



Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

Курсовая работа за 3 курс:
Об оптимальности основных принципов назначения премий

Выполнила: Александра Токаева, 309

Научный руководитель: проф. Г.И.Фалин

Москва
2020

Содержание

1. От автора	1
2. Постановка задачи	1
3. Пример 1	3
4. Четыре принципа назначения премий	3
5. Общие результаты о случайных величинах	5
5.1. Задача минимизации величины D	5
5.2. Альтернативное решение задачи минимизации величины D	9
5.3. Задача максимизации суммы $A_1 + \dots + A_N$	11
5.4. Альтернативное решение задачи максимизации суммы $A_1 + \dots + A_N$	13
6. Приложение полученных результатов к модели индивидуального риска	14
6.1. Минимизация ожидаемой разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями при заданной вероятности разорения	15
6.2. Минимизация вероятности разорения при заданной взвешенной средней квадратичной разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями	16
7. Пример 2	18
8. Выводы и замечания	22
9. Литература	22

1. От автора

Задача назначения страховых премий и определения оптимальной цены для различных финансовых инструментов играет важнейшую роль в страховой математике, поскольку без правильно назначенной цены на продукт его нельзя продать и получить прибыль. Цель данной работы — подробно и основательно изучить этот раздел современной теории страхования, дать описание основных подходов к назначению премий и сделать определенные выводы. Наши рассуждения опираются на статью G.Falin. On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio. Astin Bulletin, 2008, 38(1), pp.161-170. Отметим, что некоторые рассуждения и логические переходы в данной статье содержат пропуски или вовсе опущены. Мы полностью восстановим все пропущенные рассуждения и добавим важные, на наш взгляд, детали. К таким мы относим, например, альтернативные решения задач 1 и 2, использующие не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а минимизационные свойства перпендикуляра, опущенного из точки на гиперплоскость, и геометрические свойства скалярного произведения векторов соответственно. Однако мы не претендуем на авторство конкретных утверждений и результатов, а также используемых понятий из теории вероятностей и страхования, поэтому вся работа, сделанная лично нами, отдельно отмечена. Кроме того, для более детального восприятия, в работу добавлены иллюстрации и таблицы, также выполненные лично нами, а также два примера. Мы применим простые геометрические принципы, чтобы найти оптимальные значения премий и минимизировать вероятность разорения. Кроме того, мы покажем, что три стандартных подхода к назначению премий (известные в виде принципа деления добавочной суммы пропорционально ожидаемому убытку, дисперсии или среднеквадратическому отклонению) являются частными случаями рассматриваемой нами задачи оптимизации и при этом минимизируют взвешенные ожидаемые квадраты разностей как между индивидуальными премиями и индивидуальными выплатами, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными выплатами по этим классам.

2. Постановка задачи

Рассмотрим портфель из n неоднородных независимых страховых рисков. Пусть X_i обозначает размер выплат по i -му риску за рассматриваемый период, $S = X_1 + \dots + X_n$ — суммарные потери, связанные с порт-

фелем. При некоторых естественных предположениях (что портфель достаточно большой, не очень неоднородный и распределение размера выплат не очень ассиметричное) распределение случайной величины $\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}}$ может быть приближено стандартным гауссовским распределением.



α	99.9%	99%	98%	97%	96%	95%
z_α	3.090	2.326	2.054	1.881	1.751	1.645

Рис. 1. Квантили стандартного нормального распределения

Предположим, что страховщик взимает премию π_i по i -му риску и таким образом собирает суммарную премию $\pi = \sum_{i=1}^n \pi_i$. Из гауссовости распределения величины $\frac{S-ES}{\sqrt{VarS}}$ получаем, что для гарантии достаточно маленькой вероятности разорения $R = P(S > \pi)$ (например, $R = 5\%$) страховщик должен собрать суммарную премию в размере

$$ES + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)} \quad (1)$$

где z_α - квантиль гауссовского распределения уровня α .

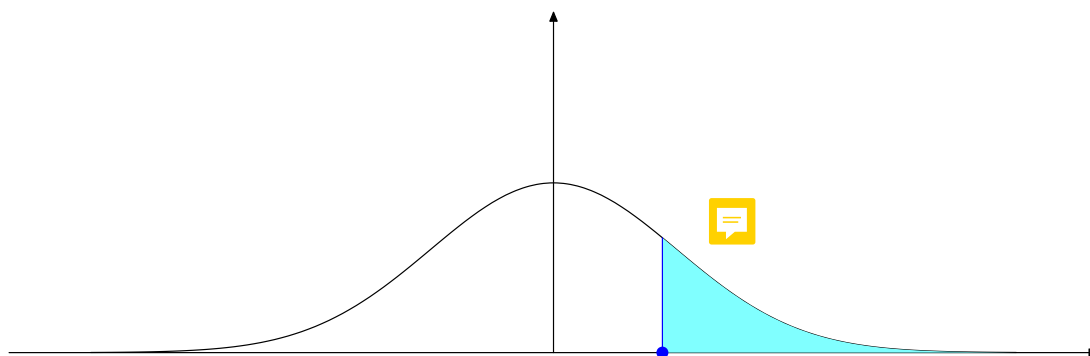


Рис. 2. Квантиль уровня α


Поясним последнее утверждение:

