29.11.21 Токаева Александра Задание Junior Risk Quant

(1) $V_t = \begin{cases} 2^{t-1}, & \text{если } t=1 \text{ или все ставки } < t \text{ мы проиграли} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

т.е сначала мы ставим 1 рубль, потом если выигрываем — уходим из казино, а если проигрываем — то удваиваем ставку

$\pi_0 = 0$, $\pi_t = \sum_{k=1}^{t} V_k$ — наш выигрыш.

1) Док-ть, что $\tau < \infty$ п.н. τ — момент, когда мы 1-й раз выиграли.

Докажем, что $P(\tau = \infty) = 0$.

Ну $P(\tau=\infty) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau = k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1 - 1 = 0.$

$P(\tau = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow P(\tau = \infty) = 0$

2) $E[\pi_\tau] = 1$, т.к в тот момент, когда мы выиграли — там выигрыш $= 1$.

Действительно, если $\tau = n$, то мы все игры $1, 2 \dots n-1$ — проиграли, в n-й — выиграли

$\Rightarrow$ мы проиграли $1 + 2 + \dots + 2^{n-2} = \frac{1 - 2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1} - 1$

А выиграли 2^{n-1} — в n-й игре

$\Rightarrow$ прибыль $= 2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) = 1$

3) $E[\pi_t] = ?$

$\pi_t = \begin{cases} -(1 + 2 + \dots + 2^{t-1}) = -(2^t - 1), & \text{с вер-тью, если мы все игры до } t\text{-й включительно — проиграли, т.е с вер-тью } \left(\frac{1}{2}\right)^{t} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

$\Rightarrow E[\pi_t] = -(2^t - 1) \cdot \frac{1}{2^t} + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) = -1 + \frac{1}{2^t} + 1 - \frac{1}{2^t} = 0.$

4) Почему у нас не работает т. Дуба об остановке?

Теорема (простой вариант)

] • X_n — мартингал

• $n \le \tau \le N$ — момент остановки

Тогда $E(X_\tau | F_n) = X_n$ п.н. ($\Rightarrow E(X_\tau) = EX_n$)

То есть казалось бы, должно быть $E[\pi_\tau] = E[\pi_t]$ — т.к π_t — мартингал, т.к у него независимые приращения

А т. Дуба не работает — т.к у нас τ — неограниченный момент остановки, а нужно $n \le \tau \le N$ — это не выполнено

2-я и 3-я формулировки т. Дуба тоже не работают:

2) $\tau \le N$; X_n — мартингал $\Rightarrow E(X_\tau | F_\sigma) = X_\sigma$ п.н на $\{\sigma \le \tau\}$ — т.к τ — неогр.

3) $E\tau < \infty$ и $\forall n: E(|X_{n+1} - X_n| \,|\, F_n) \le c$ п.н $\rightarrow E(X_\tau | F_\sigma) = X_\sigma$ п.н на $\{\sigma \le \tau\}$ — т.к $E\tau = \infty$ [illegible]

(2) $X_{(1)} \le \dots \le X_{(n)}$ – порядковые статистики выборки $\{X_i\}_{i=1}^n$

Оценки: $L(x) = \sum_{i=1}^n l_i X_{(i)}$

а) $R[a,b]$ – найти оценки для a и b. – для этого полная дост. статистика $(X_{(1)}; X_{(n)})$

Разберемся отдельно с $R[0,\theta]$ и $R[\theta;1]$ – отсюда будет видно, что в качестве θ брать.

Для $R[0,\theta]$: $\hat\theta_n = X_{(n)}$ – это смещенная, но состоятельная оценка

если X_i – незав.

(где $\frac{n+1}{n}\hat\theta_n$ – уже несмещенная и состоятельная)

Ну $F_n(x) = P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x; \dots X_n \le x) \overset{\text{для незав}}{=} P(X_1 \le x)^n = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n; & x\in[0,\theta] \\ 1; & x>\theta \end{cases}$

$\Rightarrow p_n(x) = F_n'(x) = \frac{n}{\theta}\cdot\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot I_{[0;\theta]}$

$\Rightarrow E\hat\theta_n = \int_0^\theta x\cdot\frac{n\cdot x^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{\theta^{n+1}}{\theta^n}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\cdot\theta \ne \theta$

$\Rightarrow \hat\theta_n := \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ – несмещ оценка и состоятельная: $\hat\theta_n \xrightarrow{d} \theta = const$

