Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 2

Метрика Канторовича–Васерштейна

Пусть $p \geq 1$. Рассмотрим пространство $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, состоящее из вероятностных мер μ, удовлетворяющих условию

$$\int |x|^p \, d\mu < \infty.$$

Выражение

$$W_p(\mu, \sigma) = \Big(\inf_{\pi} \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} |x - y|^p \, d\pi\Big)^{1/p},$$

где inf берется по всем вероятностным мерам π, у которых проекция на $\mathbb{R}^d_x$ равна μ, а проекция на $\mathbb{R}^d_y$ равна σ, называется W_p–метрикой Канторовича–Васерштейна.

Теорема 1. (i) *В определении метрики Канторовича* inf *можно заменить на* min. *Мера, на которой достигается минимум называется оптимальным планом.*

(ii) *Выражение W_p действительно является метрикой.*

(iii) *Последовательность μ_n сходится к μ по метрике W_p тогда и только тогда, когда μ_n сходится к μ слабо и*

$$\lim_{n\to\infty} \int |x|^p \, \mu_n(dx) = \int |x|^p \, \mu(dx).$$

Доказательство. Для обоснования пункта (i) рассмотрим последовательность вероятностных мер π_n, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} |x - y|^p \, d\pi_n = W_p(\mu, \sigma)^p.$$

Так как

$$\iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} |x|^p + |y|^p \, d\pi_n = \int |x|^p \, \mu(dx) + \int |y|^p \, \sigma(dy),$$

то переходя к подпоследовательности можно считать, что π_n сходится слабо к вероятностной мере π. Мера π имеет заданные проекции. Кроме того, для всякого $M > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} \min\{M, |x - y|^p\} \, d\pi_n = \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} \min\{M, |x - y|^p\} \, d\pi.$$

Следовательно,

$$W_p(\mu, \sigma)^p \geq \iint_{\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y} \min\{M, |x - y|^p\} \, d\pi \quad \forall M > 0.$$

Устремляя $M \to \infty$ получаем, что π — искомая мера.

Из свойств метрики проверки требует лишь неравенство треугольника. Пусть μ, ν, σ — вероятностные меры и $\pi_{\mu\nu}$ — оптимальный план для μ и ν, а $\pi_{\nu\sigma}$ — оптимальный план для ν и σ. Обозначим через $\pi^y_{\mu\nu}(dx)$ и $\pi^y_{\nu\sigma}(dz)$ условные меры относительно общей проекции ν. Положим $\eta(dxdydz) = \pi^y_{\mu\nu}(dx)\pi^y_{\nu\sigma}(dz)\nu(dy)$. Тогда проекция меры η на координаты (x, z) имеет проекции μ на $\mathbb{R}^d_x$ и σ на $\mathbb{R}^d_z$. Следовательно, выполнено неравенство

$$W_p(\mu, \sigma) \leq \sqrt[p]{\iiint |x - z|^p \eta(dxdydz)},$$

где правая часть оценивается выражением

$$\sqrt[p]{\iiint |x - y|^p \eta(dxdydz)} + \sqrt[p]{\iiint |y - z|^p \eta(dxdydz)} = W_p(\mu, \nu) + W_p(\nu, \sigma).$$

Обсудим теперь пункт (iii). Предположим, что $W_p(\mu_n, \mu) \to 0$. Пусть π_n — оптимальный план для μ_n и μ. Имеют место неравенства

$$\Big|\int |x|^p \, d\mu_n - \int |x|^p \, d\mu\Big| \leq \iint \big||x|^p - |y|^p\big| \, \pi_n(dxdy) \leq$$

$$\leq pW_p(\mu_n,\mu)\Big(\Big(\int |x|^p\,d\mu_n\Big)^{(p-1)/p} + \Big(\int |x|^p\,d\mu\Big)^{(p-1)/2}\Big),$$

из которых следует ограниченность и сходимость моментов. Аналогичным образом для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ получаем неравенство

$$\Big|\int \varphi\,d\mu_n - \int \varphi\,d\mu\Big| \leq \sup|\nabla\varphi| W_p(\mu_n,\mu),$$

которое влечет слабую сходимость μ_n к μ.

