Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 10

На предыдущих лекциях мы обсудили систему уравнений, описывающую равновесие в игре бесконечного числа игроков, каждый из которых решает задачу оптимального контроля: выбрать управление α так, что функция y, решающая уравнение $\dot{y}(t) = f(y, \alpha)$ с начальным условием $y(0) = x$, является точкой минимума некоторого функционала $J(y, \alpha)$. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, в которой функция y определяется из стохастического уравнения $dy_t = f(y_t, \alpha_t)\,dt + \sqrt{2}\,dw_t$. В этом случае положение равновесия Нэша описывается системой вида

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u + H(x, \mu_t, \nabla u) = 0, \\ \partial_t \mu_t - \Delta \mu_t - \mathrm{div}(H_p(x, \mu_t, \nabla u)\mu_t) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы является обобщением уравнения непрерывности и называется уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова. Покажем, как это уравнение появляется в теории случайных процессов.

Винеровский процесс и интеграл Ито

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство. Напомним, что случайный процесс $w_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется винеровским процессом, если почти наверное $w_0(\omega) = 0$, $t \to w_t(\omega)$ — непрерывная функция, при $t > s$ приращение $w_t - w_s$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t - s$ и для всяких $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $w_{t_0}, w_{t_1} - w_{t_0}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ независимы.

Существование такого процесса можно вывести из известных теорем А.Н.Колмогорова о согласованных семействах и о непрерывности траекторий.

Многомерный винеровский процесс $w_t = (w_t^1, \ldots, w_t^d)$ является вектором и d независимых винеровских процессов.

С винеровским процессом можно связать семейство сигма-алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, s \le t)$. Заметим, что $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Семейство сигма-алгебр с такими свойствами называют потоком или фильтрацией.

Предложение 1. *Случайная величина $w_t - w_s$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_s$ независимы при $t > s$.*

Случайный процесс x_t называется прогрессивно измеримым относительно потока $\mathcal{F}_t$, если для каждого $t \ge 0$ отображение $(s, \omega) \to x_s(\omega)$ множества $[0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ измеримо относительно $\mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$. Важно иметь ввиду, что всякий случайный процесс x_t с непрерывными траекториями является прогрессивно измеримым, если при каждом t случайная величина x_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$. Через $\mathbb{L}_2[0, T]$ обозначим множество прогрессивно измеримых случайных процессов x_t, у которых

$$\mathbb{E} \int_0^T |x_t|^2\,dt < \infty.$$

Предложение 2. *В пространстве $\mathbb{L}_2[0, T]$ всюду плотно множество ступенчатых процессов вида*

$$y_t(\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} y_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad 0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T,$$

где случайная величина Y_j измерима относительно $\mathcal{F}_{t_j}$.

Доказательство. Используя «срезку» приближаем x_t процессом z_t с равномерно ограниченными траекториями. Процесс z_t приближается процессом

$$n \int_{t-1/n \wedge 0}^{t} z_s\,ds, \quad t \wedge s = \min\{t, s\},$$

с непрерывными траекториями, а такой уже приближается ступенчатым. $\square$

Интеграл Ито от ступенчатого процесса y_t по отрезку $[0,t]$, $t \le T$, определяется равенством

$$\int_0^t y_s\,dw_s = \sum_{j=0}^{m-1} y_j(w_{t_{j+1}\wedge t} - w_{t_j\wedge t}).$$

Предложение 3. *Процесс*

$$I_t = \int_0^t y_s\,dw_s$$

имеет непрерывные траектории и является мартингалом, т.е. $\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_s) = I_s$ *при* $t \ge s$. *Кроме того,*

$$\mathbb{E}I_t = 0, \quad \mathbb{E}|I_t|^2 = \mathbb{E}\int_0^t |y_s|^2\,ds, \quad \mathbb{E}\sup_{s\in[0,t]} |I_s|^2 \le 4\mathbb{E}\int_0^t |y_s|^2\,ds.$$

Доказательство. Последнее неравенство является частным случаем неравенства Дуба для мартингалов. □

Рассмотрим пространство $L^2(\Omega, C[0,T])$, состоящее из случайных процессов x_t с почти наверное непрерывными траекториями, для которых конечна норма

$$\|x\| = \Bigl(\mathbb{E}\sup_{[0,T]} |x_t|^2\Bigr)^{1/2}.$$

Это полное нормированное пространство (с естественным отождествлением процессов, которые с вероятностью единица совпадают при всех $t \in [0,T]$).