$\Rightarrow \hat\theta_n \xrightarrow{P} \theta = const$

$\boxed{\text{Ответ: } \hat b := \frac{n+1}{n}X_{(n)}}$

Если $R[\theta;b]$: $p(x) = \frac{1}{b-\theta}\,I[\theta;b]$

$\Rightarrow F(x) \underset{x\in[\theta,b]}{=} \int_\theta^x \frac{dt}{b-\theta} = \frac{x-\theta}{b-\theta}$

$\Rightarrow F_n(x) = P(X_{(1)} \le x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - P(X_1 > x; \dots X_n > x) = 1 - \Big(\underbrace{1-\left(\frac{x-\theta}{b-\theta}\right)}_{\frac{b-x}{b-\theta}}\Big)^n\cdot I[\theta;b]$

$\Rightarrow E\hat\theta_n = \int_\theta^b x\cdot\left(-n\cdot\frac{-1}{b-\theta}\right)\cdot\left(\frac{b-x}{b-\theta}\right)^{n-1}dx = \frac{n}{b-\theta}\int_\theta^b x\cdot\left(\frac{b-x}{b-\theta}\right)^{n-1}dx \underset{\substack{b-x=y\\ x=b-y}}{=} \frac{n}{b-\theta}\int_0^{b-\theta}(b-y)\left(\frac{y}{b-\theta}\right)^{n-1}dy =$

$= \frac{nb}{\cancel{b-\theta}}\int_0^1 p^{n-1}dp - \frac{n}{\cancel{b-\theta}}\int_0^{b-\theta}\left(\frac{y}{b-\theta}\right)^n dy = nb\cdot\frac{p^n}{n}\Big|_0^1 - n(b-\theta)\cdot\frac{p^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = b - \frac{n}{n+1}(b-\theta) = \frac{b+n\theta}{n+1}$ –

она смещённая, но состоятельная.

В оценку $\boxed{\hat a = X_{(1)}}$

б) $N(a,b)$

Надо брать оценки max правдоподобия

Вообще, $T(x) = (\sum X_i; \sum X_i^2)$ – 2-мерная полная достаточная статистика

$\Rightarrow \boxed{\hat a := \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}}$

$\boxed{\hat b := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$, но $E(S^2) = \frac{n-1}{n}DX$, а не DX, $\Rightarrow$ она смещенная

$\Rightarrow$ надо взять $S^2\cdot\frac{n}{n-1} = \boxed{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2} =: \hat b$

Причём $\overline{X} \perp\!\!\!\perp S^2$, и $\left.\begin{array}{l}\overline{X} \sim N(a;\frac{\sigma^2}{n}) \\ S^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\chi^2(n-1)\end{array}\right\}$ – это целая теорема из лекций

3) Pois(θ)

Согласно н-ву Рао-Крамера, эффективно оценить можно только θ.
Действительно:

$$p(x,\theta) = P_\theta(X=x) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{(x_i)!} = \frac{e^{\sum x_i} \cdot e^{-n\theta}}{x_1! \dots x_n!}$$

$\Rightarrow T(x) = \underbrace{\sum x_i}^{\sim pois(n\theta)}$ - дост. статистика.

Проверим полноту.

Хотим: $E_\theta \varphi(T) = 0 \overset{?}{\underset{\forall\theta>0}{\Rightarrow}} \varphi(T) = 0$ P_θ-п.н.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \cdot \underbrace{P(\sum X_i = k)}_{pois(n\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k) \cdot (n\theta)^k \cdot e^{-n\theta}}{k!} = 0, \ \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k) \cdot n^k \cdot \theta^k}{k!} \equiv 0 \text{ - многочлен по } \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(k) \cdot n^k}{k!} \equiv 0, \ \forall k \geq 0 \Rightarrow \varphi(k) = 0, \Rightarrow \varphi(T) = 0 \Rightarrow T = \sum X_i \text{ - полная дост. статистика.}$$

Хотим: $\tau(\theta) = \theta$.

$E_\theta \varphi(T) = \theta, \forall \theta > 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k) n^k \cdot \theta^k}{k!} = \theta \cdot e^{n\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} \cdot \theta^k}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(k) \cdot n^k}{k!} = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\Rightarrow \varphi(k) = \frac{k}{n} \Rightarrow \varphi(T) = \frac{T}{n} = \overline{X}$ - оптим. оценка для θ. Всё!

---

3. N_1 опционов со страйком $K = 0.9S_0$

N_2 опционов со страйком $K = 1.1S_0$.