Предположим теперь, что последовательность μ_n слабо сходится к μ и сходится последовательность моментов порядка p. Тогда можно считать, что оптимальные планы π_n слабо сходятся к оптимальному плану π для мер μ и μ (утверждение, что π — оптимальный план, мы оставляем без доказательства). Положим

$$c_n = 1 + \int |x|^p\,d\mu_n + \int |x|^p\,d\mu, \quad c = 1 + 2\int |x|^p\,d\mu,$$

$$\widetilde{\pi_n} = c_n^{-1}(1+|x|^p+|y|^p)\pi_n, \quad \widetilde{\pi} = c^{-1}(1+|x|^p+|y|^p)\pi.$$

Так как $c_n \to c$ и последовательность π_n сходится слабо к π, то для всякой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_y)$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \iint \psi\,d\widetilde{\pi_n} = \iint \psi\,d\widetilde{\pi}.$$

Следовательно, последовательность вероятностных мер $\widetilde{\pi_n}$ сходится слабо к вероятностной мере $\widetilde{\pi}$, в частности, имеем

$$\iint |x-y|^p\,d\pi_n = c_n \iint \frac{|x-y|^p}{1+|x|^p+|y|^p} d\widetilde{\pi_n} \to c \iint \frac{|x-y|^p}{1+|x|^p+|y|^p} d\widetilde{\pi} = \iint |x-y|^p\,d\pi.$$

□

Можно показать, что пространство $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ с метрикой W_p является полным сепарабельным метрическим пространством.

При работе с метрикой W_p очень часто используется следующая оценка.

Предложение 1. *Пусть $(Z,\mathcal{A})$ — измеримое пространство, на котором определена вероятностная мера ν. Предположим, что отображения $f\colon Z \to \mathbb{R}^d$ и $g\colon Z \to \mathbb{R}^d$ измеримы и $f, g \in L^p(\nu)$. Тогда*

$$W_p(\nu\circ f^{-1}, \nu\circ g^{-1}) \leq \|f-g\|_{L^p(\nu)}.$$

Доказательство. Заметим, что мера $\pi = \nu\circ(f,g)^{-1}$ имеет проекции $\nu\circ f^{-1}$ и $\nu\circ g^{-1}$. По формуле замены переменной

$$\iint |x-y|^p\,d\pi = \int_Z |f(z)-g(z)|^p\,dz.$$

□

Уравнение непрерывности

Пусть $b(x,t) = (b^1(x,t),\dots,b^d(x,t))$ — непрерывное векторное поле на $\mathbb{R}^d\times[0,T]$ и для некоторой константы L_b верно неравенство

$$|b(x,t)-b(z,t)| \leq L_b|x-z|.$$

Известно, что для всякого $y\in\mathbb{R}^d$ на $[0,T]$ существует единственное решение $x_t(y)$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x,t), \\ x(0) = y. \end{cases}$$

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим семейство вероятностных мер

$$\mu_t = \nu\circ x_t^{-1}.$$

Предложение 2. *Отображение $t \to \mu_t$ непрерывно относительно слабой сходимости (например относительно метрики Канторовича–Рубинштейна). Более того, для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение*

$$t \to \int \varphi(x)\,\mu_t(dx)$$

является непрерывно дифференцируемой и верно равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle\,\mu_t(dx).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Заметим, что

$$\int \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int \varphi(x_t(y))\,\nu(dy).$$

Функция $t \to \varphi(x_t(y))$ непрерывно дифференцируема и ограничена. Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\varphi(x_t(y)) = \nabla b(x_t(y),t), \nabla\varphi(x_t(y))\rangle.$$

Так как функция $\langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle$ непрерывна и ограничена, то производная функции $t \to \varphi(x_t(y))$ непрерывна и ограничена. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует непрерывная дифференцируемость интеграла от $\varphi(x_t(y))$ по мере ν и равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x_t(y))\,\nu(dy) = \int \frac{d}{dt}\varphi(x_t(y))\,\nu(dy)$$

из которого немедленно выводится равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)\,\mu_t(dx) = \int \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle\,\mu_t(dx).$$

$\square$

Предположим, что функции b^i непрерывно дифференцируемы и меры μ_t задаются непрерывно дифференцируемыми плотностями ϱ относительно меры Лебега. Интегрируя по частям приходим к равенству

$$\int \bigl[\partial_t\varrho(x,t) + \operatorname{div}(b(x,t)\varrho(x,t))\bigr]\varphi(x)\,dx = 0,$$

которое выполняется для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, функция ϱ является решением уравнения

$$\partial_t\varrho(x,t) + \operatorname{div}(b(x,t)\varrho(x,t)) = 0.$$

Уравнение такого вида называют *уравнением непрерывности*. Даже в ситуации гладкого коэффициента b решение может не иметь плотности, например так будет, если $\nu = \delta_a$ и $\mu_t = \delta_{x_t(a)}$. Поэтому определение решения должно допускать в качестве решений меры.

Сформулируем определение в общей ситуации, когда b — борелевское векторное поле.

