АКТУАРНЫЙ АНАЛИЗ ДОГОВОРОВ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ ДЛЯ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СМЕРТНОСТИ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Бичаев Роман Михайлович, 609 группа

Научный руководитель: проф. Фалин Геннадий Иванович

Москва, 2021

Цели работы

- Исследовать свойства логистического закона смертности
- Получить формулы для необходимых в актуарных расчетах упрощающих функций в случае логистического закона
- На основе этих формул изучить отличия логистического закона и закона Мэйкама при помощи разовых нетто-премий и резервов

- T – время жизни человека (случайная величина)
- Функция выживания

$$s(x) = \mathrm{P}(T > x).$$

- Интенсивность смертности

$$\mu_x = -[\ln s(x)]' \Leftrightarrow s(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu_u du\right\}.$$

- Закон Мэйкама

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}.$$

- Логистический закон

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + De^{\alpha x}}.$$

Метод Монте-Карло

Теорема 1. Время жизни в логистической модели смертности можно моделировать по формуле

$$T \stackrel{d}{=} \min\left\{-\frac{1}{A}\ln Z_1, \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D} Z_2^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right)\right\},$$

где $Z_1, Z_2 \sim U(0,1)$ и независимы.

Теорема 2. Пусть

$$\xi \sim \mathrm{Exp}(\alpha), \eta \sim \mathrm{Par}(\tfrac{1+D}{D}, \tfrac{B}{\alpha D}).$$

Тогда

$$T \stackrel{d}{=} \min\left\{\xi, \frac{\ln(1+\eta)}{\alpha}\right\}.$$

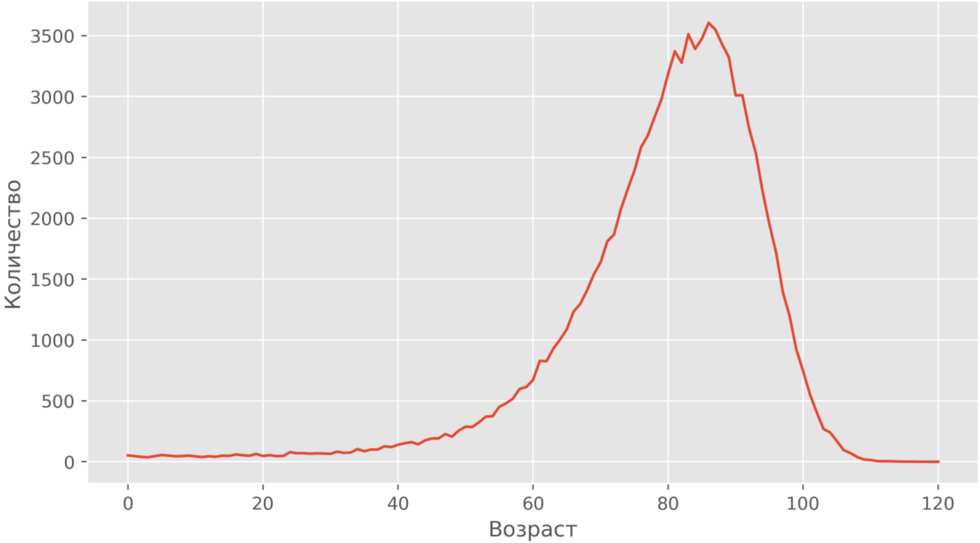

Рис. 1. Результат моделирования 100 000 величин T. На вертикальной оси показано, сколько из них попало в интервал [k, k+1).

Рандомизация (неоднородная популяция)

Закон Мэйкама:

$$\mu_x^B = A + Be^{\alpha x},$$

B – случайная величина.

Пусть $s(x)$ и μ_x – функция выживания и интенсивность смертности всей популяции.

Лемма 1. $s(x) = e^{-Ax}\varphi(s),$

$$\mu_x = A - e^{\alpha x}\left[\ln\varphi(s)\right]',$$

где $s = (e^{\alpha x} - 1)/\alpha$ и $\varphi(s)$ – преобразование Лапласа случайной величины *B*.

