

# Спецкурс “Теория риска” (для 409 гр.)

Проф. Екатерина Вадимовна  
Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 3

Москва, 23 сентября 2020 г.

# С НОВЫМ УЧЕБНЫМ ГОДОМ!



- Теорема Панджера
- Дополнительные результаты для числа страховых случаев
- Суммарный размер ущерба
- Динамические модели
- Модель Крамера-Лундберга и вероятность разорения

# Теорема Панджера

позволяет подсчитывать составные распределения в том случае, когда первичное распределение из класса  $(a, b, 0)$ .

Обозначим  $g_n = P(\tilde{N} = n)$ ,  $p_n = P(N = n)$  и  $f_n = P(M = n)$ .

Используя формулу полной вероятности, запишем

$$\begin{aligned} g_n = P(\tilde{N} = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\tilde{N} = n | N = k) P(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(M_1 + \dots + M_k = n) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f_n^{k*}, \end{aligned}$$

где  $f_n^{k*}$ ,  $n \geq 0$ , это  $k$ -кратная свертка распределения  $\{f_n\}$  с самим собой.

# Теорема Панджера

## Теорема (Panjer)

Пусть распределение  $N$  принадлежит классу  $(a, b, 0)$ , тогда

$$g_n = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^n \left( a + \frac{bj}{n} \right) f_j g_{n-j}, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Рекуррентное соотношение может быть переписано в виде

$$kp_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на  $[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z)$  и просуммируем по  $k$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kp_k [P_2(z)]^{k-1} P_2'(z) &= a \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)p_{k-1} [P_2(z)]^{k-1} P_2'(z) \\ &+ (a+b) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} [P_2(z)]^{k-1} P_2'(z). \end{aligned}$$

Поскольку  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k [P_2(z)]^k$ , полученное уравнение можно переписать в виде

$$P'(z) = a \sum_{k=0}^{\infty} k p_k [P_2(z)]^k P_2'(z) + (a + b) \sum_{k=0}^{\infty} p_k [P_2(z)]^k P_2'(z).$$

В свою очередь последнее соотношение показывает, что

$$P'(z) = a P'(z) P_2(z) + (a + b) P(z) P_2'(z).$$

Разложив обе части по степеням  $z$ , приравняем коэффициенты при  $z^{n-1}$  и получим

$$n g_n = a \sum_{j=0}^n (n-j) f_j g_{n-j} + (a+b) \sum_{j=0}^n j f_j g_{n-j}.$$

Преобразуем правую часть получившегося соотношения, выделив слагаемые с  $j = 0$  и перегруппировав остальные,

$$\begin{aligned} &anf_0g_n + a \sum_{j=1}^n (n-j)f_jg_{n-j} + (a+b) \sum_{j=1}^n jf_jg_{n-j} \\ &= anf_0g_n + an \sum_{j=1}^n f_jg_{n-j} + b \sum_{j=1}^n jf_jg_{n-j}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$g_n = af_0g_n + \sum_{j=1}^n \left( a + \frac{bj}{n} \right) f_jg_{n-j},$$

что эквивалентно требуемому результату.  $\square$

# Значение в нуле

Для использования рекуррентной процедуры необходимо знать величину  $g_0$ .

Как показывает следующая лемма, подсчет  $g_0$  не использует предположение, что первичное распределение из класса  $(a, b, 0)$ .

## Лемма

*Для любого составного распределения  $g_0 = P_1(f_0)$ , где  $P_1(z)$  производящая функция первичного распределения, а  $f_0$  - вероятность нулевого значения для вторичного распределения.*

Доказательство. Результат немедленно вытекает из формулы полной вероятности

$$g_0 = \sum_{k=0}^{\infty} P(M_1 + \dots + M_k = 0)P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0^k P(N = k) = P_1(f_0).$$



# Задачи

Нетрудно проверить, что для составного пуассоновского распределения

$$g_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^n j f_j g_{n-j}.$$

Если первичное распределение принадлежит классу  $(a, b, 1)$ , то справедливо соотношение

$$g_n = \frac{[p_1 - (a + b)p_0]f_n + \sum_{j=1}^n \left(a + \frac{bj}{n}\right) f_j g_{n-j}}{1 - af_0}.$$

