А. Н. Ширяев, Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков, А. В. Мельников, К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1994, том 39, выпуск 1, 23–79

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 39 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1994

ШИРЯЕВ А. Н., КАБАНОВ Ю. М.***,
КРАМКОВ Д. О., МЕЛЬНИКОВ А. В.**

К ТЕОРИИ РАСЧЕТОВ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО И АМЕРИКАНСКОГО ТИПОВ. I. ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ[1)]

Статья, состоящая из двух частей (I — дискретное время, II — непрерывное время, [19]), имеет своей целью изложение основных понятий, постановок задач и результатов *финансовой математики*, которые относятся к расчетам *опционов* или *контрактов с опционами* как одного из видов производных ценных бумаг. В ч. I предполагается, что эти контракты заключаются на дискретном (B,S)-рынке, имеются два актива — безрисковый банковский счет $B=(B_n)_{n\geqslant 0}$ и рисковая акция $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$. Рассматриваются случаи опционов как Европейского, так и Американского типов. Особое внимание уделяется «мартингальной» методологии расчетов стоимости опционов и хеджирующих стратегий с конкретизацией для опционов купли (call option) и продажи (put option).

Ключевые слова и фразы: рынок ценных бумаг, облигации и акции, банковский счет, опционы Европейского и Американского типов, справедливая (рациональная) стоимость, хеджирующие стратегии, мартингалы, марковские моменты, оптимальные правила остановки, арбитраж, полнота рынка.

Содержание

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова 42, Москва, ГСП-1 117966, Россия.

**Центральный экономико-математический институт РАН, ул. Красикова 32, Москва, 117421, Россия.

[1)]Работа поддержана Научно-исследовательским Актуарно-финансовым центром (АФЦ).

§1. Введение. Постановка задач инвестирования и хеджирования. Опционы

1. Пользуясь терминологией финансовой математики (см. [18]), мы рассматриваем предложенную в [1] Коксом, Россом и Рубинштейном модель (B, S)-рынка, функционирующего в моменты времени $n = 0, 1, \ldots, N < \infty$, и состоящего из двух активов — *банковского счета* $B = (B_n)$ и *акции* $S = (S_n)$. Согласно этой модели, динамика банковского счета подчиняется рекуррентным соотношениям

$$B_n = (1 + r)\, B_{n-1}, \qquad B_0 > 0, \tag{1.1}$$

где *процентная ставка* $r > 0$.

Стоимость акции $S = (S_n)$ предполагается эволюционирующей по закону

$$S_n = (1 + \rho_n)\, S_{n-1}, \qquad S_0 > 0, \tag{1.2}$$

где $\rho = (\rho_n)$ — «хаотическая» последовательность, причем ρ_n принимают всего лишь два значения a и b такие, что

$$-1 < a < r < b \tag{1.3}$$

(это условие обеспечивает, в частности, положительность величин S_n).

Для дальнейшего удобно записывать величины ρ_n в виде

$$\rho_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\, \varepsilon_n \tag{1.4}$$

или в виде

$$\rho_n = a + (b - a)\, \delta_n, \tag{1.5}$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \delta_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \rho_n = \begin{cases} b \\ a. \end{cases} \tag{1.6}$$

2. Уточняя предположение о «хаотичности» последовательности $\rho = (\rho_n)$ (или, равносильно, любой из последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, $\delta = (\delta_n)$), будем предполагать, что они определены на некотором измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Для дальнейшего достаточно рассматривать в качестве Ω пространство реализаций последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N)$, т.е. считать, что множество $\Omega = \{+1, -1\}^N$, и на нем задано *семейство* $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}\}$ вероятностных мер $\mathbf{P}$, причем относительно любой меры $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$

последовательность случайных величин $\rho = (\rho_n(\omega))$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения a и b с положительными вероятностями

$$q = \mathbf{P}(\rho_n = a), \qquad p = \mathbf{P}(\rho_n = b) \tag{1.7}$$

(т.е. $0 < q < 1$ и $0 < p < 1$).

Сделанное предположение о *вероятностном* характере эволюции последовательности $\rho = (\rho_n)_{n \geqslant 1}$, определяющей изменение цены акции $S = (S_n)$, и о семействе $\mathcal{P}$ допустимых вероятностей $\mathbf{P}$ представляется с финансовой точки зрения весьма естественным. Действительно, колебание цен носит определенно стохастический характер, причем, если относительно значений a и b можно делать какие-либо правдоподобные гипотезы, то относительно априорных значений p сделать те или иные априорные предположения бывает довольно затруднительно. Именно поэтому представляется целесообразным не специфицировать распределение $\mathbf{P}$, а считать, что $\mathbf{P}$ — это лишь некоторое распределение из семейства $\mathcal{P}$.

3. Представим себе *инвестора*, который имеет начальный капитал $X_0 = x > 0$ и интересуется увеличением его в будущем, располагая возможностями (B, S)-рынка.

Инвестор может поместить (инвестировать) этот капитал $X_0 = x$ на банковский счет и тогда его капитал X_n в момент времени n будет в соответствии с (1.1) равен $X_0(1+r)^n$. Тем самым, если инвестор планирует поместить свой капитал на банковский счет с процентной ставкой $r \geqslant 0$, преследуя цель получить в некоторый момент времени N в будущем определенную сумму f_N, то его начальный капитал $X_0 = x$ должен, очевидно, быть равен

$$x = (1+r)^{-N} f_N. \tag{1.8}$$

Инвестор может, с другой стороны, вложить свой начальный капитал $X_0 = x$ в акции. Это является, конечно, рискованным делом (по причине случайного характера изменения цены акции), хотя может быть и привлекательным, если есть надежда на повышение цены акции. Из (1.2) легко следует, что если вероятность p *известна*, то для получения в среднем суммы f_N (в момент времени N) начальный капитал $X_0 = x$ должен быть таким, что

$$x = \big[1 + (bp + aq)\big]^{-N} f_N. \tag{1.9}$$

У инвестора, оперирующего на (B, S)-рынке, есть и третья возможность: поместить часть капитала на банковский счет, а часть — в акции.

Имея в виду эту возможность, будем считать, что B_0 — цена одной облигации, а S_0 — цена одной акции (в момент времени $n = 0$).

Пусть инвестор в момент времени $n = 0$ располагает β_0 облигациями и γ_0 акциями (допускаются произвольные дробные и, вообще говоря, отрицательные значения, что соответствует взятию в долг: отрицательное значение β_0 означает взятие займа с нормой возврата $r \times 100\%$, а отрицательное значение γ_0 интерпретируется как взятие акции взаймы). Следовательно, начальный капитал инвестора есть

$$X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0, \tag{1.10}$$

а $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ образует, как принято говорить, портфель (portfolio) инвестора в момент времени $n = 0$.

Будем допускать, что в промежутке $(0, 1)$ (т.е. после момента $n = 0$ и перед моментом $n = 1$) инвестор может перераспределять содержание своего портфеля. Пусть к моменту времени $n = 1$, *перед тем* как будет объявлена новая (случайная) цена акции S_1, инвестор преобразовал свой начальный портфель $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ в новый портфель $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, основываясь лишь на начальной информации о значениях (B_0, S_0) и не допуская при этом ни *притока* дополнительного капитала «со стороны» (например, от дивидендов с акции), ни его оттока «на сторону» (например, на потребление).

Перераспределенный таким образом портфель дает тогда для капитала X_0 (наряду с (1.10)) новое представление

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0. \tag{1.11}$$

В момент времени $n = 1$ происходит «объявление» новых цен на рынке, т.е. становится известным значение пары (B_1, S_1) и, следовательно, начальный капитал X_0 инвестора, имеющего портфель (β_1, γ_1), превратится в величину

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1. \tag{1.12}$$

Иначе говоря, приращение $\Delta X_1 = X_1 - X_0$ капитала определяется формулой

$$\Delta X_1 = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1. \tag{1.13}$$

Обобщая (1.11) и (1.12) на произвольные моменты времени n, находим, что

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \tag{1.14}$$

и

$$X_n \doteq \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \tag{1.15}$$

где, естественно, подразумевается, что портфель $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ составляется лишь на основе предшествующей информации о ценах. Формально это означает, что β_n и γ_n являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми, где $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(S_1, \ldots, S_{n-1})$.

Из (1.14) и (1.15) следует, что приращения $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ могут быть представлены в виде

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \tag{1.16}$$

а суммарный капитал — в виде

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k). \tag{1.17}$$

Наглядный смысл этого ясен: ***формирование капитала*** $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ ***осуществляется только за счет изменений*** $(\Delta B_k, \Delta S_k)$ ***в ценах облигаций и акций и без какого-либо как его притока, так и оттока.***

Заметим, что, вообще говоря, если $X_n = \beta_n X_n + \gamma_n S_n$; то приращение ΔX_n имеет следующий вид:

$$\Delta X_n = [\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n] + [B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n].$$

Таким образом, условие (1.16) может быть переформулировано в виде соотношения

$$B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0, \tag{1.18}$$

означающего, что $\pi_k = (\beta_k, \gamma_k)$, $k \leqslant n$, таковы, что изменение капитала на банковском счете (т.е. $B_{n-1} \Delta \beta_n$) может происходить *только* в результате соответствующего изменения капитала в акциях (т.е. $S_{n-1} \Delta \gamma_n$) и наоборот.

Условие (1.18) выражают словами, что $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, $n \leqslant N$, образованы на принципе *самофинансирования*. В этом случае стратегию $\pi = (\pi_n)$ называют *самофинансируемой.*

Из (1.16) с учетом (1.1) и (1.2) находим, что

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n = \beta_n (r B_{n-1}) + \gamma_n (\rho_n S_{n-1})$$

или, равносильно,

$$\Delta X_n = r X_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} (\rho_n - r). \tag{1.19}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость последовательности $X = (X_n)$ от стратегии $\pi = (\pi_n)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, предполагаемой *самофинансируемой*, будем пользоваться также записью $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \geqslant 0}$. В тех же случаях, когда важно подчеркнуть зависимость и от ω, будем писать $X^\pi(\omega) = (X_n^\pi(\omega))$.

Класс всех самофинансируемых (self-financing) стратегий будем обозначать для краткости SF.

4. Предположим теперь, что инвестор, оперирующий на (B, S)-рынке, решает следующую «инвестиционную проблему»: в некоторый заранее определенный момент времени $N < \infty$ в будущем довести свой капитал до величины, не меньшей, чем $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, где функция f_N зависит, вообще говоря, от всей (случайной) реализации цен $(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ акции S.

Понятно, что осуществление этой цели зависит как от *величины начального капитала*, так и от возможности сконструировать соответствующую стратегию в классе самофинансируемых стратегий SF. В этой связи дадим

Определение 1. Говорят, что для данного $x > 0$ и неотрицательной функции $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ самофинансируемая стратегия $\pi = (\pi_n)$ является (x, f_N)-хеджем (hedge — забор), если для *любого* $\omega \in \Omega$

$$X_0^\pi(\omega) = x, \tag{1.20}$$

$$X_N^\pi(\omega) \geqslant f_N\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)\big), \tag{1.21}$$

где $(S_n(\omega))_{0 \leqslant n \leqslant N}$ подчиняются соотношениям (1.2):

$$S_n(\omega) = \big(1 + \rho_n(\omega)\big) S_{n-1}(\omega), \qquad n \geqslant 1,$$

и $S_0(\omega) = S_0$ — константа, $S_0 > 0$.

В том случае, когда в (1.21) для всех $\omega \in \Omega$ выполнено *равенство*

$$X_N^\pi(\omega) = f_N\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)\big), \tag{1.22}$$

говорят, что π является *минимальным* (x, f_N)-хеджем.

Пусть $\Pi(x, f_N)$ — совокупность всех (x, f_N)-хеджей $\pi \in \mathrm{SF}$.

Определение 2. Величина

$$\mathbb{C}_N = \inf\big\{x > 0 : \ \Pi(x, f_N) \neq \varnothing\big\} \tag{1.23}$$

называется *инвестиционной стоимостью* (ценой), гарантирующей в момент N получение капитала не меньшего $f_N = f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ для любого $\omega \in \Omega$.

Замечание 1. В рассматриваемом случае «конечного» (B, S)-рынка очевидно, что существует конечное x такое, что $\Pi(x, f_N) \neq \varnothing$ и, следовательно, $\mathbb{C}_N < \infty$.

В § 2 будет доказано, что $(\mathbb{C}_N, f_N)$-хедж существует, единственен и является минимальным. Отсюда, в частности, следует, что в (1.23) inf на самом деле может быть заменен на min.

С точки зрения сформулированной *инвестиционной проблемы* смысл величины $\mathbb{C}_N$ нагляден — это тот *минимальный* начальный капитал, который гарантирует инвестору (за счет подходящей конструкции портфелей $\pi^* = (\pi_n^*)_{0 \leqslant n \leqslant N}$) получить при всех $\omega \in \Omega$ капитал $X_N^{\pi^*}(\omega)$, заведомо не меньший запланированной величины $f_N(\omega)$.

Замечание 2. Иногда в определение хеджирующих стратегий π с самого начала добавляют требование, чтобы $X_n^\pi \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant n \leqslant N$. Из дальнейшего станет видно, что на самом деле всегда существует хеджирующая (к тому же минимальная) стратегия, обладающая этим свойством.

5. Величина $\mathbb{C}_N$ представляет интерес в связи с «проблемой справедливой цены (стоимости, премии)» так называемых Европейских опционов, или контрактов с опционами Европейского типа.

Суть подобных контрактов проще всего пояснить на примере так называемого *стандартного опциона купли*, или *опциона колл* (call option), Европейского типа.

На (B, S)-рынке участник (называемый эмитентом) может выпустить ценную бумагу, дающую *право* ее покупателю приобрести у него в некоторый фиксированный момент N в будущем акции по оговоренной, контрактной цене K. Эта ценная бумага называется *опционом купли* Европейского типа.

Если в момент времени N ситуация на (B, S)-рынке окажется такой, что $S_N > K$, то владелец опциона предъявляет его к исполнению, т.е. имеет возможность *купить* акции по цене K. После этого он может немедленно *продать* купленные акции по номиналу S_N и получить таким образом прибыль $f_N = S_N - K$. Если же окажется, что $S_N \leqslant K$, то покупатель опциона не предъявляет его к исполнению, поскольку в этом случае он не получает никакой прибыли.

Таким образом, можно сказать, что в рассматриваемом случае функция платежа f_N, которую можно мыслить как выплату продавцом опциона его покупателю, есть $(S_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0)$.

Обобщая рассмотренный случай, будем предполагать, что предлагаемые эмитентом контракты с опционами гарантируют выплату, определяемую некоторой оговариваемой в контракте функцией $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, значение которой зависит от (случайной) траектории $(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ цен акций.

Разумеется, за приобретение подобного *опциона купли*, дающего возможность получить капитал $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, надо заплатить эмитенту некоторую «*премию*», которая как-то компенсировала бы его возможные потери. Понятно при этом, что назначение слишком большой премии (т.е. большой стоимости опциона) или просто оттолкнет покупателя, или же (в случае покупки опциона) может создать *арбитражную ситуацию*, состоящую в получении продавцом прибыли *без риска*. Назначение же слишком малой стоимости опциона, может, с другой стороны, привести просто к тому, что продавец опциона (средствами (B, S)-рынка) будет *не* в состоянии выплатить требуемый условиями контракта платеж $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$.

Возникает тем самым вопрос о том, что́ естественно называть *справедливой* (с точки зрения продавца и с точки зрения покупателя) *стоимостью* (*ценой*, *премией*) и как ее рассчитывать.

Исходя из того понимания, что продавец опциона, получивший премию от покупателя, должен ею распорядиться так, чтобы выполнить условия контракта, нетрудно понять, что ***справедливой стоимостью*** (ценой) Европейского опциона (с моментом исполнения N и функцией выплат f_N) естественно называть именно величину $\mathbb{C}_N$.

Действительно, если продавец опциона получает премию $\mathbb{C}_N$, то он (выступая как инвестор на (B, S)-рынке с начальным капиталом $X_0 = \mathbb{C}_N$) сумеет организовать стратегию π^*, которая обеспечит в момент времени N капитал $X_N^{\pi^*}(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

В то же самое время понятно, что если требуемая премия окажется меньше *инвестиционной* стоимости $\mathbb{C}_N$, то продавец опциона не сможет, вообще говоря, выполнить условия контракта, а назначение же цены за опцион, строго большей, нежели $\mathbb{C}_N$, скажем $\mathbb{C}_N + C$, $C > 0$, приводит, как уже отмечалось, к «арбитражной» ситуации — получению продавцом дохода C без всякого риска (поскольку на самом деле условия контракта были бы выполнимы и при стоимости $\mathbb{C}_N$).

Теории расчетов стоимости $\mathbb{C}_N$ опционов Европейского типа, а также отысканию оптимальных хеджирующих стратегий $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ посвящены далее §§ 2–3. В теории и практике опционов особую роль играют следующие два *стандартных* опциона Европейского типа:

опцион купли (опцион колл — call option) с

$$f_N = (S_N - K)^+ \tag{1.24}$$

и

опцион продажи (опцион пут — put option) с

$$f_N = (K - S_N)^+, \tag{1.25}$$

где K — некоторая фиксированная константа (striking price) и N — момент исполнения (maturity time, expiration data).

На финансовых рынках встречаются самые разнообразные («экзотические» по терминологии [9]) опционы.

Например,

опцион коллар (collar option) с

$$f_N = \min\{\max(K_1, S_N), K_2\},$$

Бостонский опцион (Boston option) с

$$f_N = \max\{S_N - K_1, 0\} - (K_2 - K_1),$$

где $0 < K_1 < K_2$.

В приведенных опционах функция выплаты f_N зависела лишь от значения S_N — стоимости акции в момент времени N.

Следующие опционы, обобщающие (1.24) и (1.25), естественно называть *опционами с последействием* как допускающие зависимость f_N от всех «прошлых» значений $(S_0, S_1, \dots, S_N)$.

Стандартный опцион купли с последействием (look back call option):

$$f_N = (S_N - K_N)^+ \qquad \text{с} \qquad K_N = \min(S_0, S_1, \ldots, S_N).$$

Стандартный опцион продажи с последействием (look back put option):

$$f_N = (K_N - S_N)^+ \qquad \text{с} \qquad K_N = \max(S_0, S_1, \ldots, S_N).$$

Азиатский арифметический опцион купли (Asian arithmetical call option):

$$f_N = (\overline{S}_N - K)^+,$$

Азиатский арифметический опцион продажи (Asian arithmetical put option):

$$f_N = (K - \overline{S}_N)^+ \qquad \text{с} \qquad \overline{S}_N = \frac{1}{1+N}\sum_{k=0}^{N} S_k.$$

Полезная информация о разнообразных видах опционов содержится в [9].

6. Введенные выше опционы Европейского типа характеризуются *фиксированным* и оговариваемым условиями контракта моментом исполнения N и видом платежной функции f_N.

Еще большее, однако, в финансовой практике получили распространение так называемые *опционы Американского типа*, отличительной особенностью которых является то, что момент предъявления опциона к исполнению может быть *произвольным* моментом из оговариваемого контрактом множества моментов $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Названия «Европейский» и «Американский» не отражают того географического факта, что они имеют хождение либо только в Европе, либо только в Америке; большая часть заключаемых в мире опционов является опционами именно Американского типа.

Пусть $n = 0, 1, \ldots, N$ суть моменты времени, в которые опцион может предъявляться к исполнению.

