

21 мая 2020 года, группа 309

## **Контрольная работа по теме «Основы актуарной математики»**

### **Инструкция по выполнению работы**

- На выполнение работы даётся 2 недели: с 21 мая 2020 г. (четверг) до 4 июня 2020 г. (четверг). Занятие в четверг, 21 мая, посвящается моим ответам на возможные ТЕХНИЧЕСКИЕ вопросы по работе.
  - 21 мая, в **15:00 !!!**, регистрация на лекцию = e-mail с подтверждением получения контрольной.
  - Вы можете использовать мои пособия:
    1. Г.И.Фалин. *Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем*. 3-е издание: АНКИЛ, Москва, 2007. 304 с. ISBN 978-5-86476-235-6.
    2. или 2-е издание: АНКИЛ, Москва, 2002. 262 с. ISBN 5-86476-194-х.
    3. Г.И.Фалин, А.И.Фалин. *Актуарная математика в задачах*, 2-е издание: Физматлит, Москва, 2003. 192с. ISBN 5-9221-0451-9.
- и конспекты лекций, а также искать информацию в Интернете. Вам нельзя копировать теоретические выкладки и текст (если это необходимо, всё излагаете своими словами).
- Вычисления проводить с использованием Microsoft Excel.
  - Вы **ДОЛЖНЫ**:

**«Излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.»**

Иначе говоря, решения задач должны быть очень подробными, с детальным объяснением всех идей, преобразований, с результатами всех промежуточных вычислений, точными ссылками на известные результаты (ссылаться можно только на упомянутую выше мою книгу). **Невыполнение этих требований автоматически означает, что задача не решена.**

**При совпадении в разных работах достаточно длинных фрагментов рассуждений или вычислений решение соответствующей задачи аннулируется у ВСЕХ вовлечённых сторон.**

- Решение набираете:
  - в Microsoft Word, шрифт Times New Roman 12 pt, line spacing 1.15, формулы – с помощью пакета MathType (предпочтительно) или Equation Editor, но сохраняете файл в формате **pdf** – у меня чрезвычайно подробные решения вместе с условиями заняли 14 стр. (минус 4 стр. условия = 14 стр. только!!!)
  - или в LaTeX, но сохраняете файл в формате **pdf**.
- Работу выполняете прямо в этом файле (для LaTeX создаёте аналогичный документ; \documentclass{article}). В таблице на первом листе вашей работы вы указываете: ФИО и ответы ко всем задачам (баллы проставляю я).
- Контрольные высылаете мне в четверг 4 июня на почту [MoscowMath@mail.ru](mailto:MoscowMath@mail.ru) с указанием темы по следующему образцу: Иванов\_Иван-309.

Напоминаю, что ФГОС среднего образования (приказ Минобрнауки №413 от 17 мая 2012) установил следующие требования к результатам обучения в средней школе:

« II.8.5) умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач ...

II.8.8) владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;...»

Токаева Александра	Ответ	Баллов
задача 1	(i) См. решение (ii) См. решение (iii) $_{4 5}q_{[60]+1} \approx 0.0833$	
задача 2	(i) См. решение (ii) $_{2.75}q_{84.5} \approx 0.2547327$	
задача 3	(i) $\mu \approx 0.01798476$ (ii) $_{0.5}q_{67.25} \approx 0.008952$	
задача 4	$ER \approx 36541.80$ руб	
задача 5	$P \approx \$11913.99$	
задача 6	Среднее значение $\approx £43498.91$ Ожидаемое отклонение $\approx £22378.07$	
задача 7	б) перспективный	
задача 8	$£269.90$	
задача 9	См. решение	
задача 10	(i) См. решение (ii) См. решение (iii) См. решение	

## Развернутые ответы на вопросы 1(i, ii), 2(i) , 7, 9, 10(i, ii, iii)

### 1.

(i) Символ  ${}_4|_5q_{[60]+1}$  обозначает вероятность того, что человек, которому сейчас 61 год и который прошел отбор 1 год назад, проживет еще 4 года, но умрет на протяжении последующих 5 лет, то есть его остаточное время жизни удовлетворяет условию  $4 < T_{[60]+1} < 9$ .

То есть  ${}_4|_5q_{[60]+1} = P(4 < T_{[60]+1} < 9)$ .

(ii) Таблица AM92 - это таблица, используемая для расчета смертности мужчин, застрахованных по договору пожизненного или смешанного страхования. Она является таблицей отбора риска с периодом отбора , действующим 2 года. Таблица подготовлена комитетом ИФА по непрерывному исследованию смертности ( Continuous Mortality Investigation - CMI) на основе британской страховой статистики за 1991-1994 гг.

### 2.

(i) Таблица ELT15 (Females)-это английская таблица продолжительности жизни для женщин (English Life Tables – ELT), основанная на популяционной статистике смертности в Англии и Уэльсе за 1990, 1991, 1992 гг. (для численности населения используются не данные переписи, а оценки для середины года). Таблица публикуется Управлением национальной статистики (The Office for National Statistics) Великобритании каждые 10 лет после очередной переписи населения. Техническую работу по составлению таблиц проводит Служба Правительственного Актуария (Government Actuary's Department).

Таблица ELT15 (Females) отличается от AM92 прежде всего тем, что AM92 является таблицей с отбором, а ELT15(Females) является таблицей без отбора; во-вторых, ELT15 (Females) - относится к женщинам, а AM92 - к мужчинам; наконец, таблицы публикуются разными организациями.

