Спецкурс "Теория риска" (для 409 гр.)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 4

Москва, 30 сентября 2020 г.

С НОВЫМ УЧЕБНЫМ ГОДОМ!

План лекции

- Меры опасности риска
- Порядок с вероятностью 1
- Частичный и полный порядок
- Некоторые свойства порядков
- Классы, порождающие порядок
- Стохастический порядок
- Порядок стоп-лосс

Порядок рисков

Одна из главных задач актуария - сравнивать привлекательность различных рисков. Это важно, например, для того чтобы заменять реальную сложную ситуацию простой, но более рискованной для принятия "консервативного" , т.е. более осторожного решения. В качестве решения можно рассматривать назначение премии или определение размера резервов, использование перестрахования, проведение инвестиций и т.д.

Существует несколько причин предпочесть более простую модель. Одна из них - невозможность проведения вычислений, необходимых для сложной модели, не говоря об исследовании ее устойчивости.

Другая причина - отсутствие достоверной информации о параметрах модели. В таком случае разумно принять решение, основываясь на наиболее рискованной модели, совместимой с имеющимся ограниченным объемом информации.

Анализ средних-дисперсий

Наиболее простыми мерами "опасности"риска X могут служить такие его скалярные характеристики как математическое ожидание $\mathsf{E}X$, дисперсия $\mathsf{D}X$ или стандартное отклонение $\sqrt{\mathsf{D}X}$.

Например, в финансовой математике широко распространена так называемая Capital Asset Pricing Model (CAPM), основанная на анализе средних и дисперсий (mean-variance analysis). В ней предполагается, что риск с меньшим средним всегда предпочтительнее, а в случае равенства средних лучше тот, который имеет меньшую дисперсию.

Как увидим, все практически важные порядки случайных величин обладают свойством: меньшему риску соответствует меньшее среднее. Кроме того, при равенстве средних порядок дисперсий также чаще всего сохраняется.

Замечание

В экономике страхования часто используется такая относительная мера изменчивости как коэффициент вариации $CV(X) = \sqrt{\mathsf{D}X}/\mathsf{E}X$. *Однако использование коэффициента вариации в качестве меры опасности риска может вводить в заблуждение (см. задачу 3 в д.з.1).*

Упорядочивание рисков, часто применяемое в страховании, может производиться в рамках теории ожидаемой полезности (expected utility theory), развитой Дж. фон Нейманом и О.Моргенштерном.

Основную роль в этой теории играет понятие функции полезности, введенное Д.Бернулли.

Предполагается, что "полезность" детерминированного дохода x описывается некоторой функцией $u(x)$. Найти явный вид этой функции не удается, но можно установить некоторые ее свойства. Например, она должна быть непрерывной и неубывающей (чем больше доход, тем лучше).

Случайный доход X естественно оценивать по его ожидаемой полезности $\mathrm{E}u(X)$.

Сравнение рисков производится в предположении, что за них вносится одна и та же премия, потому что если будет внесена бóльшая премия, то непривлекательный риск может стать привлекательным. Таким образом, предполагается, что функция полезности $u(y)$ включает премию в текущий капитал y, при этом полезность потери x равна $u(-x)$.

Определение

Говорят, что риск X предпочтительнее риска Y, если $\mathsf{E}u(-X) \geq \mathsf{E}u(-Y)$ для любой функции полезности u, принадлежащей некоторому классу $\mathcal{K}$.

Разные люди упорядочивают риски по-разному, но если взять те пары рисков, которые все лица, имеющие неубывающую функцию полезности, сравнили одинаковым образом, то получится частичный порядок на множестве рисков. Этот порядок, называемый стохастическим, основывается лишь на распределениях случайных величин.

Накладывая на функцию полезности дополнительные ограничения, мы получим более слабый порядок. Например, можно предположить, что функция u является вогнутой (по мере того, как капитал растет, приращение капитала играет все меньшую роль). Это будет означать, что лицо, принимающее решения не склонно к риску. Оно предпочтет фиксированный риск случайному с тем же средним. Возникающий порядок будет носить название стоп-лосс (stop-loss) и будет также рассмотрен немного дальше.

Если предположить, что человек не склонен к риску, причем его решения не зависят от имеющегося капитала, то это будет означать использование экспоненциальной или линейной функции полезности.

Наиболее часто встречающиеся функции полезности: линейная $u(x) = x$,
квадратическая $u(x) = -(b - x)^2$,
логарифмическая $u(x) = \ln(\alpha + x)$,
экспоненциальная $u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$.

