О сходимости задач Майера, возникающих в теории финансовых рынков с транзакционными издержками

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Юрий Михайлович Кабанов

Артур Сидоренко
МГУ имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Теории вероятностей

4 мая 2022 г.

Обзор работ

- Истоки теории: оптимальное управление с транзакционными издержками рассматривалась в Magill и Constantinides, 1976, Davis и Norman, 1990 и Shreve и Soner, 1994.
- Геометрический подход к рынкам со многими активами описан в Kabanov и Safarian, 2009.
- В работе Bayraktar и др., 2020 рассмотрена следующая задача: дана последовательность процессов цен S^n, которая в некотором смысле сходится к S, требуется описать, при каких условиях решения задач портфельного инвестирования тоже будут сходиться

Постановка задачи

Используя результаты из Bayraktar и др., 2020 и геометрическую теорию рынков, получить результаты сходимости решений задач портфельного инвестирования для случая многих рисковых активов.

В двумерном случае (один рисковый актив и один безрисковый актив) типичный конус — сектор, ограниченный двумя лучами. Многомерные даже полиэдральные конусы устроены значительно сложнее.

Практическая значимость: модели портфельного инвестирования должны быть устойчивы относительно искажений в исходных данных, так как калибровка параметров моделей неидеальна.

Формулировка задачи максимизации

Модель рынка $\mathrm{M}(S, K)$ состоит из двух компонент:

- процесс цен $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ со значениями в $\mathbb{R}^d$ на неком стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$; актив 1 безрисковый: $S^{(1)} \equiv 1$;
- конус платежеспособности K.

Имеются последовательность моделей $\mathrm{M}^\mathrm{n} = \mathrm{M}^\mathrm{n}(S^n, K)$ и предельная модель $\mathrm{M}(S, K)$. Процессы S^n определены на своих стохастических базисах $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, P^n)$.

Процессы S^n и S положительны и имеют непрерывные траектории.

Формулировка задачи максимизации

Начальное состояние портфеля $x \in \operatorname{int} K$. Управление B — d-мерный процесс ограниченной вариации, $\dot{B} \in -K$. Управляемый процесс $\widehat{V}_t^{(i)} = x^{(i)} + (1/S^{(i)}) \cdot B_t^{(i)}$, а $V_t^{(i)} = S_t^{(i)} \widehat{V}_t^{(i)}$.
Требуется максимизировать по классу допустимых стратегий $\mathcal{A}(x)$ ожидаемую полезность

$$u(x) = u(x, S, K) := \sup_{B \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[U(\widehat{V}_T(x, B), S)].$$

Допустимость стратегии означает, что управляемый процесс $V \in K$. Другими словами, учитывается возможность разорения портфеля.

Основные предположения

- **A.1**. Условие, ограничивающее класс функций полезности U;
- **A.2**. Порождение фильтрации некоторым процессом Y^n для приближенных моделей и процессом Y для предельной модели, слабая сходимость (Y^n, S^n) к (Y, S);
- **A.3**. Аналог условия робастной безарбитражности;
- **A.4**. Расширенная слабая сходимость Y^n к Y.

Основной результат

Теорема

*В условиях **A.1–A.4***

$$\lim_{n\to\infty} u^n(x) = u(x)$$

для всех $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$.

Теорема

*В условиях **A.1–A.4** максимум* $u(x)$ *достигается на некоторой стратегии* $B \in \mathcal{A}(x)$.

Идея доказательства

Основные этапы доказательства такие же, как в Bayraktar и др., 2020.

- Полунепрерывность снизу: построить по стратегии из точной модели последовательность стратегий в приближенных моделях.
- Полунепрерывность сверху: по асимптотически оптимальной последовательности стратегий построить стратегию в предельной модели.

Список литературы I

Magill, M. J. & Constantinides, G. M. (1976). Portfolio selection with transactions costs. *Journal of economic theory*, *13*(2), 245—263.

Davis, M. H. & Norman, A. R. (1990). Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of operations research*, *15*(4), 676—713.

Shreve, S. E. & Soner, H. M. (1994). Optimal investment and consumption with transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, 609—692.

Kabanov, Y. & Safarian, M. (2009). *Markets with transaction costs: Mathematical Theory*. Springer Science & Business Media.

Bayraktar, E., Dolinskyi, L. & Dolinsky, Y. (2020). Extended weak convergence and utility maximisation with proportional transaction costs. *Finance and Stochastics*, *24*(4), 1013—1034.

Список литературы II

Jacod, J. & Shiryaev, A. (2013). *Limit theorems for stochastic processes* (T. 288). Springer Science & Business Media.

Спасибо за внимание

Применяемые методы

- Теория рынков с транзакционными издержками;
- Элементы выпуклого анализа;
- Теорема Скорохода;
- Топологии Скорохода и Мейера–Женга;
- Опциональная проекция.

