Спецкурс “Теория риска” (для 409 гр.)

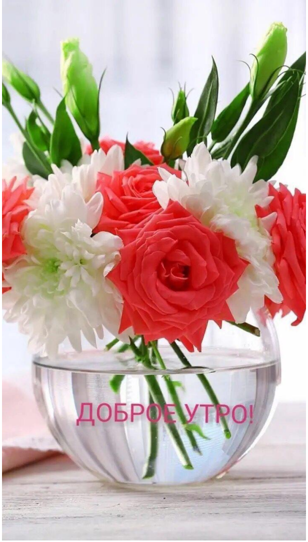
Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 7

Москва, 21 октября 2020 г.

С ДОБРЫМ УТРОМ!



План лекции

- Порядок Лоренца
- k-порядок и его связь с порядком Лоренца
- Операции, сохраняющие и ослабляющие порядок
- Взвешивание и смеси
- Порядки, связанные со смертностью

Порядок Лоренца

Этот порядок задается путем поточечного сравнения так называемых кривых Лоренца, используемых в экономике для сравнения доходов.

Пусть $\mathcal{L}$ - это множество неотрицательных случайных величин, у которых математические ожидания существуют и положительны.

Обозначим через F_X функцию распределения случайной величины X, а через F_X^{-1} обратную функцию, определяемую соотношением

$$F_X^{-1}(t) = \sup\{x : F_X(x) \leq t\}.$$

Кривая Лоренца L_X, связанная со случайной величиной X, имеет вид

$$L_X(u) = \int_0^u F_X^{-1}(t)dt \left(\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt\right)^{-1}, \; u \in [0,1].$$

Нетрудно проверить, что $\int_0^1 F_X^{-1}(t)dt = \mathsf{E}X$. Кривая Лоренца - это непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, она не убывает, $L_X(0) = 0$, $L_X(1) = 1$. Более того, она почти всюду дифференцируема и выпукла, так как функция F_X^{-1} неубывающая.

Таким образом, любая кривая Лоренца имеет форму лука, тетива которого - это диагональ единичного квадрата, а сам лук лежит под ней.

Задача. Нарисовать кривую Лоренца для распределения Парето с $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Если X моделирует размер дохода лиц из некоторой группы, $L_X(u)$, $u \in [0,1]$, представляет собой долю совокупного дохода, приходящегося на $100u\%$ наиболее бедных членов этой группы.

Случаю полного равенства (X имеет вырожденное распределение) соответствует $L_X(u) \equiv u$, а чем больше "выгнут лук", тем больше неравенство в группе.

Определение

Пусть X и Y - два риска ($X, Y \in \mathcal{L}$). Говорят, что X меньше Y в смысле Лоренца ($X \prec_{Lor} Y$), если

$$L_X(u) \geq L_Y(u) \quad \text{для всех} \quad u \in [0, 1].$$

Следующий важный результат принадлежит Харди, Литтлвуду, Пойа (1929) и Карамата (1932).

Теорема

Для двух рисков X и Y

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow (X/EX) <_{cx} (Y/EY). \tag{1}$$

Иначе утверждение (1) можно сформулировать следующим образом: $X \prec_{Lor} Y$ тогда и только тогда, когда для любой выпуклой (непрерывной) функции h имеет место неравенство

$$\mathrm{E}h(X/\mathrm{E}X) \leq \mathrm{E}h(Y/\mathrm{E}Y).$$

Подчеркнем, что с помощью выпуклого порядка $<_{cx}$ можно сравнивать лишь риски с одинаковыми средними. В то же время порядок Лоренца не требует равенства средних.

Следствие

Если $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$, *то из* (1) *вытекает*

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow X <_{cx} Y. \tag{2}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, поскольку выпуклый порядок масштабно инвариантен. □

Следствие

Пусть $X, Y \in \mathcal{L}$ *обладают плотностями соответственно* f_X, f_Y *и* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$. *Для выполнения* $X \prec_{Lor} Y$ *достаточно, чтобы разность* $f_X(x) - f_Y(x)$ *дважды меняла знак на* $(0,1)$ *в следующем порядке:* $-, +, -$.

Доказательство очевидным образом вытекает из (2) и теоремы о достаточных условиях порядка стоп-лосс. □

Задача. Проверить, что если $X \prec_{Lor} Y$, то $CV(X) \le CV(Y)$. Верно ли обратное утверждение?

Замечание

Очевидно, что утверждение $X \prec_{Lor} Y$ влечет за собой (и вытекает из того, что) $aX \prec_{Lor} bY$ для любых $a, b \in (0, 1)$. Иногда бывает удобнее вместо исходных случайных величин X и Y, возможно с разными математическими ожиданиями, сравнивать $X\mathsf{E}Y$ и $Y\mathsf{E}X$, обладающие одинаковыми средними.

Альтернативная характеризация порядка Лоренца, полученная Штрассеном в 1965г., подчеркивает роль усреднения.

Теорема

$X \prec_{Lor} Y$ тогда и только тогда, когда существуют такие случайные величины Y' и Z', что $Y \overset{d}{=} Y'$, а $X \overset{d}{=} c\mathsf{E}(Y'|Z')$ для некоторого $c > 0$.

