ЭКЗАМЕН 2021-2

Во всех задачах w — винеровский процесс, $\Lambda_t = t$, $||x||_t := \sup_{s\le t}|x_s|$, $||X||^2_B := \mathbb{E}||X||^2_T$.

1. Пусть $X = H \cdot w$, $H > 0$,
$\langle X\rangle_t = H^2 \cdot \Lambda_t < \infty$, $t < \infty$,
$H^2 \cdot \Lambda_\infty = \infty$.
Пусть $t \mapsto A_t(\omega)$ — функция, обратная к функции $t \mapsto H^2 \cdot \Lambda_t$. Покажите, что процесс $\tilde{w}_t = X_{A_t}$, $t \ge 0$, — винеровский.

Решение.

Пусть $X_t = \int_0^t H_s dW_s, H > 0$
и $\langle X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds < \infty$,
$H_s^2 \cdot \Lambda_\infty = \infty$.
$t \mapsto A_t(\omega)$ — это функция, обратная к $t \mapsto H^2 \cdot \Lambda_t$, то есть $A_t = \inf\{0 \le s : \langle X\rangle_s > t\}$ — по определению обобщенной обратной функции,
$B_t = A_t^{-1} = \int_0^t H_s^2 ds$.
Покажем, что $Y_t = X_{A_t}$ — винеровский процесс, где $A_t = \inf\{0 \le s : \langle X\rangle_s > t\}$.
Заметим, что из определения A_t следует $\langle X\rangle_{A_t} = t$.
Имеем:

$$\begin{cases} 1) B_t \text{ - непрерывная возрастающая функция} \Rightarrow A_t = B_t^{-1} \text{ тоже непрерывный} \\ 2) \langle X\rangle_{A_t} = t \end{cases}$$

При этом Y_t — локальный мартингал, потому что его дифференциал содержит только слагаемое с дифференциалом от винеровского процесса и не содержит слагаемого с dt.
Итак, Y_t — это непрерывный локальный мартингал, у которого квадратическая вариация равна t.
$\Rightarrow$ по теореме Леви:
Y_t — винеровский процесс.

2. Пусть $f(s,t)$ — функция, интегрируемая по мере Лебега на $[0,T]^2$. Согласно определению через изометрию стохастический интеграл $I_T(f(t)) = \int_0^T f(s,t)dw_s$ является классом эквивалентных с.в. Произвольный выбор представителей из каждого класса не гарантирует, что при фиксированном ω траектория $t \mapsto I_T(f(t))$ будет измерима, т.е. обладать свойством, необходимым для интегрирования по Лебегу. Поэтому, конструкция интеграла, зависящего от параметра требует некоторого дополнительного рассуждения.

Доказать, что существует $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}_{[0,T]}$-измеримый процесс $I_T(f(t))$, $t \leq T$, такой, что $I_T(f(s))$ при почти всех s значение процесса $I_T(f(t))$ является представителем стохастического интеграла по переменной s и

$$\int_0^T \Big(\int_0^T f(s,t)dw_s \Big) dt = \int_0^T \Big(\int_0^T f(s,t)dt \Big) dw_s.$$

Решение.

Дано, что функция $f(t,u)$ определена на $[0,T] \times [0,T]$ и такова, что $f \in L^2([0,T]) = L^2([0,T] \times [0,T], \mathcal{B}_{[0,T]} \times \mathcal{B}_{[0,T]}, \mu \times \mu)$, где μ - мера Лебега, $\mathcal{B}_{[0,T]} \times \mathcal{B}_{[0,T]}$ - уже пополнена по мере $\mu \times \mu$). Предположим, что $\Delta_n = \int\limits_0^T \int\limits_0^T (f(t,u) - f_n(t,u))^2 \, dsdu \to 0$ при $\delta_n \to 0$, где $f_n(s,u) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(t, u_i^{(n)}) I_{(u_i^{(n)}, u_{i+1}^{(n)}]}(u), 0 = u_0^{(n)} < u_1^{(n)} < ... < u_n^{(n)} = T, \delta_n = \max_i (u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)})$

