05.05.21. Задание 6 (ур-е Навье-Стокса)

Мы решаем ур-е относит. неизв. $\omega(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ на $\Omega = [0,1]\times[0;0.5]\times[0;1]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \overset{2.83\cdot 10^{-4}}{\overset{\parallel}{a}}\,\Delta\omega - \overset{1}{\overset{\parallel}{b}}\,\omega - \overset{\psi_x\omega_y - \psi_y\omega_x}{\overset{\parallel}{[\psi,\omega]}} + h = -37.75\cdot\sin\left(\frac{2\pi x}{1}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi y}{0.5}\right) - 0.3775\cdot\sin\left(\frac{3\pi x}{1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{0.5}\right) - 0.3775\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{1}\right)\cdot\sin\left(\frac{9\pi y}{0.5}\right) \\ \omega = \Delta\psi \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0 \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \\ \psi|_{t=0} = \psi^0 \end{cases}$$

$\psi|_{t=0} = \psi^0$ — мы будем задавать $\psi^0 \equiv 0$, типа в начале всё покоится.

Проблема в том, что неизвестны ω и ψ (обе).

(1.) Если бы ψ-не было:

тогда мы бы решали ур-е
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = a\Delta\omega - b\omega + h \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0 \\ \omega|_{t=0} = \Delta(\psi^0) \end{cases}$$

Это просто ур-е теплопроводности с правой частью.

Мы бы для него написали неявную схему (а можно и явную, типа было-стало, по текущему слою пересчитывать следующий)
(но неявная схема всегда лучше)

это обозначает номер слоя по времени

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = \Delta\omega^{n+1} - b\omega^{n+1} + h^{n+1}$$

это имеется в виду матрица $(N_x+1)\times(N_y+1)$

$$\Updownarrow$$
$$-a\Delta\omega^{n+1} + \underbrace{\frac{\omega^{n+1}}{\tau} + b\omega^{n+1}}_{p:\ \text{диагональная добавка к лапласу}} = \frac{\omega^n}{\tau} + h^{n+1}$$
= новая правая часть $\tilde{f}$, мы её знаем в каждой точке сетки.

$$\Updownarrow$$
$$-a\Delta\omega^{n+1} + p\cdot\omega^{n+1} = \tilde{f}$$
— это обычный 2-мерный лаплас с правой частью и пост. диаг. добавкой. Мы её решим методом Фурье+Фурье.

(2) Теперь ψ — есть, т.е $[\psi;\omega]$ — есть.

Мы бы тоже хотели включить $[\psi;\omega]$ в ур-е неявным ~~[illegible]~~ образом, т.к неявная схема всегда лучше. Но настолько неявную схему непонятно, как решать.

$\Rightarrow$ включим $[\psi;\omega]$ — явным образом:

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} = a\Delta\omega^{n+1} - b\omega^{n+1} + \underbrace{h^{n+1} + [\psi^n;\omega^n]}_{\text{это мы знаем в каждой точке сетки}}$$

зная ψ и ω в каждой точке сетки, сможем апроксимировать $[\psi,\omega] = \psi_x\omega_y - \psi_y\omega_x$

$\Rightarrow$ Относительно ω^{n+1} — это опять 2-мерный лаплас с пост. диаг. добавкой и правой частью.

$$\Rightarrow\ -a\Delta\omega^{n+1} + \left(\frac{1}{\tau} + b\right)\omega^{n+1} = \frac{\omega^n}{\tau} + h^{n+1} + [\psi^n;\omega^n] =: \tilde{f} \text{ — новая правая часть.}$$

$$\Rightarrow\ -a\Delta\omega^{n+1} + \left(\frac{1}{\tau} + b\right)\omega^{n+1} = \tilde{f}$$
— обычный 2-мерный лаплас с правой частью и пост. диаг. добавкой.
Решаем его методом Фурье+Фурье.

Итак, зная ω^n и ψ^n — мы нашли ω^{n+1}.

Как теперь найти ψ^{n+1}?

Легко, т.к ψ^{n+1} удовл. ур-ю: $\begin{cases} \Delta\psi^{n+1} = \omega^{n+1} \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$ — это мы только что ~~[illegible]~~ нашли из ур-я Лапласа.

А это вообще 2-мерный лаплас, без диаг. добавки и без правой части. Решаем его методом Фурье+Фурье.

③ Алгоритм

- $\psi^0 \equiv 0 \Rightarrow \omega^0 \equiv 0$.
- На каждом шаге, зная n-й слой ω^n и ψ^n — найдем ω^{n+1} из ур-я:

$$\begin{cases} -a\Delta\omega^{n+1} + \left(\frac{1}{\tau}+b\right)\omega^{n+1} = \frac{\omega^n}{\tau} + h^{n+1} + [\psi^n;\omega^n] \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Теперь, зная ω^{n+1}, найдем ψ^{n+1} из ур-я:

$$\begin{cases} \Delta\psi^{n+1} = \omega^{n+1} \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ мы нашли ω^{n+1} и ψ^{n+1}

Шаг.

Повторяем шаг — столько, ~~[illegible]~~ сколько раз мы хотим шагнуть по времени.