Доказательство в одну сторону (тогда) вытекает из леммы о том, что у.м.о. предпочтительнее самой с.в. в смысле $<_{cx}$ и теоремы Карамата в силу масштабной инвариантности порядка Лоренца. Более сложное обратное утверждение опущено.

В качестве следствия получим, что показательное распределение доминируется в смысле Лоренца распределением Парето.

Следствие

Пусть X *распределена показательно со средним* λ, *а* Y *- сдвинутое распределение Парето с* $F_Y(x) = 1 - (1 + (x/\lambda))^{-\alpha}$, $x > 0$, *и* $\alpha > 1$, $\lambda > 0$, *тогда* $X \prec_{Lor} Y$.

Доказательство. Пусть X и Z - независимые случайные величины, $X \sim \Gamma(1, \lambda^{-1})$, $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$. Нетрудно проверить, что $Y = X/Z$ имеет требуемое распределение Парето. По построению $\mathsf{E}(Y|X) = X\mathsf{E}(Z^{-1})$, поэтому $X = \mathsf{E}(Y|X)/\mathsf{E}(Z^{-1})$, а по только что доказанной теореме это означает, что $X \prec_{Lor} Y$. $\square$

Чаще всего риски сравниваются с помощью порядков для случайных величин (например, $<_{sl}$ или $<_{cx}$) в предположении, что страховщик получает за них одну и ту же премию. Эта гипотеза иногда может оказаться ограничительной, так как за счет выплаты более высокой премии менее благоприятный риск может быть сделан привлекательным.

Более реалистический подход - описывать страховой контракт с помощью пары (X, P), включающей как риск X, так и выплачиваемую за него премию P.

Размер премии определяется с помощью некоторого тарифного принципа H, т.е. некоторого функционала, который ставит в соответствие риску X действительное число $P = H(X)$, равное размеру требуемой премии. Если используется принцип среднего (со страховой нагрузкой α), то $H(X) = (1 + \alpha)\mathsf{E}X$.

На практике деятельность страховой компании часто оценивается с помощью случайной величины $X/H(X)$, т.е. размера риска на единицу премии (убыточности или удельного ущерба).

Лемма

Порядок Лоренца рисков X и Y - это, по сути дела, выпуклый порядок удельных ущербов, связанных с контрактами $(X, (1+\alpha)\mathrm{E}X)$ и $(Y, (1+\alpha)\mathrm{E}Y)$.

Доказательство. В самом деле, в силу (1) (т. Карамата)

$$X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow \frac{X}{(1+\alpha)\mathrm{E}X} <_{cx} \frac{Y}{(1+\alpha)\mathrm{E}Y},$$

т.е. все не склонные к риску лица предпочтут удельные потери, связанные с контрактом по риску X, если тарификация ведется по принципу среднего с нагрузкой α.
$\square$

Таким образом, порядок Лоренца позволяет актуариям сравнивать риски X и Y, принимая во внимание соответствующие им премии.

k-порядок

Напомним, что стоп-лосс преобразование $m_X(x)$ случайной величины X определяется как $m_X(x) = \int_x^\infty (1 - F_X(t))dt$ (иначе говоря, это стоп-лосс премия с приоритетом x).

Функция $k_X(x)$ определяется следующим образом

$$k_X(x) = \frac{1}{\mathrm{E}X} m_X(x\mathrm{E}X).$$

Определение

Говорят, что $X <_k Y$, если $k_X(x) \leq k_Y(x)$ для всех $x \geq 0$.

Иначе тот же самый порядок можно ввести как стохастический порядок некоторых других случайных величин, связанных с исходными. А именно, пусть F_{X^*} - это функция распределения $X^* = X/\mathrm{E}X$, т.е. $F_{X^*}(x) = F_X(x\mathrm{E}X)$. Рассмотрим новую случайную величину $\hat{X}$ с плотностью распределения, равной $1 - F_{X^*}(x)$, $x > 0$, ее функцию распределения обозначим $\hat{F}_X$.

Лемма

Пусть X и Y - два риска, тогда

$$X <_k Y \Leftrightarrow \hat{X} <_{st} \hat{Y}. \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, $\hat{X} <_{st} \hat{Y} \Leftrightarrow 1 - \hat{F}_X(x) \leq 1 - \hat{F}_Y(x)$ для всех $x \geq 0$. Поэтому достаточно записать цепочку преобразований

$$1 - \hat{F}_X(x) = 1 - \int_0^x (1 - F_X(t\mathrm{E}X))dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{E}X} \int_{x\mathrm{E}X}^{\infty} (1 - F_X(t))dt = \frac{m_X(x\mathrm{E}X)}{\mathrm{E}X} = k_X(x),$$

чтобы установить справедливость (3). □

Следствие

Если $X <_k Y$, то $CV(X) \le CV(Y)$.