Функция $I_T(f(t)) = \int\limits_0^T f(t,u) \, dw_u$ для почти всех ω является $\mathcal{B}[0,T]$ измеримой. Это вытекает из т.Фубини, так как $\int\limits_0^T E|I_T(f(t))| \, dt < \infty$. Это неравенство верно, поскольку $E|I_T(f(t))|^2 = \int\limits_0^T f^2(t,u) \, du$, а мера $\mu \times P$ - конечная мера на $\mathcal{B}[0,T] \times \mathcal{F}$.

При μ почти всех $u \in [0,T]$ функция $g(u) = \int\limits_0^T f(t,u) \, dt$ является $\mathcal{B}[0,T]$ измеримой также в силу т. Фубини. Действительно, $\int\limits_0^T \int\limits_0^T |f(t,u)| \, dtdu < \infty$, поскольку $f \in L^2([0,T])$. Кроме того, для μ почти всех u $\left(\int\limits_0^T f(t,u) \, du \right)^2 \leq T \int\limits_0^T f^2(t,u) \, dt$. Поэтому, $g \in \mathcal{L}^2[0,T]$ как неслучайная функция, интегрируемая в квадрате.

Далее,

$$\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f_n(t,u),\ dw_u\right)dt=\int\limits_0^T\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_n(t,u_i^{(n)})(w(u_{i+1}^{(n)})-w(u_i^{(n)}))\right)dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(w(u_{i+1}^{(n)})-w(u_i^{(n)}))\int\limits_0^T f_n(t,u_i^{(n)})dt \quad (1)$$

Пользуясь линейностью стохастического интеграла по винеровскому процессу, имеем

$$\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f_n(t,u),\ dt\right)dw_u=\int\limits_0^T\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_0^T f(t,u_i^{(n)})I_{(u_i^{(n)},u_{i+1}^{(n)}]}(u)dt\right)dw_u=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}(w(u_{i+1}^{(n)})-w(u_i^{(n)}))\int\limits_0^T f(t,u_i^{(n)})\,dt \quad (2)$$

То есть для f_n доказали, что можно поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f_n(t,u),\ dt\right)dw_u=\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f_n(t,u),\ dw_u\right)dt$

Далее, воспользуемся т. Фубини, неравенствами Ляпунова и Коши-Буняковского:

$$E\left|\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f(t,u),\ dw_u\right)dt-\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f_n(t,u),\ dw_u\right)dt\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^T E\left|\int\limits_0^T(f(t,u)-f_n(t,u))dw_u\right|dt\le$$

$$\le\int\limits_0^T\left(E\left(\int\limits_0^T(f(t,u)-f_n(t,u))dw_u\right)^2\right)^{1/2}dt=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T(f(t,u)-f_n(t,u))^2du\right)^{1/2}dt\le(T\Delta_n)^{1/2}\to 0,n\to\infty \quad (3)$$

Аналогично

$$E\left|\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f(t,u)dt\right)dw_u-\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f_n(t,u)dt\right)dw_u\right|\leq$$

$$\leq\left(E\left(\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T(f(t,u)-f_n(t,u))dt\right)dw_u\right)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T(f(t,u)-f_n(t,u))dt\right)^2du\right)^{1/2}\leq(T\Delta_n)^{1/2}\quad(4)$$

Осталось заметить, что если $\xi_n\to\xi$, $\zeta_n\to\zeta$ в $L^2(\Omega)$ и $\xi_n=\zeta_n$ п.н., то $\xi=\zeta$ п.н.

Таким образом доказано, что $\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f(t,u)dt\right)dw_u=\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T f(t,u)dw_u\right)dt$ с вероятностью 1.