$$\begin{aligned}
 P(S > \pi) &= R \\
 \Leftrightarrow P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} > \frac{\pi - ES}{\sqrt{VarS}}\right) &= R \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi - ES}{\sqrt{VarS}} &= z_{(1-R)}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \pi = ES + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}.$$

Последнее равенство ничего не говорит о величине индивидуальных премий. Чтобы найти их, необходимо использовать дополнительные принципы, описанные далее. Но сначала в качестве иллюстрации мы применим гауссовское приближения для решения следующей задачи.

3. Пример 1

Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0.3\% = 0.003$. Компания выплачивает сумму $b = 250000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года.  Определите величину активов, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5%.

Решение: Как обычно, примем размер страховой премии в качестве новой денежной единицы. Прежде всего, мы должны подсчитать среднее значение и дисперсию суммарного ущерба S .

$$ES = NE\xi = 3000 \cdot 0.003 = 9$$

$$VarS = NVar\xi = 3000(b^2 - (bq)^2) = 3000 \cdot 0.997 \cdot 0.003 \approx 9$$

Поэтому

$$P(S \leq u) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \leq \frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \leq \frac{u - 9}{3}\right) \approx \Phi\left(\frac{u - 9}{3}\right)$$

Если мы хотим, чтобы вероятность разорения была 5%, то величина $\frac{u-9}{3}$ должна быть равна $z_{95\%} = 1.645$, то есть $u = 3 \cdot 1.645 + 9 \approx 13.935$ от величины страховой суммы, то есть 3483750 руб.

4. Четыре принципа назначения премий

Сначала мы напомним три стандартных принципа назначения премий, а потом предложим четвертый принцип, в рамках которого мы

рассмотрим два подхода к задаче разбиения величины π на n индивидуальных премий $\pi_1 \dots \pi_n$.

Принцип 1 Будем делить добавочную сумму $l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ пропорционально ожидаемому убытку EX_i , то есть $l_i = kEX_i$. Поскольку $\sum l_i = l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ и $\sum EX_i = ES$, то суммируя все $l_i = kEX_i$, получаем $\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} = kES$.

То есть $k = \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{ES}$,

поэтому $\pi_i = EX_i + \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{ES} EX_i$

Принцип 2 Будем делить добавочную сумму $l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ пропорционально дисперсиям $VarX_i$, то есть $l_i = kVarX_i$. Поскольку $\sum l_i = l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ и $\sum VarX_i = VarS$, то суммируя все $l_i = kVarX_i$, получаем $\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} = kVarS$. То есть $k = \frac{z_{(1-R)}}{\sqrt{VarS}}$,

поэтому $\pi_i = EX_i + \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{VarS} VarX_i$

Принцип 3 Будем делить добавочную сумму $l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ пропорционально среднеквадратичным отклонениям $\sqrt{VarX_i}$, то есть $l_i = k\sqrt{VarX_i}$. Поскольку $\sum l_i = l = \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$ и $\sum VarX_i = VarS$, то суммируя все $l_i = k\sqrt{VarX_i}$, получаем $\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} = k \sum_{i=1}^N \sqrt{VarX_i}$.

То есть $k = \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{VarX_i}}$,

поэтому $\pi_i = EX_i + \frac{\sqrt{VarS} * z_{(1-R)} * \sqrt{VarX_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{VarX_i}}$

Принцип 4 К нему ведут два разных подхода:

1. Для заданной вероятности разорения $R = P(S > \pi)$ (то есть для заданного значения $\pi = ES + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)}$) назначить индивидуальные премии так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратичную разность $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ между индивидуальными рисками X_i и индивидуальными премиями π_i (где s_i — некоторые известные положительные числа)

2) Для заданной $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ минимизировать вероятность разорения $P(S > \pi)$

Сейчас мы покажем, что оптимальное решение для обоих подходов одинаково и имеет вид

$$\pi_i = EX_i + \sqrt{VarS} * z_{(1-R)} \cdot \frac{s_i}{\sum_{j=1}^n s_j}$$



В частности, если $s_i = EX_i$, то мы получаем принцип 1, $s_i = VarX_i$, то мы получаем принцип 2, а если $s_i = \sqrt{VarX_i}$, то мы получаем принцип 3.

