### МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М В Ломоносова

Механико-математическии факультет

На правах рукописи



Пифтанкин Геннадий Николаевич

# Сепаратрисное отображение в задаче Мезера

01 02 01 - георетическая мехапика

ΑΒΤΟΡΕΦΕΡΑΤ

диссертации на сонскание ученои степени кандидата физико-математических наук

2 2 CEH 2008

Москва 2008 Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им  ${
m M\,B}$  Ломоносова

Научный руководитель.

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН Д В Трещев

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор С В Бологин доктор физико-математических наук, профессор Л М Лерман

Ведущая организация.

Научно-исследовательский инсгитут прикладной математики и кибернегики при Нижегородском государственном университете имени Н II Лобачевского

Защита состоится 10 октября 2008 года в 16 часов 30 минут на заседании диссергационного совега Д 501 001 22 при Московском государственном университете имени М В Ломоносова по адресу 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультег, ауд 16-10

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета  $M\Gamma Y$ 

Автореферат разослан 3 сентября 2008 года

Ученый секретарь

диссергационного совета,

канд физ-мат наук, доцент,

ВА Прошкин

#### Общая характеристика работы

Актуальность работы Как известно, в классической механике существует лишь немного задач, в которых удается описать динамику системы на всем фазовом пространстве Поэтому одной из основных задач является построение специальных решений, динамику которых можно проанализировать на достагочно большом интервале времени, и выявление с номощью них интересных динамических свойств систем Одним из таких явлений является диффузия Арнольда в системах близких к интегрируемым Это явление было открыто В И Арнольдом в его знаменитой статье<sup>1</sup>, где он построил пример гамильтоновой системы близкой к интегрируемой, имеющей траектории, у которых переменные действия изменяются на величину порядка единицы при сколь угодно малом возмущении исходной интегрируемой системы Однако до сих пор остается открытым вопрос о типичности этого явления в системах близких к интегрируемым Дж Мезер в качестве модельного примера к проблеме о диффузии Арнольда предложил рассмотреть задачу об эволюции энергии при возмущении геодезического потока (движения по инерции) на двумерном торе неавтономным потенциалом Он показал, что в типичной ситуации существуют траектории с неограниченым ростом энергии Полные доказательства утверждения Мезера были получены в работах С В Болотина и Д В Трещева<sup>2</sup>, А Дельшамса, Р де ла Яве и Т Сеары<sup>3</sup> и

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Арнольд В И, О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы Дока АН СССР, 1964, Т 156, N 1, С 9–12

 $<sup>^2</sup> Bolotm \ S$  , Treschev D , Unbouded growth of energy in nonautonomous Hamiltonian systems  $Nonlinearity,\,12(2)\,365-388,\,1999$ 

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Delshams A, de la Llave R, Seara T M, A geometric approach to the existence of orbits with unbounded energy in generic periodic perturbations by potential of generic geodesic flows on  $T^2$ , Comm Math Phys, 209(2) 353-392, 2000

В Ю Калошина<sup>4</sup> Основным результатом диссертационной работы является построение траекторий задачи Мезера, на которых эпергия неограничено растет в среднем как линейная функция времени, что является оптимальной оценкой максимальной скорости роста энергии на траекториях Аналогичные результаты имеются в препринте Р де ла Яве<sup>5</sup> и в недавней работе В Г Гельфрейха и Д В Тураева<sup>6</sup>

Для исследования траекторий задачи Мезера в диссертационной работе применяется методы сепаратрисного отображения и антиинтегрируемого предела

Из работ А Пуанкаре, Дж Биркгофа, С Смейла, Л П Шильникова и других авторов известно, что в окрестности пересечения асимптотических многообразий к периодическим решениям или неподвижным точкам системы присутствует достаточно хаотическая динамика, надежды на полное описание которой в ближайшем будущем даже в простейших ситуациях, по мнению многих специалистов, ничтожно малы Сепаратрисное отображение было придумано<sup>7,8</sup> как удобное средство для изучения этой динамики Назовем решение, порождающее асимптотические многообразия, базовым Траектории, не выходящие из окрестности сепаратрис, стартуют в некоторой "фундаментальной" области, приближаются к базовому решению и затем возвращаются в фундаментальную область При этом большую часть времени траектория проводит около

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Kaloshin V, Geometric proofs of Mather's connecting and accelerating theorems *Proc* (Katsively)(Cambridge University Press)(2003)

 $<sup>^5{\</sup>rm de}$  la Llave R , Orbits of unbounded energy in perturbations of geodesic flows by periodic potentials, Preprint, 2004