Теорема 3. Интенсивность смертности всей популяции определяется логистическим законом вида

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + De^{\alpha x}}$$

тогда и только тогда, когда параметр *B* в законе Мэйкама имеет гамма распределение (с параметрами γ и *p*), причем связь между параметрами логистического закона и гамма распределения следующая

$$B = \frac{\alpha p}{\alpha\gamma - 1}, D = \frac{1}{\alpha\gamma - 1},$$

$$\gamma = \frac{1+D}{\alpha D}, p = \frac{B}{\alpha D}.$$

Упрощающие функции

Рассмотрим логистический закон в виде

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x}}.$$

Упрощающие функции:

$$D_x \equiv e^{-\delta x} l_x = l_0 e^{-\delta x} s(x),$$

$$\bar{N}_x \equiv \int_x^\infty D_t dt = \ldots = \bar{a}_x D_x,$$

$$\bar{M}_x \equiv \int_x^\infty D_t \mu_t dt = \ldots = D_x(1 - \delta \bar{a}_x),$$

где l_x – среднее число людей, доживших до возраста x, $\bar{a}_x$ – актуарная приведенная стоимость непрерывной пожизненной ренты, δ – интенсивность процентов.

Лемма 2. $D_x = l_0 s(x; A + \delta, B, \alpha).$

Пусть T и T_x – остаточное время жизни новорожденного и человека возраста x лет соответственно,

$$\mathrm{E}T \equiv e_0(A, B, \alpha),\ \mathrm{E}T_x \equiv e_x(A, B, \alpha)$$

– среднее остаточное время жизни,

$$s(t; A, B, \alpha),\ s_x(t; A, B, \alpha)$$

– функции выживания.

Лемма 3. $s_x(t; A, B, \alpha) = s(t; A, Be^{\alpha x}, \alpha).$

Лемма 4. $e_x(A, B, \alpha) = e_0(A, Be^{\alpha x}, \alpha).$

Лемма 5. $\bar{a}_x(A, B, \alpha, \delta) = e_0(A + \delta, Be^{\alpha x}, \alpha).$

Гипергеометрическая функция:

$$F(a,b,c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}.$$

Теорема 4.

$$e_0(A,B,\alpha)=\frac{\theta}{\theta+\gamma}F\left(\theta,1,\theta+\gamma+1,(1+B)^{-1}\right),$$

$$\theta=1/\alpha,\ \gamma=A/\alpha.$$

Следствие 1.

$$\bar{a}_x\equiv\bar{a}_x(A,B,\alpha,\delta)=\beta^{-1}F\left(\alpha^{-1},1,1+\beta\alpha^{-1},(1+Be^{\alpha x})^{-1}\right),$$

$$\beta=1+A+\delta.$$

Теорема 5. В случае логистического закона в форме

$$\mu_x=A+\frac{Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}}.$$

упрощающие функции выражаются следующим образом

$$D_x=l_0 s(x;A+\delta,B,\alpha),$$

$$\bar{N}_x=\bar{a}_x D_x,$$

$$\bar{M}_x=D_x(1-\delta\bar{a}_x),$$

где

$$\bar{a}_x=\beta^{-1}F\left(\alpha^{-1},1,1+\beta\alpha^{-1},(1+Be^{\alpha x})^{-1}\right),$$

$$\beta=1+A+\delta.$$

Разовая нетто-премия и резервы

n-летнее страхование жизни:

$\bar{Z}^1_{x:\bar{n}|} \equiv e^{-\delta T_x} I\{T_x \le n\}$ – приведенная стоимость обязательств страховой компании на момент заключения договора,

$\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} \equiv \mathrm{E}\bar{Z}^1_{x:\bar{n}|}$ – **разовая нетто-премия.**

Пусть в момент t застрахованный жив.

${}_t a_B,\ {}_t a_C$ – актуарная приведенная стоимость обязательств страховой компании и обязательств застрахованного.

Резерв в момент t **:** ${}_t V = {}_t a_B - {}_t a_C.$

Актуарный коэффициент дисконтирования:

$${}_t E_x = e^{-\delta t} s_x(t).$$

Периодическая нетто-премия: $P(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}).$

Лемма 6. $\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} = 1 - {}_n E_x - \delta \bar{a}_x + \delta\, {}_n E_x \bar{a}_{x+n}.$

Лемма 7.
$$P(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}) = \frac{s(x; A+\delta, B, \alpha)\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}}{\sum_{k=x}^{x+n-1} s(k; A+\delta, B, \alpha)}.$$

Лемма 8. Пусть t – время, прошедшее с момента заключения договора, и застрахованный еще жив.