Естественно, что рассматриваются лишь те значения x, при которых эти функции определены и не убывают. Так, для квадратической функции b является точкой насыщения, а при бóльших x полезность не меняется.

Очевидно, что любое линейное преобразование функции полезности ведет к тем же самым решениям. Поэтому часто выбирают в классе эквивалентных функций ту, для которой $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.
Коэффициент неприятия риска $a(x)$ определяется как
$a(x) = -u''(x)/u'(x)$.

Порядок с вероятностью 1

С точки зрения математика, риск, подлежащий страхованию, - это некоторая неотрицательная случайная величина (с конечным математическим ожиданием). Будем обозначать случайные величины $X, Y, \ldots$. Во многих вероятностных рассмотрениях не различают случайные величины, совпадающие с вероятностью 1. Мы также будем придерживаться этого предположения.

Введем один из возможных способов упорядочивания случайных величин, а именно, порядок с вероятностью 1. Обозначим его $X <_1 Y$, такая запись показывает, что $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1$.

Очевидно, что не все случайные величины удастся таким образом упорядочить, потому что не обязательно либо $X \leq Y$, либо $Y \leq X$ с вероятностью 1, т.е. не все случайные величины сравнимы. Следовательно, речь идет о частичном порядке.

Какими свойствами обладает порядок с вероятностью 1?

- Транзитивность: из $X <_1 Y$ и $Y <_1 Z$ следует $X <_1 Z$.
- Рефлексивность: $X <_1 X$.
- Антисимметричность: из $X <_1 Y$ и $Y <_1 X$ следует $X = Y$.

Частичный и полный порядок

При других способах упорядочивания последнее свойство (антисимметричность) не выполняется, т.е. речь идет о предпорядке.

Накладывается менее строгое ограничение, а именно, вместо $X = Y$ требуется лишь $X \stackrel{d}{=} Y$. Устанавливается порядок не самих случайных величин, а их функций распределения.

Далее будет предполагаться, что запись $X \prec Y$ означает $F_X \prec F_Y$, где $F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x)$ и $F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x)$ соответственно функции распределения случайных величин X и Y.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех функций распределения.

Определение

С математической точки зрения частичный порядок, заданный на подмножестве $\mathcal{B}_{\prec} \subset \mathcal{B}$, - это бинарное отношение $\prec$ со свойствами

- *Транзитивность: из $F_1 \prec F_2$ и $F_2 \prec F_3$ следует $F_1 \prec F_3$.*
- *Рефлексивность: $F \prec F$.*
- *Антисимметричность: из $F_1 \prec F_2$ и $F_2 \prec F_1$ следует $F_1 = F_2$.*

Частичный и полный порядок

Для упрощения записи мы используем знак $\prec$ для обозначения частичного порядка, хотя более соответствующим свойству рефлексивности был бы знак $\preceq$.

Определение

Множество функций распределения вполне упорядочено, если можно сравнить любую пару функций распределения, т.е. выполнено дополнительное свойство

- *Полнота: либо* $F_1 \prec F_2$, *либо* $F_2 \prec F_1$, *либо и то, и другое.*

Задача. Пусть $\prec_b$ - полный порядок всех рисков для лица b из некоторого множества B лиц, принимающих решения. Определим бинарное отношение $\prec_a$ на множестве рисков следующим образом: $X \prec_a Y$ тогда и только тогда, когда $X \prec_b Y$ для всех $b \in B$.

Доказать, что $\prec_a$ - это частичный порядок (отражающий предпочтение всех лиц из множества B).

Некоторые свойства отношений порядка

Для приложений бывают важны следующие свойства отношений порядка для функций распределения (из подмножества $\mathcal{B}_{\prec} \subset \mathcal{B}$):

- 1°. Для $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_{\prec}$ с математическими ожиданиями соответственно m_1 и m_2 из $F_1 \prec F_2$ следует $m_1 \leq m_2$.
- 2°. Для вещественных a и b неравенство $a \leq b$ эквивалентно соотношению $\Theta_a \prec \Theta_b$.
  Здесь $\Theta_a(x)$ - это функция распределения константы a, т.е. $\Theta_a(x) = 0$ при $x < a$ и $\Theta_a(x) = 1$ при $x \geq a$.
- 3°. Для $F_1, F_2, G \in \mathcal{B}_{\prec}$ таких, что $F_k * G \in \mathcal{B}_{\prec}$, $k = 1, 2$, из $F_1 \prec F_2$ следует $F_1 * G \prec F_2 * G$.
- 4°. Для любого вещественного $c > 0$ из $F_1 \prec F_2$, при $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_{\prec}$, следует $F_1^c, F_2^c \in \mathcal{B}_{\prec}$ и $F_1^c \prec F_2^c$. Здесь обозначено $F_k^c(x) = F_k(x/c)$, $k = 1, 2$.
- 5°. Для $F_n, G_n, F, G \in \mathcal{B}_{\prec}$ таких, что $F_n \xrightarrow{d} F$ и $G_n \xrightarrow{d} G$ при $n \to \infty$, из $F_n \prec G_n$, $n = 1, 2, \ldots$, следует $F \prec G$. Знак $\xrightarrow{d}$ употребляется для обозначения слабой сходимости.