### 7.

#### Ответ:

б) перспективный метод

Это написано в пункте 1.3 этого закона:

В соответствии с настоящим Порядком страховые резервы по страхованию жизни формируются при условии, если методы расчета страховых тарифов основаны на уравнении эквивалентности (равенстве актуарной стоимости страховых выплат по ПРЕДСТОЯЩИМ страховым случаям и актуарной стоимости страховых премий (поступлений) на начало срока действия договора страхования), с применением таблиц смертности, заболеваемости, инвалидности, начислении в период действия договора страхования нормы (ставки) доходности. Актуарная стоимость страховых выплат (страховых поступлений) вычисляется путем дисконтирования ПРЕДПОЛАГАЕМЫХ денежных выплат (поступлений) с учетом вероятностей, с которыми такие денежные выплаты (поступления) БУДУТ произведены.

## 9.

Решение:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t P(T_x > t) dt = \int_0^n v^t \frac{s(x+t)}{s(x)} dt = \int_0^n e^{-\delta t} \frac{s(x+t)}{s(x)} dt$$

Найдем  $s(x)$ , зная вид интенсивности смертности:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x \frac{t+b}{a} dt = \frac{(t+b)^2}{2a} \Big|_0^x = \frac{1}{2a}((b+x)^2 - b^2) = \frac{x^2+2bx}{2a}$$

$$\Rightarrow s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-\frac{x^2+2bx}{2a}}$$

$$s(x+t) = e^{-\frac{(x+t)^2+2b(x+t)}{2a}} = e^{-\frac{x^2+2xt+t^2+2bx+2bt}{2a}}$$

$$\Rightarrow \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{e^{-\frac{x^2+2xt+t^2+2bx+2bt}{2a}}}{e^{-\frac{x^2+2bx}{2a}}} = e^{-\frac{t^2+2t(x+b)}{2a}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n e^{-\delta t} \frac{s(x+t)}{s(x)} dt = \int_0^n e^{-\delta t} e^{-\frac{t^2+2t(x+b)}{2a}} dt = \int_0^n e^{-\frac{t^2+2t(x+b+a\delta)}{2a}} dt = \\ &= \int_0^n e^{-\frac{(t+x+b+a\delta)^2}{2a}} e^{\frac{(x+b+a\delta)^2}{2a}} dt = e^{\frac{A^2}{2}} \int_0^n e^{-\frac{(t+x+b+a\delta)^2}{2a}} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x = \frac{t+x+b+a\delta}{\sqrt{a}}; dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}; dt = \sqrt{a} dx\} &= \sqrt{a} e^{\frac{A^2}{2}} \int_A^{A+\frac{n}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi a} e^{\frac{A^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{A+\frac{n}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \sqrt{2\pi a} e^{\frac{A^2}{2}} (\Phi(A + \frac{n}{\sqrt{a}}) - \Phi(A)) \end{aligned}$$

## 10.

(i) Проспективный резерв – это разность между современной стоимостью предстоящих расходов (включая выплаты по договору страхования жизни) (т.е. обязательств страховщика) и современной стоимостью предстоящих страховых премий по договору страхования жизни (т.е. обязательств страхователя).

(ii) Условия, которые достаточны для того, чтобы проспективный резерв был равен ретроспективному резерву:

- 1) Премии определяются исходя из принципа эквивалентности обязательств
- 2) При расчете проспективного резерва, ретроспективного резерва и премии использовался один и тот же базис.

Действительно, если премия по некоторому виду страхования или пенсионной схеме определена из принципа эквивалентности, то в среднем компания не должна привлекать собственные средства для выполнения финансовых обязательств перед клиентами. Это означает, что резерв в момент  $t$ , необходимый для выполнения будущих финансовых обязательств по каждому еще действующему договору, должен быть равен сумме, накопленной к мо-

менту  $t$  на каждый действующий договор.

(iii) Допустим, что в конце  $k$ -го года (т.е. в момент  $t = k$ ) договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив и его возраст равен  $x + k$ ).

При подсчете перспективным методом:

$${}_kV = {}_k a_B - {}_k a_C$$

$$\begin{aligned} \bullet {}_k a_B &= \sum_{j=k+1}^n S v^{j-k} P(j-k-1 < T_{x+k} < j-k) = \\ \sum_{j=k+1}^n S v^{j-k} P(T_{x+k} > j-k-1) q_{x+j-1} &= \sum_{j=k+1}^n S v^{j-k} \frac{P(T_x > j-1)}{P(T_x > k)} q_{x+j-1} \\ \bullet {}_k a_C &= \sum_{j=k+1}^n P_j v^{j-k-1} P(T_{x+k} > j-k-1) = \sum_{j=k+1}^n P_j v^{j-k-1} \frac{P(T_x > j-1)}{P(T_x > k)} \\ \Rightarrow {}_k V &= {}_k a_B - {}_k a_C = \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=k+1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) \end{aligned}$$

Преобразуем последнюю сумму с учетом того, что

$\sum_{j=1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) = 0$  в силу принципа эквивалентности обязательств, согласно которому и вычислялись премии.

$$\begin{aligned} {}_k V &= \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=k+1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) = \\ \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \left( \sum_{j=1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) - \sum_{j=1}^k v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - \right. \\ \left. P_j (1+i)) \right) &= - \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=1}^k v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) = \\ \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=1}^k v^j P(T_x > j-1) (P_j (1+i) - S q_{x+j-1}) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что последняя формула в точности равна ретроспективному резерву, потому что там написана разность между текущей стоимостью накопления к моменту  $k$  за счет премий и текущей стоимостью накопления к моменту  $k$  от всех выплат на промежутке  $(0, k)$ .

Поэтому мы доказали, что при выполнении условий, упомянутых в пункте (ii), в любой момент времени  $t$  (число  $t$  – натуральное) перспективный резерв равен ретроспективному резерву.

## Решения:

1. (i) Разъясните смысл обозначения  ${}_4|5q[60]+1$ .
- (ii) Что такое таблица AM92 ?
- (iii) Вычислите значение величины  ${}_4|5q[60]+1$ , используя следующий фрагмент таблицы AM92.

