X_1,\ldots,X_n,x_{n+1}))\right]\leq E\left[v(\Psi(Y_1,\ldots,Y_n,x_{n+1}))\right]$ и $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ независимые. Аналогично, если сделать первые n аргументов постоянными, а последний случайным, то снова получаем

$$\Psi(y_1,\ldots,y_n,X_{n+1})\preceq_{ST}\Psi(y_1,\ldots,y_n,Y_{n+1}) \text{ и}$$

$$E\left[v(\Psi(y_1,\ldots,y_n,X_{n+1}))\right]\leq E\left[v(\Psi(y_1,\ldots,y_n,Y_{n+1}))\right].$$

А тогда

$$E\left[v(\Psi(Y_1,\ldots,Y_n,X_{n+1}))\right]=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} v(\Psi(y_1,\ldots,y_n,x_{n+1}))dF_{Y_1}(x_1)\ldots dF_{X_{n+1}}(x_{n+1})=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} E\left[v(\Psi(y_1,\ldots,y_n,X_{n+1}))\right]dF_{Y_1}(y_1)\ldots dF_{Y_n}(y_n)\leq$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} E\left[v(\Psi(y_1,\ldots,y_n,Y_{n+1}))\right]dF_{Y_1}(y_1)\ldots dF_{Y_n}(y_n)=.$$

$$=E\left[v\left(\Psi(Y_1,\ldots,Y_n,Y_{n+1})\right)\right].$$

При доказательстве использовались теорема Фубини и независимость величин для перестановки интегралов местами.

Третья часть теоремы следует из *представления математического ожидания как интеграла*

$$E\ \ X\ =\int\limits_0^{+\infty}\bar{F}_X(t)dt.$$

Если $X\preceq_{ST}Y$, то $\bar{F}_X(x)dx\leq\bar{F}_Y(x)dx$. Но

$$E\ \ X\ -E\ \ Y\ =\int\limits_0^{+\infty}\ \bar{F}_Y(x)-\bar{F}_X(x)\ \ dx=0$$

Если интеграл от неотрицательной непрерывной справа функции равен нулю, то она тождественно равна нулю, и величины совпадают по распределению.

Прокомментируем следствия, вытекающие из этой теоремы. Первое свойство обозначает, что введение простых вычетов или ограничение выплат страховщика не меняет предпочтений. Так если $X \preceq_{ST} Y$, то $(X-d)_+ \preceq_{ST} (Y-d)_+$ для любого вычета d, и $\min\{X,w\} \preceq_{ST} \min\{Y,w\}$ для любого ограничения w.

Из второго свойства следует, что стохастический порядок обладает свойством *устойчивости относительно свертки*. Это свойство было определено авторами в разделе 3.2.2.

Из третьего свойства следует, что стохастический порядок не может быть применен для сравнения двух разных величин с одинаковым средним. Это существенный недостаток, который говорит о том, что нужно какое-то менее требовательное отношение порядка.

Заметим, что последнее свойство также верно, если вместо $EX = EY$ потребовать $E[v(X)] = E[v(Y)]$ для строго возрастающей функции $v(x)$. Действительно, по первому свойству выполнено $v(X) \preceq_{ST} v(Y)$, и тогда по третьему свойству $v(X) =_d v(Y)$, что для строго возрастающей функции $v(x)$ равносильно тому, что $X =_d Y$.

Далее рассмотрим связь стохастического порядка и *порядковых статистик*. Очевидно, что $X_{(1)} \preceq_{ST} \ldots \preceq_{ST} X_{(n)}$. Чтобы подчеркнуть зависимость статистики от размера выборки, будем обозначать статистику порядка k из выборки размера n за $X_{(k:n)}$. Из определения следует следующее:

Свойство 4.1 $X_{(k-1:n-1)} \preceq_{ST} X_{(k:n)}$ для $k = 2,\ldots,n-1$ и $X_{(k:n)} \preceq_{ST} X_{(k:n-1)}$ для $k = 1,\ldots,n-1$.

Теперь сравним порядковые статистики, связанные со случайными выборками, распределения которых упорядочены по отношению стохастического порядка.

Свойство 4.2 Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – н.о.р. и $Y_1,\ldots,Y_n$ – н.о.р. Тогда, если $X_1 \preceq_{ST} Y_1$, то $X_{(i)} \preceq_{ST} Y_{(i)}$ для $i = 1,\ldots,n$.

