Листок 2

Задача 1. Пусть (X, ϱ) — полное сепарабельное метрическое пространство и g — непрерывная ограниченная функция. Рассмотрим функцию

$$g_n(x) = \inf_y \Big\{ n\varrho(x,y) + g(y) \Big\}.$$

Докажите, что g_n является ограниченной липшицевой функцией и $g_n(x)$ сходится монотонно к $g(x)$ для каждого x.

Задача 2. Пусть последовательность вероятностных мер μ_n сходится слабо к вероятностной мере μ на полном сепарабельном метрическом пространстве. Докажите, что для всякой точки x носителя μ найдется такая последовательность точек x_n, что x_n принадлежит носителю μ_n и x_n сходится к x.

Задача 3. Приведите пример, показывающий, что слабая сходимость не влечет сходимость моментов, т.е. из слабой сходимости μ_n к μ на $\mathbb{R}^d$ не следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int |x|^p \, d\mu_n = \int |x|^p \, d\mu$$

ни для какого $p \geq 1$.

Задача 4. Пусть $b(x)$ — гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^d$ с ограниченными производными по x. Рассмотрим решение μ_t уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0.$$

Докажите, что если мера μ_0 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то мера μ_t абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и найдите плотность этой меры.

Задача 5. Пусть μ_t — решение уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0.$$

Предположим, что $\mu_0 = \delta_0$ и $\langle b(x,t), \nabla x\rangle \leq C$. Докажите, что мера μ_t имеет компактный носитель.

Задача 6. Пусть μ_t — решение уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0.$$

Докажите, что

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \leq \int_s^t \|b\|_{L^2(\mu_\tau)} \, d\tau.$$

Задача 7. Рассмотрим уравнение Власова

$$\partial_t \mu_t + \partial_x(b(x,\mu_t)\mu_t) = 0,$$

где

$$b(x,\mu) = F\Big(\int x \, d\mu\Big).$$

Приведите пример такой функции F, что существует несколько решений с начальным условием $\mu_0 = \delta_0$. Приведите пример такой функции F, что не существует решения на $[0, +\infty)$ с начальным условием δ_0.