Теорема 1. *Стратегия $\widehat{\Lambda}$, определенная в Лемме 1, является стратегией оптимального относительного роста.*

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N_+$ — два вектора, такие что $\sum_n \alpha^n \leq 1$, $\sum_n \beta^n \leq 1$ и для всех $n = 1, \dots, N$ выполнено, что если $\beta^n = 0$, то $\alpha^n = 0$. Тогда верно следующее:*

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} \geq \frac{\|\alpha - \beta\|^2}{4} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha^n - \beta^n), \tag{1}$$

где полагаем $\alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} = 0$ если $\alpha^n = 0$ or $\beta^n = 0$.

Доказательство. Используя неравенство $-\ln x \geq 2(1 - \sqrt{x})$ для всех $x > 0$, мы получем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} &= -\sum_{n\,:\,\alpha^n \neq 0} \alpha^n \ln \frac{\beta^n}{\alpha^n} \geq 2 \sum_{n=1}^{N} (\alpha^n - \sqrt{\alpha^n \beta^n}) \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\beta^n})^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha^n - \beta^n).\end{aligned}$$

Тогда мы можем использовать неравенство $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq (x - y)^2/4$, которое верно для всех $x, y \in [0, 1]$, и получить (1). □

Доказательство Теоремы 1. Шаг 1. Без ограничени общности, можем считать, что количество агентом в модели $N = 2$ (если нет, то вводим репрезентативного агента).

Обозначим через r_t относительный капитал первого агента, то есть

$$r_t = \frac{W^1_t}{C_t}, C_t = W^1_t + W^2_t.$$

Пусть $\widehat{\lambda}_t(\omega) = \widehat{\Lambda}_t(\omega, C_{t-1}(\omega))$ и обозначим за $\bar{\lambda}_t = (\bar{\lambda}^1_t, \dots, \bar{\lambda}^N_t)$ репрезентативные пропорции двух агентов, то есть

$$\bar{\lambda}^n_t(\omega) = r_t(\omega)\lambda^{1,n}_t(\omega) + (1 - r_t(\omega))\lambda^{2,n}_t(\omega).$$

Также введем обозначение

$$\mu^n_t = \frac{\widehat{\lambda}^n_t}{\bar{\lambda}^n_t}.$$

Из уравнения капитала мы видим, что

$$W^1_{t+1} = r_t \sum_{n=1}^{N} (C_t \widehat{\lambda}^n_t X^n_{t+1} + \mu^n_t Y^n_{t+1}), \qquad C_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} (C_t \bar{\lambda}^n_t X^n_{t+1} + Y^n_{t+1}).$$

$$\Rightarrow \ln r_{t+1} - \ln r_t = \ln \frac{W^1_{t+1}}{C_{t+1}} - \ln r_t = \ln W^1_{t+1} - \ln C_{t+1} - \ln \frac{W^1_{t+1}}{\sum_{n=1}^{N} (C_t \widehat{\lambda}^n_t X^n_{t+1} + \mu^n_t Y^n_{t+1})} =$$

$$\ln\Bigg(\sum_{n=1}^{N}(C_t\widehat{\lambda}_t^n X_{t+1}^n+\mu_t^n Y_{t+1}^n)\Bigg)-\ln C_{t+1}=\ln\Bigg(\sum_{n=1}^{N}(C_t\widehat{\lambda}_t^n X_{t+1}^n+\mu_t^n Y_{t+1}^n)\Bigg)-\ln\Bigg(\sum_{n=1}^{N}(C_t\bar{\lambda}_t^n X_{t+1}^n+Y_{t+1}^n)\Bigg).$$

Шаг 2. Для того, чтобы доказать, что r_t — субмартингал, нам нужно оценить снизу нелем следующее выражение

$$\mathrm{E}_t \ln r_{r+1} - \ln r_t \tag{2}$$

После прибавления и вычитания $\sum_i (C_t\widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)$ перепишем это выражение в виде

$$\mathrm{E}_t \ln r_{r+1} - \ln r_t = F_t + G_t, \tag{3}$$

где

$$F_t = \mathrm{E}_t \ln\Bigg(\frac{\sum_n (C_t\widehat{\lambda}_t^n X_{t+1}^n + \mu_t^n Y_{t+1}^n)}{\sum_i (C_t\widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\Bigg), \qquad G_t = \mathrm{E}_t \ln\Bigg(\frac{\sum_i (C_t\widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}{\sum_n (C_t\bar{\lambda}_t^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n)}\Bigg).$$

Шаг 3. Докажем, что $F_t + G_t \geq 0$.