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>V Gelfreich, D Turaev, Unbounded energy growth in Hamiltonian systems with a slowly varying parameter, Comm Math Phys (2008), DOI 10 1007/s00220-008-0518-1

 $<sup>^7</sup>$ Шильников Л П Об одном случае существования счетного множества периодических движений - ДАН СССР, 1965, т 160, 3, с 558—561

 $<sup>^8</sup>$ Заславский Г M , Филоненко H H , Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения ЖЭТФ 1968, T 54, C 1590–1602

базового решения Естественная идея состоит в том, чтобы пропустить динамически неинтересную часть движения, расположенную около базового решения, и рассмотреть лишь индуцированное отображение на себя фундаментальной области в случае дискрегного времени или некоторого сечения Пуанкаре для непрерывного времени Это отображение и называется сепаратрисным

Несмогря на то, что метод сепаратрисного отображения был открыт в середине прошлого века, его широкие применения появились не так давно Это связано с развитием новых методов исследования сепаратрисного отображения, в основном благодаря работам ДВ Трещева и нижегородской школы динамических систем Одним из таких методов является метод антиинтегрируемого предела Метод антиинтегрируемого предела диаметрально противоположен методам классической теории возмущений, КАМ-теории, теории Пуанкаре-Мельникова и другим методам, имеющим дело с системами близкими к интегрируемым, и по духу близок к методам гиперболической динамики, связанным с построением кодирования траекторий системы Системы, для когорых работает метод антиинтегрируемого предела, в некотором смысле близки к недетерминированным, случайным системам

Отметим, что задача Мезера актуальна не только в контексте проблемы о диффузии Арнольда Недавно методы, применяемые в задаче Мезера, успешно применены для построения траекторий с неограниченным ростом энергии и оценки его скорости в таких механических моделях, как многомерное обобщение модели Ферми-Улама (биллиард с колеблющийся границей) и модель Литтлвуда (гамильтонова система с

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Aubry S, Abramovici G, Chaotic trajectories in the standard map the concept of antiintegrability *Physica* 43 D, 1990, P 199-219

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>V Gelfreich, D Turaev, Fermi acceleration in non-autonomous billiards, J. Phys. A. 41 (2008) 1-6

неавтопомным возмущением однородного потенциала)<sup>11</sup> В диссертации также приводится пример механической системы, представляющей собой некоторое обобщение двойного маятника с колеблющейся точкой подвеса, для которой удается проверить условия общего положения системы Мезера, и, тем самым, доказать существование решений с неограниченным линейным по времени ростом энергии

**Цель диссертационной работы.** Основной целью диссертационной работы является исследование задачи Мезера о возмущении геодезического потока неавтономным потенциалом с помощью метода сепаратрисного отображения

**Научная новизна работы.** Все основные результаты диссертации являются новыми Также в работе имеются известные результаты, но доказанные новыми методами

Достоверность результатов Все результаты диссертационной работы обоснованы, они базируются на общих теоремах динамики, теории гамильтоновых систем, функционального анализа, теории функций комплексного переменного

**Теоретическая и практическая ценность работы.** Работа носит теоретический характер Ее результаты могут быть применены в задачах классической механики и общей теории динамических систем

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях

 Семинар "Гамильтоновы системы и статистическая механика" под руководством акад РАН В В Козлова, чл -корр РАН Д В Трещева и

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Delshams A, de la Llave R and Scara T 2008 Geometric approaches to the problem of instability in Hamiltonian systems. An informal presentation. In *Hamiltonian Dynamical Systems and Applications*, Springer, 285–336, 2008.

проф СВ Бологина, 2006 г

- Семинар "Избранные задачи классической и кванговой механики" под рук чл -корр РАН Д В Трещева, 2005 г
- Семинар имени В В Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством чл -корр РАН В В Белецкого и проф А В Карапетяна, 2007 г
- Семинар "The Applied Math PDE seminar at University of Wisconsin", 2006 г
- IV Международная конференция по динамическим системам, г Суздаль,
   2006 г
  - Конкурс имени Августа Мебиуса, 2005 г

Публикации Основные результаты диссертации изложены в трех печатных работах, входящих в перечень ВАК Список работ приведен в конце автореферата

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений и списка литературы из 47 наименований Общий объем диссертации — 97 страницы

#### Содержание работы

**Во Введении** сделан краткий обзор литературы, обоснована актуальность диссертационной работы, описаны методы исследования, приведено краткое содержание и сформулирован основной результат диссертации

