Листок 5

Задача 1. Постройте пример такой неотрицательной функции a и вероятностной меры ν, что задача Коши $\partial_t\mu_t = \partial_x^2(a\mu_t)$, $\mu_0 = \nu$, не имеет решения, заданного субвероятностными мерами μ_t.

Задача 2. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to (\alpha, \beta)$ — диффеоморфизм, а μ_t является решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t\mu_t = \partial_x^2(a\mu_t) - \partial_x(b\mu_t).$$

Найдите коэффициенты уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, которому удовлетворяет семейство мер $\mu_t \circ \varphi^{-1}$.

Задача 3. С помощью предыдущей задачи постройте пример уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с гладкими коэффициентами и положительным коэффициентом a, у которого задача Коши имеет несколько вероятностных решения.

Задача 4. Пусть

$$|b_1(x) - b_1(y)| + |b_2(x) - b_2(y)| \le \Lambda|x - y|.$$

Используя вероятностное представление решений μ_t^1 и μ_t^2 уравнений

$$\partial_t\mu_t^1 = \frac{1}{2}\Delta\mu_t^1 - \mathrm{div}(b_1\mu_t^1), \quad \partial_t\mu_t^2 = \frac{1}{2}\Delta\mu_t^2 - \mathrm{div}(b_2\mu_t^2),$$

оцените величину $W_2(\mu_t^1, \mu_t^2)$ через разности $b_1 - b_2$ и $\mu_0^1 - \mu_0^2$.

Задача 5. С помощью перехода к новой функции $v = e^{\lambda u}$ с подходящим λ решите задачу Коши

$$-u_t - \Delta u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = 0, \quad u(x, T) = g(x),$$

где g — гладкая ограниченная функция.

Задача 6. Используя метод из задачи 4 докажите существование и единственность гладкого ограниченного решения задачи Коши

$$-u_t - \Delta u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + h(x, t) = 0, \quad u(x, T) = g(x),$$

где h и g — гладкие и ограниченные функции.

Задача 7. Используя результаты задачи 4 и задачи 6 сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности решения системы

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + h(x, \mu_t) = 0, \\ \partial_t\mu_t - \Delta\mu_t - \mathrm{div}(\nabla u\mu_t) = 0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x, T) = g(x, \mu_T)$, $\mu_0 = \nu$.