ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

РЫНОЧНЫЙ ИМПАКТ И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛНЕНИЯ

Выполнил студент 609 группы

Колосов Евгений Александрович

подпись студента

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Кабанов Юрий Михайлович

подпись научного руководителя

Москва
2022 год

Содержание

Аннотация

В данной работе рассматривается задача оптимального ликвидирования портфеля (возможно, многомерного - состоящего из корзины торгуемых активов) за конечный дискретный временной промежуток. Оптимальность в данной работе рассматривается с точки зрения максимизации ожидаемой полезности в классе допустимых согласованных стратегий. Предполагается, что функцией полезности является функция полезности типа CARA. Основным результатом является утверждение о том, что в дискретном времени в достаточно широком классе моделей рыночного импакта сужение класса стратегий до детерминированных не приносит дополнительных издержек, то есть супремум по классу детерминированных стратегий совпадает с супремумом по классу согласованных допустимых стратегий. Приведены примеры нахождения оптимальных стратегий в различных моделях рыночного импакта. Во второй части работы показано как из данного факта предельным переходом получается аналогичный результат в непрерывном времени, рассмотренный в статье Schied, Schöneborn, Tehranchi [1].

Введение

Задача оптимального исполнения позиций на бирже является распространенной задачей финансовой математики. Данные позиции могут составлять большую часть дневного торгуемого объема, и их моментальное закрытие может оказать существенное влияние на итоговую цену исполнения. Суммарные издержки ликвидации портфеля могут быть значительно снижены за счет разбития одного ордера на ряд маленьких ордеров, распределенных во времени [1]. Таким образом, актуальным вопросом является поиск оптимальной стратегии ликвидации портфеля с целью минимизации ожидаемых издержек за исполнение данной стратегии. Для её формализации необходимо ввести торговую модель рынка, критерии оптимальности и сформулировать задачу оптимизации. Решение задачи и оптимальная стратегия будет существенно зависеть от рассматриваемой модели рынка и также критерия оптимальности. Данная задача была рассмотрена многими авторами, в том числе Schied, Schöneborn, Tehranchi [1], Almgren, Chriss [2-3], Gatheral [4], Obizhaeva, Wang [5], Alfonsi, Fruth, Schied [6], Almgren, Lorenz [7].

Одной из самых распространенных моделей рыночного импакта является модель, предложенная Almgren, Chriss в работах [2-3]. В указанных работах была рассмотрена следующая модель: базовая цена актива без вмешательства крупного трейдера рассматривалась как случайное блуждание, а рыночный импакт раскладывался на две составляющие - линейную (постоянный импакт) и мгновенный импакт (возможно, нелинейный). В этих работах были рассмотрены два типа задач оптимизации — задача минимизации математического ожидания издержек и задача средне-квадратической оптимизации издержек в классе детерминированных стратегий. Almgren, Lorenz [7] показали, что в данной модели в задаче средне-квадратичной оптимизации сужение класса стратегий до детерминированных ухудшает итоговый результат, то есть решение задачи оптимизации в данной постановке не находится в классе детерминированных стратегий.

В данной работе время предполагается дискретным, рассматривается общая модель рыночного импакта, а цена актива, не подверженного вмешательству крупного трейдера, предполагается имеющей независимые (при этом необязательно одинаково распределенные) приращения. В качестве оптимизационной задачи ставится задача максимизации ожидаемой функции полезности типа CARA. Аналогичная постановка задачи в непрерывном времени была рассмотрена статье Schied, Schöneborn, Tehranchi [1], где цена актива предполагалась процессом Леви, траектории управления рассматривались абсолютно непрерывными, и где было доказано, что в данной постановке решение задачи оптимального исполнения можно найти в классе детерминированных стратегий. В настоящей работе для общей модели рыночного импакта с дискретным временем доказан аналогичный результат про оптимальность детерминированных стратегий. В секции 4 показывается, как предельным переходом из результата в дискретном времени следует аналогичный результат в модели с непрерывным временем.

Опишем план работы:

1. Описание модели рынка, постановка задачи оптимизации и обзор основных результатов.

2. Доказательство основной теоремы об оптимальности.

3. Примеры оптимальных стратегий для различных моделей рыночного импакта.

4. Предельный переход к непрерывному времени, изучение оптимальности детерминированных стратегий в моделях с непрерывным временем.

1 Модель рынка

В данном параграфе вводится определение торговой стратегии и описывается динамика цен. Дается определение издержек на ликвидацию портфеля, ставится задача оптимизации торговой стратегии и формулируются основные результаты.

Повсюду в данной секции мы следуем интерпретации, предложенной в работах [1-3].

1.1 Торговые стратегии и понятие рыночного импакта

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $(\mathbb{F}_k)_{k=0,1,...,T}$.

Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы два d-мерных согласованных процесса динамики цен активов: $S = (S_t)_{t=0}^T$ — цена, неподверженная действиям трейдера и $\hat{S} = (\hat{S}_t)_{t=0}^T$ — цена, сформированная под влиянием действий трейдера.

Определим процесс рыночного импакта $I = (I_t)_{t=0}^T$ соотношением

$$\hat{S}_t = S_t + I_t.$$

Таким образом, процесс S моделирует цену, которая была бы доступна некрупному инвестору при условии, что крупный трейдер не торговал, а рыночный импакт I моделирует дополнительные издержки, которые несет крупный трейдер при ликвидировании своих активов.

Задача трейдера - закрыть позицию $x \in \mathbb{R}^d$ к моменту времени T.

