

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Стратегия оптимального роста в многоагентной модели
рынка с афинными выплатами

Выполнила студентка
609 группы
Токаева Александра Александровна

подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. **Житлухин Михаил Валентинович**

подпись научного руководителя

Москва
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Модель рынка	5
3	Выживающие и лог-оптимальные стратегии	9
3.1	Определения выживающей и лог-оптимальной стратегии	9
3.2	Построение лог-оптимальной стратегии	10
3.3	Лог-оптимальная стратегия определяет агрегированное поведение рынка	12
4	Численный пример	13
5	Связь с другими моделями	14
5.1	Модель с экзогенными размерами дивидендов.	15
5.2	Классическая модель с экзогенными ценами.	15
6	Доказательства основных результатов	17
6.1	Вспомогательные результаты	17
6.2	Доказательство Предложения 2 о неподвижной точке	19
6.3	Доказательство Теоремы 1	20
6.4	Доказательство Теоремы 2	22
6.5	Доказательство Теоремы 3	23
7	Заключение	24
8	Список литературы	25

1 Введение

Основным предметом исследования в данной работе является стохастическая модель финансового рынка с дискретным временем, описывающая конкуренцию агентов (инвесторов) за несколько активов на бесконечном горизонте времени. Выплаты активов делятся между инвесторами пропорционально доле капитала, вложенного инвестором в этот актив. Цены на рынке задаются эндогенно из условия краткосрочного равенства спроса и предложения для каждого из активов. Как следствие, прибыль или убыток инвестора зависит не только от реализовавшихся выплат активов, но и от действий остальных инвесторов.

Основная цель работы — нахождение стратегии, называемой стратегией оптимального относительного роста (или лог-оптимальной). Суть этой стратегии заключается в том, что логарифм относительного капитала использующего эту стратегию инвестора является субмартингалом вне зависимости от того, какие стратегии используют остальные инвесторы. Под относительным капиталом мы понимаем долю капитала инвестора от общего капитала на рынке.

Хорошо известно, что в стандартных моделях рынка субмартингалное свойство стратегии влечет за собой ряд оптимальных свойств (см. [1], [13]). В нашей модели найденная стратегия также окажется оптимальной в следующем смысле: относительный капитал использующего эту стратегию инвестора остается отделенным от нуля с вероятностью один. Кроме того, мы покажем, что если репрезентативная стратегия остальных инвесторов асимптотически отличается от оптимальной стратегии, то доля капитала инвестора с оптимальной стратегией стремится к единице.

Модель, изучаемую в работе, в общих словах можно описать следующим образом. На рынке присутствуют K активов, выплачивающих дивиденды в дискретные моменты времени, а также N агентов, которые могут покупать и продавать активы и получать выплачиваемые дивиденды (но короткие продажи запрещены). С течением времени капитал инвесторов изменяется за счет получения дивидендов (подчеркнем, что активы короткоживущие, поэтому агент не получает прибыль от изменения цены актива на длинном горизонте — потому что актив живет только на протяжении одного временного промежутка). В целом, такая модель во многом схожа со стандартными моделями финансовой математики, с той лишь разницей, что в нашей модели цены активов определяются не экзогенно, а эндогенно, а именно, стратегиями инвесторов. Другими словами, в нашей модели мы считаем, что предложение каждой акции фиксировано (и, без ограничения общности, равно единице), а цена акции должна быть такой, чтобы спрос инвесторов оказался равен предложению.

Эта задача является продолжением исследований в области теории оптимального роста. Первыми работами в этом направлении были [14], [6], где были найдены асимптотически оптимальные стратегии для моделей с дискретным временем. Далее эти результаты были значительно улучшены. Среди множества работ можно выделить [1], где была рассмотрена общая модель с дискретным временем. Однако в этой работе дивиденды задавались экзогенно и, кроме того, рассматривалась задача одного инвестора, а не задача конкуренции инвесторов.

Наша модель обобщает модель [3], где исследовались оптимальные стратегии в модели рынка с короткоживущими активами в дискретном времени. В нашей модели предполагается аффинная структура выплат активов, что существенно осложняет нахождение оптимальной стратегии. Также стоит отметить статью [8], в которой тоже обобщается модель из [3], но другим способом: добавлением к короткоживущим активам безрискового актива (банковского счета). Последние достижения в области Эволюционных финансов представлены в [9], [12].

Таким образом, наша модель в дискретном времени обладает следующими особенностями:

1) мы рассматриваем не действия одного (не влияющего на цены) инвестора против всего остального рынка, а игру нескольких агентов, в которой каждый агент имеет свою стратегию, каждая из которых оказывают влияние на цены активов, что существенно усложняет поиск оптимальной стратегии.

2) Активы в нашей модели короткоживущие в том смысле, что они выпускаются в момент t , в момент $t + 1$ выплачивают дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже, и исчезают. Другими словами, короткоживущие активы нельзя продать в момент $t + 1$, от них можно только получить дивиденды.

3) Дивиденды задаются экзогенно, а цены активов определяются эндогенно из условия равенства спроса и предложения. Отметим, что в нашей модели действия инвесторов предшествуют установлению цен, то есть сначала инвесторы объявляют, какую долю своего капитала они хотят вложить в каждый из активов, а после этого цены устанавливаются из условия равенства спроса и предложения. Несмотря на то, что он является упрощением реально наблюдаемой на рынке ситуации, этот подход экономически обоснован (см.[15]).

4) Размер дивидендов, выплачиваемых активом, зависит от объема капитала, который в него суммарно вложили все инвесторы на предыдущем шаге. Это экономически обоснованно, поскольку чем больше в компанию вложили, тем больше у нее возможностей для развития и, соответственно, для выплаты больших дивидендов. Отметим, что именно эта зависимость от объема вложенного капитала (который, в свою очередь, зависит от стратегий агентов) отличает нашу модель от других и делает нашу задачу сложной.

5) Наша модель развивает подход, предложенный в [3], где также рассматривались оптимальные стратегии в модели с несколькими активами и эндогенными ценами в дискретном времени, но величина дивидендов актива не зависела от объема вложенного в актив капитала. Именно поэтому в модели [3] удалось найти оптимальную стратегию в явном виде. В нашем же случае мы не найдем явный вид оптимальной стратегии, но докажем ее существование и асимптотическую оптимальность. Найденная нами стратегия будет зависеть от текущих капиталов инвесторов, которые в свою очередь зависят от их прошлых действий, в то время как в [3] оптимальная стратегия не зависела от прошлых действий инвесторов. При этом в частном случае нашей модели, соответствующем модели [3], найденная нами стратегия окажется в точности стратегией из [3].

Основной результат работы состоит в доказательстве существования стра-

тегии оптимального относительного роста (или лог-оптимальной стратегии). Будет показано, что пропорция капитала, которую эта стратегия вкладывает в актив $k = 1, 2$, задается неявно как неподвижная точка отображения

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = E_t \left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Дипломная работа организована следующим образом. В разделе 2 описывается общая модель рынка с эндогенными ценами. В разделе 3 даются определения выживающей и лог-оптимальной стратегии, а также формулируются основные результаты об ее существовании и асимптотическом поведении. В разделе 4 приводится численный пример, демонстрирующий поведение выживающей стратегии на рынке. В разделе 5 показывается связь результатов в нашей модели с результатами в других известных моделях. Раздел 6 содержит доказательства основных результатов. Раздел 7 подводит итог работы.

2 Модель рынка

В данном разделе будет предложена общая модель рынка с произвольным числом агентов и активов. В дальнейшем, однако, будет рассматриваться только частный случай двух агентов и двух активов.

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство с полной дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Рынок в модели состоит из $N \geq 2$ агентов и $K \geq 2$ короткоживущих активов. В каждый из моментов времени $t = 0, 1, \dots$ на рынке "рождается" одна единица каждого из K активов, а инвесторы одновременно и независимо принимают решение о том, в каких долях они инвестируют свой капитал в каждый из K активов на промежутке от t до $t + 1$. Цена на каждый из активов в момент t устанавливается эндогенно из условия равенства спроса и предложения в момент t . После этого в момент $t + 1$ каждый из активов выплачивает дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже. Эти дивиденды распределяются между инвесторами пропорционально капиталу, который они инвестировали в данный актив. После выплаты дивидендов все активы умирают и рождаются заново, и процедура определения цены происходит опять.

