Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Курсовая работа за 3 курс:
Об оптимальности основных принципов назначения премий

Выполнила: Александра Токаева, 309

Научный руководитель: проф. Г.И.Фалин

Москва
2020

Содержание

1. От автора **1**

2. Постановка задачи **1**

3. Пример 1 **3**

4. Четыре принципа назначения премий **3**

5. Общие результаты о случайных величинах **5**

5.1. Задача минимизации величины D 5

5.2. Альтернативное решение задачи минимизации величины D 9

5.3. Задача максимизации суммы $A_1 + \ldots + A_N$ 11

5.4. Альтернативное решение задачи максимизации суммы $A_1 + \ldots + A_N$ 13

6. Приложение полученных результатов к модели индивидуального риска **14**

6.1. Минимизация ожидаемой разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями при заданной вероятности разорения 15

6.2. Минимизация вероятности разорения при заданной взвешенной средней квадратичной разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями 16

7. Пример 2 **18**

8. Выводы и замечания **22**

9. Литература **22**

1. От автора

Задача назначения страховых премий и определения оптимальной цены для различных финансовых инструментов играет важнейшую роль в страховой математике, поскольку без правильно назначенной цены на продукт его нельзя продать и получить прибыль. Цель данной работы - подробно и основательно изучить этот раздел современной теории страхования, дать описание основных подходов к назначению премий и сделать определенные выводы. Наши рассуждения опираются на статью G.Falin. On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio. Astin Bulletin, 2008, 38(1), pp.161-170. Отметим, что некоторые рассуждения и логические переходы в данной статье содержат пропуски или вовсе опущены. Мы полностью восстановим все пропущенные рассуждения и добавим важные, на наш взгляд, детали. К таким мы относим, например, альтернативные решения задач 1 и 2 , использующие не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а минимизационные свойства перпендикуляра, опущенного из точки на гиперплоскость, и геометрические свойства скалярного произведения векторов соответственно. Однако мы не претендуем на авторство конкретных утверждений и результатов, а также используемых понятий из теории вероятностей и страхования, поэтому вся работа, проделанная лично нами, отдельно отмечена. Кроме того, для более детального восприятия, в работу добавлены иллюстрации и таблицы, также выполненные лично нами, а также два примера.
Мы применим простые геометрические принципы, чтобы найти оптимальные значения премий и минимизировать вероятность разорения. Кроме того, мы покажем, что три стандартных подхода к назначению премий (имеются в виду принципы деления добавочной суммы пропорционально ожидаемому убытку, дисперсии или среднеквадратическому отклонению) являются частными случаями рассматриваемой нами задачи оптимизации и при этом минимизируют взвешенные ожидаемые квадраты разностей как между индивидуальными премиями и индивидуальными выплатами, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными выплатами по этим классам.

2. Постановка задачи

Рассмотрим портфель из n неоднородных независимых страховых рисков. Пусть X_i обозначает размер выплат по $i-$му риску за рассматриваемый период, $S = X_1 + \cdots + X_n$ - суммарные потери, связанные с портфелем. При некоторых естественных предположениях (что портфель достаточно большой, не очень неоднородный и распределение размера выплат не очень ассиметричное) распределение случайной величины $\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}}$ может быть приближено стандартным гауссовским распределением.

α	99.9%	99%	98%	97%	96%	95%
z_α	3.090	2.326	2.054	1.881	1.751	1.645

Рис. 1. Квантили стандартного нормального распределения

Предположим, что страховщик взимает премию π_i по $i-$му риску и таким образом собирает суммарную премию $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. Из гаусовости распределения величины $\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}}$ получаем, что для гарантии достаточно маленькой вероятности разорения $R = P(S > \pi)$ (например, $R = 5\%$) страховщик должен собрать суммарную премию в размере

$$ES + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)} \tag{1}$$

где z_α - квантиль гаусовского распределения уровня α.

