Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 3

Оценки решений уравнения непрерывности

Рассмотрим уравнение непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\bigl(b\mu_t\bigr) = 0, \tag{1}$$

где $b(x,t) = (b^1(x,t), \ldots, b^d(x,t))$ — непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$, причем

$$|b(x,t) - b(z,t)| \le L_b|x-z|.$$

Напомним, что под решением мы понимаем непрерывную (относительно слабой сходимости) кривую вероятностных мер $t \to \mu_t$, которая удовлетворяет условиям: для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$t \to \int \varphi\, d\mu_t$$

является абсолютно непрерывной функцией на $[0,T]$ и верно равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\, d\mu_t = \int \langle b, \nabla\varphi\rangle\, d\mu_t.$$

На прошлой лекции мы показали, что при наших условиях на b задача Коши

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\bigl(b\mu_t\bigr) = 0, \quad \mu_0 = \nu, \tag{2}$$

имеет единственное решение μ_t (в смысле данного выше определения), причем $\mu_t = \nu \circ x_t^{-1}$, где $\dot{x}_t = b(x,t)$, $x_0 = y$.

Напомним, что через $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ мы обозначаем пространство вероятностных мер с конечным вторым моментом.

Предложение 1. *Если $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и μ_t — решение задачи Коши (2) с начальным условием ν, то $\mu_t \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и для некоторой константы $C(T,\nu) > 0$ выполняется неравенство*

$$\sup_{t\in[0,T]} \int |x|^2\, \mu_t(dx) \le C(T,\nu).$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{dt}|x_t(y)|^2 = 2\langle b(x_t(y),t), x_t(y)\rangle \le C_1 + C_2|x_t(y)|^2$$

для некоторых чисел $C_1, C_2 > 0$ и всех $t \in [0,T]$, $y \in \mathbb{R}^d$, то

$$|x_t(y)|^2 \le C_1' + C_2'|y|^2, \quad C_1' = \frac{C_1}{C_2}e^{C_2T}, C_2' = e^{C_2T}.$$

С помощью формулы замены переменной получаем

$$\int |x|^2\, \mu_t(dx) = \int |x_t(y)|^2\, \nu(dy) \le C_1' + C_2'\int |y|^2\, \nu(dy).$$

□

Предложение 2. *Если $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ и μ_t — решение задачи Коши (2) с начальным условием ν, то*

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \le \sqrt{|t-s|}\Bigl(\int_s^t \int |b(x,\tau)|^2\, \mu_\tau(dx)\, d\tau\Bigr)^{1/2}$$

и найдется такая константа $C(T,\nu) > 0$, что

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \le C(T,\nu)|t-s| \quad \forall t,s \in [0,T].$$

Доказательство. Пусть $0 \le s < t \le T$. Так как $\pi = \nu \circ (x_t, x_s)^{-1}$ является планом для μ_t и μ_s, то верно неравенство

$$W_2(\mu_t, \mu_s)^2 \le \int |x_t(y) - x_s(y)|^2 \, \nu(dy).$$

С помощью неравенства Коши-Буняковского получаем оценку

$$|x_t(y) - x_s(y)|^2 \le (t-s) \int_s^t |b(x_\tau(y), \tau)|^2 \, d\tau.$$

По теореме Фубини получаем

$$W_2(\mu_t, \mu_s)^2 \le (t-s) \int_s^t \int |b(x, \tau)|^2 \, \mu_\tau(dx) \, d\tau.$$

Так как $|b(x,\tau)| \le C_1 + C_2|x|^2$, то в силу предыдущего утверждения

$$\int |b(x,\tau)|^2 \, \mu_\tau(dx) \le C(T, \nu)$$

для некоторой константы $C(T,\nu)$. Следовательно, $W_2(\mu_t, \mu_s) \le C(T,\nu)|t-s|$. □

Отметим, что имеет место более точная оценка

$$W_2(\mu_t, \mu_s) \le \int_s^t \|b(\,\cdot\,, \tau)\|_{L^2(\mu_\tau)} \, d\tau,$$