# Специальный вид первичного распределения

## Теорема

*Пусть первичное распределение имеет производящую функцию, зависящую от параметра  $\theta$  следующим образом*

$$P_1(z; \theta) = B[\theta(z - 1)],$$

*где  $B(z)$  не зависит от параметра  $\theta$ , хотя может зависеть от других параметров. Тогда производящая функция составного распределения  $P(z) = P_1[P_2(z); \theta]$  может быть переписана в виде*

$$P(z) = P_1[P_2^T(z); \theta(1 - f_0)],$$

*где  $P_2^T(z)$  соответствует условному распределению на положительных целых числах, т.е. урезанному в нуле вторичному распределению.*

Воспользуемся тем, что любая производящая функция  $P_2(z)$  может быть записана в виде

$$P_2(z) = f_0 + (1 - f_0)P_2^T(z).$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} P(z) &= P_1[P_2(z); \theta] = P_1[f_0 + (1 - f_0)P_2^T(z); \theta] \\ &= B\{\theta[f_0 + (1 - f_0)P_2^T(z) - 1]\} = B\{\theta(1 - f_0)[P_2^T(z) - 1]\} \\ &= P_1[P_2^T(z); \theta(1 - f_0)]. \end{aligned}$$

## Замечание

Распределения класса  $(a, b, 0)$  удовлетворяют условию доказанной теоремы.

В самом деле, для **биномиального**  $Bi(n, q)$  распределения

$$B(z) = (1 + z)^n, \quad \theta = q,$$

для **пуассоновского**  $Poi(\lambda)$  соответственно

$$B(z) = e^z, \quad \theta = \lambda,$$

а для **отрицательно биномиального**  $NB(\alpha, \beta)$  имеем

$$B(z) = (1 - z)^{-\alpha}, \quad \theta = \beta.$$

# Отрицательно биномиальное распределение

является, с одной стороны, **пуассоновско-логарифмическим**, т.е. составным,

с другой стороны, его можно получить **усреднением по параметру** пуассоновского распределения, если структурная функция имеет **гамма-распределение**.

Пусть плотность распределения структурной функции

$$u_{\alpha,\beta}(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\theta/\beta},$$

тогда

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \int_0^{\infty} \frac{\theta^{k+\alpha-1}}{k!\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-\theta(1+1/\beta)} d\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k!\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^k}{(1 + \beta)^{\alpha+k}} = C_{k+\alpha-1}^k \frac{\beta^k}{(1 + \beta)^{k+\alpha}}, \end{aligned}$$

что очевидным образом совпадает с  $NB(\alpha, \beta)$ .

# Замечание

Как уже говорилось, усреднение распределения по параметру полезно для учета неоднородности портфеля страховой компании.

Сейчас мы покажем, что если рассматривать усредненные пуассоновские распределения, то при определенных предположениях мы не получаем ничего нового по сравнению с составными пуассоновскими распределениями.

## Теорема

*Усредненное по параметру пуассоновское распределение является также и составным пуассоновским распределением, если распределение параметра безгранично делимо.*

*Если предположить, что производящая функция вторичного распределения  $P_2(z)$  такова, что  $P_2(0) = 0$ , то она единственна.*

## Доказательство.

Итак, нам известно, что производящая функция

$$P(z) = \int_0^{\infty} e^{\lambda\theta(z-1)} dU(\theta),$$

где распределение  $U(\cdot)$  безгранично делимо. Отметим, что масштабный параметр  $\theta$  введен здесь для удобства записи (т.е. мы считаем, что параметр пуассоновского распределения имеет вид  $\lambda\Theta$ ,  $U(\cdot)$  - распределение  $\Theta$ ). Нетрудно понять, что справедливо равенство

$$P(z) = L_{\Theta}[\lambda(1 - z)],$$

где преобразование Лапласа параметра  $\Theta$

$$L_{\Theta}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\theta} dU(\theta).$$

В силу безграничной делимости распределения  $\Theta$  функция

$$L_n(z) = L_{\Theta}^{1/n}(z)$$

также является преобразованием Лапласа некоторого распределения.

