Листок 3

Задача 1. Исследуйте задачу оптимального контроля

$$\inf_{\alpha}\Big\{\int_t^T L(y_x(s),\alpha(s))\,ds+g(y_x(T))\Big\},\quad \dot y_x=f(y_x(s),\alpha(s)), y_x(t)=x,$$

где

$$L(x,a)=c_1x^2+c_2a^2,\quad f(x,a)=c_3x+c_4a,\quad g(x)=c_5x^2,$$

по следующему плану: напишите соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби, найдите решение u с условием $u(x,T)=g(x)$, выпишите уравнение на оптимальное решение y_x.

Задача 2. В проблеме оптимального контроля из задачи 1 положим

$$f(x,a)=a,\quad L(x,a)=0,\quad g(x)=e^{-x^2},\quad a\in[-1,1].$$

Найдите функцию значения $u(x,t)$ и исследуйте ее на непрерывность и дифференцируемость.

Задача 3. В проблеме оптимального контроля из задачи 1 положим

$$f(x,a)=x^a,\quad L(x,a)=0,\quad g(x)=-x,\quad a\in[0,1].$$

Найдите функцию значения $u(x,t)$ и исследуйте ее на непрерывность и дифференцируемость.

Задача 4. Пусть u — вязкостное решение уравнения

$$u_t+H(x,t,u,\nabla u)=0$$

на $\mathbb{R}^d\times(0,T)$. Докажите, что $v(x,t)=e^{-\lambda t}u(x,t)$ является вязкостным решением уравнения

$$v_t+\lambda v+e^{-\lambda t}H(x,t,e^{\lambda t}u,e^{\lambda t}\nabla u)=0.$$

Задача 5. Пусть u — вязкостное решение уравнения

$$u_t+H(x,\nabla u)=0$$

на $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ и $u\in C(\mathbb{R}^d\times(0,T])$. Докажите, что если $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^{d+1})$ и $u-\varphi$ в точке (x_0,T) достигает локального максимума, то

$$\varphi_t(x_0,T)+H(x_0,\nabla\varphi(x_0,T))\le 0.$$

Задача 6. Докажите, что в определении вязкостного решения функцию $\varphi\in C^1(\Omega)$ можно заменить на $\varphi\in C^\infty(\Omega)$.

Задача 7. Уравнение

$$u+\frac{1}{2}|u'|^2=0$$

имеет классические решения $u\equiv 0$ и $u_s(x)=-\frac{1}{2}(x-s)^2$, где $s\in\mathbb{R}$. Докажите, что в классе ограниченных функций $u\equiv 0$ является единственным вязкостным решением.