Рынок эволюционирует под влиянием случайного фактора (возможно, многомерного), который моделируется посредством случайных величин s_1, s_2, \dots из измеримого множества Ω . Случайная величина s_t интерпретируется как состояние рынка в момент времени t .

Агент n , где $n = 1, \dots, N$, характеризуется своим неслучачным начальным капиталом $W_0^n > 0$ и стратегией Λ^n . Капитал W_t^n n -го агента в произвольный ненаачальный момент t определяется из динамики, которая будет приведена ниже, и образует \mathbb{F} -измеримую случайную последовательность капиталов $W^n = (W_t^n)_{t=0}^\infty$.

В каждый момент времени t каждый агент n выбирает вектор долей $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \dots, \lambda_t^{n,K})$, в которых он вкладывает свой капитал W_t^n в каждый из K активов в момент времени t (в нашей модели агент обязан вложить весь свой

капитал в активы, банковского счета нет). Например, сумма $\lambda_t^{n,k} W_t^n$ тратится агентом n на покупку актива k (а сколько именно единиц актива k этот агент купил — будет определено, когда все агенты объявят, сколько денег они выделили на покупку актива k , и из краткосрочного равенства спроса и предложения определится цена данного актива).

Доли λ_t^n для разделения капитала могут зависеть от истории состояний случайного фактора $\bar{s}_{t-1} := (s_1, \dots, s_{t-1})$, вектора начальных капиталов $\bar{W}_0 := (W_0^1, \dots, W_0^N)$ и истории стратегий всех агентов $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, \dots, \lambda_{t-1})$, где $\lambda_s = (\lambda_s^1, \dots, \lambda_s^N)$.

Стратегия n -го агента — это последовательность $\Lambda^n = (\Lambda_t^n)_{t=0}^\infty$ векторнозначных функций

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$$

со значениями в стандартном K -симплексе

$$\Delta_K = \{(a^1, \dots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \dots + a^K = 1\}$$

и измеримых относительно $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. - что тут надо поставить? Тут же не от одного омега теперь зависимость, а от последовательности, и еще от последовательности лямбд?

Для $k = 1, \dots, K$, k -я координата $\Lambda_t^{n,k}$ соответствует доле капитала, которую n -й агент вложил в покупку k -го актива в момент времени t . Короткие продажи запрещены. Для $t = 0$, функция $\Lambda_0^n = \Lambda_0^n(\bar{W}_0)$ не зависит от истории состояний случайного фактора и истории стратегий агентов.

Зависимость Λ_t^n от $\bar{\lambda}_{t-1}$ нельзя опустить, потому что построенная нами оптимальная стратегия будет зависеть от полного капитала рынка, который, в свою очередь, зависит от $\bar{\lambda}_t$. Это правильная фраза? Или почему нельзя опустить? И тут λ_{t-1} или λ_t должно быть?

Если заданы вектор начальных капиталов $\bar{W}_0 = (W_0^1, \dots, W_0^N)$ и профиль стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$, то инвестиционные стратегии каждого агента на этом рынке определяются следующим рекурсивным соотношением:

$$\lambda_0^n = \Lambda_0^n(\bar{W}_0), \quad \lambda_t^n(\bar{s}_t) = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \quad t \geq 1, \quad (1)$$

где $\bar{\lambda}_t(\bar{s}_t) = (\lambda_0, \lambda_1(\bar{s}_1), \dots, \lambda_t(\bar{s}_t))$. Далее мы будем опускать зависимость от \bar{s}_t , где это не будет приводить к неоднозначности.

Обозначим за $\bar{P}_t = (P_t^1, \dots, P_t^K)$ вектор цен активов в момент времени t . Координата P_t^k соответствует цене одной единицы актива k в момент t . Зададим динамику капитала $W_t^n = W_t^n(\bar{s}_t)$ n -го агента и вектора цен $\bar{P}_t = \bar{P}_t(\bar{s}_t)$ для заданного профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ и вектора начальных капиталов \bar{W}_0 .

Цены формируются из условия равенства спроса и предложения в каждый момент времени. Состав портфеля агента n в момент времени $t \geq 0$ характеризуется вектором $\bar{X}_t^n = (X_t^{n,1}, \dots, X_t^{n,K})$, где $X_t^{n,k}$ есть количество единиц актива k в портфеле. Скалярное произведение $\langle \bar{P}_t, \bar{X}_t^n \rangle = \sum_{k=1}^K P_t^k X_t^{n,k}$ показывает цену всего портфеля агента n в момент времени t .

В момент времени $t = 0$ капитал n -го агента равен его неслучайному начальному капиталу W_0^n . За $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$, $k = 1, \dots, K$, обозначим величину

дивидендов, которые единица актива k выплачивает в момент времени $t \geq 1$. Поскольку мы предполагаем, что на рынке количество каждого актива равно единице, то величина A_t^k характеризует полную выплату дивидендов от актива k . Тогда величина капитала n -го агента в момент времени $t \geq 1$ равна

$$W_t^n = \langle \bar{A}_t, \bar{X}_{t-1}^n \rangle = \sum_{k=1}^K A_t^k X_{t-1}^{n,k}, \quad (2)$$

То есть величина капитала в момент времени t формируется из выплат акций, купленных в момент времени $t - 1$.

Если агент n вложил долю $\lambda_{t,k}^n$ своего капитала в покупку актива k в момент t , тогда число единиц актива, который он купил, равно

$$X_t^{n,k} = \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k}. \quad (3)$$

Напомним, что каждого актива на рынке ровно 1 единица, и при этом цены устанавливаются такие, чтобы спрос был равен предложению, тогда для всех $t \geq 0$ и $k = 1, \dots, K$ выполнено:

$$1 = \sum_{n=1}^N X_t^{n,k} = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} = \frac{1}{P_t^k} \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n,$$

Отсюда находим, что установившиеся равновесные цены имеют вид

$$P_t^k = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n. \quad (4)$$

Если правая часть этого выражения равна нулю на множестве \bar{s}_t , то в формуле (3) полагаем $X_t^{n,k} = 0$ на этом множестве. **а что, там разве и так ноль не будет, если справа ноль?**

Таким образом, имея профиль стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ и вектор начальных капиталов, мы можем рекурсивно с помощью выражений (2)–(4) восстановить случайную траекторию системы, задаваемой последовательностями капиталов агентов W_t^n , равновесных цен $\bar{P}_t = (P_t^1, \dots, P_t^K)$ и составов портфелей $X_t^n = (X_t^{n,1}, \dots, X_t^{n,K})$.

В частности, используя (2)–(4), получаем, что последовательность капиталов W_t^n удовлетворяет соотношению

$$W_{t+1}^n = \sum_{k=1}^K X_{t-1}^{n,k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n} A_{t+1}^k, \quad (5)$$

при этом полагаем $0/0 = 0$ под знаком суммирования.

Мы предполагаем, что дивиденды A_t^k *эндогенные* в том смысле, что они могут зависеть от стратегий агентов. Далее мы будем рассматривать специальный случай формы дивидендов, который мы называем *аффинными выплатами*.

Обозначим за W_t полный капитал рынка в момент времени t , а за μ_t^k обозначим долю полного капитала рынка, вложенную в покупку k -го актива в момент времени t :

$$W_t = \sum_{n=1}^N W_t^n, \quad \mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n.$$

Мы предполагаем, что величины дивидендов A_{t+1}^k являются афинными функциями от μ_t^k :

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \beta_{t+1}^k \mu_t^k, \quad (6)$$

где α_{t+1}^k и β_{t+1}^k — произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \quad (7)$$

$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \quad (8)$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными функциями a_{t+1}^k, b_{t+1}^k .

Соотношения (6)–(8) означают, что величина дивидендов A_{t+1}^k в следующий момент времени $t+1$ может зависеть от текущего состояния рынка (которое зависит от истории случайных факторов \bar{s}_t , вектора начальных капиталов \bar{W}_0 и прошлых действий агентов $\bar{\lambda}_{t-1}$), будущего состояния случайного фактора s_{t+1} , и инвестиционных пропорций λ_t агентов в текущий момент t , но зависимость от λ_t может быть только через μ_t^k . Почему только через μ_t^k ? Где мы потом это используем? И ведь current market state включает W_t^n - а они зависят от λ_t через A_t^k ?

