Задача. Требуется рассчитать конвективное движение жидкости в полости квадратного сечения при подогреве сбоку. Для этого следует совместно решить систему ДУЧП из уравнений Навье - Стокса в переменных "функция тока - вихрь скорости"и уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial \omega}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + G\dfrac{\partial T}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = k \left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial y} + \dfrac{q(x,y)}{\rho c}, \\ \omega = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \end{cases} \tag{1}$$

Краевые условия возьмем нулевыми на границе $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$T|_{\partial\Omega} = \omega|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega} = 0$$

В начальный момент времени $t = 0$ зададим $T^0(x,y), \omega^0(x,y), \psi^0(x,y)$.

Возьмем равномерную сетку, $h_x = 1/M_x, h_y = 1/M_y, \tau = 1/N$:

$$D = \{x_m = mh_x;\ m = \overline{0, M_x}\} \times \{y_m = mh_y;\ m = \overline{0, M_y}\} \times \{t_n = n\tau;\ n = \overline{0, N}\}$$

Рассмотрим разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^n}{\tau} = \nu \left(\dfrac{\omega_{i+1j}^{n+1} - 2\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2} + \dfrac{\omega_{ij+1}^{n+1} - 2\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) - \\ - \dfrac{\omega_{i+1j}^n - \omega_{i-1j}^n}{2h_x} \cdot \dfrac{\psi_{ij+1}^n - \psi_{ij-1}^n}{2h_y} + \dfrac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij-1}^n}{2h_y} \cdot \dfrac{\psi_{i+1j}^n - \psi_{i-1j}^n}{2h_x} + G\dfrac{T_{i+1j}^{n+1} - T_{i-1j}^{n+1}}{2h_x}, \\ \dfrac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\tau} = k \left(\dfrac{T_{i+1j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2} + \dfrac{T_{ij+1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) - \\ - \dfrac{T_{i+1j}^n - T_{i-1j}^n}{2h_x} \cdot \dfrac{\psi_{ij+1}^n - \psi_{ij-1}^n}{2h_y} + \dfrac{T_{ij+1}^n - T_{ij-1}^n}{2h_y} \cdot \dfrac{\psi_{i+1j}^n - \psi_{i-1j}^n}{2h_x} + \dfrac{q_{ij}}{\rho c}, \\ \omega_{ij}^{n+1} = \dfrac{\psi_{i+1j}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2} + \dfrac{\psi_{ij+1}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2}. \\ T_{0j}^n = T_{M_xj}^n = 0, T_{i0}^n = T_{iM_y}^n = 0, T_{ij}^0 = T^0(x_i, y_j), i = \overline{0, M_x}, j = \overline{0, M_y}. \\ \omega_{0j}^n = \omega_{M_xj}^n = 0, \omega_{i0}^n = \omega_{iM_y}^n = 0, \omega_{ij}^0 = \omega^0(x_i, y_j), i = \overline{0, M_x}, j = \overline{0, M_y}. \\ \psi_{0j}^n = \psi_{M_xj}^n = 0, \psi_{i0}^n = \psi_{iM_y}^n = 0, \psi_{ij}^0 = \psi^0(x_i, y_j), i = \overline{0, M_x}, j = \overline{0, M_y}. \end{cases} \tag{2}$$

Именно такую схему мы рассматриваем по нескольким причинам:

1) Все операторы Лапласа мы берем на $n+1$ слое для достижения устойчивости, так как известно, что для лучшей устойчивости стоит брать максимально неявную схему.

2) Всевозможные смешанные частные производные по x и по y берем на n слое для реализуемости вычислений, иначе настолько сильно неявную схему мы обсчитать не сможем, а так мы в процессе вычисления нового слоя будем использовать их все просто как некую уже посчитанную функцию.

3) Однако $G\dfrac{\partial T}{\partial x}$ мы берем $n+1$ слое, так как сначала будем считать T

Теорема 1. *Эта разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу на решении с порядком* $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$.

Доказательство. Чтобы не загромождать выкладки рассмаотрим отдельно порядки аппроксимации для отдельных кусков уравнения.

1) Для первого уравнения имеем:

а) $\dfrac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n}}{\tau}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ с порядком $O(\tau)$.

б) $\dfrac{\omega_{i+1j}^{n+1} - 2\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ с порядком $O(h_x^2)$.

