# Спецкурс “Теория риска” (для 409 гр.)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 2

Москва, 16 сентября 2020 г.

# С НОВЫМ УЧЕБНЫМ ГОДОМ!

# План лекции

- Индивидуальные модели риска (классическая и обобщенная)
- Модели коллективного риска
- Распределения отдельных убытков
- Распределения числа убытков - считающие (или арифметические распределения)
- Классы Панджера $(a, b, 0)$, $(a, b, 1)$
- Составные считающие распределения

# Модели риска

Начнем с описания хорошо известных актуариям моделей представления суммарного ущерба страховой компании в течение заданного промежутка времени. Это основа для принятия таких важных решений как выбор размера премий и объема резервов .

Речь идет о достаточно коротком промежутке (обычно это год), поэтому в классических моделях ни инфляция, ни доходы от инвестиций не учитываются. Предполагается также, что премии вносятся в начале рассматриваемого промежутка. Модели такого типа возникают как в страховании "не жизни" , так и при краткосрочном страховании жизни.

Портфель страховой компании состоит из фиксированного числа, скажем n, контрактов, по которым могут поступать требования (претензии, иски) на выплату возмещений при наступлении страховых случаев (или событий).

Предполагается, что контракты (или риски) между собой независимы, но не обязательно одинаковы.

Пусть $V_i$, $i = \overline{1, n}$, суммарный размер поступивших требований по $i$-му контракту за определенный промежуток времени (чаще всего год). Это независимые неотрицательные случайные величины, вообще говоря, разно распределенные, $F_i(x) = \mathrm{P}(V_i \le x)$.

Суммарный размер требований по всему портфелю равен $S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} V_i$, значит, $\mathrm{E}S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i$, $\mathrm{D}S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}V_i$.

Традиционно в актуарной математике используется представление размера $V_i$ требований по контракту $i$ в следующей форме:

$V_i \stackrel{d}{=} 1_i U_i$, где $1_i$ - индикатор события $\{V_i > 0\}$, а $U_i$ - суммарный размер требований по $i$-му контракту при условии, что хоть одно требование по данному контракту поступило.

Величины $U_i$ предполагаются независимыми и не зависящими от $1_i$, $i = \overline{1, n}$.

Распределение

$$G_i(x) = \mathsf{P}(U_i \leq x) = q_i^{-1}[F_i(x) - (1 - q_i)], \quad x \geq 0,$$

где $q_i = \mathsf{P}(V_i > 0)$.

# Классическая индивидуальная модель

Если по каждому контракту может поступить не более одного требования, то $N^* = \sum_{i=1}^{n} 1_i$ это число поступивших требований.

Для страхования жизни: $q_j$ - вероятность смерти $j$-го застрахованного в течение года и $b_j$ - соответствующая страховая сумма, т.е. $\mathsf{P}(V_j = b_j) = q_j$ и $\mathsf{P}(V_j = 0) = 1 - q_j$.

В медицинском страховании, удобно рассматривать лишь суммарный объем требований за год и считать, что выплата производится в конце года.

Причины: модель, используемая страховщиком, не должна зависеть от того, как работает тот или иной врач, часто используется франшиза, относящаяся к суммарным выплатам за весь год.

Функция распределения $S^{ind}$ подсчитывается как свертка $F_i$, $i = \overline{1, n}$.

Иногда бывает удобно использовать преобразование Лапласа $L_X(z) = \mathrm{E}\exp\{-zX\}$. При сложении независимых случайных величин преобразования Лапласа перемножаются, следовательно,

$$L_{S^{ind}}(z) = \prod_{i=1}^{n} L_{V_i}(z).$$

Поскольку

$$L_{V_j}(z) = 1 - q_j + q_j L_{U_j}(z),$$

то имеем

$$L_{S^{ind}}(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j + q_j L_{U_j}(z)).$$

Дифференцирование преобразования Лапласа позволяет находить моменты $S^{ind}$.

Однако только в редких случаях удается найти точное обращение $L_{S^{ind}}(z)$, т.е. $F_n^{ind}$.

Один из немногих примеров дает задача 4 к лекции 1 (о гамма-распределении).

Поэтому используют различные методы аппроксимации $F^{ind}$ (ЦПТ, ряды Эджворта, преобразование Эсшера, метод Монте-Карло и др.), см. например,

R.E.Beard, T.Pentikainen, E.Pesonen. Risk Theory. 2nd ed. Chapman and Hall, London, 1977.

Для малых $n$ распределение $S^{ind}$ может быть подсчитано с помощью рекуррентной процедуры.

