ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

О сходимости задач Майера, возникающих в теории финансовых рынков с транзакционными издержками

Выполнил студент
609 группы
Сидоренко Артур Павлович

____
подпись студента

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Кабанов Юрий Михайлович

____
подпись научного руководителя

Москва

2022 г.

Содержание

Аннотация **2**

1 Введение **2**

2 Постановка задачи **3**

3 Основные результаты **5**

4 Полунепрерывность снизу **6**

5 Плотность распределений стратегий **14**

6 Расширенная слабая сходимость **17**

7 Доказательства основных результатов **18**

8 Выводы **19**

9 Заключение **20**

Литература **20**

Аннотация

Геометрический подход к рынкам с пропорциональными трансакционными издержками предписывает встраивание модели фондового, валютного или другого рынка, заданной в параметрической форме, в естественную геометрическую структуру, заданную двумя объектами, S и K. Первый компонент — это процесс цен на базовые активы, а второй — конусозначный процесс, отражающий эволюцию множества платежеспособности. Оказывается, такие вопросы как безарбитражность, хеджирование и портфельное инвестирование могут быть изучены в этой геометрической постановке. В данной работе исследуется непрерывность функции благосостояния и оптимальной стратегии в задаче максимизации ожидаемой полезности терминального благосостояния от распределения процесса цен.

1 Введение

На начальных этапах теории рынков с транзакционными издержками комиссии описывались параметрически, например, в виде матрицы издержек или в виде процессов цены покупки и цен продажи. Задача максимизации полезности при наличии транзакционных издержках была впервые рассмотрена в работе [7]. Авторы описали решение задачи потребления и сбережений в модели Блэка–Шоулза. Данная статья опередила свое время, поэтому авторы не располагали инструментарием для проведения строгого доказательства. Оно было предоставлено в работах [2] и [10].

Важно отметить, что в перечисленных выше работах рассматривались модели с одним рисковым активом. Геометрический подход к описанию рынков со многими активами был предложен в [5]. В дальнейшем этот подход развивался, и полученные с его помощью результаты были собраны в монографии [6]. Было замечено, что такие задачи, как условия безарбитражности, хеджирование, портфельное инвестирование могут решаться в рамках геометрического метода. Этот подход включает в себя описание модели рынка $\mathbf{M}$ с помощью двух элементов $\mathbf{M} = \mathbf{M}(S, K)$: процесса цен S и выпуклого конуса K с $\mathbb{R}^d_+ \subset K$, который называется конусом платежеспособности. В финансовых моделях конус K полиэдральный.

В модели $\mathbf{M}(S, K)$ определяется множество $\mathcal{A}(x)$ допустимых стратегий и соответствующих им управляемых процессов с начальным значением $x \in \mathbb{R}^d$ и линейной динамикой. Детальное описание имеется в разделе 2.

В данной работе рассматривается стохастическая задача Майера для $\mathbf{M}(S, K)$, т.е. задача максимизации по стратегиям из $\mathcal{A}(x)$ математического ожидания вогнутой непрерывной функции от терминального значения управляемого процесса. Пусть $u(x, S, K)$ — соответствующая функция значения.

Интересный вопрос заключается в непрерывности $u(x, S, K)$ по S. При каких условиях из сходимости S^n к S следует сходимость $u(x, S^n)$ к $u(x, S)$? Что можно сказать об оптимальных стратегиях? Данный вопрос имеет практическую значимость. Во-первых, при применении моделей финансовой математики на практике применяются численные схемы, которые находят лишь приближенные, а не точные решения. Во-вторых, возникают погрешности при калибровке параметров моделей. Поэтому востребованы только такие модели, которые устойчивы относительно небольших изменений исходных параметров.

Наша работа основана на [1], где были получены ответы для модели с одним рисковым активом. Нашей целью является изучение обозначенных выше вопросов для геометрической модели рынков с транзакционными издержками.

2 Постановка задачи

В модели $\mathbf{M}(S, K)$ заданы:

(i) непрерывный согласованный d-мерный случайный процесс $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$, заданный на неком стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P})$, где фильтрация $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ удовлетворяет обычным условиям, $\mathcal{F}_0$ порождена нулевыми множествами из $\mathcal{F}$; предполагается, что компоненты процесса S строго положительны, $S^1 \equiv 1$ и $S_0 = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$;

(ii) замкнутый собственный полиэдральный конус $K \subset \mathbb{R}^d$ такой, что $\operatorname{int} K \supset \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$. Дуальный конус $K^* := \{w \in \mathbb{R}^d \colon wx \geq 0 \,\forall x \in K\} \subset \mathbb{R}^d_+$. Кроме того, $\operatorname{int} K^* \neq \varnothing$.

Соотнесем с K и S конусозначный процесс $\widehat{K} := K/S$ и $\widehat{K}^*$. Интуитивное обозначение $\widehat{K} = (\widehat{K}_t)$ может быть введено более формальным образом $\widehat{K}_t := \varphi_t K$, где $\varphi_t : x \to x/S$, или, в более подробной записи,

$$\varphi_t : (x^1, ..., x^d) \mapsto (x^1/S^1_t, \ldots, x^d/S^d_t).$$

Для дуальных конусов верно следующее равенство: $\widehat{K}^*_t = \varphi^{-1} K^*$.

Пусть $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ — согласованный непрерывный справа процесс ограниченной вариации. Определим $\dot{B}$ как опциональный процесс такой, что $B = \dot{B} \cdot \operatorname{Var} B$, где $\operatorname{Var} B = \sum_{i=1}^d \operatorname{Var} B^i$. Процесс $\dot{B}$ может быть рассмотрен как производная Радона–Никодима B относительно $\mathrm{Var}B$. Технические детали могут быть найдены, например, в [4], предложение I.3.13. Мы потребуем, чтобы $\dot{B} \in -K$ с точностью до пренебрежимости. Положим $B_{0-} = 0$, так что мера в нуле равняется B_0. Такие процессы будут называться управлениями или стратегиями.

По управлению B и вектору $x \in K$ определим процесс $\widehat{V} = \widehat{V}(x, B, S)$ с компонентами $\widehat{V}^{(i)} = x^{(i)} + (1/S^{(i)}) \cdot B^{(i)}$ и процесс $V = \varphi^{-1}\widehat{V}$ с $V^{(i)} = S^{(i)}\widehat{V}^{(i)}$. Здесь и далее мы используем стандартное обозначение "$\cdot$"для интегралов.

Если S — семимартингал, то по формуле произведения можно получить, что $V^{(i)} = x^{(i)} + V_-^{(i)} \cdot Y^{(i)} + B^{(i)}$, где $Y^{(i)} := 1 + (1/S^{(i)}) \cdot S^{(i)}$. Далее мы не требуем семимартингальности S.