### Решение:

(i) Символ  ${}_4|5q_{[60]+1}$  обозначает вероятность того, что человек, которому сейчас 61 год и который прошел отбор 1 год назад, проживет еще 4 года, но умрет на протяжении последующих 5 лет, то есть его остаточное время жизни удовлетворяет условию  $4 < T_{[60]+1} < 9$ . То есть  ${}_4|5q_{[60]+1} = P(4 < T_{[60]+1} < 9)$ .

(ii) Таблица AM92 - это таблица, используемая для расчета смертности мужчин, застрахованных по договору пожизненного или смешанного страхования. Она является таблицей отбора риска с периодом отбора, действующим 2 года. Таблица подготовлена комитетом ИФА по непрерывному исследованию смертности (Continuous Mortality Investigation - CMI) на основе британской страховой статистики за 1991-1994 гг.

(iii) Воспользуемся формулой (5.3.9) на стр. 101 пособия Г.И.Фалин. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 3-е издание: АНКЛЛ, Москва, 2007. 304 с. ISBN 978-5-86476-235-6.

$${}_n|m q_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+n} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}$$
$$\Rightarrow {}_4|5 q_{[60]+1} = \frac{l_{[60]+1+4} - l_{[60]+1+4+5}}{l_{[60]+1}} = \frac{l_{65} - l_{70}}{l_{[60]+1}}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что период отбора равен 2 года, поэтому в числителе квадратные скобки можно убрать.

Из таблицы AM92:  $l_{65} = 8821.2612$ ,  $l_{70} = 8054.0544$ ,  $l_{[60]+1} = 9209.6568$

Следовательно

$${}_4|5 q_{[60]+1} = \frac{l_{[60]+1+4} - l_{[60]+1+4+5}}{l_{[60]+1}} = \frac{l_{65} - l_{70}}{l_{[60]+1}} = \frac{8821.2612 - 8054.0544}{9209.6568} = \frac{767.2068}{9209.6568} \approx 0.0833$$

**Ответ:**  ${}_4|5 q_{[60]+1} \approx 0.0833$

**2.** (i) Что такое ELT15 (Females)? Чем она отличается от AM92 ?

(ii) Вычислите  ${}_2.75 q_{84.5}$  используя метод равномерного распределения смертей.

База расчётов: ELT15 (Females), фрагмент которой приведён ниже.

### Решение:

(i) Таблица ELT15 (Females)-это английская таблица продолжительности жизни для женщин (English Life Tables – ELT), основанная на популяционной статистике смертности в Англии и Уэльсе за 1990, 1991, 1992 гг. (для численности населения используются не данные переписи, а оценки для середины года). Таблица публикуется Управлением национальной статистики (The Office for National Statistics) Великобритании каждые 10

лет после очередной переписи населения. Техническую работу по составлению таблиц проводит Служба Правительственного Актуария (Government Actuary's Department).

Таблица ELT15 (Females) отличается от AM92 прежде всего тем, что AM92 является таблицей с отбором, а ELT15(Females) является таблицей без отбора; во-вторых, ELT15 (Females) - относится к женщинам, а AM92 - к мужчинам; наконец, таблицы публикуются разными организациями.

(ii) По общей формуле:

$${}_tq_x = P(T_x \leq t) = P(T - x \leq t | T > x) = \frac{P(x < T \leq x+t)}{P(T > x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

$$\text{Поэтому } {}_{2.75}q_{84.5} = \frac{s(84.5) - s(87.25)}{s(84.5)}$$

Найдем  $s(x)$  используя метод равномерного распределения смертей. Согласно нему, предполагается, что  $s(x)$  между целочисленными узлами интерполируется линейными функциями:

$$s(x) = a_n + b_n x \text{ для } x \in [n, n+1]$$

Используя тот факт, что в конечных точках значения равны  $s(n)$  и  $s(n+1)$  соответственно, находим, что

$$s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1)$$

Подставив  $x = n+t$ ;  $t \in [0, 1]$ , получим:

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1), t \in [0, 1]$$

Поэтому

$$s(84.5) = 0.5s(84) + 0.5s(85)$$

$$s(87.25) = 0.75s(87) + 0.25s(88)$$

$$\Rightarrow {}_{2.75}q_{84.5} = \frac{s(84.5) - s(87.25)}{s(84.5)} = \frac{0.5s(84) + 0.5s(85) - 0.75s(87) - 0.25s(88)}{0.5s(84) + 0.5s(85)}$$

$$= \frac{0.5l_{84} + 0.5l_{85} - 0.75l_{87} - 0.25l_{88}}{0.5l_{84} + 0.5l_{85}} = \frac{0.541736 + 0.538081 - 0.7530651 - 0.2527017}{0.541736 + 0.538081} = \frac{20868 + 19040.5 - 22988.25 - 6754.25}{39908.5} = \frac{10166}{39908.5} \approx 0.2547327$$

**Ответ:**  $\boxed{{}_{2.75}q_{84.5} \approx 0.2547327}$

**3.(i)** Известно, что  $q_{67} = 17.824\%$ , а на промежутке  $[67; 68]$  интенсивность смертности является постоянной величиной. Найдите её.

(ii) Подсчитайте значение  ${}_{0.5}q_{67.25}$ , используя предположение о постоянной интенсивности смертности и результат, полученный в пункте (i).

**Решение:**

(i) Напомним, что интенсивность смертности  $\mu_x = \frac{F'(x)}{1-F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$

$$\text{Поэтому } s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du}$$

Обозначим постоянную на  $[67; 68]$  интенсивность смертности за  $\mu$ .

