Токарева Александра 609 группа

## ⑤ Теорема Ито о существовании сильного решения СДУ

Мы хотим найти решение СДУ

$$\begin{cases} dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \; t\ge 0; \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (*) \quad \text{— в } \mathbb{R}^d \text{ (или } \mathbb{R}^1)$$

$\Updownarrow$

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \quad \text{— в интегральной форме}$$

Здесь $(W_t, F_t)$ — $d$-мерный винеровский процесс относит. фильтрации $F_t$.

$b, \sigma$ — борелевские ф-ции (вектор и матрица), размерностей $d$ и $d\times d$

$x_0$ — неслучайно (но вообще можно $x_0 \in F_0$)

**Опр.** Решение $X_t, t\ge 0$ ур-я $(*)$ называется **сильным**, если $\forall t: X_t \in F_t^W = \sigma(W_s;\, s\le t)$

(т.е. $X_t$ — измеримо относительно фильтрации, порожденной винеровским процессом)

Во всех остальных случаях решение наз. **слабым**

**Теорема 1 (единственность по Ито)**

Пусть $\exists$ такая константа $C>0$, что $\forall t, x, x'$:

$$\begin{cases} |b(t,x)-b(t,x')| + \|\sigma(t,x)-\sigma(t,x')\| \le C|x-x'| & \text{— липшицевость} \\ |b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \le C(1+|x|) & \text{— усл. не более чем линейного роста} \end{cases}$$

Тогда $\exists$ не более одного решения ур-я $(*)$ на любом вероятностном пр-ве с любым винеровским процессом

**Док-во:** Если решений нет — то доказывать нечего.

Если нашлись два решения $X_t$ и $Y_t$ на одном вероятностном пр-ве с одним и тем же винеровским процессом, то:

$$\begin{cases} X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \\ Y_t = x_0 + \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_t - Y_t = \int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))ds$$

Используя н-во $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, получаем:

$$|X_t-Y_t|^2 \le 2\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E|X_t-Y_t|^2} \le 2E\left|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds\right|^2 + 2E\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2 \le$$
← н-во Коши-Буняковского для 1-го слагаемого

$$= 2E\int_0^t 1ds \cdot \int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))^2 ds + 2E\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2 \le$$
← изометрия Ито для 2-го слагаемого

$$\le 2t\cdot E\int_0^t |b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2 ds + 2E\int_0^t tr\left((\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))^*\right) ds \le$$

$$\le 2t\cdot E\int_0^t |b(s,X_s)-b(s,Y_s)|^2 ds + 2E\int_0^t \|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\|^2 ds \le$$ липшицевость по обоим слагаемым

$$\le 2t\, E\int_0^t C^2\cdot |X_s-Y_s|^2 ds + 2E\int_0^t C^2\cdot |X_s-Y_s|^2 ds \le 2(t+1)C^2\cdot E\int_0^t |X_s-Y_s|^2 ds =$$

$$= \boxed{2(t+1)C^2\int_0^t E|X_s-Y_s|^2 ds}$$

А ещё мы изначально знаем, что:

$$\sup_{s\le t} E|X_s-Y_s|^2 \le 2\left(\sup_{s\le t} E(|X_s|^2+|Y_s|^2)\right) \le 2\left(E\sup_{s\le t}|X_s|^2 + E\sup_{s\le t}|Y_s|^2\right) < \infty,$$

т.к. в силу априорных оценок: $E\sup\limits_{0\le t\le T}|X_t|^2 \le C(1+T+x^2)\cdot e^{CT}$

$\Rightarrow$ теперь мы можем применить лемму Гронуолла
(т.к. мы проверили, что $E\sup\limits_{0\le t\le T}|X_t|^2 < M < \infty$; и поэтому $\int_0^t E|X_s-Y_s|^2 ds < M\cdot t < \infty$)

(лемма Гронуолла: $0\le \varphi(t) \le C_1 + C_2\int_0^t \varphi(s)ds\ \forall t \Rightarrow \varphi(t) \le C_1\cdot e^{C_2 t}\ \forall t$)

У нас $C_1 = \varphi(0) = E|X_0-Y_0|^2 = 0$

$\Rightarrow E|X_t-Y_t|^2 = 0$ – по лемме Гронуолла

$\Rightarrow X_t = Y_t$ п.н.

