О размерах компонент связности в случайном гиперграфе

Мирмоминов Руслан
МГУ им. М. В. Ломоносова
Кафедра теории вероятностей, группа 609
Научный руководитель: Д. А. Шабанов, профессор, д.ф.-м.н.

Случайный гиперграф

Гиперграф — пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть некоторая совокупность подмножеств множества V, называемых *рёбрами* гиперграфа. Гиперграф является *k-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно k вершин. В работе рассматривается случайный гиперграф биномиальной модели $H_k(n, p)$ – схемы Бернулли на ребрах полного k-однородного гиперграфа на n-вершинах: каждое k-подмножество вершин включается в качестве ребра в $H_k(n, p)$ независимо от других с вероятностью p. Нас интересует случай

$$p = p(n) = \lambda(k-2)!n^{1-k},$$

где $\lambda = \lambda(n) \sim 1$ при $n \to +\infty$, а k не зависит от n.

Сложность компоненты связности

Будем считать, что рёбра гиперграфа $H = (V, E)$ связаны, если их пересечение непусто. Если гиперграф является k-однородным и $W \subset V$ — его компонента связности, имеющая m ребер и t вершин, то *сложностью* W (также используют термин *циклический индекс*) называется величина

$$\ell(W) = (k-1)m - t + 1.$$

Пусть $C_i(n)$ обозначает i-й по величине размер компоненты случайного гиперграфа $H_k(n,p)$. Сложность соответствующей компоненты обозначим $\sigma_i(n)$.

История

Теорема (Эрдеш, Реньи)

Рассмотрим модель Эрдеша Реньи $G(n, p)$. Пусть $p = c/n$, где $c > 0$ — фиксировано и не зависит от n.
1) Если $c < 1$, то имеет место следующая сходимость по вероятности

$$\frac{C_1(n)}{\ln n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha(c) = \frac{1}{c - \ln c - 1}, \quad n \to \infty.$$

2) Если же $c > 1$, то имеет место следующая сходимость по вероятности

$$\frac{C_1(n)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta(c), \quad n \to \infty,$$

где $\beta(c)$ — это единственное решение уравнения $\beta + e^{-\beta c} = 1$ на интервале $(0, 1)$. При этом

$$\frac{C_2(n)}{\ln n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha(c) = \frac{1}{c - \ln c - 1}, \quad n \to \infty.$$

Экскурсии винеровского процесса

Пусть $(W_t)_{t\geq 0}$ — винеровский процесс, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда положим

$$W_t^\alpha = W_t + \alpha \cdot t - \frac{1}{2}t^2, \quad A_t^\alpha = W_t^\alpha - \min_{0\leq s\leq t} W_s^\alpha, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим $\Gamma = \{\gamma_j, j \in \mathbb{N}\}$ — упорядоченный по убыванию длин набор интервалов, на которых A_t^α положителен. Далее, введем точечный процесс $N = N(A^\alpha) = (N_t, t \geq 0)$, который удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{P}\left(N_t \text{ имеет точку на } [t, t+dt] \middle| A_u^\alpha, u \leq t\right) = A_t^\alpha \cdot dt.$$

Пусть μ_j — это число точек N_t внутри интервала γ_j, $j \in \mathbb{N}$. Последовательность $(\gamma_j, \mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ называется *экскурсиями* процесса A_t^α.

Случайный граф

В случае графов, $k = 2$, модель $H_2(n, p)$ совпадает с классической моделью Эрдеша–Реньи $G(n, p)$.
Напомним, что $\sigma_j(n)$ — это сложность j-й по размеру компоненты, $C_j(n)$ – её размер. Имеет место следующий результат, доказанный Олдосом.

Теорема

При $p(n) = n^{-1} + \alpha n^{-\frac{4}{3}}$ *выполнена сходимость*

$$\left((n^{-2/3} \cdot C_j(n), \sigma_j(n)), j \in \mathbb{N}\right) \xrightarrow{d} ((|\gamma_j|, \mu_j), j \in \mathbb{N}) \quad \text{при } n \to +\infty,$$

где сходимость по распределению понимается, как слабая сходимость в метрическом пространстве

$$\ell_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{+\infty} \times \mathbb{R}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} y_k^2 < +\infty\right\}.$$

Случайный гиперграф

В модели $H_k(n, p)$ при $k \geq 3$ Боллобашем и Риорданом получено обобщение результата Олдоса для размера компонент.

Теорема

Пусть $k \geq 3$, *и* $p = p(n) = \lambda(k-2)!n^{-k+1}$, *где* $\lambda = \lambda(n)$ *удовлетворяет*

$$(\lambda - 1)^3 n \to (k-1)^2 \alpha, \quad n \to +\infty,$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. *Пусть* $C_i(n)$ *– размеры компонент связности* $H_k(n, p)$, *отсортированные по невозрастанию. Тогда для любого* $r \in \mathbb{N}$

$$(k-1)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} \cdot (C_i(n))_{i=1}^r \xrightarrow{d} (|\gamma_i|)_{i=1}^r, \quad n \to +\infty.$$

Результат работы

В дипломной работе получен результат про сложность компонент, аналогичный результату Олдоса для модели $G(n,p)$.

Теорема

Пусть $k \geq 3$, *и* $p = p(n) = \lambda(k-2)!n^{-k+1}$, *где* $\lambda = \lambda(n)$ *удовлетворяет*

$$(\lambda - 1)^3 n \to (k-1)^2 \alpha, \quad n \to +\infty,$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. *Пусть* $\sigma_i(n)$ *– сложности компонент связности* $H_k(n,p)$, *отсортированных по невозрастанию размеров. Тогда для любого* $r \in \mathbb{N}$

$$(\sigma_i(n))_{i=1}^r \xrightarrow{d} (\xi_i)_{i=1}^r, \quad n \to +\infty,$$

где ξ_i *– число точек* $N((A^\alpha)^{k-1})$ *внутри интервала* γ_i, $i \in \mathbb{N}$.

Идея доказательства

Доказательство основано на алгоритме обхода в ширину, согласно которому вершины гиперграфа просматриваются в некотором порядке. Вводится ассоциированный с ним случайный процесс X_t, где $t \in \overline{0, n}$ — номер шага алгоритма. Оказывается, что процесс

$$X_t^* := \frac{X_{t(k-1)^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}}}{((k-1)n)^{\frac{1}{3}}}$$

сходится по распределению к A_t^α. Утверждение теоремы получается из этого факта применением двух технических лемм.

Спасибо за внимание.