Спецкурс "Теория риска" (для 409 гр.)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 10

Москва, 18 ноября 2020 г.

С ДОБРЫМ УТРОМ!

План лекции

- Оптимальное перестрахование
- Порядок Лоренца и оптимальное перестрахование
- Порядок рационального перестраховщика
- Порядок эксцедента богатства
- Порядок рассеивания
- PH-преобразования

Оптимальное перестрахование

Проблемы разделения риска между двумя агентами в страховании были предметом исследования в течение последних 40 лет. В частности, изучалось упорядочивание случайных величин, полезное для изучения четырех способов перераспределения риска, широко используемых в прямом страховании (франшиза, вычитаемая франшиза, первый ущерб и сострахование).

При этом использовался стохастический порядок второй степени (second degree stochastic order), который в теории вероятностей называют также возрастающий вогнутый порядок (increasing concave order). Эти результаты легко переносятся на перестрахование. Интересны также работы о применении стохастических порядков при анализе франшиз (deductibles), а также о распространении понятий оптимальности на более широкие модели полезности (non-expected utility models).

Было доказано, что стоп-лосс договор оптимален с точки зрения цедента (передающей компании) в довольно широком классе договоров перестрахования.

Перейдем к проблеме выбора оптимального договора перестрахования для данного риска X (причем это может быть суммарный ущерб по всему портфелю страховщика).

Очевидно, что этот выбор зависит от оптимизационного критерия, который использует цедент (т.е. исходный страховщик).

Важными элементами такого критерия являются премия перестрахования и характеристики риска, остающегося на собственном удержании.

Мы увидим, что многие используемые критерии приводят к предпочтению, совместимому с порядком $<_{sl}$.

Итак, пусть X - некоторый риск. Предположим, что рынок перестрахования предлагает контракты, обладающие следующими свойствами. Выплата перестраховщика - это непрерывная неотрицательная неубывающая функция h размера ущерба, которая не может расти быстрее, чем сам ущерб.
Таким образом, речь идет о множестве $\mathcal{H}$ допустимых контрактов вида

$$\mathcal{H} = \{h(x) : h(0) = 0,\, 0 \le h'(x) \le 1\}.$$

Наиболее важные элементы этого класса

1) квотный договор $h(x) = \theta x$ для некоторого $\theta \in [0, 1]$,
2) договор стоп-лосс $h(x) = (x - d)^+$ для некоторого $d > 0$.

Если цедент уже принял решение о том, сколько он готов заплатить перестраховщику, это значит, что он выбирает элемент h из более узкого множества

$$\mathcal{H}_P = \{h \in \mathcal{H} : H(h(X)) = P\}.$$

Примем дополнительно, что премия перестрахования подсчитывается по принципу среднего с нагрузкой α и обозначим $\mu = P/(1 + \alpha)$. Это будет означать, что оптимизация производится в классе

$$\mathcal{H}_\mu = \{h \in \mathcal{H} : \mathsf{E}h(X) = \mu\}.$$

Обозначим через Z удерживаемый риск, т.е. $Z = X - h(X)$. Поскольку перестрахователь оптимизирует некоторую характеристику этого риска, то его критерий $c(\cdot)$ может рассматриваться как некоторый функционал на множестве функций распределения F_Z. Чаще всего ищется $\min c(F_Z)$ по некоторому подмножеству $\mathcal{H}$.

Определение

Говорят, что оптимизационный критерий сохраняет порядок стоп-лосс на $\mathcal{H}$, если для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ условие $Z_1 <_{sl} Z_2$ влечет $c(F_{Z_1}) \le c(F_{Z_2})$.

Замечание

Из теоремы (состоящей из 4 пунктов) вытекает, что критерий $c(\cdot)$ сохраняет порядок стоп-лосс на любом допустимом множестве контрактов, если его можно записать в виде $c(F_Z) = \mathsf{E}f(Z)$, где $f \in \mathcal{K}_2$ (т.е. выпуклая возрастающая).

Используя это замечание, нетрудно понять, что максимизация ожидаемой полезности (с вогнутой возрастающей функцией полезности) сохраняет порядок стоп-лосс.

Действительно, в этом случае речь идет о минимизации $\mathrm{E}[-u(x_0 - P - Z)]$, где x_0 - начальный капитал, а P - премия перестрахования. При фиксированной премии функция $f(z) = -u(x_0 - P - z)$ - выпуклая возрастающая.

Точно также минимизация дисперсии сохраняет порядок $<_{sl}$ на $\mathcal{H}_\mu$. В самом деле, согласно следствию (из упомянутой теоремы) при условии $\mathrm{E}Z_1 = \mathrm{E}Z_2$ из $Z_1 <_{sl} Z_2$ следует $\mathrm{D}Z_1 \leq \mathrm{D}Z_2$.

Вид оптимального договора

Для всех оптимизационных критериев, которые сохраняют порядок стоп-лосс, предпочтителен тот договор, согласно которому удерживается наименьший в смысле порядка стоп-лосс риск. Нахождению такого договора помогает следующая теорема.