Интерпретация:

$$\text{Если } x_i > 0, \text{ то продать } |x_i| \text{ единиц } i\text{-го актива;}$$

$$\text{Если } x_i < 0, \text{ то купить } |x_i| \text{ единиц i-го актива.}$$

Предполагаем, что торги идут в моменты времени $t = 0, ..., T$.
Определим множество допустимых торговых стратегий как множество $\mathbb{A}(x)$:

$$\mathbb{A}(x) = \{X_t \in \mathbb{F}_t, t \in \{-1, ..., T\}; X_{-1} := x, X_T = 0\}, \tag{1}$$

где $X_t \in \mathbb{R}^d$ мы интерпретируем как содержимое портфеля трейдера сразу после проведения торгов в момент времени t, а $X_{-1} = x$ - исходная позиция.

Для произвольного подмножества $\Delta \subset \mathbb{R}^{T\times d}$ определим

$$\mathbb{A}_\Delta(x) = \{X \in \mathbb{A}(x) : (X_0, ..., X_{T-1}) \in \Delta\}. \tag{2}$$

Процессу $X \in \mathbb{A}(x)$ сопоставим процесс $\xi_t = \Delta X_t$, где ξ_t будем понимать как размер сделки в момент времени t и будем называть его набором приказов.

Величины компонент процесса ξ будем интерпретировать следующим образом:

$$\xi_t^j = \Delta X_t^j = X_t^j - X_{t-1}^j > 0,$$

значит в момент времени t мы купили $|\xi_t^j|$ единиц j-го актива.

$$\xi_t^j = \Delta X_t^j = X_t^j - X_{t-1}^j < 0,$$

значит в момент времени t мы продали $|\xi_t^j|$ единиц j-го актива.

Естественное ограничение, накладываемое на процесс ξ - линейное условие:

$$\sum_{t=0}^{T} \xi_t = -x. \tag{3}$$

Связь между процессами X_t и ξ_t, очевидно, следующая:

$$X_t = x + \sum_{k=0}^{t} \xi_k, \quad t \in \{-1, 0, ..., T\}; \tag{4}$$

$$\xi_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}, \quad t \in \{0, 1, ..., T\}. \tag{5}$$

(Суммирование по пустому множеству индексов полагаем равным нулю.)

Таким образом, любую торговую стратегию можно задавать как процесс, описывающий траекторию динамики портфеля, так и как набор приказов ξ_t с линейным ограничением.

Важным классом допустимых торговых стратегий является класс детерминированных торговых стратегий $\mathbb{A}_{det}(x)$:

$$\mathbb{A}_{det}(x) = \left\{X \in \mathbb{A}(x) : \{\Delta X_t\}_{t=0}^{T} \subset \mathbb{R}^d\right\}. \tag{6}$$

Для произвольного подмножества $\Delta \subset \mathbb{R}^{T\times d}$ определим

$$\mathbb{A}_{\Delta det}(x) = \mathbb{A}_{det}(x) \cap \mathbb{A}_\Delta(x). \tag{7}$$

1.2 Стоимость исполнения

Доходность трейдера от закрытия позиции x при использовании стратегии X обозначим как $\mathcal{R}_X^T$:

$$\mathcal{R}_X^T := -\sum_{t=0}^{T} \xi_t \cdot \hat{S}_t = -\sum_{t=0}^{T} \xi_t \cdot S_t - \sum_{t=0}^{T} \xi_t \cdot I_t$$
$$= -\sum_{t=0}^{T} \Delta X_t \cdot S_t - \sum_{t=0}^{T} \Delta X_t \cdot I_t.$$

Преобразуем первое слагаемое в данной сумме:

$$\sum_{t=0}^{T} \Delta X_t \cdot S_t = -x \cdot S_0 - \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_X^T = x \cdot S_0 + \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} - \underbrace{\sum_{t=0}^{T} \Delta X_t \cdot I_t}_{C}. \tag{8}$$

Слагаемое $x \cdot S_0$ - номинальная стоимость портфеля x в начальный момент времени, то есть стоимость данного портфеля в момент времени $t = 0$ при условии отсутствия ограничения на ликвидность. Второе слагаемое $\sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1}$ соответствует риску волатильности, то есть изменению стоимости портфеля, связанному со стохастической динамикой цены за время исполнения стратегии X. Третье слагаемое $C := \sum_{t=0}^{T} \Delta X_t \cdot I_t$ соответствует расходам на исполнение, возникающим из-за влияния рыночного импакта.

1.3 Технические предположения

Первое предположение будет касаться процесса рыночного импакта I_t. В большинстве моделей воздействия на рынок, представленных в современной литературе, процесс I_t является функционалом от торговой стратегии X вплоть до момента t. В таком случае, расходы на исполнение в формуле (8), заданные формулой $C := \sum_{t=0}^{T} \Delta X_t \cdot I_t$, будут также являться функционалом от стратегии. Сформулируем это:

Предположение 1 *Существует функционал $F : \mathbb{A}_{det}(x) \to \mathbb{R}$ такой, что расходы на исполнение в формуле (8) могут быть представлены в виде*

$$C(\omega) = F(X(\omega)).$$

В рамках предположения 1, формула (8) может быть переписана в виде:

$$\mathcal{R}_X^T = x \cdot S_0 + \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} - F(X). \tag{9}$$

Модели импакта такого типа рассматривались, например, в работах Almgren, Chriss [2-3], Schied, Schöneborn, Tehranchi [1], Gatheral [4], Obizhaeva, Wang [5], Alfonsi, Schied [6], Alfonsi, Klöck, Schied [8]. Рассмотрим два примера подобных моделей.

