МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задача Оптимального Трейдинга

Случай стохастического влияния сделок на цену актива при трейдинге с системой торговых сигналов

Курсовая работа
студента 4-го курса 409 группы
Савина Алексея Леонидовича
Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Кабанов Юрий Михайлович

Москва 2021

1 Аннотация

1.0.1 Аннотация

В данной задаче мы рассматриваем оптимальную задачу торговли трейдером определенного актива при наличии на рынке торговых сигналов. Ключевая особенность этой работы состоит в том, что мы учитываем влияние издержек ликвидности на цены, по которым трейдер торгует. Издержки ликвидности возникают из-за того, что любой игрок на рынке, совершая крупные сделки, влияет на значение цены в неблагоприятную для себя сторону. Мы моделируем эти издержки с помощью стохастического процесса, обладающего свойством возвратности к среднему.Такой выбор свойств процесса не случаен и согласуется с практическими наблюдениями. В данной задаче, для сформулированной системы стохастических дифференциальных уравнений ставится оптимальная задача и сводится средствами теории стохастического оптимального управления к системе уравнений в частных производных. Далее строится приближенное решение данной системы с точностью до первого порядка малости. Тем самым, выводится приближенная оптимальная стратегия действий трейдера.

2 Введение

В данной части моей работы мы сформулируем задачу, которую будем решать в основной части в более широком смысле. Рассмотри любую финансовую биржу, на которой трейдеры свершают сделки по покупке и продаже определенного актива.

Процесс покупки и продажи на любой бирже устроен следующим образом. Существует книга заявок (так называемая Limit order book), в которой регистрируется все предложения по покупке или продаже активов в определенном количестве и за определенную цену. Каждый игрок готов продать или купить по несколько разной цене. К тому же, что абсолютно логично, часто цены покупки и продажи не равны между собой и между ними существует разница (так называемый спред). Любая успешно заключенная сделка влияет на ситуацию в книге заявок. После каждой сделки меняются, так как пересчитываются, средняя цена и спред. Это объясняется таким явлением, как ликвидность.

Дело в том, что если мы продадим большое количество актива, то цена на него упадет, и если мы в последствии относительно решим продать еще какое-то количество единиц актива, на придется продавать его по более низкой цене, что приведет к меньшей прибыли. Данное влияение действий трейдеров на цену (поднятие цен при большом спросе и падение цен при активной продаже) приводит к издежкам игроков на рынке. Традицонно такие издержки называются издержками ликвидности.

В нашей задаче, мы будем считать, что на цену торгуемого актива оказывают влияние две компоненты. Первая компонента - это влияние торговых сигналов на рынке. Игроки видят эти сигналы, меняют свои стратегии, а следовательно меняется и цена. Вторая компонента - это издержки ликвидности, то есть не внешние события как в первом случае, а внутрениие действия трейдером так же влияют на цену.

Стохастический подход к моделированию ликвидности достаточно широко распространен, однако, мало в каких работах моделируется стохастическое влияние именно издержек ликвидности. Данная работа - первая, где для моделирования издержек ликвидности применяется стохастический процесс со свойствами возвратности к среднему.

3 Реальный пример постановки оптимизационной задачи

Для мотивации системы стохастических дифференциальных уравнений, о которых пойдет речь в основной части данной работы можно рассмотреть следующий пример. Перед трейдером стоит задача за ограниченное время, скажем за отрезок времени от $[t, T]$ ему необходимо продать на рынке Q единиц имеющегося у него в портфеле актива, при этом необходимо извлечь максимальную прибыль.

Трейдеру необходиму учесть ряд вещей (что и объясняет возникновение оптимальной задачи): Динамику цен на актив, издержки ликвидности и дополнительный штраф за оставшееся к определенному моменту количество единиц базового актива в портфеле трейдера(Например, если этот штраф задать большим, мы побуждаем трейдера как можно скорее продать, все что у него есть).

4 Математическое описание рассматриваемой системы

Рассмотрим полное вероятностное пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{P})$ с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, которую мы определим чуть позже. Введем на данном вероятностном пространстве следующие случайные процессы:

- $S^\nu = (S^\nu_t)_{t\geq 0}$ - цена актива, которым торгует трейдер
- $X^\nu = (X^\nu_t)_{t\geq 0}$ - деньги на счету трейдера, с использованием которых происходит весь процесс торговли
- $Q^\nu = (Q^\nu_t)_{t\geq 0}$ - портфель трейдера, выраженный в количествах единиц торгуемого актива.
- $\mu = (\mu^1_t, ..., \mu^d_t)_{t\geq 0}$ - d различных торговых сигналов, которые имеют стохастическую природу и характеризуют состояние книги заявок,биржи и рынка в целом

- $Y_t^\varepsilon = (Y_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ - случайный процесс, задающий стохастическое влияние действий трейдера на цену актива
- $\nu_t = (\nu_t)_{t\geq 0}$ - процесс, описывающий действия трейдера (покупка /продажа)

Во всей статье функции, зависящие от действий трейдера ν_t помечаются сверху символом ν для дополнительного акцента.

Теперь, сформулируем в общем виде систему стохастических дифференциальных уравнений, решаемых в данной задаче:

$$\begin{cases} dS_t^\nu = (\gamma\mu_t + b\nu_t)dt + \sigma dW_t \\ dX_t^\nu - = -\left(S_t^\nu + k(t, Y_t^\varepsilon)\nu_t\right)\nu_t dt \\ dQ_t^\nu = \nu_t dt \\ d\mu_t = c(\mu_t)dt + g(\mu_t)dW_t' \\ dY_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\alpha(Y_t^\varepsilon)d_t + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}{}_t^\varepsilon dW^*t \end{cases} \qquad (*)$$

Фильтрация $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ выбирается, как естественная фильтрация, порожденная трем броуновскими движениями в системе (*).