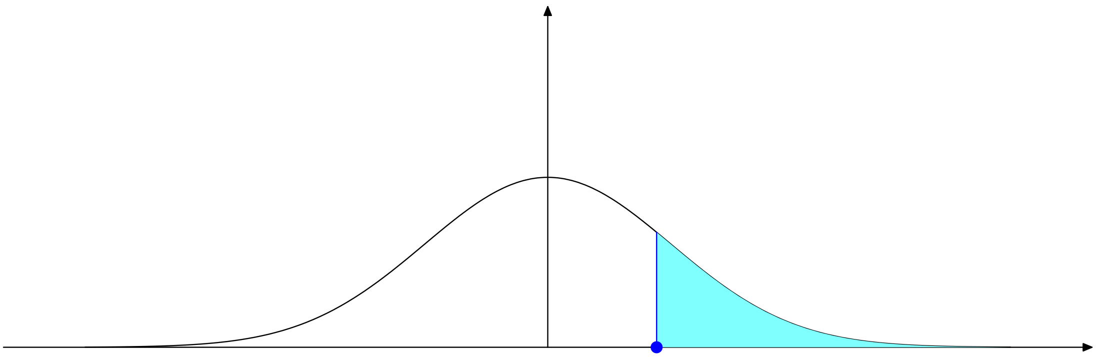


Рис. 2. Квантиль уровня α

Поясним последнее утверждение:

$$P(S > \pi) = R$$

$$\Leftrightarrow P(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} > \frac{\pi - ES}{\sqrt{VarS}}) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi - ES}{\sqrt{VarS}} = z_{(1-R)}$$

$$\Leftrightarrow \pi = ES + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}.$$

Последнее равенство ничего не говорит о величине индивидуальных премий. Чтобы найти их, необходимо использовать дополнительные принципы, описанные далее. Но сначала в качестве иллюстрации мы применим гауссовское приближения для решения следующей задачи.

3. Пример 1

Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0.3\% = 0.003$. Компания выплачивает сумму $b = 250000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года.
Определите величину активов, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5%.

Решение: Как обычно, примем размер страховой премии в качестве новой денежной единицы.
Прежде всего, мы должны подсчитать среднее значение и дисперсию суммарного ущерба S.

$$ES = NE\xi = 3000 \cdot 0.003 = 9$$
$$VarS = NVar\xi = 3000(b^2q - (bq)^2) = 3000 \cdot 0.997 \cdot 0.003 \approx 9$$

Поэтому

$$P(S \le u) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u - 9}{3}\right) \approx \Phi\left(\frac{u - 9}{3}\right)$$

Если мы хотим, чтобы вероятность разорения была 5%, то величина $\frac{u-9}{3}$ должна быть равна $z_{95\%} = 1.645$, то есть $u = 3 \cdot 1.645 + 9 \approx 13.935$ от величины страховой суммы, то есть 3483750 руб.

4. Четыре принципа назначения премий

Сначала мы напомним три стандартных принципа назначения премий, а потом предложим четвертый принцип, в рамках которого мы рассмотрим два подхода к задаче разбиения величины π на n индивидуальных премий $\pi_1 \dots \pi_n$.

Принцип 1 Будем делить добавочную сумму $l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ пропорционально ожидаемому убытку EX_i, то есть $l_i = kEX_i$.
Поскольку $\sum l_i = l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ и $\sum EX_i = ES$, то суммируя все $l_i = kEX_i$, получаем $\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} = kES$.
То есть $k = \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{ES}$,
поэтому $\boxed{\pi_i = EX_i + \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{ES} EX_i}$

Принцип 2 Будем делить добавочную сумму $l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ пропорционально дисперсиям $VarX_i$, то есть $l_i = kVarX_i$.
Поскольку $\sum l_i = l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ и $\sum VarX_i = VarS$, то суммируя все $l_i = kVarX_i$, получаем $\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} = kVarS$.
То есть $k = \frac{z_{(1-R)}}{\sqrt{VarS}}$,
поэтому $\boxed{\pi_i = EX_i + \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{VarS} VarX_i}$

Принцип 3 Будем делить добавочную сумму $l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ пропорционально среднеквадратичным отклонениям $\sqrt{VarX_i}$, то есть $l_i = k\sqrt{VarX_i}$.
Поскольку $\sum l_i = l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ и $\sum VarX_i = VarS$, то суммируя все $l_i = kVarX_i$, получаем $\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} = k \sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{VarX_i}$.
То есть $k = \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{VarX_i}}$,
поэтому $\boxed{\pi_i = EX_i + \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} * \sqrt{VarX_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{VarX_i}}}$

Принцип 4 К нему ведут два разных подхода:
1)Для заданной вероятности разорения $R = P(S > \pi)$ (то есть для заданного значения $\pi = ES + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$) назначить индивидуальные премии так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратичную разность $D = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ между индивидуальными рисками X_i и индивидуальными премиями π_i (где s_i -это некоторые известные положительные числа)

2) Для заданной $D = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ минимизировать вероятность разорения $P(S > \pi)$

Сейчас мы покажем, что оптимальное решение для обоих подходов одинаково и имеет вид

$$\boxed{\pi_i = EX_i + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)} \cdot \frac{s_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j}}$$

В частности, если $s_i = EX_i$, то мы получаем принцип 1, $s_i = VarX_i$, то мы получаем принцип 2, а если $s_i = \sqrt{VarX_i}$, то мы получаем принцип 3.

