Стохастические модели предсказательных игр

Михаил Житлухин

МИАН им. В. А. Стеклова

11 августа 2023 г.

Оглавление

Введение

Предсказательная игра является моделью взаимодействующих агентов, в которой стратегии игроков соответствуют прогнозам значений случайных элементов. Предсказательные игры позволяют решить задачу, важную для различных приложений: задать игровой механизм, который бы позволил из множества конкурирующих методов прогноза автоматически выбирать оптимальный.

Мы начнем изложение с примера простой математической модели предсказательной игры, которая позволяет наглядным образом описать основные идеи развиваемой далее теории.

Пример предсказательной игры

a. Модель игры

Сначала опишем изучаемую далее модель словесно.

Рассматривается игра, в которую играют M игроков. Игра состоит из бесконечной последовательности раундов. В каждом раунде может реализоваться одно из N случайных событий, образующих разбиение вероятностного пространства (т.е. события попарно несовместны и их объединение имеет вероятность 1). Цель игроков состоит в том, чтобы правильно предсказать, какое из событий произойдет.

Игра устроена по следующему принципу. В начале каждого раунда игрок может сделать денежную ставку на одно или несколько событий. Ставки всех игроков делаются одновременно и объединяются в общий пул, куда также добавляется некоторая сумма вознаграждения за участие в игре, которую выплачивает организатор игры. Затем этот пул распределяется между игроками, сделавшими ставки на реализовавшееся событие в тех пропорциях, в которых соотносятся их ставки на это событие (т.е. “справедливым образом”). В последующих раунде процедура повторяется.

Нас будет интересовать динамика капитала игроков в этой игре и ее поведение в пределе по времени, стремящемся к бесконечности. Также нас будет интересовать, как получить оценку условной вероятности каждого из событий в текущем раунде из данных о величинах ставок игроков.

Формализуем эту модель. Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Время $t = 1, 2, 3, \ldots$ соответствует номеру раунда, момент $t = 0$ – начало игры.

Случайные события, которые могут произойти в раунде t, будем отождествлять с $\mathcal{F}_t$-измеримыми случайными величинами-индикаторами X_t^n, $n = 1, \dots, N$, принимающими значения 0 или 1, причем для каждого t только одна из эих величин может быть равна 1. Для удобства далее будем использовать обозначение $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$. Случайный вектор X_t принимает значения в множестве $\{e_1, \dots, e_N\}$, где e_n образуют стандартный базис в $\mathbb{R}^N$.

Капитал игрока $m \in \{1, \dots, M\}$ будем задавать случайной последовательностью $W^m = (W_t^m)_{t=0}^{\infty}$, где W_t – капитал после раунда t. Начальный капитал W_0^m считается неслучайным и строго положительным.

Стратегия игрока m задается последовательностью $h^m = (h_t^m)_{t=1}^{\infty}$, где $h_t^m = (h_t^{m1}, \dots, h_t^{mN})$ обозначает величину ставки на каждое из N событий в раунде t. Последовательности h^m являются предсказуемыми, т.е. векторы h_t^m измеримы относительно $\mathcal{F}_{t-1}$. Это выражает то обстоятельство, что на момент выбора размера ставок не известно, какое из событий произойдет. Кроме того, потребуем, чтобы было выполнено неравенство $W_{t-1}^m \geq \sum_{n=1}^N h_t^{mn}$ – нельзя поставить больше денег, чем имеется. Удобно будет также ввести обозначение $h_t^{m0} = W_{t-1}^m - \sum_{n=1}^N h_t^{mn}$ для величины величина капитала, которую игрок не использует для ставок в раунде t.

Наконец, будем обозначать за $c = (c_t)_{t=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных вознаграждений, добавляемых к пулу ставок организатором игры. Величина c_t добавляется в раунде t. Всегда считается, что c_t неслучайны.

Динамика игры, описанная в начале этого раздела, задается равенством (для $t = 1, 2, \dots$)

$$W_t^m = \left(\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N h_t^{ki} + c_t \right) \sum_{n=1}^N \frac{h_t^{mn}}{\sum_{k=1}^M h_t^{kn}} X_t^n + h_t^{m0}.$$

Поясним, как эта формула соотносится с описанием модели. Выражение в скобках представляет сумму ставок всех игроков на все события с добавленным вознаграждением за участие в игре. Так как величины X_t^n являются индикаторами взаимно исключающих событий, то, в сущности, только одно слагаемое в сумме по n не равно нулю, а соответствующий множитель X_t^n равен единице. Дробь перед X_t^n задает пропорции, в которых пул денег распределяется между игроками – в точности пропорционально их ставкам на осуществившееся событие. Величина h_t^{m0}, т.е. неиспользованная в игре часть денег игрока m, переносится на следующий раунд.

Чтобы на данном этапе сделать рассуждения наиболее прозрачными, до конца параграфа ограничимся рассмотрением одного важного частного случая структуры последовательности $X = (X_t)_{t=1}^{\infty}$.

Пусть на исходном вероятностном пространстве помимо X задана также последовательность случайных величин $Y = (Y_t)_{t=1}^{\infty}$ со значениями в некотором конечном множестве $\{y_1, \dots, y_L\}$. Эта последовательность будет выражать дополнительную информацию, доступную игрокам до начала раунда t, и которую они могут учитывать при выборе ставок. Считается, что все игроки имеют равный доступ к дополнительной информации.

Будем предполагать, что пары векторов (X_t, Y_t) являются независимыми и одинаково распределенными, причем фильтрация $\mathcal{F}_t$ порождается парами (X_t, Y_{t+1}), т.е. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, Y_{s+1}; s \le t)$. Иными словами, в момент времени $t \ge 0$ каждый игрок делает ставку на события X_{t+1} и при этом видит значение Y_{t+1}. В следующий момент времени ситуация повторяется с таким же вероятностным распределением. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что Y_t может принимать каждое значение y_l со строго положительной вероятностью.

Будем считать, что действия игроков полностью определяются информацией Y в следующем смысле: в каждом раунде игрок распределяет имеющийся у него капитал между ставками на разные события в пропорциях, которые задаются функцией от Y_t, т.е.

$$h_t^{mn} = W_{t-1}^n \lambda^{mn}(Y_t), \tag{1}$$

где $\lambda^m(y) = (\lambda^{m1}(y), \ldots, \lambda^{mN}(y))$ – некоторые вектор-функции такие, что $\lambda^{mn}(y) \ge 0$ и $\sum_{n=1}^N \lambda^{mn}(y) = 1$ для любых значений y. Данное предположение несколько ограничивает разнообразие возможных стратегий (например, оно не учитывает, что с ростом капитала игроки могут действовать более рискованно), но существенно упростит формулировки дальнейших результатов. В изложении общей модели в следующей главе мы от него откажемся.

Далее под стратегиями игроков мы будем понимать как сами случайные последовательности h^m, так и функции λ^m; из контекста будет ясно, что имеется ввиду.

Последнее упрощающее предположение, которое мы сделаем, касается вознаграждений за участие в игре. Будем предполагать, что последовательность $c = (c_t)_{t\ge 0}$ отделена от нуля, т.е. $c_t \ge \underline{c} > 0$ для всех $t \ge 1$ и некоторой константы $\underline{c}$. Случай, когда c_t может быть равно нулю или стремиться к нулю, менее интересен для применений, см. обсуждение в разделе c.

b. Оптимальные стратегии и прогноз условных вероятностей

Нас будут интересовать отношения капиталов игроков W_t^m/W_t^k при $t \to \infty$. Следующая теорема показывает, что для достижения наибольшей скорости роста капитала нужно делать ставки пропорционально условным вероятностям событий.

Для удобства введем обозначение для вектора условных вероятностей событий $p(y) = (p^1(y), \ldots, p^N(y))$, где

$$p^n(y) = \mathrm{P}(X_t^n = 1 \mid Y_t = y).$$

В силу предположения об одинаковой распределенности пар (X_t, Y_t), вектор $p(y)$ не зависит от t.

Теорема. *Предположим, что хотя бы один игрок, скажем игрок* 1, *использует стратегию* $\lambda(y)$ *с компонентами*

$$\lambda^0(y) = 0, \qquad \lambda^n(y) = p^n(y), \; n = 1, \dots, N. \tag{2}$$

Тогда для любого игрока m, *использующего стратегию* $\widetilde{\lambda}$ *такую, что* $\lambda(y) \neq \widetilde{\lambda}(y)$ *хотя бы для одного* y, *выполнено*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t^m}{W_t^1} = 0 \text{ п.н.} \tag{3}$$

Для удобства изложения доказательства вынесены в отдельный раздел (см. раздел d).

Формулируемое далее следствие показывает, что информацию о ставках игроков можно использовать для оценки условных вероятностей наступления событий. Определим случайные векторы $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^N)$ с компонентами

$$\pi_t^n = \frac{\sum_{m=1}^M h_t^{mn}}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_t^{mn}}.$$

Величина π_t^n выражает долю ставок всех игроков на событие n среди ставок всех игроков на все события. Заметим, что $\sum_{n=1}^N \pi_t^n = 1$. Далее мы будем называть π_t *игровым прогнозом* (в том смысле, что это прогноз условных вероятностей, который можно извлечь из информации по ходу игры).

Следствие. *Если выполнены предположения предыдущей теоремы, то*

$$\lim_{t\to\infty} (\pi_t^n - p^n(Y_t)) = 0 \text{ п.н.}$$

для каждого $n = 1, \dots, N$.

c. Интерпретация результатов и другие комментарии

1) Практический смысл. Сформулированная теорема и следствие демонстрируют возможность использования предсказательных игр для оценки условных вероятностей событий. Как будет показано в последующих главах, аналогичные методы работают и для оценки условных математических ожиданий, а также других вероятностных характеристик.

Подчеркнем, что смысл полученных результатов состоит не в том, чтобы в качестве вероятностно-статистического прогноза использовать условные вероятности событий или величины, близкие к ним (в данном случае π_t^n). Предсказательная игра позволяет организатору, который не имеет возможности конструктивно вычислить такие условные вероятности (например, если он не обладает статистическими данными для оценки совместного распределения X_t и Y_t), неявным образом возложить эту задачу на участников игры. При этом механизм конкуренции и эволюции, заложенный в игре, с течением времени автоматически выбирает "правильный" прогноз. Таким образом, организатору не нужно беспокоиться о том, следует ли доверять прогнозам каждого из участников.

Следует отметить, что существенным условием в рассматриваемых моделях будет является предположение о том, что что хотя бы один из игроков делает правильный прогноз (использует стратегию (2)). Можно допустить, что если функционирующая в реальности рынок прогнозов будет достаточно большим и эффективным, то такие игроки найдутся или, по крайней мере, найдутся игроки со стратегиями, достаточно близкими к оптимальным. В главе **??** мы исследуем характер модели в случае, когда таких игроков нет, но в большей части работы предположение о наличии игроков с оптимальной стратегией будет считаться выполненным.

2) О понятии оптимальности стратегий. Понятие оптимальности стратегии в том смысле, что ее капитал растет быстрее, чем капитал других стратегий (свойство (3)) не связано с предпочтениями игрока, использующего такую стратегию. В частности, мы не предполагаем, что следование такой стратегии является желаемым поведением для всех игроков, так как у них могут быть другие цели в игре: например, они могут максимизировать личные функции полезности, или следовать неким наборам эмпирических правил. Наш анализ касается только тех фактов, которые будут выполнены, если найдутся игроки, использующие оптимальные стратегии, но причины, по которым они это делают, мы не изучаем.

3) Роль вознаграждения за участие в игре. Во многих реальных играх, подобных рассматриваемым здесь моделям (см. обзор далее), как правило, имеет место неравенство $c_t \leq 0$, т.е. игроки принимают участие в игре с нулевой или отрицательной суммой (отрицательная сумма может быть обусловлена комиссиями, на которых зарабатывает организатор игры). Таким образом, игрок может получить прибыль от участия в игре только если он умеет делать прогнозы лучше других игроков, а их прогнозы строго хуже оптимального. Можно предположить, что в этой ситуации не следует рассчитывать на эффективность информации, получаемой из игровых прогнозов. Такое соображение основывается на том, что с течением времени игроки, которые делают существенно ошибочные прогнозы (и за счет которых могут увеличивать свой капитал игроки с правильными прогнозами), будут иметь долю капитала, стремящуюся к нулю. Соответственно, доходность стратегий игроков с правильными прогнозами будет снижаться, что в итоге приведет к их незаинтересованности в участии в такой игре.

В этом свете предположение $c_t > 0$ выглядит разумным с экономической точки зрения: информация, которую организатор игры может получить из игровых прогнозов, является благом, за которое необходимо заплатить.

4) Игра, в которой никто не использует оптимальную стратегию. Приведем результат о пределе отношения капитала игроков в случае, когда ни один из них не использует стратегию $\lambda^n(y) = p^n(y)$. В рассматриваемой модели он формулируется довольно просто – быстрее всех растет капитал того игрока, стратегия которого наиболее близка к оптимальной в смысле расстояния Кульбака–Лейблера. Для общей модели это будет не так, мы частично коснемся этого вопроса в гл. **??**.

Далее ограничимся случаем, когда $\lambda^{m0}(y) = 0$ для всех m, y.

