Краткий конспект лекций по курсу «Игры среднего поля»

Лекция 5

Метод исчезающей вязкости

Рассмотрим уравнение

$$-u_t + H(x,t,u,\nabla u) = 0.$$

Функция H предполагается непрерывной на $\mathbb{R}^{2n+2}$.

В типичных примерах нелинейных уравнений с частными производными первого порядка, описывающих движение частиц некоторой среды, появление у решений особенностей связано с взаимодействием этих частиц. Такое взаимодействие описывается с помощью добавления к уравнению слагаемого вида $\varepsilon\Delta u$, $\varepsilon > 0$. Оказывается, что новое уравнение

$$-u_t + H(x,t,u,\nabla u) = \varepsilon\Delta u$$

в определенном смысле более регулярное. Рассмотрим решения u^ε и предположим, что эти решения локально равномерно сходятся к непрерывной функции u при $\varepsilon \to 0$. Естественно предположить, что u является решением исходного уравнения (уже без $\varepsilon\Delta$). Однако, напрямую перейти к пределу в уравнении невозможно, так как нет сходимости u_t^ε, ∇u^ε и Δu^ε. Такой сходимости в общем случае и не может быть, так как предельное уравнение может не иметь гладких решений вовсе.

Будем говорить, что $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u сверху, если $u-\varphi$ в точке (x_0,t_0) имеет строгий локальный максимум, и $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u снизу, если $u-\varphi$ в точке (x_0,t_0) имеет строгий локальный минимум.

Пусть $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u сверху. Можно показать (и это будет сделано ниже), что найдутся стремящаяся к нулю последовательность ε_j и сходящаяся к (x_0,t_0) последовательность точек (x_j,t_j) локального максимума функций $u^{\varepsilon_j} - \varphi$. Так как

$$u_t^{\varepsilon_j}(x_j,t_j) = \varphi_t(x_j,t_j), \quad \nabla u^{\varepsilon_j}(x_j,t_j) = \nabla\varphi(x_j,t_j), \quad \Delta u^{\varepsilon_j}(x_j,t_j) \le \Delta\varphi_t(x_j,t_j),$$

то

$$-\varphi_t(x_j,t_j) + H(x_j,t_j,u(x_j,t_j),\nabla\varphi(x_j,t_j)) = \varepsilon_j\Delta\varphi(x_j,t_j).$$

Функция φ гладкая и можно перейти к пределы при $j \to \infty$. Получаем

$$-\varphi_t(x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),\nabla\varphi(x_0,t_0)) \le 0.$$

Если $\varphi \in C^2$ касается в точке (x_0,t_0) функции u снизу, то аналогичные рассуждения приводят к неравенству

$$-\varphi_t(x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),\nabla\varphi(x_0,t_0)) \ge 0.$$

Именно эти неравенства используются для определения решения.

Вязкостные решения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество. Функция $u \in C(\Omega)$ называется вязкостным решением уравнения

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0,$$

если для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции φ и всякой точки x_0 из Ω верны утверждения: 1) если x_0 — точка локального максимума функции $u-\varphi$, то $F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)) \le 0$, 2) если x_0 — точка локального минимума функции $u-\varphi$, то $F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)) \ge 0$.

Так как добавление и вычитание из φ функции $|x-x_0|^4$ не меняет $D\varphi(x_0)$ и $D^2\varphi(x_0)$, то строгий локальный максимум (минимум) в определении вязкостного решения можно заменить нестрогим.

Если выполняется лишь первая часть определения, то u называется вязкостным суб-решением, а если выполняется лишь вторая часть определения, то u называется вязкостным супер-решением.

В случае, когда уравнение не содержит D^2u, то в определении вязкостного решения можно (т.е. получится эквивалентное определение) дважды непрерывно дифференцируемую функцию φ заменить на один раз непрерывно дифференцируемую функцию.

Отметим, что в общем случае у непрерывной функции есть точки, в которых нельзя ее коснуться гладкой функцией сверху (снизу). Однако имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $u \in C(\Omega)$. Множество точек, в которых u можно коснуться гладкой функцией сверху (снизу), всюду плотно в Ω.*

Доказательство. Пусть $B(x_0, r)$ – произвольный шар, который с замыканием лежит в Ω. Функция

$$v(x) = u(x) - \frac{|x - x_0|^2}{2\varepsilon}$$

в точке x_0 принимает значение $u(x_0)$, а на границе $B(x_0, r)$

$$v(x) \leq \max_{\partial B(x_0,r)} u - \frac{r^2}{2\varepsilon}.$$

Следовательно, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ значение v в точке x_0 больше всякого значения v на $\partial B(x_0, r)$. Так как v непрерывная функция, то на $\overline{B}(x_0, r)$ функция v принимает в некоторой точке z максимальное значение. Из сказанного выше следует, что точка z — внутренняя точка $B(x_0, r)$. □

Следующее утверждение описывает связь вязкостных и классических решений.

Предложение 2. *Если $u \in C^1(\Omega)$ является вязкостным решением $F(x, u, Du) = 0$ в Ω, то u является классическим решением этого уравнения. Если $u \in C^1(\Omega)$ является классическим решением уравнения $F(x, u, Du) = 0$ в Ω, то u является вязкостным решением этого уравнения.*

Доказательство. Для обоснования первого утверждения достаточно заметить, что $u - u$ во всякой точке имеет локальный минимум и локальный максимум (конечно нестрогие), а это по определению влечет неравенства $F(x, u(x), Du(x)) \leq 0$ и $F(x, u(x), Du(x)) \geq 0$. Второе утверждение следует из того, что в точке максимума (минимума) функции $u - \varphi$ выполняется равенство $Du = D\varphi$. □

Отметим, что похожее утверждение выполняется и для уравнений, содержащих D^2u, но с дополнительным условием эллиптичности:

$$X \leq Y \quad \Rightarrow \quad F(x, u, p, X) \geq F(x, u, p, Y).$$

Замкнутость относительно предельных переходов

Лемма 1. *Если последовательность функций $u_n \in C(\Omega)$ локально равномерно сходится к функции $u \in C(\Omega)$ и a — точка строгого локального максимума функции u, то найдется последовательность локальных максимумов a_n функций u_n, которые сходятся к a.*

Доказательство. Пусть $\overline{B}(a, r)$ — замкнутый шар, на котором $u(x) < u(a)$ при $x \neq a$. Из-за равномерной сходимости u_n к u найдется номер N, начиная с которого $u_n(x) < u_n(a)$ для всех $x \in \partial B(a, r)$. Пусть a_n — точка максимума u_n на шаре $\overline{B}(a, r)$. Точка a_n лежит внутри $B(a, r)$. Из всякой подпоследовательности a_{n_j} можно выбрать дальнейшую сходящуюся подпоследовательность $a_{n_{j_k}}$. Так как a — единственная точка максимума функции u в $\overline{B}(a, r)$, то последовательность $a_{n_{j_k}}$ сходится к a. Следовательно, вся последовательность a_n сходится к a. □

Предложение 3. *Если при $\varepsilon \to 0+$ функции $F_\varepsilon(x, u, p, X)$ локально равномерно сходятся к $F(x, u, p, X)$, функции u^ε локально равномерно сходятся к u в Ω и u^ε — вязкостные решения уравнения $F_\varepsilon(x, u^\varepsilon, Du^\varepsilon, D^2u^\varepsilon) = 0$ на Ω, то u является вязкостным решением уравнения $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ на Ω.*

Доказательство. Немедленно следует из леммы и определения вязкостного решения. □

Принцип сравнения

Важнейшую роль в теории вязкостных решений играют разнообразные принципы сравнения. Обсудим лишь один вариант принципа сравнения для решений уравнений

$$-u_t + H(x, t, Du) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T).$$

Далее считаем, что

$$|H(x,t,p)-H(x,t,q)|\le C|p-q|,\quad |H(x,t,p)-H(y,s,p)|\le C(1+|p|)(|x-y|+|t-s|).$$

Теорема 1. *Предположим, что $u\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ является в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ вязкостным субрешением, а $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ является в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ вязкостным суперрешением уравнения $-u_t+H(x,t,Du)=0$. Предположим также, что u,v — ограничены и равномерно непрерывны и $u(x,T)\le v(x,T)$, то $u(x,t)\le v(x,t)$ для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T)$.*

Нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Пусть $u\in C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ является в $\mathbb{R}^d\times(0,T)$ вязкостным субрешением уравнения $-u_t+H(x,t,Du)=0$. Пусть $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ и $u-\varphi$ в точке $(x_0,0)$ достигает локального максимума, то*

$$-\varphi_t(x_0,0)+H(x_0,0,D\varphi(x_0,0))\le 0.$$

Аналогичное утверждение имеет место для вязкостного суперрешения.

Доказательство. Можно считать, что максимум строгий. Пусть $\varepsilon>0$. Рассмотрим функцию

$$w^{\varepsilon}(x,t)=u(x,t)-\varphi(x,t)-\frac{\varepsilon}{t}.$$

Существует последовательности $\varepsilon_j\to 0+$ и $(x_j,t_j)\to(x_0,0)$, где (x_j,t_j) — точка локального максимума функции w^{ε_j} и $t_j>0$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{t_j^2}-\varphi_t(x_j,t_j)+H(x_j,t_j,D\varphi(x_j,t_j))\le 0,$$

в частности, верно неравенство

$$-\varphi_t(x_j,t_j)+H(x_j,t_j,D\varphi(x_j,t_j))\le 0.$$

Устремляя $j\to+\infty$ получаем требуемое неравенство. □

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Предположим, что

$$\sup_{x,t}\big(u(x,t)-v(x,t)\big)=q>0.$$

Пусть $\varepsilon>0$ и $\lambda>0$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x,t,y,s)=u(x,t)-v(y,s)-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}-\frac{|t-s|^2}{2\varepsilon}+\lambda(t+s)-\varepsilon(|x|^2+|y|^2).$$

Так как $\Phi(x,t,x,t)=u(x,t)-v(x,t)+2\lambda t-2\varepsilon|x|^2$, то для достаточно малых λ и ε верно неравенство

$$\sup_{x,t,s,y}\Phi(x,t,y,s)\ge\frac{q}{2}.$$

Далее положительное число λ фиксировано, а $\varepsilon\to 0$. Пусть $(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y_\varepsilon,s_\varepsilon)$ — точка максимума функции Φ. Из неравенства

$$u(x_\varepsilon,t_\varepsilon)-v(y_\varepsilon,s_\varepsilon)-\frac{|x_\varepsilon-y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}-\frac{|t_\varepsilon-s_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}+\lambda(t_\varepsilon+s_\varepsilon)-\varepsilon(|x_\varepsilon|^2+|y_\varepsilon|^2)\ge\Phi(0,T,0,T).$$

следует, что

$$|x_\varepsilon-y_\varepsilon|=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad |t_\varepsilon-s_\varepsilon|=O(\sqrt{\varepsilon}),\quad \varepsilon(|x_\varepsilon|^2+|y_\varepsilon|^2)=O(1).$$

В частности, имеем

$$|x_\varepsilon|+|y_\varepsilon|=O(\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

Перепишем неравенство $\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y_\varepsilon,s_\varepsilon)\ge\Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,x_\varepsilon,t_\varepsilon)$ в следующем виде

$$\frac{|x_\varepsilon-y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}+\frac{|t_\varepsilon-s_\varepsilon|^2}{2\varepsilon}\le v(x_\varepsilon,t_\varepsilon)-v(y_\varepsilon,s_\varepsilon)+\lambda(t_\varepsilon-s_\varepsilon)+\varepsilon(|x_\varepsilon|+|y_\varepsilon|)|x_\varepsilon-y_\varepsilon|.$$