Данную выше систему уравнений можно трактовать следующим образом. На цену торгующегося актива оказывают влияние две функии, одна - постоянная, вторая - случайная (в введении употреблялся термин стохастического изменения цены). Константа b отвечает за постоянное изменение цены, а произведение $\gamma\mu_t$ отвечает за стохастическое изменение цены, связанное с трактовкой рынком тех или иных торговых сигналов. Здесь γ - известная константа, а μ_t - случайной процесс, соотвествующий торговым сигналам из системы выше. Стохастическая компонента σdW_t в уравнении цены обусловлена действия низкоквалифицированных трейдеров, которые оказывают случайное влияние на цену на рынке, заставляя ее колебаться. В нашей задаче мы считаем, что при покупке одной единицы актива трейдер повышает цену на рынке (тоже учет ликвидности), а при продаже - понижает.

В данной постановке, мы считаем, что $\nu_t > 0$ - означает покупку трейдером актива, поэтому в уравнени для X_t^ν стоит минус перед скобкой. Первое слагамое, а именно $S_t^\nu\nu_t$ отражает суммарную стоимость покупки продажи. Но, так как мы в нашей задаче учитываем издержки ликвидности, трейдер торгует актив не за среднюю цену в стакане, а за некоторую поправленную цену, поправку к которой выражает слагаемое $(k(t, Y_t^\varepsilon)\nu_t)\nu_t$. Как видно из его выражения, мы будем считать, что издержки ликвидности линейно зависят от действий трейдера ν_t.

Мы предполагаем, что W' и W^* (d мерное Броуновское движение) - скореллированы. Считаем, что $d[W_i', W^*]_t = \rho_i dt$, $i \in 1, ..., d$, где $\rho := (\rho_1, ..., \rho_d) \in (-1, 1)^d$

Остановимся поподробнее на процессе Y_t^ε. В данной работе, мы предполагаем, что издержки ликвидности обладают свойствами возвратности к среднему, что вполне оправданно и часто встречается на практике (см. [7]). Чтобы смоделировать возвратность в среднему зададим функцию издержке ликвидности следующим образом:

$$k(t,y) = \kappa(t)\left(1+\eta(y)\right)^{-1} \tag{1}$$

где $\kappa(t) > 0, t \in [0,T]$ и $\eta > -1$. Будем обозначать матожидание по мере, порожденной стационарным распределением Y_t^ε следующим образом: $\langle . \rangle$. Тогда, дял обеспечения возвратности к среднему дополнительно полагаем $\langle \eta \rangle = 0$.

5 Математическая постановка оптимизационной задачи

Сформулируем теперь оптимальную задачу по продаже трейдером N единиц базового актива за время $[t,T]$ в терминах введенных нами процессов.Функция, которую мы будем максимизировать (value function) задается следующим образом:

$$\mathcal{H}^\nu(t,x,S,\mu,q,y) = \boldsymbol{E}_{t,S,q,x,\mu,y}\left(X_T^\nu + Q_T^\nu(S_T^\nu - AQ_T^\nu) - \phi\int_t^T (Q_u^\nu)^2 du\right) \tag{2}$$

Remark 1. Здесь, $\boldsymbol{E}_{t,S,q,x,\mu,y}(.)$ обозначает условное матожидание при $S_t^\nu = S$, $Q_t^\nu = q$, $X_t^\nu = x$, $\mu_t = \mu$, $Y_t^\varepsilon = y$.

Константа A в выражении под матожиданием характеризует издержки ликвидности, а константа ϕ отвечает за издержки, вызванные большим количеством единиц актива в портфеле (иными словами, ϕ стимулирует трейдера продавать быстрее).

Ключевая задача оптимального управления ν, решение которой будет получено в этой статье, выглядит следующим образом:

$$H^\varepsilon(t,S,q,x,\mu,y) = \sup_{\nu\in\mathcal{A}} \mathcal{H}^\nu(t,x,S,\mu,q,y) \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{A}$ - множество всех допустимых v. В нашем случае - это множество таких процессов, что: $\boldsymbol{E}\left(\int_0^T |\nu_t|^2 dt\right) < +\infty$ и ν принимает значения в $\mathbb{R}$

Такая постановка оптимальной задачи позволяет искать оптимальную стратегию трейдера v_*^ε

6 Сведение оптимальной задачи к уравнению в частных производных

Проведем ряд преобразований, который позволят нам свести задачи к более удобной форме дял применения аппрата теории оптимального управления. Рассмотрим тождество:

$$dX_t^\nu + dQ_t^\nu dS_t^\nu = -\left(S_t^\nu + k(t,Y_t^\varepsilon)\nu_t\right)\nu_t dt + dQ_t^\nu dS_t^\nu$$

Remark 2. Ниже мы воспользуемся так называемым "production rule for stochastic processes которое формулируется следующим образом:

Пусть $(X_1)_t$ и $(X_2)_t$ - два процесса Ито, задающихся СДУ:

$$dX_i(t) = \sigma_i(t)dWt + \theta_i(t)dt$$

Тогда $X_1(t)X_2(t)$ - тоже процесс Ито, задающийся:

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t)dt + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt$$

Доказательство представлено в [9].

В альтернативной форме, исходя из определения СДУ и правила произведения процессов,учитывая обозначения $S_t^\nu = S$, $Q_t^\nu = q$, $X_t^\nu = x$ тождество может быть переписано следующим образом:

$$dX_t^\nu + dQ_t^\nu dS_t^\nu = x + qS - \int_t^T \left(S_u^\nu + k(u, Y_u^\varepsilon)\nu_u\right)\nu_u du + \int_t^T Q_u^\nu dS_u^\nu + \int_t^T S_u^\nu dQ_u^\nu = \tag{4}$$

$$= x + qS - \int_t^T S_u^\nu du - \int_t^T k(u, Y_u^\varepsilon)\nu_u^2 + \int_t^T S_u^\nu du + \int_t^T Q_u^\nu dS_u^\nu = \tag{5}$$

$$= x + qS - \int_t^T k(u, Y_u^\varepsilon)\nu_u^2 + \int_t^T Q_u^\nu dS_u^\nu \tag{6}$$