Полунепрерывность снизу

Лемма

Если ***A.1*** *(i) выполнено, то u непрерывна на $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$.*

Предложение

Пусть ***A.1*** *и* ***A.2*** *выполнены. Пусть $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$. Тогда $u(x) \leq \liminf_n u^n(x)$.*

Модель рынка Ю.М. Кабанова

Используется модель из Kabanov и Safarian, 2009, глава 3.6.

- Временной горизонт $T > 0$, d активов, актив 1 безрисковый постоянной единичной ценой.
- Стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$, удовлетворяющий обычным условиям

Модель рынка Ю.М. Кабанова

Используется модель из Kabanov и Safarian, 2009, глава 3.6.

- Временной горизонт $T > 0$, d активов, актив 1 безрисковый постоянной единичной ценой.
- Стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$, удовлетворяющий обычным условиям
- Процесс цен $S = (S_t^1, \dots,)_{t=0}^T$, $S_t^i > 0$, траектории непрерывны, $S^1 = 1$, $S_0 = (1, \dots, 1)$.

Модель рынка Ю.М. Кабанова

- Замкнутый собственный выпуклый полиэдральный конус K, $\operatorname{int} K \supset \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$
- $K^* := \{w \in \mathbb{R}^d : wx \geq 0 \ \forall x \in K\}$ — двойственный конус, $K^* \subset \mathbb{R}^d_+$, $\operatorname{int} K^* \neq \varnothing$
- Конус K постоянный и детерминированный
- Конус в физических единицах $\widehat{K}_t := \varphi_t K$, где $\varphi_t : (x^1, ..., x^d) \mapsto (x^1/S^1_t, \dots, x^d/S^d_t)$. Тогда $\widehat{K}^*_t = \varphi_t^{-1} K^*$
- K и $\widehat{K}$ — конусы платежеспособности в денежных и физических единицах соответственно

Определение стратегии

- Непрерывный справа согласованный d-мерный процесс $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ ограниченной вариацией называется стратегией, если $\dot{B}_\tau \in -K$ для всех моментов остановки $\tau \le T$.
- Определим $\dot{B}$ как согласованный процесс такой, что $B = \dot{B} \cdot VarB$, где $VarB = \sum_{i=1}^d VarB^i$. Процесс $\dot{B}$ — аналог производной Радона–Никодима для B относительно $\mathrm{Var}B$ (Jacod и Shiryaev, 2013, Proposition I.3.13)
- Положим $B_{0-} = 0$, тогда $B(0)$ — мера в нуле.
- Физический смысл $B^i_{t_2} - B^i_{t_1}$ — изменение позиции по активу i в денежных единицах за промежуток $]t_1, t_2]$.

Управляемый процесс — активы в физических единицах

- $\cdot$ — обозначение интеграла Римана–Стилтьеса
- Для стратегии B и $x \in K$ определим процесс $\widehat{V} = \widehat{V}(x, B, S)$ с компонентами $\widehat{V}^{(i)} = x^{(i)} + (1/S^{(i)}) \cdot B^{(i)}$.
- Положим $V = (V_t^1, \dots, V_t^d)_{t=0}^T$ с $V^{(i)} = S^{(i)} \widehat{V}^{(i)}$.
- Физический смысл $\widehat{V}^i$ — количество актива i в физических единицах, V^i — количество актива i в денежных единицах.
- Мы не требуем, чтобы S был семимартингалом.

Допустимые стратегии

- Множество $\mathcal{A}(x)$ of допустимых стратегий состоит из таких B, что $\widehat{V}(x, B, S) \in \widehat{K}$, т.е. $\widehat{V}_t(x, B, S) \in \widehat{K}_t \; \forall t \in [0, T]$.
- $\mathcal{A}(x)$ выпукло
- $\mathcal{A}(y) \supseteq A(x)$ для $y - x \in K$
- $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) \; \forall \, \lambda > 0$
- Выполнено следующее условие

$$\alpha \mathcal{A}(x) + (1 - \alpha)\mathcal{A}(y) \subseteq \mathcal{A}(\alpha x + (1 - \alpha)y), \quad \forall \, \alpha \in [0, 1].$$

Идея доказательства

Пусть имеется допустимый процесс $B \in \mathcal{A}(x_\epsilon)$ в предельной модели, где $x_\epsilon = x - \epsilon 1$. Для этого процесса построим последовательность процессов $X^n \in \mathcal{A}^n(x)$ такую, что $\liminf_n \mathbb{E}[U(\widehat{V}^{x,C^n}, S^n)] \geq \mathbb{E}[U(\widehat{V}^{x_\epsilon,B}, S)]$.

