ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА теории вероятностей

КУРСОВАЯ РАБОТА
специалиста

О применении принципа минимизации меры риска функции потерь в задаче поиска оптимальной премии

Выполнила студентка 409 группы
Токаева Александра Александровна

____
подпись студента

Научный руководитель:

профессор, д.ф.-м.н.

Фалин Геннадий Иванович

____
подпись научного руководителя

Москва 2021

Оглавление

1. Введение

Меры риска используются в актуарной науке уже давно, и в первую очередь — для разработки принципов назначения премий. Три самых знаменитых принципа назначения премий — the expected value premium principle, the standard deviation premium principle и the variance premium principle — также соответствуют определенным мерам риска.

Все принципы применяются к распределению случайной величины, описывающей **убытки**, для определения подходящей премии за риск. Мы выделили здесь слово “убытки”, чтобы подчеркнуть, что в актуарной науке положительность случайной величины $X > 0$ обозначает **потерю** страховой компанией денежных средств (в размере, равном значению этой случайной величины). В то же время, в финансовых приложениях и банковском деле, случайная величина X обозначает **доход,** то есть положительность этой случайной величины будет соответствовать обогащению, а отрицательность — потерям. Еще раз отметим, что везде далее мы будем следовать актуарным обозначениям и обозначать через X именно потери (а не доход).

В данной работе мы будем исследовать один из принципов назначения премий, заключающийся в минимизации меры риска функции потерь страховой компании, в частном случае, когда мерой риска является CTE (англ. Conditional Tail Expectation). Физический смысл CTE — это математическое ожидание потерь при условии, что значение потерь превысило некий заранее оговоренный уровень VaR (англ. Value at Risk).

Преимущество метода минимизации меры риска функции потерь заключается в том, что, во-первых, он является обобщением таких хорошо известных принципов, как байесовский метод и классический метод мер риска. Байесовский метод состоит в минимизации ожидаемых потерь и не использует понятия мер риска. Метод мер риска, наоборот, не использует понятия функции потерь и просто минимизирует меру риска разности между реальным значением риска и премии по нему. Предлагаемый нами метод, в свою очередь, использует оба этих понятия, поскольку минимизируется мера риска функции потерь. Второе преимущество метода с использованием CTE состоит в том, что для некоторых функций потерь (например, для функции абсолютных потерь) он довольно прост в применении и интуитивно понятен.

Цель данной работы — показать обоснованность и математическую корректность метода минимизации меры риска функции потерь для случая, когда в качестве меры риска выбрано CTE, а в качестве функции потерь выбрана функция абсолютных потерь, и обобщить полученный результат на случаи, когда в качестве функции потерь берется несимметричная функция абсолютных потерь, а также квадратичная функция. Кроме того, мы покажем, как применять этот метод на практике и сделаем некоторые выводы.

Наши рассуждения опираются на статью Antonio Heras, Beatriz Balbás and José Luis Vilar, “Conditional Tail Expectation and Premium Calculation”, которая в свою очередь развивает подход, разработанный в статье Rockafellar & Uryasev Optimization of Conditional Value at Risk (2000). Мы изложим технику, которую Rockafellar & Uryasev (2000) предложили для функции абсолютных потерь и применим ее к двум другим функциям потерь. Однако мы не претендуем на авторство конкретных утверждений и результатов, а также используемых понятий из теории вероятности и страхования, поэтому вся работа, проделанная лично нами, отдельно отмечена. К такой работе относятся:

1) Программа на Python и график в разделе 3.
2) Короткое доказательство теоремы Rockafellar & Uryasev (2000) в разделе 4.
3) Проверка того, что в теореме 1 раздела 5 найденная авторами статьи [1] критическая точка (P,α) доставляет именно минимум функции V.
4) Программа на Python в разделе 6, проверяющая соответствие теоретически найденного минимума в теореме 1 раздела 5 и реального минимума на поверхности, соответствующей функции V для экспоненциального распределения.
5) Формулировка и доказательство теоремы 2 в разделе 7.
6) Формулировка и доказательство теоремы 3 в разделе 8.
7) Весь раздел 9.

2. Необходимые сведения

Предварительно объясним, на каких соображениях базируется принцип минимизации меры риска функции потерь. Сначала рассмотрим классический принцип мер риска. Для этого нам потребуется согласованная мера риска. Это понятие, как и понятие меры риска, является классическим и широко применяется на практике. Для сравнения отметим, что самая известная мера риска — дисперсия — не является согласованной, поскольку она не удовлетворяет свойству инвариантности относительно сдвига.
Согласованная мера ρ удовлетворяет следующим свойствам:

Субаддитивность: $\rho(Y+Z) \leq \rho(Y)+\rho(Z)$
Однородность для положительных констант: $\rho(cY)=c\rho(Y), \forall c>0$
Инвариантность относительно сдвига: $\rho(Y+c)=\rho(Y)+c, \forall c \in \mathbb{R}$
Монотонность: $Y(\omega) \leq Z(\omega)\ \forall\omega \in \Omega \ \Rightarrow\ \rho(Y) \leq \rho(Z)$

Здесь Y, Z — случайные величины, определенные на пространстве Ω. Эти случайные величины далее будут называться "страховыми рисками" и интерпретироваться как потери.

Пусть X — страховой риск, то есть неотрицательная случайная величина, обозначающая полную величину иска по данному полису за данный промежуток времени. В случаях, когда для подсчета премий используется мера риска ρ, то предполагается, что премия совпадает с мерой риска:

$$P_X=\rho(X) \tag{1}$$

Для обоснования предположения (1) используется свойство инвариантности относительно сдвига. Действительно, после прибавления к риску премии, определенной в (1), его мера риска становится равной нулю, то есть вся неопределенность пропадает:

$$\rho(X-P_X)=\rho(X)-P_X=\rho(X)-\rho(X)=0$$

Подчеркнем, что в этой формуле константа именно вычитается из риска, поскольку символ X обозначает потери по риску, то есть реальное прибавление константы к риску соответствует вычитанию этой константы в модели.

Теперь объясним, почему же вполне оправдано назначать премию, исходя из формулы (1). С одной стороны, если страховая компания взимает за риск X

премию $P < P_X$ (где P_X определяется в (1)), то остаточный риск имеет положительную меру $\rho(X-P)=\rho(X)-\rho(P)>0$. Поскольку мера риска положительна, значит, риск все еще содержит неопределенность, значит, премию по этому риску нужно увеличить. Этот результат вполне логичен, ведь чем меньше премии, тем больше вероятность невыполнения страховой компанией своих обязательств. С другой стороны, в соответствии с нашей моделью, если компания взимает по риску X премию $P > P_X$, то никакого риска не останется, поскольку $\rho(X-P)=\rho(X)-\rho(P)< 0$. Почему же тогда не сделать премию очень большой, ведь такой подход позволит страховой компании увеличить свою прибыль? Ответ на этот вопрос пришел из практики и состоит в следующем: слишком большие премии могут побудить многих полисодержателей отказаться от услуг страховой компании. Поэтому мы считаем (вслед за авторами статьи [1]), что в процессе назначения премий с использованием мер риска нужно принимать во внимание рискованность назначения как слишком маленьких, так и слишком больших премий.

Одним из возможных путей решения этой проблемы может быть метод, использующий одновременно и меры риска, и функции потерь. Прежде чем использовать этот метод, определим сначала **функцию потерь** для измерения ошибок упорядочивания. Эти ошибки упорядочивания возникают, когда премия P не совпадает со значением x случайной величины X. Мы будем обозначать потери, соответствующие премии P и значению $X=x$ как $L(P,x)$. Такая функция потерь каждой ошибке ставит в соответствие численное значение, обозначающее потери страховой компании в этом случае. Как только мы выбрали эту функцию потерь, следующим шагом мы находим страховую премию как решение задачи минимизации меры риска функции потерь.