Отметим, что μ_t^k представляет собой взвешенную стратегию агентов: стратегия n -го агента взвешивается с весом W_t^n/W_t , равным доле его капитала на рынке.

Для того, чтобы модель не вырождалась, мы будем требовать, чтобы для всех $t \geq 1$ и любых значений $\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}$ выполнялось

$$\sum_{k=1}^K (a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})) > 0. \quad (9)$$

Замечание 1. Отметим, что наша модель позволяет рассматривать не только дивиденды, афинно зависящие от *относительных* долей капиталов μ_t^k , но и дивиденды, афинно зависящие от *абсолютных* долей капиталов $v_t^k = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n$.

Действительно, пусть дивиденды имеют вид

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \tilde{\beta}_{t+1}^k v_t^k, \quad (10)$$

где $\tilde{\beta}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = \tilde{b}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1}))$, а функции α_{t+1}^k такие же, как раньше. Тогда для того, чтобы свести (10) к (6), положим

$$b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) = \widetilde{W}_t(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) \tilde{b}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}),$$

где $\widetilde{W}_t = \sum_{n=1}^N \widetilde{W}_t^n$ с

$$\widetilde{W}_0^n = W_0^n, \quad \widetilde{W}_t^n(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_{t-1}^{n,k} \widetilde{W}_{t-1}^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_{t-1}^{n,k} \widetilde{W}_{t-1}^n} A_t^k, \quad t \geq 1.$$

Функции \widetilde{W}_t^n показывают зависимость капитала агента от полной информации игры: то есть зная вектор начальных капиталов \bar{W}_0 , историю стратегий агентов $\bar{\lambda}_{t-1}$ и историю состояний случайного фактора $\bar{\omega}_{1\dots t}$, Или случайного фактора? от одного случайного фактора же зависит все в каждый момент времени? мы можем восстановить траекторию капитала агента.

3 Выживающие и лог-оптимальные стратегии

3.1 Определения выживающей и лог-оптимальной стратегии

Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой

$$r_t^n := \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Следующие определения вводят два основных понятия в работе.

Определение 1. Стратегия Λ^n n -го агента называется *выживающей*, если для любого вектора начальных капиталов \bar{W}_0 и любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ с заданной стратегией Λ^n и произвольными стратегиями Λ^j агентов $j \neq n$, выполняется неравенство $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$

Согласно определению, выживающие стратегии позволяют агенту сохранять ненулевую долю от общего капитала рынка вне зависимости от того, какие стратегии используют остальные агенты.

Может показаться, что рассмотрение выживающих стратегий значительно ограничивает спектр стратегий, потому что о "выживании" приходится думать только когда "все идет плохо". Однако это не так. Оказывается, что в большинстве моделей эволюционных финансов класс выживающих стратегий совпадает с классом непобеждаемых стратегий, которые на длинном горизонте с точки зрения накопления капитала работают не хуже, чем любая другая стратегия. Другими словами, чтобы не быть вытесненной с рынка, стратегия должна быть непобеждаемой. Более того, оказывается, что выживающие стратегии определяют структуру рынка на длинном горизонте. Более подробно мы поговорим про это в разделе 3.3.

Чтобы найти выживающую стратегию, мы будем искать *лог-оптимальную стратегию*, определение которой мы сейчас дадим.

Перед этим напомним, что случайная величина ξ_t , согласованная с порожденной случайным процессом s_t фильтрацией, называется *субмартингалом*, если $E|\xi_t| < \infty$ и $E_t \xi_{t+1} \geq \xi_t$ п.н. для всех $t \geq 0$, где $E_t(\cdot) = E(\cdot \mid \bar{s}_t)$ обозначает условное ожидание при условии $\bar{s}_t = (s_1, \dots, s_t)$. Для $t = 0$, положим $E_0(\cdot) = E(\cdot)$.

Определение 2. Стратегия Λ^i называется *лог-оптимальной*, если для любого вектора начальных капиталов \bar{W}_0 и профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$, где Λ^n - данная стратегия, выполнено $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\ln r_t^n \text{ является субмартингалом.} \quad (11)$$

Понятие лог-оптимальной стратегии в смысле этого определения похоже на понятие лог-оптимальной стратегии в классической теории роста капитала с экзогенными ценами. В этой теории стратегия называется лог-оптимальной, если использование никакой другой стратегии не может улучшить ожидаемый логарифмический капитал. Хорошо известно, что такая стратегия максимизирует асимптотическую скорость роста капитала агента (см. [1]). **А в итоге в классическом смысле лог-оптимальная стратегия максимизирует асимптотическую скорость роста капитала или ожидаемые лог-рентерны?** В разделе 5 мы покажем, что в частном случае, когда наша модель сводится к модели с экзогенными выплатами, Определение 2 соответствует той же самой стратегии, которая максимизирует ожидаемые лог-рентерны.

Однако в общем случае в нашей модели лог-оптимальная стратегия может не максимизировать абсолютное значение капитала W_t^n агента.

Более того, стратегия, максимизирующая W_t^n в том или ином смысле вне зависимости от стратегий других агентов в общем случае не существует, потому что капитал агента зависит от всего профиля стратегий через эндогенные цены активов и дивиденды.

Таким образом, в нашей модели агент, который использует лог-оптимальную стратегию, не заботится об абсолютном значении своего капитала, но хочет быть не хуже рынка в смысле определения (11).

Можно привести пример рынка, где лог-оптимальная стратегия в смысле Определения 2 обладает свойством, что заставляет капитал всех агентов стремиться к нулю, причем капитал этой стратегии стремится к нулю медленнее, чем капитал других агентов (см. [8]).

Утверждение 1. Любая лог-оптимальная стратегия является выживающей.

Доказательство. Известно, что неположительный субмартингал с вероятностью 1 имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$; (см. [16, Ch. 7.4]). В нашем случае $r_t^n \leq 1$, поэтому $\ln r_t^n \leq 0$. Тогда, если Λ^n является лог-оптимальной стратегией, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln r_t^n$ конечен, откуда следует, что $\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0$. **А почему предел не ноль?** \square

3.2 Построение лог-оптимальной стратегии

Для $t \geq 1$ определим Δ^K -значные функции $g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})$, $\lambda^* \in \Delta^K$, по формулам

$$g_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) = a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + \lambda^* b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}).$$

Аргументы $\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}$ имеют такой же смысл, как в (7)–(8). Для краткости, далее будем использовать обозначение $\bar{\chi}_t = (\bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$ для пары из вектора начального капитала и истории игры. Например, будем писать $g_t = g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_{t-1})$. Для $t = 0$, положим $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Пусть $P_t(\cdot) = P(\cdot \mid \bar{s}_t)$ and $E_t(\cdot) = E(\cdot \mid \bar{s}_t)$ обозначают условную вероятность и условное ожидание при условии \bar{s}_t (где $P_0(\cdot) = P(\cdot)$, $E_0(\cdot) = E(\cdot)$). Введем функции $L_t = L_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $t \geq 0$, со значениями в Δ_K , определенные по формуле

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = E_t \left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Мы будем предполагать, что условные вероятности $P_t(\cdot)$ и ожидания $E_t(\cdot)$ вычисляются по отношению к некоторому фиксированному варианту регулярного условного распределения \bar{s}_{t+1} , из чего следует, что функции L_t^k совместно измеримы по своим аргументам. **это что значит?** Для $t = 0$, функция $L_0 = L_0(\lambda^*, \bar{\chi}_0)$ не зависит от состояний случайного фактора.

Утверждение 2. Для любого $t \geq 0$ существует измеримая функция $\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ со значениями в Δ^K со следующими свойствами:

(а) для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено:

$$P_t \left(\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) = 0 \right) = 0 \text{ п.н.}, \quad (12)$$

$$E_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (13)$$

(б) Λ_t^* — неподвижная точка отображения L_t , то есть для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$L_t(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) \text{ п.н.}, \quad (14)$$

где для $t = 0$ полагаем $\Lambda_0^* = \Lambda_0^*(\bar{\chi}_0)$ зависит только от $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Следующая теорема является первым главным результатом работы.

