Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 6

Вогнутость вязкостного решения

При некоторых дополнительных предположениях на гамильтониан H удается доказать, что вязкостное решение является полувогнутым. Можно выделить три способа обоснования полувогнутости: 1) переход к задаче оптимального управления и анализ формулы, определяющей функцию значения, 2) метод повышения размерности Иши, схожий с методом удвоения переменных, применяемым при доказательстве принципа сравнения, 3) метод исчезающей вязкости. Разберем на упрощенном примере третий способ.

Для простоты считаем, что $x \in \mathbb{R}$. Пусть вязкостное решение u уравнения

$$-u_t + H(u_x) + f(x,t) = 0$$

является локально равномерным пределом решений уравнения

$$-u_t + H(u_x) + f(x,t) = \varepsilon u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T). \tag{1}$$

Предложение 1. *Предположим, что u — гладкое ограниченное решение (с ограниченными производными по x) уравнения (1), f — гладкая функция с ограниченными вторыми производными по x. Предположим, что H дважды дифференцируемая функция и для некоторой константы $\lambda > 0$ выполняется неравенство $H'' \geq \lambda$. Тогда существует число $C > 0$, которое не зависит от ε и с которым функция*

$$x \to u(x,t) - \frac{Cx^2}{T-t}$$

при каждом $t < T$ является вогнутой.

Доказательство. Дифференцируем уравнение два раза по x. Пусть $w = u_{xx}$. Тогда функция w является решением уравнения

$$-w_t + H''(u_x)w^2 + H'(u_x)w_x + f_{xx} = \varepsilon w_{xx}.$$

Так как $H'' \geq \lambda > 0$, то

$$-w_t + \lambda w^2 + H'(u_x)w_x + f_{xx} \leq \varepsilon w_{xx}.$$

Пусть $M > 0$ и $\delta > 0$. Функция

$$v(x,t) = (T-t)(w(x,t) - M) - \delta\sqrt{1+x^2}$$

удовлетворяет неравенству

$$-v_t \leq w(1 - \lambda(T-t)w) - M + \varepsilon v_{xx} - H'(u_x)v_x - (T-t)f_{xx} + \delta\psi(x),$$

где ψ — ограниченная функция. В некоторой точке (x_0, t_0) функция v принимает максимальное значение. Предположим, что $v(x_0,t_0) \leq 0$. Тогда $v(x,t) \leq 0$ и

$$w(x,t) \leq M + \frac{\delta\sqrt{1+x^2}}{T-t}.$$

Если $v(x_0,t_0) > 0$, то $w(x_0,t_0) > 0$ и $t_0 < T$. Более того, верны неравенства

$$v_t(x_0,t_0) \leq 0, \quad v_x(x_0,t_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0,t_0) \leq 0.$$

Пусть $0 < \delta < 1$ и $-(T-t)f_{xx} + \delta\psi \leq C$ и $C < M$. Тогда

$$0 \leq w(x_0,t_0)(1 - \lambda(T-t_0)w(x_0,t_0)) + - M$$

и, следовательно,

$$w(x_0,t_0) \leq \frac{1}{\lambda(T-t_0)}.$$

Имеем

$$(T-t)(w(x,t) - M) - \delta\sqrt{1+x^2} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, для функции w верна оценка

$$w(x,t) \le M + \frac{1}{\lambda(T-t)} + \frac{\delta\sqrt{1+x^2}}{T-t}.$$

Устремляем $\delta \to 0$ и приходим к неравенству

$$w(x,t) \le M + \frac{1}{\lambda(T-t)}.$$

$\square$

Функция значения является вязкостным решением

Завершим обсуждение вязкостных решений проверкой, что функция значения является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Напомним, что мы рассматриваем задачу оптимального управления с функционалом

$$J(\alpha,x,t) = \int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)),$$

где

$$\dot{y}_x(s) = f(y_x(s),\alpha(s)), \quad y_x(t) = x.$$

Функция α принимает значение в некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^m$. Положим

$$H(x,t,p) = \sup_{a\in A}\Big\{-l(x,a,t) - \langle p, f(x,a)\rangle\Big\}.$$

Мы предполагаем, что f, l — непрерывные отображения, $|f(x,a)| \le M_f$, $|l(x,a,t)| \le M_l$ и

$$|f(x,a)-f(z,a)| \le L_f|x-z|, \quad |l(x,a,t)-l(z,a,t)| \le L_l|z-a|, \quad |g(x)-g(z)| \le L_g|x-z|.$$

Теорема 1. *Функция*

$$u(x,t) = \inf_{\alpha} J(\alpha,x,t)$$

является на $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ вязкостным решением уравнения

$$-u_t + H(x,t,\nabla u) = 0.$$

Доказательство. Отметим, что ранее была установлена липшицевость функции u по переменным x и t.

