Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко

10 февраля 2015 г.

В этом параграфе мы докажем теорему, которой пользовались в этом семестре уже много раз — *теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения.*

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ определена на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на Ω и липшицева по переменной x с константой Липшица L при любом фиксированном значении t:*

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leqslant L|x-y|.$$

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ уравнение (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет единственное локальное решение.

Следствие 2. *В частности, для линейных уравнений $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ с непрерывной правой частью локальное решение существует и единственно. Действительно, правая часть при фиксированном t — линейная функция, а потому липшицева.*

В основе доказательства существования решения лежит метод Пикара (метод Пикара-Линделёфа), который позволяет приближённо находить решения уравнения (1). Этот метод описан в разделе 1.2.3 на примере уравнения $\dot{x} = x$; здесь мы кратко напомним его.

Метод Пикара

Заметим, что дифференциальное уравнение (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{2}$$

Упражнение 1. *Докажите это. Откуда следует, что функция $x(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению, непрерывна? Дифференцируема?*

Рассмотрим оператор A, который функцию ϕ переводит в функцию $(A\phi)$:

$$(A\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi(\tau))d\tau. \tag{3}$$

Тогда искомое решение дифференциального уравнения — это неподвижная точка оператора A.

Метод Пикара заключается в том, чтобы искать эту неподвижную точку как предел последовательности ϕ_n:

$$\phi_0(t) \equiv x_0, \quad \phi_1 = A\phi_0, \quad \phi_2 = A\phi_1, \ldots$$

Наша задача — доказать, что такой метод работает в общем случае.

Мы приведем два доказательства теоремы 1. Для первого из них нам понадобится понятие полного метрического пространства и принцип сжимающих отображений.

1 Напоминание: полные метрические пространства и принцип сжимающих отображений.

Материал этого раздела полностью или частично содержался в курсе математического анализа. Читатель, знакомый с принципом сжимающих отображений в полном метрическом пространстве, может его пропустить.

Метрическое пространство — это множество X, на котором определено расстояние $d(x, y)$ между его точками $x, y \in X$.

Определение 3. Пара (X, d) из множества X и функции $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется *метрическим пространством* с метрикой d, если функция d удовлетворяет следующим условиям.

- симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$.
- положительность: $d(x, y) \geqslant 0$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y$.
- неравенство треугольника: $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.

В метрических пространствах можно ввести определение сходящейся и фундаментальной последовательностей, дословно повторяющие аналогичные определения для отрезка.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *сходящейся* к точке a, если $d(x_n, a) \to 0$: другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной*, если с некоторого места точки последовательности близки друг к другу:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Упражнение 2. *Докажите, что у последовательности точек метрического пространства может быть не более одного предела.*

Упражнение 3. *Докажите, что сходящаяся последовательность обязательно фундаментальна.*

Упражнение 4. *Приведите пример метрического пространства, в котором есть фундаментальная, но не сходящаяся последовательность.*

Указание: если из метрического пространства выкинуть несколько точек, то свойство фундаментальности последовательности не нарушится, а вот предел может исчезнуть.

Как известно, фундаментальная последовательность вещественных чисел (а также точек $\mathbb{R}^n$) всегда имеет предел. Это свойство выполнено для достаточно широкого класса метрических пространств.

Определение 5. Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность точек этого пространства имеет предел.

Упражнение 5. *Являются ли*

1. $(\mathbb{R}^2, d)$, *где* $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;
2. $(\mathbb{R}^2, d)$, *где* $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$;
3. $(\mathbb{N}, d)$, *где* $d(n, m) = \frac{|n-m|}{1+|n-m|}$ *(заметьте, что* $d(n, m) \leqslant 1$, *то есть все натуральные числа лежат внутри некоторого единичного шара).*
4. (X, d), *где* $X = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| < 1\}$, $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$ *(здесь* $\|\cdot\|$ *— обычная евклидова норма)*

метрическими пространствами? полными метрическими пространствами?

Теорему 1 мы будем доказывать с помощью принципа сжимающих отображений.

