ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Стратегия оптимального роста в многоагентной модели рынка с афинными выплатами

Выполнила студентка
609 группы
Токаева Александра Александровна

____
подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. **Житлухин Михаил Валентинович**

____
подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1 Введение

Основным предметом исследования в этой работе является стохастическая модель финансового рынка с дискретным временем, описывающая конкуренцию агентов (инвесторов) за несколько активов на бесконечном горизонте времени. Выплаты активов делятся между инвесторами пропорционально доле купленного каждым инвестором актива. Цены на рынке задаются эндогенно из условия краткосрочного равновесия между спросом и предложением. В результате, прибыль или убыток инвестора зависит не только от реализовавшихся выплат активов, но и от действий остальных инвесторов.

Основная цель работы — нахождение стратегии, называемой стратегией оптимального относительного роста. Суть этой стратегии заключается в том, что логарифм относительного капитала использующего эту стратегию инвестора является субмартингалом вне зависимости от того, какие стратегии используют остальные инвесторы. Под относительным капиталом мы понимаем долю капитала инвестора от общего капитала на рынке.

Хорошо известно, что в стандартных моделях рынка субмартингальное свойство стратегии влечет за собой ряд оптимальных свойств (см.[1], [9]). В нашей модели найденная стратегия также окажется оптимальной в следующем смысле: относительный капитал использующего эту стратегию инвестора остается отделенным от нуля в вероятностью один. Кроме того, мы покажем, что если репрезентативная стратегия остальных инвесторов асимптотически отличается от оптимальной стратегии, то доля капитала инвестора с оптимальной стратегией стремится к единице.

Модель, изучаемую в работе, в общих словах можно описать следующим образом. На рынке присутствуют 2 актива, выплачивающих дивиденды в дискретные моменты времени, а также множество агентов, которые могут покупать и продавать активы и получать выплачиваемые дивиденды. С течением времени капитал инвесторов изменяется за счет изменения цен акций в их портфелях и получения дивидендов. В целом, такая модель во многом схожа со стандартными моделями финансовой математики, с той лишь разницей, что мы будем предполагать, что цены акций определяются стратегиями инвесторов. А именно, считая, что предложение каждой акции фиксировано, цена должна быть такой, чтобы спрос инвесторов оказался равен предложению.

Эта задача является продолжением исследований в области теории оптимального роста. Первыми работами в этом направлении были [10], [4], где были найдены асимптотически оптимальные стратегии для моделей с дискретным временем. Далее эти результаты были значительно улучшены. Среди множества работ можно выделить [1], где была рассмотрена общая модель с дискретным временем. Однако в этой работе дивиденды задавались экзогенно и, кроме того, рассматривалась задача одного инвестора, а не задача конкуренции инвесторов.

Наша модель обобщает модель [3], где исследовались оптимальные стратегии в модели рынка с короткоживущими активами в дискретном времени. В нашей модели предполагается более сложная структура выплат активов, что существенно осложняет нахождение оптимальной стратегии. Также стоит отметить статью [6], где тоже обобщили модель из [3], но другим способом: добавили к короткоживущим активам безрисковый актив. Последние достижения в области Эволюцинных финансов представлены в [7], [8].

Таким образом, наша модель в дискретном времени обладает следующими особенностями:

1) мы расссматриваем не действия одного (не влияющего на цены) инвестора против всего остального рынка, а игру двух агентов, в которой каждый агент имеет свою стратегию, и его действия оказывают влияние на цены активов, что существенно усложняет поиск оптимальной стратегии.

2) Активы в нашей модели короткоживущие в том смысле, что они выпускаются в момент t, в момент $t+1$ выплачивают дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже, и исчезают. Другими словами, короткоживущие активы нельзя продать в момент $t+1$, с них можно только получить дивиденды.

3) Дивиденды задаются экзогенно, а цены активов определяются эндогенно из условия равенства спроса и предложения. Отметим, что в нашей модели действия инвесторов предшествуют установлению цен, то есть сначала инвесторы объявляют, какую долю своего капитала они хотят вложить в каждый из активов, а после этого цены устанавливаются из условия равенства спроса и предложения. Этот подход аналогичен рыночным играм типа Shapley-Shubik. Несмотря на то, что он является упрощением реально наблюдаемой на рынке ситуации, этот подход экономически обоснован (см.[11]).

4) Размер дивидендов, выплачиваемых активом, зависит от объема капитала, который в него суммарно вложили все инвесторы на предыдущем шаге. Это экономически обоснованно, поскольку чем больше в компанию вложили, тем больше у нее возможностей для развития и, соответственно, для выплаты больших дивидендов. Отметим, что именно эта зависимость от объема вложенного капитала отличает нашу модель от других и делает нашу задачу сложной.

