Контрольная работа 1

**Задача 1.** Пусть $b(x) = \operatorname{sign} x$. Опишите все решения уравнения непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \partial_x(b\mu_t) = 0,$$

которые удовлетворяют условию $\mu_0 = \delta_0$.

**Задача 2.** В условиях предыдущей задачи выясните, к каким из решений $\mu_t$ слабо сходятся меры $\mu_t^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, где $\mu_t^\varepsilon$ являются решениями уравнений

$$\partial_t \mu_t^\varepsilon = \varepsilon \partial_x^2 \mu_t^\varepsilon - \partial_x(b\mu_t^\varepsilon)$$

с начальным условием $\mu_0^\varepsilon = \delta$. Можно использовать без обоснование известный факт, что при $t > 0$ меры $\mu_t^\varepsilon$ обладают непрерывной плотностью $\varrho^\varepsilon(x,t)$ относительно меры Лебега.

**Задача 3.** Пусть $b \in C(\mathbb{R})$ и вероятностная мера $\nu$ имеет компактный носитель. Докажите, что если для решения $\mu_t$ уравнения непрерывности $\partial_t \mu_t + \partial_x(b\mu_t) = 0$ с начальным условием $\mu_0 = \nu$ выполняется принцип суперпозиции, то найдется такое $\tau > 0$, что $\mu_t$ имеет компактный носитель при всех $t \in (0, \tau)$. В качестве дополнительного (не является обязательным) задания постройте пример, когда принцип суперпозиции не выполняется.

**Задача 4.** Пусть $a \in \mathbb{R}$. Найдите решение задачи Коши

$$\partial_t \mu_t + \partial_x\Big(b(x,\mu)\Big) = 0, \quad \mu_0 = \delta_a.$$

где

$$b(x,\mu) = \int x\, d\mu.$$

**Задача 5.** Найдите функцию

$$u(x,t) = \inf_\alpha g(y_x(T)),$$

где $\dot{y}_x(s) = \alpha(s)$, $y_x(t) = x$, $\alpha \in [-1,1]$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Исследуйте непрерывность и дифференцируемость функции $u$.

**Задача 6.** Пусть $g$ – липшицева и ограниченная функция на $\mathbb{R}$. Проверьте, что функция

$$u(x,t) = \inf_y \Big\{ \frac{|x-y|^2}{2t} + g(y) \Big\}$$

является вязкостным решением уравнения $u_t + \frac{|u_x|^2}{2} = 0$ на $(0,T) \times \mathbb{R}$. Проверьте, что это единственное вязкостное ограниченное равномерно непрерывное решение этого уравнения с начальным условием $u(x,0) = g(x)$. Постройте пример $g$, когда $u$ не является непрерывно дифференцируемым.

**Задача 7.** Пусть $A = \{1, 2, \ldots, K\}$ и всякая вероятностная мера $m$ на $A$ отождествляется с точкой $(m_1, \ldots, m_K)$ симплекса $\Delta$, определенного соотношениями:

$$m_i \geq 0, \quad m_1 + \ldots + m_K = 1.$$

Пусть $G$ — дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^K$ и $F(a,m) = \partial_{x_a} G(m)$. Докажите, что мера $m$ является решением задачи MFG: $\operatorname{sp} m \subset \{a\colon\ F(a,m) = \min_{b \in A} F(b,m)\}$ тогда и только тогда, когда $\mu$ является точкой локального минимума функции $G$ на $\Delta$.

**Задача 8.** Пусть $A = [0,1]$ и

$$F(a,\mu) = a \int_A a\, d\mu.$$

Найдите все решения задачи MFG: $\operatorname{sp} \mu \subset \{a\colon\ F(a,\mu) = \min_{b \in A} F(b,\mu)\}$. Какие из этих решений являются предельными точками равновесий Нэша при $N \to +\infty$ в игре $N$ игроков с множеством стратегий $A$ и функциями штрафа

$$J_k(a_1, \ldots, a_N) = F(a_k, \mu^N), \quad \mu^N = \frac{1}{N}(\delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_N}).$$

**Задача 9.** Пусть функция $g_N\colon [0,1]^N \to \mathbb{R}$ симметрична, т.е.

$$g_N(a_1, a_2, \dots, a_N) = g_N(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(N)})$$

для всякой перестановки $\sigma$. Предположим, что $|g_N(a)| \le C_1$ для всех $a$ и $N$ и имеет место оценка

$$|g_N(a) - g_N(b)| \le C_2 d_{KR}(\mu_a^N, \mu_b^N),$$

где $d_{KR}$ — метрика Канторовича-Рубинштейна,

$$\mu_a^N = \tfrac{1}{N}(\delta_{a_1} + \ldots + \delta_{a_N}), \quad \mu_b^N = \tfrac{1}{N}(\delta_{b_1} + \ldots + \delta_{b_N}),$$
$$a = (a_1, \dots, a_N), \quad b = (b_1, \dots, b_N).$$

Докажите, что найдется подпоследовательность $N_k$ и непрерывная функция $G$ на $\mathcal{P}([0,1])$, с которыми выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{a\in[0,1]^N} |g_{N_k}(a) - G(\mu_a^{N_k})| = 0.$$

Приведите примеры таких функций $g_N$ и $G$. (Указание: построить $G$ в виде предельной функции для последовательности $G_N(\mu) = \inf_{a\in[0,1]^N} \Big\{ g_N(a) + C_2 d_{KR}(\mu_a^N, \mu) \Big\}$.)