Из перечисленных выше свойств интеграла Ито от ступенчатого процесса немедленно следует, что фундаментальная последовательность y_t^n в пространстве $\mathbb{L}^2[0,T]$ задает фундаментальную последовательность $\displaystyle\int_0^t y_s^n\,dw_s$ в пространстве $L^2(\Omega, C[0,T])$. Это позволяет определить интеграл Ито для произвольного x_t из $\mathbb{L}^2[0,T]$ равенством

$$\int_0^t x_s\,dw_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^t y_s^n\,dw_s,$$

где предел берется по норме пространства $L^2(\Omega, C[0,T])$, а y_t^n сходятся к x_t в $\mathbb{L}^2[0,T]$. Все перечисленные выше свойства интеграла Ито от ступенчатых процессов переносятся на интеграл от x_t.

Пространство процессов из $L^2(\Omega, C[0,T])$, имеющих прогрессивно измеримую модификацию, является замкнутым. Пусть последовательность x_t^n сходится к x_t и x_t^n прогрессивно измеримы. Положим $A = \{(t,\omega)\colon \exists \lim_{n\to\infty} x_t^n(\omega)\}$. Тогда $x_t(\omega)I_A(t,\omega)$ является искомой модификацией, так как является поточечным пределом прогрессивно измеримых функций $x_t^n(\omega)I_A(t,\omega)$. Далее, если возможно, то выбираем именно прогрессивно измеримую модификацию.

Пусть $B_t, \Sigma_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$. Запись вида

$$dx_t = B_t\,dt + \Sigma_t\,dw_t$$

является сокращением равенства

$$x_t = x_0 + \int_0^t B_s\,ds + \int_0^t \Sigma_s\,dw_s,$$

которое с вероятностью единица выполняется для всех $t \in [0,T]$.

Важнейшую роль в стохастическом анализе играет формула Ито: для всякой функции $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$df(x_t) = \bigl[\langle B_t, \nabla f(x_t)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t D^2 f(x_t))\bigr]\,dt + \sum_{i,j}\partial_{x_i} f(x_t)\Sigma_t^{ij}\,dw_t^j, \quad A_t = \Sigma_t\Sigma_t^*.$$

Стохастические дифференциальные уравнения

Прогрессивно измеримый процесс x_t является решением стохастического уравнения

$$dx_t = b_t(x_t)\,dt + \sigma_t(x_t)\,dw_t$$

с начальным условием x_0 (неслучайная точка в $\mathbb{R}^d$), если

$$x_t = x_0 + \int_0^t b_s(x_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s$$

с вероятностью единица для всех $t \in [0,T]$.

Отметим, что мы пока считаем, что винеровский процесс со своей естественной фильтрацией задан и для этого винеровского процесса определяется решение x_t. Будем говорить, что решение единственно, если для всяких двух решений x_t и y_t с вероятностью единица $x_t = y_t$ для всех $t \in [0,T]$.

Предположим, что $b_t(x)$, $\sigma_t(x)$ непрерывны, ограничены и

$$|b_t(x) - b_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \le M|x-y|.$$

Теорема 1. *Для всякого начального условия $x_0 \in \mathbb{R}^d$ существует единственное решение стохастического уравнения.*

Доказательство. Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда $b = 0$. Пусть

$$\sup_{t,x} |\sigma_t(x)| \le Q.$$

Заметим, что для всякого прогрессивно измеримого процесса $x_t \in \mathbb{L}^2[0,T]$ верна оценка

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}\Bigl|x_0 + \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s\Bigr|^2 \le 2|x_0|^2 + 8TQ^2.$$

Следовательно, процесс $x_0 + \int_0^t \sigma(x_s)\,dw_s$ принадлежит пространству $L^2(\Omega, C[0,T])$. Рассмотрим последовательность x_t^n, заданную равенствами:

$$x_t^0 = x_0, \quad x_t^{n+1} = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s^n)\,dw_s.$$