Это прямо следует из пункта 2 *теоремы 4.1*.

Как будет показано далее, существуют ограничения на частные (маргинальные) распределения порядковых статистик $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$. В частности, они должны удовлетворять следующим условиям. В доказательстве предложенными авторами было пропущено большое количество выкладок, однако они оставили ссылку на гораздо более подробное доказательство этого факта. Доказательство, приведенное здесь, было взято из статьи [3].

Теорема 4.2 Функция $G(x)$ является функцией распределения $X_{(m)}$ некоторого вектора $\mathbf{X}$ с частными распределениями $F_X(t)$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $L(t) \le G(t) \le R(t)$ для всех t, где $T(t) = \min\ \max\ 0, t\ ,1$, $L(t) = T\left(\dfrac{nF_X(t) - m + 1}{n - m + 1}\right)$, $R(t) = T\left(\dfrac{nF_X(t)}{m}\right)$.
2. $0 \le G(t) - G(s) \le n(F_X(t) - F_X(s))\ \forall s < t$.

Доказательство. Сперва докажем необходимость этих условий. Верно следующее

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_{(i)} \le t) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i \le t) = nF_X(t).$$

Далее преобразуем функцию распределения $X_{(m)}$:

$$P(X_{(m)} \le t) = (P(X_{(m)} \le t < X_{(i)}) + \frac{P(X_{(i)} \le t))}{n - m + 1} =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \left[\frac{P(X_{(m)} \le t < X_{(i)}) + P(X_{(i)} \le t)}{n - m + 1} \right] =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \left[\frac{P(X_{(m)} \le t < X_{(i)})}{n - m + 1} \right] + \frac{1}{n - m + 1} \left(\sum_{i=1}^{n} P(X_{(i)} \le t) - P(X_{(m)} \le t) - \sum_{i=1}^{m-1} P(X_{(i)} \le t) \right) =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \left[\frac{P(X_{(m)} \le t < X_{(i)})}{n - m + 1} \right] - \frac{1}{n - m + 1} \left(P(X_{(m)} \le t) + nF_X(t) + \sum_{i=1}^{m-1} P(X_{(i)} > t) - m + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{n - m + 1} \left[\sum_{i=m+1}^{n} \left[P(X_{(m)} \le t < X_{(i)}) \right] + nF_X(t) - m + 1 + \sum_{i=1}^{m-1} P(X_{(i)} > t) \right] =$$

$$= \frac{nF_X(t) - m + 1}{n - m + 1} + C(t), \text{ где } C(t) > 0,$$

как сумма положительных величин. Из этого следует, что

$$P(X_{(m)} \le t) = \frac{nF_X(t) - m + 1}{n - m + 1} + C(t) \ge T\left(\frac{nF_X(t) - m + 1}{n - m + 1} \right) = L(t),$$

что доказывает необходимость нижней границы. Так же

$$P(X_{(m)} \le t) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m-1} P(X_{(i)} \le t) + P(X_{(m)} \le t) \right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(nF_X(t) - \sum_{i=1}^{m-1} P(X_{(i)} \le t < X_{(m)}) - \sum_{i=m+1}^{n} \left[P(X_{(i)} \le t) \right] \right) =$$

$$= \frac{nF_X(t)}{m} - C(t), \text{ где } C(t) \ge 0 ,$$

как сумма неотрицательных величин. Из этого следует

$$P(X_{(m)} \le t) = \frac{nF_X(t)}{m} - C(t) \le T\left(\frac{nF_X(t)}{m} \right) = R(t) .$$

Для доказательства необходимости второго условия заметим, что

$$0 \le G(t) - G(s) = P\ \ t < X_{(m)} \le s\ \ \le \sum_{i=1}^{n} P\ \ t < X_i = X_{(m)} \le s\ \ \le n\ \ F_X(t) - F_X(s)\ \ .$$

Теперь покажем достаточность этих условий. Доказательство конструктивное. Пусть $G(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 2. Задача состоит в том, чтобы, используя эту функцию распределения, построить вектор, частные распределения которого будут совпадать с $F_X(t)$, а порядковая статистика которого будет иметь имела распределение $G(t)$.

