Amir-Evstigneev 2013

Model $N \geq 2$ investors

$K \geq 2$ assets (short-lived)

$x_t^i = (x_{t,1}^i, \dots x_{t,K}^i) \in \mathbb{R}_+^K$ – количество единиц каждого из активов у трейдера i.

$x_{t,j}^i \geq 0$ – короткие продажи запрещены

$p_t = (p_{t,1} \dots p_{t,K})$ – цена за единицу актива $k = 1 \dots K$

$\langle p_t; x_t^i \rangle = \sum_{k=1}^K p_{t,k} \cdot x_{t,k}^i$

$V_{t,k}(s^t) > 0$ – количество единиц актива k на рынке в дату t.

s_t – случ. фактор, описывающий состояние мира в момент t.

$s^t = (s_1 \dots s_t)$ – история состояний мира

$A_{t,k}(s^t) \geq 0$ – выплата от единицы k-го актива в состоянии $s^t = (s_1 \dots s_t)$

$\sum_{k=1}^K A_{t,k}(s^t) > 0, \; \forall t, s^t$ – требуем такое условие

$w_0^i > 0$ – начальный капитал i-го игрока

$\langle A_t(s^t); x_{t-1}^i \rangle$ – капитал i-го игрока в момент t.

$\lambda_t^i = (\lambda_{t,1}^i \dots \lambda_{t,K}^i) \in \Delta^K := \{(a_1 \dots a_K) \in \mathbb{R}_+^K : a_1 + \dots + a_K = 1\}$ – investment proportions (вкладываем весь капитал)

$\lambda^{t-1} := (\lambda_l^i); \; i = 1 \dots N, \; l = 0 \dots t-1$ – история игры.

Опр. Portfolio rule (or an investment strategy) Λ^i – это вектор $\Lambda_0^i \in \Delta^K$ и посл-ть измеримых ф-ций $\Lambda_t^i(\underbrace{s^t}_{(s_1 \dots s_t)}; \underbrace{\lambda^{t-1}}_{(\lambda_l^i),\, i=1 \dots N;\, l=0 \dots t-1}), \; t = 1, 2 \dots$

Опр. Basic strategy – такое Λ_t^i, которое зависит только от s^t, но не от истории игры λ^{t-1}.

$$\boxed{\underbrace{p_{0,k} \cdot V_{0,k}}_{\text{стоимость всего кол-ва актива } k} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \lambda_{0,k}^i w_0^i}_{\text{сколько все трейдеры вложили в актив } k}} \quad (2) \quad k = 1, 2 \dots K$$

– отсюда находится цена $p_{0,k}$

$$\boxed{x_{0,k}^i = \frac{\lambda_{0,k}^i w_0^i}{p_{0,k}}} \quad (3) \quad k = 1, 2 \dots K, \; i = 1 \dots N$$

– отсюда находим размеры позиций $x_{0,k}^i$

В каждый момент времени, цена находится из равенства спроса и предложения.

$$\boxed{p_{t,k} \cdot V_{t,k} = \sum_{i=1}^N \lambda_{t,k}^i \langle A_t; x_{t-1}^i \rangle} \quad (4) \quad k = 1 \dots K$$

$$\boxed{x_{t,k}^i = \frac{\lambda_{t,k}^i \langle A_t; x_{t-1}^i \rangle}{p_{t,k}}} \quad (5) \quad k = 1, \dots K, \; i = 1 \dots N$$

Опр. Admissible strategy profiles – это те, которые приводят к неотрицательным ценам $p_{t,k}$, или, эквивалентно, неотр. aggregate demand $\sum_{i=1}^N \lambda_{t,k}^i \langle A_t; x_{t-1}^i \rangle$

Дост. условие, чтобы strategy profile был admissible – это если есть трейдер с полностью диверсифицированной стратегией, т.е. $\lambda_{t,k}^i > 0 \; \forall t, k$.

Main results

$(\Lambda^1, \dots \Lambda^N)$ - admissible strategy profile

$w_t^i = w_t^i(s^t) = \langle A_t(s^t); x_{t-1}^i(s^{t-1}) \rangle$

$w_t = \sum_{i=1}^{N} w_t^i = \sum_{k=1}^{N} A_{t,k}(s^t) V_{t-1,k}(s^{t-1}) > 0$ – полный капитал рынка

$r_t^i := \frac{w_t^i}{w_t}$ – относительные капиталы.