Множество $\mathcal{A}(x)$ *допустимых стратегий* образовано такими управлениями B, что $\widehat{V}_t(x, B, S) \in \widehat{K}_t$, для всех $t \in [0, T]$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{A}(x)$ выпукло. Множества $\mathcal{A}(x)$ удовлетворяют следующим свойствам: $\mathcal{A}(y) \supseteq \mathcal{A}(x)$ для $y - x \in K$, при любом $\lambda > 0$ верно, что $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$, и

$$\alpha \mathcal{A}(x) + (1-\alpha)\mathcal{A}(y) \subseteq \mathcal{A}(\alpha x + (1-\alpha)y), \quad \forall\, \alpha \in [0, 1].$$

Цель управления — максимизация по $\mathcal{A}(x)$ ожидаемой полезности $\mathbf{E}[U(\widehat{V}_T(x, B, S), S)]$, т.е. поиск

$$u(x) := u(x, S, K) := \sup_{B \in \mathcal{A}(x)} \mathbf{E}[U(\widehat{V}_T(x, B, S), S)]$$

где $U : \mathbb{R}^d \times C^d([0, T]) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ непрерывное отображение такое, что $f \in C^d[0, T]$ функция $v \mapsto U(v, f)$ вогнутая и возрастающая относительно покомпонентного порядка для $\mathbb{R}^d$ (т.е. индуцированного конусом $\mathbb{R}^d_+$). Для некоторых стратегий $U^-(\widehat{V}_T(x, B, S), S)$ не обязано быть интегрируемым. В этом случае полагаем ожидание равным минус бесконечности. Такая задача напоминает классическую задачу Майера оптимального управления, потому что явная зависимость от управляемого процесса имеется только через терминальное значение.

Далее предполагаем, что $\mathbf{E}[U(x, S)] > -\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$. Дальнейшие предположения приведены ниже.

Замечание. Процесс S — процесс цен на d базовых активов, которые измеряются в единицах первого актива ($S^1_t = 1$). Процесс $\widehat{V}^i$ описывает эволюцию позиции i в физических единицах, процесс V^i — в денежных единицах. Условие $\dot{B} \in -K$ — это условие самофинансируемости портфеля. Условие собственности конуса платежеспособности $\operatorname{int} K^* \neq \varnothing$ можно неформально трактовать так, что любой обмен влечет за собой транзакционные издержки.

Рассмотрим последовательность моделей $\mathbf{M}(S^n, K^n)$, каждая определенная на своем стохастическом базисе. Далее верхний индекс n будет обозначать объекты, относящиеся к $\mathbf{M}^n$. В частности,

$$u^n(x) := \sup_{B\in\mathcal{A}^n(x)} \mathbf{E}[U(\widehat{V}_T(x,B,S),S^n)].$$

3 Основные результаты

Опишем набор предположений на модели $\mathbf{M^n}$ и $\mathbf{M}$.

Предположение A.1. (i) Существуют непрерывные функции $m_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$ с $m_i(0)=0$, $i=1,2$, и интегрируемая с.в. ζ такая, что для всех с.в. $X\in\widehat{K}_T$ и $\alpha\in(0,1)$

$$U((1-\alpha)X,S)\geq(1-m_1(\alpha))U(X,S)+m_2(\alpha)\zeta.$$

(ii) Для всех $x\in\operatorname{int}K\ \cap\ \operatorname{int}\operatorname{dom}u$ и $\{B^n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $B^n\in\mathcal{A}(x)$ множество $\{U(\widehat{V}_T(x,B^n,S),S^n)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно интегрируемо.

*Замечание.*Предположение **A.1** (i) верно для $U(x,S)=(\ell(S_Tx))^{\gamma}$ при $0<\gamma<1$ и для $U(x,S)=\ln(\ell(S_Tx))$, где ℓ — функция ликвидации, а произведение векторов берется покомпонентно.

Далее $\mathcal{D}_T^l=D([0,T],\mathbb{R}^l)$ — пространство Скорохода, $\mathcal{C}_T^d=C([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Предположение A.2. (i) Фильтрация $(\mathcal{F}_t^n)_{t\in[0,T]}$ порождена процессом Y^n, где Y^n имеет траектории в $\mathcal{D}_T^l$; фильтрация $(\mathcal{F}_t^n)_{t\in[0,T]}$ порождена процессом Y, где Y имеет траектории в $\mathcal{D}_T^l$.

(ii) Имеется слабая сходимость мер $\mathcal{L}((Y^n,S^n)|\mathbf{P}^n)\to\mathcal{L}((Y,S)|\mathbf{P})$ в пространстве $\mathcal{D}_T^l\times\mathcal{C}_T^d$.

Обозначим множество мартингалов $(M_t)_{t=0}^T$, принимающих значения в A, за $\mathcal{M}_0^T(A)$.

Предположение A.3. (i) Имеется постоянный детерминированный полиэдральный конус G такой, что $\operatorname{int}G\supset K\setminus\{0\}$, $\mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^{n*}\setminus\{0\})\neq\varnothing$ для всех n и $\mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^{*}\setminus\{0\})\neq\varnothing$, где $\widehat{G}^{n*}=(\varphi^n)^{-1}(G)$ и $\widehat{G}^*=\varphi^{-1}(G)$.

(ii) Последовательность мер $\mathbf{P}^n$ контигуальна относительно $\mathbf{Q}^n:=Z^{n,(1)}\mathbf{P}^n$ для некого $Z^n\in\mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^{n*}\setminus\{0\})$.

Замечание. Предположение выше представляет собой некоторую версию робастной безарбитражности в терминах состоятельных ценовых систем, т.е. объектов из $\mathcal{M}_0^T(\widehat{G}^{*}\setminus\{0\})$. Робастность в данном контексте означает, что свойство безарбитражности сохраняется при малом уменьшении транзакционных издержек.

Дополнительно введем предположение о расширенной слабой сходимости.

Предположение A.4. Имеется расширенная слабая сходимость $\mathcal{L}(Y^n|\mathbf{P}^n)$ к $\mathcal{L}(Y|\mathbf{P})$, т.е. для всех непрерывных ограниченных функций $\psi : \mathcal{D}^l_T \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}((X^n, Y^n)|\mathbf{P}^n) \to \mathcal{L}((X, Y)|\mathbf{P}),$$

где

$$X^n_t = \mathbf{E}[\psi(Y^n)|\mathcal{F}^n_t], \quad X_t = \mathbf{E}[\psi(Y)|\mathcal{F}_t].$$

Последовательность $B^n \in \mathcal{A}^n(x)$ асимптотически оптимальна, если

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}^n} \left[U(\widehat{V}^{x,B^n}_T, S^n) \right] - u^n(x) \right) = 0.$$

Теорема 3.1. *При предположениях* **A.1** – **A.4**

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u^n(x)$$

для всех $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены* **A.1** – **A.4**. *Пусть* $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$. *Пусть* $B^n \in \mathcal{A}^n(x)$ *— последовательность асимптотически оптимальных стратегий. Тогда последовательность распределений* $\mathcal{L}(Y^n, S^n, B^n|\mathbf{P}^n)$ *слабо относительно компактна. Эта последовательность имеет хотя бы одну предельную точку вида* $\mathcal{L}(Y, S, B|\mathbf{P})$, *где* B *— непрерывный справа процесс ограниченной вариации такой, что* $\dot{B} \in -K$ *и является допустимым. Его опциональная проекция* ${}^oB$ *относительно* $(\mathcal{F}^Y_t)_{t\in[0,T]}$ *является оптимальной стратегией, т.е.* ${}^o\dot{B} \in -K$, ${}^oB$ *допустима и*

$$u(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[U(\widehat{V}^{x,{}^oB}_T, S)].$$

4 Полунепрерывность снизу

Начнем с элементарной леммы о приближении конечной меры на $[0, T]$ дискретными мерами.

