# Стратегии относительного оптимального роста в модели рынка с аффинными выплатами

Токаева Александра Александровна
научный руководитель
к.ф.-м.н. Житлухин Михаил Валентинович

МГУ им. М.В.Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра теории вероятностей, 609 группа

Москва
4 мая 2023 г.

# Введение

- Цель работы — построить стратегию, “выживающую” на рынке вне зависимости от стратегий других инвесторов.
- Стохастическая модель рынка с дискретным временем, эндогенными ценами и аффинными дивидендами.
- Обобщается модель из статьи Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013). *Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games.* Annals of Finance, 9(2):121–144.

# Общая модель

- $N \geq 2$ агентов.
- $K \geq 2$ активов, активы "короткоживущие".
- Каждый агент $n$ в каждый момент времени $t$ выбирает вектор долей $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \ldots, \lambda_t^{n,K})$, в которых он вкладывает свой капитал $W_t^n$ в каждый из $K$ активов в момент времени $t$.
- Цены устанавливаются эндогенно из условия равенства спроса и предложения на каждый из активов.
- Активы платят случайные дивиденды $A_t^k$.

# Стратегии

- Стратегия $n$-го агента — это последовательность $\Lambda^n = (\Lambda^n_t)_{t=0}^{\infty}$ измеримых векторнозначных функций

$$\Lambda^n_t = \Lambda^n_t(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$$

со значениями в стандартном $K$-симплексе

$$\Delta^K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}^K_+ : a^1 + \ldots + a^K = 1\}.$$

- $\bar{s}_t := (s_1, ..., s_t)$ — история состояний случайного фактора.
- $\bar{W}_0 := (W_0^1, ..., W_0^N)$ — вектор начальных капиталов.
- $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, ..., \lambda_{t-1})$, где $\lambda_s = (\lambda^1_s, \ldots, \lambda^N_s)$ — история игры.

# Активы с аффинными дивидендами

- $W_t = \sum_{n=1}^N W_t^n$ — полный капитал рынка в момент времени $t$.
- $\mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n$ — доля $W_t$, вложенная в $k$-й актив.
- $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$, $k = 1, \ldots, K$ — дивиденды от единицы актива $k$ в момент времени $t \geq 1$.
- Дивиденды аффинные:

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \beta_{t+1}^k \mu_t^k,$$

где $\alpha_{t+1}^k$ и $\beta_{t+1}^k$ — произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \tag{1}$$
$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \tag{2}$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными коэффициентами $a_{t+1}^k$, $b_{t+1}^k$.

# Выживающие стратегии

- Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой $r_t^n := \frac{W_t^n}{W_t}$.

## Определение 1

Стратегия $\Lambda^n$ $n$-го агента называется **“выживающей”**, если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ с заданной стратегией $\Lambda^n$ и произвольными стратегиями $\Lambda^j$ агентов $j \neq n$ выполняется неравенство $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$

# Основная теорема (теорема 1)

**Теорема 1**

При некоторых технических условиях на функции дивидендов, "выживающая" стратегия $\Lambda_t^*$ существует.

"Выживающая" стратегия $\Lambda_t^*$ является неподвижной точкой отображения $L_t$, явный вид которого представлен в тексте работы:

$$L_t(\Lambda_t^*) = \Lambda_t^* \text{ п.н.} \tag{3}$$

# Основная теорема 2

**Теорема 2**

При некоторых более строгих условиях на функции дивидендов, если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ агент $n$ использует стратегию $\Lambda^*$, то при $t \to \infty$ выполнено

$$\|\lambda_t^n - \mu_t\| \to 0.$$

То есть выживающая стратегия в некотором смысле единственна.

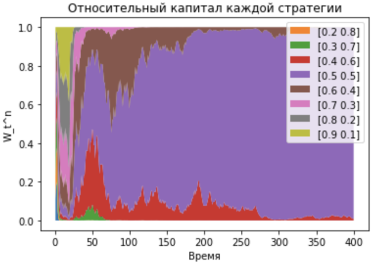
# Основная теорема 3

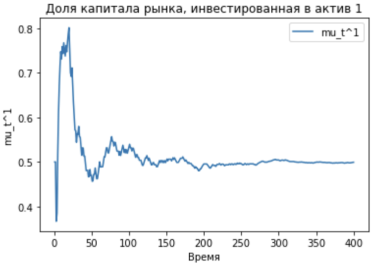
**Теорема 3**

Пусть последовательность состояний случайного фактора $s_t$, $t \geq 1$ состоит из н.о.р. случайных величин, а коэффициенты $\alpha_t^k$, $\beta_t^k$ зависят только от $s_t$, то есть $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$. Тогда "выживающая" стратегия постоянна.
Кроме того, $r_t^n \to 0$ п.н. при $t \to \infty$ для любого агента $n$, который использует стратегию $\Lambda^n \neq \Lambda^*$.

# Численный пример

- Выплата каждого из двух активов равна либо $1 + \mu_t^k$ с вероятностью $p$, любо нулю с вероятностью $1 - p$, $p = 2/3$.
- “Выживающая” стратегия $\Lambda^* = (1/2, 1/2)$.
- На рынке есть 9 инвесторов со стратегиями $\Lambda^n = (n/10, 1 - n/10)$, где $n = 1, 2, \ldots, 9$.



# Результаты

1. Исследована модель рынка с дискретным временем, эндогенными ценами и аффинными выплатами.
2. Доказаны существование и асимптотическая единственность “выживающей” стратегии.
3. Результаты исследования доложены на конференции Ломоносов-2023.
4. Материалы работы вошли в совместную научную статью, которая представлена к публикации в журнале Annals of Operations Research.

Algoet, P. H. and Cover, T. M. (1988).
Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, 16(2):876–898.

Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013).
Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144.

Blume L. and Easley D. (1992).
Evolution and market behaviour. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40.

Drokin, Y. and Zhitlukhin, M. (2020).
Relative growth optimal strategies in an asset market game. *Annals of Finance*, 16:529–546.

Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016).
Evolutionary behaviorial finance. In Haven, E. et al., editors, *The handbook of Post Crisis Financial Modelling*, 214-234. Palgrave Macmillan UK.

Благодарю за внимание!