ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА теории вероятностей

КУРСОВАЯ РАБОТА
специалиста

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСНОВНЫХ ПРИНЦИПОВ НАЗНАЧЕНИЯ ПРЕМИЙ

Выполнила студентка 309 группы
Токаева Александра Александровна

____
подпись студента

Научный руководитель:

профессор, д.ф.-м.н.

Фалин Геннадий Иванович

____
подпись научного руководителя

Москва
2020

Оглавление

1. От автора

Задача назначения страховых премий и определения оптимальной цены для различных финансовых инструментов играет важнейшую роль в страховой математике, поскольку без правильно назначенной цены на продукт его нельзя продать и получить прибыль. Цель данной работы - подробно и основательно изучить этот раздел современной теории страхования, дать описание основных подходов к назначению премий и сделать определенные выводы. Наши рассуждения опираются на статью G.Falin. On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio. Astin Bulletin, 2008, 38(1), pp.161-170. Отметим, что некоторые рассуждения и логические переходы в данной статье содержат пропуски или вовсе опущены. Мы полностью восстановим все пропущенные рассуждения и добавим важные, на наш взгляд, детали. К таким мы относим, например, альтернативные решения задач 1 и 2, использующие не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а минимизационные свойства перпендикуляра, опущенного из точки на гиперплоскость, и геометрические свойства скалярного произведения векторов соответственно, а также два примера и графики, иллюстрирующие статистические исследования для обоих примеров, проведенные в Python. Однако мы не претендуем на авторство конкретных утверждений и результатов, а также используемых понятий из теории вероятностей и страхования, поэтому вся работа, проделанная лично нами, отдельно отмечена.

Мы применим простые геометрические принципы, чтобы найти оптимальные значения премий и минимизировать вероятность разорения. Кроме того, мы покажем, что три стандартных подхода к назначению премий (имеются в виду принципы деления добавочной суммы пропорционально ожидаемому убытку, дисперсии или среднеквадратическому отклонению) являются частными случаями рассматриваемой нами задачи оптимизации и при этом минимизируют взвешенные ожидаемые квадраты разностей как между индивидуальными премиями и индивидуальными выплатами, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными выплатами по этим классам.

2. Постановка задачи

Рассмотрим портфель из n неоднородных независимых страховых рисков. Пусть X_i обозначает размер выплат по i-му риску за рассматриваемый период, $S = X_1 + \cdots + X_n$ обозначает суммарные потери, связанные с портфелем. При некоторых естественных предположениях (что портфель достаточно большой, не очень неоднородный и распределение размера выплат не очень ассиметричное) распределение случайной величины $\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}}$ может быть приближено стандартным гауссовским распределением. Предположим, что страховщик взимает премию π_i по i-му риску и таким образом собирает суммарную премию $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. Из приблизительной гауссовости распределения величины $\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}}$ получаем, что для гарантии достаточно маленькой вероятности разорения $R = P(s > \pi)$ (например, $R = 5\%$) страховщик должен собрать суммарную премию в размере

$$\pi = ES + z_{1-R}\sqrt{VarS}, \tag{1}$$

где z_{1-R} — квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - R$.

Поясним последнее утверждение: для этого сначала центрируем и нормируем величину S, а потом применим к ней центральную предельную теорему. Имеем:

$$R = P(S > \pi) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}} > \frac{S-\pi}{\sqrt{VarS}}\right).$$

Значит, $\frac{S-\pi}{\sqrt{VarS}} \approx z_{1-R}$, откуда и получаем искомую формулу для суммарной премии.

Ниже представлена таблица, содержащая $\alpha = 1 - R$ и соответствующую квантиль z_α.

α	99.9%	99%	98%	97%	96%	95%
z_α	3.090	2.326	2.054	1.881	1.751	1.654

Таблица 1

Последнее равенство ничего не говорит о величине индивидуальных премий. Чтобы найти их, необходимо использовать дополнительные принципы, описанные далее. Но сначала в качестве иллюстрации мы применим гауссовское приближения для решения следующей задачи.

3. Пример 1

Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0.3\% = 0.003$. Компания выплачивает сумму $b = 250000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года. Определите величину активов, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5%.

Решение: Как обычно, примем размер страховой премии в качестве новой денежной единицы. Прежде всего, мы должны подсчитать среднее значение и дисперсию суммарного ущерба S, зная распределение величины ξ индивидуального риска. Имеем:

$$ES = N \cdot E\xi = 3000 \cdot 0.003 = 9.$$

$$VarS = N \cdot Var\xi = 3000(q - q^2) = 3000 \cdot 0.997 \cdot 0.003 = 8.973.$$

Поэтому

$$P(S \le u) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}} \le \frac{u-ES}{\sqrt{VarS}}\right) = P\left(\frac{S-9}{\sqrt{8.973}} \le \frac{u-9}{\sqrt{8.973}}\right) \approx \Phi\left(\frac{u-9}{\sqrt{8.973}}\right).$$

Если мы хотим иметь вероятность разорения порядка 5%, то $\frac{u-9}{\sqrt{8.973}}$ должно равняться $z_{95\%} \approx 1.6448536269514722$.

Поэтому $u \approx 9 + z_{95\%}\sqrt{8.973} \approx 13.927153479809427$ от величины страховой суммы, то есть 3481788.37 руб.