Определение 6. Отображение A метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если для некоторой константы $\alpha, 0 < \alpha < 1$, выполнено

$$d(Ax, Ay) < \alpha d(x, y). \tag{4}$$

Предложение 7 (Принцип сжимающих отображений)**.** *Любое сжимающее отображение A полного метрического пространства X в себя имеет единственную неподвижную точку x, $Ax = x$.*

Доказательство. Если неподвижных точек хотя бы две — x и y, то $d(Ax, Ay) = d(x, y)$, и неравенство (4) не выполнено.

Докажем, что неподвижная точка существует. Возьмём произвольную точку $x_0 \in X$ и последовательность её образов $\{x_n\}$ под действием A: $x_n = Ax_{n-1}$. Покажем, что предел этой последовательности является неподвижной точкой.

Действительно, этот предел существует: ведь для любых $n < m$

$$d(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1)\alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant d(x_0, x_1)\frac{\alpha^n}{1-\alpha},$$

а это стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Значит, она сходится к некоторой точке x.

Покажем, что x — неподвижная точка A. Действительно, $d(x_{n+1}, Ax) \leqslant \alpha d(x_n, x)$, и $d(x_n, x) \to 0$; значит, $d(x_{n+1}, Ax) \to 0$. Отсюда следует, что $x_n \to Ax$. Так как у последовательности может быть только один предел, то $Ax = x$. □

2 Доказательство теоремы 1 с помощью принципа сжимающих отображений.

В этом разделе мы приведем первое доказательство теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Оно основано на том, что оператор A, определенный формулой (3), — сжимающий. Точнее, он сжимает на некотором подмножестве пространства $C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon])$ для правильно выбранного ε и правильно выбранной метрики в пространстве $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$.

Ключевую роль играет такая оценка:

$$\|A\phi(t) - A\psi(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L\|\phi(\tau) - \psi(\tau)\| d\tau \leqslant L|t - t_0| \max_{\tau \in [t_0, t]} \|\phi(\tau) - \psi(\tau)\| \tag{5}$$

(здесь $\|\cdot\|$ — обычная евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$). Она подсказывает, что в качестве метрики можно взять такое расстояние между непрерывными функциями: для $\phi, \psi \in C([a, b])$

$$d(\phi, \psi) = \max_{[a,b]} \|\phi(t) - \psi(t)\|. \tag{6}$$

Эта метрика называется *метрикой равномерной сходимости*; следующее упражнение мотивирует это название.

Упражнение 6. *Последовательность функций сходится в метрическом пространстве* $(C[a, b], d)$ *тогда и только тогда, когда она равномерно сходится.*

Следующее утверждение было доказано в курсе математического анализа. Оно называлось «критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций».

Предложение 8. *Пространство непрерывных функций* $C([a, b])$ *с метрикой* (6) *полно. Другими словами, фундаментальная (относительно метрики* (6)*) последовательность функций равномерно сходится.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $\{f_n\}$ фундаментальна. Тогда для любого t последовательность $f_n(t)$ тем более фундаментальна, ведь $|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \max|f_n(t) - f_m(t)| = d(f_n, f_m)$. Значит, при фиксированном t числовая последовательность $f_n(t)$ сходится; её предел обозначим $f(t)$. Осталось заметить, что

$$|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(t) - f_m(t)|, \text{ и } |f_n(t) - f_m(t)| \leqslant d(f_n, f_m),$$

поэтому оценка на разность $|f_n(t) - f(t)|$ не зависит от t. Значит, последовательность функций f_n равномерно сходится к f. Функция f непрерывна как равномерный предел непрерывных функций, поэтому принадлежит пространству $C([a, b])$. □

Теперь опишем множество, на котором оператор A сжимает. Рассмотрим такое компактное множество Π, что $(t_0, x_0) \in \Pi \subset \Omega$, и положим $M = \max_\Pi \|f\|$. Рассмотрим настолько малое ε, что

1. $L\varepsilon < 1$;

2. конус $K_{(t_0,x_0)} = \{(t, x) \mid |t - t_0| < \varepsilon, \|x - x_0\| \leqslant M|t - t_0|\}$ содержится в Π.