Некоторые свойства отношений порядка

Свойство 3° означает, что прибавление к двум упорядоченным с.в. не зависящей от них с.в. не меняет порядок.

Иначе свойство 4° в терминах соответствующих случайных величин можно записать так: если $X_1 \prec X_2$, то $cX_1 \prec cX_2$ при $c > 0$. Это свойство называется масштабной инвариантностью.

Знак $\xrightarrow{d}$ употребляется для обозначения слабой сходимости, т.е $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ в точках непрерывности предельной функции F. В терминах соответствующих случайных величин слабая сходимость означает $\mathsf{E}f(X_n) \to \mathsf{E}f(X)$ для любой непрерывной ограниченной вещественной функции f.

Большинство рассматриваемых на практике отношений порядка обладает свойством 1°. Кроме того, свойства $1^\circ - 5^\circ$ не являются независимыми.

Теорема

Если отношение порядка $\prec$ для функций распределения обладает свойствами $2^\circ - 5^\circ$, то оно обладает также и свойством 1°, при условии, что из $F \in \mathcal{B}_\prec$ следует $F^{n*} \in \mathcal{B}_\prec$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть F и G - два произвольных сравнимых относительно $\prec$ элемента из $\mathcal{B}_{\prec}$ с математическими ожиданиями соответственно m_F и m_G, а $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ - две последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения соответственно F и G. Согласно закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} m_F, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{p} m_G, \text{ при } n \to \infty,$$

где $\xrightarrow{p}$ означает сходимость по вероятности. Поскольку из сходимости по вероятности следует слабая сходимость, функции распределения F_n и G_n соответственно средних арифметических $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ и $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ слабо сходятся к Θ_{m_F} и к Θ_{m_G}. В силу свойств 3° и 4° для любого n имеем также $F_n \prec G_n$, а из 5° следует $\Theta_{m_F} \prec \Theta_{m_G}$, откуда с помощью 2° приходим к нужному неравенству $m_F \leq m_G$, т.е. к 1°. $\square$

Классы функций, порождающие порядок

Многие отношения порядка определяются или могут быть определены как порожденные некоторым классом функций.

Определение

Пусть $\mathcal{F}_{\prec}$ - некоторое множество вещественных функций. Отношение порядка $\prec$ порождено множеством $\mathcal{F}_{\prec}$, если $F_1 \prec F_2$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_1(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_2(x) \tag{1}$$

для всех $f \in \mathcal{F}_{\prec}$, для которых интегралы существуют.

Заметим, что говоря о соответствующих случайных величинах X_1 и X_2, имеющих функции распределения F_1 и F_2, вместо интегралов в (1) можно записать

$$\mathsf{E}f(X_1) \leq \mathsf{E}f(X_2).$$

Классы функций, порождающие порядок

Свойства класса $\mathcal{F}_{\prec}$ связаны со свойствами соответствующего отношения порядка.

Определение

Множество $\mathcal{G}$ вещественных функций на R (соотв. на R^{+}) называется инвариантным относительно сдвигов, если для всех $a \in R$ (соотв. $a \in R^{+}$) одновременно с f множеству $\mathcal{G}$ также принадлежат и f_a, где $f_a(x) = f(x+a)$.

Теорема

Пусть отношение порядка порождено инвариантным относительно сдвига множеством $\mathcal{F}_{\prec}$. Тогда оно обладает свойством 3°.

Доказательство. При любых F_k, $k = 1, 2$, и G из $\mathcal{B}_{\prec}$, для которых интегралы существуют, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d(F_k * G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) dF_k(x) dG(y).$$

Это равенство представляет собой две различные формы записи $\mathsf{E} f(X_k + Y)$, где X_k и Y независимы и имеют функции распределения F_k и G. Если $f \in \mathcal{F}_{\prec}$, то для всех y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) dF_1(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) dF_2(x),$$

значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d(F_1 * G) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d(F_2 * G)(x),$$

т.е. $F_k * G \in \mathcal{B}_{\prec}$, $k = 1, 2$, а также $F_1 * G \prec F_2 * G$. $\square$

Стохастический порядок

Определение

Назовем функцию распределения F_1 стохастически меньшей (или стохастически предшествующей) функции распределения F_2 ($F_1 <_{st} F_2$), если для любого t выполняется неравенство

$$F_1(t) \geq F_2(t). \tag{2}$$

Как было указано ранее, для случайных величин X_k, $k = 1, 2$, (с функциями распределения F_k) мы будем записывать $X_1 <_{st} X_2$, тогда и только тогда, когда $F_1 <_{st} F_2$.