Тогда для  $x \in [67; 68]$  :

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du} = e^{-\int_{67}^x \mu_u du} = s(67)e^{-\int_{67}^x \mu_u du} = s(67)e^{-\mu(x-67)}$$

В частности,  $s(68) = s(67)e^{-\mu}$

Но по общей формуле:

$$q_x = P(T_x < 1) = P(T - x < 1 | T > x) = \frac{P(x < T < x+1)}{P(T > x)} = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}$$

Поэтому:

$$q_{67} = \frac{s(67) - s(68)}{s(67)} = \frac{s(67) - s(68)}{s(67)} = \frac{s(67) - s(67)e^{-\mu}}{s(67)} = 1 - e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \mu = -\ln(1 - q_{67}) = -\ln(1 - 0.17824) = -\ln(0.982176) \approx \mathbf{0.01798476}$$

(ii) По общей формуле:

$${}_t q_x = P(T_x \leq t) = P(T - x \leq t | T > x) = \frac{P(x < T \leq x+t)}{P(T > x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}$$

$$\text{Поэтому } 0.5 q_{67.25} = \frac{s(67.25) - s(67.75)}{s(67.25)}$$

Найдем  $s(x)$  используя предположение о постоянной интенсивности смертности.

Согласно нему, предполагается, что  $s(x)$  на отрезке  $[n; n+1]$  показательной функцией  $a_n e^{b_n x}$ .

Используя тот факт, что в конечных точках значения равны  $s(n)$  и  $s(n+1)$  соответственно, находим, что для  $x \in [67; 68]$

$$s(x) = s(n)p_n^{x-n}, \text{ где } p_n = \frac{s(n+1)}{s(n)}$$

$$\Rightarrow s(n+t) = s(n)p_n^t \text{ для } t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } s(67.25) &= s(67)p_{67}^{0.25} \\ s(67.75) &= s(67)p_{67}^{0.75} \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} 0.5 q_{67.25} &= \frac{s(67.25) - s(67.75)}{s(67.25)} = \frac{s(67)p_{67}^{0.25} - s(67)p_{67}^{0.75}}{s(67)p_{67}^{0.25}} = 1 - p_{67}^{0.5} = 1 - \sqrt{p_{67}} = \\ 1 - \sqrt{1 - q_{67}} &= 1 - \sqrt{1 - 0.17824} = 1 - \sqrt{0.982176} \approx \mathbf{0.008952} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\mu \approx \mathbf{0.01798476}; 0.5 q_{67.25} \approx \mathbf{0.008952}$

**4.**Страховой агент получает вознаграждение, если по заключенным им договорам убыточность меньше чем  $l = 70\%$  . Известно, что:



1. убыточность рассчитывается как отношение всех выплаченных страховых возмещений к собранным премиям;
  2. агент получает долю от собранной премии, равную  $f = \frac{1}{3}$  разности между порогом  $l = 70\%$  и убыточностью;
  3. вознаграждение не платится, если убыточность больше 70%;
  4. агент заключил ряд договоров с общей премией  $P = 500$  тыс. рублей;
  5. суммарные выплаты  $L$  по договорам (в тыс. руб.) распределены по закону Парето со средним 600 и коэффициентом вариации  $\sqrt{3}$ .
- Подсчитайте ожидаемое вознаграждение  $R$ .

### Решение:

Возьмем 1000 рублей за единичную денежную сумму;

Напомним, что случайная величина  $Y$  имеет распределение Парето с параметрами  $\lambda > 0$  и  $a > 0$ , если ее плотность дается формулой

$$f(x) = \frac{a}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\lambda+x} \right)^{a+1}; 0 < x < +\infty$$

$$\text{Поэтому } F(x) = 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda+x} \right)^{a+1}$$

$$\text{Тогда } EY = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \frac{\lambda}{a-1}$$

$$EY^2 = \int_0^{\infty} x(1 - F(x)) dx = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)}$$

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)} - \frac{\lambda^2}{(a-1)^2} = \frac{\lambda^2 a}{(a-1)^2(a-2)}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{VarY} = \frac{\lambda}{a-1} \sqrt{\frac{a}{a-2}}$$

$$c_Y = \frac{\sigma_Y}{EY} = \sqrt{\frac{a}{a-2}}$$

$$\text{По условию } EY = 600 = \frac{\lambda}{a-1}$$

$$c_Y = \sqrt{3} = \sqrt{\frac{a}{a-2}}$$

Отсюда находим, что  $a = 3, \lambda = 1200$

$$\text{Но } R = \frac{1}{3}P * (0.7 - \frac{L}{P}) * I\{\frac{L}{P} < 0.7\} = \frac{1}{3}(350 - L) * I\{L < 350\}$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } ER &= \int_0^{350} \frac{1}{3}(350 - x)f_L(x)dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{350} (350 - x) \frac{3}{1200} \left( \frac{1200}{1200+x} \right)^4 dx = \\ &= \frac{1}{1200} \int_0^{350} (350 - x) \left( \frac{1200}{1200+x} \right)^4 dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1200)^3 \int_0^{350} (350 - x)(1200 + x)^{-4} dx = \\
&= \frac{(1200)^3}{-3} \int_0^{350} (350 - x) d((1200 + x)^{-3}) = \\
&= -\frac{(1200)^3}{3} (350 - x) \frac{1}{(1200 + x)^3} \Big|_0^{350} + \frac{(1200)^3}{3} \int_0^{350} (1200 + x)^{-3} d(350 - x) = \\
&= \frac{(1200)^3}{3} 350 \frac{1}{(1200 + x)^3} - \frac{(1200)^3}{3} \int_0^{350} (1200 + x)^{-3} dx = \\
&= \frac{350}{3} - \frac{(1200)^3}{3} \frac{1}{-2} \frac{1}{(1200 + x)^2} \Big|_0^{350} = \\
&= \frac{350}{3} + \frac{(1200)^3}{6} \frac{1}{(1550)^2} - \frac{(1200)^3}{6} \frac{1}{(1200)^2} = \\
&= \frac{350}{3} + \frac{10(120)^3}{6(155)^2} - \frac{1200}{6} = \\
&= \frac{-250}{3} + \frac{5(120)^3}{3(155)^2} = \frac{-250(155)^2 + 5(120)^3}{3(155)^2} = \\
&= \frac{-10(155)^2 + 24(120)^3}{3(31)^2} = \frac{-240250 + 345600}{2883} = \frac{105350}{2883} = 36.54179673950746 \text{ тыс. руб}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ER \approx 36541.80 \text{ руб}$$