В качестве пространства, на котором будет действовать A, возьмём пространство Ξ непрерывных функций, графики которых лежат в конусе $K_{(t_0,x_0)}$:

$$\Xi = \{\phi \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \mid \|\phi(t) - x_0\| \leqslant M|t - t_0|\}.$$

Заметим, что любое решение $x(t)$ дифференциального уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, определенное на отрезке $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, принадлежит пространству Ξ. Действительно, производная функции $x(t)$ равна $f(t, x)$, поэтому её норма не превосходит M; значит, $\|x(t) - x_0\| \leqslant M|t - t_0|$.

Упражнение 7. *Проверьте, что множество $\Xi \subset C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ с метрикой* (6) *полно.*

Указание: по предыдущему предложению, любая фундаментальная последовательность в этом множестве имеет предел из $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$. Осталось доказать, что этот предел лежит в Ξ, то есть что график предельной функции не может выйти за пределы конуса $K_{(t_0,x_0)}$.

Проверим, что A отображает пространство Ξ в себя и сжимает. Сначала надо проверить, что значение $A\phi$ определено, то есть что значение $f(\tau, \phi(\tau))$ определено для любого $\tau \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Это следует из того, что все точки графика функции ϕ лежат в конусе $K_{(t_0,x_0)} \subset \Pi \subset \Omega$, на котором f определено. Теперь проверим, что $A\phi \in \Xi$. Понятно, что $A\phi$ — непрерывная функция переменной t; неравенство

$$\|A\phi(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \right\| \leqslant M|t - t_0|,$$

показывает, что график функции $A\phi$ лежит в конусе $K_{(t_0,x_0)}$. Итак, $A\phi \in \Xi$. В силу неравенства (5), $d(A\phi, A\psi) \leqslant d(\phi, \psi)L\varepsilon$, поэтому A сжимает.

По теореме о сжимающем отображении, оператор A имеет единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка и является локальным (определённым на $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$) решением уравнения (1). Заодно мы доказали, что на достаточно малой окрестности точки t_0 решение уравнения (1) единственно. Теорема 1 доказана.

Величина ε определяется из требований $L\varepsilon < 1$ и $K_{(t_0,x_0)} \subset \Pi$. В частности, если цилиндр $\Pi = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_b(x_0)$ содержится в Ω, и $M = \max_\Pi \|f\|$, то в качестве ε можно взять

$$\varepsilon = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}). \tag{7}$$

3 Другое доказательство теоремы 1.

3.1 Существование решения

Другой способ доказывать существование решения дифференциального уравнения — это исследовать саму последовательность итераций $\phi_0 \equiv x_0, \phi_1 = A\phi_0, \ldots$ и доказывать, что эта последовательность сходится. Размер окрестности $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, на которой мы ищем решение, определим из условия $\varepsilon = \min(a, \frac{b}{M})$, где a и b удовлетворяют соотношению $\Pi = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_b(x_0) \subset \Omega$ и $M = \max_\Pi \|f\|$. Заметим, что этот размер больше, чем в предыдущем разделе, и не зависит от значения L.

Докажем, что все функции $\phi_n(t) = A^n\phi_0$ определены, то есть значение $f(\tau, \phi_n(\tau))$ определено при любом $\tau \in [t_0, t]$. Достаточно показать, что $(\tau, \phi_n(\tau)) \in \Pi$: ведь $\Pi \subset \Omega$, а функция f определена на Ω. Утверждение $(\tau, \phi_n(\tau)) \in \Pi$ мы докажем по индукции. База ($n = 0$) очевидна; пусть $(\tau, \phi_{n-1}(\tau)) \in \Pi$, тогда

$$\|\phi_n(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} f(v, \phi_{n-1}(v))dv \right\| \leqslant |\tau - t_0|M \leqslant \varepsilon M \leqslant b,$$

откуда $(\tau, \phi_n(\tau)) \in \Pi$. Переход индукции доказан.

Чтобы доказать, что последовательность $\{\phi_n\}$ сходится, нам понадобится такая оценка:

Лемма 9. *При* $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ *выполнено*

$$\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leqslant M \frac{L^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}.$$

Заметим, что тот факт, что A сжимает (см. предыдущий раздел), позволяет получить более слабую оценку $\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \leqslant ML^n|t - t_0|^{n+1}$.