в) $\dfrac{\omega_{ij+1}^{n+1} - 2\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$ с порядком $O(h_y^2)$

г) $\dfrac{\omega_{i+1j}^{n} - \omega_{i-1j}^{n}}{2h_x} \cdot \dfrac{\psi_{ij+1}^{n} - \psi_{ij-1}^{n}}{2h_y}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ с порядком $O(h_x^2 + h_y^2)$

Доказательство. Подставив разложение Тейлора в схему получаем:

$(\omega_x'(t_n, x_i, y_j) + O(h_x^2))(\psi_y'(t_n, x_i, y_j) + O(h_y^2))$, то есть получили аппроксимацию с порядком $O(h_x^2) + O(h_y^2) + O(h_x^2 h_y^2) = O(h_x^2 + h_y^2)$ □

д) $\dfrac{\omega_{ij+1}^{n} - \omega_{ij-1}^{n}}{2h_y} \cdot \dfrac{\psi_{i+1j}^{n} - \psi_{i-1j}^{n}}{2h_x}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ с порядком $O(h_x^2 + h_y^2)$.

е) $\dfrac{T_{i+1j}^{n+1} - T_{i-1j}^{n+1}}{2h_x}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ с порядком $O(h_x^2)$.

Суммируем все и получаем $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$.

2) Второе уравнение аналогично получаем $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$.

3) Для третьего уравнения имеем:

а) $\dfrac{\psi_{i+1j}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ с порядком $O(h_x^2)$.

б) $\dfrac{\psi_{ij+1}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2}$ аппроксимирует $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ с порядком $O(h_y^2)$

Суммируем все и получаем $O(h_x^2 + h_y^2)$.

4) Для всех краевых условий получаем или $O(h_x^2)$ или $O(h_y^2)$.

Итого во всей задаче получаем $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. □

Воспользуемся методом Фурье.
Скалярное произведение:

$$\langle f_h, g_h \rangle = \sum_{i=1}^{M_x-1} \sum_{j=1}^{M_y-1} f_{ij} g_{ij}.$$

Базисные функции:

$$g^{ml}(x,y) = sin(\pi m x) sin(\pi l y), m, l = 1, \ldots, M-1$$

Эти базисные функции являются собственными у оператора Лапласа:

$$\Delta u = -\left(\frac{u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right)$$

Собственные значения:

$$\lambda_x^{(m)} + \lambda_y^{(l)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi m h_x}{2} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi l h_y}{2}$$

И первое и второе уравнение имеют общий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f'(x,y)$$

Так можно сделать для обоих уравнений, потому что как я упоминал выше, для уравнений для T мы можем все из n слоя рассматривать как нечто известное, вот это все мы положим в f', а в уравнениях для ω, T из $n+1$ слоя мы посчитаем сначала и будем уже знать, поэтому тоже можем положить в f'. Считаем, что f' - это просто некая функция, зависящая от x, y, которую мы просто знаем на момент обсчета нового шага, не будет обращать внимание на ее зависимость от времени.

Для такого уравнения имеем схему:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}}{\tau} = a \left(\frac{u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) + f'_{ij}$$

Перепишем в другом виде, оставив все касательно $n+1$ слоя слева, а все из n слоя отнесем вправо и обозначим по аналогичным рассуждениям за f

$$\frac{u_{ij}^{n+1}}{\tau} - a \left(\frac{u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) = \frac{u_{ij}^{n}}{\tau} + f'_{ij} = f_{ij}$$

Разложим u_{ij}^{n+1} по базису g^{ml}:

$$u_{ij}^{n+1} = \sum_{m=1}^{M_x-1} \sum_{l=1}^{M_y-1} c_{ml} \cdot sin(\pi m i h_x) sin(\pi l j h_y)$$

После подстановки в схему получим:

$$\sum_{m=1}^{M_x-1} \sum_{l=1}^{M_y-1} c_{ml}(\frac{1}{\tau} + a(\lambda_x^{(m)} + \lambda_y^{(l)})) \cdot sin(\pi m i h_x) sin(\pi l j h_y) = f_{ij}.$$

Теперь умножаем полученное u^{n+1} скалярно на g^{ml}, получаем:

$$c_{ml}(\frac{1}{\tau} + a(\lambda_x^{(m)} + \lambda_y^{(l)})) \cdot \langle g^{ml}, g^{ml} \rangle = \langle f, g^{ml} \rangle,$$

откуда мы выражаем c_{ml}:

$$c_{mk} = \frac{1}{\frac{1}{\tau} + a(\lambda_x^{(m)} + \lambda_y^{(l)})} \cdot \frac{\langle f, g^{ml} \rangle}{\langle g^{ml}, g^{ml} \rangle}.$$

Теперь мы можем посчитать по изначальной формуле u_{ij}^{n+1}.

Таким образом, алгоримт следующий: из T получаем T^{n+1} по этим формулам, потом используя это из ω получаем ω^{n+1}, после чего по аналогичным формулам, только без $\frac{1}{\tau}$, считаем ψ^{n+1}.