5) Наша модель развивает подход, предложенный в [3], где также рассматривались оптимальные стратегии в модели с несколькими активами и эндогенными ценами в дискретном времени, но там величина дивидедов не зависела от объема вложений. Именно поэтому в модели [3] получалось найти оптимальную стратегию в явном виде. В нашем же случае мы не найдем явный вид оптимальной стратегии, но докажем ее существование и асимптотическую оптимальность. Найденная нами стратегия будет зависеть от текущих капиталов инвесторов, которые в свою очередь зависят от их прошлых действий, в то время как в [3] оптимальная стратегия не зависела от прошлых действий инвесторов. При этом в частном случае нашей модели, соотвествующем модели [3], найденная нами стратегия окажется в точности стратегией из [3].

Основной результат работы состоит в доказательстве существования стратегии оптимального относительного роста. Будет показано, что пропорция капитала, которую эта стратегия вкладывает в актив $k = 1, 2$, задается неявно как неподвижная точка отображения

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathrm{E}_t \left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Дипломная работа организована следующим образом. В разделе 2 описывается общая модель рынка с эндогенными ценами. В разделе 3 даются определения выживающей и лог-оптимальной стратегии, а также формулируются основные результаты об их существотовании и асимптотическом поведении. В разделе 4 приводится численный пример. В разделе 5 показывается связь результатов в нашей модели с результатами в других известных моделях. Раздел 6 содержит доказательства основных результатов. Раздел 7 подводит итог работы.

2 Модель рынка

В данном разделе будет предложена общая модель рынка с произвольным числом агентов и активов. В дальнейшем, однако, будет рассматриваться только частный случай двух агентов и двух активов.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство с полной дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Рынок в модели состоит из $N \geq 2$ агентов и $K \geq 2$ короткоживущих активов. В каждый из моментов времени $t = 0, 1, \ldots$ на рынке "рождается"одна единица каждого из K активов, а инвесторы одновременно и независимо принимают решение о том, в каких долях они инвестируют свой капитал в каждый из K активов на промежутке от t до $t + 1$. Цена на каждый из активов в момент t устанавливаяется эндогенно из условия равенства спроса и предложения в момент t. После этого в момент $t + 1$ каждый из активов выплачивает дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже. Эти дивиденды распределяются между инвесторами пропорционально капиталу, который они инвестировали в данный актив. После выплаты дивидендов все активы умирают и рождаются заново, и процедура определения цены происходит опять.

Рынок эволюционирует под влиянием случайного фактора, который моделируются посредством случайных величин $s_1, s_2, \ldots$ из измеримого множества Ω. Случайная величина s_t интерпретируется как состояние рынка в момент времени t.

Агент n, где $n = 1, \ldots, N$, характеризуется своим неслучаным начальным капиталом $W_0^n > 0$ и стратегией Λ^n. Капитал W_t^n n-го агента в произвольный неначальный момент t определяется из динамики, которая будет приведена ниже, и образует $\mathbb{F}$-измеримую случайную последовательность капиталов $W^n = (W_t^n)_{t=0}^{\infty}$.

В каждый момент времени t каждый агент n выбирает вектор долей $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \ldots, \lambda_t^{n,K})$, в которых он делит свой капитал W_t^n для инвестиций в каждый из K активов в момент времени t(в нашей модели обязательно потратить весь свой капитал на активы, банковского счета нет). Например, сумма $\lambda_t^{n,k} W_t^n$ тратится агентом n на покупку актива k (а сколько именно единиц актива k этот агент купил - будет определено, когда все агенты объявят, сколько денег они выделили на покупку актива k, и из краткосрочного равенства спроса и предложения определеится цена данного актива).

Доли λ_t^n для разделения капитала могут зависеть от истории состояний случайного фактора $\bar{s}_{t-1} := (s_1, ..., s_{t-1})$, вектора начальных капиталов $\bar{W}_0 :=$

$(W_0^1, ..., W_0^N)$ и истории стратегий всех агентов $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, ..., \lambda_{t-1})$, где $\lambda_s = (\lambda_s^1, \ldots, \lambda_s^N)$.

Стратегия n-го агента — это последовательность $\Lambda^n = (\Lambda_t^n)_{t=0}^{\infty}$ векторнозначных функций

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_t)$$

со значениями в стандартном K-симплексе

$$\Delta_K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \ldots + a^K = 1\}$$

и измеримых относительно $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. - что тут надо поставить? Тут же не от одного омега теперь завивимость, а от последовательности, и еще от последовательности лямбд?

Для $k = 1, \ldots, K$, k-я координата $\Lambda_t^{n,k}$ соответствует доле капитала, которую n-й агент вложил в покупку k-го актива в момент времени t. Короткие продажи запрещены. Для $t = 0$, функция $\Lambda_0^n = \Lambda_0^n(\bar{W}_0)$ не зависит от истории состояний случайных факторов и истории стратегий.