Предложение. *Пусть стратегии всех игроков таковы, что* $\lambda^{m0}(y) \equiv 0$*, а стратегия игрока 1 дополнительно удовлетворяет условию* $\lambda^{1n}(y) > 0$ *для всех* $n = 1, \dots, N$ *и всех значений* y*. Пусть для* $m = 2, \dots, M$ *выполнено неравенство*

$$\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{N} p^n(Y_t) \ln \frac{\lambda^{1n}(Y_t)}{\lambda^{mn}(Y_t)}\right) > 0, \tag{4}$$

где полагается $\ln(\lambda^{1n}(Y_t)/0) = +\infty$*. Тогда* $\lim_{t\to\infty} W_t^m / W_t^1 = 0$ *п.н.*

Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы выше, поэтому мы его опустим.

Касательно интерпретации неравенства (4), отметим, что вектор-функции $\lambda^m(y) = (\lambda^{m1}(y), \dots, \lambda^{mN}(y))$ можно рассматривать как условное распределение вероятностей на множестве из n элементов при условии y. Тогда неравенство (4) эквивалентно соотношению

$$\mathrm{E}(D_{\mathrm{KL}}(p(Y_t) \,\|\, \lambda^m(Y_t))) < \mathrm{E}(D_{\mathrm{KL}}(p(Y_t) \,\|\, \lambda^m(Y_t))),$$

где $D_{\mathrm{KL}}(p \,\|\, q) = \sum_{n=1}^{N} p^n \ln(p^n/q^n)$ есть расстояние Кульбака–Лейблера (или относительная энтропия) между двумя дискретными распределениями.

d. Доказательства

Доказательства теоремы и следствия здесь будут даны только для случая, когда стратегия каждого игрока $m = 1, \dots, M$ имеет компоненту $\lambda^{m0}(y) = 0$ для любых значений y, т.е. все игроки распределяют весь свой капитал между ставками. В этом случае доказательство наиболее просто и следует из усиленного закона больших чисел. Общий случай будет исследован в следующей главе.

Доказательство теоремы. Итак, пусть игрок 1 использует стратегию с компонентами $\lambda^{1n}(y) = p^n(y)$, а игрок m использует другую стратегию. Можно сразу считать, что $\lambda^{mn}(y_l) > 0$ для всех пар (n, l) таких, что $\mathrm{P}(X_t^n = 1 \mid Y_t = y_l) > 0$. Действительно, если это не так, то капитал игрока m с вероятностью 1 обнулится за конечное число шагов (а именно, в первом раунде, в котором $Y_t = y_l$, $X_t^n = 1$).

Обозначим

$$D_t = \ln \frac{W_t^1}{W_t^m} - \ln \frac{W_{t-1}^1}{W_{t-1}^m}.$$

В силу предположения $\lambda^{10}(y) = \lambda^{m0}(y) = 0$, нетрудно видеть, что

$$D_t = \sum_{n=1}^N X_t^n \ln \frac{\lambda^{1n}(Y_t)}{\lambda^{mn}(Y_t)},$$

где мы смогли поменять местами логарифм и операцию суммирования благодаря тому, что только одно слагаемое в сумме ненулевое.

Из формулы выше следует, что случайные величины D_t независимы и одинаково распределены. Кроме того,

$$\mathrm{E}\, D_t = \mathrm{E}(\mathrm{E}(D_t \mid Y_t)) = \mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^N p^n(Y_t) \ln \frac{p^n(Y_t)}{\lambda^{mn}(Y_t)}\right) > 0,$$

где неравенство следует из того, что сумма под знаком математического ожидания строго положительна по неравенству Гиббса[1]. Используя усиленный закон больших чисел, находим, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{W_t^1}{W_t^m} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s\le t} D_t = \mathrm{E}\, D_t.$$

Следовательно, $\ln(W_t^1/W_t^m) \to +\infty$ и $W_t^m/W_t^1 \to 0$. □

Доказательство следствия. Пусть игрок 1 использует стратегию $\lambda^{1n}(y) = p^n(y)$, а другие игроки используют отличные от нее стратегии (игроков, использующих такую же стратегию, можно объединить и рассматривать как одного игрока).

Пусть $\bar{W}_t = \sum_{m=1}^M W_t^m$ обозначает общий капитал всех игроков. Как следует из рассуждений в доказательстве теоремы, $W_t^m/\bar{W}_t \to 0$ с экспоненциальной скоростью для $m \neq 1$. Следовательно,

$$\sum_{m=1}^M h_t^{mn} \sim h_t^{1n} = p_t^n(Y_t) W_t^1, \qquad \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N h_t^{mn} \sim \sum_{n=1}^N h_t^{1n} = W_t^1,$$

где запись $\xi_t \sim \eta_t$ означает, что $\xi_t/\eta_t \to 1$ при $t \to \infty$. Таким образом $\pi_t^n \sim p^n(Y_t)$. Так как величины π_t^n ограничены, то $\pi_t^n - p^n(Y_t) \to 0$. □

[1] Для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^N$ со строго положительными координатами и суммой координат $\sum_{n=1}^N x^n = \sum_{n=1}^N y^n = 1$ выполнено

$$\sum_{n=1}^N x^n \ln \frac{x^n}{y^n} \ge 0,$$

причем в случае $x \neq y$ имеет место строгое неравенство.

Предсказательные игры в реальности

Рассмотренная выше игра представляет собой пример *тотализатора* – букмекерской системы, хорошо известной в спорте. Главное отличие тотализатора от казино состоит в том, что игроки соперничают друг с другом, а букмекер зарабатывает только на комиссии за участие в игре ($c_t < 0$ в нашей модели). Каждый, кто делал ставки на спортивные события, знает, что систематически делать выигрышные ставки довольно трудно, даже если обладать хорошим пониманием спортивной стороны дела. Можно сказать, что это служит свидетельством эффективности тотализатора как метода сбора прогнозов, так как ставочные коэффициенты, являясь агрегированным прогнозом всех игроков, хорошо отражают вероятности исходов. Математическим исследованиям оптимальных стратегий ставок на спортивные события посвящена довольно обширная литература; см., например, [35].

Практическая реализация систем, в которых можно делать ставки на события разного рода, не только связанные со спортом, стала возможна в конце XX в. с развитием электронный средств коммуникации. Одним из первых *рынков предсказаний* явился Электронный рынок Айовы IEM (Iowa Electronic Markets), созданный в 1988 г. в Университете штата Айова и функционирующий по сей день[2]. На этом рынке участники могут покупать и продавать денежные контракты, привязанные к исходам случайных событий в будущем. Значительная доля контрактов, торгующихся на IEM, привязана к исходам выборов в США (подробнее, см., например, [26]). В литературе неоднократно отмечалась точность предсказаний на IEM, которая может превосходить точность опросов общественного мнения, проводимых такими крупными организациями как Институт Гэллапа и др. (см. [9, 10]).

В какой-то степени рынками предсказаний можно считать и традиционные фондовые рынки, так как цены акций выражают мнение участников рынка о будущей прибыли компаний. В частности, знаменитая *гипотеза эффективного рынка*, сформулированная Юджином Фамой[3] [25], утверждает, что цены на свободных рынках отражают всю доступную информацию. Экономическую и математическую теорию, применимую к фондовым рынкам, таким образом, кажется вполне естественным применять и к рынкам предсказаний.

Вера в гипотезу эффективного рынка, а также успех IEM привели к появлению других электронных рынков предсказаний. Однако, функционирующие в реальности рынки предсказаний во многих странах существенно ограничены законодательно. Например, IEM имеет статус исследовательского проекта, подтвержденный Комиссией по торговле товарными фьючерсами США (CFTC), что, среди прочего, ограничивает максимально возможную сумму денег, которую игрок может использовать на этом рынке (500 долларов). В 2022 г. CFTC обязала закрыть другую

[2] Адрес в Интернете: `https://iem.uiowa.edu/iem/`

[3] Идея об эффективности рыночных цен была известна и до Фамы, например, из работ Башелье, Хайека, Мандельброта и других; см. [7, 28, 37].

известную площадку рынков предсказаний *PredictIt* из-за нарушений требований, касающихся статуса исследовательского проекта. Такого рода ограничения сдерживают развитие предсказательных рынков, однако они необходимы, чтобы гарантировать честность торгов и исключить риск появления мошеннических площадок.

В последние несколько лет, благодаря появлению технологии блокчейна, криптовалют и децентрализованных финансов, появились децентрализованные рынки предсказаний, у которых нет необходимости подчиняться требованиям регуляторных организаций к централизованным рынкам. Например, представленный в 2018 г. протокол Augur [40] позволяет транслировать информацию о событиях, происходящих в реальном мире, в блокчейн Ethereum, а смарт-контракты, выполняемые на виртуальной машине Ethereum, могут использоваться для распределения выигрышей между игроками. Можно ожидать, что механизм гарантии распределения выигрышей, обеспечиваемый блокчейном, позволит повысить популярность и эффективность рынков предсказаний.

В настоящей работе мы не будем касаться технических аспектов реализации предсказательных рынков.

Исторический обзор

Одной из первых работ, документирующих факт точности коллективного прогноза, была заметка Фрэнсиса Гальтона *Vox populi* (лат. глас народа), опубликованная в журнале *Nature* в 1907 г. [27]. Много других примеров так называемого феномена *мудрости толпы* можно найти в известной научно-популярной книге [44].

Математическая теория, лежащая в основе приведенной выше модели и последующих результатов настоящей работы, берет начало из статьи Блюма и Исли [11], в которой рассматривалась эволюционная модель рынка инвестиций в экономические активы. Значительная часть излагаемых далее результатов были сначала получены именно для финансовых рынков.

Модель Блюма–Исли описывает рынок короткоживущих активов, выплачивающих взаимно-исключающие дивиденды (так называемые *активы Эрроу*). Основное ее отличие от рассматриваемой здесь модели состоит в том, что игроки каждый раз обязаны реинвестировать весь свой капитал, а также отсутствуют выплаты, соответствующие компенсации за участие в игре (т.е. $c_t = 0$). Тем не менее, результаты получаются аналогичные – быстрее всех растет капитал стратегии, инвестирующей в активы пропорционально вероятностям выплат.

Отметим, что полученная оптимальная стратегия совпадает с так называемой *стратегией Келли* в игре, где игроки делают ставки при заданных коэффициентах выплаты [31]. Хорошо известным фактом в такой игре является то, что нужно распределять капитал в соответствии с вероятностями событий и независимо от того, каковы коэффициенты выплаты. Например, если при бросании честной монеты выпадение орла увеличивает ставку в 10 раз, а выпадение решки лишь в 1.1 раза, то все равно нужно поставить половину денег на орла, а половину на решку; это обеспечит наибольшую асимптотическую скорость роста капитала в бесконечной серии таких игр[4]. Отсюда становится понятным, почему оптимальная стратегия в нашей модели обеспечивает наибольшую скорость роста капитала независимо от стратегий других игроков.

В случае выплат, не обязательно являющихся взаимно-исключающими, наибольшую скорость роста капитала обеспечивает стратегия, которая на каждом шаге максимизирует математическое ожидание логарифма относительного изменения капитала за период (так называемая *лог-оптимальная стратегия*). Исследованиям лог-оптимальных стратегий посвящена обширная экономическая и вероятностная литература. Среди работ в этом направлении выделим статью Бреймана [14], кто одним из первых рассмотрел обобщение модели Келли на случай произвольных выплат. Наиболее полная модель в дискретном времени была изучена в работе Алгоета и Кавера [1]. Обзор результатов можно найти в гл. 16 книги [16], а также в статье [36].

В стохастической финансовой математике понятие лог-оптимальной стратегии тесно связано с *нумерэр-портфелями* (или просто *нумерэрами*), которые, в свою очередь, связаны с плотностями эквивалентных мартингальных мер. Понятие нумерэра было предложено Лонгом в работе [34]. Вопрос о существовании нумерэра и его связи с условием отсутствия арбитража в общей семимартингальной модели рынка был изучен в полной мере в работе Каратзаса и Кардараса [29]. Другие результаты можно найти в книге [30]. С другой стороны, задача максимизации ожидания логарифма стоимости портфеля является частным случаем общей задачи максимизации полезности в динамической модели рынка. Одной из первых работ в этом направлении была известная статья Мертона [38], в которой цены задаются геометрическим броуновским движением. Результаты для общих семимартингальных моделей можно найти в работах Крамкова и Шахермайера [32, 33].

Возвращаясь к эволюционным моделям финансовым рынков, отметим некоторые работы, развивающие идеи статьи Блюма и Исли. Здесь можно выделить два направления. Во-первых, изучались модели в рамках подхода общего равновесия, где стратегии агентов возникают из решения задачи максимизации функций полезности, см., например, работы [12, 13, 41, 43, 45]. Результаты, которые будут представлены далее, относятся к другому подходу, в котором рассматриваются стратегии общего вида, и не предполагается, что агенты обязательно решают некоторые оптимизационные задачи. Среди работ в этом направлении, обобщающих модель Блюма–Исли можно выделить результаты для независимых одинаково распреде-

[4] Для наибольшего асимптотического роста капитала нужно максимизировать математическое ожидание логарифма относительного изменения капитала за один период времени. Нетрудно видеть, что точка максимума зависит только от вероятностей исходов, но не от коэффициентов выплаты.

ленных дивидендов [21]; дивидендов, задаваемых марковской цепью [2]; и общий случай [4]. Эти работы посвящены моделям с так называемыми *короткоживущими активами*. Основные результаты в них состоит в том, что стратегия, оптимальная на длинном горизонте времени, должна распределять капитал между инвестициями в активы в таких пропорциях, в каких соотносятся условные ожидания их относительных дивидендов (см. детали в [4]). Однако для моделирования рынков обыкновенных акций необходимо использовать *долгоживущие активы*: такие модели изучались, например, в работах [3, 5, 20, 22, 23]. Обзор результатов как в моделях с короткоживущими, так и с долгоживущими активами приведен в статье [19]; простое изложение основных понятий представлено в гл. 20 учебника [24].