3. Постановка задачи

Как мы уже отмечали во вступлении, авторы статьи [1] вслед за авторами статьи [2] предлагают назначать в качестве премии за риск X ту величину P_X, которая минимизирует меру риска функции потерь. Прежде чем вычислять эту оптимальную премию, следует сначала выбрать как функцию потерь L, так и меру риска ρ. Как только они выбраны, следующим шагом мы минимизируем $\rho\big(L(P,X)\big)$. То есть, оптимальная премия вычисляется как такое значение P_X, которое минимизирует

$$\rho[L(P,X)] \tag{2}$$

Убедимся, что такой подход является обобщением как байесовского подхода, так и обычного метода мер риска.

С одной стороны, если взять в качестве меры риска ρ математическое ожидание (которое, кстати, является согласованной мерой), то (2) превращается в следующее выражение:

$$E[L(P,X)] \tag{3}$$

В этом случае, оптимальная премия и есть байесовская премия, определяемая как величина, минимизирующая ожидаемые потери (3).

С другой стороны, оптимальная премия, полученная минимизацией (2), принимает вид (1), если мы выберем в качестве функции потерь $L(P,X)=x-P$ (потому что мы рассматриваем только неотрицательные значения мер риска, и соответственно, ее минимальное значение есть ноль). Отметим, что такая функция потерь принимает положительные значения только если премия P оказалась меньше, чем реальное значение $X = x$. Далее будем называть такую премию недостаточной. В противном случае, при $P > x$, премия называется избыточной, а потери превращаются в прибыль, то есть L принимает отрицательные значения. В дальнейшем мы будем работать с более общей функцией потерь, которая считает потерями как недостаточную премию по риску (что вполне естественно), так и избыточную (что не вполне естественно, но по мнению авторов статьи [1], вполне разумно).

Мы будем изучать частный случай (2), когда в качестве меры риска выбирается CTE (Conditional Tail Expectation). То есть мы (вслед за Rockafellar & Uryasev (2000)) предлагаем определять оптимальную премию как значение P^*, минимизирующее CTE потерь:

$$CTE\big(L(P,X)\big)$$

Для того, чтобы дать строгое определение CTE, сначала дадим строгое определение хорошо известной величины VaR (Value at Risk). Определим “уровень доверия”, или “доверительную вероятность” β как такую вероятность, что события с равной β или большей вероятностью мы считаем практически достоверными. Часто выбирается значение $\beta = 0.95,\ \beta = 0.97,\ \beta = 0.99$, но мы будем писать $\beta \in (0,1)$, чтобы подчеркнуть нашу возможность назначить любое разумное (на наш взгляд) β из этого промежутка.

При выбранном уровне доверия $\beta \in (0,1)$, соответствующее VaR определяется как минимальная действительная величина $\alpha \geq 0$ такая, что потери не превосходят α с вероятностью не меньше β. То есть больше, чем VaR, потери могут быть только с пренебрежимо малой вероятностью $1 - \beta$.

$$VaR_\beta(X) = min\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : Pr(X \leq \alpha) \geq \beta\}$$

Соответствующее CTE определяется как условное математическое ожидание потерь при условии, что потери превысили это значение α (то есть VaR).

$$CTE_\beta(X) = \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathrm{x} > VaR_\beta}^{+\infty} xf(x)dx$$

Например, если дано стандартное нормальное распределение $\xi \sim N(0,1)$ и выбран уровень доверия $\beta = 0.999$, то VaR_β — это будет (примерно равная 3.09) квантиль z_β стандартного нормального распределения уровня β. Действительно, по определению квантили

$$Prob\big(\xi \leq z_\beta\big) = \beta$$

Все числа, меньшие z_β, в качестве VaR_β не подойдут — из-за строго монотонного возрастания функции распределения стандартного нормального распределения. Далее, по формуле для CTE, для стандартной нормальной величины имеем:

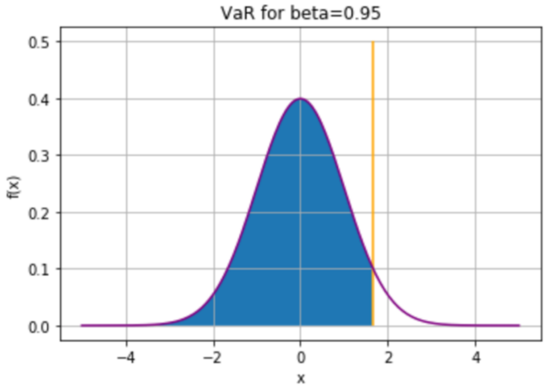
$$CTE_\beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_\beta}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx}{1-\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{{z_\beta}^2}{2}}}{1-\beta} = \frac{\varphi(z_\beta)}{1-\beta} = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\beta)\right)}{1-\beta}$$

Для наглядности напишем программу на языке Python, которая вычислит нужную квантиль и отметит ее на графике плотности стандартного нормального распределения. Отметим, однако, что данные вычисления можно провести и в

Microsoft Excel, используя встроенную функцию =НОРМ.СТ.ОБР(β). Например, вводя в ячейку А2 число 0,5 и вызывая функцию =НОРМ.СТ.ОБР($A2$), получим значение 0, а вызывая эту функцию от 0,9999 — получим 3,71901649;

```
import numpy as np
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
beta=0.95
z_beta=stats.norm.ppf(beta,0,1)
print("z_beta =",z_beta)
mas_x=np.linspace(-5,5,200)
mas_y=stats.norm.pdf(mas_x,0,1)
plt.plot(mas_x,mas_y,c='purple')
plt.vlines(z_beta,ymin=0,ymax=0.5,color='orange',label="z_beta")
plt.grid()
plt.title("VaR for beta=0.95")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")

mas_x=np.linspace(-5,z_beta,200)
mas_y=stats.norm.pdf(mas_x,0,1)
plt.fill_between(mas_x,mas_y)
plt.show()
```

```
z_beta = 1.6448536269514722
```



Итак, мы определили $CTE(X)$. Но согласно вышесказанному, мы собираемся минимизировать $CTE\big(L(P,X)\big)$, поэтому теперь дадим определение этой величины. В нашей задаче, при заданных уровне доверия $\beta \in (0,1)$, премии P и функции потерь $L(P,x)$, VaR определяется как

$$VaR_\beta\big(L(P,X)\big) = min\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : Pr(L(P,X) \leq \alpha) \geq \beta\}$$

CTE определяется как

$$CTE_\beta\big(L(P,X)\big) = \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathrm{x}:\, L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} L(P,x)f(x)dx$$

Опять напомним себе, что мы рассматриваем только непрерывные распределения, поэтому плотность существует.

