Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 1

Идеи и примеры

Построение моделей игр среднего поля опирается на две идеи: моделирование большого числа взаимодействующих объектов с помощью эмпирической меры и равновесие Нэша.

Проиллюстрируем это двумя примерами.

1) Рассмотрим игру N игроков. Игрок с номером i выбирает точку α_i в некотором компактном множестве $A \subset \mathbb{R}^d$, а затем получает штраф J_i, который зависит от выбранных всеми игроками точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. При большом N естественно предполагать, что отдельный игрок учитывает лишь эмпирическое распределение всех игроков

$$\mu^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{\alpha_1} + \ldots + \delta_{\alpha_N}\big)$$

и свое положение. Кроме того, будем считать, что игроки действуют одинаково и при изменении позиции одного игрока изменением меры μ^N можно пренебречь, что является разумным допущением при большом N. Таким образом,

$$J_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = J(\alpha_i, \mu^N)$$

и в положении $(\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \ldots, \widehat{\alpha_N})$ равновесия Нэша, когда никто из игроков не может уменьшить свой штраф, если остальные игроки не меняют своих позиций, позиция $\widehat{\alpha_i}$ игрока i является точкой минимума функции

$$\alpha_i \to J(\alpha_i, \mu^N), \quad \mu^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{\widehat{\alpha_1}} + \ldots + \delta_{\widehat{\alpha_N}}\big).$$

Заметим, что точки $\{\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \ldots, \widehat{\alpha_N}\}$ составляют носитель меры μ^N. Нас интересует мера μ^N, описывающая распределение игроков в ситуации равновесия Нэша. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что искомая мера решает следующую задачу *теории игр среднего поля*: найти вероятностную меру μ на A, носитель которой лежит в множестве точек минимума функции $\alpha \to J(\alpha, \mu)$

2) Рассмотрим теперь дифференциальную игру N игроков, в которой игрок с номером i выбирает измеримую и ограниченную функцию α_i на $[0, T]$, с помощью которой управляет своим положением $y_i(t)$ на числовой прямой, решая уравнение $\dot{y}_i = \alpha_i$ с начальным условием $y_i(0) = x_i$. Каждый игрок получает в момент времени t штраф

$$J_i = \int_t^T \frac{|\alpha_i(s)|^2}{2} + f(\mu_s^N)\, ds + g(y_i(T)), \quad \mu_s^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{y_1(s)} + \ldots + \delta_{y_N(s)}\big).$$

Предположим, что N столь велико, что изменением меры μ_s^N в следствии изменения траектории одного из игроков можно пренебречь. Пусть $(\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \ldots, \widehat{\alpha_N})$ — положение равновесия Нэша и $(\widehat{y_1}, \widehat{y_2}, \ldots, \widehat{y_N})$ — соответствующие траектории игроков. Функция $\widehat{\alpha_i}$ является решением задачи оптимального контроля, в которой требуется найти управление α, на котором достигается минимум функционала

$$\alpha \to \int_t^T \frac{|\alpha(s)|^2}{2} + f(\mu_s^N)\, ds + g(y(T)), \quad \mu_s^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{\widehat{y_1}(s)} + \ldots + \delta_{\widehat{y_N}(s)}\big).$$

Пусть функция $u \in C^1$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$-u_t + \frac{1}{2}|u_x|^2 = f(\mu_t^N)$$

с условием $u(x, T) = g(x)$. Известно, что $\alpha(t) = -u_x(y(t), t)$, где y — решение задачи Коши $y' = -u_x(y, t)$, $y(0) = x$, является оптимальным контролем. Следовательно,

можно считать, что для $\widehat{y_i}$ выполнено $y_i' = -u_x(y_i, t)$, $y_i(0) = x_i$. Тогда можно показать (и это будет сделано на следующих лекциях), что μ_t является решением уравнения непрерывности
$$\partial_t \mu_t^N - \partial_x\big(u_x \mu_t^N\big) = 0.$$
Таким образом, для описания равновесия Нэша требуется решить следующую задачу *теории игр среднего поля*: найти пару (u, μ_t) решений системы уравнений
$$\begin{cases} -u_t + \frac{1}{2}|u_x|^2 = f(\mu_t), \\ \partial_t \mu_t - \partial_x\big(u_x \mu_t\big) = 0, \end{cases}$$
удовлетворяющих условиям $u(x, T) = g(x)$, $\mu_0 = \nu$.

Если в уравнение $y' = \alpha$ добавить стохастическое слагаемое, то в уравнениях теории игр среднего поля появятся слагаемые с производными второго порядка. Исследование систем уравнений такого вида является одной из центральных задач теории игр среднего поля.

Так как в рассматриваемых задачах существенно используются свойства вероятностных мер, то мы в начале курса обсудим некоторые свойства пространства вероятностных мер и слабой сходимости.

Вероятностные меры

Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство.

Вероятностной мерой μ на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ называется отображение $\mu\colon \mathcal{B} \to [0,1]$, удовлетворяющее двум условиям: 1) $\mu(X) = 1$ и 2) μ — сигма аддитивно, т.е. $\mu(\sqcup_i B_i) = \sum_i \mu(B_i)$, где $\sqcup_i B_i$ — объединение попарно непересекающихся множеств.

Сигма-аддитивность μ равносильна непрерывности относительно объединений и пересечений вложенных множеств: если $B_n \subset B_{n+1}$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_i B_i)$, а если $B_{n+1} \subset B_n$, то $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\cap_i B_i)$.

Из свойства непрерывности немедленно следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой шар $B(0, R)$, что $\mu(B(0,R)) \geq 1 - \varepsilon$.

Предложение 1. *Пусть μ — вероятностная мера на X. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K_ε, что*
$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\{s_n\}$ — счетное всюду плотное множество в X. Для каждого натурального числа k имеет место равенство
$$X = \cup_n \overline{B}(s_n, 2^{-k}).$$
Следовательно, найдется n_k, для которого $\mu(F_k) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$, где $F_k = \cup_{n=1}^{n_k} \overline{B}(s_n, 2^{-k})$. Множество $K_\varepsilon = \cap_k F_k$ замкнуто и для каждого $\delta > 0$ имеет конечную δ – сеть. Следовательно, K_ε является компактом. Более того,
$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \sum_k \mu(X \setminus F_k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$
□

Предложение 2. *Пусть μ — вероятностная мера на X. Для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F и открытое множество U, для которых выполняются условия:*
$$F \subset B \subset U, \quad \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Доказательство. Если B — замкнутое множество, то $F = B$ и
$$U = B^{1/n} = \{x\colon \mathrm{dist}d(x, B) < 1/n\}$$

для достаточно большого n. Рассмотрим теперь семейство E всех борелевских множеств B, для которых для всякого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое множество U, удовлетворяющие условиям $F \subset B \subset U$, $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Семейство E является сигма-алгеброй и содержит все замкнутые множества. Следовательно, оно совпадает с борелевской сигма-алгеброй. $\square$

Следствие 1. *Если две вероятностные меры μ и σ совпадают на всех замкнутых (открытых) множествах, то они совпадают на всех борелевских.*

Следствие 2. *Пусть μ и σ — вероятностные меры. Если для всякой функции $\varphi \in C_b(X)$ верно равенство*

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \, d\sigma,$$

то $\mu = \sigma$ на $\mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество. Покажем, что $\mu(F) = \sigma(F)$. Пусть $\delta > 0$ и I_F — индикатор множества F. Положим $\psi_\delta(t) = 1$ при $t \le 0$, $\psi_\delta(t) = 1 - \frac{t}{\delta}$ при $0 \le t \le \delta$ и $\psi_\delta(t) = 0$ при $t \ge \delta$. Ясно, что

$$\lim_{\delta \to 0} \psi_\delta(\mathrm{dist}(x, F)) = I_F(x).$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int \psi_\delta(\mathrm{dist}(x, F)) \, d\mu = \int I_F(x) \, d\mu = \mu(F).$$

Аналогичные равенства верны для σ. Остается заметить, что функция $\psi_\delta(\mathrm{dist}(x, F))$ ограничена и непрерывна. На самом деле это липшицева функция. $\square$

Следствие 3. *Пусть μ и σ — вероятностные меры на $X = \mathbb{R}^d$. Если для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство*

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \, d\sigma,$$

то $\mu = \sigma$ на $\mathcal{B}$.

Доказательство. Достаточно непрерывную ограниченную функцию приблизить гладкими функциями с компактным носителем, а это можно сделать с помощью умножения на «срезающую» функцию и свертки с гладким ядром. $\square$

Носителем меры $spt(\mu)$ называется множество всех таких x, что $\mu(B(x, r)) > 0$ для всякого шара $B(x, r)$. Носитель меры является замкнутым множеством.

Пусть $(X, \mathcal{A}_X)$ и $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — абстрактные измеримые пространства, отображение $f\colon X \to Y$ измеримо относительно сигма алгебр $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Y$ и μ — вероятностная мера на $(X, \mathcal{A}_X)$. Тогда на $(Y, \mathcal{A}_Y)$ определена вероятностная мера $\mu \circ f^{-1}$, заданная равенством

$$\mu \circ f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Верна следующая абстрактная формула замены переменной.

Теорема 1. *Для всякой функции $g\colon Y \to \mathbb{R}$, измеримой относительно $\mathcal{A}_Y$, выполняется равенство*

$$\int_Y g(y) \, d\mu \circ f^{-1} = \int_X g(f(x)) \, d\mu,$$

в котором существование одного из интегралов влечет существование другого.

Доказательство. В силу определения интеграла Лебега равенство достаточно проверить для индикатора $g(y) = I_B(y)$:

$$\int_Y I_B(y)\,d\mu\circ f^{-1} = \mu\circ f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \int I_B(f(x))\,d\mu.$$

□

В заключение данного раздела приведем без доказательство полезное обобщение теоремы Фубини.

Теорема 2. *Пусть μ — вероятностная мера на $X\times Y$, где X и Y — полные сепарабельные метрические пространства. Тогда существует такое семейство вероятностных мер μ^y на X, что $y\to\mu^y(B)$ — измеримая функция для всякого борелевского множества B и для всякой измеримой функции f на $X\times Y$ верно равенство*

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mu(dxdy) = \int_Y\Bigl(\int_X f(x,y)\,\mu^y(dx)\Bigr)\,\mu_Y(dy),$$

где μ_Y — проекция меры μ на Y, т.е. $\mu_Y(B) = \mu(X\times B)$.

Меры $\{\mu^y\}$ называют условными мерами.

Слабая сходимость

Последовательность вероятностных мер μ_n слабо сходится к μ, если для всякой ограниченной непрерывной функции φ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi\,d\mu_n = \int\varphi\,d\mu.$$

Из доказанного выше следует, что предельная мера μ определена однозначно.

Важнейшим утверждением о слабой сходимости является теорема Ю.В.Прохорова.

Напомним, что мы рассматриваем вероятностные меры на полном сепарабельном метрическом пространстве X.

Теорема 3. *Если последовательность вероятностных мер μ_n слабо сходится к вероятностной мере μ, то для всякого $\varepsilon>0$ существует такой компакт K_ε, что*

$$\mu_n(K_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon\quad\forall n.$$

Обратно, если последовательность вероятностных мер μ_n удовлетворяет этому условию, то существует слабо сходящаяся подпоследовательность μ_{n_k}.

Следствие 4. *Последовательность мер μ_n на $\mathbb{R}^d$ сходится слабо к вероятностной мере μ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi\,d\mu_n = \int\varphi\,d\mu\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Доказательство. Пусть $\psi_N(x) = \psi(x/N)$, где $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0\le\psi\le 1$, $\psi(x)=1$ при $|x|<1$ и $\psi(x)=0$ при $|x|>2$. Так как $\psi_N(x)\to 1$ при $N\to\infty$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует N, при котором

$$\int\psi_N\,d\mu\ge 1-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда найдется такое n_0, что для всех $n>n_0$ верны оценки

$$\mu_n(\overline{B}(0,2N))\ge\int\psi_N\,d\mu_n\ge 1-\varepsilon.$$

По теореме Прохорова во всякой подпоследовательности μ_{n_j} существует дальнейшая подпоследовательность $\mu_{n_{j_k}}$, которая слабо сходится к некоторой вероятностной мере $\widetilde{\mu}$. Так как интегралы от φ по μ и по $\widetilde{\mu}$ совпадают для всякой $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то $\mu=\widetilde{\mu}$. Следовательно, μ_n слабо сходится к μ. □

Следствие 5. *Пусть $V \in C(\mathbb{R}^d)$, $V \geq 0$, $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$. Предположим, что для последовательности вероятностных мер μ_n на $\mathbb{R}^d$ выполняется неравенство*

$$\sup_n \int V(x)\, d\mu_n < \infty.$$

Тогда существует слабо сходящаяся подпоследовательность μ_{n_j}.

Доказательство. Достаточно применить неравенство Чебышёва:

$$\mu_n\Big(\{x\colon\ V(x) > R\}\Big) \leq \frac{1}{R}\int V(x)\, d\mu_n.$$

□

Метрика Канторовича–Рубинштейна

Пусть $X = \mathbb{R}^d$, а μ и σ — вероятностные меры на X. Величина

$$d_{KR}(\mu, \sigma) = \sup\Big\{\int \varphi\, d(\mu - \sigma)\colon\ |\varphi(x)| \leq 1, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|\Big\}$$

называется метрикой Канторовича–Рубинштейна.

Теорема 4. *Функция $(\mu, \sigma) \to d_{KR}(\mu, \sigma)$ является метрикой на пространстве вероятностных мер $\mathcal{P}(X)$ и задает слабую сходимость.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $d_{KR}(\mu_n, \mu) \to 0$, то

$$\Big|\int \varphi\, d\mu_n - \int \varphi\, d\mu\Big| \leq (\max|\varphi| + \max|\nabla\varphi|) d_{KR}(\mu_n, \mu)$$

и интегралы от φ по μ_n сходятся к интегралу от φ по μ. Следовательно, μ_n сходится слабо к μ.

Предположим, что последовательность μ_n сходится слабо к μ. Тогда существует такой компакт K_ε, что $\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ для всех μ_n и $\mu(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$. Семейство функций

$$\Phi = \{\varphi\colon |\varphi| \leq 1, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|\}$$

является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным семейством функций в $C(K_\varepsilon)$. По теореме Арцела–Асколи это семейство является вполне ограниченным. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$ — ε-сеть множества Φ. Пусть N таково, что для всех $n > N$ и для всех $1 \leq i \leq M$ верна оценка

$$\Big|\int \varphi_i\, d\mu_n - \int \varphi_i\, d\mu\Big| \leq \varepsilon.$$

Пусть φ — произвольная функция из Φ. Для некоторой функции φ_i верно неравенство $|\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \varepsilon$ при $x \in K_\varepsilon$. Так как

$$\int \varphi\, d(\mu_n - \mu) \leq \int \varphi_i\, d(\mu_n - \mu) + \int_{X\setminus K_\varepsilon} (\varphi - \varphi_i)\, d(\mu_n - \mu) + \int_{K_\varepsilon} (\varphi - \varphi_i)\, d(\mu_n - \mu),$$

то

$$\int \varphi\, d(\mu_n - \mu) \leq 7\varepsilon.$$

Получаем, что $d_{KR}(\mu_n, \mu) \leq 7\varepsilon$ для всех $n > N$, т.е. $d_{KR}(\mu_n, \mu) \to 0$. □

Можно показать, что $\mathcal{P}(X)$ с метрикой d_{KR} является полным сепарабельным метрическим пространством.

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 2

Метрика Канторовича–Васерштейна

Пусть $p \geq 1$. Рассмотрим пространство $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, состоящее из вероятностных мер μ, удовлетворяющих условию

$$\int |x|^p \, d\mu < \infty.$$

Выражение

$$W_p(\mu, \sigma) = \Big(\inf_{\pi} \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} |x - y|^p \, d\pi\Big)^{1/p},$$

где inf берется по всем вероятностным мерам π, у которых проекция на $\mathbb{R}^d_x$ равна μ, а проекция на $\mathbb{R}^d_y$ равна σ, называется W_p–метрикой Канторовича–Васерштейна.

Теорема 1. (i) *В определении метрики Канторовича* inf *можно заменить на* min. *Мера, на которой достигается минимум называется оптимальным планом.*

(ii) *Выражение W_p действительно является метрикой.*

(iii) *Последовательность μ_n сходится к μ по метрике W_p тогда и только тогда, когда μ_n сходится к μ слабо и*

$$\lim_{n\to\infty} \int |x|^p \, \mu_n(dx) = \int |x|^p \, \mu(dx).$$

Доказательство. Для обоснования пункта (i) рассмотрим последовательность вероятностных мер π_n, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} |x - y|^p \, d\pi_n = W_p(\mu, \sigma)^p.$$

Так как

$$\iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} |x|^p + |y|^p \, d\pi_n = \int |x|^p \, \mu(dx) + \int |y|^p \, \sigma(dy),$$

то переходя к подпоследовательности можно считать, что π_n сходится слабо к вероятностной мере π. Мера π имеет заданные проекции. Кроме того, для всякого $M > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} \min\{M, |x - y|^p\} \, d\pi_n = \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} \min\{M, |x - y|^p\} \, d\pi.$$

Следовательно,

$$W_p(\mu, \sigma)^p \geq \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} \min\{M, |x - y|^p\} \, d\pi \quad \forall M > 0.$$

Устремляя $M \to \infty$ получаем, что π — искомая мера.

Из свойств метрики проверки требует лишь неравенство треугольника. Пусть μ, ν, σ — вероятностные меры и $\pi_{\mu\nu}$ — оптимальный план для μ и ν, а $\pi_{\nu\sigma}$ — оптимальный план для ν и σ. Обозначим через $\pi^y_{\mu\nu}(dx)$ и $\pi^y_{\nu\sigma}(dz)$ условные меры относительно общей проекции ν. Положим $\eta(dxdydz) = \pi^y_{\mu\nu}(dx)\pi^y_{\nu\sigma}(dz)\nu(dy)$. Тогда проекция меры η на координаты (x, z) имеет проекции μ на $\mathbb{R}^d_x$ и σ на $\mathbb{R}^d_z$. Следовательно, выполнено неравенство

$$W_p(\mu, \sigma) \leq \sqrt[p]{\iiint |x - z|^p \eta(dxdydz)},$$

где правая часть оценивается выражением

$$\sqrt[p]{\iiint |x - y|^p \eta(dxdydz)} + \sqrt[p]{\iiint |y - z|^p \eta(dxdydz)} = W_p(\mu, \nu) + W_p(\nu, \sigma).$$

Обсудим теперь пункт (iii). Предположим, что $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$. Пусть π_n — оптимальный план для μ_n и μ. Имеют место неравенства

$$\Big|\int |x|^p \, d\mu_n - \int |x|^p \, d\mu\Big| \leq \iint \big||x|^p - |y|^p\big| \, \pi_n(dxdy) \leq$$

$$\leq pW_p(\mu_n,\mu)\Big(\Big(\int |x|^p\,d\mu_n\Big)^{(p-1)/p}+\Big(\int |x|^p\,d\mu\Big)^{(p-1)/2}\Big),$$

из которых следует ограниченность и сходимость моментов. Аналогичным образом для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ получаем неравенство

$$\Big|\int \varphi\,d\mu_n-\int\varphi\,d\mu\Big|\leq \sup|\nabla\varphi|W_p(\mu_n,\mu),$$

которое влечет слабую сходимость μ_n к μ.