Пусть φ — непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что (z,τ) является точкой локального максимума функции $u-\varphi$. Тогда для некоторого $r>0$ и всех $|x-z|<r$, $|t-\tau|<r$ выполняется неравенство

$$u(x,t) - u(z,\tau) \le \varphi(x,t) - \varphi(z,\tau).$$

Пусть $a \in A$ и $\dot{y}_z = f(y_z,a)$, $y_z(\tau) = z$. Так как $|y_z(t)-z| \le M_f|t-\tau|$, то

$$u(y_z(t),t) - u(z,\tau) \le \varphi(y_z(t),t) - \varphi(z,\tau)$$

при достаточно малом $|t-\tau|$. По принципу динамического программирования

$$u(z,\tau) \le \int_\tau^t l(y_z(s),a,s)\,ds + u(y_z(t),t)$$

и приходим к неравенству

$$-\int_\tau^t l(y_z(s),a,s)\,ds - \varphi(y_z(t),t) + \varphi(z,\tau) \le 0$$

Делим это неравенство на $t-\tau$ и устремляем $t \to \tau$. Получаем

$$-l(z,a,\tau) - \langle \nabla\varphi(z,\tau), f(z,a)\rangle - \varphi_t(z,\tau) \le 0.$$

Следовательно,

$$-\varphi_t(z,\tau) + H(z,\tau,\nabla\varphi(z,\tau)) \le 0.$$

Пусть теперь (z,τ) является точкой локального минимума функции $u-\varphi$. Тогда для некоторого $r>0$ и всех $|x-z|<r$, $|t-\tau|<r$ выполняется неравенство

$$u(x,t) - u(z,\tau) \ge \varphi(x,t) - \varphi(z,\tau).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и α — такой контроль, что для $\dot{y}_z = f(y_z, a)$, $y_z(\tau) = z$, выполняется

$$\varepsilon(t-\tau) + u(z,\tau) \geq \int_\tau^t l(y_z(s), \alpha(s), s)\, ds + u(y_z(t), t).$$

Так как $|y_z(t) - z| \leq M_f|t-\tau|$, то

$$u(y_z(t), t) - u(z,\tau) \geq \varphi(y_z(t), t) - \varphi(z,\tau)$$

при достаточно малом $|t-\tau|$. Имеем

$$\varepsilon(t-\tau) - \int_\tau^t l(y_z(s), \alpha(s), s)\, ds - \int_\tau^t \varphi_t(y_z(s), s) + \langle \nabla\varphi(y_z(s), s), f(y_z(s), \alpha(s)) \, ds \geq 0.$$

В силу определения функции H получаем неравенство

$$\varepsilon(t-\tau) + \int_\tau^t H(y_z(s), s, \nabla\varphi(y_z(s), s)) - \varphi_t(y_z(s), s)\, ds \geq 0.$$

Так как $|y_z(s) - z| \leq M_f|t-\tau|$, функция H липшицева по x и p, функция φ_t липшицева по x, то

$$\varepsilon(t-\tau) + O(|t-\tau|^2) + \int_\tau^t H(z, s, \nabla\varphi(z,s)) - \varphi_t(z,s)\, ds \geq 0.$$

Делим на $(t-\tau)$ и устремляем $t \to \tau$, а затем устремляем $\varepsilon \to 0$. Получаем неравенство

$$-\varphi_t(z,\tau) + H(z,\tau,\nabla\varphi(z,\tau)) \leq 0.$$

Таким образом, для функции u выполняется определение вязкостного решения. □

Следствие 1. *В условиях теоремы функция значения u является единственным ограниченным и равномерно непрерывным вязкостным решением задачи Коши*

$$-u_t + H(x,t,\nabla u) = 0, \quad u(x,T) = g(x).$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из принципа суперпозиции. □

Система уравнений теории игр среднего поля

Рассмотрим систему уравнений первого порядка, описывающих дифференциальную игру среднего поля. Эта система состоит из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и уравнения непрерывности.

$$\begin{cases} -\partial_t u + H(x,t,\mu_t,\nabla u) = 0, \\ \partial_t \mu_t - \operatorname{div}(H_p(x,t,\mu_t,\nabla u)\mu_t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с начальными условиями $u(x,T) = g(x)$ и $\mu_0 = \nu$.

Решением является пара (u, μ_t), где непрерывная функция u является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, а кривая $t \to \mu_t$ в пространстве вероятностных мер является решением уравнения непрерывности. Существует несколько подходов к обоснованию существования и единственности решения. Первый подход основан на применение утверждений о существовании неподвижной точки по следующей схеме: задаем произвольную кривую σ_t в пространстве вероятностных мер, находим решение u уравнения Гамильтона–Якоби, а затем находим решение μ_t уравнение непрерывности, что задает отображение $\sigma_t \to \mu_t$, неподвижную точку которого и хотим построить. Второй подход основан не методе исчезающей вязкости, когда решение строится в виде предела решений аналогичной системы, к уравнениям которой добавили $\varepsilon\Delta u$ и $\varepsilon\Delta\mu_t$. Третий подход основан на решении вариационной задачи, соответствующей данной системе. Наконец, четвертый подход использует идею принципа суперпозиции для уравнения непрерывности и сводит задачу к построению меры, сосредоточенной на множестве оптимальных траекторий. Существенной трудностью в реализации первых двух подходов является нерегулярность вязкостных решений. Самое лучшее, что можно сказать про вязкостные решения — липшицовость по (x,t) и полувогнутость по x, а этого не хватает для применения известных результатов о существовании и единственности решения уравнения непрерывности. Вариационные методы предполагают существенные ограничения на структуру уравнений. Обсудим подробнее четвертый подход, основанный на принципе суперпозиции.