Теорема

Пусть $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ два допустимых договора перестрахования, для которых $h_i'(x) < 1$, причем существует такое s, что $h_1(x) \le h_2(x)$ для $0 \le x \le s$ и $h_1(x) \ge h_2(x)$ при $x > s$. Далее, пусть X - риск, для которого $\mathrm{E}h_1(X) \ge \mathrm{E}h_2(X)$, тогда $Z_1 <_{sl} Z_2$.

Доказательство основано на проверке условий теоремы, обеспечивающей стоп-лосс порядок. Очевидно, что $\mathrm{E}Z_1 \le \mathrm{E}Z_2$.

Далее, функции $z_i(x) = x - h_i(x)$, $i = 1, 2$, строго возрастающие, так как $0 \le h_i'(x) < 1$. Поэтому имеет место равенство

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(z_i(X) \le z_i(x)) = F_{Z_i}(z_i(x)),\ i = 1, 2.$$

По условию теоремы $z_1(x) \ge z_2(x)$ при $x \le s$, следовательно,

$$F_{Z_2}(z_1(x)) \ge F_{Z_2}(z_2(x)) = F_{Z_1}(z_1(x)).$$

Аналогично, $F_{Z_2}(z_1(x)) \le F_{Z_1}(z_1(x))$ при $x > s$. Положив $z = z_1(x)$ и $c = z_1(s)$, получим выполнение требований теоремы о пересечении. $\square$

Конечно, не для любого класса допустимых договоров перестрахования можно найти такой, который пересекает все остальные элементы только один раз.

Если рассмотреть класс $\mathcal{H}$, т.е. предположить, что премия роли не играет, то оптимальным будет договор $h(x) = x$ (выгоднее все отдать в перестрахование).

Нетривиальный результат может быть получен для класса $\mathcal{H}_\mu$, здесь оптимальным окажется договор стоп-лосс.

Теорема

Для любого критерия, сохраняющего порядок $<_{sl}$, оптимальным в классе $\mathcal{H}_\mu$ является договор $h_d(x) = (x - d)^+$, где d определено условием $\mathrm{E}h_d(X) = \mu$.

Доказательство. Очевидно, что для любого $h \in \mathcal{H}_\mu$ выполнены неравенства $0 = h'_d(x) \leq h'(x)$ при $x < d$ и $1 = h'_d(x) \geq h'(x)$ при $x > d$. Таким образом, имеется не более одной точки пересечения $h_d(x)$ и $h(x)$. Однако воспользоваться только что доказанной теоремой и утверждать, что договор h_d оптимален мы не можем, так как условие $h'_d(x) < 1$ для всех x не выполнено. Тем не менее мы можем получить необходимый нам результат, непосредственно проверив выполнение условий теоремы о пересечении.

В самом деле, удерживаемый страховщиком риск при договоре h_d равен $Z_d(X) = X - h_d(X) = \min(X, d)$. Следовательно,

$$F_{Z_d}(t) = \mathrm{P}(Z_d(X) \leq t) = \begin{cases} F_X(t), & t < d, \\ 1, & t \geq d. \end{cases}$$

С другой стороны, известно, что $\mathrm{P}(Z(X) \leq X) = 1$ для любого договора перестрахования $h \in \mathcal{H}_\mu$. Поэтому имеют место неравенства $F_X(t) \leq F_{Z(X)}(t) \leq 1$, откуда с использованием вида $F_{Z_d}(t)$ получаем

$$\begin{array}{ll} F_{Z(X)}(t) \geq F_{Z_d}(t) & \text{при } t < d, \\ F_{Z(X)}(t) \leq F_{Z_d}(t) & \text{при } t \geq d. \end{array}$$

Тем самым условия критерия пересечений Карлина-Новикова выполнены, т.е. $Z_d(X) <_{sl} Z(X)$. $\square$

Итак, установлено, что в том случае, когда риск X представляет собой суммарный возможный ущерб по всему портфелю, согласно доказанной теореме договор стоп-лосс оптимален с точки зрения цедента (в предположении, что премия перестрахования фиксирована и подсчитывается по принципу среднего).

Эта теорема позволяет также установить оптимальность договора эксцедента убытка среди тех договоров, по которым выплаты перестраховщика определяются размерами ущербов по отдельным полисам, либо по отдельным искам. Более точно, предположим, что договор перестрахования имеет вид

$$T(X_1, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^{N} h(X_i), \quad \text{где } h \in \mathcal{H}_\mu. \tag{1}$$

Здесь рассматривается коллективная модель риска. Как обычно, N - число происшествий, не зависящее от последовательности $\{X_i\}_{i\geq 1}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, представляющих собой размеры отдельных убытков, а величина μ связана с размером премии следующим образом $P = (1+\alpha)\mathsf{E}N\mu$.

Теорема

Среди договоров перестрахования вида (1) оптимален договор $T_d = \sum_{i=1}^N (X_i - d)^+$, *где* d *определяется соотношением* $E(X - d)^+ = \mu$.

Доказательство. Очевидно, что для каждого индивидуального ущерба $h_d(x) = (x - d)^+$ дает наименьший (в смысле порядка стоп-лосс) удерживаемый риск.

В силу инвариантности этого порядка по отношению к суммированию случайного числа случайных слагаемых следует оптимальность T_d. $\square$

Порядок Лоренца и оптимальное перестрахование.

Сделаем следующие предположения.