Ответ:  $ER \approx 36541.80$

5. Страховщик только что заключил с человеком в возрасте  $x = 80$  дискретный договор временного страхования жизни на срок  $n = 10$  лет со страховой суммой  $SA = \$100000$ . По условиям договора страхователь вносит постоянную премию  $P$  в начале каждого года действия договора. Рассчитайте эту премию при следующих предположениях:

1. расходы и другие нагрузки не учитываются;
2. остаточное время жизни застрахованного описывается законом Мэкама с параметрами  $A_x = 0.0001, B_x = 0.1, a_x = 0.075$ ;
3. для дисконтирования используется кривая доходности  $y_t$ , значения которой приведены в следующей таблице:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10} \\ 3.2\%, 3.5\%, 3.8\%, 4.1\%, 4.3\%, 4.5\%, 4.6\%, 4.7\%, 4.8\%, 4.8\%$$

### Решение:

Воспользуемся принципом эквивалентности обязательств:

Страховщик обязан выплатить сумму  $SA$  в конце года смерти человека, если последний умрет за время действия договора, и не должен ничего выплачивать, если человек проживет эти 10 лет.

Такие обязательства равны  $SA \cdot A_{x:\overline{n}|}^1$

Страхователь обязан платить сумму  $P$  в начале каждого года на протяжении 10 лет (при условии, что он еще жив, конечно).

Такие обязательства равны  $P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

Тогда по принципу эквивалентности обязательств:

$$P = SA \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Если бы у нас ставка дисконтирования не зависела от времени, то

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K_x = k),$$

$$\text{где } P(K_x = k) = P(k < T_x < k+1) = \frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)}$$

Но у нас ставка зависит от времени, то есть для дисконтирования используется кривая доходности, поэтому вместо  $v^{k+1}$  надо писать  $(1+y_{k+1})^{-k-1}$

$$\text{Поэтому } A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (1+y_{k+1})^{-k-1} \frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)}$$

Аналогично, если бы у нас ставка дисконтирования не зависела от времени, то

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(T_x > k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{s(x+k)}{s(x)}$$

Но у нас ставка зависит от времени, то есть для дисконтирования используется кривая доходности, поэтому вместо  $v^k$  надо писать  $(1+y_k)^{-k}$

$$\text{Поэтому } \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+y_k)^{-k} \frac{s(x+k)}{s(x)}$$

$$\text{Тогда } P = SA \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = SA \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (1+y_{k+1})^{-k-1} \frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)}}{\sum_{k=0}^{n-1} (1+y_k)^{-k} \frac{s(x+k)}{s(x)}} = SA \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (1+y_{k+1})^{-k-1} (s(x+k)-s(x+k+1))}{\sum_{k=0}^{n-1} (1+y_k)^{-k} s(x+k)}$$

Теперь надо найти  $s(t)$  пользуясь тем, что по условию  $T_x$  распределено по закону Мэкама с параметрами  $A_x = 0.0001, B_x = 0.1, a_x = 0.075$

Вспомним, что если  $T_x$  распределено по закону Мэкама с параметрами  $A_x = 0.0001, B_x = 0.1, a_x = 0.075$ , то  $T$  распределено по закону Мэкама с параметрами  $A = A_x, B = B_x e^{-a_x}, a = a_x$

Это значит, что интенсивность смертности (соответствующая Т) имеет вид  $\mu_y = A + B e^{a_y}$ ,

$$\text{то есть } s(y) = e^{-Ay - \frac{B}{a}(e^{a_y} - 1)} = e^{-A_x y - \frac{B_x}{a_x} e^{-a_x} (e^{a_x y} - 1)}$$

$$\text{то есть } s(x+k) = e^{-A_x(x+k) - \frac{B_x}{a_x} e^{-a_x} (e^{a_x(x+k)} - 1)}$$

$$\text{то есть } s(x+k+1) = e^{-A_x(x+k+1) - \frac{B_x}{a_x} e^{-a_x} (e^{a_x(x+k+1)} - 1)}$$

Подставляя теперь эти выражения для  $s(x+k)$  и  $s(x+k+1)$  в нашу сумму, получим, что

$$P = SA \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (1+y_{k+1})^{-k-1} (s(x+k)-s(x+k+1))}{\sum_{k=0}^{n-1} (1+y_k)^{-k} s(x+k)} = SA \frac{0.16572816696170486}{1.391038680930967} = 11913.986953316755 \approx$$

**\$11913.99**

**Ответ:**  $P \approx \$11913.99$

**6.** Договор смешанного страхования жизни на 10 лет гарантирует выплату страховой суммы £100000 в случае смерти застрахованного до истечения срока действия договора и выплату £50000, если застрахованный проживёт эти 10 лет. Подсчитайте среднее значение современной стоимости обязательств страховщика по этому договору и стандартное отклонение от среднего. Техническая основа расчётов: постоянная интенсивность смертности  $\mu = 0.03$  на протяжении всего срока действия договора, годовая

процентная ставка, используемая для дисконтирования, равна 5%.

**Решение:**

(i) Пусть  $T_x$  - остаточное время жизни застрахованного,  $n=10$  - срок действия договора,  $S_1 = \mathcal{L}100000$ ,  $S_2 = \mathcal{L}50000$ .