Проверим полученный результат на практике: будем моделировать факт наступления страхового случая с помощью генератора случайных чисел, проведем $k = 100000$ испытаний и посмотрим, каков процент испытаний, в которых величина суммарного ущерба прев ысит вычисленную выше величину активов. Все вычисления проведем в Python. Ниже пре дставлен код, с помощью которого можно нарисовать этот график.

```
import numpy as np
import random as r
import scipy.stats
import matplotlib.pyplot as plt
from tqdm import tqdm

N=3000
q=0.3/100
b=250000
h=0
u=b*(N*q + np.sqrt(N*q*(1-q))*scipy.stats.norm.ppf(0.95))
print('u=',u)

k=1000
mas=[]
cnt=0
for i in tqdm(range(k)):
    people = np.array([int(r.random() < q) for i in range(N)])
    mas.append(b*people.sum() )
    cnt=cnt+int(b*people.sum() > u)
    h=h+people[people==1].sum()
print(f'q примерно равно {h/k/N*100}')
print(f'вероятность разорения= {cnt/k*100}%')

plt.plot(np.arange(k)[0:-1:1],mas[0:-1:1])
plt.axhline(u,c='r',label='величина активов')
plt.xlabel('номер испытания')
plt.ylabel('величина выплат')
plt.title(f'Пример 1: вероятность разорения={cnt/k*100}%')
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig('Primer.png', format='png', dpi=100)
```

Рис 1.1

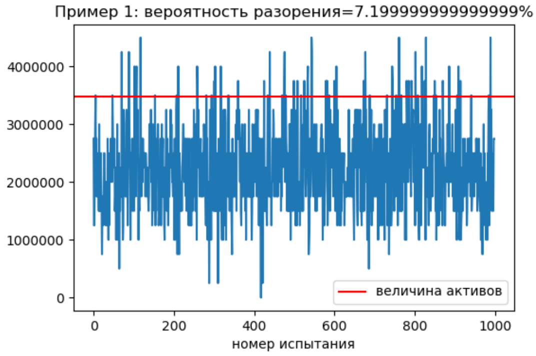

Рис 1.2

Мы видим, что из-за того, что количество договоров в портфеле недостаточно велико, оказывается, что гауссовское приближение для S — достаточно грубое, и поэтому разорения получилась 7.2%, что несколько больше, чем 5%. Если бы количество договоров в портфеле было хотя бы на порядок больше и равнялось $N = 10000$, то мы бы получили вероятность разорения 5.5%.

4. Четыре принципа назначения премий

Сначала мы напомним три стандартных принципа назначения премий, а потом предложим четвертый принцип, в рамках которого мы рассмотрим два подхода к задаче разбиения величины π на n индивидуальных премий $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Предварительно напомним, что $l = \pi - ES$ называется добавочной суммой.

Принцип 1 Будем делить добавочную сумму $l = z_{1-R}\, V\, arS$
между договорами пропорционально ожидаемому убытку EX_i, предварительно обозначив коэффициент пропорциональности за k.
То есть для i-го договора мы назначим премию $\pi_i = EX_i + l_i$, где $l_i = kEX_i$.
Вычислим значение коэффициента пропорциональности k, просуммировав выражения $l_i = kEX_i$. Получим $z_{1-R}\sqrt{VarS} = kES$, откуда $k = \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{ES}$.
Окончательно $\pi_i = EX_i + \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{ES}\, EX_i$.

Принцип 2 Будем делить добавочную сумму $l = z_{1-R}\, V\, arS$
между договорами пропорционально дисперсиям $VarX_i$, предварительно обозначив коэффициент пропорциональности за k.
То есть для i-го договора мы назначим премию $\pi_i = EX_i + l_i$, где $l_i = kVarX_i$.
Вычислим значение коэффициента пропорциональности k, просуммировав выражения

$l_i = kVarX_i$. Получим $z_{1-R}\sqrt{VarS} = kVarS$, откуда $k = \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{VarS}$.

Окончательно $\pi_i = EX_i + \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{VarS}\ VarX_i$.

<u>Принцип 3</u> Будем делить добавочную сумму $l = z_{1-R}\ V\ arS$ между договорами пропорционально среднеквадратическим отклонениям $\sqrt{VarX_i}$, предварительно обозначив коэффициент пропорциональности за k.

То есть для i-го договора мы назначим премию $\pi_i = EX_i + l_i$, где $l_i = k\sqrt{VarX_i}$.

Вычислим значение коэффициента пропорциональности k, просуммировав выражения $l_i = k\sqrt{VarX_i}$.

Получим $z_{1-R}\sqrt{VarS} = k\sum_{i=1}^{n}\sqrt{VarX_i}$, откуда $k = \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{VarX_i}}$.

Окончательно $\pi_i = EX_i + \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{VarX_i}}\ \sqrt{VarX_i}$.

<u>Принцип 4</u> К нему ведут два разных подхода:

1) Для заданной вероятности разорения $R = P(s > \pi)$ (то есть для заданного значения $\pi = ES + z_{1-R}\sqrt{VarS}$) назначить индивидуальные премии так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратичную разность $\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i}E(X_i - \pi_i)^2$ между индивидуальными рисками X_i и индивидуальными премиями π_i (где s_i —это некоторые известные положительные числа).
2) Для заданной величины $D = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i}E(X_i - \pi_i)^2$ минимизировать вероятность разорения $R = P(s > \pi)$.

Сейчас мы покажем, что оптимальное решение для обоих подходов одинаково и имеет вид

$$\pi_i = EX_i + z_{1-R}\sqrt{VarS}\frac{s_i}{\sum_{j=1}^{n}s_j}.$$

В частности,

если $s_i = EX_i$, то мы получаем принцип 1,

если $s_i = VarX_i$, то мы получаем принцип 2,

если $s_i = \sqrt{VarX_i}$, то мы получаем принцип 3.