Предположим теперь, что последовательность μ_n слабо сходится к μ и сходится последовательность моментов порядка p. Тогда можно считать, что оптимальные планы π_n слабо сходятся к оптимальному плану π для мер μ и μ (утверждение, что π — оптимальный план, мы оставляем без доказательства). Положим

$$c_n=1+\int |x|^p\,d\mu_n+\int |x|^p\,d\mu,\quad c=1+2\int |x|^p\,d\mu,$$

$$\widetilde{\pi_n}=c_n^{-1}(1+|x|^p+|y|^p)\pi_n,\quad \widetilde{\pi}=c^{-1}(1+|x|^p+|y|^p)\pi.$$

Так как $c_n\to c$ и последовательность π_n сходится слабо к π, то для всякой функции $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_y)$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty}\iint \psi\,d\widetilde{\pi_n}=\iint\psi\,d\widetilde{\pi}.$$

Следовательно, последовательность вероятностных мер $\widetilde{\pi_n}$ сходится слабо к вероятностной мере $\widetilde{\pi}$, в частности, имеем

$$\iint |x-y|^p\,d\pi_n=c_n\iint\frac{|x-y|^p}{1+|x|^p+|y|^p}d\widetilde{\pi_n}\to c\iint\frac{|x-y|^p}{1+|x|^p+|y|^p}d\widetilde{\pi}=\iint |x-y|^p\,d\pi.$$

□

Можно показать, что пространство $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ с метрикой W_p является полным сепарабельным метрическим пространством.

При работе с метрикой W_p очень часто используется следующая оценка.

Предложение 1. *Пусть $(Z,\mathcal{A})$ — измеримое пространство, на котором определена вероятностная мера ν. Предположим, что отображения $f\colon Z\to\mathbb{R}^d$ и $g\colon Z\to\mathbb{R}^d$ измеримы и $f,g\in L^p(\nu)$. Тогда*

$$W_p(\nu\circ f^{-1},\nu\circ g^{-1})\leq \|f-g\|_{L^p(\nu)}.$$

Доказательство. Заметим, что мера $\pi=\nu\circ(f,g)^{-1}$ имеет проекции $\nu\circ f^{-1}$ и $\nu\circ g^{-1}$. По формуле замены переменной

$$\iint |x-y|^p\,d\pi=\int_Z |f(z)-g(z)|^p\,dz.$$

□

Уравнение непрерывности

Пусть $b(x,t)=(b^1(x,t),\dots,b^d(x,t))$ — непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^d\times[0,T]$ и для некоторой константы L_b верно неравенство

$$|b(x,t)-b(z,t)|\leq L_b|x-z|.$$

Известно, что для всякого $y\in\mathbb{R}^d$ на $[0,T]$ существует единственное решение $x_t(y)$ задачи Коши

$$\begin{cases}\dot{x}=b(x,t),\\ x(0)=y.\end{cases}$$

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим семейство вероятностных мер

$$\mu_t=\nu\circ x_t^{-1}.$$

Предложение 2. *Отображение $t \to \mu_t$ непрерывно относительно слабой сходимости (например относительно метрики Канторовича–Рубинштейна). Более того, для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение*

$$t \to \int \varphi(x)\,\mu_t(dx)$$

является непрерывно дифференцируемой и верно равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle\,\mu_t(dx).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что

$$\int \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int \varphi(x_t(y))\,\nu(dy).$$

Функция $t \to \varphi(x_t(y))$ непрерывно дифференцируема и ограничена. Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\varphi(x_t(y)) = \nabla b(x_t(y), t), \nabla\varphi(x_t(y))\rangle.$$

Так как функция $\langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle$ непрерывна и ограничена, то производная функции $t \to \varphi(x_t(y))$ непрерывна и ограничена. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует непрерывная дифференцируемость интеграла от $\varphi(x_t(y))$ по мере ν и равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x_t(y))\,\nu(dy) = \int \frac{d}{dt}\varphi(x_t(y))\,\nu(dy)$$

из которого немедленно выводится равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle\,\mu_t(dx).$$

$\square$

Предположим, что функции b^i непрерывно дифференцируемы и меры μ_t задаются непрерывно дифференцируемыми плотностями ϱ относительно меры Лебега. Интегрируя по частям приходим к равенству

$$\int \bigl[\partial_t\varrho(x,t) + \operatorname{div}(b(x,t)\varrho(x,t))\bigr]\varphi(x)\,dx = 0,$$

которое выполняется для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, функция ϱ является решением уравнения

$$\partial_t\varrho(x,t) + \operatorname{div}(b(x,t)\varrho(x,t)) = 0.$$

Уравнение такого вида называют *уравнением непрерывности*. Даже в ситуации гладкого коэффициента b решение может не иметь плотности, например так будет, если $\nu = \delta_a$ и $\mu_t = \delta_{x_t(a)}$. Поэтому определение решения должно допускать в качестве решений меры.

Сформулируем определение в общей ситуации, когда b — борелевское векторное поле.

Непрерывное отображение $t \to \mu_t$ отрезка $[0,T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ называется решением уравнения непрерывности

$$\partial_t\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0,$$

если для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция

$$t \to \int \varphi\,d\mu_t$$

абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и верно равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\,d\mu_t = \int \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle\,d\mu_t.$$

Если для данной вероятностной меры ν мы рассматриваем решение μ_t, для которого $\mu_0 = \nu$, то μ_t называется решением задачи Коши

$$\partial_t\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Принцип суперпозиции

Пусть (как и ранее) векторное поле b непрерывно и липшицево по x. Рассмотрим отображение $\Psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$, заданное равенством

$$\Psi(y) = (y, x.), \quad x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\,ds.$$

Заметим, что Ψ — непрерывное отображение, в силу оценки

$$\max_{[0,T]} |x_t(y) - x_t(z)| \le e^{L_b T}|y - z|,$$

которая выводится из неравенства

$$\tfrac{d}{dt}|x_t(y) - x_t(z)|^2 \le 2L_b|x_t(y) - x_t(z)|^2.$$

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Положим $P = \nu \circ \Psi^{-1}$.

Предложение 3. *Носитель меры P является подмножеством множества*

$$X = \Big\{(y, x.)\colon x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\,ds\Big\}$$

и $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$, где $e_t((y, x.)) = x_t$.

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из того, что X — замкнутое множество и для всякой точки $z \notin X$ найдется шар $B(z)$, который не пересекается с X, в частности $\Psi^{-1}(B(z)) = \emptyset$ и $P(B(z)) = 0$.

Второе утверждение проверяется следующей цепочкой равенств

$$P \circ e_t^{-1}(E) = P\Big(\{(y, x.)\colon x_t \in E\}\Big) = P\Big(\{(y, x.)\colon x_t \in E,\, x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\,ds\}\Big) =$$

$$= \nu\Big(\{y\colon x_t(y) \in E\}\Big) = \mu_t(E).$$

□

Замечательным образом такая мера P существует в очень общей ситуации для каждого вероятностного (и даже неотрицательного) решения уравнения непрерывности. Имеет место следующий *принцип суперпозиции*, доказанный Л.Амброзио.

Теорема 2. *Предположим, что b — борелевское векторное поле и $t \to \mu_t$ — непрерывное отображение из $[0,T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, причем*

$$\int_0^T \int \frac{|b(x,t)|}{1 + |x|}\, mu_t(dx)\,dt < \infty.$$

Предположим также, что μ_t является решением уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \mathrm{div}(b\mu_t) = 0.$$

Тогда существует такая вероятностная мера P на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$, что носитель меры P является подмножеством множества

$$X = \Big\{(y, x.)\colon x_t - \text{абсолютно непрерывное отображение},\ x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\,ds\Big\}$$

и $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$, где $e_t((y, x.)) = x_t$.

Следствие 1. *Если b — непрерывное векторное поле и $|b(x,t) - b(z,t)| \le L_b|x - z|$, то существует не более одного (в пространстве вероятностных мер) решения μ_t задачи Коши*

$$\partial_t \mu_t + \mathrm{div}(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Пусть μ_t — решение задачи Коши для уравнения непрерывности и P — соответствующая мера на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$ из принципа суперпозиции. Проверим, что проекция P на $\mathbb{R}^d$ равна ν. Действительно, верны равенства

$$P\Bigl(\{(y,x.)\colon y\in B\}\Bigr) = P\Bigl(\{(y,x.)\colon y\in B,\, x_t = y + \int_0^t b(x_s,s)\,ds\}\Bigr) =$$

$$= P\Bigl(\{(y,x.)\colon x_0\in B\}\Bigr) = P\circ e_0^{-1}(B) = \mu_0(B) = \nu(B).$$

Пусть $P^y(dx.)$ — условные меры, т.е. $P(dydx.) = P^y(dx.)\nu(dy)$ Найдем эти условные меры. Через $x_t(y)$ обозначаем единственное решение задачи Коши $\dot{x} = b(x,t)$, $x(0) = y$. Напомним, что отображение $y \to x.(y)$ непрерывно. Для всякой измеримой ограниченной функции f на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$ верны равенства

$$\iint f(y,x.)P(dydx.) = \iint_{(y,x.)\colon\ x.=x.(y)} f(y,x.)P(dydx.) =$$

$$\iint f(y,x.(y))P(dydx.) = \iint f(y,x.(y))\,\nu(dy) = \int\Bigl(\int f(y,x.)\,\delta_{x.(y)}(dx.)\Bigr)\,\nu(dy).$$

Таким образом, $P^y(dx.) = \delta_{x.(y)}$ для ν — почти всех y.

Предположим, что есть два решения μ_t^1 и μ_t^2 задачи Коши для уравнения непрерывности с начальным условием ν. Пусть P_1 и P_2 — соответствующие этим решениям меры на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$. По доказанному выше верны равенства

$$P_1(dydx.) = \delta_{x.(y)}(dx.)\nu(dy) = P_2(dydx.).$$

Следовательно, $\mu_t^1 = P_1\circ e_t^{-1} = P_2\circ e_t^{-1} = \mu_t^2$. □

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 3

Оценки решений уравнения непрерывности

Рассмотрим уравнение непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\big(b\mu_t\big) = 0, \tag{1}$$

где $b(x,t) = (b^1(x,t), \ldots, b^d(x,t))$ — непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$, причем

$$|b(x,t) - b(z,t)| \le L_b|x - z|.$$

Напомним, что под решением мы понимаем непрерывную (относительно слабой сходимости) кривую вероятностных мер $t \to \mu_t$, которая удовлетворяет условиям: для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$t \to \int \varphi\, d\mu_t$$

является абсолютно непрерывной функцией на $[0,T]$ и верно равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\, d\mu_t = \int \langle b, \nabla\varphi\rangle\, d\mu_t.$$

На прошлой лекции мы показали, что при наших условиях на b задача Коши

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\big(b\mu_t\big) = 0, \quad \mu_0 = \nu, \tag{2}$$

имеет единственное решение μ_t (в смысле данного выше определения), причем $\mu_t = \nu \circ x_t^{-1}$, где $\dot{x}_t = b(x,t)$, $x_0 = y$.

Напомним, что через $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ мы обозначаем пространство вероятностных мер с конечным вторым моментом.

Предложение 1. *Если $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и μ_t — решение задачи Коши (2) с начальным условием ν, то $\mu_t \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и для некоторой константы $C(T,\nu) > 0$ выполняется неравенство*

$$\sup_{t\in[0,T]} \int |x|^2\, \mu_t(dx) \le C(T,\nu).$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{dt}|x_t(y)|^2 = 2\langle b(x_t(y),t), x_t(y)\rangle \le C_1 + C_2|x_t(y)|^2$$

для некоторых чисел $C_1, C_2 > 0$ и всех $t \in [0,T]$, $y \in \mathbb{R}^d$, то

$$|x_t(y)|^2 \le C_1' + C_2'|y|^2, \quad C_1' = \frac{C_1}{C_2}e^{C_2T}, C_2' = e^{C_2T}.$$

С помощью формулы замены переменной получаем

$$\int |x|^2\, \mu_t(dx) = \int |x_t(y)|^2\, \nu(dy) \le C_1' + C_2' \int |y|^2\, \nu(dy).$$

□

Предложение 2. *Если $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и μ_t — решение задачи Коши (2) с начальным условием ν, то*

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \le \sqrt{|t-s|}\Big(\int_s^t \int |b(x,\tau)|^2\, \mu_\tau(dx)\, d\tau\Big)^{1/2}$$

и найдется такая константа $C(T,\nu) > 0$, что

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \le C(T,\nu)|t-s| \quad \forall t,s \in [0,T].$$

Доказательство. Пусть $0 \le s < t \le T$. Так как $\pi = \nu \circ (x_t, x_s)^{-1}$ является планом для μ_t и μ_s, то верно неравенство

$$W_2(\mu_t, \mu_s)^2 \le \int |x_t(y) - x_s(y)|^2 \, \nu(dy).$$

С помощью неравенства Коши-Буняковского получаем оценку

$$|x_t(y) - x_s(y)|^2 \le (t-s) \int_s^t |b(x_\tau(y), \tau)|^2 \, d\tau.$$

По теореме Фубини получаем

$$W_2(\mu_t, \mu_s)^2 \le (t-s) \int_s^t \int |b(x, \tau)|^2 \, \mu_\tau(dx) \, d\tau.$$

Так как $|b(x,\tau)| \le C_1 + C_2|x|^2$, то в силу предыдущего утверждения

$$\int |b(x,\tau)|^2 \, \mu_\tau(dx) \le C(T, \nu)$$

для некоторой константы $C(T,\nu)$. Следовательно, $W_2(\mu_t, \mu_s) \le C(T,\nu)|t-s|$. $\square$

Отметим, что имеет место более точная оценка

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \le \int_s^t \|b(\,\cdot\,, \tau)\|_{L^2(\mu_\tau)} \, d\tau,$$

которая означает, что метрическая производная $|\mu_t'|$ абсолютно непрерывной кривой $t \to \mu_t$ оценивается сверху величиной $\|b(\,\cdot\,, t)\|_{L^2(\mu_t)}$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Предложение 3. *Предположим, что μ_t^1 и μ_t^2 — решения уравнений*

$$\partial_t \mu_t^1 + \mathrm{div}\big(b_1 \mu_t^1\big) = 0, \quad \partial_t \mu_t^2 + \mathrm{div}\big(b_2 \mu_t^2\big) = 0.$$

Тогда

$$W_2(\mu_t^1, \mu_t^2)^2 \le e^{\Lambda t} W_2(\mu_0^1, \mu_0^2)^2 + e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda s} \int |b_1(x,s) - b_2(x,s)|^2 \, \mu_s^2 \, ds, \quad \Lambda = 2L_b + 1.$$

Доказательство. Напомним, что $\mu_t^1 = \mu_0^1 \circ x_t^{-1}$ и $\mu_t^2 = \mu_0^2 \circ y_t^{-1}$, где

$$\dot{x}_t = b_2(x_t, t), \quad \dot{y}_t = b_2(y_t, t), \quad x_0 = u, \quad y_0 = v.$$

Пусть π — оптимальный план для μ_0^1 и μ_0^2. Тогда $\pi \circ (x_t, y_t)^{-1}$ — план для μ_t^1 и μ_t^2. Следовательно, имеет место неравенство

$$W_2(\mu_t^1, \mu_t^2)^2 \le \iint |x_t(u) - y_t(u)|^2 \, \pi(dudv).$$

Так как

$$\frac{d}{dt}|x_t(u) - y_t(v)|^2 = 2\langle b_1(x_t(u), t) - b_2(y_t(v), v), x_t(u) - y_t(v)\rangle \le$$
$$\le \Lambda |x_t(u) - y_t(v)|^2 + |b_1(y_t(v), t) - b_2(y_t(v), t)|^2,$$

то

$$|x_t(u) - x_t(v)|^2 \le e^{\Lambda t}|u - v|^2 + e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda s} |b_1(y_s(v), s) - b_2(y_s(v), s)|^2 \, ds.$$

Применяя теорему Фубини и формулу замены переменной получаем

$$\iint |x_t(u) - y_t(u)|^2 \, \pi(dudv) \le e^{\lambda t} W_2(\mu_0^1, \mu_0^2)^2 + e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda s} \int |b_1(x,s) - b_2(x,s)|^2 \, \mu_s^2 \, ds.$$

$\square$

Уравнение Власова

Рассмотрим систему частиц $x_1, \ldots, x_N$ на прямой, взаимодействие которых описывается уравнениями Ньютона

$$m_i \ddot{x}_i = -\sum_{j=1}^{N} m_i m_j K'(x_i - K_j),$$

где K — непрерывно дифференцируемая функция, причем $K(x) = K(-x)$. Предположим, что все частицы имеют одинаковую массу

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_N = \frac{1}{N}.$$

Перейдем к гамильтоновой системе уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} K'(x_i - K_j).$$

Для описания данной модели исследуем меру

$$\mu_t^N = \frac{1}{N}\Big(\delta_{(x_1(t), y_1(t))} + \ldots + \delta_{(x_N(t), y_N(t))}\Big),$$

которую называют эмпирической мерой или средним полем.

Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\, d\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big[\varphi_x(x_i(t), y_i(t)) y_i(t) - \varphi_y(x_i(t), y_i(t)) \sum_{j=1}^{N} K'(x_i(t) - x_j(t))\Big] =$$

$$= \int \Big[\varphi_x(x,y)y - \varphi_y(x,y)\int K(x-u)\mu_t^N(dudv)\Big]\, d\mu_t^N.$$

Следовательно, кривая $t \to \mu_t^N$ является решением уравнения

$$\partial_t \mu_t^N + \partial_x\Big(y\mu_t^N\Big) - \partial_y\Big(\mu_t^N \int K'(x-u)\mu_t^N(dudv)\Big) = 0.$$

Уравнения такого вида называют уравнениями Власова.

Разрешимость уравнения Власова и предел среднего поля

Рассмотрим уравнение Власова более общего вида

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b(x, \mu_t)\mu_t) = 0,$$

где

$$b(x, \mu) = \beta(x) + \int B(x, z)\mu(dz).$$

Далее предполагаем, что

$$|\beta(x) - \beta(y)| + |B(x,z) - B(y,w)| \le L_b\big(|x-y| + |z-w|\big).$$

Отметим, что для всякой непрерывной кривой $t \to \mu_t$, отображающей отрезок $[0, T]$ в $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ с метрикой W_2, векторное поле $b(x, \mu_t)$ непрерывно и

$$|b(x, \mu_t) - b(y, \mu_t)| \le L_b|x - y|.$$

Через $C([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ обозначим множество непрерывных отображений из $[0,T]$ в $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ с метрикой Канторовича W_2. Множество $C([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ с метрикой

$$\varrho(\mu_\cdot, \sigma_\cdot) = \max_{t\in[0,T]} W_2(\mu_t, \sigma_t)$$

является полным метрическим пространством.

Теорема 1. *Существует такое $T > 0$, что задача Коши*

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b(x, \mu_t)\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu,$$

имеет единственное решение в $C([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$.

Доказательство. Рассмотрим отображение F, которое сопоставляет $\sigma_\cdot \in C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ решение μ_t задачи Коши

$$\partial_t\mu_t + \mathrm{div}(b(x,\sigma_t)\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Согласно доказанным выше утверждениям $\mu_\cdot$ существует, единственно и принадлежит пространству $C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$. Таким образом, F отображает пространство $C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ в $C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$. Покажем, что F — сжимающее отображение.

Пусть $\mu^1_\cdot = F(\sigma^1_\cdot)$ и $\mu^2_\cdot = F(\sigma^2_\cdot)$. Для всех $t\in[0,T]$ имеет место неравенство

$$W_2(\mu^1_t,\mu^2_t)^2 \le e^{\Lambda T}\int_0^T\int |b(x,\sigma^1_t) - b(x,\sigma^2_t)|^2\mu^2_t\,dt.$$

Пусть π_t — оптимальный план для σ^1_t и σ^2_t. Используя вид векторного поля b получаем оценку

$$|b(x,\sigma^1_t) - b(x,\sigma^2_t)| \le \iint |B(x,z) - B(x,w)|\,d\pi_t \le L_b W_2(\sigma^1_t,\sigma^2_t).$$

Следовательно, верно неравенство

$$W_2(\mu^1_t,\mu^2_t) \le L_b\sqrt{T}e^{\Lambda T/2}\max_{s\in[0,T]} W_2(\sigma^1_s,\sigma^2_s).$$

Если $q = L_b\sqrt{T}e^{\Lambda T/2} < 1$, то $\varrho(\mu^1_\cdot,\mu^2_\cdot) \le q\varrho(\sigma^1_\cdot,\sigma^2_\cdot)$ и отображение F является сжимающим. По теореме Банаха F имеет единственную неподвижную точку. $\square$

Вернемся к исходной задаче и мере μ^N_t. Напомним, что μ^N_t является решением уравнения

$$\partial_t\mu^N_t + \partial_x\Big(y\mu^N_t\Big) - \partial_y\Big(\mu^N_t\int K'(x-u)\mu^N_t(dudv)\Big) = 0.$$

Будем предполагать, что K' является липшицевой функцией.