Далее, при заданном уровне доверия $\beta \in (0,1)$ и заданной функции потерь, мы определяем оптимальную премию как такое значение P_β^*, которое минимизирует CTE потерь, то есть $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$. Может показаться, что минимизация $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$ является очень сложной задачей, но Rockafellar & Uryasev (2000) разработали оптимальную технику для вычисления VaR и CTE, которую мы и применим к нашей задаче. Она состоит в том, что вместо вычисления CTE по формуле из определения, предлагается находить CTE как минимальное значение некоторого специального выражения. На самом деле, Теорема 1 из Rockafellar & Uryasev (2000) подразумевает, что при заданной премии P, соответствующее $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$ может быть подсчитано как минимальное значение следующей выпуклой и непрерывно дифференцируемой функции параметра α, причем оптимальное значение α, в случае единственности, совпадает с $VaR_\beta\big(L(P,X)\big)$:

$$U(\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty} [\,L(P,x)-\alpha]^+ f(x)dx \tag{4}$$

Здесь

$$[\,L(P,x)-\alpha]^+ = \begin{cases} L(P,x)-\alpha, & \text{если } L(P,x) \ge \alpha \\ 0, & \text{если } L(P,x) < \alpha \end{cases}$$

Более того, если мы рассмотрим функцию $U(\alpha)$ как функцию $V(P,\alpha)$ двух аргументов, P и α:

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty} [\,L(P,x)-\alpha]^+ f(x)dx \tag{5}$$

то Теорема 2 в работе Rockafellar & Uryasev (2000) показывает, что функция V выпукла и непрерывно дифференцируема по обеим переменным, причем при минимизации этой функции мы получаем пару $(P_\beta^*, \alpha_\beta^*)$ такую, что P_β^* минимизирует $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$, а α_β^* (при условии единственности) дает соответствующее $VaR_\beta\left(L\big(P_\beta^*,X\big)\right)$.

В разделе 5 мы получим явное выражение для решения в случае, когда в качестве функции потерь берется функция абсолютных потерь $L(P,x) = |P-x|$. В разделах 7 и 8 мы рассмотрим эту же задачу для других функций потерь. А в разделе 4 мы приведем придуманное лично нами короткое доказательство вышеназванной теоремы, о связи CTE, Var и минимизации выражений $(4), (5)$. Оно кажется нам очень понятным и наглядным.

4. Короткое доказательство альтернативного принципа нахождения CTE

Итак, мы хотим обосновать, почему $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$ можно находить не по определению (см. стр 7), а как минимальное значение такого выражения, причем минимум достигается при $\alpha = VaR_\beta\big(L(P,X)\big)$:

$$U(\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty} [\,L(P,x)-\alpha]^+ f(x)dx = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{x:L(P,x)\ge\alpha} [L(P,x)-\alpha] f(x)dx$$

Для этого преобразуем определение $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$ к следующему виду:

$$CTE_\beta(L(P,X)) = \frac{1}{1-\beta}\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} L(P,x)f(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} [L(P,x) \pm \alpha]\, f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\alpha\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{1-\beta}\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} [L(P,x) - \alpha]\, f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\cdot\alpha\cdot P\left(L(P,x)\ >\ VaR_\beta(L(P,X))\right) + \frac{1}{1-\beta}\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} [L(P,x) - \alpha]\, f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\cdot\alpha\cdot(1-\beta) + \frac{1}{1-\beta}\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} [L(P,x) - \alpha]\, f(x)dx =$$

$$= \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{x:\,L(P,x) > VaR_\beta(L(P,X))}^{+\infty} [L(P,x) - \alpha]\, f(x)dx$$

Теперь сравним преобразованное определение $CTE_\beta(L(P,X))$ и функцию $U(\alpha)$.

- При $\alpha = VaR_\beta(L(P,X))$: эти выражения в точности равны.
- При $\alpha > VaR_\beta(L(P,X))$: у преобразованного определения есть часть при $x \in [VaR_\beta(L(P,X)), \alpha]$, когда подынтегральное выражение отрицательно, а в формуле для $U(\alpha)$ это слагаемое выброшено, значит, $CTE_\beta(L(P,X)) < U(\alpha)$.
- При $\alpha < VaR_\beta(L(P,X))$: подынтегральное выражение всегда положительно, но в формуле для $U(\alpha)$ область интегрирования больше, значит, $CTE_\beta(L(P,X)) < U(\alpha)$.

Получаем, что минимальное значение $U(\alpha)$ в точности равно $CTE_\beta(L(P,X))$, причем достигается при $\alpha = VaR_\beta(L(P,X))$, что и утверждает теорема.

То есть мы доказали, что при фиксированном P: $CTE_\beta(L(P,X)) = \min_\alpha U(\alpha)$.
Значит, если разрешено варьировать P, то $\min_P CTE_\beta(L(P,X)) = \min_P\left[\min_\alpha U(\alpha)\right]$.
Другими словами, если мы хотим найти минимум $CTE_\beta(L(P,X))$, то действительно нужно найти минимум функции U по переменным P и α. Теорема доказана!

5. Случай симметричной функции абсолютных потерь

Возьмем в качестве функции потерь $L(P,x) = |P - x|$ и явно покажем, как минимизировать $CTE(L(P,X))$ в этом случае. Эта теорема была доказана не нами, а авторами статьи [2], но далее мы применим предложенную ими технику для получения собственного результата, а именно теорем 2 и 3.

Теорема 1 Если $L(P,x) = |P - x|$, то $(P_\beta^*, \alpha_\beta^*)$ доставляет минимум функции V тогда и только тогда, когда P_β^* и α_β^* являются решениями системы уравнений:

$$F(P-\alpha) = \frac{1-\beta}{2}$$

$$F(P+\alpha)=\frac{1+\beta}{2} \tag{6}$$

Напомним, что F — это функция распределения случайной величины X.

Доказательство:

Нам нужно минимизировать функцию

$$V(P,\alpha)= \alpha+\frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty}[\,|P-x|-\alpha]^+ f(x)dx$$

Перепишем ее в виде (напомним, что при $|P-x|<\alpha$ подынтегральное выражение будет равно нулю):

$$V(P,\alpha)= \alpha+\frac{1}{1-\beta}\left[\int_{P+\alpha}^{+\infty}(x-P-\alpha)f(x)dx+\int_0^{P-\alpha}(P-x-\alpha)f(x)dx\ \right]$$

Сейчас мы исследуем каждый из интегралов по отдельности, потом проинтегрируем по частям и обозначим $S(x)=1-F(x)$.

Сначала раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\int_{P+\alpha}^{+\infty}(x-P-\alpha)f(x)dx+\int_0^{P-\alpha}(P-x-\alpha)f(x)dx=$$

$$\int_{P+\alpha}^{+\infty}xf(x)dx-\ (P+\alpha)\int_{P+\alpha}^{+\infty}f(x)dx+(P-\alpha)\int_0^{P-\alpha}f(x)dx-\int_0^{P-\alpha}xf(x)dx\ =$$

Второе и третье слагаемые несложно выражаются через функцию распределения, причем $F(0)=0$ из-за непрерывности распределения, а первое и четвертое слагаемые пока просто переписываем:

$$=\int_{P+\alpha}^{+\infty}xf(x)dx-\ (P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big)+(P-\alpha)(F(P-\alpha)-0)-\int_0^{P-\alpha}xf(x)dx=$$

Теперь в первом слагаемом заносим под дифференциал $-f(x)$ и превращаем его в $d\big(1-F(x)\big)$, в четвертом заносим под дифференциал $f(x)$ и превращаем его в $d\big(F(x)\big)$:

$$=-\int_{P+\alpha}^{+\infty}xd\big(1-F(x)\big)-\ (P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big)+(P-\alpha)F(P-\alpha)-\int_0^{P-\alpha}xd\big(F(x)\big)=$$

Интегрируем по частям первое и четвертое слагаемые:

$$=-x\big(1-F(x)\big)\Big|_{P+\alpha}^{+\infty}+\int_{P+\alpha}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx\ -\ (P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big)+(P-\alpha)F(P-\alpha)$$
$$-\left(xF(x)\Big|_0^{P-\alpha}-\int_0^{P-\alpha}F(x)dx\right)=$$

Теперь подставляем пределы интегрирования и пользуемся тем, что $\lim\limits_{A\to+\infty}A\big(1-F(A)\big)=0$, (ведь $\int_A^{+\infty}xf(x)dx\geq A\int_A^{+\infty}f(x)dx=A\big(1-F(A)\big)$, а поскольку $EX<\infty$, то интеграл в левой части этого неравенства стремится к нулю):

$$=(P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big)+\int_{P+\alpha}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx-\ (P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big)$$
$$+(P-\alpha)F(P-\alpha)-\left((P-\alpha)F(P-\alpha)-0-\int_0^{P-\alpha}F(x)dx\right)=$$

Все четыре неинтегральные слагаемые взаимно сократились.

