Коэф. при $z^6$ (Taylor): $\cos^2 z$ в $z=0$

$f(z) = \cos^2 z$

$f'(z) = -2\cos z \sin z \quad = -\sin 2z$

$f''(z) = 2\sin^2 z - 2\cos^2 z \quad = -2\cos 2z$

$f'''(z) = 4\sin z \cos z + 4\cos z \sin z = \overset{4}{\cancel{2}\cancel{3}}\sin 2z$

$f^{IV}(z) = 8\cos 2z$

$f^{V}(z) = -16\sin 2z$ $\qquad C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

$f^{VI}(z) = -32\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(2z)$

$$C_6 = \frac{-32}{6!} = \frac{-\overset{4\,2}{\cancel{32}}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\cancel{6}_3} = -\frac{2}{45}$$

---

найти $f(i)$, где $f$ - рац. ф-я, к-ая в окр-ти 0: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)' = z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' =$$

$$= z\left(\frac{z}{1-z}\right)' = z\cdot\cancel{\frac{z(1-z)+1+z}{(z-1)^2}} = z\,\frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2} = f(z)$$

$$f(i) = \frac{i}{1-\cancel{1}-2i} = -\frac{1}{2}$$

---

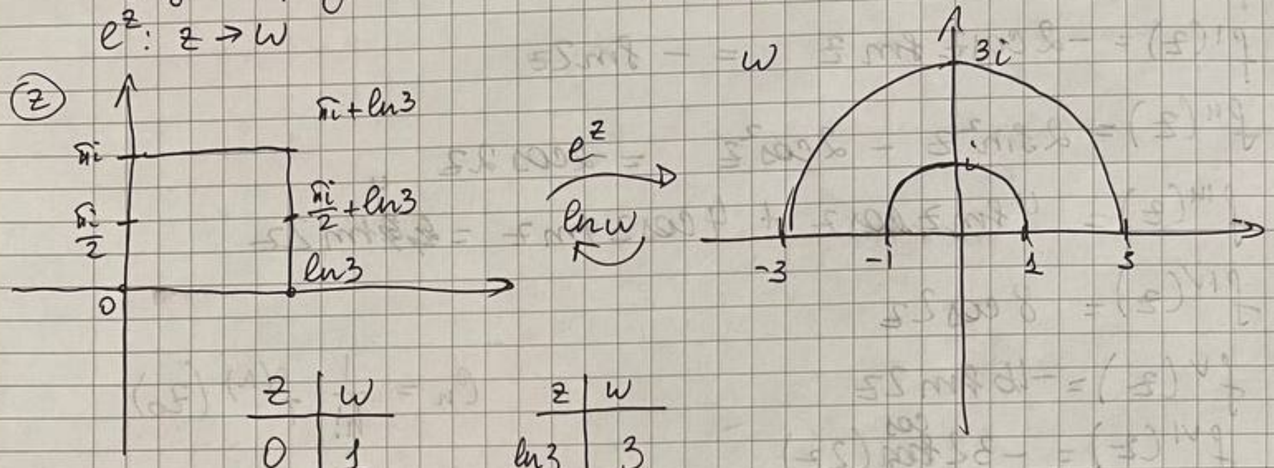
$R$ в Тейлоре для $\frac{1}{e^z+1}$

Т.к. $e^{\pi i}+1=0$, то $\pi i$ - особая точка $\Rightarrow R \le \pi$.

Др. точек внутри круга $|z|\le\pi$ нет $\Rightarrow R=\pi$.

Площадь образа $\left\{ z = x+iy \ : \ \begin{matrix} x \in [0, \ln 3] \\ y \in [0, \pi] \end{matrix} \right\}$