Зависимость от $\bar{\lambda}_t$ нельзя опустить, потому что построенная нами оптимальная стратегия будет зависеть от полного капитала рынка, который, в свою очередь, зависит от $\bar{\lambda}_t$. Это правильная фраза? Или почему нельзя опустить?

Имея заданные $\bar{W}_0 = (\bar{W}_0^1, \ldots, \bar{W}_0^N)$ и профиль стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$, инвестиционные доли каждого агента на этом рынке определяются следующим рекурсивным соотношением:

$$\lambda_0^n = \Lambda_0^n(\bar{W}_0), \qquad \lambda_t^n(\bar{s}_t) = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})),\ t \geq 1, \tag{1}$$

где $\bar{\lambda}_t(\bar{s}_t)) = (\lambda_0, \lambda_1(\bar{s}_1)), \ldots, \lambda_t(\bar{s}_t)))$. Далее мы будем опускать зависимость от $\bar{s}_t$, где это не будет приводить к неоднозначности.

Обозначим за $\bar{P}_t = (P_t^1, \ldots, P_t^K)$ вектор цен активов в момент времени t. Коррдината P_t^k соответствует цене одной единицы актива k в момент t. Зададим динамику капитала $W_t^n = W_t^n(\bar{s}_t)$ n-го агента и вектора цен $\bar{P}_t = \bar{P}_t(\bar{s}_t)$ для заданного профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$ и вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$.

Цены формируются из условия равенства спроса и предложения в каждый момент времени. Состав портфеля агента n в момент времени $t \geq 0$ характеризуется вектором $\bar{X}_t^n = (X_t^{n,1}, \ldots, X_t^{n,K})$, где $X_t^{n,k}$ есть количество единиц актива k в портфеле. Скалярное произведение $\langle \bar{P}_t, \bar{X}_t^n \rangle = \sum_{k=1}^K P_t^k X_t^{n,k}$ показывает цену всего портфеля агента n в момент времени t.

В момент времени $t = 0$ капитал n-го агента равен его неслучайному начальному капиталу W_0^n. За $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$, $k = 1, \ldots, K$, обозначим величину дивидендов, которые единица актива k выплачивает в момент времени $t \geq 1$. Поскольку мы предполагаем, что на рынке количество каждого актива равно единице, то величина A_t^k характеризует полную выплату дивидендов от актива k. Тогда величина капитала n-го агента в момент времени $t \geq 1$ равна

$$W_t^n = \langle \bar{A}_t, \bar{X}_{t-1}^n \rangle = \sum_{k=1}^K A_t^k X_{t-1}^{n,k}, \tag{2}$$

То есть величина капитала в момент времени t формируется из выплат акций, купленных в мемент времени $t-1$.

Если агент n вложил долю $\lambda^n_{t,k}$ своего капитала в покупку актива k в момент t, тогда число единиц актива, который он купил, равно

$$X^{n,k}_t = \frac{\lambda^{n,k}_t W^n_t}{P^k_t}. \tag{3}$$

Напомним, что каждого актива на рынке ровно 1 единица, и при этом цены устанавливаются такие, чтобы спрос был равен предложению, тогда для всех $t \geq 0$ и $k = 1, \dots, K$ выполнено:

$$1 = \sum_{n=1}^{N} X^{n,k}_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^{n,k}_t W^n_t}{P^k_t} = \frac{1}{P^k_t} \sum_{n=1}^{N} \lambda^{n,k}_t W^n_t,$$

Отсюда находим, что установившиеся равновесные цены имеют вид

$$P^k_t = \sum_{n=1}^{N} \lambda^{n,k}_t W^n_t. \tag{4}$$

Если правая часть этого выражения равна нулю на множестве $\bar{s}_t$, то в формуле (3) полагаем $X^{n,k}_t = 0$ на этом множестве. а что, там разве и так ноль не будет, если справа ноль?

Таким образом, имея профиль стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ и вектор начальных капиталов, мы можем рекурстивно с помощью выражений (2)–(4) восстановить случайную траекторию системы, задаваемой последовательностями капиталов агентов W^n_t, равновесных цен $\bar{P}_t = (P^1_t, \dots, P^K_t)$ и составов портфелей $X^n_t = (X^{n,1}_t, \dots, X^{n,K}_t)$.

В частности, используя (2)–(4), получаем, что последовательность капиталов W^n_t удовлетворяет соотношению

$$W^n_{t+1} = \sum_{k=1}^{K} X^{n,k}_{t-1} A^k_{t+1} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{n,k}_t W^n_t}{P^k_t} A^k_{t+1} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda^{n,k}_t W^n_t}{\sum_{n=1}^{N} \lambda^{n,k}_t W^n_t} A^k_{t+1}, \tag{5}$$

при этом полагаем $0/0 = 0$ под знаком суммирования.