Кроме того, мы покажем, что оптимальные премии π_i минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными выплатами, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными выплатами по этим классам.

5. Общие результаты о случайных величинах

5.1. Задача минимизации величины *D*

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ − случайные величины с конечными матожиданиями $a_1, \dots, a_N$ и дисперсиями $Var\xi_1, \dots, Var\xi_N$. Мы предполагаем, что матожидания и дисперсии известны. Нам бы хотелось заменить случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ на неслучайные числа $A_1, \dots, A_N$ таким образом, чтобы взвешенная сумма

$$D = \sum_{i=1}^{N}\omega_i E(\xi_i - A_i)^2 \tag{2}$$

была бы минимальна. Здесь $\omega_1, \dots, \omega_N$ — известные положительные числа.

Используя элементарные свойства случайных величин, мы можем переписать D следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(Var(\xi_i - A_i) + \left(E(\xi_i - A_i) \right)^2 \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(Var(\xi_i - A_i) + (a_i - A_i)^2 \right) \tag{3}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2$$

Поскольку ω_i и $Var\xi_i$ фиксированы, то изначальная задача минимизации превращается в задачу нахождения минимального значения функции

$$f(A_1, \dots, A_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2 .$$

Очевидно, оптимальным значением являются

$$A_1^* = a_1, \dots, A_N^* = a_N$$

и минимальное значение этой функции равно нулю. Соответственно, минимальное значение величины D равно $\sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i$.

Теперь усложним ситуацию, наложив дополнительные ограничения на переменные $A_1, \dots, A_N$, и получим следующую задачу оптимизации:

<u>Задача 1</u> Найти минимальное значение $D(A_1, \dots, A_N)$ при условии, что

$$A_1, \dots, A_N = C, \tag{4}$$

где C — известная константа.

Опять перепишем D в виде

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2$$

и заметим, что поскольку ω_i и $Var\xi_i$ фиксированы, то для решения задачи 1 нам достаточно найти минимальное значение функции

$$f(A_1, \dots, A_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2$$

на множестве тех наборов чисел $(A_1, \dots, A_N)$, которые удовлетворяют условию (4): $A_1, \dots, A_N = C$.

Для решения задачи 1 введем новые переменные $x_i = \sqrt{\omega_i}(A_i - a_i)$, то есть $A_i = a_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$. Тогда задача 1 превращается в:

<u>Задача 1′</u> Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{5}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i = C-\sum_{i=1}^{N}a_i. \tag{6}$$

Последовательности $X = (x_1, \dots, x_N)$ и Y= $\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ можно рассматривать как N-мерные евклидовы векторы в пространстве $\mathbb{R}^N$. Соответственно, левая часть (6) есть скалярное произведение X и Y, а функция $g(x_1, \dots, x_N)$ есть $\|X\|^2$, где

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2+\dots+x_N^2}$$

есть длина вектора X.

Продолжим решать задачу $1'$, используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, согласно которому для любых двух векторов X, Y из $\mathbb{R}^N$ верно:

$$|X\cdot Y| \le \|X\|\cdot\|Y\|,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы (в частности, если вектор Y ненулевой, линейная зависимость означает, что X пропорционален Y, то есть $X = t\cdot Y$ для некоторого $t \in \mathbb{R}^N$.

Применяя это неравенство, получаем:

$$g(x_1, \dots, x_N) = \|X\|^2 \ge \frac{|X\cdot Y|^2}{\|Y\|^2} = \frac{(C-\sum_{i=1}^{N}a_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i}}. \tag{7}$$

Поэтому для векторов $X = (x_1, \dots, x_N)$, удовлетворяющих (7), имеем:

$$\min g(x_1, \dots, x_N) \ge \frac{(C-\sum_{i=1}^{N}a_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i}}. \tag{8}$$

Поскольку вектор Y= $\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ ненулевой (из-за того, что $\omega_1, \dots, \omega_N$ — это известные положительные числа), то равенство достигается тогда и только тогда, когда существует такое t, что

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}t, i = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Подставляя равенство $X = tY$ в (7), получаем, что

$$t^2\frac{\|Y\|^4}{\|Y\|^2} = \frac{(C-\sum_{i=1}^{N}a_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\omega_i}},$$

то есть

$$t = \frac{C-\sum_{j=1}^{N}a_j}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\omega_j}},$$

поэтому

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}t = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}\frac{C-\sum_{j=1}^{N}a_j}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\omega_j}},$$

откуда и следует ответ в задаче $1'$:

$$\min\sum_{i=1}^{N}x_i^2 = \frac{1}{\omega_i}\frac{C-\sum_{j=1}^{N}a_j}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\omega_j}}.$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче 1, получаем ее решение в виде:

$$A_i = a_i + \frac{x_i}{\sqrt{\omega_i}} = a_i + \frac{t}{\omega_i} = a_i + \frac{1}{\omega_i}\frac{C - \sum_{j=1}^{N} a_j}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}. \tag{10}$$

Поэтому:

$$D_{min} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \frac{C - \sum_{j=1}^{N} a_j}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}. \tag{11}$$

5.2. Альтернативное решение задачи минимизации величины *D*

Дадим альтернативное решение задачи минимизации величины D, использующее не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а минимиза- ционные свойства перпендикуляра, опущенного из точки на гиперплоскость:

Задача 1′ Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i = C - \sum_{i=1}^{N} a_i.$$

Опять будем понимать наборы чисел $X = (x_1, \dots, x_N)$ и $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ как N-мерные евклидовы векторы в пространстве $\mathbb{R}^N$. Поэтому наша задача заключается в том, чтобы минимизировать квадрат длины вектора X, удовлетворяющего условию $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i = C - \sum_{i=1}^{N} a_i$. Но заметим, что данное условие означает, что вектор X принадлежит гиперплоскости с нормалью $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$.