Комбинируя полученные формулы, получаем, что

$$P^{1/n}(z) = L_n[\lambda(1 - z)],$$

причем  $P^{1/n}(z)$  снова соответствует пуассоновскому распределению усредненному по параметру. Поскольку тем самым исходное распределение оказалось безгранично делимым, остается воспользоваться теоремой о его представлении, согласно которой

$$P(z) = e^{\lambda[P_2(z)-1]}.$$

Если  $P_2(0) = 0$ , то  $\lambda = -\ln p_0$  и  $P_2(z) = 1 + \lambda^{-1} \ln P(z)$ .  $\square$

### Замечание

*Как показывает теорема, неслучайно, что отрицательно биномиальное распределения является одновременно и составным, и усредненным по параметру пуассоновским распределением, поскольку гамма-распределение, по которому производится усреднение, является безгранично делимым.*



Дальнейшее расширение набора распределений для описания числа требований может производиться путем **рассмотрения классов**  $(a, b, m)$  при  $m > 1$ . Для них рекуррентная формула задает вероятности, начиная с  $p_m$ . Следовательно, такие распределения зависят от  $m + 2$  параметров.

Другой путь - **использование составных распределений** в качестве первичных и вторичных, при этом производящая функция будет иметь вид

$$P(z) = P_1(P_2(P_3 \dots (P_m(z)))).$$

Число параметров для такого распределения равно сумме чисел параметров составляющих распределений. Однако, как показывает практика, рассмотрение слишком большого числа параметров **нецелесообразно**.

# Суммарный ущерб

Распределение суммарного ущерба в коллективной модели риска является составным  $S^{col} = \sum_{k=1}^N X_k$ . Следовательно, если размеры требований  $X_k$  целочисленные, а распределение  $N$  принадлежит классу  $(a, b, 0)$ , можно воспользоваться теоремой Панджера, при этом  $g_n = P(S^{col} = n)$ , а  $f_n = P(X_k = n)$ ,  $k \geq 1$ .

## Теорема

*Если распределение  $N$  принадлежит классу  $(a, b, 0)$ , а распределение  $X$  непрерывно с плотностью  $f_X(x)$ , то распределение  $S^{col}$  будет иметь атом в нуле и плотность  $f_S(x)$  на положительной полуоси, удовлетворяющую следующему интегральному уравнению*

$$f_S(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left( a + \frac{by}{x} \right) f_X(y) f_S(x-y) dy, \quad x > 0.$$

Дословное повторение доказательства теоремы Панджера с заменой производящей функции вторичного распределения на преобразование Лапласа  $L_X(z)$  дает интегральное уравнение, а  $P(S^{col} = 0) = P(N = 0) = p_0$ .

# Суммарный ущерб - аппроксимации

В том случае, когда распределение  $X$  не является ни непрерывным, ни арифметическим, можно получать верхние и нижние границы для функции распределения  $F_S(x)$  суммарного ущерба или различные аппроксимации, производя дискретизацию (или арифметизацию) распределения размера отдельного ущерба  $X$ .

Различные методы арифметизации были предложены в 1976 Гербером и Джонсом и подробно изучены Панджером и Лютеком в связи с подсчетом стоп-лосс премий.

а) Один из методов носит название округления (по-английски rounding или mass dispersion). В рамках этого метода прежде всего выбирается шаг  $h$  новой случайной величины  $\tilde{X}$ , затем ищутся вероятности  $K_j = P(\tilde{X} = jh)$ ,  $j \geq 0$ . Заметим, что величина  $h$  всегда может рассматриваться как новая денежная единица, и таким образом мы будем снова иметь дело со считающим распределением.

# Округление

Соответствующая функция распределения имеет вид

$$K(x) = \sum_{j=0}^{[x]} K_j, \quad x \geq 0.$$

где  $[x]$  означает взятие целой части  $x$ .