Непрерывное отображение $t \to \mu_t$ отрезка $[0,T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ называется решением уравнения непрерывности

$$\partial_t\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0,$$

если для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция

$$t \to \int \varphi\,d\mu_t$$

абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и верно равенство

$$\frac{d}{dt}\int \varphi\,d\mu_t = \int \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle\,d\mu_t.$$

Если для данной вероятностной меры ν мы рассматриваем решение μ_t, для которого $\mu_0 = \nu$, то μ_t называется решением задачи Коши

$$\partial_t\mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Принцип суперпозиции

Пусть (как и ранее) векторное поле b непрерывно и липшицево по x. Рассмотрим отображение $\Psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$, заданное равенством

$$\Psi(y) = (y, x.), \quad x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\, ds.$$

Заметим, что Ψ — непрерывное отображение, в силу оценки

$$\max_{[0,T]} |x_t(y) - x_t(z)| \le e^{L_b T}|y - z|,$$

которая выводится из неравенства

$$\tfrac{d}{dt}|x_t(y) - x_t(z)|^2 \le 2L_b|x_t(y) - x_t(z)|^2.$$

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Положим $P = \nu \circ \Psi^{-1}$.

Предложение 3. *Носитель меры P является подмножеством множества*

$$X = \Big\{(y, x.)\colon x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\, ds\Big\}$$

и $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$, где $e_t((y, x.)) = x_t$.

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из того, что X — замкнутое множество и для всякой точки $z \notin X$ найдется шар $B(z)$, который не пересекается с X, в частности $\Psi^{-1}(B(z)) = \emptyset$ и $P(B(z)) = 0$.

Второе утверждение проверяется следующей цепочкой равенств

$$P \circ e_t^{-1}(E) = P\Big(\{(y, x.)\colon x_t \in E\}\Big) = P\Big(\{(y, x.)\colon x_t \in E,\, x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\, ds\}\Big) =$$

$$= \nu\Big(\{y\colon x_t(y) \in E\}\Big) = \mu_t(E).$$

□

Замечательным образом такая мера P существует в очень общей ситуации для каждого вероятностного (и даже неотрицательного) решения уравнения непрерывности. Имеет место следующий *принцип суперпозиции*, доказанный Л.Амброзио.

Теорема 2. *Предположим, что b — борелевское векторное поле и $t \to \mu_t$ — непрерывное отображение из $[0,T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, причем*

$$\int_0^T \int \frac{|b(x,t)|}{1 + |x|}\, mu_t(dx)\, dt < \infty.$$

Предположим также, что μ_t является решением уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0.$$

Тогда существует такая вероятностная мера P на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$, что носитель меры P является подмножеством множества

$$X = \Big\{(y, x.)\colon x_t - \text{абсолютно непрерывное отображение},\ x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\, ds\Big\}$$

и $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$, где $e_t((y, x.)) = x_t$.

Следствие 1. *Если b — непрерывное векторное поле и $|b(x,t) - b(z,t)| \le L_b|x - z|$, то существует не более одного (в пространстве вероятностных мер) решения μ_t задачи Коши*

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Пусть μ_t — решение задачи Коши для уравнения непрерывности и P — соответствующая мера на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$ из принципа суперпозиции. Проверим, что проекция P на $\mathbb{R}^d$ равна ν. Действительно, верны равенства

$$P\Big(\{(y,x.)\colon y\in B\}\Big) = P\Big(\{(y,x.)\colon y\in B,\, x_t = y+\int_0^t b(x_s,s)\,ds\}\Big) =$$
$$= P\Big(\{(y,x.)\colon x_0\in B\}\Big) = P\circ e_0^{-1}(B) = \mu_0(B) = \nu(B).$$

Пусть $P^y(dx.)$ — условные меры, т.е. $P(dydx.) = P^y(dx.)\nu(dy)$ Найдем эти условные меры. Через $x_t(y)$ обозначаем единственное решение задачи Коши $\dot{x} = b(x,t)$, $x(0)=y$. Напомним, что отображение $y\to x.(y)$ непрерывно. Для всякой измеримой ограниченной функции f на $\mathbb{R}^d\times C([0,T],\mathbb{R}^d)$ верны равенства

$$\iint f(y,x.)P(dydx.) = \iint_{(y,x.)\colon\ x.=x.(y)} f(y,x.)P(dydx.) =$$
$$\iint f(y,x.(y))P(dydx.) = \iint f(y,x.(y))\,\nu(dy) = \int\Big(\int f(y,x.)\,\delta_{x.(y)}(dx.)\Big)\,\nu(dy).$$

Таким образом, $P^y(dx.) = \delta_{x.(y)}$ для ν — почти всех y.

Предположим, что есть два решения μ_t^1 и μ_t^2 задачи Коши для уравнения непрерывности с начальным условием ν. Пусть P_1 и P_2 — соответствующие этим решениям меры на $\mathbb{R}^d\times C([0,T],\mathbb{R}^d)$. По доказанному выше верны равенства

$$P_1(dydx.) = \delta_{x.(y)}(dx.)\nu(dy) = P_2(dydx.).$$

Следовательно, $\mu_t^1 = P_1\circ e_t^{-1} = P_2\circ e_t^{-1} = \mu_t^2$. $\square$