Предположим также, что задана (оговариваемая условиями контракта) последовательность функций $f = (f_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$, где $f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ интерпретируется как выплата покупателю опциона, если он предъявляет опцион к исполнению в момент времени n и соответствующая реализация цен акции есть $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$.

Опционы Американского типа, как было сказано выше, предоставляют его обладателям возможность произвольно выбирать момент исполнения τ в зависимости от «истории» (B, S)-рынка. Поскольку решение вопроса о том, предъявить ли опцион к исполнению в момент времени n (т.е. принять $\tau = n$) или продолжить его действие (т.е. считать

$\tau > n$), должно определяться при этом лишь имеющейся информацией до момента n включительно, то естественно считать, что τ является *марковским моментом* (или моментом остановки). Иными словами, $\tau = \tau(\omega)$ есть «не зависящая от будущего» случайная величина со значениями в множестве $\{0, 1, \dots, N\}$, характеризуемая свойством, что для всякого допустимого конечного n событие

$$\{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n,$$

где σ-алгебра $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Предположим, что $\tau = \tau(\omega)$ — момент предъявления опциона к исполнению. Согласно контракту продавец тогда должен быть готовым к платежу $f_\tau = f_{\tau(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{\tau(\omega)}(\omega))$ и, следовательно, он должен свои стратегии π выбирать так, чтобы в *любой* возможный момент времени $\tau = \tau(\omega)$ соответствующий капитал X_τ^π был бы не меньше f_τ.

Определение 3. Говорят, что для данного $x > 0$ и заданного набора неотрицательных функций платежа $f = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ с $f_n = f_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$ стратегия $\pi = (\pi_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ является (x, f, N)-*хеджем Американского типа*, если для любых $\omega \in \Omega = \{-1, 1\}^N$

$$X_0^\pi(\omega) = x$$

и всех $0 \leqslant n \leqslant N$

$$X_n^\pi(\omega) \geqslant f_n\big(S_0, S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)\big), \qquad \omega \in \Omega. \tag{1.26}$$

Если к тому же при некотором марковском моменте $\tau = \tau(\omega)$ выполнено равенство

$$X_{\tau(\omega)}^\pi(\omega) = f_{\tau(\omega)}\big(S_0, S_1(\omega), \dots, S_\tau(\omega)\big), \qquad \omega \in \Omega,$$

то (x, f, N)-хедж π называют *минимальным*.

Будем обозначать $\Pi(x, f, N)$ совокупность (x, f, N)-хеджей.

Заметим, что если π удовлетворяет свойству (1.26), то тогда и для любого конечного марковского момента $\tau = \tau(\omega)$, $\tau(\omega) \leqslant N$,

$$X_{\tau(\omega)}^\pi(\omega) \geqslant f_{\tau(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \dots, S_n(\omega), \qquad \omega \in \Omega. \tag{1.27}$$

Это свойство (x, f, N)-хеджирующих стратегий, а также рассмотренная выше связь между «инвестиционной проблемой» и «проблемой справедливой цены» опционов делает целесообразным следующее

Определение 4. Величина $\mathbb{C}_N^* = \mathbb{C}^*(f, N)$, определяемая как

$$\mathbb{C}_N^* = \inf\big\{x > 0 :\ \Pi(x, f, N) \neq \varnothing\big\}$$

называется *справедливой*, или *рациональной*, *стоимостью* опционов Американского типа с крайней датой исполнения N и системой функций выплат $f = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$.

7. Зададимся теперь следующим вопросом: «Каковы те *рациональные* моменты τ, в которые «разумный» покупатель должен предъявлять опцион к исполнению?».

Пусть стоимость опциона равна величине $\mathbb{C}_N^*$, определенной выше. Если покупатель решил предъявить опцион к исполнению в момент τ, то он заведомо получит платеж f_τ. Предположим, что на (B,S)-рынке существует инвестиционная самофинансируемая стратегия π с начальным капиталом $X_0^\pi = \mathbb{C}_N^*$, которая имеет в момент времени τ стоимость X_τ^π, строго большую, чем f_τ. Тогда это означает, что, выбирая τ как момент исполнения опциона, покупатель ведет себя *нерационально*, поскольку если бы вместо покупки опциона он сам организовал портфель π (предполагается, что такая возможность в принципе имеется), то в этот момент τ он имел бы капитал X_τ^π больший, нежели f_τ.

Эти рассуждения оправдывают следующее

Определение 5. Марковский момент $\tau^* = \tau^*(\omega)$ будем называть *рациональным*, или *разумным*, моментом исполнения (погашения) Американского опциона, если при начальном капитале $\mathbb{C}_N^*$ для *любой* стратегии $\pi \in \mathrm{SF}$ со свойством

$$X^\pi_{\tau^*(\omega)}(\omega) \geqslant f_{\tau^*(\omega)}\bigl(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{\tau^*(\omega)}(\omega)\bigr), \qquad \omega \in \Omega,$$

на самом деле имеет место равенство

$$X^\pi_{\tau^*(\omega)}(\omega) = f_{\tau^*(\omega)}\bigl(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{\tau^*(\omega)}(\omega)\bigr), \qquad \omega \in \Omega.$$

8. Всюду выше предполагалось, что $n = 0, 1, \dots, N < \infty$. В случае опционов Американского типа целесообразно также допускать, что (B,S)-рынок функционирует для всех *конечных* моментов времени $n = 0, 1, \dots$. В этом случае в качестве пространства Ω надо взять пространство всех реализаций последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, т.е. множество $\Omega = \{-1, +1\}^\infty$. Все остальные определения легко переносятся и на рассматриваемый случай.

Заметим также, что при рассмотрении опционов Американского типа иногда целесообразно допускать и марковские моменты τ, принимающие значения $+\infty$. В этом случае нужно доопределять значения f_∞ и X_∞^π. Из общей теории оптимальных правил остановки (см., например, [16]) известно, что удобно полагать $f_\infty = \overline{\lim} f_n$, $X_\infty^\pi = \overline{\lim} X_n^\pi$.

9. Расчет стоимостей $\mathbb{C}_N$ и $\mathbb{C}_N^*$ опционов Европейского и Американского типов, а также отыскание оптимальных хеджей (хеджирующих стратегий) и рациональных моментов остановки являются одними из основных проблем теории опционов в финансовой математике. Именно этим проблемам и посвящено последующее изложение.

§ 2. Теория расчета стоимости и хеджирующих стратегий для опционов Европейского типа

1. Будем рассматривать (B, S)-рынок, определяемый соотношениями (1.1) и (1.2), начальными данными (B_0, S_0) и параметрами a, b и r такими, что $-1 < a < r < b$. Предполагается также, что на исходном дискретном пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ с $\Omega = \{-1,1\}^N$ задано семейство вероятностных мер $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}\}$, причем относительно каждой из мер $\mathbf{P}$ последовательность $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N)$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{P}(\rho_1 = b) = p$, $\mathbf{P}(\rho_1 = a) = q$, где $p + q = 1$ и $0 < p < 1$.

Пусть также $\pi = (\pi_n)$ — самофинансируемая стратегия и $X^\pi = (X_n^\pi)$ — отвечающий этой стратегии капитал, состоящий из средств, помещенных на банковский счет B и находящихся в акциях S, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Переходя к задаче отыскания справедливой стоимости опциона $\mathbb{C}_N$, отметим прежде всего, что с точки зрения классических задач о расчетах в азартных играх* рассматриваемая сейчас (в определенном смысле тоже *игровая*) задача выглядит «нетрадиционно», поскольку значения вероятности p *a priori* не известны. Но заметим, однако, что условие хеджирования (1.21) сформулировано как свойство для *всех* $\omega \in \Omega = \{-1,1\}^N$, которое в силу конечности множества Ω и условия $0 < p < 1$ равносильно тому, что (1.21) имеет место $\mathbf{P}$-п.н. для *любой* меры $\mathbf{P}$ из семейства $\mathcal{P}$. Поэтому, если для стратегии π свойство (1.21) выполнено $\mathbf{P}^*$-п.н. относительно *некоторой* меры $\mathbf{P}^*$, то оно будет выполнено и $\mathbf{P}$-п.н. для *любой* меры $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ и для *всех* $\omega \in \Omega$.

Это обстоятельство объясняет тот несколько неожиданный на первый взгляд результат теории расчета стоимости опционов, что величина $\mathbb{C}_N$ выражается как усреднение по некоторой мере $\mathbf{P}^*$ из семейства $\mathcal{P}$, характеристическим свойством которой является ее «мартингальность» (см. ниже).

2. Пусть $\pi = (\pi_n)$ — некоторая самофинансируемая стратегия, $\pi \in \mathrm{SF}$, и $X^\pi = (X_n^\pi)$ — отвечающий ей капитал с $X_0^\pi = x$.

Положим

$$M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N. \tag{2.1}$$

В силу (1.19) приращение

$$\begin{aligned} \Delta M_n^\pi &= \frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \frac{X_n^\pi - (1-r)X_n^\pi}{B_{n-1}(1-r)} \\ &= \frac{\Delta X_n^\pi - rX_n^\pi}{B_n} = \frac{\gamma_n S_{n-1}}{B_n}(\rho_n - r). \end{aligned} \tag{2.2}$$

---

*Напомним, что первая книга по теории вероятностей — книга X. Гюйгенса — называлась «О расчетах в азартной игре» («De Ratiociniis in Alea Ludo», 1657).

Пусть

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - r) \qquad \text{и} \qquad \Delta m_n = (\rho_n - r). \tag{2.3}$$

Из (2.2) тогда получаем, что для $n \geqslant 1$

$$M_n^\pi = M_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k S_{k-1}}{B_k} \Delta m_k. \tag{2.4}$$

Если $\mathbf{E}$ обозначает усреднение по мере $\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{E}(\rho_1 - r) = a(1-p) + bp - r = (b-a)p - (r-a).$$

Отсюда видно, что если

$$p = p^* = \frac{r-a}{b-a} \tag{2.5}$$

и $\mathbf{P}^*$ — соответствующая этому значению p^* мера из $\mathcal{P}$, то последовательность $(m_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ образует *мартингал*:

$$\mathbf{E}^*(m_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = m_{n-1}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{E}^*$ — усреднение по мере $\mathbf{P}^*$.

Из (2.4) тогда (в силу $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримости величин $\gamma_k S_{k-1}/B_k$) следует, что последовательность $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ также является мартингалом и, следовательно, $\mathbf{E}^* M_N^\pi = M_0^\pi$ (для любой стратегии $\pi \in \mathrm{SF}$). Отсюда и из (2.1) находим, что

$$\mathbf{E}^*(1+r)^{-N} X_N^\pi = x. \tag{2.7}$$

Поэтому, если стратегия $\pi \in \Pi(x, f_N)$, то в силу (1.21) из (2.7) получаем, что $x \geqslant \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N$. Если к тому же хедж π является *минимальным*, т.е. выполнено свойство (1.22), то $x = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N$.

Резюмируя, получаем следующий результат.

Лемма 1 (необходимость). *Пусть на (B, S)-рынке самофинансируемая стратегия π является (x, f_N)-хеджем. Тогда*

$$x \geqslant \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N. \tag{2.8}$$

Если к тому же (x, f_N)-хедж π является минимальным, то

$$x = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{E}^*$ — усреднение по мере $\mathbf{P}^*$ такой, что

$$\mathbf{P}^*(\rho_n = b) = p^*, \qquad \mathbf{P}^*(\rho_n = a) = 1 - p^*, \qquad p^* = \frac{r-a}{b-a}. \tag{2.10}$$

3. Структура рассматриваемого (B,S)-рынка такова, что в действительности условие (2.9) на x и f_N оказывается и *достаточным* для существования минимального самофинансируемого (x, f_N)-хеджа.

Лемма 2 (достаточность). *Пусть начальный капитал* $x > 0$ *и функция выплаты* $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ *таковы, что выполнено условие* (2.9). *Тогда в классе* $\Pi(x, f_N)$ *существует минимальный* (x, f_N)*-хедж* $\pi^* \in \mathrm{SF}$.

Доказательство. Определим величины

$$M_n^* = \mathbf{E}^*\left(\frac{f_N}{B_N}\,\middle|\,\mathcal{F}_n\right), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{E}^*$ — усреднение по мере $\mathbf{P}^*$ такой, что выполнено (2.10).

Ясно, что

$$M_0^* = \mathbf{E}^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right), \qquad M_N^* = \frac{f_N}{B_N} \tag{2.12}$$

и последовательность $(M_n^*, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)_{0\leqslant n\leqslant N}$ образует мартингал.

Алгебры $\mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $n \geqslant 1$, являются алгебрами, порожденными независимыми случайными величинами, принимающими всего лишь два значения. Согласно приводимой в § 3 лемме 3 это дает возможность *представления* мартингала $(M_n^*, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)_{0\leqslant n\leqslant N}$ в виде

$$M_n^* = M_0^* + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^*(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})\,\Delta m_k \tag{2.13}$$

с некоторыми неупреждающими (т.е. $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримыми) функциями $\alpha_k^* = \alpha_k^*(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$, $k \geqslant 2$, $\alpha_1 = \mathrm{const}$ и $\Delta m_k = \rho_k - r$, где вероятность $\mathbf{P}^*(\rho_k = b) = p^* = (r-a)/(b-a)$.

Если обозначить

$$\gamma_k^* = \frac{\alpha_k^* B_k}{S_{k-1}}, \qquad k \geqslant 1, \tag{2.14}$$

то становится понятным, что (2.13) можно переписать в виде

$$M_n^* = M_0^* + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^* S_{k-1}}{B_k}\,\Delta m_k, \tag{2.15}$$

сходном с (2.4).

Покажем, что если выполнено условие (2.9), которому можно придать следующую форму

$$\frac{x}{B_0} = \mathbf{E}^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right), \tag{2.16}$$

то найдется стратегия $\pi^* \in \mathrm{SF}$ такая, что отвечающий ей нормированный капитал

$$M_n^{\pi^*} \equiv \frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}$$

будет в точности совпадать с M_n^*, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Действительно, пусть начальный капитал есть x. Имея $\gamma_1^* = \alpha_1 B_1/S_0$, определим β_1^* из соотношения (ср. с (1.11))

$$x = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0. \tag{2.17}$$

Иначе говоря, положим

$$\beta_1^* = \frac{x - \gamma_1^* S_0}{B_0}, \qquad \pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*). \tag{2.18}$$

Рассмотрим для так определенного портфеля π_1^* его капитал

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1. \tag{2.19}$$

Тогда его дисконтируемый капитал

$$\begin{aligned} M_1^{\pi^*} &= \frac{X_1^{\pi^*}}{B_1} = \beta_1^* + \gamma_1^* \frac{S_1}{B_1} = \frac{x}{B_0} + \gamma_1^* \left(\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0} \right) \\ &= \frac{x}{B_0} + \frac{\alpha_1^* B_1}{S_0} \left(\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0} \right) = \frac{x}{B_0} + \alpha_1^* \left(\frac{S_1}{S_0} - \frac{B_1}{B_0} \right) \\ &= \frac{x}{B_0} + \alpha_1^*(\rho_1 - r) = M_0^* + \alpha_1^*(\rho_1 - r) = M_1^*. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Аналогично, имея γ_2^*, определяем β_2^* по формуле

$$\beta_2^* = \frac{X_1^{\pi^*} - \gamma_2^* S_1}{B_1} \tag{2.21}$$

и полагаем $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$.

Дальнейшее построение величин $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ производится по индукции.

Как и в (2.20), находим, что при всех n

$$M_n^{\pi^*} = M_n^* \tag{2.22}$$

и, значит,

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} = M_n^{\pi^*} = M_n^* = \mathbf{E}^* \left(\frac{f_N}{B_N} \,\middle|\, \mathcal{F}_n \right), \tag{2.23}$$

или, равносильно,

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^* \left((1+r)^{-(N-n)} f_N \mid \mathcal{F}_n \right). \tag{2.24}$$

В частности, $\mathbf{P}^*$-п.н. $X_n^{\pi^*} \geqslant 0$ для всех n и

$$X_N^{\pi^*} = f_N. \tag{2.25}$$

Как уже отмечалось выше, выполнение (2.25) $\mathbf{P}^*$-п.н. равносильно (поскольку $0 < p^* < 1$) его выполнению и при *всех* $\omega \in \Omega$. Вместе с равенством $X_0^{\pi^*} = x$ это означает, что при выполнении условия $x = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N$ стратегия π^* является минимальным (x, f_N)-хеджем. Самофинансируемость π^* следует из конструкции.

Лемма доказана.

4. Опираясь на установленные леммы 1 и 2, сформулируем следующий основной результат относительно расчета стоимости опционов Европейского типа, структуры оптимальной стратегии и эволюции соответствующего капитала (ср. с [1], [2], [4], [5]).

Теорема 1. 1) *В условиях (B, S)-рынка справедливая (рациональная) стоимость $\mathbb{C}_N$ опционов с исполнением в момент времени N, функцией платежа $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ и использованием самофинансируемых стратегий определяется формулой*

$$\mathbb{C}_N = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N, \tag{2.26}$$

где $\mathbf{E}^*$ — усреднение по мере $\mathbf{P}^*$ такой, что

$$\mathbf{P}^*(\rho_1 = b) = p^* = \frac{r-a}{b-a}.$$

2) *Существует минимальный самофинансируемый $(\mathbb{C}_N, f_N)$-хедж $\pi^* = (\pi_n^*)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ такой, что эволюция соответствующего ему капитала $X^{\pi^*} = (X_n^{\pi^*})_{0 \leqslant n \leqslant N}$ задается формулами*

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^*((1+r)^{-(N-n)} f_N \mid \mathcal{F}_n). \tag{2.27}$$

При этом $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримые компоненты $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ определяются равенствами

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* B_n}{S_{n-1}} \tag{2.28}$$

(с α_n^* из разложения (2.13)) и

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}. \tag{2.29}$$

Доказательство. 1) В соответствии с определением 2 из § 1 $\mathbb{C}_N = \inf\{x > 0\colon \Pi(x, f_N) \neq \varnothing\}$. Понятно, что в рассматриваемой (B, S)-модели (для заданных N и f_N) класс $\Pi(x, f_N)$ не пуст по крайней мере для больших x. Так что заведомо $\mathbb{C}_N < \infty$.

Из неравенства (2.8) в лемме 1 следует, что $\mathbb{C}_N^* \geqslant \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N$. С другой стороны, в силу леммы 2 существует (x, f_N)-хедж с начальным капиталом $x = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N$. Тем самым $\mathbb{C}_N^* = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f_N$.

2) Утверждение (2.27) доказано в лемме 2. Из доказательства этой леммы следуют также и формулы (2.28) и (2.29).

5. Пусть N — терминальный момент, т.е. момент исполнения опциона, π^* — минимальный хедж и $X_N^{\pi^*}$ — соответствующий терминальный капитал:

$$X_N^{\pi^*} = \beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N.$$

Рассмотрим ту неисключаемую ситуацию, когда $\beta_N^* < 0$ (в то время как $\gamma_N^* > 0$). В этом случае

$$\gamma_N^* S_N = X_N^{\pi^*} + |\beta_N^*| B_N = f_N + |\beta_N^*| B_N,$$

что можно интерпретировать следующим образом: *капитал $\gamma_N^* S_N$, получаемый из акций, слагается из выплаты f_N покупателю опциона и возврата долга, взятого с банковского счета.*

Аналогичная интерпретация может быть дана и в случае $\gamma_N^* < 0$ (в то время как $\beta_N^* > 0$).

