Задачи студенческой олимпиады Университета “Сириус”: Прикладная математика

29.03.2021

Задача №1 (10 баллов)

Рассмотрим функцию $y(x) = \arccos(1 - x)$ при малых $x > 0$. Получить 1-й член разложения этой функции по степеням x.

Решение.
Имеем $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, поэтому $\lim_{x\to+0} y'(x) = +\infty$, из чего следует, что $y(x)$ не разлагается по целым степеням x.

Далее, пренебрегая в выражении для $y'(x)$ величиной $x^2 = o(x)$, можно записать

$$y'(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{-1/2} \ ,$$

откуда, интегрируя и учитывая, что $y(0) = 0$, получаем $y(x) \approx \sqrt{2}\, x^{1/2}$, то есть $y(x)$ должно быть возможно разложить по **полуцелым** степеням x.

Действительно, положим $x = u^2$, $u \geq 0$, тогда $y'(u) = \frac{2}{\sqrt{2-u^2}}$, откуда

$$\lim_{u\to 0} y'(u) = \sqrt{2} \ ,$$

и по формуле Тейлора $y(u) = \sqrt{2}\, u + o(u)$ и $y(x) = \sqrt{2}\, x^{1/2} + o(x^{1/2})$.

Ответ: $\sqrt{2}\, x^{1/2}$.

Задача №2 (12 баллов)

Вычислить комплексный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi I\omega x - 2\pi^2\omega^2 t} d\omega \ ,$$

где I – мнимая единица, $t > 0$ и x – вещественные параметры, а интегрирование осуществляется по вещественной оси $-\infty < \omega < +\infty$. Дать интерпретацию полученного результата (то есть указать, что́ может выражать полученная функция от x и t). **Подсказка:** воспользоваться одной из теорем Коши.

Решение.

Подынтегральная функция
$$f(z) = e^{2\pi Izx - 2\pi^2 z^2 t}$$
является аналитической функцией от z во всей комплексной плоскости (а не только на вещественной оси $z = \omega$). По теореме Коши, интеграл от аналитической функции по любому замкнутому контуру равен 0. Основная идея решения состоит в том, что в качестве такого контура можно, в частности, рассмотреть две параллельные прямые $l_1 : \ z = \omega + 0I$ и $l_2 : \ z = \omega + bI$ (где b — пока не известный константный параметр), замыкающиеся через бесконечно удаленную точку. Тогда из теоремы Кощи следует, что интегралы от указанной функции по обеим прямым **равны**, то есть вместо исходного интеграла
$$J_1 = \int_{l_1} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi I\omega x - 2\pi^2\omega^2 t} d\omega$$
можно рассматривать интеграл
$$J_2 = \int_{l_2} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi I(\omega+bI)x - 2\pi^2(\omega+bI)^2 t} d\omega \ = J_1.$$
Выберем теперь параметр b так, чтобы аргумент экспоненты в J_2 был вещественным. Раскрывая скобки, получим:
$$2\pi I(\omega + bI)x - 2\pi^2(\omega + bI)^2 t = 2\pi^2 t(b^2 - \omega^2) - 2\pi bx + 2\pi\omega(x - 2\pi bt)I \ ,$$
то есть можно выбрать $b = \frac{x}{2\pi t}$. Отметим, что b — константный параметр, то есть b не должен зависеть от ω, и действительно от нее не зависит.

Подставляя это значение b в J_2, получим:
$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t} - 2\pi^2\omega^2 t} d\omega = e^{-\frac{x^2}{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2\omega^2 t} d\omega = e^{-\frac{x^2}{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(2\pi\omega\sqrt{t})^2} d\omega \ .$$
Учитывая, что $t > 0$, сделаем теперь замену $u = 2\pi\omega\sqrt{t}$, тогда $d\omega = \frac{du}{2\pi\sqrt{t}}$, и
$$J_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \ .$$
Последний интеграл равен $\sqrt{2\pi}$. Это следует из того, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ — плотность стандартного нормального распределения (с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1), интеграл от которой по всей оси u равен 1. Отсюда окончательно находим
$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} = J_1 \ .$$
Рассматривая этот результат как функцию от x с параметром t, его можно интерпретировать как плотность нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией t.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$; интерпретация — см. выше.