Кроме того, мы покажем, что оптимальные премии π_i минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными выплатами, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными выплатами по этим классам.

5. Общие результаты о случайных величинах

5.1. Задача минимизации величины D

Пусть ξ_1, \dots, ξ_N - случайные величины с конечными матожиданиями a_1, \dots, a_N и дисперсиями $Var\xi_1, \dots, Var\xi_N$. Мы предполагаем, что **матожидания** и дисперсии известны.

Нам бы хотелось заменить случайные величины ξ_1, \dots, ξ_N на неслучайные числа A_1, \dots, A_N таким образом, чтобы взвешенная сумма

$$D \equiv \sum_{i=1}^N \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 \quad (2)$$

была бы минимальна. Здесь $\omega_1, \dots, \omega_N$ - это известные положительные числа.

Используя элементарные свойства случайных величин, мы можем переписать D следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^N \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i (Var(\xi_i - A_i) + (E(\xi_i - A_i))^2)$$

=

$$\sum_{i=1}^N \omega_i (Var(\xi_i - A_i) + (a_i - A_i)^2) = \sum_{i=1}^N \omega_i Var \xi_i + \sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2 \quad (3)$$

Поскольку ω_i и $Var \xi_i$ фиксированы, то изначальная задача минимизации превращается в задачу нахождения минимального значения функции

$$f(A_1, \dots, A_N) = \sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2$$

Очевидно, оптимальным значением являются

$$A_1^* = a_1, \dots, A_N^* = a_N$$

и минимальное значение этой функции равно нулю. Соответственно, минимальное значение величины D равно $\sum_{i=1}^N \omega_i Var \xi_i$

Теперь усложним ситуацию, наложив дополнительные ограничения на переменные A_1, \dots, A_N , и получим следующую задачу оптимизации:

Задача 1 Найти минимальное значение $D(A_1, \dots, A_N)$ при условии, что

$$A_1 + \dots + A_N = C, \quad (4)$$

где C -известная константа.

Опять перепишем D в виде

$$D = \sum_{i=1}^N \omega_i Var \xi_i + \sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2$$

и заметим, что поскольку ω_i и $Var \xi_i$ фиксированы, то для решения задачи 1 нам достаточно найти минимальное значение функции

$$f(A_1, \dots, A_N) = \sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2$$

на множестве тех наборов чисел (A_1, \dots, A_N) , которые удовлетворяют условию (4): $A_1 + \dots + A_N = C$.

Для решения задачи 1 введем новые переменные $x_i = \sqrt{\omega_i}(A_i - a_i)$, то есть $A_i = a_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i$. Тогда задача 1 превращается в:

Задача 1' Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (5)$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i = C - \sum_{i=1}^N a_i. \quad (6)$$

Последовательности $X = (x_1, \dots, x_N)$ и $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ можно понимать как N -мерные евклидовы векторы в пространстве R^N . Соответственно, левая часть равенства (7) есть скалярное произведение X и Y , а функция $g(x_1, \dots, x_N)$ есть $\|X\|^2$, где

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$$

- это длина вектора X .

Продолжим решать задачу 1', используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, согласно которому для любых двух векторов $X, Y \in R^N$ верно

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы (в частности, если вектор Y ненулевой, линейная зависимость означает, что X пропорционален Y : $X = t \cdot Y$ для некоторого $t \in R$)

Применяя это неравенство, получаем:

$$g(x_1, \dots, x_N) = \|X\|^2 \geq \frac{|X \cdot Y|^2}{\|Y\|^2} = \frac{(C - \sum_{i=1}^N a_i)^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}} \quad (7)$$

Поэтому для векторов (x_1, \dots, x_N) , удовлетворяющих (7), имеем:

$$\min g(x_1, \dots, x_N) \geq \frac{(C - \sum_{i=1}^N a_i)^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}} \quad (8)$$

Поскольку вектор $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}} \right)$ ненулевой (из-за того, что $\omega_1, \dots, \omega_N$ - это известные положительные числа), то равенство в (8) достигается тогда и только тогда когда существует такое t что

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \cdot t, i = 1, \dots, N \quad (9)$$

Подставляя выражение $X = tY$ в (7), получаем, что

$$t^2 \frac{\|Y\|^4}{\|Y\|^2} = \frac{(C - \sum_{i=1}^N a_i)^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}},$$

то есть

$$t = \frac{C - \sum_{i=1}^N a_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}},$$