Последнее утверждение требует некоторых пояснений. Как известно, гиперплоскость — это линейная поверхность коразмерности один, то есть линейная оболочка $N-1$ вектора. Из линейной алгебры известно, что линейные пространства можно задавать системами линейных уравнений, причем (см. [2]) если система имеет ранг k, то задаваемое ей пространство будет иметь размерность $N-k$. Поэтому в случае гиперплоскости (размерности $N-1$) в N-мерном пространстве требуется всего одно уравнение. Запишем его в виде $b_1 x_1 + \dots + b_N x_N = c$.

Согласно общей теории, это уравнение задает плоскость размерности $N-1$. Но с другой стороны, это левую часть этого уравнения можно можно переписать в виде скалярного произведения фиксированного вектора $b = (b_1, \dots, b_N)$ на вектор x из этой гиперплоскости. То есть вектор b перпендикулярен всем векторам x из этой гиперплоскости, поэтому b — это вектор нормали к данной гиперплоскости.

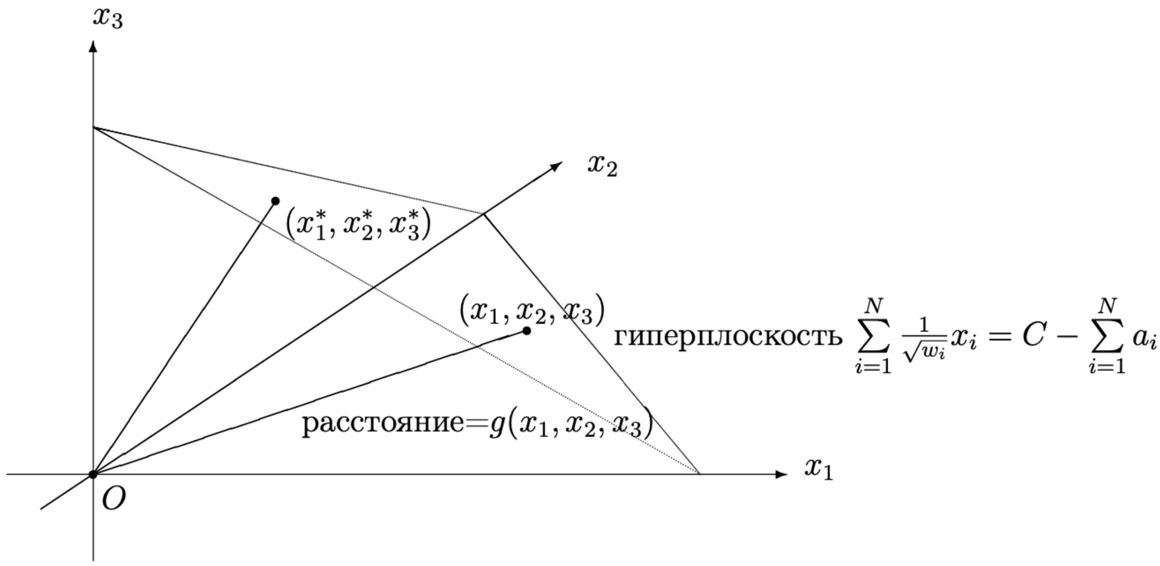

Рис. 5.1

Данное утверждение, сформулированное как "в ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором" доказано в [3]. Из курса линейной алгебры известно, что минимизирует расстояние от точки до гиперплоскости — перпендикуляр, опущенный из этой точки на гиперплоскость (это непосредственно следует из многомерной теоремы Пифагора). Но выше мы уже пояснили, что нормаль к нашей гиперплоскости — это вектор Y, поэтому искомый вектор X будет пропорционален Y:

$$X = tY,$$

то есть

$$(x_1, \ldots, x_N) = t\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right).$$

Подставим выражение для X в условие

$$(X, Y) = C - \sum_{i=1}^{N} a_i.$$

Получим

$$t\|Y\|^2 = C - \sum_{i=1}^{N} a_i.$$

Отсюда

$$t = \frac{C - \sum_{i=1}^{N} a_i}{\|Y\|^2} = \frac{C - \sum_{i=1}^{N} a_i}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}.$$

Значит, минимальное значение в задаче $1'$ имеет вид

$$min \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = t^2\|Y\|^2 = t(t\|Y\|^2) = t\left(C - \sum_{i=1}^{N} a_i\right) = \frac{(C - \sum_{i=1}^{N} a_i)^2}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}.$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче 1 минимизации величины D, получаем ответ:

$$D_{min} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \frac{C - \sum_{j=1}^{N} a_j}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}.$$

5.3. Задача максимизации суммы $A_1 + \cdots + A_N$

Теперь изучим двойственную задачу оптимизации:

__Задача 2__ Найти максимум суммы $A_1 + \cdots + A_N$, если задано

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2. \tag{12}$$

Как и раньше, перепишем D в виде

$$D = \sum_{i=1}^{N} \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i + \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2,$$

причем отметим такой факт: из этого представления следует, что константа D должна быть больше или равна, чем $\sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i$.