Кроме того, мы покажем, что оптимальные премиии π_i минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными выплатами, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными выплатами по этим классам.

5. Общие результаты о случайных величинах

5.1. Задача минимизации величины D

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ - случайные величины с конечными матожиданиями $a_1, \ldots, a_N$ и дисперсиями $Var\xi_1, \ldots, Var\xi_N$. Мы предполагаем, что матожидания и дисперсии известны.

Нам бы хотелось заменить случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ на неслучайные числа $A_1, \ldots, A_N$ таким образом, чтобы взвешенная сумма

$$D \equiv \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 \tag{2}$$

была бы минимальна. Здесь $\omega_1, \ldots, \omega_N$ - это известные положительные числа.

Используя элементарные свойства случайных величин, мы можем переписать D следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (Var(\xi_i - A_i) + (E(\xi_i - A_i))^2)$$

$=$

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(Var(\xi_i - A_i) + (a_i - A_i)^2) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i Var\xi_i + \sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i - A_i)^2 \qquad (3)$$

Поскольку ω_i и $Var\xi_i$ фиксированы, то изначальная задача минимизации превращается в задачу нахождения минимального значения функции

$$f(A_1, \ldots, A_N) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i - A_i)^2$$

Очевидно, оптимальным значением являются

$$A_1^* = a_1, \ldots, A_N^* = a_N$$

и минимальное значение этой функции равно нулю. Соответственно, минимальное значение величины D равно $\sum\limits_{i=1}^{N}\omega_i Var\xi_i$

Теперь усложним ситуацию, наложив дополнительные ограничения на переменные $A_1, \ldots, A_N$, и получим следующую задачу оптимизации:

Задача 1 Найти минимальное значение $D(A_1, \ldots, A_N)$ при условии, что

$$A_1 + \ldots + A_N = C, \qquad (4)$$

где С-известная константа.

Опять перепишем D в виде

$$D = \sum_{i=1}^{N}\omega_i Var\xi_i + \sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i - A_i)^2$$

и заметим, что поскольку ω_i и $Var\xi_i$ фиксированы, то для решения задачи 1 нам достаточно найти минимальное значение функции

$$f(A_1, \ldots, A_N) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i - A_i)^2$$

на множестве тех наборов чисел $(A_1, \ldots, A_n)$, которые удовлетворяют условию (4): $A_1 + \ldots + A_N = C$.

Для решения задачи 1 введем новые переменные $x_i = \sqrt{\omega}_i(A_i - a_i)$, то есть $A_i = a_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i$. Тогда задача 1 превращается в:

Задача 1$'$ Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{5}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega}_i} x_i = C - \sum_{i=1}^{N} a_i. \tag{6}$$

Последовательности $X = (x_1, \ldots, x_N)$ и $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ можно понимать как $N-$ мерные евклидовы векторы в пространстве R^N. Соответственно, левая часть равенства (7) есть скалярное произведение X и Y, а функция $g(x_1, \ldots, x_N)$ есть $||X||^2$, где

$$||X|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$$

- это длина вектора X.

Продолжим решать задачу $1'$, используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, согласно которому для любых двух векторов $X, Y \in R^N$ верно

$$|X \cdot Y| \leq ||X|| \cdot ||Y||,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы (в частности, если вектор Y ненулевой, линейная зависимость означает, что X пропорционален Y: $X = t \cdot Y$ для некоторого $t \in R$)

Применяя это неравенство, получаем:

$$g(x_1, \ldots, x_N) = ||X||^2 \geq \frac{|X \cdot Y|^2}{||Y||^2} = \frac{(C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}} \tag{7}$$

Поэтому для векторов $(x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющих (7), имеем:

$$\min g(x_1, \ldots, x_N) \geq \frac{(C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}} \tag{8}$$

Поскольку вектор $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ ненулевой (из-за того, что $\omega_1, \dots, \omega_N$ - это известные положительные числа), то равенство в (8) достигается тогда и только тогда когда существует такое t что

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \cdot t, i = 1, \dots, N \tag{9}$$

Подставляя выражение $X = tY$ в (7), получаем, что

$$t^2 \frac{||Y||^4}{||Y||^2} = \frac{(C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}},$$