поэтому

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \cdot t$$

откуда и следует ответ в задаче 1' :

$$\min \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{\omega_i} \frac{C - \sum_{j=1}^N a_j}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\omega_j}}$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче 1, получаем ее решение в виде:

$$A_i = a_i + \frac{x_i}{\sqrt{\omega_i}} = a_i + \frac{t}{\omega_i} = a_i + \frac{1}{\omega_i} \frac{C - \sum_{j=1}^N a_j}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\omega_j}} \quad (10)$$

$$D_{min} = \sum_{i=1}^N \omega_i Var \xi_i + \frac{(C - \sum_{j=1}^N a_j)^2}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\omega_j}} \quad (11)$$

5.2. Альтернативное решение задачи минимизации величины D

Дадим альтернативное решение задачи минимизации величины D , использующее не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а минимизационные свойства перпендикуляра, опущенного из точки на гиперплоскость:

Задача 1' Найти минимальное значение функции

$$g(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

при условии, что

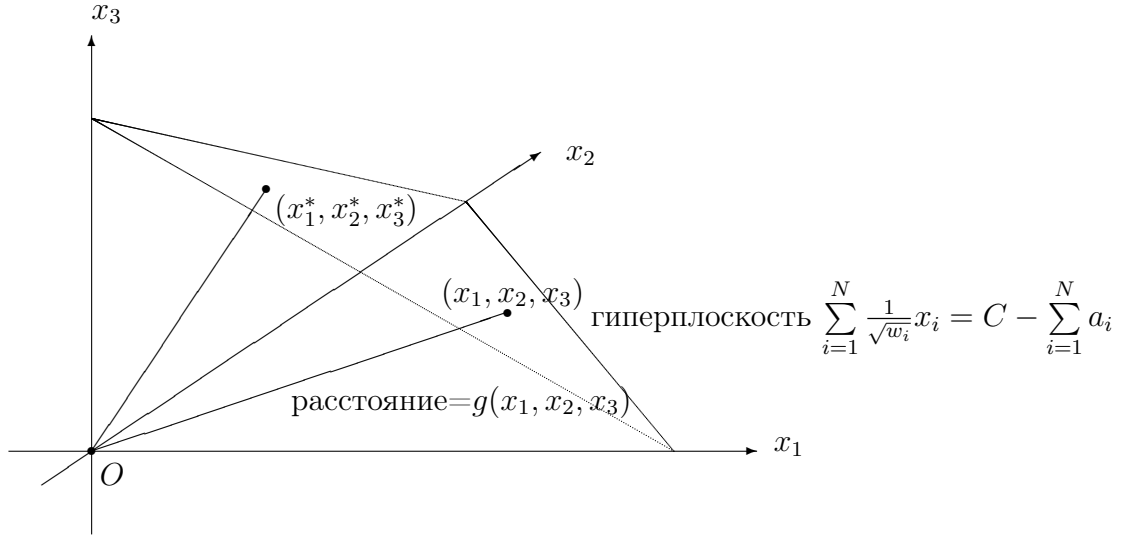
$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i = C - \sum_{i=1}^N a_i.$$

Опять будем понимать наборы чисел $X = (x_1, \dots, x_N)$ и $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$ как N -мерные евклидовы векторы в пространстве R^N . Поэтому наша задача заключается в том, чтобы минимизировать квадрат длины вектора X , удовлетворяющего условию $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i = C - \sum_{i=1}^N a_i$. Но заметим, что данное условие означает, что вектор X принадлежит гиперплоскости с нормалью $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}}\right)$.

Последнее утверждение требует некоторых пояснений. Как известно, гиперплоскость - это линейная поверхность коразмерности один, то есть линейная оболочка $N - 1$ вектора. Из линейной алгебры известно, что линейные пространства можно задавать системами линейных уравнений, причем (см. [2]) если система имеет ранг k , то задаваемое ей пространство будет иметь размерность $N - k$. Поэтому в случае гиперплоскости (размерности $N - 1$) в N -мерном пространстве требуется всего одно уравнение. Запишем его в виде $b_1 x_1 + \dots + b_N x_N = c$. Согласно общей теории, это уравнение задает плоскость размерности $N - 1$. Но с другой стороны, это левую часть этого уравнения можно переписать в виде скалярного произведения фиксированного вектора $b = (b_1, \dots, b_N)$ на вектор x из этой гиперплоскости. То есть вектор b перпендикулярен всем векторам x из этой гиперплоскости, поэтому b - вектор нормали к данной гиперплоскости.

Данное утверждение, сформулированное как "в ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором" доказано в [3].

Рис. 3. Расстояние от точки до гиперплоскости



Из курса линейной алгебры известно, что минимизирует расстояние от точки до гиперплоскости - перпендикуляр, опущенный из этой точки на гиперплоскость (это непосредственно следует из многомерной теоремы Пифагора).

