Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 1

Идеи и примеры

Построение моделей игр среднего поля опирается на две идеи: моделирование большого числа взаимодействующих объектов с помощью эмпирической меры и равновесие Нэша.

Проиллюстрируем это двумя примерами.

1) Рассмотрим игру N игроков. Игрок с номером i выбирает точку α_i в некотором компактном множестве $A \subset \mathbb{R}^d$, а затем получает штраф J_i, который зависит от выбранных всеми игроками точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. При большом N естественно предполагать, что отдельный игрок учитывает лишь эмпирическое распределение всех игроков

$$\mu^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{\alpha_1} + \ldots + \delta_{\alpha_N}\big)$$

и свое положение. Кроме того, будем считать, что игроки действуют одинаково и при изменении позиции одного игрока изменением меры μ^N можно пренебречь, что является разумным допущением при большом N. Таким образом,

$$J_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = J(\alpha_i, \mu^N)$$

и в положении $(\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \ldots, \widehat{\alpha_N})$ равновесия Нэша, когда никто из игроков не может уменьшить свой штраф, если остальные игроки не меняют своих позиций, позиция $\widehat{\alpha_i}$ игрока i является точкой минимума функции

$$\alpha_i \to J(\alpha_i, \mu^N), \quad \mu^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{\widehat{\alpha_1}} + \ldots + \delta_{\widehat{\alpha_N}}\big).$$

Заметим, что точки $\{\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \ldots, \widehat{\alpha_N}\}$ составляют носитель меры μ^N. Нас интересует мера μ^N, описывающая распределение игроков в ситуации равновесия Нэша. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что искомая мера решает следующую задачу *теории игр среднего поля*: найти вероятностную меру μ на A, носитель которой лежит в множестве точек минимума функции $\alpha \to J(\alpha, \mu)$

2) Рассмотрим теперь дифференциальную игру N игроков, в которой игрок с номером i выбирает измеримую и ограниченную функцию α_i на $[0, T]$, с помощью которой управляет своим положением $y_i(t)$ на числовой прямой, решая уравнение $\dot{y}_i = \alpha_i$ с начальным условием $y_i(0) = x_i$. Каждый игрок получает в момент времени t штраф

$$J_i = \int_t^T \frac{|\alpha_i(s)|^2}{2} + f(\mu_s^N)\, ds + g(y_i(T)), \quad \mu_s^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{y_1(s)} + \ldots + \delta_{y_N(s)}\big).$$

Предположим, что N столь велико, что изменением меры μ_s^N в следствии изменения траектории одного из игроков можно пренебречь. Пусть $(\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \ldots, \widehat{\alpha_N})$ — положение равновесия Нэша и $(\widehat{y_1}, \widehat{y_2}, \ldots, \widehat{y_N})$ — соответствующие траектории игроков. Функция $\widehat{\alpha_i}$ является решением задачи оптимального контроля, в которой требуется найти управление α, на котором достигается минимум функционала

$$\alpha \to \int_t^T \frac{|\alpha(s)|^2}{2} + f(\mu_s^N)\, ds + g(y(T)), \quad \mu_s^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{\widehat{y_1}(s)} + \ldots + \delta_{\widehat{y_N}(s)}\big).$$

Пусть функция $u \in C^1$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$-u_t + \frac{1}{2}|u_x|^2 = f(\mu_t^N)$$

с условием $u(x, T) = g(x)$. Известно, что $\alpha(t) = -u_x(y(t), t)$, где y — решение задачи Коши $y' = -u_x(y, t)$, $y(0) = x$, является оптимальным контролем. Следовательно, можно считать, что для $\widehat{y_i}$ выполнено $y_i' = -u_x(y_i, t)$, $y_i(0) = x_i$. Тогда можно показать (и это будет сделано на следующих лекциях), что μ_t является решением уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t^N - \partial_x\big(u_x \mu_t^N\big) = 0.$$

Таким образом, для описания равновесия Нэша требуется решить следующую задачу *теории игр среднего поля*: найти пару (u, μ_t) решений системы уравнений

$$\begin{cases} -u_t + \frac{1}{2}|u_x|^2 = f(\mu_t), \\ \partial_t \mu_t - \partial_x\big(u_x \mu_t\big) = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющих условиям $u(x,T) = g(x)$, $\mu_0 = \nu$.