$$G_1(t) = T\left(\frac{nF_X(t) - G(t) - m + 1}{n - m} \right) \text{ для } m = 1, \ldots, n-1$$

$$G_2(t) = T\left(\frac{nF_X(t) - G(t)}{m - 1} \right) \text{ для } m = 2, \ldots, n .$$

Так как выполнено условии 2, то функция $nF_X(t) - G(t)$ невозрастающая и непрерывная справа, значит, то же самое верно для G_1 и G_2. Учитывая, что

$$\lim_{t\to+\infty}\ nF_X(t) - G(t)\ = n - 1, \lim_{t\to-\infty}\ nF_X(t) - G(t)\ = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} G_i(t) = 1, \lim_{t\to-\infty} G_i(t) = 0, i = 1, 2$$

А значит, все три функции G, G_1, G_2 являются функциями распределения. Выполнение условия 1 влечет за собой $G_1(t) \le G(t) \le G_2(t)\ \forall t$, т.к. из того, что $nF_X(t) - m + 1 \le (n - m + 1)G(t)$, следует, что $nF_X(t) - G(t) - m + 1 \le (n - m)G(t)$. Значит, для обратных функций верно $G_1^{-1}(p) \ge G^{-1}(p) \ge G_2^{-1}(p)\ \ \forall p \in [0,1]$. Теперь определим

$$Q_i(p) = \begin{cases} G_2^{-1}(p),\ i = 1, \ldots, m-1 \\ G^{-1}(p),\ i = m \\ G_1^{-1}(p),\ i = m+1, \ldots, n \end{cases}$$

Пусть также $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, а J распределен равномерно на множестве $1,\ldots,n$. Заметим, что случайный вектор

$$Z = \; Q_J(U), Q_{J+1}(U), \ldots, Q_n(U), Q_1(U), \ldots, Q_{J-1}(U)$$

имеет частные распределения $F_X(t)$. Более того, $Z_{(m)}$ имеет функцию распределения $G(t)$, т.к

$$(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) =_d (Q_1(U), Q_2(U), \ldots, Q_n(U)), \text{ и } X_{(m)} =_d G^{-1}(U)$$

имеет функцию распределения $G(t)$. Для завершения доказательства заметим, что для всех $i = 1, \ldots, n$,

$$P \;\; X_i \le t \;\; = \frac{1}{n} \;\; (m-1)P \;\; X_i = G_2^{-1} \;\; U \;\; \le t \;\; + P \;\; X_i = G^{-1} \;\; U \;\; \le t \;\; +$$

$$+(n-m)P \;\; X_i = G_1^{-1} \;\; U \;\; \le t \;\;\; = F_X(t).$$

Заметим, что $L(t)$ и $R(t)$ могут являться распределениями для порядковой статистики. При этом они являются *крайними* для стохастического порядка среди всех таких распределений. То есть верно следующее:

Свойство 4.3 Пусть $X_{(m)}^{-} \sim R(t)$, а $X_{(m)}^{+} \sim L(t)$, где $L(t)$ и $R(t)$ определены, как в прошлой теореме. Тогда верно неравенство $X_{(m)}^{-} \preceq_{ST} X_{(m)} \preceq_{ST} X_{(m)}^{+}$.

5. Стохастический порядок и понятия старения

Одной из основных характеристик актуарных моделей расчета продолжительности жизни человека является *интенсивность смертности*, также известная под названием hazard rate (англ. уровень риска), напомним её определение.

Определение 5.1 Для неотрицательной случайной величины X, имеющей плотность $f_X(x)$, функция

$$r_X(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}, x \ge 0$$

называется **интенсивностью смертности** (в страховании жизни обычно обозначается как $\mu_X(t)$).

Можно связать функцию выживания и интенсивность смертности. Доказательство этого факта было приведено авторами в разделе 1.7.2.2.

Утверждение 5.1 Верна следующая формула:

$$\bar{F}_X(x) = \exp\left(-\int_0^x r_X(s)ds \right)$$

Доказательство. Заметим, что

$$r_X(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = -\frac{\bar{F}_X'(x)}{\bar{F}_X(x)} = -\frac{d}{dx} \ln \bar{F}_X(x) \quad .$$

Значит, учитывая, что $\bar{F}_X(0) = 1, \ \ln \bar{F}_X(0) = 0$, получаем, что

$$\ln \bar{F}_X(x) = -\int_0^x r_X(x)dx \, .$$

Благодаря интенсивности смертности можно оценить хвост распределения. Когда $r_X(x)$ монотонно убывает, то хвост распределения велик и говорят что это распределение с убывающей частотой отказов или DFR (От анг. decreasing failure rate), а когда монотонно возрастает – наоборот, хвост достаточно мал и говорят что это распределение с возрастающей частотой отказов или IFR (От анг. increasing failure rate).

