Материалы к семинару по уравнениям в частных производных -06.04.2020

Задача Коши для уравнения теплопроводности, продолжение

Задачник под ред. Владимирова - параграф 13, задачник под ред. Шамаева - параграф 4.2

На тему свойств задачи Коши для уравнения теплопроводности существует большое число красивых задач. Свойства, необходимые для их решения, перечислены в начале параграфа 4.2 из задачника под ред. Шамаева.

Большинство задач основано не непосредственном анализе формулы для решения задачи Коши (интеграле Пуассона) и теоремах о стабилизации решения, доказательство которых есть в разделе решений на стр.87. Напоминаю, что в Шамаеве есть решения многих задач.

1. Задачи на теоремы о стабилизации (4.33, 4.34,4.35, 4.36)

Достаточно увидеть, что начальные данные удовлетворяют условиям какой-либо теоремы о стабилизации. Если начальное данное представляет собой произведение функций от своих переменных (как в 4.36 (в)), то надо предварительно воспользоваться Замечанием со стр.45 (или задачей 13.2 из Владимирова).

Легко придумать задачу, в которой комбинируются уже известные свойства решения. Такой задачей, например, является 4.38. Сама она - задача "на внимательность", так как начальное данное является решением (проверка, с которой полезно начинать решение любой задачи с "простыми" начальными данными). Однако давайте переделаем ее так:

Задача 1.

$$u_t = \Delta u - 3u,\ u = u(t,x),\ x \in \mathbb{R}^3, \quad u|_{t=0} = \operatorname{arctg}^2(x_1 + x_2 + x_3)$$

a) Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$;

b) Найти какое-нибудь условие на начальные данные

$$u|_{t=0} = \phi(x_1 + x_2 + x_3),$$

достаточное для того, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,0) = 0$;

c) Найти какое-нибудь условие на начальные данные

$$u|_{t=0} = \phi(x_1 + x_2 + x_3),$$

достаточное для того, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,0) = 1$.

Теперь уже нужно вспомнить и замену переменных, и теоремы сравнения.

Не надо забывать, что уравнение теплопроводности – линейное, что позволяет разбивать задачу на части. Вот, например, задача на всю подобную технику сразу.

Задача 2.

$$u_t = \Delta u,\ u = u(t,x),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = \cos^2 5x_1 + e^{-(x_1+2x_2+3x_3)^2} + \frac{x_1 x_2^2 \sin^2 x_3}{1+x_2^2}$$

Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x)$.

2. Задачи на свойства симметрии и интеграл энергии (4.28, 4.38)

Очевидным следствием представления решения интегралом Пуассона является тот факт, что если начальное данное четное/нечетное, то тем же свойством обладает решение (проверка). Это позволяет рассматривать решения только на полуоси $x > 0$. Рассмотрим задачу 4.39. В принципе, ее можно решать так: начальное данное четное, значит, решение - четное по x, поэтому $\int\limits_0^\infty u\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} u\,dx$, а u мы находили на прошлом занятии (задача 3.5(5) из Владимирова). Подставляем, считаем интеграл, находим предел.

Но так эту устную задачу решать не надо.

Дело в том, что если обозначить $I(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx$ и предположить, что $u(t,x)$ убывает на бесконечности по x вместе с производными достаточно быстро, например, экспоненциально, то

$$I'(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} u_t(t,x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}} u_{xx}(t,x)\,dx = -\int\limits_{\mathbb{R}} du_x(t,x)\,dx = -u_x(t,x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

То есть

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} I(0) = I(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx.$$

Экспоненциальное убывание решения на бесконечности по x обеспечивается экспоненциальным убыванием начальных данных. Это можно видеть непосредственно из интеграла Пуассона (почему?) либо в случае этой конкретной задачи вспомнить вид решения.

Таким образом, $\int\limits_0^\infty u\,dx = \frac{1}{2}I(0)$, это стандартный интеграл.

Вот похожая (устная) задача.

Задача 3.

$$u_t = \Delta u,\ u = u(t,x),\ x \in \mathbb{R}^3, \quad u|_{t=0} = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^4 + x_3^8)}.$$

Найти $\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(t,x)\,dx$.

3. Задачи о гладкости решения (4.30, 4.40, 4.42)

Отметим, что задача Коши для уравнения теплопроводности поставлена **на характеристике**, то есть к ней не применима теорема Коши-Ковалевской и решение не обязано быть аналитической функцией (в каждой точке раскладываемой в сходящийся степенной ряд), даже если таким свойством обладает начальное условие. (Это вовсе не всегда так, пример Ковалевской довольно экзотический). Однако решение является функцией из C^∞ при всех $t > 0$, даже если начальное данное разрывно. Это нетрудно видеть из формулы для представления решения. Действительно, ядро Пуассона - это дельтообразное семейство, что-то вроде "шапочки", к которой мы привыкли в теме про обобщенные функции. То есть свертка с ним дает функцию той же гладкости, что и само дельтообразное семейство (то есть бесконечной). Однако, в отличие от "шапочки", носитель ядра Пуассона - вся ось. Поэтому в процессе свертки начальное данное с компактным носителем будет "размазано"на всю ось.

4. Обратное уравнение теплопроводности (4.27, 4.32)

Обратное уравнение теплопроводности получается заменой времени t на $-t$. Это типичный пример некорректно поставленной задачи Коши, определение корректности - стр.22 в задачнике Шамаева. Здесь нет непрерывной зависимости от начальных данных, возмущения начальных данных по модулю растут. Действительно, достаточно построить решение $u_t = -u_{xx}$ с начальным условием $u|_{t=0} = \sin x$ (ищем в виде $T(t)\sin x$). Так решается и задача 4.27. Отметим, что два первых условия корректности здесь выполнены.

Задачи для решения.

Владимиров: 13.14 (1, 3) (ответ будет выражаться через функцию гауссовскую распределения);

Шамаев: 4.27, 4.28, 4.30, 4.33, 4.34, 4.35, 4.36 (они обсуждались выше, но надо убедиться, что умеете их решать), 4.39 (немного посложней),

а также задачи 1, 2, 3 выше.