И тогда, учитывая представление (6) и представление для dS_u^ν, можем переписать функцию в (2) в виде:

$$\mathcal{H}^\nu(t, x, S, \mu, q, y) = x + qS + \boldsymbol{E}_{t,S,q,x,\mu,y}[-A(Q_T^\nu)^2 - \int_t^T k(u, Y_u^\varepsilon)\nu_u^2 \tag{7}$$

$$+ \int_t^T Q_u^\nu(\gamma\mu_u + b\nu_u)du + \phi\int_t^T (Q_u^\nu)^2 du]$$

Теперь введем Z,$\mathcal{Z}^\nu$ и h^ε:

$$Z(t, \mu, q, y, v) = -k(t, y)v^2 + q(\gamma\mu + bv) - \phi q^2 \tag{8}$$

$$\mathcal{Z}^\nu(t, \mu, q, y) = \boldsymbol{E}_{t,q,\mu,y}\left[-A(Q_T^\nu)^2 + \int_t^T Z(t, \mu_u, Q_u^\nu, Y_u^\varepsilon, v_u)du\right] \tag{9}$$

$$h^\varepsilon(t, \mu, q, y) = \sup_{\nu\in\mathcal{A}} \mathcal{Z}^\nu(t, \mu, q, y) \tag{10}$$

Благодаря введеным выше обозначениям, мы можем переписать оптимизационную задачу (3) следующим образом:

$$H^\varepsilon(t, S, q, x, \mu, y) = x + qS + h^\varepsilon(t, \mu, q, y) \tag{11}$$

Remark 3. Далее нам понадобиться ряд концепций из теории оптимального управления. Для начала определим понятие инфинитезимального генератора процесса:

Definition 1. Инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}_t$ процесса X_t - это оператор, действующий на дважды дифференциируемых функциях $f(x)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_t f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{E}[f(X_{t+h}|X_t = x)] - f(x)}{h}$$

Инфинитезимальный генератор - это некое обобщение оператор производной для использования в стохастическом анализе. Благодаря формуле Ито, для процессов Ито, которые задаются СДУ $dX(t) = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$ можно получить следующую формулу для инфинитиземального генератора:

$$\mathcal{L}_t f(x) = \mu(t,x)^T Df(x) + \frac{1}{2} Tr(\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T) D^2 f(x)$$

где $Df(x)$ - дифференциальный оператор. Подробнее в [2].

Remark 4. В [2] для процессов, с такими же свойствами как у нас было получено уравнение, которому должна удовлетворять функция $H(t,x) = \sup_{u \in \mathcal{A}} H^u(t,x)$, которая является решением оптимизационной задачи:

Theorem 1. *Уравнение Гамильтона - Беллмана - Якоби (Уравнение динамического программирования). Есть функция $H^u(t,x)$ для процесса X_t^u имеет вид*
$H^u(t,x) = \boldsymbol{E}_{t,x}\left[G(X_T^u) + \int_t^T F(s, X_s^u, u_s)ds\right]$, то оптимальное решение $H(t,x)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\partial_t (H(t,x)) + \sup_{u \in \mathcal{A}} (\mathcal{L}_t^u (H(t,x)) + F(t,x,u)) = 0 \tag{12}$$

$$\textit{с терминальными условиями } H(T,x) = G(x) \tag{13}$$

где $\mathcal{L}_t^u$ - инфинитиземальный генератор процесса X_t^u

За строгим доказательством этого факта в общем случае см. [10]

Теперь введем трехмерный процесс $C_t = (\mu_t, Q_t^\nu, Y_t^\varepsilon)$ и определим для него инфинитезимальный генератор, руководствуясь замечанием 3. Имеем:

$$\mathcal{L}_t^\nu = \frac{1}{\varepsilon}\left(\alpha(y)\partial_y + \frac{1}{2}\beta^2(y)\partial_{yy}\right) + c(\mu)\partial_\mu + \frac{1}{2}Tr\left(g(\mu)g(\mu)^T\right)\partial_{\mu\mu} + v\partial_q + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(y)\sum_{i=1}^k \left(g_i(\mu)\rho\right)\partial_{\mu_i y} \tag{14}$$

где последнее слагаемое возникает вследствии скореллированности Броуновских движений W'_t и W^*_t. Введем обозначения:

$$\mathcal{L}_0 = \alpha(y)\partial_y + \frac{1}{2}\beta^2(y)\partial_{yy} \tag{15}$$

$$\mathcal{L}_\mu = c(\mu)\partial_\mu + \frac{1}{2}Tr\left(g(\mu)g(\mu)^T\right)\partial_{\mu\mu} \tag{16}$$

Учитывая вышевведенные обозначения и замечание 4 запишем Уравнение Гамильтона - Якоби - Белмана для функции h^ε:

$$\partial_t h^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 h^\varepsilon + \mathcal{L}_\mu h^\varepsilon - \phi q^2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(y)\sum_{i=1}^{k}\left(g_i(\mu)\rho\right)\partial_{\mu_i y}h^\varepsilon + (\gamma\mu)q + \tag{17}$$

$$+\sup_{\nu\in\mathcal{A}}\left[(bq + \partial_q h^\varepsilon)v - k(t,y)v^2\right] = 0$$

с терминальным условием:

$$h^\varepsilon(T,\mu,q,y) = -Aq^2 \tag{18}$$

Видно, что выражением под супремумом, а именно $(bq + \partial_q h^\varepsilon)v - k(t,y)v^2$ квадратично зависит от v, поэтому воспользуемся достаточным условие экстремума, согласно которому максимум этого выражения будет в вершине параболы, а именно в точке:

$$v^\varepsilon_*(t,\mu,q,y) = \frac{bq + \partial_q h^\varepsilon}{2k(t,y)} \tag{19}$$

После подстановки v^ε_* вместо v в уравнение Гамильтона - Якоби - Белмана (17) будем иметь:

$$(\partial_t + \mathcal{L}_\mu)h^\varepsilon - \phi q^2 + (\gamma\mu)q + \frac{(bq + \partial_q h^\varepsilon)^2}{4k(t,y)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\beta(y)\sum_{i=1}^{k}\left(g_i(\mu)\rho\right)\partial_{\mu_i y}h^\varepsilon + \tag{20}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 h^\varepsilon = 0$$