Доказательство. Будем считать, что $t > t_0$; в случае $t < t_0$ доказательство аналогично. Утверждение мы докажем индукцией по n. Для $n = 0$ имеем $\|\phi_1(t) - \phi_0(t)\| \leqslant \| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0)d\tau\| \leqslant M(t - t_0)$, что и требовалось. Пусть утверждение уже доказано для $n = k - 1$, тогда для $n = k$ получаем

$$\|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi_k(\tau)) - f(\tau, \phi_{k-1}(\tau))d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant L \int_{t_0}^{t} \|\phi_k(\tau) - \phi_{k-1}(\tau)\|d\tau \leqslant L \cdot M \frac{L^{k-1}}{k!} \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^k d\tau = M \frac{L^k}{(k+1)!} (t - t_0)^{k+1}.$$

В последнем неравенстве мы применили предположение индукции. □

Из этой леммы следует, что последовательность функций $\phi_n(t)$ равномерно сходится на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Действительно, легко оценить $\max_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \|\phi_n(t) - \phi_m(t)\|$ и убедиться, что эта величина стремится к нулю, когда n и m независимо стремятся к бесконечности. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 8 и получить, что существует равномерный предел $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(t)$.

Докажем, что он удовлетворяет уравнению (2). Заметим, что

$$\max_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \|f(t, \phi_n(t)) - f(t, x(t))\| \leqslant L \max_{t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]} \|\phi_n(t) - x(t)\|,$$

поэтому $f(t, \phi_n(t))$ равномерно сходится к $f(t, x(t))$. Перейдем к пределу в равенстве

$$\phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi_n(\tau))d\tau,$$

пользуясь тем, что под знаком интеграла можно переходить к равномерному пределу. Мы получим, что функция $x(t)$ удовлетворяет равенству (2).

3.2 Единственность локального решения

С помощью таких же соображений, как и в лемме 9, можно доказать и единственность локального решения дифференциального уравнения. Действительно, пусть x и y — два разных решения уравнения (1), определенных на отрезке $[t_0, t_0 + c]$. По индукции можно доказать такую оценку:

$$\|A^n x(t) - A^n y(t)\| \leqslant L^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} \max_{[t_0,t_0+c]} \|x(t) - y(t)\|. \quad (8)$$

База индукции ($n=0$) очевидна. Переход следует из такого неравенства:

$$\|A^{n+1}x(t)-A^{n+1}y(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f(\tau, A^n x(\tau)) - f(\tau, A^n y(\tau))d\tau\right\| \leqslant$$
$$\leqslant L\int_{t_0}^{t}\|A^n x(\tau)-A^n y(\tau)\|d\tau \leqslant L\frac{L^n}{n!}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^n d\tau \quad \max_{[t_0,t_0+c]}\|x(t)-y(t)\| =$$
$$= \frac{L^{n+1}}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}\max_{[t_0,t_0+c]}\|x(t)-y(t)\|. \quad (9)$$

Но правая часть равенства (8) стремится к нулю при $n\to\infty$, а левая часть равна $\|x(t)-y(t)\|$, так как $Ax=x$, $Ay=y$. Противоречие.

4 Уточнения теоремы существования и единственности и их следствия.

4.1 Теорема о непрерывной зависимости от начальных условий

Допустим, некоторое дифференциальное уравнение описывает какой-нибудь процесс в природе — например, изменение температуры воздуха. Что, если начальное условие известно нам неточно (с точностью до 0.001 градуса Цельсия)? Насколько сильно мы можем ошибиться в прогнозе температуры?

Первый, достаточно грубый ответ на этот вопрос дает теорема о непрерывной зависимости от начальных условий. Она утверждает, что если достаточно точно померить начальное условие, то можно добиться любой наперед заданной точности прогноза[1]. Более точный ответ — производную решения по начальному условию — можно получить с помощью уравнения в вариациях, которое мы обсудим в следующем семестре.

Пусть $x(t,t_0,x_0)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$.