Задача №3 (12 баллов)

На Рис. 1 представлена механическая система, состоящая из двух одинаковых маятников, каждый из которых представляет собой абсолютно упругий однородный шар, подвешенный на невесомой нити. Точки подвеса находятся на одной горизонтали, расстояние между ними равно диаметру шара. Рассматривается движение шаров в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса. Положения маятников описываются углами α_1 для левого маятника и α_2 для правого. Углы отсчитываются от нижнего положения против часовой стрелки.

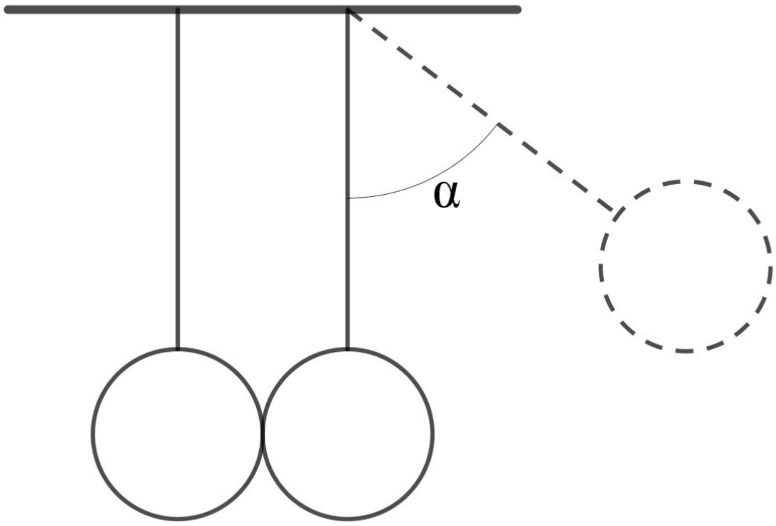

Рис. 1: Система маятников

Требуется вывести уравнения динамики системы и осуществить их линеаризацию при малых углах α_1, α_2. Используя линеаризованную модель, произвести расчет положения маятников через 1.25 сек после начала движения, если в начальный момент 1-й маятник находился в положении равновесия, а 2-ой был отведен на угол α и отпущен с нулевой скоростью. При расчете положить, что в единицах системы SI имеет место соотношение $l = \frac{g}{\pi^2}$, где l – расстояние от точки подвеса до центра шара, g – ускорение свободного падения.

Ответ: $\alpha_1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2 = 0$.

Задача №4 (14 баллов)

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\sqrt{|x|}\,\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2} = 0$$

с начальным условием $y(4) = e$. Найти значение $y(-1)$.

Ответ: $y(-1) = e^{-2}$.

Задача №5 (12 очков)

Найти количество четырехзначных чисел, не делящихся на 3 и таких, что в них нет цифр, делящихся на 3. Подсчитать общую сумму цифр всех таких четырехзначных чисел.

Ответ: искомая сумма цифр равна 14580.

Задача №6 (12 очков)

Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

Ответ: 576.

Задача №7 (14 очков)

Даны натуральные числа m и n, причем $m < n$. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ последовательно выбирают наугад два различных числа. Найдите вероятность того, что (алгебраическая) разность между первым выбранным числом и вторым будет больше или равна m.

Ответ: $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}$.

Задача №8 (исследовательская, 15 очков)

Будем считать, что Сингапур расположен точно на экваторе Земли. Экваториальный радиус Земли $R = 6378$ км, период суточного вращения Земли $T = 86164$ сек (**дополнительный вопрос:** почему не 24 часа ровно?). С верхнего этаже сингапурского небоскреба (высота над поверхностью Земли $h = 280$ м) в свободное падение отпущено тело (материальная точка). Найти отклонение точки падения тела от вертикали и указать, в какую сторону происходит отклонение (к западу или к востоку). Сопротивлением воздуха пренебречь.