Наконец, обозначим $S(x) = 1 - F(x)$ и получим:

$$= \int_{P+\alpha}^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)dx + \int_{0}^{P-\alpha} F(x)dx = \int_{P+\alpha}^{+\infty} S(x)dx + \int_{0}^{P-\alpha} F(x)dx$$

Поэтому функция V приняла вид

$$V(P, \alpha) = \ \alpha + \frac{1}{1-\beta}\left[\int_{0}^{P-\alpha} F(x)dx + \int_{P+\alpha}^{+\infty} S(x)dx\right]$$

Берем частные производные по P и по α и приравниваем их к нулю, ведь мы ищем критическую точку для функции V:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{1-\beta}[F(P-\alpha) - S(P+\alpha)] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{1-\beta}[F(P-\alpha) + S(P+\alpha)] = 0$$

Получаем:

$$F(P-\alpha) = \frac{1-\beta}{2}$$

$$F(P+\alpha) = \frac{1+\beta}{2}$$

Проверим, что удовлетворяющая этой системе уравнений критическая точка (P, α) доставляет именно минимум функции V. Для этого составим матрицу вторых производных и проверим ее положительную определенность.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial P} = \frac{f(P-\alpha) + f(P+\alpha)}{1-\beta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial \alpha} = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial P} = \frac{-f(P-\alpha) + f(P+\alpha)}{1-\beta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \alpha} = \frac{f(P-\alpha) + f(P+\alpha)}{1-\beta}$$

Тогда по критерию Сильвестра матрица вторых производных положительно определена, поскольку плотность — всегда больше нуля:

$$\Delta_1 = \frac{f(P-\alpha) + f(P+\alpha)}{1-\beta} > 0$$

$$\Delta_2 = \frac{\big(f(P-\alpha) + f(P+\alpha)\big)^2 - \big(-f(P-\alpha) + f(P+\alpha)\big)^2}{(1-\beta)^2} = \frac{4f(P-\alpha)f(P+\alpha)}{(1-\beta)^2} > 0$$

Теорема доказана.

Замечание: Решение системы (6) ведет себя разумно: P_β^* стремится к медиане при $\beta \longrightarrow 0$, а при $\beta \longrightarrow 1 : P_\beta^* \longrightarrow \infty$. Как следствие, если взять достаточно большой (то есть близкий к единице) уровень доверия β, то мы получим премию с нагрузкой, поскольку оптимальная премия P_β^* в какой-то момент превысит нетто-премию.

6. Проверка совпадения теоретического и реального минимума функции V

Напишем программу на Python, которая при фиксированных P и α будет численно вычислять значение функции $V(P,\alpha)$ по формуле (5), а затем, варьируя P и α, будет строить поверхность и находить у нее минимальное значение, а также значения P и α, которые доставляют это минимальное значение. Наша цель — убедиться, что эти численно найденные параметры совпадут с теоретически найденными в теореме 1 раздела 5 параметрами.

Возьмем случайную величину X, которая имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, тогда:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$EX = \frac{1}{\lambda}$.

Согласно теореме 1 раздела 5, система для нахождения оптимальных P и α имеет вид $\begin{cases} 1 - e^{-\frac{P-\alpha}{\lambda}} = \frac{1-\beta}{2} \\ 1 - e^{-\frac{P+\alpha}{\lambda}} = \frac{1+\beta}{2} \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} P - \alpha = -ln\left(1 - \frac{1-\beta}{2}\right) \\ P + \alpha = -ln\left(1 - \frac{1+\beta}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = -0.5\left(ln\left(1 - \frac{1+\beta}{2}\right) + ln\left(1 - \frac{1-\beta}{2}\right)\right) \\ \alpha = -0.5\left(ln\left(1 - \frac{1+\beta}{2}\right) - ln\left(1 - \frac{1-\beta}{2}\right)\right) \end{cases}$

При $\beta = 0.95$ получаем:

$$\begin{cases} P = 1.8570986310491127 \\ \alpha = 1.8317808230648227 \end{cases}$$

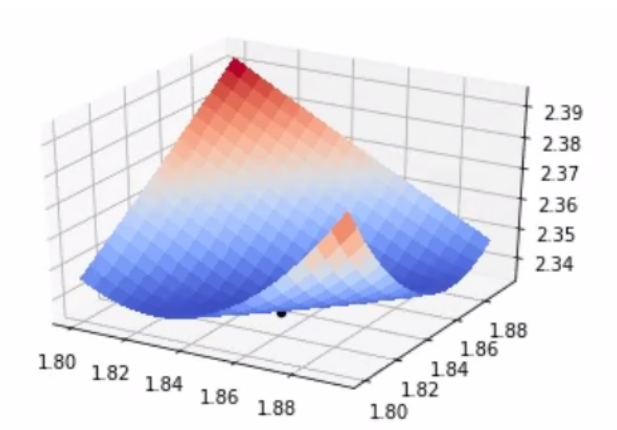
Теперь посмотрим, чему равен минимум по сетке, который нашла наша программа:

```python
from scipy.integrate import quad

beta=0.95
lambd=1


def V(P,alpha):

    def g(x,P,alpha):
        otv=np.abs(P-x) - alpha
        if (otv < 0):
            return 0
        return otv

    def f(x):
        return lambd*np.exp(-lambd*x)

    def integrand(x, P, alpha):
        return g(x,P,alpha)*f(x)

    I = quad(integrand, 0, np.inf, args=(P,alpha))
    return alpha+I[0]/(1-beta)
```

```python
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
from matplotlib import cm
import matplotlib.pyplot as plt

from tqdm import tqdm


fig = plt.figure(figsize = (10, 10))

ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, projection = '3d')

xval = np.arange(1.8, 1.9, 0.005)
yval = np.arange(1.8, 1.9, 0.005)

x,y = np.meshgrid(yval, xval)

z = np.zeros(len(xval)*len(yval)).reshape(len(xval),len(yval))
for i in tqdm(range(len(xval))):
    for j in range(len(yval)):
        z[i,j]=V(xval[i],yval[j])


x0,y0=np.unravel_index(np.argmin(z), z.shape)
z0=np.zeros(1).reshape(1,1)
z0[0,0]=z[x0,y0]
x0=xval[x0]
y0=yval[y0]
print(x0,y0,z0)
ax.plot_surface(y,x, z,cmap = cm.coolwarm)
plt.show()
```

```
100%|██████████| 20/20 [00:01<00:00, 11.90it/s]
```

```
1.8549999999999989 1.8299999999999994 [[2.33814174]]
```



Мы видим, что численно найденные значения $\begin{cases} P = 1.855 \\ \alpha = 1.83 \end{cases}$ почти в точности равны теоретически найденным значениям. Измельчая шаг сетки, можно добиться любой наперед заданной точности.
Проведенное численное моделирование показало, что доказанная в разделе 5 теорема 1 действительно работает!

7. Случай несимметричной функции абсолютных потерь

Теперь применим предложенную авторами статьи [2] технику для того, чтобы получить два наших основных результата, которые мы изложим в теоремах 2 и 3.

Рассмотрим такую несимметричную функцию потерь:

$$L(P,X) = \begin{cases} \omega_1(P-x), P > x \\ \omega_2(-P+x), P \le x \end{cases}$$

Минимизируем $CTE\big(L(P,X)\big)$ в этом случае.