Теорема 1. Стратегия $\Lambda^* = (\Lambda_t^*)_{t=0}^\infty$, состоящая из функций, удовлетворяющих свойствам (12)–(14) является лог-оптимальной, а значит, выживающей.

К сожалению, в общем случае нет метода нахождения неподвижной точки у (14). Тем не менее, теорема 1 интересна тем, что в ней доказывается существование лог-оптимальной стратегии, что в нашей модели было неочевидно с самого начала. В слудующем разделе мы приведем примеры, в которых лог-оптимальная стратегия находится в явном виде.

Замечание 2. (а) Функции Λ_t^* со свойствами (12)–(14) в общем случае не единственны. Теорема 1 утверждает, что любая последовательность неподвижных точек этого отображения составляет лог-оптимальную стратегию.

Приведем пример, когда лог-оптимальная стратегия неединственна. Пусть $a_t^k \equiv 0$, $b_t^k \equiv 1$ для всех t, k , и начальный капитал рынка $W_0 = 1$. Тогда уравнение динамики капитала (5) после подстановки (6) в (5) и сокращения суммы в знаменателе превращается в

$$W_{t+1}^n = \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Отсюда $W_t = 1$ для всех $t \geq 0$, то есть капиталы W_t^n не изменяются вне зависимости от того, какие стратегии они используют.

(b) Если стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (12) and (14), тогда достаточным условием для выполнения (13), которое нам дальше будет нужно, является следующее: для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$

$$P_t(a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) > 0) > 0 \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Действительно, в этом случае (13) выполнено, так как $L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$ для всех $\lambda^* \in \Delta^K$, откуда $\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$, поэтому после домножения числителя и знаменателя на $\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$ и прибавления к числителю $a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)$ получаем

$$E_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \chi_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq \frac{L_{t,k}(\Lambda_t^*(s^t, \chi^t), s^t, \chi^t)}{\Lambda_{t,k}^*(s^t, \chi^t)} = 1.$$

3.3 Лог-оптимальная стратегия определяет агрегированное поведение рынка

Как было отмечено выше, дроби μ_t^k можно рассматривать как взвешенную сумму стратегий всех агентов. Следующий результат показывает, что при некоторых дополнительных условиях, если хотя бы один агент использует лог-оптимальную стратегию, то μ_t^k стремится к этой оптимальной стратегии при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью единица.

Теорема 2. Пусть стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (12), (14) и следующей более сильной версии условия (13): существует $\varepsilon > 0$ такой что для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$E_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 - \varepsilon \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (15)$$

Тогда, если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ агент n использует стратегию Λ^* , то выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ a.s.},$$

где $\lambda_t^n = \lambda_t^n(\bar{s}_t)$ и $\mu_t = \mu_t(\bar{s}_t)$ обозначают, соответственно, реализацию стратегии n -го агента и реализацию взвешенной стратегии агентов в этом профиле стратегий (см. (1)). В частности, $\|\lambda_t^n - \mu_t\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В общем случае, условие (15) проверить достаточно сложно. Однако в случае н.о.р. коэффициентов α_t^k, β_t^k это удастся сделать. Более того, мы докажем, что в этом случае Λ^* окажется единственной выживающей стратегией в классе константных стратегий (при некоторых дополнительных условиях). В этом заключается третий главный результат работы.

Теорема 3. Пусть последовательность состояний случайного фактора $s_t, t \geq 1$ состоит из н.о.р. случайных величин, и коэффициенты α_t^k, β_t^k из (6)–(8) зависят только от s_t , то есть $\alpha_t^k = a^k(s_t), \beta_t^k = b^k(s_t)$. Тогда:

- (a) Существует константная лог-оптимальная стратегия $\Lambda_t^* \equiv \Lambda^* \in \Delta^K$.
(b) Пусть дополнительно

$$P(\alpha_t^k > 0) > 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, K. \quad (16)$$

Тогда стратегия Λ^* - это единственная выживающая стратегия в классе константных стратегий и $\Lambda^{*,k} > 0$, $k = 1, \dots, K$, то есть стратегия оказывается полностью диверсифицированной. Более того, Λ^* удовлетворяет (15). В частности, для любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^K)$, в котором какой-то из агентов использует стратегию Λ^* , выполняется, что $\mu_t \rightarrow \Lambda^*$ с вероятностью единица при $t \rightarrow \infty$.

(с) Пусть дополнительно к (16), выполнено, что случайные величины $\alpha_t^k/\Lambda_k^{*,k} + \beta_t^k$ линейно независимы, то есть если $\sum_{k=1}^K c_k(\alpha_t^k/\Lambda_k^{*,k} + \beta_t^k) = 0$ п.н. для некоторых констант c^k , то $c^k = 0$ для всех $k = 1, \dots, K$.

Тогда в любом профиле стратегий, в котором некоторый агент использует стратегию Λ^* , а остальные агенты используют произвольные константные полностью диверсифицированные стратегии ($\Lambda^{n,k} > 0$ для всех n, k), выполнено $r_t^n \rightarrow 0$ п.н. при $t \rightarrow \infty$ для любого агента n , который использует стратегию $\Lambda^n \neq \Lambda^*$.

4 Численный пример

Проиллюстрируем основные результаты работы, проведя симляции эволюции рынка. Рассмотрим простую модель, в которой всего два актива. Пусть случайное состояние мира моделируется последовательностью н.о.р. случайных векторов $s_t = (s_t^1, s_t^2)$ со значениями в $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ и симметричным совместным распределением

$$P(s_t = (1, 0)) = P(s_t = (0, 1)) = 1 - p, \quad P(s_t = (1, 1)) = 2p - 1,$$

где $1/2 \leq p < 1$ — параметр. Пусть коэффициенты $\alpha_t^k = a^k k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$ в функции дивидендов задаются как

$$a^k(s_t) = b^k(s_t) = I(s_t^k = 1), \quad k = 1, 2.$$

То есть выплата каждого из двух активов равна либо $1 + \mu_t^k$ с вероятностью p , либо нулю с вероятностью $1 - p$. С вероятностью $2p - 1$, оба актива платят дивиденды одновременно.

В силу симметрии, лог-оптимальной стратегией в этой модели является $\Lambda^* = (1/2, 1/2)$; Нетрудно проверить, что эта стратегия удовлетворяет условиям Утверждения 2. По Теореме 3(b), это единственная выживающая стратегия в классе константных стратегий. Отметим также, что эта стратегия удовлетворяет условию из части (с) Теоремы 3, то есть $\alpha_t^k/\Lambda_k^{*,k} + \beta_t^k$ — линейно независимые случайные величины.

Поместим стратегию Λ^* на рынок. Пусть на рынке есть 9 инвесторов, каждый из которых использует стратегию $\Lambda^i = (n/10, 1 - n/10)$, where $n = 1, 2, \dots, 9$.

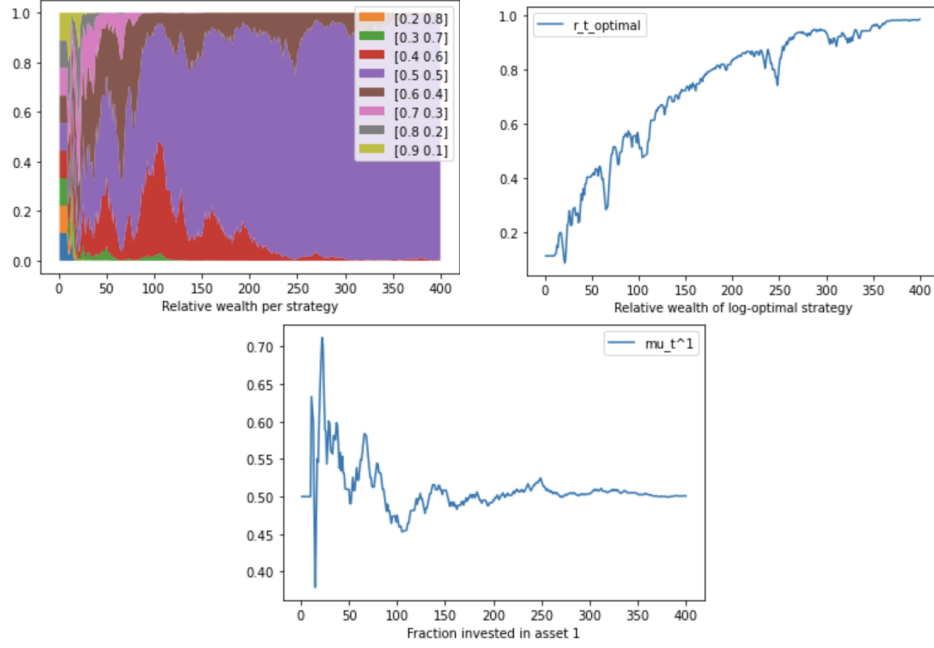


Рис. 1: Эволюция капиталов агентов в одной симуляции рынка длиной в 400 шагов. Слева сверху: относительные капиталы стратегий $\Lambda^n = (n/10, 1 - n/10)$. Справа сверху: относительный капитал оптимальной стратегии Λ^* . Снизу: доля μ_t^1 от капитала рынка, вложенная в первый актив.

В частности, агент $i = 5$ использует стратегию Λ^* . Мы не рассматриваем стратегии $\Lambda^0 = (0, 1)$ и $\Lambda^{10} = (1, 0)$, поскольку их капитал становится нулем за конечное число периодов.

Рис. 1 показывает эволюцию капиталов агентов на одной симуляции рынка длиной в 400 шагов по времени и параметром $p = 2/3$. На первом рисунке показаны относительные капиталы r_t^n каждого из агентов, где r_t^n соответствует высоте закрашенного столбика в момент t .

На втором графике показан относительный капитал лог-оптимальной стратегии. Как видно из этих двух графиков, лог-оптимальная стратегия захватывает рынок, и ее относительный капитал стремится к единице, как и было показано в Теореме 3(с). На третьем графике показано доля рынка капитала, вложенного в актив 1, то есть μ_t^1 , и эта доля, как и ожидалось, стремится к $\Lambda^{*,1} = 1/2$. При этом доля капитала рынка, инвестированная во второй актив, равна $\mu_t^2 = 1 - \mu_t^1$,

5 Связь с другими моделями

Убедимся, что в рамках нашей модели можно получить известные для других, менее общих моделей, результаты про лог-оптимальные и выживающие стратегии.

В первой части этого раздела мы рассмотрим эволюционную финансовую модель с короткоживущими активами, предложенную в [3]. В этой модели размеры дивидендов A_t^k являются экзогенными, то есть зависят только от случай-

ного фактора s_t , но не зависят от истории игры (то есть от стратегий игроков $\bar{\lambda}_{t-1} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{t-1})$).

Во второй части мы рассмотрим классическую модель рынка с экзогенными ценами активов, в которой действия агентов не влияют на цены активов и на капитал остальных агентов.

5.1 Модель с экзогенными размерами дивидендов.

Предположим, что в нашей модели $b_t^k = 0$, и $a_t^k = a_t^k(\bar{s}_t)$ — зависит только от случайных состояний, но не зависит от стратегий агентов и начальных капиталов, то есть дивиденды $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t) = a_t^k(\bar{s}_t)$. Тогда уравнение динамики капитала (5) превращается в

$$w_{t+1}^n = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n} a_{t+1}^k.$$

Тогда, согласно нашим результатам, единственной стратегией, удовлетворяющей условиям (12)-(14) из Предложения 2, является

$$\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t) = E_t \left(\frac{a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1})}{\sum_{k=1}^K a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1})} \right),$$

где Λ_0^* — константный вектор. Эта стратегия распределяет капитал между активами пропорционально условным математическим ожиданиям их относительных дивидендов. Свойство выживаемости этой стратегии впервые было доказано в работе [3]. Однако при дополнительных ограничениях на величины дивидендов A_t^k оно было известно и ранее, см. [5, 4, 10].

5.2 Классическая модель с экзогенными ценами.

Рассмотрим модель рынка с экзогенными ценами активов $S_t^k(\bar{s}_t) > 0$, как в классической модели без коротких продаж (см. [11, Гл. 5]). Мы покажем, что эта модель рынка является частным случаем нашей модели, а построенная в Теореме 1 лог-оптимальная стратегия максимизирует ожидаемый логарифм капитала агента (или, что то же самое, логарифм доходности портфеля).

Как следствие, мы получаем новое свойство стратегии, максимизирующей ожидаемый логарифм капитала: она является неподвижной точкой отображения (14).

Обозначим за $X_{t+1}^k = S_{t+1}^k / S_t^k$ доходности активов. Тогда эволюция капитала W_t агента, использующего стратегию $\Lambda = \Lambda_t(\bar{s}_t)$ определяется соотношением

$$W_{t+1} = W_t \langle \Lambda_t, X_{t+1} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. Эта модель получится как частный случай нашей модели, если в (6) положить

$$\alpha_{t+1}^k = 0, \quad \beta_{t+1}^k = W_t X_{t+1}^k, \quad (17)$$

где W_t обозначает полный капитал рынка (Замечание 1 показывает, что (17) можно записать в терминах μ_t^k).

Напомним, что лог-оптимальная стратегия Λ^* в классической теории роста капитала — это стратегия, максимизирующая ожидаемый логарифм доходности портфеля в каждый момент времени, то есть

$$\Lambda_t^*(\bar{s}_t) \in \arg \max_{\lambda \in \Delta^K} E_t \ln \langle \lambda, X_{t+1}(\bar{s}_{t+1}) \rangle. \quad (18)$$

Эта стратегия называется *Kelly portfolio rule*. Эта оптимизационная задача может не иметь решения, если лог-доходности не интегрируемы. Но если мы введем *относительные доходности*

$$R_t^k = \frac{X_t^k}{\sum_{k=1}^K X_t^k}, \quad k = 1, \dots, K,$$

то, согласно классическому результату [1], лог-оптимальная стратегия будет являться решением задачи максимизации логарифмов относительных доходностей

$$\Lambda_t^*(\bar{s}_t) \in \arg \max_{\lambda \in \Delta^K} E_t \ln \langle \lambda, R_{t+1}(\bar{s}_{t+1}) \rangle. \quad (19)$$

В частности, задача (19) всегда имеет решение при условии, что $\sum_{n=1}^N R_t^n > 0$ п.н. (однако решение может быть неединственным, если, например, R_t^n линейно зависимы), и если задача (18) имеет хотя бы одно решение, тогда множество решений задач (18) и (19) совпадают.

Исследуем связь между теми стратегиями, которые удовлетворяют условиям (12)–(14) в нашей модели, и классическими лог-оптимальными стратегиями (19). Отметим, что условие (12) выполняется для любой стратегии в этой модели, поскольку это условие эквивалентно условию

$$P_t(W_t \langle \Lambda_t^*, X_{t+1} \rangle = 0) = 0,$$

которое, очевидно, выполнено, поскольку $X_{t+1}^k > 0$. Условия (13) and (14) эквивалентны, соответственно, следующим условиям:

$$E_t \left(\frac{R_{t+1}^k}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \right) \leq 1, \quad (20)$$

$$E_t \left(\frac{\Lambda_t^{*,k} R_{t+1}^k}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \right) = \Lambda_t^{*,k}. \quad (21)$$

Легко видеть, что из (20) следует (21). Действительно, домножая обе части (20) на $\Lambda_t^{*,k}$, мы получаем неравенство $E_t \left(\frac{\Lambda_t^{*,k} R_{t+1}^k}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \right) \leq \Lambda_t^{*,k}$, в котором должно быть равенство с вероятностью один, потому что иначе, суммируя обе части по $k = 1, \dots, K$, мы получаем противоречие $1 < 1$ с положительной вероятностью.

Таким образом, в частном случае рассматриваемой модели, условия (12)–(14) эквивалентны условию (20).

Утверждение 3. Стратегия $\Lambda^* = \Lambda_t^*(\bar{s}_t)$ является (измеримым) решением максимизационной задачи (19) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (12)–(14) из Предложения ?? (или, эквивалентно, условию (20)).

Доказательство. \Rightarrow Если стратегия Λ^* удовлетворяет условию (20), тогда для любой другой стратегии $\Lambda = \Lambda_t(\bar{s}_t)$, пользуясь неравенством $\ln x \leq x - 1$, имеем:

$$\begin{aligned} E_t \ln \langle \Lambda_t, R_{t+1} \rangle - E_t \ln \langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle &= E_t \ln \left(\frac{\langle \Lambda_t, R_{t+1} \rangle}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \right) \leq E_t \left(\frac{\langle \Lambda_t, R_{t+1} \rangle}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \right) - 1 = \\ &= \left\langle \Lambda_t, E_t \left(\frac{R_{t+1}}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \right) \right\rangle - 1 = \langle \Lambda_t, 1 \rangle - 1 = \sum_{k=1}^K \Lambda_t^k - 1 = 0. \end{aligned}$$

\Leftarrow Если стратегия Λ_t^* является решением задачи (19), тогда известно (см. [?, Т. 1]), что для любой стратегии Λ :

$$E_t \frac{\langle \Lambda_t, R_{t+1} \rangle}{\langle \Lambda_t^*, R_{t+1} \rangle} \leq 1.$$

Подставляя $\Lambda_t = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, получаем (20). \square

6 Доказательства основных результатов

6.1 Вспомогательные результаты

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм, которые потребуются для доказательства основных результатов.

Лемма 1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^K$ — компактное множество, а (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство. Пусть функция $L(x, \omega): C \times \Omega \rightarrow C$ непрерывна по x и измерима по ω .

Тогда L имеет измеримую неподвижную точку $\xi(\omega)$, то есть $L(\xi(\omega), \omega) = \xi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$, неподвижная точка ξ отображения $L(x, \omega)$ существует по теореме Брауэра. Поэтому случайное множество $\Gamma(\omega) = \{x \in C : L(x, \omega) = x\}$ непусто для каждого ω .

По теореме Куратовского-Рыля (см. [2, Т. 18.13]), это случайное множество является слабо измеримым¹ и допускает измеримый селектор $\xi(\omega) \in \Gamma(\omega)$. Это и дает искомую измеримую неподвижную точку. \square

Лемма 2. Пусть $L^n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) со значениями в компактном множестве $C \subset \mathbb{R}^K$. Тогда существует измеримая функция $L^*(\omega)$ и строго возрастающая последовательность целочисленных измеримых функций $n_i(\omega) \geq 1$, $i = 1, 2, \dots$, таких что $\lim_{i \rightarrow \infty} L^{n_i(\omega)}(\omega) = L^*(\omega)$ для всех ω .

Доказательство. По теореме Кастена (см. Предложение 18.14 in [2]), непустое замкнутое случайное множество слабо измеримо тогда и только тогда, когда оно может быть представлено как замыкание счетного числа измеримых селекторов

¹Мы называем случайное множество $\Gamma: \Omega \rightarrow 2^{\mathbb{R}^K}$ *слабо измеримым*, если $\{\omega : \Gamma(\omega) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ для любого открытого $A \subset \mathbb{R}^K$.

из этого отображения. Следовательно, случайные множества $\Gamma^n = \text{cl}\{L^k, k \geq n\}$, $n \geq 1$ слабо измеримы. Поскольку счетное пересечение компактных слабо измеримых случайных множеств слабо измеримо, то $\Gamma(\omega) = \bigcap_{n \geq 1} \Gamma^n(\omega)$ слабо измеримо. Более того, $\Gamma(\omega)$ непусто, поскольку содержит предельную точку некоторой подпоследовательности $L^n(\omega)$. Тогда по теореме Кастена существует измеримый селектор $L^*(\omega) \in \Gamma(\omega)$.

Тогда нужная последовательность n_i может быть построена по индукции следующим образом. Пусть $n_1 = 1$. Если n_i уже определено для некоторого $i \geq 1$, то рассмотрим случайное множество $\Psi_i(\omega) = \{k > n_i(\omega) : \|L^k(\omega) - L^*(\omega)\| \leq i^{-1}\}$. Оно слабо измеримо, непусто и замкнуто. Пусть n_{i+1} — измеримый селектор из Ψ_i . Тогда $\|L^{n_{i+1}} - L^*\| < \frac{1}{i}$, что дает искомую сходимость. \square

Лемма 3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^N$ — два вектора, такие что $\sum_n \alpha^n \leq 1$, $\sum_n \beta^n \leq 1$ и для всех $n = 1, \dots, N$ выполнено, что если $\beta^n = 0$, то $\alpha^n = 0$. Тогда верно следующее:

$$\sum_{n=1}^N \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} \geq \frac{\|\alpha - \beta\|^2}{4} + \sum_{n=1}^N (\alpha^n - \beta^n), \quad (22)$$

где полагаем $\alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} = 0$ если $\alpha^n = 0$ или $\beta^n = 0$.

Доказательство. Используя неравенство $-\ln x \geq 2(1 - \sqrt{x})$ для всех $x > 0$, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} &= - \sum_{n: \alpha^n \neq 0} \alpha^n \ln \frac{\beta^n}{\alpha^n} \geq 2 \sum_{n=1}^N (\alpha^n - \sqrt{\alpha^n \beta^n}) \\ &= \sum_{n=1}^N (\sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\beta^n})^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha^n - \beta^n). \end{aligned}$$

Тогда мы можем использовать неравенство $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq (x - y)^2/4$, которое верно для всех $x, y \in [0, 1]$, и получить (22). \square

Последняя лемма — это классический результат из теории мартингалов (что-ограниченный сверху обобщенный субмартингал² является субмартингалом).

Лемма 4. Пусть $\zeta_t = \zeta_t(\bar{s}_t)$, $t = 0, 1, \dots$ (ζ_0 константа) — равномерно ограниченная сверху случайная последовательность (то есть $\zeta_t \leq c$ п.н. для всех t и некоторой константы c) и $E_{t-1} \zeta_t \geq \zeta_{t-1}$ п.н. для всех $t \geq 1$. Тогда $E|\zeta_t| < \infty$, то есть ζ_t — настоящий субмартингал.

Доказательство. Последовательность M_t с $M_0 = 0$ и

$$M_t = \zeta_t - \sum_{s=1}^t (E_{s-1} \zeta_s - \zeta_{s-1}), \quad t \geq 1,$$

²Напомним, что последовательность S_t называется обобщенным субмартингалом, если $E|S_0| < \infty$ и $E(S_t | \mathcal{F}_{t-1}) \geq S_{t-1}$ для всех $t \geq 1$ (но необязательно $E|S_t| < \infty$). В Лемме (4) доказывается, что если $S_t \leq C$ для всех t , то S_t интегрируемо и, следовательно, является настоящим субмартингалом.

является локальным мартингалом, поскольку $E_{t-1} M_t = M_{t-1}$ [16, Гл. 7.1, Т. 1]. Поскольку она ограничена сверху, эта последовательность является настоящим мартингалом [16, Гл. 7.1, Т. 3], поэтому $E |M_t| < \infty$. Используя тот факт, что $M_t \leq \zeta_t \leq c$, получаем $E |\zeta_t| < \infty$. \square

Лемма 5. Пусть X_t , $t = 0, 1, \dots$ — процесс в дискретном времени. Тогда его компенсатор имеет вид

$$A_t := \sum_{i=0}^{t-1} (E_i X_{i+1} - X_i)$$

Доказательство. Пусть A_t — компенсатор для X_t , то есть A_t — предсказуемая последовательность, и $X_{t+1} - A_{t+1}$ — мартингал. Тогда

$$E_t (X_{t+1} - A_{t+1}) = X_t - A_t$$

Следовательно,

$$E_t X_{t+1} - X_t = A_{t+1} - A_t$$

Отсюда получаем формулу для A_t :

$$A_t := \sum_{i=0}^{t-1} (E_i X_{i+1} - X_i)$$

\square

6.2 Доказательство Предложения 2 о неподвижной точке

Доказательство. Зафиксируем $t \geq 0$. Введем Δ^K -значные функции $g_{t,n}(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_{t-1})$ и $L_{t,n}(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $n = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$g_{t,n}^k = g_t^k + \frac{1}{n},$$

$$L_{t,n}^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = E_t \left(\frac{g_{t+1,n}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1,n}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Напомним, что $E_t(\cdot)$ обозначает условное ожидание относительно зафиксированного варианта регулярного условного распределения \bar{s}_{t+1} . Функции L_t^n непрерывны по $\lambda^* \in \Delta^K$ и измеримы по $(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$. Тогда по Лемме 1 у них есть измеримые неподвижные точки $\Lambda_{t,n} = \Lambda_{t,n}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, то есть для любых $(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ выполнено

$$L_t^n(\Lambda_t^n(s^t, \chi^t), s^t, \chi^t) = \Lambda_t^n(s^t, \chi^t). \quad (23)$$

Пусть

$$\delta_{t,n}^k(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = E_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1,n}^k(\Lambda_{t,n}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Заметим, что

$$\delta_{t,n}^k \leq 1, \quad k = 1, \dots, K, \quad (24)$$

поскольку

$$(1 - \delta_{t,n}^k) \Lambda_{t,n}^k = \mathbb{E}_t \left(\frac{a_{t+1}^k + 1/n}{\sum_{k=1}^K g_{t+1,n}^k(\Lambda_{t,n})} \right) > 0.$$

По лемме 2, можно найти возрастающую последовательность $n_i = n_i(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $i = 1, 2, \dots$ такую, что существует предел

$$\Lambda_t^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{t,n_i}$$

Теперь, для фиксированного $\bar{\chi}_t$, переходя к пределу $i \rightarrow \infty$ и $n_i \rightarrow \infty$ в (24) (используя лемму Фату и предположение (9)), получаем, что (12) выполнено. Далее, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем (13) из (24) и (14) из (23). □

6.3 Доказательство Теоремы 1

Доказательство. Зафиксируем вектор начальных капиталов и профиль стратегий, в котором один агент использует старетегию Λ^* . Без потери общности, предположим, что стратегию Λ^* использует агент 1.

Введем обозначение (опуская зависимость от \bar{s}_t для краткости)

$$\theta_t^k = \frac{\lambda_t^{1,k}}{\mu_t^k}.$$

Напомним, что

$$W_t = \sum_{n=1}^N W_t^n, \quad \mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n.$$

Тогда уравнение динамики капитала (5) переписывается в виде

$$W_{t+1}^1 = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{1,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n} A_{t+1}^k = r_t^1 \sum_{k=1}^K \theta_t^k A_{t+1}^k = r_t^1 \sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k),$$

а полный капитал рынка удовлетворяет уравнению

$$W_{t+1} = \sum_{k=1}^K A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k).$$

Поэтому

$$r_{t+1}^1 = \frac{W_{t+1}^1}{W_t} = \frac{r_t^1 \sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k)}$$

Из последнего равенства получаем

$$\ln r_{t+1}^1 - \ln r_t^1 = \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k)} \right). \quad (25)$$

Consequently, we can represent

$$\mathbb{E}_t \ln r_{t+1}^1 - \ln r_t^1 = \mathbb{E}_t(F_{t+1} + G_{t+1}),$$

where

$$F_{t+1} = \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)} \right), \quad (26)$$

$$G_{t+1} = \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k)} \right). \quad (27)$$

Покажем, что $\mathbb{E}_t(F_{t+1} + G_{t+1}) \geq 0$. Рассмотрим аргумент логарифма в (26) как выпуклую комбинацию чисел

$$\theta_t^k, \dots, \theta_t^K, 1$$

с коэффициентами

$$\frac{\alpha_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}, \quad k = 1, \dots, K, \quad \frac{\sum_{k=1}^K \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}.$$

Из-за выпуклости вверх логарифма получаем:

$$F_{t+1} \geq \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{t+1,k}}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)} \ln \theta_t^k. \quad (28)$$

Обозначим за

$$\gamma_t^k = 1 - \mathbb{E}_t \left(\frac{\beta_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)} \right), \quad k = 1, \dots, K. \quad (29)$$

Из (13), мы имеем $\gamma_t^k \in [0, 1]$, а из (14) следует, что

$$\gamma_t^k \lambda_t^{1,k} = \mathbb{E}_t \left(\frac{\alpha_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)} \right). \quad (30)$$

Беря ожидание в (28), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t F_{t+1} &\geq \sum_{k=1}^K \gamma_t^k \lambda_t^{1,k} \ln \theta_t^k = \sum_{k=1}^K \gamma_t^k \lambda_t^{1,k} \ln \frac{\gamma_t^k \lambda_t^{1,k}}{\gamma_t^k \mu_t^k} \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^K (\gamma_t^k (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k))^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_t^k (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k), \end{aligned} \quad (31)$$

где во втором неравенстве мы применили Лемму 3 к векторам α, β с координатами

$$\alpha_k = \gamma_t^k \lambda_t^{1,k}, \quad \beta_k = \gamma_t^k \mu_t^k.$$

Отметим, что условия $\sum_{k=1}^K \alpha_k \leq 1, \sum_{k=1}^K \beta_k \leq 1$ из леммы выполнены, так как векторы λ_t^1 and μ_t сами удовлетворяют этому свойству, а $\gamma_t^k \in [0, 1]$.

Для оценки снизу $E_t G_{t+1}$, мы используем неравенство $\ln a \geq 1 - a^{-1}$ и получаем

$$\begin{aligned} E_t G_{t+1} &\geq E_t \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k) \beta_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^K (1 - \gamma_t^k) (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k) = \sum_{k=1}^K \gamma_t^k (\mu_t^k - \lambda_t^{1,k}), \end{aligned} \quad (32)$$

где последнее равенство получается из-за того, что $\sum_{k=1}^K \lambda_t^{1,k} = \sum_{k=1}^K \mu_t^k = 1$.

Из оценок (31) и (32) получаем:

$$E_t (F_{t+1} + G_{t+1}) \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^K (\gamma_t^k (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k))^2, \quad (33)$$

so $E_t (F_{t+1} + G_{t+1}) \geq 0$. По Лемме 4, оценивая $\ln r_t^1$ сверху нулем, получаем, что $\ln r_t^1$ субмартигнал.

□

6.4 Доказательство Теоремы 2

Предположим, что стратегию Λ^* использует агент 1. В ходе доказательства Теоремы 1, мы показали, что $\zeta_t := \ln r_t^1$ является субмартиггалом, так как $E_t \ln r_{t+1}^1 - \ln r_t^1 = F_t + G_t \geq 0$.

Применяя разложение Дуба, получаем $\zeta_t = \zeta_0 + M_t + A_t$, где M_t — мартиггал, A_t — предсказуемая неубывающая последовательность (компенсатор ζ_t), и $M_0 = A_0 = 0$.

При этом $r_t^1 \leq 1$, а значит, $\ln r_t^1 \leq 0$, то есть $\ln r_t^1$ является ограниченным субмартиггалом. По следствию из теоремы Дуба о сходимости, этот субмартиггал сходится.

Но поскольку ограниченный субмартиггал ζ_t сходится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$, то и его компенсатор имеет конечный предел, другими словами, $\lim_{t \rightarrow \infty} A_t < \infty$ п.н.

Из формулы для компенсатора из Леммы 5 и оценки (33) получаем

$$A_t := \sum_{u=0}^{t-1} (E_u \zeta_{u+1} - \zeta_u) \geq \frac{1}{4} \sum_{u=0}^{t-1} \sum_{k=1}^K (\gamma_u^k (\lambda_u^{1,k} - \mu_u^k))^2.$$

Тогда из условия (15) Теоремы 2 и соотношения (6.3), получаем, что $\gamma_t^k \geq \varepsilon > 0$. Теперь утверждение теоремы следует из сходимости A_t .

6.5 Доказательство Теоремы 3

(а) Существование константной стратегии, удовлетворяющей условиям (12)–(14), (а следовательно, являющейся лог-оптимальной), следует из доказательства Утверждения 2.

(б) Пусть предположение (16) выполнено. Пусть

$$\gamma^k = 1 - \mathbb{E} \left(\frac{b^k(s_t)}{\sum_{k=1}^K (a^k(s_t) + \Lambda^{*,k} b^k(s_t))} \right), \quad k = 1, \dots, K. \quad (34)$$

Тогда из (14) получаем

$$\gamma_k \Lambda^{*,k} = \mathbb{E} \left(\frac{a^k(s_t)}{\sum_{k=1}^K (a^k(s_t) + \Lambda^{*,k} b^k(s_t))} \right), \quad (35)$$

поэтому $\gamma_k \Lambda^{*,k} > 0$, а значит, $\gamma^k > 0$, то есть условие (15) выполнено. Из Теоремы 2, мы получаем сходимость $\mu_t \rightarrow \Lambda^*$.