Далее авторы связали это свойство со стохастическим порядком. В доказательстве, предложенном ими, отсутствовали промежуточные равенства, однако я восстановил их.

Свойство 5.1

1. X - DFR (т.е $r_X(x)$ убывает) равносильно тому, что
$$\left[X - s \mid X > s\right] \preceq_{ST} \left[X - t \mid X > t\right] \ \forall s < t,$$
2. X - IFR, (т.е $r_X(x)$ возрастает) равносильно тому, что
$$\left[X - t \mid X > t\right] \preceq_{ST} \left[X - s \mid X > s\right] \ \forall s < t.$$

Доказательство. Найдем функцию выживания для этого условного распределения по *утверждению 5.1.*

$$P(X - t > x \mid X > t) = \frac{P(X > x + t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{\bar{F}_X(x+t)}{\bar{F}_X(t)} =$$

$$= \frac{\exp\left(-\int_0^{x+t} r_X(s)ds \right)}{\exp\left(-\int_0^{t} r_X(s)ds \right)} = \exp\left(-\int_t^{x+t} r_X(s)ds \right).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} P(X - t > x \mid X > t) = - \ r_X(x+t) - r_X(t) \ \exp\left(-\int_t^{x+t} r_X(s)ds \right).$$

Отсюда видно, что $r_X(x)$ возрастает (убывает) тогда и только тогда, когда $P(X-t>x \mid X>t)$ убывает (возрастает) по t при всех x. Последнее условие эквивалентно стохастической сравнимости.

В дальнейших рассуждениях авторы используют такие понятия как NBU, NWU, NBUE, NWUE и некоторые другие. Перед использованием таких величин будут даны их определения и кратко описано, зачем они нужны.

Определение 5.2 Неотрицательная случайная величина X, или её функция распределения называется NBU (от англ. «New better than used» – новое лучше бывшего в употреблении), если $\bar{F}_X(s)\bar{F}_X(t) \geq \bar{F}_X(s+t)$ для всех положительных s и t. Если же $\bar{F}_X(s)\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_X(s+t)$ для всех положительных s и t, то тогда её называют NWU (от англ. «New worse than used» – новое хуже бывшего в употреблении).

Эти определения мотивированы следующей дихотомией: некий прибор прослужил уже s лет и когда-нибудь он сломается. Имеет ли смысл заменить старый прибор на такой же новый? Если прибор уже прослужил некоторое время, то он зарекомендовал себя надежным и прослужит еще долгие годы, или он уже прослужил слишком долго и скоро сломается? Иначе говоря, какая вероятность больше: $P(X_1>s, X_2>t)$ или $P(X_1>t+s)$? Эти вероятности можно переписать как $\bar{F}_X(s)\bar{F}_X(t)$ и $\bar{F}_X(t+s)$ соответственно. Интуитивно ясно, что это связано с тяжестью хвостов распределения, и мы уже знаем связь хвостов со стохастическим порядком.

Свойство 5.2 Верны следующие утверждения:

1. X относится к классу NBU равносильно тому, что $\left[X-t \mid X>t\right] \preceq_{ST} X \quad \forall t>0$
2. X относится к классу NWU равносильно тому, что $X \preceq_{ST} \left[X-t \mid X>t\right] \quad \forall t>0$

Авторы опустили доказательство пункта 2, и пропустили часть выкладок. Приводимое мной доказательство восполняет эти пробелы.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{\bar{F}_X(s+t)}{\bar{F}_X(t)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>t)} = \frac{P(X>s+t, X>t)}{P(X>t)} =$$

$$= P(X>s+t \mid X>t) = P(X-t>s \mid X>t).$$

Поэтому

$$\frac{\bar{F}_X(s+t)}{\bar{F}_X(t)} \leq \bar{F}_X(s) \text{ эквивалентно тому, что } \bar{F}_X(s) \geq P(X-t>s \mid X>t).$$

А это и есть запрошенная стохастическая сравнимость.