N_3 - кол-во underlying акт.

1) Используем модель Гарман-Кольхаген для USD/EUR. - т.е. сколько евро за 1 доллар.

$T = 1$ год

$$\boxed{C(x,t) = x \cdot e^{-r_f T} \Phi(d) - K \cdot e^{-r_d T} \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t})} \quad (1)$$

$$d = \frac{\ln\frac{x}{K} + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Здесь $x = S_0$ - текущий курс - сейчас он 0.88 - см. мосбиржа

r_f - ставка по доллару, сейчас она 0.5% - см. Сбербанк

r_d - ставка по евро, сейчас она 0.01% - см. Альфабанк

K - страйк.

$t = 0$ - текущий момент, T - момент экспирации в годах

σ - волатильность - годовая

Valuation: the Garman–Kohlhagen model [edit]

As in the Black–Scholes model for stock options and the Black model for certain interest rate options, the value of a European option on an FX rate is typically calculated by assuming that the rate follows a log-normal process.[2]

The earliest currency options pricing model was published by Biger and Hull, (Financial Management, spring 1983). The model preceded the Garmam and Kolhagen's Model. In 1983 Garman and Kohlhagen extended the Black–Scholes model to cope with the presence of two interest rates (one for each currency). Suppose that r_d is the risk-free interest rate to expiry of the domestic currency and r_f is the foreign currency risk-free interest rate (where domestic currency is the currency in which we obtain the value of the option; the formula also requires that FX rates – both strike and current spot be quoted in terms of "units of domestic currency per unit of foreign currency"). The results are also in the same units and to be meaningful need to be converted into one of the currencies.[3]

Then the domestic currency value of a call option into the foreign currency is

$$c = S_0 e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r_d T} \mathcal{N}(d_2)$$

The value of a put option has value

$$p = K e^{-r_d T} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} \mathcal{N}(-d_1)$$

where :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S_0 is the current spot rate
K is the strike price
$\mathcal{N}(x)$ is the cumulative normal distribution function
r_d is domestic risk free simple interest rate
r_f is foreign risk free simple interest rate
T is the time to maturity (calculated according to the appropriate day count convention)
and σ is the volatility of the FX rate.

Оценим σ из исторических данных за год по ~~курсу~~ курсу USD/Euro — см. сайт investing.com

по ф-ле: $t^k_n := \frac{tk}{n}$

$$\boxed{\hat{\sigma}_n := \frac{1}{t}\cdot\sum_{k\le n}\left(\frac{S_{t_k^n}}{S_{t_{k-1}^n}}-1\right)^2} \text{ — т.к. } p\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^n \left(\frac{S_{t_k^n}-S_{t_{k-1}^n}}{S_{t_{k-1}^n}}\right)^2 = \sigma^2\cdot p\text{-}\lim \sum_{k=1}^n \left(W_{t_k^n}-W_{t_{k-1}^n}\right)^2 = \sigma^2 t$$

получаем $\sigma \approx 0.00371 = 0.371\%$ в год.

То есть для оценки опционов просто подставляем всё в ф-лу (1):

получаем цена (опциона с $K = 0.9S_0$) = 0.0837 евро

цена (опциона с $K = 1.1S_0$) = 0 евро. — из-за того, что ставка по евро почти ноль.

Теперь считаем по этой ф-ле (1) C'_x; C''_{xx} и C'_t

дельта гамма тета

$$C(x,0) = x\cdot e^{-r_f T}\Phi(d) - K\cdot e^{-r_d T}\cdot\Phi(d-\sigma\sqrt{T}); \quad d = \frac{\ln\frac{x}{K} + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Rightarrow C'_x = e^{-r_fT}\Phi(d) + x\cdot e^{-r_fT}\varphi(d)\cdot d'_x - K\cdot e^{-r_dT}\varphi(d-\sigma\sqrt{T})d'_x =$$

$$= e^{-r_fT}\Phi(d) + d'_x\left(x\cdot e^{-r_fT}\varphi(d) - K\cdot e^{-r_dT}\varphi(d-\sigma\sqrt{T})\right) =$$

$$= e^{-r_fT}\Phi(d) + d'_x\left(x\cdot e^{-r_fT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}} - K\cdot e^{-r_dT}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(d-\sigma\sqrt{T})^2}{2}}\right) =$$