Пример 1.1 Простейшим примером можно считать пример линейного рыночного импакта, разделенного на постоянный и временный, который рассматривался, например, в работе [2]. В одномерном случае данный процесс имеет вид:

$$I_t = \lambda \sum_{k=0}^{t-1} \xi_k + \frac{\lambda + \gamma}{2} \xi_t, \tag{10}$$

где $\lambda \geq 0, \gamma > 0$ - параметры, моделирующие неликвидность. Сумму по пустому множеству индексов считаем равной нулю. Такому процессу I_t соответствует функционал

$$F(X) = \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\gamma}{2} \sum_{t=0}^{T} \xi_t^2$$

Действительно,

$$F(X) = \sum_{t=0}^{T} \xi_t I_t = \sum_{t=0}^{T} \xi_t \left(\lambda \sum_{k=0}^{t-1} \xi_k + \frac{\lambda + \gamma}{2} \xi_t \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left((\xi_0 + \ldots + \xi_T)^2 - \sum_{t=0}^{T} \xi_t^2 \right) + \frac{\lambda + \gamma}{2} \sum_{t=0}^{T} \xi_t^2$$

$$= \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\gamma}{2} \sum_{t=0}^{T} \xi_t^2.$$

Пример 1.2 В качестве обобщения модели из примера 1.1 можно привести дискретный аналог непрерывной модели, рассмотренной в работе [1]. Положим $I_t = I_t^{perm} + I_t^{temp}$, где

$$I_t^{perm} = \Gamma(X_{t-1} - X_0), \tag{11}$$

где Γ - симметричная матрица и $\Gamma \geq 0$. Временный импакт представлен как

$$I_t^{temp} = h(\xi_t) + \frac{1}{2}\Gamma\xi_t, \tag{12}$$

где $f(y) := y \cdot h(y)$ - неотрицательная строго выпуклая функция.

Такому процессу I_t соответствует функционал

$$F(X) = \frac{1}{2}x^T\Gamma x + \sum_{t=0}^{T} f(\xi_t).$$

Второе предположение будет касаться процесса S, который соответствует динамике цены актива, неподверженной воздействию трейдера, реализующего стратегию X. От данного процесса будем требовать независимость приращений и условие на существование экспоненциальных моментов. Сформулируем это в виде предположения 2.

Предположение 2 *Пусть S - d-мерный согласованный процесс с независимыми приращениями:*

$$\Delta S_t = S_t - S_{t-1} = \delta_t, \quad t \in 1, 2, .., T, \qquad (13),$$

где приращения $\delta_t \in \mathbb{F}_t, \delta_t$ не зависит от $\mathbb{F}_{t-1}$ и

$$E\left[e^{x\cdot\delta_t}\right] < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{14}$$

Заметим, что в предположении 2 нет требований на одинаковую распределенность случайных величин δ_t - лишь условие на независимость от $\mathbb{F}_{t-1}$.

Частным случаем такой модели, например, является дискретный аналог модели Башелье:

$$\Delta S_t = \mu_t + \sigma_t\delta_t,$$

где $\mu_t \in \mathbb{R}^d$, σ_t - матрица $d \times d$, δ_t - независимые d - мерные гауссовские вектора с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций.

1.4 Задача оптимального исполнения

Определим величину $\mathcal{C}(X) := -\mathcal{R}_X^T$.

В данной работе мы будем рассматривать задачу максимизации ожидаемой CARA полезности величины $\mathcal{R}_X^T$:

$$Eu(\mathcal{R}_X^T) \to \sup_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)}, \tag{15}$$

где

$$u(x) = -e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0.$$

Таким образом, задача оптимизации (15) эквивалентна следующей:

$$Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)} \to \inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)}. \tag{16}$$

По определению,

$$\mathcal{C}(X) = -x \cdot S_0 - \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} + F(X).$$

Первое слагаемое $-x \cdot S_0$ не зависит от стратегии, поэтому задача (16) эквивалентна следующей оптимизационной задаче:

$$E \exp\left\{-\alpha \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} + \alpha F(X)\right\} \longrightarrow \inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)}. \tag{17}$$

Сформулируем основной результат данной работы в следующей теореме:

Теорема 1 *В рамках предположений секции 1.3*

$$\inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)} = \inf_{X \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)},$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}^{T \times d}$.

В частности, если существует оптимальная детерминированная стратегия $X^* \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)$ для задачи (15), то она является также оптимальной в классе всех допустимых стратегий $\mathbb{A}_\Delta(x)$.

2 Доказательство теоремы об оптимальности детерминированных стратегий

Теорема 1 утверждает, что в рамках предположений секции 1.3 задача (16) обладает следующим свойством:

$$\inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)} E e^{\alpha \mathcal{C}(X)} = \inf_{X \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)} E e^{\alpha \mathcal{C}(X)},$$

где

$$\mathcal{C}(X) = -x \cdot S_0 - \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} + F(X),$$

$$E e^{\alpha \mathcal{C}(X)} = e^{-\alpha x \cdot S_0} E \exp \left\{ -\alpha \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} + \alpha F(X) \right\}.$$

Поэтому достаточно показать результат об оптимальности детерминированных стратегий для задачи (17):

$$E \exp \left\{ -\alpha \sum_{t=0}^{T-1} X_t \cdot \Delta S_{t+1} + \alpha F(X) \right\} \longrightarrow \inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)}.$$

Для удобства введём обозначение:

$$M_t^X := -\sum_{k=1}^{t} X_{k-1} \cdot \Delta S_k, \quad M_0^X := 0. \tag{18}$$

Таким образом, нам нужно доказать:

$$\inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)} E e^{\alpha M_T^X + \alpha F(X)} = \inf_{X \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)} E e^{\alpha M_T^X + \alpha F(X)}.$$

Разобьём доказательство на два шага.