Если в уравнение $y' = \alpha$ добавить стохастическое слагаемое, то в уравнениях теории игр среднего поля появятся слагаемые с производными второго порядка. Исследование систем уравнений такого вида является одной из центральных задач теории игр среднего поля.

Так как в рассматриваемых задачах существенно используются свойства вероятностных мер, то мы в начале курса обсудим некоторые свойства пространства вероятностных мер и слабой сходимости.

Вероятностные меры

Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство.

Вероятностной мерой μ на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ называется отображение $\mu\colon \mathcal{B} \to [0,1]$, удовлетворяющее двум условиям: 1) $\mu(X) = 1$ и 2) μ — сигма аддитивно, т.е. $\mu(\sqcup_i B_i) = \sum_i \mu(B_i)$, где $\sqcup_i B_i$ — объединение попарно непересекающихся множеств.

Сигма-аддитивность μ равносильна непрерывности относительно объединений и пересечений вложенных множеств: если $B_n \subset B_{n+1}$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_i B_i)$, а если $B_{n+1} \subset B_n$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\cap_i B_i)$.

Из свойства непрерывности немедленно следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой шар $B(0,R)$, что $\mu(B(0,R)) \geq 1 - \varepsilon$.

Предложение 1. *Пусть μ — вероятностная мера на X. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K_ε, что*

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\{s_n\}$ — счетное всюду плотное множество в X. Для каждого натурального числа k имеет место равенство

$$X = \cup_n \overline{B}(s_n, 2^{-k}).$$

Следовательно, найдется n_k, для которого $\mu(F_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$, где $F_k = \cup_{n=1}^{n_k} \overline{B}(s_n, 2^{-k})$. Множество $K_\varepsilon = \cap_k F_k$ замкнуто и для каждого $\delta > 0$ имеет конечную δ – сеть. Следовательно, K_ε является компактом. Более того,

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \sum_k \mu(X \setminus F_k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

□

Предложение 2. *Пусть μ — вероятностная мера на X. Для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F и открытое множество U, для которых выполняются условия:*

$$F \subset B \subset U, \quad \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Доказательство. Если B — замкнутое множество, то $F = B$ и

$$U = B^{1/n} = \{x\colon \mathrm{dist}d(x,B) < 1/n\}$$

для достаточно большого n. Рассмотрим теперь семейство E всех борелевских множеств B, для которых для всякого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое множество U, удовлетворяющие условиям $F \subset B \subset U$, $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Семейство E является сигма-алгеброй и содержит все замкнутые множества. Следовательно, оно совпадает с борелевской сигма-алгеброй. $\square$

Следствие 1. *Если две вероятностные меры μ и σ совпадают на всех замкнутых (открытых) множествах, то они совпадают на всех борелевских.*

Следствие 2. *Пусть μ и σ — вероятностные меры. Если для всякой функции $\varphi \in C_b(X)$ верно равенство*

$$\int \varphi\, d\mu = \int \varphi\, d\sigma,$$

то $\mu = \sigma$ на $\mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество. Покажем, что $\mu(F) = \sigma(F)$. Пусть $\delta > 0$ и I_F — индикатор множества F. Положим $\psi_\delta(t) = 1$ при $t \le 0$, $\psi_\delta(t) = 1 - \frac{t}{\delta}$ при $0 \le t \le \delta$ и $\psi_\delta(t) = 0$ при $t \ge \delta$. Ясно, что

$$\lim_{\delta \to 0} \psi_\delta(\mathrm{dist}(x, F)) = I_F(x).$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int \psi_\delta(\mathrm{dist}(x, F))\, d\mu = \int I_F(x)\, d\mu = \mu(F).$$