$$= e^{-r_fT}\Phi(d) + d'_x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}}\left(x\cdot e^{-r_fT} - K\cdot e^{-r_dT}e^{\frac{2d\sigma\sqrt{T}}{2}}\cdot e^{-\frac{\sigma^2T}{2}}\right) =$$

$$= e^{-r_fT}\Phi(d) + d'_x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}}\left(x\cdot e^{-r_fT} - K\cdot e^{-r_dT}\cdot e^{\ln\frac{x}{K} + (r_d - r_f + \cancel{\frac{\sigma^2}{2}})T}\cdot e^{-\cancel{\frac{\sigma^2T}{2}}}\right) =$$

$$= e^{-r_fT}\Phi(d) + d'_x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d^2}{2}}\underbrace{\left(x\cdot e^{-r_fT} - K\cdot\frac{x}{K}\cdot e^{-r_fT}\right)}_{\to 0} = \boxed{e^{-r_fT}\Phi(d)} = C'_x = delta$$

$$C''_{xx} = (C'_x)'_x = \left(e^{-r_fT}\Phi(d)\right)' = e^{-r_fT}\cdot\varphi(d)\cdot \underbrace{d'_x}_{= \frac{x}{K}\cdot\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}} = \boxed{\frac{e^{-r_fT}\cdot\varphi(d)}{x\sigma\sqrt{T}}} = C''_{xx} = gamma$$

$$C(x,t) = x\cdot\Phi(d) - K\cdot\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t})$$

$$\Rightarrow C'_t = x\cdot\varphi(d)\cdot d'_t - K\cdot\varphi(d-\sigma\sqrt{T-t})\cdot\left(d'_t + \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\right) = d'_t\underbrace{\left(x\cdot\varphi(d) - K\cdot\varphi(d-\sigma\sqrt{T-t})\right)}_{=0,\text{ см. выше}} - \frac{\overbrace{K\cdot\varphi(d-\sigma\sqrt{T-t})}^{=x\cdot\varphi d}\sigma}{2\sqrt{T-t}} = \boxed{-\frac{x\sigma\varphi(d)}{2\sqrt{T-t}}}$$

theta

Считаем: получаем Option1_delta = 0.995
gamma = 0
theta = 0
Option2_delta = 0
gamma = 0
theta = 0.

— см. программа на Python

2) Грек (портфеля) = сумма греков инструментов. Но у второго опциона gamma = delta = 0, поэтому просто надо, чтобы delta_1 и delta_3 были в сумме = 0.

4) Формула Гармана-Кольхагена предполагает, что цена имеет нормальное распределение и волатильность постоянна. Это не так, надо исп. модель локальной волатильности.

Investing.com Поиск на сайте... А Александра

Котировки | Популярное Мой список | Крипто | Новости | Аналитика | Теханализ | Графики | Брокеры | Инструменты | Еще

Котировки Форекс | Кросс-курсы валют | Основные валюты | Валютные кроссы | Таблица кросс-курсов | Фьючерс на индекс USD | Фьючерсы Форекс

Обзор | График | Новости и аналитика | Теханализ | Форум

Обзор | Прошлые данные | Конвертер валют

Прошлые данные - USD/EUR

Временной период:
День

Скачать данные   29/10/2020 - 29/11/2021

Дата	Цена	Откр.	Макс.	Мин.	Изм. %
29.11.2021	0,8861	0,8856	0,8881	0,8852	0,06%
28.11.2021	0,8856	0,8848	0,8865	0,8837	0,25%
26.11.2021	0,8833	0,8922	0,8924	0,8825	-0,99%
25.11.2021	0,8921	0,8928	0,8929	0,8904	-0,09%
24.11.2021	0,8929	0,8891	0,8940	0,8884	0,45%
23.11.2021	0,8889	0,8899	0,8908	0,8869	-0,10%
22.11.2021	0,8898	0,8856	0,8905	0,8856	0,46%
19.11.2021	0,8857	0,8795	0,8889	0,8792	0,73%
18.11.2021	0,8793	0,8834	0,8839	0,8791	-0,46%

Нефть Brent	74,45	+2,86	+3,99%
Нефть WTI	71,11	+2,96	+4,34%
Золото	1.798,90	+10,80	+0,60%
Серебро	23,615	+0,480	+2,07%
Платина	964,35	+10,05	+1,05%
Палладий	1.776,25	-4,95	-0,28%
Природный газ	5,094	-0,383	-6,99%