Шаг 1

Первый шаг доказательства заключается в следующем — попробуем найти вероятностную меру Q такую, чтоб было выполнено:

$$E e^{\alpha M_T^X + \alpha F(X)} = E^Q e^{G(X) + \alpha F(X)},$$

где $G(X)$ был бы произвольным функционалом от траектории стратегии, то есть

$$G(\cdot) : \mathbb{A}_{det}(x) \to \mathbb{R}. \tag{19}$$

Попробуем найти такую вероятностную меру и функционал $G(\cdot)$, что:

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\alpha M_T^X} - G(X). \tag{20}$$

Для начала рассмотрим задачу нахождения процесса плотности

$$Z_t := e^{\alpha M_t^X} + A_t, \tag{21}$$

с требованием, чтобы Z_t был мартингалом, а A_t - предсказуемым процессом с $A_0 = 0$. Тогда:

$$E\left[Z_t - Z_{t-1}|\mathbb{F}_{t-1}\right] = 0$$
$$= e^{(\alpha M_{t-1} + A_{t-1})} E\left[e^{\alpha \Delta M_t^X + \Delta A_t} - 1\Big|\mathbb{F}_{t-1}\right].$$

Нетрудно заметить, что данное условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$E\left[e^{\alpha \Delta M_t^X + \Delta A_t} - 1\Big|\mathbb{F}_{t-1}\right] = 0,$$

что эквивалентно

$$E\left[e^{\alpha \Delta M_t^X + \Delta A_t}\Big|\mathbb{F}_{t-1}\right] = 1.$$

Таким образом, в силу предсказуемости процесса A_t,

$$e^{\Delta A_t} E\left[e^{\alpha \Delta M_t^X}\Big|\mathbb{F}_{t-1}\right] = 1,$$

или

$$e^{-\Delta A_t} = E\left[e^{\alpha \Delta M_t^X}\Big|\mathbb{F}_{t-1}\right] = E\left[e^{-\alpha X_{t-1}\cdot \Delta S_t}\Big|\mathbb{F}_{t-1}\right]. \tag{22}$$

Введём обозначения:

$$h_k(y) := E e^{-\alpha y \cdot \delta_k}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \tag{23}$$

$$l_k(y) := \log(h_k(y)). \tag{24}$$

В силу наших предположений, приращения $\Delta S_t = \delta_t$ не зависят от $\mathbb{F}_{t-1}$. Тогда, в новых обозначениях формулу (22) можно переписать следующим образом:

$$e^{-\Delta A_t} = h_t(X_{t-1}), \tag{25}$$

или

$$\Delta A_t = -l_t(X_{t-1}), \quad t = 1, ..., T. \tag{26}$$

Окончательно,

$$A_t = -\sum_{k=1}^{t} l_k(X_{k-1}). \tag{27}$$

Сформулируем только что доказанное утверждение.

Утверждение 1 *В указанных выше обозначениях процесс*

$$Z_t := e^{\alpha M_t^X + A_t}$$

— мартингал, где процесс A_t задается формулой (27).

Таким образом, Z_T является производной Радона-Никодима и задает вероятностную меру Q - такую, чтобы

$$\frac{dQ}{dP} = Z_T = e^{\alpha M_T^X - G(X)}, \tag{28}$$

где

$$G(X) = \sum_{k=1}^{T} l_k(X_{k-1}). \tag{29}$$

что и решает задачу (21).

Таким образом, мы получаем:

$$Ee^{\alpha M_T^X + \alpha F(X)} = E^Q e^{G(X) + \alpha F(X)}, \tag{30}$$

где F, G - детерминированные функционалы от торговой траектории.

Шаг 2

Докажем теперь утверждение теоремы 1.

Введем величину

$$M = \inf_{X \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)} \left\{ G(X) + \alpha F(X) \right\}. \tag{31}$$

Если $M = -\infty$, то утверждение тривиально.
В ином случае выберем $\epsilon > 0$ и детерминированную ϵ-оптимальную стратегию $X_\epsilon \in \mathbb{A}_{det}(x)$, то есть такую стратегию, что

$$G(X_\epsilon) + \alpha F(X_\epsilon) - \epsilon \leq M.$$

Тогда, взяв произвольную стратегию $X \in \mathbb{A}(x)$, мы получаем, что

$$Ee^{\alpha M_T^X + \alpha F(X)} = E^Q e^{G(X) + \alpha F(X)} \geq e^{-\epsilon} Ee^{\alpha M_T^{X_\epsilon} + \alpha F(X_\epsilon)}.$$

В результате мы получаем цепочку неравенств:

$$\inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)} \geq e^{-\epsilon} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X_\epsilon)} \geq e^{-\epsilon} \inf_{X \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)}.$$

Переходя к пределу при $\epsilon \downarrow 0$, получаем:

$$\inf_{X \in \mathbb{A}_\Delta(x)} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)} = \inf_{X \in \mathbb{A}_{\Delta det}(x)} Ee^{\alpha \mathcal{C}(X)}.$$

Теорема доказана.