Если записать неравенство в эквивалентной форме $\mathrm{P}(X_1 > t) \leq \mathrm{P}(X_2 > t)$ или, что то же самое, $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$, где $\bar{F}_k(t) = 1 - F_k(t)$, $k = 1, 2$, станет ясно происхождение названия X_1 стохастически меньше X_2.

Очевидно, что $<_{st}$ - это отношение (частичного) порядка, определенное на множестве случайных величин с любыми значениями, а не только рисков. Другие встречающиеся обозначения $\overset{(1)}{\leq}$, $\overset{d}{\leq}$, $\leq_d$, $\leq_p$.

Связь с порядком $<_1$

Теорема

Если $F_1 <_{st} F_2$, то найдутся случайные величины X_1 и X_2, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ такие, что $X_1(\omega) \le X_2(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $\mathrm{P}(X_k \le t) = F_k(t)$, $k = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $\Omega = [0,1]$ и $\mathcal{A}$ - σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[0,1]$, а $\mathrm{P} = l$, т.е. мера Лебега. Положим $X_k(\omega) = F_k^{-1}(\omega)$. Обратная функция определяется следующим образом

$$F^{-1}(\omega) = \inf\{t : F(t) > \omega\}.$$

В силу (2) имеем $F_1^{-1}(\omega) \le F_2^{-1}(\omega)$. Тем самым доказательство закончено, поскольку

$$\mathrm{P}(X_k \le x) = l(\omega : F_k^{-1}(\omega) \le x) = F_k(x). \square$$

Иначе говоря, мы доказали, что если $X_1 <_{st} X_2$, то существуют такие $X_k' \stackrel{d}{=} X_k$ (стохастически эквивалентные, т.е. имеющие те же функции распределения $F_{X_k}(t) = F_{X_k'}(t)$), для которых верно $\mathrm{P}(X_1' \le X_2') = 1$.

Связь с порядком $<_1$

Нетрудно проверить, что из упорядоченности с вероятностью 1 следует стохастическая упорядоченность (т.е. порядок $<_1$ сильнее, чем $<_{st}$). Это вытекает из несколько более общего результата.

Лемма

Из $X_1 <_1 X_2$ и $X_2' \stackrel{d}{=} X_2$, следует $X_1 <_{st} X_2'$.

Доказательство. Так как у X_2 и X_2' одинаковые функции распределения, то необходимое утверждение получается из цепочки очевидных равенств и неравенства:

$$F_2(t) = \mathrm{P}(X_2' \le t) = \mathrm{P}(X_2 \le t) \le \mathrm{P}(X_1 \le t) = F_1(t). \square$$

Задача. Верно ли обратное утверждение, т.е. предположим, что $X_1 <_{st} X_2$, можно ли найти такую случайную величину X_2', чтобы $X_1 <_1 X_2'$ и $X_2 \stackrel{d}{=} X_2'$?

Свойства стохастического порядка

Переписывая эквивалентное определение $<_{st}$ в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(t)\, dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(t)\, dF_2(t) \quad \text{для любого } x$$

нетрудно понять, что отношение порядка $<_{st}$ порождается семейством $\mathcal{F}_{st} = \{\Theta_x(t)_{x\in R}\}$, которое инвариантно относительно сдвигов.

Следствие

Отношение $<_{st}$ обладает свойством 3°.

Задача. Доказать это свойство непосредственно, пользуясь определением свертки. Будут ли выполнены свойства 1°, 2°, 4° для стохастического порядка?

Свойства стохастического порядка

Теперь покажем, что для стохастического порядка справедливо свойство 5°.

Теорема

Пусть $F_{1,n} \xrightarrow{d} F_1$, $F_{2,n} \xrightarrow{d} F_2$ *при* $n \to \infty$. *Если* $F_{1,n} <_{st} F_{2,n}$, $n \geq 1$, *то* $F_1 <_{st} F_2$.