Для равномерной нормы и модуля непрерывности $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ используются следующие обозначения:

$$||f|| = ||f||_T := \sup_{s\le T} |f_s|, \qquad w(f, \varepsilon) = w_T(f, \varepsilon) := \max_{|r-s|\le\varepsilon} |f_r - f_s|.$$

Лемма 4.1. *Пусть $b = (b_t)_{t\in[0,T]}$ — непрерывная справа функция ограниченной вариации и пусть*

$$b^m := b_0 I_{[t_0,t_1[} + \sum_{k=1}^{m-1} b_{t_k} I_{\Delta_k} + b_T I_{\{T\}}, \quad \Delta_k := [t_k, t_{k+1}), \quad t_k = t_k^m := kT/m.$$

Тогда для любой непрерывной функции f и любого t_k

$$|f \cdot b^m_{t_k} - f \cdot b_{t_k}| \le w(f, T/m)\mathrm{Var}_T b. \tag{4.1}$$

Кроме того, $f \cdot b^m_T \to f \cdot b_T$ при $m \to \infty$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда b — возрастающая функция, являющаяся функцией распределения меры $b(ds)$ с $b(\{0\}) = b_0$ и $b(]0,t]) = b_t - b_0$. Соответственно, b^m — функция распределения такой дискретной меры $b^m(ds)$, что $b^m(\{t_k\}) = b_{t_k} - b_{t_{k-1}}$, где $1 = 0, \dots, m$ (при этом $b^m(\{t_0\}) = b_0$) и

$$f \cdot b^m_t = \int_{[0,t]} f(s) b^m(ds) = f_0 b_0 + \sum_{k=1}^{m} I_{\{t_k \le t\}} f_{t_k}(b_{t_k} - b_{t_{k-1}}).$$

Если $t = t_k$, то выражение выше есть ни что иное, как интегральная сумма интеграла Римана–Стилтьеса $f \cdot b_{t_k}$. Из леммы 12.3 в [9] следует требуемая сходимость. □

Пусть $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ — d-мерный согласованный непрерывный справа процесс ограниченной вариации такой, что $\dot B \in -K$. Определим приближения

$$B^m = B_0 I_{[t_0,t_1)} + \sum_{k=1}^{m-1} B_{t_k} I_{\Delta_k} + B_T I_{\{T\}}, \quad \Delta_k := [t_k, t_{k+1}), \quad t_k = t_k^m := kT/m.$$

Тогда $\dot B^m_t \in -K$ для всех $t \in [0,T]$. В самом деле,

$$\dot B^m_{t_k} = \Delta B^m_{t_k} = B_{t_k} - B_{t_{k-1}} = \int_{(t_{k-1},t_k]} \dot B_s d\,\mathrm{Var}\, B_s \in -K,$$

поэтому $\dot B^m_t \in -K$ для всех $t \in [0,T]$.

Для $r > 0$ определим шар $\mathcal{O}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^d\colon |y - x| < r\}$ с замыканием

$\bar{\mathcal{O}}_r(x)$. Напомним определение функции ликвидации

$$x \mapsto \ell(x) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \colon x - \lambda e_1 \in K\}.$$

Функция ликвидации непрерывна, и $\ell(x) > 0$ для $x \in \operatorname{int} K$. Определим для $x \in \operatorname{int} K$ стратегию L^x по следующему правилу: $L^x_{0-} = 0$ и

$$L^x_t := \ell(x)e_1 - x, \quad t \geq 0.$$

Нетрудно проверить, что L^x является стратегией и $L^x \in \mathcal{A}(x)$. Данная стратегия воплощает идею ликвидации позиций по рисковым активам в начальный момент времени.

Лемма 4.2. *Пусть* **A.1** (i) *выполнено. Тогда* u *непрерывна на множестве* $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} u$ и пусть $B \in \mathcal{A}(x)$.

Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ шар $\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(x) = x + \bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(0) \subset \operatorname{int} K$, так что $\ell(y)e_1 \in \operatorname{int} K$ для всех $y \in \bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(x)$.

Для всех $\alpha \in (0, 1]$ стратегия $B^{\alpha,x} := \alpha L^x + (1 - \alpha)B$ принадлежит $\mathcal{A}(x)$ и $x + (1/S) \cdot B^{\alpha,x} \in \widehat{K} + \alpha\ell(x)$. Нетрудно видеть, что

$$y+(1/S)\cdot L^{y-x}+(1/S)\cdot B^{\alpha,x} = \ell(y-x)e_1+x+(1/S)\cdot B^{\alpha,x} \in (\alpha\ell(x)+\ell(y-x))e_1+\widehat{K}.$$

Найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon(\alpha_0) > 0$, что $\alpha\ell(x) + \ell(y - x) \geq 0$ для всех $y \in \bar{\mathcal{O}}_{\varepsilon_0}(x)$. Поэтому $L^{y-x} + B^{\alpha,x} \in \mathcal{A}(y)$ и покомпонентно

$$y + (1/S) \cdot (L^{y-x} + B^{\alpha,x})_T = (\alpha\ell(x) + \ell(y - x))e_1 + (1 - \alpha)\widehat{V}^{x,B}_T \geq (1 - \alpha)\widehat{V}^{x,B}_T.$$

Из этого вытекает, что

$$U(\widehat{V}_T(y, L^{y-x} + B^{\alpha,x}, S), S) \geq (1 - m_1(\alpha))U(\widehat{V}_T(x, B, S), S) + m_2(\alpha)\zeta.$$

Поэтому

$$u(y) \geq (1 - m_1(\alpha))u(x) + m_2(\alpha)\mathbf{E}[\zeta].$$

Используя предельный переход, получаем неравенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{y\in\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(x)} u(y) \geq u(x).$$

С другой стороны, если $x+\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(0) \in \operatorname{int} K$, то $\kappa x+\bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(0) \in \operatorname{int} K$ для $\kappa = 1+\varepsilon$.

