Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 11

Положим
$$Lu = \frac{1}{2}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}.$$
Семейство конечных неотрицательных мер $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ является решением задачи Коши
$$\partial_t\mu_t = L^*\mu_t, \quad \mu_0 = \nu,$$
если для всякого борелевского множества B функция $t \to \mu_t(B)$ измерима, функции a^{ij}, b^i локально интегрируемы по мере $\mu_t\,dt$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ равенство
$$\int \varphi\,d\mu_t - \int \varphi\,d\nu = \int_0^t \int L\varphi\,d\mu_\tau, d\tau$$
выполняется для почти всех $t \in [0,T]$. Полезно иметь ввиду, что для всякой функции $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, $\varphi(x,t) = 0$ при $|x| > R$, равенство
$$\int \varphi(x,t)\,d\mu_t - \int \varphi(x,0)\,d\nu = \int_0^t \int \bigl[\partial_t\varphi + L\varphi\bigr]\,d\mu_\tau\,d\tau$$
выполняется для почти всех t. Если коэффициенты a^{ij}, b^i интегрируемы по мере $\mu_t\,dt$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, то последнее равенство выполняется для всех ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций φ с ограниченными производными.

В случае, когда $0 \le \mu_t$ и $\mu_t(\mathbb{R}^d) \le 1$ для всех t, то говорят, что $\{\mu_t\}$ — субвероятностное решение, а если $0 \le \mu_t$ и $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$, то говорят, что $\{\mu_t\}$ — вероятностное решение,

Уравнение теплопроводности

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$.

Предложение 1. *Семейство мер $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\,dx$, где*
$$\varrho(x,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\nu(dy),$$
является вероятностным решением задачи Коши
$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда
$$\int \varphi\,d\mu_t = \int u(y,t)\,\nu(dy),$$
где функция
$$u(y,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\varphi(x)\,dx$$
является гладким решение задачи Коши для уравнения $\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$, $u(x,0) = \varphi(x)$. Кроме того, верно равенство
$$\Delta u(y,t) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\Delta\varphi(x)\,dx.$$
Следовательно, получаем
$$\frac{d}{dt}\int \varphi\,d\mu_t = \int \partial_t u\,d\nu = \int \frac{1}{2}\Delta\varphi\,dmu_t.$$
□

Предложение 2. *В классе субвероятностных решений задача Коши*
$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t, \quad \mu_0 = \nu.$$
имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть μ_t^1 и μ_t^2 — два решения. Положим $\mu_t = \mu_t^1 - \mu_t^2$. Для всякой функции φ и всякого $\tau > 0$ функция

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi(\tau-t))^{d/2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{2(\tau-t)}} \varphi(x)\, dx$$

является гладким решением задачи Коши

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0, \quad u(x,\tau) = \varphi.$$

Подставляя u в равенство, определяющее решение, получаем

$$\int \varphi(x)\, d\mu_\tau = \int u(x,\tau)\, d\mu_\tau = \int u(x,0)\, d\mu_0 = 0,$$

Следовательно, верно равенство $\mu_\tau = 0$. □

Решение неоднородного уравнения теплопроводности

Пусть $f \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Для построения решения

$$u_t + \tfrac{1}{2}\Delta u = f$$

применим метод Дюамеля. Пусть $w(x,t,\tau)$ — решение задачи Коши

$$w_t + \tfrac{1}{2}\Delta w = 0, \quad w(x,t,\tau) = f(x,\tau).$$

Проверим, что

$$u(x,t) = -\int_t^T w(x,t,\tau)\, d\tau$$

является решением $u_t + \frac{1}{2}\Delta u = f$. Имеем

$$u_t(x,t) = w(x,t,t) - \int_t^T w_t(x,t,\tau)\, d\tau = f(x,t) + \tfrac{1}{2}\int_t^T \Delta w(x,t,\tau)\, d\tau = f(x,t) - \tfrac{1}{2}\Delta u(x,t).$$

Так как

$$w(x,t,\tau) = \int f(y,\tau) K(x-y,\tau-t)\, dy, \quad K(x-y,\tau-t) = \frac{1}{(2\pi(\tau-t))^{d/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{2(\tau-t)}},$$

то

$$u(x,t) = -\int_t^T \int f(y,\tau) K(x-y,\tau-t)\, dy\, d\tau.$$

Пусть $\gamma \ge 1$. Заметим, что

$$\int |K(x-y,\tau-t)|^\gamma\, dy = C_\gamma(\tau-t)^{d(1-\gamma)/2}, \quad \int |\nabla_x K(x-y,\tau-t)|^\gamma\, dy = C'_\gamma(\tau-t)^{(d(1-\gamma)-\gamma)/2}.$$

Если $\gamma < \frac{d+2}{d+1}$, то функции $K(x-y,\tau-t)$, $|\nabla_x K(x-y,\tau-t)|$ интегрируемы в степени γ по множеству $[t,T]\times\mathbb{R}^d$ и интегралы оцениваются константой, которая не зависит от t и x.