Доказательство можно получить, подсчитав

$$\mathsf{E}\hat{X} = \int_0^\infty k_X(t)dt = \frac{1}{\mathsf{E}X}\int_0^\infty m(t\mathsf{E}X)dt = \frac{\mathsf{E}X^2}{2(EX)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathsf{D}X + (EX)^2}{(EX)^2} = \frac{1}{2}((CV(X))^2 + 1)$$

и вспомнив, что

$$\hat{X} <_{st} \hat{Y} \Rightarrow \mathsf{E}\hat{X} \le \mathsf{E}\hat{Y}.\square$$

Теорема

Справедливо утверждение

$$X <_k Y \Leftrightarrow X^* <_{sl} Y^*.$$

Доказательство очевидно, так как $m_{X^*}(x) = k_X(x)$. $\square$

Следствие

Для $X, Y \in \mathcal{L}$ *выполнено* $X \prec_{Lor} Y \Leftrightarrow X <_k Y$.

Доказательство получается комбинацией теоремы Карамата и только что доказанной. □

Задача. Показать, что $X <_{st} Y \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim U(0,2)$, $Y \sim U(1,2)$, где $U(a,b)$ - равномерное распределение на (a,b).)

Задача. Показать, что $X <_{sl} Y \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim (1,3;1/2)$, $Y \sim (1,3;1/3)$, где $X \sim (a,b;p)$ означает, что $\mathrm{P}(X=a) = 1 - \mathrm{P}(X=b) = p$, $0 \le a < b$, $0 < p < 1$.)

Задача. Показать, что $X <_k Y \not\Rightarrow X <_{st} Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$, где $Exp(a)$ - показательное распределение с параметром a.)

В страховом деле возможна следующая интерпретация кривой Лоренца: $L_X(u)$ представляет собой долю общего ущерба, обусловленного $100u\%$ контрактов с наименьшими размерами требований.

Для актуариев интересна "дуальная" кривая Лоренца

$$L_X^{dual}(u) = 1 - L_X(1-u),\ u \in [0,1].$$

Очевидно, что для заданного $u \in [0,1]$ величина $L_X^{dual}(u)$ - это доля совокупного ущерба, причиненного $100u\%$ контрактов с наибольшим размером требований. Из определения порядка Лоренца и вида L_X^{dual} легко вывести, что

$$X \prec_{Lor} Y \ \Leftrightarrow\ L_X^{dual}(u) \leq L_Y^{dual}(u)\,\text{для всех}\ \ u \in [0,1].$$

Таким образом, получена альтернативная интерпретация порядка Лоренца, полезная в актуарном контексте: если $X \prec_{Lor} Y$, то доля совокупного ущерба, причиненная $100u\%$ полисов с наивысшим размером требований, при всех $u \in [0,1]$ для Y будет больше, чем для X.

Операции, сохраняющие и ослабляющие порядок

Практический интерес представляют преобразования множества $\mathcal{L}$, сохраняющие или ослабляющие порядок Лоренца. Иначе говоря, необходимо охарактеризовать классы функций g, для которых из $X \prec_{Lor} Y$ вытекает $g(X) \prec_{Lor} g(Y)$ или $g(X) \prec_{Lor} X$.

При этом будут полезны следующие две леммы, касающиеся порядка $\prec_{Lor}$ для случайных величин, принимающих два значения.

Лемма (а)

Пусть $0 < x_1 < x_2$ и случайные величины X и Y определены следующим образом

$$\mathrm{P}(X = x_1) = p, \, \mathrm{P}(X = x_2) = 1 - p,$$

$$\mathrm{P}(Y = x_1) = p', \, \mathrm{P}(Y = x_2) = 1 - p'.$$

Тогда X и Y сравнимы в смысле Лоренца лишь в тривиальных случаях $p = p'$, $pp' = 0$ или $(1 - p)(1 - p') = 0$.

Лемма (b)

Пусть $x > 0$ и случайные величины X и Y заданы следующим образом

$$\mathrm{P}(X = 0) = p, \mathrm{P}(X = x) = 1 - p,$$

$$\mathrm{P}(Y = 0) = p', \mathrm{P}(Y = x) = 1 - p',$$

тогда $p \leq p' \Rightarrow X \prec_{Lor} Y$.

Оба утверждения легко проверить, нарисовав соответствующие кривые Лоренца.

Обозначим $\mathcal{G}$ класс всех преобразований, сохраняющих неравенство, т.е.

$$\mathcal{G} = \{g : X \prec_{Lor} Y \Rightarrow g(X) \prec_{Lor} g(Y)\}.$$

Для того, чтобы порядок $\prec_{Lor}$ был определен, надо потребовать $g : R^+ \to R^+$ и $X \in \mathcal{L} \Rightarrow g(X) \in \mathcal{L}$.

Теорема

Любая функция из $\mathcal{G}$ принадлежит к одному из трех следующих видов:

$$g_{1,a}(x) = ax,\ x \geq 0,\ a \in (0,\infty),$$

$$g_{2,b}(x) = b,\ x \geq 0,\ b \in (0,\infty),$$

$$g_{3,c}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ c, & x > 0,\ c \in (0,\infty). \end{cases}$$

Относительно преобразований, ослабляющих неравенство, справедливо следующее утверждение

Теорема

Пусть $g : R^+ \to R^+$ - измеримое отображение, а $X \in \mathcal{L}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(i) $g(X) \prec_{Lor} X$,
(ii) $g(x) > 0$ при $x > 0$, $g(x)$ не убывает на R^+, а функция $g(x)/x$ не возрастает при $x > 0$.