- По теореме Скорохода, процессы $Y^n = (S^n, Y'^n)$ и $Y = (S^n, Y'^n)$ переопредяем на общем вероятностном пространстве так, чтобы $Y^n \to Y$ п.н. (с точностью до подпоследовательности)
- Процесс B приближается (в смысле $*$-слабой сходимости) кусочно-постоянным процессами B^m, которые имеют скачки в точках некого разбиения $t_1, \ldots, t_q$
- Скачки ΔB^m_{tj} приближаем (по метрике сходимости по вероятности) величинами вида $\psi^m_j(Y'_{s_1^{m,j}}, \ldots, Y'_{s^{m,j}_{p^{m,j}}})$

Идея доказательства

- В функции ψ_j^m могу подставить Y'^n вместо Y.
- Выбираю последовательность кусочно-постоянных процессов C^n, у которых скачки имеют вид $\Delta C^n_{tj} = psi^n(Y'^n_{s_1^n}, \ldots, Y'^n_{s^n_{p^n}})$
- Чтобы сделать стратегии C допустимыми, будем производить ликвидацию позиции
$\tau^n := \inf\{t \geq 0 : x_\epsilon + \frac{1}{S^n} \cdot C^n \notin \widehat{K}^n\} \wedge T$, т.е. берем стратегию

$$X^n := C^n I_{[0,\tau^n[} + \ell\left(S^n_{\tau^n-}(x_{\varepsilon/3} + \frac{1}{S^n} \cdot C^n_{\tau^n-})\right) e_1 I_{[\tau^n,\infty[}$$

Полунепрерывность сверху

Рассмотрим асимптотически оптимальную последовательность стратегий B^n, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{E}_{P^n}\left[U(\widehat{V}_T^{x,B^n}, S^n)\right] - u^n(x)\right) = 0.$$

Считаем, что $\lim_n u^n(x)$ существует, надо проверить $\lim_n u^n(x) \leq u(x)$, предъявив некоторую "предельную"стратегию B.

По теореме Скорохода на некотором общем пространстве $(Y^n, B^n) \to (Y, B)$ п.н. С точностью до подпоследовательности, $1/S^n \cdot B_T^n \to 1/S \cdot B_T$ и $\mathbb{E}U(x + 1/S^n \cdot B_T^n, S^n) \to \mathbb{E}U(x + 1/S \cdot B_T, S)$

Полунепрерывность сверху

Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}^Y$ и ${}^\circ B$ — опциональную проекцию. Доказывается, что это — допустимая стратегия и

$$\mathbb{E}_P[1/S \cdot B_T|\mathcal{F}_T^Y] = 1/S \cdot {}^\circ B_T.$$

По неравенству Йенсена,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[U(\widehat{V}_T^{x,B}, S)|\mathcal{F}_T^Y\right]\right] \le \mathbb{E}\left[U(\mathbb{E}[\widehat{V}_T^{x,B}|\mathcal{F}_T^Y], S)\right] = \mathbb{E}\left[U(\widehat{V}_T^{x,{}^\circ B}, S)\right].$$

Отсюда $u(x) = \mathbb{E}\left[U(\widehat{V}_T^{x,{}^\circ B}, S)\right]$

Топология Мейера–Женга

Рассмотрим пространство $\mathcal{D}([0,T],\mathbb{R}^d)$ траекторий, непрерывных справа и с пределами слева. Определим метрику

$$d_{MZ}(f,g)=\int_{[0,T[}\min(||f(s)-g(s)||_1,1)ds+||f(T)-g(T)||_1,$$

где $||x||_1=\sum_{j=1}^d |x^j|$.
В $\mathcal{D}^d_{MZ,T}:=(\mathcal{D}([0,T],\mathbb{R}^d),d_{MZ})$ множество $H_c=\{f\ :\ \mathrm{Var} f\le c\}$ компактно

Плотность мер для стратегий

Положим $\mathcal{N} := \mathcal{D}^d_T \times \mathcal{D}^l_T$

Предложение

Пусть верны ***A.2*** *и* ***A.3****. Фиксируем* $x \in \operatorname{int} K$*. Пусть* $B^n \in \mathcal{A}(x)$*,* $n \in \mathbb{N}$ *— последовательность допустимых стратегий. Тогда последовательность мер* $\mathcal{L}(Y^n, B^n | P^n)$ *на* $\mathcal{N} \times \mathcal{D}^d_{MZ,T}$ *плотна. Кроме того, любая предельная точка имеет вид* $\mathcal{L}(Y, B|P)$*, где* $B \in \mathcal{D}^d_{MZ,T}$*,* $Var B < \infty$*,* $\dot{B} \in -K$ *и* $\widehat{V}(x, B, S) \in \widehat{K}$*.*

