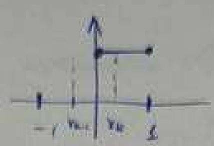
03.04.2023. Rough Path. Кр1. Токаева Александра

(5) Привести пример ф-ций f и g, для кот. интеграл от f по dg ∃ на [-1;0] и на [0;1], но ∄ на [-1;1].

Решение: пусть $f(x)=I_{[0,1]}(x)$

$g(x)=I_{[0,1]}(x)$



Тогда $\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)=0$ и $\int_{0}^{1} f(x)dg(x)=0$ ← они оба ∃ и равны нулю, т.к для каждого из них любая интеграль-ная сумма равна нулю.

При этом $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ – ∄, т.к вся интегральная сумма вырождается в $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1})) = f(\xi_k)\cdot(1-0)=f(\xi_k)$, где $[x_{k-1};x_k]$ – это тот отрезок, на котором лежит точка 0, а $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$; и очевидно, что $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} f(\xi_k)$ ∄, т.к если ξ_k правее нуля, то предел $=1$, а если левее – то предел $=0$ ⇒ предела нет.

(и вообще, есть общая теорема, что если $f\in R_g[a,b]$; $c\in[a,b]$; $g(x)$ – разрывна в точке c, то $f(x)$ – непрер. в точке c)

(7) Пусть $f,g\in C[a,b]$,

g – ф-ция огр. вариации

Док-ть, что ф-ция $x\to \underbrace{\int_a^x f(s)dg(s)}_{=:F(x)}$ – непрер на $[a,b]$.

Является ли $F(x)$ ф-цией огр. вариации? – да, является.

Решение: Рассм. разбиение $T=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$.

1) Тогда $\sum_{k=1}^{n} |F(x_k)-F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dg(t)\right| \le \|f\|_C \cdot \sum_{k=1}^{n} V_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = \|f\|_C\cdot V_a^b(g)$ аддитивность вариации

т.к $\left|\sum_{m=1}^{M} f(\xi_m)(g(x_m)-g(x_{m-1}))\right| \le \|f\|_C \cdot \sum_{m=1}^{M} |g(x_m)-g(x_{m-1})| \le \|f\|_C\cdot V_{x_{k-1}}^{x_k}(g)$

⇒ $F(x)$ – ф-ция ограниченной вариации

2) Докажем непрер-ть справа:

$|F(x_0+h)-F(x_0)| \le \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dg(t)\right| \le \|f\|_C\cdot V_{x_0}^{x_0+h}(g) \to 0$ при $h\to 0^+$

Аналогично доказывается непрер-ть слева.

(10) Пусть H – гильб. пр-во,

γ – центрир гаусс мера на H.

$\langle Kx;y\rangle = \int\langle x,u\rangle\langle u,y\rangle\gamma(du)$ – ковар. оператор.

Док-ть, что K явл. компактным самосопр. оператором.

Найдите пр-во Камерона-Мартина.

Рассм. в качестве примера меру Винера на $L^2[0,2\pi]$ и получите новое описание пр-ва Кам-Мар.

__Решение:__ напомним, что центрир. гаус. мера — это когда

для сл. вел $\ell(u) = \langle x, u\rangle$: $\int e^{it\langle x,u\rangle}\gamma(du) = e^{-\frac{t^2\cdot\sigma(x)^2}{2}}$, т.е. $\ell(u) = \langle x,u\rangle$ — гаусс. вел с $E\ell = 0$.

1) почему оператор вообще определен, почему он самосопр и компактен?

Ну $\int \langle x,u\rangle^2 d\gamma = E\ell^2 = \sigma(x)^2 < \infty$

Причем если вместо x взять αx, то $\sigma(\alpha x)^2 = |\alpha|^2\sigma(x)^2 \Rightarrow \sigma(x) = \|x\|\cdot\sigma\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^2$

И еще если $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x$, то по т. Лебега левая часть $\int e^{i\langle x_n,u\rangle t} d\gamma \to \int e^{it\langle x,u\rangle} d\gamma \Rightarrow \sigma(x_n) \to \sigma(x)$

$$\int e^{it\langle x,u\rangle} d\gamma = e^{-\frac{t^2\sigma^2(x)}{2}}$$

$\Rightarrow \sigma$ — она
- абс. непрер. отн. слабой сход
- масштабируема
- на гильб. пр-ве