Пусть

$$d_t^n = 1 - \mathrm{E}_t \frac{C_t X_{t+1}^n}{\sum_i (C_t\widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}, \tag{4}$$

тогда из определения стратегии $\widehat{\Lambda}$ имеем:

$$d_t^n \widehat{\lambda}_t^n = \mathrm{E}_t\Bigg(\frac{Y_{t+1}^n}{\sum_i (C_t\widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\Bigg), \tag{5}$$

Шаг 4. Для того, чтобы дальше в доказательстве применить Лемму 1 для $\alpha^n = d_t^n \widehat{\lambda}_t^n, \beta^n = d_t^n \bar{\lambda}_t^n$, нужно, чтобы было выполнено, что $\sum_n \alpha^n \leq 1$, $\sum_n \beta^n \leq 1$.

Для $d_t^n \widehat{\lambda}_t^n$ это очевидно выполнено в силу (5). А для того, чтобы $\sum_n d_t^n \bar{\lambda}_t^n$ было не больше единицы, в силу суммируемости лямбд в единицу достаточно доказать, что $d_t^n \geq 0$ и $d_t^n \leq 1$. Последнее очевидно из (4), потому что мы из единицы вычитаем что-то положительное. А вот $d_t^n > 0$ благодаря предположению

$$\mathrm{P}(Y_{t+1}^n > 0 \mid \mathcal{F}_t) = 1 \text{ a.s.} \tag{6}$$

Заметим, что более слабого условия

$$\mathrm{P}(Y_{t+1}^n > 0 \mid \mathcal{F}_t) > 0 \text{ a.s.} \tag{7}$$

будет недостаточно для выполнения $d_t^n > 0$, потому что можно взять следующий пример на том множестве, на котором $Y = 0$, и тогда с положительной вероятностью будет $d_t^n < 0$.

Например, для $X = (1, 10), Y = (0, 0)$ имеем $\lambda = (1, 0)$ - неподвижная точка, при этом $d_t^1 = 1 - \frac{c\cdot 10}{c} = 1 - 10 = -9 < 0$

Шаг 6. Докажем, что если $\mathrm{P}(Y_{t+1}^n > 0 \mid \mathcal{F}_t) = 1$ a.s., то все $d_t^n \geq 0$.

Имеем по определению:

$$\lambda_t^n = \mathrm{E}_t\Bigg(\frac{c\lambda^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\Bigg).$$

Делим с обеих сторон на λ_t^n А мы где предположили, что стратегия полностью диверсифицированная? Или она такая получается в случае, когда Y>0? Вроде же поэтому, просто из определения лямбды как неподвижной точки - там правая часть просто больше нуля?

Получаем

$$1 = \mathrm{E}_t\left(\frac{cX_{t+1}^n + \frac{Y_{t+1}^n}{\lambda_t^n}}{\sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\right).$$

$$\Rightarrow 1 - \mathrm{E}_t\left(\frac{cX_{t+1}^n}{\lambda_t^n \sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\right) = \mathrm{E}_t\left(\frac{Y_{t+1}^n}{\lambda_t^n \sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\right).$$

$$\Rightarrow d_t^n = \mathrm{E}_t\left(\frac{Y_{t+1}^n}{\lambda_t^n \sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\right) > 0.$$

Последнее верно в силу того, что раз $P(Y_t > 0 \mid \mathcal{F}_t) = 1$ и мера непрерывна, то $P(Y_t > 0) = \lim P(Y_t > \frac{1}{n} \mid \mathcal{F}_t) = (?)1$, то значит для какого-то n выполнено, что $Y_t > \frac{1}{n}$ на множестве положительной меры. Значит, и само условное матожидание (которое есть интеграл по условному распределению) больше нуля.