Предположим, что все $V_i$ - целочисленные случайные величины, и обозначим $S_m = V_1 + \ldots + V_m$. Тогда, если

$$f_{S_m}(k) = \mathrm{P}(V_1 + \ldots + V_m = k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то $f_{S_1}(k) = \mathrm{P}(V_1 = k) = f_{V_1}(k)$ и при $m > 1$

$$f_{S_m}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_{m-1}}(k-j) f_{V_m}(j), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Таким образом, приходится подсчитывать $f_{S_2}(k)$, $f_{S_3}(k), \ldots$, пока мы не получим $f_{S_n}(k) = f_{S^{ind}}(k)$.

# Классическая индивидуальная модель

Если распределения $V_m$, $m \geq 1$, непрерывны, то суммы заменяются на интегралы, а $f_{S_m}(x)$ интерпретируется как плотность распределения и для нее справедливо рекуррентное соотношение

$$f_{S_m}(x) = \int_0^x f_{S_{m-1}}(x-y) f_{V_m}(y)\, dy.$$

При больших $n$ такие подсчеты могут оказаться очень трудоемкими, поэтому во многих случаях более привлекательной оказывается коллективная модель риска.

# Обобщенная индивидуальная модель

Для однородного портфеля суммарный размер требований

$$S_X = \sum_{k=1}^{N} 1_k A_k X_k.$$

Здесь $\{X_k, k \geq 1\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (имеющих такое же распределение как случайная величина $X$).

Бернуллиевская случайная величина $1_k$ показывает осуществился ли риск.

Масштабный параметр $A_k$, являющийся положительной дискретной случайной величиной, может учитывать случайные колебания процентой ставки или инфляцию.

$N$ - число контрактов (м.б. случайная величина).

Все поступающие требования рассматриваются в порядке их поступления, при этом не учитывается, по какому контракту они поступили.

Размеры требований $X_i$, $i \geq 1$, считаются независимыми одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $G(x) = \mathsf{P}(X_i \leq x)$, $G(0) = 0$.

Число требований $N$ за рассматриваемый промежуток - целочисленная случайная величина, не зависящая от последовательности $\{X_i, i \geq 1\}$.

Суммарный размер поступивших требований $S^{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$ равен сумме случайного числа случайных слагаемых (удовл. указ. усл. незав.).

# Модель коллективного риска

Далее рассмотрим наиболее часто используемые на практике распределения для числа происшествий $N$ и для размера отдельных выплат $X$.

Использование сложных распределений, зависящих от двух, трех или даже четырех параметров, дает возможность подобрать распределение, наилучшим образом описывающее реальные данные.

Выбор по отдельности распределений числа требований и размера отдельного требования полнее отражает структуру изучаемых процессов и дает гораздо более точное приближение для истинного распределения суммарного ущерба, чем при подборе распределения непосредственно по наблюдениям за суммарным ущербом.

Оно полезно и для учета изменений в контракте страхования и при перестраховании.

# Размер отдельных требований

Для описания поступающих требований (или выплат страховой компании) обычно используются непрерывные распределения.

Ниже мы перечислим ряд базовых (или стандартных) непрерывных распределений и укажем несколько способов получения из них более сложных распределений (умножение на положительную константу, возведение в степень, взятие экспоненты, усреднение по параметру, смесь распределений и др.)

# Обозначения

Пусть $F_X(\cdot)$ и $f_X(\cdot)$ обозначают соответственно функцию распределения и плотность случайной величины $X$. Для всех распределений (кроме нормального и некоторых других) предполагается, что $X > 0$, т.е. $F_X(0) = 0$.

Для упрощения записи индекс $X$ иногда будет опускаться. Если специально не оговорено, параметры рассматриваемых распределений считаются положительными.

Нам понадобятся следующие обозначения для некоторых функций распределения:

# Неполная гамма-функция

$$G(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \ \alpha > 0, x > 0$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt.$$

При целом $\alpha = n$ верно равенство

$$G(n, x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x}.$$

# Неполная бета-функция

$\beta(a, b, x)$ определяется следующим образом

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

при $a > 0$, $b > 0$, $0 < x < 1$.

# Нормальное и равномерное

- Стандартное нормальное распределение

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt, \quad -\infty < x < +\infty.$$

- Равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ с функцией распределения

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

## Показательное, гамма, бета

Показательное (экспоненциальное) распределение с единичным средним имеет функцию распределения $G(1, x)$. Следовательно, для $X \sim Exp(1)$

$$F_X(x) = 1 - e^{-x}, \quad f_X(x) = e^{-x} \quad x > 0.$$

Как следует из д.з. 1, сумма n независимых показательно распределенных случайных величин с единичным средним имеет функцию распределения $G(n, x)$.

Для произвольного $\alpha$ неполная гамма-функция $G(\alpha, x)$ также является функцией распределения.

Аналогично с помощью неполной бета-функции $\beta(a, b, x)$ задается стандартное бета-распределение, сосредоточенное на отрезке $[0, 1]$.