Мы предполагаем, что дивиденды A^k_t *эндогенные* в том смысле, что они могут зависеть от стратегий агентов. Далее мы будем рассматривать специальный случай формы дивидендов, который мы называем *афинныимим выплатами*.

Обозначим за W_t полный капитал рынка в момент времени t, а за μ^k_t обозначим долю полного капитала рынка, вложенную в покупку k-го актива в момент времени t:

$$W_t = \sum_{n=1}^{N} W^n_t, \qquad \mu^k_t = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^{N} \lambda^{n,k}_t W^n_t.$$

Мы предполагаем, что величины дивидендов A^k_{t+1} являются афинными функциями от μ^k_t:

$$A^k_{t+1} = \alpha^k_{t+1} + \beta^k_{t+1} \mu^k_t, \tag{6}$$

где α_{t+1}^k и β_{t+1}^k — произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \tag{7}$$
$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \tag{8}$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными функциями a_{t+1}^k, b_{t+1}^k.

Соотношения (6)–(8) означают, что величина дивидендов A_{t+1}^k в следующий момент времени $t+1$ может зависеть от текущего состояния рынка (которое зависит от истории случайных факторов $\bar{s}_t$, вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и прошлых действий агентов $\bar{\lambda}_{t-1}$), будущего состояния случайного фактора s_{t+1}, и инвестиционных пропорций λ_t агентов в текущий момент t, но зависимость от λ_t может быть только через μ_t^k. Почему только через μ_t^k? Где мы потом это используем? И ведь current market state включает W_t^n - а они зависят от λ_t через A_t^k?

Отметим, что μ_t^k представляет собой *взвешенную стратегию* агентов: стратегия n-го агента взвешивается с весом W_t^n/W_t, равным доле его капитала на рынке.

Для того, чтобы модель не вырождалась, мы будем требовать, чтобы для всех $t \geq 1$ и любых значений $\bar{s}_t$, $\bar{W}_0$, $\bar{\lambda}_{t-2}$ выполнялось

$$\sum_{k=1}^{K} (a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})) > 0. \tag{9}$$

Замечание 1. Отметим, что наша модель позволяет рассматривать не только дивиденды, афинно зависящие от *относительных* долей капиталов μ_t^k, но и дивиденды, афинно зависящие от *абсолютных* долей капиталов $v_t^k = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n$.

Действительно, пусть дивиденды имеют вид

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \widetilde{\beta}_{t+1}^k v_t^k, \tag{10}$$

где $\widetilde{\beta}_{t+1}^k(\bar{\omega}_{1\ldots t+1}) = \widetilde{b}_{t+1}^k(\bar{\omega}_{1\ldots t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{1\ldots t-1}(\bar{\omega}_{1\ldots t-1}))$, а функции α_{t+1}^k такие же, как раньше. Тогда для того, чтобы свести (10) к (6), положим

$$b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) = \widetilde{W}_t(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) \widetilde{b}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}),$$

где $\widetilde{W}_t = \sum_{n=1}^N \widetilde{W}_t^n$ с

$$\widetilde{W}_0^n = W_0^n, \qquad \widetilde{W}_t^n(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_{t-1}^{n,k} \widetilde{W}_{t-1}^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_{t-1}^{n,k} \widetilde{W}_{t-1}^n} A_t^k, \ t \geq 1.$$

Функции $\widetilde{W}_t^n$ показывают зависимость капитала агента от полной инфорвации игры: то есть зная вектор начальных капиталов $\bar{W}_0$, историю стратегий агентов $\bar{\lambda}_{t-1}$ и историю состояний случайного фактора $\bar{\omega}_{1\ldots t}$, Или случайного фаткорА? от одного случайного фактора же зависит все в каждый момент времени? мы можем восстановить траекторию капитала агента.

3 Выживающие и лог-оптимальные стратегии

3.1 Определения выживающей и лог-оптимальной стратегии

Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой

$$r_t^n := \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Следующие определения вводят два основных понятния в работе.

Определение 1. Стратегия Λ^n n-го агента называется *выживающей*, если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ с заданной стратегией Λ^n и произвольными стратегиями Λ^j агентов $j \neq n$, выполняется неравенство $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$

Согласно определению, выживающие стратегии позволяют агенту сохранять ненулевую долю от общего капитала рынка всне зависимости от того, какие стратегии используют остальные агенты.

