

2 апреля 2020 года, группа 309

Контрольная работа по теме «Основы финансовой математики»

Инструкция по выполнению работы

- На выполнение работы даётся 2 недели: со 2 апреля 2020 г. до 16 апреля 2020 г. Занятие в четверг, 9 апреля, посвящается моим ответам на возможные **ТЕХНИЧЕСКИЕ** вопросы по работе (но НЕ консультации по темам, которые вы не удосужились разобрать сами).
- 16 апреля, в **15:00 !!!**, регистрация на лекцию = e-mail с вашей работой (прикреплённый **pdf** файл). На лекции 16 апреля разбираем очередную тему по актуарной математике (детали 16 апреля).
- Мы можете использовать моё пособие: Фалин А.Г., Фалин Г.И. *Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев*: Учебное пособие. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2019 – 359 с., ил. (эл. изд.) ISBN 978-5-317-06167-8 и только это пособие. Вы должны использовать обозначения и термины из этой книги, но вам нельзя копировать теоретические выкладки и текст (если это необходимо, всё излагаете своими словами).
- Вычисления проводить с использованием Microsoft Excel.
- Вы **ДОЛЖНЫ**:

«Излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.»

Иначе говоря, решения задач должны быть очень подробными, с детальным объяснением всех идей, преобразований, с результатами всех промежуточных вычислений, точными ссылками на известные результаты (ссылаться можно только на упомянутую выше мою книгу). **Невыполнение этих требований автоматически означает, что задача не решена.**

При совпадении в разных работах достаточно длинных фрагментов рассуждений или вычислений решение соответствующей задачи аннулируется у ВСЕХ вовлечённых сторон.

- Решение набираете:
 - в Microsoft Word, шрифт Times New Roman 12 pt, line spacing 1.15, формулы – с помощью пакета MathType (предпочтительно) или Equation Editor, но сохраняете файл в формате **pdf** – у меня чрезвычайно подробные решения вместе с условиями заняли 18 стр. (минус 4 стр. условия = 14 стр. только!!!)
 - или в LaTeX, но сохраняете файл в формате **pdf**.
- Работу выполняете прямо в этом файле (для LaTeX создаёте аналогичный документ; \documentclass{article}). В таблице на первом листе вашей работы вы указываете: ФИО и ответы ко всем задачам (баллы проставляю я).
- Контрольные высылаете мне на почту MoscowMath@mail.ru с указанием темы по следующему образцу: Иванов_Иван-309.

Напоминаю, что ФГОС среднего образования (приказ Минобрнауки №413 от 17 мая 2012) установил следующие требования к результатам обучения в средней школе:

« II.8.5) умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач ...

II.8.8) владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;...»

Токаева Александра	Ответ	Баллов
задача 1(i)	6.1064%	
задача 1(ii)	6.4949%	
задача 1(iii)	6.0450%	
задача 2(i)	См. решение	
задача 2(ii)	\$28600.00	
задача 3(i)(a)	7.0973 лет	
задача 3(i)(b)	7.2782 лет	
задача 3(ii)	Страховая компания получит прибыль	
задача 4(i)	£19381.14	
задача 4(ii)	£107.50	
задача 5(i)	£7.06	
задача 5(ii)	7.11%	
задача 6(i)	£958.86	
задача 6(ii)	£63180.49	
задача 6(iii)(a)	1 апреля 2027	
задача 6(iii)(b)	£581.34	
задача 7(i)	YTM=5.44%	
задача 7(ii)	См. решение	
задача 7(iii)	См. решение	
задача 8(i)	См. решение	
задача 8(ii)	TWRR=24.61%	
задача 8(iii)	См. решение	
задача 8(iv)(a)	См. решение	
задача 8(iv)(b)	См. решение	
задача 8(iv)(c)	MWRR=29.41%	
задача 9(i)	£12953.55	
задача 9(ii)	$S_{10} \sim \text{LogN}(9.448164; 0.0419216)$	
задача 9(iii)	£8491.89	
	Из 100 возможных баллов всего:	

1. Вычислите в виде процентов с четырьмя знаками после запятой номинальную годовую процентную ставку, начисляемую раз в полугодие, которая эквивалентна:

- (i) эффективной месячной учётной ставке 0.5%. [2 балла]
 - (ii) номинальной годовой учётной ставке 6%, применяемой каждые два года. [2 балла]
 - (iii) номинальной годовой процентной ставке 6%, применяемой ежеквартально. [2 балла]
- [Всего 6 баллов]

Решение.