Шаг 5. Используя выпуклость вверх логарифма и применяя Лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} F_t &\geq \mathrm{E}_t\left(\sum_{n=1}^N \frac{Y_{t+1}^n}{\sum_i (C_t \widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)} \ln \mu_t^n\right) = \sum_{n=1}^N d_t^n \widehat{\lambda}_t^n \ln \mu_t^n \\ &= \sum_{n=1}^n d_t^n \widehat{\lambda}_t^n \ln \frac{d_t^n \widehat{\lambda}_t^n}{d_t^n \bar{\lambda}_t^n} \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N (d_t^n (\widehat{\lambda}_t^n - \bar{\lambda}_t^n))^2 + \sum_{n=1}^N d_t^n (\widehat{\lambda}_t^n - \bar{\lambda}_t^n), \end{aligned} \tag{8}$$

где для получения первого неравенства мы представили аргумент логарифма в определении F_t как выпуклую комбинацию значений

$$1,\ \mu_t^1,\ \ldots,\ \mu_t^N$$

с коэффициентами

$$\frac{\sum_n C_t \widehat{\lambda}_t^n X_{t+1}^n}{\sum_i (C_t \widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)},\quad \frac{Y_{t+1}^1}{\sum_i (C_t \widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)},\quad \ldots,\quad \frac{Y_{t+1}^N}{\sum_i (C_t \widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}.$$

Используя неравенство $\ln a \geq 1 - a^{-1}$, верное для всех $a > 0$, мы получаем

$$G_t \geq \mathrm{E}_t \frac{\sum_n C_t (\widehat{\lambda}_t^n - \bar{\lambda}_t^n) X_{t+1}^n}{\sum_i (C_t \widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)} = \sum_{n=1}^N d_t^n (\bar{\lambda}_t^n - \widehat{\lambda}_t^n). \tag{9}$$

Шаг 6. Таким образом, $F_t + G_t \geq 0$. Значит, из (3), мы видим, что $\ln r_t$ — это обобщенный субмартингал, причем еще ограниченный сверху нулем - – а значит, настоящий субмартингал.

Напомним, что последовательность S_t называется обобщенным субмартингалом, если $\mathrm{E}\,|S_0| < \infty$ and $\mathrm{E}(S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq S_{t-1}$ для всех $t \geq 1$ (но не обязательно $\mathrm{E}\,|S_t| < \infty$). Можно показать, что если $S_t \leq C_t$ для всех t с некоторой интегрируемой случайной последовательностью C_t, тогда S_t – интегрируем, а значит, настоящий субмартингал. $\square$

Напомним, что найденная оптимальная стратегия определяется как неподвижная точка отображения

$$L_t^n(\omega, c, \lambda) = \mathrm{E}_t\left(\frac{c\lambda^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\right).$$

Чтобы сформулировать Теорему 2, введем обозначение $\nu_t = (\nu_t^1, \ldots, \nu_t^N)$ для репрезентативной стратегии агентов $m = 2, \ldots, M$:

$$\nu_t^n(\omega) = \frac{1}{1 - r_t^1(\omega)} \sum_{m=2}^{m} r_t^m(\omega) \lambda_t^{m,n}(\omega).$$

Теорема 2. *Пусть первый агент следует страгегии* $\widehat{\Lambda}$. *Тогда* $\lim_{t\to\infty} r_t^1 = 1$, *п.н. на множестве*

$$\left\{\omega : \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} (d_t^n(\omega)(\lambda_t^{1,n}(\omega) - \nu_t^n(\omega)))^2 = \infty\right\}, \tag{10}$$

где d_t^n *определены как*

$$d_t^n = 1 - \mathrm{E}_t \frac{C_t X_{t+1}^n}{\sum_i (C_t \widehat{\lambda}_t^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)} \tag{11}$$

Доказательство. Шаг 1. В ходе доказательства Теоремы 1 мы получили, что $\ln r_t^1$ — это субмартингал, так как $\mathrm{E}_t \ln r_{t+1}^1 - \ln r_t^1 = F_t + G_t \geq 0$. При этом $r_t^1 \leq 1$, а значит, $\ln r_t^1 \leq 0$, то есть $\ln r_t^1$ является ограниченным субмартингалом. По следствию из теоремы Дуба о сходимости, этот субмартингал сходится.