6. В изложенной выше схеме формирования капитала $X^\pi = (X_n^\pi)$ предполагалось, что его изменение может происходить *только* за счет «внутренних» изменений средств, находящихся на банковском счете и в акциях. Не допускается ни отток капитала (например, на потребление, налоги, операционные издержки, накладные расходы, и т.д.), ни его приток (например, за счет дивидендов от акций).

В этом пункте будет показано, как можно распространять предшествующие результаты с учетом указанных возможностей. Будем предполагать заданной последовательность $g = (g_n)$ функций $g_n = g_n(\omega)$, являющихся $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми, $g_0 = 0$.

Относительно рассматриваемых стратегий $\pi = (\pi_n)$ с $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ будем предполагать следующее. В момент $n = 0$ начальный капитал есть $X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$. Преобразование портфеля $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ в $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ происходит с учетом значения g_1, т.е. β_1 и γ_1 должны быть такими, что

$$\beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 = X_0^\pi - g_1.$$

Тем самым, если $g_1 \geqslant 0$, то начальный капитал X_0^π уменьшается на величину «накладных расходов» g_1. Если же $g_1 \leqslant 0$, то этот случай может рассматриваться как приток капитала извне, например, за счет дивидендов.

При объявлении в момент $n = 1$ новых значений B_1 и S_1, капитал X_1^π становится равным $\beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1$ и, следовательно, приращение $\Delta X_1^\pi = X_1^\pi - X_0^\pi$ определяется формулой

$$\Delta X_1^\pi = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1 - g_1.$$

Аналогичным образом и для любых n

$$\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} = X_{n-1}^\pi - g_n, \qquad X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$$

и
$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - g_n. \tag{2.30}$$
Отсюда с учетом (1.1) и (1.2)
$$\Delta X_n^\pi = r X_{n-1}^\pi + \gamma_n (\rho_n - r)\, S_{n-1} - (1+r)\, g_n. \tag{2.31}$$

Положим
$$Y_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N. \tag{2.32}$$
Тогда из (2.31) находим, что
$$\Delta Y_n^\pi = \Delta M_n^\pi - \Delta G_n, \tag{2.33}$$
где
$$M_n^\pi = M_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k S_{k-1}}{B_k}\, \Delta m_k, \tag{2.34}$$
$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k(1+r)}{B_k}, \tag{2.35}$$
$G_0 = 0$, $M_0^\pi = X_0^\pi / B_0$, $\Delta m_k = \rho_k - r$ (см. (2.3)).

Процесс $M^\pi = (M_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ является мартингалом и, следовательно, процесс

Y^π — мартингал, если $g_n \equiv 0$,

Y^π — супермартингал, если $g_n \geqslant 0$,

Y^π — субмартингал, если $g_n \leqslant 0$.

Ясно, что
$$\mathbf{E}^* Y_N^\pi = \mathbf{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_0(1+r)^N} = \frac{x}{B_0} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathbf{E}^* g_k}{B_0(1+r)^{k-1}}. \tag{2.36}$$
Отсюда видно, что если стратегия π является (x, f_N)-хеджем, то должно быть выполнено следующее неравенство:
$$x \geqslant \mathbf{E}^* \left[(1+r)^{-N} f_N + \sum_{k=1}^{N} \frac{g_k}{(1+r)^{k-1}} \right]. \tag{2.37}$$

Если к тому же (x, f_N)-хедж π является минимальным, то
$$x = \mathbf{E}^* \left[(1+r)^{-N} f_N + \sum_{k=1}^{N} \frac{g_k}{(1+r)^{k-1}} \right]. \tag{2.38}$$

Покажем теперь, что для *заданной* последовательности функций $g = (g_n)$ при выполнении условия (2.38) *существует* минимальный (x, f_N)-хедж.

Действительно, определим мартингал $M^* = (M_n^*)$, полагая

$$M_n^* = \mathbf{E}^*\left(\frac{f_N}{B_N} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(1+r)g_k}{B_k} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right). \tag{2.39}$$

Заметим, что в силу (2.38)

$$M_0^* = \frac{x}{B_0}. \tag{2.40}$$

Воспользуемся представлением мартингала M^* в виде (2.13):

$$M_n^* = M_0^* + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \Delta m_k, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{2.41}$$

и покажем, что, имея $g = (g_n)$ и $\alpha^* = (\alpha_n^*)$, можно построить минимальный (x, f_N)-хедж π^* такой, что процесс $M^{\pi^*} = (M_n^{\pi^*})$ с

$$M_n^{\pi^*} = \frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1+r}{B_k} g_k \tag{2.42}$$

является мартингалом, совпадающим с $M^* = (M_n^*)$.

Имея начальный капитал x и величины α_1^*, B_1, S_0, g_1, положим

$$\gamma_1^* = \frac{\alpha_1^* B_1}{S_0},$$

а β_1^* определим из соотношения (ср. с (2.17)) $x_1 - g_1 = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0$:

$$\beta_1^* = \frac{x - g_1 - \gamma_1^* S_0}{B_0}.$$

Имеем (ср. с (2.20))

$$\begin{aligned} M_1^{\pi^*} &= \frac{X_1^{\pi^*}}{B_1} + \frac{1+r}{B_1} g_1 = \beta_1^* + \gamma_1^* \frac{S_1}{B_1} + \frac{1+r}{B_1} g_1 \\ &= \frac{x}{B_0} + \alpha_1^*(\rho_1 - r) + g_1 \left[\frac{1+r}{B_1} - \frac{1}{B_0}\right] = \frac{x}{B_0} + \alpha_1^*(\rho_1 - r) = M_1^*. \end{aligned}$$

Аналогичным образом строятся π_n^* и показывается, что $M_n^{\pi^*} = M_n^*$. Отсюда и из (2.39) находим

$$X_n^{\pi^*} = \mathbf{E}^*\left((1+r)^{-(N-n)} f_N + \sum_{k=n+1}^{N} (1+r)^{n+1-k} g_k \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right) \tag{2.43}$$

и, в частности, $X_N^{\pi^*} = f_N$ (для всех $\omega \in \Omega$).

Проведенные рассмотрения доказывают следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 1′. *Пусть $g = (g_n)$ — последовательность $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримых функций.*

1) *В условиях (B, S)-рынка справедливая (рациональная) стоимость $\mathbb{C}_N$ с исполнением в момент времени N, функцией платежа $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ определяется формулой*

$$\mathbb{C}_N = \mathbf{E}^* \left[(1+r)^{-N} f_N + \sum_{k=1}^{N} (1+r)^{1-k} g_k \right]. \tag{2.44}$$

2) *Существует минимальный $(\mathbb{C}_N, f_N)$-хедж $\pi^* = (\pi_n^*)$ такой, что эволюция соответствующего ему капитала $X^{\pi^*} = (X_n^{\pi^*})$ определяется формулой (2.43). При этом $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ задаются формулами*

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* B_n}{S_{n-1}}, \qquad \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1} - g_n}{B_{n-1}}. \tag{2.45}$$

З а м е ч а н и е. В рассматриваемой ситуации величина $\mathbb{C}_N$, определяемая как $\inf\{x : \Pi(x, f_N) \neq \varnothing\}$, может, вообще говоря, оказаться и отрицательной, если $g_n \geqslant 0$.

7. В связи с изложенной выше теорией расчета стоимости опционов Европейского типа уместно сейчас сделать комментарий, относящийся к так называемым *арбитражным* и *неарбитражным* возможностям (подробнее см. § 7).

О п р е д е л е н и е. Говорят, что самофинансируемая стратегия π является арбитражной, или приводит к арбитражной возможности, если отвечающий ей капитал $X^\pi = (X_n^\pi)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ таков, что:

a) $X_0^\pi = x \leqslant 0$,

b) $X_N^\pi(\omega) \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$,

c) $X_N^\pi(\omega) > 0$ для некоторых $\omega \in \Omega$.

Для рассматриваемой нами модели (B, S)-рынка для любой стратегии $\pi \in \mathrm{SF}$

$$\mathbf{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0}. \tag{2.46}$$

Отсюда видно, что здесь *всякая стратегия* $\pi \in \mathrm{SF}$ *заведомо является неарбитражной*: если бы π была арбитражной, то это противоречило бы выполнению равенства в (2.46).

§ 3. Лемма о представлении мартингалов

1. При доказательстве леммы 2 был использован один общий результат о *представлении* мартингалов (см. (2.13)), который ниже доказывается в лемме 3.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения b и a с вероятностями p и q соответственно. Будем предполагать, что $\mathbf{E}\rho_1 = r$, причем $-1 < a < r < b$ и, следовательно, $p = (r-a)/(b-a)$.

Положим $m_n = \sum_{k=1}^{n}(\rho_k - r)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1, \ldots, \rho_n)$. Ясно, что последовательность $m = (m_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$ является мартингалом.

Лемма 3. *Всякий мартингал $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})_{1 \leqslant n \leqslant N}$ с $\mathbf{E}M_n = 0$ допускает следующее представление по «базисному» мартингалу m:*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_k, \tag{3.1}$$

где α_k — $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримы, $k \geqslant 1$ $(\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\})$ и $\Delta m_k = \rho_k - r$.

Доказательство проведем, следуя [10, п. 15.1]. Поскольку M_n являются $\mathcal{F}_n$-измеримыми, то найдутся функции $f_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ с $x_i = a$, b такие, что

$$M_n(\omega) = f_n\big(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)\big), \qquad \omega \in \Omega.$$

Если предположить, что представление (3.1) справедливо, то тогда имели бы место равенства

$$\Delta M_n(\omega) = \alpha_n(\omega)\, \Delta m_n, \tag{3.2}$$

каждое из которых равносильно следующим двум:

$$f_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)) = \alpha_n(\omega)(b - r), \tag{3.3}$$

$$f_n\big(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a\big) - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)\big) = \alpha_n(\omega)(a - r). \tag{3.4}$$

Отсюда вытекает, что если представление (3.1) справедливо, то выполнены равенства

$$\frac{f_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{b - r} \\ = \frac{f_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a) - f_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{a - r}, \tag{3.5}$$

причем $\alpha_n(\omega)$ равно любому из этих выражений.

Эти рассмотрения подсказывают путь доказательства представления (3.1).

Именно, установим, что в условиях леммы свойство (3.5) выполнено. В самом деле, поскольку $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$ — мартингал, то $\mathbf{P}$-п.н.

$$\mathbf{E}\Big(f_n\big(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)\big) - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)\big) \mid \mathcal{F}_{n-1}\Big) = 0,$$

что равносильно тому, что ($\mathbf{P}$-п.н.)

$$pf_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),b\big)+(1-p)f_n\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),a\big)\\ = f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega)\big).$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{f_n(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),b)-f_{n-1}(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega))}{1-p}\\ = \frac{f_{n-1}(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega))-f_n(\rho_1(\omega),\dots,\rho_{n-1}(\omega),a)}{p},$$

которое в силу того, что $p=(r-a)/(b-a)$, $1-p=(b-r)/(b-a)$, превращается в равенство (3.5) и для всех $\omega\in\Omega$.

Элементарным образом теперь проверяется, что если определить $\alpha_n(\omega)$, $1\leqslant n\leqslant N$, равными левой или правой части равенства (3.5), то приходим к представлению (3.1).

Лемма доказана.

2. Чтобы подчеркнуть в (3.1) зависимость α_k и m_k от ρ, будем писать $\alpha_k=\alpha_k^{(\rho)}$ и $m_k=m_k^{(\rho)}$. Тогда (3.1) запишется в следующем виде:

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(\rho)}\Delta m_k^{(\rho)}, \tag{3.6}$$

или, равносильно,

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(\rho)}(\rho_k-r).$$

Понятно, что поскольку

$$\mathcal{F}_n=\sigma(\rho_1,\dots,\rho_n)=\sigma(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\sigma(\delta_1,\dots,\delta_n),$$

для M_n справедливы также и представления

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(\varepsilon)}\Delta m_k^{(\varepsilon)}, \tag{3.7}$$

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(\delta)}\Delta m_k^{(\delta)}, \tag{3.8}$$

где $\alpha_k^{(\varepsilon)}=\alpha_k^{(\varepsilon)}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k-1})$, $\alpha_k^{(\delta)}=\alpha_k^{(\delta)}(\delta_1,\dots,\delta_{k-1})$ и

$$\Delta m_k^{(\varepsilon)}=\varepsilon_k-(2p-1),\qquad \Delta m_k^{(\delta)}=\delta_k-p.$$

3. Поскольку предполагается, что $N<\infty$, то для мартингала $(M_n,\ \mathcal{F}_n,\mathbf{P})_{1\leqslant n\leqslant N}$ имеем

$$M_n=\mathbf{E}(M_N\mid\mathcal{F}_n). \tag{3.9}$$

Предположим сейчас, что величины M_N имеют следующую структуру:

$$M_N(\omega) = g\big(\Delta_N(\omega)\big), \tag{3.10}$$

где

$$\Delta_N(\omega) = \delta_1(\omega) + \cdots + \delta_N(\omega). \tag{3.11}$$

В этом предположении величины $\alpha_k^{(\delta)}$ в разложении (3.8) могут быть достаточно просто описаны.

Лемма 4. *В предположениях* (3.10), (3.11)

$$\alpha_k^{(\delta)} = G_{N-k}(\Delta_{k-1}; p), \tag{3.12}$$

где

$$G_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} \big[g(x+k+1) - g(x+k)\big]\, C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \tag{3.13}$$

и $\Delta_0 = 0$.

Доказательство. Поскольку $\Delta M_n = \alpha_n^{(\delta)} \Delta m_n^{(\delta)}$, то

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(\delta)} &= \frac{\mathbf{E}(M_N \mid \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 1) - \mathbf{E}(M_N \mid \delta_1, \ldots, \delta_{n-1})}{1-p} \\ &= \frac{\mathbf{E}(g(\Delta_N) \mid \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 1) - \mathbf{E}(g(\Delta_N) \mid \delta_1, \ldots, \delta_{n-1})}{1-p}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

На множестве $\{\omega\colon\ \Delta_{n-1} = x,\ \delta_n = 1\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,(g(\Delta_N) \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}g\,(x+1+\Delta_N-\Delta_n), \\ \mathbf{E}\,\big(g(\Delta_N) \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) &= \mathbf{E}g\,(x+\Delta_N-\Delta_{n-1}) \\ &= p\,\mathbf{E}g\,(x+1+\Delta_N-\Delta_n) + (1-p)\,\mathbf{E}g\,(x+\Delta_N-\Delta_n).\end{aligned}$$

Тем самым на этом множестве

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,\big(g(\Delta_N) \mid \mathcal{F}_n\big) - \mathbf{E}\,\big(g(\Delta_N) \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) \\ &\qquad = (1-p)\,\mathbf{E}\,\big[g(x+1+\Delta_N-\Delta_n) - g(x+\Delta_N-\Delta_n)\big] \\ &\qquad = (1-p) \sum_{k=0}^{N-n} \big[g(x+1+k) - g(x+k)\big] C_{N-n}^k p^k (1-p)^{N-n-k} \\ &\qquad = (1-p) G_{N-n}(x;p),\end{aligned}$$

и в силу (3.14) $\alpha_n^{(\delta)} = G_{N-n}(\Delta_{n-1}; p)$.

Лемма доказана.

§ 4. Европейские опционы с $f_N = f(S_N)$

1. Для стандартных Европейских опционов, описанных в § 1, «терминальная» функция выплаты f_N предполагается зависящей не от всех значений $S_0, S_1, \ldots, S_N$, а лишь от последнего значения S_N. Так, для Европейского опциона купли $f_N = (S_N - K)^+$, а для опциона продажи $f_N = (K - S_N)^+$, где K — некоторая заранее оговариваемая (договорная) цена, по которой осуществляется соответственно купля или продажа в момент времени N.

В случае рассмотрения подобных опционов с $f_N = f(S_N)$ формуле

$$\mathbb{C}_N = \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} f(S_N), \tag{4.1}$$

определяющей справедливую стоимость, можно придать более явный вид, основываясь на результате леммы 4.

2. С этой целью рассмотрим величину

$$X_n^* = \mathbf{E}^*\big((1+r)^{-(N-n)} f_N \mid \mathcal{F}_n\big), \tag{4.2}$$

определяющую значение капитала в момент времени n для минимального $(\mathbb{C}_N^*, f_N)$-хеджа (ср. с (2.27)) с $f_N = f(S_N)$.

Наряду с введенными в (3.13) функциями $G_n(x;p)$ определим

$$F_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} f\big(x(1+b)^k (1+a)^{n-k}\big) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{4.3}$$

Заметим, что

$$\prod_{n<k\leqslant N} (1+\rho_k) = (1+b)^{\Delta_N - \Delta_n} (1+a)^{(N-n)-(\Delta_N - \Delta_n)}, \tag{4.4}$$

где $\Delta_n = \delta_1 + \cdots + \delta_n$. Поэтому

$$\mathbf{E}^* f\Big(x \prod_{n<k\leqslant N} (1+\rho_k)\Big) = F_{N-n}(x;p^*), \tag{4.5}$$

где $p^* = (r-a)/(b-a)$ и

$$\begin{aligned} X_n^* &= \mathbf{E}^*\big((1+r)^{-(N-n)} f(S_N) \mid \mathcal{F}_n\big) \\ &= \mathbf{E}^*\big((1+r)^{-(N-n)} f(S_N) \mid S_n\big) = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}(S_n;p^*). \end{aligned} \tag{4.6}$$

В частности,

$$\mathbb{C}_N = X_0^* = (1+r)^{-N} F_N(S_0;p^*). \tag{4.7}$$

Рассмотрим теперь (в предположении $f_N = f(S_N)$) вопрос о структуре минимального хеджа $\pi^* = (\pi_n^*)$ с $\pi_n^* = (\gamma_n^*, \beta_n^*)$, где γ_n^* и β_n^* являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми функциями.