Опр. В фиксированном профиле $(\Lambda^1 \dots \Lambda^N)$, стратегия Λ^i – выживающая, если $\inf_{t \geq 0} r_t^i > 0$ a.s.

$$R_{t,k}(s^t) := \frac{A_{t,k}(s^t) V_{t-1,k}(s^{t-1})}{\sum_{m=1}^{K} A_{t,m}(s^t) V_{t-1,m}(s^{t-1})}$$ – relative payoffs

$R_t(s^t) := (R_{t,1}(s^t), \dots R_{t,K}(s^t))$

$\boxed{\lambda_t^*(s^t) := E_t R_{t+1}(s^{t+1})}$ – обобщение Kelly portfolio rule of "betting your beliefs".

нужно $E \ln E_t R_{t+1,k}(s^{t+1}) > -\infty$ $\forall k$ – чтобы $E_t R_{t+1,k} = E(R_{t+1,k} | s^t)$ было > 0 п.н.

Теорема 1 The portfolio rule Λ^* is a survival strategy.

Теорема 2 В классе базовых !!! (т.е. зависящих от s^t, но не зависящих от λ^{t-1}) стратегий, $\Lambda^* = (\lambda_t^*)$ – единственна:
if $\Lambda = (\lambda_t)$ is a basic survival strategy, then
$$\sum_{t=0}^{\infty} \| \lambda_t^* - \lambda_t \|^2 < \infty \text{ a.s.}$$

! но в классе не базовых стратегий Λ^* – неединственна, и приводится пример! И утв. о "single survivor" тоже не исследовано

Теорема 3 $\forall s^m, w_m$, базовое portfolio rule $[\underbrace{\lambda_t^*(s^m)}_{t=t}, \underbrace{\lambda_t^*(s^m, s^t_{m+1})}_{t>m}]$ – это выживающая стратегия в подигре $G_m(s^m; w_m)$.

$\omega = (s_1, s_2, \dots)$ – space of paths

$P(d\omega) = p_1(ds_1) \cdot \underbrace{p_2(s_1; ds_2)}\dots p_t(s^{t-1}; ds_t) \dots$

← история состояний условное распределение s_t при условии известных $s^{t-1} = (s_1 \dots s_{t-1})$.

$s^m; w_m = (w_m^1 \dots w_m^N)$

$s^t_{m+1} = (s_{m+1}; \dots s_t)$ – обрезали до m включительно

$G_m(s^m; w_m)$ – подигра, начинающаяся из w_m^i, $i = 1 \dots N$

с мерой $P_m^{s^m}(d\omega_{>m}) := p_{m+1}(s^m; ds_{m+1}) \dots p_{t+1}(s^m; s^t_{m+1}; ds_{t+1})$ на $\omega_{>m} = (s_{m+1}; s_{m+2}; \dots)$

с выплатами $A_t^{s^m}(s^t_{m+1}) := A_t(s^m; s^t_{m+1})$, $t \geq m+1$ и стратегией $\Lambda^i_{m+1}: \lambda^i_{m,t}(s^t_{m+1}; \lambda_m^{t-1})$.

<u>Док-во теоремы 1</u>

1) нам нужно рекурсивное выражение для r_{t+1}^i

Знаем: $p_{t,k} V_{t,k} = \langle \lambda_{t,k}, w_t \rangle \Rightarrow x_{t,k}^i = \dfrac{\lambda_{t,k}^i \cdot w_t^i}{p_{t,k}} = \dfrac{(\lambda_{t,k}^i w_t^i) \cdot V_{t,k}}{\langle \lambda_{t,k}, w_t \rangle}$

$$\Rightarrow w_{t+1}^i = \sum_{k=1}^{K} A_{t+1,k}\, x_{t,k}^i = \sum_{k=1}^{K} A_{t+1,k} V_{t,k} \cdot \frac{\lambda_{t,k}^i w_t^i}{\langle \lambda_{t,k}, w_t \rangle}$$

$$\Rightarrow w_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_{t+1}^i = \sum_{k=1}^{K} A_{t+1,k} V_{t,k} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_{t,k}^i w_t^i}{\langle \lambda_{t,k}, w_t \rangle}}_{=1} = \sum_{k=1}^{K} A_{t+1,k} V_{t,k}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{t+1}^i = \frac{w_{t+1}^i}{w_{t+1}} = \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \frac{\lambda_{t,k}^i r_t^i}{\langle \lambda_{t,k}, r_t \rangle};\ i = 1 \dots N}$$

2) можно N игроков свести к 2 игрокам, "сложив" инвесторов $2..N$ в $\tilde{2}$.

$$\tilde{\lambda}_{t,k}^2 (s^t) := \begin{cases} \dfrac{(\lambda_{t,k}^2 r_t^2 + \ldots + \lambda_{t,k}^N r_t^N)}{1 - r_t^1}, & \text{если } r_t^1 < 1 \\ \dfrac{1}{K}, & \text{если } r_t^1 = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_{t,k}^2 r_t^2 + \ldots + \lambda_{t,k}^N r_t^N = (1 - r_t^1) \tilde{\lambda}_{t,k}^2 \quad \Rightarrow \langle \lambda_{t,k}, r_t \rangle = r_t^1 \lambda_{t,k}^1 + (1 - r_t^1) \tilde{\lambda}_{t,k}^2$$

$$\Rightarrow r_{t+1}^1 = \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \cdot \frac{\lambda_{t,k}^1 \cdot r_t^1}{r_t^1 \lambda_{t,k}^1 + (1 - r_t^1) \tilde{\lambda}_{t,k}^2}$$

$$\Rightarrow \tilde{r}_{t+1}^2 = 1 - r_{t+1}^1 = \sum_{i=2}^{N} r_{t+1}^i = \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \frac{\tilde{\lambda}_{t,2}^2 (1 - r_t^1)}{r_t^1 \lambda_{t,k}^1 + (1 - r_t^1) \tilde{\lambda}_{t,k}^2}$$

$\Rightarrow$ получили 2-х игроков: $\lambda_{t,k}^1 (s^t)$ и $\tilde{\lambda}_{t,k}^2 (s^t)$.

3) Пусть $N = 2$; $\lambda_{t,k}^1 = \lambda_{t,k}^*$

$k_t = k_t(s^t) := r_t^1 (s^t) \leftarrow$ тут мы рассм. только <u>basic portfolio rules</u>, т.к. любое $r_t = (r_t^1; \ldots r_t^N)$; профилем $(\Lambda^1 \ldots \Lambda^N)$, можно ~~[illegible]~~ сгенерировать базовым профилем.

$$k_{t+1} = \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \cdot \frac{\lambda_{t,k}^1 \cdot k_t}{\lambda_{t,k}^1 \cdot k_t + \lambda_{t,k}^2 (1 - k_t)}$$

И мы хотим проверить, что $\ln k_t$ – субмартингал (и он огр. сверху $\ln 1 = 0$ $\Rightarrow$ он сходится к чему-то $> -\infty$ $\Rightarrow k_t = e^{\ln k_t} > 0$ – и всё)

ну $E_t \ln k_{t+1} - \ln k_t = E_t \ln \dfrac{k_{t+1}}{k_t} = E_t \ln \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \dfrac{\lambda_{t,k}^1}{\lambda_{t,k}^1 k_t + \lambda_{t,k}^2 (1 - k_t)} \geq$ н-во Йенсена для $\ln x$

$$\geq E_t \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \ln \frac{\lambda_{t,k}^1}{\lambda_{t,k}^1 k_t + \lambda_{t,k}^2 (1 - k_t)} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{t,k}^1 \ln \frac{\lambda_{t,k}^1}{\lambda_{t,k}^1 k_t + \lambda_{t,k}^2 (1 - k_t)} =$$

$= \sum_{k=1}^{K} \lambda_{t,k}^{1} \ln \lambda_{t,k}^{1} - \sum_{k=1}^{K} \lambda_{t,k}^{1} \ln [\lambda_{t,k}^{1} \kappa_t + \lambda_{t,k}^{2}(1-\kappa_t)] \geq 0.$

т.к $\sum_{k=1}^{K} a_k \ln a_k \geq \sum_{k=1}^{K} a_k \ln b_k$
(н-во Гиббса)
$D_{KL}(P\|Q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log \frac{p_i}{q_i} \geq 0.$

Далее, $\kappa_{t+1} = \kappa_t \cdot \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \cdot \frac{\lambda_{t,k}^{1}}{\lambda_{t,k}^{1}\kappa_t + \lambda_{t,k}^{2}(1-\kappa_t)} \geq \kappa_t \cdot \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} (\min_m \lambda_{t,m}^{1}) = \kappa_t (\min_m \lambda_{t,m}^{1})$

$E \min_m \ln \lambda_{t,m}^{1} > -\infty$; $\kappa_0 > 0 \Rightarrow E|\ln \kappa_t| < \infty$

$\Rightarrow \ln \kappa_t$ – субмартингал, огр $\Rightarrow$ сходится

$\Rightarrow \ln \kappa_t > -\infty \Rightarrow \kappa_t = e^{\ln \kappa_t} > e^{-\infty} = 0. \Rightarrow \lambda_t^*$ – выживающая.

Док-во теоремы 2 $\Lambda = (\lambda_t)$ – basic survival strategy.

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_{N-1} = \Lambda^* = (\lambda_t^*)$, а Λ^N – вот эта другая выживающая стратегия Λ.

пусть $\hat{r}_t^{1} = r_t^1 + \dots + r_t^{N-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{r}_{t+1}^{1} = \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \cdot \dfrac{\lambda_{t,k}^* \hat{r}_t^{1}}{\lambda_{t,k}^* \hat{r}_t^{1} + \lambda_{t,k} \cdot (1-\hat{r}_t^{1})} \\ 1-\hat{r}_{t+1}^{1} = \sum_{k=1}^{K} R_{t+1,k} \cdot \dfrac{\lambda_{t,k} \cdot (1-\hat{r}_t^{1})}{\lambda_{t,k}^* \hat{r}_t^{1} + \lambda_{t,k} \cdot (1-\hat{r}_t^{1})} \end{cases}$$

т.е как будто у нас два игрока: $\hat{r}_t^{1}$; $\hat{r}_t^{2} = 1-\hat{r}_t^{1}$, т.е λ_t^* и λ_t.

но λ_t – survival $\Rightarrow r_t^N = 1-\hat{r}_t^{1} = \hat{r}_t^{2}$ отделен от нуля п.н.

Из т.1: $\underbrace{E_t \ln \kappa_{t+1} - \ln \kappa_t}_{\text{суммируем это, оно сходится с вер-тью 1.}} \geq \sum_{k=1}^{K} \lambda_{t,k}^* \ln \lambda_{t,k}^* - \sum_{k=1}^{K} \lambda_{t,k}^* \ln [\lambda_{t,k}^* \kappa_t + \lambda_{t,k}(1-\kappa_t)]$

А ещё $\sum_{k=1}^{K} a_k \ln a_k - \sum_{k=1}^{K} a_k \ln b_k \geq \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{K} (a_k - b_k)^2$

$\Rightarrow$ сумма правых частей $\geq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} [\lambda_{t,k}^* - \lambda_{t,k}^* \kappa_t - \lambda_{t,k}(1-\kappa_t)]^2 = \sum_{t=0}^{\infty} (1-\kappa_t)^2 \|\lambda_t^* - \lambda_t\|^2$

должна быть конечной с вер-тю 1

причем $\inf(1-\kappa_t) = \inf \hat{r}_t^{2} > 0$ – т.к оно survival $\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \|\lambda_t^* - \lambda_t\|^2 < \infty$.

Док-во теоремы 3 $G_m(S^m; W_m)$ – изоморфна изначальной игре, но с мерой $P_m^{S^m}$ вместо P.

$\Rightarrow \lambda_t^*(S^m; S_{m+1}^t) \overset{\text{оф.}}{=} \int P_{t+1}(S^m; S_{m+1}^t; dS_{t+1}) R_{t+1}(S^m; S_{m+1}^{t+1}) = E^{S^m}[R_{t+1}(S^m; S_{m+1}^{t+1}) | S_{m+1}^t]$,

где $E^{S^m}[\cdot | S_{m+1}^t]$ – усл. ожидание по мере $P_m^{S^m}$.

$\Rightarrow \lambda_t^*(S^m; \cdot)$ – Kelly rule $\Rightarrow$ survival strategy.

Контрпример к теореме 2 для небазовых стратегий

$s_1; s_2 \dots$

$s_t \in \{1; 2\}$

$P\{s_t = 1\} = \frac{1}{3}$; $P\{s_t = 2\} = \frac{2}{3}$

$V_{t,k}(s^t) = 1$, $\forall t, s^t, k$

$A_{t,k}(s^t) = A_k(s_t)$, где $A(1) = (A_1(1); A_2(1)) = (1; 0)$

$A(2) = (A_1(2); A_2(2)) = (0, 1)$

$R_{t,k}(s^t) = R_k(s_t)$, где $R(1) = (R_1(1); R_2(1)) = (1; 0)$

$R(2) = (R_1(2); R_2(2)) = (0, 1)$

$\lambda^* = E_t R(s_{t+1}) = E R(s_{t+1}) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Рассм. $\underset{>0}{b} \neq \lambda^*$ в Δ^2 и мн-во $\Gamma \subseteq \Delta^2$: $E\frac{\langle a, R(s)\rangle}{\langle b, R(s)\rangle} \le 1$; $a \in \Gamma$.