Имеет место следующий результат о пределе среднего поля.

Теорема 2. *Если μ^N_0 сходится по метрике W_2 к мере ν при $N\to\infty$, то μ^N_t сходится по метрике W_2 к мере μ_t при $N\to\infty$, где μ_t является решением задачи Коши*

$$\partial_t\mu_t + \partial_x\Big(y\mu_t\Big) - \partial_y\Big(\mu_t\int K'(x-u)\mu_t(dudv)\Big) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Так как μ^N_t и μ_t являются решениями уравнения Власова, то

$$W_2(\mu^N_t,\mu_t)^2 \le e^{\Lambda T}W_2(\mu^N_0,\mu_0)^2 + e^{\Lambda T}\int_0^t W_2(\mu^N_s,\mu_s)\,ds.$$

Вывод этой оценки полностью повторяет рассуждения из доказательства предыдущей теоремы. Напомним неравенство Гроноулла: если $f\in C([0,T])$, $Q\ge 0$ и

$$f(t) \le R + Q\int_0^t f(s)\,ds,$$

то $f(t)\le Re^{Qt}$. Следовательно, верна оценка

$$W_2(\mu^N_t,\mu_t)^2 \le C_1e^{C_1T}W_2(\mu^N_0,\mu_0)^2, \quad C_1 = e^{\Lambda T},$$

из которой немедленно выводится требуемое утверждение. $\square$

Таким образом, при больших N распределение частиц приближенно описывается кривой $t\to\mu_t$ в пространстве мер, которая является единственным решением задачи Коши для уравнения Власова с начальным условием ν, где вероятностная мера ν является пределом распределения частиц в момент времени $t=0$ при $N\to\infty$.

Теорема Шаудера и пример выпуклого компакта

Кроме теоремы о сжимающем отображении мощным инструментом для доказательства существования решений нелинейных уравнений является теорема Шаудера о неподвижной точке.

Теорема 3. *Если $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство и $K \subset X$ — выпуклый компакт, то для всякого непрерывного отображения $f\colon K \to K$ существует такая точка $x \in K$, что $f(x) = x$.*

Для применения этой теоремы к нелинейным уравнениям в пространстве мер надо подобрать подходящее нормированное пространство и выпуклый компакт. В качестве нормированного пространства можно взять линейное пространство конечных борелевских мер $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ с нормой Конторовича–Рубинштейна:

$$\|\mu\|_{KR} = \sup\Bigl\{\int \varphi\, d\mu\colon\ |\varphi| \le 1,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x-y|\Bigr\}.$$

На подмножестве вероятностных мер эта норма задает метрику, сходимость по которой совпадает со слабой сходимостью. Важно иметь ввиду, что на знакопеременных мерах данная норма не задает слабую сходимость. Более того, нормированное пространство $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ не является полным.

Пусть $p \ge 1$ и $R > 0$. Множество $K_{p,R}$, состоящее из вероятностных мер μ, удовлетворяющих условию

$$\int |x|^p\, \mu(dx) \le R,$$

является выпуклым компактом в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Пространство $C([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ с нормой

$$\|\mu_\cdot\| = \max_{t\in[0,T]} \|\mu_t\|_{KR}$$

является нормированным пространством, а множество $\mathcal{K}_{p,R,L}$, состоящее из таких $\mu_\cdot \in C([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$, что

$$\mu_t \in K_{p,R}, \quad \|\mu_t - \mu_s\|_{KR} \le L|t-s|,$$

доставляет пример выпуклого компакта в $C([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$.

Компактность множества $\mathcal{K}_{p,R,L}$ следует из обобщения теоремы Арцела—Асколи.

Теорема 4. *Пусть (X, d_X) — компактное метрическое пространство, (Y, d_Y) — произвольное метрическое пространство и $C(X,Y)$ — метрическое пространство непрерывных отображений из X в Y с метрикой $\varrho(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$. Тогда множество $F \subset C(X,Y)$ является компактом тогда и только тогда, когда 1) найдется такой компакт $K \subset Y$, что $f(x) \in K$ для всех $x \in X$, $f \in F$; 2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon$ для всех x, z, удовлетворяющих неравенству $d_x(x,z) < \delta$, и всех $f \in F$.*

Нерегулярное векторное поле

Выше мы подробно обсудили непрерывное векторное поле b удовлетворяющее по переменной x условию Липшица. Если b только непрерывно, то ситуация существенно усложняется. Например, задача Коши для уравнения непрерывности может иметь несколько решений. Если $d = 1$, $b(x) = \sqrt{|x|}$ и $\nu = \delta_0$, то меры $\mu_t = \delta_0$ и $\mu_t = \delta_{t^2/4}$ являются различными решениями задачи Коши. Если векторное поле b не является непрерывным, то проблемы возникают не только с единственностью, но и существованием. Пусть $b(x) = 1$ при $x \le 0$ и -1 при $x > 0$, а $\nu = \delta_0$. Тогда задача

$$\partial_t\mu_t + \partial_x(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu,$$

не имеет решения. Пусть $\delta > 0$, $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\psi(x) = \psi(-x)$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi(x) = 1$ на $(-\delta, \delta)$, $\psi(x) = 0$ вне $(-2\delta, 2\delta)$, $\psi' \le 0$ при $x > 0$. Тогда

$$b(x)\psi'(x) \ge 0, \quad \frac{d}{dt}\int \psi\, d\mu_t = \int b\psi'\, d\mu_t \ge 0.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\int (1-\psi)\, d\mu_t \le 0$$

и $\mu_t = 0$ вне $(-2\delta, 2\delta)$. В силу произвольности $\delta > 0$ получаем $\mu_t = \delta_0$, но это точно не является решением, так как на функции ψ, равной в окрестности нуля x, получим

$$0 = \frac{d}{dt}\int \psi\, d\mu_t = \int b(x)\psi'(x)\, d\mu_t = b(0)\psi'(0) = 1.$$

Таком образом, в случае нерегулярного b требуются дополнительные ограничения на начальное условие и на класс мер, в которых решается уравнение непрерывности. В качестве такого класса часто выбирают абсолютно непрерывные меры.

Приведем в качестве примера формулировку известного результата R.J.DiPerna, P.L.Lions.

Функция $u \in L^1([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ является решением задачи Коши

$$\partial_t u - \langle b, \nabla u\rangle + cu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{3}$$

если для всякой функции $\varphi \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, $\varphi(x,t) = 0$ при $|x| > R$ и $\varphi(x,T) = 0$, выполняется равенство

$$-\int_0^T \int \big[\varphi_t u + \operatorname{div}(b\varphi)u + c\varphi u\big]\, dx\, dt + \int \varphi(x,0)u_0(x)\, dx = 0.$$

Теорема 5. *Пусть $1 \le p \le +\infty$, $q = p/(p-1)$. Предположим, что*

$$c, \operatorname{div} b \in L^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad b \in L^1([0,T], W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^d))$$

и

$$\frac{|b|}{1+|x|} \in L^1([0,T], L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Тогда существует единственное решение $u \in L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R}^d))$ задачи Коши (3).

Если $c = -\operatorname{div} b$, то уравнение имеет вид уравнения непрерывности

$$\partial_t u - \operatorname{div}(bu) = 0.$$

Основная идея доказательства теоремы состоит в перенормировке решений.

Пусть $\beta \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Предположим, что u и b гладкие функции. Тогда

$$\partial_t \beta(u) - \langle b, \nabla\beta(u)\rangle + cu\beta'(u) = 0.$$

Если $\beta(u) = u^2$, то

$$\partial_t u^2 - \langle b, \nabla u^2\rangle + 2cu^2 = 0.$$

Проинтегрируем по $\mathbb{R}^d$ это равенство и во втором слагаемом проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{dt}\int u^2\, dx = -\int (2c + \mathrm{div b})u^2\, dx.$$

Если $-(2c + \mathrm{div b}) \le C$, то

$$\int u^2(x,t)\, dx \le e^{Ct}\int u_0^2(x)\, dx.$$

Из такой оценки немедленно следует единственность решения, непрерывная зависимость от начального условия. Кроме того, при построении решения с помощью приближения негладких коэффициентов гладкими такая оценка дает ограниченность соответствующей последовательности решений в L^2, что позволяет выбрать из нее слабо сходящуюся подпоследовательность. Ключевым моментом этих рассуждений является равенство

$$\partial_t \beta(u) - \langle b, \nabla\beta(u)\rangle + cu\beta'(u) = 0.$$

Решения, для которых такое равенство выполняется для всех $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ называют перенормируемыми. Доказательство перенормируемости решений из того или иного функционального пространства является самой трудной частью теории существования и единственности.

Наконец, отметим, что условие $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ можно заменить на условие $b \in VB_{loc}(\mathbb{R}^d)$ с дополнительным предположением, что дивергенция b имеет плотность относительно меры Лебега. Такое обобщение получено в работах L.Ambrosio.

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 4

Задача оптимального управления

Пусть $f\colon \mathbb{R}^d\times A\to\mathbb{R}^d$, где A — подмножество $\mathbb{R}^m$, является непрерывной по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$|f(y,a)-f(z,a)|\le L_f|y-z|.$$

Назовём измеримое отображение $\alpha\colon [0,T]\to A$ допустимым контролем, если

$$|f(0,\alpha(t))|\in L^1[0,T].$$

В случае ограниченной функции f всякое измеримое отображение α является допустимым контролем. Заметим, что имеет место неравенство

$$|f(y,a)|\le L_f|y|+|f(0,a)|.$$

Пусть $0\le t<T$ и α — допустимый контроль. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{y}_x(s)=f(y_x(s),\alpha(s)),\quad y_x(t)=x,\quad s\in[t,T], x\in\mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Решением y_x называется абсолютно непрерывное отображение $[t,T]\to\mathbb{R}^d$, для которого верно равенство

$$y_x(s)=x+\int_t^s f(y_x(\tau),\alpha(\tau))\,d\tau.$$

Существование и единственность решения можно обосновать с помощью теоремы о сжимающем отображении. Рассмотрим в $L^1[t,t+\Delta t]$ отображение

$$F(z)(s)=x+\int_t^s f(z(\tau),\alpha(\tau))\,d\tau.$$

Так как

$$\int_t^{t+\Delta t}\Big|F(z_1)(s)-F(z_2(s))\Big|\,ds\le L_f|\Delta t|\int_t^{t+\Delta t}\Big|z_1(s)-z_2(s)\Big|\,ds,$$

то при $|\Delta t|L_f<1$ отображение F сжимающее и у него существует единственная неподвижная точка. Применяя это утверждение к отрезкам $[t,t+\Delta t/2]$, $[t+\Delta t/2,t+\Delta t],\ldots$, получаем существование на отрезке $[0,T]$. Обоснуем теперь единственность. Пусть y_x^1 и y_x^2 — два решение. Множество $E=\{t\in[0,T]\colon\ y_x^1(t)=y_x^2(t)\}$ замкнуто из-за непрерывности y_x^1 и y_x^2. С другой стороны для всякой точки t_0, в которой $y_x^1(t_0)=y_x^2(t_0)$, по доказанному выше существует окрестность, в которой $y_x^1=y_x^2$. Множество E одновременно открыто и замкнуто. Следовательно, $E=[0,T]$.

Заметим, что для двух решений y_x и y_z уравнения с одним и тем же управлением α верна оценка

$$|y_x(s)-y_z(s)|\le|x-z|+L_f\int_t^s|y_x(\tau)-y_z(\tau)|\,d\tau,$$

из которой следует неравенство

$$\sup_{s\in[0,T]}|y_x(s)-y_z(s)|\le|x-z|e^{L_fT}.$$

Пусть $l\colon\mathbb{R}^d\times A\times[0,T]\to\mathbb{R}$ — непрерывная и ограниченная снизу функция, причем

$$|l(y,a,s)-l(z,a,s)|\le L_l|y-z|.$$

Пусть также $g\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — ограниченная липшицева функция. Рассмотрим задачу оптимального контроля, которая состоит в минимизации функционала

$$\alpha\to\int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds+g(y_x(T)).$$

Принципиальную роль в решение этой задачи играет функция значения

$$u(x,t)=\inf_{\alpha}\Big\{\int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds+g(y_x(T))\Big\}.$$

Предложение 1. (i) *Существует такое число $C > 0$, что*

$$|u(x,t) - u(z,t)| \le C|x - z|$$

для всех $x, z \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T]$.

(ii) *Если f и l ограничены, то существует такое число $C > 0$, что*

$$|u(x,t) - u(z,s)| \le C\big(|x - z| + |t - s|\big)$$

для всех $x, z \in \mathbb{R}^d$, $t, s \in [0,T]$. Более того, $u(x, T-0) = g(x)$.

Доказательство. Обоснуем первую оценку. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдем α, при котором

$$-u(z,t) \le \varepsilon - \int_t^T l(y_z(s), \alpha(s), s)\,ds - g(y_z(T)).$$

Имеем

$$u(x,t) - u(z,t) \le \varepsilon + \int_t^T \Big| l(y_x(s), \alpha(s), s) - l(y_z(s), \alpha(s), s) \Big|\,ds + |g(y_x(T) - g(y_z(T))|.$$

Правая часть оценивается выражением

$$(TL_l + L_g)e^{L_f T}|x - z|,$$

где L_g — константа Липшица функции g.

Пусть теперь f и l ограничены. Получим вторую оценку. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдем $\alpha\colon [s,T] \to A$, при котором

$$-u(x,s) \le \varepsilon - \int_s^T l(y_x^1(\tau), \alpha(\tau), \tau)\,d\tau - g(y_x^1(T)).$$

Если $t < s$, то продолжаем α на $[t,s)$ произвольным значением из A. Пусть y_x^2 — решение уравнения $\dot{y}_x^2(\tau) = f(y_x^2(\tau), \alpha(\tau))$ с начальным условием $y_x^2(t) = x$. Тогда

$$u(x,t) - u(x,s) \le \varepsilon + \int_t^T l(y_x^2(\tau), \alpha(\tau), \tau)\,d\tau + g(y_x^2(T)) - \int_s^T l(y_x^1(\tau), \alpha(\tau), \tau)\,d\tau - g(y_x^1(T)).$$

Пусть $|l| \le M_l$ и $|f| \le M_f$. Предположим, что $s < t$. Тогда правая часть оценивается выражением

$$\varepsilon + M_l(t - s) + L_l \int_t^T |y_x^2(\tau) - y_x^1(\tau)|\,d\tau + L_g|y_x^2(T) - y_x^1(T)|.$$

Заметим, что при $\tau \in [t,T]$ верно неравенство

$$|y_x^2(\tau) - y_x^1(\tau)| \le M_f(t - s) + L_f \int_t^\tau |y_x^2(\tau) - y_x^1(\tau)|\,d\tau,$$

из которого следует оценка

$$|y_x^2(\tau) - y_x^1(\tau)| \le M_f e^{L_f T}(t - s).$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$u(x,t) - u(x,s) \le \varepsilon + M_l(t - s) + TM_f e^{L_f T}(t - s) + L_g M_f e^{L_f T}(t - s).$$

Устремляя ε к нулю получаем

$$u(x,t) - u(x,s) \le C|t - s|.$$

Случай $t < s$ исследуется полностью аналогично. □

В общем случае, функция значения u не является дифференцируемой.

Принцип динамического программирования

Теорема 1. *Для всех $0 \le t \le \tau \le T$ имеет место равенство*

$$u(x,t) = \inf_\alpha \Big\{ \int_t^\tau l(y_x(s), \alpha(s), s)\,ds + u(y_x(\tau), \tau) \Big\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть доказываемого равенства через $U(t,x)$. Для всякого $\varepsilon>0$ найдется управление α, при котором

$$u(x,t)+\varepsilon \geq \int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)).$$

Правую часть можно записать в виде

$$\int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + \int_\tau^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T))$$

и оценить снизу следующим образом:

$$\int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(\tau),\tau) \geq U(t,x).$$

В силу произвольности ε получаем неравенство $u(x,t)\geq U(x,t)$. Установим противоположное неравенство. Для всякого $\varepsilon>0$ найдутся такие α_1 на $[t,\tau]$ и α_2 на $[\tau,T]$, что

$$U(x,t)+\varepsilon \geq \int_t^\tau l(y^1_x(s),\alpha_1(s),s)\,ds + u(y^1_x(\tau),\tau)$$

и

$$u(y^1_x(\tau),\tau)+\varepsilon \geq \int_\tau^T l(y^2_z(s),\alpha_2(s),s)\,ds + g(y^2_z(T)), \quad z=y^1_x(\tau).$$

Положим $\alpha(s)=\alpha_1(s)$ на $[t,\tau)$ и $\alpha(s)=\alpha_2(s)$ на $[\tau,T]$. Пусть y_x — решение задачи Коши с таким α. Тогда $y_x(s)=y^1_x(s)$ на $[t,\tau]$ и $y_x(s)=y^2_x(s)$ на $[\tau,T]$. Имеем

$$U(x,t)+2\varepsilon \geq \int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)) \geq u(x,t).$$

Устремляя ε к нулю получаем $U(x,t)\geq u(x,t)$. □

Заметим, что для всякого контроля α функция

$$\tau \to \int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(\tau),\tau)$$

монотонно не убывает.

Предложение 2. *Контроль α является оптимальным тогда и только тогда, когда функция*

$$\tau \to \int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(\tau),\tau)$$

является константой на $[t,T]$.

Доказательство. Если рассматриваемая функция является константой, то ее значения при $\tau=t$ и $\tau=T$ равны и

$$u(x,t)=\int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)).$$

Пусть теперь α — оптимальное управление на $[t,T]$. Тогда из монотонности по τ следует неравенство

$$\int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(\tau),\tau) \leq u(x,t),$$

а из принципа динамического программирования следует неравенство

$$u(x,t) \leq \int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(\tau),\tau).$$

Следовательно, при каждом τ

$$u(x,t) = \int_t^\tau l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(\tau),\tau).$$

□

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

Предположим, что функция u непрерывно дифференцируема по x и t. Пусть $\Delta t > 0$. Принцип динамического программирования можно записать в виде

$$\inf_{\alpha}\Big\{\int_t^{t+\Delta t} l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + u(y_x(t+\Delta t),t+\Delta t) - u(x,t)\Big\} = 0.$$

Поделим это равенство на Δt и устремим Δt к нулю. Получаем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$-u_t(x,t) + H(x,t,\nabla u(x,t)) = 0,$$

где

$$H(x,t,p) = \sup_{a\in A}\Big\{-l(x,a,t) - \langle p, f(x,a)\rangle\Big\}.$$

Таким образом, функция значения u является решением задачи Коши

$$-u_t(x,t) + H(x,t,\nabla u(x,t)) = 0, \quad u(x,T) = g(x). \tag{2}$$

Теорема 2. *Если непрерывно дифференцируемая функция v является решением задачи Коши* (2)*. Тогда*

(i) $v(x,t) \le u(x,t)$*;*

(ii) *если для контроля α выполняется*

$$-l(y_x(s),\alpha(s),s) - \langle\nabla v(y_x(s)), f(y_x(s),\alpha(s))\rangle = H(y_x(s),s,\nabla v(y_x(s))),$$

то α является оптимальным контролем и $v = u$.