Доказательство. Предположим, что g удовлетворяет условиям (ii), $X \in \mathcal{L}$ и $Y = g(X)$. Так как $g(x) > 0$ при $x > 0$, $\mathsf{E}X > 0$, то $\mathsf{E}g(X) > 0$. Далее, $g(X) \le g(1)$, когда $X \le 1$, поскольку $g(x)$ не убывает на $[0, \infty)$. Кроме того, $g(X)/X \le g(1)/1$ или, что тоже самое, $g(X) \le Xg(1)$, когда $X \ge 1$, в силу условия $g(x)/x$ не возрастает на $[0, \infty)$. Таким образом, $g(X) \le (X+1)g(1)$, следовательно, $\mathsf{E}g(X) < \infty$, т.е. $Y = g(X) \in \mathcal{L}$.

Хорошо известно, что $X \stackrel{d}{=} X' = F_X^{-1}(U)$, где U - это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$. Значит, выражение кривой Лоренца можно представить в виде

$$L_X(u) = \mathsf{E}\left[X' I_{[0,u]}(U)\right]/\mathsf{E}X',$$

(как обычно, $I_{[0,u]}$ - индикатор множества $[0,u]$).

Воспользовавшись тем, что $Y \stackrel{d}{=} g(F_X^{-1}(U))$, запишем для $u \in [0,1]$

$$L_Y(u) - L_X(u) = \int_0^u \left\{ g(F_X^{-1}(v)) - F_X^{-1}(v)\frac{\mathsf{E}Y}{\mathsf{E}X} \right\} \frac{dv}{\mathsf{E}Y}.$$

Раз $g(x)/x$ не возрастает на $(0, \infty)$, то подинтегральная функция сначала положительна, затем отрицательна, когда v меняется от 0 до 1. Значит, интеграл принимает минимальное значение при $u = 1$. Однако $L_X(1) = L_Y(1) = 1$, поэтому $L_Y(u) \geq L_X(u)$ при любом $u \in [0, 1]$, т.е. $Y \prec_{Lor} X$.

Утверждение (i) $\Rightarrow$ (ii) доказывается от противного с использованием лемм a и b. В самом деле, предположим, что g такова, что $g(x^*) = 0$ для некоторого $x^* > 0$. Рассмотрим случайную величину X такую, что $\mathrm{P}(X = x^*) = 1$. Тогда $X \in \mathcal{L}$, но $\mathrm{P}(g(X) = 0) = 1$, поэтому $g(X) \notin \mathcal{L}$ и нельзя сравнить X и $g(X)$ в смысле Лоренца.

Пусть теперь $g(x) > 0$ при всех $x > 0$, но не является неубывающей функцией на $[0, 1)$. Следовательно, существуют такие x и y, $0 \leq x < y$, что $g(y) < g(x)$. Рассмотрим случайную величину X такую, что $\mathrm{P}(X = x) = p$, $\mathrm{P}(X = y) = 1 - p$.

Возможны два случая:
1. $x = 0$, $g(y) > 0$, тогда $g(X) \not\prec_{Lor} X$, если $p < (g(0) - g(y))/(2g(0) - g(y))$.
2. $x > 0$, $g(y) > 0$, тогда $g(X) \not\prec_{Lor} X$, если $p > ((y/x) - 1)((g(x)/g(y)) + (x/y) - 2)$.

Наконец, предположим, что g не убывает и $g(x) > 0$ при $x > 0$, но $g(x)/x$ не является невозрастающей функцией на $(0, \infty)$, значит, существуют такие x и y, что $0 < x < y$ и $0 < (g(x)/x) < (g(y)/y)$. Введем случайную величину X такую, что $\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X = y) = 1/2$. Для нее $L_{g(X)}(1/2) < L_X(1/2)$, поэтому снова приходим к противоречию. $\square$

Задача. Какие условия надо наложить на функцию g, чтобы соответствующее преобразование увеличивало неравенство?

Доказанная теорема допускает интересную интерпретацию в терминах налоговой политики. Пусть X - доход до уплаты налогов, а $g(X)$ - после. Для того, чтобы налоговая политика уменьшала неравенство в доходах для любого распределения X, необходимо выполнение требований пункта (ii) теоремы. Действительно, условие $g(x) > 0$ для всех $x > 0$ означает, что у любого лица, имевшего доход до уплаты налогов, что-то останется и после этого. Монотонность $g(x)$ показывает, что если один заработал больше другого, то он не будет иметь меньше после уплаты налогов. Наконец, последнее условие убывания $g(x)/x$ говорит о том, что используется прогрессивная система налогообложения, при которой богатые платят бо́льшую часть дохода, чем бедные.