$e^z : z \to w$

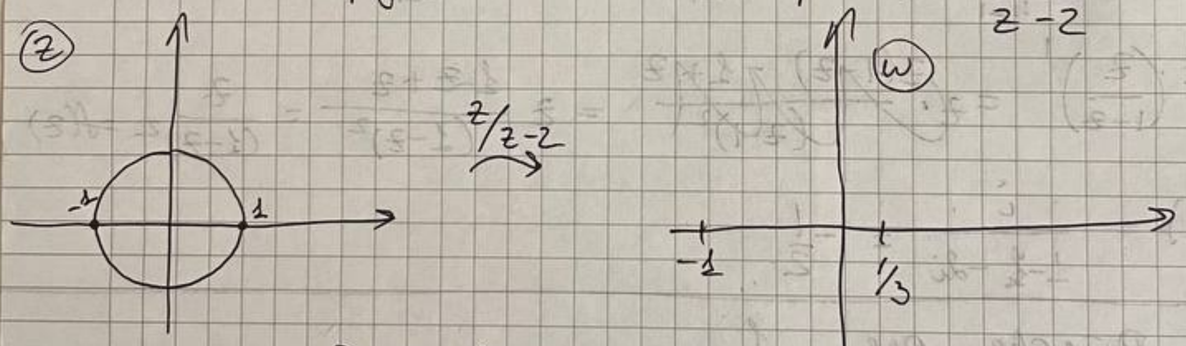


| z | w |
|---|---|
| 0 | 1 |
| $\pi i$ | $-1$ |
| $\frac{\pi i}{2}$ | $i$ |

| z | w |
|---|---|
| $\ln 3$ | 3 |
| $\pi i + \ln 3$ | $-3$ |
| $\frac{\pi i}{2} + \ln 3$ | $3i$ |

$$S = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi.$$

Найти R окружности $|z| = 1$ при $z \to \frac{z}{z-2}$



| z | w |
|---|---|
| 1 | $-1$ |
| $-1$ | $\frac{1}{3}$ |
| $i$ | $\frac{i}{i-2} = \frac{i(i+2)}{-1-4} =$ |

$= \frac{-1+2i}{-5} = -\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}$

Пусть $(x, y)$ – центр окр-ти:

$$(-1-x)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3} - x\right)^2 + y^2$$

$$\left(x+1+x-\frac{1}{3}\right)\left(x+1+\frac{1}{3}-x\right) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y =$$

$$(x+1)^2 + y^2 = \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{5}\right)^2$$

$$\frac{1}{9} + y^2 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2-z}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{z(z-1)}\,dz=I$$

Теорема Коши о вычетах: $I=2\pi i\sum \operatorname{res} f(z)$

Особые точки: $0;\ 1$

Посмотрим 0:

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{z+1}{z^2-z}=\infty \Rightarrow$ полюс 1 порядка, т.к. является нулём порядка 1 для $\frac{1}{f(z)}$

$\operatorname{res}\limits_{a} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}$ — general

Простой полюс $(n=1)$:

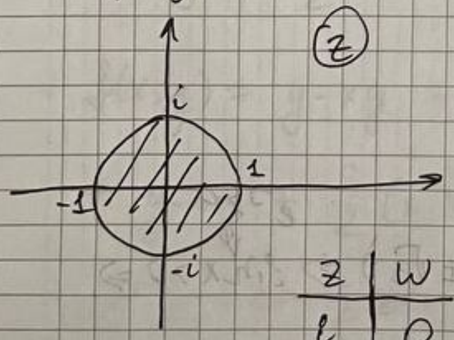
$\operatorname{res}\limits_{a} f=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) \Rightarrow \operatorname{res}\limits_{0} f=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z+1}{z-1}=-1$

Посмотрим 1: $\Rightarrow$ предел в ней $-\infty$, явл-ся нулём порядка 1 для $\frac{1}{f(z)} \Rightarrow$ полюс 1 порядка:

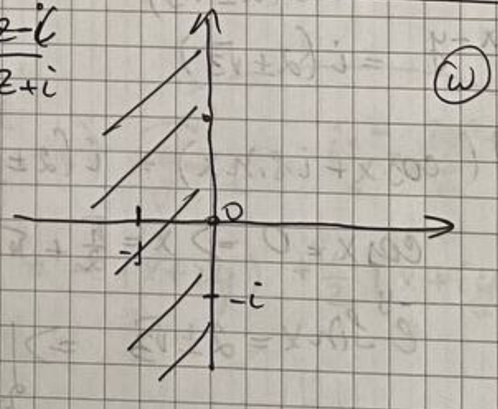
$\operatorname{res}\limits_{1} f=\lim\limits_{z\to 1}\frac{z+1}{z}=2$

Тогда $I=\frac{2\pi i}{2\pi i}(-1+2)=\frac{2\pi i}{2\pi i}=1.$

Образ $|z|<1$ : $z\to\frac{z-i}{z+i}$




$w=\frac{z-i}{z+i}$




| z | w |
|---|---|
| $i$ | $0$ |
| $-i$ | $\infty$ |
| $1$ | $\frac{1-i}{1+i}=\frac{1-1-2i}{1+1}=-i$ |
| $0$ | $-1$ |

Ряд Лорана – коэф при $z^{-2}$: $y = 2\sin\frac{z-1}{z}$

в кольце $0 < |z| < \infty$

$$f(z) = 2\sin\left(\frac{z-1}{z}\right) = 2\sin\left(1-\frac{1}{z}\right) = 2\sin(1)\cos\frac{1}{z} - 2\sin\frac{1}{z}\cos 1$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sin(1) = \sin(1)$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} \to \varnothing$$