Указания к решению. Эффект отклонения падающих тел от вертикали – это следствие вращения Земли с запада на восток (против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса) и кеплеровских законов орбитального движения (см. рис. 2). Будем считать для простоты, что гравитационное поле Земли в плоскости экватора эквивалентно полю точечной массы (массы Земли M, помещенной в центр Земли T). Рассмотрим инерциальную систему координат, расположенную в плоскости экватора. В этой системе тело, отпущенное в свободное падение с вершины небоскреба (точка B), получает горизонтальную начальную скорость V_0, обусловленную вращением Земли, и движется по кеплеровскому эллипсу, один из фокусов которого расположен в центре Земли T. Введем полярную систему координат (r, ϕ), где $r = r(t)$ — расстояние тела от центра Земли, $\phi = \phi(t)$ — угол отклонения от начального положения, $t=0$ — момент начала свободного движения тела. Воспользуйтесь следующими уравнениями кеплеровского орбитального движения:

$$r(t) = \frac{p}{1-e\cos\phi(t)}\ ,$$
$$r^2(t)\,\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\mu p}\ = \mathrm{const}$$

и учитывайте, что

$$p = Q(1-e)\ ,$$
$$V_0 = Q\,\frac{d\phi}{dt}(0) = \frac{2\pi Q}{T}\ ,$$

где e — эксцентриситет эллипса, p — его фокальный параметр, $\mu = GM = 398600$ км^3/сек^2, $Q = |BT| = r(0) = R+h$ — начальное расстояние точки от центра Земли, $\phi(0) = 0$. Вычислите время падения тела на Землю и угол поворота основания небоскреба (точка O) за это время, откуда найдите искомое отклонение (с точностью до малой наинизшего порядка относительно $\frac{h}{R}$) и его знак.

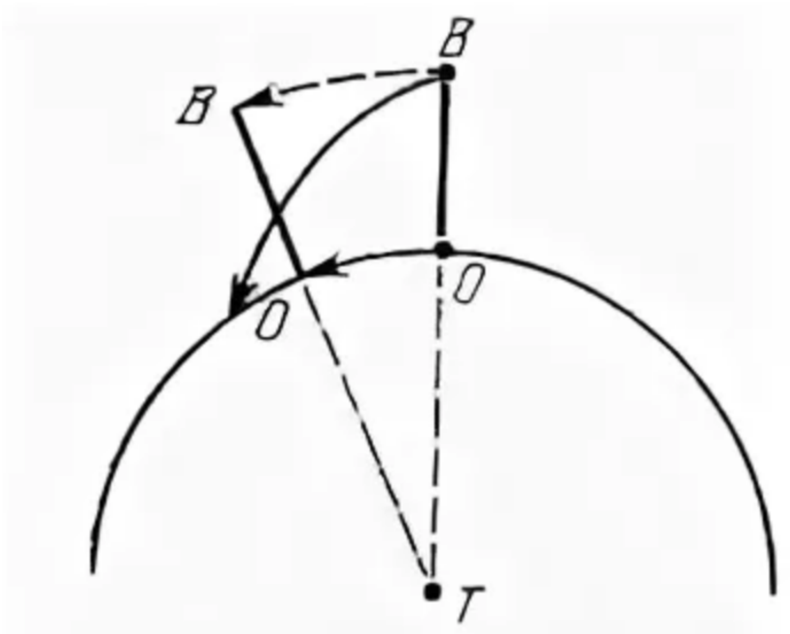

Рис. 2: Падение материальной точки на Землю

Решение.
Начальная (горизонтальная) скорость тела в инерциальном пространстве, в силу вращения Земли, равна $V_0 = \frac{2\pi}{T}(R+h) = 0.465112$ км/сек.

Отметим, что $T = 86164$ сек, а не 24 часа ровно (86400 сек), поскольку первая величина есть период вращения Земли в инерциальной (сидерической, звездной) системе координат, а второй — в неинерциальной ("солнечной"), в которой сутки есть средний период между двумя последовательными прохождениями Солнца через меридиан. Второй период длиннее первого, так как Земля совершает орбитальное движение относительно Солнца в ту же сторону, что и вращение вокруг своей оси. Для целей настоящей задачи необходимо использовать именно период вращения Земли в инерциальной системе координат.