Теорема 2
Если $L(P,X) = \begin{cases} \omega_1(P-x), P > x \\ \omega_2(-P+x), P \le x \end{cases}$, то $(P_\beta^*, \alpha_\beta^*)$ доставляет минимум функции V тогда и только тогда, когда P_β^* и α_β^* являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} F\left(P - \dfrac{\alpha}{\omega_1}\right) = \dfrac{\omega_2(1-\beta)}{\omega_1+\omega_2} \\ F\left(P + \dfrac{\alpha}{\omega_2}\right) = \dfrac{\omega_2+\beta\omega_1}{\omega_1+\omega_2} \end{cases} \qquad (7)$$

Напомним, что F — это функция распределения случайной величины X.

Доказательство:
Нам нужно минимизировать функцию

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty}[\,L(P,X)-\alpha]^+ f(x)dx$$

Перепишем ее в виде (напомним, что при $L(P,X) < \alpha$ подынтегральное выражение будет равно нулю):

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\left[\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty}(\omega_2(x-P)-\alpha)f(x)dx + \int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}}(\omega_1(P-x)-\alpha)f(x)dx\right]$$

Сейчас мы исследуем каждый из интегралов по отдельности, потом проинтегрируем по частям и обозначим $S(x) = 1 - F(x)$.

Сначала раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty}(\omega_2(x-P)-\alpha)f(x)dx + \int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}}(\omega_1(P-x)-\alpha)f(x)dx =$$

$$\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty} \omega_2 x f(x)dx - (\omega_2 P + \alpha)\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty} f(x)dx + (\omega_1 P - \alpha)\int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} f(x)dx - \int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} \omega_1 x f(x)dx \quad =$$

Второе и третье слагаемые несложно выражаются через функцию распределения, а первое и четвертое слагаемые пока просто переписываем:

$$= \int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty} \omega_2 x f(x)dx - (\omega_2 P + \alpha)\left(1 - F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right) + (\omega_1 P - \alpha)\left(F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - 0\right) - \int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} \omega_1 x f(x)dx =$$

Теперь в первом слагаемом заносим под дифференциал $-f(x)$ и превращаем его в $d\big(1 - F(x)\big)$, в четвертом заносим под дифференциал $f(x)$ и превращаем его в $d\big(F(x)\big)$, а затем интегрируем по частям:

$$= -\omega_2 x\big(1 - F(x)\big)\Big|_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty} + \omega_2\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty}\big(1 - F(x)\big)dx - (\omega_2 P + \alpha)\left(1 - F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right) + (\omega_1 P - \alpha)F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \left(\omega_1 x F(x)\Big|_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} - \omega_1\int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} F(x)dx\right) =$$

Теперь подставляем пределы интегрирования и пользуемся тем, что $\lim\limits_{A\to+\infty} A\big(1 - F(A)\big) = 0$, (ведь $\int_A^{+\infty} x f(x)dx \geq A\int_A^{+\infty} f(x)dx = A\big(1 - F(A)\big)$, а поскольку $EX < \infty$, то интеграл в левой части этого неравенства стремится к нулю):

$$= \omega_2\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\left(1 - F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right) + \omega_2\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty}\big(1 - F(x)\big)dx - (\omega_2 P + \alpha)\left(1 - F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right) + (\omega_1 P - \alpha)F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \left(\omega_1\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right)F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \omega_1\int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} F(x)dx\right) =$$

Видим, что неинтегральные слагаемые взаимно сократились.
Наконец, обозначим $S(x) = 1 - F(x)$ и получим:

$$= \omega_2\int_{P+\alpha}^{+\infty}\big(1 - F(x)\big)dx + \omega_1\int_0^{P-\alpha} F(x)dx = \omega_2\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty} S(x)dx + \omega_1\int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} F(x)dx$$

Поэтому функция V приняла вид

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\left[\omega_1\int_0^{P-\frac{\alpha}{\omega_1}} F(x)dx + \omega_2\int_{P+\frac{\alpha}{\omega_2}}^{+\infty} S(x)dx\right]$$

Берем частные производные по P и по α и приравниваем их к нулю, чтобы найти критическую точку, ведь мы ищем точку минимума:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{1-\beta}\left[\omega_1 F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \omega_2 S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right] = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}\left[\omega_1 \cdot \left(-\frac{1}{\omega_1}\right) F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \omega_2 \frac{1}{\omega_2} S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right] = 0$$

Поэтому

$$\omega_1 F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) - \omega_2 S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = 0 \Longrightarrow S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = \frac{\omega_1 F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right)}{\omega_2}$$
$$F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) + S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = 1 - \beta \Longrightarrow \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) = 1 - \beta$$

Следовательно

$$F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) = \frac{(1-\beta)\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \Longrightarrow S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = \frac{\omega_1 F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right)}{\omega_2} = \frac{(1-\beta)\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$
$$F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = 1 - S\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = 1 - \frac{(1-\beta)\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\omega_2 + \beta\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

Получаем:

$$F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) = \frac{(1-\beta)\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$
$$F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = \frac{\omega_2 + \beta\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

Проверим, что удовлетворяющая этой системе уравнений критическая точка (P, α) доставляет именно минимум функции V. Для этого составим матрицу вторых производных и проверим ее положительную определенность.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial P} = \frac{\omega_1 f\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) + \omega_2 f\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)}{1-\beta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial \alpha} = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial P} = \frac{-f\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) + f\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)}{1-\beta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \alpha} = \frac{\frac{1}{\omega_1} f\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) + \frac{1}{\omega_2} f\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right)}{1-\beta}$$

Тогда по критерию Сильвестра матрица вторых производных положительно определена, поскольку плотность — всегда больше нуля:

$$\Delta_1 = \frac{\omega_1 f\left(P-\frac{\alpha}{\omega_1}\right)+\omega_2 f\left(P+\frac{\alpha}{\omega_2}\right)}{1-\beta} > 0$$

$$\Delta_2 = \frac{\left(\omega_1 f\left(P-\frac{\alpha}{\omega_1}\right)+\omega_2 f\left(P+\frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right)\left(\frac{1}{\omega_1} f\left(P-\frac{\alpha}{\omega_1}\right)+\frac{1}{\omega_2} f\left(P+\frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right)}{(1-\beta)^2} -$$

$$\frac{\left(-f\left(P-\frac{\alpha}{\omega_1}\right)+f\left(P+\frac{\alpha}{\omega_2}\right)\right)^2}{(1-\beta)^2} = \frac{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-2\right) f\left(P-\frac{\alpha}{\omega_1}\right) f\left(P+\frac{\alpha}{\omega_2}\right)}{(1-\beta)^2} > 0$$

Последний переход следует из неравенства $a+\frac{1}{a} \geq 2$, которое в свою очередь следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Теорема доказана.

8. Случай квадратичной функции потерь

Теперь возьмем в качестве функции потерь $L(P,x) = (P-x)^2$.
Опять применим предложенную авторами статьи [2] технику, чтобы получить наш второй основной результат, изложенный в теореме 3 ниже.