Пусть премия перестрахования подсчитывается по принципу среднего (с нагрузкой α). Далее, пусть эта премия фиксирована и равна P, а цедент (соотв. перестраховщик) предпочитает среди всех договоров с одинаковыми затратами тот, которому соответствует наименьший в смысле порядка стоп-лосс риск, остающийся на собственном удержании, (соотв. наименьшая перестраховая выплата - reinsurance benefit). Перестраховая выплата $\phi(x)$ - это сумма, выплачиваемая перестраховщиком, если к перестрахователю поступило требование на выплату возмещения x. Обычное предположение в теории перестрахования состоит в том, что перестраховая выплата является непрерывной неотрицательной неубывающей функцией размера требования, т.е. $0 \leq \phi(x) \leq x$ для любого $x \in R^+$, причем эта функция никогда не растет быстрее, чем размер требования.

В то время как в перестраховании $\phi(x)$ является выплатой перестраховщика, в обычном страховании - это компенсация, выплачиваемая страховщиком. Поскольку предполагается, что премия перестрахования P подсчитывается по принципу среднего, то для любой ϕ выполнено условие $\mathsf{E}\phi(X) = P/(1+\alpha)$, где X - это риск, принятый на гарантию непосредственным страховщиком.

Два важных типа договоров перестрахования -

это квотный договор (quota-share treaty), для которого $\phi(x) = \theta x$, где $\theta = P/[(1+\alpha)\mathsf{E}X] \in [0,1]$,

и стоп-лосс договор, для которого $\phi(x) = (x-d)^+$, где приоритет (или франшиза) $d \geq 0$ такой, что $\mathsf{E}(X-d)^+ = P/(1+\alpha)$.

Точка зрения цедента

Естественно, что страховщик желает, чтобы удельный риск, остающийся на его долю после перестрахования, был меньше первоначального (в смысле $<_{cx}$). Иначе говоря, он хочет, чтобы

$$X - \phi(X) <_{Lor} X.$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой о преобразованиях, ослабляющих порядок Лоренца, рассмотрим следующий класс договоров

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(F_X, P) = \quad & \{\phi : R^+ \to R^+ | \mathsf{E}\phi(X) = P/(1+\alpha), \\ & \phi \text{ непрерывна, не убывает,} \\ & \text{почти всюду дифференцируема,} \\ & \phi'(x) \le 1 \text{ и } \phi(x) \le \phi'(x)x,\ \forall x > 0\}.\end{aligned}$$

Заметим, что класс $\mathcal{B}(F_X, P)$ состоит из всех тех компенсационных функций, для которых ни цедент, ни перестраховщик не выигрывают, если размер требования возрастает, при этом перестраховщик выплачивает неубывающую долю общего размера требования.
В актуарной литературе функции из класса $\mathcal{B}(F_X, P)$ называются функциями Вайда (Vajda). Для любого договора из этого класса удельный риск после перестрахования предпочтительнее первоначального для всех не склонных к риску лиц.

Теорема

Наименее желательным для цедента среди договоров класса $\mathcal{B}(F_X, P)$ является квотный.

Доказательство. Нам необходимо показать, что

$$X - \phi(X) <_{cx} (1-\theta)X \quad \text{для всех} \quad \phi \in \mathcal{B}(F_X, P) \qquad (2)$$

где $\theta = P/[(1+\alpha)\mathrm{E}X]$. Согласно теореме об ослаблении порядка Лоренца и определению класса $\mathcal{B}(F_X, P)$ для любой ϕ из этого класса $X - \phi(X) <_{Lor} X$. Из масштабной инвариантности порядка $<_{cx}$ можно получить, что отсюда следует

$$X - \phi(X) <_{cx} \left(1 - \frac{\mathrm{E}\phi(X)}{\mathrm{E}X}\right) X,$$

а значит, и (2). Тем самым доказательство закончено. □

Точка зрения перестраховщика

С другой стороны, если изучается оптимальность с точки зрения перестраховщика, то естественно предположить, что удельный ущерб для перестраховщика меньше (в смысле $<_{cx}$), чем для непосредственного страховщика, т.е. $\phi(X) <_{Lor} X$. В самом деле, если бы это было не так, то перестраховщик принял бы на гарантию весь риск. Для того чтобы воспользоваться теоремой об ослаблении порядка Лоренца, определим следующий класс $\mathcal{R}(F_X, P)$ договоров перестрахования ϕ, представляющих интерес для перестраховщика.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(F_X, P) = \quad & \{\phi : R^+ \to R^+ | \mathrm{E}\phi(X) = P/(1+\alpha), \\
& \phi \text{ непрерывна, не убывает,} \\
& \text{почти всюду дифференцируема,} \\
& \phi'(x) \le 1 \text{ и } \phi(x) \ge \phi'(x)x, \ \forall x > 0\}.
\end{aligned}
$$

Приведем альтернативное доказательство результата, касающееся оптимальности договора стоп-лосс с точки зрения цедента. Подчеркнем, что первоначальное доказательство справедливо для более широкого класса договоров, чем $\mathcal{R}(F_X, P)$.

Теорема

Среди договоров из класса $\mathcal{R}(F_X, P)$ наименее привлекательным для перестраховщика является договор стоп-лосс.