Далее найдем геометрические параметры эллиптической траектории тела — фокальный параметр p и эксцентриситет e, которые связаны соотношением $p = (R + h)(1 - e)$. Учитывая, что в начальный момент ($t = 0$) радиус-вектор тела $r_0 = R + h$, а угловая скорость

$$\frac{d\phi}{dt}(0) = \dot{\phi}_0 = \frac{V_0}{r_0} \ ,$$

из уравнения $r^2\dot{\phi} = \sqrt{\mu p}$ (это уравнение является математическим выражением 2-го закона Кеплера) получаем

$$p = \frac{r_0^4\dot{\phi}_0^2}{\mu} = \frac{(R + h)^2 V_0^2}{\mu} = 22.079288$$

км, откуда

$$e = 1 - \frac{p}{R + h} = 0.996538 \ .$$

Мы получаем, таким образом, чрезвычайно вытянутый эллипс.

В момент $t = \tau$ падения тела на Землю имеем $r(\tau) = R$. Поэтому из уравнения эллипса (которое представляет собой математическое выражение 1-го закона Кеплера) $r(\tau) = \frac{p}{1 - e\cos\phi(\tau)}$ находим угол $\phi^* = \phi(\tau)$:

$$\phi^* = \arccos\left(\frac{1 - p/R}{e}\right) = 0.000552268$$

(рад).

Далее найдем время падения τ, а через него — угол, поворота Земли (основания башни) за это время, равный $\omega\tau$. Из уравнений 1-го и 2-го законов Кеплера

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{p}{1 - e\cos\phi(t)} \ , \\ r^2(t)\,\frac{d\phi}{dt} &= \sqrt{\mu p} \end{aligned}$$

получаем для производной обратной функции

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\frac{1}{(1 - e\cos\phi)^2} \ ,$$

откуда время падения будет равно

$$\tau = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\int_0^{\phi^*}\frac{d\phi}{(1 - e\cos\phi)^2} \ .$$

Этот интеграл можно найти аналитически, но учитывая, что ϕ^* — малая величина, мы аппроксимируем его по методу Симпсона. А именно, если $f(\phi) = \frac{1}{(1 - e\cos\phi)^2}$, то будем интерпроировать эту функцию на интервале $[0..\phi^*]$ с помощью квадратичного полинома

$$f(\phi) \approx a\phi^2 + b\phi + c \ ,$$

совпадающего с истинными значениями функции f в узлах $\phi = 0$, $\phi = \frac{\phi^*}{2}$ и $\phi = \phi^*$. Пусть $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(\frac{\phi^*}{2})$ и $f_2 = f(\phi^*)$. Тогда, решая соответствующую систему линейных уравнений, легко найти, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{\phi^{*2}}(f_2 - 2f_1 + f_0) \ , \\ b &= \frac{1}{\phi*}(4f_1 - 3f_0 - f_2) \ , \\ c &= f_0 \ , \end{aligned}$$

откуда получаем формулу метода Симпсона:

$$\int_0^{\phi*} f(\phi)\, d\phi \approx a\frac{\phi^{*3}}{3} + b\frac{\phi^{*2}}{2} + c\phi^* = \phi^* \left(\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{6}f_2\right) \approx 46.086557 \ .$$

Аналогичный результат можно получить, если разложить подынтегральную в ряд Тейлора с двумя членами. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(\phi) &= -\frac{2e\sin\phi}{(1 - e\cos\phi)^3} \ , \\ f''(\phi) &= \frac{6e^2\sin^2\phi}{(1 - e\cos\phi)^4} - \frac{2e\cos(\phi)}{(1 - e\cos\phi)^3} \ , \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{(1-e)^2} \approx 83452.05814 \ , \\ f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= -\frac{2e}{(1-e)^3} \approx 48048473.62 \ . \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^{\phi*} f(\phi)\, d\phi \approx f(0)\phi^* + \frac{f''(0)}{6}\phi^{*3} \approx 46.086557 \ ,$$

что с точностью до 6-го знака совпадает с результатом формулы Симпсона.

Отсюда $\tau \approx 7.573266$ сек, и отклонение точки падения от вертикали будет равно

$$\Delta = R(\phi^* - \omega\tau) \approx 0.0001$$

(км), то есть 10 см. Это вполне заметная величина. Так как $\Delta > 0$, отклонение происходит в сторону вращения Земли, то есть к востоку.

Ответ: 10 см к востоку.