Аналогично во втором пункте

$$\frac{\bar{F}_X(s+t)}{\bar{F}_X(t)} \geq \bar{F}_X(s) \text{ эквивалентно тому, что } \bar{F}_X(s) \leq P(X-t>s \mid X>t).$$

А это и есть запрошенная стохастическая сравнимость.

Напомним определение *остаточного времени жизни*

Определение 5.3 Для неотрицательной случайной величины X, ассоциированной с ней **функцией среднего избытка** или же **остаточным временем жизни** называется следующая функция:

$$e_X(x) = E[X - x \mid X > x], x > 0.$$

Это определение полезно переписать в терминах преобразования стоп-лосс:

$$e_X(x) = \int_0^{+\infty} P(X-x>t \mid X>x)dt = \frac{1}{\bar{F}_X(x)} \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x+t)dt = \frac{\pi_X(x)}{\bar{F}_X(x)}.$$

Определение 5.4 Для неотрицательной случайной величины X с конечным средним, обозначим за $X_{\{1\}}$ случайную величину со следующей функцией распределения

$$F_{X_{\{1\}}}(x) = \frac{1}{E[X]} \int_0^x \bar{F}_X(y)dy = 1 - \frac{\pi_X(x)}{E[X]}, x \geq 0.$$

Эта функция известна как **распределение стационарного обновления**, ассоциированное с X.

Если по-другому взглянуть на задачу о замене прибора и сравнивать остаточное время жизни старого прибора и ожидаемое время жизни нового прибора, тогда естественно возникает следующее определение.

Определение 5.5 Неотрицательная случайная величина X называется NBUE (От англ. «New better used in expectation»– новое в среднем лучше бывшего в употреблении), если $e_X(t) \leq E[x]$ для всех положительных t. И она называется NWUE (От англ. «New worse used in expectation» – новое в среднем хуже бывшего в употреблении), если $e_X(t) \geq E[x]$ для всех положительных t.

Авторы так же связали его со стохастическим порядком.

Свойство 5.3 Пусть X - неотрицательная случайная величина с конечным средним, тогда

X относится к классу NBUE равносильно тому, что $X_{\{1\}} \preceq_{ST} X$

X относится к классу NWUE равносильно тому, что $X \preceq_{ST} X_{\{1\}}$

Доказательство. Из *определения 5.4* следует

$$\bar{F}_{X_{\{1\}}}(x) = \frac{\pi_X(x)}{E[X]} = \frac{e_X(x)\bar{F}_X(x)}{E[X]},$$

и верны следующие эквивалентности:

$$X - NBUE \Leftrightarrow \frac{e_X(x)}{E[X]} \le 1 \qquad \text{и} \qquad X - NWUE \Leftrightarrow \frac{e_X(x)}{E[X]} \ge 1,$$

а значит,

$$\bar{F}_{X_{\{1\}}}(x) \le \bar{F}_X(x) \Leftrightarrow X - NBUE \text{ и } \bar{F}_{X_{\{1\}}}(x) \ge \bar{F}_X(x) \Leftrightarrow X - NWUE.$$

6. Стохастическая монотонность

Напомним определение *стохастически возрастающего семейства* случайных величин.

Определение 6.1. Для семейства $X_\theta, \theta \in \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}$ и функции $t:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим новую функцию $t^*(\theta) = E[t(X_\theta)]$. Если верна импликация t не убывает $\Rightarrow t^*$ не убывает,

то X_θ называется **стохастически возрастающим** семейством.

Легко увидеть, что это определение эквивалентно $X_\theta \preceq_{ST} X_{\theta'}\ \forall \theta \le \theta'$.

Авторами были приведены простейшие методы построения стохастически возрастающих семейств, однако бездоказательно. Восполним этот недостаток.

Свойство 6.1 Следующие семейства стохастически возрастают:

1) $X_\theta = \theta Y$, $Y \ge 0$

2) $X_\theta = Y + \theta$, Y – любое

3) $X_\theta = \sum_{n=1}^{\theta} Y_n,\ \theta \in \mathbb{N},\ Y_1, \ldots, Y_n \ge 0$.