Доказательство. Нам необходимо установить, что

$$\phi(X) <_{cx} (X-d)^{+} \quad \text{для всех} \quad \phi \in \mathcal{R}(F_X, P),$$

где d выбрано таким образом, что $\mathsf{E}(X-d)^{+} = P/(1+\alpha)$. Используем следствие о порядке Лоренца, положив $g_1(x) = \phi(x)$ и $g_2(x) = (x-d)^{+}$. Мы получим, что для любого $\phi \in \mathcal{R}(F_X, P)$

$$\phi(X) <_{Lor} (X-d)^{+}, \tag{3}$$

поскольку $g_1 \circ g_2^{-1}(x) = \phi(x+d)$ очевидным образом неубывающая, а

$$\frac{\phi(x+d)}{x} = \frac{\phi(x+d)}{x+d}\frac{x+d}{x}$$

невозрастающая как произведение двух невозрастающих функций. Требуемый результат вытекает из (3), поскольку при равенстве математических ожиданий порядок Лоренца эквивалентен выпуклому. $\square$

Замечание

Интересно отметить, что квотный договор принадлежит обоим классам $\mathcal{B}(F_X, P)$ и $\mathcal{R}(F_X, P)$. Поэтому, опять-таки из следствия о порядке Лоренца получается, что с точки зрения перестраховщика

$$\alpha X <_{cx} \phi(X) <_{cx} (X - d)^+ \quad \text{для любого} \quad \phi \in \mathcal{R}(F_X, P).$$

Порядок рационального перестраховщика

Предположим, что выплата перестраховщика - непрерывная неотрицательная выпуклая и почти всюду дифференцируемая функция ϕ размера ущерба x, далее, $0 \leq \phi(x) \leq x$ для всех $x \in R^+$ и $\phi'(x) \leq 1$, т.е. вместо условия Вайда требуется выпуклость.

Условие выпуклости ϕ является естественным в контексте перестрахования. В самом деле, полезный для цедента договор перестрахования должен обеспечивать ему высокий размер перестраховых выплат, если велик уровень ущерба.

Наглядно, неубывающие выпуклые функции на R^+ - это как раз те функции, которые принимают свои относительно наибольшие значения в области (b, ∞) для некоторого $b \in R^+$.

Рассмотрим перестраховщика, которому предложены два риска X и Y , причем $X <_{sl} Y$. Тогда он предпочтет перестраховать X, поскольку для любой функции выплат ϕ

$$X <_{sl} Y \Rightarrow \phi(X) <_{sl} \phi(Y)$$

(это утверждение справедливо, так как суперпозиция двух неубывающих выпуклых функций принадлежит тому же классу). Если перестраховщик рассматривает дисперсию как важный фактор риска, его может интересовать, будет ли выполнено неравенство

$$\mathrm{D}\phi(X) \le \mathrm{D}\phi(Y) \quad \text{любой} \quad \phi.$$

Еще один порядок рисков ($<_{re}$), отражающий предпочтение любого "рационального" перестраховщика, рассматривающего дисперсию как существенный параметр риска, может быть определен следующим образом.

Определение

$X <_{re} Y$, если одновременно

$$\phi(X) <_{sl} \phi(Y) \ \ \textit{и} \ \ \mathrm{D}\phi(X) \le \mathrm{D}\phi(Y) \tag{4}$$

выполнено для всех неубывающих выпуклых функций ϕ, для которых дисперсии существуют.

Отметим, что, вообще говоря, здесь $\mathrm{E}\phi(X) \neq \mathrm{E}\phi(Y)$. (В противном случае неравенство для дисперсий автоматически вытекает из порядка стоп-лосс.)

Порядок $<_{re}$ в прикладной теории вероятностей обозначается $<_{icx:icx}$.

Порядок эксцедента богатства

Порядок эксцедента богатства (excess wealth order) задается поточечным сравнением одноименных преобразований. Пусть X - неотрицательная случайная величина с функцией распределения F_X. Связанное с F_X (нормированное) преобразование эксцедента богатства W_X определяется следующим образом

$$W_X(u) = \int_{F_X^{-1}(u)}^{\infty} (1 - F_X(x))dx \left(\int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx \right)^{-1}$$

для $u \in [0, 1]$.

С экономической точки зрения, когда X представляет собой доход, $W_X(u)$ может рассматриваться как доля избыточного богатства $100(1 - u)\%$ наиболее богатых членов популяции. Как бы дополнительным к W_X является преобразование T_X, определяемое для $u \in [0, 1]$ следующим образом

$$T_X(u) = \int_0^{F_X^{-1}(u)} (1 - F_X(x))dx \left(\int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx \right)^{-1}.$$

В страховой деятельности эти преобразования интерпретируются следующим образом: W_X (соотв. T_X) описывают ситуацию для перестраховщика (соотв. цедента) в договоре стоп-лосс, когда уровень собственного удержания d^u выбран таким образом, что вероятность иметь размер ущерба меньше d^u равна u (т.е. $F_X^{-1}(u) = d^u$). Очевидно, что L_X, W_X и T_X тесно связаны между собой (более подробно об этом написано в ряде статей, кто заинтересуется, можете мне написать по поводу ссылок).