3. Показать, что

$$\int_0^t\frac{1}{\varepsilon}\int_0^r e^{-(r-s)/\varepsilon}dw_sdr=\int_0^t(1-e^{-(t-s)/\varepsilon})dw_s.$$

Решение.

$$\int\limits_0^t\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^r e^{\frac{-(r-s)}{\varepsilon}}dW_sdr\stackrel{?}{=}\int\limits_0^t(1-e^{\frac{-(t-s)}{\varepsilon}})dW_s$$

$$\int\limits_0^t\frac{1}{\varepsilon}\underbrace{e^{-\frac{r}{\varepsilon}}\int\limits_0^r e^{\frac{s}{\varepsilon}}dW_s}_{=:Y_r}dr\stackrel{?}{=}W_t-\underbrace{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\int\limits_0^t e^{\frac{s}{\varepsilon}}dW_s}_{=:Y_t}$$

$$\int\limits_0^t\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}Y_r}_{=:dW_t-dY_t}dr\stackrel{?}{=}W_t-Y_t$$

Обоснуем последнее равенство:

посмотрим на подынтегральное выражение в левой части:

из 4-ой задачи знаем, какому СДУ удовдетворяет Y_t, поэтому из этого уравнения выразим $\frac{1}{\varepsilon}Y_tdt$ следующим образом:

$dY_t=-\frac{1}{\varepsilon}Y_tdt+dW_t\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}Y_tdt=dW_t-dY_t$

Отсюда получаем последнее равенство (которое было под знаком вопроса), что доказывает требуемое.

4. Пусть $\varepsilon > 0$ и $Y = Y^\varepsilon$ — решение СДУ $dY_t = -(1/\varepsilon)Y_t dt + dw_t$, $Y_0 = 0$. Показать, что $\mathbb{E}Y_T^2 = 2\varepsilon(1-e^{-2T/\varepsilon})$. Пользуясь формулой Ито, вывести отсюда, что для любого марковского момента $\tau \le T$ (в частности, для $\tau_a := \inf\{t : Y_t \ge a\} \wedge T$) справедлива оценк $\mathbb{E}Y_\tau^4 \le 12T\varepsilon$.

Используя представление

$$E||Y||_T^2 = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_T^2 > a)da = \int_0^\infty \mathbb{P}(||Y||_{\tau_a}^2 > a)da$$

получить оценку $E||Y||_T^2 \le C\varepsilon^{1/2}$, где $C = C_T$ — константа.

Решение.

a)

$dY_t = -\frac{1}{\varepsilon}Y_t dt + dw_t,\ Y_0 = 0.$

Пусть $H(t,x) = xe^{t/\varepsilon}$, тогда по формуле Ито:

$$dZ_t = \frac{\partial H}{\partial t}(t, Y_t)dt + \frac{\partial H}{\partial x}(t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, Y_t)(dY_t)^2 = e^{t/\varepsilon}dw_t \Rightarrow$$

$$e^{t/\varepsilon}dw_t = d(Y_t e^{t/\varepsilon}) \Rightarrow Y_t e^{t/\varepsilon} - 0 = \int_0^t e^{s/\varepsilon}dw_s \Rightarrow Y_t = \int_0^t e^{(-t+s)/\varepsilon}dw_s = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\int_0^t e^{s/\varepsilon}dw_s$$

Получается:

$$\mathbb{E}Y_T^2 = \mathbb{E}e^{-2T/\varepsilon}\left(\int_0^T e^{s/\varepsilon}dw_s\right)^2 = e^{-2T/\varepsilon}\int_0^T e^{2s/\varepsilon}ds = \frac{\varepsilon}{2}e^{-2T/\varepsilon}\ e^{2s/\varepsilon}\Big|_0^T = \frac{\varepsilon}{2}(1 - e^{-2T/\varepsilon})$$

b)

$dY_t = -\frac{1}{\varepsilon}Y_t dt + dW_t$

Возьмем $f(x,t) := x^4$

Тогда по формуле Ито:

$d(Y_t^4) = \left(6Y_t^2 - \frac{4}{\varepsilon}Y_t^4\right)dt + 4Y_t^3 dW_t$

$\Rightarrow Y_t^4 = \int_0^t \left(6Y_s^2 - \frac{4}{\varepsilon}Y_s^4\right)ds + 4\int_0^t Y_s^3 dW_s$

$\Rightarrow \forall \tau \le T : Y_\tau^4 = \int_0^\tau \left(6Y_s^2 - \frac{4}{\varepsilon}Y_s^4\right)ds + 4\int_0^\tau Y_s^3 dW_s$

У последнего слагаемого матожидание равно нулю, матожидание второго слагаемого отрицательно, поэтому (используя результат пункта а)):
$EY_\tau^4 \le \int_0^T 6EY_s^2 ds = \int_0^T 6\cdot\frac{\varepsilon}{2}(1-e^{-2T/\varepsilon}) \le 3T\varepsilon$

5. Пусть процесс $(X^\varepsilon, V^\varepsilon)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= V_t^\varepsilon dt, & X_0^\varepsilon = x,\\ \varepsilon dV_t^\varepsilon &= -V_t^\varepsilon dt + h(X_t^\varepsilon)dt + dw_t, & V_0^\varepsilon = 0,\end{aligned}$$

X — решение СДУ $dX_t = h(X_t)dt + dw_t$, $X_0 = x$, где h удовлетворяет условию Липшица и линейного роста, $\Delta^\varepsilon := X^\varepsilon - X$.

Доказать, что $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} ||\Delta^\varepsilon||_B = 0$.

6. Пусть $M \in \mathcal{M}_0^{2,c}$, $\langle M\rangle_t \to \infty$ при $t\to\infty$. Показать, что $M_t/\langle M\rangle_t \to 0$ при $t \to \infty$.

Решение.

Докажем сначала вспомогательное утверждение:
$P\left(M_t > \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) \to 0$
Действительно, от противного:
пусть существует $t_n; n\in N$: $P\left(M_{t_n} > \langle M\rangle_{t_n}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) > 2p$ для некоторого $p \ge 0$
По условию $\langle M\rangle_t \to \infty$
$\Rightarrow P\left(\langle M\rangle_t \le \frac{2}{p^4}\right) \to 0, t\to\infty$

Значит, для достаточно больших n существует множество меры хотя бы p, на котором одновременно $M_{t_n} \ge \langle M\rangle_{t_n}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ и $\langle M\rangle_t \ge \frac{2}{p^4}$

Пусть A_n — это множество. Тогда:
$M_{t_n}^2 - \langle M\rangle_{t_n} \ge \left(M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}} - \langle M\rangle_{t_n}\right)\cdot I_{A_n} + (-\langle M\rangle_{t_n})\cdot I_{\overline{A_n}}$

Поэтому:
$0 = E\left(M_{t_n}^2 - \langle M\rangle_{t_n}\right) \ge E\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}}\cdot I_{A_n} - E\langle M\rangle_{t_n} \ge E\left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}}\cdot p - \langle M\rangle_{t_n}\right) = E\left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}}\cdot p - \langle M\rangle_{t_n}\right)\cdot I_{A_n} + E\left(\langle M\rangle_{t_n}^{\frac{3}{2}}\cdot p - \langle M\rangle_{t_n}\right)\cdot I_{\overline{A_n}} \ge \left(p\cdot\left(\frac{2}{p^4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{p^4}\right)\cdot p - \frac{2(1-p)}{9p^2} = \frac{2\sqrt{2}}{p^4} - \frac{2}{p^3} - \frac{2}{9p^2} + \frac{2}{9p} > 0$ при

достаточно маленьких p

Противоречие.