# Определения

## Определение

*Семейство распределений называется масштабно инвариантным, если вместе с распределением случайной величины $X$ распределение $Y = cX$ при любом $c > 0$ также принадлежит этому семейству.*

## Определение

*Масштабно инвариантное семейство обладает масштабным параметром $\theta$, если у случайной величины $Y = cX$ только $\theta$ переходит в $c\theta$, а все остальные параметры такие же, как у $X$.*

# Польза масштабно инвариантных распределений

Рассматриваемые далее распределения являются масштабно инвариантными. Их преимущество состоит в том, что для них легко учитывать инфляцию, когда она равномерна по всему диапазону выплат.

Наличие масштабного параметра (которым обладают все распределения, кроме логнормального и обращенного гауссовского) позволяет моделировать неопределенность будущей инфляции.

# Способы получения новых распределений

1) Умножение на (положительную) константу.

**Лемма (1)**

*Пусть* $Y = \theta X$ *с* $\theta > 0$, *тогда*

$$F_Y(x) = F_X(x/\theta) \text{ и } f_Y(x) = \theta^{-1} f_X(x/\theta), \quad x > 0.$$

Доказательство первого равенства очевидным образом вытекает из определения функции распределения

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(\theta X \le x) = \mathrm{P}(X \le x/\theta) = F_X(x/\theta).$$

Для плотности имеем

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

**Следствие**

*Параметр $\theta$ в лемме 1 является масштабным.*

С помощью леммы 1 может быть получено семейство показательных распределений, $Y \sim Exp(1/\theta)$. Для них

$F_Y(x) = 1 - e^{-x/\theta}$, $f_Y(x) = \theta^{-1}e^{-x/\theta}$, $x > 0$.

Легко проверить, что $\mathsf{E}Y = \theta$.

Задача к лекции 2 (которую надо было решить): единственное непрерывное распределение, обладающее отсутствием памяти показательное.

2) Возведение в степень

**Лемма**

*Пусть* $Y = X^{1/\tau}$ , *тогда при* $\tau > 0$

$$F_Y(x) = F_X(x^\tau), \quad f_Y(x) = x^{\tau-1} f_X(x^\tau),\ x > 0,$$

*а при* $\tau < 0$

$$F_Y(x) = 1 - F_X(x^\tau), \quad f_Y(x) = -\tau x^{\tau-1} f_X(x^\tau),\ x > 0.$$

Доказательство очевидно, так как

$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X^{1/\tau} \le x) =$

$$\begin{cases} \mathrm{P}(X \le x^\tau), & \tau > 0, \\ \mathrm{P}(X \ge x^\tau), & \tau < 0. \end{cases}$$

### Определение

*Если $\tau > 0$, то распределение $Y$ называется преобразованным (или трансформированным), при $\tau = -1$ обратным, а при прочих $\tau < 0$ обратным преобразованным.*

### Замечание

*Часто желательно и в случае обратного преобразованного распределения считать параметр $\tau$ положительным, для этого используют соотношения $F_Y(x) = 1 - F_X(x^{-\tau})$, $f_Y(x) = \tau x^{-\tau-1} f_X(x^{-\tau})$, $\tau > 0$, полученные заменой $\tau$ на $-\tau$.*

Вид таких распределений для $X \sim Exp(1)$ - задача к л.2.

# Трехпараметрические семейства

Если мы хотим ввести масштабный параметр в преобразованное распределение, то следует рассмотреть случайную величину $\theta X^{1/\tau}$.

Трехпараметрические (с параметрами $\alpha$, $\theta$, $\tau$):

а) преобразованное гамма-распределение $F(x) = G(\alpha, u)$, $f(x) = \frac{\tau u^{\alpha} e^{-u}}{x\Gamma(\alpha)}$, где $u = (x/\theta)^{\tau}$, $x > 0$;

б) преобразованное обратное гамма-распределение $F(x) = 1 - G(\alpha, u)$, $f(x) = \frac{\tau u^{\alpha} e^{-u}}{x\Gamma(\alpha)}$, где $u = (\theta/x)^{\tau}$, $x > 0$.

Задача к лекции 3:

двух- и однопараметрические распределения могут быть получены из трехпараметрических как частные случаи.

Так, из преобразованного гамма-распределения при $\alpha = 1$ получаем распределение Вейбулла, при $\tau = 1$ гамма-распределение и при $\alpha = \tau = 1$ экспоненциальное.

Аналогичным образом из преобразованного обратного гамма-распределения получаются обратные распределения Вейбулла, гамма и экспоненциальное.

Выписать явный вид этих распределений.

Взятие экспоненты - еще один способ получения новых распределений.

**Лемма**

*Пусть* $Y = e^X$, *тогда* $F_Y(x) = F_X(\ln x)$, $f_Y(x) = x^{-1} f_X(\ln x)$, $x > 0$.