$\Rightarrow$ из-за непрерывности $X_t; Y_t$: $P(X_t=Y_t\ \forall t\ge 0)=1$ ($X_t$ непрерывно, т.к. $X_t = x_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$, а интеграл по верхнему пределу непрерывен)

(как это следует из непр-ти:
поскольку $X_t = Y_t$ п.н., то $P(S_t)=1$, где $S_t = \{\omega\in\Omega: X_t(\omega)=Y_t(\omega)\}$.
$\Rightarrow P(\tilde{S}_t) := P(\bigcap\limits_{t\in[0,T],\ t\in\mathbb{Q}} S_t) = 1$ – как не более чем счетное пересечение мн-в меры 1.
$\Rightarrow$ на мн-ве меры 1: $X_t = Y_t\ \forall t\in\mathbb{Q}$
$\Rightarrow$ из-за непр-ти: $X_t = Y_t\ \forall t\ge 0$ – на этом мн-ве меры 1)

ч.т.д.

**Теорема 2** (существование по Ито)

Пусть $\exists$ такая константа $C>0$, что $\forall t, x, x'$:

$$\begin{cases} |b(t,x)-b(t,x')| + \|\sigma(t,x)-\sigma(t,x')\| \le C|x-x'| \\ |b(t,x)| + \|\sigma(t,x')\| \le C(1+|x|) \end{cases}$$

Тогда $\exists$ (сильное) решение ур-я (*)

Док-во: решение строим методом последовательных приближений следующим образом:

$X_t^0 := x_0;\ t\ge 0$

Имея $X_t^n;\ t\ge 0$, строим $X_t^{n+1}$ по ф-ле:

$$\boxed{X_t^{n+1} := x_0 + \int_0^t b(s,X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s}$$

Опять используя н-во $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$, получаем:

$$|X_t^{n+1}-X_t^n|^2 \le 2\left|\int_0^t (b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1}))ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2$$

Опять используем н-во Коши-Буняковского для 1-го слагаемого и изометрию Ито для 2-го, получаем:

$$E|X_t^{n+1}-X_t^n|^2 \le 2E\left|\int_0^t (b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1}))ds\right|^2 + 2E\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2 \le$$

$$\le 2t\cdot E\int_0^t (b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1}))^2ds + 2E\int_0^t tr(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))^*ds \le$$

$$\le \boxed{2(t+1)C^2\int_0^t E|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds}$$

Более того:

$$\boxed{E\sup_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2 \le C_T\cdot\int_0^T E\sup_{t\le s}|X_t^n-X_t^{n-1}|^2ds}$$, где $C_T$ - не зависит от n

Действительно:

$$|X_t^{n+1}-X_t^n|^2 \le 2\underbrace{\left|\int_0^t (b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1}))ds\right|^2} + 2\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2$$

$\wedge|$ (по н-ву Коши-Бун)

$$t\cdot\int_0^t |b(s,X_s^n)-b(s,X_s^{n-1})|^2ds$$

$\wedge|$

$$t\cdot C^2\int_0^t|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds$$ - а у этого понятно, какой $\sup_{t\le T}$

$$\Rightarrow \sup_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2 \underset{\sup(c+d)\le\sup c+\sup d}{\le} 2\sup_{t\le T}\left(t\cdot C^2\int_0^t|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds\right) + 2\sup_{t\le T}\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2$$

$$= 2\cdot T\cdot C^2\int_0^T|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds + 2\sup_{t\le T}\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2$$

Берём м.о. с обеих сторон:

это субмартингал, как квадрат мартингала

$$\Rightarrow \boxed{E\sup_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2} \le 2TC^2\cdot E\int_0^T|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds + 2E\left[\sup_{t\le T}\left(\left|\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2\right)\right] \le$$

н-во Дуба для субмарт. $(E\max_{n\le N}|M_n|^2\le 4EM_N^2)$

$$\le 2TC^2\cdot E\int_0^T|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds + 2\cdot 4E\left|\int_0^T(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))dW_s\right|^2 \le$$

изометрия Ито

$$\le 2TC^2\cdot E\int_0^T|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds + 8E\int_0^T tr(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s^{n-1}))^*ds \le$$

$$\le 2TC^2\cdot E\int_0^T|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds + 8C^2E\int_0^T|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds = 2C^2(T+4)E\int_0^T\underbrace{|X_s^n-X_s^{n-1}|^2}_{\le E\sup_{s\le T}|X_s^n-X_s^{n-1}|^2}ds$$

$$\le \boxed{2C^2(T+4)\int_0^T E\sup_{s\le T}|X_s^n-X_s^{n-1}|^2ds}$$

Обозначим $a_T^n := E\sup\limits_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2$