то есть

$$t = \frac{C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}},$$

поэтому

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \cdot t$$

откуда и следует ответ в задаче $1'$:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{\omega_i} \frac{C - \sum\limits_{j=1}^{N} a_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче 1, получаем ее решение в виде:

$$A_i = a_i + \frac{x_i}{\sqrt{\omega}_i} = a_i + \frac{t}{\omega_i} = a_i + \frac{1}{\omega_i} \frac{C - \sum\limits_{j=1}^{N} a_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}} \tag{10}$$

$$\boxed{D_{min} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \frac{(C - \sum\limits_{j=1}^{N} a_j)^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}} \tag{11}$$

5.2. Альтернативное решение задачи минимизации величины D

Дадим альтернативное решение задачи минимизации величины D, использующее не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а минимизационные свойства перпендикуляра, опущенного из точки на гиперплоскость:

Задача 1$'$ Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

при условии, что

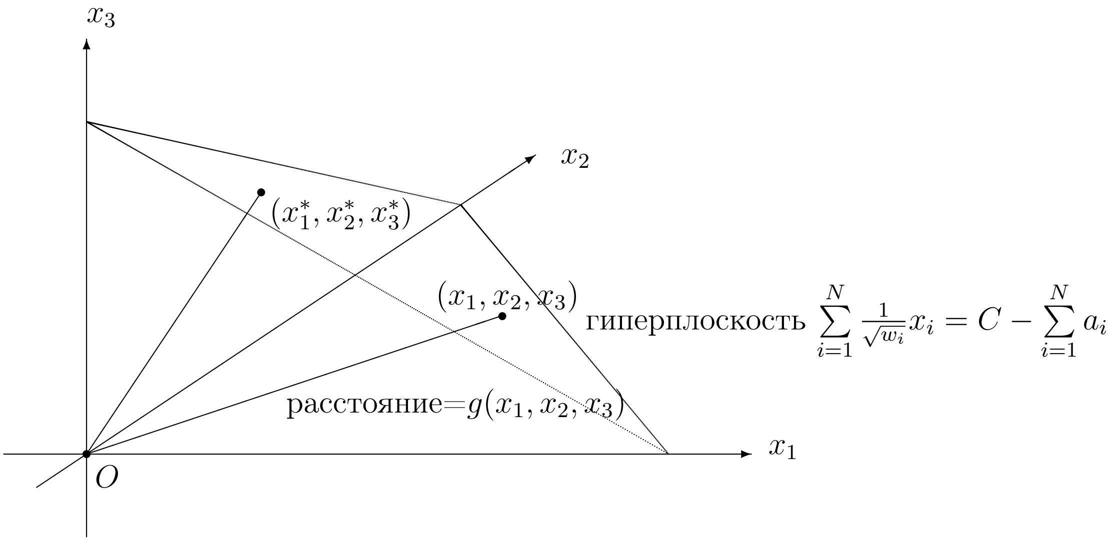
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega}_i} x_i = C - \sum_{i=1}^{N} a_i.$$

Опять будем понимать наборы чисел $X = (x_1, \ldots, x_N)$ и $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ как N-мерные евклидовы векторы в пространстве R^N. Поэтому наша задача заключается в том, чтобы минимизировать квадрат длины вектора X, удовлетворяющего условию $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega}_i} x_i = C - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Но заметим, что данное условие означает, что вектор X принадлежит гиперплоскости с нормалью $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$.

Последнее утверждение требует некоторых пояснений. Как известно, гиперплоскость - это линейная поверхность коразмерности один, то есть линейная оболочка $N-1$ вектора. Из линейной алгебры известно, что линейные пространства можно задавать системами линейных уравнений, причем (см. [2]) если система имеет ранг k, то задаваемое ей пространство будет иметь размерность $N-k$. Поэтому в случае гиперплоскости (размерности $N-1$) в N-мерном пространстве требуется всего одно уравнение. Запишем его в виде $b_1 x_1 + \cdots + b_N x_N = c$. Согласно общей теории, это уравнение задает плоскость размерности $N-1$. Но с другой стороны, это левую часть этого уравнения можно можно переписать в виде скалярного произведения фиксированного вектора $b = (b_1, \ldots, b_N)$ на вектор x из этой гиперплоскости. То есть вектор b перпендикулярен всем векторам x из этой гиперплоскости, поэтому b - вектор нормали к данной гиперплоскости.

Данное утверждение, сформулированное как "в ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором"доказано в [3].