Может показаться, что рассмотрение выживающих стратегий значительно ограничивает спектр стратегий, потому что о "выживании"приходится думать только когда "все идет плохо". Однако это не так. Оказывается, что в большинстве моделей эволюционных финансов класс выживающих стратегий совпадает с классом непобеждаемых стратегий, которые на длинном горизонте с точки зрения накопления капитала работают не хуже, чем любая другая стратегия. Другими словами, чтобы не быть вытесненной с рынка, стратегия должна быть непобеждаемой. Более того, оказывается, что выживающие стратегии определяют структуру рынка на длинном горизонте. Более подробно мы поговорим про это в разделе 3.3.

Чтобы найти выживающую стратегию, мы будем искать *лог-оптимальную стратегию*, определение котрой мы сейчас дадим.

Перед этим напомним, что случайная величина ξ_t, согласованная с порожденной случайным процессом s_t фильтрацией, называется *субмартингалом*, если $\mathrm{E}\,|\xi_t| < \infty$ и $\mathrm{E}_t\,\xi_{t+1} \geq \xi_t$ п.н. для всех $t \geq 0$, где $\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot \mid \bar{s}_t)$ обозначает условное ожидание при условии $\bar{s}_t = (s_1, \dots, s_t)$. Для $t = 0$, положим $\mathrm{E}_0(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot)$.

Определение 2. Стратегия Λ^i называется *лог-оптимальной* , если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$, где Λ^n - данная стратегия, выполнено $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\ln r_t^n \text{ является субмартингалом.} \tag{11}$$

Понятие лог-оптимальной стратегии в смысле этого определения похоже на понятие лог-оптимальной стратегии в классической теории роста капитала с экзогенными ценами. В этой теории стратегия называется лог-оптимальной, если использование никакой другой стратегии не может улучшить ожидаемый логарифмический капитал. Хорошо известо, что такая стратегия максимизирует асимптотическую скорость роста капитала агента (см. [1]). А в итоге в классическом смысле лог-оптимальная стратегия максимизирует асимптотическую скорость роста капитала или ожидаемые лог-ретерны? В разделе 5 мы покажем, что в частном случае, когда наша модель сводится к модели с экзогенными выплатами, Определение 2 соответствует той же самой стратегии, которяа максимизирует ожидаемые лог-ретерны.

Однако в общем случае в нашей модели лог-оптимальная стратегия может не максимизировать абсолютное значение капитала W_t^n агента.

Более того, стратегия, максимизирующая W_t^n в том или ином смысле вне зависимости от стратегий других агентов в общем случае не существует, потому что капитал агента зависит от всего профиля стратегий через эндогенные цены активов и дивиденды.

Таким образом, в нашей модели агент, который использует лог-оптимальную стратегию, не заботится об абсолютном значении своего капитала, но хочет быть не хуже рынка в смысле определения (11).

Можно привети пример рынка, где лог-оптимальная стратегия в смсле Определения 2 обладает свойством, что заставляет капитал всех агентов стремиться к нулю, причем капитал этой стратегии стремится к нулю медленнее, чем капитал других агентов (см. [6]).

Утверждение 1. Любая лог-оптимальная стратегия является выживающей.

Доказательство. Известно, что неположительный субмартингал с вероятностью 1 имеет конечный предел при $t \to \infty$; (см.[12, Ch. 7.4]). В нашем случае $r_t^n \leq 1$, поэтому $\ln r_t^n \leq 0$. Тогда, если Λ^n является лог-оптимальной стратегией, то $\lim_{t\to\infty} \ln r_t^n$ конечен, откуда следует, что $\inf_{t\geq 0} r_t^n > 0$. А почему предел не ноль? □

3.2 Построение лог-оптимальной стратегии

Для $t \geq 1$ определим Δ^K-значные функции $g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})$, $\lambda^* \in \Delta^K$, по формулам

$$g_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) = a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + \lambda^* b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}).$$

Аргументы $\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}$ имеют такой же смысл, как в (7)–(8). Для краткости, далее будем использовать обозначение $\bar{\chi}_t = (\bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$ для пары из вектора начального капитала и истории игры. Например, будем писать $g_t = g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_{t-1})$. Для $t = 0$, положим $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Пусть $\mathrm{P}_t(\cdot) = \mathrm{P}(\cdot \mid \bar{s}_t)$ and $\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot \mid \bar{s}_t)$ обозначают условную вероятность и условное ожидание при условии $\bar{s}_t$ (где $\mathrm{P}_0(\cdot) = \mathrm{P}(\cdot)$, $\mathrm{E}_0(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot)$). Введем функции $L_t = L_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $t \geq 0$, со значениями в Δ_K, определенные по формуле

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathrm{E}_t\left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right).$$

Мы будем предполагать, что условные вероятности $\mathrm{P}_t(\cdot)$ и ожидания $\mathrm{E}_t(\cdot)$ вычисляются по отношению к некоторому фиксированному варианту регулярного условного распределения $\bar{s}_{t+1}$, из чего следует, что функции L_t^k совместно измеримы по своим аргументам. это что значит? Для $t = 0$, функция $L_0 = L_0(\lambda^*, \bar{\chi}_0)$ не зависит от состояний случайного фактора.