Теорема 3
Если $L(P,X) = (P-x)^2$, то $\left(P_\beta^*, \alpha_\beta^*\right)$ доставляет минимум функции V тогда и только тогда, когда P_β^* и α_β^* являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) = -P\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} + F(-\sqrt{\alpha}) \\ F\left(P+\sqrt{\alpha}\right) = 1 - P\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} - F(\sqrt{\alpha}) \end{cases}$$

Доказательство:

Возьмем в качестве функции потерь $L(P,x) = (P-x)^2$.
Тогда интеграл имеет вид:

$$\int_0^{+\infty} [\,L(P,x)-\alpha]^+ f(x)dx$$
$$= \int_0^{P-\sqrt{\alpha}} ((P-x)^2-\alpha) f(x)dx + \int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} ((P-x)^2-\alpha) f(x)dx \ =$$

Сначала раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$= \int_0^{P-\sqrt{\alpha}} x^2 f(x)dx - 2P\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} xf(x)dx + \ (P^2-\alpha)\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} f(x)dx +$$

$$+\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2P\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} xf(x)dx + \ (P^2-\alpha)\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} f(x)dx =$$

Третье и шестое слагаемые несложно выражаются через функцию распределения, а первое, второе, четвертое и шестое слагаемые интегрируем по частям:

$$= x^2F(x)\Big|_0^{P-\sqrt{\alpha}} - 2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} xF(x)dx - 2PxF(x)\Big|_0^{P-\sqrt{\alpha}} + 2P\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx +$$

$$+(P^2-\alpha)\Big(F\big(P-\sqrt{\alpha}\big)-F(0)\Big) -$$

$$-x^2\big(1-F(x)\big)\Big|_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} + 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} x\big(1-F(x)\big)dx + 2Px\big(1-F(x)\big)\Big|_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} -$$

$$-2P\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx + \ (P^2-\alpha)\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) =$$

Теперь подставляем пределы интегрирования и пользуемся тем, что $\lim\limits_{A\to+\infty} A^2\big(1-F(A)\big)=0$, (ведь $\int_A^{+\infty} x^2 f(x)dx \ge A^2\int_A^{+\infty} f(x)dx = A^2\big(1-F(A)\big)$, а поскольку $EX^2<\infty$, то интеграл в левой части этого неравенства стремится к нулю):

$$= \big(P-\sqrt{\alpha}\big)^2F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - 2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} xF(x)dx - 2P\big(P-\sqrt{\alpha}\big)F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) +$$

$$+2P\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx \ + (P^2-\alpha)F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) +$$

$$+\big(P+\sqrt{\alpha}\big)^2\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) + 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} x\big(1-F(x)\big)dx - 2P\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) -$$

$$-2P\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx + \ (P^2-\alpha)\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) =$$

Приведем подобные слагаемые и увидим, что первые два слагаемых равны нулю:

$$= F\big(P-\sqrt{\alpha}\big)\Big(\big(P-\sqrt{\alpha}\big)^2 - 2P\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + (P^2-\alpha)\Big) +$$

$$+\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big)\Big(\big(P+\sqrt{\alpha}\big)^2 - 2P\big(P+\sqrt{\alpha}\big) + (P^2-\alpha)\Big) -$$

$$-2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} xF(x)dx + 2P\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx + 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} x\big(1-F(x)\big)dx - 2P\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx$$

Поэтому остается только:

$$-2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} xF(x)dx + 2P\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx + 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} x\big(1-F(x)\big)dx - 2P\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx$$

Таким образом, искомая функция приняла вид

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty} [\,L(P,X)-\alpha]^+ f(x)dx =$$

$$= \alpha + \frac{1}{1-\beta}\Bigg[-2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} xF(x)dx + 2P\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx + 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty} x\big(1-F(x)\big)dx - 2P\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx\Bigg]$$

Теперь для поиска минимума возьмем от нее частные производные (и потом приравняем их к нулю), ведь мы ищем критическую точку:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{1-\beta}\Bigg[-2\big(P-\sqrt{\alpha}\big)F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + 2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx + 2PF\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - 2\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) - 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx + 2P\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big)\Bigg] =$$

$$\frac{1}{1-\beta}\Bigg[2\sqrt{\alpha}F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - 2\sqrt{\alpha}\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) + 2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx - 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx\Bigg]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}\Bigg[-2\big(P-\sqrt{\alpha}\big)F\big(P-\sqrt{\alpha}\big)\cdot\Big(-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Big) + 2PF\big(P-\sqrt{\alpha}\big)\cdot\Big(-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Big) - 2\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} + 2P\Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Bigg] =$$

$$= 1 + \frac{1}{1-\beta}\Big[-F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - \Big(1-F\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big)\Big]$$

Приравнивая обе производные к нулю, получаем систему

$$\begin{cases}\sqrt{\alpha}\Big(F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - S\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) + \int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx - \int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\big(1-F(x)\big)dx = 0\\ F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + S\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = 1-\beta\end{cases}$$

Дифференцируем по P первое уравнение:

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\alpha}\Big(F'\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - S'\big(P+\sqrt{\alpha}\big)\Big) + F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + S\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = 0\\ F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + S\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = 1-\beta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F'\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - S'\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = -\dfrac{1-\beta}{\sqrt{\alpha}}\\ F\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + S\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = 1-\beta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F'\big(P-\sqrt{\alpha}\big) - S'\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = -\dfrac{1-\beta}{\sqrt{\alpha}}\\ F'\big(P-\sqrt{\alpha}\big) + S'\big(P+\sqrt{\alpha}\big) = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'\left(P-\sqrt{\alpha}\right) = -\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} \\ S'\left(P+\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) = -P\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} + F(-\sqrt{\alpha}) \\ S\left(P+\sqrt{\alpha}\right) = P\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} - F(\sqrt{\alpha}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) = -P\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} + F(-\sqrt{\alpha}) \\ F\left(P+\sqrt{\alpha}\right) = 1 - P\dfrac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha}} - F(\sqrt{\alpha}) \end{cases}$$

Осталось проверить, что полученная критическая точка доставляет именно минимум. Для этого составим матрицу вторых производных и проверим ее положительную определенность.

Имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{1-\beta}\left[2\sqrt{\alpha}F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) - 2\sqrt{\alpha}\left(1-F\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right) + 2\int_0^{P-\sqrt{\alpha}} F(x)dx - 2\int_{P+\sqrt{\alpha}}^{+\infty}\left(1-F(x)\right)dx\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}\left[-F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) - \left(1-F\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right)\right]$$

Поэтому

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial P}} = \frac{2\sqrt{\alpha}f\left(P-\sqrt{\alpha}\right) + 2\sqrt{\alpha}f\left(P+\sqrt{\alpha}\right) + 2F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) + 2\left(1-F\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right)}{1-\beta} = \frac{2\sqrt{\alpha}\left(f\left(P-\sqrt{\alpha}\right) + f\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right) + 2\left(1+F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) - F\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right)}{1-\beta}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial \alpha}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}F\left(P-\sqrt{\alpha}\right) + 2\sqrt{\alpha}f\left(P-\sqrt{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1-F\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right) + 2\sqrt{\alpha}f\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{1-\beta} + \frac{2F\left(P-\sqrt{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) + 2\left(1-F\left(P+\sqrt{\alpha}\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{1-\beta} = \frac{f\left(P+\sqrt{\alpha}\right) - f\left(P-\sqrt{\alpha}\right)}{1-\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\boldsymbol{\alpha}} = \frac{-f(P-\sqrt{\alpha})\left(-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) + f(P+\sqrt{\alpha})\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{1-\beta} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(f(P+\sqrt{\alpha}) + f(P-\sqrt{\alpha})\right)}{1-\beta}$$

Тогда по критерию Сильвестра матрица вторых производных положительно определена, поскольку плотность — всегда больше нуля, а $1+F(P-\sqrt{\alpha})-F(P+\sqrt{\alpha}) = 1-Pr(P-\sqrt{\alpha} < X \le P+\sqrt{\alpha}) > 0$:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial P} > 0$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial P}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\alpha} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P\partial\alpha}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\left[2\sqrt{\alpha}\left(f(P-\sqrt{\alpha}) + f(P+\sqrt{\alpha})\right) + 2\left(1+F(P-\sqrt{\alpha}) - F(P+\sqrt{\alpha})\right)\right]}{(1-\beta)^2}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(f(P+\sqrt{\alpha}) + f(P-\sqrt{\alpha})\right)\right) - \left(\frac{f(P+\sqrt{\alpha}) - f(P-\sqrt{\alpha})}{1-\beta}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(1-\beta)^2}\left(\left(f(P-\sqrt{\alpha}) + f(P+\sqrt{\alpha})\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1+F(P-\sqrt{\alpha}) - F(P+\sqrt{\alpha})\right)\left(f(P+\sqrt{\alpha}) + f(P-\sqrt{\alpha})\right) - \left(f(P-\sqrt{\alpha}) - f(P+\sqrt{\alpha})\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{(1-\beta)^2}\left(4f(P-\sqrt{\alpha})f(P+\sqrt{\alpha}) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1+F(P-\sqrt{\alpha}) - F(P+\sqrt{\alpha})\right)\left(f(P+\sqrt{\alpha}) + f(P-\sqrt{\alpha})\right)\right) > 0$$

Теорема доказана.