Я шагала $T = 100$ раз с шагом $\tau = 0.01$. ($\Rightarrow$ пришла в $t = 0 + T\cdot\tau = 1$).

④ Как, зная ω^n и ψ^{n+1} — посчитать скобку $[\psi;\omega]$?

Вот так:

это u_{ij} $\parallel$ $u[j\cdot(N_x+1)+i]$

Внимание! ~~[illegible]~~ i — это столбцы! (потому что ~~[illegible]~~ i ходит по x)

~~[illegible]~~ j — это строки!

$$\boxed{[\psi;\omega]\Big|_{i,j} = \left[\psi_x\omega_y - \psi_y\omega_x\right]\Big|_{ij} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x}\cdot\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2h_y} - \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2h_y}\cdot\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2h_x}}$$

Причем (см. ряд тейлора в точке ij) это равенство — с точностью до $O(h_x^2 + h_y^2)$.

Внимание! ψ и $\omega|_{\partial\Omega}$ — всегда 0, т.е все матрицы имеют на границе всегда 0, и поэтому мы вычисляем все коэф. во всех матрицах при $i \in [1; N_x-1]$; $j \in [1; N_y-1]$.

И вообще, при пересчете $c_{ij} = \dfrac{d_{ij}}{K\cdot\lambda_i\cdot\lambda_j}$ — мы просто получим деление на ноль при $i=0$ или $j=0$ — т.к $\lambda_i = \sin\left(\frac{\pi i x}{1}\right)$, $\lambda_j = \sin\left(\frac{\pi j x}{0.5}\right)$

⑤ Как решать 2-мерного Лапласа с постоянной диаг. добавкой и ~~чувствит.~~ правой частью: стр2

$$\begin{cases} -K\Delta u + p\cdot u = f \quad (*) \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \quad \Omega = 0.5\boxed{}_{1} \end{cases}$$

Имеем: $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow$ собств. ф-ции: $\varphi^{(m)} = \sin\left(\frac{\pi m x}{1}\right)$

$\psi^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi n y}{0.5}\right)$;

! Внимание: не забыть, что аргумент собств. ф-ции — делится на длину отрезка — 1 или 0.5 соотв.

Разложим: $f = \sum_{mn} d_{mn}\, \varphi^{(m)} \psi^{(n)}$

знаем $\Rightarrow d_{mn}$ — посчитаем (каким способом — см. далее).

Далее, $\varphi^{(m)}\psi^{(n)}$ — собств. ф-ция ур-я $-\Delta u = \lambda u$ с собств. значением $\lambda_m \cdot \lambda_n = \frac{4}{hx^2}\sin^2\left(\frac{\pi m hx}{1\cdot 2}\right) \cdot \frac{4}{hy^2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi n hy}{1\cdot 0.5}\right)$ —

ну потому что разностная схема для $-\Delta u = \lambda u$:

$$-\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{hx^2} - \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{hy^2} = \lambda u_{ij}$$

И если подставить $u_{ij} := (\varphi^{(m)}\cdot\psi^{(n)})\Big|_{ij} = \sin\left(\frac{\pi m i\cdot hx}{1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n\cdot j\cdot hy}{0.5}\right)$,

в левую часть, то получим (т.к. 1-е слагаемое подействует на $\varphi^{(m)}$, и ничего не сделает с $\psi^{(n)}$, а 2-е — наоборот):

$$-\frac{\left[\underbrace{\sin(\pi m(i+1)hx) + \sin(\pi m(i-1)hx)}_{=2\sin \pi m i hx\cdot\cos\pi m hx} - 2\sin(\pi m i\cdot hx)\right]}{hx^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi n j\cdot hy}{0.5}\right) - \sin\left(\frac{\pi m\cdot i\cdot hx}{1}\right)\cdot\frac{\left[\sin\left(\frac{\pi n\cdot(j-1)hy}{0.5}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi n j hy}{0.5}\right) + \sin\left(\frac{\pi n(j+1)hy}{0.5}\right)\right]}{hy^2}$$

$$= \left(\frac{4}{hx^2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi m hx}{2}\right) + \frac{4}{hy^2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi n hy}{0.5\cdot 2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m i hx}{1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n j hy}{0.5}\right) \stackrel{?}{=} \lambda\cdot\sin\left(\frac{\pi m i hx}{1}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n j hy}{0.5}\right).$$

$$\Rightarrow \lambda_{mn} = \frac{4}{hx^2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi m hx}{2}\right) + \frac{4}{hy^2}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi n hy}{0.5\cdot 2}\right) = \lambda_m + \lambda_n$$

Итак, мы нашли собств. ф-ции нашей задачи.