Утверждение 2. Для любого $t \geq 0$ существует измеримая функция $\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ со значениями в Δ^K со следующими свойствами:

(a) для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено:

$$\mathrm{P}_t\left(\sum_{k=1}^{K} g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) = 0\right) = 0 \text{ п.н.}, \tag{12}$$

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^{K} g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right) \leq 1 \text{ п.н.}, \quad k = 1, \ldots, K, \tag{13}$$

(b) Λ_t^* — неподвижная точка отображения L_t, то есть для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$L_t(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) \text{ п.н.}, \tag{14}$$

где для $t = 0$ полагаем $\Lambda_0^* = \Lambda_0^*(\bar{\chi}_0)$ зависит только от $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Следующая теорема является первым главным результатом работы.

Теорема 1. Стратегия $\Lambda^* = (\Lambda_t^*)_{t=0}^{\infty}$, состоящая из функций, удовлетворяющих свойствам (12)–(14) является лог-оптимальной, а значит, выживающей.

К сожалению, в общем случае нет метода нахождения неподвижной точки у (14). Тем не менее, теорема 1 интересна тем, что в ней доказывается существование лог-оптимальной стратегии, что в нашей модели было неочевидно с самого начала. В слудующем разделе мы приведем примеры, в которых лог-оптимальная стратегия находится в явном виде.

Замечание 2. (a) Функции Λ_t^* со свойствами (12)–(14) в общем случае не единственны. Теорема 1 утверждает, что любая последовательность неподвижных точек этого отображения составляет лог-оптимальную стратегию.

Приведем пример, когда лог-оптимальная стратегия неединственна. Пусть $a_t^k \equiv 0$, $b_t^k \equiv 1$ для всех t, k, и начальный капитал рынка $W_0 = 1$. Тогда уравнение динамики капитала (5) после подстановки (6) в (5) и сокращения суммы в знаменателе превращается в

$$W_{t+1}^n = \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Отсюда $W_t = 1$ для всех $t \geq 0$, то есть капиталы W_t^n не изменяются вне зависимости от того, какие стратегии они используют.

(b) Если стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (12) and (14), тогда достаточным условиям для выполнения (13), которое нам дальше будет нужно, является следующее: для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$

$$\mathrm{P}_t(a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) > 0) > 0 \text{ п.н.}, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Действительно, в этом случае (13) выполнено, так как $L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$ для всех $\lambda^* \in \Delta^K$, откуда $\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$ и поэтому

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right) \le \frac{L_t^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)}{\Lambda_t^{*k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)} = 1.$$

Откуда неравенство?

3.3 Лог-оптимальная стратегия определяет агрегированное поведение рынка

Как было отмечено выше, дроби μ_t^k можно рассматривать как взвешенную сумму стратегий всех агентов. Следующий результат показывает, что при некоторых дополнительных условиях, если хотя бы один агент использует лог-оптимальную стратегию, то μ_t^k стремяется к этой оптимальной стратегии при $t \to \infty$ с вероятностью единица.

Теорема 2. Пусть стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (12), (14) и следующей более сильной версии условия (13): существует $\varepsilon > 0$ такой что для всех $t \ge 0$ и $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right) \le 1 - \varepsilon \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K. \tag{15}$$

Тогда, если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ агент n использует стратегию Λ^*, то выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ a.s.},$$

где $\lambda_t^n = \lambda_t^n(\bar{s}_t)$ и $\mu_t = \mu_t(\bar{s}_t)$ обозначают, соответственно, реализацию стратегии n-го агента и реализацию взвешенной стратегии агентов в этом профиле стратегий (см. (1)). В частности, $\|\lambda_t^n - \mu_t\| \to 0$ при $t \to \infty$.

В общем случае, условие (15) проверить лостаточно сложно. Однако в случае н.о.р. коэффициентов α_t^k, β_t^k это удается сделать. Более того, мы докажем, что в этом случае Λ^* окажется единственной выживающей стратегией в классе константных стратегий (при некоторых дополнительных условиях). В этом заключается трейти главный результат работы.

Теорема 3. Пусть последовательность состояний случайного фактора s_t, $t \ge 1$ состоит из н.о.р. случайных величин, и коэффициенты α_t^k, β_t^k из (6)–(8) зависят только от s_t, то есть $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$. Тогда:

(a) Существует константная лог-оптимальная стратегия $\Lambda_t^* \equiv \Lambda^* \in \Delta^K$.