Рис. 3. Расстояние от точки до гиперплоскости



Из курса линейной алгебры известно, что минимизирует расстояние от точки до гиперплоскости - перпендикуляр, опущенный из этой точки на гиперплоскость (это непосредственно следует из многомерной теоремы Пифагора).
Но выше мы уже пояснили, что нормаль к нашей гиперплоскости - это вектор Y, поэтому искомый вектор X будет пропорционален Y :

$X = tY$, то есть $(x_1, \ldots, x_n) = t\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$

Подставим выражение для X в условие

$$(X, Y) = C - \sum_{i=1}^{N} a_i$$

Получим

$$t||Y||^2 = C - \sum_{i=1}^{N} a_i$$

Откуда следует, что

$$t = \frac{C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i}{||Y||^2} = \frac{C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}}$$

Значит, минимальное значение в задаче $1'$ имеет вид

$$\min ||X||^2 = t^2||Y||^2 = t(t||Y||^2) = t(C - \sum_{i=1}^{N} a_i) = \frac{(C - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}}$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче 1 минимизации величины D, получаем ответ:

$$\boxed{D_{min} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \frac{(C - \sum\limits_{j=1}^{N} a_j)^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}}$$

5.3. Задача максимизации суммы $A_1 + \ldots + A_N$

Теперь изучим двойственную задачу оптимизации:

Задача 2 Найти максимум суммы $A_1 + \ldots + A_N$, если задано

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 \tag{12}$$

Как и раньше, перепишем D в виде

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2,$$

причем отметим такой факт: из этого представления следует, что константа D должна быть больше или равна, чем $\sum\limits_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i$

Поэтому так введенная константа D' будет неотрицательная:

$$D^{'} = D - \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i \geq 0$$

После введения величины D' ограничение (12) превращается в

$$D^{'} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2$$

Вводя $x_i = \sqrt{\omega}_i (A_i - a_i), A_i = a_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$ мы сводим задачу 2 к следующему виду:

Задача 2$^{'}$ Найти максимум суммы $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$, если задана сумма

$$D^{'} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{13}$$

Для решения этой задачи, опять применяем неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega}_i} x_i = X \cdot Y \leq ||X|| \cdot ||Y|| = \sqrt{D'} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}} \tag{14}$$

Причем равенство в (14) достигается тогда и только тогда, когда существует t такое что

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \cdot t, i = 1, \ldots, N \tag{15}$$

Подставляя выражение $X = tY$ в (14), получаем единственное решение

$$t = \sqrt{\frac{D'}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}}}$$

Тогда

$$x_i = \frac{t}{\sqrt{\omega_i}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \sqrt{\frac{D'}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\omega_i}}}$$

Поэтому искомый максимум в задаче $2'$ равен $\sqrt{D'}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i}}$.

Тогда возвращаясь к исходной задаче 2:

$$A_i = a_i + \frac{x_i}{\sqrt{\omega_i}} = a_i + \frac{1}{\omega_i}\sqrt{\frac{D'}{\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i}}} \tag{16}$$

Поэтому максимум суммы $A_1 + \ldots + A_N$ равен

$$\sum_{i=1}^{N} a_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\omega_i(a_i - A_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i}}$$

5.4. Альтернативное решение задачи максимизации суммы $A_1 + \ldots + A_N$

Дадим альтернативное решение задачи $2'$, использующее не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а геометрические свойства скалярного произведения векторов.

Задача $2'$ Найти максимум суммы $\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i$, если задана сумма

$$D' = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

Заметим, что нам нужно максимизировать скалярное произведение векторов X и Y, причем длины этих векторов заданы, а изменять мы можем только угол β между ними. Но по свойству скалярного произведения двух векторов оно равняется

$$||X|| \cdot ||Y|| \cdot \cos\beta$$

Тогда поскольку длины обоих векторов заданы, а косинус по модулю не превосходит единицы, то для максимизации этого скалярного произведения достаточно сделать косинус по модулю равным единице, то есть векторы X и Y должны быть коллинеарны. Получаем, что $X = tY$, и дальше рассуждаем как было описано в (15) и (16).