Но выше мы уже пояснили, что нормаль к нашей гиперплоскости - это вектор Y , поэтому искомым вектор X будет пропорционален Y :

$$X = tY, \text{ то есть } (x_1, \dots, x_n) = t \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\omega_N}} \right)$$

Подставим выражение для X в условие

$$(X, Y) = C - \sum_{i=1}^N a_i$$

Получим

$$t \|Y\|^2 = C - \sum_{i=1}^N a_i$$

Откуда следует, что

$$t = \frac{C - \sum_{i=1}^N a_i}{\|Y\|^2} = \frac{C - \sum_{i=1}^N a_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}$$

Значит, минимальное значение в задаче 1' имеет вид

$$\min \|X\|^2 = t^2 \|Y\|^2 = t(t\|Y\|^2) = t(C - \sum_{i=1}^N a_i) = \frac{(C - \sum_{i=1}^N a_i)^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}$$

Возвращаясь теперь к исходной задаче 1 минимизации величины D , получаем ответ:

$$D_{min} = \sum_{i=1}^N \omega_i \text{Var} \xi_i + \frac{(C - \sum_{j=1}^N a_j)^2}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\omega_j}}$$

5.3. Задача максимизации суммы $A_1 + \dots + A_N$

Теперь изучим двойственную задачу оптимизации:

Задача 2 Найти максимум суммы $A_1 + \dots + A_N$, если задано

$$D = \sum_{i=1}^N \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 \quad (12)$$

Как и раньше, перепишем D в виде

$$D = \sum_{i=1}^N \omega_i E(\xi_i - A_i)^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i \text{Var} \xi_i + \sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2,$$

причем отметим такой факт: из этого представления следует, что константа D должна быть больше или равна, чем $\sum_{i=1}^N \omega_i \text{Var} \xi_i$

Поэтому так введенная константа D' будет неотрицательная:

$$D' = D - \sum_{i=1}^N \omega_i \text{Var} \xi_i \geq 0$$

После введения величины D' ограничение (12) превращается в

$$D' = \sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2$$

Вводя $x_i = \sqrt{\omega_i}(A_i - a_i)$, $A_i = a_i + \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i$ мы сводим задачу 2 к следующему виду:

Задача 2' Найти максимум суммы $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i$, если задана сумма

$$D' = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (13)$$

Для решения этой задачи, опять применяем неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}x_i = X \cdot Y \leq \|X\| \cdot \|Y\| = \sqrt{D'} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}} \quad (14)$$

Причем равенство в (14) достигается тогда и только тогда, когда существует t такое что

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \cdot t, i = 1, \dots, N \quad (15)$$

Подставляя выражение $X = tY$ в (14), получаем единственное решение

$$t = \sqrt{\frac{D'}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}}$$

Тогда

$$x_i = \frac{t}{\sqrt{\omega_i}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} \sqrt{\frac{D'}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}}$$

Поэтому искомый максимум в задаче 2' равен $\sqrt{D'} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}$.

Тогда возвращаясь к исходной задаче 2:

$$A_i = a_i + \frac{x_i}{\sqrt{\omega_i}} = a_i + \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\frac{D'}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}} \quad (16)$$

Поэтому максимум суммы $A_1 + \dots + A_N$ равен

$$\sum_{i=1}^N a_i + \sqrt{\sum_{i=1}^N \omega_i (a_i - A_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i}}$$

5.4. Альтернативное решение задачи максимизации суммы $A_1 + \dots + A_N$

Дадим альтернативное решение задачи 2', использующее не неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а геометрические свойства скалярного произведения векторов.

Задача 2' Найти максимум суммы $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\omega_i}} x_i$, если задана сумма

$$D' = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Заметим, что нам нужно максимизировать скалярное произведение векторов X и Y , причем длины этих векторов заданы, а изменять мы можем только угол β между ними. Но по свойству скалярного произведения двух векторов оно равняется

$$||X|| \cdot ||Y|| \cdot \cos \beta$$

Тогда поскольку длины обоих векторов заданы, а косинус по модулю не превосходит единицы, то для максимизации этого скалярного произведения достаточно сделать косинус по модулю равным единице, то есть векторы X и Y должны быть коллинеарны. Получаем, что $X = tY$, и дальше рассуждаем как было описано в (15) и (16).