Аналогичные равенства верны для σ. Остается заметить, что функция $\psi_\delta(\mathrm{dist}(x, F))$ ограничена и непрерывна. На самом деле это липшицева функция. $\square$

Следствие 3. *Пусть μ и σ — вероятностные меры на $X = \mathbb{R}^d$. Если для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство*

$$\int \varphi\, d\mu = \int \varphi\, d\sigma,$$

то $\mu = \sigma$ на $\mathcal{B}$.

Доказательство. Достаточно непрерывную ограниченную функцию приблизить гладкими функциями с компактным носителем, а это можно сделать с помощью умножения на «срезающую» функцию и свертки с гладким ядром. $\square$

Носителем меры $spt(\mu)$ называется множество всех таких x, что $\mu(B(x,r)) > 0$ для всякого шара $B(x,r)$. Носитель меры является замкнутым множеством.

Пусть $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — абстрактные измеримые пространства, отображение $f\colon X \to Y$ измеримо относительно сигма алгебр $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Y$ и μ — вероятностная мера на $(X, \mathcal{A}_X)$. Тогда на $(Y, \mathcal{A}_Y)$ определена вероятностная мера $\mu \circ f^{-1}$, заданная равенством

$$\mu \circ f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Верна следующая абстрактная формула замены переменной.

Теорема 1. *Для всякой функции $g\colon Y \to \mathbb{R}$, измеримой относительно $\mathcal{A}_Y$, выполняется равенство*

$$\int_Y g(y)\, d\mu \circ f^{-1} = \int_X g(f(x))\, d\mu,$$

в котором существование одного из интегралов влечет существование другого.

Доказательство. В силу определения интеграла Лебега равенство достаточно проверить для индикатора $g(y) = I_B(y)$:

$$\int_Y I_B(y)\, d\mu \circ f^{-1} = \mu \circ f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \int I_B(f(x))\, d\mu.$$

$\square$

В заключение данного раздела приведем без доказательство полезное обобщение теоремы Фубини.

Теорема 2. *Пусть μ — вероятностная мера на $X \times Y$, где X и Y — полные сепарабельные метрические пространства. Тогда существует такое семейство вероятностных мер μ^y на X, что $y \to \mu^y(B)$ — измеримая функция для всякого борелевского множества B и для всякой измеримой функции f на $X \times Y$ верно равенство*

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\, \mu(dxdy) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, \mu^y(dx) \Big)\, \mu_Y(dy),$$

где μ_Y — проекция меры μ на Y, т.е. $\mu_Y(B) = \mu(X \times B)$.

Меры $\{\mu^y\}$ называют условными мерами.

Слабая сходимость

Последовательность вероятностных мер μ_n слабо сходится к μ, если для всякой ограниченной непрерывной функции φ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_n = \int \varphi\, d\mu.$$

Из доказанного выше следует, что предельная мера μ определена однозначно.

Важнейшим утверждением о слабой сходимости является теорема Ю.В.Прохорова.

Напомним, что мы рассматриваем вероятностные меры на полном сепарабельном метрическом пространстве X.

Теорема 3. *Если последовательность вероятностных мер μ_n слабо сходится к вероятностной мере μ, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K_ε, что*

$$\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall n.$$

Обратно, если последовательность вероятностных мер μ_n удовлетворяет этому условию, то существует слабо сходящаяся подпоследовательность μ_{n_k}.