Значит, для любого N : $P\left(\langle M\rangle_t \leq N\right) \to 0$ и $P\left(M_t \geq \langle M\rangle_{t_n}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) \to 0$
Отсюда для любого N :
$P\left(\langle M\rangle_t \geq N; M_t \leq \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right) \to 1$

Но из $\langle M\rangle_t \geq N >$ и $M_t \leq \langle M\rangle_t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$ следует, что:
$\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \leq \frac{1}{\langle M\rangle_t^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{N^{\frac{1}{4}}}$

То есть для любого N :
$P\left(\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \leq \frac{1}{N^{\frac{1}{4}}}\right) \to 1$
Получаем, что $\frac{M_t}{\langle M\rangle_t} \to 0$

7. Определим полиномы Эрмита формулой

$$H_n(t,x) := (-t)^n \frac{1}{n!} e^{x^2/(2t)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{-x^2/(2t)}\right).$$

Доказать, что $M_t := H_n(t, W_t)$ — мартингал.

Решение.

Используя формулу Ито, видим, что для мартингальности достаточно проверить равенство нулю коэффициента при dt, то есть
$\frac{\partial H_n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = 0$

Для $n \geq 2$ сначала выведем рекуррентную формулу для многочленов Эрмита:
$H_n = (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) =_{\dots}=$
$= (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \left(-\frac{x}{t} \cdot \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right) - \frac{n-1}{t} \cdot \frac{\partial^{(n-2)}}{\partial x^{(n-2)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)\right) =$
$= \frac{x}{n} H_{n-1} - \frac{t}{n} H_{n-2}$ при $n \geq 2$

Для $\frac{\partial H_n}{\partial x}$:
$\frac{\partial H_n}{\partial x} = (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial x^{(n+1)}}\left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) + (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{x}{t} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) =$

$-\frac{n+1}{t}H_{n+1} + \frac{x}{t}H_n =$

используем рекуррентную формулу для H_{n+1} =

$-\frac{n+1}{t}\left(\frac{x}{n+1}H_n - \frac{t}{n+1}H_{n-1}\right) + \frac{x}{t}H_n = H_{n-1}$ при $n \geq 2$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_n}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(H_{n-1}\right) = H_{n-2}$ при $n \geq 2$

Далее:

$\frac{\partial H_n}{\partial t} =$ три слагаемых =

$n \cdot (-1) \cdot (-t)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right) +$

$+ (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(\cdot e^{-x^2/(2t)}\right) +$

$+ (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(-\frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) =$

$= \frac{n}{t}H_n + (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \left(-\frac{x^2}{2t^2} \cdot \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right) + \frac{\partial^{(n)}}{\partial x^{(n)}}\left(\frac{x^2}{2t^2} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right)\right) =$

$= \frac{n}{t}H_n + (-t)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \left(n \cdot \frac{x}{t^2}\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right) + \frac{n(n-1)}{2t^2}\frac{\partial^{(n-2)}}{\partial x^{(n-2)}}\left(e^{-x^2/(2t)}\right)\right) =$

$= \frac{n}{t}H_n - \frac{x}{t}H_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n-2} =$

применяем рекуррентную формулу для H_n =

$= \frac{n}{t}\left(\frac{x}{n}H_{n-1} - \frac{t}{n}H_{n-2}\right) - \frac{x}{t}H_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n-2} = -\frac{1}{2}H_{n-2}$ при $n \geq 2$

Поэтому при $n \geq 2:$

$\frac{\partial H_n}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}H_{n-2} + \frac{1}{2}H_{n-2} = 0$

$\Rightarrow H_n(t, W_t)$ - мартингал.

При $n = 0, 1$ проверим мартингальность отдельно:

$H_0(t,x) = e^{x^2/(2t)} \cdot e^{-x^2/(2t)} = 1$ - мартингал

$H_1(t,x) = (-t) \cdot e^{x^2/(2t)} \cdot \left(-\frac{x}{t} \cdot e^{-x^2/(2t)}\right) = x$

$\Rightarrow H_1(t, W_t) = W_t$ - мартингал. Чтд.