Доказательство очевидным образом следует из равенств

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(e^X \le x) = \mathrm{P}(X \le \ln x).$$

# Логнормальное распределение

Этим способом мы получаем хорошо известное логнормальное распределение с параметрами $\mu$ и $\sigma$ ($\mu$ может быть отрицательным). А именно, пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, т.е. $F_X(x) = \Phi((x-\mu)/\sigma)$.

Возьмем $Y = e^X$, тогда при $x > 0$

$$F_Y(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), \quad f_Y(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Решить задачу: логарифмически нормальное распределение масштабно инвариантно, но не обладает масштабным параметром.

# Семейство распределений не в форме $Y = h(X)$

Широко известное обращенное гауссовское распределение представляет собой частный случай (при $\lambda = -0,5$) следующего семейства с плотностью, зависящей от трех параметров $\mu > 0$, $\beta > 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$,

$$f(x) = \frac{\mu^{-\lambda} x^{\lambda-1} \exp[-(x^2 + \mu^2)/2\beta x]}{2K_\lambda(\mu\beta^{-1})}, \quad x > 0,$$

где $K_\lambda(x)$ - это модифицированная функция Бесселя третьего рода

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{-x(y+y^{-1})/2}\, dy \quad x > 0.$$

имеет плотность

$$f(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}\right\}, x > 0,$$

и функцию распределения

$$F(x) = \Phi[(\beta x)^{-1/2}(x-\mu)] + e^{2\mu\beta^{-1}}\Phi[-(\beta x)^{1/2}(x+\mu)].$$

Распределение, получающееся при $\lambda = 0,5$, называют взаимным обращенному гауссовскому распределению.

# Способы получения новых распределений

Следующий способ получения новых распределений - усреднение по параметру.

Таким образом удается учесть неоднородность портфеля страховщика, а также неопределенность будущей инфляции.

В самом деле, предположим, что каждый контракт характеризуется параметром $\theta$, представляющим собой реализацию некоторой случайной величины $\Theta$. При фиксированном $\theta$ размер выплаты X имеет плотность $f_X(x, \theta)$. Если структурная функция портфеля, т.е. распределение $\Theta$, обладает плотностью $u(\theta)$, то

$$f_X(x) = \mathsf{E} f_X(x, \Theta) = \int f_X(x, \theta) u(\theta)\, d\theta.$$

Безусловное распределение $X$ соответствует наудачу выбранному риску из рассматриваемого портфеля. Такая интерпретация лежит в основе теории достоверности (credibility theory).

Обратимся к преобразованному бета-распределению, зависящему от четырех параметров $(\alpha, \theta, \gamma, \tau)$.

Положим
$$u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1 + (x/\theta)^\gamma}, \quad x > 0,$$
тогда
$$F(x) = \beta(\tau, \alpha, u), \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \cdot \frac{\gamma(x/\theta)^{\gamma\tau}}{x[1 + (x/\theta)^\gamma]^{\alpha+\tau}}. \qquad (1)$$

Положив в (1) один из параметров равным 1, мы получаем следующие трехпараметрические распределения (везде ниже, если не оговорено иное, $x > 0$):

а) распределение Берра (Burr) при $\tau = 1$,

б) обратное распределение Берра при $\alpha = 1$,

в) обобщенное распределение Парето при $\gamma = 1$.

В свою очередь, из вышеприведенных распределений можно получить пять двухпараметрических:

а) паралогистическое ($\alpha = \gamma, \tau = 1$) является частным случаем распределения Берра

б) обратное паралогистическое ($\tau = \gamma, \alpha = 1$) - частный случай обратного распределения Берра

в) логлогистическое ($\alpha = \tau = 1$) представляет собой частный случай распределения Берра и обратного распределения Берра

г) распределение Парето ($\gamma = \tau = 1$) получается как из обобщенного распределения Парето, так и из распределения Берра

д) обратное распределение Парето ($\gamma = \alpha = 1$) - частный случай обратного распределения Берра и обобщенного распределения Парето

Упомянем также однопараметрическое распределение Парето:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha}, \quad f(x) = \frac{\alpha x^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \; x > \theta,$$

сосредоточенное на полупрямой $(\theta, \infty)$.

Хотя в записи этого распределения фигурируют два параметра $\alpha$ и $\theta$, но величина $\theta$ должна быть заранее фиксирована.

Новые распределения могут быть получены путем взвешивания. Частным случаем является преобразование Эсшера:

$$F_Y(x) = \int_0^x e^{hy} dF_X(y)/g_X(h),$$

где $g_X(h) = \mathsf{E}e^{hX}$ - производящая функция моментов.