Рассмотрим следующую гамильтонову систему

$$q = \partial H/\partial p, \quad p = -\partial H/\partial q,$$
 (1)

$$H(q, p, t) = T(q, p) + V(q, t), \quad q \in M, \quad p \in T_q^*M, \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$
 (2)

где M – гладкое компактное двумерное многообразие, T(q,p) - кинетическая энергия (риманова метрика на M), V(q,t) — периодическая по времени потенциальная энергия

Кинетическая энергия T порождает геодезический поток на M, те поток гамильтоновой системы с гамильтонианом T на инвариантной поверхности T=1 Пусть род M положителен, тогда в любом нетривиальном гомотопическом классе замкнутых кривых на M можно выбрать кривую с минимальной длиной Эта кривая является геодезической Пуанкаре показал, что если она невырождена, то она является гиперболической, те экспоненциально неустойчивой К тому же, если минимальная геодезическая  $q_{\sigma}(t)$  единственна, то существует гомоклиническая к ней геодезическая  $q_{\gamma}(t)$ , те существуют числа  $a_{\pm}$ , определенные по модулю a периода  $q_\sigma$ , такие что  $q_\gamma(t) o q_\sigma(t+a_\pm)$  при  $t o \pm \infty$  Гиперболическая траектория имеет инвариантные асимптотические многообразия устойчивое, которое состоит из всех решений стремящихся к ней при  $t \to +\infty$  и неустойчивое, состоящее из решений стремящихся к нему при  $t \to -\infty$  В интегрируемых системах обычно асимптотические многообразия совпадают или, как говорят, сдвоены В общем же случае они пересекаются по гомоклиническим траекториям Гомоклиническая траектория называется трансверсальной если асимптотические поверхности пересекаются вдоль нес под ненулевым углом

Без ограничения общности можно считать, что  $\int_0^a V(q_\sigma(s),t)\,ds\equiv 0$  Тогда для каждого  $t\in\mathbb{T}$  существует и не зависит от выбора  $a_\pm$  следующий предел

$$I(t) = \lim_{\theta \to \infty} \Big( \int_{-\theta}^{\theta} V(q_{\gamma}(s), t) \, ds - \int_{-\theta + a_{-}}^{\theta + a_{+}} V(q_{\sigma}(s), t) \, ds \Big), \tag{3}$$

который называется интегралом Пуанкаре-Мельникова

Система (1)–(2) пеавтономна и эпергия H может изменятся на траекториях. Мезер<sup>12</sup> показал, что в такой системе существуют траектории с неограниченным ростом эпергии. Основным результатом диссертационной работы является следующее обобщение утверждения Мезера.

**Теорема 1** Пусть система (1)-(2) удовлетворяет следующим условиям Мезера

- (T) Геодезический поток, заданный кинетической энергией T, имеет гиперболическое периодическое решение  $\sigma(t)=(q_{\sigma}(t),p_{\sigma}(t))$  и трансвер-сальное гомоклиническое к нему решение  $\gamma(t)=(q_{\gamma}(t),p_{\gamma}(t))$
- (V) Интеграл Пуанкаре-Мельникова I(t) непостоянная функция Тогда существует решение  $\eta(t)$  системы (1)-(2), на котором энергия неограничено растет в среднем линейно по времени при всех  $t \geq 0$

$$H(\eta(t), t) \ge At + B,\tag{4}$$

для некоторых констант A>0 и B

Поскольку  $\frac{d}{dt}H=\frac{\partial}{\partial t}V\leq\widetilde{A}$ , то на любом решении  $H(t)\leq\widetilde{A}t+\widetilde{B}$ ,  $\widetilde{A},\widetilde{B}=\mathrm{const}$  Таким образом, рост энергии более быстрый, чем линейный по времени, невозможен ни на каком решении B этом смысле оценка (4) точна

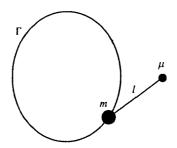
В первой главе приводится пример механической системы с двумя с половиной степенями свободы, удовлетворяющей условиям Мезера (Т) и (V) Мы рассматриваем систему, состоящею из двух материальных точек в вертикальной плоскости с массами m и  $\mu$  в поле силы тяжести, жестко связанных стержнем длины l, при этом первая материальная точка массы m движется по гладкой замкнутой кривой  $\Gamma$ , которая

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Mather J N, Talk given at the conference in dynamical systems, Oberwolfach (1997)