Возможны три различные процедуры подсчета  $K_j$ , которые назовем следующим образом:

А. Округление до нижней единицы

$$K_0^A = F_X(h - 0), \quad K_j^A = F_X(jh + h - 0) - F_X(jh - 0), \quad j \geq 1.$$

В. Округление до ближайшей единицы при  $j \geq 1$

$$K_j^B = F_X(jh + (h/2) - 0) - F_X(jh - (h/2) - 0), \quad \text{а } K_0^B = F_X((h/2) - 0).$$

С. Округление до верхней единицы т.е.

$$K_0^C = 0, \quad K_j^C = F_X(jh) - F_X(jh - h), \quad j \geq 1.$$

Напомним, что  $F_X(x) = P(X \leq x)$  функция распределения исходной случайной величины  $X$ , а  $F_X(x-0) = P(X < x)$ .

Нетрудно проверить, что в силу определений А-С и формулы для  $K(x)$  справедливы следующие неравенства

$$K^A(x) \geq F_X(xh) \geq K^C(x), \quad x \geq 0,$$

$$K^A(x) \geq K^B(x) \geq K^C(x), \quad x \geq 0.$$

Дальнейшее обоснование этого приближения получим после изучения стохастического порядка на следующей лекции.

Заметим, что "округленные распределения" не обязаны иметь то же самое среднее, что исходное распределение.

# Приравнивание моментов

б) Если желательно, чтобы аппроксимирующее распределение имело форму, похожую на исходную, используют способ приравнивания **глобальных или локальных моментов**.

Мы хотим, чтобы при переходе к аппроксимирующему распределению сохранялось заданное число  $p$  моментов. Для большей точности приближения приравнивание производится на отдельных участках длины  $ph$ . Рассмотрим произвольный интервал  $(x_k, x_k + ph]$ . Необходимо выбрать массы  $m_0^k, m_1^k, \dots, m_p^k$ , которые будут помещены в точки  $x_k, x_k + h, \dots, x_k + ph$  таким образом, чтобы сохранились первые  $p$  моментов.

Соответствующая система уравнений запишется в виде

$$\sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r m_j^k = \int_{x_k}^{x_k + ph} x^r dF_X(x), \quad r = \overline{0, p}. \quad (1)$$

Уравнение, отвечающее  $r = 0$ , означает, что вероятностная масса, распределенная на данном интервале, одна и та же у исходного и у аппроксимирующего арифметического распределения.

# Суммарный ущерб

## Теорема

Решение системы (1) записывается в виде

$$m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_k - ih)}{(j - i)h} dF_X(x), j = \overline{0, p}. \quad (2)$$

Доказательство. Формула Лагранжа для полинома  $f(y)$ , принимающего значения  $f(y_j)$  в точках  $y_j, j = \overline{0, n}$ , выглядит следующим образом

$$f(y) = \sum_{j=0}^n f(y_j) \prod_{i \neq j} \left( \frac{y - y_i}{y_j - y_i} \right).$$

Применим эту формулу для полинома  $f(y) = y^r$ , когда выбраны точки  $x_k, x_k + h, \dots, x_k + ph$ , и получим

$$x^r = \sum_{j=0}^p (x_k + jh)^r \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_k - ih)}{(j - i)h}, r = \overline{0, p}.$$

# Суммарный ущерб

Проинтегрировав обе части этого равенства по интервалу  $(x_k, x_k + ph]$  относительно вероятностной меры, порожденной распределением  $X$ , мы приходим к системе уравнений (1), где  $m_j^k$  задаются формулами (2). Таким образом, как мы и хотели, первые  $p$  моментов сохраняются.  $\square$

Описанная процедура проводится сначала для интервала  $(0, ph]$ , затем  $(ph, 2ph]$ ,  $(2ph, 3ph]$  и т.д. Окончательно вероятности, сосредоточенные в точках  $nh$ ,  $n \geq 0$ , получаются из (2) с учетом того, что две массы, приписываемые процедурой точкам вида  $kph$ ,  $k > 0$ , суммируются.

Для большинства практически интересных распределений размера требований использование двух моментов ( $p = 2$ ) давало приемлемую точность подсчета стоп-лосс премий, а добавление третьего момента вело лишь к незначительному улучшению. Кроме того, округление и использование лишь первого момента давало примерно одну и ту же точность, в то время как использование двух моментов приводило к лучшим результатам.