Необходимо также отметить, что смеси функций распределения $\sum_n p_n F_n(x)$, где $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n = 1$,

и составные распределения также используются для получения новых распределений.

# Роль равномерного распределения

При компьютерном моделировании часто используется следующий хорошо известный результат.

**Лемма**

*Пусть случайная величина $Z$ распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Тогда $Y = F_X^{-1}(Z)$, где*

$$F_X^{-1}(t) = \sup(x : F_X(x) \le t),$$

*имеет функцию распределения $F_X(x)$.*

Таким образом, сначала строится выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ из распределения $U(x)$, а затем подсчитываются значения $F_X^{-1}(x_k)$, $k = \overline{1, n}$, что и дает выборку из распределения $F_X$.

Для перестрахования полезными оказываются распределения Бенктандера, которые задаются не с помощью плотностей или функций распределения, а с помощью условных математических ожиданий $r(x) = \mathrm{E}(X - x | X > x)$.

Распределение Бенктандера I (BI) имеет

$$r(x) = x(a + 2b \ln x)^{-1}$$

Распределение Бенктандера II (BII) имеет

$$r(x) = x^{1-b}/a,$$

при $b = 1$ получается экспоненциальное распределение, а при $b = 0$ получается однопараметрическое распределение Парето.

# Число происшествий (требований)

Мы будем рассматривать неотрицательные целочисленные случайные величины, иначе говоря, считающие или арифметические распределения.

Начнем с наиболее простых и широко используемых распределений: биномиального, пауссоновского, геометрического и отрицательно биномиального.

Затем обратимся к двум основным методам получения новых распределений (построение составных распределений, т.е. суммирование случайного числа случайных слагаемых, и усреднение по параметру).

# Класс Панджера $(a, b, 0)$

## Определение

*Считающее распределение* $\{p_k, k \geq 0\}$ *принадлежит классу* $(a, b, 0)$, *если существуют такие* $a$ *и* $b$, *что при* $k = 1, 2, \ldots$

$$p_k = p_{k-1}\left(a + \frac{b}{k}\right). \qquad (2)$$

Величину $p_0$ можно определить, пользуясь тем, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Очевидно, что $p_0 > 0$.

# 4 основных распределения

1) Биномиальное распределение $Bi(n, q)$

$p_k = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$, $a = -\frac{q}{1-q}$,
$b = (n+1)\frac{q}{1-q}$, $p_0 = (1-q)^n$,

где $0 < q < 1$, а параметр $n$ принимает целые положительные значения.

2) Пуассоновское распределение $Poi(\lambda)$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, a = 0, b = \lambda, p_0 = e^{-\lambda},$$

параметр $\lambda$ принимает любые положительные значения.

3) Отрицательно биномиальное распределение $NB(\alpha, \beta)$

$$p_k = \frac{C^k_{k+\alpha-1}\beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}}, a = \frac{\beta}{1+\beta}, b = (\alpha-1)\frac{\beta}{1+\beta}, p_0 = \frac{1}{(1+\beta)^\alpha},$$

параметры $\alpha$ и $\beta$ принимают любые положительные значения, при $\alpha = 1$ получаем геометрическое распределение

4) Геометрическое распределение $Geo(\beta/(1+\beta))$

$$p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, a = \frac{\beta}{1+\beta}, b = 0, p_0 = \frac{1}{1+\beta}.$$

# Теорема Панджера

**Теорема**

*Класс $(a, b, 0)$ не содержит других невырожденных распределений, кроме 1)-4).*

Доказательство. Заметим, что на плоскости $(a; b)$ прямые $b = -(n+1)a$, $a < 0$, соответствуют семейству биномиальных распределений $Bi(n; a/(a-1))$, $n = 1, 2, \ldots$.

Положительная ось ординат $a = 0$, $b > 0$ соответствует семейству пуассоновских распределений $Poi(b)$.

А область $0 < a < 1$, $b > -a$ соответствует семейству отрицательно биномиальных распределений $NB((b/a) + 1; a/(1-a))$, в частности, участок оси абсцисс $0 < a < 1$, $b = 0$ соответствует семейству геометрических распределений.

## Теорема Панджера

Остальные значения $a$ и $b$ в рекуррентной формуле не дают ни при каком $p_0 > 0$ невырожденное распределение вероятностей.

В самом деле, в области $b < -a$ мы имеем $a + b < 0$, т.е. $p_1 = (a+b)p_0 < 0$, что невозможно.

Линия $b = -a$, $a < 0$ соответствует вырожденному распределению, сосредоточенному в нуле, так как $p_1 = (a+b)p_0 = 0$, а значит, и все $p_k = 0$ при $k \geq 1$.

Для любой точки области $b > -a$, $a < 0$, не принадлежащей ни одной из прямых $b = -(n+1)a$, $n = 1, 2 \ldots,$ применение соотношений (2) рано или поздно приведет к отрицательному значению для $p_k$.

