gorstmaton@mail.ru

$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$

$u = \gamma$ $\qquad \Delta u = 0$

$|\nabla u| = 1$

C^2 $\qquad \Delta u = 0$ $\quad \psi \in C^\infty_0$ $\quad \int u \cdot \Delta \psi \, dx = 0$

$|\nabla u|^2$ $\quad \int H(\nabla u) \, \psi \, d_x$

Прин. максимума $\qquad$ Метод кл. Бернста.

$\xi u_t + H(x, \nabla u) = 0$
_____

$u(x, t) \to$ строит $\quad$ урав. ξ_0 Бурн.

$\dot{x}(t) = u_x(t, x(t))$

$0 = \dot{x}(t) = u_x + u_{xx} \dot{x} = u_{xt} + u_{xx} \cdot u$

$\mathsf{X}_{\text{хар.}} \quad \begin{cases} u_t + (\frac{\nabla u^2}{2})_x = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

$\qquad u_t(t,x)$ для режим.

$u_t^\varepsilon - \varepsilon u_{xx}^\varepsilon + (\frac{u_x^\varepsilon}{2})_x = 0$ $\qquad u^\varepsilon \cdot u \cdot$ реш.

$u^\varepsilon \to u$ $\qquad u_t^\varepsilon - \varepsilon u_{xx}^\varepsilon + u^\varepsilon u_x^\varepsilon = 0$

$\qquad t=0$

$\mathsf{K}_{\text{решал}} \qquad \iint \xi u^\varepsilon \varphi_t + \xi u^\varepsilon u_{xx} - \frac{u^{\varepsilon^2}}{2} \varphi_x \, dx \, dt = 0$

_____

1. ПМ

2. Метод кл. Бернста. Оцен. с пом ур Г-на мер.

3. ПБΛП и урав. Г-Л-Б.

4. Вариац реш ур Т-на урав.

5. Оср ур Бели нень Пр-п сравн Как Бернст

I ур — элемент тип

E ур — эллип центр $\quad$ реш в Дт

parabol — элемент интер — урав на Дти

элипт — эл — урав центр

_____

Пр-п максима

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k}$ $\qquad x \in \mathbb{R}^k$

Теорем. Пусть Ω — огр обл в $\mathbb{R}^k$ и $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$. Если $\Delta u \geq 0$ в Ω и $u|_{\partial\Omega} \leq 0$, то $u \leq 0$ в Ω.

Д-во: 1) $\Delta u > 0$ в Ω $\quad$

в Ω $\to$ max u в $\bar x$

$\lambda = 0$ $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(u_0) \leq 0 \quad \Delta u|_{\bar x} = \text{tr } D^2 u(u_0) \leq 0$
$C_{(\lambda S)} = 0$ внут точ

2) $\Delta u \geq 0$ $\quad v(x) = u(x) + \varepsilon(|x|^2 - C)$ $\quad C = \max x^2$
$\quad v|_{\partial\Omega} \leq 0$ a) $\Delta v \geq 2k\varepsilon > 0$ $\frac{\partial}{\partial \Omega}$

$\Rightarrow v \leq 0$ в Ω $\quad u(x) \leq \varepsilon(C - x^2)$
$\qquad \varepsilon \to 0 \quad u \leq 0$

_____

Сл 1 (Пр-п сравнения)

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ $\quad \Delta u \geq 0 \quad \Delta v \leq 0$ в Ω
$\qquad u \leq v$ на $\partial\Omega$

$\Rightarrow u \leq v$ в Ω

Д: $\Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v \geq 0$ $\quad u - v \leq 0$ на $\partial\Omega$.

$\Delta u \geq 0 \qquad$ $\qquad u^+ = 0$
$\Delta u \leq 0 \qquad$ $\qquad u^0 \leq 0 \quad$ u-бодрое

$\qquad u^0 \leq 0 \qquad u \leq 0$

_____

Сл 2 (т-ма о средн.)

1) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$
$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{\bar\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$
$\qquad \min\limits_{\bar\Omega} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$

2) $\Delta u = f \quad f$ огр в Ω
$\qquad \sup\limits_\Omega u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + C(\text{diam} \Omega) \sup\limits_\Omega |f^-|$
в случ $\sup\limits_\Omega |u| \leq \sup\limits_{\partial\Omega} |u| + C(\text{diam}\Omega) \sup\limits_\Omega |f|$

Д: 1) $\Delta(u - \max\limits_{\partial\Omega} u) = 0 \qquad u - \max\limits_{\partial\Omega} u \big| \leq 0$
$\Rightarrow u - \max\limits_{\partial\Omega} u \leq 0 \Rightarrow \max\limits_{\bar\Omega} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u$ в Ω
$u \to -u$ в случ сим для min

2) $\Delta u = f$
$v(x) = u(x) - \max\limits_{\partial\Omega} u^+ + C(x^2 - \max\limits_{\bar\Omega} x^2)$
$\Delta v = \Delta u + 2C = f + 2C \geq 0 \quad C = \sup\limits_{\partial\Omega}|f^-|$
$v \leq 0$ на $\partial\Omega$
$T.4 \Rightarrow u(x) \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + C(\Omega)\sup\limits_\Omega|f^-|$

_____

Метод Бернстейна $\qquad \Delta u = 0 \qquad$ (Дж: $\Delta u = f$.)