Предложение 3. *Пусть $p > d+2$. Для построенного выше решения и уравнения*

$$u_t + \tfrac{1}{2}\Delta u = f$$

имеет место оценка

$$\sup|u| + \sup|\nabla_x u| \le C(p)\|f\|_{L^p}.$$

Доказательство. Оценка выводится из формулы для решения с помощью неравенства Гёльдера. □

Абсолютная непрерывность решений

Теорема 1. *Если μ_t является субвероятностным решением уравнения*

$$\partial_t \mu_t = \tfrac{1}{2}\Delta\mu_t - \operatorname{div}(b\mu_t)$$

и векторное поле b ограниченно на всяком множестве $[0,T]\times B(0,R)$, то

$$\mu_t(dx)\, dt = \varrho(x,t)\, dx\, dt, \quad \varrho \in L^p_{loc}((0,T)\times\mathbb{R}^d), 1 < p < \tfrac{d+2}{d+1}.$$

Доказательство. Пусть $\Pi = (t_1, t_2) \times B(0,R)$, $0 < t_1 < t_2 < T$, $R > 0$, и функция $\zeta \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ равна единице на Π. Пусть $f \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ и u — построенное выше решение уравнения $u_t + \frac{1}{2}\Delta u = f$. Так как μ_t — решение, то верно равенство

$$\int_0^T \int \bigl(u_t + \tfrac{1}{2}\Delta u\bigr)\zeta\, d\mu_t\, dt =$$

$$= -\int_0^T \int \bigl(u\zeta_t + \langle \nabla u, \nabla\zeta\rangle + u\Delta\zeta + \langle b, \nabla\zeta\rangle u + \langle b, \nabla u\rangle\zeta\bigr)\, d\mu_t\, dt.$$

Следовательно, с $q = p/(p-1)$ верна оценка

$$\iint_\Pi f\, d\mu_t\, dt \le C\bigl(\sup|u| + \sup|\nabla_x u|\bigr) \le C'\|f\|_{L^q(\Pi)}.$$

Линейный функционал

$$f \to \iint_\Pi f\, d\mu_t\, dt$$

продолжается до непрерывного линейного функционала на $L^q(\Pi)$ и по теореме Рисса имеет вид

$$\iint_\Pi f\, d\mu_t\, dt = \iint_\Pi f\varrho\, dx\, dt, \quad \varrho \in L^p(\Pi).$$

□

Существование решения

Теорема 2. *Пусть b — борелевское векторное поле, ограниченное на $[0,T]\times B(0,R)$ для всякого $R > 0$. Тогда для всякой вероятностной меры ν существует субвероятностное решение μ_t задачи Коши*

$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t - \operatorname{div}(b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство. Пусть b_n — последовательность векторных полей класса C_0^∞, которая сходится к b в $L^q(\Pi)$ для всякого $q \ge 1$ и всякого $\Pi = (t_1,t_2)\times B(0,R)$, $0 < t_1 < t_2 < T$, $R > 0$. В качестве решения μ_t^n задачи Коши

$$\partial_t\mu_t^n = \frac{1}{2}\Delta\mu_t^n - \operatorname{div}(b_n\mu_t^n), \quad \mu_0^n = \nu$$

можно взять распределение случайного процесса, который является решением соответствующего стохастического уравнения. Для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет место равенство

$$\int \varphi\, d\mu_t^n - \int \varphi\, d\nu = \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\bigr]\, d\mu_s^n\, ds.$$