Поэтому так введенная константа D' будет неотрицательна:

$$D' = D - \sum_{i=1}^{N} \omega_i Var\xi_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2 \geq 0.$$

После введения величины D' ограничение (12) превращается в

$$D' = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2 \text{ — задано.}$$

Вводя $x_i = \sqrt{\omega_i}(A_i - a_i),\ A_i = a_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$, мы сводим задачу 2 к следующей задаче:

__Задача 2′__ Найти максимум суммы $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$, если задана величина

$$D' = \sum_{i=1}^{N} x_i^2. \tag{14}$$

Для решения этой задачи, опять применяем неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i = |X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| = \sqrt{D'} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}. \tag{14}$$

Причем равенство в (14) достигается тогда и только тогда, когда существует t такое, что

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} t, i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Подставляя выражение $X = tY$ в (14), получаем единственное решение

$$\mathrm{t} = \sqrt{\frac{\mathrm{D}'}{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\omega_{\mathrm{j}}}}}.$$

Тогда

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} t = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \sqrt{\frac{D'}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}}.$$

Поэтому искомый максимум в задаче $2'$ равен $\sqrt{\mathrm{D}'} \sqrt{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\omega_{\mathrm{j}}}}$.

Тогда возвращаясь к исходной задаче 2:

$$A_i = a_i + \frac{x_i}{\sqrt{\omega_i}} = a_i + \frac{t}{\omega_i} = a_i + \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\frac{D'}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}}. \qquad (16)$$

Поэтому максимум суммы $A_1 + \dots + A_N$ равен

$$\sum_{i=1}^{N} a_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \omega_i (a_i - A_i)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\omega_j}}.$$

5.4. Альтернативное решение задачи максимизации суммы $A_1 + \dots + A_N$

Дадим альтернативное решение задаче $2'$, использующее не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а геометрические свойства скалярного произведения векторов.

Задача $2'$ Найти максимум суммы $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$, если задана величина

$$D' = \sum_{i=1}^{N} x_i^2.$$

Заметим, что нам нужно максимизировать скалярное произведение векторов X и Y, причем длины этих векторов заданы, а изменять мы можем только угол β между ними. Но по свойству скалярного произведения двух векторов оно равняется

$$\|X\| \cdot \|Y\| \cdot cos\beta.$$

Тогда поскольку длины обоих векторов заданы, а косинус по модулю не превосходит единицы, то для максимизации этого скалярного произведения достаточно сделать косинус по модулю равным единице, то есть векторы X и Y должны быть коллинеарны. Получаем, что $X = tY$, и дальше рассуждаем как было описано в (15) и (16).

6. Приложение полученных результатов к модели индивидуального риска

Рассмотрим модель индивидуального риска: $S = X_1 + \dots + X_n$,
где S — общие потери по портфелю, n — общее число рисков в портфеле, случайная величина X_i обозначает потери по i-му риску за рассматриваемый период.

Мы предполагаем, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют конечные матожидания $\mu_1, \dots, \mu_n$ и дисперсии ${\sigma_1}^2, \dots, {\sigma_n}^2$ соответственно. Тогда случайная величина S имеет конечное матожидание

$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ и дисперсию $\sigma^2 = {\sigma_1}^2 + \dots + {\sigma_n}^2$. Мы также предполагаем, что для достаточно больших n функция распределения центрированной и нормированной величины полных потерь $\frac{S-\mu}{\sigma}$ может быть

приближена функцией распределения стандартной гауссовской величины

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt.$$

То есть

$$P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi(x).$$

Предположим, что страховщик взимает премию π_i по i-му риску и таким образом собирает суммарную премию $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. Тогда вероятность разорения дается формулой $R = P(S > \pi)$. Используя приблизительную гауссовость величины $\frac{S-\mu}{\sigma}$, получаем

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}(\mathrm{S} > \pi) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}-\mu}{\sigma} > \frac{\pi-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\pi-\mu}{\sigma}\right). \qquad (17)$$

Предположим, что страховщик готов принять достаточно маленький риск разорения R (например, $R = 1\%$). Тогда равенство (17) дает следующую (приближенную) формулу для суммарной премии:

$$\pi = \mu + z_{1-R}\sigma, \qquad (18)$$

где z_α — квантиль гауссовского распределения уровня α, то есть $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

Равенство (18) ничего не говорит про величины индивидуальных премий π_i. Чтобы найти их, нам придется применить дополнительные принципы.

6.1. Минимизация ожидаемой разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями при заданной вероятности разорения

Задача 3 Рассмотрим взвешенную среднюю квадратичную разность

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2.$$

между индивидуальными рисками $X_1, \dots, X_n$ и индивидуальными премиями $\pi_1, \dots, \pi_n$ (где $s_1, \dots, s_n$ — это некие известные положительные числа) и найдем минимум D:

$$D = D(\pi_1, \dots, \pi_n) \to min. \qquad (19)$$

Применяя формулу (10) для

$N = n,\ \xi_i = X_i,\ a_i = \mu_i,\ A_i = \pi_i, \omega_i = \frac{1}{s_i},\ C = \mu + z_{1-R}\sigma,$

мы можем утверждать, что минимизационная задача 3 с ограничением (18) имеет единственное решение

$${\pi_i}^* = \mu_i + \sigma \cdot z_{1-R} \frac{s_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j}. \qquad (20)$$

Пусть теперь портфель неоднородный, но его можно разбить на k классов однородных рисков с одинаковыми статистическими характеристиками потерь (обычно риски из одного класса принадлежат одному и тому же сектору бизнеса). Пусть i–й класс состоит из n_i рисков с одинаковым средним μ_i и одинаковыми дисперсиями ${\sigma_i}^2$. Тогда величина суммарных потерь S_i в i–м классе имеет среднее значение $ES_i = n_i\mu_i$ и дисперсию $VarS_i = n_i{\sigma_i}^2$.

