ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Стратегия оптимального роста в многоагентной модели рынка с афинными выплатами

Выполнила студентка
609 группы
Токаева Александра Александровна

____
подпись студента

Научный руководитель:
профессор **Фалин Геннадий Иванович**

____
подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1 Введение

Основным предметом исследования в этой работе является стохастическая модель финансового рынка с дискретным временем, описывающая конкуренцию агентов (инвесторов) за распределение дивидендов нескольких активов. Основная цель работы – нахождение асимптотически оптимальной инвестиционной стратегии в частном случае модели рынка с короткоживущими активами и эндогенными ценами на активы, в которой несколько индивидуальных инвесторов, каждый из которых своими действиями оказывает влияние на цены, пытаются максимизировать свою доходность. Рынок здесь понимается под взвешенной суммой стратегий всех остальных индивидуальных инвесторов.

Наша задача сведется к нахождению стратегии, которой должен следовать индивидуальный инвестор, играющий против всего остального рынка, если он хочет быть не вытесненным с рынка на бесконечном горизонте времени. Задачи поиска "выживающих"стратегий обрели широкую популярность и послужили источником для возникновения раздела Эволюционных финансов. Одной из первых работ в это области была работа [4] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppe, K. R. (2016). Evolutionary behaviorial finance.

Задача поиска оптимальной стратегии инвестора активно исследуется в математических финансах с 80-х годов 20 века. Однако большинство моделей (как в дискретном, так и непрерывном времени), рассматриваемых в литературе, во-первых, рассматривают задачу одного инвестора (то есть инвестор своими действиями не влияет на цену), а во-вторых, считают цены активов заданными экзогенно. Наша модель (в дискретном времени) отличается от уже рассмотренных моделей и обладает следующими особенностями:

1) мы расссматриваем не действия одного (не влияющего на цены) инвестора против всего остального рынка, а игру N агентов, в которой каждый агент имеет свою стратегию, и его действия оказывают влияние на цены активов, что существенно усложняет поиск оптимальной стратегии, но, с другой стороны, позволяет рассматривать нашу задачу с точки зрения теории игр и равновесия Нэша.

2) Активы в нашей модели короткоживущие в том смысле, что они выпускаются в момент t, в момент $t+1$ выплачивают дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже, и исчезают, то есть эти короткоживущие активы нельзя продать в момент $t+1$, с них можно только получить дивиденды.

3) Дивиденды задаются экзогенно, а цены активов определяются эндогенно из условия равенства спроса и предложения. Отметим, что в нашей модели действия инвесторов предшествуют установлению цен, то есть сначала инвесторы объявляют, какую долю своего капитала они хотят вложить в каждый из активов, а после этого цены устанавливаются из условия равенства спроса и предложения. Этот подход аналогичен рыночным играм типа Shapley-Shubik. Несмотря на то, что он является упрощением реально наблюдаемой на рынке ситуации, этот подход экономически обоснован (см.[5] Shapley-Shubik 1977).

4) Размер дивидендов, выплачиваемых активом, зависит от объема капитала, который в него суммарно вложили все инвесторы на предыдущем шаге. Это экономически обоснованно, поскольку чем больше в компанию вложили,

тем больше у нее возможностей для развития и, соответственно, для выплаты больших дивидендов. Отметим, что именно эта зависимость от объема вложенного капитала отличает нашу модель от других и делает нашу задачу сложной.

5) Наша модель развивает подход, предложенный в статье [1] Amir et al, где также рассматривались оптимальные стратегии в модели с несколькими активами и эндогенными ценами в дискретном времени, но там величина дивидедов не зависела от объема вложений. Именно поэтому в модели Amir получалось найти оптимальную стратегию в явном виде. В нашем же случае мы не найдем явный вид оптимальной стратегии, но докажем ее существование и асимптотическую единственность. Найденная нами стратегия будет зависеть от текущих капиталов инвесторов, которые в свою очередь зависят от их прошлых действий, в то время как у Amir оптимальная стратегия не зависела от прошлых действий инвесторов. При этом в частном случае нашей модели, соотвествующем модели Amir, найденная нами стратегия окажется в точности стратегией из Amir.

6) Также стоит отметить работу [6] Дрокин-Житлухин, в которой тоже обобщали модель Amir, но не путем добавления зависимости дивидендов от объема инвестиций, а путем добавления к активам еще банковского счета, на котором можно оставлять часть средств, не вкладывая их в активы. В то время как в модели Amir и в нашей модели, каждый инвестор обязан вложить весь свой капитал в активы (при этом короткие продажи запрещены).