Теорема 10 (Локальная теорема о непрерывности фазового потока)**.** *В условиях теоремы 1 для любой точки $(t_0,x_0)\in\Omega$ существует её окрестность $\tilde{\Pi}$ и $\varepsilon>0$, такие, что отображение $(t,t_0,x_0)\mapsto x(t,t_0,x_0)$ определено на $[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\times\tilde{\Pi}$ и непрерывно по совокупности переменных.*

Доказательство. Пусть a,b таковы, что $\Pi_{a,b}=[t_0-a,t_0+a]\times B_b(x_0)\subset\Omega$. Пусть $M=\max_{\Pi_{a,b}}\|f\|$. Возьмем маленькое δ, например,

$$\delta=\min\left(\frac{a}{3},\frac{b}{2(M+1)},\frac{1}{2L}\right). \quad (10)$$

Пусть $\tilde{\Pi}=B_\delta((t_0,x_0))$.

Для начальной точки $(t_0',x_0')\in\tilde{\Pi}$ мы имеем $\varepsilon=\min(a-\delta,\frac{b-\delta}{M},\frac{1}{L})$ (по формуле (7)), так как параллелепипед $\Pi_{a-\delta,b-\delta}$ с центром в точке (t_0',x_0') лежит в Ω. Значит, соответствующее решение определено на интервале $[t_0'-\varepsilon,t_0'+\varepsilon]\supset[t_0-\varepsilon+\delta,t_0+\varepsilon-\delta]$. Положим $\varepsilon'=\varepsilon-\delta$; заметим, что $\varepsilon'>0$ (именно здесь мы используем условие (10)).

Для каждого начального условия $(t_0',x_0')\in\tilde{\Pi}$ рассмотрим последовательность итераций $\phi_n(t)$ на отрезке $[t_0-\varepsilon',t_0+\varepsilon']$; обозначим её $\phi_n(t,t_0',x_0')$. Посмотрим на оценку из леммы 9. Из неё следует оценка

$$\|\phi_{n+1}(t,t_0',x_0')-\phi_n(t,t_0',x_0')\|\leqslant M\frac{L^n}{(n+1)!}(\varepsilon')^{n+1}.$$

Эта оценка не зависит от x_0',t_0'. Значит, сходимость $\phi_n(t,t_0',x_0')\to x(t,t_0',x_0')$ будет равномерна по t_0',x_0'. Но все функции $\phi_n(t,t_0',x_0')$ непрерывны по совокупности переменных. Действительно, для $\phi_0(t,t_0',x_0')=\equiv x_0'$ это очевидно, а для $\phi_{n+1}=A\phi_n$ — следует из теоремы о непрерывной зависимости интеграла от параметров t_0',x_0' и от переменного верхнего предела t.

Так как равномерный предел непрерывных функций непрерывен, функция $x(t,t_0,x_0)$ непрерывна по совокупности переменных. □

[1]Мы считаем, что наше уравнение абсолютно точно описывает процесс, и что решение уравнения вычисляется абсолютно точно. В действительности так, конечно, не бывает

Теорема 11 (Глобальная теорема о непрерывности фазового потока)**.** *В условиях теоремы 1 пусть* $x(t)$ *— решение уравнения* (1)*, причем* $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$*. Тогда существуют окрестности* $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$*, для которых отображение потока* $\Phi_{t_1,t_2} \colon U_1 \to U_2$ *— гомеоморфизм.*

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, чтобы представить отображение потока Φ_{t_1,t_2} в виде композиции локальных отображений потока $\Phi_{\tau_i,\tau_{i+1}}$, для каждого из которых применима предыдущая теорема.

Применим локальную теорему о непрерывности фазового потока для каждой точки $(t, x(t)), t \in [t_1, t_2]$. Получим, что каждому значению t соответствует своя окрестность I, для которой любое отображение потока $\Phi_{\tau,v}$, $\tau, v \in I$, непрерывно в окрестности точки $x(\tau)$. Из открытых интервалов I выберем конечное подпокрытие $\bigcup I_k$ отрезка $[t_1, t_2]$. Возьмём набор точек $\tau_k \in I_k \cap I_{k+1}$, $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < t_2$.