Доказательство. Пусть α — какой-либо допустимый контроль. Имеем

$$\frac{d}{d\tau}v(y_x(\tau),\tau) = \langle\nabla v(y_x(\tau),\tau), f(y_x(\tau),\alpha(\tau))\rangle + v_t(y_x(\tau),\tau).$$

Заметим, что

$$\langle\nabla v(y_x(s),s), f(y_x(s),\alpha(s))\rangle \le -l(y_x(s),\alpha(s),s) - H(y_x(s),s,\nabla v(y_x(s),s)).$$

Так как v является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, то

$$\frac{d}{d\tau}v(y_x(tau),\tau) \le l(y_x(s),\alpha(s),s).$$

Интегрируя это неравенство по s от t до T получаем

$$v(x,t) \le \int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)).$$

В силу произвольности α приходим к оценке $v(x,t) \le u(x,t)$. Если α удовлеиворяет условию (ii), то получим равенства

$$v(x,t) = \int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)), \quad v(x,t) = u(x,t).$$

□

Предположим, что A – компактное множество в $\mathbb{R}^d$ и для всех x,t,p существует единственное $a(x,t,p)$, при котором

$$H(x,t,p) = -l(x,a,t) - \langle p, f(x,a)\rangle.$$

Тогда H дифференцируемо по p и

$$H_p(x,t,p) = -f(x,a(x,t,p)).$$

Это наблюдение является частным случаем следующего более общего утверждения.

Предложение 3. *Пусть A — компактное метрическое пространство, Q — открытое множество в $\mathbb{R}^d$ и $F(x,a)$ — непрерывная функция на $A \times Q$, причем существует и непрерывна производная F_x. Если a_z является единственной точкой максимума функции $a \to F(z,a)$, то функция*

$$G(x) = \sup_{a \in A} F(x,a)$$

дифференцируема в точке z и $G_x(z) = F_x(z, a_z)$.

Доказательство. Пусть a_x — какая-либо точка максимума функции $a \to F(x,a)$. Из единственности a_z и компактности A следует, что $a_x \to a_z$, если $x \to z$. Имеем

$$G(z) - G(x) = F(z,a_z) - F(x,a_x) \le F(z,a_z) - F(x,a_z) = F_x(\xi, a_z)(z-x),$$
$$G(x) - G(z) \le F_x(\eta, a_x)(x-z),$$

где $\xi, \eta \in [x,z]$. Следовательно,

$$|G(x) - G(z) - F_x(z,a_z)(x-z)| \le$$
$$\le |F_x(\xi,a_z) - F_x(z,a_z)||x-z| + |F_x(\eta,a_x) - F_x(z,a_z)||x-z| = o(|x-z|).$$

□

Итак, если α — оптимальный контроль, то

$$f(y_x(s), \alpha(s)) = -H_p(y_x(s), s, \nabla v(y_x(s), s)).$$

Следовательно, оптимальное решение y_x является решением задачи Коши

$$\dot{y}_x(s) = -H_p(y_x(s), s, \nabla v(y_x(s), s)), \quad y_x(t) = x,$$

и может быть найдено без предварительного вычисления α.

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 5

Метод исчезающей вязкости

Рассмотрим уравнение
$$-u_t + H(x,t,u,\nabla u) = 0.$$
Функция H предполагается непрерывной на $\mathbb{R}^{2n+2}$.

В типичных примерах нелинейных уравнений с частными производными первого порядка, описывающих движение частиц некоторой среды, появление у решений особенностей связано с взаимодействием этих частиц. Такое взаимодействие описывается с помощью добавления к уравнению слагаемого вида $\varepsilon\Delta u$, $\varepsilon > 0$. Оказывается, что новое уравнение
$$-u_t + H(x,t,u,\nabla u) = \varepsilon\Delta u$$
в определенном смысле более регулярное. Рассмотрим решения u^ε и предположим, что эти решения локально равномерно сходятся к непрерывной функции u при $\varepsilon \to 0$. Естественно предположить, что u является решением исходного уравнения (уже без $\varepsilon\Delta$). Однако, напрямую перейти к пределу в уравнении невозможно, так как нет сходимости u_t^ε, ∇u^ε и Δu^ε. Такой сходимости в общем случае и не может быть, так как предельное уравнение может не иметь гладких решений вовсе.

Будем говорить, что $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u сверху, если $u-\varphi$ в точке (x_0,t_0) имеет строгий локальный максимум, и $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u снизу, если $u-\varphi$ в точке (x_0,t_0) имеет строгий локальный минимум.

Пусть $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u сверху. Можно показать (и это будет сделано ниже), что найдутся стремящаяся к нулю последовательность ε_j и сходящаяся к (x_0,t_0) последовательность точек (x_j,t_j) локального максимума функций $u^{\varepsilon_j} - \varphi$. Так как
$$u_t^{\varepsilon_j}(x_j,t_j) = \varphi_t(x_j,t_j), \quad \nabla u^{\varepsilon_j}(x_j,t_j) = \nabla\varphi(x_j,t_j), \quad \Delta u^{\varepsilon_j}(x_j,t_j) \le \Delta\varphi_t(x_j,t_j),$$
то
$$-\varphi_t(x_j,t_j) + H(x_j,t_j,u(x_j,t_j),\nabla\varphi(x_j,t_j)) = \varepsilon_j\Delta\varphi(x_j,t_j).$$
Функция φ гладкая и можно перейти к пределы при $j \to \infty$. Получаем
$$-\varphi_t(x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),\nabla\varphi(x_0,t_0)) \le 0.$$
Если $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u снизу, то аналогичные рассуждения приводят к неравенству
$$-\varphi_t(x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),\nabla\varphi(x_0,t_0)) \ge 0.$$
Именно эти неравенства используются для определения решения.

Вязкостные решения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество. Функция $u \in C(\Omega)$ называется вязкостным решением уравнения
$$F(x,u,Du,D^2u) = 0,$$
если для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции φ и всякой точки x_0 из Ω верны утверждения: 1) если x_0 — точка локального максимума функции $u-\varphi$, то $F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)) \le 0$, 2) если x_0 — точка локального минимума функции $u-\varphi$, то $F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)) \ge 0$.

Так как добавление и вычитание из φ функции $|x-x_0|^4$ не меняет $D\varphi(x_0)$ и $D^2\varphi(x_0)$, то строгий локальный максимум (минимум) в определении вязкостного решения можно заменить нестрогим.

Если выполняется лишь первая часть определения, то u называется вязкостным суб-решением, а если выполняется лишь вторая часть определения, то u называется вязкостным супер-решением.

В случае, когда уравнение не содержит D^2u, то в определении вязкостного решения можно (т.е. получится эквивалентное определение) дважды непрерывно дифференцируемую функцию φ заменить на один раз непрерывно дифференцируемую функцию.

Отметим, что в общем случае у непрерывной функции есть точки, в которых нельзя ее коснуться гладкой функцией сверху (снизу). Однако имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $u \in C(\Omega)$. Множество точек, в которых u можно коснуться гладкой функцией сверху (снизу), всюду плотно в Ω.*

Доказательство. Пусть $B(x_0, r)$ – произвольный шар, который с замыканием лежит в Ω. Функция

$$v(x) = u(x) - \frac{|x - x_0|^2}{2\varepsilon}$$

в точке x_0 принимает значение $u(x_0)$, а на границе $B(x_0, r)$

$$v(x) \le \max_{\partial B(x_0,r)} u - \frac{r^2}{2\varepsilon}.$$

Следовательно, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ значение v в точке x_0 больше всякого значения v на $\partial B(x_0, r)$. Так как v непрерывная функция, то на $\overline{B}(x_0, r)$ функция v принимает в некоторой точке z максимальное значение. Из сказанного выше следует, что точка z — внутренняя точка $B(x_0, r)$. $\square$

Следующее утверждение описывает связь вязкостных и классических решений.

Предложение 2. *Если $u \in C^1(\Omega)$ является вязкостным решением $F(x, u, Du) = 0$ в Ω, то u является классическим решением этого уравнения. Если $u \in C^1(\Omega)$ является классическим решением уравнения $F(x, u, Du) = 0$ в Ω, то u является вязкостным решением этого уравнения.*

Доказательство. Для обоснования первого утверждения достаточно заметить, что $u - u$ во всякой точке имеет локальный минимум и локальный максимум (конечно нестрогие), а это по определению влечет неравенства $F(x, u(x), Du(x)) \le 0$ и $F(x, u(x), Du(x)) \ge 0$. Второе утверждение следует из того, что в точке максимума (минимума) функции $u - \varphi$ выполняется равенство $Du = D\varphi$. $\square$

Отметим, что похожее утверждение выполняется и для уравнений, содержащих D^2u, но с дополнительным условием эллиптичности:

$$X \le Y \quad \Rightarrow \quad F(x, u, p, X) \ge F(x, u, p, Y).$$

Замкнутость относительно предельных переходов

Лемма 1. *Если последовательность функций $u_n \in C(\Omega)$ локально равномерно сходится к функции $u \in C(\Omega)$ и a — точка строгого локального максимума функции u, то найдется последовательность локальных максимумов a_n функций u_n, которые сходятся к a.*

Доказательство. Пусть $\overline{B}(a, r)$ — замкнутый шар, на котором $u(x) < u(a)$ при $x \ne a$. Из-за равномерной сходимости u_n к u найдется номер N, начиная с которого $u_n(x) < u_n(a)$ для всех $x \in \partial B(a, r)$. Пусть a_n — точка максимума u_n на шаре $\overline{B}(a, r)$. Точка a_n лежит внутри $B(a, r)$. Из всякой подпоследовательности a_{n_j} можно выбрать дальнейшую сходящуюся подпоследовательность $a_{n_{j_k}}$. Так как a — единственная точка максимума функции u в $\overline{B}(a, r)$, то последовательность $a_{n_{j_k}}$ сходится к a. Следовательно, вся последовательность a_n сходится к a. $\square$

Предложение 3. *Если при $\varepsilon \to 0+$ функции $F_\varepsilon(x, u, p, X)$ локально равномерно сходятся к $F(x, u, p, X)$, функции u^ε локально равномерно сходятся к u в Ω и u^ε — вязкостные решения уравнения $F_\varepsilon(x, u^\varepsilon, Du^\varepsilon, D^2u^\varepsilon) = 0$ на Ω, то u является вязкостным решением уравнения $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ на Ω.*

Доказательство. Немедленно следует из леммы и определения вязкостного решения. $\square$

Принцип сравнения

Важнейшую роль в теории вязкостных решений играют разнообразные принципы сравнения. Обсудим лишь один вариант принципа сравнения для решений уравнений

$$-u_t + H(x, t, Du) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T).$$

Далее считаем, что

$$|H(x,t,p)-H(x,t,q)|\le C|p-q|,\quad |H(x,t,p)-H(y,s,p)|\le C(1+|p|)(|x-y|+|t-s|).$$

Теорема 1. *Предположим, что $u\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ является в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ вязкостным субрешением, а $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ является в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ вязкостным суперрешением уравнения $-u_t+H(x,t,Du)=0$. Предположим также, что u,v — ограничены и равномерно непрерывны и $u(x,T)\le v(x,T)$, то $u(x,t)\le v(x,t)$ для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T)$.*

Нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Пусть $u\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ является в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ вязкостным субрешением уравнения $-u_t+H(x,t,Du)=0$. Пусть $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ и $u-\varphi$ в точке $(x_0,0)$ достигает локального максимума, то*

$$-\varphi_t(x_0,0)+H(x_0,0,D\varphi(x_0,0))\le 0.$$

Аналогичное утверждение имеет место для вязкостного суперрешения.

Доказательство. Можно считать, что максимум строгий. Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим функцию

$$w^\varepsilon(x,t)=u(x,t)-\varphi(x,t)-\frac{\varepsilon}{t}.$$

Существует последовательности $\varepsilon_j\to 0+$ и $(x_j,t_j)\to(x_0,0)$, где (x_j,t_j) — точка локального максимума функции w^{ε_j} и $t_j>0$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{t_j^2}-\varphi_t(x_j,t_j)+H(x_j,t_j,D\varphi(x_j,t_j))\le 0,$$

в частности, верно неравенство

$$-\varphi_t(x_j,t_j)+H(x_j,t_j,D\varphi(x_j,t_j))\le 0.$$

Устремляя $j\to+\infty$ получаем требуемое неравенство. □

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Предположим, что

$$\sup_{x,t}\big(u(x,t)-v(x,t)\big)=q>0.$$

Пусть $\varepsilon>0$ и $\lambda>0$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x,t,y,s)=u(x,t)-v(y,s)-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}-\frac{|t-s|^2}{2\varepsilon}+\lambda(t+s)-\varepsilon(|x|^2+|y|^2).$$

Так как $\Phi(x,t,x,t)=u(x,t)-v(x,t)+2\lambda t-2\varepsilon|x|^2$, то для достаточно малых λ и ε верно неравенство

$$\sup_{x,t,s,y}\Phi(x,t,y,s)\ge\frac{q}{2}.$$

Далее положительное число λ фиксировано, а $\varepsilon\to 0$. Пусть $(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y_\varepsilon,s_\varepsilon)$ — точка максимума функции Φ. Из неравенства

$$u(x_\varepsilon,t_\varepsilon)-v(y_\varepsilon,s_\varepsilon)-\frac{|x_\varepsilon-y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}-\frac{|t_\varepsilon-s_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}+\lambda(t_\varepsilon+s_\varepsilon)-\varepsilon(|x_\varepsilon|^2+|y_\varepsilon|^2)\ge\Phi(0,T,0,T).$$

следует, что

$$|x_\varepsilon-y_\varepsilon|=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad |t_\varepsilon-s_\varepsilon|=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad \varepsilon(|x_\varepsilon|^2+|y_\varepsilon|^2)=O(1).$$

В частности, имеем

$$|x_\varepsilon|+|y_\varepsilon|=O(\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

Перепишем неравенство $\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y_\varepsilon,s_\varepsilon)\ge\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,x_\varepsilon,t_\varepsilon)$ в следующем виде

$$\frac{|x_\varepsilon-y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}+\frac{|t_\varepsilon-s_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}\le v(x_\varepsilon,t_\varepsilon)-v(y_\varepsilon,s_\varepsilon)+\lambda(t_\varepsilon-s_\varepsilon)+\varepsilon(|x_\varepsilon|+|y_\varepsilon|)|x_\varepsilon-y_\varepsilon|.$$

Так как функция v равномерно непрерывна, то из последнего выводим

$$|x_\varepsilon-y_\varepsilon|=o(\sqrt{\varepsilon}),\quad |t_\varepsilon-s_\varepsilon|=o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Предположим, что t_ε и s_ε строго меньше T. Функция

$$(x,t) \to \Phi(x,t,y_\varepsilon,s_\varepsilon)$$

в точке $(x_\varepsilon,t_\varepsilon)$ достигает максимума и, следовательно, по определению вязкостного субрешения

$$\lambda - \frac{t_\varepsilon - s_\varepsilon}{\varepsilon} + H(x_\varepsilon,t_\varepsilon,2\varepsilon x_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \leq 0$$

Функция

$$(y,s) \to \Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y,s)$$

в точке $(y_\varepsilon,s_\varepsilon)$ достигает максимума и, следовательно, по определению вязкостного субрешения

$$-\lambda - \frac{t_\varepsilon - s_\varepsilon}{\varepsilon} + H(y_\varepsilon,s_\varepsilon,-2\varepsilon y_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \geq 0$$

Используя полученные неравенства, приходим к оценке

$$2\lambda \leq H(y_\varepsilon,s_\varepsilon,-2\varepsilon y_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) - H(x_\varepsilon,t_\varepsilon,2\varepsilon x_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}).$$

Правая часть оценивается сверху выражением

$$2\lambda \leq 2\varepsilon C(|x_\varepsilon| + |y_\varepsilon|) + C\big(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + |t_\varepsilon - s_\varepsilon|\big)\Big(1 + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon} + 2\varepsilon|x_\varepsilon|\Big).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ получаем неравенство $2\lambda \leq 0$, которое противоречит условию $\lambda > 0$. Следовательно, при достаточно малом ε хотя бы одно из чисел t_ε или s_ε совпадают с T. Это означает, что t_ε и s_ε стремятся к T. Имеем

$$\frac{q}{2} \leq u(x_\varepsilon,t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon,s_\varepsilon) + \lambda(t_\varepsilon + s_\varepsilon) \leq v(x_\varepsilon,t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon,s_\varepsilon) + \lambda(t_\varepsilon + s_\varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю приходим к неравенству $q \leq 4\lambda T$, которое не может выполняться при достаточно малом λ. Таким образом, предположение о положительности q приводит к противоречию. □

Следствие 1. *Пусть*

$$|H(p) - H(q)| \leq C|p-q|, \quad |f_i(x,t) - f_i(y,s)| \leq C(|x-y| + |t-s|).$$

Предположим, что u^1, u^2 *— вязкостные решения уравнений*

$$-u^1_t + H(\nabla u^1) + f_1 = 0, \quad -u^2_t + H(\nabla u^2) + f_2 = 0.$$

Тогда

$$|u^1(x,t) - u^2(x,t)| \leq \sup_x |u^1(x,T) - u^2(x,T)| + T\sup_{x,t}|f_1(x,t) - f_2(x,t)|.$$

Следствие 2. *Пусть*

$$|H(p) - H(q)| \leq C|p-q|, \quad |f(x,t) - f(y,s)| \leq C(|x-y| + |t-s|).$$

Предположим, что u *— вязкостное решение уравнения*

$$-u_t + H(\nabla u) + f = 0$$

и $x \to u(x,T)$ *— липшицева функция. Тогда существует такое число* $L > 0$*, что*

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leq L|x-y|.$$

Доказательство. Применяем предыдущее следствие к $u^1(x,t) = u(x,t)$ и $u^2(x+h,t)$. □

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 6

Вогнутость вязкостного решения

При некоторых дополнительных предположениях на гамильтониан H удается доказать, что вязкостное решение является полувогнутым. Можно выделить три способа обоснования полувогнутости: 1) переход к задаче оптимального управления и анализ формулы, определяющей функцию значения, 2) метод повышения размерности Иши, схожий с методом удвоения переменных, применяемым при доказательстве принципа сравнения, 3) метод исчезающей вязкости. Разберем на упрощенном примере третий способ.

Для простоты считаем, что $x \in \mathbb{R}$. Пусть вязкостное решение u уравнения

$$-u_t + H(u_x) + f(x,t) = 0$$

является локально равномерным пределом решений уравнения

$$-u_t + H(u_x) + f(x,t) = \varepsilon u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T). \tag{1}$$

Предложение 1. *Предположим, что u — гладкое ограниченное решение (с ограниченными производными по x) уравнения (1), f — гладкая функция с ограниченными вторыми производными по x. Предположим, что H дважды дифференцируемая функция и для некоторой константы $\lambda > 0$ выполняется неравенство $H'' \geq \lambda$. Тогда существует число $C > 0$, которое не зависит от ε и с которым функция*

$$x \to u(x,t) - \frac{Cx^2}{T-t}$$

при каждом $t < T$ является вогнутой.