Так как функция v равномерно непрерывна, то из последнего выводим

$$|x_\varepsilon-y_\varepsilon|=o(\sqrt{\varepsilon}),\quad |t_\varepsilon-s_\varepsilon|=o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Предположим, что t_ε и s_ε строго меньше T. Функция

$$(x,t) \to \Phi(x,t,y_\varepsilon,s_\varepsilon)$$

в точке $(x_\varepsilon,t_\varepsilon)$ достигает максимума и, следовательно, по определению вязкостного субрешения

$$\lambda - \frac{t_\varepsilon - s_\varepsilon}{\varepsilon} + H(x_\varepsilon,t_\varepsilon,2\varepsilon x_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \leq 0$$

Функция

$$(y,s) \to \Phi(x_\varepsilon,t_\varepsilon,y,s)$$

в точке $(y_\varepsilon,s_\varepsilon)$ достигает максимума и, следовательно, по определению вязкостного субрешения

$$-\lambda - \frac{t_\varepsilon - s_\varepsilon}{\varepsilon} + H(y_\varepsilon,s_\varepsilon,-2\varepsilon y_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \geq 0$$

Используя полученные неравенства, приходим к оценке

$$2\lambda \leq H(y_\varepsilon,s_\varepsilon,-2\varepsilon y_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) - H(x_\varepsilon,t_\varepsilon,2\varepsilon x_\varepsilon + \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}).$$

Правая часть оценивается сверху выражением

$$2\lambda \leq 2\varepsilon C(|x_\varepsilon| + |y_\varepsilon|) + C\big(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + |t_\varepsilon - s_\varepsilon|\big)\Big(1 + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon} + 2\varepsilon|x_\varepsilon|\Big).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ получаем неравенство $2\lambda \leq 0$, которое противоречит условию $\lambda > 0$. Следовательно, при достаточно малом ε хотя бы одно из чисел t_ε или s_ε совпадают с T. Это означает, что t_ε и s_ε стремятся к T. Имеем

$$\frac{q}{2} \leq u(x_\varepsilon,t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon,s_\varepsilon) + \lambda(t_\varepsilon + s_\varepsilon) \leq v(x_\varepsilon,t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon,s_\varepsilon) + \lambda(t_\varepsilon + s_\varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю приходим к неравенству $q \leq 4\lambda T$, которое не может выполняться при достаточно малом λ. Таким образом, предположение о положительности q приводит к противоречию. □

Следствие 1. *Пусть*

$$|H(p) - H(q)| \leq C|p-q|, \quad |f_i(x,t) - f_i(y,s)| \leq C(|x-y| + |t-s|).$$

Предположим, что u^1, u^2 — вязкостные решения уравнений

$$-u^1_t + H(\nabla u^1) + f_1 = 0, \quad -u^2_t + H(\nabla u^2) + f_2 = 0.$$

Тогда

$$|u^1(x,t) - u^2(x,t)| \leq \sup_x |u^1(x,T) - u^2(x,T)| + T\sup_{x,t} |f_1(x,t) - f_2(x,t)|.$$

Следствие 2. *Пусть*

$$|H(p) - H(q)| \leq C|p-q|, \quad |f(x,t) - f(y,s)| \leq C(|x-y| + |t-s|).$$

Предположим, что u — вязкостное решение уравнения

$$-u_t + H(\nabla u) + f = 0$$

и $x \to u(x,T)$ — липшицева функция. Тогда существует такое число $L > 0$, что

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leq L|x-y|.$$

Доказательство. Применяем предыдущее следствие к $u^1(x,t) = u(x,t)$ и $u^2(x+h,t)$. □