Заметим, что отображение потока Φ_{t_1,t_2} является композицией отображений $\Phi_{t_1,\tau_1} = x(\tau_1, t_1, \cdot)$, $\Phi_{\tau_1,\tau_2} = x(\tau_2, \tau_1, \cdot)$ и т.д. Каждое из этих отображений непрерывно по локальной теореме о непрерывности фазового потока. Значит, их композиция Φ_{t_1,t_2} тоже непрерывна в некоторой окрестности U_1 точки x_1.

Итак, Φ_{t_1,t_2} — непрерывное отображение U_1 на свой образ $\Phi(U_1) = U_2$. Это отображение инъективно: если под действием отображения потока две точки переходят в одну, то через эту одну точку проходят две интегральные кривые нашего уравнения, поэтому не выполнена теорема существования и единственности. Обратное отображение $\Phi^{-1}_{t_1,t_2}$ также непрерывно, так как оно совпадает с отображением потока Φ_{t_2,t_1}. Тем самым, Φ_{t_1,t_2} — гомеоморфизм. □

4.2 Теоремы о выходе за границу компакта. Область определения решения уравнения

Теорема о существовании и единственности решения уравнения не запрещает ситуацию, при которой решение определено только на некотором интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, а за точку $t_0 + \varepsilon$ не продолжается. Следующая теорема объясняет, в какой ситуации такое возможно. В частности, если на отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ значение решения находится внутри некоторого компакта, такого не происходит.

Теорема 12 (Теорема о выходе за границу компакта)**.** *В условиях теоремы 1, пусть* $K \subset \Omega$ *— компакт. Пусть* $(t_0, x_0) \in K$*. Тогда существует решение* $x(t)$ *уравнения* (1) *с начальным условием* $x(t_0) = x_0$*, которое выходит за границу* K*: для некоторого* $t_1 > t_0$

$$(t_1, x(t_1)) \notin K.$$

Доказательство. Заметим, что разные решения, в силу теоремы 1, могут отличаться только областью определения. Рассмотрим решение $x(t)$ с максимальной по включению областью определения, содержащейся в множестве $\{t \in \mathbb{R} \mid t > t_0\}$. Пусть это решение не выходит за границу компакта: для каждого $t > t_0$ либо $(t, x(t)) \in K$, либо $x(t)$ не определено.

Пусть $M = \max_K \|f\|$.

В каждой точке $(t, x) \in K$ рассмотрим цилиндр $C_{t,x,a,b} = [t - a, t + a] \times B_b(x)$, целиком лежащий в Ω. Уменьшим цилиндры вдвое и сделаем их открытыми. Мы получили открытое покрытие компакта K. Выберем из него конечное подпокрытие. Теперь у нас есть конечное количество цилиндров $C_{t_i,x_i,a_i/2,b_i/2}$, $i = 1, \ldots, N$, покрывающих K и таких, что вдвое большие цилиндры C_{t_i,x_i,a_i,b_i} лежат в Ω.

Пусть $a = \min a_i, b = \min b_i$. Каждая точка $(t_0', x_0') \in K$ лежит в каком-то цилиндре $C_{t_i,x_i,a_i/2,b_i/2}$, и поэтому цилиндр $C_{t_0',x_0',a/2,b/2} \subset C_{t_i,x_i,a_i,b_i}$ целиком лежит в Ω. Значит, решение с начальным условием $(t_0', x_0') \in K$ определено на отрезке $[t_0' - \varepsilon, t_0' + \varepsilon]$, где величина $\varepsilon = \min(a/2, \frac{b}{2M}, \frac{1}{L})$ не зависит от t_0', x_0'. Итак, область определения функции $x(t)$ вместе с любой точкой t_0' содержит её ε-окрестность, где ε фиксировано и не зависит от t_0'. Отсюда следует, что функция $x(t)$ определена на луче $t > t_0$. Но тогда график функции $x(t)$ — неограниченное множество, поэтому он не может содержаться в ограниченном множестве K. □

Следствие 13 (Теорема о выходе за границу компакта в автономном случае)**.** *Пусть автономное дифференциальное уравнение удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Пусть* $K \subset \mathbb{R}^n$ *— компактное подмножество фазового пространства. Тогда всякая фазовая кривая автономного уравнения либо выходит за границу компакта* K*, либо определена для всех* $t \in \mathbb{R}$*.*

Другими словами, если решение определено не на всей числовой оси, то оно уходит на бесконечность за конечное время.