Ответ: $\sin(1)$

---

Найти ближайшие к 0 корни ур-я $\sin z = 2$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz} = 4i$$

Пусть $e^{iz} = w \Rightarrow w - 1/w = 4i$

$$w^2 - 4iw - 1 = 0$$

$$D = -16 + 4 = -12 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{4i \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 2i \pm i\sqrt{3} =$$
$$= i(2\pm\sqrt{3})$$

Итак, $e^{iz} = i(2\pm\sqrt{3})$

$$e^{i(x+iy)} = i(2\pm\sqrt{3})$$
$$e^{ix-y} = i(2\pm\sqrt{3})$$

$$e^{-y}(\cos x + i\sin x) = i(2\pm\sqrt{3})$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$e^{-y}\sin x = 2\pm\sqrt{3} \Rightarrow \left| e^{-y} = \pm(2\pm\sqrt{3}) \Rightarrow \underset{\Downarrow}{e^{-y}>0} \sin x > 0 \Rightarrow \right.$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-y = \ln(2\pm\sqrt{3})$$

Итого: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y = -\ln(2\pm\sqrt{3}) \end{cases}$ Расст-е до 0: $\min\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^2 + \ln^2(2\pm\sqrt{3})}\right) =$

$$= \min\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \ln^2(2\pm\sqrt{3})}\right) \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} - i\ln(2\pm\sqrt{3})$$

Найти голоморфную ф-ю $f(z)$, т.ч.
$\operatorname{Re} f(x,y) = y - xy$ ; $f(0) = 0$.

$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

$u(x,y) = y - xy$

$f(0,0) = \underset{0}{\underset{\parallel}{u(0,0)}} + i\underset{0}{\underset{\parallel}{v(0,0)}} = 0$

Голоморфна $\Rightarrow$ усл-я Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - x = -\dfrac{\partial v}{x} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = x - 1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -y. \end{cases}$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial x}\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C(y) + A$$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$C'_y(y) = -y$

$\int C'_y(y)\,dy = -\int y\,dy = -\frac{y^2}{2} + C_2(x) + B$ ; $B = 0$ аналогично

$v(x,y) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{y^2}{2}$

$$f(x,y) = y - xy + i\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - x\right) = y - xy + \frac{ix^2}{2} - \frac{iy^2}{2} - ix =$$

$$= y - ix + \frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2xyi) = -i(x+iy) + \frac{i}{2}(x+iy)^2 =$$

$$= -iz + \frac{i}{2}z^2.$$

Посчитать $17\,tg\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)=8-15i$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)=\frac{\sin(\ldots)}{\cos(\ldots)}=\frac{\sin\cancel{\frac{\pi}{4}}\cos(i\ln 2)-\cos\cancel{\frac{\pi}{4}}\sin(i\ln 2)}{\cos\cancel{\frac{\pi}{4}}\cos(i\ln 2)+\sin\cancel{\frac{\pi}{4}}\sin(i\ln 2)}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\sin iy=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\\ \cos iy=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\end{array}\right|$$

$$=\frac{\frac{e^{-\ln 2}+e^{\ln 2}}{2}-\frac{e^{-\ln 2}-e^{\ln 2}}{2i}}{\frac{e^{-\ln 2}+e^{\ln 2}}{2}+\frac{e^{-\ln 2}-e^{\ln 2}}{2i}}=\frac{\cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{5}{4}+\frac{3}{4i}}{\frac{5}{4}-\frac{3}{4i}}=\frac{5i+3}{5i-3}=$$

$$=\frac{-25+9+30i}{-25-9}=-\frac{30i}{34}+\frac{16}{\cancel{34}}=-\frac{15i}{17}+\frac{16}{\cancel{34}}=\frac{8}{17}$$

---

Образ $|z|=2$ под $m(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$$m(2e^{i\varphi})=\frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi}+\frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right)=\cos\varphi+i\sin\varphi+\frac{1}{4}\cos\varphi-\frac{i}{4}\sin\varphi=$$

$$\left|\begin{array}{l}e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi\\ e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi\end{array}\right.$$

$$=\frac{5}{4}\cos\varphi+\frac{3i}{4}\sin\varphi=x+iy\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{4}\cos\varphi\\ y=\frac{3}{4}\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$$ — эллипс $\Rightarrow S=\pi ab$

$x=0\Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}$

$y\to 0\Rightarrow x=\pm\frac{5}{4}$ $\Rightarrow S=\pi\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15\pi}{4}$

В каких точках пл-ти $f(z) = \bar{z}^2 + 2i\bar{z}$ имеет произв-ю?