Определение

Говорят, что X меньше Y в смысле эксцедента богатства (обозначается $X <_{ew} Y$), если

$$W_X(u) \leq W_Y(u) \text{ для любого } u \in [0,1]. \tag{5}$$

Этот порядок, в слегка модифицированном виде, также называется right spread order. Поскольку $T_X(u) + W_X(u) = 1$ для всех $u \in [0,1]$, легко получить, что

$$X <_{ew} Y \Leftrightarrow T_X(u) \geq T_Y(u) \text{ для всех } u \in [0,1]. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6), приводят к следующей актуарной интерпретации этого порядка. Если $X <_{ew} Y$, то перестраховщик предпочтет стоп-лосс договор по риску X с приоритетом d_1^u аналогичному договору по риску Y с приоритетом d_2^u, где приоритеты выбраны с помощью соотношений $F_X^{-1}(u) = d_1^u$ и $F_Y^{-1}(u) = d_2^u$, поскольку для риска X отношение ожидаемых выплат перестраховщика к ожидаемому размеру ущерба меньше, чем для Y, т.е.

$$\frac{\mathrm{E}(X - d_1^u)^+}{\mathrm{E}X} \leq \frac{\mathrm{E}(Y - d_2^u)^+}{\mathrm{E}Y} \quad \text{для всех } u \in [0, 1]. \tag{7}$$

Если предположить, что оба, перестрахователь и перестраховщик, производят тарификацию на основе принципа среднего (хотя, возможно, с различной нагрузкой), то (7) означает сравнение отношений премии перестрахования к исходной премии для двух рисков. Наоборот, прямой страховщик предпочтет отдать в перестрахование риск Y.

В случае совпадающих средних, $EX = EY$, упорядочены соответствующие премии перестрахования, так как (7) превращается в неравенство $E(X - d_1^u)^+ \le E(Y - d_2^u)^+$ для всех $u \in [0,1]$. Имеет место даже более общий результат, чем (7).

Задача. Показать, что если $EX = EY$ и $X <_{ew} Y$, то

$$(X - d_1^u)^+ <_{sl} (Y - d_2^u)^+ \quad \text{для всех } u \in [0,1]. \tag{8}$$

Еще одно замечательное свойство порядка $<_{ew}$ состоит в следующем.

Теорема

Если $EX = EY$ и $X <_{ew} Y$, тогда из $E\phi(Y) = E\phi(X + \pi)$ следует, что

$$E\varphi(X + \pi) \le E\varphi(Y) \tag{9}$$

для любых неубывающих выпуклых функций полезности таких, что $\varphi = \psi \circ \phi$, где ψ неубывающая выпуклая (т.е. φ - это функция полезности лица, менее склонного к риску, чем лицо с функцией полезности ϕ).

Этот результат допускает естественную интерпретацию с актуарной точки зрения. В самом деле, π - это премия, которую лицо, имеющее функцию полезности ϕ, готово заплатить, чтобы заменить ущерб Y ущербом X. Тогда (9) показывает, что лицо менее склонное к риску, т.е. имеющее функцию полезности $\varphi = \psi \circ \phi$ предпочтет $X + \pi$, а не Y.

Доказано также следующее утверждение.

Теорема

Если у рисков X и Y одинаковое среднее, то

$$X <_{ew} Y \Rightarrow X <_{cx} Y, \tag{10}$$

но обратное неверно.

Другими словами, в силу эквивалентности $<_{cx}$ и $<_{Lor}$ при равных средних, порядок $<_{ew}$ является в этом случае достаточным условием как для $<_{cx}$, так и для $<_{Lor}$.

Докажем теперь достаточное условие выполнения $X <_{re} Y$.

Теорема

Если $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ *и* $X <_{ew} Y$, *то* $X <_{re} Y$.

Доказательство. Прежде всего, условие $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ вместе с $X <_{ew} Y$, как мы только что видели, гарантирует $X <_{cx} Y$, а значит, и $X <_{sl} Y$, поэтому имеет место и первая часть условий (4).

Далее, в работе M.Shaked, J.G.Shantikumar доказано, что для двух непрерывных рисков X и Y с равными средними

$$X <_{ew} Y \Rightarrow cov[\phi_1(X), \phi_2(X)] \leq cov[\phi_1(Y), \phi_2(Y)] \qquad (11)$$

для всех неубывающих и выпуклых функций ϕ_1, ϕ_2, отображающих R^+ в R, для которых существуют ковариации. В частности, из (11) следует, что $\mathrm{D}\phi(X) \leq \mathrm{D}\phi(Y)$ для всех неубывающих выпуклых функций $\phi : R^+ \to R$, для которых дисперсии существуют. Тем самым доказательство закончено. □

Порядок рассеивания

Пусть F_X и F_Y - это функции распределения соответственно рисков X и Y. Введем еще одно отношение порядка, известное в статистике как порядок рассеивания (dispersive order).

Определение

Говорят, что $X <_{disp} Y$, *если* $F_Y^{-1}(x) - F_X^{-1}(x)$ - *неубывающая функция* x *на* $[0, 1]$.