Если $t = \lfloor t \rfloor = k$, то

$${}_k V(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}) = \bar{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|}\left(1 - \frac{P(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|})}{P(\bar{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|})}\right).$$

Если $t = k + s, k = \lfloor t \rfloor, s = t - \lfloor t \rfloor \in (0,1)$, то

$${}_t V(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}) = \bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|} - e^{-\delta(1-s)}\, {}_{1-s}p_{x+t} P(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}) \frac{\bar{A}^1_{x+k+1:\overline{n-k-1}|}}{P(\bar{A}^1_{x+k+1:\overline{n-k-1}|})}.$$

Сравнение резервов

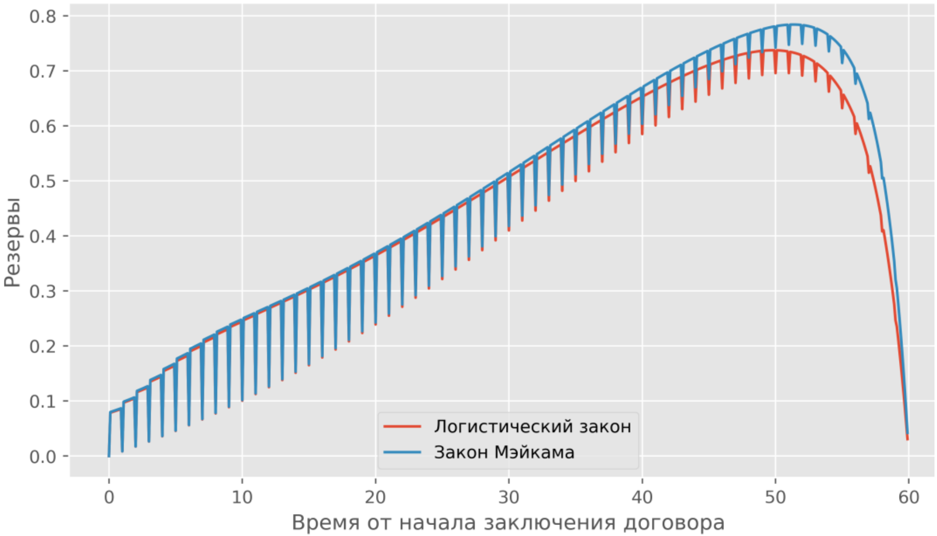

Рис. 2. Сравнение резервов для 60-летнего страхования человека возраста 40 лет.

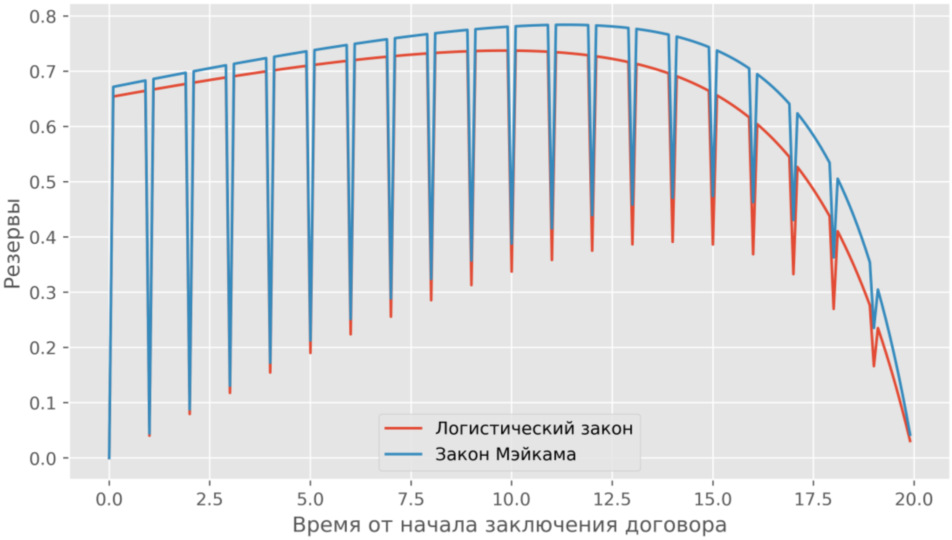

Рис. 3. Сравнение резервов для 20-летнего страхования человека возраста 80 лет.

Основная литература

[1] Фалин, Г.И., *Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем*, 3-е издание: АНКИЛ, Москва, 2007. 304 с. ISBN 978-5-86476-235-6.

[2] Beard, R.E., *Note on some mathematical mortality models*, In: Wolstenholme, G.E.W. and O'Conner, M., Eds., Ciba Foundation Colloquium on Ageing, Little, Brown and Company, Boston, 1959, pp. 302-311.

[3] Фалин, Г.И., *Математический анализ рисков в страховании*, Российский Юридический Издательский Дом, 1994.

[4] Thatcher, A.R., *The Long-Term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age*, Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), Vol. 162, No. 1 (1999), pp. 5-43.

[5] Andreas Nordvall Lagerås, *Commutation functions under Gompertz–Makeham mortality*, Scandinavian Actuarial Journal, 2010:2, pp. 161-164.

[6] Бейтмен, Г., Эрдейи, А., *Высшие трансцендентные функции*, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1973.