Доказательство. Дифференцируем уравнение два раза по x. Пусть $w = u_{xx}$. Тогда функция w является решением уравнения

$$-w_t + H''(u_x)w^2 + H'(u_x)w_x + f_{xx} = \varepsilon w_{xx}.$$

Так как $H'' \geq \lambda > 0$, то

$$-w_t + \lambda w^2 + H'(u_x)w_x + f_{xx} \leq \varepsilon w_{xx}.$$

Пусть $M > 0$ и $\delta > 0$. Функция

$$v(x,t) = (T-t)(w(x,t) - M) - \delta\sqrt{1+x^2}$$

удовлетворяет неравенству

$$-v_t \leq w(1 - \lambda(T-t)w) - M + \varepsilon v_{xx} - H'(u_x)v_x - (T-t)f_{xx} + \delta\psi(x),$$

где ψ — ограниченная функция. В некоторой точке (x_0,t_0) функция v принимает максимальное значение. Предположим, что $v(x_0,t_0) \leq 0$. Тогда $v(x,t) \leq 0$ и

$$w(x,t) \leq M + \frac{\delta\sqrt{1+x^2}}{T-t}.$$

Если $v(x_0,t_0) > 0$, то $w(x_0,t_0) > 0$ и $t_0 < T$. Более того, верны неравенства

$$v_t(x_0,t_0) \leq 0, \quad v_x(x_0,t_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0,t_0) \leq 0.$$

Пусть $0 < \delta < 1$ и $-(T-t)f_{xx} + \delta\psi \leq C$ и $C < M$. Тогда

$$0 \leq w(x_0,t_0)(1 - \lambda(T-t_0)w(x_0,t_0)) + - M$$

и, следовательно,

$$w(x_0,t_0) \leq \frac{1}{\lambda(T-t_0)}.$$

Имеем

$$(T-t)(w(x,t) - M) - \delta\sqrt{1+x^2} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, для функции w верна оценка

$$w(x,t) \le M + \frac{1}{\lambda(T-t)} + \frac{\delta\sqrt{1+x^2}}{T-t}.$$

Устремляем $\delta \to 0$ и приходим к неравенству

$$w(x,t) \le M + \frac{1}{\lambda(T-t)}.$$

□

Функция значения является вязкостным решением

Завершим обсуждение вязкостных решений проверкой, что функция значения является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Напомним, что мы рассматриваем задачу оптимального управления с функционалом

$$J(\alpha,x,t) = \int_t^T l(y_x(s),\alpha(s),s)\,ds + g(y_x(T)),$$

где

$$\dot{y}_x(s) = f(y_x(s),\alpha(s)), \quad y_x(t) = x.$$

Функция α принимает значение в некотором множестве $A \subset \mathbb{R}^m$. Положим

$$H(x,t,p) = \sup_{a\in A}\Bigl\{-l(x,a,t) - \langle p, f(x,a)\rangle\Bigr\}.$$

Мы предполагаем, что f, l — непрерывные отображения, $|f(x,a)| \le M_f$, $|l(x,a,t)| \le M_l$ и

$$|f(x,a) - f(z,a)| \le L_f|x-z|, \quad |l(x,a,t) - l(z,a,t)| \le L_l|z-a|, \quad |g(x)-g(z)| \le L_g|x-z|.$$

Теорема 1. *Функция*

$$u(x,t) = \inf_\alpha J(\alpha,x,t)$$

является на $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ вязкостным решением уравнения

$$-u_t + H(x,t,\nabla u) = 0.$$

Доказательство. Отметим, что ранее была установлена липшицевость функции u по переменным x и t.

Пусть φ — непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что (z,τ) является точкой локального максимума функции $u-\varphi$. Тогда для некоторого $r>0$ и всех $|x-z|<r$, $|t-\tau|<r$ выполняется неравенство

$$u(x,t) - u(z,\tau) \le \varphi(x,t) - \varphi(z,\tau).$$

Пусть $a\in A$ и $\dot{y}_z = f(y_z,a)$, $y_z(\tau) = z$. Так как $|y_z(t)-z| \le M_f|t-\tau|$, то

$$u(y_z(t),t) - u(z,\tau) \le \varphi(y_z(t),t) - \varphi(z,\tau)$$

при достаточно малом $|t-\tau|$. По принципу динамического программирования

$$u(z,\tau) \le \int_\tau^t l(y_z(s),a,s)\,ds + u(y_z(t),t)$$

и приходим к неравенству

$$-\int_\tau^t l(y_z(s),a,s)\,ds - \varphi(y_z(t),t) + \varphi(z,\tau) \le 0$$

Делим это неравенство на $t-\tau$ и устремляем $t\to\tau$. Получаем

$$-l(z,a,\tau) - \langle\nabla\varphi(z,\tau), f(z,a)\rangle - \varphi_t(z,\tau) \le 0.$$

Следовательно,

$$-\varphi_t(z,\tau) + H(z,\tau,\nabla\varphi(z,\tau)) \le 0.$$

Пусть теперь (z,τ) является точкой локального минимума функции $u-\varphi$. Тогда для некоторого $r>0$ и всех $|x-z|<r$, $|t-\tau|<r$ выполняется неравенство

$$u(x,t) - u(z,\tau) \ge \varphi(x,t) - \varphi(z,\tau).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и α — такой контроль, что для $\dot{y}_z = f(y_z, a)$, $y_z(\tau) = z$, выполняется

$$\varepsilon(t-\tau) + u(z,\tau) \geq \int_\tau^t l(y_z(s), \alpha(s), s)\, ds + u(y_z(t), t).$$

Так как $|y_z(t) - z| \leq M_f|t-\tau|$, то

$$u(y_z(t), t) - u(z,\tau) \geq \varphi(y_z(t), t) - \varphi(z, \tau)$$

при достаточно малом $|t-\tau|$. Имеем

$$\varepsilon(t-\tau) - \int_\tau^t l(y_z(s), \alpha(s), s)\, ds - \int_\tau^t \varphi_t(y_z(s), s) + \langle \nabla\varphi(y_z(s), s), f(y_z(s), \alpha(s))\, ds \geq 0.$$

В силу определения функции H получаем неравенство

$$\varepsilon(t-\tau) + \int_\tau^t H(y_z(s), s, \nabla\varphi(y_z(s), s)) - \varphi_t(y_z(s), s)\, ds \geq 0.$$

Так как $|y_z(s) - z| \leq M_f|t-\tau|$, функция H липшицева по x и p, функция φ_t липшицева по x, то

$$\varepsilon(t-\tau) + O(|t-\tau|^2) + \int_\tau^t H(z, s, \nabla\varphi(z, s)) - \varphi_t(z, s)\, ds \geq 0.$$

Делим на $(t-\tau)$ и устремляем $t \to \tau$, а затем устремляем $\varepsilon \to 0$. Получаем неравенство

$$-\varphi_t(z,\tau) + H(z, \tau, \nabla\varphi(z,\tau)) \leq 0.$$

Таким образом, для функции u выполняется определение вязкостного решения. $\square$

Следствие 1. *В условиях теоремы функция значения u является единственным ограниченным и равномерно непрерывным вязкостным решением задачи Коши*

$$-u_t + H(x, t, \nabla u) = 0, \quad u(x, T) = g(x).$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из принципа суперпозиции. $\square$

Система уравнений теории игр среднего поля

Рассмотрим систему уравнений первого порядка, описывающих дифференциальную игру среднего поля. Эта система состоит из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и уравнения непрерывности.

$$\begin{cases} -\partial_t u + H(x, t, \mu_t, \nabla u) = 0, \\ \partial_t \mu_t - \operatorname{div}(H_p(x, t, \mu_t, \nabla u)\mu_t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с начальными условиями $u(x, T) = g(x)$ и $\mu_0 = \nu$.

Решением является пара (u, μ_t), где непрерывная функция u является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, а кривая $t \to \mu_t$ в пространстве вероятностных мер является решением уравнения непрерывности. Существует несколько подходов к обоснованию существования и единственности решения. Первый подход основан на применение утверждений о существовании неподвижной точки по следующей схеме: задаем произвольную кривую σ_t в пространстве вероятностных мер, находим решение u уравнения Гамильтона–Якоби, а затем находим решение μ_t уравнение непрерывности, что задает отображение $\sigma_t \to \mu_t$, неподвижную точку которого и хотим построить. Второй подход основан не методе исчезающей вязкости, когда решение строится в виде предела решений аналогичной системы, к уравнениям которой добавили $\varepsilon\Delta u$ и $\varepsilon\Delta\mu_t$. Третий подход основан на решении вариационной задачи, соответствующей данной системе. Наконец, четвертый подход использует идею принципа суперпозиции для уравнения непрерывности и сводит задачу к построению меры, сосредоточенной на множестве оптимальных траекторий. Существенной трудностью в реализации первых двух подходов является нерегулярность вязкостных решений. Самое лучшее, что можно сказать про вязкостные решения — липшицовость по (x, t) и полувогнутость по x, а этого не хватает для применения известных результатов о существовании и единственности решения уравнения непрерывности. Вариационные методы предполагают существенные ограничения на структуру уравнений. Обсудим подробнее четвертый подход, основанный на принципе суперпозиции.

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 7

Мера на оптимальных траекториях

Пусть для всяких $x, p \in \mathbb{R}^d$ и $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

$$H(x,\mu,p) = \sup_{a\in A}\Big\{-l(x,a,\mu) - \langle p, f(x,a)\rangle\Big\}.$$

Предположим, что sup достигается в единственной точке $a(x,\mu,p)$ и зависимость a от x,μ,p является непрерывной. Пусть отображения $(x,\mu,p) \to H(x,\mu,p)$ и $(x,\mu,p) \to H_p(x,\mu,p)$ непрерывны. Например, эти условия выполняются для

$$l(x,a,\mu) = \frac{|a|^2}{2} + h(x,\mu), \quad f(x,a) = a,$$

где h — ограниченная и непрерывная функция и $a \in \mathbb{R}^d$. В этом случае

$$H(x,\mu,p) = \frac{|p|^2}{2} - h(x,\mu).$$

Предположим, что функция $u \in C^1$ и меры μ_t удовлетворяют системе уравнений

$$-u_t + H(x,\mu_t,\nabla u) = 0, \quad \partial_t\mu_t - \operatorname{div}(H_p(x,\mu_t,\nabla u)\mu_t) = 0$$

с начальными условиями $u(x,T) = g(x,\mu_T)$ и $\mu_0 = \nu$, причем

$$\int_0^T \int |H_p(x,\mu_t,\nabla u(x,t))|\, d\mu_t\, dt < \infty.$$

Ранее мы уже отмечали, что решение уравнения Гамильтона-Якоби может не иметь производных и именно в связи с этим введено понятие вязкостных решений. Поэтому предположение, что $u \in C^1$, является существенным ограничением. Напомним, что классическое решение задачи Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка можно строить методом характеристик. Этот способ позволяет в некоторых случаях построить классическое решение класса C^1 на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, но лишь для малого T. Например, такое построение можно выполнить для $H(x,p) = \frac{|p|^2}{2} - h(x)$ и $g(x)$, где функции h и g равны нулю при $|x| > R_0$ для некоторого $R_0 > 0$.

Итак, предполагаем, что $u \in C^1$. По принципу суперпозиции для уравнения непрерывности существует вероятностная мера P_ν на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$, которая сосредоточена на парах (x, y_x), где

$$\dot{y}_x = -H_p(y_x,\mu_t,\nabla u(y_x,t)), \quad y_x(0) = x,$$

и $\mu_t = P_\nu \circ e_t^{-1}$, где $e_t(x,y) = y(t)$. Заметим, что функция $\alpha(t) = a(y_x(t),\mu_t,\nabla u(y_x(t),t))$ является оптимальным контролем для задачи

$$\inf_\alpha\Big\{\int_0^T l(y_x(s),\alpha(s),\mu_s)\, ds + g(y_x(T),\mu_T)\Big\}.$$

Действительно, в силу определения $\alpha(t)$ выполняется равенство

$$H(y_x(t),\mu_t,\nabla u(y_x(t),t)) = -l(y_x(t),\alpha(t),\mu_t) - \langle\nabla u(y_x(t),t), f(y_x(t),\alpha(t))\rangle,$$

причем

$$\dot{y}_x(t) = -H_p(y_x(t),\mu_t,\nabla u(y_x(t),t)) = f(y_x(t),\alpha(t)).$$

Таким образом, по решению (u,μ_t) построена мера P_ν, сосредоточенная на парах (x,y_x), где y_x является оптимальным решением задачи о минимизации функционала

$$\alpha \to \int_0^T l(y_x(s),\alpha(s),P_\nu\circ e_s^{-1})\, ds + g(y_x(T),P_\nu\circ e_T^{-1}).$$

Пусть теперь дана мера P_ν, у которой проекция на x равна ν и которая сосредоточена на на парах (x, y_x), где y_x является оптимальным решением задачи о минимизации функционала

$$\alpha \to \int_0^T l(y_x(s), \alpha(s), P_\nu \circ e_s^{-1})\, ds + g(y_x(T), P_\nu \circ e_T^{-1}).$$

Пусть $\mu_s = P_\nu \circ e_s^{-1}$ и

$$u(x,t) = \int_\alpha \Big\{ \int_t^T l(y_x(s), \alpha(s), \mu_s)\, ds + g(y_x(T), \mu_s) \Big\}.$$

Предположим, что $u \in C^1$. Так как оптимальность α и соответствующего y_x равносильна постоянству функции

$$\tau \to \int_0^\tau l(y_x(s), \alpha(s), \mu_s)\, ds + u(y_x(\tau), \tau),$$

то для оптимальных α и y_x с учетом уравнения Гамильтона-Якоби, которому удовлетворяет u, получаем равенство

$$H(y_x(s), \mu_s, \nabla u(y_x(s), s)) = -l(y_x(s), \alpha(s), \mu_s) - \langle \nabla u(y_x(s), s), f(y_x(s), \alpha(s)) \rangle.$$

Следовательно, верно равенство $\dot{y}_x(s) = -H_p(y_x(s), \mu_s, \nabla u(y_x(s), s))$. Проверим, что μ_t удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_t \mu_t - \operatorname{div}(H_p(x, \mu_t, \nabla u(x,t))\mu_t) = 0.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Имеем

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(z)\, d\mu_t = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d \times C([0,T], \mathbb{R}^d)} \varphi(y_x(t))\, dP(dxdy) =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^d \times C([0,T], \mathbb{R}^d)} \langle \nabla \varphi(y_x(t)), H_p(y_x(t), \mu_t, \nabla u(y_x(t), t))\, dP(dxdy) =$$

$$= -\int \langle \nabla \varphi(z), H_p(z, \mu_t, \nabla u(z,t))\, d\mu_t.$$

Итак, по мере P_ν построены решения (u, μ_t). Таким образом, при дополнительном условии гладкости на функцию u существование решения (u, μ_t) системы уравнений теории игр среднего поля равносильно существованию меры P_ν, сосредоточенной на оптимальных траекториях. Однако при рассмотрении меры P_ν никаких уравнений (Гамильтона–Якоби и непрерывности) не привлекается, что позволяет обойти проблему гладкости функции u и проблемы с разрешимостью уравнения непрерывности. Кроме того, задача о существовании и единственности P_ν может быть сведена к некоторой более простой задаче теории игр среднего поля.

Типичная задача теории игр среднего поля

Пусть A — компактное метрическое пространство (пока можно считать, что это просто компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$) и $\mathcal{P}(A)$ — пространство вероятностных мер на A, наделенное метрикой Канторовича–Рубинштейна d_{KR}. Пусть отображение $F\colon A \times \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$ непрерывно. Положим

$$J_k(a_1, \ldots, a_N) = F(a_k, \mu^N), \quad \mu^N = \frac{1}{N}(\delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_N}).$$

Рассмотрим игру, в которой N игроков выбирают стратегии $a \in A$ минимизируя каждый свою функцию J_k. Нас интересует равновесие Нэша. Так как такое равновесие не всегда существует, то рассмотрим ε_N-равновесие Нэша, т. е. такой набор $(\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_N)$, что для всякого k и для всякого $b \in A$

$$J_k(\widehat{a}_1, \ldots, b, \ldots, \widehat{a}_N) \geq J_k(\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_k, \ldots, \widehat{a}_N) - \varepsilon_N.$$

Для описания равновесия Нэша при больших N изучим предельные точки последовательности

$$\widehat{\mu}^N = \frac{1}{N}(\delta_{\widehat{a}_1} + \ldots + \delta_{\widehat{a}_N}).$$

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\widehat{\mu}^{N_j}$ *слабо сходится к* μ *и* $\varepsilon_{N_j} \to 0$. *Тогда*

$$\mathrm{sp}\mu \subset \{a \in A\colon\ F(a,\mu) = \min_{b\in A} F(b,\mu)\},$$

что эквивалентно

$$\int_A F(a,\mu)\,d\mu \le F(b,\mu) \quad \forall b \in A.$$

Доказательство. Для упрощения обозначений будем считать, что $N_j = N$. Для всякого $b \in A$ выполняется неравенство

$$F(\widehat{a}_k, \widehat{\mu}^N) \le F(b, \widehat{\mu}^N + \tfrac{1}{N}\delta_b - \tfrac{1}{N}\delta_{\widehat{a}_k}) + \varepsilon_N.$$

Заметим, что

$$d_{KR}(\widehat{\mu}^N, \widehat{\mu}^N + \tfrac{1}{N}\delta_b - \tfrac{1}{N}\delta_{\widehat{a}_k}) \le \frac{2}{N}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как F равномерно непрерывна, то при достаточно большом N верна оценка

$$\left|F(b, \widehat{\mu}^N + \tfrac{1}{N}\delta_b - \tfrac{1}{N}\delta_{\widehat{a}_k}) - F(b, \widehat{\mu}^N)\right| \le \varepsilon \quad \forall b \in A.$$

Следовательно, имеем

$$F(\widehat{a}_k, \widehat{\mu}^N) \le F(b, \widehat{\mu}^N) + \varepsilon_N + \varepsilon.$$

Суммируем по k и делим на N. Получаем

$$\int_A F(a, \widehat{\mu}^N)\,d\widehat{\mu}^N) \le F(b, \widehat{\mu}^N) + \varepsilon_N + \varepsilon.$$

Используя равномерную непрерывность F и слабую сходимость $\widehat{\mu}^N$ переходим к пределу при $N \to \infty$ и получаем неравенство

$$\int_A F(a,\mu)\,d\mu \le F(b,\mu) + \varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ получаем требуемое неравенство. □

Предположим, что задана вероятностная мера μ, для которой выполняется условие

$$\mathrm{sp}\mu \subset \{a \in A\colon\ F(a,\mu) = \min_{b\in A} F(b,\mu)\}.$$

Пусть

$$\mu^N = \frac{1}{N}\big(\delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_N}\big),$$

где $a_i \in \mathrm{sp}\mu$ и $d_{KR}(\mu, \mu^N) = \beta_N$.

Предложение 1. *Предположим, что*

$$|F(a,\nu) - F(a,\sigma)| \le L d_{KR}(\mu,\sigma).$$

Тогда $(a_1, \ldots, a_N)$ *являются* ε_N*-равновесием Нэша, где*

$$\varepsilon_N = 2L(\beta_N + N^{-1}).$$

Доказательство. Пусть $b \in A$. Имеем

$$F(a_k, \mu^N) \le F(a_k, \mu) + L\beta_N \le F(b,\mu) + L\beta_N \le F(b, \mu^N) + 2L\beta_N.$$

Так как

$$|F(b, \mu^N) - F(b, \mu^N + \tfrac{1}{N}\delta_b - \tfrac{1}{N}\delta_{a_k})| \le \frac{2L}{N},$$

то

$$F(a_k, \mu^N) \le F(b, \mu^N + \tfrac{1}{N}\delta_b - \tfrac{1}{N}\delta_{a_k}) + 2L(\beta_N + N^{-1}).$$

□

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 8

Существование и единственность

Пусть A — компактное метрическое пространство и $\mathcal{P}(A)$ — пространство вероятностных мер на A с метрикой Канторовича–Рубинштейна. Пусть задано непрерывное отображение

$$F\colon A \times \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что мера $\mu \in \mathcal{P}(A)$ является решением задачи (P1), если

$$\operatorname{sp}\mu \subset \Big\{a\colon\ F(a,\mu) = \min_{b\in A} F(b,\mu)\Big\}.$$

Так как множество $\Big\{a\colon\ F(a,\mu) = \min_{b\in A} F(b,\mu)\Big\}$ замкнуто, то равносильным определением решения μ является равенство

$$\mu\Big\{a\colon\ F(a,\mu) = \min_{b\in A} F(b,\mu)\Big\} = 1,$$

которое в свою очередь равносильно условию

$$\int_A F(a,\mu)\,d\mu \le F(b,\mu) \quad \forall\, b \in A.$$

Доказательство существования решения μ задачи (P1) основано на теореме Какутани, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 1. *Пусть K — выпуклый компакт в локально выпуклом топологическом пространстве и $\Phi\colon K \to 2^K$. Если для каждого $x \in K$ множество $\Phi(x)$ непусто и выпукло и график Φ (т.е. множество таких (x,y), что $y \in \Phi(x)$) замкнут в $K \times K$, то найдется*

$$x \in \Phi(x).$$

Теорема 2. *Решение задачи* (P1) *существует.*

Доказательство. Известно, что пространство конечных мер на A с топологией слабой сходимости является локально выпуклым топологическим пространством, а множество $\mathcal{P}(A)$ в этом пространстве является выпуклым метризуемым компактом. Рассмотрим отображение Φ, которое всякой вероятностной мере σ сопоставляет множество $\Phi(\sigma)$ вероятностных мер μ, для которых выполняется условие

$$\mu\Big\{a\colon\ F(a,\sigma) = \min_{b\in A} F(b,\sigma)\Big\} = 1.$$

Для каждого σ множество $\Phi(\sigma)$ непусто, так как в нем есть дельта мера, сосредоточенная в точке минимума функции $a \to F(a,\sigma)$. Ясно, что множество $\Phi(\sigma)$ выпукло. Проверим замкнутость графика Φ. Пусть $\mu_n \to \mu$, $\sigma_n \to \sigma$ и $\mu_n \in \Phi(\sigma_n)$. Проверим, что $\mu \in \Phi(\sigma)$. Пусть $a \in \operatorname{sp}\mu$. Тогда существует такая последовательность a_n, что $a_n \in \operatorname{sp}\mu_n$ и $a_n \to a$. Положим

$$\varepsilon_n = \sup_{c\in A} |F(c,\sigma_n) - F(c,\sigma)|.$$

Из равномерной непрерывности F следует, что $\varepsilon_n \to 0$. Итак, для всякого $b \in A$ имеем

$$F(a,\sigma) = \lim_{n\to+\infty} F(a_n,\sigma) \le \lim_{n\to+\infty} (F(a_n,\sigma_n) + \varepsilon_n) \le$$

$$\le \lim_{n\to+\infty} (F(b,\sigma_n) + \varepsilon_n) = F(b,\sigma).$$

Следовательно, $F(a,\sigma) = \min_{b\in A} F(b,\sigma)$. □

Теорема 3. *Предположим, что для различных мер μ и σ выполняется неравенство*

$$\int \Big(F(a,\mu) - F(a,\sigma)\Big)\, d(\mu - \sigma) > 0.$$

Тогда решение задачи (P1) *единственно.*

Доказательство. Пусть μ и σ — два решения. Тогда

$$\int_A F(a,\mu)\,d\mu \le F(b,\mu), \quad \int_A F(a,\sigma)\,d\sigma \le F(b,\sigma).$$

Проинтегрируем первое неравенство по σ, а второе по μ. Получаем

$$\int_A F(a,\mu)\,d\mu \le \int_A F(a,\mu)\,d\sigma, \quad \int_A F(a,\sigma)\,d\sigma \le \int_A F(a,\sigma)\,d\mu.$$

Складывая эти неравенства и группируя слагаемые приходим к неравенству

$$\int \Big(F(a,\mu) - F(a,\sigma)\Big)\,d(\mu-\sigma) \le 0,$$

которое возможно только в случае, когда $\mu = \sigma$. □

Обобщения

Несложно проверить, что условия на F в задаче (P1) можно ослабить следующим образом: F равномерно непрерывно по μ и полунепрерывно снизу по a, то есть

$$\liminf_{b\to a} F(b,\mu) \ge F(a,\mu).$$

Действительно, полунепрерывность снизу гарантирует существование точки минимума, замкнутость множества точек, в которых достигается минимум, а доказательство существования повторяется практически без изменений.

Рассмотрим теперь более общую задачу (P2). Пусть X — компактное метрическое пространство и отображение

$$F\colon A \to \mathcal{P}(X\times A)$$

равномерно непрерывно по μ и полунепрерывно снизу по a. Предположим, что задано отображение $S\colon X \to 2^A$, удовлетворяющее следующим условиям: для каждого x множество $S(x)$ непусто и компактно, график отображения S замкнут и, если $x_n \to x$, то для всякого $b \in S(x)$ и всякой меры σ существует такая последовательность $b_n \in S(x_n)$, что $F(b_n,\sigma) \to F(b,\sigma)$.

Пусть ν — вероятностная мера на X. Мера μ является решением задачи (P2), если проекция μ_X меры μ на X равна ν и

$$\operatorname{sp}\mu \subset \Big\{(x,a)\colon\ a\in S(x),\ F(x,\mu) = \min_{b\in S(x)} F(b,\mu)\Big\}.$$

Заметим, что множество

$$E(\mu) = \Big\{(x,a)\colon\ a\in S(x),\ F(x,\mu) = \min_{b\in S(x)} F(b,\mu)\Big\}$$

замкнуто. Пусть $(x_n,a_n)\in E(\mu)$ и $(x_n,a_n)\to(x,a)$. Тогда $a\in S(x)$ и для всякого $b\in S(x)$ найдется такая последовательность $b_n\in S(x_n)$, что $F(b_n,\mu)\to F(b,\mu)$. Имеем

$$F(a,\mu) \le \liminf_{n\to\infty} F(a_n,\mu) \le \liminf_{n\to\infty} F(b_n,\mu) = F(b,\mu),$$

то есть $F(a,\mu) = \min_{b\in S(x)} F(b,\mu)$.

Таким образом, условия задачи (P2) можно переформулировать:

$$\mu_X = \nu, \quad \mu(E(\mu)) = 1.$$

Теорема 4. *Решение задачи* (P2) *существует.*

Доказательство. Проверяем условия теоремы Какутани для отображение Φ, которое сопоставляет вероятностной мере σ множество $\Phi(\sigma)$, состоящее из таких вероятностных мер μ, что $\mu_X=\nu$ и $\mu(E(\sigma))=1$. Покажем, что $\Phi(\sigma)$ непусто. Так как множество $E(\sigma)$ замкнуто и для каждого x сечение $E_x(\sigma)=\{a\colon (a,x)\in E(\sigma)\}$ непусто и компактно, то существует борелевское отображение $x\colon a_x\in E_x(\sigma)$. Мера $\mu=\delta_{a_x}(da)\nu(dx)$ принадлежит $\Phi(\sigma)$. Ясно, что множество $\Phi(\sigma)$ выпукло. Проверим замкнутость графика. Пусть $\mu_n\to\mu$, $\sigma_n\to\sigma$ и $\mu_n\in\Phi(\sigma_n)$. Проверим, что $\mu\in\Phi(\sigma)$. Для $(x,a)\in\operatorname{sp}\mu$ существует сходящаяся к (x,a)

последовательность точек $(x_n, a_n) \in \operatorname{sp}\mu_n$. Так как $a_n \in S(x_n)$, то $a \in S(x)$. Кроме того, существует такая последовательность $b_n \in S(x_n)$, что $F(b_n, \sigma) \to F(b, \sigma)$. Положим

$$\varepsilon_n = \sup_{c\in A} |F(c, \sigma_n) - F(c, \sigma)|.$$

Из равномерной непрерывности F следует, что $\varepsilon_n \to 0$. Итак, для всякого $b \in S(x)$ имеем

$$F(a, \sigma) = \lim_{n\to+\infty} F(a_n, \sigma) \le \lim_{n\to+\infty} (F(a_n, \sigma_n) + \varepsilon_n) \le$$

$$\le \lim_{n\to+\infty} (F(b_n, \sigma_n) + \varepsilon_n) =\le \lim_{n\to+\infty} (F(b_n, \sigma) + 2\varepsilon_n) = F(b, \sigma).$$

Следовательно, $F(a, \sigma) = \min_{b\in S(x)} F(b, \sigma)$. □

Приложения

Пусть

$$h, g\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$$

гладкие по $x \in \mathbb{R}^d$ и удовлетворяют условиям

$$|h(x, \mu) - h(x, \sigma)| + |g(x, \mu) - g(x, \sigma)| \le C d_{KR}(\mu, \sigma),$$
$$|h(x, \mu) - h(y, \mu)| + |g(x, \mu) - g(y, \mu)| \le C|x - y|,$$
$$|h(x, \mu)| + |g(x, \mu)| \le C.$$

Рассмотрим функцию

$$F(y, P) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), P \circ e_t^{-1})\, dt + g(y(T), P \circ e_T^{-1}),$$

где P — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d \times C([0, T], \mathbb{R}^d)$.

Предложение 1. *Предположим, что на абсолютно непрерывной функции y_x функционал $y \to F(y, P)$ достигает минимального значения на множестве всех абсолютно непрерывных функций y, удовлетворяющих условию $y(0) = x$. Тогда*

$$|y_x(t)| \le |x| + M_1, \quad |y_x(t) - y_x(s)| \le M_2|t - s|.$$

Доказательство. Так как $F(y_x, P) \le F(x, P)$, то

$$\int_0^T |\dot{y}_x(t)|^2\, dt \le 8CT + 4C.$$

Следовательно, верна оценка

$$|y_x(t)| \le |x| + \sqrt{T}\sqrt{8CT + 4C} = M_1.$$

Для функции y_x выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\ddot{y}_x = h_y(y_x, P \circ e_t^{-1}).$$

Следовательно, $|\ddot{y}_x| \le C_1$ и с учетом оценки интеграла от квадрата $|\dot{y}_x(t)|$ для некоторой константы C_2 получаем неравенства $|\dot{y}_x(t)| \le C_3$ и

$$|y_x(t) - y_x(s)| \le M_2|t - s|.$$

□

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, носитель которой лежит в $B(0, R)$. Положим

$$X = \overline{B}(0, R), \quad A = \{y \in C([0, T], \mathbb{R}^d)\colon\ |y(t)| \le M_1 + 2R, \quad |y(t) - y(s)| \le M_2|t - s|\}.$$

Для каждого $x \in X$ через $S(x)$ обозначим множество функций y из A, удовлетворяющих условию $y(0) = x$.

Теорема 5. *Существует вероятностная мера P на $X \times A$, удовлетворяющая условиям*

$$P_X = \nu, \quad P\Big\{(x, y)\colon y(0) = x, \quad F(y, P) = \min_{z\in S(x)} F(z, P)\Big\} = 1.$$

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 9

Пусть
$$h, g\colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$$
гладкие по $x \in \mathbb{R}^d$ и удовлетворяют условиям
$$|h(x,\mu) - h(x,\sigma)| + |g(x,\mu) - g(x,\sigma)| \le C d_{KR}(\mu,\sigma),$$
$$|h(x,\mu) - h(y,\mu)| + |g(x,\mu) - g(y,\mu)| \le C|x-y|,$$
$$|h(x,\mu)| + |g(x,\mu)| \le C.$$
Рассмотрим функцию
$$F(y,P) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), P\circ e_t^{-1})\,dt + g(y(T), P\circ e_T^{-1}),$$
где P — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Предложение 1. *Предположим, что на абсолютно непрерывной функции y_x функционал $y \to F(y,P)$ достигает минимального значения на множестве всех абсолютно непрерывных функций y, удовлетворяющих условию $y(0) = x$. Тогда*
$$|y_x(t)| \le |x| + M_1, \quad |y_x(t) - y_x(s)| \le M_2|t-s|.$$
где константы M_1 и M_2 зависят только от C и T.

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, носитель которой лежит в $B(0,\frac{R}{2})$. Положим
$$X = \overline{B}(0,\tfrac{R}{2}), \quad A = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}^d)\colon\ |y(t)| \le M_1 + 2R, \quad |y(t)-y(s)| \le M_2|t-s|\}.$$
Для каждого $x \in X$ через $S(x)$ обозначим множество функций y из A, удовлетворяющих условию $y(0) = x$.

Теорема 1. *Существует вероятностная мера P на $X \times A$, удовлетворяющая условиям*
$$P_X = \nu, \quad P\Big\{(x,y)\colon y(0) = x, \quad F(y,P) = \min_{z\in S(x)} F(z,P)\Big\} = 1.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно проверить, что X, A, F, S, ν удовлетворяют условиям задачи (P2) с прошлой лекции. Ясно, что X и A компактные метрические пространства. Проверим условия на отображение S. Множества $S(x)$ непусто, так как в нем лежит функция $y(t) \equiv x$. Множества $S(x)$ замкнуто, так как из сходимости $y_n \to y$ следует $y_n(0) \to y(0)$. Если $x_n \to x$, $y_n \to y$ и $y_n \in S(x_n)$, то $y_n(0) = x_n$, $y_n(0) \to y(0)$ и $y(0) = x$. Таким образом, график S замкнут. Пусть теперь $x_n \to x$ и $y \in S(x)$. Положим
$$y_n(t) = \alpha_n(y(t) - x) + x_n, \quad \alpha_n = 1 - \frac{|x_n - x|}{M_1 + R}.$$
Заметим, что $0 \le \alpha_n < 1$ и $y_n(0) = x_n$. Проверим, что $y_n \in A$. Имеем
$$|y_n(t)| \le \alpha_n|y(t)| + (1-\alpha_n)|x| + |x_n - x| \le \alpha_n(M_1 + 2R) + (1-\alpha_n)R + |x_n - x| = M_1 + 2R,$$
$$|y_n(t) - y_n(s)| = \alpha_n|y(t) - y(s)| \le M_2|t-s|.$$
Итак, $y_n(0) = x_n$ и $y_n \in A$, то есть $y_n \in S(x_n)$. Ясно, что y_n равномерно сходится к y и $\dot{y}_n$ равномерно сходится к $\dot{y}$. Это позволяет перейти к пределу в выражении для $F(y_n,P)$.

Проверим, что $F(y,P)$ равномерно непрерывна по P. Имеет место оценка
$$\Big|F(y,P) - F(y,Q)\Big| \le C\int_0^T d_{KR}(P\circ e_t^{-1}, Q\circ e_t^{-1})\,dt + Cd_{KR}(P\circ e_T^{-1}, Q\circ e_T^{-1}).$$
Так как $d_{KR}(P\circ e_t^{-1}, Q\circ e_t^{-1}) \le d_{KR}(P,Q)$, то
$$\Big|F(y,P) - F(y,Q)\Big| \le C(T+1)d_{KR}(P,Q).$$

Остается проверить, что $y \to F(y,P)$ полунепрерывно снизу. Пусть $y_n \to y$. Так как сходимость равномерная, то

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T h(y_n, P\circ e_t^{-1})\,dt = \int_0^T h(y, P\circ e_t^{-1})\,dt, \quad \lim_{n\to+\infty} g(y_n(T), P\circ e_T^{-1}) = g(y(T), P\circ e_T^{-1}).$$

Из оценки $|\dot{y}_n| \le M_2$ следует ограниченность последовательности $\dot{y_n}$ в $L^2[0,T]$. Переходя к подпоследовательности можно считать, что $\dot{y_n}$ слабо сходится к $\dot{y}$ в $L^2[0,T]$. Так как

$$\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}_n(t)|^2\,dt \ge -\int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2\,dt + \int_0^T \langle \dot{y}_n(t), y(t)\rangle\,dt,$$

то

$$\lim\inf_{n\to\infty} \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}_n(t)|^2\,dt \ge \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2\,dt,$$

что влечет полунепрерывность снизу функционала $y \to F(y,P)$.

Таким образом, все условия проверены и теорема о существовании меры P доказана.

Отметим, что в силу предложения 1 сужение исходного пространства $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ до множества A не влияет на множество функций y, на которых достигается минимум $F(y,P)$.

Следуя работам P.Cannarsa, R.Capuani, P.Cardaliaguet назовем пару (u,μ_t) решением в среднем системы

$$\begin{cases} -u_t + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h(x,\mu_t) = 0, \\ \partial_t \mu_t - \mathrm{div}\big(\nabla u \mu_t\big) = 0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x,T) = g(x,\mu_T)$, $\mu_0 = \nu$, если

$$\mu_t = P\circ e_t^{-1}, \quad u(x,t) = \inf_{y\colon y(t)=x} \int_t^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t),\mu_t)\,dt + g(y(T),\mu_T),$$

где вероятностная мера P на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям: $P|_{\mathbb{R}^d_x} = \nu$ и носитель $\mathrm{sp}\,P$ лежит в множестве пар (x,y), у которых $y(0)=x$ и y — точка минимума функционала

$$y \to \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), P\circ e_t^{-1})\,dt + g(y(T), P\circ e_T^{-1})$$

на множестве всех абсолютно непрерывных функций y с условием $y(0)=x$.

Теорема 2. *Решение в среднем существует.*

Доказательство. Немедленно следует из доказанного выше. □

Отметим, что u является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби

$$-u_t + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h(x,\mu_t) = 0.$$

Более того, в недавней работе P.Cannarsa, R.Capuani, P.Cardaliaguet показали, что для всех x из носителя μ_t функция $x \to u(x,t)$ дифференцируема и μ_t является решением уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t - \mathrm{div}\big(\nabla u \mu_t\big) = 0.$$

Таким образом, решение в среднем является «поточечным» решением системы уравнений.

Будем говорить, что для функции $f(x,\mu)$ выполняется условие монотонности, если

$$\int \Big(f(x,\mu) - f(x,\sigma)\Big)\,d(\mu-\sigma) \ge 0,$$

а равенство нулю влечет равенство $f(x,\mu) = f(x,\sigma)$.

Теорема 3. *Если функции h и g удовлетворяют условию монотонности и пары (u^1,μ_t^1), (u^2,μ_t^2) — решения в среднем, то $u^1 = u^2$. Более того, если в условии монотонности из равенства нулю следует совпадение мер, то $\mu_t^1 = \mu_t^2$ и решение в среднем единственно.*

Доказательство. Пусть мера P^1 соответствует паре (u^1, μ_t^1), а мера P^2 – соответствует паре (u^2, μ_t^2). Для всякой пары $(x, y) \in \operatorname{sp} P^1$ выполнено

$$u^1(x,0) = \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), \mu_t^1)\, dt + g(y(T), \mu_T^1),$$

$$u^2(x,0) \leq \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{y}(t)|^2 + h(y(t), \mu_t^2)\, dt + g(y(T), \mu_T^2).$$

Следовательно, верна оценка

$$g(y(T), \mu_T^1) - g(y(T), \mu_T^2) + \int_0^T h(y(t), \mu_t^1) - h(y(t), \mu_t^2)\, dt \leq u^1(x,0) - u^2(x,0).$$

Интегрируя это неравенство по мере P^1 и учитывая, что $P^1 \circ e_t^{-1} = \mu_t^1$, приходим к новому неравенству

$$\int g(x, \mu_T^1) - g(x, \mu_T^2)\, d\mu_T^1 + \int_0^T \int h(x, \mu_t^1) - h(x, \mu_t^2)\, d\mu_t^1\, dt \leq \int u^1(x,0) - u^2(x,0)\, d\nu.$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$\int g(x, \mu_T^2) - g(x, \mu_T^1)\, d\mu_T^2 + \int_0^T \int h(x, \mu_t^2) - h(x, \mu_t^1)\, d\mu_t^2\, dt \leq \int u^2(x,0) - u^1(x,0)\, d\nu.$$

Складываем полученные неравенства и приходим к оценке

$$\int g(x, \mu_T^1) - g(x, \mu_T^2)\, d(\mu_T^1 - \mu_T^2) + \int_0^T \int h(x, \mu_t^1) - h(x, \mu_t^2)\, d(\mu_t^1 - \mu_t^2)\, dt \leq 0.$$

Следовательно, верны равенства

$$g(x, \mu_T^1) = g(x, \mu_T^2), \quad h(x, \mu_t^1) = h(x, \mu_t^2),$$

в силу которых функционалы, задающие u^1 и u^2 совпадают. $\square$

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 10

На предыдущих лекциях мы обсудили систему уравнений, описывающую равновесие в игре бесконечного числа игроков, каждый из которых решает задачу оптимального контроля: выбрать управление α так, что функция y, решающая уравнение $\dot{y}(t) = f(y, \alpha)$ с начальным условием $y(0) = x$, является точкой минимума некоторого функционала $J(y, \alpha)$. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, в которой функция y определяется из стохастического уравнения $dy_t = f(y_t, \alpha_t)\, dt + \sqrt{2}\, dw_t$. В этом случае положение равновесия Нэша описывается системой вида

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u + H(x, \mu_t, \nabla u) = 0, \\ \partial_t \mu_t - \Delta \mu_t - \operatorname{div}(H_p(x, \mu_t, \nabla u)\mu_t) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы является обобщением уравнения непрерывности и называется уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова. Покажем, как это уравнение появляется в теории случайных процессов.