которая означает, что метрическая производная $|\mu_t'|$ абсолютно непрерывной кривой $t \to \mu_t$ оценивается сверху величиной $\|b(\,\cdot\,, t)\|_{L^2(\mu_t)}$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Предложение 3. *Предположим, что μ_t^1 и μ_t^2 — решения уравнений*

$$\partial_t \mu_t^1 + \operatorname{div}\bigl(b_1 \mu_t^1\bigr) = 0, \quad \partial_t \mu_t^2 + \operatorname{div}\bigl(b_2 \mu_t^2\bigr) = 0.$$

Тогда

$$W_2(\mu_t^1, \mu_t^2)^2 \le e^{\Lambda t} W_2(\mu_0^1, \mu_0^2)^2 + e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda s} \int |b_1(x,s) - b_2(x,s)|^2 \, \mu_s^2 \, ds, \quad \Lambda = 2L_b + 1.$$

Доказательство. Напомним, что $\mu_t^1 = \mu_0^1 \circ x_t^{-1}$ и $\mu_t^2 = \mu_0^2 \circ y_t^{-1}$, где

$$\dot{x}_t = b_2(x_t, t), \quad \dot{y}_t = b_2(y_t, t), \quad x_0 = u, \quad y_0 = v.$$

Пусть π — оптимальный план для μ_0^1 и μ_0^2. Тогда $\pi \circ (x_t, y_t)^{-1}$ — план для μ_t^1 и μ_t^2. Следовательно, имеет место неравенство

$$W_2(\mu_t^1, \mu_t^2)^2 \le \iint |x_t(u) - y_t(u)|^2 \, \pi(dudv).$$

Так как

$$\frac{d}{dt}|x_t(u) - y_t(v)|^2 = 2\langle b_1(x_t(u), t) - b_2(y_t(v), v), x_t(u) - y_t(v) \rangle \le$$
$$\le \Lambda |x_t(u) - y_t(v)|^2 + |b_1(y_t(v), t) - b_2(y_t(v), t)|^2,$$

то

$$|x_t(u) - x_t(v)|^2 \le e^{\Lambda t}|u - v|^2 + e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda s} |b_1(y_s(v), s) - b_2(y_s(v), s)|^2 \, ds.$$

Применяя теорему Фубини и формулу замены переменной получаем

$$\iint |x_t(u) - y_t(u)|^2 \, \pi(dudv) \le e^{\lambda t} W_2(\mu_0^1, \mu_0^2)^2 + e^{\Lambda t} \int_0^t e^{-\Lambda s} \int |b_1(x,s) - b_2(x,s)|^2 \, \mu_s^2 \, ds.$$

□

Уравнение Власова

Рассмотрим систему частиц $x_1, \dots, x_N$ на прямой, взаимодействие которых описывается уравнениями Ньютона

$$m_i \ddot{x}_i = -\sum_{j=1}^N m_i m_j K'(x_i - K_j),$$

где K — непрерывно дифференцируемая функция, причем $K(x) = K(-x)$. Предположим, что все частицы имеют одинаковую массу

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_N = \frac{1}{N}.$$

Перейдем к гамильтоновой системе уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K'(x_i - K_j).$$

Для описания данной модели исследуем меру

$$\mu_t^N = \frac{1}{N}\Big(\delta_{(x_1(t), y_1(t))} + \ldots + \delta_{(x_N(t), y_N(t))}\Big),$$

которую называют эмпирической мерой или средним полем.

Пусть $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\, d\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \Big[\varphi_x(x_i(t), y_i(t)) y_i(t) - \varphi_y(x_i(t), y_i(t)) \sum_{j=1}^N K'(x_i(t) - x_j(t))\Big] =$$

$$= \int \Big[\varphi_x(x,y) y - \varphi_y(x,y) \int K(x-u)\mu_t^N(dudv)\Big]\, d\mu_t^N.$$

Следовательно, кривая $t \to \mu_t^N$ является решением уравнения

$$\partial_t \mu_t^N + \partial_x\Big(y\mu_t^N\Big) - \partial_y\Big(\mu_t^N \int K'(x-u)\mu_t^N(dudv)\Big) = 0.$$

Уравнения такого вида называют уравнениями Власова.