Поэтому для всех $y \in \bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(x)$, т.е. вида $y = x + h$, где $h \in \bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(0)$, имеем:

$$u(y) \le u(\kappa x) := \sup_{B \in \mathcal{A}(\kappa x)} \mathbf{E}[U(\widehat{V}_T(\kappa x, B, S), S)] = \sup_{B \in \mathcal{A}(x)} \mathbf{E}[U(\kappa \widehat{V}_T(x, B, S), S)].$$

Пусть $\alpha = 1 - 1/\kappa = \varepsilon/(1+\varepsilon)$. Из предположения **A.1** (i) следует, что

$$U(\kappa \widehat{V}_T(\kappa x, B, S), S) \le \frac{1}{1 - m_1(\alpha)} U(\widehat{V}_T(\kappa x, B, S), S) - \frac{m_2(\alpha)}{1 - m_1(\alpha)} \zeta,$$

поэтому

$$u(\kappa x) \le \frac{1}{1 - m_1(\alpha)} u(x) - \frac{m_2(\alpha)}{1 - m_1(\alpha)} \mathbf{E}[\zeta].$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y \in \bar{\mathcal{O}}_\varepsilon(x)} u(y) \le u(x).$$

Лемма доказана. $\Box$

Изменения в стратегии вызывают изменения стоимости портфеля. Если портфель содержит отрицательные позиции, то измененная стратегия может потерять свойство допустимости. Чтобы снова ее сделать допустимой, можно обеспечить приток дополнительных средств в портфель. Следующая лемма формализует эту идею.

Лемма 4.3. *Пусть* $x \in \mathrm{int} K$, $B \in \mathcal{A}(x)$. *Существует согласованный непрерывный справа кусочно-постоянный процесс* ξ^m_t *со значениями* $\mathbb{R}^d_+$ *такой, что* $||\xi^m|| \to 0$ *при* $m \to \infty$ *и* $\widehat{V}^{x,B^m}_t + \xi^m_t \in \widehat{K}_t$ *для всех* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Положим

$$\beta^{m,i}_k := |(1/S^{(i)}) \cdot (B^{m,(i)}_{t_k} - B^{(i)}_{t_k})|.$$

Заметим, что $\beta^{m,i}_k$ является $\mathcal{F}_{t_k}$-измеримой. Нетрудно заметить, что

$$(1/S^{(i)}) \cdot B^i_{t_k} \le (1/S^{(i)}) \cdot B^{m,i}_{t_k} + \beta^{m,i}_k.$$

Из неравенства (4.1) следует, что $|\beta^{m,i}_k| \le w(1/S^{(i)}, T/m) \mathrm{Var}_T B^i$. Напомним, что $\mathbb{R}^d_+ \subseteq \widehat{K}$. Поэтому $\widehat{V}^{x,B^m}_{t_k} + \beta^m_k \in \widehat{K}_{t_k}$ для всех $k \le m$. Так как $\phi_t \phi^{-1}_{t_k} \widehat{K}_{t_k} = \widehat{K}_t$,

$$\phi_t \phi^{-1}_{t_k} (\widehat{V}^{x,B^m}_{t_k} + \xi^m_k) \in \widehat{K}_t.$$

Для $t \in [t_k, t_{k+1})$, имеем $\widehat{V}_t^{x,B^m} = \widehat{V}_{t_k}^{x,B^m}$ и

$$\widehat{V}_t^{x,B^m} + (\phi_t\phi_{t_k}^{-1} - I)\widehat{V}_t^{x,B^m} + \phi_t\phi_{t_k}^{-1}\beta_k^m \in \widehat{K}_t.$$

Поэтому для всех $t \in [0, T]$ имеем $\widehat{V}_t^{x,B^m} + \xi_t^m \in \widehat{K}_t$ с

$$\xi_t^m := \phi_t\phi_{t_k}^{-1}\beta_k^m + (\phi_t\phi_{t_k}^{-1} - I)\widehat{V}_t^{x,B^m}, \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

и $\xi_T^{m,i} = \beta_m^{m,i}$. Процесс $\xi_t^{m,i}$ является согласованным и непрерывным справа с пределами слева.

Остается оценить $||\xi||$. Во-первых, напишем оценку для соотношений, включающих в себя S:

$$|S_{t_k}^{(i)}/S_t^{(i)} - 1| \le ||1/S^{(i)}||w(S^{(i)}, T/m)$$

и

$$S_{t_k}^{(i)}/S_t^{(i)} \le ||S^{(i)}||\,||1/S^{(i)}||.$$

В силу (4.1)

$$||(1/S^{(i)}) \cdot B^{m,i}|| \le ||(1/S^{(i)}) \cdot B^i|| + w(1/S^{(i)}, T/m)\mathrm{Var}_T B^i.$$

Прямая оценка показывает, что

$$||\xi^{m,i}|| \le a^{m,i}w(1/S^{(i)}, T/m) + b^{m,i}w(S^{(i)}, T/m), \tag{4.2}$$

где

$$a^{m,i} := ||S^{(i)}||||1/S^{(i)}||\mathrm{Var}_T B^i$$

и

$$b^{m,i} := ||1/S^{(i)}|| \left(|y^i| + ||(1/S^{(i)}) \cdot B^i|| + w(1/S^{(i)}, T/m)\mathrm{Var}_T B^i\right).$$

Правая часть (4.2) стремится к нулю при $m \to \infty$ с вероятностью единица.$\square$

Напомним, что $\mathbf{E}[|\eta_1 - \eta_2| \wedge 1]$ — метрика на $L^0(\mathbb{R}^d, \mathbf{P})$, определяющая сходимость по вероятности.

Лемма 4.4. *Пусть $\delta > 0$, пусть ζ является с.в. со значениями в $\mathbb{R}^k$, пусть η является $\sigma\{\zeta\}$-измеримой с.в. со значениями в выпуклом замкнутом конусе G. Тогда существует непрерывная ограниченная функция $f : \mathbb{R}^k \to G$ такая, что* $\mathbf{E}[|f(\zeta) - \eta| \wedge 1] < \delta$.

Доказательство. Положим $\eta_c := \eta I_{\{|\eta| \le c\}} + c\eta/|\eta| I_{\{|\eta|>c\}}$, где константа $c > 0$. Величина η_c $\sigma\{\zeta\}$-измерима, принимает значения из $-K$, $|\eta_c| \le c$, и

$\mathbf{E}[|\eta-\eta_c|\wedge 1]<\delta/2$ для достаточно большого c. По теореме Дуба $\eta_c=f_0(\zeta)$ для некой борелевской функции f_0 с $|f_0|\le c$. Множество непрерывных ограниченных функций плотно в $L^2(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}(\mathbb{R}^k),\mu_\zeta)$, где μ_ζ — распределение ζ, так что имеется непрерывная функция f_1 с $|f_1|\le c$ и такая, что выполнено неравенство $\mathbf{E}[|f_1(\zeta)-f_0(\zeta)|^2]<\delta^2/4$. Положим $f(y):=\Pi(f_1(y))$, где Π — евклидова проекция на непрерывный замкнутый конус G. Напомним, что Π непрерывна и $|\Pi u-v|^2\le|u-v|^2$ для всех $v\in G$ и $u\in\mathbb{R}^k$. Поэтому

$$\mathbf{E}[|f(\zeta)-\eta_c|\wedge 1]\le(\mathbf{E}[|f(\zeta)-f_0(\zeta)|^2])^{1/2}<\delta/2,$$

откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 4.5. *Пусть $\delta>0$, а η — $\mathcal{F}_t$-измеримая с.в. со значениями в выпуклом замкнутом конусе G. Тогда имеются $r_i\in[0,t]$, $i=1,...,M$, и непрерывная ограниченная функция $f:(\mathbb{R}^{d+l})^M\to G$ такая, что*

$$\mathbf{E}[|f(Y_{r_1},...,Y_{r_M})-\eta|\wedge 1]<\delta.$$

Доказательство. Как в доказательстве выше, мы можем свести исходную проблему к аппроксимации случайных величин η_c таких, что выполнено следующее неравенство: $\mathbf{E}[|\eta-\eta_c|\wedge 1]<\delta/2$. Пусть $r_i^N:=i2^{-N}t$, где $i=0,...,2^N$, а $n\in\mathbb{N}$, и пусть сигма-алгебра $\mathcal{G}_t^N:=\sigma\{Y_{r_i^N},\ i\le 2^N\}$. При фиксированном t семейство $(\mathcal{G}_t^N)_{N\ge1}$ является дискретной фильтрацией, и $\mathcal{F}_t=\sigma\{\mathcal{G}_t^N,\ N\ge1\}$. Обозначим $\eta_c^N:=\mathbf{E}[\eta_c|\mathcal{G}_t^N]$. По теореме Леви $\eta_c^N\to\eta_c$ п.н. при $N\to\infty$. Поэтому $\mathbf{E}[|\eta_c^N-\eta_c|\wedge 1]<\delta/4$ для достаточно большого N. Остается применить предыдущую лемму для η_c^N. □

Следующее утверждение — упрощенная версия Леммы 3.6.1 из [6].

Лемма 4.6. *Пусть G — (детерминированный) замкнутый выпуклый конус, X — согласованный непрерывный справа процесс ограниченной вариации. Тогда скалярный процесс (a,X) убывает для всех $a\in G^*$ тогда и только тогда, когда $\dot X_\tau\in L^0(-G,\mathcal{F}_\tau)$ для всех марковских моментов τ.*

Следующая лемма позволяет работать управлениями, для которых условие допустимости верно не на всем отрезке $[0,T]$, а лишь вплоть до некоторого момента остановки.

Лемма 4.7. *Пусть τ — момент остановки. Пусть B — согласованный непрерывный справа процесс ограниченной вариации с $\dot B_\sigma\in -K$ для любого момента остановки $\sigma<\tau$ п.н. Рассмотрим процесс $Z=BI_{[0,\tau)}+\ell(B_{\tau-})e_1I_{[\tau,+\infty)}$,* *где ℓ — функция ликвидации. Тогда Z — согласованный непрерывный справа процесс ограниченной вариации с $\dot{Z} \in -K$.*

Доказательство. Очевидно, Z непрерывен справа и имеет ограниченную вариацию. Выберем $a \in K^*$. По лемме 4.6 скалярный процесс (a, B) убывает на $[0, \tau)$. Тогда скалярный процесс (a, Z) убывает на $[0, \tau)$ и постоянен для $t \geq \tau$. Остается показать, что $aZ_\tau \leq aZ_{\tau-}$. По определению функции ликвидации $\ell(B_{\tau-}) - B_{\tau-} \in -K$, так что $a(\ell(B_{\tau-})e_1 - B_{\tau-}) \leq 0$. Благодаря лемме 4.6, $\dot{Z} \in -K$. $\square$

Лемма 4.8. *Пусть $x \in K$. Если в условиях леммы 4.7 выполнено включение $\widehat{V}^{x,B}_\sigma \in \widehat{K}_\sigma$ для всех моментов остановки $\sigma < \tau$ п.н., то $Z \in \mathcal{A}(x)$.*

Доказательство. Непосредственная выкладка показывает, что

$$\widehat{V}^{x,Z}_t = \widehat{V}^{x,B}_t I_{t<\tau^n} + \frac{1}{S_\tau}\ell(V^{x,B}_{\tau-})e_1 I_{t\geq\tau}.$$

Оба слагаемых входят в $\widehat{K}$, из чего следует необходимое утверждение. $\square$

Предложение 4.9. *Пусть* **A.1** *и* **A.2** *выполнены и $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom} u$. Тогда $u(x) \leq \liminf_n u^n(x)$.*

Доказательство. По теореме Скорохода мы можем реализовать процессы Y и Y^n, $n \in \mathbb{N}$, на общем стохастическом базисе (с точностью до подпоследовательности) таким образом, что

$$Y^n \to Y \quad \text{п.н.}$$

Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $\lim_n u^n(x)$ существует.

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\mathcal{O}_\varepsilon(x) \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom} u$. Выберем произвольную стратегию $B \in \mathcal{A}(x_\varepsilon)$, где $x_\varepsilon := x - \varepsilon\mathbf{1} \in \mathcal{O}_\epsilon(x)$. Нашей целью будет показать, что выполнено следующее неравенство:

$$\mathbf{E}\left[U(x_\varepsilon + \widehat{V}^B_T, S))\right] \leq \lim_n u^n(x),$$

т.е. $u(x_\varepsilon) \leq \lim_n u^n(x)$. По лемме 4.2 из этого следует требуемое утверждение.

По лемме 4.3, примененной к $y = x_\varepsilon$, существует процесс B^m, принимающий значения B_{t_k} на каждом полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ длины T/m, и такой, что $\widehat{V}^{x_\epsilon,B^m} + \xi^m \in \widehat{K}$, где ξ^m — согласованный непрерывный справа с пределами слева процесс с $||\xi^m|| \to 0$ п.н. при $m \to \infty$. Из этого следует сходимость $||\xi^m||$ к нулю по вероятности, т.е. имеется такое N, что для всех $m > N$

$$\mathbf{P}\left[x_{2\varepsilon/3} + (1/S) \cdot B^m \in \widehat{K}\right] > 1 - \delta. \tag{4.3}$$

По лемме 4.5, B^m может быть приближено (относительно сходимости по вероятности) процессами из $\mathscr{B}^c_m$. Более формально, для всех $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ существует $C \in \mathscr{B}^c_m$ такой, что

$$\mathbf{P}\left[||(1/S) \cdot B^m - (1/S) \cdot C|| < \gamma\right] > 1 - \delta. \tag{4.4}$$

Теперь определим последовательность C^n следующим образом: для каждого $\Delta B_{t_k} = \psi_k(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_{j_k}})$ заменим Y^k на Y. Так как $Y^k \to Y$ п.н. и функции ψ_k непрерывны,

$$||(1/S) \cdot C - (1/S^n) \cdot C^n|| \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{4.5}$$

Применяя лемму Бореля–Кантелли и (4.3), (4.4) и (4.5), мы получим существование последовательности $C^n \in \mathscr{B}^{c,n}_m$, удовлетворяющей следующему свойству:

$$\mathbf{P}\left[x_{\epsilon/3} + (1/S^n) \cdot C^n \in \widehat{K}\right] > 1 - 3\delta \tag{4.6}$$

для произвольного $\delta > 0$, а также

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[\,||(1/S^n) \cdot C^n - (1/S) \cdot B|| < 2\gamma\right] = 1 \tag{4.7}$$

для произвольного $\gamma > 0$.