9. Альтернативное применение результатов теоремы 1

Вместо того, чтобы искать оптимальную премию, которая гарантирует минимальный риск невыполнения страховой компанией своих обязательств, мы можем считать премию заданной (например, величина премии может диктоваться условиями рынка), и вычислить риск, которому мы подвергаемся при назначении такой премии. Для этого вспомним, что при заданной премии P, величина $CTE_\beta\left(L(P,X)\right)$ подсчитывается как минимальное значение функции

$$U(\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty}[L(P,x)-\alpha]^+ f(x)dx$$

Более того, по теореме, доказанной Rockafellar & Uryasev (2000) оказывается, что величина α^*, доставляющая минимум функции $U(\alpha)$, совпадает с $VaR_\beta\big(L(P,X)\big)$. То есть $VaR_\beta\big(L(P,X)\big)$ можно вычислять как решение α^* системы

$$\begin{cases} F(P-\alpha) = \dfrac{1-\beta}{2} \\ F(P+\alpha) = \dfrac{1+\beta}{2} \end{cases}$$

которая была найдена в теореме 1, когда мы искали оптимальную премию.

Покажем на примере, как по этой формуле вычислять величину риска β, считая премию заданной.

Возьмем случайную величину X, которая имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, тогда:

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, \text{при } x > 0 \\ \quad 0, \text{ иначе} \end{cases}$,

$EX = \frac{1}{\lambda}$.

Тогда система имеет вид $\begin{cases} 1 - e^{-\frac{P-\alpha}{\lambda}} = \frac{1-\beta}{2} \\ 1 - e^{-\frac{P+\alpha}{\lambda}} = \frac{1+\beta}{2} \end{cases}$

Отсюда $1 = e^{-\frac{P+\alpha}{\lambda}} + e^{-\frac{P-\alpha}{\lambda}}$

Возьмем $\lambda = 1$

Тогда $1 = e^{-(P+\alpha)} + e^{-(P-\alpha)} = e^{-P}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = 2e^{-P}ch\alpha$

Поэтому $\alpha = arcch(0.5e^P)$

Отсюда находим $\beta = 1 - 2e^{-(P+\alpha^*)}$

Мы будем искать риск, которому мы подвергаемся, считая величину премии заданной, и интерпретируя премии через надбавку θ, то есть $P = (1+\theta)EX$. Данный принцип назначения премий является широко известным и называется The Expected Value Premium Principle.

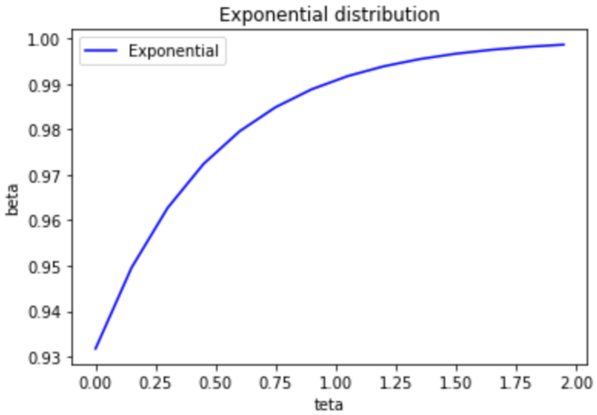
Для этого напишем программу на языке Python, которая будет вычислять и печатать список из значений θ в интервале [0,2] с шагом 0.15 и соответствующих им значений β.

```
import numpy as np
import math
a=1
EX=1/a
mas_teta=[]
mas_betaExp=[]
for teta in np.arange(0,2,0.15):
    P=(1+teta)*EX
    #print(2*math.exp(-P))
    alpha=math.acosh(2*math.exp(P))
    beta=1-2*math.exp(-(P+alpha))
    mas_teta.append(teta)
    mas_betaExp.append(beta)
    print ("teta=",teta,"P=",P,"beta=",beta)
```

```
teta= 0.0 P= 1.0 beta= 0.931750102314941
teta= 0.15 P= 1.15 beta= 0.9495524588374294
teta= 0.3 P= 1.3 beta= 0.9626891989080678
teta= 0.44999999999999996 P= 1.45 beta= 0.9723931225112112
teta= 0.6 P= 1.6 beta= 0.9795667080834988
teta= 0.75 P= 1.75 beta= 0.9848727039029397
teta= 0.8999999999999999 P= 1.9 beta= 0.988798931078795
teta= 1.05 P= 2.05 beta= 0.9917050615486304
teta= 1.2 P= 2.2 beta= 0.9938566123970608
teta= 1.3499999999999999 P= 2.3499999999999996 beta= 0.9954497733788641
teta= 1.5 P= 2.5 beta= 0.9966296065564617
teta= 1.65 P= 2.65 beta= 0.9975034239350389
teta= 1.7999999999999998 P= 2.8 beta= 0.9981506406254965
teta= 1.95 P= 2.95 beta= 0.9986300429928406
```