Введем нелинейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(k)$, который соотвествует некоторой функции издержек ликвидности и действующий на функциях f следующим образом:

$$\mathcal{L}(k)[f] := (\partial_t + \mathcal{L}_\mu)f - \phi q^2 + (\gamma\mu)q + \frac{(bq + \partial_q f)^2}{4k} \tag{21}$$

Так же введем обозначение дифференциального оператора $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{L}_1 = \beta(y)\sum_{i=1}^{k}\left(g_i(\mu)\rho\right)\partial_{\mu_i y} \tag{22}$$

Используя вышевведенные обозначения, уравнение в частных производных (20) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{L}\left(k(t,y)\right)[h^\varepsilon] + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0\right)h^\varepsilon = 0 \tag{23}$$

Итак, мы свели исходную оптимизационную задачу к уравнению в частных производных, которое необходимо решить. Зачастую (как отмечается в [8]) такие уравнения Гамильтона -Якоби -Белмана зачастую не решаются точно. Однако, вполне можно отыскать приближенные решения, которые буду точны до необходимого порядка. Именно потому, что мы ищем h^ε приближенно, на протяжении всей работы сверху у этой функции пишется знак ε.

Мы будем искать приближенное решение уравнения в частных производных (23) рукодствуясь последовательности следующих шагов:

- Ищем h^ε в виде квадратичного полинома от q. При этом, как ведет себя h^ε относительно других переменных, в данном случае нас не интересует.

- Используя аппарат теории возмущений (см. замечание ниже) раскладываем искомую функцию по степеням малого параметра ε

- Решаем систему из линейных и нелинейных уравнений в частных производных, сгруппированых по степеням параметра ε. Находим искомое решение

- С помощью введения суб и супер-решений (см. ниже) доказываем заявленный порядок точности для приближенного решения.

7 Приближенное решение системы уравнений в частных производных

7.1 Представление решения в виде полинома

Аналогично задаче, рассматриваемой в [7], исходя из вида коэффициентов уравнения (23) и начальных условий (18) будем искать функцию $^\varepsilon$ в виде квадратичного полинома по переменной q:

$$h^\varepsilon(t,\mu,q,y) = h^{(0),\varepsilon}(t,\mu,y) + h^{(1),\varepsilon}(t,\mu,y)q + h^{(2),\varepsilon}(t,\mu,y)q^2 \tag{24}$$

В последтвии мы получим приближение для каждой $(h^{(i),\varepsilon})_{i=1,2,3}$. Подставляя квадратичный полином в уравнение (23) и приравнивая коэффициенты при каждой степени q к нулю получаем следующие три системы уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h^{(2),\varepsilon} - \phi + \frac{\left(b+2h^{(2),\varepsilon}\right)^2}{4k(t,y)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 h^{(2),\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 h^{(2),\varepsilon} = 0 \\ h^{(2),\varepsilon}(T,\mu,y) = -A \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h^{(1),\varepsilon} + \gamma\cdot\mu + \frac{\left(b+2h^{(2),\varepsilon}\right)h^{(1),\varepsilon}}{2k(t,y)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 h^{(1),\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 h^{(1),\varepsilon} = 0 \\ h^{(1),\varepsilon}(T,\mu,y) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h^{(0),\varepsilon} + \frac{\left(h^{(1),\varepsilon}\right)^2}{4k(t,y)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 h^{(0),\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 h^{(0),\varepsilon} = 0 \\ h^{(0),\varepsilon}(T,\boldsymbol{\mu},y) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Заметим, что уравнения (26) и (27) являются линейными по $h^{(1),\varepsilon}$ и $h^{(0),\varepsilon}$ соотвественно. Однако, они содержат нелинейные правые части, которые изначально неизвестны. Свести данные системы к решению линейных систем (26) и (27) с известными правыми частями можно, используя следующий прием: сначала решим уравнение (25), которое, впрочем, линейным не является, а потом считая известным $h^{(2),\varepsilon}$ подставим эту функцию последовательно в уравнения (26) и (27) и решим их.

Рассмотрим внимательнее уравнение (25). Исходя из базового теоретического инструментария решения систем уравнения в частных производных, так как коэффициенты и терминальные условия в уравнении (25) не зависят от μ, функция $h^{(2),\varepsilon}$ не будет зависеть от μ, а значит мы можем считать, что $h^{(2),\varepsilon} = h^{(2),\varepsilon}(t,y)$.

Произведем константный сдвиг функции $h^{(2),\varepsilon}$:

$$\mathcal{X}^\varepsilon(t,y) := h^{(2),\varepsilon}(t,y) + \frac{b}{2} \tag{28}$$

Тогда мы переходим к следующем системе уравнений (уравнение 27 не трогаем):

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{X}^\varepsilon - \phi + \frac{(\mathcal{X}^\varepsilon)^2}{k(t,y)} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 \mathcal{X}^\varepsilon = 0 \\ \mathcal{X}^\varepsilon(T,y) = -A + b/2 \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h^{(1),\varepsilon} + \gamma\cdot\mu + \frac{\mathcal{X}^\varepsilon h^{(1),\varepsilon}}{k(t,y)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 h^{(1),\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 h^{(1),\varepsilon} = 0 \\ h^{(1),\varepsilon}(T,\mu,y) = 0 \end{cases} \tag{30}$$

7.2 Случай детерминированной функции издержек ликвидности

Будем искать приближенное решение для функции h^ε для случая детерминированной (то есть, не зависящей от стохастического процесса Y_t^ε) функции издержек ликвидности $k(t,.) \equiv k(t)$

Теперь рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h - \phi q^2 + (\gamma\cdot\mu) q + \frac{(bq+\partial_q h)^2}{4k(t)} = 0 \\ h(T,\mu,q) = -Aq^2 \end{cases} \tag{31}$$