Наконец, при $a \geq 1$, $b > -a$ очевидна следующая цепочка неравенств

$$a + \frac{b}{k} \geq a\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq \frac{k-1}{k}.$$

Следовательно, применение (2) приводит к следующему результату $p_2 \geq p_1/2$, $p_3 \geq p_1/3, \ldots$, $p_k \geq p/k, \ldots$. Суммирование дает

$$\sum_k^{\infty} p_k \geq p_1\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots\right).$$

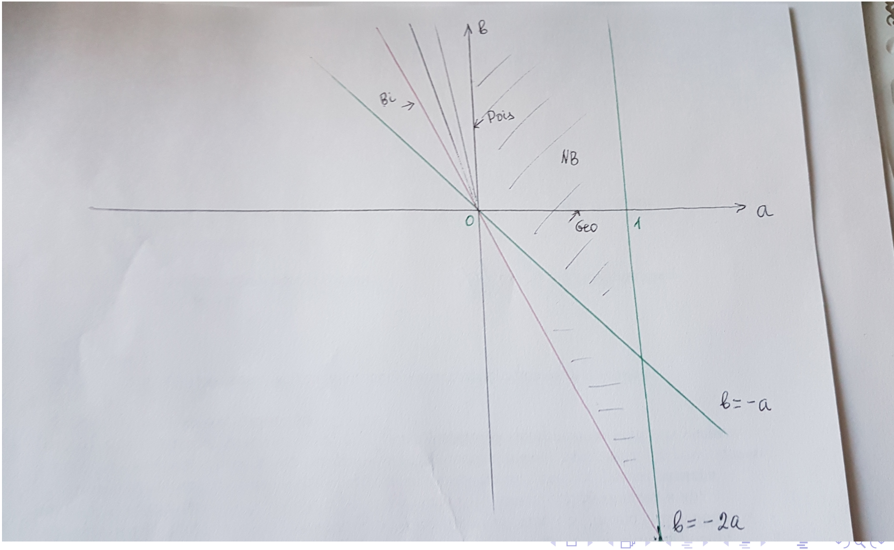
Поскольку стоящий справа ряд расходится, набор $\{p_k\}$ не может быть распределением вероятностей. $\square$

# Выводы

Таким образом, единственными считающими распределениями, принадлежащими классу $(a, b, 0)$, являются биномиальное, пуассоновское, отрицательно биномиальное и геометрическое.

Принадлежность считающего распределения классу $(a, b, 0)$ позволяет получить так называемую формулу Панджера для нахождения составного распределения (докажем дальше).

# График



## Класс $(a, b, 1)$

**Определение**

*Считающее распределение $\{p_k, k \geq 0\}$ принадлежит классу $(a, b, 1)$, если для некоторых $a$ и $b$ рекуррентные соотношения (2) выполнены при $k = 2, 3, \ldots$.*

Отличие от класса $(a, b, 0)$ состоит в том, что рекуррентная процедура начинается не с $p_0$, а с $p_1$.

Очевидным образом все распределения из класса $(a, b, 0)$ принадлежат классу $(a, b, 1)$.

Кроме того, мы получаем возможность, сохраняя форму распределения при положительных $k$, менять значение вероятности в нуле.

Сумму $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ можно положить равной любому числу $c \in (0, 1]$, тогда автоматически $p_0 = 1 - c$, а рекуррентная процедура позволит найти $p_1$ и все последующие $p_k$.

# Класс $(a, b, 1)$

Возможны два различных случая:
а) Подкласс урезанных в нуле распределений (zero-truncated) соответствует $p_0^T = 0$. (В этом случае вероятности будем обозначать $p_k^T$, $k \geq 0$.)

Данный подкласс состоит из урезанных биномиального, пуассоновского, отрицательно биномиального и геометрического распределений.

При $k \geq 1$ они имеют те же вероятности, что и не урезанные распределения, но умноженные на некоторую постоянную

$$p_k^T = dp_k, \text{ где } d^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - p_0,$$

здесь через $p_k$ обозначены вероятности исходного неурезанного распределения.

б) Подкласс модифицированных в нуле распределений (zero-modified) соответствует $p_0^M > 0$. (Модифицированные вероятности обозначаются $p_k^M$, $k \geq 0$.) Нетрудно проверить, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k$$

Полученное выражение можно переписать также в виде

$$p_k^M = (1 - p_0^M) p_k^T, \; k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, модифицированное в нуле распределение является смесью (с весами $(1 - p_0^M)$ и $p_0^M$) урезанного в нуле распределения и вырожденного, сосредоточенного в нуле.

в) До сих пор мы предполагали, что рассматриваются лишь те значения $a$ и $b$, которые дают распределения класса $(a, b, 0)$.