 $\qquad \max\limits_{B_{r}} |\nabla u| \leq C(\varepsilon, R) \max\limits_{B_R} |u|$

ψ $\|v(x) = \psi^2 \sum\limits_{i=1}^k (u_{x_i})^2 + \boxed{\lambda u^4}$
$\qquad \lambda > 0 -$ выбир позд

$\Delta v \quad v_{x_j} = 2\psi \psi_j |\nabla u|^2 + 2\psi^2 \sum u_{x_i} u_{x_i x_j} + 4\lambda u^3 u_{x_j}$

$v_{x_j x_j} = 2\psi_j^2 |\nabla u|^2 + 2\psi \psi_{jj}|\nabla u|^2 + 4\psi \psi_j \sum u_{x_i} u_{x_i x_j} + 4\psi \psi_j \sum u_{x_i} u_{x_i x_j}$
$\qquad + 4\psi \psi_j \sum u_{x_i} u_{x_i x_j} + 2\psi^2 \sum u_{x_i x_j}^2 + 2\psi^2 \sum u_{x_i} u_{x_i x_j x_j}$
$\qquad + 2\lambda u^2 u_{x_j}^2 + 2\lambda u^3 u_{x_j x_j} \qquad |\nabla u|^2$

$\Delta v \geq 2|\nabla \psi|^2 |\nabla u|^2 - 2\psi|\Delta \psi||\nabla u|^2 = 4\psi|\nabla \psi||\nabla u||\nabla u|$
$\qquad - 4\psi|\nabla\psi||\nabla u||\nabla u| + 2\psi^2 |\nabla^2 u|^2 + 2\lambda|\nabla u|^2 =$
$\leq (2|\nabla\psi|^2 - 2\psi|\Delta\psi| + 2\lambda)|\nabla u|^2 + 2\psi^2|\nabla^2 u|^2$
$\qquad$ $- 8\psi|\nabla\psi||\nabla u||\nabla^2 u|$ $\geq$

$a \cdot b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ $\qquad a = 8\psi|\nabla\psi||\nabla u|$
$\qquad b = \psi|\nabla^2 u|$
$\boxed{\text{-}\frac{8^2|\nabla\psi|^2}{2}} \geq 2(|\nabla\psi|^2 - 2\psi|\Delta\psi| + 2\lambda)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\psi^2|\nabla^2 u|^2$

$\geq$ $\underbrace{\quad}_{0}$ в B_R

$\Delta v \geq 0$ в B_R $\quad v|_{\partial B_R} = \lambda u^4$

$v(x) \leq \max\limits_{\partial B_R} \lambda u^4 \leq \lambda(\max\limits_{B_R}|u|)^2$

$\|\psi^2|\nabla u|^2 + \lambda u^4 \leq \lambda(\max\limits_{B_R}|u|)^4$

$\psi \leq 1$ в B_R в B_r $|\nabla u| \leq \sqrt{\lambda}\max\limits_{B_R}|u|$

_____

Сл: Ω — обл в $\mathbb{R}^k$, $M > 0$
$G = \{u \in C^2(\Omega): \Delta u = 0$ в Ω и $|u| \leq M$ в $\Omega\}$
Тогда G равностеп непрер $\overline{B} \subset \Omega$. след
всякая пос-ть из $u \in C(\overline{B})$. $(\lambda u_n \to \lambda u)$

Д: из Арц-ла 1) пр-в в 2) равном сход
$\quad C(\varepsilon) \geq \frac{2}{\varepsilon} -$ диам пр-ля гладк Γ-функ и
$\qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in F \, \forall x \in K$
$K \quad |x| \leq M \qquad x, y \in \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon$
$\forall x, t, u. \quad |x| \leq M$

 $\max\limits_{\bar\Omega}|\nabla u| \leq C\max\limits_\Omega|u| \leq C\cdot M$
$\qquad |u(x) - u(y)| \leq CM|x - y|$
$u(x) - u(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(y + t(x-y))dt = \int_0^1 \nabla u(y + t(x-y))\cdot(x-y)dt$

_____

Сл: $\begin{cases} \Delta u = P & B \\ u|_{\partial B} = G \end{cases}$ $\quad B$-шар $= \{x: |x| < 1\}$
$\qquad P, G$-гладк.

Тогда Дирихле имеет един решение.

Д: $P[x]$ — мн-ны степ $\leq n$
$\qquad -$ шар $q \in$

$\begin{cases} \Delta u = P & B \\ u|_{\partial B} = 0 \end{cases}$ $\qquad A: P_n \to P_n$
$\qquad \Delta u = \Delta((1 - |x|^2)v(x))$
$\qquad \ker A = \{u: \Delta u = 0\} \quad \Delta($