- (i)
- (ii)
- (iii)

2. (i) Объясните смысл термина «без дивиденда» («ex-dividend») применительно к продаже ценной бумаги, по которой выплачиваются дивиденды. [1 балл]

Человек купил 10,000 акций 1 декабря 2017. Дивиденды по ним выплачиваются 1 января и 1 июля каждого года; предполагается, что они будут выплачиваться до бесконечности. Очередные дивиденды, которые будут выплачены 1 января 2018 года, составляют \$0.07 на акцию. Ожидается, что для любого календарного года обе дивидендные выплаты будут одинаковы, но от года к году будут расти на 2% в год.

Допустим, что 1 декабря 2017 года эти акции продаются ex-dividend, а для оценки текущей стоимости денежных потоков используется эффективная годовая процентная ставка 7%.

(ii) Вычислите стоимость этого пакета в день покупки, предполагая, что покупатель будет держать его вечно. [5 баллов]

[Всего 6 баллов]

Решение.

- (i)
- (ii)

3. Человек покупает в страховой компании ренту за разовую премию. Рента будет выплачивать £10,000 в конце каждого года на протяжении 15 лет. Страховая компания инвестирует премию в облигацию, которая платит купон раз в год по ставке 6% годовых и будет погашена по номиналу ровно через девять лет.

(i) (a) Вычислите средний дисконтированный срок выплат для ренты при годовой эффективной процентной ставке 5%. [2 балла]

(b) Вычислите средний дисконтированный срок выплат для облигации при годовой эффективной процентной ставке 5%. [3 балла]

(ii) Объясните, получит страховая компания прибыль или понесёт убытки, если процентные ставки слегка уменьшатся для всех сроков. [3 балла]

[Всего 8 баллов]

Решение.

- (i)(a)
- (i)(b)
- (ii)

4. Интенсивность процентов, $\delta(t)$, является функцией времени и в любой момент времени t (лет) даётся формулой:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.03 + 0.005t, & 0 \leq t < 2, \\ 0.045 - 0.0025t, & 2 \leq t < 10, \\ 0.02, & t \geq 10. \end{cases}$$

(i) Для инвестиции в размере £15,000, сделанной в момент $t = 1$, вычислите накопление в момент $t = 9$. [4 балла]

(ii) Вычислите текущую стоимость (в момент $t = 0$) денежного потока, который выплачивается непрерывно с интенсивностью $\rho(t) = 60e^{0.02t}$ от момента $t = 10$ до момента $t = 12$. [6 баллов]

[Всего 10 баллов]

Решение.

(i)

(ii)

5. 1 февраля 2017 года инвестор обдумывал покупку обычных акций компании Online Education PLC. Дивиденды выплачиваются раз в год, 1 февраля, и только что были выплачены дивиденды в размере £0.40 на акцию. В момент покупки акции ожидалось, что дивиденды будут ежегодно возрастать: на 5% за первый год, на 4% за второй, на 3% за третий и последующие годы. Инвестор не имел права на получение только что выплаченных дивидендов.

(i) Вычислите максимальную цену, которую мог бы заплатить за акцию инвестор, если он предполагает держать акцию бессрочно и рассчитывает на эффективную годовую доходность от этой операции в размере 9%. [6 баллов]

Инвестор купил пакет акций 1 февраля 2017 года по цене £7.00 за акцию и продал его 1 февраля 2019 года, немедленно после получения причитающихся ему дивидендов, по цене £7.50 за акцию.

(ii) Вычислите эффективную годовую доходность этой операции для инвестора, используя следующую информацию:

Дата	Индекс инфляции	Дивиденды на одну акцию
1 февраля 2017	211.0	£0.400
1 февраля 2018	215.7	£0.428
1 февраля 2019	221.2	£0.449

[5 баллов]

[Всего 11 баллов]

Решение.

(i)

(ii)

6. 1 января 2016 года был выдан заём на сумму £80,000. Он должен быть погашен за 10 лет постоянными ежемесячными платежами 1 числа каждого последующего месяца (вплоть до 1 января 2026 года включительно).