# Суммарный ущерб

Интересно отметить, что интегралы в правой части (2) легко подсчитываются для дискретных (но необязательно арифметических распределений), в то время как для непрерывных распределений не всегда можно произвести интегрирование и приходится также прибегать к численным методам. Поэтому метод округления может оказаться более предпочтительным. Наконец, решение уравнения для  $f_S$  в том случае, когда распределение  $X$  непрерывно, также включает процедуру дискретизации.

Однако даже в том случае, когда формула Панджера дает точный результат для распределения  $\{g_n\}$ , возникают ошибки вычисления при многократном ее применении, т.е. для больших  $n$ . Поэтому использование рекуррентных формул **полезно дополнять** исследованием асимптотики правого хвоста распределения. В основе таких исследований лежит следующая теорема.

# Асимптотика правого хвоста

## Теорема

Предположим, что распределение  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  числа требований удовлетворяет следующему соотношению

$$p_n \sim \theta^n n^\gamma C(n) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

для  $0 < \theta < 1$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  и некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции  $C(x)$ . Если, кроме того, распределение  $X$  не арифметическое, существует такое число  $\kappa$ , что

$$L_X(-\kappa) = \theta^{-1} \quad (3)$$

и  $-L'_X(-\kappa) < \infty$ , то

$$1 - F_S(x) \sim \frac{x e^{-\theta x} C(x)}{\kappa [-\theta L'_X(-\kappa)]^{\gamma+1}} \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Так как  $L_X(-t) = g_X(t)$ , то для (3) должна существовать п. ф. м.

# Асимптотика правого хвоста

Функция  $C(x)$  называется **медленно меняющейся на бесконечности**, если  $C(tx) \sim C(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  для любого  $t > 0$ . Запись  $A(x) \sim B(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  означает, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

Доказывать теорему мы не будем, а лишь кратко остановимся на поведении хвостов некоторых распределений, важных для страхования.

Согласно классификации Эмбрехтса и Веравербеке распределения можно разделить на 3 класса: с **легкими**, **средними** и **тяжелыми** (правыми) хвостами.

## Определение

Распределение  $X$  имеет **легкий хвост**, если для любого  $0 < \theta < 1$  существует такое  $\kappa > 0$ , что выполнено (3).

## Определение

Распределение имеет **средний хвост**, если существует такое  $\gamma > 0$ , что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{2*}(x)}{1 - F_X(x)} = 2L_X(-\gamma) < \infty, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X(x - y)}{1 - F_X(x)} = e^{\gamma y} \text{ для любого } y \in R.$$

## Определение

Распределение  $X$  имеет **тяжелый хвост**, если (3) не выполняется ни для какого  $\theta$ .

Практический интерес представляет также следующая

### Теорема (Teugels)

Пусть распределение  $X$  имеет средний хвост и  $P'[L_X(-\gamma)] < \infty$ , где  $P(z)$  - производящая функция  $N$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_S(x)}{1 - F_X(x)} = P'[L_X(-\gamma)].$$

### Определение

Если  $\gamma = 0$  в (4), т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{2*}(x)}{1 - F_X(x)} = 2,$$

то распределение называется субэкспоненциальным.

Аналог теоремы Тейгельса для субэкспоненциальных распределений, доказанный ранее Эмбрехтсом, Голди и Веравербеке, выглядит следующим образом.

### Теорема

*Если распределение  $X$  субэкспоненциально, а  $N$  имеет производящую функцию моментов для некоторого  $z > 0$ , то*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_S(x)}{1 - F_X(x)} = EN.$$

Задача. Доказать, что для субэкспоненциальных распределений

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} = n.$$

Для некоторых субэкспоненциальных распределений существуют такие постоянная  $\delta$  и медленно меняющаяся на бесконечности функция  $C(x)$ , что

$$1 - F(x) \sim x^{-\delta} C(x) \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Задача. Доказать, что для преобразованного бета-распределения выполнено указанное соотношение, найти  $\delta$  и  $C(x)$ .

Задача. Найти асимптотику  $1 - F(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  для логнормального распределения.