Доказательство. В точках непрерывности обеих функций F_1 и F_2 выполнено неравенство $F_1(x) \geq F_2(x)$. Если бы в точке разрыва выполнялось противоположное неравенство $F_1(y) < F_2(y)$, то в силу непрерывности функций распределения справа существовал бы интервал, где также справедливо это неравенство. Но в интервале всегда найдутся точки непрерывности, что приводит к противоречию. $\square$

Достаточное условие

Далее $dF_X(x)$ означает $\mathrm{P}(X = x)$ для дискретных распределений и $f_X(x)dx$ для абсолютно непрерывных с плотностью $f_X(x)$.

Теорема

Пусть существует такое c, что $dF_X(x) \geq dF_Y(x)$ при $x < c$ и $dF_X(x) \leq dF_Y(x)$ при $x > c$, тогда $X <_{st} Y$.

Доказательство. Очевидно, при $y < c$

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} dF_X(x) \geq \int_{-\infty}^{y} dF_Y(x) = F_Y(y),$$

в то время как при $y > c$ справедливо следующее неравенство

$$\mathrm{P}(X > y) = 1 - F_X(y) = \int_{y}^{\infty} dF_X(x)$$

$$\leq \int_{y}^{\infty} dF_Y(x) = 1 - F_Y(y) = \mathrm{P}(Y > y).$$

А это значит, что выполняется определение стохастического доминирования X случайной величиной Y. $\square$

Эквивалентные определения

Обозначим $\mathcal{K}_1(R)$ множество монотонно неубывающих вещественных функций.

Теорема

1. Пусть $f \in \mathcal{K}_1(R)$ и соответствующие интегралы существуют. Тогда, если $F_1 <_{st} F_2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_2(t). \tag{3}$$

2. Обратно, если F_1 и F_2 таковы, что (3) верно для всех $f \in \mathcal{K}_1(R)$, для которых интегралы существуют, то $F_1 <_{st} F_2$.

3. Любая вещественная функция f такая, что (3) верно для всех $F_1 <_{st} F_2$ является монотонно неубывающей, т.е. $f \in \mathcal{K}_1(R)$.

Доказательство. 1. Пусть $F_1 <_{st} F_2$, $f \in \mathcal{K}_1(R)$ и существуют соответствующие интегралы. Найдутся случайные величины X_1 и X_2, имеющие соответственно функции распределения F_1 и F_2, такие, что $\mathsf{P}(X_1 \le X_2) = 1$. Следовательно, $\mathsf{P}(f(X_1) \le f(X_2)) = 1$ и $\mathsf{E}f(X_1) \le \mathsf{E}f(X_2)$. А это и есть неравенство (3), поскольку

$$\mathsf{E}f(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_k(t),\ k = 1,2.$$

2. Функция $\Theta_x \in \mathcal{K}_1(R)$ для любого x. Соответствующие интегралы существуют, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(t)dF_k(t) = \bar{F}_k(x-0),$$

при этом неравенство (3) превращается в эквивалентное определение стохастического порядка.

3. Возьмем одноточечные распределения Θ_{x_k}, $k = 1,2$, с $x_1 \le x_2$. Поскольку $\Theta_{x_1} <_{st} \Theta_{x_2}$, а

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\Theta_{x_k}(t) = f(x_k),$$

получим $f \in \mathcal{K}_1(R)$. $\square$

Следствие

Для неотрицательных случайных величин (рисков) X_k, $k = 1, 2$, таких, что $X_1 <_{st} X_2$, справедливы неравенства

$$\mathsf{E}X_1^r \leq \mathsf{E}X_2^r,\ 0 \leq r < \infty, \quad \mathsf{E}X_1^r \geq \mathsf{E}X_2^r,\ r < 0,$$

если соответствующие математические ожидания существуют.

Лемма

Порядок на основе ожидаемой полезности (с неубывающей функцией полезности) эквивалентен стохастическому порядку.

Доказательство. Введем функцию $f(t) = -u(-t)$, тогда если $u \in \mathcal{K}_1(R)$, то и $f \in \mathcal{K}_1(R)$. Следовательно, из $X <_{st} Y$ вытекает $\mathsf{E}f(X) \leq \mathsf{E}f(Y)$ или же $-\mathsf{E}u(-X) \leq -\mathsf{E}u(-Y)$, что означает большую ожидаемую полезность, т.е. предпочтительность риска X.

Обратное утверждение получается совершенно аналогично, так как любой $f \in \mathcal{K}_1(R)$ соответствует функция полезности $u(t) = -f(-t)$, принадлежащая тому же классу неубывающих функций. $\square$

Округление

На прошлой лекции установлено, что справедливы следующие неравенства

$$K_A(x) \geq F_X(xh) \geq K_C(x),\ x \geq 0,$$

$$K_A(x) \geq K_B(x) \geq K_C(x),\ x \geq 0.$$

Вспомнив определение стохастического порядка, мы можем записать эти соотношения как

$$Y_A <_{st} (X/h) <_{st} Y_C, \quad Y_A <_{st} Y_B <_{st} Y_C,$$

где Y_A - это целочисленная случайная величина с распределением $\{K_j^A\}_{j\geq 0}$ и функцией распределения $K_A(x)$, аналогично задаются Y_B и Y_C. Поскольку стохастический порядок сохраняется при взятии составных распределений, мы получаем

Округление

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n K_A^{n*}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{n*}(hx) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n K_C^{n*}(x),\ x \geq 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n K_A^{n*}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n K_B^{n*}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n K_C^{n*}(x),\ x \geq 0.$$

Как видно из приведенных соотношений, округление до ближайшей единицы может рассматриваться как приближение для истинного распределения суммарного ущерба. Однако для того чтобы понять, насколько это приближение точно, все равно необходимо подсчитать верхнюю и нижнюю границы, даваемые методами A (до нижней единицы) и C (до верхней). Сделать это нетрудно, используя формулы Панджера, если распределение N принадлежит классу (a, b, m), $m \geq 0$.

Стохастический порядок

Итак, мы установили, что существуют следующие эквивалентные определения стохастического доминирования $X_1 <_{st} X_2$ или $(F_1 <_{st} F_2)$:

- для любого t либо $F_1(t) \geq F_2(t)$, либо $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$ или же иначе то же самое можно записать $\mathsf{P}(X_1 > t) \leq \mathsf{P}(X_2 > t)$. Поскольку стохастический порядок порождается классом $\mathcal{F}_{st}$ функций распределения констант $\Theta_x(t)$, еще один способ записи выглядит следующим образом

$$\mathsf{E}\Theta_x(X_1) \leq \mathsf{E}\Theta_x(X_2).$$

Стохастический порядок

- Для любой $f \in \mathcal{K}_1(R)$, т.е. монотонно неубывающей, для которой существуют соответствующие интегралы, справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_2(t).$$

  (В терминах случайных величин это записывается так: $\mathsf{E}f(X_1) \leq \mathsf{E}f(X_2)$.)

- Еще одно (эквивалентное стохастическому порядку) определение упорядочивания рисков, особенно интересное для страхования, может производиться на основе ожидаемой полезности. А именно, риск X предпочтительнее риска Y, если $\mathsf{E}u(-X) \geq \mathsf{E}u(-Y)$ для любой неубывающей функции полезности u.

Порядок стоп-лосс

Далее будет рассматриваться более слабый порядок по сравнению со стохастическим доминированием. Это так называемый стоп-лосс порядок (stop-loss), который будет обозначаться $<_{sl}$ и может быть определен различными эквивалентными способами. (Иногда его называют также стохастическим порядком второй степени - second degree stochastic order.)

Определение

Говорят, что $X_1 <_{sl} X_2$, точнее, X_1 предпочтительнее X_2 в смысле порядка стоп-лосс (первой степени), если $\mathrm{E}(X_1 - d)^+ \le \mathrm{E}(X_2 - d)^+$ для любого d.

Почему возникло такое название? Если X - суммарный убыток страховой компании за определенный срок (обычно за год), а d - приоритет (или уровень собственного удержания) договора перестрахования стоп-лосс, то выплата перестраховщика (в предположении, что ответственность перестраховщика неограничена) равна $(X - d)^+$, соответственно $\mathrm{E}(X - d)^+$ - чистая премия. В страховании d интерпретируется как франшиза.

Нетрудно понять, что выписанное выше условие задает в самом деле частичный порядок. Свойства транзитивности и рефлексивности очевидны. Что касается антисимметричности, путем интегрирования по частям нетрудно получить (для $k = 1, 2$)

$$\mathrm{E}(X_k - d)^+ = \int_d^\infty (x - d) dF_k(x) = \int_d^\infty (1 - F_k(x))\, dx, \qquad (4)$$

следовательно, при $X_1 <_{sl} X_2$ и $X_2 <_{sl} X_1$, сразу же получаем

$$\int_d^\infty \bar{F}_1(t)dt = \int_d^\infty \bar{F}_2(t)dt. \qquad (5)$$

Откуда в свою очередь выводится (с помощью дифференцирования), что $F_1 = F_2$. Напомним, что как и в случае стохастического порядка, упорядочивание случайных величин означает упорядочивание соответствующих функций распределения. Стоп-лосс порядок говорит о том, что предпочтительнее распределения с более легкими хвостами.