Упорядочивание рисков с помощью $<_{disp}$, очевидно, соответствует сравнению рисков по их изменчивости, поскольку означает, что разность между любыми двумя квантилями у X будет меньше, чем у Y, т.е.

$$X <_{disp} Y \Leftrightarrow F_X^{-1}(u_2) - F_X^{-1}(u_1) \leq F_Y^{-1}(u_2) - F_Y^{-1}(u_1)$$

для $u_1 \leq u_2$ из $[0, 1]$.

Порядок $<_{disp}$ обладает многими полезными свойствами, (см., напр., Shaked, Shantikumar). Показано, что $<_{disp}$ обладает интерпретацией, похожей на (9) для $<_{ew}$. Более точно, если $X <_{disp} Y$ и $\mathrm{E}\phi(Y) = \mathrm{E}\phi(X+\pi)$, тогда справедливо (9) для функций φ, соответствующих большему неприятию риска, чем для ϕ. Наконец, показано, что

$$X <_{disp} Y \Leftrightarrow (X - d_1^u)^+ <_{st} (Y - d_2^u)^+ \quad \text{для всех } u \in [0,1],$$

т.е. соотношение, похожее на (8) для $<_{ew}$.

Порядок $<_{disp}$ достаточно сильный. Например, легко видеть, что имеет место следующий результат.

Лемма

Если левые концы носителей X и Y совпадают (и равны 0), то

$$X <_{disp} Y \Rightarrow X <_{st} Y.$$

Доказательство. В самом деле, при таких предположениях

$$F_Y^{-1}(u) - F_X^{-1}(u) \geq F_Y^{-1}(0) - F_X^{-1}(0) = 0,$$

поэтому $F_Y^{-1}(u) \geq F_X^{-1}(u)$ для всех $u \in [0,1]$, откуда вытекает, что $F_X(t) \geq F_Y(t)$ для всех $t \in R^+$. $\square$

С другой стороны, в Sh. Sh. доказано, что

$$X <_{disp} Y \Rightarrow X <_{ew} Y.$$

PH-преобразования

Стохастический порядок может быть использован для получения (в неявном виде) страховой нагрузки. В самом деле, если $X <_{st} Y$, то $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$. Предлагается вместо исходного риска рассмотреть риск Y и применить к нему "принцип эквивалентности" , т.е. подсчитать соответствующую ему чистую премию. Записывая

$$\mathrm{E}Y = \int_0^\infty (1 - F_Y(t))dt$$

$$= \left(1 + \frac{\int_0^\infty (F_X(t) - F_Y(t))dt}{\int_0^\infty (1 - F_X(t))dt}\right) EX,$$

мы видим, что полученное выражение представляет собой применение принципа среднего со страховой нагрузкой

$$\alpha = \int_0^\infty (F_X(t) - F_Y(t))dt \Big/ \int_0^\infty (1 - F_X(t))dt,$$

которая неотрицательна в силу стохастического доминирования Y.

Таким образом, мы видим, что используемые в страховании жизни таблицы смертности второго рода (valuation tables) есть ни что иное, как переход от чистой премии к принципу среднего. Специальный выбор случайной величины Y предложен в работе Wang'a. Этот способ называется методом PH-преобразований (proportional hazards transforms).

Происхождение такого названия можно объяснить следующим образом. При имущественном страховании (или от несчастного случая) размер риска (ущерба) X - это неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F_X(t) = \mathrm{P}(X \leq t)$. Следовательно, размер ущерба может рассматриваться как "время жизни". Если распределение X абсолютно непрерывно, то можно ввести "интенсивность смертности" (или отказа) $\lambda_X(t) = F_X'(t)(1 - F_X(t))^{-1}$.

Неблагоприятная ситуация для страховщика означает, что реализовавшийся ущерб оказался больше ожидаемого. Иначе говоря, "время жизни" длиннее среднего, а "интенсивность смертности" ниже, чем ожидалось (т.е. ситуация противоположна той, что возникает при страховании жизни, когда опасность представляет высокая смертность).

Для того чтобы обезопасить себя, при подсчете премии страховщик может (пропорционально) уменьшить интенсивность и рассмотреть (при $t \geq 0$)

$$\lambda_Y(t) = \lambda_X(t)/\rho, \ \rho > 1, \tag{12}$$

вводя таким образом новую случайную величину Y, у которой согласно связи между хвостом ф.р. и интенсивностью смертности

$$1 - F_Y(t) = (1 - F_X(t))^{1/\rho}. \tag{13}$$

Определение

Отображение $\Pi_\rho : X \to Y$, где функция распределения F_Y определена с помощью (13), называется PH-преобразованием (пропорциональное изменение интенсивности).

Замечание

Следует отметить, что условие (13) является более общим, чем (12), так как оно применимо не только к абсолютно непрерывным распределениям. Если же X имеет плотность $f_X(t)$, то у Y также существует плотность $f_Y(t) = [\rho^{-1}\bar{F}_X(t)^{1/\rho-1}]f_X(t)$. Следовательно, PH-преобразование задается весовой функцией $g(t) = (1/\rho)\bar{F}_X(t)^{1/\rho-1}$, которая растет с ростом t, т.е. неблагоприятным событиям придается больший вес.