Разрешимость уравнения Власова и предел среднего поля

Рассмотрим уравнение Власова более общего вида

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b(x, \mu_t)\mu_t) = 0,$$

где

$$b(x, \mu) = \beta(x) + \int B(x, z)\mu(dz).$$

Далее предполагаем, что

$$|\beta(x) - \beta(y)| + |B(x,z) - B(y,w)| \le L_b\big(|x-y| + |z-w|\big).$$

Отметим, что для всякой непрерывной кривой $t \to \mu_t$, отображающей отрезок $[0, T]$ в $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ с метрикой W_2, векторное поле $b(x, \mu_t)$ непрерывно и

$$|b(x, \mu_t) - b(y, \mu_t)| \le L_b|x-y|.$$

Через $C([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ обозначим множество непрерывных отображений из $[0,T]$ в $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ с метрикой Канторовича W_2. Множество $C([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ с метрикой

$$\varrho(\mu_\cdot, \sigma_\cdot) = \max_{t\in[0,T]} W_2(\mu_t, \sigma_t)$$

является полным метрическим пространством.

Теорема 1. *Существует такое $T > 0$, что задача Коши*

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b(x, \mu_t)\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu,$$

имеет единственное решение в $C([0,T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$.

Доказательство. Рассмотрим отображение F, которое сопоставляет $\sigma_\cdot \in C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ решение μ_t задачи Коши

$$\partial_t\mu_t + \mathrm{div}(b(x,\sigma_t)\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Согласно доказанным выше утверждениям $\mu_\cdot$ существует, единственно и принадлежит пространству $C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$. Таким образом, F отображает пространство $C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ в $C([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$. Покажем, что F — сжимающее отображение.

Пусть $\mu^1_\cdot = F(\sigma^1_\cdot)$ и $\mu^2_\cdot = F(\sigma^2_\cdot)$. Для всех $t\in[0,T]$ имеет место неравенство

$$W_2(\mu^1_t,\mu^2_t)^2 \le e^{\Lambda T}\int_0^T\int |b(x,\sigma^1_t) - b(x,\sigma^2_t)|^2\mu^2_t\,dt.$$

Пусть π_t — оптимальный план для σ^1_t и σ^2_t. Используя вид векторного поля b получаем оценку

$$|b(x,\sigma^1_t) - b(x,\sigma^2_t)| \le \iint |B(x,z) - B(x,w)|\,d\pi_t \le L_b W_2(\sigma^1_t,\sigma^2_t).$$

Следовательно, верно неравенство

$$W_2(\mu^1_t,\mu^2_t) \le L_b\sqrt{T}e^{\Lambda T/2}\max_{s\in[0,T]} W_2(\sigma^1_s,\sigma^2_s).$$

Если $q = L_b\sqrt{T}e^{\Lambda T/2} < 1$, то $\varrho(\mu^1_\cdot,\mu^2_\cdot) \le q\varrho(\sigma^1_\cdot,\sigma^2_\cdot)$ и отображение F является сжимающим. По теореме Банаха F имеет единственную неподвижную точку. □

Вернемся к исходной задаче и мере μ^N_t. Напомним, что μ^N_t является решением уравнения

$$\partial_t\mu^N_t + \partial_x\Bigl(y\mu^N_t\Bigr) - \partial_y\Bigl(\mu^N_t\int K'(x-u)\mu^N_t(dudv)\Bigr) = 0.$$

Будем предполагать, что K' является липшицевой функцией.

Имеет место следующий результат о пределе среднего поля.

Теорема 2. *Если μ^N_0 сходится по метрике W_2 к мере ν при $N\to\infty$, то μ^N_t сходится по метрике W_2 к мере μ_t при $N\to\infty$, где μ_t является решением задачи Коши*

$$\partial_t\mu_t + \partial_x\Bigl(y\mu_t\Bigr) - \partial_y\Bigl(\mu_t\int K'(x-u)\mu_t(dudv)\Bigr) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Так как μ^N_t и μ_t являются решениями уравнения Власова, то

$$W_2(\mu^N_t,\mu_t)^2 \le e^{\Lambda T}W_2(\mu^N_0,\mu_0)^2 + e^{\Lambda T}\int_0^t W_2(\mu^N_s,\mu_s)\,ds.$$