Оказывается, что подкласс распределений, полученных расширением области возможных значений $a$ и $b$, также принадлежит классу $(a, b, 1)$. А именно, предположим сначала, что $0 < a \leq 1$, $-2a < b < -a$. В этой области при $k \geq 2$ выполнено неравенство $a + (b/k) > 0$. Следовательно,

$$p_k = p_1 \left(a + \frac{b}{2}\right) \left(a + \frac{b}{3}\right) \dots \left(a + \frac{b}{k}\right) > 0,$$

кроме того,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geq 1 - \frac{A}{k},$$

где $A = -\frac{b}{a} > 1$. Используя признак Раабе, мы получаем, что ряд из $p_k$ сходится.

# Класс $(a, b, 1)$

Получившееся распределение называется ETNB (расширенным отрицательно биномиальным распределением урезанным в нуле), поскольку вероятности имеют ту же форму записи, что и отрицательно биномиальное распределение, урезанное в нуле. Однако теперь $-1 < \alpha < 0$, в то время как раньше было $\alpha > 0$.

Итак, области $0 < a < 1$, $-a > b > -2a$ соответствует невырожденное распределение класса $(a, b, 1)$ с $p_0 = 0$.

При рассмотрении области $a = 1$, $-2 < b < 1$ обозначим $\delta = -(b+1)$, чтобы иметь $0 < \delta < 1$. Тогда получим $p_k = \frac{p_1}{k}\frac{\Gamma(k-\delta)}{\Gamma(1-\delta)}$, можно показать!!, что предел ETNB при $-1 < \alpha < 0$ и $\beta \to \infty$ является собственным распределением, не имеющим конечного математического ожидания.

Такое распределение с точки зрения страхования не представляет интереса, так как для него затруднительна тарификация.

# Задача

Показать, что логарифмическое распределение с

$$p_k = \frac{\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}}{k\ln(1+\beta)}, k = 1, 2, \ldots$$

получается из ETNB предельным переходом при $\alpha \to 0$ (т.е. соответствует $0 < a < 1$, $b = -a$). Найти производящую функцию этого распределения.

# Класс $(a, b, 1)$

### Теорема

*Класс $(a, b, 1)$ содержит все распределения класса $(a, b, 0)$, их урезанные и модифицированные в нуле варианты; расширенное отрицательно биномиальное распределение урезанное в нуле и логарифмическое, их модификации в нуле, а также собственное распределение, не имеющее математического ожидания.*

### Замечание

*Логарифмическое распределение, $NB(\alpha, \beta)$ при $\alpha < 1$ и ETNB имеют убывающие с ростом $k$ вероятности $p_k$.*

# Составные считающие распределения

т.е. суммы случайного числа неотрицательных целочисленных случайных величин. Распределения такого типа могут возникать в страховании следующим образом. Пусть N - это число происшествий, связанных с некоторым ансамблем контрактов. Например, если речь идет о страховании автомобилей, это может быть число автомобильных катастроф. Предположим, что $M_k$ - это число требований, связанных с $k$-м происшествием, иначе говоря, число пострадавших. Тогда $\tilde{N} = \sum_{k=1}^{N} M_k$ - это общее число требований по рассматриваемому портфелю.

Обычно предполагается, что $N$ не зависит от последовательности $M_1, M_2, \ldots,$ состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин.

Легко проверить, что производящая функция $\tilde{N}$ имеет вид $P(z) = P_1[P_2(z)]$, где $P_1(z)$ - производящая функция первичного распределения, т.е. случайной величины $N$, а $P_2(z)$ - производящая функция вторичного распределения, т.е. случайных величин $M_k$, $k \geq 1$.

# Составные распределения

Для обозначения составного распределения употребляется запись из названий двух использованных распределений, сначала первичное, потом вторичное. Наиболее широко распространены составные пуассоновские распределения, т.е. такие, у которых первичное распределение пуассоновское, а значит, $P(z) = \exp\{\lambda(P_2(z) - 1)\}$.

1. Будет ли свертка составных пуассоновских распределений также составным пуассоновским распределением?

2. Проверить, что отрицательно биномиальное распределение - это пуассоновско-логарифмическое.

# Модифицированные распределения

**Лемма**

*Любое модифицированное в нуле распределение является составным.*

Доказательство. В качестве первичного распределения рассмотрим бернуллиевское, т.е. $Bi(1, q)$.

Его производящая функция равна $P_1(z) = 1 - q + qz$.

Если $P_2(z)$ производящая функция вторичного распределения, то составное распределение имеет производящую функцию $P(z) = 1 - q + qP_2(z)$.

Предположим, что в качестве $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ мы выбрали производящую функцию того распределения, которое собираемся модифицировать.