Надо, чтоб были выполнены усл-я Коши – Римана:

$f(z) \to f(x,y) = f(x+iy) = (x-iy)^2 + 2i(x-iy) =$

$= x^2 - y^2 + 2y + i(-2yx + 2x) = u + iv$

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightsquigarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2x$ $\Rightarrow$ ~~$x_0 = -1$~~ $\Rightarrow x_0 = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 2$

~~$y = i+1$~~ ~~$y_0 = 2$~~

$-\frac{\partial v}{\partial x} = \cancel{+2y}$

$= -(-2y+2) = 2y - 2 \Rightarrow y = 1$

$\boxed{z_0 = x_0 + iy_0 = i}$

Найти образ $\{z = x + iy : y = 1\}$ при $z \to z^2$

$x + iy \mapsto (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$: $\begin{cases} u = x^2 - y^2 = x^2 - 1 \\ v = 2xy = 2x \end{cases}$

$\Rightarrow v = \frac{x}{2} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4} - 1 \Rightarrow v^2 = 4u + 4$ – парабола

$$\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int\limits_{|z|=1}(2\bar z+1)\,dz}_{=I} = \frac{1}{2\pi i}\cdot 4\pi i = 2$$

Другое реш-е:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}(2\bar z+1)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(\frac{2}{z}+1\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{2+z}{z}\,dz}$$

$z=0$ – простой полюс $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\,\underbrace{\operatorname{res}_0\frac{2+z}{z}}_{=\lim\limits_{z\to 0}(2+z)} = 2$$

$$I = 2\underbrace{\int\limits_{|z|=1}\bar z\,dz}_{=J} + \overbrace{\int\limits_{|z|=1}dz}^{=0}$$

$$J = \int\limits_{\gamma}(x-iy)\,d(x+iy) = \overbrace{\int\limits_{\gamma}x\,dx+y\,dy}^{=A} + i\overbrace{\int\limits_{\gamma}x\,dy-y\,dx}^{=B}$$

$x=\cos t \to dx=-\sin t\,dt$

$y=\sin t \to dy=\cos t\,dt$

$$A = \cancel{\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,d(\cos t) = \frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}}$$

$$A = \cancel{\int\limits_0^{2\pi}-\cos t\sin t\,dt}$$

A: $x\,dx+y\,dy = -\cos t\sin t\,dt+\sin t\cos t\,dt = 0$

B: $x\,dy-y\,dx = \cos^2 t\,dt+\sin^2 t\,dt = dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow i\int\limits_0^{2\pi}dt = 2\pi i$$

---

Найти ближайший к 1 полюс у $\dfrac{1}{e^{iz}-1}+\dfrac{i}{z}$

Особые точки: $\{2\pi k;\ 0\}$

$e^{2\pi k i}=1$ Почему это полюс: $\lim\limits_{z\to 2\pi k}\left(\dfrac{z+i(e^{iz}-1)}{z(e^{2\pi k}-1)}\right)=\infty$

0: $$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+i(e^{iz}-1)}{z(e^{iz}-1)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z+i(e^{iz}-1)}{z(\cancel{1}+iz-\frac{z^2}{2}-\frac{iz^3}{6}+\bar o(z^4)-\cancel{1})} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z+i(e^{iz}-1)}{iz^2-\frac{z^3}{2}-\frac{iz^4}{6}+\bar o(z^5)} = \cancel{\text{лопиталь}\ \lim_{z\to 0}\frac{i}{2iz-\dots}}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\cancel{z}+(\cancel{-z})-\frac{iz^2}{2}+\frac{iz^3}{6}+\bar o(z^4)}{iz^2-\frac{z^3}{2}-\frac{iz^4}{6}+\bar o(z^5)} = \lim_{z\to 0}\frac{-\frac{i}{2}-\frac{iz}{6}+\bar o(z^4)}{i-\frac{z}{2}-\frac{iz^2}{6}+\bar o(z^5)} =$$

$$= -\frac{i}{2i} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{не полюс}$$

Ответ: $2\pi$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{z+1}{z}\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|}\cancel{\left(\sin 1 \overset{,,I}{\cos\frac{1}{z}dz} + \overset{,,J}{\cos 1 \sin\frac{1}{z}}\right)dz}$$

$$\cancel{I = \int\limits_{|z|}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname*{res}_{0} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right) = c_{-1} = \cos 1$$

Ищем $c_{-1}$:

$$\sin\left(1+\frac{1}{z}\right) = \sin 1 \cos\frac{1}{z} + \cos 1 \sin\frac{1}{z}$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots \quad \Rightarrow c_{-1} = \cos 1.$$