6. Приложение полученных результатов к модели индивидуального риска

Рассмотрим модель индивидуального риска:

$$S = X_1 + \ldots + X_n,$$

где S - общие потери по портфелю, n - общее число рисков в портфеле, случайная величина X_i обозначает потери по $i-$му риску за рассматриваемый период,

Мы предполагаем, что случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют конечные матожидания $\mu_1, \ldots, \mu_n$ и дисперсии $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ соответственно. Тогда случайная величина S имеет конечное матожидание $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ и дисперсию $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Мы также предполагаем, что для достаточно больших n функция распределения центрированной и нормированной величины полных потерь $\frac{S-\mu}{\sigma}$ может быть приближена функцией распределения стандартной гауссовской величины $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то есть:

$$P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < x\right) \approx \Phi(x)$$

Предположим, что страховщик взимает премию π_i по i-му риску, то есть всего собирает сумму $\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i$. Тогда вероятность разорения дается формулой $R = P(S > \pi)$.
Используя гаусовость $\frac{S-\mu}{\sigma}$, получаем, что:

$$R = P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{\pi-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\pi-\mu}{\sigma}\right). \tag{17}$$

Предположим, что страховщик готов принять достаточно маленький риск разорения R (например, $R = 1\%$). Тогда равенство (17) дает следующую (приближенную) формулу для суммарной премии:

$$\pi = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)} \qquad (18),$$

где z_α - квантиль гаусовского распределения уровня α, то есть $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

Равенство (18) ничего не говорит про величины индивидуальных премий π_i. Чтобы найти их, нам придется применить дополнительные принципы.

6.1. Минимизация ожидаемой разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями при заданной вероятности разорения

Задача 3 Рассмотрим взвешенную среднюю квадратичную разность

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$$

между индивидуальными рисками $X_1, \ldots, X_n$ и индивидуальными премиями $\pi_1, \ldots, \pi_n$ (где $s_1, \ldots, s_n$ - это некие известные положительные числа) и найдем минимум D:

$$D \equiv D(\pi_1, \ldots, \pi_n) \to min. \tag{19}$$

Применяя формулу (10) для $N = n, \xi_i = X_i, a_i = \mu_i, A_i = \pi_i, \omega_i = \frac{1}{s_i}, C = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)}$ мы можем утверждать, что минимизационная задача 3 с ограничением (18) имеет единственное решение

$$\boxed{\pi_i^* = \mu_i + \frac{s_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j} \cdot \sigma \cdot z_{(1-R)}.} \tag{20}$$

Пусть теперь портфель неоднородный, но его можно разбить на k классов однородных рисков с одинаковыми статистическими характеристиками потерь (обычно риски из одного класса принадлежат одному и тому же сектору бизнеса). Пусть $i-$й класс состоит из n_i рисков с одинаковым средним μ_i и одинаковыми дисперсиями σ_i^2. Тогда величина суммарных потерь S_i в $i-$м классе имеет среднее значение $ES_i = n_i\mu_i$ и дисперсию $VarS_i = n_i\sigma_i^2$. Суммарные потери по всему портфелю есть $S = S_1 + \ldots + S_k$, причем $\mu \equiv ES = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i\mu_i$, $\sigma^2 \equiv VarS = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2$

Из-за однородности рисков внутри отдельного класса i, страховщик должен взимать со всех рисков в этом классе одну и ту же премию π_i. Тогда общая премия за все риски в портфеле равна $\pi = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i\pi_i$.

Задача 4 Рассмотрим взвешенную среднюю квадратичную разность

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2$$

между суммарными потерями по разным классам $S_1, \ldots, S_k$ и суммарными премиями $n_1\pi_1, \ldots, n_k\pi_k$ от этих классов (где $r_1, \ldots, r_k$ - это некоторые известные положительные числа) и минимизируем D:

$$D = D \equiv D(\pi_1, \ldots, \pi_k) \to min. \tag{21}$$

Для того, чтобы получить предписанную вероятность разорения, нужно, чтобы выполнялось (18): $\pi = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)}$.

Применяя формулу (10) для $N = k, \xi_i = S_i, a_i = n_i\mu_i, A_i = n_i\pi_i, \omega_i = \frac{1}{r_i}, C = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)}$ мы можем утверждать, что минимизационная задача (19) с ограничением (18) имеет единственное решение

$$n_i\pi_i^* = n_i\mu_i + \frac{r_i}{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j} \cdot \sigma \cdot z_{(1-R)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pi_i^* = \mu_i + \frac{r_i}{n_i \sum\limits_{j=1}^{k} r_j} \cdot \sigma \cdot z_{(1-R)}.} \tag{22}$$

Теперь вернемся к минимизационной задаче (19) с ограничением (18) и положим для всех рисков из $i-$го класса одинаковое значение параметра s_i равным $\frac{r_i}{n_i}$. Тогда из (20) видно, что оптимальное решение для минимизационной задачи (19) совпадает с оптимальным решением минимизационной задачи (21). Таким образом, одни и те же значения премий минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

6.2. Минимизация вероятности разорения при заданной взвешенной средней квадратичной разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями

Задача 5 Для модели индивидуального риска

$$S = X_1 + \ldots + X_n$$

минимизировать вероятность разорения $R = P(S > \pi)$ при заданной величине

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$$

Поскольку $P(S > \pi)$ уменьшается при увеличивающемся π, то задача состоит в нахождении максимального значения суммарной премии $\pi = \pi_1 + \ldots + \pi_n$.