3 Примеры оптимальных стратегий

В данном параграфе будет показано как находить оптимальные стратегии в предположениях раздела 1.3, а также приведены примеры поиска оптимальных стратегий в различных моделях рыночного импакта.

Из теоремы 1 следует, что задачу оптимизации торговой стратегии в условиях раздела 1 достаточно рассматривать в классе детерминированных стратегий. Заметим, что из формулы (30) следует, что в случае, когда стратегия X детерминирована, то основная задача оптимизации сводится к минимизации функционала

$$e^{G(X) + \alpha F(X)} \longrightarrow \inf_{X \in \mathbb{A}_{det}}, \tag{32}$$

или, что эквивалентно, к задаче

$$G(X) + \alpha F(X) \longrightarrow \inf_{X \in \mathbb{A}_{det}}, \tag{33}$$

где $G(X)$ определяется формулой (29).

Пример 3.1 Рассмотрим линейный пример в одномерной модели Almgren and Criss [2].

Пусть процесс импакта I_t задан как

$$I_t = \lambda \sum_{k=0}^{t-1} \xi_k + \frac{\lambda + \gamma}{2} \xi_t, \tag{34}$$

где $\lambda \geq 0, \gamma > 0$ - параметры, моделирующие неликвидность. Сумму по пустому множеству индексов считаем равной нулю. Пусть процесс цены задан одномерной моделью Башелье:

$$\Delta S_t = \sigma \cdot \delta_t, \quad \delta_t \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ - н.о.р.с.в. }, \sigma > 0. \tag{35}$$

Нетрудно убедиться, что функционалы $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ в данной постановке имеют вид:

$$F(X) = \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\gamma}{2} \sum_{t=0}^{T} \xi_t^2, \tag{36}$$

$$G(X) = \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} \sum_{t=0}^{T-1} X_t^2. \tag{37}$$

Таким образом, задача (32) сводится к задаче

$$\frac{\gamma}{2}\sum_{t=0}^{T}(X_t - X_{t-1})^2 + \frac{\sigma^2\alpha}{2}\sum_{t=0}^{T-1}X_t^2 \longrightarrow \inf_{X\in\mathbb{A}_{det}}. \tag{38}$$

что эквивалентно задаче

$$R(X) := \sum_{t=0}^{T}(X_t - X_{t-1})^2 + \nu\sum_{t=0}^{T-1}X_t^2 \longrightarrow \inf_{X\in R^T}, \tag{39}$$

где $\nu := \dfrac{\alpha\sigma^2}{\gamma} > 0, \quad X := (X_0, ..., X_{T-1}) \in \mathbb{R}^T, \quad X_{-1} = x, X_T = 0.$

Тогда, для $k \in \{0, ..., T-1\}$:

$$\frac{\partial R(X)}{\partial X_k} = 2\left(X_{k+1} - (2+\nu)X_k + X_{k-1}\right).$$

Получаем разностное уравнение

$$X_{k+1} - (2+\nu)X_k + X_{k-1} = 0, \quad k \in \{0, ..., T-1\} \tag{40}$$

с граничными условиями

$$X_{-1} = x, \quad X_T = 0. \tag{41}$$

Таким образом, в данной модели задача была сведена к разностному уравнению - такому же, как в задаче среднеквадратичной оптимизации в работе [2].

Утверждение [2] Решение задачи (39) имеет вид

$$X_k = \frac{x\sinh\left(\varkappa(T-k)\right)}{\sinh\left(\varkappa(T+1)\right)}, \quad k \in \{-1, 0, ..., T\}, \tag{42}$$

где $\varkappa$ задаётся условием

$$e^{\varkappa} + e^{-\varkappa} = 2 + \nu. \tag{43}$$

Таким образом, в модели примера 3.1 глобальный минимум по классу $\mathbb{A}(x)$ в задаче минимизации (16) совпал с решением задачи

$$E\mathcal{C}(X) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{Var}\mathcal{C}(X) \longrightarrow \inf_{X\in\mathbb{A}_{det}}, \tag{44}$$

в которой, согласно [2], решение также задается формулой (42). Однако примечательно, что в работе [7] в задаче среднеквадратической оптимизации было показано:

$$\inf_{X\in\mathbb{A}_{det}}\left\{E\mathcal{C}(X) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{Var}\left[\mathcal{C}(X)\right]\right\} < \inf_{X\in\mathbb{A}}\left\{E\mathcal{C}(X) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{Var}\left[\mathcal{C}(X)\right]\right\}.$$

Пример 3.2 Рассмотрим обобщение модели (34), предложенной в [1] и [2].

Пусть процесс импакта I_t задан как

$$I_t = \lambda \sum_{k=0}^{t-1} \xi_k + \left(h(\xi_t) + \frac{\lambda}{2} \xi_t \right), \tag{45}$$

где $\lambda > 0$, а функция $f(x) := x \cdot h(x)$ - строго выпукла.

Сумму по пустому множеству индексов считаем равной нулю. Пусть процесс цены задан одномерной моделью Башелье:

$$\Delta S_t = \sigma \cdot \delta_t, \quad \delta_t \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ - н.о.р.с.в. }, \sigma > 0. \tag{46}$$

Нетрудно убедиться, что функционалы $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ в данной постановке имеют вид:

$$F(X) = \frac{\lambda}{2} x^2 + \sum_{t=0}^{T} f(\xi_t), \tag{47}$$

$$G(X) = \frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} \sum_{t=0}^{T-1} X_t^2. \tag{48}$$

Таким образом, задача (32) сводится к задаче

$$\sum_{t=0}^{T} f(\xi_t) + \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \sum_{t=0}^{T-1} X_t^2 \longrightarrow \inf_{X \in \mathbb{A}_{det}}. \tag{49}$$

Итак, задача стохастической оптимизации свелась к детерминированной задаче выпуклой оптимизации.

4 Переход к непрерывному времени

Задача оптимального исполнения с экспоненциальной функцией полезности была широко рассмотрена в работе [1], где основные результаты были получены методами анализа в непрерывном времени. Цель данного параграфа — продемонстрировать иной подход к задаче данного класса при помощи предельного перехода из моделей в дискретном времени.

В данном параграфе будет рассмотрена модель рыночного импакта в непрерывном времени и будет показано, как из теоремы 1 данной работы можно получить результат об оптимальности детерминированных стратегий в модели непрерывного времени. Будет рассмотрен случай $d{=}1$.

4.1 Модель в непрерывном времени

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство с фильтрацией $(\mathbb{F}_t)_{t\geq 0}$, удовлетворяющей стандартным условиям.

Рассмотрим два класса стратегий:

$$\mathcal{X}_{det}(T,x) := \{X : [0,T] \to \mathbb{R},\ \sup_{t\in[0,T]} |\dot{X}_t| < \infty, \text{ монотонные;}$$
$$X_0 = x, X_T = 0\} \tag{50}$$

— детерминированные стратегии,

$$\mathcal{X}(T,x) := \{X_t \in \mathbb{F}_t, \quad t \to X_t(\omega) \in \mathcal{X}_{det}(T,x), \quad \sup_{t\in[0,T]} |\dot{X}_t| \in L^\infty\} \tag{51}$$

— все допустимые стратегии. Без ограничения общности, будем рассматривать случай $x > 0$.

Стратегии $X \in \mathcal{X}(T,x)$ сопоставляется величина

$$\mathcal{Z}_T^X := -x \cdot S_0 - \int_0^T X_t \cdot dS_t + F(X), \tag{52}$$

где

$$F(X) = \int_0^T I_t dX_t; \tag{53}$$

$$I_t := h(\dot{X}_t), \quad h - \text{ непрерывная функция;} \tag{54}$$

$$S_t = S_0 + \sigma \cdot B_t, \quad S_0 \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0; \tag{55}$$

$$B_t - \text{ броуновское движение.}$$

Рассматривается задача

$$Ee^{\alpha \mathcal{Z}_T^X} \to \inf_{X \in \mathcal{X}(T,x)}. \tag{56}$$

Сформулируем аналог теоремы 1 для данной модели.

Теорема 2

$$\inf_{X \in \mathcal{X}(T,x)} Ee^{\alpha \mathcal{Z}_T^X} = \inf_{X \in \mathcal{X}_{det}(T,x)} Ee^{\alpha \mathcal{Z}_T^X}. \tag{57}$$

В секции 4.2 будет показано, как можно получить данный результат из теоремы 1.

4.2 Дискретизация задачи и доказательство теоремы 2

Поставим в соответствие задаче (56) дискретную модель раздела 1.
Для фиксированного $N \in \mathbb{N}$ положим $t_k^N := \frac{k}{N}T, k \in \{0, ..., N\}$.
Определим процесс

$$S_k^{(N)} := S_{t_k^N} = S_0 + \sigma \cdot B_{t_k^N}, \quad k = 0, ..., N. \tag{58}$$

Обозначим

$$\Delta S_k^{(N)} = \sigma \cdot (B_{t_k^N} - B_{t_{k-1}^N}). \tag{59}$$

Определим следующие классы стратегий:

$$\mathbb{A}^{(N)}(x) := \{X_k \in \mathbb{F}_{t_k^N}, k \in \{-1, ..., N\}; X_{-1} = x, X_N = 0\}. \tag{60}$$

$$\mathbb{A}_\Delta^{(N)}(x) := \{X \in \mathbb{A}^{(N)}(x) : (X_0, ..., X_{N-1}) \in \Delta\}, \tag{61}$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ - произвольное подмножество.
Введем еще классы

$$\mathbb{A}_{det}^{(N)}(x) := \left\{X \in \mathbb{A}^{(N)}(x) : \{\Delta X_t\}_{t=0}^T \subset \mathbb{R}\right\}, \tag{62}$$

и

$$\mathbb{A}_{\Delta det}^{(N)}(x) := \mathbb{A}_{det}^{(N)}(x) \cap \mathbb{A}_\Delta^{(N)}(x). \tag{63}$$

Также определим подмножество

$$\Delta_0 \subset \mathbb{R}^N := \{(y_0, ..., y_{N-1}) \in \mathbb{R}^N : y_0 = x\}, \tag{64}$$

и набор стратегий, не совершающих сделок в момент 0:

$$\mathbb{A}_0^{(N)}(x) := \mathbb{A}_{\Delta_0}^{(N)}(x). \tag{65}$$

Для $X \in \mathbb{A}^{(N)}(x)$ определим

$$F(X)^{(N)} := \sum_{k=0}^{N} h\left(\frac{\Delta X_{t_k}}{\Delta t_k}\right)\Delta X_k. \tag{66}$$

Введем функционал издержек для $X \in \mathbb{A}^{(N)}(x)$:

$$\mathcal{C}^{(N)}(X) := -x \cdot S_0 - \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \Delta S_{k+1}^{(N)} + F(X)^{(N)}. \tag{67}$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\inf_{\mathbb{A}_{\Delta det}^{(N)}(x)} Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X)} = \inf_{\mathbb{A}_{\Delta}^{(N)}(x)} Ee^{\mathcal{C}^{(N)}(X)}. \tag{68}$$

Покажем, как из модели дискретного времени можно вывести теорему 2. Для начала, нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1 *Для любой стратегии* $X \in \mathcal{X}(T,x)$ *для любого* $\epsilon > 0$ *существует* $M \in \mathbb{N}$, *что для любого* $N > M$ *существует стратегия* $X^{(N)} \in \mathbb{A}_0^{(N)}(x)$ *такая, что*

$$E\left|e^{\alpha\mathcal{Z}_T^X} - e^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^{(N)})}\right| < \epsilon. \tag{69}$$

Доказательство данной леммы представлено в разделе 4.3.