---

Найти голоморфн. в окр. 0 ф-ю, т.ч. $f(z) = 2f(iz) + 3z^6$

$$f(z) = 2f(iz) + 3z^6 \Rightarrow f(iz) = \frac{f(z)}{2} - \frac{3}{2}z^6$$

$$f(iz) = 2f(-z) - 3z^6 \Rightarrow f(-z) = \frac{f(iz)}{2} + \frac{3}{2}z^6 =$$

$$= \frac{f(z)}{4} + \frac{3}{2}z^6 - \frac{3}{4}z^6 = \frac{f(z)}{4} + \frac{3}{4}z^6$$

$$f(-z) = 2f(-iz) + 3z^6 \Rightarrow f(-iz) = \frac{f(-z)}{2} - \frac{3}{2}z^6 =$$

$$= \frac{f(z)}{8} + \frac{3}{8}z^6 - \frac{3}{2}z^6 = \frac{f(z)}{8} - \frac{9}{8}z^6$$

$$f(-iz) = 2f(z) - 3z^6 = \frac{f(z)}{8} - \frac{9}{8}z^6$$

$$15f(z) = 24z^6 - 9z^6 \Rightarrow f(z) = z^6 \text{ – голоморфна в окр. } 0.$$

Можно усл-е Коши – Римана чекнуть, но очевидно

Найти рац. ф-ю, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, в $-1$ с $\operatorname{res}_{-1} = -1$, др. полюсов нет. $f(0)=0$.

Пусть $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$

Если $a$ — простой полюс: $f_2(a)=0 \neq f_2'(a)$

$\operatorname{res}_a f = \dfrac{f_1(a)}{f_2'(a)}$ Пусть $f_2(z) = (z-1)(z+1) = z^2-1$

$\operatorname{res}_1 f = \dfrac{f_1(1)}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} f_1(1) = 2 \\ f_1(-1) = +2 \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$

$\operatorname{res}_{-1} f = -\dfrac{f_2(-1)}{2}$

Т.к. $\deg(f_2) = 2$, то для отсутствия особенности в $\infty$ нужно, чтобы $\deg(f_1) \le 2$

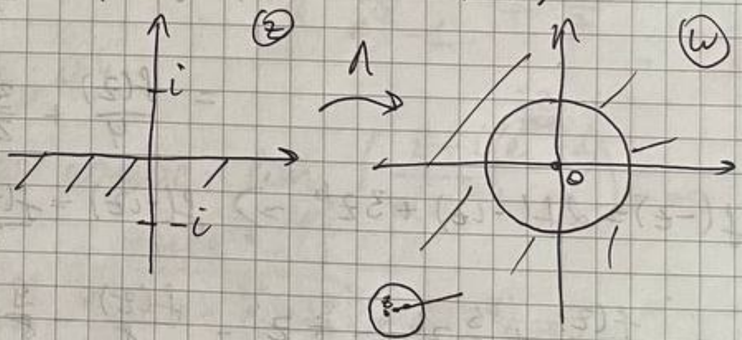
Подходит $2z^2$ (по точкам)

Ответ: $f(z) = \dfrac{2z^2}{z^2-1}$

---

Найти конформное отобр-е $\Pi_+$ на $B(0,1)$, т.ч. $f(i)=0$; $f'(i) = \frac{1}{2}$

| $z$ | $w = \Lambda(z)$ |
|---|---|
| $i$ | $0$ |
| $-i$ | $\infty$ |
| $t \in \mathbb{R}$ | $1$ |




$i$ и $-i$ симметричны отн. $\partial\Pi_+$ $\Rightarrow$ // $|z-z_0|\,|z_*-z_0| = r^2$

$\Rightarrow z_0 = 0 \Rightarrow$ как-то $0 \cdot z_* = r^2$ (центр окр-ти симм. с $\infty$)

Пусть $w = \Lambda(z) = \lambda \dfrac{a+z}{b+z}$ $\Big|$ $\Lambda'(z) = \lambda \dfrac{z+i-z+i}{(z+i)^2} = \lambda \dfrac{2i}{(z+i)^2}$

$\Lambda'(i) = \lambda \dfrac{2i}{-4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lambda = i$

$\Lambda(i) = \lambda \dfrac{i+a}{i+b} = 0 \Rightarrow a = -i$

$\Lambda(-i) = \lambda \dfrac{a-i}{b-i} = \infty \Rightarrow b = i$ $\Rightarrow \Lambda(z) = \lambda \dfrac{z-i}{z+i}$