(i) Вычислите размер этого постоянного ежемесячного платежа используя годовую эффективную процентную ставку 8%. [2 балла]

(ii) Вычислите размер непогашенной задолженности 1 ноября 2018 года (немедленно после того, как произведён очередной платёж в соответствии с установленным расписанием). [3 балла]

1 ноября 2018, немедленно после платежа очередной суммы в счёт погашения долга, заёмщик попросил уменьшить размер ежемесячной выплаты до £900 и продлить промежуток времени, оставшийся до погашения долга (чтобы непогашенную задолженность можно было полностью оплатить уменьшенными ежемесячными платежами). Последний платёж должен быть равен размеру оставшейся задолженности, если она меньше, чем £900.

Кредитор согласился с этими изменениями при следующих дополнительных условиях:

- в будущем будет применяться годовая процентная ставка 9%, начисляемая ежемесячно;
- к непогашенному долгу по состоянию на 1 ноября 2018 года добавляется сбор за оформление документов в размере £250.

(iii) (a) Определите новую дату погашения долга. [2 балла]

(b) Вычислите размер последней выплаты по долгу. [4 балла]

[Всего 11 баллов]

Решение.

(i)

(ii)

(iii)(a)

(iii)(b)

7. Эффективная годовая форвардная ставка для промежутка времени $[t; t+r]$, где t и r измеряются годами, обозначена $f_{t,r}$ (иначе говоря, $f_{t,r}$ – это r -летняя форвардная ставка через t лет). Известно, что $f_{0,1} = 4\%$, $f_{1,1} = 5\%$, $f_{2,1} = 6\%$ and $f_{3,1} = 7\%$.

(i) Определите доходность к погашению в момент эмиссии для четырёхлетней облигации, которая гасится по номиналу и платит купон по ставке 4% в конце каждого года. [7 баллов]

(ii) Объясните, почему эта доходность меньше, чем $f_{3,1}$. [3 балла]

(iii) Как вы могли бы интерпретировать тот факт, что последовательность $f_{0,1}$, $f_{1,1}$, $f_{2,1}$, $f_{3,1}$ возрастающая. [4 балла].

[Всего 14 баллов]

Решение.

(i)

(ii)

(iii)

8. Стоимость активов инвестиционного фонда 1 января 2015 года была £100m, но через два года, 1 января 2017 года, он оценивался только в £64. Немедленно после оценки фонда 1 января 2017 года в фонд поступила сумма £16m и к 1 июля 2018 года стоимость фонда выросла до £270m.

(i) Дайте определение средней по времени эффективной годовой ставки дохода, $TWRR$. В каких случаях её разумно использовать? [2 балла]

(ii) Вычислите $TWRR$ за период с 1 января 2015 года до 1 июля 2018 года; ответ округлите до целого числа базисных пунктов. [4 балла]

(iii) Дайте определение эквивалентной по финансовому результату ставки дохода, $MWRR$. В каких случаях её разумно использовать? [2 балла]

(iv) Докажите, что для рассматриваемого примера

(a) $MWRR$ за период с 1 января 2015 года до 1 июля 2018 года существует; [4 балла]

(b) верно неравенство $29\% < MWRR < 30\%$. [2 балла]

(c) вычислите $MWRR$; ответ округлите до целого числа базисных пунктов. [4 балла]

Всего [18 баллов]

Решение.

(i)

(ii)

(iii)

(iv)(a)

(iv)(b)

(iv)(c)

9. Инвестор предполагает вложить сумму $P = £6\,000$ в некоторый фонд на $n = 10$ лет. Он моделирует неопределённость в изменении стоимости активов фонда предположением, что годовая доходность от вложения средств в фонд является случайной величиной. Пусть i_k — эта доходность за k -й год. Инвестор предполагает, что случайные величины i_1, i_2, \dots, i_n независимы в совокупности и одинаково распределены со средним 8% и стандартным отклонением 7%, причём годовые коэффициенты роста $1 + i_k$ имеют логнормальное распределение.

(i) Вычислите ожидаемый размер суммы S_{10} , которую получит в результате инвестор. [2 балла]

(ii) По какому закону распределена сумма S_{10} ? [2 балла]

(iii) На какую минимальную сумму может рассчитывать инвестор через 10 лет практически гарантированно при доверительной вероятности 97.5%? [12 баллов]

Всего [16 баллов]

Решение.

(i)

(ii)

(iii)