Винеровский процесс и интеграл Ито

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство. Напомним, что случайный процесс $w_t \colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется винеровским процессом, если почти наверное $w_0(\omega) = 0$, $t \to w_t(\omega)$ — непрерывная функция, при $t > s$ приращение $w_t - w_s$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t - s$ и для всяких $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $w_{t_0}, w_{t_1} - w_{t_0}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ независимы.

Существование такого процесса можно вывести из известных теорем А.Н.Колмогорова о согласованных семействах и о непрерывности траекторий.

Многомерный винеровский процесс $w_t = (w_t^1, \ldots, w_t^d)$ является вектором и d независимых винеровских процессов.

С винеровским процессом можно связать семейство сигма-алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, s \le t)$. Заметим, что $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Семейство сигма-алгебр с такими свойствами называют потоком или фильтрацией.

Предложение 1. *Случайная величина $w_t - w_s$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_s$ независимы при $t > s$.*

Случайный процесс x_t называется прогрессивно измеримым относительно потока $\mathcal{F}_t$, если для каждого $t \ge 0$ отображение $(s, \omega) \to x_s(\omega)$ множества $[0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ измеримо относительно $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$. Важно иметь ввиду, что всякий случайный процесс x_t с непрерывными траекториями является прогрессивно измеримым, если при каждом t случайная величина x_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$. Через $\mathbb{L}_2[0, T]$ обозначим множество прогрессивно измеримых случайных процессов x_t, у которых

$$\mathbb{E} \int_0^T |x_t|^2\, dt < \infty.$$

Предложение 2. *В пространстве $\mathbb{L}_2[0, T]$ всюду плотно множество ступенчатых процессов вида*

$$y_t(\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T,$$

где случайная величина Y_j измерима относительно $\mathcal{F}_{t_j}$.

Доказательство. Используя «срезку» приближаем x_t процессом z_t с равномерно ограниченными траекториями. Процесс z_t приближается процессом

$$n \int_{t-1/n \wedge 0}^{t} z_s\, ds, \quad t \wedge s = \min\{t, s\},$$

с непрерывными траекториями, а такой уже приближается ступенчатым. $\square$

Интеграл Ито от ступенчатого процесса y_t по отрезку $[0,t]$, $t \le T$, определяется равенством

$$\int_0^t y_s\,dw_s = \sum_{j=0}^{m-1} y_j(w_{t_{j+1}\wedge t} - w_{t_j\wedge t}).$$

Предложение 3. *Процесс*

$$I_t = \int_0^t y_s\,dw_s$$

имеет непрерывные траектории и является мартингалом, т.е. $\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_s) = I_s$ *при* $t \ge s$. *Кроме того,*

$$\mathbb{E}I_t = 0, \quad \mathbb{E}|I_t|^2 = \mathbb{E}\int_0^t |y_s|^2\,ds, \quad \mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]}|I_s|^2 \le 4\mathbb{E}\int_0^t |y_s|^2\,ds.$$

Доказательство. Последнее неравенство является частным случаем неравенства Дуба для мартингалов. □

Рассмотрим пространство $L^2(\Omega, C[0,T])$, состоящее из случайных процессов x_t с почти наверное непрерывными траекториями, для которых конечна норма

$$\|x\| = \Bigl(\mathbb{E}\sup_{[0,T]}|x_t|^2\Bigr)^{1/2}.$$

Это полное нормированное пространство (с естественным отождествлением процессов, которые с вероятностью единица совпадают при всех $t \in [0,T]$).

Из перечисленных выше свойств интеграла Ито от ступенчатого процесса немедленно следует, что фундаментальная последовательность y_t^n в пространстве $\mathbb{L}^2[0,T]$ задает фундаментальную последовательность $\displaystyle\int_0^t y_s^n\,dw_s$ в пространстве $L^2(\Omega, C[0,T])$. Это позволяет определить интеграл Ито для произвольного x_t из $\mathbb{L}^2[0,T]$ равенством

$$\int_0^t x_s\,dw_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^t y_s^n\,dw_s,$$

где предел берется по норме пространства $L^2(\Omega, C[0,T])$, а y_t^n сходятся к x_t в $\mathbb{L}^2[0,T]$. Все перечисленные выше свойства интеграла Ито от ступенчатых процессов переносятся на интеграл от x_t.

Пространство процессов из $L^2(\Omega, C[0,T])$, имеющих прогрессивно измеримую модификацию, является замкнутым. Пусть последовательность x_t^n сходится к x_t и x_t^n прогрессивно измеримы. Положим $A = \{(t,\omega)\colon \exists \lim_{n\to\infty} x_t^n(\omega)\}$. Тогда $x_t(\omega)I_A(t,\omega)$ является искомой модификацией, так как является поточечным пределом прогрессивно измеримых функций $x_t^n(\omega)I_A(t,\omega)$. Далее, если возможно, то выбираем именно прогрессивно измеримую модификацию.

Пусть $B_t, \Sigma_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$. Запись вида

$$dx_t = B_t\,dt + \Sigma_t\,dw_t$$

является сокращением равенства

$$x_t = x_0 + \int_0^t B_s\,ds + \int_0^t \Sigma_s\,dw_s,$$

которое с вероятностью единица выполняется для всех $t \in [0,T]$.

Важнейшую роль в стохастическом анализе играет формула Ито: для всякой функции $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$df(x_t) = \bigl[\langle B_t, \nabla f(x_t)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t D^2 f(x_t))\bigr]\,dt + \sum_{i,j}\partial_{x_i} f(x_t)\Sigma_t^{ij}\,dw_t^j, \quad A_t = \Sigma_t\Sigma_t^*.$$

Стохастические дифференциальные уравнения

Прогрессивно измеримый процесс x_t является решением стохастического уравнения

$$dx_t = b_t(x_t)\,dt + \sigma_t(x_t)\,dw_t$$

с начальным условием x_0 (неслучайная точка в $\mathbb{R}^d$), если

$$x_t = x_0 + \int_0^t b_s(x_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s$$

с вероятностью единица для всех $t \in [0, T]$.

Отметим, что мы пока считаем, что винеровский процесс со своей естественной фильтрацией задан и для этого винеровского процесса определяется решение x_t. Будем говорить, что решение единственно, если для всяких двух решений x_t и y_t с вероятностью единица $x_t = y_t$ для всех $t \in [0, T]$.

Предположим, что $b_t(x)$, $\sigma_t(x)$ непрерывны, ограничены и

$$|b_t(x) - b_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \le M|x - y|.$$

Теорема 1. *Для всякого начального условия $x_0 \in \mathbb{R}^d$ существует единственное решение стохастического уравнения.*

Доказательство. Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда $b = 0$. Пусть

$$\sup_{t,x} |\sigma_t(x)| \le Q.$$

Заметим, что для всякого прогрессивно измеримого процесса $x_t \in \mathbb{L}^2[0, T]$ верна оценка

$$\mathbb{E} \sup_{[0,T]} \Big| x_0 + \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s \Big|^2 \le 2|x_0|^2 + 8TQ^2.$$

Следовательно, процесс $x_0 + \int_0^t \sigma(x_s)\,dw_s$ принадлежит пространству $L^2(\Omega, C[0, T])$. Рассмотрим последовательность x_t^n, заданную равенствами:

$$x_t^0 = x_0, \quad x_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s^n)\,dw_s.$$

Имеет место оценка

$$\mathbb{E} \sup_{[0,t]} |x_s^{n+1} - x_s^n|^2 \le 4\mathbb{E} \int_0^t |\sigma_s(x_s^n) - \sigma_s(x_s^{n-1})|^2\,ds,$$

из которой следует неравенство

$$\mathbb{E} \sup_{[0,t]} |x_s^{n+1} - x_s^n|^2 \le 4M^2 \mathbb{E} \int_0^t \sup_{[0,s]} |x_\tau^n - x_\tau^{n-1}|^2\,ds.$$

Итерируя это неравенство получаем

$$\mathbb{E} \sup_{[0,T]} |x_s^{n+1} - x_s^n|^2 \le \frac{C^n}{n!},$$

для всех n и некоторой константы $C > 0$. По неравенству Чебышёва

$$P\big(\omega\colon \sup_{[0,T]} |x_s^{n+1}(\omega) - x_s^n(\omega)|^2 \ge 2^{-n}\big) \le \frac{(2C)^n}{n!}$$

и сходится ряд

$$\sum_n P\big(\omega\colon \sup_{[0,T]} |x_s^{n+1}(\omega) - x_s^n(\omega)|^2 \ge 2^{-n}\big).$$

По лемме Бореля–Кантелли ряд $x_t^0 + (x_t^1 - x_t^0) + \ldots + (x_t^{n+1} - x_t^n) + \ldots$ с вероятностью единица сходится равномерно на $[0, T]$, что равносильно равномерной сходимости x_t^n к некоторому процессу x_t. Ясно, что траектории x_t почти наверное непрерывны, x_t имеет прогрессивно измеримую модификацию и x_t^n сходится к x_t в $L^2(\Omega, C[0, T])$. Остается заметить, что

$$\mathbb{E} \sup_{[0,T]} \Big| \int_0^t \sigma_s(x_s^n)\,dw_s - \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s \Big|^2 \le Q^2 T \mathbb{E} \sup_{[0,T]} |x_t^n - x_t|^2 \to 0$$

и с вероятностью единица для всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma_s(x_s)\, dw_s.$$

Докажем теперь единственность решения. Предположим, что x_t и y_t — решения. Пусть

$$f(t) = \mathbb{E} \sup_{[0,t]} |x_s - y_s|^2.$$

Тогда верна оценка

$$f(t) \le M^2 \int_0^t f(s)\, ds,$$

из которой следует равенство $f(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. □

Заметим, что для достаточно малого $T > 0$ утверждение можно доказать с помощью теоремы о сжимающем отображении, примененной к отображению

$$x_t \to x_0 + \int_0^t b_s(x_s)\, ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)\, dw_s$$

в замкнутом подпространстве $L^2(\Omega, C[0, T])$, состоящем из процессов, которые имеют прогрессивно измеримую модификацию.

Отметим также, что выполненные выше построения для классического винеровского процесса практически без изменений переносятся на случай $\mathcal{F}_t$ — броуновского движения w_t. Для произвольного потока $\mathcal{F}_t$ случайный процесс w_t называется $\mathcal{F}_t$ — броуновским движением, если для каждого t случайная величина w_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, приращение $w_t - w_s$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_s$ независимы при $t > s$ и приращение $w_t - w_s$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t - s$.

Одномерные распределения и уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

Пусть x_t — построенное выше решение стохастического уравнения. Рассмотрим распределение случайной величины x_t:

$$\mu_t(B) = P\bigl(\omega\colon x_t(\omega) \in B\bigr) = P \circ x_t^{-1}(B).$$

По формуле Ито для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$\varphi(x_t) = \varphi(x_0) + \int_0^t \bigl[\langle b_t(x_t), \nabla\varphi(x_t)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t(x_t)D^2\varphi(x_t))\bigr]\, dt + \text{мартингал},$$

где $A_t(x) = \sigma_t(x)\Sigma_t(x)^*$. Так как для всякой борелевской функции f верно равенство

$$\mathbb{E}f(x_t) = \int f(x_t(\omega))P(d\omega) = \int f(x)\, d\mu_t,$$

то получаем

$$\int \varphi(x)\, d\mu_t = \int \varphi(x)\, d\mu_0 + \int_0^t \int L\varphi(x, s)\, d\mu_s\, ds,$$

где

$$L\varphi(x, s) = \langle b_t(x), \nabla\varphi(x)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t(x)D^2\varphi(x)).$$

Выполнение данного равенства для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ можно взять за определение решения μ_t уравнения

$$\partial_t\mu_t = \tfrac{1}{2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}\mu_t\bigr) - \partial_{x_i}\bigl(b^i\mu_t\bigr),$$

которое называют прямым уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова и кратко записывают в виде

$$\partial_t\mu_t = L^*\mu_t.$$

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и мартингальная задача

Выше мы показали, что одномерные распределения решения стохастического уравнения являются решениями уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Замечательным образом имеет место обратная связь, а именно при весьма общих условиях всякому «вероятностному» решению уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова соответствует решение некоторого стохастического уравнения.

Следующее утверждение называют принципом суперпозиции.

Теорема 2. *Предположим, что непрерывная кривая μ_t, отображающая отрезок $[0,T]$ в пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ с топологией слабой сходимости, является решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$, причем*

$$\int_0^T \int |A_t(x)| + |b_t(x)|\, d\mu_t\, dt < \infty.$$

Тогда существует такая вероятностная мера P на $C[0,T]$, что $P\circ e_t^{-1} = \mu_t$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$(t,\omega(\cdot)) \to \varphi(\omega(t)) - \varphi(\omega(0)) - \int_0^t L\varphi(\omega(s),s)\, ds$$

является мартингалом относительно P и потока $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s\le t)$.

Предложение 4. *В условиях теоремы существует вероятностное пространство $(\Omega, F, \widetilde{P})$ с потоком $\widetilde{F}_t$, $\widetilde{F}_t$ — броуновское движение w_t и случайный процесс x_t с непрерывными траекториями такие, что*

$$dx_t = b_t(x_t)\, dt + \sigma_t(x_t)\, dw_t, \quad A_t = \sigma_t\sigma_t^*,$$

и P является распределением процесса x_t, в частности, $\mu_t(B) = \widetilde{P}(\omega\colon\ x_t(\omega)\in B)$.

Проиллюстрируем последнее утверждение примером. Пусть на $C[0,T]$ задана вероятностная мера P и поток $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s\le t)$. Предположим, что для всякой функции $\varphi\in C_b^2(\mathbb{R})$ отображение

$$(t,\omega(\cdot)) \to \varphi(\omega(t)) - \varphi(\omega(0)) - \int_0^t \frac{1}{2}\varphi''(\omega(s))\, ds$$

является мартингалом относительно P и $\mathcal{F}_t$. Докажем, что случайный процесс

$$\xi_t(\omega) = \omega(t)$$

является $\mathcal{F}_t$ — броуновским движением. Для этого достаточно при $t > s$ проверить равенство

$$\mathbb{E}e^{iy(\xi_t-\xi_s)|\mathcal{F}_s} = e^{-y^2(t-s)/2}.$$

Применяя условие с $\varphi(x) = e^{ixy}$ получаем

$$\mathbb{E}\Big(e^{iy\xi_t} - e^{iy\xi_s} + \frac{y^2}{2}\int_s^t e^{iy\xi_\tau}\, d\tau\Big|\mathcal{F}_s\Big) = 0.$$

Следовательно, для всякой измеримой относительно $\mathcal{F}_s$ ограниченной функции η верно равенство

$$\mathbb{E}e^{iy(\xi_t-\xi_s)}\eta = \mathbb{E}\eta - \frac{y^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}e^{iy(\xi_\tau-\xi_s)}\eta\, d\tau.$$

Обозначим правую часть через $f(t)$ приходим к уравнению $f'(t) = -\frac{y^2}{2}f(t)$, решая которое находим

$$f(t) = e^{-y^2(t-s)/2}\mathbb{E}\eta.$$

В силу произвольности η получаем требуемое равенство.

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 11

Положим
$$Lu = \frac{1}{2}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}.$$
Семейство конечных неотрицательных мер $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ является решением задачи Коши
$$\partial_t\mu_t = L^*\mu_t, \quad \mu_0 = \nu,$$
если для всякого борелевского множества B функция $t \to \mu_t(B)$ измерима, функции a^{ij}, b^i локально интегрируемы по мере $\mu_t\,dt$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ равенство
$$\int \varphi\,d\mu_t - \int \varphi\,d\nu = \int_0^t \int L\varphi\,d\mu_\tau, d\tau$$
выполняется для почти всех $t \in [0,T]$. Полезно иметь ввиду, что для всякой функции $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, $\varphi(x,t) = 0$ при $|x| > R$, равенство
$$\int \varphi(x,t)\,d\mu_t - \int \varphi(x,0)\,d\nu = \int_0^t \int \big[\partial_t\varphi + L\varphi\big]\,d\mu_\tau\,d\tau$$
выполняется для почти всех t. Если коэффициенты a^{ij}, b^i интегрируемы по мере $\mu_t\,dt$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, то последнее равенство выполняется для всех ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций φ с ограниченными производными.

В случае, когда $0 \le \mu_t$ и $\mu_t(\mathbb{R}^d) \le 1$ для всех t, то говорят, что $\{\mu_t\}$ — субвероятностное решение, а если $0 \le \mu_t$ и $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$, то говорят, что $\{\mu_t\}$ — вероятностное решение,

Уравнение теплопроводности

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$.

Предложение 1. *Семейство мер $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\,dx$, где*
$$\varrho(x,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\,\nu(dy),$$
является вероятностным решением задачи Коши
$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда
$$\int \varphi\,d\mu_t = \int u(y,t)\,\nu(dy),$$
где функция
$$u(y,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\varphi(x)\,dx$$
является гладким решение задачи Коши для уравнения $\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$, $u(x,0) = \varphi(x)$. Кроме того, верно равенство
$$\Delta u(y,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\Delta\varphi(x)\,dx.$$
Следовательно, получаем
$$\frac{d}{dt}\int \varphi\,d\mu_t = \int \partial_t u\,d\nu = \int \frac{1}{2}\Delta\varphi\,dmu_t.$$
□

Предложение 2. *В классе субвероятностных решений задача Коши*
$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t, \quad \mu_0 = \nu.$$
имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть μ_t^1 и μ_t^2 — два решения. Положим $\mu_t = \mu_t^1 - \mu_t^2$. Для всякой функции φ и всякого $\tau > 0$ функция

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi(\tau - t))^{d/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{2(\tau-t)}} \varphi(x)\, dx$$

является гладким решением задачи Коши

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0, \quad u(x,\tau) = \varphi.$$

Подставляя u в равенство, определяющее решение, получаем

$$\int \varphi(x)\, d\mu_\tau = \int u(x,\tau)\, d\mu_\tau = \int u(x,0)\, d\mu_0 = 0,$$

Следовательно, верно равенство $\mu_\tau = 0$. $\square$

Решение неоднородного уравнения теплопроводности

Пусть $f \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Для построения решения

$$u_t + \tfrac{1}{2}\Delta u = f$$

применим метод Дюамеля. Пусть $w(x,t,\tau)$ — решение задачи Коши

$$w_t + \tfrac{1}{2}\Delta w = 0, \quad w(x,t,\tau) = f(x,\tau).$$

Проверим, что

$$u(x,t) = -\int_t^T w(x,t,\tau)\, d\tau$$

является решением $u_t + \frac{1}{2}\Delta u = f$. Имеем

$$u_t(x,t) = w(x,t,t) - \int_t^T w_t(x,t,\tau)\, d\tau = f(x,t) + \tfrac{1}{2}\int_t^T \Delta w(x,t,\tau)\, d\tau = f(x,t) - \tfrac{1}{2}\Delta u(x,t).$$

Так как

$$w(x,t,\tau) = \int f(y,\tau) K(x-y,\tau-t)\, dy, \quad K(x-y,\tau-t) = \frac{1}{(2\pi(\tau-t))^{d/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{2(\tau-t)}},$$

то

$$u(x,t) = -\int_t^T \int f(y,\tau) K(x-y,\tau-t)\, dy\, d\tau.$$

Пусть $\gamma \geq 1$. Заметим, что

$$\int |K(x-y,\tau-t)|^\gamma\, dy = C_\gamma (\tau-t)^{d(1-\gamma)/2}, \quad \int |\nabla_x K(x-y,\tau-t)|^\gamma\, dy = C'_\gamma (\tau-t)^{(d(1-\gamma)-\gamma)/2}.$$

Если $\gamma < \frac{d+2}{d+1}$, то функции $K(x-y,\tau-t)$, $|\nabla_x K(x-y,\tau-t)|$ интегрируемы в степени γ по множеству $[t,T]\times\mathbb{R}^d$ и интегралы оцениваются константой, которая не зависит от t и x.