Для наглядности нарисуем полученный график зависимости $\beta(\theta)$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(mas_teta,mas_betaExp,c='blue',label='Exponential')
plt.xlabel("teta")
plt.ylabel("beta")
plt.title("Exponential distribution")
plt.legend()
plt.show()
```



Теперь проделаем аналогичную операцию для распределения Парето с параметрами $\lambda = 800, a = 2$ и убедимся, что значения для β получаются примерно такими же, но немного меньше, то есть экспоненциальное распределение немного менее рискованное, чем распределение Парето.

Напомним, что случайная величина Y имеет распределение Парето с параметрами $\lambda > 0$ и $a > 0$, если ее плотность дается формулой

$$f(x) = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{a+1}, 0 < x < +\infty$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{a}, 0 < x < +\infty$$

Для среднего значения имеем

$$EY = \int_0^{+\infty} \left(1 - F(x)\right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{a} dx = \left(\frac{\lambda + x}{\lambda}\right)^{-a+1} \cdot \frac{\lambda}{-a+1}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{a-1}$$

Тогда система имеет вид $\begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+P-\alpha}\right)^{a} = \frac{1-\beta}{2} \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+P+\alpha}\right)^{a} = \frac{1+\beta}{2} \end{cases}$

У нас $\lambda = 800, a = 2$

Отсюда

$\frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{1}{\lambda+P-\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda+P+\alpha}\right)^2 = \frac{(\lambda+P)^2+2\alpha(\lambda+P)+\alpha^2+(\lambda+P)^2-2\alpha(\lambda+P)+\alpha^2}{((\lambda+P)^2-\alpha^2)^2}$

$$\left(\frac{(\lambda + P)^2 - \alpha^2}{\lambda}\right)^2 = 2(\alpha^2 + (\lambda + P)^2)$$

Обозначим $y = \alpha^2$ и получим квадратное уравнение на y:

$$(\lambda + P)^4 - 2y(\lambda + P)^2 + y^2 = 2\lambda^2(y + (\lambda + P)^2)$$
$$y^2 - 2y((\lambda + P)^2 + \lambda^2) + (\lambda + P)^4 - 2\lambda^2(\lambda + P)^2 = 0$$
$$D = 4((\lambda + P)^2 + \lambda^2)^2 - 4((\lambda + P)^4 - 2\lambda^2(\lambda + P)^2)$$
$$y_{1,2} = (\lambda + P)^2 + \lambda^2 \pm \sqrt{D}$$
$$\alpha_{1,2} = \sqrt{y_{1,2}}$$

Нам подходит только то α, которое с плюсом.

Тогда $\beta = 2F(P + \alpha) - 1 = 2\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+P+\alpha}\right)^2\right) - 1 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+P+\alpha}\right)^2$

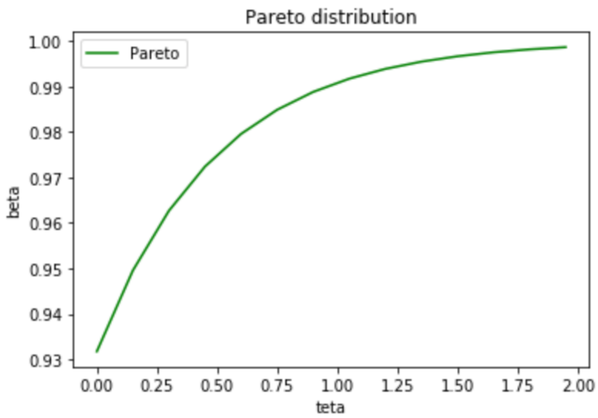
Составим таблицу из значений θ в интервале $[0,2]$ с шагом 0.5 и соответствующих им значений β.

```
import numpy as np
import math
a=2
lambd=800
EX=lambd/(a-1)
mas_betaPareto=[]
for teta in np.arange(0,2,0.15):
    P=(1+teta)*EX
    D=((lambd+P)**2+lambd**2)**2-((lambd+P)**4-2*lambd*lambd*(lambd+P)*(lambd+P))
    y1=(lambd+P)**2+lambd**2 + np.sqrt(D)
    #y2=(lambd+P)**2+lambd**2 - np.sqrt(D)
    alpha1=np.sqrt(y1)
    #alpha2=np.sqrt(y2)
    beta1=1-2*(lambd/(lambd+P+alpha1))**a
    #beta2=1-2*(lambd/(lambd+P+alpha2))**a
    mas_betaPareto.append(beta1)
    print("teta=",teta,"P=",P,"beta=",beta1)
```

```
teta= 0.0 P= 800.0 beta= 0.920650341226544
teta= 0.15 P= 919.9999999999999 beta= 0.9292857509576532
teta= 0.3 P= 1040.0 beta= 0.9365927616824647
teta= 0.44999999999999996 P= 1160.0 beta= 0.9428286763604571
teta= 0.6 P= 1280.0 beta= 0.948191855472915
teta= 0.75 P= 1400.0 beta= 0.952837072807537
teta= 0.8999999999999999 P= 1520.0 beta= 0.9568864418398881
teta= 1.05 P= 1639.9999999999998 beta= 0.960437299990289
teta= 1.2 P= 1760.0000000000002 beta= 0.9635679733029878
teta= 1.3499999999999999 P= 1879.9999999999998 beta= 0.966342043871702
teta= 1.5 P= 2000.0 beta= 0.9688115457189042
teta= 1.65 P= 2120.0 beta= 0.9710193842832616
teta= 1.7999999999999998 P= 2240.0 beta= 0.9730011867995699
teta= 1.95 P= 2360.0 beta= 0.9747867309320829
```

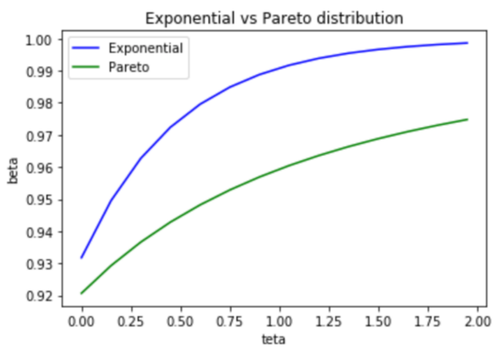
Для наглядности нарисуем график зависимости $\beta(\theta)$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(mas_teta,mas_betaExp,c='green',label='Pareto')
plt.xlabel("teta")
plt.ylabel("beta")
plt.title("Pareto distribution")
plt.legend()
plt.show()
```



Теперь нарисуем оба графика на одном и том же чертеже.

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(mas_teta,mas_betaExp,c='blue',label='Exponential')
plt.plot(mas_teta,mas_betaPareto,c='green',label='Pareto')
plt.xlabel("teta")
plt.ylabel("beta")
plt.title("Exponential vs Pareto distribution")
plt.legend()
plt.show()
```



Видим, что значения β при одинаковых θ для распределения Парето получились немного меньше, чем для экспоненциального распределения. Отметим, что этот результат можно было получить и математически. А именно, доказать, что

$$\beta_1 = 1 - 2e^{-(x+arcch(0.5e^x))}$$

всегда больше, чем

$$\beta_2 = 1 - 2\left(\frac{800}{800+x+\sqrt{(800+x)^2+800^2+800\sqrt{4(800+x)^2+800^2}}}\right)^2$$

Для этого достаточно проверить, что функция

$$f_1(x) = e^{-(x+arcch(0.5e^x))}$$

всегда меньше, чем функция

$$f_2(x) = \left(\frac{800}{800 + x + \sqrt{(800 + x)^2 + 800^2 + 800\sqrt{4(800 + x)^2 + 800^2}}} \right)^2$$

Отсюда видно, почему был выбран именно графический метод решения.

10. Выводы

В данной работе мы в теории и на практике показали, как использовать такие меры риска, как VaR и CTE для решения задачи назначения премий. А именно, был тщательно исследован предложенный Rockafellar & Uryasev в 2000 году двухшаговый алгоритм, использующий одновременно и функции потерь, и меры риска. В соответствии с этим алгоритмом, для нахождения премии по риску необходимо сначала выбрать функцию потерь, которая будет отвечать за правильный учет избыточных и недостаточных премий. На втором шаге премия вычисляется как значение, минимизирующее меру риска функции потерь. В качестве меры риска мы взяли CTE. Далее мы отдельно исследовали случаи, когда в качестве функции потерь берется симметричная и несимметричная функция абсолютных потерь, а также квадратичная функция потерь. В каждом из случаев была выведена точная формула, пригодная для практических расчетов. В разделе 4 было приведено короткое доказательство теоремы об альтернативном способе нахождения CTE. В разделе 6 мы убедились, что численно найденный минимум совпадает с теоретически найденным минимумом. Кроме того, в разделе 9 мы показали еще одно практическое применение полученных теоретических результатов: вычислили риск, которому подвергается страховая компания, назначая премию, величина которой диктуется рынком. Были рассмотрены и сравнены случаи экспоненциального распределения и распределения Парето.

11. Список литературы

1) Antonio Heras, Beatriz Balbás and José Luis Vilar. Conditional Tail Expectation and Premium Calculation, ASTIN Bulletin, Volume 42, Issue 01, May 2012, pp 325 - 342

2) Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value at Risk, Journal of Risk 2, 21-41.

3) Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2002) Conditional Value at Risk for General Loss Distributions, Journal of Banking and Finance 26, 1443-1471.

4) S. Uryasev, S. Sarykalin, G. Serraino (2008), Value-at_Risk vs Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization