Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 9

Пусть

$$h, g\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$$

гладкие по $x \in \mathbb{R}^d$ и удовлетворяют условиям

$$|h(x,\mu) - h(x,\sigma)| + |g(x,\mu) - g(x,\sigma)| \le C d_{KR}(\mu,\sigma),$$
$$|h(x,\mu) - h(y,\mu)| + |g(x,\mu) - g(y,\mu)| \le C|x-y|,$$
$$|h(x,\mu)| + |g(x,\mu)| \le C.$$

Рассмотрим функцию

$$F(y,P) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), P\circ e_t^{-1})\,dt + g(y(T), P\circ e_T^{-1}),$$

где P — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Предложение 1. *Предположим, что на абсолютно непрерывной функции y_x функционал $y \to F(y,P)$ достигает минимального значения на множестве всех абсолютно непрерывных функций y, удовлетворяющих условию $y(0) = x$. Тогда*

$$|y_x(t)| \le |x| + M_1, \quad |y_x(t) - y_x(s)| \le M_2|t-s|.$$

где константы M_1 и M_2 зависят только от C и T.

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, носитель которой лежит в $B(0,\frac{R}{2})$. Положим

$$X = \overline{B}(0,\tfrac{R}{2}), \quad A = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}^d)\colon\ |y(t)| \le M_1 + 2R, \quad |y(t)-y(s)| \le M_2|t-s|\}.$$

Для каждого $x \in X$ через $S(x)$ обозначим множество функций y из A, удовлетворяющих условию $y(0) = x$.

Теорема 1. *Существует вероятностная мера P на $X \times A$, удовлетворяющая условиям*

$$P_X = \nu, \quad P\Big\{(x,y)\colon y(0) = x, \quad F(y,P) = \min_{z\in S(x)} F(z,P)\Big\} = 1.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно проверить, что X, A, F, S, ν удовлетворяют условиям задачи (P2) с прошлой лекции. Ясно, что X и A компактные метрические пространства. Проверим условия на отображение S. Множества $S(x)$ непусто, так как в нем лежит функция $y(t) \equiv x$. Множества $S(x)$ замкнуто, так как из сходимости $y_n \to y$ следует $y_n(0) \to y(0)$. Если $x_n \to x$, $y_n \to y$ и $y_n \in S(x_n)$, то $y_n(0) = x_n$, $y_n(0) \to y(0)$ и $y(0) = x$. Таким образом, график S замкнут. Пусть теперь $x_n \to x$ и $y \in S(x)$. Положим

$$y_n(t) = \alpha_n(y(t) - x) + x_n, \quad \alpha_n = 1 - \frac{|x_n - x|}{M_1 + R}.$$

Заметим, что $0 \le \alpha_n < 1$ и $y_n(0) = x_n$. Проверим, что $y_n \in A$. Имеем

$$|y_n(t)| \le \alpha_n|y(t)| + (1-\alpha_n)|x| + |x_n - x| \le \alpha_n(M_1 + 2R) + (1-\alpha_n)R + |x_n - x| = M_1 + 2R,$$
$$|y_n(t) - y_n(s)| = \alpha_n|y(t) - y(s)| \le M_2|t-s|.$$

Итак, $y_n(0) = x_n$ и $y_n \in A$, то есть $y_n \in S(x_n)$. Ясно, что y_n равномерно сходится к y и $\dot{y}_n$ равномерно сходится к $\dot{y}$. Это позволяет перейти к пределу в выражении для $F(y_n,P)$.

Проверим, что $F(y,P)$ равномерно непрерывна по P. Имеет место оценка

$$\Big|F(y,P) - F(y,Q)\Big| \le C\int_0^T d_{KR}(P\circ e_t^{-1}, Q\circ e_t^{-1})\,dt + C d_{KR}(P\circ e_T^{-1}, Q\circ e_T^{-1}).$$

Так как $d_{KR}(P\circ e_t^{-1}, Q\circ e_t^{-1}) \le d_{KR}(P,Q)$, то

$$\Big|F(y,P) - F(y,Q)\Big| \le C(T+1) d_{KR}(P,Q).$$

Остается проверить, что $y \to F(y,P)$ полунепрерывно снизу. Пусть $y_n \to y$. Так как сходимость равномерная, то

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T h(y_n, P\circ e_t^{-1})\,dt = \int_0^T h(y, P\circ e_t^{-1})\,dt, \quad \lim_{n\to+\infty} g(y_n(T), P\circ e_T^{-1}) = g(y(T), P\circ e_T^{-1}).$$

Из оценки $|\dot{y}_n| \le M_2$ следует ограниченность последовательности $\dot{y_n}$ в $L^2[0,T]$. Переходя к подпоследовательности можно считать, что $\dot{y_n}$ слабо сходится к $\dot{y}$ в $L^2[0,T]$. Так как

$$\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}_n(t)|^2\,dt \ge -\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2\,dt + \int_0^T \langle \dot{y}_n(t), y(t)\rangle\,dt,$$

то

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}_n(t)|^2\,dt \ge \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2\,dt,$$

что влечет полунепрерывность снизу функционала $y \to F(y,P)$.

Таким образом, все условия проверены и теорема о существовании меры P доказана.

Отметим, что в силу предложения 1 сужение исходного пространства $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ до множества A не влияет на множество функций y, на которых достигается минимум $F(y,P)$.

Следуя работам P.Cannarsa, R.Capuani, P.Cardaliaguet назовем пару (u,μ_t) решением в среднем системы

$$\begin{cases} -u_t + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h(x,\mu_t) = 0, \\ \partial_t\mu_t - \operatorname{div}\big(\nabla u \mu_t\big) = 0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x,T) = g(x,\mu_T)$, $\mu_0 = \nu$, если

$$\mu_t = P\circ e_t^{-1}, \quad u(x,t) = \inf_{y\colon y(t)=x}\int_t^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t),\mu_t)\,dt + g(y(T),\mu_T),$$

где вероятностная мера P на $\mathbb{R}^d\times C([0,T],\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям: $P|_{\mathbb{R}^d_x} = \nu$ и носитель $\operatorname{sp} P$ лежит в множестве пар (x,y), у которых $y(0)=x$ и y — точка минимума функционала

$$y \to \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), P\circ e_t^{-1})\,dt + g(y(T), P\circ e_T^{-1})$$

на множестве всех абсолютно непрерывных функций y с условием $y(0)=x$.

Теорема 2. *Решение в среднем существует.*

Доказательство. Немедленно следует из доказанного выше. □

Отметим, что u является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби

$$-u_t + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h(x,\mu_t) = 0.$$

Более того, в недавней работе P.Cannarsa, R.Capuani, P.Cardaliaguet показали, что для всех x из носителя μ_t функция $x \to u(x,t)$ дифференцируема и μ_t является решением уравнения непрерывности

$$\partial_t\mu_t - \operatorname{div}\big(\nabla u\mu_t\big) = 0.$$

Таким образом, решение в среднем является «поточечным» решением системы уравнений.

Будем говорить, что для функции $f(x,\mu)$ выполняется условие монотонности, если

$$\int\Big(f(x,\mu) - f(x,\sigma)\Big)\,d(\mu-\sigma) \ge 0,$$

а равенство нулю влечет равенство $f(x,\mu) = f(x,\sigma)$.

Теорема 3. *Если функции h и g удовлетворяют условию монотонности и пары (u^1,μ_t^1), (u^2,μ_t^2) — решения в среднем, то $u^1 = u^2$. Более того, если в условии монотонности из равенства нулю следует совпадение мер, то $\mu_t^1 = \mu_t^2$ и решение в среднем единственно.*

Доказательство. Пусть мера P^1 соответствует паре (u^1, μ^1_t), а мера P^2 – соответствует паре (u^2, μ^2_t). Для всякой пары $(x, y) \in \operatorname{sp} P^1$ выполнено

$$u^1(x,0) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), \mu^1_t)\,dt + g(y(T), \mu^1_T),$$
$$u^2(x,0) \le \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), \mu^2_t)\,dt + g(y(T), \mu^2_T).$$

Следовательно, верна оценка

$$g(y(T), \mu^1_T) - g(y(T), \mu^2_T) + \int_0^T h(y(t), \mu^1_t) - h(y(t), \mu^2_t)\,dt \le u^1(x,0) - u^2(x,0).$$

Интегрируя это неравенство по мере P^1 и учитывая, что $P^1 \circ e_t^{-1} = \mu^1_t$, приходим к новому неравенству

$$\int g(x, \mu^1_T) - g(x, \mu^2_T)\,d\mu^1_T + \int_0^T \int h(x, \mu^1_t) - h(x, \mu^2_t)\,d\mu^1_t\,dt \le \int u^1(x,0) - u^2(x,0)\,d\nu.$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$\int g(x, \mu^2_T) - g(x, \mu^1_T)\,d\mu^2_T + \int_0^T \int h(x, \mu^2_t) - h(x, \mu^1_t)\,d\mu^2_t\,dt \le \int u^2(x,0) - u^1(x,0)\,d\nu.$$

Складываем полученные неравенства и приходим к оценке

$$\int g(x, \mu^1_T) - g(x, \mu^2_T)\,d(\mu^1_T - \mu^2_T) + \int_0^T \int h(x, \mu^1_t) - h(x, \mu^2_t)\,d(\mu^1_t - \mu^2_t)\,dt \le 0.$$

Следовательно, верны равенства

$$g(x, \mu^1_T) = g(x, \mu^2_T), \quad h(x, \mu^1_t) = h(x, \mu^2_t),$$

в силу которых функционалы, задающие u^1 и u^2 совпадают. $\square$