Расширенная слабая сходимость и условная независимость

Лемма

*Пусть верны **A.2 – A.4**. В условиях предыдущего утверждения, любая предельная точка $\mathcal{L}(Y, B|P)$ имеет следующее свойство: если $\mathcal{F}^{Y',B}$ — обычная фильтрация, порожденная Y' и B, то $\mathcal{F}_t^{Y',B}$ и $\mathcal{F}_T^{Y'}$ условно независимы по $\mathcal{F}_t^{Y'}$: для любой ограниченной $\mathcal{F}_T^{Y'}$-измеримой с.в. Z_1 и ограниченной $\mathcal{F}_t^{Y',B}$-измеримой с.в. Z_2*

$$\mathbb{E}_P[Z_1 Z_2|\mathcal{F}_t^{Y'}] = \mathbb{E}_P[Z_1|\mathcal{F}_t^{Y}]\mathbb{E}_P[Z_2|\mathcal{F}_t^{Y}].$$

Кроме этого, $\mathbb{E}_P[Var B|\mathcal{F}_T^{Y'}] < \infty$.

Основные предположения

A.1. (i) Существуют непрерывные функции $m_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ с $m_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, и интегрируемая с.в. ζ такая, что для всех с.в. $X \in \widehat{K}_T$ and $\alpha > 0$

$$U((1-\alpha)X, S) \geq (1 - m_1(\alpha))U(X, S) + m_2(\alpha)\zeta.$$

(ii) Для всех $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$ и $B^n \in \mathcal{A}^n(x)$ $\{U(\widehat{V}_T(x, B^n, S^n), S^n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируемо.

Примеры для (i): $U(x, S) = (\ell(xS))^{1-\gamma}$, $U(x, S) = \ln(\ell(xS))$, где $\ell(x) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \colon x - \lambda e_1 \in K\}$ функция ликвидации. Физический смысл ℓ: количество безрискового актива, которое можно получить, ликвидируя все позиции.

Основные предположения

A.2. (i) Фильтрация $(\mathcal{F}_t^n)_{t\in[0,T]}$ — пополненная фильтрация, порожденная процессом $Y^n := (S^n, Y'^n)$, где Y'^n имеет траектории из $\mathcal{D}_T^l$;
$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ — пополненная фильтрация, порожденная процессом $Y := (S, Y')$, где Y' имеет траектории из $\mathcal{D}_T^l$. $(\mathcal{F}_t^n)_{t\in[0,T]}$ и $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ непрерывны справа. $\mathcal{F}_0^n$ и $\mathcal{F}_0$ порождены множествами нулевой меры.
(ii) Последовательность распределений $\mathcal{L}(Y^n|\mathrm{P}^n) \to \mathcal{L}(Y|\mathrm{P})$.

Основные предположения

Обозначим множество мартингалов $(M_t)_{t=0}^T$ со значениями из G как $\mathcal{M}_0^T(G)$. Положим $\phi_t^n(x) = \phi_t^n(x^1, \dots, x^d) = (x^1/S_t^{n,1}, \dots, x^d/S_t^{n,d})$, $\phi_t(x) = (x^1/S_t^1, \dots, x^d/S_t^d)$.

A.3. Существует постоянный полиэдральный конус G такой, что $\operatorname{int} G \supset K \setminus \{0\}$, $\mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^{n*} \setminus \{0\}) \neq \varnothing$ для всех n и $\mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^* \setminus \{0\}) \neq \varnothing$, где $\widehat{G}^{n*} = (\varphi^n)^{-1}(G)$ и $\widehat{G}^* = \varphi^{-1}(G)$.

- $M \in \mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^* \setminus \{0\})$ означает, что $M \neq 0$ — мартингал, $\phi_t(M_t) \in G^*$.
- В условиях предположения $G^* \subset K^*$.
- Мартингалы $M \in \mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^* \setminus \{0\})$ называются состоятельными ценовыми системами, само **A.3** может рассматриваться как усиленное требование безарбитражности

Основные предположения

A.3 (продолжение). Последовательность мер P^n контигуальна относительно $Q^n := Z^{n,1}P^n$ для некоторого $Z^n \in \mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^{n*} \setminus \{0\})$, т.е. $\forall A^n \in \mathcal{F}_T^n$ таких, что $Q^n(A^n) \to 0$, выполнено $P^n(A^n) \to 0$.

Основные предположения

A.4 Для процессов Y' верна расширенная слабая сходимость: для любой непрерывной ограниченной функции $\phi : \mathcal{D}([0, T], R^d) \to R$

$$\mathcal{L}(X^n, Y'^n | P^n) \to \mathcal{L}(X, Y' | P),$$

где X^n и X — версии мартингалов с RCLL траекториями

$$X_t^n = \mathbb{E}[\psi(Y'^n) | \mathcal{F}_t^n], \quad X_t = \mathbb{E}[\psi(Y') | \mathcal{F}_t]$$