Суммарные потери по всему портфелю есть $S = S_1 + \cdots + S_k$, причем $\mu = ES = \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i$, $VarS = \sum_{i=1}^{k} n_i{\sigma_i}^2$. Из-за однородности рисков внутри отдельного класса i, страховщик должен взимать со всех рисков в этом классе одну и ту же премию π_i. Тогда общая премия за все риски в портфеле равна $\pi = \sum_{i=1}^{k} n_i\pi_i$.

Задача 4 Рассмотрим взвешенную среднюю квадратичную разность

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2$$

между суммарными потерями по разным классам $S_1, \dots, S_k$ и суммарными премиями $n_1\pi_1, \dots, n_k\pi_k$, собранными в этих классов (где $r_1, \dots, r_k$ — это некоторые известные положительные числа) и минимизируем D:

$$D = D(\pi_1, \dots, \pi_k) \to min. \tag{21}$$

Для того, чтобы получить предписанную вероятность разорения, нужно, чтобы выполнялось (18): $\pi = \mu + z_{1-R}\sigma$.

Применяя формулу (10) для

$N = k,\ \xi_i = S_i,\ a_i = n_i\mu_i,\ A_i = n_i\pi_i\,, \omega_i = \frac{1}{r_i}, C = \mu + z_{1-R}\sigma$,

мы можем утверждать, что минимизационная задача 4 с ограничением (18) имеет единственное решение:

$$n_i{\pi_i}^* = n_i\mu_i + \sigma \cdot z_{1-R} \frac{r_i}{\sum_{j=1}^{k} r_j}.$$

Окончательно

$${\pi_i}^* = \mu_i + \sigma \cdot z_{1-R} \frac{r_i}{n_i \sum_{j=1}^{k} r_j}. \tag{22}$$

Теперь вернемся к минимизационной задаче (19) с ограничением (18) и положим для всех рисков из i-го класса одинаковое значение параметра s_i равным $\frac{r_i}{n_i}$. Тогда из (20) видно, что оптимальное решение для минимизационной задачи (19) совпадает с оптимальным решением минимизационной задачи (21). Таким образом, одни и те же значения премий минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

6.2. Минимизация вероятности разорения при заданной взвешенной средней квадратичной разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями

Задача 5 Для модели индивидуального риска

$$S = X_1 + \cdots + X_n$$

минимизировать вероятность разорения $P(S > \pi)$ при заданной величине

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2.$$

Поскольку $P(S > \pi)$ уменьшается при увеличивающемся $\pi,$ то задача состоит в нахождении максимального значения суммарной премии $\pi = \pi_1 + \cdots + \pi_n$.
Применяя формулу (10) для

$N = n,\ \xi_i = X_i,\ a_i = \mu_i,\ A_i = \pi_i,\ \omega_i = \frac{1}{s_i},$

мы можем утверждать, что минимизационная задача 5 имеет единственное решение

$$\pi_i^* = \mu_i + s_i \sqrt{\frac{D - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j} \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^{n} s_j}}.$$

Пусть теперь портфель неоднородный, но его можно разбить на k классов однородных рисков с одинаковыми статистическими характеристиками потерь (обычно риски из одного класса принадлежат одному и тому же сектору бизнеса). Пусть i–й класс состоит из n_i рисков с одинаковым средним μ_i и одинаковыми дисперсиями σ_i^2. Тогда величина суммарных потерь S_i в i –м классе имеет среднее значение $ES_i = n_i\mu_i$ и дисперсию $VarS_i = n_i\sigma_i^2$.

Суммарные потери по всему портфелю есть $S = S_1 + \cdots + S_k$, причем

$$\mu = ES = \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i,\ VarS = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2.$$

Из-за однородности рисков внутри отдельного класса i, страховщик должен взимать со всех рисков в этом классе одну и ту же премию π_i. Тогда общая премия за все риски в портфеле равна $\pi = \sum_{i=1}^{k} n_i\pi_i$.
Рассмотрим оптимизационную задачу:

Задача 6 Минимизировать вероятность разорения $P(S > \pi)$ при заданной величине

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2.$$

Применяя формулу (10) для

$N = k,\ \xi_i = S_i,\ a_i = n_i\mu_i,\ A_i = n_i\pi_i,\ \omega_i = \frac{1}{r_i},$

мы можем утверждать, что минимизационная задача 6 с ограничением (имеет единственное решение:

$$\pi_i^* = \mu_i + \frac{r_i}{n_i} \sqrt{\frac{D - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{r_j} n_j\sigma_j^2}{\sum_{j=1}^{k} r_j}}. \qquad (24)$$

Сравнивая формулы (23) и (24), опять видим, что одни и те же значения премий минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

В заключение приведем пример, иллюстрирующий все три принципа, а также разбиение на классы однородных рисков.