Следствие

Пусть g_1 и g_2 - две неубывающие непрерывные функции, отображающие R^+ в R^+, и пусть $X \in \mathcal{L}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(i) $g_1(X) \prec_{Lor} g_2(X)$,
(ii) функция $g(x) = g_1 \circ g_2^{-1}(x)$ *удовлетворяет условию (ii) предыдущей теоремы.*

Взвешивание

Еще одна операция над распределениями - взвешивание, т.е. рассмотрение вместо исходной случайной величины X новой случайной величины X_g, для которой

$$\mathsf{P}(X_g \le x) = \int_0^x g(y)dF_X(y)/\mathsf{E}g(X).$$

Предполагается, что весовая функция $g(x)$ неотрицательна, измерима и $\mathsf{E}g(X) < \infty$. Заметим, что если $X \in \mathcal{L}$, то для того, чтобы $X_g \in \mathcal{L}$, надо также предположить, что $0 < \mathsf{E}(Xg(X)) < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{G}_1$ класс взвешиваний, сохраняющих неравенство, т.е.

$$\mathcal{G}_1 = \{g : X \prec_{Lor} Y \Rightarrow X_g \prec_{Lor} Y_g\}.$$

Заметим, что этот класс не пуст, так как ему принадлежат функции $g(x) \equiv x$. Оказывается, что все $g \in \mathcal{G}_1$ мало отличаются от константы, как показывает следующая

Теорема

Функция $g \in \mathcal{G}_1$ тогда и только тогда, когда она имеет вид: $g(0) = a$, $g(x) = b$, $x > 0$, где $a \ge b > 0$.

Доказательство, проводимое с помощью лемм a и b, опускается.

Взвешивание

Похожий вид имеют взвешивания, ослабляющие неравенство. Пусть

$$\mathcal{G}_2 = \{g : X \in \mathcal{L} \Rightarrow X_g \prec_{Lor} X_g\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема

Функция $g \in \mathcal{G}_2$ тогда и только тогда, когда $g(0) = a$, $g(x) = b$, $x > 0$, где $b > 0$ и $0 \leq a \leq b$.

Смеси случайных величин из класса $\mathcal{L}$

Пусть $X, Y \in \mathcal{L}$ и независимы, $\alpha \in (0,1)$, а I_α - бернуллиевская случайная величина $\mathsf{P}(I_\alpha = 1) = \alpha = 1 - \mathsf{P}(I_\alpha = 0)$, не зависящая от X и Y. Случайная величина

$$X_\alpha = I_\alpha X + (1 - I_\alpha) Y \tag{4}$$

называется смесью X и Y. Возникает вопрос: при каких предположениях $X_\alpha \prec_{Lor} X$? Один из первых результатов получен Лэмом в 1986г.

Теорема (Lam)

Пусть $X, Y \in \mathcal{L}$ и X_α задается формулой (4). Если $\mathsf{E}X = \mathsf{E}Y$ и $Y \prec_{Lor} X$, тогда $X_\alpha \prec_{Lor} X$.

Доказательство. Без ограничения общности положим $\mathsf{E}X = \mathsf{E}Y = 1$, тогда и $\mathsf{E}X_\alpha = 1$. Воспользуемся теоремой Карамата. Рассмотрим произвольную непрерывную выпуклую функцию h, тогда

$$\mathsf{E}h(X_\alpha) = \alpha \mathsf{E}h(X) + (1 - \alpha)\mathsf{E}h(Y).$$

Поскольку $Y \prec_{Lor} X$, имеем $\mathsf{E}h(Y) \le \mathsf{E}h(X)$, т.е. правая часть не превосходит $\alpha \mathsf{E}h(X) + (1 - \alpha)\mathsf{E}h(X) = \mathsf{E}h(X)$, что показывает $X_\alpha \prec_{Lor} X$. $\square$

Условия теоремы Лэма не являются необходимыми, хотя близки к ним.

В самом деле, рассмотрим две случайных величины X и Y с функциями распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & x > 1/2, \end{cases} \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2, \\ x, & 1/2 \le x < 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

и введем $X_{1/3}$ в соответствии с (4). Тогда нетрудно проверить, рассмотрев соответствующие кривые Лоренца, что $X_{1/3} \prec_{Lor} X$, хотя $\mathsf{E}X \neq \mathsf{E}Y$.

Тем не менее, верно следующее утверждение.

Теорема

Пусть $X, Y \in \mathcal{L}$ и случайная величина X_α является их смесью в соответствии с (4). Предположим также, что $F_X^{-1}(0) > 0$. Если $X_\alpha \prec_{Lor} X$, то $EX = EY$ и $Y \prec_{Lor} X$.

Доказательство. Условие $F_X^{-1}(0) > 0$ означает, что с вероятностью 1 X отделено от нуля. В таком случае $EX \neq EY$ гарантирует, что $X_\alpha \not\prec LorX$.

Чтобы это установить, заметим прежде всего, что $F_{X_\alpha}^{-1}(0) \leq F_X^{-1}(0)$ и $F_{X_\alpha}^{-1}(1) \geq F_X^{-1}(1)$. Следовательно, если $EX > EY$, то $EX > EX_\alpha$ и $L'_X(0) < L'_{X_\alpha}(0)$, откуда вытекает $X_\alpha \not\prec_{Lor} X$. Если же $EX < EY$, то $L'_X(1) > L'_{X_\alpha}(1)$, и снова $X_\alpha \not\prec_{Lor} X$.

Далее, предположим, что $EX = EY = 1$ (без ограничения общности), но $Y \not\prec_{Lor} X$. Согласно теореме Карамата существует выпуклая непрерывная функция h такая, что $Eh(Y) > Eh(X)$. Но тогда для этой функции $Eh(X_\alpha) > Eh(X)$, а значит, $X_\alpha \not\prec_{Lor} X$. $\square$

Порядки, связанные со смертностью.