Чтобы получить стратегии, удовлетворяющие условию допустимости, введем момент остановки

$$\tau^n := \inf\{t \geq 0 : x_\epsilon + (1/S^n) \cdot C^n \notin \widehat{K}^n\} \wedge T,$$

и рассмотрим стратегию

$$X^n := C^n I_{[0,\tau^n)} + \ell\left(S^n_{\tau^n-}(x_{\varepsilon/3} + (1/S^n) \cdot C^n_{\tau^n-})\right) e_1 I_{[\tau^n,\infty)},$$

где ℓ — функция ликвидации. Благодаря леммам 4.7 и 4.8, $X^n \in \mathcal{A}^n(x_{\epsilon/3})$. В силу оценки (4.6)

$$I_{\tau^n = T} \to 1, \quad \text{п.н.}$$

Из этого факта и (4.7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[||(1/S^n)\cdot X^n - (1/S)\cdot B|| < 2\gamma\right] = 1$$

для всех $\gamma > 0$.

По лемме Фату и предположению **A.1** (ii)

$$\lim_{n\to\infty} u^n(x) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^n}\left[U(\widehat{V}_T^{x_{\varepsilon/3},X^n}, S^n)\right] \geq \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[U(\widehat{V}_T^{x_{\varepsilon/3},B}, S)\right].$$

В силу произвольности выбора B утверждение доказано. $\square$

5 Плотность распределений стратегий

В этом разделе, мы нацелены на доказательстве плотности распределений стратегий B^n для $\mathbf{M}^n$. Это позволит доказать существование предельной точки. Основная проблема — поиск метрики для пространства траекторий B^n. В работе [8] Мейер и Женг ввели топологию в пространстве $D([0,\infty),\mathbb{R})$. Примечательной особенностью данной топологии является компактность семейства траекторий, у которых полная вариация ограничена.

Определим топологию на $\mathcal{D}_T^d = D([0,T],\mathbb{R}^d)$ при помощи следующей метрики:

$$d(f,g) = \int_{[0,T[} \min(||f(s)-g(s)||_1, 1)ds + \min(||f(T)-g(T)||_1, 1),$$

где $||x||_1 := \sum_{i=1}^d |x^i|$ для $x \in \mathbb{R}^d$. Обозначим $\mathcal{D}_{MZ,T}^d := (D([0,T],\mathbb{R}^d), d)$. Имеется результат (см. [8], лемма 8, или [9], теорема 12.7), утверждающий, что семейство H_c функций $\mathcal{D}_{MZ,T}^d$ таких, что $\mathrm{Var}\, f \leq c$, является компактом.

Следующая лемма верна одновременно и для $\mathbf{M}^n(S^n,K^n)$, и для $\mathbf{M}(S,K)$.

Лемма 5.1. *Фиксируем модель* $\mathbf{M}(S,K)$*. Пусть верно* **A.3***. Пусть* $x \in \mathrm{int}\, K$*, пусть* $B \in \mathcal{A}(x)$ *— допустимая стратегия. Тогда* $\mathbf{E}_Q \mathrm{Var}\, B_T < (\beta, x)$ *для некоторого* $\beta \in G$*, где* β *не зависит только от выбора* G*.*

Доказательство. Обозначим $M = Z/Z^{(1)}$. Так как $\widehat{V}^{x,B} \in \widehat{K}$ и $M \in \widehat{K}^*$, скалярное произведение $(\widehat{V}^{x,B}, M) \geq 0$.

Из [6], лемма 3.6.2, скалярный процесс $(\widehat{V}^{x,B}, M)$ является неотрицательным $\mathbf{Q}$-супермартингалом и

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(M, -\dot{B}/S)\cdot \mathrm{Var}\, B_T] \leq (\widehat{V}_0^{x,B}, M_0) - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\widehat{V}_T^{x,B}, M_T).$$

В силу определения $\dot{B}$, можно выбрать что $||\dot{B}^n_t(\omega)||_1 = 1$. Нетрудно заметить, что $||M/S||_2 \geq 1$. Отсюда вытекает, что скалярный процесс

$$(M/S, -\dot{B}) \geq \tilde{\epsilon}$$

для некого $\tilde{\epsilon} > 0$.

Заметим, что $\widehat{V}_0^{x,B} = x + B_0/S_0$ и $\mathbf{E_Q}(\widehat{V}_T^{x,B}, M_T) \geq 0$. В итоге получим

$$\mathbf{E_Q}\mathrm{Var}B_T \leq \left(x + \frac{B_0}{S_0}, \frac{1}{\hat{\epsilon}}M_0\right).$$

Нетрудно заметить, что $(B_0/S_0, M_0) \leq 0$. Множество $G \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x^1 = 1\}$ компактно, поэтому $M_0 \leq \hat{\epsilon}\beta$ для некого $\beta \in G$. Из этого следует утверждение леммы. □

Лемма 5.2. *Пусть верно* **A.3**. *Пусть $x \in \operatorname{int} K$, $B^n \in \mathcal{A}^n(x)$ — последовательность допустимых стратегий. Пусть $c > 0$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n[\mathrm{Var}\, B^n > c] = 0.$$

Доказательство. Немедленно следует из 5.1, неравенства Маркова и контигуальности мер. □

Лемма 5.3. *Пусть $X^n \to X$ п.н. в $\mathcal{C}^d_T$, $B^n \to B$ п.н. в $\mathcal{D}^d_{MZ,T}$. Пусть B^n и B ограниченной вариации. Тогда имеется подпоследовательность (X^n, B^n) такая, что $X^n \cdot B^n_T \to X \cdot B_T$ п.н.*

Доказательство. По теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E_P} \int_{[0,T[} \min(||B^n_s - B_s||_1, 1)ds = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E_P} \min(||B^n_T - B_T||_1, 1) = 0.$$

По теореме Фубини, имеется множество полной меры $\tilde{I} \subseteq [0, T]$, для которого $T \in \tilde{I}$, и такое, что $\mathbf{E_P} \min(||B^n_s - B_s||_1, 1) \to 0$, т.е. $B^n_s \to B_s$ по вероятности. Выберем счетное плотное множество $I \subset \tilde{I} \cup \{T\}$, $T \in I$. По теореме Рисса для всех $s \in I$ имеется подпоследовательность $B^n_s \to B_s$ п.н. Применяя диагональный метод, находим подпоследовательность B^n такую, что $B^n_s \to B_s$ п.н. при любом $s \in I$. Из [9], теорема 12.16, следует утверждение леммы. □

Следующая лемма доказывается аналогично предыдущей.