7. Пример 2

Предположим, что страховая компания заключила $N = 10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает выгодоприобретателю 1000000 руб., а в случае смерти в течение года от естественных причин компания выплачивает выгодоприобретателю 250000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0.0005. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. В первом приближении можно разбить N застрахованных на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q_1 = 0.004$ и $q_2 = 0.002$ соответственно. Подсчитайте величину премии, гарантирующую вероятность выполнения компанией своих обязательств, равную 95%.

Решение:

Примем сумму 250000 руб. в качестве условной денежной единицы. Тогда для первой группы договоров индивидуальный убыток принимает три значения: 0, 1 и 4 с вероятностями 0.9955, 0.004 и 0.0005 соответственно. Среднее значение и дисперсия величины индивидуального убытка есть

$$m_1 = 1 \cdot 0.004 + 4 \cdot 0.0005 = 0.006,$$

$$\sigma_1{}^2 = 1^2 \cdot 0.004 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_1{}^2 = 0.012 - 0.00036 = 0.011964.$$

Для второй группы договоров индивидуальный убыток принимает те же три значения 0, 1 и 4, но с другими вероятностями: 0.9975, 0.002 и 0.0005. В этой группе среднее значение и дисперсия индивидуального убытка есть

$$m_2 = 1 \cdot 0.002 + 4 \cdot 0.0005 = 0.004$$

$$\sigma_2{}^2 = 1^2 \cdot 0.002 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_1{}^2 = 0.01 - 0.00036 = 0.009964.$$

Среднее значение и дисперсия суммарного убытка равны:

$$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0.006 + 6000 \cdot 0.004 = 48,$$

$$VarS = N_1 \cdot \sigma_1{}^2 + N_2 \cdot \sigma_2{}^2 = 4000 \cdot 0.011964 + 6000 \cdot 0.009964 = 107.64.$$

Для того, чтобы гарантировать 95% вероятность выполнения своих обязательств, резервный фонд компании должен быть $ES + l = 48 + l,$ где добавочная сумма l равна

$$l = z_{95\%}\sqrt{VarS} = 1.6448536269514722\sqrt{107.64} = 17.06530683576566.$$

Рассмотрим теперь вопрос о назначении индивидуальных премий. Для этого вспомним три принципа, рассмотренные в главе 3:

Принцип 1 $\pi_i = EX_i + \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{ES}\ EX_i$

Принцип 2 $\pi_i = EX_i + \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{VarS}\ VarX_i$

Принцип 3 $\pi_i = EX_i + \frac{z_{1-R}\sqrt{VarS}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{VarX_i}}\ \sqrt{VarX_i}$

Если добавочная сумма l делится пропорционально матожиданиям, то относительная страховая надбавка θ одна и та же для всех договоров и равна $\theta = \frac{l}{ES} = \frac{17.06530683576566}{48} \approx$ 35.555%.

Поэтому для договоров из первой группы премия равна

$$\pi_1 = m_1(1 + \theta) \approx \mathbf{2033.588} \text{ руб.}$$

Для договоров из второй группы премия равна

$$\pi_2 = m_2(1 + \theta) \approx \mathbf{1355.725} \text{ руб.}$$

Если добавочная сумма l делится пропорционально дисперсиям, то коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{VarS} = \frac{17.06530683576566}{107.64} \approx 15.854\%.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна
$l_1 = k \cdot {\sigma_1}^2 \approx 0.00189678,$
так что премия есть

$$\pi_1 = m_1 + l_1 \approx 0.00789678 \approx \mathbf{1974.195} \text{ руб},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.613\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot {\sigma_2}^2 \approx 0.0015828287,$$

так что премия есть

$$\pi_2 = m_2 + l_2 \approx 0.0055828287 \approx \mathbf{1395.717} \text{ руб},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39.57\%.$$

Если добавочная сумма l делится пропорционально среднеквадратическим отклонениям (они равны $\sigma_1 \approx 0.10938$ для договоров первой группы и $\sigma_2 = 0.1$ для договоров второй группы), то коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} = \frac{17.06530683576566}{4000 \cdot 0.10938 + 6000 \cdot 0.1} \approx 0.016448.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна
$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0.001799,$
так что премия есть

$$\pi_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007799 \approx \mathbf{1950.234} \text{ руб},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30.015\%.$$

Для договоров из первой группы страховая надбавка равна
$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0.0016451776,$
так что премия есть

$$\pi_2 = m_2 + l_2 \approx 0.0056451776 \approx \mathbf{1411.2944} \text{ руб},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41.129\%.$$

Итак, изменение принципа назначения индивидуальных премий приводит к уменьшению относительной страховой надбавки для договоров первой группы: $\theta_1 = 35.555\%, 31.613\%,\ 30.015\%$. Соответственно для договоров второй группы относительная защитная надбавка увеличивается: $\theta_2 = 35.555\%, 39.57\%,\ 41.129\%$. Это связано с тем, что коэффициент рассеяния суммарного ущерба есть

$$\frac{VarS}{ES} - 1 = 1.25,$$

в то время как для договоров первой (второй) группы он равен

$$\frac{{\sigma_1}^2}{m_1} - 1 = 1$$

и

$$\frac{{\sigma_2}^2}{m_1} - 1 = 1.5.$$

Коэффициент вариации величины индивидуального убытка для договоров первой группы есть

$$c_1 = \frac{\sigma_1}{m_1} \approx 18.26,$$

а для договоров второй группы он равен

$$c_2 = \frac{\sigma_2}{m_2} = 25.$$

Средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $\frac{E\xi_i}{ES}$ есть

$$c = c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{ES} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{ES} = c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21.63.$$

Итак, хотя дисперсия величины индивидуального убытка для договоров второй группы меньше, чем для договоров первой группы ($\sigma_2 = 0.1 < \sigma_1 \approx 0.1095$), но флуктуации индивидуальных убытков для договоров второй группы (измеренные как коэффициентом рассеяния, так и коэффициентом вариации) превышают средние флуктуации по портфелю. Поэтому было бы оправдано выбрать для назначения премий принцип 2 или 3.