Основной результат работы состоит в доказательстве сущестования оптимальной рыночной стратегии. Будет показано, что пропорция капитала, которую эта стратегия вкладывает в актив $n = 1, 2$, задается неявно как неподвижная точка отображения

$$L_t^n(\omega, c, \lambda) = \mathrm{E}_t\left(\frac{c\lambda^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)}\right).$$

2 Модель рынка

В данном разделе будет предложена общая модель рынка с произвольным числом агентов и активов. В дальнейшем, однако будет рассматриваться только частный случай двух агентов и двух активов.

В модели финансового рынка присутствуют $M \geq 2$ агентов (инвесторов) и $N \geq 2$ активов, каждый из которых выплачивает дивиденды в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$. Размеры выплат пропорциональны доле вложенной инвестором в актив суммы относительно других инвесторов. Инвестиционная стратегия агента состоит в том, что в каждый момент времени он определяет, в какой пропорции следует распределить свой капитал между активами. Спрос на активы, порождаемый реализацией агентами их инвестиционных стратегий, приводит к установлению рыночных цен на активы.

3 Постановка задачи

Мы хотим явно предъявить relative optimal growth стратегию (и она окажется survival).

Лемма 1. *Для любого $t \geq 0$, рассмотрим $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\Delta_N)$-измеримую функцию $L_t \colon \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \Delta_N \to \Delta_N$, у которой n-я координата определена по формуле*

$$L_t^n(\omega, c, \lambda) = \mathrm{E}_t \left(\frac{c\lambda^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N (c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i)} \right).$$

Тогда существует $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримая функция $\widehat{\Lambda}_t(\omega, c)$ со значениями в Δ_N, такая что

$$L_t(\omega, c, \widehat{\Lambda}_t(\omega, c)) = \widehat{\Lambda}_t(\omega, c) \text{ для всех } (\omega, c). \tag{1}$$

Доказательство. Наша цель — найти неподвижную случайную величину $\widehat{\Lambda}_t(\omega, c)$. Для этого сначала докажем, что при каждом фиксированном (ω, c), функция $\lambda \mapsto L_t^n(\omega, c, \lambda)$ есть непрерывное отображение выпуклого компакта Δ_N в себя. После этого применим к этой функции теорему Брауэра о неподвижной точки для нахождения неподвижной точке λ при фиксированных (ω, c). Наконец, применим теорему Куратовского-Рыля-Норджевского для того, чтобы сделать измеримый выбор.

Напомним теорему Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 1 (Брауэра о неподвижной точке). *Любое непрерывное отображение выпуклого компакта в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.*

Мы рассматриваем L_t при фиксированных (ω, c). Тогда:

• L_t по построению отображает Δ_N в Δ_N, поскольку у L_t компоненты неотрицательные и в сумме дают единицу.

• Δ_N выпукло, так как если взять λ_i такие, что $\sum_{i=1}^N \lambda^i = 1$, то

$$\sum_{k=1}^N L_t^k = \frac{\sum_{k=1}^N c\lambda^k X_{t+1}^k + Y_{t+1}^k}{\sum_{i=1}^N c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i} = 1$$

• Δ_N компактно, так как оно очевидным образом замкнуто и ограничено, а это критерий компактности в $\mathbb{R}^N$.

• Докажем, что $L_t(\lambda)$ непрерывна по λ на Δ_N.

Для этого применим теорему Лебега о мажорируемой сходимости.

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Пусть дана тройка $(X, \mathcal{F}, \mu)$,

$\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и f — измеримые функции на X.

$f_k(x) \to f(x)$ п.в.

Тогда, если существует интегрируемая функция g, такя что $\forall k \in \mathbb{N} : |f_k(x)| \leq g(x)$ п.в, то f_n и f - интегрируемы, и

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

У нас x — это ω, f_k — это функция от λ, которая стоит под матожиданием, и в которую подставлена λ_k.

Итак, мы хотим проверить, что $L_t(\lambda)$ непрерывна по λ.

Будем проверять непрерывность по Гейне.