Шаг 2. Обозначим через A_t компенсатор для r_t, то есть A_t — предсказуемая неубывающая последовательность такая, что $\ln r_t - A_t$ является мартингалом. Для компенсатора в дискретном времени есть явная формула:

$$A_t = \sum_{s=1}^{t} (\mathrm{E}_{s-1} \ln r_s^1 - \ln r_{s-1}^1)$$

Действительно, пусть мы хотим найти компенсатор для процесса Xt в дискретном времени. Если мы хотим, чтобы

$$A_t := \sum_{i=0}^{t-1} (\mathrm{E}_i X_{i+1} - X_i)$$

было компенсатором, то есть $X_{t+1} - A_{t+1}$ было мартингалом, то

$$\mathrm{E}_t\,(X_{t+1} - A_{t+1}) = X_t - A_t$$

$$\Longrightarrow \mathrm{E}_t\left(X_{t+1}\right) - X_t = A_{t+1} - A_t$$

$$\Longrightarrow A_t := \sum_{i=0}^{t-1} (\mathrm{E}_i\, X_{i+1} - X_i)$$

Итак, мы убедились, что компенсатор для $\ln r_t^1$ имеет вид

$$A_t = \sum_{s=1}^{t} (\mathrm{E}_{s-1} \ln r_s^1 - \ln r_{s-1}^1)$$

Шаг 3. При этом A_t монотонно, поскольку $\ln r_t^1$ — субмартингал, то есть $\mathrm{E}_{s-1} \ln r_s^1 - \ln r_{s-1}^1 \geq 0$, а монотонная последовательность обязательно сходится. Обозначим предел через A_∞.

Шаг 4. Докажем, что $A_\infty < +\infty$. Для этого докажем, что $\mathrm{E}\, A_\infty < +\infty$. По теореие о монотонной сходимости имеем:

$$\mathrm{E}\, A_\infty = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{E}\left(A_t\right) =$$

$$\{\ln r_t - A_t = martingale \Rightarrow \ln r_0 - A_0 = \mathrm{E}\left(\ln r_t\right) - \mathrm{E}\left(A_t\right)\} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \mathrm{E}\left(\ln r_t\right) - \ln r_0 \leq - \ln r_0 < +\infty$$

Шаг 5. A_t можно ограничить снизу:

$$A_{t+1} \geq \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{t} \sum_{n=1}^{N} (d_s^n(\lambda_s^{1,n} - \bar{\lambda}_s^n))^2 = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{t} (1 - r_s)^2 \sum_{n=1}^{N} (d_s^n(\lambda_s^{1,n} - \nu_s^n))^2.$$

Шаг 6. В результате имеем:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{t} (1 - r_s)^2 \sum_{n=1}^{N} (d_s^n(\lambda_s^{1,n} - \nu_s^n))^2 \\ \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} (d_t^n(\omega)(\lambda_t^{1,n}(\omega) - \nu_t^n(\omega)))^2 = \infty \end{cases}$$

При этом мы знаем, что r_t сходится п.н, так как $\ln r_t$ — сходящийся субмартингал по доказанному выше.
Отсюда получаем, что $\lim_{t \to \infty} r_t^1 = 1$, п.н.

Действительно, пусть

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \infty \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n < \infty \\ b_n \to c \end{cases}$$

Тогда $c = 0$.

Доказательство. Пусть $c > 0$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N : |b_n - c| < \varepsilon$.
$\Rightarrow \sum_{n=N} +\infty b_n a_n > (c - \varepsilon) \sum_{n=N} +\infty a_n = \infty$. Противоречие. □

□

1 Связь с другими результатами

1. Модель с экзогенными выплатами. Предположим, что в нашей модели $Y_t^n \equiv 0$. Тогда уравнение капитала принимает вид

$$W_{t+1}^m = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{m,n} W_t^m X_{t+1}^n.$$

Это известное уравнение, которое определяет стоимость самофинансирующейся стратегии в модели рынка с экзогенными выплатами X_t^n. Например, если цены акций обозначаются S_t^n, тогда естественно положить $X_t^n = S_t^n / S_{t-1}^n$. В этом случае капитал агента зависит только от его стратегии и не зависит от стратегий остальных агентов. Обозначим соответствующий процесс капиталов за $W_t(\lambda)$.

Стратегия $\widehat{\lambda}$ называется *стратегией оптимального роста* (или *numeraire portfolio*), если для любой другой стратегии λ

$$\frac{W_t(\lambda)}{W_t(\widehat{\lambda})} \text{ является субмартингалом.}$$

Это определение эквивалентно нашему определению стратегии оптимального относительного роста в случае $Y_t^n \equiv 0$.