Доказательство. Применим предыдущую теорему для компакта $[-C, C]\times K \subset \Omega$, C — произвольное вещественное число. Получим, что решение выходит за границу этого компакта. Это значит, что либо для некоторого t выполнено $x(t) \notin K$, либо $x(t)$ определено при некотором $t > C$.

В первом случае фазовая кривая выходит за границу K. Если для всех C реализуется второй случай, то решение определено для сколь угодно большого t. Значит, оно определено для всех $t > 0$.

То же самое рассуждение можно повторить для $t < 0$, если в уравнении формально заменить t на $-t$. $\square$

Следующее утверждение есть простое следствие теоремы 11.

Следствие 14. *В условиях теоремы 1, пусть $x(t)$ — решение уравнения* (1)*, определенное на отрезке* $[0, T]$*, с начальным условием $x(0) = x_0$. Тогда решение $\tilde{x}(t)$ с достаточно близким начальным условием $\tilde{x}_0$ тоже определено на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. По теореме 11, отображение потока Φ_{t_1,t_2} определено в окрестности $U_1 \ni x_0$. Это и означает, что решения с начальными условиями $\tilde{x} \in U_1$ определены на отрезке $[0, T]$. $\square$

Следующее утверждение дает достаточное условие того, что решение уравнения НЕ уходит на бесконечность за конечное время. Для этого правая часть уравнения должна быть невелика: тогда производная $\dot{x}$ тоже невелика, и решение не успевает уйти не бесконечность.

Предложение 15. *Пусть $\|f(t, \vec{x})\| \leqslant C(1 + \|\vec{x}\|)$. Тогда решение уравнения* (1) *определено при любом $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, чтобы доказать, что x растет не быстрее некоторой экспоненты e^{lt}. Как угадать, для какого l мы должны доказывать оценку? Не будем пока фиксировать l, а положим $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)\cdot e^{-lt}$, $l > 0$; тогда функция $\vec{y}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\vec{y}} = \dot{\vec{x}} \cdot e^{-lt} - l\vec{x} \cdot e^{-lt} = f(t, ye^{lt})e^{-lt} - ly. \qquad (11)$$

Посмотрим, как меняется $\|\vec{y}\|$; наша цель — подобрать l таким образом, чтобы $\|\vec{y}\|$ было ограничено. Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle y, y\rangle = \langle \dot{y}, y(t)\rangle = \langle f(t, x)\cdot e^{-lt}, y\rangle - l\langle y, y\rangle \leqslant C(1 + \|x\|)e^{-lt}\|y\| - l\|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\|y\| + C\|y\|^2 - l\|y\|^2.$$

При достаточно большом l это выражение отрицательно. Значит, $\|\vec{y}\|$ убывает, то есть фазовая кривая уравнения (11) не может выйти за границу компакта — шара радиуса $\|\vec{y}(0)\|$. Итак, $y(t)$ (а значит — и $x(t)$) определено при любом t. $\square$

Такая же выкладка позволяет оценить, на каком интервале $[-T, T]$ определено решение уравнения (при некоторых ограничениях на правую часть).

5 Уравнения, для которых задача Коши имеет несколько решений.

Если правая часть уравнения не липшицева, это не значит, что решение уравнения не существует. Но оно может не быть единственным (например, для уравнения $\dot{x} = |x|^{1/2}$ или $\dot{x} = x^{1/3}$). Верна следующая

Теорема 16 (Теорема Пеано)**.** *Пусть $\Pi \subset \Omega, \Pi = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$. Пусть $\max_\Pi \|f\| = M, \alpha = \min(a, \frac{b}{M})$. Тогда уравнение* (1) *с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет хотя бы одно решение, определенное на интервале* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Доказательство основано на построении последовательности функций, аналогичной последовательности ϕ_n: если бы эта последовательность сходилась, она сходилась бы к решению уравнения. В условиях теоремы Пеано эта последовательность уже не будет сходиться. Однако, если нам удастся выбрать из неё равномерно сходящуюся *подпоследовательность*, то предел этой подпоследовательности будет решением уравнения.

Поэтому естественно задать вопрос: *Пусть $f_k \in C[0,1]$. При каких условиях из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность?*

Видно, что это можно сделать не всегда.

Упражнение 8. *Докажите, что из последовательности $f_k(t) = \sin kt$ нельзя выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Следующая теорема даёт достаточное условие того, что из последовательности функций можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 17 (Теорема Арцела–Асколи). *Пусть последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$*

1. *ограниченна в совокупности:* $\sup |f_n(t)| < +\infty$*;*
2. равностепенно непрерывна*:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall n\, (|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon).$$

   Другими словами, достаточно близкие точки под действием всех функций f_n переходят в близкие.

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Выведем отсюда теорему Пеано.

Доказательство теоремы Пеано. Построим последовательность кусочно-линейных функций $\varphi_n(t)$ с помощью метода приближений Эйлера (см. раздел 1.2.2): точки излома кусочно-линейной функции $\varphi_n(t)$ — это точки $a < t_1 < \cdots < t_n < b,\ t_k - t_{k+1} = \frac{b-a}{n}$. Сгладим эти функции вблизи точек излома так, чтобы производная сглаженной функции оказалась монотонна, а разность между функцией и её сглаживанием стремилась к нулю с ростом n. Получим последовательность функций $\overline{\varphi}_n$. Наклон ломаных Эйлера ограничен величиной $\max \|f\|$, поэтому последовательность $\overline{\varphi}_n$ удовлетворяет теореме Арцела–Асколи. Выберем из неё равномерно сходящуюся подпоследовательность; её предел — $\varphi(t)$ — одно из решений дифференциального уравнения.

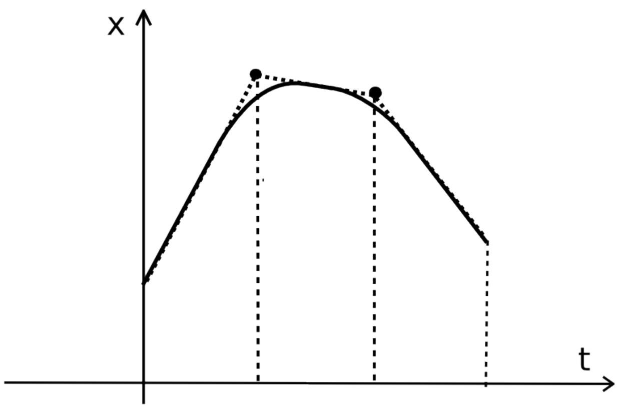

Рис. 1: Трёхзвенная ломаная Эйлера и её сглаживание

Действительно, производная кусочно-линейной функции φ_n на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ равна $\alpha_k := \varphi_n'(t) = f(t_k, \varphi_n(t_k))$. После сглаживания выполняется неравенство

$$\overline{\varphi}_n'(t) \in [\alpha_k, \alpha_{k-1}] \cup [\alpha_k, \alpha_{k+1}],$$

то есть
$$\overline{\varphi}_n'(t) \in [f(t_{k-1}, \varphi_n(t_{k-1})), f(t_k, \varphi_n(t_k))] \cup [f(t_k, \varphi_n(t_k)), f(t_{k+1}, \varphi_n(t_{k+1}))].$$
Так как функция f непрерывна, отрезки $[f(t_k, \varphi_n(t_k)), f(t_{k+1}, \varphi_n(t_{k+1}))]$ с ростом n сжимаются и стремятся к точке $f(t, \varphi(t))$ (так как точка $(t_k, \varphi_n(t_k))$ и точка $(t_{k+1}, \varphi(t_{k+1}))$ стремятся к точке $(t, \varphi(t))$). Поэтому
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),$$
что и требовалось. □

Более подробное доказательство (и доказательство теоремы Арцела–Асколи) можно найти в следующих книгах:

1. И. Г. Петровский, «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, «Элементы теории функций и функционального анализа».

3. Ф. Хартман, «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

В последней книге идея доказательства теоремы Пеано несколько другая: она состоит в том, чтобы построить последовательность гладких функций f_n, стремящихся к f, и сперва решить уравнения с правыми частями f_n, а потом рассмотреть предел таких решений.