Вывод этой оценки полностью повторяет рассуждения из доказательства предыдущей теоремы. Напомним неравенство Гронуолла: если $f\in C([0,T])$, $Q\ge 0$ и

$$f(t) \le R + Q\int_0^t f(s)\,ds,$$

то $f(t)\le Re^{Qt}$. Следовательно, верна оценка

$$W_2(\mu^N_t,\mu_t)^2 \le C_1e^{C_1T}W_2(\mu^N_0,\mu_0)^2, \quad C_1 = e^{\Lambda T},$$

из которой немедленно выводится требуемое утверждение. □

Таким образом, при больших N распределение частиц приближенно описывается кривой $t\to\mu_t$ в пространстве мер, которая является единственным решением задачи Коши для уравнения Власова с начальным условием ν, где вероятностная мера ν является пределом распределения частиц в момент времени $t=0$ при $N\to\infty$.

Теорема Шаудера и пример выпуклого компакта

Кроме теоремы о сжимающем отображении мощным инструментом для доказательства существования решений нелинейных уравнений является теорема Шаудера о неподвижной точке.

Теорема 3. *Если $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство и $K \subset X$ — выпуклый компакт, то для всякого непрерывного отображения $f\colon K \to K$ существует такая точка $x \in K$, что $f(x) = x$.*

Для применения этой теоремы к нелинейным уравнениям в пространстве мер надо подобрать подходящее нормированное пространство и выпуклый компакт. В качестве нормированного пространства можно взять линейное пространство конечных борелевских мер $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ с нормой Конторовича–Рубинштейна:

$$\|\mu\|_{KR} = \sup\Bigl\{\int \varphi\, d\mu\colon\ |\varphi| \le 1,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x - y|\Bigr\}.$$

На подмножестве вероятностных мер эта норма задает метрику, сходимость по которой совпадает со слабой сходимостью. Важно иметь ввиду, что на знакопеременных мерах данная норма не задает слабую сходимость. Более того, нормированное пространство $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ не является полным.

Пусть $p \ge 1$ и $R > 0$. Множество $K_{p,R}$, состоящее из вероятностных мер μ, удовлетворяющих условию

$$\int |x|^p\, \mu(dx) \le R,$$

является выпуклым компактом в $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Пространство $C([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ с нормой

$$\|\mu_\cdot\| = \max_{t\in[0,T]} \|\mu_t\|_{KR}$$

является нормированным пространством, а множество $\mathcal{K}_{p,R,L}$, состоящее из таких $\mu_\cdot \in C([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$, что

$$\mu_t \in K_{p,R}, \quad \|\mu_t - \mu_s\|_{KR} \le L|t - s|,$$

доставляет пример выпуклого компакта в $C([0,T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$.

Компактность множества $\mathcal{K}_{p,R,L}$ следует из обобщения теоремы Арцела–Асколи.

Теорема 4. *Пусть (X, d_X) — компактное метрическое пространство, (Y, d_Y) — произвольное метрическое пространство и $C(X, Y)$ — метрическое пространство непрерывных отображений из X в Y с метрикой $\varrho(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$. Тогда множество $F \subset C(X, Y)$ является компактом тогда и только тогда, когда 1) найдется такой компакт $K \subset Y$, что $f(x) \in K$ для всех $x \in X$, $f \in F$; 2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon$ для всех x, z, удовлетворяющих неравенству $d_x(x, z) < \delta$, и всех $f \in F$.*

Нерегулярное векторное поле

Выше мы подробно обсудили непрерывное векторное поле b удовлетворяющее по переменной x условию Липшица. Если b только непрерывно, то ситуация существенно усложняется. Например, задача Коши для уравнения непрерывности может иметь несколько решений. Если $d = 1$, $b(x) = \sqrt{|x|}$ и $\nu = \delta_0$, то меры $\mu_t = \delta_0$ и $\mu_t = \delta_{t^2/4}$ являются различными решениями задачи Коши. Если векторное поле b не является непрерывным, то проблемы возникают не только с единственностью, но и существованием. Пусть $b(x) = 1$ при $x \le 0$ и -1 при $x > 0$, а $\nu = \delta_0$. Тогда задача

$$\partial_t \mu_t + \partial_x(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu,$$