Тогда современная стоимость обязательств страховщика равна

$$Z = Z_1 S_1 + Z_2 S_2 = S_1 v^{T_x} I\{T_x < n\} + S_2 v^n I\{T_x \geq n\}$$

Чтобы посчитать  $EZ$  и  $VarZ$ , нам нужна плотность остаточного времени жизни:

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x)}$$

А функции  $f(x+t)$  и  $s(x)$  мы найдем, зная постоянную интенсивность смертности  $\mu = 0.03$ :

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

$$\Rightarrow s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u du} = e^{-0.03x}$$

$$\Rightarrow f(x) = -s'(x) = 0.03e^{-0.03x}$$

$$\Rightarrow f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{0.03e^{-0.03(x+t)}}{e^{-0.03x}} = 0.03e^{-0.03t}$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} EZ_1 &= E(v^{T_x} I\{T_x < n\}) = \int_0^n v^t f_x(t) dt = \int_0^n e^{-\delta t} f_x(t) dt = \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \mu \int_0^n e^{-t(\delta+\mu)} dt = -\frac{\mu}{\mu+\delta} e^{-t(\delta+\mu)} \Big|_0^n = \frac{\mu}{\mu+\delta} (1 - e^{-n(\delta+\mu)}) \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} EZ_2 &= E(v^n I\{T_x \geq n\}) = v^n P(T_x \geq n) = v^n \frac{s(x+n)}{s(x)} = v^n \frac{e^{-\mu(x+n)}}{e^{-\mu x}} = \\ &= v^n e^{-\mu n} = e^{-\delta n} e^{-\mu n} = e^{-n(\mu+\delta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow EZ &= S_1 EZ_1 + S_2 EZ_2 = S_1 \frac{\mu}{\mu+\delta} (1 - e^{-n(\mu+\delta)}) + S_2 e^{-n(\mu+\delta)} = \\ &= S_1 \frac{0.03}{0.03+ln(1.05)} (1 - e^{-10(0.03+ln(1.05))}) + S_2 e^{-10(0.03+ln(1.05))} = \\ &= S_1 \frac{0.03}{0.07879016416943205} (1 - e^{-0.7879016416943205}) + S_2 e^{-0.7879016416943205} = \\ &= S_1 * 0.38075818620567103 * 0.5452018758590105 + S_2 * 0.45479812414098947 = \\ &= S_1 * 0.20759007736800625 + S_2 * 0.45479812414098947 = 20759.007736800625 + \\ &22739.906207049473 = 43498.9139438501 \approx \mathcal{L}43498.91 \end{aligned}$$

(ii) Для квадрата обязательств страховщика мы имеем

$$Z^2 = (S_1 Z_1 + S_2 Z_2)^2 = (S_1 Z_1)^2 + (S_2 Z_2)^2 + 2Z_1 Z_2 S_1 S_2,$$

но последнее слагаемое равно нулю, поскольку  $(I\{T_x < n\}) * (I\{T_x \geq n\}) = 0$

$$\text{Поэтому } EZ^2 = (S_1)^2 E(Z_1)^2 + (S_2)^2 E(Z_2)^2$$

$$\begin{aligned} E(Z_1)^2 &= E(v^{2T_x} I\{T_x < n\}) = \int_0^n v^{2t} f_x(t) dt = \int_0^n e^{-2\delta t} f_x(t) dt = \\ &= \int_0^n e^{-2\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \mu \int_0^n e^{-t(2\delta+\mu)} dt = -\frac{\mu}{\mu+2\delta} e^{-t(2\delta+\mu)} \Big|_0^n = \frac{\mu}{\mu+2\delta} (1 - e^{-n(2\delta+\mu)}) \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} E(Z_2)^2 &= E(v^{2n} I\{T_x \geq n\}) = v^{2n} P(T_x \geq n) = v^{2n} \frac{s(x+n)}{s(x)} = v^{2n} \frac{e^{-\mu(x+n)}}{e^{-\mu x}} = \\ &= v^{2n} e^{-\mu n} = e^{-2\delta n} e^{-\mu n} = e^{-n(\mu+2\delta)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow EZ^2 = (S_1)^2 E(Z_1)^2 + (S_2)^2 E(Z_2)^2 = (S_1)^2 \frac{\mu}{\mu+2\delta} (1 - e^{-n(\mu+2\delta)}) + (S_2)^2 e^{-n(\mu+2\delta)} =$$

$$\begin{aligned} &(S_1)^2 \frac{0.03}{0.03+2ln(1.05)} (1 - e^{-10(0.03+2ln(1.05))}) + (S_2)^2 e^{-10(0.03+2ln(1.05))} = \\ &(S_1)^2 \frac{0.03}{0.1275803283388641} (1 - e^{-1.275803283388641}) + (S_2)^2 e^{-1.275803283388641} = \\ &(S_1)^2 * 0.23514596952844855 * 0.7207934039043711 + (S_2)^2 * 0.27920659609562887 = \\ &(S_1)^2 * 0.16949166379080394 + S_2 * 0.27920659609562887 = 1694916637.9080393 + \\ &698016490.2390722 = 2392933128.1471114 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Var Z = EZ^2 - (EZ)^2 = 2392933128.1471114 - (43498.91)^2 = 2392933128.1471114 - 1892155171.1881003 = 500777956.9590111$$

$$\Rightarrow \sqrt{Var Z} = 22378.06866016393 \approx \mathcal{L}22378.07$$

**Ответ:**  $EZ \approx \mathcal{L}43498.91; \sqrt{Var Z} \approx \mathcal{L}22378.07$

**7.** Порядок формирования страховых резервов по страхованию жизни, утвержденный приказом Министерства финансов Российской Федерации от 09.04.2009 No 32н «Об утверждении Порядка формирования страховых резервов по страхованию жизни», предусматривает, что при расчете математического резерва допускается применение (при любых обстоятельствах):

- а) ретроспективного метода;
- б) перспективного метода;
- в) как перспективного, так и ретроспективного методов.
- г) метода, используемого для расчета выкупных сумм, выплачиваемых страхователю при расторжении договора страхования по виду страхования.