Касательно нашей работы отметим, что большая часть представленных результатов будет оперировать с аналогами моделей с короткоживущими активами. Модели с долгоживущим активами будут рассматриваться в гл. ?.

Глава 1

Предсказательные игры для условных ожиданий

Эта глава вводит в рассмотрение модель предсказательной игры с дискретным временем, обобщая пример, приведенный во введении. Основные результаты состоят в доказательстве существования *выживающих* стратегий и сходимости *игровых прогнозов* к “правильным” значениям (условным математическим ожиданиям случайных величин) в предположении, что хотя бы один игрок использует выживающую стратегию.

§ 1. Определения

a. Предсказательные игры и стратегии игроков

Определение 1.1. *Предсказательной игрой с дискретным временем* будем называть совокупность $\mathcal{G} = (\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ \mathrm{P},\ X,\ c)$, где

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ – фильтрованное вероятностное пространство с дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$,
- $X = (X_t)_{t=1}^{\infty}$ – последовательность $\mathcal{F}_t$-измеримых векторов $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$, принимающих значения в множестве $\Delta^N = \{x \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{n=1}^N x^n = 1\}$,
- $c = (c_t)_{t=1}^{\infty}$ – детерминированная последовательность, равномерно отделенная снизу от нуля ($c_t \geq \underline{c} > 0$ для всех $t \geq 1$).

Элементы последовательности X будем называть *объектами прогноза*; величину c_t будем называть *вознаграждением за участие* в раунде t. Для *суммарного вознаграждения* за первые t раундов будем использовать обозначение $C_t = \sum_{s=1}^t c_s$.

Предполагается, что игру $\mathcal{G}$ проводит *организатор*, который выплачивает ее участникам (*игрокам*) компенсацию за участие в игре в размере c_t денежных единиц за один раунд на всех участников. Целью участников является правильно предсказать значение вектора X_t в следующем раунде. Организатор игры обеспечивает описываемый далее механизм распределения выигрышей в соответствии с точностью прогнозов. У организатора нет задачи противостоять игрокам, игроки соперничают только между собой.

Определение 1.2. *Стратегией игрока* $\lambda = (\lambda_t)_{t=1}^{\infty}$ в игре $\mathcal{G}$ называется последовательность $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримых случайных векторов $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^N)$, принимающих значения в множестве $\bar{\Delta}^N = \{x \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{n=1}^N x^n \le 1\}$.

Для краткости будем использовать обозначение $\lambda_t^0 = 1 - \sum_{n=1}^N \lambda_t^n$. Когда идет речь о нескольких игроках, их стратегии будут нумероваться верхними индексами: $\lambda_t^m = (\lambda_t^{m1}, \dots, \lambda^{mN})$, где m соответствует номеру игрока.

Определение 1.3. Для заданного *профиля стратегий* $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^M)$ и заданного вектора начального капитала $W_0 \in \mathbb{R}_+^M$, капитал игроков в игре $\mathcal{G}$ в последующие моменты времени задается согласованной[1] последовательностью $W = (W_t)_{t=0}^{\infty}$, где $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^M)$ с компонентами

$$W_t^m = \left(\sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N \lambda_t^{kn} W_{t-1}^k + c_t \right) \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{mn} W_{t-1}^m}{\sum_{k=1}^M \lambda_t^{kn} W_{t-1}^k} X_t^n + \lambda_t^{m0} W_{t-1}^m. \tag{1.1}$$

Смысл этого выражения обсуждался во введении (стр. 3), здесь он остается таким же. Единственное отличие состоит в том, что теперь не предполагается, что только одна координата вектора X_t является ненулевой. Как следствие, во второй сумме может быть более одного ненулевого слагаемого. Напомним, что последнее обстоятельство играло важную роль в доказательстве теоремы во введении; далее нам придется обходится без него.

Мы всегда будем предполагать, что начальный капитал W_0^m каждого игрока строго положителен. Кроме того, чтобы избежать рассмотрения неинтересных дополнительных случаев, будем считать, что для всех $t \ge 1$ и $n = 1, \dots, N$ выполнено неравенство

$$\mathrm{P}(X_t^n > 0 \mid \mathcal{F}_{t-1}) > 0. \tag{1.2}$$

Для корректности соотношения (1.1) необходимо, чтобы знаменатель дроби не обращался в ноль. Следующее простое предложение показывает, когда это действительно так.

Предложение 1.4. *Пусть хотя бы один игрок (скажем, игрок m), использует стратегию, у которой $\lambda_t^{mn} > 0$ для всех $t \ge 1$ и $n = 1, \dots, N$. Тогда $W_t^m > 0$ и $\sum_{k=1}^M \lambda_t^{kn} W_{t-1}^k > 0$ для всех $t \ge 1$.*

Доказательство очевидным образом следует из самой формулы (1.1). Далее, если не оговорено иного, во всех рассматриваемых играх будет предполагаться, что условия предложения выполнены. Отметим, что оптимальная стратегия, которая будет найдена далее, удовлетворяет этому свойству.

[1] Напомним, что случайная последовательность X называется *согласованной* с фильтрацией $\mathbb{F}$, если все X_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми. Случайная последовательность X называется *предсказуемой* относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если все X_t являются $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримыми.

b. Игровые прогнозы

Определим некоторые производные характеристики динамики капитала в игре $\mathcal{G}$, которые потребуются в дальнейшем.

Совокупным капиталом будем называть случайную последовательность $\bar{W} = (\bar{W}_t)_{t=0}^{\infty}$, определяемую соотношением

$$\bar{W}_t = \sum_{m=1}^{M} W_t^m,$$

т.е. $\bar{W}$ представляет сумму капиталов всех игроков.

Долями капитала игроков (или *относительным капиталом*) будем называть последовательность случайных векторов $R = (R_t)_{t=0}^{\infty}$ в Δ^M с компонентами

$$R_t^m = \frac{W_t^m}{\bar{W}_t}.$$

Взвешенной стратегией (или *репрезентативной стратегией*) всех игроков будем называть последовательность случайных векторов $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_t)_{t=1}^{\infty}$ в $\bar{\Delta}^N$, где

$$\bar{\lambda}_t^n = \sum_{m=1}^{M} \lambda_t^{mn} R_t^m.$$

Аналогично индивидуальным стратегиям, будем использовать обозначение $\bar{\lambda}_t^0 = 1 - \sum_{n=1}^{N} \bar{\lambda}_t^n = \sum_{m=1}^{M} \lambda_t^{m0} R_t^m$.

Используя введенные обозначения, можно записать уравнение (1.1) в следующем более компактном виде:

$$\frac{W_t^m}{W_{t-1}^m} = \left(1 - \bar{\lambda}_t^0 + \frac{c_t}{\bar{W}_{t-1}}\right) \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{mn}}{\bar{\lambda}_t^n} X_t^n + \lambda_t^{m0}. \tag{1.3}$$

Также нетрудно видеть, что при выполнении условия предложения 1.4 имеем

$$\bar{W}_t = \bar{W}_{t-1} + c_t, \tag{1.4}$$

что, в принципе, интуитивно ясно: так как сумма ставок возвращается игрокам, то совокупный капитал увеличивается ровно на величину вознаграждения за участие в очередном раунде.

Следующее определения вводит в рассмотрение понятие прогноза, который организатор игры может извлечь из стратегий игроков. Наша дальнейшая цель будет показать, что он сходится к условного ожиданию $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$.

Определение 1.5. *Игровым прогнозом* в игре $\mathcal{G}$ будем завывать последовательность случайных векторов $\pi = (\pi_t)_{t=1}^{\infty}$ со значениями в Δ^N, где $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^N)$

имеет компоненты

$$\pi_t^n = \frac{\bar{\lambda}_t^n}{1 - \bar{\lambda}_t^0}$$

Замечание 1.6. При выполнении условий предложения 1.4 знаменатель в формуле выше не обращается в ноль.

Следует отметить, что с точки зрения организатора игры совокупный капитал, доли капитала и взвешенные стратегии, вообще говоря, являются ненаблюдаемыми величинами. Это связано с тем, что в практической реализации предсказательной игры разумно требовать, чтобы игроки сообщали организатору не пропорции λ_t^{mn}, а абсолютные величины ставок $h_t^{mn} = \lambda_t^{mn} W_t^m$, в то время как величины капитала W_t^m остаются не известными организатору. Естественно, что никакие ненаблюдаемые величины не должны использоваться в задаче прогнозирования условных математических ожиданий.

В то же время, игровые прогнозы π_t на самом деле являются наблюдаемыми величинами, т.к. их можно выразить следующим образом:

$$\pi_t^n = \frac{\sum_{m=1}^M h_t^{mn}}{\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N h_t^{mi}}.$$

c. *Выживающие стратегии*

Следующее определение вводит в рассмотрение центральное понятие всей работы.

Определение 1.7. Стратегия λ^m называется *выживающей на множестве* $A \in \mathcal{F}$, если в любом профиле стратегий $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^M)$, содержащим данную стратегию, и для любого вектора начального капитала W_0 выполнено неравенство[2]

$$\liminf_{t\to\infty} R_t^m > 0 \text{ п.н. на } A. \tag{1.5}$$

Стратегия называется *глобально выживающей*, если она выживает на множестве вероятности 1.

Там, где это не вызывает неоднозначности, мы будем называть глобально выживающие стратегии просто *выживающими* (без указания множества A).

Из симметрии модели ясно, что определение выживания не зависит от того, к какому номеру игрока m оно применяется. Следующее предложение показывает, что при исследовании выживаемости можно ограничиться рассмотрением профилей стратегией, состоящих всего из двух стратегий (хотя далее это существенно и не упростит рассуждения).

[2]Уточним, что если X – случайная величина, то мы говорим, что неравенство $X > 0$ выполнено п.н. на множестве $A \in \mathcal{F}$, если $\mathrm{P}(A \setminus \{\omega : X(\omega) > 0\}) = 0$.

Предложение 1.8. *Стратегия λ^1 является выживающей на множестве A тогда и только тогда, когда она выживает на A в любом профиле стратегий $\Lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ с любым вектором начального капитала $W_0 = (W_0^1, W_0^2)$.*

Доказательство. Если поместить λ^1 в профиль стратегий $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^M)$ с начальным капиталом $W_0 = (W_0^1, \dots, W_0^M)$, то из соотношения (1.3) нетрудно видеть, что последовательность капитала W^1 будет такой же, как в профиле стратегий $\widetilde{\Lambda} = (\lambda^1, \widetilde{\lambda}^2)$ с начальным капиталом $\widetilde{W}_0 = (W_0^1, \widetilde{W}_0^2)$, где

$$\widetilde{\lambda}_t^{2n} = \frac{1}{1 - R_{t-1}^1} \sum_{m=2}^{M} \lambda_t^{mn} R_{t-1}^m, \qquad \widetilde{W}_0^2 = \sum_{m=2}^{M} W_0^m,$$

т.е. в новом профиле стратегий второй игрок является взвешенной суммой игроков $m = 2, \dots, M$ из старого профиля (если в некоторый момент времени R_{t-1}^1 становится равным 1, то можно определить $\widetilde{\lambda}_t^2$ произвольным образом, т.к. с этого момента капитал игроков $m \geq 2$ становится нулевым и они не оказывают влияния на динамику капитала первого игрока). Отсюда очевидным образом следует доказываемое утверждение. □

§ 2. Основные результаты: существование выживающих стратегий и сходимость игровых прогнозов

a. Формулировки

Обозначим за $\mu_t = (\mu_t^1, \dots, \mu_t^N)$ вектор условных математических ожиданий

$$\mu_t^n = \mathrm{E}(X_t^n \mid \mathcal{F}_{t-1}).$$

Отметим, что в силу предположения (1.2) величины μ_t^n строго положительны.

Сначала мы сформулируем основные результаты в более простой форме (теоремы 2.1 – 2.3) которая представляет основную ценность. Затем для полноты математической картины приведем расширенные формулировки (теоремы 2.1′ – 2.3′).

Теорема 2.1. *Стратегия $\widehat{\lambda}_t = \mu_t$ является глобально выживающей.*

Теорема 2.2. *Пусть хотя бы один игрок использует стратегию $\widehat{\lambda}_t = \mu_t$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} (\pi_t - \mu_t) = 0$ п.н.*

Теорема 2.3. *Пусть $\inf\limits_{t\geq 1} (c_t / C_t) > 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} (\lambda_t - \mu_t) = 0$ п.н. для любой глобально выживающей стратегии λ.*

Замечание 2.4. Условие $\inf\limits_{t\geq 1} (c_t / C_t) > 0$ выполнено, если $c_t = c_0(1+r)^t$ с некоторыми $c_0 > 0$ и $r > 0$. В этом случае величину r можно интерпретировать как процентную ставку, на которую индексируется вознаграждение за участие в игре.

Интерпретация сформулированных результатов состоит в следующем. Теорема 2.2 показывает, что из предсказательной игры можно извлечь асимптотически правильный прогноз условных математических ожиданий при условии, что хотя бы один из игроков следует стратегии $\widehat{\lambda}$ (или близкой к ней, см. далее теорему 2.2′). Теоремы 2.1 и 2.3 показывают, что стратегия $\widehat{\lambda}$ или асимптотически близкие к ней стратегии являются "правильными" для игроков в смысле выживания и, следовательно, можно ожидать, что найдутся игроки, которые будут стремиться следовать таким стратегиям.