Например, если $b = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$, то $\Gamma = \{(a_1; 1-a_1) : 0 \le a_1 \le \frac{1}{4}\}$,

т.к. $E\frac{\langle a; R(s)\rangle}{\langle b; R(s)\rangle} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a_1}{b_1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{a_2}{b_2} = \frac{4}{3}a_1 + \frac{8}{9}(1-a_1) = \frac{4a_1+8}{9} \le 1$, если $a_1 \le \frac{1}{4}$

И определим стратегию ~~так~~ $\Lambda_t^1(s^t; \lambda^{t-1})$ так:

$$\lambda_0^1 = b; \quad \Lambda_t^1(\lambda_0^2; \dots \lambda_{t-1}^2) = \begin{cases} b, & \text{если } \lambda_l^2 \in \Gamma, \ l = 0 \dots t-1 \\ \lambda^*, & \text{иначе.} \end{cases}$$

т.е. пока игрок 2 играет стратегию из Γ — мы играем b, а как только игрок 2 вылезает из Γ — мы переходим на λ^*.

Утв. portfolio rule $\Lambda_t^1(\lambda_0^2 \dots \lambda_{t-1}^2)$ — survival strategy.

$(\lambda_t^2(s^t))$: $\lambda_t^2(s^t) \in \Gamma$ $\forall t, s^t$ — пример стратегий, на которых λ_t^1 всегда $= b$, $\forall t$.

Док-во: $r_{t+1}^i = \sum_{k=1}^{2} R_k(s_{t+1}) \frac{\lambda_{t,k}^i r_t^i}{\lambda_{t,k}^1 r_t^1 + \lambda_{t,k}^2 r_t^2}$, $i = 1; 2$.

Обозн. $\gamma_t := \frac{r_t^2}{r_t^1}$ — и докажем, что γ_t — огр. сверху п.н., т.е. r_t^1 отделена от нуля ($\Rightarrow r_t^1$ — survival strategy)

имеем: $$\gamma_{t+1} = \frac{r_t^2}{r_t^1} \underset{\substack{R(1)=(1;0)\\R(2)=(0;1)}}{=} \frac{\lambda_{t,s_{t+1}}^2 r_t^2 / (\lambda_{t,s_{t+1}}^1 + \lambda_{t,s_{t+1}}^2 r_t^2)}{\lambda_{t,s_{t+1}}^1 r_t^1 / (\lambda_{t,s_{t+1}}^1 r_t^1 + \lambda_{t,s_{t+1}}^2 r_t^2)} = \frac{\lambda_{t,s_{t+1}}^2 r_t^2}{\lambda_{t,s_{t+1}}^1 r_t^1} = \frac{\langle \lambda_t^2; R(s_{t+1})\rangle}{\langle \lambda_t^1; R(s_{t+1})\rangle}\gamma_t$$

Обозн. $\tau = \tau(s_1; s_2 \dots)$ — момент, когда $\lambda_\tau^2 \notin \Gamma$, $\lambda_{\tau-1}^2 \in \Gamma$. (иначе ∞)

Если $\tau = \infty$: $\Gamma_{t+1} = \beta_{t+1}\Gamma_0$, где $\beta_{t+1} = \frac{\langle \lambda_t^2; R(s_{t+1})\rangle}{\langle b; R(s_{t+1})\rangle} \dots \frac{\langle \lambda_0^2; R(s_1)\rangle}{\langle b; R(s_1)\rangle}$, т.к. $\gamma_{t+1} = \frac{\langle \lambda_t^2; R(s_{t+1})\rangle}{\langle \lambda_t^1; R(s_{t+1})\rangle}\gamma_t$

Если $\tau < \infty$: $\gamma_{t+1} = d_{t+1}\cdot\Delta = \frac{\langle \lambda_t^2; R(s_{t+1})\rangle}{\langle \lambda^*; R(s_{t+1})\rangle} \dots \frac{\langle \lambda_{\tau+1}^2; R(s_{\tau+2})\rangle}{\langle \lambda^*; R(s_{\tau+2})\rangle} \cdot \frac{\langle \lambda_\tau^2; R(s_{\tau+1})\rangle}{\langle b; R(s_{\tau+1})\rangle} \dots \frac{\langle \lambda_0^2; R(s_1)\rangle}{\langle b; R(s_1)\rangle}$.

Fix some $\bar{a} \in \Gamma$

$\bar{\lambda}_t^2 = \begin{cases} \bar{a}, & \text{если } \lambda_t^2 \notin \Gamma \\ \lambda_t^2, & \text{если } \lambda_t^2 \in \Gamma. \end{cases}$

• Если $\tau = \infty$, то $\beta_{t+1} = \bar{\beta}_{t+1}$, где $\bar{\beta}_{t+1} = \dfrac{\langle \bar{\lambda}_t^2; R(s_{t+1})\rangle}{\langle b; R(s_{t+1})\rangle} \cdots \dfrac{\langle \bar{\lambda}_0^2; R(s_1)\rangle}{\langle b; R(s_1)\rangle}$

$\bar{\beta}_t$ – неотр. супермартингал, т.к. $E(\bar{\beta}_{t+1} | s^t) = \bar{\beta}_t \underbrace{E\dfrac{\langle a; R(s)\rangle}{\langle b; R(s)\rangle}}_{\leq 1} \leq \bar{\beta}_t$. $(a = \bar{\lambda}_t^2(s^t) \in \Gamma)$

$\Rightarrow \bar{\beta}_t$ – сход. $\Rightarrow$ огр. a.s.

• Если $\tau = \infty$, то $\gamma_t = \beta_t \gamma_0 = \bar{\beta}_t \gamma_0$ – тоже огр. a.s.

Если $\tau < \infty$

Далее, α_t – неотр. мартингал, т.к. $E(\alpha_{t+1} | s^t) = \alpha_t \underbrace{E\dfrac{\langle a; R(s)\rangle}{\langle \lambda^*; R(s)\rangle}}_{=1} = \alpha_t$, где $a = (a_1, a_2) = \lambda_t^2(s^t)$,

т.к. $E\dfrac{\langle a; R(s)\rangle}{\langle \lambda^*; R(s)\rangle} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\langle a; R(1)\rangle}{\langle \lambda^*; R(1)\rangle} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\langle a; R(2)\rangle}{\langle \lambda^*; R(2)\rangle} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a_1}{1/3} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a_2}{2/3} = 1.$

$\Rightarrow \alpha_t$ – огр. п.н.

$\Rightarrow \sup\limits_{t > \tau} \gamma_{t+1} = \delta \cdot \sup\limits_{t > \tau} \alpha_{t+1} < \infty$ п.н. $\Rightarrow \gamma_t$ – огр. п.н. $\Rightarrow \Lambda_t^1(\cdot)$ – survival strategy,

но при этом $\lambda_t^1 = b \neq \lambda^*$ $\forall t, s^t$.

Утв. Portfolio rule is a survival strategy $\Leftrightarrow$ it is unbeatable.

(Стратегия Λ – unbeatable, если $\forall$ допустимого профиля стратегий $(\Lambda^1; \Lambda^2 \ldots \Lambda^N)$ с $\Lambda^i = \Lambda$, имеем $w^i(\Lambda^1; \Lambda^2 \ldots \Lambda^N) \underset{a.s.}{\succeq} w^j(\Lambda^1; \Lambda^2 \ldots \Lambda^N)$ $\forall j \neq i$,

где $\beta \succeq \alpha$, если $\exists$ случ. величина $H > 0$: $\alpha_t \leq H\beta_t$ п.н.

Док-во: $r_t^i = \dfrac{w_t^i}{W_t}$

$w^i \underset{a.s.}{\succeq} w^j \;|\forall j \neq i \Leftrightarrow r^i \succeq r^j$ $\forall j \neq i$

Если $r_t^i \geq c$ п.н., $c > 0$ $\Rightarrow w_t^i \geq cW_t \geq c\,w_t^j$ $\forall j$ $\Rightarrow w_t^j \leq \dfrac{w_t^i}{c}$.

Если $w_t^j \leq H w_t^i$ для некот. $H > 0$, то $W_t \leq [(N-1)H + 1]\, w_t^i \Rightarrow r_t^i \geq \dfrac{1}{[(N-1)H+1]}$ п.н.