Листок 4

Задача 1. Пусть g — гладкая ограниченная функция на $\mathbb{R}$ с ограниченными производными. Докажите, что для достаточно малого T на $[0,T]$ существует классическое гладкое решение задачи Коши

$$-u_t(x,t)+\frac{1}{2}|u_x(x,t)|^2=0, \quad u(x,T)=g(x).$$

Задача 2. Пусть $g\colon \mathbb{R}\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ является гладкой по x, сама функция и ее производные по x ограничены и липшицевы по μ относительно метрики W_2. Докажите, что при достаточно малом $T>0$ существует единственное решение системы

$$\begin{cases} -\partial_t u(x,t)+\frac{1}{2}|u_x(x,t)|^2=0, \\ \partial_t\mu_t-\partial_x(u_x(x,t)\mu_t)=0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x,T)=g(x,\mu_T)$ и $\mu_0=\nu$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность (одномерный тор). Рассмотрим функционалы

$$A(\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{T}}\Bigl(-\varphi_t(x,t)+\tfrac{1}{2}|\varphi_x(x,t)|^2\Bigr)^2\,dx\,dt-\int_{\mathbb{T}}\varphi(x,0)\varrho_0(x)\,dx$$

и

$$B(\varrho,w)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{T}}\varrho(x,t)\Bigl|\frac{w(x,t)}{\varrho(x,t)}\Bigr|^2+\varrho(x,t)^2\,dxdt+\int_{\mathbb{T}}g(x)\varrho(x,T)\,dx.$$

Через K_0 обозначим множество функций $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{T})$, удовлетворяющих условий $\varphi(x,T)=g(x)$. Через K_1 обозначим множество таких пар (ϱ,w), что $\varrho,w\in L^1([0,T]\times\mathbb{T})$

$$\varrho>0, \quad \int_{\mathbb{T}}\varrho(x,t)\,dx=1, \quad \partial_t\varrho+\partial_x w=0.$$

Пусть (u,ϱ) решение системы

$$\begin{cases} -\partial_t u(x,t)+\frac{1}{2}|u_x(x,t)|^2=\varrho(x,t), \\ \partial_t\varrho(x,t)-\partial_x(u_x(x,t)\varrho(x,t))=0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x,T)=g(x)$, $\varrho(x,0)=\varrho_0(x)$. Докажите, что на паре $(\varrho,-\varrho u_x)$ достигается $\inf_{K_1}B(\varrho,w)$, а на функции u достигается $\inf_{K_0}A(\varphi)$.

Задача 4. В условиях предыдущей задачи с помощью теоремы Рокафеллара докажите, что

$$\inf_{K_0}A(\varphi)=\inf_{(\varrho,w)}B(\varrho,w).$$

Задача 5. Пусть $x\in\mathbb{R}$ и $t\in[0,T]$. Пусть $f(x,t)$ и $g(x)$ — непрерывные ограниченные функции, имеющие две непрерывные и ограниченные производные по x. Рассмотрим задачу оптимального управления с функционалом

$$J(\alpha,x,t)=\int_t^T\frac{\alpha(s)^2}{2}+f(y_x(s),s)\,ds+g(y_x(T)), \quad y_x(s)=x+\int_t^s\alpha(\tau)\,d\tau.$$

Положим $u(x,t)=\inf_\alpha J(\alpha,x,t)$ и через $A(x,t)$ обозначим множество оптимальных α, принадлежащих $L^2[t,T]$.

(i) Докажите, что $A(x,t)$ непусто и замкнуто относительно слабой сходимости в $L^2[t,T]$. Более того, докажите, что существует такое число $C>0$, что $\|\alpha\|_{L^\infty}\le C$ для всех α из $A(x,t)$ и всех x,t.

(ii) Докажите, что если $y_x(s)$ — оптимальное решение, то для всех s множество $A(y_x(s),s)$ состоит ровно из одного элемента.

(iii) Докажите, что $A(x,t)$ состоит ровно из одного элемента тогда и только тогда, когда функция $z\to u(z,t)$ дифференцируема в точке x.

Задача 6. Пусть в условиях предыдущей задачи $(x,t)\to\alpha(x,t)\in A(x,t)$ — борелевское отображение и

$$\Phi(x,t,s)=x+\int_t^s\alpha(x,\tau)\,d\tau.$$

(i) Докажите, что $\Phi(x,t,r) = \Phi(\Phi(x,t,s),s,r)$ и $\partial_s \Phi = -u_x(\Phi, s)$.

(ii) Проверьте, что для всякой вероятностной плотности $\varrho_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ семейство мер $\mu_t = \mu_0 \circ \Phi(\,\cdot\,, 0, t)^{-1}$, где $\mu_0 = \varrho_0\, dx$, удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_t \mu_t - \partial_x (u_x(x,t)\mu_t) = 0.$$

Используя принцип суперпозиции проверьте, что это единственное вероятностное решение с таким начальным условием.

Задача 7. Используя теорему Шаудера, задачи 5 и 6 и свойства вязкостных решений, докажите существование решения системы

$$\begin{cases} -\partial_t u(x,t) + \frac{1}{2}|u_x(x,t)|^2 = f(x,\mu_t), \\ \partial_t \mu_t - \partial_x(u_x(x,t)\mu_t) = 0 \end{cases}$$

с начальными условиями $u(x,T) = g(x)$ и $\mu_0 = \varrho_0\, dx$.