Доказательство. Проверим эквивалентное определение для этих семейств. Так как

$$\theta Y \preceq_1 \theta' Y,\ \forall \theta \le \theta'$$

$$Y + \theta \preceq_1 Y + \theta',\ \forall \theta \le \theta'$$

$$\sum_{n=1}^{\theta} Y_n \preceq_1 \sum_{n=1}^{\theta'} Y_n,\ \forall \theta \le \theta',$$

То

$$\theta Y \preceq_{ST} \theta' Y,\ \forall \theta \le \theta'$$

$$Y+\theta \preceq_{ST} Y+\theta', \ \forall \theta \le \theta'$$

$$\sum_{n=1}^{\theta} Y_n \preceq_{ST} \sum_{n=1}^{\theta'} Y_n, \ \forall \theta \le \theta'$$

Следующее свойство показывает, что можно совмещать стохастически возрастающие семейства для получения других семейств, удовлетворяющих этому свойству

Свойство 6.2 Следующие семейства стохастически возрастают

- $g(X_\theta)$, где $g(x)$ возрастает, X_θ стохастически возрастает,
- $X_\theta = \sum_{n=1}^{N(\theta)} Y_n$, где $Y_n \ge 0$, а $N(\theta)$ стохастически возрастает, и все величины независимы.

Доказательство. Первое следует из *теоремы 4.1,* а второе следует из первого и свойства 6.1.

7. Стохастический порядок, смешение, составные распределения

В этом коротком разделе авторы монографии доказывают, что стохастичекский порядок *устойчив к смешению* и *устойчив к усложнению*. Эти термины они также определили в разделе 3.2.2.

Свойство стохастического возрастания дает естественный метод сравнения смешенных распределений через смешение из ядер. Авторы пропустили доказательство следующего свойства, так как подобный факт уже был доказан ими ранее. Восполним этот недостаток.

Свойство 7.1 Если семейство X_θ стохастически возрастает, то из того что $\Lambda_1 \preceq_{ST} \Lambda_2$ следует $X_{\Lambda_1} \preceq_{ST} X_{\Lambda_2}$.

Доказательство. Для любой возрастающей t в силу *утверждения 2.2* и того, что t^* тоже возрастающая, верно

$$E\left[t(X_{\Lambda_1})\right] = E\left[t^*(\Lambda_1)\right] \le E\left[t^*(\Lambda_2)\right] = E\left[t(X_{\Lambda_2})\right],$$

что в силу того же утверждения равносильно $X_{\Lambda_1} \preceq_{ST} X_{\Lambda_2}$.

Используя *свойство 7.1,* можно сравнить суммы случайных величин через количество слагаемых. Приведенный далее авторами результат показывает, что $\preceq_{ST}$ устойчиво относительно усложнения. Доказательство приводится почти без изменений.

Свойство 7.2 Пусть даны две последовательности неотрицательных независимых случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$, а также две величины с натуральными значениями, M и N, не зависящие от предыдущих. Тогда верно

$$\left.\begin{array}{l} X_n \preceq_{ST} Y_n \text{ для всех } n \\ M \preceq_{ST} N \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} X_i \preceq_{ST} \sum_{i=1}^{N} Y_i .$$

Доказательство. 1) Из *свойства 6.1* (3) известно, что

$$t^*(n) = P[X_1 + X_2 + \ldots + X_n > x] \text{ – невозрастающая функция.}$$

Учитывая, что $M \preceq_{ST} N$, можно получить

$$E\left[t^*(M)\right] = P\left[\sum_{i=1}^{M} X_i > x\right] \le E\left[t^*(N)\right] = P\left[\sum_{i=1}^{N} X_i > x\right],$$

для любого x, а значит

$$\sum_{i=1}^{M} X_i \preceq_{ST} \sum_{i=1}^{N} X_i .$$

2) Так как $\preceq_{ST}$ устойчиво по отношению к смешению и к свертке, можно написать, что для любого t

$$P\left[\sum_{i=1}^{N} X_i > t\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > t\right] P[N = n] \le$$
$$\le \sum_{n=0}^{+\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i > t\right] P[N = n] = P\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i > t\right],$$

а значит,

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \preceq_{ST} \sum_{i=1}^{N} Y_i .$$

Если совместить результаты 1) и 2), то из-за транзитивности порядка $\preceq_{ST}$ получим запрошенный результат.

8. Достаточные условия

В этом разделе авторы сформулировали достаточные условия для того, чтобы две случайные величины были стохастически сравнимы.