Далее мы приведем расширенные формулировки предыдущих теорем. Обозначение $\|x\|$ будет использоваться для евклидовой нормы вектора $x \in \mathbb{R}^N$. Если ξ – случайный вектор, то $\|\xi\| = \|\xi(\omega)\|$ обозначает случайную норму.

Теоерма 2.1′. *Пусть стратегия λ имеет строго положительные компоненты ($\lambda_t^n > 0$ для всех $n = 1, \ldots, N$, $t \geq 1$). Тогда λ выживает на множестве*

$$\Gamma = \left\{ \omega : \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_t^n \ln \frac{\mu_t^n}{\lambda_t^n} < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

Если к тому же существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что $\mu_t^n \geq \varepsilon$ для всех $t \geq 1$, $n = 1, \ldots, N$, то λ выживает на множестве

$$\Gamma' = \left\{ \omega : \sum_{t=1}^{\infty} \|\mu_t - \lambda_t\|^2 < \infty \right\}.$$

Теоерма 2.2′. *Пусть хотя бы один игрок использует стратегию λ со строго положительными компонентами. Тогда*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\pi_t - \mu_t\|^2 < \infty \text{ п.н. на } \Gamma.$$

В частности, $\lim\limits_{t\to\infty} (\pi_t - \mu_t) = 0$ п.н. на Γ.

Теоерма 2.3′. *Пусть $\inf_{t\geq 1}(c_t/C_t) > 0$. Тогда для любой глобально выживающей стратегии λ является выполнено соотношение*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\mu_t - \lambda_t\|^2 < \infty \text{ п.н.} \tag{2.2}$$

Следствие 2.5. *Пусть $\inf_{t\geq 1}(c_t/C_t) > 0$ и $\mu_t^n \geq \varepsilon > 0$. Тогда условие (2.2) является необходимым и достаточным для того, чтобы стратегия λ со строго положительными компонентами являлась глобально выживающей.*

b. Доказательства

Мы докажем теоремы сразу в расширенной формулировке, так как базовые из них, очевидно, следуют. Доказательства будут опираться на ряд результатов из теории мартингалов, которые вынесены в § 4.

Будем использовать обозначение $|\cdot|$ для ℓ^1-нормы вектора, т.е. $|x| = \sum_{n=1}^N |x^n|$ для $x \in \mathbb{R}^N$. Как хорошо известно, все нормы на $\mathbb{R}^N$ эквивалентны. В частности, $\frac{1}{\sqrt{N}}|x| \le \|x\| \le |x|$ для любого $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 2.6 (неравенства Пинскера)**.** *Пусть векторы $x, y \in \Delta^N$ имеют все строго положительные компоненты. Тогда*

$$\frac{1}{2}|x-y|^2 \le \sum_{n=1}^N x^n \ln \frac{x^n}{y^n} \le \frac{|x-y|^2}{2\min_n y^n}.$$

Левая часть неравенства выше – это *неравенство Пинскера* о связи расстояния Кульбака–Лейблера (средняя часть неравенства) и расстояния полной вариации ($\frac{1}{2}|x-y|$), если рассматривать x и y как вероятностные распределения на множестве из N элементов. Правая часть называется *обратным неравенством Пинскера.* Доказательства хорошо известны, мы их опускаем[3].

Доказательство теоремы 2.1′. Пусть игрок $m = 1$ использует стратегию λ со строго положительными компонентами. Определим последовательности $U = (U_t)_{t\ge 0}$ и $Z = (Z_t)_{t\ge 0}$:

$$U_0 = 0, \qquad U_t = U_{t-1} + \sum_{n=1}^N \mu_t^n \ln \frac{\mu_t^n}{\lambda_t^n},\ t \ge 1,$$
$$Z_t = \ln R_t^1 + U_t,\ t \ge 0.$$

Очевидно, что U предсказуема. Из леммы 2.6 следует, что U не убывает. Заметим, что множество Γ есть ни что иное, как множество сходимости U.

Докажем, что Z является локальным субмартингалом, для чего достаточно показать, что $\mathrm{E}(Z_t^+ \mid \mathcal{F}_{t-1}) < \infty$ и $\mathrm{E}(Z_t - Z_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \ge 0$, см. предложение 4.2. Первое неравенство очевидно следует из того, что $Z_t \le U_t$, а U предсказуема. Далее

[3]Неравенство Пинскера было получено М. С. Пинскером с большей константой, см. [47]. Доказательство с константой $1/2$ можно найти, например, в [16], лемма 11.6.1. Доказательство обратного неравенства Пинскера с константой $1/2$ можно найти в [42].

из соотношений (1.3)–(1.4) находим

$$\begin{aligned}\ln R_t^1 - \ln R_{t-1}^1 &= \ln \frac{W_t^m / W_{t-1}^m}{\bar{W}_t / \bar{W}_{t-1}} \\ &= \ln \left(\frac{(1-\bar{\lambda}_t^0)\bar{W}_{t-1} + c_t}{\bar{W}_{t-1} + c_t} \sum_{n=1}^N X_t^n \frac{\lambda_t^n}{\bar{\lambda}_t^n} + \frac{\lambda_t^0 \bar{W}_{t-1}}{\bar{W}_{t-1} + c_t} \right) \\ &\geq \ln \frac{(1-\bar{\lambda}_t^0)\bar{W}_{t-1} + c_t}{(1-\bar{\lambda}_t^0)(\bar{W}_{t-1} + c_t)} + \ln \left(\sum_{n=1}^N X_t^n \frac{\lambda_t^n}{\pi_t^n} \right) \geq \sum_{n=1}^N X_t^n \ln \frac{\lambda_t^n}{\pi_t^n}, \quad (2.3)\end{aligned}$$

где в последнем неравенстве воспользовались вогнутостью логарифма, рассматривая X_t^n как коэффициенты выпуклой комбинации. Используя это неравенство для оценки $\mathrm{E}(Z_t - Z_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1})$ и применяя лемму 2.6, получаем

$$\mathrm{E}(Z_t - Z_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq \frac{1}{2} |\mu_t - \pi_t|^2.$$

Следовательно, Z является локальным субмартингалом.

Так как $Z_t \leq U_t$, то по предложению 4.7 на множестве Γ существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} Z_t$. Как следствие, на этом множестве существует конечный предел $r = \lim_{t\to\infty} \ln R_t^1$, и тогда $\lim_{t\to\infty} R_t^1 = e^r > 0$. Таким образом, доказана выживаемость на Γ.

Выживаемость на Γ' при выполнении условия $\mu_t^n \geq \varepsilon > 0$ следует из выживаемости на Γ и оценки (напомним, что нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^N$ эквивалентны)

$$\sum_{n=1}^N \mu_t^n \ln \frac{\mu_t^n}{\lambda_t^n} \leq \frac{|\mu_t - \lambda_t|^2}{2 \min_n \lambda_t^n} = O(|\mu_t - \lambda_t|^2) \text{ при } t \to \infty \text{ на } \Gamma'.$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2.2′. Как следует из доказательства предыдущей теоремы, компенсатор локального субмартингала Z можно оценить так:

$$A_t \geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t |\mu_s - \pi_s|^2.$$

Из предложения 4.7 следует, что на множестве Γ компенсатор сходится, откуда получаем утверждение теоремы (опять пользуясь эквивалентностью норм). □

Доказательство теоремы 2.3′. Если λ является глобально выживающей стратегией, то она должна выживать и в профиле стратегий $\Lambda = (\widehat{\lambda}, \lambda)$, где $\widehat{\lambda}_t = \mu_t$. Используя более аккуратную модификацию оценки (2.3), а именно

$$\ln R_t^1 - \ln R_{t-1}^1 \geq \ln \frac{(1-\bar{\lambda}_t^0)\bar{W}_{t-1} + c_t}{(1-\bar{\lambda}_t^0)(\bar{W}_{t-1} + c_t)} + \sum_{n=1}^N X_t^n \ln \frac{\lambda_t^n}{\pi_t^n},$$

и повторяя рассуждения из доказательств двух предыдущих теорем о сходимости локального субмартингала Z и его компенсатора, получаем, что

$$\sum_{t=1}^{\infty} \ln \frac{(1-\bar{\lambda}_t^0)\bar{W}_{t-1}+c_t}{(1-\bar{\lambda}_t^0)(\bar{W}_{t-1}+c_t)} < \infty.$$

Так как сходимость ряда $\sum_{t=1}^{\infty} \ln(1+x_t)$, $x_t \geq 0$, эквивалента сходимости ряда $\sum_{t=1}^{\infty} x_t$, то

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_t^0 c_t}{(1-\bar{\lambda}_t^0)\bar{W}_{t-1}+c_t} < \infty.$$

Так как $\bar{W}_{t-1} = \bar{W}_0 + C_t$, то нетрудно видеть, что $\sum_{t=0}^{\infty} \bar{\lambda}_t^0 < \infty$. Из выбора профиля стратегией следует, что $\bar{\lambda}_t^0 = R_t^2 \lambda_t^0$, и, в силу предположения о выживаемости, получаем $\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t^0 < \infty$. Кроме того, имеем

$$\pi_t - \mu_t = \frac{R_t^2(\lambda_t - \mu_t) - \lambda_t^0 \mu_t}{1-\lambda_t^0}.$$

Из этого соотношения и сходимости ряда $\sum_{t=1}^{\infty} |\pi_t - \mu_t|^2$ (по теореме 2.3′), следует сходимость ряда $\sum_{t=1}^{\infty} |\lambda_t - \mu_t|^2$. □

Доказательство следствия 2.5 очевидно вытекает из теорем 2.1′ и 2.3′. □

c. *Поиск выживающей стратегии: метод большого и малого игрока*

Доказательства выше опирались на знание явного вида выживающей стратегии $\widehat{\lambda}$. В этом разделе мы приведем метод, позволяющий ее найти, который будет особенно полезен при рассмотрении более сложных моделей. Метод не является формально строгим, но он позволяет “угадать” нужную стратегию; затем остается проверить, что она действительно является выживающей (хотя проверка может оказаться трудной).

Согласно предложению 1.8, достаточно доказывать выживаемость в игре двух игроков. Из доказательства теоремы 2.1′ можно заметить, что достаточно найти такую стратегию $\widehat{\lambda}$, что, если игрок 1 использует ее, то последовательность $\ln R_t^1$ является субмартингалом при любой стратегии игрока 2. Из неравенства Йенсена следует, что тогда последовательность R_t^2 должна быть супермартингалом. В частности, супермартингальное свойство $\mathrm{E}(R_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) \leq R_{t-1}^2$ должно быть выполнено и в ситуации, когда доля капитал игрока 1 близок к 1 (т.е. $R_{t-1}^1 \approx 1$, $R_{t-1}^2 \approx 0$).

Имея ввиду это рассуждение, рассмотрим новую модель игры двух игроков со стратегиями λ^1 и λ^2, капитал которых задан соотношениями

$$\begin{aligned} W_t^1 &= W_{t-1}^1 + c_t, \\ \frac{W_t^2}{W_{t-1}^2} &= \left(1 - \lambda_t^{10} + \frac{c_t}{W_{t-1}^1}\right) \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{2n}}{\lambda_t^{1n}} X_t^n + \lambda_t^{20}. \end{aligned}$$

Эти выражения получаются, если формальным образом положить $\bar{W}_t = W_t^1$ в формулах (1.3)–(1.4). Это соответствует тому, что игрок 1 является “большим” (доля его капитала равна 1), а игрок 2 “малым” (доля его капитала равна 0), что объясняет название метода.

Найдем стратегию λ^1 такую, что отношение $r_t := W_t^2/W_t^1$ является супермартингалом при любой стратегии λ^2 . Достаточно ограничиться стратегиями λ^2, у которых $\lambda_t^{20} = 0$. Тогда имеем

$$\mathrm{E}\left(\frac{r_t}{r_{t-1}} \;\middle|\; \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{2n}}{\lambda_t^{1n}} \mu_t^n.$$

Отсюда ясно, что если взять $\lambda_t^{1n} = \mu_t^n$, то получим $\mathrm{E}(r_t/r_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 1$, т.е. r_t будет неотрицательным локальным мартингалом (и, значит, супермартингалом), что и требовалось.

Также нетрудно видеть, что если $\lambda_t^2 = \mu_t$, то для любой стратегии λ^1 по неравенству Йенсена имеем

$$\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{2n}}{\lambda_t^{1n}} \mu_t^n \geq \frac{1}{\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{1n}}{\mu_t^n} \mu_t^n} = \frac{1}{1 - \lambda_t^{10}} \geq 1,$$

причем, так как все $\mu_t^n > 0$, то неравенство будет строгим, если $\lambda_t^1 \neq \mu_t$. Отсюда следует, что $\widehat{\lambda}_t = \mu_t$ является единственным кандидатом на роль выживающей стратегии.

§ 3. Частные случае и примеры

a. Предсказание условных вероятностей

Для предсказания условных вероятностей N случайных событий, образующих разбиение вероятностного пространства, можно отождествить их, как это было сделано в примере во введении, со случайными векторами-индикаторами $X_t = (X_t^1, \ldots, X_T^N)$, принимающими значения в множестве $\{e_1, \ldots, e_N\}$, где e_n – базисные векторы в $\mathbb{R}^N$. Уточним, что здесь под N случайными событиями на самом деле понимается *последовательность* N-элементных разбиений вероятностного пространства $D = (D_t)_{t=1}^\infty$, $D_t = \{A_t^1, \ldots, A_t^N\}$, где $A_t^n \in \mathcal{F}_t$, и, таким образом, $X_t^n = \mathrm{I}(A_t^n)$.