Применяя формулу (16) для $N = n, \xi_i = X_i, a_i = \mu_i, A_i = \pi_i, \omega_i = \frac{1}{s_i}$, мы можем утверждать, что минимизационная задача 5 имеет единственное решение

$$\boxed{\pi_i^* = \mu_i + s_i \sqrt{\frac{D - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i}\sigma_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i}}} \tag{23}$$

Теперь опять предположим, что портфель может быть разделен на k классов однородных рисков с одинаковыми статистическими свойствами потерь. Пусть $i-$й класс состоит из n_i рисков с одинаковым средним μ_i и одинаковыми дисперсиями σ_i^2. Тогда величина суммарных потерь S_i в $i-$м классе имеет среднее значение $ES_i = n_i\mu_i$ и дисперсию $VarS_i = n_i\sigma_i^2$. Суммарные потери по всему портфелю есть $S = S_1 + \ldots + S_k$, причем $\mu \equiv ES = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i\mu_i$, $\sigma^2 \equiv VarS = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2$

Из-за однородности рисков внутри отдельного класса i, страховщик должен взимать со всех рисков в этом классе одну и ту же премию π_i. Тогда общая премия за все риски в портфеле равна $\pi = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i\pi_i$.

Рассмотрим оптимизационную задачу:

Задача 6 Минимизировать вероятность разорения $R = P(S > \pi)$ при заданной величине

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2$$

Поскольку $P(S > \pi)$ уменьшается при увеличивающемся π, то задача состоит в нахождении максимального значения суммарной премии $\pi = n_1\pi_1 + \ldots + n_k\pi_k$.

Применяя формулу (16) для $N = k, \xi_i = S_i, a_i = n_i\mu_i, A_i = n_i\pi_i, \omega_i = \frac{1}{r_i}$, мы можем утверждать, что минимизационная задача 6 имеет единственное решение

$$\boxed{\pi_i^* = \mu_i + \frac{r_i}{n_i}\sqrt{\frac{D - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} n_i \sigma_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i}}} \tag{24}$$

Сравнивая формулы (23) и (24), опять видим, что одни и те же значения премий минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

В заключение приведем пример, иллюстрирующий все три принципа, а также разбиение на классы однородных рисков.

7. Пример 2

Предположим, что страховая компания заключила $N = 10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает выгодоприобретателю 1000000 руб., а в случае смерти в течение года от естественных причин компания выплачивает выгодоприобретателю 250000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0.0005. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. В первом приближении можно разбить N застрахованных на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q_1 = 0.004$ и $q_2 = 0.002$ соответственно.
Подсчитайте величину премии, гарантирующую вероятность выполнения компанией своих обязательств, равную 95%.

Решение: Примем сумму 250000 руб. в качестве условной денежной единицы. Тогда для первой группы договоров индивидуальный убыток принимает три значения: 0, 1 и 4 с вероятностями 0.9955, 0.004 и 0.0005 соответственно. Среднее значение и дисперсия величины индивидуального убытка есть

$$m_1 = 1 \cdot 0.004 + 4 \cdot 0.0005 = 0.006$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0.004 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_1^2 \approx 0.012.$$

Для второй группы договоров индивидуальный убыток принимает те же три значения 0, 1 и 4, но с другими вероятностями: 0.9975, 0.002 и 0.0005. В этой группе среднее значение и дисперсия индивидуального убытка есть

$$m_2 = 1 \cdot 0.002 + 4 \cdot 0.0005 = 0.004$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0.002 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_2^2 \approx 0.01.$$

Среднее значение и дисперсия суммарного убытка равны:

$$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0.006 + 6000 \cdot 0.004 = 48$$

$$VarS = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0.012 + 6000 \cdot 0.01 = 108$$