### Определение

*Если  $(1 - F_X(x))/(1 - F_Y(x)) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , распределение  $X$  имеет более легкий (правый) хвост чем  $Y$ , и более тяжелый, если отношение стремится к бесконечности.*

Задача. Проверить, что хвост преобразованного гамма-распределения легче, чем у преобразованного бета.

Задача. Сравнить правые хвосты распределений Парето, логнормального и гамма.

Задача. Исследовать поведение левого хвоста преобразованного бета-распределения, показав, что  $F(x) \sim cx^\delta$  при  $x \rightarrow 0$ .

Чему равно  $c$ ?

# Многомерные аналоги формулы Панджера

Результат, относящийся к **двумерным** распределениям, который полезен при изучении **перестрахования**. Пусть распределение  $N$  принадлежит классу  $(a, b, 0)$ . С каждым происшествием связаны два типа требований (вторичное распределение двумерно). Размеры требований целочисленны и заданы вероятности

$$f(k_1, k_2) = P(Y_{i1} = k_1, Y_{i2} = k_2), \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0.$$

Обозначим  $S_l = \sum_{i=1}^N Y_{il}$ ,  $l = 1, 2$ , тогда совместное распределение  $(S_1, S_2)$  может быть подсчитано следующим образом:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \left( a + \frac{bk_1}{n_1} \right) \sum_{k_2=1}^{n_2} f(k_1, k_2) g(n_1 - k_1, n_2 - k_2), \quad (A)$$

при  $n_1 = 1, 2, \dots$ ,  $n_2 = 0, 1, 2, \dots$  и

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{n_2} \left( a + \frac{bk_2}{n_2} \right) \sum_{k_1=1}^{n_1} f(k_1, k_2) g(n_1 - k_1, n_2 - k_2), \quad (B)$$

при  $n_1 = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n_2 = 1, 2, \dots$ .

Можно использовать (A) для подсчета  $g(n_1, n_2)$  для всех  $(n_1, n_2)$  с  $n_1 > 0$ , а затем вычислить  $g(0, n_2)$ , воспользовавшись (B).



# Динамические модели

Рассмотренные ранее модели имеют одну общую черту: они все являются статическими, задавая лишь величину суммарного ущерба за фиксированный промежуток времени.

Перейдем теперь к рассмотрению **динамического варианта** модели коллективного риска. Он описывает изменение суммарного ущерба  $S(t)$  на **бесконечном** промежутке  $\{t \geq 0\}$  и учитывает процесс **поступления премий**  $\{P(t), t \geq 0\}$ . Тем самым обеспечивается возможность исследовать поведение процесса  $\{U(t), t \geq 0\}$ , удовлетворяющего следующему соотношению

$$U(t) = u + P(t) - S(t).$$

Нетрудно понять, что  $U(t)$  представляет собой **размер капитала** (или резерва) страховой компании в момент  $t \geq 0$ , а  $u = U(0)$  - это размер **начального** капитала, т.е. такая сумма, которую компания готова использовать для обеспечения устойчивости своей деятельности.

# Модель Крамера-Лундберга

В большинстве моделей предполагается, что процесс поступления премий является **детерминированным**. Более того, в классической модели Крамера-Лундберга рассматривается линейный процесс поступления премий  $P(t) = at$ , причем премия  $a$  за единицу времени подсчитывается по принципу среднего. Иными словами,  $a = (1 + \theta)ES(1)$ , где  $\theta > 0$  - это страховая нагрузка.

Предполагается также, что моменты поступления требований на возмещение убытков совпадают с моментами скачков **пуассоновского процесса** с параметром  $\lambda$ . Для наглядности можно представлять себе, что промежутки между моментами поступления требований являются независимыми показательно распределенными с параметром  $\lambda$  случайными величинами. **Размеры** поступающих требований образуют последовательность независимых положительных случайных величин  $\{X_i\}$  (не зависящую от пуассоновского процесса) с общей функцией распределения  $G(x)$ .

# Модель Крамера-Лундберга

Поскольку число поступивших за время  $t$  требований  $N(t)$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda t$ , то суммарный размер требований  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  имеет составное пуассоновское распределение. Предположим далее, что премии поступают непрерывно в систему со скоростью  $a$ . Обозначим через  $u$  начальный капитал страховой компании. Тогда резерв (или капитал) в момент  $t$  задается следующим образом

$$U(t) = u + at - S(t).$$

# Вероятность разорения

В рамках коллективной модели риска большое внимание уделяется проблемам разорения.