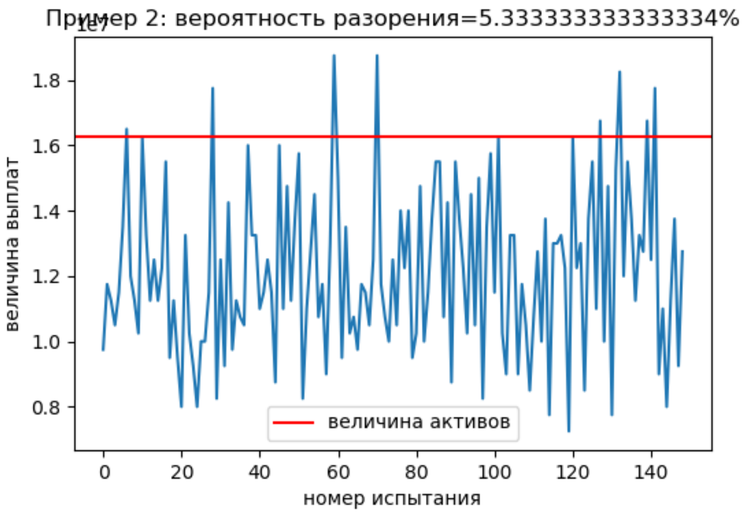

Рис. 7.4

Сделаем последнее замечание по поводу этого примера: напишем программу на Python, моделирующую этот портфель и увидим, что вероятность разорения равна 5.3% вместо 5%, которые должны получаться, если величина суммарных потерь хорошо приближается гауссовским распределением. Отсюда делаем вывод, что размер портфеля $N = 4000 + 6000 = 10000$ уже не так мал, чтобы описанные модели были совсем неприменимы, но еще и недостаточно велик, чтобы гауссовское приближение давало хорошую точность. Ниже приведен код на Python, который позволяет проделать такое статистическое исследование.

```python
N=150
mas=[]
g=0
g1=0
g2=0
N1=4000
N2=6000
b1=1000000
b2=250000
q=0.0005
q1=0.004
q2=0.002
cnt=0
for i in tqdm(range(N)):
    people1 = np.array([np.random.choice([1,2,0],p=[q,q1,1-q-q1],replace=True) for i in range(N1)])
    people2 = np.array([np.random.choice([1,2,0],p=[q,q2,1-q-q2],replace=True) for i in range(N2)])
    #print(people[people==1].sum() )
    people=np.hstack((people1,people2))
    v=b1*people[people==1].sum() + b2*people[people==2].sum()/2
    mas.append(v)
    cnt=cnt+int(v > ES+l)
    g=g+people1[people1==1].sum() + people2[people2==1].sum()
    g1=g1+people1[people1==2].sum()/2
    g2=g2+people2[people2==2].sum()/2

print(f'q примерно равно {h/N/(N1+N2)} {g/N/(N1+N2)}')
print(f'q1 примерно равно {h1/N/(N1)} {g1/N/(N1)}')
print(f'q2 примерно равно {h2/N/(N2)} {g2/N/(N2)}')
print(f'вероятность разорения равна {cnt/N*100}%')
plt.plot(np.arange(N)[0:-1:1],mas[0:-1:1])
plt.axhline(ES+l,c='r',label='величина активов')
plt.xlabel('номер испытания')
plt.ylabel('величина выплат')
plt.title(f'Пример 2: вероятность разорения={cnt/N*100}%')
plt.legend()
plt.savefig('Primer2_pic.png', format='png', dpi=100)
```

Рис. 7.5

8. Выводы и замечания

Таким образом, мы изучили четыре основных принципа назначения премий: принципы деления добавочной суммы пропорционально матожиданиям, дисперсиям и среднеквадратическим отклонениям индивидуальных рисков, а также более общий способ: способ минимизации взвешенной средней квадратичной разности D между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями. При этом мы изучили два подхода к получению четвертого способа:

1) Для заданной вероятности разорения $R = P(s > \pi)$ (то есть для заданного значения $\pi = ES + z_{1-R}\sqrt{VarS}$) назначить индивидуальные премии так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратичную разность $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ между индивидуальными рисками X_i и индивидуальными премиями π_i (где s_i — это некоторые известные положительные числа).
2) Для заданной величины $D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ минимизировать вероятность разорения $R = P(s > \pi)$.

Кроме того, мы увидели, что оба подхода имеют одно и то же решение, которое к тому же минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

Однако необходимо подчеркнуть, что мы использовали лишь простейшую модель для расчета защитной надбавки (через приближение центрированной и нормированной величины суммарных потерь нормальным распределением). Вопрос о том, что делать, когда нельзя применять эту модель, заслуживает отдельного обсуждения, выходящего за рамки данной работы.

9. Литература

[1] G.Falin. On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio. Astin Bulletin, 2008, 38(1), pp.161-170.

[2] Шурыгин В.В, Аналитическая геометрия, часть 3, стр. 4

[3] А.Е.Умнов, Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Москва, МФТИ, 2011, стр. 99