Согласно классическому езультату из AlgoetCover88, если лог-ретерны интегрируемы (то есть $\mathrm{E} \ln X_{t+1}^n < \infty$), тогда стратегия оптимального роста может быть найдена путем максимизации ожидаемых лог-ретернов портфеля:

$$\widehat{\lambda}_t \in \arg\max\nolimits_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \frac{W_{t+1}(\lambda)}{W_t(\lambda)} \mid \mathcal{F}_t \right) = \arg\max\nolimits_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^N \lambda_t^n X_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Если лог-ретерны не интегрируемы, то задача может не иметь решения. Однако если ввести относительные ретерны $R_t^n = X_t^n / \sum_{i=1}^N X_t^i$, тогда стратегия оптимального роста может быть найдена как

$$\widehat{\lambda}_t \in \arg\max\nolimits_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^N \lambda_t^n R_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t \right). \tag{12}$$

Эта максимизационная задача всегда имеет решение при условии, что $\sum_{n=1}^N R_t^n > 0$ п.н. Однако решение может быть неединственно, если, например, R_t^n линейно зависимы.

Покажем, что наша стратегия $\widehat{\lambda}_t$ является решением задачи максимизации лог-ретернов, точнее, любая неподвижная точка из Леммы 1 является решением задачи максимизации лог-ретернов.

Теорема 3. *Пусть* $Y_t^n \equiv 0$. *То есть*

$$\lambda_t^n = \mathrm{E}_t\left(\frac{\lambda^n X_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N \lambda^i X_{t+1}^i} \right). \tag{13}$$

$$R_t^n = \frac{X_t^n}{\sum_{i=1}^N X_t^i}$$

Тогда

$$\widehat{\lambda}_t \in \arg\max\nolimits_\lambda \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Доказательство. 1) Пусть $\widehat{\lambda}_t$ полностью диверсифицирована, то есть $\widehat{\lambda}_t^n > 0 \forall n$ (иначе мы не сможем поделить (*) на $\widehat{\lambda}_t^n$.

Мы хотим доказать, что $\widehat{\lambda}_t$ максимизирует

$$f(\lambda) := \mathrm{E}_t\left(\ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n\right).$$

по $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримым векторам λ со значениями в Δ_N.

Пусть η — произвольный вектор из Δ_N. Тогда, пользуясь неравенством $\ln x \le x - 1$, получаем:

$$f(\eta) - f(\lambda) = \mathrm{E}_t\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_{t+1}^n \eta^n}{\sum_{n=1}^{N} X_{t+1}^n \lambda_t^n}\right) \le \mathrm{E}_t\left(\ln \frac{\sum_{n=1}^{N} X_{t+1}^n \eta^n}{\sum_{n=1}^{N} X_{t+1}^n \lambda_t^n}\right) - 1 = 0,$$

поскольку

$$\lambda_t^n = \mathrm{E}_t\left(\frac{\lambda^n X_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^{N} \lambda^i X_{t+1}^i}\right),$$

делим обе части на λ_t^n, умножаем на η^n, суммируем по n и получаем требуемое.

2) Если же стратегия $\widehat{\lambda}_t$ оказалась не полностью диверсифицированной, то она не обязательно максимизирует лог-ретерны. Например, возьмем $X^1 = 100, X^2 = X^3 = 1$, тогда стратегия $\lambda^1 = 0, \lambda^2 = \frac{1}{2}, \lambda^3 = \frac{1}{2}$ является неподвижной точкой отображения (4). Действительно,

$$\begin{cases} \lambda^1 = \frac{0\cdot 1}{0\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1} = 0 \\ \lambda^2 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{0\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1} = 0 \\ \lambda^3 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{0\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^1 = \frac{X^1}{X^1+X^2+X^3} = \frac{100}{102} \\ R^2 = \frac{X^2}{X^1+X^2+X^3} = \frac{2}{102} \\ R^3 = \frac{X^3}{X^1+X^2+X^3} = \frac{2}{102} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}\left(\ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n \mid \mathcal{F}_t\right) = \ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n = \ln\left(0 \cdot \frac{100}{102} + \frac{1}{2}\frac{2}{102} + \frac{1}{2}\frac{2}{102}\right) = \ln\frac{1}{51}$$

При этом очевидно, что стратегия $\lambda = (1, 0, 0)$ является неподвижной точкой (4), а

$$\ln \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n R_{t+1}^n = \ln\left(1 \cdot \frac{100}{102}\right) > \ln\frac{1}{51}$$

То есть не полностью диверсифицированная стратегия $\lambda = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ хоть и является неподвижной точкой, но не максимизирует лог-ретерны.

$\square$

Вставить доказательство того, что наподвижная точка максимизирует логретерны в самом последнем 3м случае из раздела про связь с другими моделями