Материалы к семинару по уравнениям в частных производных 28.04.2020

Пространства Соболева. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона. Продолжение.

Задачник под ред. Шамаева - параграф 1.2, задачник под ред. Владимирова - параграф 4

Существует много задач, посвященных исследованию принадлежности конкретной функции пространству Соболева. По сути, это упражнения на исследование сходимости интегралов. Но они дают представление о том, насколько сложно могут быть устроены функции из H^1.

1. Простейшим примером такого рода является функция

$$Q = |x|^\alpha, \quad \alpha = \text{const},$$

рассматриваемая в единичном шаре $B_1^n(0)$ в пространстве различной размерности. Для интегрируемости нужно, чтобы сама функция была интегрируема с квадратом и обобщенный градиент ее, совпадающая с обычным в случае, если обычный существует, тоже был интегрируем с квадратом.

Понятно, что препятствия для интегрируемости могут быть только в начале координат. Так как функция зависит только от радиуса, то удобно перейти к полярным, сферическим и т.д. координатам. Заметим, что для любой функции $f(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{B_1^n(0)} f(|x|)dx = C \int\limits_0^1 r^{n-1} f(r)dr.$$

Множитель r^{n-1} происходит от якобиана. Константу C можно вычислить, она зависит от полярных углов, но конкретное ее значение нам не нужно.

Прежде всего, заметим, что если $\alpha = 0$, то $Q = 1$, и она, разумеется, принадлежит H^1. Исследуем другие значения α.

- Если $Q \in L^2(B_1^n(0))$, то сходится интеграл

  $$\int\limits_{B_1^n(0)} Q^2(|x|)dx = C \int\limits_0^1 r^{n-1} r^{2\alpha} dr.$$

  Интеграл должен сходиться в нуле, поэтому $2\alpha + n - 1 > -1$, то есть $\alpha > -\frac{n}{2}$.

- Вычислим $\nabla Q = Q'(|x|)\,\frac{x}{|x|}$, поэтому $|\nabla Q|^2 = (Q'(|x|))^2$. Если $\nabla Q \in L^2(B_1^n(0))$, то сходится интеграл

$$\int\limits_{B_1^n(0)} |\nabla Q(|x|)|^2 dx = C \int\limits_0^1 r^{n-1} r^{2\alpha-2} dr.$$

  Поэтому $2\alpha + n - 3 > -1$, то есть $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$. Легко видеть, что это требование более ограничительно, чем первое.

Итак, условие $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$ выделяет множество ненулевых α, при которых $Q \in H^1(B_1^n(0))$. Если $n \geq 3$, то Q даже неограничена в нуле.

2. В предыдущем примере при $n = 2$ функция все же ограничена, однако этого может и не быть. Теорема вложения Соболева (прошлый семинар), гарантирует непрерывность и, следовательно, ограниченность функции, если Соболевский показатель $s > \frac{n}{2}$. То есть если $s = 1$, то этого недостаточно для непрерывности (с точностью до множества меры нуль). Действительно, существует пример функции $f = |-\ln|x||^{\frac{1}{3}}$, которая неограничена в нуле, но принадлежит $H^1(B_1^1(0))$ (проверьте!).

3. Если исследовать приходится функцию, содержащую логарифм, то нужно помнить, что проблема со сходимостью интеграла могут быть не только там, где функция обращается в бесконечность, но и там, где она обращается в ноль. Хороший пример такого рода дает решенная задача 1.12.

4. При исследовании принадлежности функций пространству Соболева удобно заменять функции на эквивалентные. Например, при исследовании принадлежности $|x|^\alpha \sin^\beta |x|$ пространству $H^1(B_1^n(0))$ вместо того, чтобы считать тяжелые интегралы, достаточно заметить, что $\sin^\beta |x| \sim |x|^\beta$, $x \to 0$.

5. Мы помним, что всякую обобщенную функцию f можно умножать на бесконечно дифференцируемую $a(x)$ и произведение af можно дифференцировать по обычным правилам: $(af)' = af' + a'f$. Поскольку при определении обобщенной производной по Соболеву мы делаем единственное изменение пространства основных функций (носитель их теперь не просто компактен, но лежит в Ω), то все предыдущие результаты остаются в силе. Однако результат умножения $f \in H^1(\Omega)$ на $a \in C^\infty(\Omega)$ уже может выводить из пространства $H^1(\Omega)$. В качестве примера можно привести $f = 1 \in H^1((0,1))$ и $a = \sqrt{x} \in C^\infty((0,1))$.

6. В случае $n = 1$ взаимосвязь между непрерывностью и принадлежностью $H^1((a,b))$ наиболее прозрачна: если функция принадлежит $H^1((a,b))$, то она непрерывна. Обратное неверно.

Первое утверждение следует из теоремы вложения Соболева. Второе утверждение доказывает пример $\sqrt{x}$.

7. Пространство $H_0^1((0,1))$ состоит в точности из функций из $H^1((0,1))$, обращающихся в ноль на концах интервала. То, что функции из $H_0^1((0,1))$ непрерывны, может быть доказано непосредственно: если c_k – коэффициенты разложения функции в ряд Фурье на (a,b), то ряд $\sum k^2|c_k|^2$ обязан сходиться, обеспечивая необходимую для непрерывной функции скорость убывания $|c_k|$, $k \to \infty$.

8. Задачи вроде 1.15, 1.16 основываются на поиске параметров, обеспечивающих обращение функции в ноль на концах интервала и сходимость интеграла от квадрата производной.

9. В случае $n = 1$ неравенство Фридрихса для функций из $H_0^1((a,b))$ выглядит совсем просто (см. задачу 4.71, Владимиров). Более того, можно показать, что это неравенство точное, то есть можно найти функцию, для которой это неравенство превращается в равенство, это $\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}$. Если же функция принадлежит только $H^1((a,b))$, то справедливо неравенство Пуанкаре (см. задачу 4.74, Владимиров).

Задачи для решения.

Шамаев: 1.8, 1.9 (см.ответ), 1.12 (есть решение, разобрать его), 1.14, 1.15, 1.16.