Теперь будет сформулирован ряд результатов, интересных также и для страхования жизни. Потом будет дана интерпретация, относящаяся к страхованию не жизни.

Пусть положительная случайная величина X - это продолжительность жизни человека (с момента его рождения) и $F(t) = \mathsf{P}(X \le t)$ - соответствующая функция распределения. Если человек страхует свою жизнь в возрасте x лет, то страховую компанию интересует "остаточное время жизни", т.е. распределение случайной величины T_x, задаваемое следующим образом:

$$F_x(t) = [F(t+x) - F(x)]/\bar{F}(x), \quad 0 \le t < 1.$$

Если знаменатель равен нулю, то полагаем $F_x(t) = \Theta_0(t)$.

Иначе можно записать

$$\bar{F}_x(t) = \mathsf{P}(T_x > t) = \mathsf{P}(X > t + x | X > x), \; 0 \le t < \infty, \; x > 0. \quad (5)$$

Особый интерес представляют те распределения F, у которых F_x при различных x сравнимы друг с другом и с F.

Определение

Функция распределения F имеет возрастающую интенсивность смертности (или отказа), иначе говоря, относится к типу IFR (increasing failure rate), если при $0 \le x_1 \le x_2 < \infty$ имеет место соотношение

$$F_{x_2} <_{st} F_{x_1}.$$

Таким образом, с ростом x остаточные времена жизни стохастически убывают.

Если распределение F абсолютно непрерывно и f его плотность, можно ввести следующее определение.

Определение

Интенсивностью смертности $\lambda(t)$ называется отношение $\lambda(t) = f(t)/\bar{F}(t)$.

Теорема

Абсолютно непрерывное распределение F имеет тип IFR тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух условий:
1. $\ln \bar{F}(t)$ - вогнутая функция,
2. $\lambda(t)$ монотонно возрастает по t.

Доказательство. Поскольку

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \ln \bar{F}(t),$$

эквивалентность условий 1 и 2 очевидна.

Иначе это уравнение можно записать в виде

$$1 - F(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(y)dy\right\}.$$

Следовательно,

$$\bar{F}_x(t) = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \lambda(y)dy\right\}$$

и $\bar{F}_x(t)$ убывает по x (при любом t) тогда и только тогда, когда λ монотонно возрастает. □

Обозначим $r(x) = \mathrm{E}T_x$, очевидно, $r(x) = \mathrm{E}(X-x)^+/(1-F(x))$ для тех $x \geq 0$, для которых $F(x) < 1$, и $r(x) = 0$, если $F(x) = 1$. И пусть, как обычно, $m(x) = \int_x^\infty (1-F(t))dt$.

Лемма

Справедливо соотношение

$$m(x) = \mathrm{E}X \exp\left(-\int_0^x r^{-1}(t)dt\right).$$

Доказательство. По определению

$$r(x) = \int_0^\infty t dF_x(t) = \frac{\int_x^\infty (1-F(t))dt}{1-F(x)} = -\frac{m(x)}{m'(x)},$$

откуда следует, что

$$r^{-1}(x) = -\frac{d}{dx}\ln m(x).$$

Интегрируя это равенство, с учетом того, что $m(0) = \mathrm{E}X = r(0)$, получим утверждение леммы. □

Задача. Проверить, что следующие распределения имеют тип IFR:
a) Гамма распределение с $\alpha \geq 1$.
b) Распределение Вейбулла при $\alpha \geq 1$.
c) Равномерное распределение.

Задача. Подставим в (5) вместо числа x положительную случайную величину Z, не зависящую от X, и обозначим через $G(t)$ полученную таким образом функцию распределения. Показать, что если F имеет IFR-тип, то $G <_{st} F$.

Задача. Распределение F имеет тип IFRA (increasing failure rate average), если $-t^{-1} \ln \bar{F}(t)$ возрастающая функция t. Показать, что это эквивалентно условию $\bar{F}(at) \geq F^a(t)$ для всех $0 < a < 1$ и $t > 0$.

Определение

Функция распределения F имеет тип NBU (new better than used), если

$$F_x <_{st} F \quad \text{для любого} \, x \geq 0.$$

Иначе это определение "стареющего" распределения можно записать в виде

$$\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(x) \quad \text{для всех } \ t \geq 0, \, x \geq 0.$$

Определение

Функция распределения с конечным математическим ожиданием имеет тип NBUE (new better than used in expectation), если для любого x

$$\mathrm{E}T_x \le \mathrm{E}X. \tag{6}$$

Задача. Проверить, что введенные четыре класса функций связаны следующим образом:

$$IFR \subset IFRA \subset NBU \subset NBUE.$$

Введем функцию распределения $G(t) = (\mathrm{E}X)^{-1}\int_0^x \bar{F}(x)dx$. Она играет важную роль при изучении вероятности разорения страховой компании. В теории процессов восстановления это распределение величины перескока через любой фиксированный уровень в стационарном случае.

Лемма

Функция распределения F имеет тип NBUE тогда и только тогда, когда соответствующая ей функция распределения G стохастически меньше, чем F.