Если $\tilde{\Lambda} \in \Delta^K$ — другая выживающая стратегия, то она обязана выживать в профиле стратегий $(\Lambda, \Lambda^*, \dots, \Lambda^*)$.

Это значит, что $\inf_{t \geq 0} r_t^1 > 0$ п.н.

Но тогда сходимость $\mu_t = r_t^1 \tilde{\Lambda} + (1 - r_t^1) \Lambda^* \rightarrow \Lambda^*$ имеет место только при $\tilde{\Lambda} = \Lambda^*$. Следовательно, Λ^* — единственная выживающая стратегия.

(с) Рассмотрим профиль стратегий, в котором агент 1 использует стратегию Λ^* . Пусть агент i использует константную стратегию $\Lambda^i \neq \Lambda^*$. Для доказательства теоремы, мы должны показать, что $r_t^1/r_t^i \rightarrow \infty$ с вероятностью единица при $t \rightarrow \infty$.

Для этого мы покажем, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \frac{r_t^1}{r_t^i} > 0. \quad (36)$$

Из равенства (25) в доказательстве Теоремы 1, после сокращения знаменателей в вычитаемых дробях получаем

$$D_{t+1} := \ln \frac{r_{t+1}^1}{r_{t+1}^i} - \ln \frac{r_t^1}{r_t^i} = \ln \frac{r_{t+1}^1}{r_t^1} - \ln \frac{r_{t+1}^i}{r_t^i} = \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\theta_{t,k}^1 \alpha_{t+1,k} + \Lambda_k^* \beta_{t+1,k})}{\sum_{k=1}^K (\theta_{t,k}^i \alpha_{t+1,k} + \Lambda_k^i \beta_{t+1,k})} \right),$$

где $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$, и $\theta_t^{1,k} = \Lambda^{*,k}/\mu_t^k$, $\theta_t^{i,k} = \Lambda^{i,k}/\mu_t^k$.

Тогда получаем

$$t^{-1} \ln \frac{r_t^1}{r_t^i} = t^{-1} \ln \frac{r_0^1}{r_0^i} + t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} \mathbb{E}_u D_{u+1} + t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - \mathbb{E}_u D_{u+1}).$$

Заметим, что последовательность D_t равномерно ограничена:

$$\frac{1}{c} \leq D_t < c,$$

где $c = \max_{i,k} \Lambda^{i,k} / \min_{i,k} \Lambda^{i,k}$.

Из усиленного закона больших чисел для мартингалов, получаем п.н. сходимость

$$\xi_t := t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - E_u D_{u+1}) \rightarrow 0$$

Значит, для того, чтобы получить (36), достаточно показать, что существует $\varepsilon > 0$ и случайный момент времени τ такой, что для $t \geq \tau$ выполнено

$$E_t D_{t+1} \geq \varepsilon. \quad (37)$$

Согласно Теореме 1, мы имеем $\mu_{t,k} \rightarrow \Lambda^{*,k}$, поэтому $\theta_t^{1,k} \rightarrow 1$ и $\theta_t^{i,k} \rightarrow \Lambda^{i,k}/\Lambda^{*,k}$. Поэтому, с вероятностью единица, имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_t D_{t+1} = E \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\alpha_k + \Lambda^{*,k} \beta^k)}{\sum_{k=1}^K (\Lambda^{i,k} \alpha_k / \Lambda^{*,k} + \Lambda^{i,k} \beta_k)} \right) =: E \ln \zeta,$$

где (α, β) — пара векторов из \mathbb{R}^K с таким же распределением, как и у $(a(s_t), b(s_t))$.

Поэтому, чтобы получить (??), нам нужно показать $E \ln \zeta > 0$, или, что эквивалентно, $E \ln \zeta^{-1} < 0$. Используя строгую выпуклость вверх логарифма и неравенство Йенсена, достаточно показать, что $E \zeta^{-1} = 1$ и ζ не константа п.н.

А почему важно, что не константа?

Для доказательства последнего утверждения, используем (34) и (35), откуда получаем

$$E \zeta^{-1} = E \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\Lambda^{i,k} \alpha_k / \Lambda^{*,k} + \Lambda^{i,k} \beta^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha^k + \Lambda^{*,k} \beta^k)} \right) = \sum_{k=1}^K (\gamma_k \Lambda^{i,k} + (1 - \gamma_k) \Lambda^{i,k}) = 1.$$

Тот факт, что ζ не константа, следует из того, что случайные величины $a_t^k / \Lambda^{*,k} + b_t^k$ линейно независимы. В самом деле, если $\zeta = c$, тогда

$$\sum_{k=1}^K (c \Lambda^{*,k} - \Lambda^{i,k}) \left(\frac{\alpha_k}{\Lambda^{*,k}} + \beta^k \right) = 0,$$

откуда $c \Lambda^{*,k} = \Lambda^{i,k}$ для всех k , откуда $\Lambda^i = \Lambda^*$, что противоречит нашему предположению.

7 Заключение

В работе сформулирована и изучена модель рынка с дискретным временем, короткоживущими активами и эндогенными аффинными выплатами этих активов. Предложено определение выживающих стратегий, которые позволяют использующему их инвестору не быть вытесненным с рынка на бесконечном горизонте времени. В предложенной модели, во-первых, найдено описание лог-оптимальной (а значит, выживающей) стратегии как неподвижной точки специального отображения (см. Теорему 1).

Во-вторых, доказано, что лог-оптимальная стратегия определяет агрегированное поведение рынка на бесконечном горизонте времени в том смысле, что

если в профиле стратегий какой-то агент использует лог-оптимальную стратегию, то (при немного более сильных требованиях к дивидендам) взвешенная на капиталы стратегия всех остальных агентов в этом профиле стратегий стремится в лог-оптимальной стратегии (см. Теорему 2).

В третьих, доказано, что в случае независимых одинаково распределенных коэффициентах из аффиинных функций, определяющих дивиденды, лог-оптимальная стратегия оказывается единственной выживающей стратегией в классе константных стратегий (см. Теорему 3).

Наконец, проведено сведение предложенной аффиинной модели к классической модели с экзогенными выплатами и получена новая характеристика уже давно известной оптимальной стратегии в этой модели как неподвижной точки специального отображения. Также проведено сведение предложенной аффиинной модели к классической модели с экзогенными ценами активов и приведено альтернативное доказательство того, что лог-оптимальная стратегия максимизирует логарифмы доходностей (см. Утверждение 3).

Также написана программа на языке Python, позволяющая провести симуляции и наглядно увидеть на примере рынка с двумя активами, что оптимальная стратегия действительно завоевывает весь рынок на бесконечном горизонте времени.

8 Список литературы

- [1] Algoet, P. H. and Cover, T. M. (1988). Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, 16(2):876–898.
- [2] Aliprantis C. D., and Border K. C. (2006). Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker’s Guide. *Springer*, 3rd edition, 591–600.
- [3] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013). Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144.
- [4] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2005). Market selection and survival of investment strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 41(1-2):105–122.
- [5] Blume L. and Easley D. (1992). Evolution and market behaviour. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40.
- [6] Breiman, L. (1961). Optimal gambling systems for favorable games. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1:63–68.
- [7] Bharucha-Reid, A. T. (1976). Fixed point theorems in probabilistic analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82(5):641–657.

- [8] Drokin, Y. and Zhitlukhin, M. (2020). Relative growth optimal strategies in an asset market game. *Annals of Finance*, 16:529–546.
- [9] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016). Evolutionary behavioral finance. In Haven, E. et al., editors, *The handbook of Post Crisis Financial Modelling*, 214-234. Palgrave Macmillan UK.
- [10] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016). Market selection of financial trading strategies: Global stability. *Mathematical Finance*, 12(4):329-339.
- [11] Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic Finance: an Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin/New York, 3rd edition.
- [12] Holtfort, T. (2019). From standard to evolutionary finance: a literature survey. *Management Review Quarterly*, 69(2):207–232.
- [13] Karatzas, I. and Kardaras, C. (2007). The numeraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, 11(4):447–493.
- [14] Kelly, Jr, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal*, 35(4):917–926.
- [15] Shapley, L. and Shubik, M. (1977). Trade using one commodity as a means of payment. *Journal of political economy*, 85(5):937-968.
- [16] Shiryaev, A.N. (2019). Probability-2. *Springer*, 3rd edition.