По доказанному выше $\mu_t^n(dx)\, dt = \varrho_n(x,t)\, dx\, dt$ и для всякого $\Pi = (t_1,t_2)\times B(0,R)$, $0 < t_1 < t_2 < T$, $R > 0$, существует числа $C(\Pi)$, которое не зависит от n и с которым верна оценка $\|\varrho_n\|_{L^p(\Pi)} \le C(\Pi)$. Применяя диагональную процедуру и переходя к подпоследовательности можно считать, что ϱ_n сходится к некоторой функции ϱ слабо в $L^p(\Pi)$ для всякого цилиндра Π указанного вида. Заметим, что при $0 < \delta < t < T$

$$\int_\delta^t \int \frac{1}{2}\Delta\varphi\varrho_n\, dx\, ds \to \int_\delta^t \int \frac{1}{2}\Delta\varphi\varrho\, dx\, ds,$$

$$\int_\delta^t \int \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\varrho_n\, dx\, ds = \int_\delta^t \int \langle b_n - b, \nabla\varphi\rangle\varrho_n\, dx\, ds + \int_\delta^t \int \langle b, \nabla\varphi\rangle\varrho_n\, dx\, ds \to \int_\delta^t \int \langle b, \nabla\varphi\rangle\varrho\, dx\, ds.$$

Более того,

$$\Bigl|\int_0^\delta \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\bigr]\, d\mu_s^n\, ds\Bigr| \le C(\varphi)\delta.$$

Положим $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\, dx$. Для каждого $t \in (0,T)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b_n, \nabla\varphi\rangle\bigr]\, d\mu_s^n\, ds = \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b, \nabla\varphi\rangle\bigr]\, d\mu_s\, ds.$$

Следовательно, для всякого t и всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_t^n.$$

Пусть $\eta \in C_0^\infty((0,T))$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \eta(t)\Bigl(\int \varphi\, d\mu_t^n\Bigr)\, dt = \int_0^T \eta(t)\Bigl(\int \varphi\varrho\, dx\Bigr)\, dt.$$

Следовательно, для почти всех t верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi\, d\mu_t^n = \int \varphi(x)\varrho(x,t)\, dx,$$

из которого следует, что $\mu_t(dx) = \varrho(x,t)\, dx$ — субвероятностные меры. Таким образом, после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем для почти всех t равенство

$$\int \varphi\, d\mu_t - \int \varphi\, d\nu = \int_0^t \int \bigl[\frac{1}{2}\Delta\varphi + \langle b, \nabla\varphi\rangle\bigr]\, d\mu_s\, ds$$

и μ_t — искомое решение. □

Отметим, что в условиях теоремы плотность ϱ имеет непрерывную строго положительную плотность, у которой по переменным x_i есть соболевские производные первого порядка. Далее мы считаем, что всегда выбрана именно эта версия плотности и соответствующие ей меры μ_t.

Функция Ляпунова и существование вероятностного решения

Положим

$$Lu = \tfrac{1}{2}\Delta u + \langle b, \nabla u\rangle.$$

Функцией Ляпунова V для оператора L называется такая функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(x,t) \le C + CV(x).$$

Теорема 3. *Если существует функция Ляпунова V и $V \in L^1(\nu)$, то всякое субвероятностное решение μ_t задачи Коши*

$$\partial_t\mu_t = \frac{1}{2}\Delta\mu_t - \mathrm{div}(b\mu_t), \quad \mu_0 = \nu,$$

является вероятностным, т.е. $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$. Более того,

$$\sup_{t\in[0,T]} \int V(x)\, d\mu_t < \infty$$

и $t \to \mu_t$ является непрерывной кривой в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Пусть $\zeta_N(z) = z$ при $z \le N-1$, $\zeta_N(z) = N$ при $z > N+1$, $0 \le \zeta_N' \le 1$ и $\zeta_N'' \le 0$. По определению решения μ_t верно равенство

$$\int \bigl(\zeta_N(V) - N\bigr)\, d\mu_t = \int \bigl(\zeta_N(V) - N\bigr)\, d\nu + \int_0^t \int L\bigl(\zeta_N(V) - N\bigr)\, d\mu_s\, ds.$$

Заметим, что

$$L\bigl(\zeta_N(V) - N\bigr) = \zeta_N'(V)LV + \frac{1}{2}\zeta_N''(V)|\nabla V|^2 \le C + C\zeta_N'(V)V.$$

Так как $(z\zeta_N'(z) - \zeta_N(z))' = z\zeta_N''(z) \le 0$, то $\zeta_N'(V)V \le V$. Следовательно, приходим к оценке

$$\int \zeta_N(V)\, d\mu_t + (1 - \mu_t(\mathbb{R}^d))N \le \int \zeta_N(V)\, d\nu + CT + C\int_0^t \int \zeta_N(V)\, d\mu_s\, ds,$$

из которой немедленно следует ограниченность интегралов от V по мерам μ_t и равенство $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$. □

Отметим, что в общем случае задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова может иметь бесконечно много вероятностных решений.