Для доказательства теоремы 2 зафиксируем $\epsilon > 0$ и рассмотрим произвольную ϵ-оптимальную стратегию $X^\epsilon \in \mathcal{X}(T,x)$, т.е. такую, что

$$M := \inf_{X\in\mathcal{X}(T,x)} Ee^{\alpha\mathcal{Z}_T^X} \geq Ee^{\alpha\mathcal{Z}_T^{X^\epsilon}} - \epsilon. \tag{70}$$

Далее, для данной стратегии X^ϵ возьмем дискретную стратегию из леммы 1, обозначим её $X^{(N)}$ и получим

$$M \geq Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^{(N)})} - 2\epsilon. \tag{71}$$

Из теоремы 1 следует, что для стратегии $X^{(N)}$ мы можем найти такую дискретную стратегию $X_*^{(N)} \in \mathbb{A}_{\Delta_0 det}^{(N)}(x)$, что

$$Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^{(N)})} \geq Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X_*^{(N)})}. \tag{72}$$

Таким образом,

$$M \geq E e^{\alpha \mathcal{C}^{(N)}(X_*^{(N)})} - 2\epsilon. \tag{73}$$

Стратегии $X_*^{(N)}$ сопоставим стратегию $Y^N \in \mathcal{X}_{det}(T,x)$:

$$Y_t^N = \sum_{k=1}^{N} \left(X_{*t_{k-1}}^{(N)} + \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t} \left(X_{*t_k}^{(N)} - X_{*t_{k-1}}^{(N)} \right) \right) \mathbb{I}_{[t_{k-1}, t_k)}. \tag{74}$$

То есть Y^N - линейная интерполяция $X_*^{(N)}$.

Лемма 2

$$E e^{\alpha \mathcal{Z}_T^{Y^N}} \leq E e^{\alpha \mathcal{C}^{(N)}(X_*^{(N)})}. \tag{75}$$

Доказательство данной леммы представлено в разделе 4.3.

Таким образом,

$$E e^{\mathcal{Z}_T^{Y^N}} \leq E e^{\mathcal{C}^{(N)}(X_*^{(N)})} \leq M + 2\epsilon. \tag{76}$$

Окончательно, из (76) следует, что

$$M \geq E e^{\alpha \mathcal{Z}_T^{Y^N}} - 2\epsilon \geq \inf_{X \in \mathcal{X}_{det}(T,x)} E e^{\alpha \mathcal{Z}_T^X} - 2\epsilon. \tag{77}$$

Устремив $\epsilon \to 0$, получим

$$\inf_{X \in \mathcal{X}(T,x)} E e^{\alpha \mathcal{Z}_T^X} = \inf_{X \in \mathcal{X}_{det}(T,x)} E e^{\alpha \mathcal{Z}_T^X}. \tag{78}$$

Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 1 для дискретного времени следует аналогичный результат в непрерывном времени.

4.3 Доказательство Лемм 1 и 2

Доказательство Леммы 1

Зафиксируем $X \in \mathcal{X}(T,x)$ и определим по ней дискретную стратегию

$$\xi_0^N = 0, \quad \xi_{t_k}^N := X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, \quad k \in 1, ..., N. \tag{79}$$

Соответственно,

$$X_k^N := x + \sum_{t=0}^{k} \xi_t^N. \tag{80}$$

Задача — показать, что

$$Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^N)} \longrightarrow Ee^{\alpha\mathcal{Z}_T^X}, \quad N \to \infty. \tag{81}$$

Обозначим

$$\hat{X}^N := \sum X_{t_k}\mathcal{I}_{[t_k,t_{k+1})}. \tag{82}$$

Определим величину

$$\mathcal{C}^{(N)}(X^N) := -x \cdot S_0 - \sum_{k=0}^{N-1} X_k^N \cdot \Delta S_{k+1}^{(N)} + F(X^N)^{(N)}. \tag{83}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{(N)}(X^N) &= -x \cdot S_0 - \int_0^T \hat{X}_t^N dS_t + F(\hat{X}^N) \\ &\xrightarrow{P} -x \cdot S_0 - \int_0^T X_t dS_t + F(X) = \mathcal{Z}_T^X.\end{aligned}$$

Таким образом, у нас есть сходимость по вероятности:

$$e^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^N)} \xrightarrow{P} e^{\alpha\mathcal{Z}_T^X}. \tag{84}$$

При этом, из формулы (30) мы знаем, что

$$Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^N)} = E^Q e^{G(X^N)^{(N)}+\alpha F(\hat{X}^N)}, \tag{85}$$

В силу произвольности $\alpha > 0$ в формуле (85), то же равенство останется верным, если заменить α на 2α. Покажем ограниченность $Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^N)}$ для произвольного $\alpha > 0$. В таком случае для фиксированного $\alpha > 0$ последовательность случайных величин $e^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X^N)}$ будет равномерно интегрируемой.