Для того, чтобы гарантировать 95% вероятность выполнения своих обязательств, резервный фонд компании должен быть $ES + l = 48 + l$, где добавочная сумма l равна

$$l = z_{95\%} \cdot \sqrt{VarS} \approx 1.645 \cdot \sqrt{108} \approx 17.095.$$

Рассмотрим теперь вопрос о назначении индивидуальных премий.
1)Если добавочная сумма l делится пропорционально матожиданиям, то относительная страховая надбавка θ одна и та же для всех договоров и равна

$$\theta = \frac{l}{ES} \approx 35.6\%$$

Поэтому для договоров из первой группы премия равна

$$\pi_1 = m_1(1 + \theta) \approx 0.00814 = \mathbf{2034р}.$$

Для договоров из второй группы премия равна

$$p_2 = m_2(1 + \theta) \approx 0.00542 = \mathbf{1356р}.$$

2)Если добавочная сумма l делится пропорционально дисперсиям, то коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{VarS} \approx 15.8\%$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0.001899,$$

так что премия есть

$$\pi_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007899 = \mathbf{1975р},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.7\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0.001583,$$

так что премия есть

$$\pi_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005583 = \mathbf{1396р},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39.6\%.$$

3) Если добавочная сумма l делится пропорционально среднеквадратическим отклонениям (они равны $\sigma_1 \approx 0.1095$ для договоров первой группы и $\sigma_2 = 0.1$ для договоров второй группы), то коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0.0165,$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0.001804,$$

так что премия есть

$$\pi_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007804 = \mathbf{1951р},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0.001647,$$

так что премия есть

$$\pi_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005647 = \mathbf{1412р},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41\%.$$

Итак, изменение принципа назначения индивидуальных премий приводит к уменьшению относительной страховой надбавки для договоров первой группы: $\theta_1 = 35.6\%, 31.7\%, 30\%$.
Соответственно для договоров второй группы относительная защитная надбавка увеличивается: $\theta_2 = 35.6\%, 39.6\%, 41\%$. Это связано с тем, что коэффициент рассеяния суммарного ущерба есть

$$\frac{VarS}{ES} - 1 = 1.25,$$

в то время как для договоров первой (второй) группы он равен

$$\frac{\sigma_1^2}{m_1} - 1 = 1$$

и

$$\frac{\sigma_2^2}{m_2} - 1 = 1.5$$

соответственно.
Коэффициент вариации величины индивидуального убытка для договоров первой группы есть

$$c_1 = \frac{\sigma_1}{m_1} \approx 18.26,$$

а для договоров второй группы он равен

$$c_2 = \frac{\sigma_2}{m_2} = 25.$$

Средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $\frac{E\xi_i}{ES}$ есть

$$\begin{aligned} c &= c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{ES} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{ES} \\ &= c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21.63. \end{aligned}$$

Итак, хотя дисперсия величины индивидуального убытка для договоров второй группы меньше, чем для договоров первой группы ($\sigma_2 = 0.1 < \sigma_1 \approx 0.1095$), но флуктуации индивидуальных убытков для договоров второй группы (измеренные как коэффициентом рассеяния, так и коэффициентом вариации) превышают средние флуктуации по портфелю. Поэтому было бы оправдано выбрать для назначения премий принцип 2 или 3.

8. Выводы и замечания

Таким образом, мы изучили четыре основных принципа назначения премий: принципы деления добавочной суммы пропорционально матожиданиям, дисперсиям и среднеквадратическим отклонениям индивидуальных рисков, а также более общий способ: способ минимизации взвешенной средней квадратичной разности D между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями. При этом мы изучили два подхода к получению четвертого способа:
1)Для заданной вероятности разорения $P(S > \pi)$ минимизировать взвешенную среднюю квадратичную разность $D = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$
2) Для заданной $D = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ минимизировать вероятность разорения $P(S > \pi)$
Кроме того, мы увидели, что оба подхода имеют одно и то же решение, которое к тому же минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).
Однако необходимо подчеркнуть, что мы использовали лишь простейшую модель для расчета защитной надбавки (через приближение центрированной и нормированной величины суммарных потерь нормальным распределением). Вопрос о том, что делать, когда нельзя применять эту модель, заслуживает отдельного обсуждения, выходящего за рамки данной работы.

9. Литература

• [1] G.Falin. On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio. Astin Bulletin, 2008, 38(1), pp.161-170.
• [2] Шурыгин В.В, Аналитическая геометрия, часть 3, стр. 4
• [3] А.Е.Умнов, Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Москва, МФТИ, 2011, стр. 99