(b) Пусть дополнительно

$$\mathrm{P}(\alpha_t^k > 0) > 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, K. \tag{16}$$

Тогда стратегия Λ^* - это единственная выживающая стратегия в классе константных стратегий и $\Lambda^{*,k} > 0$, $k = 1, \dots, K$, то есть стратегия оказывается полностью диверсифицированной. Более того, Λ^* удовлетворяет (15). В частности, для любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$, в котором какой-то из агентов использует стратегию Λ^*, выполняется, что $\mu_t \to \Lambda^*$ с вероятностью единица при $t \to \infty$.

(c) Пусть дополнительно к (16), выполнено, что случайные величины $\alpha_t^k/\Lambda^{*,k} + \beta_t^k$ линейно независимы, то есть если $\sum_{k=1}^K c_k(\alpha_t^k/\Lambda_k^* + \beta_t^k) = 0$ п.н. для некоторых констант c^k, то $c^k = 0$ для всех $k = 1, \dots, K$.

Тогда в любом профиле стратегий, в котором некоторый агент использует стратегию Λ^*, а остальные агенты используют произвольные константные полностью диверсифицированные стратегии ($\Lambda^{n,k} > 0$ для всех n, k), выполнено $r_t^n \to 0$ п.н. при $t \to \infty$ для любого агента n, который использует стратегию $\Lambda^n \neq \Lambda^*$.

4 Численный пример

5 Связь с другими моделями

1. Модель с экзогенными выплатами. Предположим, что в нашей модели $Y_t^n \equiv 0$. Тогда уравнение капитала принимает вид

$$W_{t+1}^m = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{m,n} W_t^m X_{t+1}^n.$$

Это известное уравнение, которое определяет стоимость самофинансирующейся стратегии в модели рынка с экзогенными выплатами X_t^n. Например, если цены акций обозначаются S_t^n, тогда естественно положить $X_t^n = S_t^n / S_{t-1}^n$. В этом случае капитал агента зависит только от его стратегии и не зависит от стратегий остальных агентов. Обозначим соответствующий процесс капиталов за $W_t(\lambda)$.

Стратегия $\widehat{\lambda}$ называется *стратегией оптимального роста* (или *numeraire portfolio*), если для любой другой стратегии λ

$$\frac{W_t(\lambda)}{W_t(\widehat{\lambda})} \text{ является субмартингалом.}$$

Это определение эквивалентно нашему определению стратегии оптимального относительного роста в случае $Y_t^n \equiv 0$.

Согласно классическому езультату из AlgoetCover88, если лог-ретерны интегрируемы (то есть $\mathrm{E} \ln X_{t+1}^n < \infty$), тогда стратегия оптимального роста может быть найдена путем максимизации ожидаемых лог-ретернов портфеля:

$$\widehat{\lambda}_t \in \arg\max\nolimits_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \frac{W_{t+1}(\lambda)}{W_t(\lambda)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \arg\max\nolimits_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^N \lambda_t^n X_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Если лог-ретерны не интегрируемы, то задача может не иметь решения. Однако если ввести относительные ретерны $R_t^n = X_t^n / \sum_{i=1}^N X_t^i$, тогда стратегия оптимального роста может быть найдена как

$$\widehat{\lambda}_t \in \arg\max_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^N \lambda_t^n R_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{17}$$

Эта максимизационная задача всегда имеет решение при условии, что $\sum_{n=1}^N R_t^n > 0$ п.н. Однако решение может быть неединственно, если, например, R_t^n линейно зависимы.

Покажем, что наша стратегия $\widehat{\lambda}_t$ является решением задачи максимизации лог-ретернов, точнее, любая неподвижная точка из Леммы 1 является решением задачи максимизации лог-ретернов.

Теорема 4. Пусть $Y_t^n \equiv 0$. То есть

$$\lambda_t^n = \mathrm{E}_t\left(\frac{\lambda^n X_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N \lambda^i X_{t+1}^i}\right). \tag{18}$$

$$R_t^n = \frac{X_t^n}{\sum_{i=1}^N X_t^i}$$

Тогда если стратегия оказалась полностью диверсифицированной, то

$$\widehat{\lambda}_t \in \arg\max_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^N \lambda_t^n R_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Доказательство. 1) Пусть $\widehat{\lambda}_t$ полностью диверсифицирована, то есть $\widehat{\lambda}_t^n > 0 \forall n$ (иначе мы не сможем поделить (*) на $\widehat{\lambda}_t^n$.

Мы хотим доказать, что $\widehat{\lambda}_t$ максимизирует

$$f(\lambda) := \mathrm{E}_t\left(\ln \sum_{n=1}^N \lambda_t^n R_{t+1}^n\right).$$

по $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримым векторам λ со значениями в Δ_N.