Лемма 5.4. *Пусть траектории $z^n \to z$ на $\mathcal{C}^d_T$, а $b^n \to b$ на $\mathcal{D}^d_{MZ,T}$. Пусть b^n и b ограниченной вариации. Фиксируем $t \in [0,T]$. Тогда существует подпоследовательность (b^{n_k}, z^{n_k}) такая, что $z^{n_k} \cdot b^{n_k}_t \to z \cdot b_t$.*

Положим $\mathcal{N} := \mathcal{D}^l_T \times \mathcal{D}^d_T \times \mathcal{D}^d_{MZ,T}$.

Предложение 5.5. *Пусть предположения* **A.2** *и* **A.3** *верны. Фиксируем $x \in K$. Пусть $B^n \in \mathcal{A}^n(x)$ — последовательность допустимых управлений. Тогда последовательность $\mathcal{L}(Y^n, S^n, B^n|\mathbf{P}^n)$ мер в $\mathcal{N}$ плотна. Более того, существует предельная точка вида $\mathcal{L}(Y,S,B|\mathbf{P})$, где $\dot{B} \in -K$ и $x + (1/S)\cdot B \in \widehat{K}$.*

Доказательство. Множество

$$\{b : \operatorname{Var} b \le c\} \subset \mathcal{D}^d_{MZ,T}$$

компактно в топологии Мейера–Женга. Из леммы 5.2 следует, что последовательность распределений $\mathcal{L}(Y^n, S^n, B^n, \operatorname{Var} B^n_T|\mathbf{P}^n)$ плотна в $\mathcal{N} \times \mathbb{R}_+$. По теореме Прохорова эта последовательность относительно слабо компактна. Из предположения **A.2** любая предельная точка имеет вид $\mathcal{L}(Y,S,B,\eta|\mathbf{P}^n)$, где $\eta \in \mathbb{R}_+$.

Остается проверить, что B удовлетворяет требуемым свойствам. Выберем подпоследовательность распределений $\mathcal{L}(Y^n, S^n, B^n, \eta^n|\mathbf{P}^n)$, которая стремится к $\mathcal{L}(Y,S,B,\eta|\mathbf{P})$. По теореме Скорохода можно считать, что (Y^n, S^n, B^n, η^n) и (Y, S^n, B, η) определены на общем стохастическом базисе таким образом, что с точностью до выбора подпоследовательности

$$(Y^n, S^n, B^n, \eta^n) \to (Y,S,B,\eta) \quad \text{п.н.}$$

Так как $\eta < \infty$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Var} B^n_T < \infty \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, траектории B имеют ограниченную вариацию с вероятностью единица.

Фиксируем $a \in K^*$ и $t \in [0,T]$. Так как процесс $(a, S^n_t \widehat{V}^{x,B^n}_t) \ge 0$ п.н. для всех n, по лемме 5.4 имеем $(a, S_t\widehat{V}^{x,B}_t) \ge 0$ п.н. Из этого следует, что $\widehat{V}^{x,B} \in \widehat{K}$. Пользуясь аналогичным рассуждением, можно показать, что скалярный что процесс (a,B) убывает. В связи с этим по лемме 4.6 выполнено следующее включение: $\dot{B} \in -K$. □

6 Расширенная слабая сходимость

Лемма 6.1. *Пусть выполнены предположения* **A.2** – **A.4**. *Тогда в условиях предложения 5.5 имеется предельная точка вида* $\mathcal{L}(Y, S, B|\mathbf{P})$*, которая обладает следующим свойством: если* $\mathbb{F}^{Y,B}$ *— пополненная фильтрация, порожденная* Y *и* B*, то сигма-алгебры* $\mathcal{F}_t^{Y,B}$ *и* $\mathcal{F}_T^Y$ *условно независимы при фиксированной сигма-алгебре* $\mathcal{F}_t^Y$.

Доказательство. Покажем, что для любой ограниченной $\mathcal{F}_T^Y$-измеримой с.в. Z_1 и любой ограниченной $\mathcal{F}_t^{Y,B}$ с.в. Z_3 выполнено следующее равенство:

$$\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1 Z_3|\mathcal{F}_t^Y] = \mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1|\mathcal{F}_t^Y]\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_3|\mathcal{F}_t^Y].$$

Иными словами, для любой ограниченной $\mathcal{F}_t^Y$-измеримой с.в. Z_2

$$\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1 Z_2 Z_3] = \mathbf{E}_\mathbf{P}[\mathbf{E}_\mathbf{P}(Z_1|\mathcal{F}_t^Y) Z_2 Z_3].$$

Далее $\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^{Y^n}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{F}^Y$. Так как $\mathbb{F}$ непрерывна справа, достаточно показать, что

$$\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1 Z_2 Z_3] = \mathbf{E}_\mathbf{P}[\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1|\mathcal{F}_u] Z_2 Z_3], \quad u > t. \tag{6.8}$$

Без ограничения общности можем положить, что $Z_1 = \psi(Y)$ для непрерывной ограниченной функции $\psi : \mathcal{D}_T^l \to \mathbb{R}$. Положим $\alpha_u^n = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^n}[\psi(Y^n)|\mathcal{F}_u^n]$ и $\alpha_u = \mathbf{E}_\mathbf{P}[\psi(Y)|\mathcal{F}_u]$.

Перейдя к подпоследовательности, мы получим, что $\mathcal{L}(Y^n, S^n, B^n|\mathbf{P}^n)$ сходится слабо к $\mathcal{L}(Y, S, B|\mathbf{P})$. Благодаря расширенной слабой сходимости последовательности $\mathcal{L}(Y^n|\mathbf{P}^n)$, $\mathcal{L}(Y^n, S^n, B^n, \alpha^n|\mathbf{P}^n)$ плотна на $\mathcal{N} \times D([0,T], \mathbb{R})$, поэтому она относительно слабо компактна. Кроме того, имеется предельная точка вида $\mathcal{L}(Y, S, B, \alpha|\mathbf{P})$ для некоторой $B \in \mathcal{A}(x)$. Выберем подпоследовательность, которая сходится к этой предельной точке. По теореме Скорохода, имеется общий стохастический базис, на котором

$$(Y^n, B^n, \beta^n) \to (Y, B, \beta) \quad \text{п.н.}$$

Напомним, что из $B^n \to B$ в $\mathcal{D}_{MZ,T}^d$ следует сходимость $B_T^n \to B_T$ по вероятности. По теореме о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_{[0,T[} \min(||B^n - B||_1, 1) dt = 0.$$

По теореме Фубини, имеется множество полной меры $I \in [0, T]$ такое, что

$B^n_u \to B^n_u$ по вероятности для всех $u \in I$.