15 Теоретические и практические аспекты формул BS

1. Замечательным свойством формул Блэка–Шоулза (BS) является тот факт, что они зависят только от параметра σ, который на практике, при знании эволюции цены S до момента t, можно считать известным. Действительно, пусть $t_k^n := tk/n$. Тогда

$$P\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{S_{t_k^n} - S_{t_{k-1}^n}}{S_{t_{k-1}^n}} \right)^2 = \sigma^2 P\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^{n} (w_{t_k^n} - w_{t_{k-1}^n})^2 = \sigma^2 t.$$

и оценка $\widehat{\theta}_n := (1/t)\sum_{k\le n}(S_{t_k^n}/S_{t_{k-1}^n} - 1)^2$ при разумных значениях n оказывается хорошим приближением σ^2. Полученная таким образом оценка $\widehat{\sigma} = \widehat{\theta}_n^{1/2}$ называется *исторической волатильностью*.

jupyter OptionEkz Last Checkpoint: 20 часов назад (autosaved)

Logout

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help

Trusted | Python 3

Run Code

```
def MyPhi(x):
    return normal_distrib.cdf(x,0,1)
def myphi(x):
        return normal_distrib.pdf(x,0,1)

class FXPricer():
    def __init__(self,r_d,r_f,sigm,T,S0,K):
        self.r_d=r_d
        self.r_f=r_f
        self.sigm=sigm
        self.T=T
        self.S0=S0
        self.K=K
    def d1(self):
        return (np.log(self.S0/self.K) + ((self.r_d-self.r_f)+self.sigm*self.sigm/2)*self.T)/(self.sigm*np.sqrt(self
    def d2(self):
        return self.d1()-self.sigm*np.sqrt(self.T)
    def get_price(self):
        return self.S0*np.exp(-self.r_f*self.T)*MyPhi(self.d1())-self.K*np.exp(-self.r_d*self.T)*MyPhi(self.d2())
    def get_delta(self):
        return np.exp(-self.r_f*self.T)*MyPhi(self.d1())
    def get_gamma(self):
        return np.exp(-self.r_f*self.T)*myphi(self.d1())/(self.S0*self.sigm*np.sqrt(self.T))
    def get_theta(self):
        return -(self.S0*self.sigm*myphi(self.d1()))/(2*np.sqrt(self.T))


MyPricer=FXPricer(r_d=0.01/100, r_f=0.5/100, sigm=0.00371, T=365/365, S0=0.88,K=0.9*0.88)
print("Option1 price=",MyPricer.get_price())
MyPricer=FXPricer(r_d=0.01/100, r_f=0.5/100, sigm=0.00371, T=365/365, S0=0.88,K=1.1*0.88)
print("Option2 price=",MyPricer.get_price())
```

```
Option1 price= 0.08369017772969234
Option2 price= 6.952545945903617e-165
```

jupyter OptionEkz Last Checkpoint: 20 часов назад (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help

Run Code

```
        return -(self.S0*self.sigm*myphi(self.d1()))/(2*np.sqrt(self.T))


MyPricer=FXPricer(r_d=0.01/100, r_f=0.5/100, sigm=0.00371, T=365/365, S0=0.88,K=0.9*0.88)
print("Option1 price=",MyPricer.get_price())
MyPricer=FXPricer(r_d=0.01/100, r_f=0.5/100, sigm=0.00371, T=365/365, S0=0.88,K=1.1*0.88)
print("Option2 price=",MyPricer.get_price())
```

```
Option1 price= 0.08369017772969234
Option2 price= 6.952545945903617e-165
```

In [50]:

```
MyPricer=FXPricer(r_d=0.01/100, r_f=0.5/100, sigm=0.00371, T=365/365, S0=0.88,K=0.9*0.88)
print("Option1 delta=",MyPricer.get_delta())
print("Option1 gamma=",MyPricer.get_gamma())
print("Option1 theta=",MyPricer.get_gamma())
MyPricer=FXPricer(r_d=0.01/100, r_f=0.5/100, sigm=0.00371, T=365/365, S0=0.88,K=1.1*0.88)
print("Option2 delta=",MyPricer.get_delta())
print("Option2 gamma=",MyPricer.get_gamma())
print("Option2 theta=",MyPricer.get_theta())
```

```
Option1 delta= 0.9950124791926823
Option1 gamma= 6.969197883957214e-158
Option1 theta= 6.969197883957214e-158
Option2 delta= 5.7681828756211145e-161
Option2 gamma= 4.7784149634672735e-157
Option2 theta= -2.55940198239761e-162
```

In [ ]: