Кононенко Александр
ГЭК-4

SER-10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$$

Воспользуемся логарифмическим признаком.

[Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$ начиная с дост. больших $n > n_0^{\text{фикс.}}$ и сходится, если $\exists \alpha > 0,\ n_0 : \forall n > n_0$ $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$]

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} > 0 \quad (n \geq 3)$$

$$a_n^{-1} = (\ln n)^{\ln\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = 0$$

(поскольку $\ln^2 t \ll t$ при больших t), значит из определения предела при $\varepsilon = 1$: $\exists n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0 :$ $\left|\frac{\ln(a_n^{-1})}{\ln n}\right| < 1$.

Значит, по логарифмическому признаку ряд расходится.

Ответ: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ расходится.

SER-20. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$$

ГЭК 3
Воробьев
Станислав
Константинович
611 группа

т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n+1}} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

то и произведение пределов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

Воспользуемся признаком Гаусса.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \cdot \frac{n+1}{\cos\frac{\pi}{n+1}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n+1}} + \frac{1}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$$

$$\frac{\cos \pi/n}{\cos \pi/(n+1)} = \frac{1+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\pi^2}{2}\frac{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\cos\frac{\pi}{n+1}} \simeq$$

$$\simeq 1 + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim \frac{1}{n^3}$$

Отсюда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta}{n^{1+\varepsilon}}$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, ряд расходится

$\Rightarrow$ для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абс. сх. нет.

Изучим на условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n}$

Заметим, что для $n \geq 2$: $\cos\frac{\pi}{n} \geq \cos\frac{\pi}{n+1}$, и $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \geq \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{n+1}$, и т.к. $\left|\cos\frac{\pi}{n}\right| \leq 1$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} = 0$.

Отсюда по признаку Лейбница ряд сходится.

Ответ: ряд условно сходится