Определение

Скорректированной по риску премией (risk-adjusted premium) для X называется

$$\pi_\rho(X) = \mathsf{E}[\Pi_\rho(X)] = \int_0^\infty (1 - F_X(t))^{1/\rho} dt, \qquad (14)$$

величина $\rho \geq 1$ носит название индекса неприятия риска.

Если $\rho = 1$, то получаем чистую премию $\pi_1(X) = \mathsf{E}X$.

Лемма

Скорректированная премия сохраняет порядок в смысле смертности, т.е. $X <_{mor} Y \Rightarrow \pi_\rho(X) \leq \pi_\rho(Y)$.

Доказательство очевидно в силу определения π_ρ. $\square$

Замечание

Метод PH-преобразований согласуется с вышеупомянутой практикой в страховании жизни, когда при подсчете премий смертность q_x увеличивается на несколько процентов. Поскольку $q_x \approx \lambda(x)$, то это значит, что вместо $\lambda(x)$ рассматривается $\alpha\lambda(x)$ с $\alpha > 1$ (т.е. берется Π_ρ с $0 < \rho < 1$).

Перейдем к рассмотрению свойств премии π_ρ для $\rho \geq 1$.

Лемма

Скорректированная премия дает положительную нагрузку, точнее,

$$\mathsf{E}X \leq \pi_\rho(X) \leq \max_\omega X(\omega),$$

$$\lim_{\rho\to 1} \pi_\rho(X) = \mathsf{E}X, \quad \lim_{\rho\to\infty} \Pi_\rho(X) = \max_\omega X(\omega).$$

Доказательство очевидным образом следует из (14). $\square$

Лемма

Если $\mathsf{P}(X = c) = 1$, *то* $\pi_\rho(X) = c$.

Доказательство. Если риск X вырожденный, то

$$1 - F_X(t) = \begin{cases} 1, & t < c, \\ 0, & t \geq c. \end{cases}$$

Поэтому

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))^{1/\rho} dt = \int_0^c dt = c. \square$$

Так, скорректированная премия не дает неоправданной нагрузки.

Лемма

Премия π_ρ масштабно инвариантна, т.е. $\pi_\rho(aX) = a\pi_\rho(X)$ для любого $a > 0$.

Доказательство. Пусть $Z = aX$, тогда $F_Z(t) = F_X(t/a)$.
Следовательно,

$$\pi_\rho(Z) = \int_0^\infty (1 - F_X(t/a))^{1/\rho} dt = a \int_0^\infty (1 - F_X(u))^{1/\rho} du = a\pi_\rho(X). \square$$

Таким образом, размер премии не зависит от выбора денежной единицы.

Из масштабной инвариантности вытекает также следующий результат, полезный для сострахования:

$$\pi_\rho(X) = \pi_\rho(aX) + \pi_\rho((1-a)X).$$

Лемма

Премия π_ρ инвариантна относительно сдвига, т.е.
$\pi_\rho(X+b) = \pi_\rho(X) + b$.

Доказательство. Пусть $Z = X + b$, тогда $F_Z(t) = F_X(t-b)$. Поэтому имеем

$$\pi_\rho(Z) = \int_0^b dt + \int_b^\infty (1 - F_X(t-b))^{1/\rho} dt = b + \pi_\rho(X). \square$$

Иначе говоря, 2 доказанные леммы показывают линейность скорректированной премии: $\pi_\rho(aX+b) = a\pi_\rho(X) + b$.

Теорема

Скорректированная премия сохраняет стохастический порядок:
$X <_{st} Y \Rightarrow \pi_\rho(X) \le \pi_\rho(Y)$.

Доказательство легко следует из (14), так как
$X <_{st} Y \Leftrightarrow F_X(t) \ge F_Y(t) \forall t$. $\square$

Лемма

Премия $\pi_\rho(X)$ возрастающая функция ρ:

$$\rho_1 > \rho_2 \geq 1 \;\Rightarrow\; \pi_{\rho_1} > \pi_{\rho_2}.$$

Доказательство очевидно, так как $\bar{F}_X(t)^{1/\rho_1} > \bar{F}_X(t)^{1/\rho_2}$ (для тех t, для которых $\bar{F}_X(t) < 1$), следовательно, $\pi_{\rho_1} > \pi_{\rho_2}$. $\square$

Значит, для одного и того же риска X скорректированная премия будет больше для того, кто менее склонен к риску (т.е. имеет больший индекс ρ неприятия риска.) Таким образом, премия $\pi_\rho(X)$ отражает не только "относительную опасность" риска, но и отношение лица, принимающего решение, к имеющейся неопределенности.

Считается, что ρ_0(полисодержателя)$>$ ρ_1(страховщика)$>$ ρ_2(перестраховщика). Поэтому для заданного риска X имеется соотношение $\pi_{\rho_0}(X) > \pi_{\rho_1}(X) > \pi_{\rho_2}(X)$, что позволяет объяснить механизм страхования (и перестрахования) без использования функций полезности.