Мы получили, что $a_T^n \le C_T\int_0^T a_{s_1}^{n-1}ds_1 \underset{\substack{\text{применяем}\\ \text{индукцию}}}{\le} C_T\int_0^T C_T\left(\int_0^{s_1} a_{s_2}^{n-2}ds_2\right)ds_1 \le \ldots \le \underset{\substack{\text{интеграл}\\ \text{по симплексу}}}{\frac{(C_T)^n\cdot T^n\cdot a_T^0}{n!}}$

$\Rightarrow$ по н-ву Маркова: $P\left(\sup\limits_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\ge 2^{-n}\right) \le 2^n\cdot E\sup\limits_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n| \underset{EX\le\sqrt{EX^2}}{\le} 2^n\cdot\sqrt{E\left(\sup\limits_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right)^2} =$

$= 2^n\cdot\sqrt{E\sup\limits_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2} = 2^n\cdot\sqrt{a_T^n} \le 2^n\cdot\sqrt{\frac{C_T^n\cdot T^n\cdot a_T^0}{n!}}$

А ряд $\sum\limits_n a_T^n$ – сходится

$\Rightarrow$ по лемме Бореля-Кантелли:

$\forall n>n_0(\omega)$: $\sup\limits_{t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|<2^{-n}$

$\Rightarrow$ можем ~~корректно~~ определить $X_t := X_t^0+\sum\limits_{n\ge 0}(X_t^{n+1}-X_t^n)$ $\leftarrow$ ряд корректно определён в $L_2(\Omega\times[0,T];P\times\lambda)$ и в $C([0,T])$ для п.в. $\omega$.

Более того, есть равномерная по $t\in[0,T]$ сходимость:

$X_t^{n+1} = X_t^0+\sum\limits_{k=0}^{n}(X_t^{k+1}-X_t^k) \rightrightarrows X_t;\ n\to\infty$

Мы хотим перейти к пределу в ур-и:

$X_t^{n+1} = x_0+\int_0^t b(s,X_s^n)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s^n)ds.$

Тогда мы получим $X_t = x_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s$.

Почему можем перейти к пределу?

- $X_t^{n+1}\xrightarrow{п.н.}X_t$ (и даже равномерно по $t\le T$)
- $\int_0^t b(s,X_s^n)ds\xrightarrow{п.н.}\int_0^t b(s,X_s)ds$, $n\to\infty$,

т.к. $\left|\int_0^t(b(s,X_s^n)-b(s,X_s))ds\right| \le \int_0^t|b(s,X_s^n)-b(s,X_s)|ds \overset{\text{липшицевость}}{\le} \int_0^t C\cdot|X_s^n-X_s|ds \xrightarrow{п.н.} 0$, т.к. $\sup\limits_{s\le t}|X_s^n-X_s|\to 0$ (по опр. равном. сход.)

- $\int_0^t\sigma(s,X_s^n)dW_s\xrightarrow{п.н.}\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s\to 0$, по т. Лебега о мажорируемой сходимости,

т.к. $E\left(\int_0^t(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s))dW_s\right)^2 \underset{\text{изометрия}}{=} E\int_0^t tr\left(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s)\right)\left(\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s)\right)^T ds \le$

$\le\tilde C\cdot E\int_0^t\underbrace{\|\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s)\|^2}_{=:f_n}ds \longrightarrow 0$, т.к. $\begin{cases} f_n\xrightarrow{п.н.}0, \text{ поскольку } \|\sigma(s,X_s^n)-\sigma(s,X_s)\|\le C\cdot|X_s^n-X_s|^2\longrightarrow 0\\ f_n\le g_n := C\cdot|X_s^n-X_s|^2 \text{ п.н.}\\ E\int_0^t g_n ds = \int_0^t E|X_s^n-X_s|^2ds \le \underbrace{2CE\int_0^t(X_s^n)^2ds}_{<\infty,\ \text{в силу априорных оценок}}+\underbrace{2E\int_0^t X_s^2ds}_{<\infty,\ \text{т.к. } X_t\in L_2(\Omega\times[0,T];P\times\lambda)}<\infty\end{cases}$

$\Rightarrow$ Значит $\tilde E\int_0^t f_n ds\to 0$ по т. Лебега о мажорируемой сходимости. ЧТД.