Доказательство. В самом деле, соотношение (6) эквивалентно

$$\mathsf{E}X \geq \int_0^\infty \bar{F}(t+x)dt/\bar{F}(x),$$

что можно переписать иначе

$$\bar{F}(x) \geq (\mathsf{E}X)^{-1} \int_x^\infty \bar{F}(t)dt. \quad (7)$$

А это и означает $F <_{st} G$. □

Как следует из только что доказанной леммы, (6) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \bar{F}(x+t)dt \leq \bar{F}(x) \int_0^\infty \bar{F}(t)dt.$$

Далее, рассматривая несколько случайных величин, будем помечать функции λ, r и др. соответствующим индексом снизу.

Замечание

Пусть случайные величины Y и Z независимы, а $X = \min(Y, Z)$. Тогда из определения интенсивности сразу вытекает, что

$$\lambda_X(t) = \lambda_Y(t) + \lambda_Z(t). \quad (8)$$

С помощью (8) можно получить следующую интересную интерпретацию закона Мейкхэма, часто используемого в страховании жизни для описания возраста, в котором наступит смерть:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{lnC}(C^x - 1)\right)$$

для должным образом выбранных параметров A, B, C. При $A = 0$ получается закон Гомпертца.

Очевидно, что

$$\lambda_X(x) = A + BC^x.$$

Как показывает замечание, смерть может наступить либо в возрасте Y от несчастного случая, либо (независимо) в возрасте Z от старости. Интенсивность смерти от старости ежегодно возрастает в C раз, а смерть от несчастного случая происходит с постоянной интенсивностью A.

Определение

Если неотрицательные случайные величины X и Y таковы, что $\lambda_X(t) \geq \lambda_Y(t)$ для всех $t \geq 0$, то говорят, что X предшествует Y в смысле смертности, что записывается $X <_{mor} Y$.

Отметим, что возраст X в момент смерти лица с большей интенсивностью меньше в смысле порядка $<_{mor}$ (mortality), поскольку, вообще говоря, его жизнь будет короче. То же самое будет верно для остаточных времен жизни в любом возрасте, как показывает следующая теорема.

Теорема

Пусть $T_{X,x}$ и $T_{Y,x}$ - это остаточные времена жизни (в возрасте x) для X и Y. Утверждение $X <_{mor} Y$ верно тогда и только тогда, когда $T_{X,x} <_{st} T_{Y,x}$ для любого $x \geq 0$.

Доказательство. Согласно определению порядка $<_{mor}$ и записи $\bar{F}_x$ через λ мы имеем

$$X <_{mor} Y \Leftrightarrow \mathsf{P}(T_{X,x} > t) \leq \mathsf{P}(T_{Y,x} > t) \quad \forall x, t,$$

что в свою очередь эквивалентно $T_{X,x} <_{st} T_{Y,x}$ для любых $x \geq 0$. $\square$
Значит, если распределение принадлежит классу IFR, то с возрастом лицо становится все более смертным (в смысле порядка $\leq_{mor}$).

Используя связь между F_X и λ_X, можно получить следующую характеризацию порядка в смысле смертности.

Теорема

Соотношение $X <_{mor} Y$ выполнено тогда и только тогда, когда отношение хвостов распределений $(1 - F_X(x))/(1 - F_Y(x))$ убывает по x.

Доказательство. Как мы видели, можно записать

$$\frac{1 - F_X(x)}{1 - F_Y(x)} = \exp\left(\int_0^x [\lambda_X(t) - \lambda_Y(t)]dt\right).$$

Следовательно, указанное отношение убывает по x тогда и только тогда, когда подинтегральная функция неотрицательна, что и означает $X <_{mor} Y$. $\square$

Еще один интересный результат, описывающий порядок в смысле смертности, содержит приведенная ниже теорема.

Теорема

Соотношение $X <_{mor} Y$ тогда и только тогда, когда существует независимая от Y случайная величина Z такая, что $X \stackrel{d}{=} \min(Y, Z)$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно в силу (8).

Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно построить случайную величину Z (независимую от Y) с функцией распределения F_Z, (которая задается формулой связи хвоста ф.р. и интенсивности) с $\lambda_Z(x) = \lambda_X(x) - \lambda_Y(x)$. $\square$

Из полученного представления меньшей в смысле порядка $<_{mor}$ случайной величины легко вывести следующее утверждение.

Следствие

Стохастический порядок слабее, чем порядок в смысле смертности, т.е. $X <_{mor} Y \Rightarrow X <_{st} Y$.

Интерес представляет также теорема, доказанная Маршаллом и Прошаном в 1972г., сравнивающая функцию распределения типа NBUE с показательной.

Теорема

Пусть F относится к типу NBUE и имеет математическое ожидание m, тогда F стоп-лосс меньше показательного распределения с тем же средним.

Доказательство. В силу (7) верно неравенство

$$\bar{G}(x) \leq m\frac{\bar{F}(x)}{m} = mG'(x),$$

откуда $\lambda_G(x) = G'(x)/\bar{G}(x) \geq m^{-1}$. Мы установили, что распределение G предшествует показательному в смысле $<_{mor}$. Отсюда (из-за того, что порядок $<_{mor}$ сильнее стохастического, а тот сильнее стоп-лосс) получим требуемый результат

$$m^{-1}\int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx \leq \exp(-t/m).\square$$

Однако существует порядок, который сильнее, чем $<_{mor}$, а именно порядок отношения правдоподобия $<_{LR}$.