Из определения, $\mathcal{X}(T,x)$ $\exists C > 0 : |\dot{X}_t(\omega)| < C \quad \forall t$ для п.в. ω. Таким образом, $F(X) < \infty$ и

$$C_1 := \sup_N F(\hat{X}^N) < \infty. \tag{86}$$

Покажем также, что

$$C_2 := \sup_N G(X^N)^{(N)} < \infty, \tag{87}$$

Действительно, из (29)

$$G(X^N)^{(N)} = \sum_{k=1}^N \log\left(Ee^{-\alpha X_{k-1}\cdot\Delta S_k}\right). \tag{88}$$

В силу соотношения (55):

$$Ee^{-\alpha y\cdot\Delta S_k} = \exp\left\{\frac{\alpha^2}{2N}(y\sigma)^2\right\}, \tag{89}$$

что эквивалентно:

$$\log\left(Ee^{-\alpha y\cdot\Delta S_k}\right) = \frac{\alpha^2}{2N}(y\sigma)^2. \tag{90}$$

Откуда, в силу ограниченности $|X_t| < C$

$$\sum_{k=1}^{N}\log\left(Ee^{-\alpha X_{k-1}\cdot\Delta S_k}\right) \leq \sup_{|y|<C}\frac{\alpha^2}{2}(y\sigma)^2 < \infty. \tag{91}$$

Таким образом, мы доказали (87).

Итак, из формул (85), (86) и (87) для произвольного $\alpha > 0$ мы получаем:

$$Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X)} \leq C_3 := e^{C_1+C_2}. \tag{92}$$

Таким образом, при данном $\alpha > 0$ последовательность случайных величин $e^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X)}$ является равномерно интегрируемой. Следовательно, имеет место следующая сходимость:

$$Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X)} \to Ee^{\alpha\mathcal{Z}_T^X}. \tag{93}$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2

Обозначим для удобства $X := X_*^N$.
X и Y^N - детерминированные функции, поэтому в модели (55)

$$Ee^{\alpha\mathcal{C}^{(N)}(X)} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha^2}{2N}\left(X_{t_{k-1}}^2\sigma^2\right) + F(X)^{(N)}\right\}, \tag{94}$$

$$Ee^{\alpha\mathcal{Z}_T^{Y^N}} = \exp\left\{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T\left((Y_t^N)^2\sigma^2\right)dt + F(Y^N)\right\}. \tag{95}$$

Достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha^2}{2N}\left(X_{t_{k-1}}^2\sigma^2\right) + F(X)^{(N)} \geq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^T\left((Y_t^N)^2\sigma^2\right)dt + F(Y^N). \tag{96}$$

Действительно, в силу монотонности стратегии X_* и линейности интерполяции Y_t:

$$\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T \left((Y_t^N)^2\sigma^2\right) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\alpha^2}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left((Y_t^N)^2\sigma^2\right) dt$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha^2}{2N}\left(X_{t_{k-1}}^2\sigma^2\right). \quad (97)$$

При этом, из (53)(66)(74) мы получаем

$$F(X)^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} h\left(\frac{\Delta X_{t_k}}{\Delta t}\right)\Delta X_{t_k}, \quad (98)$$

$$F(Y^N) = \int_0^T h(\dot{Y}_t^N) dY_t^N$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} h\left(\frac{\Delta X_{t_k}}{\Delta t}\right)\frac{\Delta X_{t_k}}{\Delta t} dt = F(X)^{(N)}. \quad (99)$$

Таким образом, мы показали (96).
Лемма 2 доказана.

5 Заключение

В данной работе была рассмотрена задача максимизации ожидаемой полезности при ликвидировании портфеля. В широком классе моделей рыночного импакта было доказано, что в модели с экспоненциальной функцией полезности супремум в данной задаче по классу согласованных допустимых стратегий совпадает с супремумом по классу детерминированных стратегий и приведены примеры нахождения оптимальных стратегий исполнения.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ю.М. Кабанову, а также профессору М. А. Урусову, чьи важные замечания и поддержка помогли созданию данной работы.

Список литературы

[1] Schied, A., Schöneborn, T., Tehranchi, M. - Optimal Basket Liquidation for CARA Investors is Deterministic, Applied Mathematical Finance, 17:6, 471-489, 2010

[2] Almgren, R. and Chriss, N. - Optimal execution of portfolio transactions. J. Risk, 3, pp. 5–39, 2001

[3] Almgren, R. and Chriss, N. - Value under liquidation. Risk, 12(12), pp. 61–63. 1999

[4] Gatheral, J: No-Dynamic-Arbitrage and Market Impact. Quantitative Finance, Vol. 10, No. 7, pp. 749-759, 2010

[5] Obizhaeva, A., Wang, J. - Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics. AFA 2006 Boston Meetings Paper, 2005

[6] Alfonsi, A., Fruth, A., and Schied, A. - Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. Quantitative Finance, 10(2), pp. 143–157., 2010

[7] Almgren, R. and Lorenz, J. - Adaptive arrival price. In: B. R. Bruce (Ed.), Algorithmic Trading III: Precision, Control, Execution, Institutional Investor Journals, 2007

[8] Alfonsi, A., Klöck, F., Schied, A. - Multivariate transient price impact and matrix-valued positive definite functions, Mathematics of Operations Research, volume 41, p. 914 - 934, 2016