6. Приложение полученных результатов к модели индивидуального риска

Рассмотрим модель индивидуального риска:

$$S = X_1 + \dots + X_n,$$

где S - общие потери по портфелю, n - общее число рисков в портфеле, случайная величина X_i обозначает потери по i -му риску за рассматриваемый период,

Мы предполагаем, что случайные величины X_1, \dots, X_n независимы и имеют конечные матожидания μ_1, \dots, μ_n и дисперсии $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ соответственно. Тогда случайная величина S имеет конечное матожидание $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ и дисперсию $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$. Мы также предполагаем, что для достаточно больших n функция распределения централизованной и нормированной величины полных потерь $\frac{S-\mu}{\sigma}$ может быть приближена функцией распределения стандартной гауссовской величины $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то есть:

$$P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < x\right) \approx \Phi(x)$$

Предположим, что страховщик взимает премию π_i по i -му риску, то есть всего собирает сумму $\pi = \sum_{i=1}^n \pi_i$. Тогда вероятность разорения дается формулой $R = P(S > \pi)$.

Используя гауссовость $\frac{S-\mu}{\sigma}$, получаем, что:

$$R = P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{\pi-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\pi-\mu}{\sigma}\right). \quad (17)$$

Предположим, что страховщик готов принять достаточно маленький риск разорения R (например, $R = 1\%$). Тогда равенство (17) дает следующую (приближенную) формулу для суммарной премии:

$$\pi = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)} \quad (18),$$

где z_α - квантиль гауссовского распределения уровня α , то есть $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

Равенство (18) ничего не говорит про величины индивидуальных премий π_i . Чтобы найти их, нам придется применить дополнительные принципы.

6.1. Минимизация ожидаемой разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями при заданной вероятности разорения

Задача 3 Рассмотрим взвешенную среднюю квадратичную разность

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$$

между индивидуальными рисками X_1, \dots, X_n и индивидуальными премиями π_1, \dots, π_n (где s_1, \dots, s_n - это некие известные положительные числа) и найдем минимум D :

$$D \equiv D(\pi_1, \dots, \pi_n) \rightarrow \min. \quad (19)$$

Применяя формулу (10) для $N = n, \xi_i = X_i, a_i = \mu_i, A_i = \pi_i, \omega_i = \frac{1}{s_i}, C = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)}$ мы можем утверждать, что минимизационная задача 3 с ограничением (18) имеет единственное решение

$$\pi_i^* = \mu_i + \frac{s_i}{\sum_{j=1}^n s_j} \cdot \sigma \cdot z_{(1-R)}. \quad (20)$$

Пусть теперь портфель неоднородный, но его можно разбить на k классов однородных рисков с одинаковыми статистическими характеристиками потерь (обычно риски из одного класса принадлежат одному и тому же сектору бизнеса). Пусть i -й класс состоит из n_i рисков с одинаковым средним μ_i и одинаковыми дисперсиями σ_i^2 . Тогда величина суммарных потерь S_i в i -м классе имеет среднее значение $ES_i = n_i \mu_i$ и дисперсию $Var S_i = n_i \sigma_i^2$. Суммарные потери по всему портфелю есть $S = S_1 + \dots + S_k$, причем $\mu \equiv ES = \sum_{i=1}^k n_i \mu_i$, $\sigma^2 \equiv Var S = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i^2$

Из-за однородности рисков внутри отдельного класса i , страховщик должен взимать со всех рисков в этом классе одну и ту же премию π_i . Тогда общая премия за все риски в портфеле равна $\pi = \sum_{i=1}^k n_i \pi_i$.

Задача 4 Рассмотрим взвешенную среднюю квадратичную разность

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} E(S_i - n_i \pi_i)^2$$

между суммарными потерями по разным классам S_1, \dots, S_k и суммарными премиями $n_1\pi_1, \dots, n_k\pi_k$ от этих классов (где r_1, \dots, r_k - это некоторые известные положительные числа) и минимизируем D :

$$D = D \equiv D(\pi_1, \dots, \pi_k) \rightarrow \min. \quad (21)$$

Для того, чтобы получить предписанную вероятность разорения, нужно, чтобы выполнялось (18): $\pi = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)}$.

Применяя формулу (10) для $N = k, \xi_i = S_i, a_i = n_i\mu_i, A_i = n_i\pi_i, \omega_i = \frac{1}{r_i}, C = \mu + \sigma \cdot z_{(1-R)}$ мы можем утверждать, что минимизационная задача (19) с ограничением (18) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} n_i\pi_i^* &= n_i\mu_i + \frac{r_i}{\sum_{j=1}^k r_j} \cdot \sigma \cdot z_{(1-R)} \\ \Leftrightarrow \pi_i^* &= \mu_i + \frac{r_i}{n_i \sum_{j=1}^k r_j} \cdot \sigma \cdot z_{(1-R)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь вернемся к минимизационной задаче (19) с ограничением (18) и положим для всех рисков из i -го класса одинаковое значение параметра s_i равным $\frac{r_i}{n_i}$. Тогда из (20) видно, что оптимальное решение для минимизационной задачи (19) совпадает с оптимальным решением минимизационной задачи (21). Таким образом, одни и те же значения премий минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

6.2. Минимизация вероятности разорения при заданной взвешенной средней квадратичной разности между индивидуальными рисками и индивидуальными премиями

Задача 5 Для модели индивидуального риска

$$S = X_1 + \dots + X_n$$

минимизировать вероятность разорения $R = P(S > \pi)$ при заданной величине

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$$

Поскольку $P(S > \pi)$ уменьшается при увеличивающемся π , то задача состоит в нахождении максимального значения суммарной премии $\pi = \pi_1 + \dots + \pi_n$.

Применяя формулу (16) для $N = n, \xi_i = X_i, a_i = \mu_i, A_i = \pi_i, \omega_i = \frac{1}{s_i}$, мы можем утверждать, что минимизационная задача 5 имеет единственное решение

$$\pi_i^* = \mu_i + s_i \sqrt{\frac{D - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n s_i}} \quad (23)$$

Теперь опять предположим, что портфель может быть разделен на k классов однородных рисков с одинаковыми статистическими свойствами потерь. Пусть i -й класс состоит из n_i рисков с одинаковым средним μ_i и одинаковыми дисперсиями σ_i^2 . Тогда величина суммарных потерь S_i в i -м классе имеет среднее значение $ES_i = n_i \mu_i$ и дисперсию $Var S_i = n_i \sigma_i^2$. Суммарные потери по всему портфелю есть $S = S_1 + \dots + S_k$, причем $\mu \equiv ES = \sum_{i=1}^k n_i \mu_i$, $\sigma^2 \equiv Var S = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i^2$

Из-за однородности рисков внутри отдельного класса i , страховщик должен взимать со всех рисков в этом классе одну и ту же премию π_i . Тогда общая премия за все риски в портфеле равна $\pi = \sum_{i=1}^k n_i \pi_i$.

Рассмотрим оптимизационную задачу:

Задача 6 Минимизировать вероятность разорения $R = P(S > \pi)$ при заданной величине

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} E(S_i - n_i \pi_i)^2$$

Поскольку $P(S > \pi)$ уменьшается при увеличивающемся π , то задача состоит в нахождении максимального значения суммарной премии $\pi = n_1 \pi_1 + \dots + n_k \pi_k$.

Применяя формулу (16) для $N = k, \xi_i = S_i, a_i = n_i \mu_i, A_i = n_i \pi_i, \omega_i = \frac{1}{r_i}$, мы можем утверждать, что минимизационная задача 6 имеет единственное решение

$$\pi_i^* = \mu_i + \frac{r_i}{n_i} \sqrt{\frac{D - \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} n_i \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^k r_i}} \quad (24)$$

Сравнивая формулы (23) и (24), опять видим, что одни и те же значения премий минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

В заключение приведем пример, иллюстрирующий все три принципа, а также разбиение на классы однородных рисков.

7. Пример 2

Предположим, что страховая компания заключила $N = 10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает выгодоприобретателю 1000000 руб., а в случае смерти в течение года от естественных причин компания выплачивает выгодоприобретателю 250000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0.0005. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. В первом приближении можно разбить N застрахованных на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q_1 = 0.004$ и $q_2 = 0.002$ соответственно.

Подсчитайте величину премии, гарантирующую вероятность выполнения компанией своих обязательств, равную 95%.

Решение: Примем сумму 250000 руб. в качестве условной денежной единицы. Тогда для первой группы договоров индивидуальный убыток принимает три значения: 0, 1 и 4 с вероятностями 0.9955, 0.004 и 0.0005 соответственно. Среднее значение и дисперсия величины индивидуального убытка есть

$$m_1 = 1 \cdot 0.004 + 4 \cdot 0.0005 = 0.006$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0.004 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_1^2 \approx 0.012.$$

Для второй группы договоров индивидуальный убыток принимает те же три значения 0, 1 и 4, но с другими вероятностями: 0.9975, 0.002 и 0.0005. В этой группе среднее значение и дисперсия индивидуального убытка есть

$$m_2 = 1 \cdot 0.002 + 4 \cdot 0.0005 = 0.004$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0.002 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_2^2 \approx 0.01.$$

Среднее значение и дисперсия суммарного убытка равны:

$$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0.006 + 6000 \cdot 0.004 = 48$$

$$VarS = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0.012 + 6000 \cdot 0.01 = 108$$

Для того, чтобы гарантировать 95% вероятность выполнения своих обязательств, резервный фонд компании должен быть $ES + l = 48 + l$, где добавочная сумма l равна

$$l = z_{95\%} \cdot \sqrt{VarS} \approx 1.645 \cdot \sqrt{108} \approx 17.095.$$

Рассмотрим теперь вопрос о назначении индивидуальных премий.

1) Если добавочная сумма l делится пропорционально матожиданиям, то относительная страховая надбавка θ одна и та же для всех договоров и равна

$$\theta = \frac{l}{ES} \approx 35.6\%$$

Поэтому для договоров из первой группы премия равна

$$\pi_1 = m_1(1 + \theta) \approx 0.00814 = \mathbf{2034p}.$$

Для договоров из второй группы премия равна

$$p_2 = m_2(1 + \theta) \approx 0.00542 = \mathbf{1356p}.$$

2) Если добавочная сумма l делится пропорционально дисперсиям, то коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{VarS} \approx 15.8\%$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0.001899,$$

так что премия есть

$$\pi_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007899 = \mathbf{1975p},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.7\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0.001583,$$

так что премия есть

$$\pi_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005583 = \mathbf{1396p},$$

а относительная страховая надбавка равна

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39.6\%.$$

3) Если добавочная сумма l делится пропорционально среднеквадратическим отклонениям (они равны $\sigma_1 \approx 0.1095$ для договоров первой группы и $\sigma_2 = 0.1$ для договоров второй группы), то коэффициент пропорциональности k есть

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0.0165,$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна

$$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0.001804,$$

так что премия есть

$$\pi_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007804 = \mathbf{1951p},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна

$$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0.001647,$$

так что премия есть

$$\pi_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005647 = \mathbf{1412p},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41\%.$$

Итак, изменение принципа назначения индивидуальных премий приводит к уменьшению относительной страховой надбавки для договоров первой группы: $\theta_1 = 35.6\%, 31.7\%, 30\%$.

Соответственно для договоров второй группы относительная защитная надбавка увеличивается: $\theta_2 = 35.6\%, 39.6\%, 41\%$. Это связано с тем, что коэффициент рассеяния суммарного ущерба есть

$$\frac{VarS}{ES} - 1 = 1.25,$$

в то время как для договоров первой (второй) группы он равен

$$\frac{\sigma_1^2}{m_1} - 1 = 1$$

и

$$\frac{\sigma_2^2}{m_2} - 1 = 1.5$$

соответственно.

Коэффициент вариации величины индивидуального убытка для договоров первой группы есть

$$c_1 = \frac{\sigma_1}{m_1} \approx 18.26,$$

а для договоров второй группы он равен

$$c_2 = \frac{\sigma_2}{m_2} = 25.$$

Средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $\frac{E\xi_i}{ES}$ есть

$$\begin{aligned} c &= c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{ES} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{ES} \\ &= c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21.63. \end{aligned}$$

Итак, хотя дисперсия величины индивидуального убытка для договоров второй группы меньше, чем для договоров первой группы ($\sigma_2 = 0.1 < \sigma_1 \approx 0.1095$), но флуктуации индивидуальных убытков для договоров второй группы (измеренные как коэффициентом рассеяния, так и коэффициентом вариации) превышают средние флуктуации по портфелю. Поэтому было бы оправдано выбрать для назначения премий принцип 2 или 3.

8. Выводы и замечания

Таким образом, мы изучили четыре основных принципа назначения премий: принципы деления добавочной суммы пропорционально матожиданиям, дисперсиям и среднеквадратическим отклонениям индивидуальных рисков, а также более общий способ: способ минимизации взвешенной средней квадратичной разности D между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями. При этом мы изучили два подхода к получению четвертого способа:

1) Для заданной вероятности разорения $P(S > \pi)$ минимизировать взвешенную среднюю квадратичную разность $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$

2) Для заданной $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} E(X_i - \pi_i)^2$ минимизировать вероятность разорения $P(S > \pi)$

Кроме того, мы увидели, что оба подхода имеют одно и то же решение, которое к тому же минимизируют взвешенную среднюю квадратичную разность как между индивидуальными премиями и индивидуальными потерями, так и между суммарными премиями для классов однородных рисков и суммарными потерями для этих классов (но с разными весами).

Однако необходимо подчеркнуть, что мы использовали лишь простейшую модель для расчета защитной надбавки (через приближение центрированной и нормированной величины суммарных потерь нормальным распределением). Вопрос о том, что делать, когда нельзя применять эту модель, заслуживает отдельного обсуждения, выходящего за рамки данной работы.

9. Литература

- [1] G.Falin. On the optimal pricing of a heterogeneous portfolio. Astin Bulletin, 2008, 38(1), pp.161-170.
- [2] Шурыгин В.В, Аналитическая геометрия, часть 3, стр. 4
- [3] А.Е.Умнов, Аналитическая геометрия и линейная алгебра, Москва, МФТИ, 2011, стр. 99