Предложение 3. *Пусть $p > d+2$. Для построенного выше решения и уравнения*

$$u_t + \tfrac{1}{2}\Delta u = f$$

имеет место оценка

$$\sup|u| + \sup|\nabla_x u| \leq C(p)\|f\|_{L^p}.$$

Доказательство. Оценка выводится из формулы для решения с помощью неравенства Гёльдера. $\square$

Абсолютная непрерывность решений

Теорема 1. *Если μ_t является субвероятностным решением уравнения*

$$\partial_t \mu_t = \tfrac{1}{2}\Delta\mu_t - \operatorname{div}(b\mu_t)$$

и векторное поле b ограниченно на всяком множестве $[0,T]\times B(0,R)$, то

$$\mu_t(dx)\, dt = \varrho(x,t)\, dx\, dt, \quad \varrho \in L^p_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^d), 1 < p < \tfrac{d+2}{d+1}.$$

Доказательство. Пусть $\Pi = (t_1, t_2) \times B(0,R)$, $0 < t_1 < t_2 < T$, $R > 0$, и функция $\zeta \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ равна единице на Π. Пусть $f \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ и u — построенное выше решение уравнения $u_t + \frac{1}{2}\Delta u = f$. Так как μ_t — решение, то верно равенство

$$\int_0^T \int \bigl(u_t + \tfrac{1}{2}\Delta u\bigr)\zeta \, d\mu_t \, dt =$$
$$= -\int_0^T \int \bigl(u\zeta_t + \langle \nabla u, \nabla\zeta\rangle + u\Delta\zeta + \langle b, \nabla\zeta\rangle u + \langle b, \nabla u\rangle \zeta\bigr)\, d\mu_t \, dt.$$

Следовательно, с $q = p/(p-1)$ верна оценка

$$\iint_\Pi f \, d\mu_t \, dt \le C\bigl(\sup|u| + \sup|\nabla_x u|\bigr) \le C'\|f\|_{L^q(\Pi)}.$$

Линейный функционал

$$f \to \iint_\Pi f \, d\mu_t \, dt$$

продолжается до непрерывного линейного функционала на $L^q(\Pi)$ и по теореме Рисса имеет вид

$$\iint_\Pi f \, d\mu_t \, dt = \iint_\Pi f \varrho \, dx \, dt, \quad \varrho \in L^p(\Pi).$$

□

Существование решения

Теорема 2. *Пусть b — борелевское векторное поле, ограниченное на $[0,T]\times B(0,R)$ для всякого $R > 0$. Тогда для всякой вероятностной меры ν существует субвероятностное решение μ_t задачи Коши*

$$\partial_t \mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t - \mathrm{div}(b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Пусть b_n — последовательность векторных полей класса C_0^∞, которая сходится к b в $L^q(\Pi)$ для всякого $q \ge 1$ и всякого $\Pi = (t_1,t_2)\times B(0,R)$, $0 < t_1 < t_2 < T$, $R > 0$. В качестве решения μ_t^n задачи Коши

$$\partial_t \mu_t^n = \frac{1}{2}\Delta\mu_t^n - \mathrm{div}(b_n\mu_t^n), \quad \mu_0^n = \nu$$

можно взять распределение случайного процесса, который является решением соответствующего стохастического уравнения. Для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство

$$\int \varphi \, d\mu_t^n - \int \varphi \, d\nu = \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\bigr] \, d\mu_s^n \, ds.$$

По доказанному выше $\mu_t^n(dx)\,dt = \varrho_n(x,t)\,dx\,dt$ и для всякого $\Pi = (t_1,t_2)\times B(0,R)$, $0 < t_1 < t_2 < T$, $R > 0$, существует числа $C(\Pi)$, которое не зависит от n и с которым верна оценка $\|\varrho_n\|_{L^p(\Pi)} \le C(\Pi)$. Применяя диагональную процедуру и переходя к подпоследовательности можно считать, что ϱ_n сходится к некоторой функции ϱ слабо в $L^p(\Pi)$ для всякого цилиндра Π указанного вида. Заметим, что при $0 < \delta < t < T$

$$\int_\delta^t \int \frac{1}{2}\Delta\varphi\varrho_n \, dx \, ds \to \int_\delta^t \int \frac{1}{2}\Delta\varphi\varrho \, dx \, ds,$$

$$\int_\delta^t \int \langle b_n, \nabla\varphi\rangle \varrho_n \, dx \, ds = \int_\delta^t \int \langle b_n - b, \nabla\varphi\rangle\varrho_n \, dx \, ds + \int_\delta^t \int \langle b, \nabla\varphi\rangle\varrho_n \, dx \, ds \to \int_\delta^t \int \langle b, \nabla\varphi\rangle\varrho \, dx \, ds.$$

Более того,

$$\Bigl|\int_0^\delta \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\bigr] \, d\mu_s^n \, ds\Bigr| \le C(\varphi)\delta.$$

Положим $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\,dx$. Для каждого $t \in (0,T)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\bigr] \, d\mu_s^n \, ds = \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b, \nabla\varphi\rangle\bigr] \, d\mu_s \, ds.$$

Следовательно, для всякого t и всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_t^n.$$

Пусть $\eta \in C_0^\infty((0,T))$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \eta(t)\Bigl(\int \varphi\, d\mu_t^n\Bigr)\, dt = \int_0^T \eta(t)\Bigl(\int \varphi\varrho\, dx\Bigr)\, dt.$$

Следовательно, для почти всех t верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_t^n = \int \varphi(x)\varrho(x,t)\, dx,$$

из которого следует, что $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\, dx$ — субвероятностные меры. Таким образом, после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем для почти всех t равенство

$$\int \varphi\, d\mu_t - \int \varphi\, d\nu = \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b, \nabla\varphi\rangle\bigr]\, d\mu_s\, ds$$

и μ_t — искомое решение. □

Отметим, что в условиях теоремы плотность ϱ имеет непрерывную строго положительную плотность, у которой по переменным x_i есть соболевские производные первого порядка. Далее мы считаем, что всегда выбрана именно эта версия плотности и соответствующие ей меры μ_t.

Функция Ляпунова и существование вероятностного решения

Положим

$$Lu = \tfrac{1}{2}\Delta u + \langle b, \nabla u\rangle.$$

Функцией Ляпунова V для оператора L называется такая функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(x,t) \le C + CV(x).$$

Теорема 3. *Если существует функция Ляпунова V и $V \in L^1(\nu)$, то всякое субвероятностное решение μ_t задачи Коши*

$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t - \operatorname{div}(b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu,$$

является вероятностным, т.е. $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$. Более того,

$$\sup_{t\in[0,T]} \int V(x)\, d\mu_t < \infty$$

и $t \to \mu_t$ является непрерывной кривой в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Пусть $\zeta_N(z) = z$ при $z \le N-1$, $\zeta_N(z) = N$ при $z > N+1$, $0 \le \zeta_N' \le 1$ и $\zeta_N'' \le 0$. По определению решения μ_t верно равенство

$$\int \bigl(\zeta_N(V) - N\bigr)\, d\mu_t = \int \bigl(\zeta_N(V) - N\bigr)\, d\nu + \int_0^t \int L\bigl(\zeta_N(V) - N\bigr)\, d\mu_s\, ds.$$

Заметим, что

$$L\bigl(\zeta_N(V) - N\bigr) = \zeta_N'(V)LV + \frac{1}{2}\zeta_N''(V)|\nabla V|^2 \le C + C\zeta_N'(V)V.$$

Так как $(z\zeta_N'(z) - \zeta_N(z))' = z\zeta_N''(z) \le 0$, то $\zeta_N'(V)V \le V$. Следовательно, приходим к оценке

$$\int \zeta_N(V)\, d\mu_t + (1 - \mu_t(\mathbb{R}^d))N \le \int \zeta_N(V)\, d\nu + CT + C\int_0^t \int \zeta_N(V)\, d\mu_s\, ds,$$

из которой немедленно следует ограниченность интегралов от V по мерам μ_t и равенство $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$. □

Отметим, что в общем случае задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова может иметь бесконечно много вероятностных решений.

Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 12

Оценки решений уравнений ФПК

На прошлой лекции обсуждалась задача Коши

$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t - \mathrm{div}(b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu,$$

где ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$ и b — борелевское векторное поле, ограниченное на $[0,T]\times B(0,R)$ для всякого $R>0$. Было показано, что существует субвероятностное решение μ_t, причем мера $\mu_t\,dt$ имеет непрерывную положительную плотность ϱ относительно меры Лебега. Более того, если существует функция Ляпунова V, то субвероятностное решение является вероятностным и кривая $t\to\mu_t$ является непрерывной кривой в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Типичный пример:

$$|x|^2\in L^1(\nu), \quad \langle b(x,t),x\rangle \le C + C|x|^2.$$

В случае существования функции Ляпунова вероятностное решение оказывается единственным. Однако проблема единственности является частным случаем более общей проблемы зависимости решений от коэффициентов.

Положим

$$L_1u = \frac{1}{2}\Delta u + \langle b_1, \nabla u\rangle, \quad L_2u = \frac{1}{2}\Delta u + \langle b_2, \nabla u\rangle.$$

Пусть $\mu_t^1(dx) = \varrho^1(x,t)\,dx$ и $\mu_t^2(dx) = \varrho^2(x,t)\,dx$ — решения уравнений

$$\partial_t\mu_t^1 = L_1^*\mu_t^1, \quad \partial_t\mu_t^2 = L_2^*\mu_t^2,$$

и $\mu_0^1=\mu_0^2=\nu$. Напомним, что при $t>0$ плотности ϱ^1 и ϱ^2 непрерывны и положительны. Пусть

$$v(x,t) = \frac{\varrho^2(x,t)}{\varrho^1(x,t)}.$$

Теорема 1. *Предположим, что $|b_1-b_2|\in L^2(\mu_t^2\,dt)$ и выполняется хотя бы одно из условий*

(i) $(1+|x|)^{-1}|b_1(x,t)|\in L^1(\mu_t^1\,dt)$

(ii) $\langle b_1(x,t),x\rangle\le C+C|x|^2$.

Тогда

$$\int v(x,t)\ln v(x,t)\mu_t^1(dx) \le \frac{1}{2}\int_0^t\int |b_1(x,s)-b_2(x,s)|^2\,d\mu_s^2\,ds.$$

Обсудим лишь идею доказательства в предположении гладкости ϱ^1, ϱ^2, b_1, b_2.

Пусть $f\in C^2(0,+\infty)$. Можно проверить, что верны следующие равенства:

$$L_1^*(uv) = vL_1^*u + uL_1^*v + \langle\nabla u,\nabla v\rangle + uv\mathrm{div}b_1,$$

$$L_1^*f(u) = f'(u)L_1^*u + \frac{1}{2}f''(u)|\nabla u|^2 + (uf'(u)-f(u))\mathrm{div}b_1.$$

Заметим, что

$$\partial_t\varrho^2 = L_2^*\varrho^2 \quad\Leftrightarrow\quad \partial_t(v\varrho^1) = L_1^*(v\varrho^1) - \mathrm{div}\big((b_2-b_1)v\varrho^1\big).$$

Используя эти наблюдения и уравнение $\partial_t\varrho^1 = L^*\varrho^1$ выводим равенство

$$\partial_t(f(v)\varrho^1) = L_1^*(f(v)\varrho^1) - \frac{1}{2}f''(v)|\nabla v|^2\varrho^1 - f'(v)\mathrm{div}\big((b_2-b_1)v\varrho^1\big).$$

Умножая это равенство на функцию $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и интегрируя, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v(x,t))\psi(x)\varrho^1(x,t)\,dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}\psi f''(v)|\nabla v|^2 \varrho^1\,dx\,ds =$$
$$= f(1)\int_{\mathbb{R}^d} \psi\,d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big[f(v)L_1\psi\big]\varrho^1\,dx\,ds +$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big[\langle b_2-b_1,\nabla v\rangle f''(v)\psi v\varrho^1 + f'(v)\langle b_2-b_1,\nabla\psi\rangle v\varrho^1\big]\,dx\,ds.$$

Предположим, что $\psi \geq 0$ и $f'' \geq 0$. С помощью неравенства Коши-Буняковского приходим к оценке

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v(x,t))\psi(x)\varrho^1(x,t)\,dx \leq f(1)\int_{\mathbb{R}^d} \psi\,d\nu +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |b_2-b_1|^2 f''(v)v^2\varrho^2\,dx\,ds +$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big[f(v)L_1\psi\big]\varrho^1\,dx\,ds +$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big[f'(v)\langle b_2-b_1,\nabla\psi\rangle v\varrho^1\big]\,dx\,ds.$$

Пусть последовательность функций ψ_N удовлетворяет условиям:

$$L_1\psi_N \to 0, \quad |\nabla\psi_N| \to 0, \quad \psi_N \to 1.$$

Заменяя в полученном выше неравенстве ψ на ψ_N и устремляя $N \to \infty$ приходим к неравенству

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(v(x,t))\varrho^1(x,t)\,dx \leq f(1) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |b_2-b_1|^2 f''(v)v^2\varrho^1\,dx\,ds.$$

При $f(v) = v\ln v$ получаем требуемую оценку.

Оценка энтропии уже является оценкой расстояния между вероятностными плотностями, но удобнее работать с L^1–расстоянием или полной вариацией.

Неравенство Пинскера–Кульбака–Чезара

Пусть $(X,\mathcal{A})$ — измеримое пространство, μ и ν — вероятностные меры, причем $\nu = f\mu$ и $f > 0$.

Предложение 1. *Имеет место неравенство*

$$\|\mu-\nu\|_{TV}^2 = \Big(\int |f-1|\,d\mu\Big)^2 \leq 2\int f\ln f\,d\mu.$$

Доказательство. Положим $E = \{x\colon f(x) \leq 1\}$, $\mu(E) = t$ и $\nu(E) = a$. Заметим, что $0 < a \leq t$ и равенство $t = 1$ влечет равенство $f(x) = 1$ для μ почти всех x. Пусть $0 < a < t < 1$. Имеем

$$\int |f-1|\,d\mu = \int_E (1-f)\,d\mu + \int_{X\setminus E} (f-1)\,d\mu = 2(t-a).$$

Применим информационное неравенство

$$\int f\ln f\,d\mu \geq \int f\ln g\,d\mu$$

с вероятностной плотностью $g(x) = \frac{a}{t}$ при $x \in E$ и $g(x) = \frac{1-a}{1-t}$ при $x \notin E$. Получаем

$$\int f\ln f\,d\mu \geq a\ln\tfrac{a}{t} + (1-a)\ln\tfrac{1-a}{1-t}.$$

Остается заметить, что правая часть оценивается снизу выражением $2(t-a)^2$. □

Следствие 1. *В условиях теоремы верна оценка*

$$\|\varrho^1(\,\cdot\,,t) - \varrho^2(\,\cdot\,,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \int_0^t \int |b_1(x,s)-b_2(x,s)|^2\varrho^2(x,s)\,dx\,ds.$$

Эта оценка имеет много разнообразных приложений: 1) единственность вероятностного решения, 2) разрешимость нелинейных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, когда коэффициент b имеет вид $b(x,\mu_t)$, 3) непрерывная и дифференцируемая зависимость решений от параметра, 4) сходимость к стационарному решению, 5) разрешимость системы уравнений теории игр среднего поля.

Стохастическое оптимальное управление

Пусть $b_t(x,u)$, $\sigma_t(x,u)$ непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию

$$|b_t(x,u)-b_t(y,v)|+|\sigma_t(x,u)-\sigma_t(x,v)|\le C\big(|x-y|+|u-v|\big).$$

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — вероятностное пространство, $\mathcal{F}_\sqcup$ — фильтрация, причем $\mathcal{F}_0$ содержит все события вероятности нуль, w_t — $\mathcal{F}_t$–броуновское движение. Для каждого прогрессивно измеримого процесса u_t (со значениями в некотором ограниченном множестве $U\subset\mathbb{R}^m$) можно построить решение x_t стохастического уравнения

$$dx_t=b_t(x_t,u_t)\,dt+\sigma_t(x_t,u_t)\,dw_t,\quad x_0=x.$$

Рассмотрим задачу о минимизации выражения

$$J(x,t,u)=\mathbb{E}\Big(\int_t^T L_s(x_s,u_s)\,ds+g(x_T)\Big)$$

с помощью выбора управления u_t. Функции $L_s(x,u)$ и $g(x)$ предполагаются непрерывными по совокупности переменных и липшицевыми по x.

Положим

$$v(x,t)=\inf_u J(x,t,u).$$

Как и в случае детерминированной задачи оптимального управления в стохастическом случае выполняется принцип динамического программирования: для всех $0\le t\le\tau\le T$

$$v(x,t)=\inf_u\mathbb{E}\Big(\int_t^\tau L_s(x_s,u_s)\,ds+v(x_\tau,\tau)\Big).$$

Предположим, что функция $v\in C_b^{2,1}$ и проделаем неформальные выкладки, приводящие к уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана.

По формуле Ито

$$v(x_{t+h},t+h)-v(x,t)=\int_t^{t+h}\big[v_t+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_s(x_s,u_s)D^2v)+\langle b_s(x_s,u_s),\nabla v\rangle\big]\,ds+\text{мартингал},\quad A_t=\sigma_t\sigma_t^*.$$

Следовательно, верно равенство

$$\inf_u\mathbb{E}\Big(\int_t^{t+h}L_s(x_s,u_s)+v_t+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_s(x_s,u_s)D^2v)+\langle b_s(x_s,u_s),\nabla v\rangle\,ds\Big)$$

Делим на h и устремляем h к нулю. Получаем

$$\inf_{u\in U}\Big\{L_t(x,u)+v_t(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t(x,u)D^2v(x,t))+\langle b_t(x,u),\nabla v(x,t)\rangle\Big\}=0.$$

Далее для простоты считаем, что $\sigma_t(x,u)=I$. Положим

$$H(x,t,p)=\sup_{u\in U}\Big\{-L_t(x,u)-\langle b_t(x,u),p\rangle\Big\}.$$

Функция v является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$-v_t-\frac{1}{2}\Delta v+H(x,t,\nabla v)=0$$

с условием $v(x,T)=g(x)$.

Достаточные условия оптимального контроля

Предположим, что w — решение класса $C_b^{2,1}$ задачи Коши

$$-w_t-\frac{1}{2}\Delta w+H(x,t,\nabla w)=0,\quad w(x,T)=g(x).$$

Предложение 2. *Всегда выполнено неравенство* $w(x,t) \le v(x,t)$. *Более того, если* sup *в определении функции* H *достигается на единственном значении* $u = u(x,t,p)$, *причем зависимость* u *от* x, t, p *липшицева, то* $u_t = u(x_t, t, \nabla w(x_t, t))$, *где*

$$dx_t = b_t(x_t, u(x_t, t, \nabla w(x_t, t)))\, dt + w_t, \quad x_0 = x,$$

является оптимальным контролем и $v(x,t) = w(x,t)$.

Доказательство. Пусть u_t — произвольный контроль и x_t — соответствующее решение стохастического уравнения. Применяя формулу Ито получаем равенство

$$\mathbb{E}\Big(\int_t^T L_s(x_s, u_s)\, ds + g(x_T) - w(x,t)\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_t^T L_s(x_s, u_s) + w_t + \frac{1}{2}\Delta w + \langle b_s(x_s, u_s), \nabla w\rangle\, ds\Big).$$

В силу определения функции H правая часть оценивается снизу выражением

$$\mathbb{E}\Big(\int_t^T w_t + \frac{1}{2}\Delta w - H(x_s, s, \nabla w)\, ds\Big) = 0.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$w(x,t) \le \mathbb{E}\Big(\int_t^T L_s(x_s, u_s)\, ds + g(x_T)\Big),$$

из которого следует оценка $w(x,t) \le v(x,t)$.

Если $u_s = u(x_s, s, \nabla w(x_s, s))$, то в проделанном рассуждении вместо оценки снизу можно написать равенство и в итоге получить $w(x,t) = v(x,t)$. $\square$

Отметим, что в условиях предложения

$$b_t(x_t, u(x_t, t, \nabla w(x_t, t))) = -H_p(x_t, t, \nabla w(x_t, t)).$$

Следовательно, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для распределения μ_t процесса x_t имеет вид

$$\partial_t \mu_t = \tfrac{1}{2}\Delta\mu_t + \operatorname{div}\big(H_p(x,t)\mu_t\big) = 0.$$