Теперь разложим решение по ним, т.е.:

Ищем решение ур-я (*) в виде: $u = \sum_{mn} c_{mn}\, \varphi^{(m)}\psi^{(n)}$

$$\Rightarrow -K\Delta u + p\cdot u = K\sum_{mn} c_{mn}(\lambda_m + \lambda_n)\varphi^{(m)}\psi^{(n)} + p\cdot\sum_{mn} c_{mn}\,\varphi^{(m)}\psi^{(n)} \stackrel{?}{=} f = \sum_{mn} \underset{\text{знаем!}}{d_{mn}}\,\varphi^{(m)}\psi^{(n)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{mn} = \frac{d_{mn}}{K(\lambda_m + \lambda_n) + p}} \quad \text{нашли } c_{mn}!$$

6.) Как быстро находить c_{mn} по f_{ij} и f_{ij} по c_{mn}?

(f2c) Дано: f_{ij} – на всей сетке.

Хотим: c_{mn}

Т.е. $u_{ij} = \sum_{n=1}^{N_y-1}\sum_{m=1}^{N_x-1} c_{mn}\cdot \sin \pi m i h_x \cdot \sin\left(\frac{\pi n j h_y}{0.5}\right)$

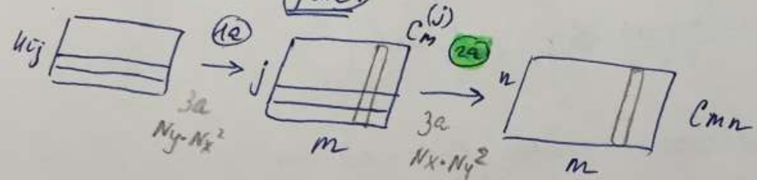
Зафикс. j: $\Rightarrow u_{ij} = \sum_{m=1}^{N_x-1} c_m^{(\text{от } j)} \underbrace{\sin \pi m i h_x}_{=\varphi^{(m)}}$ легко считаются: $c_m^{(j)} = \frac{\langle u_{ij}; \varphi^{(m)}\rangle}{\langle \varphi^{(m)};\varphi^{(m)}\rangle}$

но $u_{ij} = \sum_{m=1}^{N_x-1} c_m^{(j)} \sin \pi m i h_x = \sum_{m=1}^{N_x-1}\left(\sum_{n=1}^{N_y-1} c_{mn}\sin\left(\frac{\pi n j\cdot h_y}{0.5}\right)\right)\sin\pi m i h_x$

$$\Rightarrow c_m^{(j)} = \sum_{n=1}^{N_y-1} c_{mn}\sin\left(\frac{\pi n j h_y}{0.5}\right)$$

$$\Rightarrow c_{mn} = \frac{\langle c_m^{j};\psi^{(n)}\rangle}{\langle\psi^{n};\psi^{n}\rangle}.$$

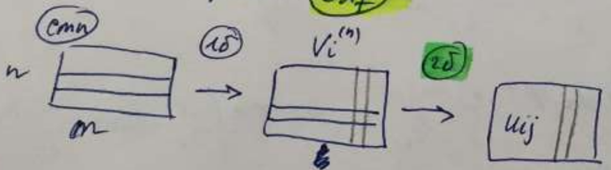
Т.е. Алгоритм (f2c):



— Всего за $O(N_x\cdot N_y^2+N_y\cdot N_x^2)$

при $N_x=N_y=N$: $O(N^3)$.

Обратный алгоритм: (c2f)



Т.к. $u_{ij} = \sum_m\sum_n c_{mn}\varphi_i^{(m)}\cdot\psi_j^{(n)} = \sum_n \Big(\underbrace{\sum_m c_{mn}\varphi_i^{(m)}}_{= V_i^{(n)}}\Big)\psi_j^{(n)}$

Внимание! При совершении переходов 2а и 2б необходим массив доп-у, т.к. мы N_y раз скал. произв. берём со столбцом, (пока j идёт по столбцу от 1 до N_y-1), и мы этот же столбец заполняем, т.е. портим его.

При шагах 1а и 1б таких проблем не происходит, т.к. строку мы берём из мас-с, а заполняем мас-и, (или наоборот). Всё!

In dimensionless variables "stream function-vortisity" this system is follows:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega}{\partial t} = \bar{\nu}\Delta\omega - \omega - [\psi,\omega] + \Delta h + \Delta u, \\
&\Delta\psi = \omega, \quad [\psi,\omega] = \psi_x\omega_y - \psi_y\omega_x.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Here $\psi(t,x,y)$ is unknown stream function, $h(x,y)$ describes magnetic field. The bottom influence is reduced in this case to damping of horizontal flows by linear law. We add the system with the following initial-boundary conditions:

$$
\begin{aligned}
&\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta\psi|_{\partial\Omega} = 0; \quad \psi|_{t=0} = \psi^0, \\
&\Omega = [0,l_1] \times [0,l_2].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

In this case Dirichlet conditions are prescribed on the boundary for functions ψ,ω. Let $\bar{\nu} \approx 2.83 \cdot 10^{-4}$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0.5$,

$$
\begin{aligned}
&\Delta h(x,y) = \sum_{m,n} c_{mn} \sin\left(\tfrac{\pi m x}{l_1}\right) \sin\left(\tfrac{\pi n y}{l_2}\right), \\
&c_{22} \approx -37.75, c_{13} = c_{31} = 0.01 c_{22}, \quad \text{and } c_{mn} = 0 \text{ for other } m,n.
\end{aligned}
$$