Дадим альтернативное решение задачи 2 :

**Задача 2**

Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\omega}_i} x_i = C - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

.

Заметим, что наборы чисел $X = (x_1, \ldots, x_N)$ и $Y = (\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}})$ можно понимать как $N$-мерные евклидовы векторы в пространстве $R^N$. Соответственно, левая часть последнего равенства есть скалярное произведение X и Y, а функция $g(x_1, \ldots, x_N)$ есть $||X||^2$, где

$$||X|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$$

- это длина вектора X.

То есть наша задача заключается в том, чтобы минимизировать квадрат длины вектора $X$, удовлетворяющего условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\omega}_i} x_i = C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Но заметим, что данное условие означает, что вектор $X$ принадлежит гиперплоскости с нормалью $Y = (\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}})$ .

Последнее утверждение требует некоторых пояснений. Как известно, гиперплоскость- это линейная поверхность коразмерности один, то есть линейная оболочка $n - 1$вектора. Из линейной алгебры известно, что линейные пространства можно задавать системами линейных уравнений, причем если система имеет ранг $k$, то задаваемое ей пространство будет иметь размерность $n - k$. (это доказано на стр. 4 книги Шурыгина В.В, "Аналитическая геометрия, часть 3"). В нашем случае размерность пространства равна $n - 1$, поэтому для задания гиперплоскости в $n$-мерном пространстве требуется всего одно уравнение. Запишем его в виде $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c$. Согласно общей теории, это уравнение задает плоскость размерности n-1. Но с другой стороны, это уравнение можно переписать в виде $< a, x >= c$, то есть вектор a перпендикулярен всем векторам x из этой гиперплоскости. То есть a - вектор нормали к данной гиперплоскости.

Данное утверждение, сформулированное как "в ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором"доказано на стр. 99 учебника А.Е.Умнова "Аналитическая геометрия и линейная алгебра Москва, МФТИ, 2011.

Из курса линейной алгебры известно, что минимизирует расстояние от точки до гиперплоскости - перпендикуляр, опущенный из этой точки на гиперплоскость (это непосредственно следует из многомерной теоремы Пифагора).
Но перпендикуляр - это вектор, параллельный нормали к поверхности, а выше мы уже пояснили, что нормаль к нашей гиперплоскости - это вектор $Y$.

$\Rightarrow X = tY$, то есть $(x_1, \ldots, x_n) = t(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}})$

Подставим выражение для X в условие $(X, Y) = C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

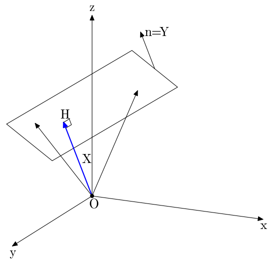
Получим $t||Y||^2 = C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

$\Rightarrow t^* = \frac{C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{||Y||^2} = \frac{C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}}$,

$\Rightarrow min||X||^2 = t^2||Y||^2 = t(t||Y||^2) = t(C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i) = \frac{(C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}}$

$\Rightarrow D_{min} = \sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \frac{(C - \sum\limits_{j=1}^{N} a_j)^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}$

s7014.1




May 5, 2020 at 1956 1

Рис. 1. Иллюстрация