Имеет место оценка

$$\mathbb{E}\sup_{[0,t]} |x_s^{n+1} - x_s^n|^2 \le 4\mathbb{E}\int_0^t |\sigma_s(x_s^n) - \sigma_s(x_s^{n-1})|^2\,ds,$$

из которой следует неравенство

$$\mathbb{E}\sup_{[0,t]} |x_s^{n+1} - x_s^n|^2 \le 4M^2\mathbb{E}\int_0^t \sup_{[0,s]} |x_\tau^n - x_\tau^{n-1}|^2\,ds.$$

Итерируя это неравенство получаем

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]} |x_s^{n+1} - x_s^n|^2 \le \frac{C^n}{n!},$$

для всех n и некоторой константы $C > 0$. По неравенству Чебышёва

$$P\bigl(\omega\colon \sup_{[0,T]} |x_s^{n+1}(\omega) - x_s^n(\omega)|^2 \ge 2^{-n}\bigr) \le \frac{(2C)^n}{n!}$$

и сходится ряд

$$\sum_n P\bigl(\omega\colon \sup_{[0,T]} |x_s^{n+1}(\omega) - x_s^n(\omega)|^2 \ge 2^{-n}\bigr).$$

По лемме Бореля–Кантелли ряд $x_t^0 + (x_t^1 - x_t^0) + \ldots + (x_t^{n+1} - x_t^n) + \ldots$ с вероятностью единица сходится равномерно на $[0,T]$, что равносильно равномерной сходимости x_t^n к некоторому процессу x_t. Ясно, что траектории x_t почти наверное непрерывны, x_t имеет прогрессивно измеримую модификацию и x_t^n сходится к x_t в $L^2(\Omega, C[0,T])$. Остается заметить, что

$$\mathbb{E}\sup_{[0,T]}\Bigl|\int_0^t \sigma_s(x_s^n)\,dw_s - \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s\Bigr|^2 \le Q^2T\mathbb{E}\sup_{[0,T]} |x_t^n - x_t|^2 \to 0$$

и с вероятностью единица для всех $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s.$$

Докажем теперь единственность решения. Предположим, что x_t и y_t — решения. Пусть

$$f(t) = \mathbb{E}\sup_{[0,t]} |x_s - y_s|^2.$$

Тогда верна оценка

$$f(t) \le M^2 \int_0^t f(s)\,ds,$$

из которой следует равенство $f(t) = 0$ для всех $t \in [0,T]$. □

Заметим, что для достаточно малого $T > 0$ утверждение можно доказать с помощью теоремы о сжимающем отображении, примененной к отображению

$$x_t \to x_0 + \int_0^t b_s(x_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(x_s)\,dw_s$$

в замкнутом подпространстве $L^2(\Omega, C[0,T])$, состоящем из процессов, которые имеют прогрессивно измеримую модификацию.

Отметим также, что выполненные выше построения для классического винеровского процесса практически без изменений переносятся на случай $\mathcal{F}_t$ — броуновского движения w_t. Для произвольного потока $\mathcal{F}_t$ случайный процесс w_t называется $\mathcal{F}_t$ — броуновским движением, если для каждого t случайная величина w_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, приращение $w_t - w_s$ и сигма-алгебра $\mathcal{F}_s$ независимы при $t > s$ и приращение $w_t - w_s$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t - s$.

Одномерные распределения и уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

Пусть x_t — построенное выше решение стохастического уравнения. Рассмотрим распределение случайной величины x_t:

$$\mu_t(B) = P\big(\omega\colon x_t(\omega) \in B\big) = P \circ x_t^{-1}(B).$$

По формуле Ито для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$\varphi(x_t) = \varphi(x_0) + \int_0^t \big[\langle b_t(x_t), \nabla\varphi(x_t)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t(x_t)D^2\varphi(x_t))\big]\,dt + \text{мартингал},$$

