Промежуточный письменный экзамен

В задачах фиксировано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$, удовлетворяющее обычным условиям.

① Пусть M и N — чисто разрывные локальные мартингалы с $M_0 = N_0 = 0$, т.ч. процессы ΔM и ΔN неотличимы. Докажите, что M и N неотличимы.

② Пусть W — броуновское движение относительно $(\mathcal{F}_t)$, H и K — предсказуемые локально ограниченные процессы. Положим $M = K \cdot W$. Известно, что $K \neq 0$ $P\times\mu_L$-п.в., где μ_L обозначает меру Лебега, и что $(H\cdot M)M \in \mathcal{M}_{loc}$.
Докажите, что $H = 0$ $P\times\mu_L$-п.в.

③ Пусть $X^i \in \mathrm{Sem}$, $i \in \{1,2,3\}$. Докажите формулу $[[X^1, X^2], X^3] = [X^1, [X^2, X^3]]$ (п.н.)

(4) Пусть $X, Y \in \mathcal{V}$. Справедлива ли в этом случае формула интегрирования по частям

$$XY = X_0 Y_0 + X \cdot Y + Y \cdot X \quad \text{(п.н.)} \quad ?$$

Если ответ положительный (соотв., отрицательный), то докажите формулу (соотв., постройте контрпример).

(5) Пусть W — броуновское движение относительно $(\mathcal{F}_t)$, τ — конечный момент остановки, $\alpha > 0$ — детерминированное число.

Посчитайте $E\left\{ \int_0^\tau e^{-\alpha s} W_s \, dW_s \right\}$.

<u>Пояснение</u>: $\int_0^\tau e^{-\alpha s} W_s \, dW_s$ понимается как X_τ, где $X := \int_0^{\cdot} e^{-\alpha s} W_s \, dW_s$.

(6) Пусть $X \in \mathrm{Sem}$, $Y \in \mathcal{V}^c$. Докажите, что $[X, Y] = 0$ (п.н.)

(7) Пусть W — броуновское движение, N — пуассоновский процесс (оба относительно $(\mathcal{F}_t)$; W и N могут быть зависимы). Положим $\Lambda = (\Lambda_t)$ с $\Lambda_t = t$, $t \in \mathbb{R}_+$, и определим процесс

$X = (W + \Lambda)(W + N + \sin \Lambda)$.

а) Докажите, что $X \in Sem$ и посчитайте его непрерывную мартингальную составляющую X^c.

б) Является ли в этом примере X^c мартингалом?

(8) Рассмотрим следующую модель дискретного времени: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k=0,1,\dots,N}, P)$, нужно закрыть позицию в $x \in \mathbb{R}$ акций к моменту времени N. Класс стратегий:

$$A(x) = \{ (\xi_k)_{k=0,1,\dots,N} : (\xi_k) \text{ согласован с } (\mathcal{F}_k), \; x + \sum_{k=0}^{N} \xi_k = 0 \text{ п.н.}, \; \xi_k \in L^\infty \; \forall k \}.$$

Модель:

- unaffected price: произвольный мартингал $S^0 = (S^0_k)_{k=0,1,\dots,N}$.

• Цены акции $S=(S_k)$ при использовании стратегии $(\xi_k) \in \mathcal{A}(x)$:

$$S_k = S_k^0 + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j + \frac{\lambda}{2} \xi_k, \quad k=0,1,\dots,N.$$

$$\left(\sum_{0}^{-1} := 0; \quad \lambda > 0 \right).$$

Опишите <u>все</u> оптимальные стратегии в классе $\mathcal{A}(x)$ в задаче

$$E\left[\mathrm{costs}(\xi)\right] \xrightarrow[\xi=(\xi_k)\in\mathcal{A}(x)]{} \min,$$

где $\mathrm{costs}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} S_k \xi_k$.