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим три риска с одним и тем же средним b: X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2b]$ (т.е. $\bar{F}_X(t) = 1 - t/(2b)$ при $0 \le t \le 2b$), Y - показательное с параметром b^{-1} ($\bar{F}_Y(t) = \exp(-t/b)$ при $t \ge 0$), Z - распределение Парето ($\bar{F}_Z(t) = b^2/(b+t)^2$ при $t \ge 0$). Тогда мы получим

$$\pi_\rho(X) = \frac{2\rho}{\rho+1}b,\ \pi_\rho(Y) = \rho b,\ \pi_\rho(Z) = \begin{cases} \rho b(2-\rho)^{-1}, & \rho < 2, \\ \infty, & \rho \ge 2. \end{cases}$$

Положив $\rho_0 = 1,8$, $\rho_1 = 1,5$ и $\rho_2 = 1,2$, мы получим следующие численные результаты:

ρ	X	Y	Z
1,2	1,09b	1,2b	1,5b
1,5	1,2b	1,5b	3,0b
1,8	1,29b	1,8b	9,0b

Покажем теперь, что наличие неизвестного параметра приводит к дополнительной нагрузке.

Теорема

Пусть распределение X зависит от (случайного) параметра θ, тогда $\pi_\rho(X) \le \mathsf{E}_\theta \pi_\rho(X|\theta)$.

Доказательство. Применяя неравенство Йенсена к вогнутой функции $h(x) = x^{1/\rho}$, получим

$$\mathsf{E}_\theta h(\bar{F}_X(t|\theta)) \le h(\mathsf{E}_\theta \bar{F}_X(t|\theta)) = h(\bar{F}_X(t)).$$

Отсюда следует

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty h(\bar{F}_X(t))dt \ge \int_0^\infty \mathsf{E}_\theta h(\bar{F}_X(t|\theta))dt = \mathsf{E}_\theta \pi_\rho(X|\theta),$$

причем если у θ невырожденное распределение, то имеет место строгое неравенство. $\square$

Следствие

Пусть $Y \neq Z$, а X - их смесь с весами соответственно a и $1-a$ $(0 < a < 1)$, тогда при $\rho > 1$

$$\pi_\rho(X) > a\pi_\rho(Y) + (1-a)\pi_\rho(Z).$$

Наконец, получим результат, полезный для перестрахования.

Определение

Назовем $(a, a+h]$-траншем (layer) риска X случайную величину $J(a, a+h](X) = \min(h, (X-a)^+)$.

Если риск X фиксирован, то для краткости будем писать $J(a, a+h]$. Очевидно, что

$$\bar{F}_{J(a,a+h]}(t) = \begin{cases} \bar{F}_X(t+a), & 0 \le t < h, \\ 0, & t \ge h. \end{cases} \tag{15}$$

Теорема

Если риск X разделен на транши $(x_i; x_{i+1}]$, $i \geq 0$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, т.е. $X = \sum_{i=0}^{\infty} J(x_i, x_{i+1}]$, то скорректированная премия X равна сумме соответствующих премий траншей

$$\pi_\rho(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_\rho(J_{(x_i, x_{i+1}]}).$$

Доказательство. В силу (15) мы имеем

$$\pi_\rho(J(x_i, x_{i+1}]) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{F}_X(t)^{1/\rho} dt.$$

Суммируя эти выражения по i, получим необходимый результат

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_\rho(J(x_i, x_{i+1}]) = \int_0^{\infty} \bar{F}_X(t)^{1/\rho} dt = \pi_\rho(X). \square$$

В работе G.G.Venter показано, что единственный принцип подсчета премий, обладающий аддитивностью (при разделе на транши), основан на преобразованных распределениях, при этом цена каждого транша подсчитывается как средний ущерб по этому траншу (для преобразованного распределения). При этом было предложено использовать масштабное преобразование $Y = cX$ или степенное $Y = X^\eta$. Однако второе обладает серьезным недостатком: результат зависит от выбора денежной единицы, так как $(aX)^\eta = a^\eta X^\eta$.

Замечание

Wang'ом был рассмотрен более широкий класс преобразований, включающий как частный случай PH-преобразование. Основная идея состоит в том, что надо преобразовывать не саму случайную величину X, а хвосты ее распределения. В самом деле, если речь идет о чистой премии транша $(t, t + dt]$, то с точностью до бесконечно малых она равна $\bar{F}_X(t)dt$, т.е. $\bar{F}_X(t)$ можно интерпретировать как "плотность чистой стоп-лосс премии". Поэтому естественно рассматривать "скорректированную" по риску плотность вида $\bar{F}_Y(t) = g[\bar{F}_X(t)]$ и подсчитывать премию как

$$H(X) = \int_0^\infty g[\bar{F}_X(t)]dt. \qquad (16)$$

Если предположить, что $g(u)$ - возрастающая вогнутая функция, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, то указанный принцип обладает целым рядом полезных свойств.

Замечание

Предложенный Denneberg'ом принцип абсолютного отклонения (от медианы) является частным случаем принципа (16) с

$$g(x) = \begin{cases} (1+r)x, & 0 \le x < 0,5, \\ r + (1-r)x, & 0,5 \le x \le 1. \end{cases}$$

Если $\bar{F}_X(0) < 0,5$, то $H(X) = (1+r)\mathrm{E}X$, т.е. получается то же самое, что и для принципа среднего.

Принцип Gini, также рассмотренный в работе Denneberg'a, получится если взять квадратичную функцию

$$g(x) = (1+r)x - rx^2, \, 0 \le r \le 1.$$