Задача $E\sin(W_t) = ?,\ \forall t,\ d=1$.

1 способ $E\sin W_t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 0$, т.к. плотность четная, а $\sin x$ – нечетная.

2 способ через ф-лу Ито:

$dX_t = dW_t$

$f(x) = \sin x$

$f'_x = \cos x;\ f''_{xx} = -\sin x$

$\Rightarrow d f(X_t) = \cos X_t\, dX_t - \frac{1}{2}\sin X_t \underbrace{(dX_t)^2}_{=dt}$

$\Rightarrow \sin(W_t) = \sin 0 + \int_0^t \cos X_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sin W_s\, ds$

Берем м.о.:

$\underbrace{E\sin W_t}_{=g(t)} = -\frac{1}{2}\int_0^t E\sin W_s\, ds$

Дифф. по t: $g'(t) = -\frac{1}{2}g(t)$

$\Rightarrow g(t) = C\cdot e^{-\frac{t}{2}}$

но $g(0) = E\sin 0 = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow g(t) = E\sin W_t = 0$.

Для $f(x) = \cos x$:

$f'_x = -\sin x;\ f''_{xx} = -\cos x$

$\Rightarrow d f(X_t) = -\sin X_t\, dX_t - \frac{1}{2}\cos X_t (dX_t)^2$

$\Rightarrow \cos W_t = \underbrace{\cos 0}_{=1} - \int_0^t \sin W_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \cos W_s\, ds$

Берем м.о.:

$\underbrace{E\cos W_t}_{g(t)} = 1 - \frac{1}{2}\int_0^t E\cos W_s\, ds$

Дифф. по t: $g'(t) = -\frac{1}{2}g(t)$

$\Rightarrow g(t) = C\cdot e^{-\frac{t}{2}}$

но $g(0) = E\cos 0 = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow g(t) = E\cos W_t = e^{-t/2}$

Killing approach (на конечном горизонте)

Изучаем $dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt$; $X_0 = x$.

c^a – интенсивность убивания

мы ей можем управлять

Если мы не хотим останавливаться – то надо $c^a = 0$ делать,

если хотим – то c^a надо делать очень большим (и стремить его к ∞)

~~[illegible]~~ Т.е. сначала $c^a \in [0, n]$, и потом $n \to \infty$

$\underbrace{\varphi_{t_0,t} = \int_{t_0}^{t} c_s^a \, ds}_{\text{сколько всего умерло частиц от } t_0 \text{ до } t}$, или $\varphi_{t_0,t} = \int_{t_0}^{t} c^a(X_s)\, ds$; $t \ge t_0$.

f меняем: $f^a(x) = f(x) + c^a g(x)$ – чтобы когда частица умирала, она получила выигрыш g.

Value function:

$$v(t,x) = \sup_{a \in A_m} E^a_{t,x}\left(\int_t^T e^{-\varphi^a_{t,s}} f^a(X_s^{t,x})\, ds + e^{-\varphi_{t,T}} g(X_T^{t,x})\right)$$ – задача оптим. контроля, где мы варьируем интенсивность

Обозначаем $c^a_t = a$ – так удобнее

$$\Rightarrow f^a(x) = f(x) + a g(x);\ \varphi_{t_0,t} = \int_{t_0}^{t} a_s\, ds;\ \varphi_{t_0,t} = \int_{t_0}^{t} a(X_s)\, ds;\ t \ge t_0$$

Обычное ур-е Беллмана: $v_t(t,x) + \sup_{a \in U}\left[(L^a - a)v(t,x) + f^a(t,x)\right] = 0$; $v(T,x) = g(x)$

В нашем случае контроль посредством a: $L^a = L$

Выбираем $a = a(x) \in [0, K]$

$$\Rightarrow v_t(t,x) + \sup_a\left[(L - a)v(t,x) + f(x) + a g(x)\right] = 0;\ v(T,x) = g(x)$$

$$E^a_{t,x}\int_t^T e^{-\varphi_{t,s}} a_s g(X_s^{t,x})\, ds = E^a_{t,x}\, g(X_\tau^{t,x})\, \mathbb{1}\{\tau \le T\}$$