Из таких же соображений, как и выше, мы можем, без ограничения общности, искать решение этой системы в виде квадратичного полинома по q, учитывая что $h^{(2),\varepsilon}$ не зависит от μ:

$$h(t,\mu,q) = h^{(0)}(t,\mu) + h^{(1)}(t,\mu)q + h^{(2)}(t)q^2 \tag{32}$$

Теперь, сформулируем следующую теорему:

Theorem 2. *Для системы (31), ее решения (32) и функции $\mathcal{X}(t) = h^{(2)}(t) + \frac{b}{2}$ справедливы следующие формуы: 1) X(t) удовлетворяет уравнению Рикатти:*

$$\begin{cases} \mathcal{X}'(t) - \phi + \frac{1}{k(t)}\mathcal{X}^2(t) = 0 \\ \mathcal{X}(T) = -A + \frac{b}{2} \end{cases} \tag{33}$$

2) Формулы для компонент $h^{(1)}$ и $h^{(0)}$ выглядят следующим образом:

$$h^{(1)}(t,\mu) = \int_t^T e^{\int_t^T \frac{\mathcal{X}(u)}{k(u)}du} \boldsymbol{E}[\gamma\mu_s|\mu_t = \mu]ds \tag{34}$$

$$h^{(0)}(t,\mu) = \int_t^T \frac{1}{4k(s)} \boldsymbol{E}[(h^{(1)})^2(s,\mu_s)|\mu_t = \mu]ds \tag{35}$$

Доказательство.

Remark 5. Для доказательства вышеприведенных формул, нам потребуется теорема Фейнмана-Каца. Формулируется она следующим образом: Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\partial_t u(x,t) + \mu(x,t)\partial_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_{-} V(t,x)u + f(x,t) = 0$$

где μ, σ, V, f -известные функции и дано терминальное условие:

$$u(x,T) = \phi(x)$$

Тогда решение выражается следующей формулой Фейнмана-Каца:

$$u(x,t) = \boldsymbol{E}^Q \left[\int_t^T e^{-\int_t^s V(X_\tau)d\tau} f(X_s,s)ds + e^{-\int_t^T V(X_\tau)d\tau}\phi(X_\tau)|X_t = x \right]$$

где Q - такая вероятностная мера, что процесс Ито X_t описывается следуюшим СДУ:

$$dX_\mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW_t^Q$$

Итак, перейдем к доказательству теоремы. Имеем следующие начальные условия: $h^{(0)}(T,\mu) = h^{(1)}(T,\mu) = 0$ и $h^{(2)}(T,\mu) = -A$. Исходя из (31) для функций $h^{(i)}$ имеем следущую систему уравнений в частных производных:

$$(\partial_t + \mathcal{L}_\mu)\, h^{(2)}(t,\mu) - \phi + \frac{1}{4k(t)}\left(b + 2h^{(2)}(t,\mu)\right)^2 = 0 \tag{36}$$

$$(\partial_t + \mathcal{L}_\mu)\, h^{(1)}(t,\mu) + \gamma\mu + \frac{1}{2k(t)}\left(b + 2h^{(2)}(t,\mu)\right) h^{(1)}(t,\mu) = 0 \tag{37}$$

$$(\partial_t + \mathcal{L}_\mu)\, h^{(0)}(t,\mu) + \frac{1}{4k(t)}\left(h^{(1)}(t,\mu)\right)^2 = 0 \tag{38}$$

Аналогично рассуждениям выше, получаем, что мы можем искать $h^{(2)}$ не зависимой от μ, то есть: $h^{(2)}{=}h^{(2)}(t)$. Заметим, что из (36) после подстановки $\mathcal{X}(t)$ следует, что:

$$\mathcal{X}'(t) - \phi + \frac{1}{k(t)}\mathcal{X}^2(t) = 0 \tag{39}$$

Теперь, заменяя $h^2(t)$ на $\mathcal{X}(t)$ из уравнения (37) имеем:

$$(\partial_t + \mathcal{L}_\mu)\, h^{(1)}(t,\mu) + \gamma\mu + \frac{\mathcal{X}(t)}{k(t)} h^{(1)}(t,\mu) = 0 \tag{40}$$

А отсюда и (38) согласно формуле Фейнмана-Каца следует:

$$h^{(1)}(t,\mu) = \boldsymbol{E}\left[\int_t^T e^{\int_t^T \frac{\mathcal{X}(u)}{k(u)}du}(\gamma\mu_s)ds|\mu_t = \mu\right] = \tag{41}$$

$$= \int_t^T e^{\int_t^T \frac{\mathcal{X}(u)}{k(u)}du}\boldsymbol{E}\left[\gamma\mu_s|\mu_t = \mu\right] ds \tag{42}$$

$$h^{(0)}(t,\mu) = \boldsymbol{E}\left[\int_t^T \frac{1}{4k(s)}(h^{(1)})(s,\mu_s)ds|\mu_t = \mu\right] \tag{43}$$

$$\int_t^T \frac{1}{4k(s)}\boldsymbol{E}[(h^{(1)})^2(s,\mu_s)|\mu_t = \mu]ds \tag{44}$$

□

7.3 Применение аппарата теории возмущений

Remark 6. Ниже мы будем применять аппарат теории возмущений для решения нашей системы дифференциальных уравнений. Данный метод появился из физических задач, где он часто показывает свою эффективность. Суть метода в следующем: Для начала мы должны разложить функции в уравнении по степеням малого параметра ε. В итоге мы получим систему дифференциальных уравнений с малой правой частью (будут какие-то неоднородные слагаемые, умноженные на ε.

Для таких дифференциальных задач, с правой частью, умноженный на малый параметр ε существует известный алгоритм решения: Допустим мы разложили решение исходной дифференциальной задачи $y(x)$ по степеням малого параметра ε.

Имеем: $y(x) \approx y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + y\varepsilon^2 y_2(x) + ...$ Для начала положил $\varepsilon = 0$ в исходной задаче и найдем $y_0(x)$. Далее подставим $y_0(x)$ в исходное уравнение, продиффиренциируем его по ε и приравняем ε к нулю. Решим уравнения на $y_1(x)$.