Случайная величина

$$T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$$

называется **моментом разорения** страховой компании. Как обычно, полагаем  $T = \infty$ , если  $U(t) \geq 0$  для любого  $t > 0$ . **Вероятностью разорения** (при начальном капитале  $u$ ) называется

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u),$$

т.е. вероятность того, что в какой-то момент капитал компании станет отрицательным (иначе говоря, компания будет не в состоянии выплачивать поступающие требования).

# Неравенство Лундберга

дает простую верхнюю грань для вероятности разорения (ruin probability).

Для его формулировки потребуется дополнительное требование, которое часто называют **условием Крамера**: существует единственный положительный корень  $R$  уравнения

$$\lambda g_X(r) = \lambda + ra,$$

через  $g_X(r)$  здесь обозначена производящая функция моментов, т.е.  $g_X(r) = Ee^{rX}$ . Величина  $R$  носит название характеристический показатель (adjustment coefficient) или **экспонента Лундберга**.

# Неравенство Лундберга

## Теорема

*При выполнении условия Крамера, вероятность разорения оценивается сверху, для любого  $u$ , следующим образом*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Доказательство. Разорение может наступить лишь в момент поступления некоторого требования, так как только в эти моменты происходят скачки процесса  $U(t)$  вниз, а в промежутках он растет с постоянной скоростью. Обозначим  $\psi_k(u)$  вероятность разорения в предположении, что поступило не более  $k$  требований. Очевидно, что  $\psi_k(u) = 1$  при  $u < 0$ .

Поскольку  $\psi_k(u) \leq \psi(u)$  для любого  $k$  и  $\psi_k(u) \rightarrow \psi(u)$  при  $k \rightarrow \infty$ , достаточно проверить, что все  $\psi_k(u) \leq e^{-Ru}$ . Этот факт устанавливается с помощью индукции по  $k$ .

При  $k = 0$  неравенство очевидным образом выполнено, так как  $\psi_0(u) = 1$ , если  $u < 0$ , и  $\psi_0(u) = 0$ , если  $u \geq 0$ .

Предположим, что соотношение  $\psi_{k-1}(u) \leq e^{-Ru}$  уже проверено, и докажем справедливость аналогичного неравенства для  $\psi_k(u)$ . При сделанных предположениях о процессе поступления требований формула полной вероятности приводит к равенству

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi_{k-1}(u + at - x) dG(x) dt.$$

Согласно предположению индукции правая часть не превосходит

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-R(u+at-x)} dG(x) dt \\ &= e^{-Ru} \int_0^{\infty} \lambda e^{-t(\lambda+Ra)} dt \int_0^{\infty} e^{Rx} dG(x). \end{aligned}$$

Интегрирование приводит к следующему результату

$$e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + Ra} g_X(R) = e^{-Ru},$$

(последнее равенство является следствием условия Крамера).  $\square$



При выполнении условия Крамера функция  $\psi_R(u) = \psi(u)e^{Ru}$  удовлетворяет уравнению восстановления (см. Феллер, т.2, гл.11). В силу этого справедливо предельное соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_R(u) = k_{CL},$$

где

$$k_{CL} = \frac{\int_0^\infty e^{Rx} \int_x^\infty (1 - G(y)) dy dx}{\int_0^\infty x e^{Rx} (1 - G(x)) dx}$$

представляет собой так называемую постоянную Крамера-Лундберга. Соотношение может быть переписано в виде

$$\psi(u) \sim k_{CL} e^{-Ru}.$$

Заодно отметим, что если размер требований имеет также показательное распределение с параметром  $\mu$ , то функция  $\psi(u)$  находится в явном виде

$$\psi(u) = (1 + \theta)^{-1} e^{-Ru}, \quad R = \mu\theta(1 + \theta)^{-1}.$$

Начиная с работы Гербера (1973г.), для нахождения вероятности разорения используется теория мартингалов. Покажем, как это делается в классической модели, удовлетворяющей условию Крамера. Положим

$$X(t) = \exp(-RU(t)),$$

где  $R$  - экспонента Лундберга. Тогда при любом  $s > 0$

$$E(X(t+s)|X(t)) = e^{-RU(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} e^{-R\lambda s} E e^{R(X_1 + \dots + X_k)} = X(t),$$