Утверждение 8.1 Пусть X и Y – две случайные величины. Если существует такое c, что $dF_X(x) \ge dF_Y(x)$ для всех $x < c$ и $dF_X(x) \le dF_Y(x)$ для всех $x > c$, то $X \preceq_{ST} Y$.

Доказательство. Для $x < c$ имеем

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} dF_X(y) \geq \int_{-\infty}^{x} dF_X(y) = F_Y(x).$$

Для $x > c$ имеем

$$F_X(x) = 1 - \int_{x}^{+\infty} dF_X(y) \geq 1 - \int_{x}^{+\infty} dF_X(y) = F_Y(x),$$

что и завершает доказательство.

Далее авторы привели ещё одно достаточное условие, однако оставили его без доказательства, лишь указав что его можно найти в статье [4]. Восполним его

.

Утверждение 8.2

1. Для неотрицательной непрерывной случайной величины X определим $h_X(x) = \dfrac{d}{dx}\log(f_X)$. Тогда для двух непрерывных X и Y верно $h_X(x) \leq h_Y(x)$ для всех $x \Rightarrow X \preceq_{ST} Y$.
2. Для целочисленной случайной величины N определим $h_N(n) = p_N(n) / p_N(n-1)$, где $p_N(n) = P(N = n)$. Тогда для двух целочисленных случайных величин N и M верно $h_N(n) \leq h_M(n)$ для всех n $\Rightarrow N \preceq_{ST} M$.

Доказательство. Сперва докажем второй пункт. Можно считать, что $p_N(n) - p_M(n)$ хотя бы один раз меняет знак, потому что иначе $p_N(n) - p_M(n) = 0$ для всех n, и результат тривиален. Пусть n_0 таков, что $p_N(n_0) < p_M(n_0)$. Тогда для всех $n > n_0$ верно

$$p_N(n) = p_N(n_0) \prod_{k=n_0+1}^{n} h_N(k) < p_M(n_0) \prod_{k=n_0+1}^{n} h_M(k) = p_M(n).$$

Из этого следует, что $p_N(n) - p_M(n)$ меняет знак не более одного раза. Из утверждения 7.1 следует, что пункт 2 верен.

Теперь докажем пункт 1. Можно считать, что $f_X(x) - f_Y(x)$ меняет знак хотя бы один раз, иначе $f_X(x) - f_Y(x) = 0$ для всех x, и результат тривиален. Как и при доказательстве пункта 2, достаточно показать, что знак меняется ровно один раз. Для этого проинтегрируем $h_X(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ и получим

$$f_X = f_X(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} h_X(\eta) d\eta \right).$$

А значит, если x_0 такой что $f_X(x_0) < f_Y(x_0)$, то тогда $f_X(x) \le f_Y(x)$ для всех $x > x_0$, что завершает доказательство.

Заключение

Подводя итог, можно сказать что, несмотря на то, что в этой работе представлена лишь малая часть теории, полученных сведений хватает, чтобы ими можно было пользоваться на практике. Не рассмотренными остались такие понятия как выпуклый порядок и порядок стоп-лосс, а также порядок Лоренца и теория удельного ущерба. В работе были восстановлены недостающие выкладки во всех доказательствах. Кроме того, были приведены опущенные авторами доказательства свойств 2.1, 6.1, 6.2 и утверждения 1.3. Важной частью работы являлась также существенная доработка доказательства теоремы 4.2 при помощи книги [3]. Так же было приведено доказательство свойства 8.2, на которое авторы лишь оставили ссылку. Можно заметить, что теория стохастического сравнения величин является перспективной ведь она довольно молодая, и многое в ней ещё не изучено. К тому же, помимо этого она имеет многочисленные применения.

Список литературы

[1] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, & R. Kaas. (2005). Actuarial Theory for Dependent Risks. The Atrium, Southern Gate, Chichester,West Sussex PO19 8SQ, England: John Wiley & Sons Ltd.

[2] Булинская Е.В. (2001). Теория риска и перестрахование, Издательство механико-математического факультета МГУ.

[3] Rychlik, T. (1994). Distributions and expectations of order statistics for possibly dependent random variables. Journal of Multivariate Analysis.

[4] Hesselager, O. (1995). Order relations for some distributions. Insurance: Mathematics & Economics.