$\Rightarrow$ ограничена на шаре $\Rightarrow \sigma(x)^2 \le C\cdot\|x\|^2$

$\Rightarrow \int\langle x,u\rangle^2 d\gamma = E\ell^2 = \sigma(x)^2 \le C\cdot\|x\|^2$

$\Rightarrow \int\langle x,u\rangle\langle y,u\rangle d\gamma < \infty$ — т.к. $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$

$\Rightarrow$ оператор корректно определен: $\langle Kx, y\rangle := \int\langle x,u\rangle\langle y,u\rangle d\gamma$

- При этом $(Kx,y) = \int\langle x,u\rangle\langle u,y\rangle d\gamma = \int\langle y,u\rangle\langle x,u\rangle d\gamma = (x,Ky) \Rightarrow K$ — самосопр.
- И еще $(Kx,x) = \int\langle x,u\rangle^2 d\gamma = E\ell^2 = \sigma(x)^2 \ge 0$.

  $(Kx,x) = \|\sqrt{K}x\|^2$

  И если $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} 0$, то $\int e^{it\langle u,x_n\rangle} d\gamma \to \int e^{it\langle u,x\rangle} d\gamma = 1$, $x = 0$.

  $\int e^{it\langle u,x_n\rangle} d\gamma = e^{-\frac{1}{2}(Kx_n;x_n)}$

  $\Rightarrow \|\sqrt{K}x_n\| \to 0$

  $\Rightarrow \sqrt{K}$ — компактный оператор

  $\Rightarrow K$ — компактный оператор

  $\Rightarrow \int e^{i\langle x,u\rangle t}\gamma(du) = e^{-t^2\frac{\|\sqrt{K}x\|^2}{2}}$, где K — компактный самосопр оператор

2) Ищем пр-во Камерона–Мартина.

Пусть e_n — ортонорм. базис в H, кот. собственный для K (для меры Винера $Kx(t) = \int_0^t \min(s,t)x(s)ds$, и у него мы найдем собств. ортобазис)

Тогда $H_{KM} = \sqrt{K}(H) = \{(x_n) \in \ell_2 : \sum_k \frac{1}{\alpha_k}x_k^2 < \infty\}$

и норма такая: $\|x\|_{KM} = \sum_k \frac{1}{\alpha_k}x_k^2 = \|(\sqrt{K})^{-1}x\|_H$.

Почему так?

Ну мы H отождествляем с $\ell_2 = (x_1, x_2, \dots)$

$\Rightarrow \int e^{i\sum x_k u_k}\gamma(du) = e^{-\frac{1}{2}\sum_k \alpha_k x_k^2} \stackrel{?}{=} e^{-\frac{\|\ell\|^2_{H_{KM}}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{вектор-представитель } H_{KM} \text{ — это } \alpha_k x_k \\ \|\alpha_k x_k\|^2_{KM} = \sum_k \frac{1}{\alpha_k}(\alpha_k x_k)^2 = \sum_k \alpha_k x_k^2 = \|\sqrt{K}x\|^2 \\ H_{KM} = \{(x_k) : \sum_k \frac{1}{\alpha_k}x_k^2 < \infty\}\end{cases}$

стр2

3) В случае меры Винера

$K x(t) = \int_0^t \min\{s,t\} x(s) ds$

Найдем собственные функции этого оператора:

$$\int_0^1 \min(t,s) f(s) ds = \lambda f(t)$$

$$\overset{\shortparallel}{} \int_0^t s f(s) ds + t \int_t^1 f(s) ds = \lambda f(t)$$

=> дифф. по t:

$$t f(t) + \int_t^1 f(s) ds - t f(t) = \lambda f'(t)$$

еще раз дифф. по t

=> $-f(t) = \lambda f''(t)$; при этом собств. числа должны быть ≥ 0, т.к. сам оператор ≥ 0

=> $f(t) = C_1 \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}}$

краевые усл.: $f(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + \pi n; \Rightarrow \lambda_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + \pi n)^2};$

$\Rightarrow e_n(t) = c \cdot \sin (\frac{\pi}{2} + \pi n) t$

$\Rightarrow H_{KM} = \{ (x_n) \in l_2 : \sum_k (\frac{\pi}{2} + \pi k)^2 x_k^2 < \infty \}.$

(27) Пусть b и σ - гладкие огр. ф-ции на $\mathbb{R}$ с огр. произв., причем $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$.
Предп., что $W_{t,n}$ - кус. гладк по t и $\forall t$ п.н. сход. к W_t.
Пусть $\forall \omega$: $X_{t,n}(\omega)$ - явл. решением ОДУ

$$\begin{cases} dX_{t,n} = b(X_{t,n}) dt + \sigma(X_{t,n}) dW_{t,n}; \\ X_{t,n} = x_0. \end{cases}$$

Найти предел $X_{t,n}$ при $n \to \infty$.

Решение: докажем, что $X_{t,n} \to X_t$, где X_t - решение $dX_t = \left(b(X_t) + \frac{\sigma(X_t)\sigma'(X_t)}{2}\right) dt + \sigma(X_t) dW_t$

Сделаем замену: рассм $Y_{t,n} = F(X_{t,n})$, где $F(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)}$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$$

$$F''(x) = -\frac{\sigma'(x)}{\sigma^2(x)}$$

Пишем ф-лу для дифференциала $dF(X_{t,n})$.
Это не ф-ла Ито, т.е. не будет $\frac{1}{2} f''(X_{t,n})^2$, т.к. $W_{t,n}$ - кус. гладкая

$$\Rightarrow dF(X_{t,n}) = \underset{\frac{1}{\sigma(X_{t,n})}}{\underset{\shortparallel}{f'_x}} \cdot (b(X_{t,n}) dt + \sigma(X_{t,n}) dW_{t,n}) = \frac{b(X_{t,n}) dt}{\sigma(X_{t,n})} + dW_{t,n}.$$

$$\Rightarrow F(X_{t,n}) = F(x_0) + \int_0^t \frac{b(X_{s,n})}{\sigma(X_{s,n})} ds + W_{t,n} - W_{0,n}.$$

по усл. b и σ - гладкие с огр. произв, и $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$
=> по т. Лебега о мажорир. сход переходим к пределу: $F(X_t) = F(x_0) + \int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)} ds + W_s - \overset{0}{W_0}$

$\Rightarrow dF(X_t) = \frac{b(X_t)}{\sigma(X_t)} dt + dW_t$

какому СДУ должен соответствовать X_t, чтобы у $dF(X_t)$ был такой дифференциал?

Ну пусть $dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dW_t$

$\Rightarrow$ по ф-ле Ито:

$dF(X_t) = F'(X_t)(\alpha_t dt + \beta_t dW_t) + \frac{1}{2} F''(X_t)\beta_t^2 dt =$

$= (F'(X_t)\alpha_t + \frac{1}{2} F''(X_t)\beta_t^2)dt + F'(X_t)\beta_t dW_t \overset{?}{=} \frac{b(X_t)}{\sigma(X_t)} dt + dW_t$

$\Rightarrow \begin{cases} F'(X_t)\beta_t = 1 \\ F'(X_t)\alpha_t + \frac{1}{2}F''(X_t)\beta_t^2 = \frac{b(X_t)}{\sigma(X_t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_t = \frac{1}{F'(X_t)} = \sigma(X_t) \\ \frac{\alpha_t}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma'(X_t)}{\sigma^2(X_t)} \cdot \sigma^2(X_t) = \frac{b(X_t)}{\sigma(X_t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_t = \sigma(X_t) \\ \alpha_t = b(X_t) + \frac{\sigma(X_t)\sigma'(X_t)}{2} \end{cases}$

Причём $F'(x) = \frac{1}{\sigma(x)}$

$F''(x) = -\frac{\sigma'(x)}{\sigma^2(x)}$

$\Rightarrow$ ответ: $dX_t = \left(b(X_t) + \frac{\sigma(X_t)\sigma'(X_t)}{2}\right)dt + \sigma(X_t)dW_t$

(29) f - гладкая ф-ция с огр. произв. на $\mathbb{R}^d$.

Выразить $\int_0^T f(W_t^1 \dots W_t^d) \circ dW_t^i$ через интеграл Ито.

Решение: Интеграл Стратоновича отличается от интеграла Ито тем, что f берётся в средней точке, а не в левой.

т.е. $\int_0^T Y_t \circ dX_t = \lim \sum_k \left(\frac{Y_{t_k} + Y_{t_{k+1}}}{2}\right)(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$

Имеем: $\int_0^T f(W_t^1 \dots W_t^d) \circ dW_t^i = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_k \left[\frac{f(W_{t_k}^1, \dots W_{t_k}^d) + f(W_{t_{k+1}}^1 \dots W_{t_{k+1}}^d)}{2}\right] \Delta_k W_t^i =$

раскладываем $f(W_{t_{k+1}}^1 \dots W_{t_{k+1}}^d)$ в точке $f(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d)$

$= \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_k \left[f(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d)\Delta_k W_t^j + \text{члены 2-го порядка}\right]\Delta_k W_t^i =$

$= \underbrace{\lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_k f(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d)\Delta_k W_t^i}_{\downarrow \int_0^T f(W_t^1 \dots W_t^d) dW_t^i \text{ (интеграл Ито)}} + \frac{1}{2} \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_j \underbrace{\sum_k \frac{\partial f(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d)}{\partial x_j} \Delta_k W_t^j \Delta_k W_t^i}_{(*) \downarrow \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x_j}(W_t^1, \dots W_t^d)dt} + \underbrace{\text{члены 3-го порядка}}_{(**) \downarrow 0}$

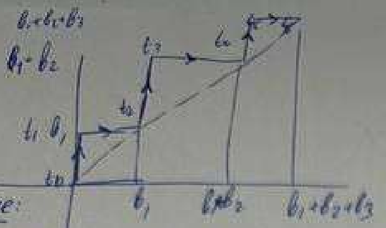
Почему: (*): $E\left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_j}(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d)\Delta_k W^j \Delta_k W^i - \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x_j}(W_t^1 \dots W_t^d)dt\right)^2 =$

$= E\left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_j}(W_{t_k}^1 \dots W_{t_k}^d)(\Delta_k W^j \Delta_k W^i - (t_{k+1} - t_k))\right)^2 \leq C \cdot E\left(\sum_k (\Delta_k W^j \Delta_k W^i - (t_{k+1} - t_k)\right)^2 \xrightarrow{\lambda(\Pi)\to 0} 0.$

(**) $E(\Delta_k W^j \Delta_k W^i \Delta_e W^j \Delta_e W^i) = (t_{k+1} - t_k)^2 \cdot I_{\{k=e\}} \to 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^T f(W_t^1, \dots W_t^d) \circ dW_t^i = \int_0^T f(W_t^1 \dots W_t^d)dW_t^i + \frac{1}{2}\sum_j \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x_j}(W_t^1 \dots W_t^d)dt}$$ ответ

(40)



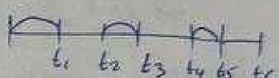
Решение:

Параметризуем x^1 и x^2 (т. x и y коорд):

$$x^2 = \begin{cases} \frac{b_1 t}{t_1}; & [0, t_1] \\ b_1; & [t_1; t_2] \\ b_1 + \frac{(t-t_2)b_2}{t_3-t_2}; & [t_2; t_3] \\ b_1+b_2; & [t_3; t_4] \\ b_1+b_2+\frac{(t-t_4)b_3}{t_5-t_4}; & [t_4; t_5] \\ b_1+b_2+b_3; & [t_5; t_6] \end{cases}$$

$$x^1 = \begin{cases} 0; & t < t_1 \\ \frac{b_1(t-t_1)}{t_2-t_1}; & t \in [t_1; t_2] \\ b_1; & t \in [t_2; t_3] \\ b_1 + \frac{(t-t_3)b_2}{t_4-t_3}; & t \in [t_3; t_4] \\ b_1+b_2; & [t_4; t_5] \\ b_1+b_2+\frac{(t-t_5)b_3}{t_6-t_5}; & t \in [t_5; t_6] \end{cases}$$

- $\int_0^T dX^1_{u_1} = (X_{t_1} - X_{t_0}) + (X_{t_2} - X_{t_1}) + \ldots + (X_{t_6} - X_{t_5}) = b_1+b_2+b_3$



- $\int_0^T dX^2_{u_1} = b_1+b_2+b_3$

- $\int_{u_2=0}^T \int_0^{u_2} dX^1_{u_1} dX^2_{u_2} = \int_0^T (X^1_{u_2} - X^1_0) dX^2_{u_2} = \int_0^T (X_{u_2} - 0)\dot{X}^2_{u_2} du_2 = \int_0^T X^1_u dX^2_u =$

$$= 0 + \int_{t_2}^{t_3} b_1 \cdot \frac{b_2}{t_3-t_2} dt + \int_{t_4}^{t_5} (b_1+b_2)\frac{b_3}{t_5-t_4} dt = b_1 b_2 + (b_1+b_2) b_3 = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3$$

- $\int_{u_2=0}^T \int_0^{u_2} dX^2_{u_1} dX^1_{u_2} = \int_0^T X^2_{u_2} dX^1_{u_2} = \int_{t_1}^{t_2} b_1 \cdot \frac{b_1}{t_2-t_1} dt + \int_{t_3}^{t_4} (b_1+b_2) \cdot \frac{b_2}{t_4-t_3} dt + \int_{t_5}^{t_6} (b_1+b_2+b_3) \cdot \frac{b_3}{t_6-t_5} dt =$

$$= b_1^2 + (b_1+b_2) b_2 + (b_1+b_2+b_3) b_3$$

- $\int_{u_2=0}^T \int_0^{u_2} dX^1_{u_1} dX^1_{u_2} = \int_0^T X^1_{u_2} dX^1_{u_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{b_1(t-t_1)}{t_2-t_1} \cdot \frac{b_1}{t_2-t_1} dt + \int_{t_3}^{t_4} \left(b_1 + \frac{(t-t_3)b_2}{t_4-t_3}\right) \frac{b_2}{t_4-t_3} dt + \int_{t_5} \left(b_1+b_2+\frac{(t-t_5)b_3}{t_6-t_5}\right) \frac{b_3}{t_6-t_5} dt =$

$$= \frac{b_1^2}{(t_2-t_1)^2} \cdot \frac{(t-t_1)^2}{2}\Big|_{t_1}^{t_2} + b_1 b_2 + \frac{b_2^2}{(t_4-t_3)^2} \cdot \frac{(t-t_3)^2}{2} + (b_1+b_2) b_3 + \frac{b_3^2}{(t_6-t_5)^2} \cdot \frac{(t-t_5)^2}{2}\Big|_{t_5}^{t_6} = \frac{b_1^2}{2} + b_1 b_2 + \frac{b_2^2}{2} + (b_1+b_2) b_3 + \frac{b_3^2}{2}$$

- $\int_{u_2=0}^T \int_0^{u_2} dX^2_{u_1} dX^2_{u_2} = \int_0^T X^2_{u_2} dX^2_{u_2} = \int_0^{t_1} \frac{b_1 t}{t_1} \cdot \frac{b_1}{t_1} dt + \int_{t_2}^{t_3} \left(b_1 + \frac{(t-t_2)b_2}{t_3-t_2}\right) \cdot \frac{b_2}{t_3-t_2} dt + \int_{t_4}^{t_5} \left(b_1+b_2+\frac{(t-t_4)b_3}{t_5-t_4}\right) \frac{b_3}{t_5-t_4} dt =$

$$= \frac{b_1^2}{(t_1)^2} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^{t_1} + b_1 b_2 + \frac{b_2^2}{(t_3-t_2)^2} \cdot \frac{(t-t_2)^2}{2}\Big|_{t_2}^{t_3} + (b_1+b_2) b_3 + \frac{b_3^2}{(t_5-t_4)^2} \cdot \frac{(t-t_4)^2}{2}\Big|_{t_4}^{t_5} = \frac{b_1^2}{2} + b_1 b_2 + \frac{b_2^2}{2} + (b_1+b_2) b_3 + \frac{b_3^2}{2}$$

(30.) W_t^i - незав. винер. проц.

g - неотр. гладкая с носителем в $[0,1]$ и интегралом $=1$.

$g_n(t) := n\cdot g(nt)$

$W^i_{t,n}(\omega) = \int_0^{+\infty} W^i_{t+s}(\omega)\, g_n(s)\,ds$

Найти предел при $n\to\infty$ $\int_0^T W^i_{t,n}\,dW^j_{t,n} - \int_0^T W^j_{t,n}\,dW^i_{t,n}$

Решение: 1) Убедимся, что $W^i_{t,n}$ - это приближение для W^i_t.

Сначала заметим, что поскольку носитель g - это $[0,1]$, а $g_n(s) = n\cdot g(ns)$, то $ns\in[0,1] \Rightarrow s\in[0,\frac{1}{n}]$

$$\Rightarrow W^i_{t,n}(\omega) = \int_0^{1/n} W^i_{t+s}(\omega)\, g_n(s)\,ds$$

А ещё $\int_0^{1/n} g_n(s)\,ds = 1$.

$$\Rightarrow \left|\int_0^{1/n} W^i_{t+s} g_n(s)\,ds - \int_0^{1/n} W^i_t g_n(s)\,ds\right| \le \int_0^{1/n} \underbrace{|W^i_{t+s} - W^i_t|}_{<\varepsilon} g_n(s)\,ds \le \varepsilon\cdot \underbrace{\int_0^{1/n} g_n(s)\,ds}_{=1} \le \varepsilon.$$

$\Rightarrow W^i_{t,n} \xrightarrow{п.н.} W^i_t$

$\forall\omega$: W^i_t - непрер.

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N, \forall s<1/n: |W_{t+s} - W_t| < \varepsilon$.

2) Т.е. мы в ситуации, когда мы исследовали приближение стох. интеграла при $d=2$.

И там мы выяснили, что нужно не только, чтобы $W^i_{t,n} \xrightarrow{п.н.} W^i_t$, но ещё нужно следить за $\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx)$ - т.е. за площадью между кривой и хордой.

И там была общая ф-ла, где были $s_{ij} = \lim\limits_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} E\{\frac{1}{2}\int_0^{\delta} E\, B^i_\delta B^{j\prime}_\delta - B^j_\delta B^{i\prime}_\delta\,dt\}$

У нас $s_{ij} = 0$, т.к. W^i_t и W^j_t - независимые

$\Rightarrow$ никаких добавок не будет

$$\Rightarrow \int_0^T W^i_{t,n}\,dW^j_{t,n} - \int_0^T W^j_{t,n}\,dW^i_{t,n} \longrightarrow \int_0^T W^i_t\,dW^j_t - \int_0^T W^j_t\,dW^i_t$$

(27.) (второй способ)

$Y_t = F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}\,ds + W_t$

$\Rightarrow X_t = F^{-1}(Y_t)$

$\Rightarrow dX_t = (F^{-1})'\,dY_t + \frac{1}{2}(F^{-1})''\,dt$

$(F^{-1})' = \frac{1}{F'(F^{-1}(Y_t))} = \sigma(F^{-1}(Y_t)) = \sigma(X_t)$

$(F^{-1})'' = -\frac{F''(F^{-1}(Y_t))}{(F'(X_t))^2}\cdot (F^{-1}(Y_t))' = \sigma^2(X_t)\cdot\frac{\sigma'(X_t)}{\sigma^2(X_t)}\cdot\sigma(X_t) = \sigma'(X_t)\cdot\sigma(X_t)$

$$\Rightarrow dX_t = \sigma(X_t)\cdot\frac{b(X_t)}{\sigma(X_t)}\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t + \frac{1}{2}\frac{\sigma'(X_t)}{\sigma^2(X_t)}\,dt = \boxed{\left(b(X_t) + \frac{1}{2}\sigma'(X_t)\cdot\sigma(X_t)\right)dt + \sigma(X_t)\,dW_t}$$