Далее, аналогично ищем все следующие приближения $y_i(x)$

Примеры применения аппрата теории возмущений см. в [8]

Итак, разложим $\mathcal{X}^\varepsilon$ и $h^{(i),\varepsilon}$, $i = 0, 1$ по степеням ε и $\sqrt{\varepsilon}$ соотвественно:

$$\mathcal{X}^\varepsilon = \mathcal{X}_0 + \varepsilon \mathcal{X}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{X}_2 + ... \tag{45}$$

$$h^{(i),\varepsilon} = h_0^{(i)} + \sqrt{\varepsilon} h_1^{(i)} + \varepsilon h_2^{(i)} \tag{46}$$

Подставляя данные разложения в уравнения (25), (29), (30), группируя слагаемые по степеням ε, оставляя члены включительно до порядка $\sqrt{\varepsilon}$ и приравнивая коэффициенты при каждой степени ε к нулю, получаем следующие системы уравнений в частных производных:

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{X}_0 = 0, \tag{47}$$

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{X}_1 + \partial_t \mathcal{X}_0 - \phi + \frac{\mathcal{X}_0^2}{k(t,y)} = 0, \tag{48}$$

$$\mathcal{L}_0 h_0^{(i)} = 0, \tag{49}$$

$$\mathcal{L}_1 h_0^{(i)} + \mathcal{L}_0 h_1^{(i)} = 0, \tag{50}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h_0^{(1)} + \gamma \cdot \boldsymbol{\mu} + \frac{\mathcal{X}_0 h_0^{(1)}}{k(t,y)} + \mathcal{L}_1 h_1^{(1)} + \mathcal{L}_0 h_2^{(1)} = 0, \tag{51}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h_0^{(0)} + \frac{\left(h_0^{(1)}\right)^2}{4k(t,y)} + \mathcal{L}_1 h_1^{(0)} + \mathcal{L}_0 h_2^{(0)} = 0, \tag{52}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h_1^{(1)} + \frac{\mathcal{X}_0 h_1^{(1)}}{k(t,y)} + \mathcal{L}_1 h_2^{(1)} + \mathcal{L}_0 h_3^{(1)} = 0, \tag{53}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h_1^{(0)} + \frac{h_0^{(1)} h_1^{(1)}}{2k(t,y)} + \mathcal{L}_1 h_2^{(0)} + \mathcal{L}_0 h_3^{(0)} = 0 \tag{54}$$

с терминальными условиями $\mathcal{X}_0(T, y) = -A + b/2$, $h_0^{(i)}(T, \mu.y) = 0$ и $h_1^{(i)}(T, \mu, y) = 0$, $i = 0, 1$

Remark 7. Далее нам предстоит иметь дело с уравнениям Пуассона, известным частным случаем уравнений в частных производных. Методы решения уравнений такого типа широко известны.

В данной задаче мы полагаем случайный процесс Y_t^ε обладающим свойствами возвратности к среднему. Это не случайно. Считая известным стационарное распределение марковского процесса рассмотрим уравнения Пуассона следующего вида:

$$\mathcal{L}\phi = g \tag{55}$$

где $\mathcal{L}$ - это инфинитезимальный генератор процесса Y_t^ε, а g - произвольная функция, квадратично интегрируемая по мере, порожденной стационарным распределение процесса Y_t^ε.

В [8] доказывается, что функция ϕ, является решением уравнения вида (55) только, если выполнено следующее условие:

$$\langle g \rangle = 0 \tag{56}$$

Напомним, что $\langle . \rangle$ обозначет матожидание относительно меры, порожденный случайным марковским процессов со свойствами возвратности к среднему Y_t^ε. Данное условие в англоязычной литературе носит название: "centering condition of solvability of the Poisson equation". Мы же будем называть данное условие условием центрированности уравнения Пуассона.

В [8] данное условие подробно доказывается, и, при условии его выполнения, приводит явный виде решения - функции ϕ.

Итак, теперь сформулируем теорему для членов нулевого порядка по ε при разложении по параметру:

Theorem 3. *Решения для уравнений на члены нулевого порядка малости по параметру ε, которые являются решениями уравнений (47), (49) и (50) и на них выполняется условие центрированности уравнений Пуассона (48),(51) и (52) задаются уравнениями из теоремы 1 под номерами (33), (35) и (34) соответственно.*

Доказательство. Из уравнения (47) следует, что функция $\mathcal{X}_0$ не зависит от y, то есть $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0(t)$. Проверим условие центрированности для уравнения Пуассона (48) для $\mathcal{X}_1$. Его правая часть, это $\mathcal{X}'(t) - \phi + \frac{1}{k(t)}\mathcal{X}^2(t)$. Проверим для нее условие центрированности:

$$\left\langle \partial_t \mathcal{X}_0 - \phi + \frac{\mathcal{X}_0^2}{k(t,\cdot)} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \mathcal{X}_0 - \phi + \frac{\mathcal{X}_0^2}{\kappa(t)} = 0 \tag{57}$$

где эквивалентность следует из независимости $\mathcal{X}_0$ от y, изначального предположения, что функция η такова, что $\langle \eta \rangle = 0$ и следуюшего равенства:

$$\left\langle \frac{1}{k(t,\cdot)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\kappa(t)}(1+\eta(\cdot)) \right\rangle = \frac{1}{\kappa(t)}(1+\langle \eta \rangle) = \frac{1}{\kappa(t)} \tag{58}$$

Как мы видим, условие центрированности дало нам то же уравнение Рикатти, что и (33), а значит согласно теореме 2 решение для $\mathcal{X}_0$ выглядит следующим образом: $\mathcal{X}(t) = h^{(2)}(t) + \frac{b}{2}$

