СА-15. Найти такую голоморфную функцию f комплексного переменного $z = x+iy$, что

$$\operatorname{Re} f(x,y) = y - xy \quad \text{и} \quad f(0)=0.$$

ГЭК 3
Воробьев
Станислав
Константинович
611 группа

Введем обозначения:

$$\operatorname{Re} f(x,y) = u(x,y) \quad , \quad \operatorname{Im} f(x,y) = v(x,y)$$

$$f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

Знаем, что f голоморфна если и только если выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_y = -v'_x \\ u'_x = v'_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -v'_x = 1-x \\ v'_y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{x^2}{2} - x + \varphi(y) \\ v = -\frac{y^2}{2} + G(x) \end{cases}$$

Отсюда

$$v = \frac{x^2}{2} - x - \frac{y^2}{2} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Ищем $C \in \mathbb{R}$ подстановкой $z=0$:

$$f(0) = (y - xy) + i\left(\frac{x^2-y^2}{2} - x + C\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = iC \Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

Отсюда:

$$f = (y - xy) + i\left(\frac{x^2-y^2}{2} - x\right)$$

Ответ:

$$f(x+iy) = (y - xy) + i\left(\frac{x^2-y^2}{2} - x\right)$$

Кононенко Александр,
ГЭК-4

СА-19 Найти рациональную функцию, имеющую простой полюс в 1 с вычетом 1, простой полюс в -1 с вычетом -1, не имеющую других полюсов и равную 0 в 0.

Ищем рац. функцию f в виде $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$.

Т.к полюсы простые, то $\exists \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)$

$\exists \lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z)$, и других в $\mathbb{C}$ нет, то $\Rightarrow \psi(z)=(z-1)(z+1)=z^2-1$

$\psi'(z)=(z^2-1)'=2z \Rightarrow \psi'(1)=2\neq 0$ и

$\Rightarrow \psi'(-1)=-2\neq 0$

можем вычислять вычеты по формулам:

$$1=\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\operatorname*{res}_{z=1}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=\frac{\varphi(1)}{2}$$

$$-1=\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\operatorname*{res}_{z=-1}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(-1)}{\psi'(-1)}=\frac{\varphi(-1)}{-2}$$

Отсюда получаем, что $\varphi(1)=2\cdot 1=2$

$\varphi(-1)=(-2)\cdot(-1)=2$

Т.к. $\deg\psi=2$, то чтобы в ∞ не было особенности, то $\deg\varphi\leq 2$ (чтобы $\exists\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi}{\psi}=C<\infty$).

Через $(0,0)$; $(1;2)$ и $(-1;2)$ проходит единств. такой мн-н:

$\varphi(z)=2z^2$. Тогда $f(\infty)=f\left(\frac{1}{s}\right)\Big|_{s=0}=\frac{2\left(\frac{1}{s}\right)^2}{\left(\frac{1}{s}\right)^2-1}\Bigg|_{s=0}=$

$=\frac{2}{s^2\,\frac{1-s^2}{s^2}}\Bigg|_{s=0}=\frac{2}{1-s^2}\Bigg|_{s=0}=2$ и особенности в ∞ действительно нет.

Ответ: $f(z)=\frac{2z^2}{z^2-1}$.