где $A_t(x) = \sigma_t(x)\Sigma_t(x)^*$. Так как для всякой борелевской функции f верно равенство

$$\mathbb{E}f(x_t) = \int f(x_t(\omega))P(d\omega) = \int f(x)\,d\mu_t,$$

то получаем

$$\int \varphi(x)\,d\mu_t = \int \varphi(x)\,d\mu_0 + \int_0^t \int L\varphi(x,s)\,d\mu_s\,ds,$$

где

$$L\varphi(x,s) = \langle b_t(x), \nabla\varphi(x)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_t(x)D^2\varphi(x)).$$

Выполнение данного равенства для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ можно взять за определение решения μ_t уравнения

$$\partial_t\mu_t = \tfrac{1}{2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\big(a^{ij}\mu_t\big) - \partial_{x_i}\big(b^i\mu_t\big),$$

которое называют прямым уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова и кратко записывают в виде

$$\partial_t\mu_t = L^*\mu_t.$$

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и мартингальная задача

Выше мы показали, что одномерные распределения решения стохастического уравнения являются решениями уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Замечательным образом имеет место обратная связь, а именно при весьма общих условиях всякому «вероятностному» решению уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова соответствует решение некоторого стохастического уравнения.

Следующее утверждение называют принципом суперпозиции.

Теорема 2. *Предположим, что непрерывная кривая μ_t, отображающая отрезок $[0,T]$ в пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ с топологией слабой сходимости, является решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$, причем*

$$\int_0^T \int |A_t(x)| + |b_t(x)|\, d\mu_t\, dt < \infty.$$

Тогда существует такая вероятностная мера P на $C[0,T]$, что $P\circ e_t^{-1} = \mu_t$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$(t,\omega(\cdot)) \to \varphi(\omega(t)) - \varphi(\omega(0)) - \int_0^t L\varphi(\omega(s),s)\, ds$$

является мартингалом относительно P и потока $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s\le t)$.

Предложение 4. *В условиях теоремы существует вероятностное пространство $(\Omega, F, \widetilde{P})$ с потоком $\widetilde{F}_t$, $\widetilde{F}_t$ — броуновское движение w_t и случайный процесс x_t с непрерывными траекториями такие, что*

$$dx_t = b_t(x_t)\, dt + \sigma_t(x_t)\, dw_t, \quad A_t = \sigma_t\sigma_t^*,$$

и P является распределением процесса x_t, в частности, $\mu_t(B) = \widetilde{P}(\omega\colon\ x_t(\omega)\in B)$.

Проиллюстрируем последнее утверждение примером. Пусть на $C[0,T]$ задана вероятностная мера P и поток $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s\le t)$. Предположим, что для всякой функции $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$ отображение

$$(t,\omega(\cdot)) \to \varphi(\omega(t)) - \varphi(\omega(0)) - \int_0^t \frac{1}{2}\varphi''(\omega(s))\, ds$$

является мартингалом относительно P и $\mathcal{F}_t$. Докажем, что случайный процесс

$$\xi_t(\omega) = \omega(t)$$

является $\mathcal{F}_t$ — броуновским движением. Для этого достаточно при $t>s$ проверить равенство

$$\mathbb{E}e^{iy(\xi_t-\xi_s)|\mathcal{F}_s} = e^{-y^2(t-s)/2}.$$

Применяя условие с $\varphi(x) = e^{ixy}$ получаем

$$\mathbb{E}\Big(e^{iy\xi_t} - e^{iy\xi_s} + \frac{y^2}{2}\int_s^t e^{iy\xi_\tau}\, d\tau\Big|\mathcal{F}_s\Big) = 0.$$

Следовательно, для всякой измеримой относительно $\mathcal{F}_s$ ограниченной функции η верно равенство

$$\mathbb{E}e^{iy(\xi_t-\xi_s)}\eta = \mathbb{E}\eta - \frac{y^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}e^{iy(\xi_\tau-\xi_s)}\eta\, d\tau.$$

Обозначим правую часть через $f(t)$ приходим к уравнению $f'(t) = -\frac{y^2}{2}f(t)$, решая которое находим

$$f(t) = e^{-y^2(t-s)/2}\mathbb{E}\eta.$$

В силу произвольности η получаем требуемое равенство.