Пусть η — произвольный вектор из Δ_N. Тогда, пользуясь неравенством $\ln x \leq x - 1$, получаем:

$$f(\eta) - f(\lambda) = \mathrm{E}_t\left(\frac{\sum_{n=1}^N X_{t+1}^n \eta^n}{\sum_{n=1}^N X_{t+1}^n \lambda_t^n}\right) \leq \mathrm{E}_t\left(\ln \frac{\sum_{n=1}^N X_{t+1}^n \eta^n}{\sum_{n=1}^N X_{t+1}^n \lambda_t^n}\right) - 1 = 0,$$

поскольку

$$\lambda_t^n = \mathrm{E}_t\left(\frac{\lambda^n X_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N \lambda^i X_{t+1}^i}\right),$$

делим обе части на λ_t^n, умножаем на η^n, суммируем по n и получаем требуемое.

2) Если же стратегия $\widehat{\lambda}_t$ оказалась не полностью диверсифицированной, то она не обязательно максимизирует лог-ретерны. Например, возьмем $X^1 =$

$100, X^2 = X^3 = 1$, тогда стратегия $\lambda^1 = 0, \lambda^2 = \frac{1}{2}, \lambda^3 = \frac{1}{2}$ является неподвижной точкой отображения (4). Действительно,

$$\begin{cases} \lambda^1 = \frac{0\cdot 1}{0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1} = 0 \\ \lambda^2 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1} = 0 \\ \lambda^3 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{0\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^1 = \frac{X^1}{X^1+X^2+X^3} = \frac{100}{102} \\ R^2 = \frac{X^2}{X^1+X^2+X^3} = \frac{2}{102} \\ R^3 = \frac{X^3}{X^1+X^2+X^3} = \frac{2}{102} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t\right) = \ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n = \ln\left(0 \cdot \frac{100}{102} + \frac{1}{2}\frac{2}{102} + \frac{1}{2}\frac{2}{102}\right) = \ln \frac{1}{51}$$

При этом очевидно, что стратегия $\lambda = (1, 0, 0)$ является неподвижной точкой (4), а

$$\ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n = \ln\left(1 \cdot \frac{100}{102}\right) > \ln \frac{1}{51}$$

То есть не полностью диверсифицированная стратегия $\lambda = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ хоть и является неподвижной точкой, но не максимизирует лог-ретерны.

□

Вставить доказательство того, что наподвижная точка максимизирует логретерны в самом последнем 3м случае из раздела про связь с другими моделями

6 Доказательства основных результатов

Лемма 1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^N$ — два вектора, такие что $\sum_n \alpha^n \leq 1$, $\sum_n \beta^n \leq 1$ и для всех $n = 1, \ldots, N$ выполнено, что если $\beta^n = 0$, то $\alpha^n = 0$. Тогда верно следующее:

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} \geq \frac{\|\alpha - \beta\|^2}{4} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha^n - \beta^n), \tag{19}$$

где полагаем $\alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} = 0$ если $\alpha^n = 0$ or $\beta^n = 0$.

Доказательство. Используя неравенство $-\ln x \geq 2(1 - \sqrt{x})$ для всех $x > 0$, мы получем

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} = -\sum_{n:\alpha^n \neq 0} \alpha^n \ln \frac{\beta^n}{\alpha^n} \geq 2 \sum_{n=1}^{N} (\alpha^n - \sqrt{\alpha^n \beta^n})$$
$$= \sum_{n=1}^{N} (\sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\beta^n})^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha^n - \beta^n).$$

Тогда мы можем использовать неравенство $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq (x-y)^2/4$, которое верно для всех $x, y \in [0,1]$, и получить (19). $\square$

7 Заключение

8 Список литературы

[1] Algoet, P. H. and Cover, T. M. (1988). Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, 16(2):876–898.

[2] Aliprantis C. D., and Border K. C. (2006). Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide. *Springer*, 3rd edition, 591–600.

[3] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013). Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144.

[4] Breiman, L. (1961). Optimal gambling systems for favorable games. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1:63–68.

[5] Bharucha-Reid A. T. (1976). Fixed point theorems in probabilistic analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(5):641–657.

[6] Drokin, Y. and Zhitlukhin, M. (2020). Relative growth optimal strategies in an asset market game. *Annals of Finance*, 16:529–546.

[7] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016). Evolutionary behaviorial finance. In Haven, E. et al., editors, *The handbook of Post Crisis Financial Modelling*, 214-234. Palgrave Macmillan UK.

[8] Holtfort, T. (2019). From standard to evolutionary finance: a literature survey. *Management Review Quarterly*, 69(2):207–232.

[9] Karatzas, I. and Kardaras, C. (2007). The numeraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, 11(4):447–493.

[10] Kelly, Jr, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal*, 35(4):917–926.

[11] Shapley, L. and Shubik, M. (1977). Trade using one commodity as a means of payment. *Journal of political economy*, 85(5):937-968.

[12] Shiryaev, A.N. (2019). Probability-2. *Springer*, 3rd edition.