Ясно, что в этом случае $\mu_t^n = p_t^n$, где $p_t^n = \mathrm{P}(A_t^n \mid \mathcal{F}_{t-1})$ задают условные вероятности событий. В частности, для игровых прогнозов справедливо, что $\lim_{t\to\infty}(\pi_t^n - p_t^n) = 0$ п.н., если хотя бы один игрок использует стратегию $\widehat{\lambda}$.

Для предсказания условных вероятностей N событий, не образующих разбиение вероятностного пространства, можно поступить следующим образом (взять $X_t^n = \mathrm{I}(A_t^n)$ теперь нельзя, так как тогда X_t не будет принимать значения в Δ^N). В качестве объектов прогноза рассмотрим векторы $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N, X_t^{N+1})$, где

$$X_t^n = \frac{1}{N}\,\mathrm{I}(A_t^n),\ n = 1, \dots, N, \qquad X_t^{N+1} = 1 - \sum_{n=1}^{N} X_t^n.$$

Очевидно, в этом случае $X_t \in \Delta^{N+1}$, причем $N\mu_t^n = p_t^n = \mathrm{P}(A_t^n \mid \mathcal{F}_{t-1})$ для $n = 1, \dots, N$, а величина $N\mu_t^{N+1}$ представляет условное математическое ожидание количества событий, которые произойдут в раунде t. В частности, $\lim_{t\to\infty}(N\pi_t^n - p_t^n) = 0$ п.н. для каждого $n = 1, \dots, N$.

b. Предсказание условных моментов случайных величин

Описанная выше схема позволяет построить предсказательную игру, где объектом прогноза в каждом раунде будет условное распределение некоторой случайной величины, принимающей конечное число значений: для этого достаточно рассмотреть разбиение вероятностного пространства событиями вида $\{\omega : Y_t = y_l\}$, где $Y = (Y_t)_{t=1}^{\infty}$ – интересующая нас согласованная последовательность случайный величин. Если случайные величины принимают бесконечное число значений, то можно рассмотреть их дискретизацию с помощью событий вида $\{\omega : Y_t \in (a_i, b_i]\}$. Однако, с ростом числа возможных значений или количества интервалов в дискретизации, такая схема становится неудобной. С другой стороны, для практических приложений может быть достаточным иметь оценки нескольких условных моментов случайных величин. Их можно получить следующим образом.

Будем считать, что величины Y_t принимают значения в $[0, 1]$. В общем случае, если Y_t ограничены, то можно свести задачу к случаю $[0, 1]$ с помощью аффинного преобразования; если Y_t не ограничены, то можно рассмотреть ограниченные величины $\widetilde{Y}_t$ близкие к Y_t в каком-либо смысле (например, взять усечение $\widetilde{Y}_t = \max(a, \min(Y_t, b)))$ и опять применить аффинное преобразование.

Рассмотрим объекты прогноза вида $X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)}, X_t^{(N+1)})$, где $X_t^{(n)} = Y_t^n/N$ для $n = 1, \dots, N$ и $X_t^{(N+1)} = 1 - \sum_{n=1}^{M} Y_t^n/N$ (здесь верхний индекс в скобках обозначает координату вектора, а без скобок – показатель степени). Ясно, что $X_t \in \Delta^{N+1}$, причем $N\mu_t^n = \mathrm{E}(Y_t^n \mid \mathcal{F}_{t-1})$ для $n = 1, \dots, N$. Например, при $N = 2$ можно оценить условное ожидание и условную дисперсию

$$\mathrm{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \approx 2\pi_t^1, \qquad \mathrm{Var}(Y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \approx 2\pi_t^2 - 4(\pi_t^1)^2.$$

Для старших моментов получаются аналогичные формулы.

c. Случай независимых и одинаково распределенных объектов прогноза

Рассмотрим частный случай общей модели, которая соответствует примеру предсказательной игры из введения.

Будем считать, что последовательность объектов прогноза X является последовательностью одинаково распределенных векторов. Кроме того, пусть существует предсказуемая последовательность одинаково распределенных случайных элементов $Y = (Y_t)_{t\geq 1}$ со значениями в некотором измеримом пространстве $(S, \mathcal{S})$ такая, что

$$\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mu(Y_t),$$

где $\mu\colon S \to \Delta^N$ – некоторая измеримая функция.

Основные результаты этой главы для такой модели выглядят следующим образом. Во-первых, стратегия $\widehat{\lambda}$ с компонентами $\widehat{\lambda}_t^n = \mu^n(Y_t)$ является глобально выживающей. Во-вторых, если хотя бы один игрок использует стратегию $\widehat{\lambda}$, то

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\pi_t - \mu(Y_t)\|^2 < \infty \text{ п.н.}$$

В третьих, если $\inf_{t\geq 1}(c_t/C_t) > 0$, то для любой глобально выживающей стратегии λ выполнено неравенство

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\mu(Y_t) - \lambda_t\|^2 < \infty \text{ п.н.}$$

Если, дополнительно, последовательность Y состоит из независимых случайных элементов, то из последнего неравенства и теоремы Колмогорова–Хинчина о сходимости рядов следует, что $\widehat{\lambda}$ является единственной (с точностью до равенства п.н.) глобально выживающей стратегией в классе стратегий вида $\lambda_t = \lambda(Y_t)$.

Последний результат можно усилить и показать, что $\widehat{\lambda}$ является единственной выживающей стратегией в любом профиле стратегий вида $\lambda(Y_t)$.

Теорема 3.1. *Пусть случайные элементы Y_t независимы. Предположим, что в профиле стратегий $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^M)$ игрок 1 использует стратегию $\widehat{\lambda}$, а другие игроки используют стратегии вида $\lambda_t^m = \lambda^m(Y_t)$, где λ^m – неслучайные функции. Тогда, если $\mathrm{P}(\mu(Y_t) \neq \lambda^m(Y_t)) > 0$, то*

$$\lim_{t\to\infty} R_t^m = 0 \text{ п.н.}$$

Доказательство. □

§ 4. Приложение: результаты из теории мартингалов с дискретным временем

В этом параграфе приводятся вспомогательные результаты из теории мартингалов, нужные в доказательствах. Часть из них хорошо известны и их можно найти, например, в гл. VII книги [48] или в гл. I книги [49].

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{\infty}$. Напомним, что случайная последовательность $M = (M_t)_{t=0}^{\infty}$, согласованная с фильтрацией $\mathbb{F}$, называется *мартингалом*, если выполнены следующие свойства:

1. $\mathrm{E}\,|M_t| < \infty$ для всех $t \geq 0$,
2. $\mathrm{E}(M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = M_{t-1}$ для всех $t \geq 1$.

Если в последнем свойстве заменить знак “$=$” на “$\leq$” или “$\geq$”, то получится определение *супермартингала* или *субмартингала* соответственно.

Локальным мартингалом называется согласованная случайная последовательность $M = (M_t)_{t\geq 0}$ такая, что $\mathrm{E}\,|M_0| < \infty$ и существует последовательность моментов остановки τ_k, $k \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

1. $\tau_{k+1} \geq \tau_k$ п.н. для всех k,
2. $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ п.н.,
3. для любого k *остановленная последовательность* $M^{\tau_k} = (M_t^{\tau_k})_{t=0}^{\infty}$, где $M_t^{\tau_k} = M_{\min(t,\tau_k)}$, является мартингалом.

Последовательность τ_k называется *локализующей последовательностью* для M. Аналогичным образом определяются локальные суб- и супермартингалы.

Предложение 4.1 (*Разложение Дуба*, см. [48], гл. VII, § 1, т. 2)**.** *Любой субмартингал или супермартингал X можно представить в виде $X_t = M_t + A_t$, где M является мартингалом, A является предсказуемой последовательностью (называемой* компенсатором *X), $\mathrm{E}\,|A_t| < \infty$ и $A_0 = 0$. Если X – субмартингал, то A не убывает, а если X – супермартингал, то A не возрастает.*

Последовательности M и A определены п.н.-единственным образом и в явном виде задаются соотношениями

$$A_t = \sum_{s=1}^{t} (\mathrm{E}(X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}) - X_{s-1}), \qquad M_t = X_0 + \sum_{s=1}^{t} (X_s - \mathrm{E}(X_s \mid \mathcal{F}_{s-1})). \tag{4.1}$$

Предложение 4.2. *Пусть последовательность X согласована с фильтрацией $\mathbb{F}$ и $\mathrm{E}\,|X_0| < \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны*

(a) X является локальным субмартингалом,

(b) имеет место разложение Дуба *$X_t = M_t + A_t$, где M является локальным мартингалом, A является неубывающей предсказуемой последовательностью с $A_0 = 0$ (*компенсатором *X),*

(c) $\mathrm{E}(X_t^+ \mid \mathcal{F}_{t-1}) < \infty$ *п.н. и* $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq X_{t-1}$ *для всех* $t \geq 1$.

Доказательство. (a) ⇒ (b). Пусть τ_k локализует X, и M^k, A^k являются мартингалом и компенсатором из разложения Дуба для X^{τ_k}. Из единственности в разложении Дуба следует, что $M_t^k = M_t^{k+1}$ и $A_t^k = A_t^{k+1}$ п.н. на множестве $\{\omega : \tau_k \geq t\}$. Так как $\tau_k \to \infty$, то существуют пределы $M_t = \lim_{k\to\infty} M_t^{\tau_k}$ и $A_t = \lim_{t\to\infty} A_t^{\tau_k}$, причем $X_t = M_t + A_t$. Нетрудно видеть, что новая последовательность M является локальным мартингалом с локализующей последовательностью τ_k, а A является неубывающей предсказуемой последовательностью.

(b) ⇒ (a). В качестве локализующей последовательности для X можно взять $\tau_k = \min(\tau_k', \tau_k'')$, где τ_k' локализует M, а $\tau_k'' = \inf\{t \geq 0 : A_{t+1} \geq k\}$.

(b) ⇒ (c). Пусть $X_t = M_t + A_t$. Для локального мартингала M выполнение свойств $\mathrm{E}(|M_t| \mid \mathcal{F}_{t-1}) < \infty$ и $\mathrm{E}(M_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$ доказано в [49], гл. I, предложение 1.64. Для компенсатора A аналогичные свойства очевидны в силу предсказуемости и неубываемости. Отсюда следует (c).

(c) ⇒ (b). Неравенство $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geq X_{t-1}$ влечет, что $\mathrm{E}(X_t^- \mid \mathcal{F}_{t-1}) < \infty$. Следовательно, $\mathrm{E}(|X_t| \mid \mathcal{F}_{t-1}) < \infty$. Зададим M и A по формулам (4.1). Тогда предсказуемость и неубываемость A очевидны, а то, что M является локальным мартингалом, доказано в упомянутом выше предложении из [49]. □

Замечание 4.3. Разложение Дуба для локальных субмартингалов Дуба единственно с точностью до равенства п.н. Доказывается это так же, как для обычных субмартингалов. Действительно, предположим, что $X_t = M_t + A_t = M_t' + A_t'$. Тогда последовательность $M_t - M_t'$ является предсказуемым локальным мартингалом с нулевым начальным значением, и, следовательно, она тождественно равна нулю. Таким образом, $M_t = M_t'$. Отсюда получаем, что и $A_t = A_t'$.

В явном виде последовательности M и A для локальных субмартингалов задаются тоже по формулам (4.1).

Предложение 4.4 ([48], гл. VII, § 1, т. 3)**.** *Пусть M является локальным мартингалом и $\mathrm{E}\,M_t^+ < \infty$ для всех $t \geq 0$ (или $\mathrm{E}\,M_t^- < \infty$ для всех $t \geq 0$). Тогда M является мартингалом.*

Предложение 4.5 (*теорема Дуба о сходимости*, см. [49], гл. I, § 1, т. 1.39)**.** *Если субмартингал X ограничен сверху интегрируемой случайной величиной ($X_t \leq \xi$ для всех $t \geq 0$, где $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$), то с вероятностью 1 существует конечный предел $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$.*

Следствие 4.6. *Пусть локальный субмартингал X имеет компенсатор A и ограничен сверху интегрируемой случайной величиной. Тогда с вероятностью 1 существуют конечные пределы X_∞ и A_∞.*

Доказательство. Для локального мартингала M из разложения Дуба для X имеем $M_t = X_t - A_t \leq X_t$. Тогда из предложений 4.4 и 4.5 следует существование предела

M_∞. Следовательно, компенсатор ограничен: $A_t = \sup_{t\geq 1} X_t - \inf_{t\geq 0} M_t < \infty$. Так как компенсатор не убывает, то существует конечный предел A_∞. Отсюда следует существование предела X_∞. $\square$

Предложение 4.7. *Пусть X является локальным субмартингалом с компенсатором A и существует предсказуемая последовательность U такая, что $X_t \leq U_t$ для всех $t \geq 0$. Тогда на множестве $\{\omega : \sup_{t\geq 0} U_t < \infty\}$ п.н. существуют конечные пределы X_∞ и A_∞.*

Доказательство. Для $a \in \mathbb{R}$ определим момент остановки $\tau_a = \min\{t \geq 0 : U_{t+1} \geq a\}$, где $\min \emptyset = \infty$. Пусть $X^a = (X_t^a)_{t\geq 0}$, $X_t^a = X_{\min(t,\tau_a)}$ – последовательность X, остановленная в момент τ_a.