Теорема

Если $X <_{LR} Y$, то $X <_{mor} Y$.

Доказательство. Как известно, определение порядка отношения правдоподобия можно переписать в виде $dF_X(y)/dF_X(x) \le dF_Y(y)/dF_Y(x)$ для $0 \le x < y$.

Проинтегрировав по $y \in (x, \infty)$, получим

$$\frac{\int_x^\infty dF_X(y)}{dF_X(x)} \le \frac{\int_x^\infty dF_Y(y)}{dF_Y(x)},$$

откуда следует, что $\lambda_X(x) \ge \lambda_Y(x)$ для любого x. $\square$

Задача. Показать, что если $X_i <_{mor} Y_i$, $i \geq 1$, то $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

Еще один порядок связан со средним остаточным временем жизни.

Определение

Говорят, что X предшествует Y в смысле среднего остаточного времени жизни ($X <_r Y$), если $r_X(x) \leq r_Y(x)$ для всех $x \geq 0$.

Отметим также еще одну актуарную интерпретацию функции r: это (условное) математическое ожидание размера ущерба, превосходящего франшизу (в страховании) или уровень собственного удержания (в перестраховании).

Замечание

В отличие от функций $m(x)$, $l(x)$ и $k(x)$, которые не возрастают, для $r(x)$ это не всегда так. Например, если $X \sim Par(a; b)$ с $b > 1$, то

$$r_X(x) = \frac{a+x}{b-1}, \quad x \geq 0.$$

Задача. Если $r(x)$ убывающая функция x, то F имеет тип DMRL (decreasing mean residual lifetime). Проверить, что DMRL $\Rightarrow$ NBUE.

Получим следующую характеризацию порядка $<_r$.

Теорема

Утверждение $X <_r Y$ выполнено тогда и только тогда, когда $m_X(x)/m_Y(x)$ убывает по x.

Доказательство. Вспомнив связь $m(x)$ и $r(x)$, установленную ранее, можно записать

$$\frac{m_X(x)}{m_Y(x)} = \frac{\mathsf{E}X}{\mathsf{E}Y} \exp\left(\int_0^x [r_X^{-1}(t) - r_Y^{-1}(t)]dt\right)$$

Таким образом, отношение убывает тогда и только тогда, когда подинтегральная функция неотрицательна для всех t, т.е. $r_X(t) \le r_Y(t)$. $\square$

Покажем теперь, что порядок в смысле смертности сильнее, чем порядок среднего остаточного времени жизни.

Теорема

Пусть $X <_{mor} Y$, тогда $X <_r Y$.

Доказательство. Как мы видели, для $X <_{mor} Y$ можно записать

$$\frac{1-F_X(y)}{1-F_X(x)} \le \frac{1-F_Y(y)}{1-F_Y(x)} \quad \text{для } 0 \le x < y.$$

Проинтегрировав обе части неравенства от x до ∞, получим, используя запись $r_X(x)$, что $r_X(x) \le r_Y(x)$. $\square$

Теперь посмотрим, как связан порядок $<_r$ с двумя основными порядками $<_{sl}$ и $<_{st}$.

Теорема

Если $X <_r Y$, то $X <_{sl} Y$.

Доказательство. Мы хотим установить, что $m_X(x)/m_Y(x) \le 1$ при всех x. Как известно, это отношение убывает с ростом x, поэтому достаточно проверить, что $m_X(0) \le m_Y(0)$. Для этого остается лишь вспомнить, что

$$m_X(0) = r_X(0) \le r_Y(0) = m_Y(0). \square$$

Обратное утверждение неверно, в чем можно убедиться, решив следующую задачу.
Задача. Пусть $X \sim (1,4;1/6)$, $Y \sim (2,4;1/6)$, тогда $X <_{sl} Y$, но $X \not<_r Y$.

Замечание

Если отказаться от предположения об абсолютной непрерывности распределений, то теорема о том, что из $X <_r Y$ следует $X <_{sl} Y$, может оказаться неверна, как показывает следующая задача.

Задача. Пусть $X \sim Exp(2)$, $Y \sim *Exp(1;1/3)$, где $*Exp(a;p)$ означает смесь $Exp(a)$ и распределения, сосредоточенного в нуле, соответственно с весами p и $1-p$. Тогда $X <_r Y$, но $X \not<_{sl} Y$.

Замечание

Стохастический порядок не влечет за собой порядок $<_r$, что видно из следующей задачи.

Задача. Пусть случайная величина U равномерно распределена на отрезке $(0,1)$, а I - бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$, и не зависит от U. Проверить, что для случайных величин $X = IU + 2(1-I)$ и $Y = I(U+1) + 2(1-I)$ верно $X <_{st} Y$, но $X \not<_r Y$. (Указание: проверить, что $1 = \mathrm{E}(X-1|X>1) > \mathrm{E}(Y-1|Y>1) = 3/4$.)