Следствие 4. *Последовательность мер μ_n на $\mathbb{R}^d$ сходится слабо к вероятностной мере μ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_n = \int \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Доказательство. Пусть $\psi_N(x) = \psi(x/N)$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\psi(x) = 0$ при $|x| > 2$. Так как $\psi_N(x) \to 1$ при $N \to \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, при котором

$$\int \psi_N\, d\mu \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда найдется такое n_0, что для всех $n > n_0$ верны оценки

$$\mu_n(\overline{B}(0,2N)) \geq \int \psi_N\, d\mu_n \geq 1 - \varepsilon.$$

По теореме Прохорова во всякой подпоследовательности μ_{n_j} существует дальнейшая подпоследовательность $\mu_{n_{j_k}}$, которая слабо сходится к некоторой вероятностной мере $\widetilde{\mu}$. Так как интегралы от φ по μ и по $\widetilde{\mu}$ совпадают для всякой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то $\mu = \widetilde{\mu}$. Следовательно, μ_n слабо сходится к μ. $\square$

Следствие 5. *Пусть* $V \in C(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$. *Предположим, что для последовательности вероятностных мер* μ_n *на* $\mathbb{R}^d$ *выполняется неравенство*

$$\sup_n \int V(x)\,d\mu_n < \infty.$$

Тогда существует слабо сходящаяся подпоследовательность μ_{n_j}.

Доказательство. Достаточно применить неравенство Чебышёва:

$$\mu_n\Big(\{x\colon\ V(x) > R\}\Big) \leq \frac{1}{R}\int V(x)\,d\mu_n.$$

□

Метрика Канторовича–Рубинштейна

Пусть $X = \mathbb{R}^d$, а μ и σ — вероятностные меры на X. Величина

$$d_{KR}(\mu,\sigma) = \sup\Big\{\int \varphi\,d(\mu-\sigma)\colon\ |\varphi(x)| \leq 1, |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq |x-y|\Big\}$$

называется метрикой Канторовича–Рубинштейна.

Теорема 4. *Функция* $(\mu,\sigma) \to d_{KR}(\mu,\sigma)$ *является метрикой на пространстве вероятностных мер* $\mathcal{P}(X)$ *и задает слабую сходимость.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $d_{KR}(\mu_n,\mu) \to 0$, то

$$\Big|\int \varphi\,d\mu_n - \int \varphi\,d\mu\Big| \leq (\max|\varphi| + \max|\nabla\varphi|)d_{KR}(\mu_n,\mu)$$

и интегралы от φ по μ_n сходятся к интегралу от φ по μ. Следовательно, μ_n сходится слабо к μ.

Предположим, что последовательность μ_n сходится слабо к μ. Тогда существует такой компакт K_ε, что $\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ для всех μ_n и $\mu(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$. Семейство функций

$$\Phi = \{\varphi\colon |\varphi| \leq 1, \quad |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq |x-y|\}$$

является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным семейством функций в $C(K_\varepsilon)$. По теореме Арцела–Асколи это семейство является вполне ограниченным. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_M$ — ε-сеть множества Φ. Пусть N таково, что для всех $n > N$ и для всех $1 \leq i \leq M$ верна оценка

$$\Big|\int \varphi_i\,d\mu_n - \int \varphi_i\,d\mu\Big| \leq \varepsilon.$$

Пусть φ — произвольная функция из Φ. Для некоторой функции φ_i верно неравенство $|\varphi(x)-\varphi_i(x)| \leq \varepsilon$ при $x \in K_\varepsilon$. Так как

$$\int \varphi\,d(\mu_n-\mu) \leq \int \varphi_i\,d(\mu_n-\mu) + \int_{X\setminus K_\varepsilon} (\varphi-\varphi_i)\,d(\mu_n-\mu) + \int_{K_\varepsilon} (\varphi-\varphi_i)\,d(\mu_n-\mu),$$

то

$$\int \varphi\,d(\mu_n-\mu) \leq 7\varepsilon.$$

Получаем, что $d_{KR}(\mu_n,\mu) \leq 7\varepsilon$ для всех $n > N$, т.е. $d_{KR}(\mu_n,\mu) \to 0$. □

Можно показать, что $\mathcal{P}(X)$ с метрикой d_{KR} является полным сепарабельным метрическим пространством.