Из теоремы Дуба об остановке (см. [48], гл. VII, § 2) следует, что X^a является локальным субмартингалом (с той же локализующей последовательностью, что и у X). Пусть $X_t^a = M_t^a + A_t^a$ – его разложение Дуба. Из единственности разложения следует, что $M_t^a = M_t$, $A_t^a = A_t$ на множестве $\{\omega : t \leq \tau_a\}$, где $X_t = M_t + A_t$ – разложение Дуба исходной последовательности.

Так как $X_t^a \leq a$, то согласно следствию 4.6, для каждого a существуют п.н.-конечные пределы X_∞^a и A_∞^a. Кроме того, для каждого $\omega \in \Gamma$ найдется a такое, что $\tau_a(\omega) = \infty$. Отсюда следует существование п.н.-конечных пределов $M_\infty(\omega) = M_\infty^a(\omega)$ и $A_\infty(\omega) = A_\infty^a(\omega)$ на Γ. $\square$

Глава 2

Предсказательные игры для точечных процессов

Игры, изучаемые в этой главе, возникают как пределы предсказательных игр для условных вероятностей, если раунды проводятся часто, а вознаграждение за участие мало. В первом параграфе мы опишем такую модель с помощью формального перехода к пределу. Мы увидим, что она может быть задана посредством стохастического уравнения с точечным процессом. Строгая формулировка и исследование модели содержатся в последующих разделах.

Чтобы было проще придать смысл основным объектам модели, удобно представить следующий практический пример. Предположим, что несколько научных лаборатории ведут исследования, в результате которых время от времени появляются научные открытия. Моменты появления открытий случайны и достаточно редки. От участников предсказательной игры требуется оценить скорость появления открытий в каждой лаборатории в текущий момент времени. С течением времени скорость появления открытий может изменяться, и, как следствие, оценки скорости тоже должны регулярно пересматриваться.

§ 1. Предварительные рассуждения: предел предсказательной игры с дискретным временем

Рассмотрим предсказательную игру для условных вероятностей $N+1$ взаимно исключающего случайного события. События $n = 1, \dots, N$ интерпретируются как некоторые события, интересующие организатора игры, а событие $n = N+1$ означает, что ни одно из интересующих случайных событий не происходит. Объектом прогноза являются элементы случайной последовательности $X = (X_t)_{t=1}^{\infty}$ со значениями в Δ^{N+1}, где $X_t \in \{e_1, \dots, e_{N+1}\}$.

Предположим, что один раунд в этой игре проводится за малый промежуток физического времени Δt, при этом вероятности событий $\{\omega : X_t^n = 1\}$ малы для $n = 1, \dots, N$, а вероятностью события $\{\omega : X_t^{N+1} = 1\}$ близка к 1. А именно, пусть для $n = 1, \dots, N$

$$\mathrm{P}(X_t^n = 1 \mid \mathcal{F}_{t-\Delta t}) \approx p_t^n \Delta t, \tag{1.1}$$

где p_t^n – некоторые $\mathcal{F}_{t-\Delta t}$-измеримые величины. Как следствие, для последнего события имеем $\mathrm{P}(X_t^{N+1}=1\mid\mathcal{F}_{t-\Delta t})\approx 1-\sum_{n=1}^N p_t^n\Delta t$. Нас будет интересовать предел такой модели при $\Delta t\to 0$.

Так как вероятности первых N событий малы, то будем считать, что соответствующие компоненты стратегий игроков тоже малы. Предположим, что

$$\lambda_t^{mn}\approx\alpha_t^{mn}\Delta t,\ n=1,\dots,N,\qquad \lambda_t^{m0}\approx\beta_t^m-\sum_{n=1}^N\alpha^{mn}\Delta t, \tag{1.2}$$

где α_t^{mn}, β_t^m измеримы относительно $\mathcal{F}_{t-\Delta t}$, причем α_t^{mn} принимают значения в $\mathbb{R}_+$, а β^m в $(0,1]$. Тогда $\lambda_t^m\in\bar{\Delta}^{N+1}$ при достаточно малом Δt. Пропорция капитала, которую игрок m не распределяет на ставки, равна $\lambda_t^{m0}=1-\beta_t^m$.

Будем также предполагать, что компенсация за участие в одном раунде составляет $\widetilde{c}_t=c_t\Delta t$, где $c_t>0$ – детерминированные величины.

Уравнение изменения капитала (см. (1.3)) принимает вид

$$\frac{W_t^m}{W_{t-\Delta t}^m}=\left(\bar{\beta}_t+\frac{c_t\Delta t}{\bar{W}_{t-\Delta t}}\right)\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\lambda_t^{mn}}{\bar{\lambda}_t^n}X_t^n+1-\beta_t^m, \tag{1.3}$$

где вектор $\bar{\lambda}_t=(\bar{\lambda}_t^n,\dots,\bar{\lambda}_t^n)$ задает взвешенную стратегию игроков, и его компоненты равны

$$\bar{\lambda}_t^n=\bar{\alpha}_t^n\Delta t,\ n=1,\dots,N,\qquad \bar{\lambda}_t^{N+1}=\bar{\beta}_t-\sum_{n=1}^N\bar{\alpha}_t^n\Delta t,$$

где

$$\bar{\alpha}_t^n=\sum_{m=1}^M\alpha_t^{mn}R_{t-\Delta t}^m,\qquad \bar{\beta}_t=\sum_{m=1}^M\beta_t^mR_{t-\Delta t}^m.$$

Раскладывая уравнение (1.3) по степеням Δt, получаем что при выполнения любого из событий $\{\omega:X_t^n=1\}$, $n=1,\dots,N$, справедливо приближенное равенство

$$\frac{W_t^m-W_{t-\Delta t}^m}{W_{t-\Delta t}^m}\approx\frac{\alpha_t^{mn}\bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t^n}-\beta_t^m,$$

а при выполнении события $\{\omega:X_t^{N+1}=1\}$ равенство

$$\frac{W_t^m-W_{t-\Delta t}^m}{W_{t-\Delta t}^m}\approx\left(\frac{\beta_t^mc_t}{\bar{\beta}_t\bar{W}_{t-\Delta t}}+\sum_{n=1}^N\left(\frac{\bar{\alpha}_t^n\beta_t^m}{\bar{\beta}_t}-\alpha_t^{mn}\right)\right)\Delta t,$$

где для событий $\{\omega:X_t^n=1\}$, $n=1,\dots,N$, мы оставили в разложении лишь члены порядка $O(1)$, так как они происходят редко, а для события $\{\omega:X_t^{N+1}=1\}$ оставили члены порядка $O(\Delta t)$, так как оно происходит часто. Кроме того, при наступлении любого из событий выполнено $\bar{W}_t=\bar{W}_{t-\Delta_t}+c_t\Delta t$.

Если теперь формально перейти к пределу $\Delta t\to 0$, то динамика модели должна описываться случайным процессом $W=(W_t)_{t\geq 0}$ со значениями в $\mathbb{R}^M$, удовлетворяющим уравнениям

$$\frac{dW_t^m}{W_{t-}^m} = \left(\frac{\beta_t^m c_t}{\bar{\beta}_t \bar{W}_t} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\bar{\alpha}_t^n \beta_t^m}{\bar{\beta}_t} - \alpha_t^{mn} \right) \right) dt + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha_t^{mn} \bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t^n} - \beta_t^{mn} \right) dY_t^n,$$

$$d\bar{W}_t = c_t dt,$$

где $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, $Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^N)$, является N-мерным точечный процесс с вектором интенсивностей $p_t = (p_t^1, \dots, p_t^N)$, у которого n-я компонента считает количество реализаций события n до момента t. Мы полагаем, что траектории Y непрерывны справа и имеют пределы слева и, следовательно, таким же свойством обладают траектории W. Обозначение W_{t-} используется для предела слева. Процесс $\bar{W}_t = \sum_{m=1}^M W_t^m$ непрерывен. Полученные уравнения, как обычно, нужно понимать в соответствующей интегральной форме (см. далее)

Исходя из этих уравнение, далее мы дадим строгое описание модели (при этом вопрос о сходимости моделей с дискретным временем к модели с непрерывным временем оставим за рамками строгих рассуждений).

§ 2. Формальная модель

Напомним, что *точечным процессом* в $\mathbb{R}^N$ называется согласованный càdlàg процесс $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, $Y_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^N)$ с начальным условием $Y_0 = 0$ и скачками $\Delta Y_t \in \{0, e_1, \dots, e_N\}$, где e_n – базисные векторы. Иными словами, процесс Y имеет кусочно-постоянные траектории, а в момент скачка изменяется только одна компонента; величина скачка равна 1.

Так как точечный процесс является субмартингалом, то у него существует компенсатор, т.е. такой предсказуемы неубывающий процесс $A = (A_t)_{t \geq 0}$ со значениями в $\mathbb{R}^N$ и $A_0 = 0$, что $Y - A$ является мартингалом.

Базовым примером точечного процесса является (одномерный) простой пуассоновский процесс $N = (N_t)_{t \geq 0}$ с постоянной интенсивностью p. Хорошо известно, что компенсатор пуассоновского процесса $A_t = pt$.

Определение 2.1. *Предсказательной игрой для точечного процесса* называется совокупность $\mathcal{G} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P}, Y, c)$, где

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ – фильтрованное вероятностное пространство с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ с непрерывным временем,
- $Y = (Y_t)_{t=1}^{\infty}$ – точечный процесс в $\mathbb{R}^N$ с компенсатором $A_t = \int_0^t p_s ds$, где $p_t = (p_t^1, \dots, p_t^N)$ является отделенным от нуля предсказуемым процессом, которой п.н. локально интегрируем (т.е. $p_t^n \geq \underline{p} > 0$ и $\int_0^t p_s^n ds < \infty$ для всех $t \geq 0$, $n = 1, \dots, N$, где $\underline{p}$ – константа),
- $c = (c_t)_{t=1}^{\infty}$ – измеримая неслучайная функция, отделенная снизу от нуля и локально интегрируемая.

Процесс p_t будем называть *объектом прогноза*, а функцию c_t *интенсивностью выплаты вознаграждения* за участие в игре. Для полного вознаграждения, выплаченного до момента t, будем использовать обозначение $C_t := \int_0^t c_s ds < \infty$.

Далее, без ограничения общности, будем считать, что фильтрация $\mathbb{F}$ удовлетворяет обычным условиям (см. детали в § 4).

Определение 2.2. *Стратегией* игрока в игре $\mathcal{G}$ называется предсказуемый случайный процесс $\lambda = (\lambda_t)_{t=1}^{\infty}$, где $\lambda_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^N, \beta_t)$, у которого компоненты α_t^n принимают значения в $\mathbb{R}_+$ и являются локально интегрируемыми, а компонента β принимает значения в $[0,1]$. Для краткости будем использовать обозначение $\alpha_t = (\alpha_t^1, \dots, \alpha_t^N)$ и $\lambda = (\alpha, \beta)$.

Далее будем рассматривать только такие профили стратегий, в которых имеется хотя один игрок, скажем игрок m, стратегия которого удовлетворяет условию $\beta_t^m > 0$, $\alpha_t^{mn} > 0$ для всех n.

Определение 2.3. Для заданного *профиля стратегий* $\Lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^M)$ и заданного вектора начального капитала $W_0 \in \mathbb{R}_+^M$, капитал игроков в игре $\mathcal{G}$ в последующие моменты времени описывается согласованным процессом $W = (W_t)_{t \geq 0}$, $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^M)$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{dW_t^m}{W_{t-}^m} = \left(\frac{\beta_t^m c_t}{\bar{\beta}_t \bar{W}_t} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\bar{\alpha}_t^n \beta_t^m}{\bar{\beta}_t} - \alpha_t^{mn} \right) \right) dt + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\alpha_t^{mn} \bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t^n} - \beta_t^m \right) dY_t^n, \tag{2.1}$$

где

$$\bar{W}_t = \sum_{m=1}^{M} W_t^m, \qquad \bar{\alpha}_t = \frac{1}{\bar{W}_{t-}} \sum_{m=1}^{M} \alpha_t^m W_{t-}^m, \qquad \bar{\beta}_t = \frac{1}{\bar{W}_{t-}} \sum_{m=1}^{M} \beta_t^m W_{t-}^m.$$

Уравнение (2.1) понимаются в интегральном смысле, т.е. его решение – это процесс W такой, что для каждой компоненты $m = 1, \dots, M$ выполнено

$$\begin{aligned} W_t^m = W_0^m + \int_0^t \left(\frac{\beta_s^m c_s}{\bar{\beta}_s \bar{W}_s} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\bar{\alpha}_s^n \beta_s^m}{\bar{\beta}_s} - \alpha_s^{mn} \right) \right) W_{s-}^m ds \\ + \sum_{s \leq t} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\alpha_s^{mn} \bar{\beta}_s}{\bar{\alpha}_s^n} - \beta_s^m \right) W_{s-}^m \, \mathrm{I}(\Delta Y_s^n \neq 0), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-}$ обозначает процесс скачков процесса Y.

Предложение 2.4. *Существует п.н.-единственный согласованный процесс W, являющийся решением уравнений (2.1) и при этом $\bar{W}_t = \bar{W}_0 + C_t$.*

Если игрок m использует стратегию, у которой все компоненты α_t^{mn} строго положительны, то его капитал никогда не обнуляется ($W_t^m > 0$ и $W_{t-}^m > 0$ п.н. для всех t).

Доказательство. Построим решение потраекторно. Пусть τ_i, $i \in \mathbb{N}$, являются моментами скачков процесса Y. Из теоремы Каратеодори о существовании решений дифференциальных уравнений (см., например, [15], гл. 2) следует, что для п.в. траекторий процессов α^m, β^m существует единственное абсолютно непрерывная функция $w_t\colon [0, \tau_1(\omega)) \to \mathbb{R}_+^M$, являющая решением сисетмы ($m = 1, \ldots, M$)

$$
\begin{aligned}
&w_0^m = W_0^m,\\
&\dot{w}_t^m = w_t^m \left(\frac{\beta_t^m(\omega) c_t}{\bar{\beta}_t(\omega)\bar{w}_t} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\bar{\alpha}_t^n(\omega)\beta_t^m(\omega)}{\bar{\beta}_t(\omega)} - \alpha_t^{mn}(\omega) \right) \right), \quad t \in [0, \tau_1(\omega)),
\end{aligned}
$$

где $\bar{w}_t = \bar{W}_0 + C_t$, $\bar{\alpha}_t(\omega) = \sum_{m=1}^M \alpha_t^m(\omega) w_t^m / \bar{w}_t$, $\bar{\beta}_t(\omega) = \sum_{m=1}^M \beta_t^m(\omega) w_t^m / \bar{w}_t$. Из интегрируемости выражения в скобках (в силу предположения о локальной интегрируемости траекторий процессов α^m) и условия $W_0^m > 0$ следует, что $w_t^m > 0$ на $[0, \tau_1)$.

В точке $t = \tau_1(\omega)$ положим

$$
w_t^m = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha_t^{mn}(\omega)\bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t^n} - \beta_t^m(\omega) \right) w_{t-}^m \, \mathrm{I}(\Delta Y_t^n \neq 0).
$$

Заметим, что $w_t^m \geq 0$, причем равенство нулю возможно только если $\beta_t^m(\omega) = 1$ и $\alpha_t^{mn}(\omega)\Delta Y_t^n(\omega) = 0$ для всех n. В частности, если $\alpha_t^{mn} > 0$, то капитал игрока не обнуляется.

Итак, мы построили решение на $[0, \tau_1]$. По индукции аналогичным образом можно продолжить решение на все отрезки $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Так как для точечного процесса такие отрезки исчерпывают $\mathbb{R}_+$, получаем искомый процесс. Суммируя левые и правые части уравнения (2.2), находим, что $\bar{W}_t = W_t + \int_0^t c_s ds = \bar{W}_0 + C_t$. $\square$

§ 3. Выживающие стратегии и игровые прогнозы

Этот параграф содержит основные теоремы о существовании выживающей стратегии и о сходимости игровых прогнозов к процессу p. Характер результатов во многом схож с результатам для модели с дискретным временем (см. теоремы 2.1–2.3 в главе 1).

а. Формулировки результатов

Далее, как и в модели с дискретным временем, будем использовать обозначение $R_t^m = W_t^n / \bar{W}_t$ для доли капитала игрока m.

Определение 3.1. Стратегия $\lambda = (\alpha, \beta)$ называется *глобально выживающей*, если для любого игрока m, использующего эту стратегии, в любом профиле стратегией и при любом начальном векторе капитала выполнено неравенство

$$\liminf_{t\to\infty} R_t^m > 0 \text{ п.н.}$$

В рассматриваемой модели, из результатов в дискретном времени и формул (1.1)–(1.2), нетрудно догадаться, что выживающая стратегия должна иметь вид имеет вид $\widehat{\lambda}_t = (p_t, 1)$. Следующая теорема это подтверждает.

Теорема 3.2. *Стратегия $\widehat{\lambda} = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$ с компонентами $\widehat{\alpha}_t = p_t$, $\widehat{\beta}_t = 1$, является глобально выживающей.*

Далее дадим определение игровых прогнозов и исследуем их сходимость к производной компенсатора процесса Y.

Определение 3.3. *Игровым прогнозом* в предсказательной игре для точечного процесса будем называть предсказуемый процесс $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ в Δ^N с компонентами

$$\pi_t = \frac{\bar{\alpha}_t}{\bar{\beta}_t},$$

который считается определенным, если $\bar{\beta}_t \neq 0$.

Для формулировки теоремы о сходимости игрового прогноза к процессу p и теоремы о необходимом условии выживаемости, нам потребуется ввести специальное понятие асимптотической близости для функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $\mathbb{R}^N$. Определим функцию

$$\theta_N(x) = \|x\|^2 \,\mathrm{I}(\|x\| < 1) + \|x\| \,\mathrm{I}(\|x\| \geq 1), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Если размерность пространства ясна из контекста, то будем писать просто $\theta(x)$.

Определение 3.4. Будем говорить, что функции $f_t, g_t \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$ *близки относительно* θ и обозначать это $f \sim_\theta g$, если $\int_0^\infty \theta(f_t - g_t)dt < \infty$.

Там, где это не вызывает неоднозначности, для краткости будет использоваться обозначение $f \sim g$.

Следующее предложение содержит простые свойства отношения $\sim_\theta$. Мы будем использовать обозначение $L^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ для множество классов эквивалентности измеримых функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $\mathbb{R}^N$, где функции f_t, g_t считаются эквивалентными, если $f_t = g_t$ п.в. по мере Лебега на $\mathbb{R}_+$.

Предложение 3.5. *Выполнены следующие утверждения.*

(a) Отношение $\sim_\theta$ является отношением эквивалентности на $L^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$.

(b) $f \sim_\theta g$ тогда и только тогда, когда $f^n \sim_\theta g^n$ для каждой компоненты.

(c) Пусть $f \sim_\theta g$ и $c \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является ограниченной измеримой функцией. Тогда $cf \sim_\theta cg$.

Доказательство. (a) Свойства рефлексивности и симметричности очевидны. Для доказательства транзитивности воспользуемся выпуклостью функции θ и тем, что $\theta(cx) \le c^2\theta(x)$ для любой константы $c \ge 1$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда, если $f \sim_\theta g$ и $g \sim_\theta h$, то

$$\int_0^\infty \theta(f_t - h_t)dt \le \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\theta(2(f_t-g_t)) + \theta(2(g_t-h_t))\right)dt$$
$$\le 2\int_0^\infty \left(\theta(f_t-g_t)+\theta(g_t-h_t)\right)dt < \infty.$$

Следовательно, $f \sim_\theta h$.

Утверждение (b) следует из неравенства $\theta_1(x^n) \le \theta_N(x) \le N\sum_{n=1}^N \theta_1(x^n)$ (правую часть здесь можно легко получить из выпуклости θ и представления $x = \sum_{n=1}^N x^n e_n$, где e_n – базисные векторы).

Для доказательства (c) достаточно воспользоваться тем, что, как уже было замечено выше, $\theta(cx) \le c^2\theta(x)$ если $c \ge 1$, а также тем, что $\theta(cx) \le c\theta(x)$, есл $c < 1$. □

Теорема 3.6. *Если хотя бы один игрок использует стратегию $\widehat{\lambda}$, то $\pi \sim p$ п.н. (т.е. почти все траектории процессов π и p близки относительно θ).*

Теорема 3.7. *Пусть $\inf_{t\ge0}(c_t/C_t) > 0$. Тогда, если $\lambda = (\alpha,\beta)$ является глобально выживающей стратегией, то $\int_0^\infty(1-\beta_t)dt < \infty$ и $\alpha \sim p\beta$ п.н.*

Замечание 3.8. Условие $\inf_{t\ge0}(c_t/C_t) > 0$ выполнено, например в случае $c_t = c_0e^{rt}$, где $r > 0$. Как и в предсказательной игре с дискретным временем, можно интерпретировать этот случай как индексацию компенсации за участие в игре с процентной ставкой r (начисляемую непрерывным образом), ср. с замечанием 2.4.

b. Доказательства

Доказательство теоремы 3.2. Пусть игрок $m = 1$ использует стратегию $\widehat{\lambda}$. Положим $Z_t = \ln R_t^1$. Из предложения 2.4 следует, что капитал этого игрока не обнуляется, и, следовательно, процесс Z корректно определен.

Из уравнения (2.1) имеем

$$d\ln W_t^1 = \left(\frac{c_t}{\bar\beta_t\bar W_t} + \sum_{n=1}^N\left(\frac{\bar\alpha_t^n}{\bar\beta_t} - p_t^n\right)\right)dt + \sum_{n=1}^N\left(\frac{p_t^n\bar\beta_t}{\bar\alpha_t^n} - 1\right)dY_t^n,$$

а из того, что $\bar W_t = \bar W_0 + C_t$, получаем

$$d\ln\bar W_t = \frac{c_t}{\bar W_t}dt.$$

Из этих двух формул находим

$$dZ_t = \left(\frac{c_t}{\bar{W}_t} \left(\frac{1}{\bar{\beta}_t} - 1 \right) + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\bar{\alpha}_t^n}{\bar{\beta}_t} - p_t^n \right) \right) dt + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{p_t^n \bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t^n} - 1 \right) dY_t^n.$$

Определим мартингал $M = (M_t)_{t \geq 0}$, где $M_t = (M_t^1, \dots, M_t^N)$ с компонентами $M_t^n = Y_t^n - \int_0^t p_s^n ds$. Тогда можно представить $dZ_t = a_t dt + \sum_{n=1}^N b_t^n dM_t^n$ с процессами

$$a_t = \frac{c_t}{\bar{W}_t} \left(\frac{1}{\bar{\beta}_t} - 1 \right) + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\bar{\alpha}_t^n}{\bar{\beta}_t} + \frac{(p_t^n)^2 \bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t^n} - 2p_t^n \right), \qquad b_t^n = \frac{p_t^n \bar{\beta}_t}{\bar{\alpha}_t} - 1.$$

Нетрудно видеть, что процесс a_t неотрицателен, так как

$$a_t = \frac{c_t}{\bar{W}_t} \left(\frac{1}{\bar{\beta}_t} - 1 \right) + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\pi_t^n - p_t^n)^2}{\pi_t^n}. \tag{3.1}$$

Процесс Z неположителен. Тогда, согласно предложению 4.5, он является субмартингалом. Так как неположительный субмартингал имеет конечный предел, то имеем $\lim_{t\to\infty} R_t^1 = \exp(\lim_{t\to\infty} Z_t) > 0$. □

Чтобы доказать теорему 3.6, нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.9. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$ отделена снизу от нуля по каждой координате, а функция $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$ неотрицательна и ограничена. Тогда $f \sim_\theta g$ если и только если $\sum_{n=1}^N \int_0^\infty (f_t^n - g_t^n)^2 / f_t^n \, dt < \infty$.*

Доказательство этой леммы сводится к стандартной проверке сходимости интегралов и мы его опустим.

Доказательство теоремы 3.6. В доказательстве теоремы 3.2 мы установили, что если игрок $m = 1$ использует стратегию $\widehat{\lambda}$, то $Z_t = \ln R_t^1$ является сходящимся неположительным субмартингалом. Согласно предложению **??**, его компенсатор $A_t = \int_0^t a_s ds$ тоже сходится. Тогда из (3.1) получаем, что $\sum_{n=1}^N \int_0^\infty (\pi_t^n - p_t^n)^2 / \pi_t^n dt < \infty$. По лемме 3.9 это означает близость $\pi \sim_\theta p$. □

Доказательство теоремы 3.7. Глобально выживающая стратегия $\lambda = (\alpha, \beta)$ должна выживать, в том числе, и в профиле стратегий $\Lambda = (\widehat{\lambda}, \lambda)$. Из доказательств двух предыдущих теорем следует, что $\int_0^\infty a_t ds < \infty$, где a_t задано в (3.1). Вместе с предположением $\inf\limits_{t \geq 0} (c_t / C_t) > 0$ это влечет $\int_0^\infty (\bar{\beta}_t^{-1} - 1) dt < \infty$. Так как $\bar{\beta}_t = R_t^1 + R_t^2 \beta_t$, то отсюда следует, что $\int_0^\infty R_t^2 (1 - \beta_t) / \bar{\beta}_t \, dt < \infty$. Используя то, что $\liminf_{t\to\infty} R_t^2 > 0$ в силу выживаемости, получаем $\int_0^\infty (1 - \beta_t) dt < \infty$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. По теореме 3.6 имеем $\pi \sim p$ п.н. Кроме того, $\pi_t - p_t = R_t^2 (\alpha_t - p_t \beta_t) / (R_t^1 + R_t^2 \beta_t)$. Из выживаемости обеих стратегией следует, что траектории процесса $R_t^2/(R_t^1 + R_t^2\beta_t)$ отделены от нуля и ограничены. Тогда используя утверждение (c) предложения 3.5, получаем $\alpha \sim p\beta$ п.н. $\square$

§ 4. Приложение: результаты из теории мартингалов с непрерывным временем

Здесь собраны результаты из теории мартингалов с непрерывным временем, необходимые для доказательств теорем в этой главе. Подробное изложение теории можно найти, например, в книгах [17, 49], а более краткое – в обзорной статье [39].

Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ с непрерывным временем. Всегда будет предполагаться, что фильтрация удовлетворяет *обычным условиям*, т.е. σ-алгебра $\mathcal{F}$ полна по мере P, начальная σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ содержит все события нулевой вероятности, и поток σ-алгебр $\mathbb{F}$ непрерывен справа в том смысле, что $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Случайный процесс $X = (X_t)_{t\ge 0}$ называется непрерывным (или непрерывным справа/слева, неубывающим, càdlàg[1], и т.д.), если почти все его траектории непрерывны (или, соответственно, непрерывны справа/слева, не убывают, являются функциями càdlàg, и т.д.). Когда речь идет о процессах со значениями в $\mathbb{R}^N$, эти свойства понимаются выполненными покоординатно.