Теперь, обратимся к уравнениям в частных производных на $h^{(i)}$. Исходя из вида уравнения (49) мы ищем решение $h_0^{(i)} = h_0^{(i)}(t,\mu)$, то есть независимым от y. Тогда, уравнение (50) редуцируется до $\mathcal{L}_0 h^{(i)} = 0$. Значит $h_1^{(i)}$ так же не зависят от y: $h_1^{(i)} = h_1^{(i)}(t,\mu)$. Следовательно, $\mathcal{L}_1 h_1^{(i)} = 0$. Уравнения (51) и (52) являются уравнениями Пуассона для $h_2^{(1)}$ и $h_2^{(0)}$ соотвественно и их условия центрированности следующие:

$$\left\langle \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h_0^{(1)} + \gamma \cdot \mu + \frac{\mathcal{X}_0(t) h_0^{(1)}}{k(t,\cdot)} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h_0^{(1)} + \gamma \cdot \mu + \frac{\mathcal{X}_0(t)}{\kappa(t)} h_0^{(1)} = 0$$

$$\left\langle \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h_0^{(0)} + \frac{\left(h_0^{(1)}\right)^2}{4k(t,\cdot)} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \left(\partial_t + \mathcal{L}_\mu\right) h_0^{(0)} + \frac{1}{4\kappa(t)} \left(h_0^{(1)}\right)^2 = 0$$

Получившиеся из последних равенств уравнения в частных производных эквивалентны уравнениям (38) и (37) из теоремы 2. А значит, получаем что для $h_0^{(0)} = h^{(0)}$ и $h_0^{(1)} = h^{(1)}$ справедливы представления (35),(34) соответственно. □

Теперь, докажем теорему для членов решения первого порядка разложения по параметру $\sqrt{\varepsilon}$:

Theorem 4. *Уравнения Пуассона (53) и (54) удовлетворяют условию центрирования, когда $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(0)}$ удовлетворяют следующим уравнениям в частных производных:*

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h_1^{(1)} + \frac{\mathcal{X}_0(t)}{\kappa(t)} h_1^{(1)} + \mathbf{V} \cdot F^{(1)}(t,\boldsymbol{\mu}) = 0 \tag{59}$$

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\right) h_1^{(0)} + \frac{h_0^{(1)}}{2\kappa(t)} \left(h_1^{(1)} + \mathbf{V} \cdot F^{(0)}(t,\boldsymbol{\mu})\right) = 0 \tag{60}$$

где

$$\mathbf{V} = -\rho \left\langle \beta\psi' \right\rangle, \quad F^{(1)}(t,\boldsymbol{\mu}) = \frac{\mathcal{X}_0(t)}{\kappa(t)} \sum_{i=1}^{k} g_i(\boldsymbol{\mu}) \partial_{\mu_i} h_0^{(1)}(t,\boldsymbol{\mu}) \tag{61}$$

$$F^{(0)}(t,\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\boldsymbol{\mu}) \partial_{\mu_i} h_0^{(1)}(t,\boldsymbol{\mu}) \tag{62}$$

а ϕ - это решение центрированного уравнения Пуассона:

$$\mathcal{L}_0 \phi(y) = \eta(y) \tag{63}$$

Доказательство. Учитывая правые части уравнений Пуассона (51) и (52) имеем следующие их решения с константами, зависящими, вообще говоря, от (t, μ):

$$h_2^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}, y) = -\left(\mathcal{L}_0^{-1}\eta(y)\right)\left(\frac{\mathcal{X}_0(t)}{\kappa(t)} h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu})\right) + c^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{64}$$

$$h_2^{(0)}(t, \boldsymbol{\mu}, y) = -\left(\mathcal{L}_0^{-1}\eta(y)\right)\left(\frac{1}{4\kappa(t)}\left(h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu})\right)^2\right) + c^{(0)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{65}$$

Заметим, что константы $c^{(1)}$ и $c^{(0)}$ не зависят от y.Вследствие предположения, что $\langle \eta \rangle = 0$, уравнение Пуассона (63) центрировано и мы можем считать его решение ϕ известной функцией, то есть:

$$\phi(y) = \mathcal{L}_0^{-1}\eta(y)$$

Учитывая этот факт, уравнения (64), (65) перепишутся следующим образом:

$$h_2^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}, y) = -\phi(y)\frac{\mathcal{X}_0(t)}{\kappa(t)} h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}) + c^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{66}$$

$$h_2^{(0)}(t, \boldsymbol{\mu}, y) = -\phi(y)\frac{1}{4\kappa(t)}\left(h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu})\right)^2 + c^{(0)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{67}$$

Теперь, применим дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1$ к уравнениям (66) и (67) и получим:

$$\mathcal{L}_1 h_2^{(1)}(t, \mu, y) = -\psi'(y)\beta(y)\frac{\mathcal{X}_0(t)}{\kappa(t)} \sum_{i=1}^{k} \left(g_i(\boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\rho}\right) \partial_{\mu_i} h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{68}$$

$$\mathcal{L}_1 h_2^{(0)}(t, \boldsymbol{\mu}, y) = -\psi'(y)\beta(y)\frac{h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu})}{2\kappa(t)} \sum_{i=1}^{k} \left(g_i(\boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\rho}\right) \partial_{\mu_i} h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{69}$$

Тем самым, если выразить правые части из уравнений Пуассона (53) и (54) на переменные $h_3^{(1)}$ и $h_3^{(0)}$, то, получается, они выглядят ровно так, как указано в формулировке теоремы, если ввести обозначения из формулировки и учесть полученные уравнения (68) и (69).

□

Благодаря теореме 4 мы получили уравнения на $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(0)}$. Для получения их явного вида, просто применим формулу Фейнмана - Каца и получим следующую теорему:

Theorem 5. *Решения уравнений (59) и (60) задаются следующими формулами:*

$$h_1^{(1)}(t, \mu) := \mathbf{V} \cdot \phi_1(t, \mu), \qquad \text{и} \tag{70}$$

$$h_1^{(0)}(t, \mu) := \mathbf{V} \cdot \int_t^T \mathbb{E}\left[\frac{h_0^{(1)}(s, \mu_s)}{2\kappa(s)}\left(\phi_1(s, \mu_s) + F^{(0)}(t, \mu_s)\right) \mid \mu_t = \mu\right] ds, \tag{71}$$

где (72)

$$\phi_1(t, \boldsymbol{\mu}) = \int_t^T e^{\int_t^s \frac{x_0(u)}{\kappa(u)} du} \mathbb{E}\left[F^{(1)}(s, \mu_s) \mid \boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}\right] ds \tag{73}$$

8 Построение приближения и финальные результаты

Учитывая все доказанные выше утверждения, получаем следующее приближение с точностью до первого порядка малости для функции H^ε:

$$H_1^\varepsilon(t, x, S, \mu, q) = x + qS + h(t, \mu, q) + \mathbf{V}^\varepsilon \cdot h_1(t, \mu, q) \tag{74}$$

Здесь нижний на индекс 1 добавлени для акцента на первом порядке приближения, функция $\mathbf{V}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\mathbf{V}$, $h_1(t, \mu, q) = h_1^{(1)}(t, \mu)q + h_1^{(0)}(t, \mu)$ и $h(t, \mu, q)$ задается уравнением (32)

Учитывая представление оптимального контроля v_*^ε (19) и представления функции издержек ликвдиности (1) имеем следующее:

$$v_*^\varepsilon(t, \boldsymbol{\mu}, q, y) = \frac{1}{2k(t, y)} \left(bq + \partial_q h^\varepsilon\right) = \frac{1}{2\kappa(t)} (1 + \eta(y)) \left(bq + \partial_q h^\varepsilon\right) \tag{75}$$

Remark 8. Для оценок точности приближений теорем 3 и 4 см [1].

Подставляя приближенное решение для h^ε получаем:

$$v_*^\varepsilon(t, \boldsymbol{\mu}, q, y) = \frac{1}{2k(t, y)} \left(bq + h^{(1),\varepsilon} + 2qh^{(2),\varepsilon}\right) = \frac{1}{2k(t, y)} \left(2\mathcal{X}^\varepsilon q + h^{(1),\varepsilon}\right) \tag{76}$$

$$= -\frac{\mathcal{X}^\varepsilon}{k(t, y)} q - \frac{1}{2k(t, y)} h^{(1),\varepsilon} = \frac{\mathcal{X}_0(t)}{k(t, y)} q - \frac{1}{2k(t, y)} \left(h_0^{(1)}(t, \mu) + \sqrt{\varepsilon} h_1^{(1)}(t, \mu)\right) + \cdots \tag{77}$$

$$= \frac{1}{k(t, y)} \left(\mathcal{X}_0(t) q + \frac{1}{2} h_0^{(1)}(t, \mu)\right) - \frac{1}{2k(t, y)} \sqrt{\varepsilon} h_1^{(1)}(t, \mu) + \cdots \tag{78}$$

Для дальнейшего упрощения вида финального результата введем:

$$v_0(t, \boldsymbol{\mu}, q) = \frac{1}{\kappa(t)} \left(\mathcal{X}_0(t) q + \frac{1}{2} h_0^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu})\right) \tag{79}$$

Тогда для приближенного решения оптимального контроля v_*^ε имеем:

$$v_*^\varepsilon \approx (1 + \eta(y)) v_1^\varepsilon(t, \boldsymbol{\mu}, q) \tag{80}$$

где

$$v_1^\varepsilon(t, \boldsymbol{\mu}, q) = v_0(t, \boldsymbol{\mu}, q) + \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{2\kappa(t)} h_1^{(1)}(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{81}$$

$$= v_0(t, \boldsymbol{\mu}, q) + \mathbf{V}^\varepsilon \cdot C_1(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{82}$$

$$\tag{83}$$

и

$$C_1(t, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2\kappa(t)} \phi_1(t, \boldsymbol{\mu}) \tag{84}$$

где ϕ определяется из (73) теоремы 5.

9 Заключение

В работе рассматривалась задача оптимального трейдинга при условии стохастического влияния действия трейдера на цену (Так называемая концепция stochastic liquidity impact). Ключевая особенность данной работы заключается в том, что мы считаем, что стохастический процесс, характеризующий издержки ликвидности моделируется как процесс, обладающий свойствами возвратности к среднему. Данное предположение согласуется с практическими наблюдениями на реальных биржах. Так же предполагалось, что рынок ориентируется на ряд торговых сигналов,имеющих стохастическую природу, которые также влияют на спред и тем самым на ликвидность торгуемого актива. Оптимальная задача была сведена средствами теории управления к уравнению в частных производных, которое было приближенно решено с помощью аппарата теории приближений. Была найдена с точностью до первого порядка малости оптимальная стратегия v_*^ε трейдера, которая позволяет ему наилучшим образом продать имеющиеся у него в инвентаре количество единиц базового актива в течение ограниченного промежутка времени.

Задача допускает свое продолжение. Можно применять другие средства к решению системы уравнений в частных производных и по другому моделировать функцию издержек ликвидности для поиска приближенной стратегии. Например, считать ее стохастической. Также, полученная методика построения приближений позволяет использовать математический аппарат вычислительной математики для построения приближенных решений и их проверки на практике.

10 Используемая литература

[1] Optimal Trading with Signals and Stochastic Price Impact. Jean-Pierre Fouque, Sebastian Jaimungal, Yuri F. Saporito

[2] Algorithmic and high-frequency trading. A. Cartea, S. Jaimungal, and J. Penalva.

[3] Optimal execution of portfolio transactions. R. Almgren and N. Chriss.

[4] Price Impact. J. P. Bouchaud

[5] Trading Friction Variations among Security Market Participants. Pankaj K Jain, Ramabhadran S Thirumalai, Md Waseem

[6] Теория случайных процессов. А.В.Булинский и А.Н.Ширяев

[7] Incorporating Order-Flow into Optimal Execution. Alvaro Cartea, Sebastian Jaimungal

[8] Multiscale stochastic volatility for equity, interest rate, and credit derivatives. Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, Knut Sølna

[9] Stochastic Calculus,Financial Derivatives and PDE's. Simone Calogero

[10] Stochastic Differential Equations. Bernt Oksendal.