Выберем произвольное число $u > t$. Без ограничения общности можем предположить, что ψ_2 и ψ_3 — цилиндрические функции. По теореме о мажорируемой сходимости

$$\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1 Z_2 Z_3] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^n}\left[\psi_1(Y^n)\psi_2(Y^n_{t_1},\ldots,Y^n_{t_k})\psi_3(Y^n_{t_1},\ldots,T^n_{t_k},B^n_{t_1},\ldots,B^n_{t_k})\right].$$

Беря условные математические ожидания по $\mathcal{F}_u$, получим

$$\mathbf{E}_\mathbf{P}[Z_1 Z_2 Z_3] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^n}\left[Y^n_u \psi_2(Y^n)\psi_3(Y^n,B^n)\right] = \mathbf{E}_\mathbf{P}[Y_u Z_2 Z_3].$$

Это завершает доказательство (6.8). □

Замечание. Доказанное выше утверждение — прямое обобщение леммы 4.3 в [1] на многомерный случай.

Лемма 6.2. *В условиях предыдущей леммы* $\mathbf{E}_\mathbf{P}[\operatorname{Var} B|\mathcal{F}^Y_T] < \infty$.

Доказательство. По Лемме 6.1, любой $\mathcal{F}^Y$-мартингал является $\mathcal{F}^{Y,B}$-мартингалом, так что мера $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}$-мартингал M могут быть определены на общем стохастическом базисе. Из Леммы 5.1, $\mathbf{E}_\mathbf{Q}[\operatorname{Var} B] < \infty$. Беря условное математическое ожидание, получим $\mathbf{E}_\mathbf{Q}[\operatorname{Var} B|\mathcal{F}^Y_T] = \mathbf{E}_\mathbf{P}[\operatorname{Var} B|\mathcal{F}^Y_T]d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$. Из того факта, что $0 < d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} < \infty$ $\mathbf{P}$-п.н., получаем требуемое утверждение. □

7 Доказательства основных результатов

Будем доказывать обе теоремы одновременно.

Зафиксируем $x \in \operatorname{int} K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom} u$. Благодаря Предложению 4.9, достаточно проверить $\limsup_n u^n(x) \le u(x)$. Сразу выберем подпоследовательность $u^n(x)$, сходящуюся к верхнему пределу.

Рассмотрим последовательность (Y^n, S^n, B^n), где $\{B^n\}_{n=1}^\infty$ асимптотически оптимальны, $B^n \in \mathcal{A}(x)$. Используя предложение 5.5 вместе с теоремой Скорохода получим что имеется стратегия B и подпоследовательность (Y^n, S^n, B^n) такая, что $(Y^n, S^n, B^n) \to (Y, S, B)$ п.н., где (Y^n, S^n, B^n) и (Y, S, B) определены на общем стохастическом базисе.

По лемме 5.3 можно выбрать такую подпоследовательность (Y^n, S^n, B^n), что $1/S^n \cdot B^n_T \to 1/S \cdot B_T$ п.н. Из этого вытекает

$$U\left(x + (1/S^n)\cdot B^n_T, S^n\right) \to U\left(x + (1/S)\cdot B_T, S\right) \quad \text{п.н.}$$

Из предположения **A.1** (ii) следует, что

$$\mathbf{E}\, U\left(x + (1/S^n)\cdot B^n_T, S^n\right) \to \mathbf{E}\, U\left(x + (1/S)\cdot B_T, S\right).$$

Покажем, что опциональная проекция ${}^oB$ на $\mathbb{F}^Y$ является стратегией. Выберем произвольный $a \in K^*$. Так как скалярный процесс (a, B) убывает, $(a, {}^oB)$ тоже убывает. Из леммы 4.6 следует, что ${}^oB \in -K$. По лемме 6.2 опциональная проекция ${}^oB$ является процессом ограниченной вариации. По теореме II.45 из [3] выполнено следующее равенство: $\mathbf{E_P}[B_t|\mathcal{F}^Y_T] = \mathbf{E_P}[B_t|\mathcal{F}^Y_t]$. Поэтому ${}^oB_t = \mathbf{E_P}[B_t|\mathcal{F}^Y_T]$. По лемме 6.2

$$\mathbf{E_P}[\,||1/S\cdot B_T||\,|\,\mathcal{F}^Y_T] \le \mathbf{E_P}[\,||1/S||\,\mathrm{Var}\,B_T\,|\,\mathcal{F}^Y_T] < \infty.$$

По теореме о мажорируемой сходимости

$$\mathbf{E_P}[1/S\cdot B_T|\mathcal{F}^Y_T] = \mathbf{E_P}[1/S\cdot {}^oB_T].$$

По неравенству Иенсена

$$u(x) = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[U(\widehat{V}^{x,B}, S)|\mathcal{F}^Y_T]\right] \le \mathbf{E}\left[U(\widehat{V}^{x,{}^oB}, S)\right].$$

Из этого следует, что $u(x) = \mathbf{E}\left[U(\widehat{V}^{x,{}^oB}, S)\right]$ и ${}^oB$ — оптимальная стратегия. Основной результат доказан.

8 Выводы

В данной работе была рассмотрена достаточно общая постановка проблемы сходимости решений задач стохастического оптимального управления с конусозначными ограничениями на управления и функцией полезности, зависящей от терминального значения управляемого процесса. По аналогии с работой [1] был выписан набор предположений, которые влекут за собой сходимость функций благосостояния при наличии сходимости распределений процессов цен.

Данная задача имеет прикладное значение, так как на практике модели портфельного инвестирования должны обладать устойчивостью относительно искажения входных данных.

9 Заключение

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю за его комментарии, замечания и исправления, которые оказали неоценимую помощь при исследовании поставленной проблемы.

Список литературы

[1] Bayraktar, E., Dolinskyi, L., Dolinsky, Y.: Extended weak convergence and utility maximisation with proportional transaction costs. Finance and Stochastics **24**(4), 1013–1034 (2020)

[2] Davis, M.H., Norman, A.R.: Portfolio selection with transaction costs. Mathematics of operations research **15**(4), 676–713 (1990)

[3] Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilities and potential. Hermann, Paris (1978)

[4] Jacod, J., Shiryaev, A.: Limit theorems for stochastic processes, vol. 288. Springer Science & Business Media (2013)

[5] Kabanov, Y.: Hedging and liquidation under transaction costs in currency markets. Finance and Stochastics **3**(2), 237–248 (1999)

[6] Kabanov, Y., Safarian, M.: Markets with transaction costs: Mathematical Theory. Springer Science & Business Media (2009)

[7] Magill, M.J., Constantinides, G.M.: Portfolio selection with transactions costs. Journal of economic theory **13**(2), 245–263 (1976)

[8] Meyer, P.A., Zheng, W.: Tightness criteria for laws of semimartingales. In: Annales de l'IHP Probabilités et statistiques. vol. 20, pp. 353–372 (1984)

[9] Protter, M.H., Charles Jr., B.: A first course in real analysis. Springer Science & Business Media (2012)

[10] Shreve, S.E., Soner, H.M.: Optimal investment and consumption with transaction costs. The Annals of Applied Probability pp. 609–692 (1994)