# Модифицированные распределения

Поместим в нуль массу $p_0^M$ и умножим все остальные вероятности $p_k$ на некоторую положительную постоянную $h$, т.е. положим $p_k^M = hp_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем $h$ так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^M = 1 - p_0^M$. Это дает $h = (1 - p_0^M)/(1 - p_0)$. Следовательно,

$$P(z) = p_0^M + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}(P_2(z) - p_0),$$

что может быть переписано в требуемом виде, где $q = \frac{1-p_0^M}{1-p_0}$. Тем самым мы установили, что модифицированное распределение является составным. $\square$

**Определение**

*Распределение вероятностей называется безгранично делимым, если при любом $n > 1$ оно представляется как n-кратная свертка некоторого распределения с самим собой.*

Когда речь идет о считающем распределении $\{p_k, k \geq 0\}$, то безграничная делимость означает, что при любом $n > 1$ его производящая функция удовлетворяет соотношению $P^{1/n}(z) = Q_n(z)$, где $Q_n(z)$ - также производящая функция некоторого распределения.

Если же рассматривается распределение произвольной неотрицательной случайной величины $X$, то безграничная делимость означает, что $L_X^{1/n}(z)$ при любом $n$ является преобразованием Лапласа некоторой случайной величины.

# Безгранично делимые распределения

**Теорема**

*Любое безгранично делимое считающее распределение является составным пуассоновским.*

Доказательство. Вспомним, что составное пуассоновское распределение имеет производящую функцию $P(z) = e^{\lambda[P_2(z)-1]}$, где $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ и $h_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = 1$.

Мы должны записать в таком виде $P(z)$ в предположении, что $P^{1/n}(z)$ при любом $n$ является производящей функцией некоторого распределения.

Очевидно, что $P(0) = p_0 > 0$, так как случайная величина, принимающая лишь целые положительные значения не может быть безгранично делимой. Следовательно, существует такая окрестность нуля $|z| \leq c \leq 1$, где $P(z)$ положительна, кроме того $P(z) < 1$ при $|z| < 1$.

Так как $0 < 1 - P(z) < 1$ при $|z| < c$, то функцию
$\ln P(z) = \ln[1 - (1 - P(z))]$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\ln P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \ -c < z < c.$$

Положив $z = 0$, приходим к выводу, что $q_0 < 0$.

Мы хотим доказать, что все остальные $q_k$ неотрицательны. Допустим, что это не так, и придем к противоречию. Пусть $r \geq 1$ - наименьший индекс, для которого $q_r < 0$. Для упрощения записи введем обозначения

$$A(z) = \sum_{k=1}^{r-1} q_k z^k, \ B(z) = \sum_{k=r+1}^{\infty} q_k z^k, \ \frac{1}{n} = \varepsilon,$$

тогда

$$P^{1/n}(z) = e^{\varepsilon q_0} \cdot e^{\varepsilon A(z)} \cdot e^{\varepsilon q_r z^r} \cdot e^{\varepsilon B(z)}.$$

По предположению

$$P^{1/n}(z) = \sum_{k=0} f_k z^k, \text{ где } f_k \geq 0.$$

Рассмотрим $f_r$, т.е. коэффициент при $z^r$. Так как степенной ряд $B(z)$ содержит только члены со степенями больше $r$, он не влияет на $f_r$. Значит, $f_r$ - это коэффициент при $z^r$ в выражении

$$e^{\varepsilon q_0} \cdot (1 + \varepsilon A(z) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2(z) + \ldots) \cdot (1 + \varepsilon q_r z^r).$$

Поскольку $A(z)$ является полиномом степени не выше, чем $r-1$, нетрудно проверить, что

$$f_r = e^{q_0 \varepsilon}\varepsilon[q_r + \varepsilon h(\varepsilon)],$$

где $h(\varepsilon)$ - полином от $\varepsilon$.
Если $q_r < 0$, то при достаточно малом $\varepsilon$ правая часть будет отрицательна, т.е. $f_r < 0$, что невозможно. Таким образом, установлено, что $q_r \geq 0$ при $r \geq 1$. Учитывая равенство $P(1) = 1$, получаем $\ln P(1) = \sum_{k=0} q_k = 0$, значит, $-q_0 = q_1 + q_2 + \ldots$.
Положив $\lambda = -q_0$ и $h_k = q_k/\lambda$ при $k \geq 1$, мы запишем $P(z)$ в требуемом виде. □

# Основная литература


1. Е.В.Булинская. Теория риска и перестрахование, часть I, Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2001.
2. Е.В.Булинская. Теория риска и перестрахование, часть 2, Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2006.
3. Ekaterina Bulinskaya. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences. In: Modern problems of stochastic analysis and statistics - selected contributions in honor of Valentin Konakov, ed. V.Panov, November 2017, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 208, p. 349-408.