**Ответ:**

б) перспективный метод

Это написано в пункте 1.3 этого закона:

В соответствии с настоящим Порядком страховые резервы по страхованию жизни формируются при условии, если методы расчета страховых тарифов основаны на уравнении эквивалентности (равенстве актуарной стоимости страховых выплат по ПРЕДСТОЯЩИМ страховым случаям и актуарной

стоимости страховых премий (поступлений) на начало срока действия договора страхования), с применением таблиц смертности, заболеваемости, инвалидности, начислении в период действия договора страхования нормы (ставки) доходности. Актуарная стоимость страховых выплат (страховых поступлений) вычисляется путем дисконтирования ПРЕДПОЛАГАЕМЫХ денежных выплат (поступлений) с учетом вероятностей, с которыми такие денежные выплаты (поступления) БУДУТ произведены.

**8.** Мужчина в возрасте  $x = 55$  лет заключил 3-х летний договор страхования жизни. Если застрахованный умирает на протяжении действия договора, то страховая сумма  $SA = £150,000$  выплачивается в очередную годовщину заключения договора; если же застрахованный доживает до окончания договора, то страховщик не платит ничего. Премия в размере  $P = £900$  платится в начале каждого года действия договора. Заключение и поддержание договора требуют следующих расходов: начальные расходы  $£260$  в момент заключения договора, периодические расходы в размере  $£70$  в начале второго и третьего года (если договор всё ещё действует). Предполагая, что смертность описывается таблицей AM92 (её фрагмент приведён ниже), а для дисконтирования используется техническая процентная ставка  $i = 3\%$ , вычислите ожидаемый доход страховщика при заключении договора.

**Решение:**

Напомним, что перед заключением договора человек проходит медицинское осведетельствование (отбор), поэтому его вероятность умереть в первый год обозначается  $q_{[x]}$ , а не просто  $q_x$ .

Как обычно,  $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.03} = 0.970873786407767$

Расходы страховщика в размере  $£260$  в момент  $t = 0$ ,  $£70$  в момент  $t = 1$  и  $£70$  в момент  $t = 2$  можно интерпретировать как то, что премии от страхователя будут равны не  $£900$ , а  $£(900-70) = 830$ , и кроме того, в момент  $t = 0$  страховщик имеет дополнительные расходы в размере  $£190$ ;

Поэтому доходы  $S_1 = 830\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 830 \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(T_x > k) = 830(1 + vp_{[55]} + v^2p_{[55]}p_{[55]+1}) = 830(1 + v(1 - q_{[55]}) + v^2(1 - q_{[55]})(1 - q_{[55]+1})) = 830(1 + v(1 - 0.003358) + v^2(1 - 0.003358)(1 - 0.004903)) = 830(1 + 0.996642v + 0.996642 \cdot 0.995097v^2) = 830(1 + 0.996642v + 0.9917554642740001v^2) = 830(1 + 0.996642 \cdot 0.970873786407767 + 0.9917554642740001 \cdot 0.970873786407767 \cdot 0.970873786407767) = 830(1 + 0.9676135922330098 + 0.9348246434857197) = 830 \cdot 2.9024382357187295 = 2409.0237356465454$

Расходы  $S_2 = 190 + SA \cdot A_{x:\overline{n}|}^1 = 190 + SA \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K_x = k) = 190 + SA \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(k \leq T_x < k+1) = 190 + SA(vP(T_x < 1) + v^2P(1 \leq T_x < 2) + v^3P(2 \leq$

$$\begin{aligned}
T_x < 3) &= 190 + SA(vq_{[x]} + v^2p_{[x]}q_{[x]+1} + v^3p_{[x]}p_{[x]+1}q_{x+2} = 190 + SA(v \cdot \\
&0.003358 + v^2(1 - 0.003358)0.004903 + v^3(1 - 0.003358)(1 - 0.004903)0.005650) = \\
&190 + SA(0.003358v + 0.004886535726000001v^2 + 0.0056034183731481v^3) = 190 + \\
&SA(0.003358 \cdot 0.970873786407767 + 0.004886535726000001 \cdot 0.970873786407767 \cdot \\
&0.970873786407767 + 0.0056034183731481 \cdot 0.970873786407767 \cdot 0.970873786407767 \cdot \\
&0.970873786407767) = 190 + SA(0.0032601941747572817 + 0.004606028585163541 + \\
&0.005127921588052734) = 190 + SA \cdot 0.012994144347973557 = 190 + 1949.1216521960337 = \\
&2139.1216521960337
\end{aligned}$$

Поэтому прибыль страховщика = доходы-расходы =  $S_1 - S_2 = 2409.0237356465454 - 2139.1216521960337 = 269.9020834505118 \approx \mathbf{269.90}$

**Ответ:**  $\boxed{profit \approx \pounds 269.90}$

**9.** Пусть при  $t \in [x, x + n]$  интенсивность смертности  $\mu_t$  можно представить в виде  $\mu_t = \frac{t+b}{a}$ , где  $a > 0$  и  $b$  - некоторые константы (т.е. на этом промежутке функция  $\mu_t$  линейна и возрастает). Докажите, что

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \sqrt{2\pi a} \cdot \exp\left\{\frac{A^2}{2}\right\} (\Phi(A + \frac{n}{\sqrt{a}}) - \Phi(A)),$$

где  $A = \frac{x+b+a\delta}{\sqrt{a}}$ , а  $\Phi$  - стандартная гауссовская функция распределения.