совершает вертикальные периодические колебания Если кривая  $\Gamma$  является окружностью, то система является обычным двойным маятником с вибрирующей точкой подвеса Поэтому эту систему мы называем обобщенным двойным маятником с вибрирующей точкой подвеса

лым эксцентриситетом В этом случае геодезический поток порожденный кинетической энергией, те движение в отсутствие силы тяжести и колебаний кривой  $\Gamma$ , близок к интегрируемому случаю — движению по инерции двойного маятника Это даст, во-первых, проверить усло-

Пусть Г является эллипсом с ма-



ка Это даст, во-первых, проверить условие (T) с помощью стандартного метода T

Пуанкаре-Мельникова расщепления сепаратрис и, во-вторых, с точностью до малого параметра возмущения вычислить выражения для периодической и гомоклинической к ней орбит С этой же точностью мы вычисляем интеграл Пуанкаре-Мельникова I(t), что достаточно для проверки условия (V). Для простоты вычислений мы считаем, что отношение масс  $\frac{\mu}{m}$  мало и полуось эллипса близка к длине стержня l. Теорема 1 дает следующий результат

Теорема 2 Пусть отношение масс  $\frac{\mu}{m}$  мало Тогда для любого эллипса  $\Gamma$  с достаточно малым отличным от нуля эксцентриситетом и полуосью достаточно близкой к l, существует решение обобщенного двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса, на котором энергия неограничено растет в среднем линейно по времени

На самом деле, как показывается в диссертации, это же утверждение верно почти для любой кривой достаточно близкой к окружности

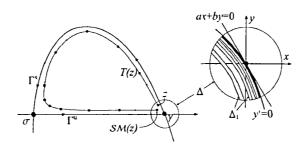


Рис 2 Сепаратрисное отображение Шильникова

радиуса l

Вторая глава посвящена основному методу, применяемому нами 1 - методу сепаратрисного отображения

В параграфе 2.1 в качестве примера приведен вывод формул для сепаратрисного отображения Шильникова Это отображение определяет динамику отображения с гиперболической неподвижной точкой в окрестности гомоклинической траектории Рассмотрим гладкий симплектоморфизм T  $D \to D, D \subset \mathbb{R}^2$ , который а) имеет гиперболическую неподвижную точку  $\sigma$ , б)устойчивая  $\Gamma^s$  и неустойчивая  $\Gamma^u$  сепаратрисы точки  $\sigma$  пересекаются в точке  $\gamma$  Таким образом, система имеет гомоклиническое решение  $\{T^n(\gamma)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ , те  $T^n(\gamma)\to \sigma$  при  $n\to\pm\infty$  Обозначим через  $\mu>0$  — мультипликатор неподвижной точки  $\sigma$  и положим  $\lambda=\ln\mu$  Пусть  $n_r(z)=\min\{n>0$   $T^n(z)\in\Delta\}$  и  $\Delta_r=\{z\in\Delta$   $n_r<+\infty\}$ , те множество  $\Delta_r$  состоит из точек окрестности  $\Delta$ , которые под действием T возвращаются в эту окрестность Сепаратрисное отображение  $\mathcal{SM}$   $\Delta_r\to\Delta$  имеет вид  $\mathcal{SM}(z)=T^{n_r}(z)$ 

**Теорема 3** Существует (достаточно малая) окрестность  $\Delta$  точки  $\gamma$  и симплектические координаты (x,y) такие, что

1 
$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \mid x,y \text{ малы}\}^{13}$$

2 
$$\gamma = (x = 0, y = 0), \{y = 0\} = \Gamma^u \cap \Delta,$$

3 существуют константы  $a,\,b,d$  и гладкое отображение  $(x,y)\mapsto (x^{\scriptscriptstyle +},y^{\scriptscriptstyle +})$ 

$$\begin{cases} x^{+} = x + d + \frac{1}{\lambda} \ln y^{+} + O_{1}(y^{+} \ln y^{+}) + O_{1}(x, y), \\ y^{+} = ax + by + O_{2}(x, y), \end{cases}$$
 (5)

которое совпадает с сепаратрисным отображением SM на счетном наборе  $\Delta_1$  областей накапливающихся к кривой  $\{y^+=0\}=\Gamma^s\cap\Delta$ 

$$\Delta_1 = \{(x, y) \in \Delta \mid (x^+, y^+) \in \Delta, y^+ > 0\}, \quad \mathcal{SM}|_{\Delta_1} = (5)|_{\Delta_1},$$

4 сепаратрисы  $\Gamma^u$  и  $\Gamma^s$  пересекаются трансверсально в точке  $\gamma$  тогда и только тогда, когда  $a \neq 0$ ,

5 для  $z=(x,y)\in \Delta_1$  количество итераций до первого возвращения в  $\Delta$  равно

$$n_r(z) = [-d - rac{1}{\lambda} \ln y^*],$$

 $\mathit{rde}\left[X\right]$  обозначает округление числа X до целого

Это отображение применяется в третьей главе для построения хаотических траекторий в окрестности гомоклинической точки

В параграфе 2.2 приведено определение и формулы для сепаратрисного отображения в задаче Мезера Оно представляет собой обобщение сепаратрисного отображения Шильникова из параграфа 2 1

Рассмотрим систему (1)-(2) Обозначим через

$$\sigma_h(t) = (q_{\sigma}(\sqrt{h}t), \sqrt{h}p_{\sigma}(\sqrt{h}t)), \quad \gamma_h(t) = (q_{\sigma}(\sqrt{h}t), \sqrt{h}p_{\sigma}(\sqrt{h}t))$$

периодические и гомоклинические решения системы с гамильтонианом T, лежащими на поверхности  $T=h\;\; \mathrm{B}$  расширенном фазовом простран-

 $<sup>$^{-13}\</sup>Pi \mbox{еременная}\ x-\mbox{угловая, выражение}\ "x$ мало" следует понимать как близость к точке x=0 на окружности

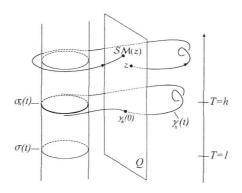


Рис. 3. Сепаратрисное отображение в задаче Мезера.

стве  $T^*M \times \mathbb{T}_t$  выберем гиперповерхность  $\mathcal{Q}$ , трансверсальную гамильтонову векторному полю и проходящую через точки  $(\gamma_h(0), t)$ .

Сепаратрисное отображение  $\mathcal{SM}$  определим как отображение Пуанкаре этой четырехмерной поверхности  $\mathcal{Q}$ . Точнее, выберем произвольную точку  $\mathcal{Z}$  на этой поверхности. Пусть  $\Phi^t$  — фазовый поток и  $t_r(\mathcal{Z})=\min\{t>0:\Phi^t\mathcal{Z}\in\mathcal{Q}\}$  и  $\mathcal{Q}_r=\{\mathcal{Z}\in\mathcal{Q}:t_r<+\infty\}$ . Тогда:

$$\mathcal{SM}:\mathcal{Q}_r \to \mathcal{Q}, \qquad \mathcal{SM}(\mathcal{Z}) = \Phi^{t_r} \mathcal{Z}.$$

На самом деле, вместо  $\mathcal{Q}_r$  используется меньшая область  $\mathcal{Q}_*$ , ограничение  $\mathcal{SM}$  на которую является гладким отображением. Пусть  $\nu=1/l$  — частота и  $\lambda$  — положительный показатель Ляпунова решения  $\sigma(t)$ . Положим  $d=\nu(a_+-a_-)$ . Далее точками . . . будем обозначать несущественные члены, которые явно можно оценить.

**Теорема** 4 На поверхности Q существуют координаты (x, y, t, h):

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x,y,t,h) \in \mathbb{T} imes \mathbb{R}^3 : y,h^{-1} \, - \,$$
 малы $brace$ 

такие, что:

1. t совпадает с исходным временем;

 $2\ T=h+$  ,  $3\ \text{ на области } \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < y,\ x,y\ -\ \text{малы} 
ight\} \subset \mathcal{Q}\ \text{существует гладкая функция}$  иля

$$Y(x, y, t, h) = ax + by +$$
,  $a, b - \kappa$  one manum (6)

такая, что  $Q_* = \left\{ (x,y,t,h) \in Q \mid \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < y, \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < Y, \ x,y - \text{малы} \right\}, \ u$  сепаратрисное отображение имеет вид

$$SM \quad Q_* \to Q, \qquad SM(x, y, t, h) = (x^+, \rho^+, t^+, h^+),$$

$$\begin{cases} x^+ = x + d - \frac{\nu}{\lambda} \ln Y + &, \\ y^+ = Y + &, \\ t^+ = t - \frac{1}{\lambda\sqrt{h}} \ln Y + &, \\ h^+ = h + \frac{1}{\sqrt{h}} I'(t) + &, \end{cases}$$
(7)

5 гомоклиническое решение  $\gamma(t)$  системы с гамильтонианом T является трансверсальным тогда и только тогда, когда  $a \neq 0$ 

Не трудно видеть, что в главном приближении первые два уравнения отображения (7) отделяются и совпадают с уравнениями сепаратрисного отображения Шильникова из параграфа 2 1

В третьей главе мы описываем метод антиинтегрируемого предела

В параграфе 3.1, в качестве примера применения метода антиинтегрируемого предела для построения хаотических траекторий в окрестности сепаратрис, строиться хаотическое множество в окрестности гомоклинической траектории к гиперболической неподвижной точке двумерного симплектоморфизма

В параграфе 3.2 методом антиинтегрируемого предела строятся хаотические траектории сепаратрисного отображения задачи Мезера (7) и из них выбираются те, на которых энергия растет линейно по времени

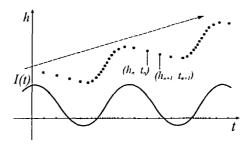


Рис 4. Быстрая траектория Мезера и интеграл Пуанкаре-Мельникова

Для построения хаотических траскгорий сепаратрисного отображения (7) строится сжимающий оператор на пространстве последовательностей  $\{(x_n, y_n, t_n, h_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$  с экспоненциально взвешенными пормами Таким образом, строится инвариантное множество сепаратрисного отображения, на котором динамика сопряжена со сдвигом Берпулли на множестве ограниченных снизу и сверху целочисленных последовательностей

Для выбора нужной из построенных граекторий анализируются формулы (7) для координат t и h Пусть  $\{(x_n,y_n,t_n,h_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$  траектория сепаратрисного отображения (7) Мы хотим выбрать такую траекторию, что  $h_n\geq At_n+B$ , для некоторых констант A,B Обозначим,  $\delta h_n=h_{n+1}-h_n$  и  $\delta t_n=t_{n+1}-t_n$  В главном приближении получаем

$$\delta h_n = \frac{\lambda I'(t_n)}{-\ln y_{n+1}} \delta t_n + \quad ,$$

где  $\delta h_n$ ,  $\delta t_n$  — малы при большом h и периодическая функция I'(t) имеет нулевое среднее Таким образом, последовательность  $h_n$ , характеризующая энергию, возрастает или убывает вместе с интегралом Пуанкаре-Мельникова I(t) Выбирая из построенных хаотических траекторий такую, что величины  $\frac{1}{-\ln y_{n+1}}$  насколько можно, велики (соответственно, малы) при  $I'(t_n) > 0$  (соответственно, при  $I'(t_n) < 0$ ) получим траекторию с неограниченным линейным по времени ростом энергии (рис 4)

#### В заключении приведены основные результаты работы

- Получена неулучшаемая оценка скорости роста энергии в задаче Мезера
- Получены формулы для сепаратрисного отображения в задаче Мезера и ее многомерного обобщения
- 3 Получен новый способ применения метода антиинтегрируемого предела в системах со слабой гиперболичностью
- 4 Приведен пример механической системы с двумя с половиной степенями свободы, периодически зависящей от времени, у которой существуют решения с неограниченным ростом энергии, в среднем липейным по времени

В приложениях доказываются технические утверждения, используемые в работе В приложении А приведен вывод сепаратрисного отображения для многомерной версии задачи Мезера В частности, доказывается теорема 4 В приложении Б доказывается лемма из параграфа 3 2 о сжимаемом операторе

В заключение хочу поблагодарить моего научного руководителя профессора Д В Трещева за постановку задачи и постоянное внимание к работе, профессора С В Болотина — за ценные указания, профессора В Ю Калошина — за большой интерес к работе, моего отца Н А Пифтанкина, доцента А П Комбарова и всего преподавательского состава механико-математического факультета МГУ — за воспитание математической культуры

## Список публикаций

- Г Н Пифтанкин, Скорость диффузии в задаче Мезера // Доклады АН Т 408,№06, 736-737, 2006
- 2~ Pıftankın G N , Dıffusion speed in the Mather problem // Nonlinearity  $19,\,2617\text{-}2644,\,2006$
- 3 Г Н Пифганкин, Д В Трещев, Сепаратрисное отображение в гамильтоновых системах // УМН, 62 2(374), 3-108, 2007

Подписано в печать 02 09 2008 Формат 60х88 1/16 Объем 1 0 п л Тираж 100 экз Заказ № 729 Отпечатано в ООО «Соцветие красок» 119991 г Москва, Ленинские горы, д 1 Главное здание МГУ, к A-102