То есть дано, что $\lambda_k \to \lambda$ по норме в $\mathbb{R}^N$, а мы хотим проверить, что

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{c\lambda_k^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N c\lambda_k^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i}\right) \to \mathrm{E}_t\left(\frac{c\lambda^n X_{t+1}^n + Y_{t+1}^n}{\sum_{i=1}^N c\lambda^i X_{t+1}^i + Y_{t+1}^i}\right)$$

В терминах теоремы Лебега это имеет вид

$$\int\limits_\Omega f_k(\omega)\mu(d\omega) = \int\limits_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$$

• $f_k(\omega)$ и $f(\omega)$ — измеримые функции, как сумма и отношение измеримых функций.

• Почему $f_k(\omega) \to f(\omega)$ п.в?

Покажем, что при фиксированном ω: $f_k(\omega) \to f(\omega)$; Заметим, что при фиксированном ω: $X_{t+1}^n = a^n$, $Y_{t+1}^n = b^n$, где a^n и b^n — числа.
Тогда

$$f_k(\lambda) = \frac{c\lambda_k^n a^n + b^n}{\sum_{i=1}^N c\lambda_k^i a^i + b^i} \to \frac{c\lambda^n a^n + b^n}{\sum_{i=1}^N c\lambda^i a^i + b^i}$$

, так как по условию $\lambda_k \to \lambda$, а функция $f(\lambda)$ непрерывна по λ.

Действительно, докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такая, что для всех $|\lambda_k - \lambda| < \delta$ верно $|f_k - f| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
|f_k - f| = \left|\frac{c\lambda_k^n a^n + b^n}{\sum_{i=1}^N c\lambda_k^i a^i + b^i} - \frac{c\lambda^n a^n + b^n}{\sum_{i=1}^N c\lambda^i a^i + b^i}\right| = \left|\frac{h(\lambda_k)}{g(\lambda_k)} - \frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}\right| = \\
= \left|\frac{h(\lambda_k)g(\lambda) - h(\lambda)g(\lambda_k)}{g(\lambda_k)g(\lambda)}\right| = \\
= \left|\frac{(h(\lambda_k) - h(\lambda))\,g(\lambda) + h(\lambda)\,(g(\lambda) - g(\lambda_k))}{g(\lambda)\,(g(\lambda_k) - g(\lambda) + g(\lambda))}\right| = \\
= \left|\frac{(h(\lambda_k - \lambda))\,g(\lambda) + h(\lambda)\,(g(\lambda - \lambda_k))}{g(\lambda) ** 2 + g(\lambda)g(\lambda_k - \lambda)}\right| \to 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

при $\lambda_k \to \lambda$.

• Подходит $g == 1$, которая интегрируема, такая что $\forall k : |f_k(\omega)| \leq g(\omega)$ п.в, так как $f_k(\omega)$ при фиксированном ω имеет неотрицательные числитель и знаменатель, и эта дробь не превышает единицу, потому что ислителель входит в знаменатель в качестве одного из слагаемых.

Поэтому теорема Лебега применима.

$\Longrightarrow L_t(\lambda)$ – непрерывна по λ при фиксированных (ω, c).
$\Longrightarrow$ по теореме Брауэра о неподвижной точке: для фиксированных (ω, c) существует неподвижная точка λ.
Теперь надо сделать измеримый выбор.

Для этого докажем, что $A(\omega) \cap F$ измеримы (следуя теореме 10 из статьи bharucha-reid);

в терминах главы 17 книги Aliprantis, Border это означает слабую измеримость; там доказано, что для польских пространств (а наш симплекс такой) измеримость и слабая измеримость - одно и то же; Тогда применение теоремы 18.3 Куратовского-Рыля о том, что из слабой измеримости следует существование измеримого селектора завершает доказательство.

$\square$

Список литературы

[1] Amir R., Evstigneev I., Schenk-Hoppé, K., *Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games*, Annals of Finance, **9** (2013), 121–144.

[2] BHARUCHA-REID A. T. *FIXED POINT THEOREMS IN PROBABILISTIC ANALYSIS*, BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, **82** (1976), 641–657.

[3] Charalambos D. Aliprantis Kim C. Border *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, ISBN-10 3-540-29586-0, Ch.18, 591–600.

[4] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppe, K. R. (2016). *Evolutionary behaviorial finance.* In Haven, E. et al., editors, The handbook of Post Crisis Financial Modelling, pages 214-234. Palgrave Macmillan UK.

[5] Shapley, L. and Shubik, M. (1977) *Trade using one commodity as a means of payment.* Journal of political economy, 85(5):937-968.

[6] Drokin, Y. and Jhitlukhin, M. (2020) *Relative growth optimal strategies in an asset market game.*