6.1.6 DER-13

DER-13 Найти производную функции

$$y = 2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{x^2+1}$$

Реш.-е

$$y' = \left(2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}\right)' =$$

$$= 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \log 2 \cdot \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \cdot \log 2 \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1} = \frac{\log 2 \cdot 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2}x}{(x^2+1+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \boxed{\frac{x \cdot \log 2 \cdot 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+2)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}}$$

6.2 Интегралы

6.2.1 Таблица интегралов

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

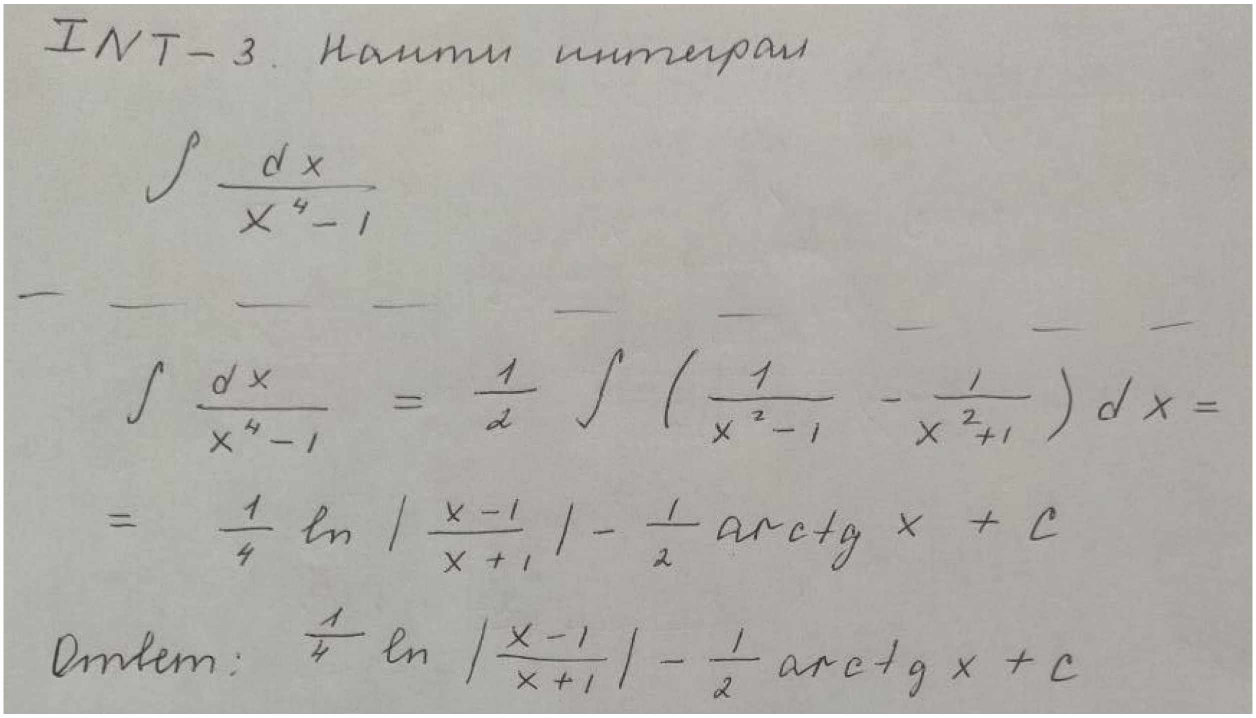
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

6.2.2 INT-3



INT-3. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

Ответ: $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

6.2.3 INT-4

А в int-4 нельзя сказать, что это сумма $1/\sqrt{1+x^2}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$, то есть арксинус плюс аркшинус ?

6.2.4 INT-5

$$\int (5^x - 2^x)^2\,dx. = \int \left(25^x - 2\cdot 10^x + 4^x\right)dx =$$

$$= \frac{25^x}{\ln 25} - 2\,\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

$$4.\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

miro

6.2.5 INT-7

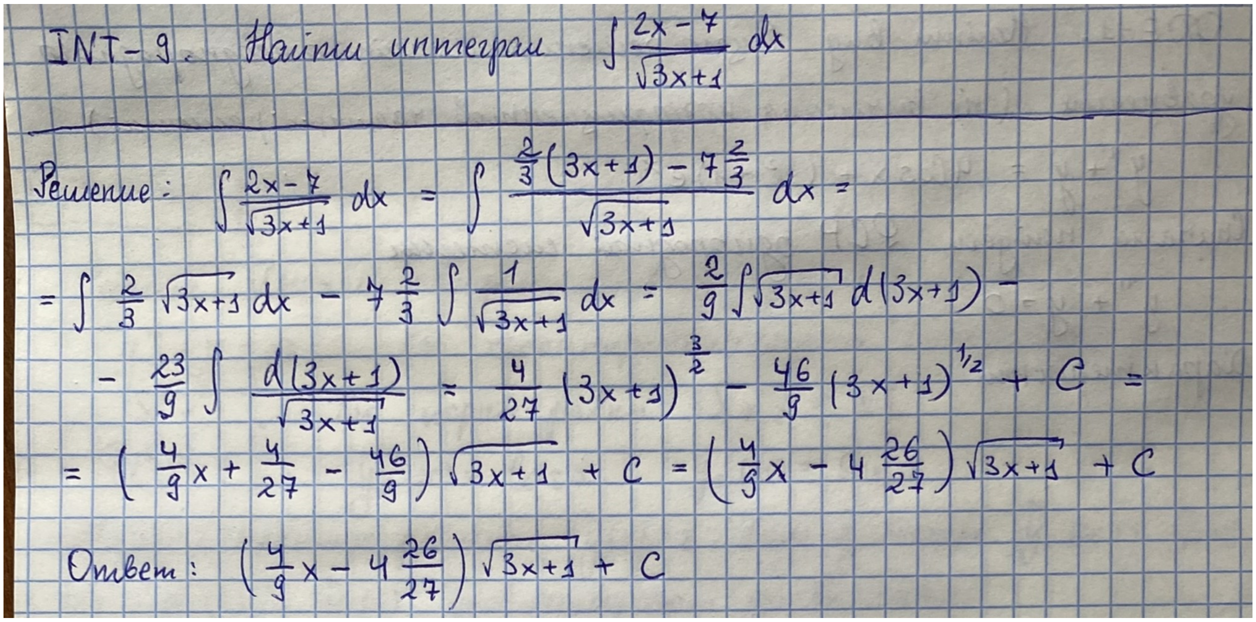
$$\int x(x-2)^5\,dx. = \int (t+2)\,t^5\,dt = \int t^6\,dt + 2\int t^5\,dt =$$

Замена: $t = x-2$, $x = t+2$, $dt = dx$

$$= \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{3} + C = \frac{(x-2)^7}{7} + \frac{(x-2)^6}{3} + C$$

miro

6.2.6 INT-9



INT-9. Найти интеграл $\int \frac{2x-7}{\sqrt{3x+1}}dx$

Решение: $\int \frac{2x-7}{\sqrt{3x+1}}dx = \int \frac{\frac{2}{3}(3x+1) - 7\frac{2}{3}}{\sqrt{3x+1}}dx =$

$= \int \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\,dx - 7\frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx = \frac{2}{9}\int \sqrt{3x+1}\,d(3x+1) -$

$- \frac{23}{9}\int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{3x+1}} = \frac{4}{27}(3x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{46}{9}(3x+1)^{1/2} + C =$

$= \left(\frac{4}{9}x + \frac{4}{27} - \frac{46}{9}\right)\sqrt{3x+1} + C = \left(\frac{4}{9}x - 4\frac{26}{27}\right)\sqrt{3x+1} + C$

Ответ: $\left(\frac{4}{9}x - 4\frac{26}{27}\right)\sqrt{3x+1} + C$

6.2.7 INT-12

Занести e^x под дифф. Замена 1 + t / 1 - t dt

6.2.8 INT-14

INT-14. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

Решение:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos x} \, \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan(x)}{\frac{1}{\cos x} + \tan(x)} \, dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} tg(x)}{\frac{1}{\cos x} + tg(x)} \, dx =$$

замена перем.: $u = \frac{1}{\cos x} + tg(x)$

$$du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \left(\frac{\sin(x) + 1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx = \left(\frac{tg(x)}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \boxed{\ln\left| \frac{1}{\cos x} + tg(x) \right| + c}$$

6.2.9 INT-15

INT-15

Найти интеграл

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\,(1+tg(x))}\,dx$$

Заметим, что $\frac{1}{\sin^2(x)} = -\left(ctg(x)\right)'$

Значит

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\,(1+tg(x))}\,dx = -\int \frac{1}{1+\frac{1}{ctg(x)}}\,d\left(ctg(x)\right) =$$

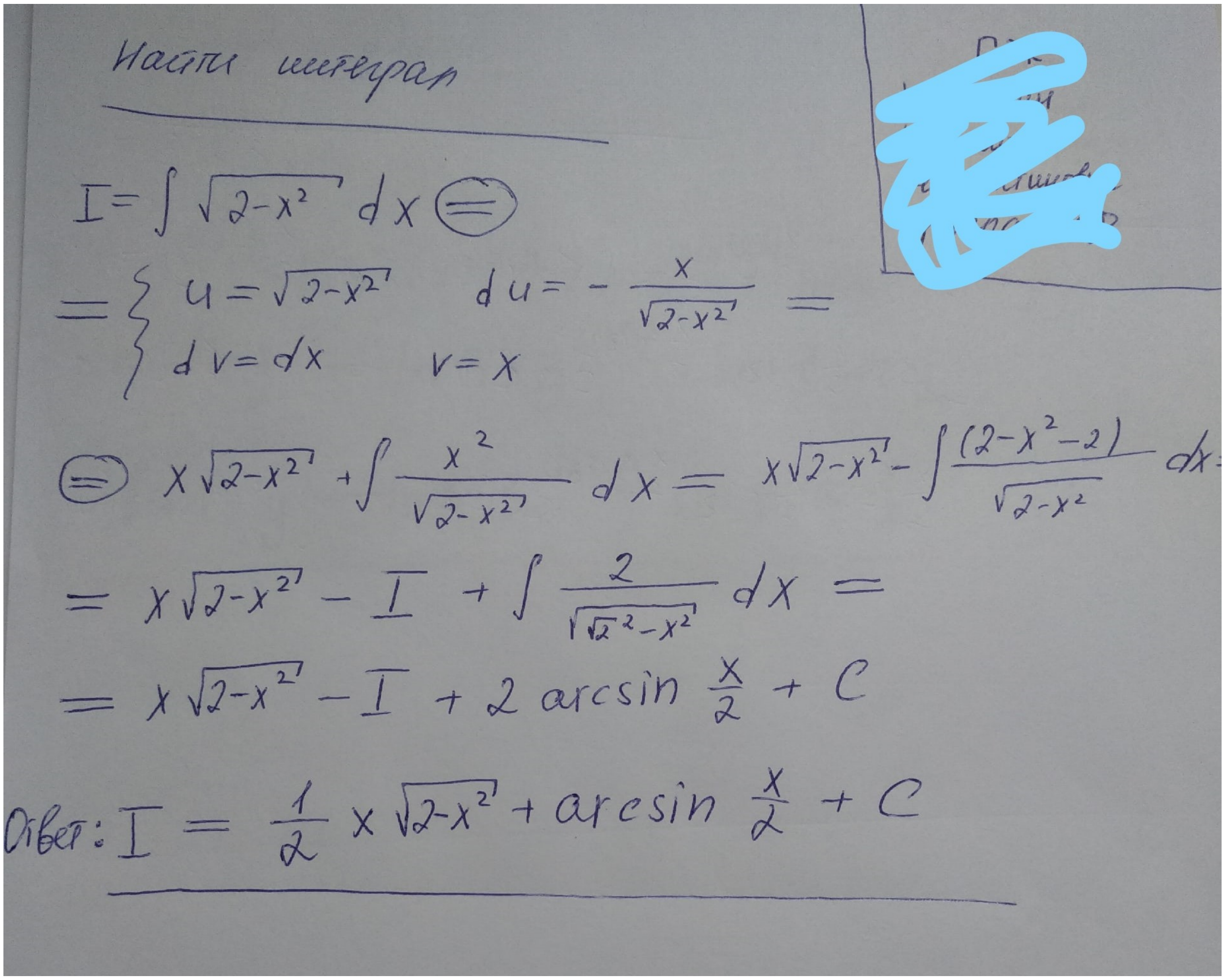
$$= \left|\text{замена } ctg(x)=t\right| = -\int \frac{t}{1+t}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t}-1\right)dt$$

$$= \ln|1+t| - t + C = \left|\text{обратная замена}\right| =$$

$$\ln|1+ctg(x)| - ctg(x) + C$$

Ответ: $\ln|1+ctg(x)| - ctg(x) + C$, где $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

6.2.10 INT-?



Найти интеграл

$$I = \int \sqrt{2-x^2}\,dx =$$

$$= \begin{cases} u = \sqrt{2-x^2} & du = -\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{cases} =$$

$$= x\sqrt{2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = x\sqrt{2-x^2} - \int \frac{(2-x^2-2)}{\sqrt{2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{2-x^2} - I + \int \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2}^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{2-x^2} - I + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$$

Ответ: $I = \dfrac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + \arcsin\dfrac{x}{2} + C$

Кажется, тут очепятка, и должно быть $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.