Пусть

$$M_N = \frac{X_N^{\pi^*}}{B_N} = \frac{f(S_N)}{B_N} = \frac{f(S_0(1+b)^{\Delta_N}(1+a)^{N-\Delta_N})}{B_N}. \qquad (4.8)$$

Обозначая входящую в правую часть (4.8) функцию через $g(\Delta_N)$, видим, что, с одной стороны (см. (2.22)),

$$M_N = M_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n^* S_{n-1}}{B_n}(\rho_n - r) = M_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n^* S_{n-1}}{B_n}(b-a)(\delta_n - p^*) \quad (4.9)$$

и, с другой стороны, согласно лемме 4

$$M_N = M_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{(\delta)}(\delta_n - p^*), \qquad (4.10)$$

где (см. (3.12) и (3.13))

$$\alpha_n^{(\delta)} = G_{N-n}(\Delta_{n-1}; p^*) \qquad (4.11)$$

с

$$g(x) = \frac{f(S_0(1+b)^x(1+a)^{N-x})}{B_N}. \qquad (4.12)$$

Поэтому

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^{(\delta)} B_n}{S_{n-1}(b-a)} = \frac{G_{N-n}(\Delta_{n-1}; p^*) B_n}{S_{n-1}(b-a)}. \qquad (4.13)$$

В силу (3.13) и (4.12)

$$G_{N-n}(x;p) = \frac{1}{B_N}\sum_{k=0}^{N-n}\left[f\left(S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{x+k+1}\right) - f\left(S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{x+k}\right)\right] C_{N-n}^k p^k (1-p)^{N-n-k}.$$

Если $x = \Delta_{n-1}$, то с учетом равенства

$$S_{n-1} = S_0(1+a)^{n-1}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\Delta_{n-1}}$$

находим, что

$$G_{N-n}(\Delta_{n-1};p) = \frac{1}{B_N}\sum_{k=0}^{N-n}\left[f\left(S_{n-1}(1+a)^{N-(n-1)}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k+1}\right) - f\left(S_{n-1}(1+a)^{N-(n-1)}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k}\right)\right] C_{N-n}^k p^k (1-p)^{N-n-k}$$

$$= \frac{1}{B_N} \sum_{k=0}^{N-n} \left[f\left(S_{n-1}(1+a)^{N-n} \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k (1+b) \right) \right.$$

$$\left. - f\left(S_{n-1}(1+a)^{N-n} \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k (1+a) \right) \right] C_{N-n}^k p^k (1-p)^{N-n-k}$$

$$= \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b);p) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a);p)}{B_N}.$$

Тем самым $\gamma_n^* = \gamma_n^*(S_{n-1})$, где

$$\gamma_n^*(S_{n-1}) = \frac{G_{N-n}(\Delta_{n-1};p^*)B_n}{S_{n-1}(b-a)} = (1+r)^{-(N-n)} \times \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b);p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a);p^*)}{S_{n-1}(b-a)}. \tag{4.14}$$

Имея в виду (2.29), находим также, что

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*}}{B_{n-1}} - \frac{\gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{F_{N-n+1}(S_{n-1};p^*)}{B_N} - (1+r)^{-(N-n)} \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b);p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a);p^*)}{B_{n-1}(b-a)}$$

$$= \frac{1}{B_N}\Big\{ F_{N-n+1}(S_{n-1};p^*) - (1+r) \times \Big[F_{N-n}\big(S_{n-1}(1+b);p^*\big) - F_{N-n}\big(S_{n-1}(1+a);p^*\big) \Big] \Big\}. \tag{4.15}$$

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ является неубывающей, то из (4.14) следует, что $\gamma_n^* \geqslant 0$ при всех n. Если интерпретировать отрицательность величин γ_n^* как *взятие акции взаймы* (так называемый шорт-селлинг — short-selling), то отмеченный факт означает, что в случае неубывающих функций $f(x)$ *минимальный хедж возможен без шорт-селлинга.*

Резюмируя полученные результаты, сведем их в следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на (B,S)-рынке рассматривается опцион Европейского типа с функцией выплаты $f_N = f(S_N)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Справедливая стоимость*

$$\mathbb{C}_N = (1+r)^{-N} F_N(S_0;p^*), \tag{4.16}$$

где $p^* = (r-a)/(b-a)$ и функция $F_N(x;p)$ определена в (4.3).

2. *Эволюция капитала X_n^*, $0 \leqslant n \leqslant N$, для минимального хеджа задается формулами*

$$X_n^* = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}(S_n;p^*), \tag{4.17}$$

где функции $F_{N-n}(x;p)$ определены в (4.3).

3. *Существует самофинансируемый минимальный хедж* $\pi^* = (\pi_n^*)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *с* $\pi_n^* = (\gamma_n^*, \beta_n^*)$, *где* γ_n^* *и* β_n^* *задаются формулами* (4.14) *и* (4.15).

3. Рассмотрим стандартный Европейский опцион купли с функцией выплаты

$$f(S_N) = (S_N - K)^+. \tag{4.18}$$

Согласно (4.3) в этом случае

$$F_N(S_0;p^*) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \max\left(0, S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K\right).$$

Пусть $k_0 = k_0(a,b,S_0,K)$ — то наименьшее целое, для которого

$$S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k_0} > K. \tag{4.19}$$

Если $k_0 > N$, то $F_N(S_0;p^*) = 0$ и, следовательно, в этом случае (см. (4.16)) цена $\mathbb{C}_N^* = 0$.

Будем теперь предполагать, что $k_0 \leqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_N &= (1+r)^{-N} F_N(S_0;p^*) \\ &= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k \\ &\quad - K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Обозначим

$$\widetilde{p} = \frac{1+b}{1+r} p^*, \tag{4.21}$$

$$\mathbb{B}(j,N;p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \tag{4.22}$$

Тогда (4.20) дает следующий результат, впервые полученный Коксом, Россом и Рубинштейном [1].

Теорема 3. *Для стандартного Европейского опциона купли с функцией выплаты* $f(S_N) = (S_N - K)^+$ *справедливая стоимость* $\mathbb{C}_N$ *задается формулой*

$$\mathbb{C}_N = S_0 \mathbb{B}(k_0, N; \widetilde{p}) - K(1+r)^{-N} \mathbb{B}(k_0, N; p^*), \tag{4.23}$$

где

$$k_0 = 1 + \left[\ln \frac{k}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln \frac{1+a}{1+b} \right]. \qquad (4.24)$$

Если $k_0 > N$, то $\mathbb{C}_N = 0$.

4. Из этого результата для *опциона купли* сразу можно получить формулу и для стоимости стандартного Европейского *опциона продажи* (обозначим ее $\mathbb{P}_N$) с функцией выплаты $f(S_N) = (K - S_N)^+$.

Действительно, $\max(0, K - S_N) = \max(S_N - K, 0) - S_N + K$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N &= \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} \max(0, K - S_N) \\ &= \mathbb{C}_N - \mathbf{E}^*(1+r)^{-N} S_N + K(1+r)^{-N}. \end{aligned}$$

Но $\mathbf{E}^* S_N = (1+r)^{-N} S_0$ и, следовательно, справедливо следующее тождество, называемое «паритетом колл-пут»:

$$\mathbb{P}_N = \mathbb{C}_N - S_0 + K(1+r)^{-N}. \qquad (4.25)$$

5. Приведем пример использования полученных формул для расчетов стоимости опционов и хеджирующих стратегий, заимствованный из [3]. В этом примере (B, S)-рынок является моделью ***рынка валюты***.

Предположим, что (S_n) описывает (случайную) эволюцию стоимости 100 US \$, измеряемую в швейцарских франках. Пусть $S_0 = 150$ SFR и цена S_1 в момент времени $n = 1$ может стать равной 180 SFR (повышение курса доллара) или 90 SFR (в случае понижения курса доллара).

Записывая S_1 в виде (1.2), находим, что

$$S_1 = S_0(1 + \rho_1),$$

где ρ_1 принимает два значения: $b = \frac{1}{5}$ (в случае повышения курса доллара) и $a = -\frac{2}{5}$ (в случае понижения).

Предположим также, что $B_0 = 1$ SFR и $r = 0$. Тем самым, помещение вклада на банковский счет не принесет прибыли, но и взятие некоторой ссуды взаймы не облагается процентами при ее возврате.

Пусть $N = 1$ и $f(S_1) = \max(0, S_1 - K)$, где $K = 150$ SFR. Иначе говоря, при повышении курса доллара покупатель предлагаемого ему Европейского опциона купли получит 180 SFR–150 SFR = 30 SFR; при понижении же курса $f(S_1) = 0$.

Если предположить, что повышение или понижение курса доллара происходит с вероятностью $\frac{1}{2}$ (т.е. $\mathbf{P}(\rho_1 = b) = \mathbf{P}(\rho_1 = a) = \frac{1}{2}$), то тогда $\mathbf{E} f(S_1) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ и по классическим воззрениям, идущим со времен Бернулли и Гюйгенса (см., например, [12, с. 397–402]), разумной платой за приобретение такого опциона была бы величина $\mathbf{E} f(S_1)$, т.е. 15 SFR.

Однако, это значение существенно зависит от вероятностного *предположения* о том, что $\mathbf{P}(\rho_1 = b) = p$, $\mathbf{P}(\rho_1 = a) = 1 - p$, где $p = \frac{1}{2}$. Если же $p \neq \frac{1}{2}$, то и $\mathbf{E} f(S_1)$ соответственным образом изменится.

Изложенная выше теория расчета стоимости опционов показывает, что в рассматриваемом случае для определения справедливой стоимости $\mathbb{C}_N$, устраивающей, как было объяснено, и покупателя и продавца опциона, надо производить все расчеты, исходя из значения $p = p^*$, где (в рассматриваемом случае)

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0+\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Если $N = 1$, то соответствующее значение $K_0 = K_0(a,b,S_0,K)$ с $a = -\frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, $S_0 = 150$, $K = 150$ равно (см. (4.19)) единице и поэтому (см. (4.20))

$$\mathbb{C}_1 = S_0 p^*(1+b) - Kp^* = S_0 p^* b = 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = 20.$$

Используя данную выше терминологию, можно сказать, что продавец опциона, получив от покупателя 20 SFR, обладает начальным капиталом $X_0 = 20$ SFR.

В соответствии с (1.10) можно считать, что в представлении $X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$ $X_0 = 20$, $\beta_0 = 0$, $B_0 = 1$, $\gamma_0 = \frac{2}{15}$.

Перед моментом времени $n = 1$ продавец должен так перераспределить свой начальный портфель (β_0, γ_0), превратив его в портфель (β_1, γ_1), чтобы после объявления о значении S_1 в момент времени $N = 1$ были бы удовлетворены условия контракта, включающие в себя выплату платежа покупателю и возврат долга (соответствующий отрицательным значениям β_n и γ_n), если таковой производился.

В соответствии с (4.14) оптимальное значение $\gamma_1 = \gamma_1^*(S_0)$, где

$$\begin{aligned}\gamma_1^* &= \frac{F_0(S_0(1+b);p^*) - F_0(S_0(1+a);p^*)}{S_0(b-a)}\\ &= \frac{f(S_0(1+b)) - f_0(S_0(1+a))}{S_0(b-a)} = \frac{f(S_0(1+b))}{S_0(b-a)}\\ &= \frac{\max\{0, S_0(1+b)-K\}}{S_0(b-a)} = \frac{b}{b-a} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Поскольку $X_0 = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0$ и $B_0 = 1$, то находим, что

$$\beta_1^* = X_0 - \gamma_1^* S_0 = 20 - \frac{1}{3} \cdot 150 = -30.$$

Интерпретация этих значений $\beta_1^* = -30$ и $\gamma_1^* = \frac{1}{3}$ состоит в следующем.

Отрицательность величины β_1^* означает, что эмитент совершает заем (равный 30 SFR). Таким образом, эмитент имеет $X_0 - \beta_1^* B_0 = 20+30 = 50$ (SFR), где $X_0 = 20$ — премия, полученная от покупателя. Значение

$\gamma_1^* = \frac{1}{3}$ означает, что на эти 50 SFR он может приобрести 33.33 US \$ (по курсу «150 SFR = 100 US \$»).

Рассмотрим теперь, что происходит после момента $N = 1$, когда был «объявлен» новый курс доллара (по отношению к SFR).

Возможны две ситуации.

1) Произошло повышение курса доллара ($\rho_1 = b$), т.е. в момент $N = 1$ «100 US \$ = 180 SFR». В этом случае продавец должен выплатить покупателю опциона $\max(0, 180 - 150) = 30$ (SFR). И он, действительно, это может сделать, поскольку для стратегии (β_1^*, γ_1^*)

$$X_1^* = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -30 + \frac{1}{3} \cdot 180 = 30 \text{ (SFR)},$$

что можно проинтерпретировать еще таким образом: капитал в SFR, т.е. $\gamma_1^* S_1$, оказывается равным $\frac{1}{3} \cdot 180 = 60$ (SFR) и его достаточно, чтобы выплатить X_1^* SFR покупателю и вернуть долг в 30 SFR на банковский счет, поскольку $\beta_1^* B_1 = -30$.

2) Произошло понижение курса доллара ($\rho_1 = a$), т.е. в момент $N = 1$ «100 US \$ = 90 SFR». В этом случае $f(S_1) = 0$, т.е. эмитент ничего не платит покупателю ($X_1^* = 0$), но должен выплатить долг в 30 SFR, взятый им с банковского счета. Но, имея 33.33 US \$ (т.е. $\gamma_1^* \cdot 100\$ = \frac{1}{3} \cdot 100\,\$$), эмитент может превратить их в швейцарские франки (по курсу «100 US \$ = 90 SFR»), получив в точности 30 SFR, которые он и возвратит на банковский счет.

6. В рамках схемы, рассмотренной в п. 6 § 2, предположим, что функция g_n имеет следующий вид: $g_n = c \cdot S_{n-1}$, где c — некоторая постоянная. Случай $c > 0$ соответствует накладным расходам, случай $c < 0$ — получению дивидендов.

В рассматриваемом случае (см. (2.43))

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}^*\left(\sum_{k=n+1}^{N} (1+r)^{n+1-k} g_k \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right) \\ &\qquad = c\,\mathrm{E}^*\big(S_n + (1+r)^{-1} S_{n+1} + \dots + (1+r)^{n+1-N} S_{N-1} \mid \mathcal{F}_n\big) \\ &\qquad = c(N-n)S_n. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Следовательно, если $f_N = f(S_n)$, то из (4.7) и (2.44) находим, что соответствующая рациональная стоимость

$$\mathbb{C}_N = (1+r)^{-N} F_N(S_0; p^*) + cNS_0, \tag{4.27}$$

где функция $F_N(S_0; p^*)$ определена в (4.3).

§ 5. Теория расчета стоимости, хеджирующих стратегий и момента исполнения для опционов Американского типа

1. Пусть снова (B, S) — финансовый рынок, описываемый соотношениями (1.1), (1.2), и пусть $f = (f_0, f_1, \ldots, f_N)$ — набор неотрицательных платежных функций $f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $0 \leqslant n \leqslant N < \infty$.

В соответствии со схемой, изложенной в п. 6, § 1, опционы Американского типа допускают, что, основываясь на «информации» $(\mathcal{F}_n)$ о цене акций на рынке, покупатель может предъявить опцион к исполнению в *любой* (марковский) момент $\tau = \tau(\omega)$, $0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant N$, $\omega \in \Omega$, обладающий свойством «независимости от будущего», означающим, что при любом n событие $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$.

Если покупатель предъявляет опцион к исполнению в момент времени τ, то продавец должен выплатить ему сумму $f_\tau = f_\tau(S_0, S_1, \ldots, S_\tau)$, которая определяется «историей» стоимостей акций $S_0, S_1, \ldots, S_\tau$. Мы будем предполагать, что в момент времени τ происходит закрытие контракта, подразумевая при этом, что оставшиеся после соответствующей выплаты f_τ средства могут находиться лишь на банковском счете.

2. Пусть $\pi = (\beta_1, \gamma)$ — некоторая самофинансируемая стратегия, т.е. стратегия, для которой β_n и γ_n, входящие в $\beta = (\beta_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, $\gamma = (\gamma_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми $(\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0)$ и такими, что

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0. \qquad (5.1)$$

Обозначим $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ капитал в момент времени n. Из условия (5.1) следует, что

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k). \qquad (5.2)$$

Рассмотрим введенные в (2.1) величины $M_n^\pi = X_n^\pi / B_n$. Последовательность $(M_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ является мартингалом и, поскольку $N < \infty$, для всякого марковского момента τ, $\tau(\omega) \leqslant N$, $\omega \in \Omega$,

$$\mathbf{E}^* M_\tau^\pi = M_0^\pi,$$

т.е.

$$X_0^\pi = \mathbf{E}^* \alpha^\tau X_\tau^\pi, \qquad (5.3)$$

где $\alpha = (1 + r)^{-1}$.

Предположим, что стратегия π является (x, f, N)-хеджем, т.е. $X_0^\pi = x$ и $X_n^\pi(\omega) \geqslant f_n(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega))$ для всех $0 \leqslant n \leqslant N$. Тогда из (5.3) в силу произвольности τ находим, что

$$x \geqslant \sup \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau, \qquad (5.4)$$

где sup берется по всем марковским моментам $0 \leqslant \tau \leqslant N$.

Если к тому же окажется, что (x, f, N)-хедж π является минимальным (т.е. существует момент остановки σ такой, что для всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство $X_\sigma^\pi = f_\sigma$), то тогда $x = X_0^\pi = \mathbf{E}^*\alpha^\sigma X_\sigma^\pi = \mathbf{E}^*\alpha^\sigma f_\sigma$ и, значит (см. (5.4)),

$$x = \sup_\tau \mathbf{E}^*\alpha^\tau f_\tau. \tag{5.5}$$

Оказывается, что это условие является и *достаточным* для существования минимального (x, f, N)-хеджа.

Лемма 1 (достаточность). *Пусть начальный капитал $x > 0$ и последовательность функций платежа $f = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ такова, что выполнено условие* (5.5). *Тогда в классе* $\Pi(x, f, N)$ *существует минимальный хедж Американского типа.*

Доказательство. Определим последовательность $Y = (Y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, полагая

$$Y_n = \sup_{n \leqslant \tau \leqslant N} \mathbf{E}^*\left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right). \tag{5.6}$$

Заметим, что в силу «дискретности» рассматриваемого вероятностного пространства величины Y_n являются $\mathcal{F}_n$-измеримыми.

Структура последовательности Y в теории оптимальных правил остановки ([14], [16]) хорошо изучена. Именно, $\mathbf{P}^*$-п.н.

$$Y_N = \frac{f_N}{B_N} \tag{5.7}$$

и для всех $0 \leqslant n \leqslant N-1$

$$Y_n = \max\left\{\frac{f_n}{B_n},\ \mathbf{E}^*(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right\}. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) видно, что, с одной стороны,

$$Y_n \geqslant \frac{f_n}{B_n} \qquad (\mathbf{P}^*\text{-п.н.}), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N, \tag{5.9}$$

и, с другой стороны,

$$Y_n \geqslant \mathbf{E}^*(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n), \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{5.10}$$

Иначе говоря, последовательность $Y = (Y_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ является *супермартингалом, мажорирующим последовательность* (f_n/B_n). Можно показать также ([14], [16]), что среди $(\mathcal{F}_n)$-согласованных процессов $Z = (Z_n)$, удовлетворяющих свойствам (5.9) и (5.10) с заменой $Y = (Y_n)$ на $Z = (Z_n)$, т.е. удовлетворяющих неравенствам

$$Z_n \geqslant \max\left\{\frac{f_n}{B_n},\ \mathbf{E}^*(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right\}, \tag{5.11}$$

наименьший процесс совпадает с $Y = (Y_n)$.

Тем самым, $Y = (Y_n)$ является *наименьшим* супермартингалом, мажорирующим последовательность $(f_n/B_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ с граничным условием (5.7).

Из общей теории ([14], [16]) известно также, что марковский момент

$$\tau_n^* = \min\left\{n \leqslant k \leqslant N : Y_k = \frac{f_k}{B_k}\right\} \tag{5.12}$$

является *оптимальным* в классе всех марковских моментов τ со свойством $n \leqslant \tau(\omega) \leqslant N$, $\omega \in \Omega$:

$$\mathbf{E}^*\left(\frac{f_{\tau_n^*}}{B_{\tau_n^*}}\,\middle|\,\mathcal{F}_n\right) = \sup_{n\leqslant\tau\leqslant N} \mathbf{E}^*\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\,\middle|\,\mathcal{F}_n\right). \tag{5.13}$$

Будем обозначать $\tau^* = \tau_0^*$. Тогда в силу предположения $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$

$$Y_0 = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant N} \mathbf{E}^* \frac{f_\tau}{B_\tau} = \mathbf{E}^* \frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}}. \tag{5.14}$$

Поскольку последовательность $Y = (Y_n)$ является супермартингалом (относительно меры $\mathbf{P}^*$), то согласно разложению Дуба ([17, с. 515]) имеет место представление

$$Y_n = M_n - A_n, \tag{5.15}$$

где $A_0 = 0$, $M_0 = Y_0$, последовательность $M = (M_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ является мартингалом, а последовательность $A = (A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ — неубывающей и предсказуемой, т.е. A_n — $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримы. Чтобы получить (5.15), достаточно положить для $n > 0$

$$M_n = \sum_{k=1}^n \bigl[Y_k - \mathbf{E}^*(Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1})\bigr], \qquad A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}^*[Y_{k-1} - Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}].$$

По аналогии с (2.15) мартингал $M = (M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ может быть представлен в виде

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^* S_{k-1}}{B_k}\,\Delta m_k, \tag{5.16}$$

где $\Delta m_k = \rho_k - r$ и γ_k^* — $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримы.

Таким образом,

$$Y_n = Y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^* S_{k-1}}{B_k}\,\Delta m_k - A_n \tag{5.17}$$

и $Y_n \leqslant M_n$, $0 \leqslant n \leqslant N$, причем $Y_0 = M_0 = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant N} \mathbf{E}^*(f_\tau/B_\tau)$.

Имея величины M_0 и γ_n^*, $1 \leqslant n \leqslant N$, построим по той же схеме, что и в § 2, стратегию $\pi^* = (\gamma^*, \beta^*)$ с $\pi_0^* = \pi_1^*$ (см. построения в (2.17), (2.21)) и начальным капиталом $x = \sup \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau$. Соответствующий ей капитал $X^{\pi^*} = (X_n^{\pi^*})$ будет тогда таким, что нормированные величины $M_n^{\pi^*} = X_n^{\pi^*}/B_n$ удовлетворяют соотношению (ср. с (2.22))

$$M_n^{\pi^*} = M_0^{\pi^*} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k^* S_{k-1}}{B_k} \Delta m_k. \tag{5.18}$$

Поскольку $M_0^{\pi^*} = x/B_0 = M_0$, то из сопоставления (5.18) и (5.16) находим, что $M_n = M_n^{\pi^*}$ и, значит (с учетом того, что $Y_n = M_n - A_n$, $A_n \geqslant 0$),

$$\begin{aligned} X_n^{\pi^*} &= M_n^{\pi^*} B_n = M_n B_n = (Y_n + A_n) B_n \geqslant Y_n B_n \\ &= \sup_{n \leqslant \tau \leqslant N} \mathbf{E}^* \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \,\middle|\, \mathcal{F}_n \right) B_n = \sup_{n \leqslant \tau \leqslant N} \mathbf{E}^* (\alpha^{\tau - n} f_\tau \mid \mathcal{F}_n). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Отсюда, в частности, следует, что $X_n^{\pi^*} \geqslant f_n$ для всех $0 \leqslant n \leqslant N$ и, поскольку $M_0 = Y_0$,

$$X_0^{\pi^*} = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant N} \mathbf{E}^* (\alpha^\tau f_\tau). \tag{5.20}$$

Таким образом, построенная стратегия π^* является (x, f, N)-хеджем с $x = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant N} \mathbf{E}^*(\alpha^\tau f_\tau)$.

Заметим, что в силу (5.8) и (5.12) последовательность $Y = (Y_n)$ на множестве $[\![0, \tau^*[\![= \{(n, \omega) : 0 \leqslant n < \tau^*(\omega)\}$ удовлетворяет *мартингальному* свойству:

$$Y_n(\omega) = \mathbf{E}^*(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)(\omega), \tag{5.21}$$

и поскольку на этом множестве $A_n(\omega) = 0$, то в силу (5.19)

$$X_n^{\pi^*}(\omega) = \sup_{n \leqslant \tau \leqslant N} \mathbf{E}^*(\alpha^{\tau - n} f_\tau \mid \mathcal{F}_n), \qquad (n, \omega) \in [\![0, \tau^*[\![. \tag{5.22}$$

Из определения момента $\tau^* = \tau_0^* = \min\{0 \leqslant n \leqslant N : Y_n = f_n/B_n\}$, мартингального свойства (5.21) и приведенной выше формулы

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \big(Y_{k-1} - \mathbf{E}^*[Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] \big)$$

следует, что $A_{\tau^*(\omega)}(\omega) = 0$. В силу же (5.22) и (5.15)

$$X_{\tau^*(\omega)}^{\pi^*}(\omega) = Y_{\tau^*(\omega)}(\omega)\, B_{\tau^*(\omega)} = f_{\tau^*(\omega)}(\omega), \tag{5.23}$$

где $f_{\tau^*(\omega)}(\omega) = f_{\tau^*(\omega)}(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{\tau^*(\omega)}(\omega))$.

Тем самым (x, f, N)-хедж π^*, где x определено в (5.5), является (в соответствии с определением 3 в § 1) минимальным.

Лемма доказана.

3. Следующий результат является основным в проблематике расчетов стоимости опционов Американского типа.

Теорема 1. 1) *В условиях (B,S)-рынка справедливая стоимость $\mathbb{C}_N^*$ опциона Американского типа с крайней датой исполнения N и системой неотрицательных платежных функций $f = (f_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ определяется формулой:*

$$\mathbb{C}_N^* = \sup \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau, \tag{5.24}$$

где $\alpha = (1+r)^{-1}$, а $\sup$ берется по всем марковским моментам $\tau = \tau(\omega)$ таким, что $0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant N$, $\omega \in \Omega$, и достигается при некотором τ^*.

2) *Момент τ^* является рациональным тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{E}^* \alpha^{\tau^*} f_{\tau^*} = \sup_\tau \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau. \tag{5.25}$$

3) *Множество $\Pi(\mathbb{C}_N^*, f, N)$ непусто и состоит из минимальных хеджей.*

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы, сделаем следующее замечание.

Из (5.24) и (5.25) видим, что и величина $\mathbb{C}_N^*$ и рациональный момент τ^* находятся в результате решения *одной и той же* (!) задачи об оптимальной остановке «$\sup_\tau \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau$».

Из результатов общей теории решения таких задач ([14], [16]) известно, что их своеобразие состоит в том, что, вообще говоря, нельзя найти $\mathbb{C}_N^*$ без одновременного отыскания τ^* и наоборот. Тем самым, если удается решить сформулированную задачу об оптимальной остановке «$\sup_\tau \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau$», то в результате мы получаем и значение рациональной стоимости $\mathbb{C}_N^*$ и описание структуры рационального момента остановки τ^*.

Доказательство теоремы. 1) Утверждение (5.24) и тот факт, что верхняя грань в (5.24) достигается для некоторого момента τ^*, вытекают из леммы 1 и неравенства (5.4).

2) Пусть стратегия π^* является $(\mathbb{C}_N^*, f, N)$-хеджем (существование такой стратегии следует из леммы 1). Тогда, если τ^* — рациональный момент исполнения опциона, то $X_{\tau^*}^{\pi^*} = f_{\tau^*}$ и, значит, согласно (5.3)

$$\mathbb{C}_N^* = X_0^{\pi^*} = \mathbf{E}^* \alpha^{\tau^*} X_{\tau^*}^{\pi^*} = \mathbf{E}^* \alpha^{\tau^*} f_{\tau^*},$$

что в силу (5.24) и доказывает (5.25).

Обратно, пусть σ — некоторый марковский момент со свойством

$$\mathbf{E}^* \alpha^\sigma f_\sigma = \sup_\tau \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau. \tag{5.26}$$

Пусть π — некоторая самофинансируемая стратегия с начальным капиталом $\mathbb{C}_N^*$ такая, что $X_\sigma^\pi \geqslant f_\sigma$. Тогда в силу (5.3) и (5.26)

$$X_0^\pi = \mathbf{E}^* \alpha^\sigma X_\sigma^\pi \geqslant \mathbf{E}^* \alpha^\sigma f_\sigma = \sup_\tau \mathbf{E}^* \alpha^\tau f_\tau = \mathbb{C}_N^*.$$

Но $X_0^\pi = \mathbb{C}_N^*$ и, значит, $\mathbf{P}^*(X_\sigma^\pi > f_\sigma) = 0$. Иначе говоря, если момент σ удовлетворяет (5.26), то он является рациональным ($X_\sigma^\pi = f_\sigma$).

3) Согласно лемме 1 множество $\Pi(\mathbb{C}_N^*, f, N)$ непусто. Если стратегия π^* является $(\mathbb{C}_N^*, f, N)$-хеджем, то для любого момента τ^* из множества рациональных моментов (согласно доказанному оно непусто) выполнено равенство $X_{\tau^*}^{\pi^*} = f_{\tau^*}$, что и означает минимальность $(\mathbb{C}_N^*, f, N)$-хеджа π^*. Теорема доказана.

4. Изложенные выше соображения для расчета опциона Американского типа применимы в схеме B, S-рынка с накладными расходами и дивидендами, предложенной в п. 6 § 2. При этом величины рациональной стоимости $\mathbb{C}_N^*$ и рациональный момент остановки τ^* находятся в результате решения одной и той же задачи об оптимальной остановке (см. [16]):

$$Z \ll \sup_\tau \mathbf{E}^*\left(\alpha^\tau f_\tau + \sum_{k=1}^{\tau} \alpha^{k-1} g_k\right), \qquad \alpha = (1+r)^{-1}.$$

Справедливо следующее обобщение Теоремы 1:

Теорема 1$'$. *Пусть $g = (g_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ — последовательность $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримых функций.*

1) *В условиях (B,S)-рынка с накладными расходами g справедливая стоимость $\mathbb{C}_N^*$ опциона Американского типа с крайней датой исполнения N и системой платежных функций $f = (f_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ определяется формулой*

$$\mathbb{C}_N^* = \sup_\tau \mathbf{E}^*\left(\alpha^\tau f_\tau + \sum_{k=1}^{\tau} \alpha^{k-1} g_k\right),$$

где $\alpha = (1+r)^{-1}$, супремум берется по всем моментам остановки $0 \leqslant \tau \leqslant N$.

2) *Момент остановки τ^* рационален тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{E}^*\left(\alpha^{\tau^*} f_{\tau^*} + \sum_{k=1}^{\tau^*} \alpha^{k-1} g_k\right) = \sup_\tau \mathbf{E}^*\left(\alpha^\tau f_\tau + \sum_{k=1}^{\tau^*} \alpha^{k-1} g_k\right).$$

3) *Множество $\Pi(\mathbb{C}_N^*, f, N)$ непусто и состоит из минимальных хеджей.*

§ 6. Примеры расчетов в опционах Американского типа

1. В соответствии с теорией, изложенной в § 5, отыскание стоимости $(\mathbb{C}_N^*)$ опционов Американского типа с функциями выплаты $f = (f_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ сводится к решению задачи об оптимальной остановке

$$«\sup_\tau \mathbf{E}^*((1+r)^{-\tau} f_\tau)». \tag{6.1}$$

Как известно (см., например, [13], [15]), это решение может проводится или в рамках *«мартингальной теории* оптимальной остановки общих случайных последовательностей», или в рамках *«марковской теории* оптимальной остановки марковских случайных последовательностей». Оба подхода основаны (в случае $N < \infty$) на идеях «индукции назад» и являются, в сущности, эквивалентными, поскольку произвольную случайную последовательность можно рассматривать как марковскую за счет введения нового пространства состояний.

Рассматриваемый ниже подход основан на результатах и методах «марковской теории», изложенной в [16].

Будем предполагать, что функции выплаты $f = (f_n)$ имеют следующую простую структуру:

$$f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n) = \beta^n g(S_n), \tag{6.2}$$

где $0 < \beta \leqslant 1$.

В случае опциона купли $g(x) = (x - K)^+$, а для опциона продажи $g(x) = (K - x)^+$, где $K > 0$. Согласно (1.2) цена акций $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ предполагается эволюционирующей марковским образом, $S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n)$, где (ρ_n) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения b и a, $-1 < a < r < b$, с вероятностями $p = (r - a)/(b - a)$ и $1 - p$ соответственно (для упрощения записи будем опускать сейчас символ «$*$» у вероятностей $p^*, \mathbf{P}^*, \ldots$).

Одно из основных допущений, существенно упрощающих дальнейший анализ, будет состоять в предположении, что

$$1 + b = \lambda, \qquad 1 + a = \lambda^{-1}, \qquad \lambda > 1. \tag{6.3}$$

З а м е ч а н и е. При рассмотрении «непрерывных аппроксимаций» изучаемой (B, S)-модели представляют интерес случаи, когда λ близко к единице: $\lambda = 1 + \Delta$, Δ — малое число. Тогда $b = \Delta$ и $a \approx -\Delta$. (Подробнее см. [13].)

В этом предположении однородная марковская цепь $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ с начальным состоянием $S_0 = x$ совершает блуждание по множеству $E_x = \{x\lambda^k, k = 0, \pm 1, \ldots\}$. Будем предполагать, что начальное состояние $x \in E = \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \ldots\}$. Тогда ясно, что марковская цепь $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$ будет блуждать по множеству состояний $E = \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \ldots\}$.

Пользуясь принятыми в теории марковских процессов концепциями, будем предполагать, что на $(\Omega, \mathcal{F})$ задано семейство мер $\mathbf{P}_x$, $x \in E$, таких, что $\mathbf{P}_x(S_0 = x) = 1$ и относительно $\mathbf{P}_x$ последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{P}_x(\rho_1 = b) = p$, $\mathbf{P}_x(\rho_1 = a) = 1 - p$ при всех $x \in E$.

При сделанных допущениях рассматриваемое случайное блуждание $(S_n)_{n \geqslant 0}$ с

$$S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}, \tag{6.4}$$

где $\varepsilon_i = 1$, если $\rho_i = b$ $(= \lambda - 1)$, и $\varepsilon_i = -1$, если $\rho_i = a$ $(= \lambda^{-1} - 1)$, естественно называть *симметричным геометрическим* блужданием по множеству состояний $E = \{\lambda^k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

2. Обозначим для $n \geqslant 0$

$$V_n(x) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant n} \mathbf{E}_x (\alpha\beta)^\tau g(S_\tau), \tag{6.5}$$

где $\alpha = (1+r)^{-1}$ и $\beta > 0$. (Естественное «экономическое» предположение на β состоит также в том, что $\beta \leqslant 1$.)

Понятно, что если *a priori* предполагается, что начальное состояние акции $S_0 = x$, то $\mathbb{C}_n^* = V_n(x)$.

Для рассматриваемой марковской последовательности $(S_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_x)_{n \geqslant 0}$, $x \in E$, будем обозначать

$$Tg(x) = \mathbf{E}_x g(S_1). \tag{6.6}$$

Ясно, что

$$Tg(x) = pg(\lambda x) + (1-p) g\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{6.7}$$

где в рассматриваемом случае

$$p = \frac{r - a}{b - a} = \frac{\alpha\lambda - 1}{\lambda^2 - 1}. \tag{6.8}$$

Положим

$$Q_{\alpha\beta} g(x) = \max\left\{g(x), \alpha\beta T g(x)\right\}. \tag{6.9}$$

Согласно теореме 1 из § 2 гл. II в [16]:

a) функции $V_n(x)$ могут быть представлены в «явном виде»:

$$V_n(x) = Q^n_{\alpha\beta} g(x), \tag{6.10}$$

где $Q^n_{\alpha\beta}$ — n-я степень оператора $Q_{\alpha\beta}$;

b) функции $V_n(x)$, $n \geqslant 0$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V_n(x) = \max\left\{g(x), \alpha\beta T V_{n-1}(x)\right\} \tag{6.11}$$

с $V_0(x) = g(x)$;

c) марковский момент

$$\tau_n = \min\left\{0 \leqslant m \leqslant n : V_{n-m}(S_m) = g(S_m)\right\} \tag{6.12}$$

является оптимальным:

$$\mathbf{E}_x (\alpha\beta)^{\tau_n} g(S_{\tau_n}) = V_n(x), \qquad x \in E. \tag{6.13}$$

Обозначим для $m \geqslant 0$

$$D_m = \{x : V_m(x) = g(x)\}, \tag{6.14}$$

$$C_m = E \setminus D_m = \{x : V_m(x) > g(x)\}. \tag{6.15}$$

Заметим, что

$$C_n \supseteq C_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq C_0 = \varnothing \tag{6.16}$$

и

$$D_n \subseteq D_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq D_0 = E. \tag{6.17}$$

Из (6.12) и (6.14) следует, что момент

$$\tau_n = \min\{0 \leqslant m \leqslant n : S_m \in D_{n-m}\}. \tag{6.18}$$

Этим оправдывается название множеств $D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0$ как семейства «областей остановки» (в задаче «$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant n} \mathbf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau)$»), а множеств $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_0$ — как семейства «областей продолжения» наблюдений. При этом, если $S_0 \in D_n$, то наблюдения прекращаются сразу, и продолжаются, если $S_0 \in C_n$; если $S_0 \in C_n$, а $S_1 \in D_{n-1}$, то наблюдения прекращаются, а если $S_1 \in C_{n-1}$, то продолжаются и т.д. В момент n множество $D_0 = E$, что означает прекращение наблюдений (см. рис. 1).

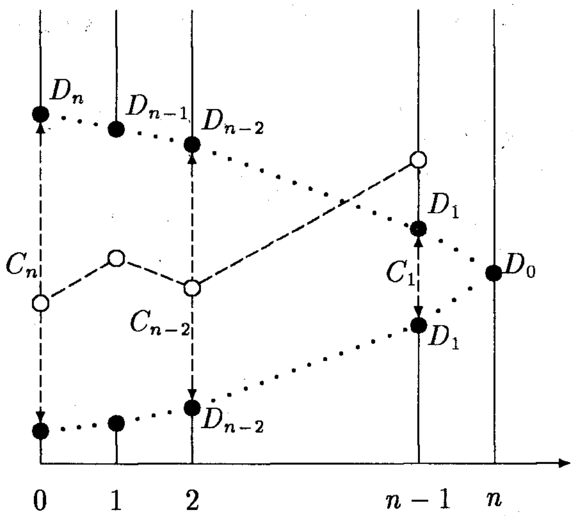

Рис. 1. Области ($C_n, C_{n-1}, \ldots, C_0 = \varnothing$) и ($D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0 = E$) продолжения и остановки наблюдений. Пунктиром изображена траектория ($S_0, S_1, \ldots, S_\tau$) с $\tau = n - 1$.

Из (6.14) и (6.10) ясно, что

$$\begin{aligned} &D_0 = E, \quad D_1 = \{x : Q_{\alpha\beta} g(x) = g(x)\}, \\ &D_2 = \{x : Q^2_{\alpha\beta} g(x) = g(x)\} \qquad \text{и т.д.} \end{aligned} \tag{6.19}$$

3. Рассмотрим дисконтируемый стандартный опцион купли Американского типа с

$$f_n(x) = \beta^n g(x), \tag{6.20}$$

где $g(x) = (x-1)^+$, $0 < \beta \leqslant 1$ и $0 \leqslant n \leqslant N < \infty$.

Здесь сразу следует выделить случай $\beta = 1$, поскольку в этом случае рассматриваемый *опцион Американского типа «совпадает» с соответствующим опционом Европейского типа со временем исполнения* N ([2], [7]).

Действительно, как уже отмечалось в конце предыдущего параграфа, в этом случае последовательность $\{\alpha^n (S_n - 1)^+\}_{0 \leqslant n \leqslant N}$ является (относительно любой меры $\mathbf{P}_x$) субмартингалом. Поэтому для любого $0 \leqslant \tau \leqslant N$

$$\mathbf{E}_x \alpha^\tau (S_\tau - 1)^+ \leqslant \mathbf{E}_x \alpha^N (S_N - 1)^+$$

и, значит, в качестве оптимального момента может быть взят момент $\tau_N^* = N$. Заметим, что здесь существуют и *другие* моменты, которые также являются оптимальными. Так, описанные выше моменты τ_N при *достаточно малых* $S_0 = x$ заведомо равны нулю, т.е. предписывают *мгновенную остановку*, которая дает $g(x) = 0$. Однако, в этих состояниях x можно было бы и *продолжать наблюдения*, как это предписывает момент $\tau_N^* = N$, но это ничего не дает с точки зрения увеличения «капитала», поскольку $Q_\alpha g(x)$ остается равным нулю при всех $n \leqslant N$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда $0 < \beta \leqslant 1$.

Если $x = \lambda^0 = 1$, то

$$\begin{aligned} Tg(1) &= p\,g(\lambda) + (1-p)\,g(\lambda^{-1}) = p(\lambda - 1) > 0, \\ Q_{\alpha\beta} g(1) &= \max\{g(1),\ \alpha\beta Tg(1)\} \\ &= \max\{0,\ \alpha\beta p(\lambda-1)\} = \alpha\beta p(\lambda-1) > 0. \end{aligned}$$

Тем самым, применение оператора $Q_{\alpha\beta}$ «поднимает» $g(1) = 0$ до положительного значения $Q_{\alpha\beta} g(1) = \alpha\beta p(\lambda - 1) > 0$.

Если $x = \lambda$, то

$$\begin{aligned} Tg(\lambda) &= p\,g(\lambda^2) + (1-p)\,g(1) = p(\lambda^2 - 1), \\ Q_{\alpha\beta} g(\lambda) &= \max\{g(\lambda),\ \alpha\beta T g(\lambda)\} = \max\{\lambda - 1,\ \alpha\beta p(\lambda^2 - 1)\} \\ &= (\lambda - 1)\max\left\{1,\ \beta\,\frac{\lambda - \alpha}{\lambda - 1}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если $\beta \leqslant (\lambda - 1)/(\lambda - \alpha)$ (скажем, если β — достаточно малое положительное число), то оператор $Q_{\alpha\beta}$ не изменяет значения $g(\lambda)$, т.е. $Q_{\alpha\beta} g(\lambda) = g(\lambda) = \lambda - 1$. Но если $\beta > (\lambda - 1)/(\lambda - \alpha)$ (скажем, если $\beta = 1$ или «близко» к единице), то оператор $Q_{\alpha\beta}$ «поднимает» $g(\lambda) = \lambda - 1$ до значения $\beta(\lambda - \alpha)$ $(> \lambda - 1)$, что отражает возникающий здесь «эффект субмартингальности», $Tg(\lambda) > g(\lambda)$.

Пусть теперь $x = \lambda^k$ с $k > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} Tg(\lambda^k) &= p\,g(\lambda^{k+1}) + (1-p)\,g(\lambda^{k-1}) \\ &= \lambda^k\bigl[\lambda p + \lambda^{-1}(1-p)\bigr]^{-1} = \frac{\lambda^k}{\alpha} - 1, \\ Q_{\alpha\beta}g(\lambda^k) &= \max\bigl\{\lambda^k - 1,\ \beta(\lambda^k - \alpha)\bigr\}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $Q_{\alpha\beta}g(\lambda^k) = g(\lambda^k)$, т.е. $\lambda^k - 1 \geqslant \beta(\lambda^k - \alpha)$, то заведомо и $Q_{\alpha\beta}g(\lambda^{k+1}) = g(\lambda^{k+1})$, поскольку, если $\lambda^k - 1 \geqslant \beta(\lambda^k - \alpha)$, т.е. $\lambda^k(1-\beta) > 1-\alpha$, то значит, и $\lambda^{k+1}(1-\beta) > 1-\alpha$ (поскольку $\lambda > 1$), т.е. $\lambda^{k+1} - 1 \geqslant \beta(\lambda^{k+1} - \alpha)$.

Наконец, пусть $x = \lambda^k$ с $k \leqslant -1$. Тогда $Tg(x) = 0$ и $Q_{\alpha\beta}g(x) = 0$.

Эти рассмотрения показывают, что области C_1 и D_1 здесь имеют следующую структуру:

$$C_1 = \bigl\{x = \lambda^k : \ 0 \leqslant k \leqslant k_1^*(\beta)\bigr\}, \qquad D_1 = \bigl\{x = \lambda^k : \ k < 0 \text{ и } k \geqslant k_1^*(\beta)\bigr\},$$

и предписываемый общей теорией оптимальный момент $\tau_1 = \min\{0 \leqslant m \leqslant 1 : \ S_m \in D_{1-m}\}$ с $D_0 = E$. Иначе говоря, этот момент предписывает в начальном состоянии S_0 сразу останавливаться, если $S_0 \in D_1$, и продолжать наблюдения, если $S_0 \in C_1$. Нетрудно, однако, видеть, что если $S_0 = \lambda^k$, $k < 0$, то мгновенная остановка дает $g(S_0) = 0$, а продолжение наблюдений даст $Q_{\alpha\beta}g(S_0) = 0$. Это говорит о том, что точки с $x = \lambda^k$ с $k < 0$ также можно отнести к множеству «продолжения наблюдений».

Иначе говоря, пусть

$$C_1^* = \bigl\{x = \lambda^k,\ k < k_1^*(\beta)\bigr\}, \qquad D_1^* = \bigl\{x = \lambda^k,\ k \geqslant k_1^*(\beta)\bigr\}.$$

Тогда момент $\tau_1^* = \min\{0 \leqslant m \leqslant 1 : \ S_m \in D_{1-m}^*\}$, где $D_0^* = E$, является также оптимальным моментом остановки в классе моментов, принимающих всего лишь два значения, 0 или 1.

Продолжая аналогичным образом, находим, что существуют также числа $k_1^*(\beta), k_2^*(\beta), \ldots, k_n^*(\beta)$ такие, что $k_1^*(\beta) \leqslant k_2^*(\beta) \leqslant \cdots \leqslant k_n^*(\beta)$, и оптимальный момент τ_n^* (в классе марковских моментов, принимающих значения во множестве $\{0, 1, \ldots, n\}$) имеет следующую структуру

$$\tau_n^* = \min\bigl\{0 \leqslant m \leqslant n : \ S_m \in [\lambda^{k_{n-m}^*(\beta)}, \infty)\bigr\}$$

с $k_0^*(\beta) = -\infty$ (см. рис. 2).

В случае, когда $0 \leqslant n \leqslant N$ и $N < \infty$, функции $V_n(x)$ могут быть найдены, по крайней мере принципиально, «индукцией назад» из рекуррентных соотношений (6.10).

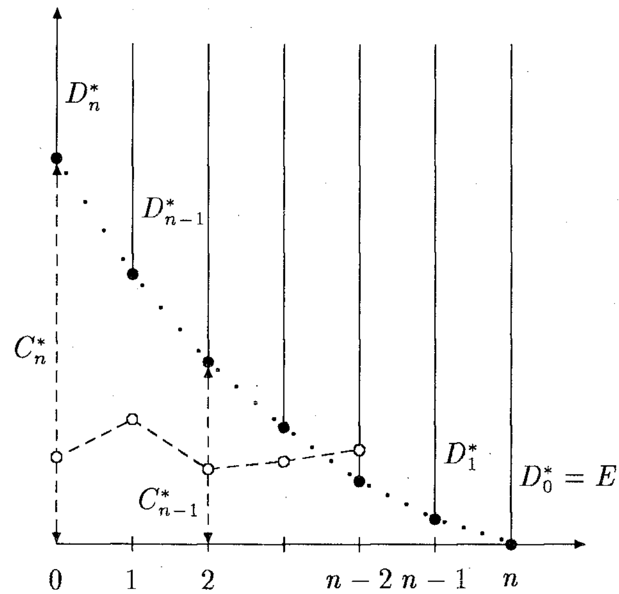

Рис. 2. Вид областей $(C_n^*, C_{n-1}^*, \ldots, C_0^* = \varnothing)$ и $(D_n^*, D_{n-1}^*, \ldots, D_0^* = E)$ продолжения и остановки наблюдений для дисконтированного Американского опциона купли с $f_k = \beta^k (S_k - 1)^+$. Пунктиром изображена траектория $(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_n^*})$ с $\tau_n^* = n - 2$.

Найдя эти функции $V_n(x), 0 \leqslant n \leqslant N$, можно затем найти и «граничные» точки $k_1^*(\beta), \ldots, k_N^*(\beta)$, разделяющие области остановки наблюдений (к которым причисляются и эти точки) и продолжения наблюдений.

Мы сейчас ограничимся рассмотрением предельного случая, когда $N \to \infty$.

Поскольку $V_0(x) \leqslant V_1(x) \leqslant \cdots$, существует

$$V(x) = \lim_n V_n(x).$$

Так определенная функция $V = V(x)$ обладает следующими свойствами ([16, теорема 3 в § 5, гл. II]):

a) $$V(x) = \sup\nolimits_\tau \mathbf{E}_x (\alpha\beta)^\tau g(S_\tau), \tag{6.21}$$

где sup берется по всем конечным марковским моментам;

b) $$V(x) = \max\{g(x),\ \alpha\beta T V(x)\}; \tag{6.22}$$

c) $V(x)$ является наименьшей $\alpha\beta$-эксцессивной мажорантой функции $g = g(x)$, т.е. наименьшей из (неотрицательных) функций $U = U(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$U(x) \geqslant g(x), \qquad U(x) \geqslant \alpha\beta T U(x); \tag{6.23}$$

d) марковский момент

$$\tau_\infty = \inf\{n : V(S_n) = g(S_n)\}$$

в предположении, что $\mathbf{P}_x(\tau_\infty < \infty) = 1$, $x \in E$, является оптимальным, т.е.

$$V(x) = \mathbf{E}_x(\alpha\beta)^{\tau_\infty} g(S_{\tau_\infty}). \tag{6.24}$$

Положим $k^*(\beta) = \lim_n k_n^*(\beta)$. Из приведенных свойств видно, что $D_n^* \downarrow D^* = [\lambda^{k^*(\beta)}, \infty)$ и $D_n \downarrow D^* = [\lambda^{k^*(\beta)}, \infty)$. Отсюда вытекает, что момент τ_∞ совпадает с моментом

$$\tau^*(\beta) = \inf\{n : S_n \in D^* = [\lambda^{k^*(\beta)}, \infty)\}.$$

Тем самым, решение рассматриваемой задачи сводится к отысканию значения $k^*(\beta)$ и значения $V(x)$.

Пусть $C^* = \{x = \lambda^k : k < k^*(\beta)\}$ — область продолжения наблюдений. Если $x \in C^*$, то $V(x) > g(x)$ и, значит, согласно (6.22) $V(x) = \alpha\beta TV(x)$, т.е. $V(x)$ определяется из рекуррентных уравнений

$$\varphi(x) = \alpha\beta p\varphi(\lambda x) + \alpha\beta(1-p)\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right). \tag{6.25}$$

Будем искать решения этого уравнения в виде $\varphi(x) = x^\gamma$. Тогда из (6.25) находим, что

$$1 = \beta\left[\alpha p\lambda^\gamma + \alpha(1-p)\lambda^{-\gamma}\right]. \tag{6.26}$$

Напомним, что значение $p = (r-a)/(b-a)$, где $a = \lambda^{-1} - 1$, $b = \lambda - 1$, определялось из условия $\mathrm{E}(1+\rho_1)/(1+r) = 1$, которое есть ни что иное как уравнение

$$1 = \alpha\lambda p + \frac{\alpha}{\lambda}(1-p). \tag{6.27}$$

Из (6.26) и (6.27) сразу видим, что *если* $\beta = 1$, то уравнение (6.26) имеет один корень $\gamma_1 = 1$ и второй γ_2 такой, что $\lambda^{\gamma_2} = (1-p)/(\lambda p)$.

Поскольку из (6.27)

$$p = \frac{1/\alpha - 1/\lambda}{\lambda - 1/\lambda}, \qquad 1 - p = \frac{\lambda - 1/\alpha}{\lambda - 1/\lambda},$$

то

$$\frac{1-p}{\lambda p} = \frac{\alpha\lambda - 1}{\lambda - \alpha} < 1.$$

Следовательно, $\gamma_2 < 0$, и таким образом, если $\beta = 1$, то уравнение (6.25) имеет общее решение

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2 x^{\gamma_2} \tag{6.28}$$

с $\gamma_2 < 0$. Однако по смыслу рассматриваемой задачи $V(x)$ должна быть неотрицательной возрастающей функцией, что исключает возможность $C_2 \neq 0$.

Поэтому

$$V(x) = \begin{cases} C_1 x, & x < x^*(1) = \lambda^{k^*(1)}, \\ x - 1, & x \geqslant x^*(1), \end{cases}$$

где C_1 и $k^*(1)$ еще подлежат определению. Однако, опять-таки из соображений субмартингальности последовательности $(\alpha^n(S_n - 1)^+)_{n \geqslant 1}$ относительно любой меры $\mathbf{P}_x$, выражающихся, в частности, в выполнении неравенства $Tg(x) > g(x)$ для $x = \lambda^k$, $k \geqslant 0$, следует, что $k^*(1) = \infty$ («выгоднее произвести по крайней мере одно наблюдение, нежели сразу остановиться»). Тем самым, $V(x) = C_1 x$ и (поскольку $k^*(1) = \infty$) $C_1 \geqslant 1$. Но $V(x)$ должна быть наименьшей из функций такого вида. Поэтому $V(x) = x$.

Резюмируя, получим следующий результат: если $\beta = 1$ и $g(x) = (x-1)^+$, то функция $V(x) = \sup_\tau \mathbf{E}_x \alpha^\tau g(S_\tau)$ равна x и оптимального момента остановки (в классе *конечных* моментов) не существует. Заметим, однако, что в классе конечных моментов остановки для всякого $\varepsilon > 0$ и каждого фиксированного начального состояния x найдется конечный ε-оптимальный марковский момент $\tau_{x,\varepsilon}$, т.е. момент такой, что $\mathbf{E}_x \alpha^{\tau_{x,\varepsilon}} g(S_{\tau_{x,\varepsilon}}) \geqslant V(x) - \varepsilon$. (Подробнее см. гл. III в [15].)

Пусть теперь $0 < \beta < 1$. В этом случае уравнение (6.26) имеет два корня $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 0$ такие, что $y_1 = \lambda^{\gamma_1}$ и $y_2 = \lambda^{\gamma_2}$ определяются формулами

$$y_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \qquad y_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} \tag{6.29}$$

с

$$A = \frac{1}{\alpha\beta p}, \qquad B = \frac{1-p}{p}. \tag{6.30}$$

Таким образом, если $\beta < 1$, то общее решение $\varphi(x)$ уравнения (6.25) будет иметь вид

$$\varphi(x) = C_1 x^{\gamma_1} + C_2 x^{\gamma_2} \tag{6.31}$$

и, значит, в области продолжения наблюдений $C^* = (0, \lambda^{k^*(\beta)})$ функция $V(x)$ есть функция вида (6.31). По тем же самым причинам, что и в случае $\beta = 1$, константа $C_2 = 0$. Таким образом, искомая функция $V(x)$ имеет вид

$$V(x) = \begin{cases} C_1 x^{\gamma_1}, & x < x^*(\beta) = \lambda^{k^*(\beta)}, \\ x - 1, & x \geqslant x^*(\beta), \end{cases} \tag{6.32}$$

где C_1 и $k^*(\beta)$ подлежат определению из тех соображений, что $V(x)$ должна быть *наименьшей* $\alpha\beta$-эксцессивной мажорантой функции $g(x) = (x-1)^+$.

Рассмотрим семейство функций $\varphi_{C_1}(x) = C_1 x^{\gamma_1}$.

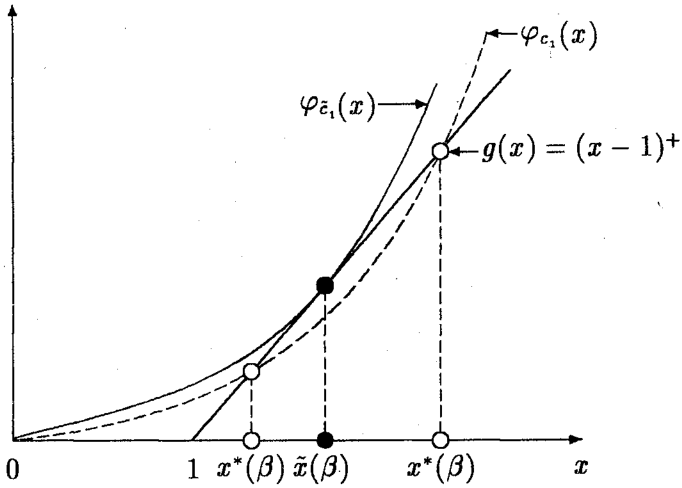

Рис. 3. Графики функций $g(x) = (x-1)^+$, $\varphi_{\widetilde{C}_1}(x)$ и $\varphi_{C_1}(x)$ при $C_1 < \widetilde{C}_1$ в случае дисконтируемого опциона купли Американского типа с $f_\tau = \beta^\tau g(S_\tau)$, $0 < \beta < 1$, $g(x) = (x-1)^+$.

При больших C_1 заведомо $\varphi_{C_1}(x) > (x-1)^+$. Будем уменьшать значения C_1. Тогда в каждой точке $x \in E$ значения $\varphi_{C_1}(x)$ будут убывать. При достаточно малых C_1 функция $\varphi_{C_1}(x)$ пересекает прямую $x-1$, $x \geqslant 1$, в двух точках (см. рис. 3). Из этих соображений становится понятным, что оптимальные $C_1 = C_1^*$ и $x^*(\beta)$ (> 1) определяются из следующих соотношений:

$$\varphi_{C_1^*}(x) \geqslant g(x), \qquad x \in E = \{x = \lambda^k\colon\ k = 0, \pm 1, \ldots\}, \tag{6.33}$$

$$\varphi_{C_1^*}(x^*(\beta)) = g(x^*(\beta)). \tag{6.34}$$

Предположим сейчас, что неравенства (6.33) и (6.34) рассматриваются не для $x \in E$, а для *всех* $x \geqslant 0$. Тогда понятно, что соответствующие значения $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{x}(\beta)$, которые могут рассматриваться как приближения для C_1^* и $x^*(\beta)$, определяются из системы

$$\varphi_{\widetilde{C}_1}(x)\Big|_{x=\widetilde{x}(\beta)} = g(x)\Big|_{x=\widetilde{x}(\beta)}, \tag{6.35}$$

$$\frac{d\varphi_{\widetilde{C}_1}(x)}{dx}\Bigg|_{x=\widetilde{x}(\beta)} = \frac{dg(x)}{dx}\Bigg|_{x=\widetilde{x}(\beta)}, \tag{6.36}$$

где (6.36) есть условие «гладкого склеивания», хорошо известное в теории оптимальных правил остановки (см., например, [15, гл. III, § 8]).

Из (6.35) и (6.36) находим

$$\widetilde{x}(\beta) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \tag{6.37}$$

$$\widetilde{C}_1 = \frac{(\gamma_1 - 1)^{\gamma_1 - 1}}{\gamma_1^{\gamma_1}} \tag{6.38}$$

и, следовательно, приближенное значение

$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} \widetilde{C}_1(\widetilde{x}(\beta))^{\gamma_1}, & x > \widetilde{x}(\beta), \\ x - 1, & x \leqslant \widetilde{x}(\beta). \end{cases} \tag{6.39}$$

Точное же решение C_1^* и $x^*(\beta)$ системы (6.33) и (6.34) в случае $x \in E = \{x = \lambda^k\colon\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ имеет следующий вид:

$$C_1^* = \min\{B_1, B_2\},$$

$$x^*(\beta) = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]}, & \text{если} \quad C_1^* = B_1, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]+1}, & \text{если} \quad C_1^* = B_2, \end{cases}$$

где

$$B_1 = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]} - 1)\,\lambda^{-\gamma[\log_\lambda \widetilde{x}]}, \qquad B_2 = (\lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}]+1} - 1)\,\lambda^{-\gamma[\log_\lambda \widetilde{x}]-\gamma},$$

$[y]$ — целая часть числа y.

4. Перейдем теперь к рассмотрению дисконтируемого стандартного опциона-пут Американского типа с

$$f_n(x) = \beta^n g(x), \qquad g(x) = (1 - x)^+, \qquad 0 < \beta \leqslant 1 \tag{6.40}$$

и

$$V_n(x) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant n} \mathbf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau), \tag{6.41}$$

$$V(x) = \sup_{0 \leqslant \tau < \infty} \mathbf{E}_x(\alpha\beta)^\tau g(S_\tau). \tag{6.42}$$

Заметим, что поскольку $g(x) \leqslant 1$, то и $V_n(x) \leqslant 1$ и $V(x) \leqslant 1$. Далее, аналогично рассмотрениям, приведенным выше для опциона купли, нетрудно показать, что в данном случае оптимальные моменты остановки $\hat{\tau}_n$ (в задаче (6.41)) имеют следующий вид

$$\hat{\tau}_n = \min\{0 \leqslant m \leqslant n :\ S_m \in \widehat{D}_{n-m}\}$$

с

$$\widehat{D}_m = \{x \in E :\ 0 < x \leqslant \widehat{x}_m\} \cup \{x \in E :\ x \geqslant \widehat{y}_m\},$$

где $\widehat{x}_m = \lambda^{\widehat{k}_m} \leqslant 1 \leqslant \widehat{y}_m = \lambda^{\widehat{l}_m}$.

При этом $\widehat{k}_m \downarrow \widehat{k}$, а $\widehat{l}_m \uparrow \infty$ при $m \to \infty$. Отсюда следует, что в задаче (6.42) оптимальный момент

$$\hat{\tau} = \inf\left\{m \geqslant 0 :\ S_m \in \widehat{D}\right\},$$

где $\widehat{D} = \{x \in E :\ 0 < x \leqslant \widehat{x}\}$. (Можно показать, что здесь $\mathbf{P}_x(\hat{\tau} < \infty) = 1$, $x \in E$.)

Рассмотрим вопрос об отыскании $\widehat{x}$ и функции $V(x)$.

Также, как и выше, находим, что в области продолжения наблюдений $\widehat{C} = \{x \in E : x > \widehat{x}\}$ функция $V(x)$ должна иметь вид $C_1 x^{\gamma_1} + C_2 x^{\gamma_2}$, где $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 0$. Поскольку $V(x) \leqslant 1$, то отсюда вытекает, что $C_1 = 0$ и, следовательно, функция

$$V(x) = \begin{cases} C_2 x^{\gamma_2}, & x > \widehat{x}(\beta), \\ 1 - x, & x \leqslant \widehat{x}(\beta). \end{cases}$$

Следуя изложенной выше схеме отыскания *приближенных* значений $\widetilde{C}_2$ и $\widetilde{x}(\beta)$, находим (ср. с (6.35), (6.36)), что они должны определяться из системы уравнений

$$\left.\frac{d\varphi_{\widetilde{C}_2}(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}(\beta)} = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=\widetilde{x}(\beta)}, \qquad \varphi_{\widetilde{C}_2}(x)\big|_{x=\widetilde{x}(\beta)} = g(x)\big|_{x=\widetilde{x}(\beta)},$$

где $\varphi_{\widetilde{C}_2}(x) = \widetilde{C}_2 x^{\gamma_2}$, $g(x) = (1-x)^+$ (см. рис. 4).

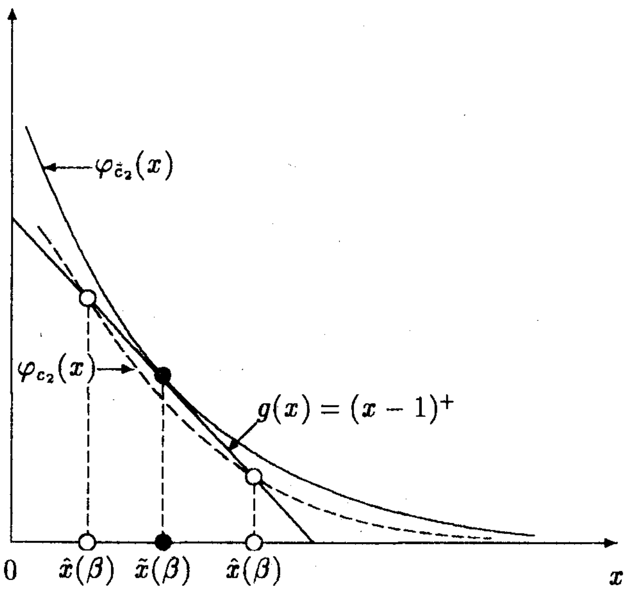

Рис. 4. Графики функций $g(x) = (1-x)^+$, $\varphi_{\widetilde{C}_2}(x)$ и $\varphi_{C_2}(x)$ при $C_2 < \widetilde{C}_2$ в случае дисконтируемого опциона продажи Американского типа с $f_\tau = \beta^\tau g(S_\tau)$, $0 < \beta \leqslant 1$, $g(x) = (1-x)^+$.

Отсюда находим приближенные значения

$$\widetilde{x}(\beta) = \left|\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}\right| \qquad \text{и} \qquad \widetilde{C}_2 = \frac{|\gamma_2|^{|\gamma_2|}}{|\gamma_2 - 1|^{|\gamma_2 - 1|}}.$$

Точные же значения $\widehat{x}(\beta)$ и $\widehat{C}_2$ как решения системы

$$\varphi_{\widehat{C}_2}(x) \geqslant g(x), \qquad \varphi_{\widehat{C}_2}(\widehat{x}(\beta)) = g(\widehat{x}(\beta))$$

с $\varphi_{\widehat{C}_2}(x) = \widehat{C}_2 x^{\gamma_2}$, $g(x) = (1-x)^+$ и $x, \widehat{x} \in E$, определяются следующим образом:

$$\widehat{C}_2 = \min\{\widehat{B}_1, \widehat{B}_2\}, \qquad \widehat{x}(\beta) = \begin{cases} \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}(\beta)]}, & \text{если} \quad \widehat{C}_2 = \widehat{B}_1, \\ \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}(\beta)]+1}, & \text{если} \quad \widehat{C}_2 = \widehat{B}_2, \end{cases}$$

где

$$\widehat{B}_1 = \left(1 - \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}(\beta)]}\right) \lambda^{-\gamma_2[\log_\lambda \widetilde{x}(\beta)]},$$
$$\widehat{B}_2 = \left(1 - \lambda^{[\log_\lambda \widetilde{x}(\beta)]+1}\right) \lambda^{-\gamma_2[\log_\lambda \widetilde{x}(\beta)]-\gamma_2}.$$

§ 7. Некоторые замечания относительно расчетов в опционах для общих дискретных моделей (B, S)-рынка. Арбитраж, мартингальная мера, полнота рынка

1. Изложенная выше теория расчетов рациональной стоимости и хеджирующих стратегий предполагала весьма *специальную* структуру (B, S)-рынка, описываемого соотношениями (1.1) и (1.2).

Естественно поставить вопрос о том, насколько использованные *принципы* и *методы* могут быть перенесены и на модели (B, S)-рынка более общего вида.

Оставаясь в рамках предположений «дискретности», будем считать заданным дискретное вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), \mathbf{P})$ с $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, $N < \infty$, с конечным числом элементов в Ω, $|\Omega| < \infty$, вероятность каждого из которых положительна.

Будем предполагать, что эволюция цен банковского счета описывается некоторой детерминированной положительной последовательностью $B = (B_n)$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Относительно цен акции $S = (S_n)$ предполагается, что $S = S_n(\omega)$ — положительные $\mathcal{F}_n$-измеримые случайные величины, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Замечание. Все последующие рассмотрения сохраняют свою силу и для случая *векторных* цен $S_n = (S_n^1, \ldots, S_n^k)$, $k \geqslant 1$; соответствующие изменения будут сводиться, в сущности, лишь к тому, что под выражениями типа $\gamma_n S_n$, возникающими далее при $k = 1$, надо в случае $k > 1$ понимать величину $\sum_{i=1}^k \gamma_n^i S_n^i$, $\gamma_n = (\gamma_n^1, \ldots, \gamma_n^k)$.

2. Как и в § 1, пусть $\pi = (\pi_n)$ — стратегия, состоящая из портфелей $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, где β_n и γ_n являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми ($\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$).

Соответствующий стратегии π капитал обозначим $X^\pi = (X_n^\pi)$, где

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n. \tag{7.1}$$

Через SF будем обозначать класс *самофинансируемых* стратегий π, для которых при любом $1 \leqslant n \leqslant N$

$$B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0, \tag{7.2}$$

где $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$, $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$.

Равносильным образом, «самофинансируемость» стратегии π означает, что отвечающий ей капитал X_n^π составляется следующим образом:

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k). \tag{7.3}$$

Анализируя приведенные в § 2 рассмотрения, приведшие к формуле (2.26) для рациональной стоимости $\mathbb{C}_N$, можно заметить, что, в сущности, они были основаны на следующих двух фактах.

I. На $(\Omega, \mathcal{F})$ *нашлась* мера $\mathbf{P}^*$, эквивалентная каждой из мер $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ такая, что дисконтируемый капитал $(X_n^\pi / B_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ относительно $\mathbf{P}^*$ являлся *мартингалом* (в связи с этим меру $\mathbf{P}^*$ часто называют *мартингальной мерой*), что сразу приводило к соотношению

$$\frac{X_0^\pi}{B_0} = \mathbf{E}^* \left(\frac{X_N^\pi}{B_N} \right), \tag{7.4}$$

равносильному равенству

$$X_0^\pi = \mathbf{E}^* e^{-rN} X_N^\pi, \tag{7.5}$$

«связывающему» начальный и терминальный капиталы X_0^π и X_N^π.

II. *Нашлась* стратегия π^* со значением терминального капитала $X_N^{\pi^*}(\omega)$, *в точности* равным платежу $f_N(\omega)$, $\omega \in \Omega$, откуда вытекало, что

$$\mathbf{E}^* e^{-rN} X_N^{\pi^*} = \mathbf{E}^* e^{-rN} f_N. \tag{7.6}$$

Тогда, если рассматривать только такие стратегии π, для которых $X_N^\pi \geqslant f_N$, то из I (см. (7.5)) следует, что отвечающий им начальный капитал X_0^π должен быть таким, что

$$X_0^\pi \geqslant \mathbf{E}^* e^{-rN} f_N, \tag{7.7}$$

и, значит, для справедливой стоимости $\mathbb{C}_N$ (см. определение 2 в § 1) получаем *неравенство*

$$\mathbb{C}_N \geqslant \mathbf{E}^* e^{-rN} f_N. \tag{7.8}$$

В силу свойства II (см. (7.6)) отсюда вытекает, что на самом деле в (7.8) имеет место *равенство*

$$\mathbb{C}_N = \mathbf{E}^* e^{-rN} f_N. \tag{7.9}$$

3. Если придерживаться принципов, изложенных в I, II, то в случае *произвольных* (B, S)-рынков прежде всего следовало бы начать с вопроса о том, что когда существует хотя бы одна «мартингальная» мера $\mathbf{P}^*$, эквивалентная $\mathbf{P}$, относительно которой для *любой* стратегии $\pi \in \mathrm{SF}$

последовательность (X_n^π/B_n) является *мартингалом*. Достаточно, впрочем, установить существование меры $\mathbf{P}^*$, эквивалентной $\mathbf{P}$, относительно которой только последовательность (S_n/B_n) является мартингалом, поскольку тогда для любой самофинансируемой стратегии π автоматически и последовательность (X_n^π/B_n) оказывается мартингалом.

Один из возможных ответов на поставленный вопрос можно дать, привлекая уже упоминавшееся ранее понятие «арбитража», играющего важную роль при определении «равновесной экономики».

С наглядной точки зрения на финансовом рынке отсутствует «арбитраж», если «нет возможности извлечения прибыли без риска». Оказывается, и это весьма замечательно, что предположение *«отсутствия арбитража»* в точности эквивалентно наличию хотя бы одной мартингальной меры, и, следовательно, при этом предположении становится возможным применение идей, изложенных в I.

Для точной формулировки этого результата, принадлежащего Харриссону и Плиске [5], введем, следуя им, следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что стратегия π из SF является *арбитражной* (или что π реализует *арбитражную возможность*), если

$$X_0^\pi = 0, \qquad X_n^\pi \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N, \quad \text{и} \quad X_N^\pi > 0$$

с положительной $\mathbf{P}$-вероятностью.

Совокупность арбитражных стратегий обозначим $\mathrm{SF}_{\mathrm{arb}}$. Таким образом,

$$\mathrm{SF}_{\mathrm{arb}} \subseteq \mathrm{SF}. \tag{7.10}$$

Определение 2. Вероятностная мера $\mathbf{P}^*$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется *мартингальной мерой* для (B,S)-рынка, «действующего» на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, если $\mathbf{P}^*$ эквивалентна $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}$) и последовательность $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)_{0\leqslant n\leqslant N}$ является мартингалом.

Совокупность мартингальных мер обозначим $\mathcal{P}^*$.

Теорема 1 ([5]). *Следующие условия являются равносильными*:

1) $\mathcal{P}^* \neq \varnothing$,

2) $\mathrm{SF}_{\mathrm{arb}} = \varnothing$.

Иначе говоря, существование (по крайней мере, одной) мартингальной меры является необходимым и достаточным условием отсутствия арбитража.

Тем самым, «экономическое» предположение, что на рассматриваемом рынке нет арбитражных возможностей, приводит к тому важному «математическому» следствию, что существует, по крайней мере, одна мартингальная мера. Это дает возможность, реализуя идеи I, получить для стратегий $\pi \in \mathrm{SF}$ соотношение (7.5).

Доказательство теоремы 1. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) почти очевидна. Действительно, пусть $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^* \neq \varnothing$. Тогда для любой стратегии $\pi \in \mathrm{SF}$ выполнено соотношение (7.5), из которого вытекает, что если $X_0^\pi = 0$, то $\mathbf{E}^* X_N^\pi = 0$.

Но понятно, что в таком случае множество $\mathrm{SF_{arb}} = \varnothing$. Действительно, если предположить, что $\mathrm{SF_{arb}} \neq \varnothing$ и $\pi \in \mathrm{SF_{arb}}$, то это означало бы, что $X_N^\pi \geqslant 0$ и $\mathbf{P}(X_N^\pi > 0) > 0$ и, значит, $\mathbf{E}^* X_N^\pi > 0$, поскольку $\mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}$. Однако, это противоречит тому, что $\mathbf{E}^* X_N^\pi = 0$.

Доказательство импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) труднее и требует привлечения *теоремы об отделимости.*

Итак, пусть имеет место свойство 2), т.е. $\mathrm{SF_{arb}} = \varnothing$.

Введем два непустых множества случайных величин $\xi = \xi(\omega)$ на $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\Sigma_0 = \bigl\{\xi \in \mathbf{R}\colon\ \exists\, \pi \in \mathrm{SF} \quad \text{со свойством} \quad X_0^\pi = 0 \quad \text{и} \quad X_N^\pi = \xi\bigr\},$$
$$\Sigma_1 = \{\xi \geqslant 0\colon\ \mathbf{E}\xi \geqslant 1\}.$$

Покажем, что справедлива следующая импликация

$$\mathrm{SF_{arb}} = \varnothing \Longrightarrow \Sigma_0 \cap \Sigma_1 = \varnothing. \tag{7.11}$$

Пусть $\Sigma_0 \cap \Sigma_1 \neq \varnothing$. Тогда в силу определения Σ_0 и Σ_1 найдется стратегия $\pi \in \mathrm{SF}$ такая, что $X_0^\pi = 0$, $X_N^\pi \geqslant 0$ и $\mathbf{P}(X_N^\pi > 0) > 0$. Установим, что отсюда будет вытекать *существование* стратегии $\overline{\pi}$, являющейся стратегией класса $\mathrm{SF_{arb}}$, что противоречит предположению $\mathrm{SF_{arb}} = \varnothing$.

Если окажется, что $X_N^\pi \geqslant 0$ при всех $0 \leqslant n \leqslant N$, то в качестве $\overline{\pi}$ надо взять π. Поэтому нетривиален лишь случай, когда в некоторые моменты времени n величины $X_n^\pi < 0$ с положительной вероятностью. Ясно, что тогда (поскольку $X_N^\pi \geqslant 0$ и Ω конечно) найдется $m < N$ такое, что при некотором $\omega' \in \Omega$ с $\mathbf{P}(\omega') > 0$ $X_m^\pi(\omega') = \beta_m(\omega')B_m + \gamma_n(\omega')S_m(\omega') < 0$ и $X_n^\pi(\omega') \geqslant 0$, $n > m$, $\omega \in \Omega$.

Определим стратегию $\overline{\pi} = (\overline{\pi}_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ с $\overline{\pi}_n = (\overline{\beta}_n, \overline{\gamma}_n)$ следующим образом. Пусть $a = X_m^\pi(\omega')$ (< 0), $A = \{\omega : X_m^\pi(\omega) = a\}$ и

$$\overline{\beta}_n(\omega) = \mathbf{I}_A(\omega)\left[\beta_n(\omega) - \frac{a}{B_m}\right]\mathbf{I}_{\{n>m\}}, \tag{7.12}$$
$$\overline{\gamma}_n(\omega) = \mathbf{I}_A(\omega)\,\gamma_n(\omega)\,\mathbf{I}_{\{n>m\}}. \tag{7.13}$$

Ясно, что $\overline{\pi}_n$ — $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримы. Поэтому для проверки того, что $\overline{\pi} \in \mathrm{SF}$, надо (в силу конструкции (7.12), (7.13) и предположения $\pi \in \mathrm{SF}$) убедиться в том, что

$$\Delta\overline{\beta}_{m+1}B_m + \Delta\overline{\gamma}_{m+1}S_m = 0. \tag{7.14}$$

На множестве $\overline{A}$ это, очевидным образом, выполнено, а на A

$$\Delta\overline{\beta}_{m+1} = \overline{\beta}_{m+1} = \left[\beta_{m+1} - \frac{a}{B_m}\right], \qquad \Delta\overline{\beta}_{m+1}B_m = B_m\beta_{m+1} - a$$

и $\Delta\overline{\gamma}_{m+1} = \gamma_{m+1}$. Поэтому на A с учетом свойства самофинансируемости имеем

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\beta}_{m+1} B_m + \Delta\overline{\gamma}_{m+1} S_m &= B_m\beta_{m+1} + S_m\gamma_{m+1} - a \\ &= B_m\beta_m + S_m\gamma_m - a = 0.\end{aligned}$$

Тем самым, (7.14) имеет место и, значит, $\overline{\pi} \in \mathrm{SF}$.

Покажем, что $X_n^{\overline{\pi}} \geqslant 0$ при всех $0 \leqslant n \leqslant N$. Если $\omega \in \overline{A}$, то $X_n^{\overline{\pi}}(\omega) = 0$ при всех $0 \leqslant n \leqslant N$. Если же $\omega \in A$, то для $n \leqslant m$ опять же $X_N^{\overline{\pi}}(\omega) = 0$, а для $n > m$

$$X_n^{\overline{\pi}}(\omega) = \overline{\beta}_n(\omega)\, B_n + \overline{\gamma}_n(\omega)\, S_n = \beta_n(\omega)\, B_n + \gamma_n(\omega)\, S_n - \frac{aB_n}{B_m} \geqslant 0,$$

поскольку $X_n^{\pi}(\omega) \geqslant 0$, $n > m$, $\omega \in \Omega$, и $a < 0$.

Наконец, при $\omega \in A$ имеем

$$\begin{aligned}X_N^{\overline{\pi}}(\omega) &= \overline{\beta}_N(\omega)B_N + \overline{\gamma}_N(\omega)S_N \\ &= \beta_N(\omega)B_N + \gamma_N(\omega)S_N - \frac{aB_N}{B_m} = X_N^{\pi}(\omega) - \frac{aB_N}{B_m} > 0.\end{aligned}$$

Итак, импликация (7.11) установлена и, значит, предположение об отсутствии арбитража показывает, что множества Σ_0 и Σ_1 не имеют общих элементов.

В силу конечности Ω каждую случайную величину ξ, заданную на Ω, можно отождествить с вектором $x = (\xi(\omega_1), \dots, \xi(\omega_k)) \in \mathbf{R}^k$, где $k = |\Omega|$. Следовательно, множества Σ_0 и Σ_1 можно рассматривать как непересекающиеся подмножества в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$. При этом ясно, что Σ_1 — выпуклое множество, а Σ_0 — линейное пространство. Поэтому по теореме отделимости в конечномерном евклидовом пространстве (см., например, [11]) найдется линейный функционал $l = l(x)$, $x \in \mathbf{R}^k$, такой, что $l(x) = 0$ для $x \in \Sigma_0$ и $l(x) > 0$ для $x \in \Sigma_1$. Заметим, что в $\mathbf{R}^k$ линейный функционал $l(x)$ может быть записан в виде скалярного произведения $l(x) = (x, q)$ с некоторым вектором $q = (q_1, \dots, q_k)$:

$$l(x) = (x, q) \equiv \sum_{i=1}^{k} x_i q_i > 0, \qquad x = (x_1, \dots, x_k) \in \Sigma_1.$$

Если все $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\}) > 0$, то из определения Σ_1 следует, что вектора $(p_1^{-1}, 0, \dots, 0), (0, p_2^{-1}, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, p_k^{-1})$ принадлежат Σ_1, а, значит, все $q_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, причем их можно нормировать так, что $q_1 + \dots + q_k = 1$.

Покажем, что мера $\mathbf{P}^*$ на $(\Omega, \mathcal{F})$, определенная таким образом, что $\mathbf{P}^*(\{\omega_i\}) = q_i$, есть требуемая «мартингальная» мера, т.е., что последовательность $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ есть мартингал.

Поскольку для всех $x \in \Sigma_0$ выполнено равенство $(x, q) = 0$, то в терминах случайных величин ξ из Σ_0 это свойство означает, что $\mathbf{E}^*\xi = 0$. Тем самым, если π — некоторая самофинансируемая стратегия с $X_0^\pi = 0$, то (см. определение Σ_0) $\mathbf{E}^* X_N^\pi = 0$.

Дальнейшие рассмотрения будут состоять в том, чтобы, используя это свойство, доказать, что последовательность $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)_{0\leqslant n\leqslant N}$ есть мартингал. Для этого достаточно доказать (см. утверждение в замечании в конце этого пункта), что для любого марковского момента τ (относительно $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$) такого, что $0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant N$, выполнено равенство

$$\mathbf{E}^*\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0}\right) = 0. \tag{7.15}$$

С этой целью возьмем некоторый такой момент $\tilde\tau$ и сконструируем стратегию $\widetilde\pi = (\widetilde\pi_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ так, чтобы свойство $\mathbf{E}^* X_N^{\widetilde\pi} = 0$ дало в точности «мартингальное» равенство (7.15) с $\tau = \tilde\tau$. Можно, например, положить

$$\widetilde\beta_n = \frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}}\,\mathbf{I}(n > \tilde\tau) - \frac{S_0}{B_0}, \qquad \widetilde\gamma_n = \mathbf{I}(n \leqslant \tilde\tau).$$

Заметим, что поскольку $\tilde\tau$ — марковский момент, то $\widetilde\beta_n$ и $\widetilde\gamma_n$ являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми. Далее, $\widetilde\pi = (\widetilde\pi_n)$ с $\widetilde\pi_n = (\widetilde\beta_n, \widetilde\gamma_n)$ является самофинансируемой стратегией, поскольку

$$\widetilde\beta_n B_n + \widetilde\gamma_n S_n = \frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}}\,\mathbf{I}(n > \tilde\tau)\, B_n + S_n \mathbf{I}(n \leqslant \tilde\tau) - \frac{S_0}{B_0}\, B_n,$$

$$\widetilde\beta_{n+1} B_n + \widetilde\gamma_{n+1} S_n = \frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}}\,\mathbf{I}(n+1 > \tilde\tau)\, B_n + S_n \mathbf{I}(n+1 \leqslant \tilde\tau) - \frac{S_0}{B_0}\, B_n,$$

и, следовательно,

$$B_n \Delta\widetilde\beta_{n+1} + S_n \Delta\widetilde\gamma_{n+1} = \frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}}\mathbf{I}(\tilde\tau = n) B_n - S_n \mathbf{I}(\tilde\tau = n) = 0,$$

что означает самофинансируемость стратегии $\widetilde\pi$.

Наконец,

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{E}^* X_N^{\widetilde\pi} &= \mathbf{E}^*\{\widetilde\beta_N B_N + \widetilde\gamma_N S_N\} \\
&= \mathbf{E}^*\left\{\left(\frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}}\mathbf{I}(\tilde\tau < N) - \frac{S_0}{B_0}\right) B_N + S_N \mathbf{I}(\tilde\tau = N)\right\} \\
&= B_N \mathbf{E}^*\left\{\frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}} - \frac{S_0}{B_0}\right\} + \mathbf{E}^*\left\{S_N \mathbf{I}(\tilde\tau = N) - \frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}}\mathbf{I}(\tilde\tau = N) B_N\right\} \\
&= B_N \mathbf{E}^*\left\{\frac{S_{\tilde\tau}}{B_{\tilde\tau}} - \frac{S_0}{B_0}\right\}.
\end{aligned}$$

Поскольку $B_N \neq 0$, то это доказывает (7.15) для произвольного момента $\tau = \tilde\tau$.

Это доказывает импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1) и вместе с ней теорему.

Замечание. Пусть $(\xi_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})_{0\leqslant n\leqslant N}$ — некоторая *стохастическая последовательность* ([17, с. 507]) такая, что $\mathbf{E}|\xi_n| < \infty$, ξ_n — $\mathcal{F}_n$-измеримы, $0 \leqslant n \leqslant N$, и для любого марковского момента τ, $0 \leqslant \tau \leqslant N$, выполнены равенства $\mathbf{E}\xi_\tau = \mathbf{E}\xi_0$. Тогда $(\xi_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})_{0\leqslant n\leqslant N}$ — *мартингал*.

Действительно, зафиксируем n и множество $A \in \mathcal{F}_n$. Определим марковский момент $n_A = n_A(\omega)$:

$$n_A(\omega) = \begin{cases} n, & \omega \in A, \\ N, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{E}\xi_N = \mathbf{E}\xi_0 = \mathbf{E}\xi_{n_A} = \mathbf{E}\xi_n \mathbf{I}_A + \mathbf{E}\xi_N \mathbf{I}_{\overline{A}}$ и, значит, $\mathbf{E}\xi_N \mathbf{I}_A = \mathbf{E}\xi_n \mathbf{I}_A$. Отсюда $\mathbf{E}(\xi_N \mid \mathcal{F}_n) = \xi_n$, что и доказывает мартингальность последовательности $(\xi_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})_{0\leqslant n\leqslant N}$.

4. Обратимся к факту II, использованному при выводе формулы (7.9) для рациональной стоимости $\mathbb{C}_N$.

Введем следующее

Определение 3. Будем говорить, что (B, S)-рынок, определенный на дискретном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ с $|\Omega| < \infty$, является *полным*, если для любой $\mathcal{F}$-измеримой функции $f_N = f_N(\omega)$ найдется стратегия $\pi \in \mathrm{SF}$, терминальный капитал которой воспроизводит функцию f_N, т.е. $X_N^\pi(\omega) = f_N(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

В случае рассмотренной выше *биномиальной* модели (B, S)-рынка возможность построения стратегии π с этим свойством вытекала из «леммы о представлении» из § 3. Весьма примечательно, что и в более общих ситуациях свойство «полноты» и возможность «представления» равносильны.

Приведем точное утверждение ([5]; см. также [6]).

Теорема 2. *Пусть множество мартингальных мер $\mathcal{P}^*$ непусто и мера $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^*$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *(B, S)-рынок является полным;*

2) *мера $\mathbf{P}^*$ является единственным элементом в $\mathcal{P}^*$;*

3) *всякий мартингал $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, допускает представление*

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\omega)\, \Delta\, m_k, \tag{7.16}$$

где случайные величины $\gamma_k = \gamma_k(\omega)$ являются $\mathcal{F}_{k-1}$-измеримыми и

$$\Delta m_k = \frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}}.$$

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим, что наряду с мерой $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^*$ найдется еще мера $\mathbf{P}^{**} \in \mathcal{P}^*$ такая, что $\mathbf{P}^{**} \neq \mathbf{P}^*$, т.е. существует множество $A \in \mathcal{F}$, для которого $\mathbf{P}^{**}(A) \neq \mathbf{P}^*(A)$.

Возьмем $f_N(\omega) = \mathbf{I}_A(\omega)$. Из предположения полноты рынка следует, что найдется стратегия $\pi \in \mathrm{SF}$ такая, что $\mathbf{P}(X_N^\pi(\omega) = \mathbf{I}_A(\omega)) = 1$. Поскольку $\mathbf{P}^* \sim \mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^{**} \sim \mathbf{P}$, то $\mathbf{P}^*(X_N^\pi = \mathbf{I}_A) = \mathbf{P}^{**}(X_N^\pi = \mathbf{I}_A) = 1$.

Из мартингальности мер $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{P}^{**}$ вытекает, что

$$\mathbf{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{E}^{**} \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0}.$$

Следовательно, $\mathbf{E}^*\mathbf{I}_A = \mathbf{E}^{**}\mathbf{I}_A$, т.е. $\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{P}^{**}(A)$, что противоречит предположению о несовпадении мер $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{P}^{**}$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Покажем, что если $\mathbf{P}^*$ — *единственная* мартингальная мера, то (B, S)-рынок является полным.

Определим множества случайных величин $\xi = \xi(\omega)$ на $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\Sigma_0 = \left\{\xi \in \mathbf{R} : \exists \pi \in \mathrm{SF} \quad \text{со свойством} \quad X_0^\pi = 0 \quad \text{и} \quad X_N^\pi = \xi\right\},$$
$$\Sigma_2 = \{\xi \in \mathbf{R} : \ \mathbf{E}^*\xi = 0\}.$$

Очевидно, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_2$, и для требуемого утверждения 2) $\Longrightarrow$ 1) достаточно показать, что

$$2) \Longrightarrow «\Sigma_0 = \Sigma_2» \Longrightarrow 1)$$

Начнем с доказательства второй импликации.

Пусть $f_N = f_N(\omega)$ — некоторая $\mathcal{F}$-измеримая функция. В силу того, что $\Sigma_0 = \Sigma_2$, случайная величина $\xi = f_N - \mathbf{E}^* f_N$ является элементом Σ_0. Поэтому найдется стратегия $\pi \in \mathrm{SF}$ с $\pi_n = (\gamma_n, \beta_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ такая, что $X_N^\pi = \xi$. Но тогда стратегия $\widetilde{\pi}$ с $\widetilde{\pi}_n = (\widetilde{\gamma}_n, \widetilde{\beta}_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$, где $\widetilde{\gamma}_n = \gamma_n$, $\widetilde{\beta}_n = \mathbf{E}^* f_N / B_N + \beta_n$, является самофинансируемой и $X_N^{\widetilde{\pi}} = f_N$.

Покажем теперь, что совпадение множеств Σ_0 и Σ_2 следует из единственности $\mathbf{P}^* \in \mathcal{P}^*$, т.е., что 2) $\Longrightarrow$ $\Sigma_0 = \Sigma_2$. С этой целью, как и при доказательстве теоремы 1, каждую случайную величину ξ, заданную на Ω, будем отождествлять с вектором $x = (\xi(\omega_1), \ldots, \xi(\omega_k)) \in \mathbf{R}^k$, где $k = |\Omega|$, а вероятностную меру $\mathbf{P}^*$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ — с вектором $q^* = (q_1^*, \ldots, q_k^*) \in \mathbf{R}^k$, где $q_i^* = \mathbf{P}^*(\{\omega_i\}) > 0$, $i \leqslant k$. Ясно, что Σ_0 и Σ_2 являются линейными подпространствами в $\mathbf{R}^k$.

Если $\Sigma_0 \neq \Sigma_2$, то найдется ненулевой вектор $\widetilde{x} \in \Sigma_2$, ортогональный множеству Σ_0: $(\widetilde{x}, x) = \sum_{i=1}^k \widetilde{x}_i x_i = 0$, $x \in \Sigma_0$.

Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\widetilde{q}_i = q_i^* - \varepsilon \widetilde{x}_i > 0$ при всех $i \leqslant k$.

Пусть $\widetilde{q} = (\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_k)$. Тогда, если $x \in \Sigma_0$, то $(\widetilde{q}, x) = (q^*, x) = 0$.

Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что мера $\widetilde{\mathbf{P}}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$, определенная равенствами $\widetilde{\mathbf{P}}(\{\omega_i\}) = \delta \widetilde{q}_i$, где $\delta = (\widetilde{q}_1 + \cdots + \widetilde{q}_k)^{-1}$, является мартингальной, т.е. последовательность $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \widetilde{\mathbf{P}})$ есть мартингал.

В силу предполагаемой единственности меры $\mathbf{P}^*$ получаем равенство $\mathbf{P}^* = \widetilde{\mathbf{P}}$, равносильное тому, что $q^* = \delta \widetilde{q} = \delta q^* - \varepsilon \delta \widetilde{x}$, или

$$(1 - \delta)\, q^* = \varepsilon\, \delta\, \widetilde{x}. \tag{7.17}$$

Однако, поскольку $\widetilde{x} \in \Sigma_2$, то векторы q^* и $\widetilde{x}$ ортогональны и, значит, равенство (7.17) возможно лишь при $\delta = 1$ и *нулевом* векторе $\widetilde{x}$.

Полученное противоречие показывает, что $\Sigma_0 = \Sigma_2$.

1) $\Longrightarrow$ 3). Покажем, что свойство полноты рынка обеспечивает возможность представления всякого мартингала $M = (M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, в виде (7.16).

Пусть M — некоторый мартингал и $f_N = M_N B_N$.

Поскольку рынок полон, то найдется стратегия $\pi \in \mathrm{SF}$ такая, что ее капитал X_N^π в момент N в точности равен f_N: $X_N^\pi(\omega) = f_N(\omega)$.

В силу того, что последовательность $(X_n^\pi / B_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$ является мартингалом, имеем $X_n^\pi / B_n = M_n$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{n+1} - M_n = \frac{X_{n+1}^\pi}{B_{n+1}} - \frac{X_n^\pi}{B_n} &= \frac{\beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1}}{B_{n+1}} \\ &- \frac{\beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n}{B_n} = \gamma_{n+1} \left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{S_n}{B_n} \right), \end{aligned}$$

что и приводит к «интегральному» представлению (7.16).

3) $\Longrightarrow$ 1). Покажем, что возможность представления всякого мартингала в виде (7.16) влечет за собой свойство полноты для (B, S)-рынка.

Пусть $f_N = f_N(\omega)$ — некоторая случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F})$. Определим мартингал $M = (M_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}^*)$, $0 \leqslant n \leqslant N$, полагая

$$M_n = \mathbf{E}^* \left[\frac{f_N}{B_N} \,\Big|\, \mathcal{F}_n \right].$$

В силу сделанного предположения

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left(\frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \right).$$

Определим портфель π^* с $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ такими, что $\gamma_n^* = \gamma_n$, $\beta_n^* = M_n - M_0 - \gamma_n S_n / B_n$, $n \leqslant N$.

Тогда $\pi^* \in \mathrm{SF}$, поскольку при $n \leqslant N$

$$\begin{aligned} S_{n-1} \Delta \gamma_n^* + B_{n-1} \Delta \beta_n &= S_{n-1} \Delta \gamma_n + B_{n-1} \left(\Delta M_n - \Delta \left(\gamma_n \frac{S_n}{B_n} \right) \right) \\ &= S_{n-1} \Delta \gamma_n + B_{n-1} \left[\gamma_n \Delta \frac{S_n}{B_n} - \Delta \left(\gamma_n \frac{S_n}{B_n} \right) \right] = 0, \\ X_n^{\pi^*} &= \beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n = M_n B_n. \end{aligned}$$

В частности, $X_N^{\pi^*} = M_N B_N = f_N$, что завершает доказательство импликации 3) $\Longrightarrow$ 1), а вместе с ней и всей теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cox J. C., Ross R. A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach. — Journal of Financial Economics, 1976, v. 7 (September), p. 229–263.
2. *Cox J. C., Rubinstein M.* Options Markets. Englewood Cliffs, N.J, Prentice-Hall, 1985, 498 p.
3. *Föllmer H.* Probabilistic aspects of options. Preprint. Helsinki Univ., 1990, January, 34 p.
4. *Harrison J. M., Kreps D. M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. — Journal Economic Theory, 1979, v. 20, p. 381–408.
5. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales, stochastic integrals and continuous trading. — Stoch. Processes Appl., 1981, v. 11, № 3, p. 215–260.
6. *Larsen M.* Diffusion processes and the existence and uniqueness of the martingale measure used to price redundant assets in complete markets. Preprint. Copenhagen Univ., 1992, 87 p.
7. *Merton R.* Theory of rational option pricing. — Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4 (Spring), p. 141–183.
8. *Merton R.* Continuous-time Finance. Cambridge, Oxford: Blackwell, Cambridge MA and Oxford UK, 1990, 732 p.
9. *Rubinstein M.* Exotic Options. — Finance working paper, № 220, 1991, December, Inst. of Business and Economic Research, Univ. of California at Berkeley.
10. *Williams D.* Probability with Martingales. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991, 251 p.
11. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 430 с.
12. *Гнеденко Е. В.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988, 448 с.
13. *Рачев С. Т., Рушендорф Л.* Модели и расчеты контрактов с опционами. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 150–190.
14. *Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И.* Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977.
15. *Шепп Л. А., Ширяев А. Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона». — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 130–149.
16. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 231 с.
17. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
18. *Ширяев А. Н.* О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 5–22.
19. *Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 80–129.

Поступила в редакцию
5.VII.1993