т.е.  $X(t)$  - мартингал. Следовательно,

$$E(X(T); T < \infty) = X(0) = e^{-Ru},$$

где  $T$  - момент разорения. Таким образом,

$$\psi(u) = e^{-Ru} E(X(T) | T < \infty). \quad (5)$$

Поскольку  $X(T) > 1$ , то отсюда вытекает неравенство Лундберга  $\psi(u) \leq e^{-Ru}$ . Соотношение (5) позволяет также находить двусторонние оценки для вероятности разорения.

# Модель Спарре Андерсена

В настоящее время существует большое количество обобщений классической модели. Одним из них является модель Спарре Андерсена, предложенная в 1957г. Как и в модели Крамера-Лундберга, процесс поступления премий детерминирован и линеен по времени. Размеры требований  $X_i$ ,  $i \geq 1$ , независимы и одинаково распределены с функцией распределения  $G(x)$ . А моменты поступления требований  $\tau_i$  образуют процесс восстановления, т.е. промежутки  $Y_i = \tau_i - \tau_{i-1}$  между последовательными требованиями независимы и одинаково распределены с функцией распределения  $A(x) = P(Y_i \leq x)$ , которая не обязана быть показательной.

Естественно предполагать, что

$$b_1 = EX < \infty, \quad d_1 = EY < \infty$$

и относительная нагрузка безопасности  $\theta = (ad_1 - b_1)/b_1 > 0$ . Оказывается, что асимптотическая формула для вероятности разорения справедлива и в данной модели, если заменить условие Крамера следующим

$$E \exp(R(X_1 - aY_1)) = 1$$

и соответственно переопределить постоянную  $k_{CL}$ . Данное обобщение было получено с помощью теории Винера-Хопфа и использованием связи вероятности разорения  $\psi(u)$  с распределением максимума случайного блуждания и соответствующими лестничными моментами и высотами, а именно,

$$\psi(u) = P(M > u), \quad M = \sup_k \sigma_k, \quad \sigma_0 = 0, \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad \xi_i = X_i - aY_i.$$

Интересно отметить, что распределение времени ожидания в одноканальной системе массового обслуживания совпадает с распределением указанного максимума случайного блуждания, т.е. существует возможность переноса результатов теории очередей в теорию риска и наоборот.

Определим лестничный момент

$$L = \inf\{k : \sigma_k > 0\}.$$

В силу положительности нагрузки, случайная величина  $L$  несобственная. Положим  $q = P(L = \infty)$  и определим условное распределение лестничной высоты  $\sigma_L$

$$F_\chi(x) = P(\sigma_L \leq x | L < \infty).$$

Известно (см., например, S.Asmussen "Applied Probability and Queues"), что максимум  $M$  случайного блуждания  $\{\sigma_k\}$  удовлетворяет следующему равенству

$$M \stackrel{d}{=} \chi_1 + \dots + \chi_{\nu-1},$$

где случайная величина  $\nu$  не зависит от последовательности  $\{\chi_k\}$  и имеет геометрическое распределение

$$P(\nu = k) = q(1 - q)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Указанная последовательность состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения  $F_X(x)$ .

В результате получается следующее представление вероятности разорения

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^{k-1} \bar{F}_X^{*(k-1)}(u),$$

где  $F_X^{*(k-1)}$  -  $(k-1)$ -кратная свертка функции распределения  $F_X$ , а  $\bar{F}_X^{*(k-1)}(x) = 1 - F_X^{*(k-1)}(x)$ .

Для классической модели справедливы соотношения

$$q = \theta(1 + \theta)^{-1}, \quad F_X^{*(k-1)}(x) = b_1^{-1} \int_0^x (1 - G(u)) du,$$

которые можно рассматривать как следствие формулы Поллачека-Хинчина (см. Asmussen) и которые сильно облегчают анализ вероятности разорения.