Порядок стоп-лосс

Лемма

Из $X <_{st} Y$ *следует* $X <_{sl} Y$.

Доказательство вытекает из определения стохастического порядка и (4). $\square$

Лемма

Утверждение $X <_{sl} Y$ *эквивалентно тому, что* $\mathrm{E}\max(d, X) \le \mathrm{E}\max(d, Y)$ *для любого* d.

Доказательство очевидным образом следует из равенства

$$\mathrm{E}\max(X_k, d) = d + \int_d^{\infty} (1 - F_k(t))\, dt. \square$$

Задача. Если $\mathrm{E}X = m$, то $m <_{sl} X$.

Порядок всех лиц, не склонных к риску

Определение

Риск X считается предпочтительнее риска Y, если у него бóльшая ожидаемая полезность $\mathrm{E}u(-X) \geq \mathrm{E}u(-Y)$ для любой неубывающей вогнутой функции полезности.

Это записывается $X <_{ra} Y$. Сокращение ra получено как первые буквы слов risk averse (несклонный к риску).

Выпуклое возрастающее упорядочивание

Рассмотрим подкласс $\mathcal{K}_2(R)$ класса $\mathcal{K}_1(R)$, состоящий из выпуклых неубывающих функций.

Определение

Риск X предпочтительнее риска Y, иначе $X <_{icx} Y$, если для любой $f \in \mathcal{K}_2(R)$ выполнено неравенство $\mathrm{E}f(X) \le \mathrm{E}f(Y)$.

Лемма (L)

2 последних определения ($<_{ra}$ и $<_{icx}$) приводят к одному и тому же порядку.

Доказательство дословно повторяет рассуждения соответствующей леммы для стохастического порядка с заменой класса $\mathcal{K}_1$ на $\mathcal{K}_2$. $\square$

Порядок, связанный с изменчивостью

Предпочтительнее потери, не включающие элементов игры, благоприятной или в худшем случае справедливой, т.е. обладающие меньшей изменчивостью (variability).

Определение

Говорят, $X <_v Y$, если существует такая случайная величина Z, что $X + Z \overset{d}{=} Y$ и $\mathrm{E}(Z|X) \geq 0$ с вероятностью 1.

Лемма (a)

Пусть $X_1 <_{sl} X_2$ и $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2$, тогда $-X_1 <_{sl} -X_2$.

Доказательство. Перепишем равенство

$$\mathrm{E}\min(X_k, d) + \mathrm{E}\max(X_k, d) = m + d,$$

справедливое при всех d и $\mathrm{E}X_k = m$, в виде

$$\mathrm{E}\max(-X_k, d) = \mathrm{E}\max(X_k; -d) + d - m.$$

Тогда требуемое утверждение вытекает из последнего равенства и леммы, дающей достаточное условие для порядка $<_{sl}$. $\square$

Теорема

Теперь нетрудно установить следующий результат.

Теорема (M)

1. Пусть $F_1 <_{sl} F_2$ и $f \in \mathcal{K}_2(R)$, тогда

$$\mathrm{E}f(X_1) \le \mathrm{E}f(X_2) \tag{6}$$

(при условии, что рассматриваемые математические ожидания существуют, а F_k - функция распределения X_k, $k = 1, 2$).

2. Если $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2$, тогда утверждение пункта 1 справедливо для любой выпуклой функции f.

3. Если (6) выполнено для всех $f \in \mathcal{K}_2(R)$, для которых существуют математические ожидания, то $F_1 <_{sl} F_2$.

4. Если для некоторой функции f соотношение (6) справедливо для любых $F_1 <_{sl} F_2$ таких, что соответствующие средние существуют, то $f \in \mathcal{K}_2(R)$.

Доказательство.

1. Пусть $F_1 <_{sl} F_2$, $f \in \mathcal{K}_2(R)$ и соответствующие интегралы существуют. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K(\varepsilon) > -\infty$, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_k(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \max(K(\varepsilon), f(t))\, dFk(t) \right| < \varepsilon.$$

Значит, достаточно рассмотреть лишь те $f \in \mathcal{K}_2(R)$, для которых существует $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$. Такую функцию можно представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)\, dx,$$

где g - монотонно неубывающая функция, равная нулю на $-\infty$. Преобразуем функцию f следующим образом

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{x} dg(u)dx = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_u(x)dg(u)dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\Theta_u(x)\,dx\,dg(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e_u(t)dg(u),$$

где $e_u(t)=(t-u)^+$. Теперь, при $k=1,2$,

$$\mathsf{E}f(X_k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dF_k(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e_u(t)dg(u)dF_k(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e_u(t)dF_k(t)dg(u).$$

Но поскольку порядок $<_{sl}$ порождается классом $\mathcal{F}_{sl}=\{e_u(t)\}_{u\in R}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_u(t)dF_1(t)\le\int_{-\infty}^{\infty}e_u(t)dF_2(t),$$

т.е. соотношение (6) справедливо.

2. Пусть $EX_1 = EX_2$, а f выпуклая, но необязательно монотонно неубывающая. Ограничимся функциями, у которых точная нижняя грань равна 0 и достигается в некоторой точке t_0 (возможно, $t_0 = \pm\infty$). Представим f в виде $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_1(t) = 0$ при $t < t_0$ и $f_1(t) = f(t)$ при $t \geq t_0$, а $f_2(t) = f(t)$ при $t < t_0$ и $f_2(t) = 0$ при $t \geq t_0$.

Ясно, что $f_1(t)$ - выпуклая монотонно неубывающая, а $f_2(t)$ - выпуклая монотонно невозрастающая функция (если $t_0 = +\infty$, то $f_1(t) \equiv 0$, если $t_0 = -\infty$, то $f_2(t) \equiv 0$).

Согласно предыдущему пункту $Ef_1(X_1) \leq Ef_1(X_2)$. Для функции f_2 аналогичное неравенство получим с помощью леммы (a).

Обозначим $\tilde{f}_2(t) = f_2(-t)$, тогда $Ef_2(X_k) = E\tilde{f}_2(-X_k)$. Поскольку функция $\tilde{f}_2(t)$ - выпуклая неубывающая, а $-X_1 <_{sl} -X_2$, по доказанному $Ef_2(X_1) \leq Ef_2(X_2)$.

Суммируя результаты, получим нужное соотношение (6) для функции f.

3. Этот пункт очевиден, так как $e_x(t) = (t-x)^+$ выпуклая неубывающая функция. В самом деле, поскольку $\mathsf{E}f(X_1) \le \mathsf{E}f(X_2)$ для любой $f \in \mathcal{K}_2(R)$, то это же верно и для e_x, т.е.выполнено определение стоп-лосс порядка.

4. Последнее утверждение доказывается использованием распределений, сосредоточенных в одной и двух точках. В частности, для доказательства выпуклости достаточно взять $F_1 = \Theta_x$, а $F_2 = \lambda\Theta_{x_1} + (1-\lambda)\Theta_{x_2}$, где $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $(0 < \lambda < 1)$. $\square$

Замечание

Утверждение этой теоремы является обобщением неравенства Йенсена, согласно которому для любой выпуклой функции f верно $f(\mathsf{E}X) \le \mathsf{E}f(X)$. Последнее неравенство сразу же вытекает из того, что $\mathsf{E}X <_{sl} X$.

Эквивалентность определений порядка

Следствие

Для неотрицательных случайных величин X_1 *и* X_2*, таких, что* $X_1 <_{sl} X_2$*, имеем* $\mathrm{E}X_1^r \le \mathrm{E}X_2^r$ *при* $r \ge 1$*, если рассматриваемые моменты существуют.*

Теорема

Все четыре определения порядка эквивалентны.

Доказательство. Эквивалентность $<_{sl}$ и $<_{icx}$ доказана в теореме (M). Что касается эквивалентности $<_{ra}$ и $<_{icx}$, то она установлена в лемме (L).

Эквивалентность определений порядка

Также легко проверить, что из $<_v$ следует $<_{sl}$. Пусть $X <_v Y$, т.е. существует такая случайная величина Z, что $\mathsf{E}(Z|X) \geq 0$ п.н. и $Y \stackrel{d}{=} X + Z$. Применим неравенство Йенсена для условных математических ожиданий (при условии X) к выпуклой неубывающей функции $f(t) = [t - (d - x)]^+$. Тогда

$$\mathsf{E}(Y - d)^+ = \mathsf{E}(X + Z - d)^+ = \mathsf{E}\{\mathsf{E}[(X + Z - d)^+|X]\}$$

$$\geq \mathsf{E}(X + \mathsf{E}(Z|X) - d)^+ \geq \mathsf{E}(X - d)^+,$$

т.е. оказывается в самом деле $X <_{sl} Y$.

Относительно обратного утверждения, необходимо заметить, что доказав его для дискретных случайных величин, можно предельным переходом установить тот же факт и для непрерывных распределений. В свою очередь, для дискретных надо начать с двухточечных распределений, а потом брать их смеси. $\square$