**Решение:**

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t P(T_x > t) dt = \int_0^n v^t \frac{s(x+t)}{s(x)} dt = \int_0^n e^{-\delta t} \frac{s(x+t)}{s(x)} dt$$

Найдем  $s(x)$ , зная вид интенсивности смертности:

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt}$$

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x \frac{t+b}{a} dt = \frac{(t+b)^2}{2a} \Big|_0^x = \frac{1}{2a} ((b+x)^2 - b^2) = \frac{x^2+2bx}{2a}$$

$$\Rightarrow s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-\frac{x^2+2bx}{2a}}$$

$$s(x+t) = e^{-\frac{(x+t)^2+2b(x+t)}{2a}} = e^{-\frac{x^2+2xt+t^2+2bx+2bt}{2a}}$$

$$\Rightarrow \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{e^{-\frac{x^2+2xt+t^2+2bx+2bt}{2a}}}{e^{-\frac{x^2+2bx}{2a}}} = e^{-\frac{t^2+2t(x+b)}{2a}}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \frac{s(x+t)}{s(x)} dt = \int_0^n e^{-\delta t} e^{-\frac{t^2+2t(x+b)}{2a}} dt = \int_0^n e^{-\frac{t^2+2t(x+b+a\delta)}{2a}} dt =$$

$$\int_0^n e^{-\frac{(t+x+b+a\delta)^2}{2a}} e^{\frac{(x+b+a\delta)^2}{2a}} dt = e^{\frac{A^2}{2}} \int_0^n e^{-\frac{(t+x+b+a\delta)^2}{2a}} dt =$$

$$\{x = \frac{t+x+b+a\delta}{\sqrt{a}}; dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}; dt = \sqrt{a} dx\} = \sqrt{a} e^{\frac{A^2}{2}} \int_A^{A+\frac{n}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi a} e^{\frac{A^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{A+\frac{n}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$\sqrt{2\pi a} e^{\frac{A^2}{2}} \left( \Phi\left(A + \frac{n}{\sqrt{a}}\right) - \Phi(A) \right)$$

**10.** (i) Определите термин «проспективный резерв» (prospective reserve) применительно к договору страхования жизни.

(ii) Сформулируйте условия, которые достаточны для того, чтобы проспективный резерв был равен ретроспективному резерву.

Страховая компания заключает договор пожизненного страхования с человеком, возраст которого ровно  $x$  лет (число  $x$  – натуральное). Премии платятся в начале каждого года на протяжении всего срока действия договора, а страховая сумма  $S$  выплачивается немедленно после смерти застрахованного. Никаких расходов в связи с договором нет.

(iii) Покажите, что при выполнении условий, упомянутых в пункте (ii), в любой момент времени  $t$  (число  $t$  – натуральное) проспективный резерв равен ретроспективному резерву.

### Решение:

(i) Проспективный резерв – это разность между современной стоимостью предстоящих расходов (включая выплаты по договору страхования жизни) (т.е. обязательств страховщика) и современной стоимостью предстоящих страховых премий по договору страхования жизни (т.е. обязательств страхователя).

(ii) Условия, которые достаточны для того, чтобы проспективный резерв был равен ретроспективному резерву:

- 1) Премии определяются исходя из принципа эквивалентности обязательств
- 2) При расчете проспективного резерва, ретроспективного резерва и премии использовался один и тот же базис.

Действительно, если премия по некоторому виду страхования или пенсионной схеме определена из принципа эквивалентности, то в среднем компания не должна привлекать собственные средства для выполнения финансовых обязательств перед клиентами. Это означает, что резерв в момент  $t$ , необходимый для выполнения будущих финансовых обязательств по каждому еще действующему договору, должен быть равен сумме, накопленной к моменту  $t$  на каждый действующий договор.

(iii) Допустим, что в конце  $k$ -го года (т.е. в момент  $t = k$ ) договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив и его возраст равен  $x + k$ ).

При подсчете перспективным методом:

$${}_kV = {}_k a_B - {}_k a_C$$

$$\bullet {}_k a_B = \sum_{j=k+1}^n S v^{j-k} P(j-k-1 < T_{x+k} < j-k) =$$



$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^n S v^{j-k} P(T_{x+k} > j-k-1) q_{x+j-1} &= \sum_{j=k+1}^n S v^{j-k} \frac{P(T_x > j-1)}{P(T_x > k)} q_{x+j-1} \\
\bullet_k a_c &= \sum_{j=k+1}^n P_j v^{j-k-1} P(T_{x+k} > j-k-1) = \sum_{j=k+1}^n P_j v^{j-k-1} \frac{P(T_x > j-1)}{P(T_x > k)} \\
\Rightarrow_k V = {}_k a_B - {}_k a_C &= \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=k+1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i))
\end{aligned}$$

Преобразуем последнюю сумму с учетом того, что  $\sum_{j=1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) = 0$  в силу принципа эквивалентности обязательств, согласно которому и вычислялись премии.

$$\begin{aligned}
{}_k V &= \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=k+1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) = \\
&= \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \left( \sum_{j=1}^n v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) - \sum_{j=1}^k v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - \right. \\
&P_j (1+i)) \left. \right) = - \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=1}^k v^j P(T_x > j-1) (S q_{x+j-1} - P_j (1+i)) = \\
&= \frac{1}{v^k P(T_x > k)} \sum_{j=1}^k v^j P(T_x > j-1) (P_j (1+i) - S q_{x+j-1})
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что последняя формула в точности равна ретроспективному резерву, потому что там написана разность между текущей стоимостью накопления к моменту  $k$  за счет премий и текущей стоимостью накопления к моменту  $k$  от всех выплат на промежутке  $(0, k)$ . Поэтому мы доказали, что при выполнении условий, упомянутых в пункте (ii), в любой момент времени  $t$  (число  $t$  – натуральное) проспективный резерв равен ретроспективному резерву.