Для càdlàg процесса X, будем использовать обозначения $X_{t-} = \lim_{s\to t-0} X_t$ и $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$. Величина ΔX_t, когда она не равна нулю, представляет собой "скачок" процесса в момент t.

Процесс X называется *согласованным*, если все X_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми. Процесс X называется *предсказуемым*, если он, как функция от двух переменных $X(\omega, t)$, измерим относительно *предсказуемой σ-алгебры* $\mathcal{P}$ на $\Omega \times \mathbb{R}_+$, которая по определению порождена всеми непрерывными слева согласованными процессами.

Мартингалом называется согласованный càdlàg процесс такой, что $\mathrm{E}\,|M_t| < \infty$ для каждого $t \ge 0$ и $\mathrm{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$ для любых $0 \le s \le t$. Определение *субмартингала* или *супермартингала* получается, если заменить знак "=" на "≥" или "≤", соответственно.

Если $\mathcal{X}$ – некоторый класс случайный процессов, то говорят, что процесс $X = (X_t)_{t\ge 0}$ является *локальным* процессом класса $\mathcal{X}$, если существует неубывающая последовательность моментов остановки τ_k такая, что $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ п.н., и для каждого k остановленный процесс $X^{\tau_k} = (X_t^{\tau_k})_{t\ge 0}$, где $X_t^{\tau_k} = X_{\min(\tau_k, t)}$, принадлежит классу $\mathcal{X}$. Последовательность τ_k называется *локализующей последовательностью*.

Таким образом можно определить класс *локальных мартингалов*[2], *локальных суб- и супермартингалов*, *локально ограниченных процессов* и т.д.

[1] Càdlàg (фр. continue à droite, limite à gauche) означает непрерывный справа и имеющий предел слева в каждой точке.

[2] В литературе под локальными мартингалами часто понимается класс локальных *равномерно интегрируемых* мартингалов. Эти определения эквивалентны, см., например, [46], гл. 1, § 4, задача 1.

Следующий результат является одним из вариантов формулировки *разложения Дуба–Мейера* – фундаментального результата теории мартингалов с непрерывным временем (см., например, [17], гл. VII, теорема 12). Сравнительно короткое доказательство разложения Дуба–Мейера можно найти в [8].

Предложение 4.1. *Процесс X является локальным субмартингалом тогда и только тогда, когда он представим в $X_t = M_t + A_t$, где M является локальным мартингалом, а A является неубывающим предсказуемым процессом с $A_0 = 0$ (называемый* компенсатором *X). Такое представление единственно с точностью до совпадения траекторий п.н.*

Приведем удобное условие для проверки того, что локальный субмартингал является настоящим субмартингалом.

Напомним, что процесс X называется *равномерно интегрируемым*, если семейство случайных величин $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно интегрируемо. Процесс X *принадлежит классу (D)*, если семейство $\{X_\tau,\ \tau$ – конечный момент остановки$\}$ равномерно интегрируемо. Процесс X *принадлежит классу (DL)*, если для любого $t \geq 0$ семейство $\{X_\tau,\ \tau \leq t$ – момент остановки$\}$ равномерно интегрируемо.

Предложение 4.2. *Локальный субмартингал X является субмартингалом тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}\,|X_0| < \infty$ и процесс X^+ принадлежит классу (DL).*

В частности, любой локальный субмартингал, ограниченный сверху интегрируемой случайной величиной (т.е. $X_t \leq \xi$ для всех $t \geq 0$, где $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$), является субмартингалом.

Доказательство. Необходимость легко следует из теоремы Дуба об остановке (см. [49], гл. I, § 1e, т. 1.39). Докажем достаточность.

Пусть X является локальным субмартингалом с локализующей последовательностью τ_k, а X^+ принадлежит классу (DL) и $\mathrm{E}\,|X_0| < \infty$. Из неравенства Йенсена следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ процесс $\max(X_t^{\tau_k}, x)$ является субмартингалом. Тогда для любых моментов времени $s \leq t$ имеем

$$\mathrm{E}(\max(X_t^{\tau_k}, x) \mid \mathcal{F}_s) \geq \max(X_s^{\tau_k}, x).$$

Семейство величин, стоящих под условных математическим ожиданием (индексированное k), является равномерно интегрируемым в силу равномерной ограниченности снизу и принадлежности X^+ классу (DL). Следовательно, можно перейти к пределу $k \to \infty$, что дает

$$\mathrm{E}(\max(X_t, x) \mid \mathcal{F}_s) \geq \max(X_s, x).$$

По теореме о монотонной сходимости можно еще раз перейти к пределу, теперь по $x \to -\infty$, откуда получаем $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$. В частности, $\mathrm{E}\,X_t \geq \mathrm{E}\,X_0 > -\infty$, и, следовательно, $\mathrm{E}\,|X_t| < \infty$. Таким образом, X – субмартингал. □

Следующий результат копирует аналогичное утверждение для мартингалов с дискретным временем (см. предложение 4.5 и следствие 4.6 в гл. 1) и доказывается таким же образом.

Предложение 4.3 (*теорема Дуба о сходимости*). *Любой локальный субмартингал X, ограниченный сверху интегрируемой случайной величиной, имеет конечный предел $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ п.н., причем компенсатор X тоже сходится.*

Если H – предсказуемый процесс, а M – локальный мартингал, то можно определить стохастический интеграл $I_t = \int_0^t H_s dM_s$, при условии, что H принадлежит классу $L(M)$ предсказуемых процессов, интегрируемых относительно M (детали конструкции стохастического интеграла в общем случае мы здесь не приводим; см., например, [17, 49]).

Локальные мартингалы, рассматриваемые в этой главе имеют траектории ограниченной, вариации. Для таких локальных мартингалов класс $L(M)$ состоит из процессов, которые интегрируемы относительно M в смысле Лебега–Стилтьеса потраекторно ($\int_0^t |H_s(\omega)| dM_s(\omega) < \infty$ п.н.), и соответствующий стохастический интеграл тоже определяется потраекторно.

Известно, что если процесс $H \in L(M)$ локально ограничен, то $I_t = \int_0^t H_s dM_s$ является локальным мартингалом (для произвольного локального мартингала M); но если H не является локально ограниченным, то локальная мартингальность процесса I, вообще говоря, не гарантирована. Следующее предложение дает удобное достаточное условие для проверки локальной мартингальности стохастических интегралов.

Предложение 4.4 (*лемма Анселя–Стрикера*). *Пусть $I_t = \int_0^t H_s dM_s$, где M является локальным мартингалом и $H \in L(M)$. Тогда, если процесс I ограничен сверху (или снизу) интегрируемой случайной величиной, то он является локальным мартингалом.*

Оригинальное доказательство леммы Анселя–Стрикера можно найти в работе [6] (см. следствие 3.5), а более короткое – в работе [18]. Следующий результат вытекает из предложений 4.2 и 4.4.

Следствие 4.5. *Пусть процесс X ограничен сверху интегрируемой случайной величиной и представим в виде $X_t = X_0 + A_t + \int_0^t H_s dM_s$, где A является предсказуемым и неубывающим процессом, M является локальным мартингалом, $H \in L(M)$, и $\mathrm{E}\,|X_0| < \infty$. Тогда X – субмартингал.*

Список литературы

[1] P. H. Algoet and T. M. Cover. Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, 16(2):876–898, 1988.

[2] R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, and K. R. Schenk-Hoppé. Market selection and survival of investment strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 41(1-2): 105–122, 2005.

[3] R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, and L. Xu. Evolutionary finance and dynamic games. *Mathematics and Financial Economics*, 5:161–184, 2011.

[4] R. Amir, I. V. Evstigneev, and K. R. Schenk-Hoppé. Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144, 2013.

[5] R. Amir, I. V. Evstigneev, T. Hens, V. Potapova, and K. R. Schenk-Hoppé. Evolution in pecunia. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(26): e2016514118, 2021.

[6] J.-P. Ansel and C. Stricker. Couverture des actifs contingents et prix maximum. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 30, pages 303–315, 1994.

[7] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 17, pages 21–86, 1900.

[8] M. Beiglböck, W. Schachermayer, and B. Veliyev. A short proof of the Doob–Meyer theorem. *Stochastic Processes and Their Applications*, 122(4):1204–1209, 2012.

[9] J. Berg, R. Forsythe, F. Nelson, T. Rietz, et al. Results from a dozen years of election futures markets research. In *Handbook of Experimental Economics Results*, chapter 80, pages 742–751. North-Holland, 2008.

[10] J. E. Berg, F. D. Nelson, and T. A. Rietz. Prediction market accuracy in the long run. *International Journal of Forecasting*, 24(2):285–300, 2008.

[11] L. Blume and D. Easley. Evolution and market behavior. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40, 1992.

[12] L. Blume and D. Easley. If you're so smart, why aren't you rich? Belief selection in complete and incomplete markets. *Econometrica*, 74(4):929–966, 2006.

[13] J. Borovička. Survival and long-run dynamics with heterogeneous beliefs under recursive preferences. *Journal of Political Economy*, 128(1):206–251, 2020.

[14] L. Breiman. Optimal gambling systems for favorable games. In *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, pages 63–68, 1961.

[15] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw–Hill, 1955.

[16] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2nd edition edition, 2006.

[17] C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and Potential B*. North-Holland Publishing Company, 1982.

[18] M. D. Donno and M. Pratelli. On a lemma by Ansel and Stricker. In *Séminaire de Probabilités XL*, pages 411–414. Springer, 2007.

[19] I. Evstigneev, T. Hens, and K. R. Schenk-Hoppé. Evolutionary behavioral finance. In E. Haven et al., editors, *The Handbook of Post Crisis Financial Modelling*, pages 214–234. Palgrave Macmillan UK, 2016.

[20] I. Evstigneev, T. Hens, V. Potapova, and K. R. Schenk-Hoppé. Behavioral equilibrium and evolutionary dynamics in asset markets. *Journal of Mathematical Economics*, 91:121–135, 2020.

[21] I. V. Evstigneev, T. Hens, and K. R. Schenk-Hoppé. Market selection of financial trading strategies: Global stability. *Mathematical Finance*, 12(4):329–339, 2002.

[22] I. V. Evstigneev, T. Hens, and K. R. Schenk-Hoppé. Evolutionary stable stock markets. *Economic Theory*, 27(2):449–468, 2006.

[23] I. V. Evstigneev, T. Hens, and K. R. Schenk-Hoppé. Globally evolutionarily stable portfolio rules. *Journal of Economic Theory*, 140(1):197–228, 2008.

[24] I. V. Evstigneev, T. Hens, K. R. Schenk-Hoppé, et al. *Mathematical Financial Economics: A Basic Introduction*. Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

[25] E. F. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417, 1970.

[26] R. Forsythe, F. Nelson, G. R. Neumann, and J. Wright. Anatomy of an experimental political stock market. *The American Economic Review*, pages 1142–1161, 1992.

[27] F. Galton. Vox populi. *Nature*, 75(1949):450–451, 1907.

[28] F. A. Hayek. The use of knowledge in society. *The American Economic Review*, 35 (4):519–530, 1945.

[29] I. Karatzas and C. Kardaras. The numéraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, 11(4):447–493, 2007.

[30] I. Karatzas and C. Kardaras. *Portfolio theory and arbitrage: a course in mathematical finance*, volume 214. American Mathematical Soc., 2021.

[31] J. L. Kelly, Jr. A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal*, 35(4):917–926, 1956.

[32] D. Kramkov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability*, pages 904–950, 1999.

[33] D. Kramkov and W. Schachermayer. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 13(4):1504–1516, 2003.

[34] J. B. Long. The numeraire portfolio. *Journal of Financial Economics*, 26(1):29–69, 1990.

[35] L. C. MacLean and W. T. Ziemba. *Sports Analytics*. World Scientific, 2021.

[36] L. C. MacLean, E. O. Thorp, and W. T. Ziemba, editors. *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and practice*, volume 3 of *World Scientific Handbook in Financial Economic Series*. World Scientific, 2011.

[37] B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4):394–419, 1963.

[38] R. C. Merton. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4):373–413, 1971.

[39] A. Nikeghbali. An essay on the general theory of stochastic processes. *Probability Surveys*, 3:345–412, 2006.

[40] J. Peterson, J. Krug, M. Zoltu, A. K. Williams, and S. Alexander. Augur: a decentralized oracle and prediction market platform. Technical report, Forecast Foundation, 2018.

[41] A. Sandroni. Do markets favor agents able to make accurate predictions? *Econometrica*, 68(6):1303–1341, 2000.

[42] I. Sason. On reverse pinsker inequalities. *arXiv preprint arXiv:1503.07118*, 2015.

[43] E. Sciubba. Asymmetric information and survival in financial markets. *Economic Theory*, 25:353–379, 2005.

[44] J. Surowiecki. *The Wisdom of Crowds.* Anchor, 2005.

[45] H. Yan. Natural selection in financial markets: Does it work? *Management Science*, 54(11):1935–1950, 2008.

[46] Р. Ш. Липцер and А. С. Ширяев. *Теория мартингалов.* Наука, Москва, 1986.

[47] М. С. Пинскер. *Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов.* АН СССР, Москва, 1960.

[48] А. Н. Ширяев. *Вероятность–2.* МЦНМО, 2004.

[49] А. Н. Ширяев and Ж. Жакод. *Предельные теоремы для случайных процессов.* Физматлит, 1994.