не имеет решения. Пусть $\delta > 0$, $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\psi(x) = \psi(-x)$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi(x) = 1$ на $(-\delta, \delta)$, $\psi(x) = 0$ вне $(-2\delta, 2\delta)$, $\psi' \le 0$ при $x > 0$. Тогда

$$b(x)\psi'(x) \ge 0, \quad \frac{d}{dt}\int \psi\, d\mu_t = \int b\psi'\, d\mu_t \ge 0.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\int (1 - \psi)\, d\mu_t \le 0$$

и $\mu_t = 0$ вне $(-2\delta, 2\delta)$. В силу произвольности $\delta > 0$ получаем $\mu_t = \delta_0$, но это точно не является решением, так как на функции ψ, равной в окрестности нуля x, получим

$$0 = \frac{d}{dt}\int \psi\, d\mu_t = \int b(x)\psi'(x)\, d\mu_t = b(0)\psi'(0) = 1.$$

Таком образом, в случае нерегулярного b требуются дополнительные ограничения на начальное условие и на класс мер, в которых решается уравнение непрерывности. В качестве такого класса часто выбирают абсолютно непрерывные меры.

Приведем в качестве примера формулировку известного результата R.J.DiPerna, P.L.Lions.

Функция $u \in L^1([0,T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ является решением задачи Коши

$$\partial_t u - \langle b, \nabla u\rangle + cu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{3}$$

если для всякой функции $\varphi \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, $\varphi(x,t) = 0$ при $|x| > R$ и $\varphi(x,T) = 0$, выполняется равенство

$$-\int_0^T \int \left[\varphi_t u + \mathrm{div}(b\varphi)u + c\varphi u\right] dx\, dt + \int \varphi(x,0)u_0(x)\, dx = 0.$$

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p \le +\infty$, $q = p/(p-1)$. *Предположим, что*

$$c, \mathrm{div} b \in L^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad b \in L^1([0,T], W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^d))$$

и

$$\frac{|b|}{1+|x|} \in L^1([0,T], L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Тогда существует единственное решение $u \in L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R}^d))$ *задачи Коши* (3).

Если $c = -\mathrm{div} b$, то уравнение имеет вид уравнения непрерывности

$$\partial_t u - \mathrm{div}(bu) = 0.$$

Основная идея доказательства теоремы состоит в перенормировке решений.

Пусть $\beta \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Предположим, что u и b гладкие функции. Тогда

$$\partial_t \beta(u) - \langle b, \nabla\beta(u)\rangle + cu\beta'(u) = 0.$$

Если $\beta(u) = u^2$, то

$$\partial_t u^2 - \langle b, \nabla u^2\rangle + 2cu^2 = 0.$$

Проинтегрируем по $\mathbb{R}^d$ это равенство и во втором слагаемом проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{dt}\int u^2\, dx = -\int (2c + \mathrm{divb})u^2\, dx.$$

Если $-(2c + \mathrm{divb}) \le C$, то

$$\int u^2(x,t)\, dx \le e^{Ct}\int u_0^2(x)\, dx.$$

Из такой оценки немедленно следует единственность решения, непрерывная зависимость от начального условия. Кроме того, при построении решения с помощью приближения негладких коэффициентов гладкими такая оценка дает ограниченность соответствующей последовательности решений в L^2, что позволяет выбрать из нее слабо сходящуюся подпоследовательность. Ключевым моментом этих рассуждений является равенство

$$\partial_t \beta(u) - \langle b, \nabla\beta(u)\rangle + cu\beta'(u) = 0.$$

Решения, для которых такое равенство выполняется для всех $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ называют перенормируемыми. Доказательство перенормируемости решений из того или иного функционального пространства является самой трудной частью теории существования и единственности.

Наконец, отметим, что условие $b \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ можно заменить на условие $b \in VB_{loc}(\mathbb{R}^d)$ с дополнительным предположением, что дивергенция b имеет плотность относительно меры Лебега. Такое обобщение получено в работах L.Ambrosio.