Игры среднего поля.

«Так оставьте ненужные споры —
Я себе уже все доказал:
Лучше гор могут быть только горы,
На которых еще не бывал.»
В.С.Высоцкий, «Прощание с горами»

План семинаров.

1) Теория меры
2) Метрики на пространстве вероятностных мер
3) Теория игр, равновесие Нэша
4) Одношаговые симметричные игры большого числа игроков
5) Детерминированное оптимальное управление
6) Уравнение непрерывности, уравнение Власова
7) Динамические детерминированные игры
8) Стохастическое оптимальное управление
9) Стохастические дифференциальные уравнения
10) Уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова
11) Динамические игры со стохастикой
12) ...

Семинар 1.

X - полное сепарабельное метрическое пр-во

$\mathcal{B}(X)$ - борелевская σ-алгебра

Опр. 1) $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ называется мерой, если $\mu(\bigsqcup_i B_i) = \sum_i \mu(B_i)$, $B_i \in \mathcal{B}(X)$

2) Мера μ называется вероятностной, если $\mu(X) = 1$.

Обозначаем $\mathcal{P}(X)$ - пр-во вероят. мер на X.

Мере μ можно сопоставить функционал: $\underset{\in L^1(\mu)}{\varphi} \longmapsto \int \varphi \, d\mu$

Утв. 1) Если $\forall \varphi \in C_b(X)$: $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L \cdot |x-y|$ выполнено $\int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_X \varphi \, d\sigma$, то $\mu = \sigma$.

2) Если $X = \mathbb{R}^d$, то в пункте 1) класс огр. липшиц. функций можно заменить на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Опр. Мн-во $\operatorname{sp}\mu = \{x \in X \mid \forall R > 0 \ \ \mu(B_R(x)) > 0\}$ называется носителем меры μ.

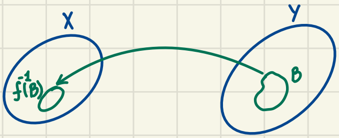
Утв. $\operatorname{sp}\mu$ является замкнутым множеством.

Формула замены переменных.

сеп.м.п.

Пусть $f : X \to Y$ - измеримое отображение, $\mu \in \mathcal{P}(X)$.

По μ и f можно построить вероят. меру на Y: $\mu \circ f^{-1}(B) = \mu(\underset{\{x \in X :\, f(x) \in B\}}{\underset{\parallel}{f^{-1}(B)}})$, $B \in \mathcal{B}(Y)$.



Теорема: $\int\limits_X g(f(x)) \, \mu(dx) = \int\limits_Y g(y) \, \mu \circ f^{-1}(dy)$, $g \circ f \in L^1(\mu)$.

Теорема Фубини.

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ – сеп. м.п., $\mu \in \mathcal{P}(X), \nu \in \mathcal{P}(Y)$.

$d_{X\times Y}(x_1\times y_1, x_2\times y_2) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$ – метрика на $X\times Y$.

$\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y) = \sigma\{B_X\times B_Y \mid B_X\in\mathcal{B}(X), B_Y\in\mathcal{B}(Y)\}$

Утв. $\mathcal{B}(X\times Y) = \mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$. (здесь важна сепарабельность X и Y; в общем случае $\mathcal{B}(X\times Y) \not\subset \mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$)

Введем меру $\mu\times\nu(B_X\times B_Y) = \mu(B_X)\cdot\nu(B_Y)$.

Утв. Мера $\mu\times\nu$ однозначно продолжается до $\mu\otimes\nu \in \mathcal{P}(X\times Y)$.

Теорема: Если $f\in L^1(\mu\otimes\nu)$, то $\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mu\otimes\nu(dx\,dy) = \int\limits_Y\int\limits_X f(x,y)\,\mu(dx)\,\nu(dy) = \int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)\,\nu(dy)\,\mu(dx)$.

Дезинтегрирование меры.

Опр. $\mu\in\mathcal{P}(X\times Y)$, $\nu\in\mathcal{P}(Y)$; ν называется проекцией μ на Y, если $\mu(X\times B) = \nu(B)$ $\forall B\in\mathcal{B}(Y)$.

Утв. ν - проекция меры μ на Y $\iff$ $\forall f\in L^1(\nu)$ $\int f(y)\,\nu(dy) = \int f(y)\,\mu(dx\,dy)$.

Теорема: Если ν - проекция μ на Y, то $\exists$ семейство $\{\mu^y\}\subset\mathcal{P}(X)$: 1) $y\longmapsto\mu^y(B)$-измеримо $\forall B\in\mathcal{B}(X)$.

2) $\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mu(dx\,dy) = \int\limits_Y\int\limits_X f(x,y)\,\mu^y(dx)\,\nu(dy)$ $\forall f\in L^1(\mu)$.

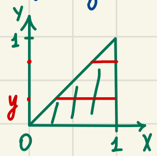
Пример: Пусть $\mu(dx\,dy) = \rho(x,y)\,dx\,dy \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Найдем проекцию μ на $\mathbb{R}_y$ и сем-во $\{\mu^y\}$.

$$\mu(\mathbb{R}\times B) = \int\limits_B\int\limits_{\mathbb{R}_x}\rho(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_B \nu(dy) \Rightarrow \nu(dy) = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_x}\rho(x,y)\,dx\Big)dy.$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}_y}\Big(\int f(x,y)\cdot\underbrace{\frac{\rho(x,y)}{\int\limits_{\mathbb{R}_x}\rho(x,y)\,dx}\,dx}_{\mu^y(dx)}\Big)\underbrace{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_x}\rho(x,y)\,dx\Big)dy}_{\nu(dy)}$$

Пример: Пусть $\mu(dxdy)=2I_{\{x\geq y\}}dxdy \in P([0,1]^2)$. Найдем проекцию μ и сем-во $\{\mu^y\}$.

$$\nu(dy)=\left(\int_0^1 2I_{\{x\geq y\}}dx\right)dy = 2\cdot\int_y^1 dx\,dy = 2(1-y)\,dy;\quad \mu^y(dx)=\frac{I_{\{x\geq y\}}}{1-y}\,dx.$$



Связь дезинтегрирования и УМО.

ξ,η — некоторые случайные величины, μ — распределение (ξ,η) и $\mu(dxdy)=\mu^y(dx)\nu(dy)$.

$$\mu = P\circ(\xi,\eta)^{-1} \Rightarrow \underset{\overset{\|}{\nu(B)}}{\mu(\mathbb{R}\times B)} = P((\xi,\eta)\in\mathbb{R}\times B)=P(\eta\in B)=P\circ\eta^{-1}(B) \Rightarrow \nu \text{ — распределение } \eta.$$

Утв. $E(\xi|\eta=y)=\int x\,\mu^y(dx)$.

▶ $$\underset{\overset{\|}{E\left(g(\eta)\cdot E(\xi|\eta)\right)}}{E(\xi\cdot g(\eta))} = \int x\cdot g(y)\,\mu(dxdy)=\int g(y)\int x\,\mu^y(dx)\,\nu(dy)=E\left(g(\eta)\cdot\int x\,\mu^\eta(dx)\right)$$

$$\Rightarrow E(\xi|\eta)=\int x\,\mu^\eta(dx)$$ ◀

Слабая сходимость.

Опр. $\mu_n\in P(\overset{\text{п.с.м.п.}}{X})$; $\mu_n\to\mu$ слабо, если $\forall \varphi\in C_b(X)$ $\int_X\varphi\, d\mu_n \longrightarrow \int_X \varphi\, d\mu$.

Задача: Покажем, что $\overset{\in X}{x_n}\to x \Leftrightarrow \delta_{x_n}\to\delta_x$ слабо.

▶ (⇒) $x_n\to x$, $\varphi\in C_b(X)$; $\int\varphi(y)\,\delta_{x_n}(dy)=\varphi(x_n)\longrightarrow\varphi(x)=\int\varphi(y)\,\delta_x(dy)$.

(⇐) $\varphi(y):=\min\{d(y,x),1\}\Rightarrow \min\{d(x_n,x),1\}\longrightarrow 0 \Rightarrow d(x_n,x)\to 0$. ◀

Утв. Если $\mu_n\in P(X)$ и $\mu_n\to\mu$ слабо, то $\mu\in P(X)$.

▶ $\varphi:=1 \Rightarrow \underset{\overset{\|}{1}}{\int 1\,d\mu_n} \longrightarrow \int 1\, d\mu=\mu(X)\Rightarrow \mu(X)=1$. ◀

Замечание: $\mu_n\longrightarrow\mu$ слабо $\not\Rightarrow \forall B\in\mathcal{B}(X)$ $\mu_n(B)\to\mu(B)$

► $B\in\mathcal{B}(X)$: $\exists x\in\partial B$ и $x\notin B \Rightarrow \exists\{x_n\}\subset B: x_n\to x \Rightarrow \delta_{x_n}\to\delta_x$ слабо, но $\underset{\underset{1}{\parallel}}{\delta_{x_n}(B)} \not\to \underset{\underset{0}{\parallel}}{\delta_x(B)}$. ◄

Теорема (Александров): Следующие утв. эквивалентны:

1) $\mu_n\to\mu$ слабо,

2) $\forall B\in\mathcal{B}(X): \mu(\partial B)=0$ $\mu_n(B)\to\mu(B)$,

3) $\forall \varphi\in C_b(X): |\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$ $\int\limits_X\varphi\,d\mu_n\longrightarrow\int\limits_X\varphi\,d\mu$.

Теорема (Прохоров): 1) Если $\mu_n\to\mu$ слабо, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists K_\varepsilon$-компакт в X: $\mu_n(K_\varepsilon)\ge1-\varepsilon$ $\forall n$.

2) Если $\forall\varepsilon>0$ $\exists K_\varepsilon$- компакт в X: $\mu_n(K_\varepsilon)\ge1-\varepsilon$ $\forall n$, то $\exists n_k: \mu_{n_k}\to\mu$ слабо.

Задача: Пусть $V: X\to[0,\infty)$ и $\forall R>0$ мн-во $\{x\in X: V(x)\le R\}$ является компактом. Пусть $\exists C>0$: $\int V(x)\,\mu_n(dx)\le C$ $\forall n$. Докажем, что $\exists n_k:\mu_{n_k}\to$ слабо.

нер-во Чебышева

► $\mu_n(x: V(x)>R)\le\frac{1}{R}\int\limits_X V\,d\mu_n\le\frac{C}{R}\xrightarrow{R\to\infty}0 \Rightarrow \exists R>0: \mu_n(\underbrace{x: V(x)\le R}_{K_\varepsilon})\ge1-\varepsilon$ $\forall n$ ◄

Метрика на пр-ве $P(X)$.

X - п.с.м.п., $\mu,\sigma\in P(X)$.

$d_{KR}(\mu,\sigma)=\sup\left\{\int\limits_X\varphi\,d(\mu-\sigma)\ \middle|\ \begin{matrix}|\varphi|\le1\\ |\varphi(x)-\varphi(y)|\le d(x,y)\end{matrix}\right\}$ - метрика Канторовича-Рубенштейна

Теорема (св-ва d_{KR}): 1) d_{KR}-метрика,

2) $\mu_n\to\mu$ слабо $\Leftrightarrow d_{KR}(\mu,\mu_n)\to0$,

3) $(P(X), d_{KR})$ - полное сепар. м.п.

► Докажем полноту: $d_{KR}(\mu_n,\mu_m)\xrightarrow{n,m\to\infty}0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists N: \forall n,m>N$ $\left|\int\limits_X\varphi\,d\mu_n-\int\limits_X\varphi\,d\mu_m\right|<\varepsilon$ $\forall\varphi: |\varphi|\le1$ и $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le d(x,y)$.

Пусть теперь $|\psi|\le M$, $|\psi(x)-\psi(y)|\le L\cdot d(x,y)\Rightarrow\frac{\psi}{M+L+1}$ - ограничена 1 и 1-липшицева будет в д/з

$$\Rightarrow \left|\int_X \varphi\, d\mu_n - \int_X \varphi\, d\mu_m\right| = (M+L+1)\cdot\left|\int_X \frac{\varphi}{M+L+1}\, d(\mu_n-\mu_m)\right| < \varepsilon\cdot(M+L+1) \Rightarrow \mu_n \to \mu \text{ слабо} \blacktriangleleft$$

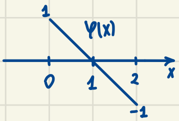
Пример: $a,b\in[-1,1]$; $d_{KR}(\delta_a,\delta_b)=\sup\limits_{\substack{|\varphi|\le 1\\ |\varphi(x)-\varphi(y)|\le|x-y|}}\left\{\int\varphi\,\delta_a(dx)-\int\varphi\,\delta_b(dx)\right\} = \sup\limits_{\varphi}\{\varphi(a)-\varphi(b)\}\le|a-b|$

Считаем, что $a\ge b$; $\varphi(x):=x \Rightarrow d_{KR}(a,b)=|a-b|$.

Пример: Пусть $\lambda_{[a,b]}$ – мера Лебега на $[a,b]$. Найдём $d_{KR}(\lambda_{[0,1]}, \frac{1}{2}\lambda_{[0,2]})$.

$|\varphi(x)-\varphi(x+1)|\le 1$

$$\sup_{\varphi}\left\{\int_0^1\varphi(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^2\varphi(x)\,dx\right\} = \frac{1}{2}\sup_{\varphi}\left\{\int_0^1\varphi(x)\,dx-\int_1^2\varphi(x)\,dx\right\} = \frac{1}{2}\sup_{\varphi}\left\{\int_0^1\varphi(x)\,dx-\int\varphi(x+1)\,dx\right\}\le\frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow d_{KR}(\lambda_{[0,1]}, \tfrac{1}{2}\lambda_{[0,2]})\ge\frac{1}{2} \Rightarrow d_{KR}(\lambda_{[0,1]}, \tfrac{1}{2}\lambda_{[0,2]})=\frac{1}{2}.$$

Замечание: $\mu_n\to\mu$ слабо $\not\Rightarrow \int|x|\,d\mu_n\to\int|x|\,d\mu$.

Пример: $\mu_n=\frac{n-1}{n}\cdot\delta_0+\frac{1}{n}\cdot\delta_n\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$;

$d_{KR}(\mu_n,\delta_0)\to 0$

$\Updownarrow$

$$\int\varphi\,d\mu_n=\frac{n-1}{n}\cdot\varphi(0)+\frac{1}{n}\cdot\varphi(n)\to\varphi(0)=\int\varphi\,d\delta_0 \Rightarrow \mu_n\to\delta_0 \text{ слабо, но } \int|x|\,d\mu_n=1,\ \int|x|\,d\delta_0=0.$$