Материалы к семинару по уравнениям в частных производных 19.05.2020

Распространение волн в пространствах различного числа переменных.

Задачник под ред. Шамаева - параграф 3.1, А.И.Комеч, Практическое решение уравнений математической физики - параграф 7

Это последняя тема семинаров. Речь идет об анализе формулы, дающей решение задачи Коши для волнового уравнения в пространствах разной размерности. Задача ставится так:

$$u_{tt} = a^2 \Delta_x u, \quad u = u(t,x) \in C^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

Если $n = 1$, то это хорошо нам известная формула Даламбера, по которой очень просто проводить вычисления. В какой-то степени мы уже знакомы и с решением задачи Коши в пространстве многих переменных. А именно, знаем, что если начальные данные устроены неким специальным образом (зависят только от радиальной переменной при $n = 3$, зависят только от линейной комбинации пространственных переменных, обнуляются какой-нибудь степенью лапласиана, и т.д.), то решение можно найти специальными приемами, например, сведением к формуле Даламбера.

Однако существуют формулы для решения задачи Коши для случая произвольных начальных данных. При $n = 2$ это формула Пуассона, при $n = 3$ – формула Кирхгофа. Они выписаны, например, в начале 3 главы задачника под.ред. Шамаева. Это случаи так называемых "физических" размерностей, но можно получить аналогичные формулы и для $n > 3$. Оказывается, что во всех пространствах четной размерности волны распространяются качественно одинаково, а в пространствах нечетной размерности $n > 1$ – тоже качественно одинаково, но отлично от случая четной размерности. Иными словами, достаточно изучить случаи $n = 2$ и $n = 3$, чтобы получить представление о явлении распространения волн в произвольной размерности. Случай $n = 1$ стоит особняком.

Заметим, что здесь мы, в частности, наблюдаем как по-разному влияет увеличение размерности на качественные свойства задач различного типа. Для параболического уравнения теплопроводности формула для решения задачи Коши одинакова в любой размерности, для эллиптического уравнения Пуассона формула для представления решения задачи Дирихле тоже одинакова в любой размерности. Однако для гиперболического волнового уравнения все оказывается не так. Тем не менее, существует метод спуска, который позволяет при понижении размерности из формулы Кирхгофа получить формулу Пуассона, а затем формулу Даламбера.

Проводить вычисления по формулам Пуассона и Кирхгофа затруднительно. Я не знаю ни одного примера, когда, например, по формуле Кирхгофа удается получить решение задачи Коши в виде явной функции, но тот же ответ нельзя получить каким-то приемом сведения к одномерному случаю. Хотя, конечно, вычисление многомерных интегралов – хороший спорт.

Однако от формул Пуассона и Кирхгофа есть значительная польза: они дают представление о том, как распространяется возмущение с компактным носителем. Поскольку волновое уравнение описывает распространение звуковых волн, то с практической точки зрения эти формулы описывают то, как распространяется звук от начального источника (например, взрыва).

1. Для начала, вспомним положение вещей при $n = 1$. Если носитель $u_0(x)$, $u_1(x)$ принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$, то на плоскости характеристик можно выделить области, в которых в зависимости от времени, будет полный покой (1 и 2) или постоянное состояние (3). Причем это постоянное состояние тоже может быть нулем, в зависимости от $u_1(x)$. Это следует непосредственно из анализа формулы Даламбера.

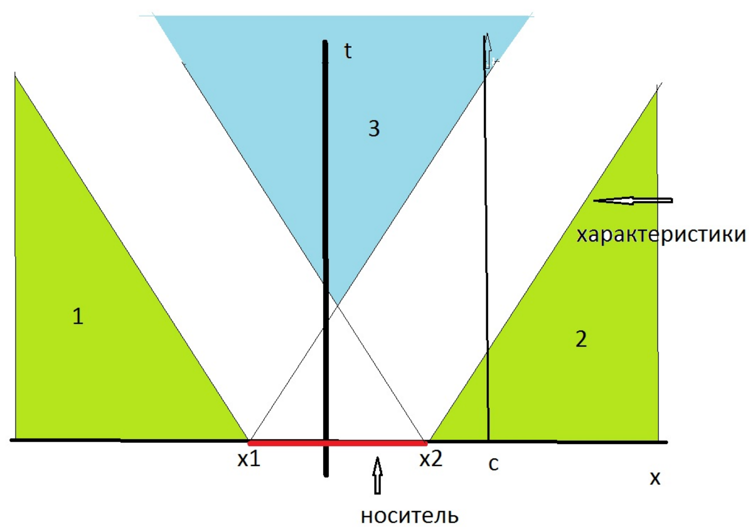

Рис. 1: $n = 1$. Зоны 1 и 2: $u = 0$. Зона 3: $u = K = \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1}^{x_2} u_1(\eta)\, d\eta$

Если мы выберем любую точку c вне носителя, то, в зависимости от времени, направление которого изображено стрелкой вверх, в ней будет сначала покой, $u(t,c) = 0$, до того, как прямая $x = c$ пересечется с первой характеристикой, затем, в белой зоне, до пересечения со второй характеристикой, $u(t,c)$ станет меняться, а затем, после пересечения со второй характеристикой, $u(t,c) = K = \text{const}$. Таким образом, для любой $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} u(t,c) = K.$$

2. В размерности $n = 2$ и $n = 3$ рисовать характеристики затруднительно. Поэтому приходится представлять себе проекцию на пространство переменных x.

- Если мы посмотрим на формулу Кирхгофа, то увидим, что интегралы берутся **по сфере**. Поэтому если в какой-то момент времени сфера радиуса at с центром в точке x не пересекается с носителем начальных данных, то $u(t,x) = 0$. Это может быть в двух случаях: сфера не дошла до носителя либо уже поглотила носитель целиком (см. рисунок 2). Таким образом, человечек, стоящий в точке x вне носителя, в течение некоторого времени не слышит звук, потом в течение конечного времени слышит, а потом для него опять наступает тишина. В этом случае говорят, что при $n = 3$ у возмущения **есть резкий передний и резкий задний фронты**.

- В формуле при $n = 3$ интегралы берутся **по кругу**. Как и ранее, если в какой-то момент времени круг радиуса at с центром в точке x не пересекается с носителем начальных данных, то $u(t,x) = 0$. Но теперь это может быть только если круг не дошел до носителя. Если же носитель уже целиком попал внутрь круга, то интеграл по этому кругу уже не обязан равняться нулю (если $u_0 = 0$, $u_1 \geq 0$, то этот интеграл точно не ноль, см. задачу 3.18). Таким образом, плоский человечек, стоящий в точке x вне носителя, в течение некоторого времени не слышит звук, а затем начинает слышать. Звук затухает со временем ($|u(t,x)|$ уменьшается), но это время бесконечно. То есть в плоском мире тишина не наступает никогда. В этом случае говорят, что у возмущения **есть резкий передний фронт, но нет резкого заднего фронта**.

Все искусство решения задач на определение областей, в которых решение тождественно равно нулю, состоит в выписывании неравенств, при которых носитель не пересекается с областями интегрирования. Примеры такого рода разобраны в книге А.И.Комеча на стр.55–57, там есть и картинки.

Рассмотрим случай $n = 3$, когда носители начальных данных находится внутри шара $|x| < 1$. Итак, переменная интегрирования ξ, при $t = 0$ носитель внутри шара $|\xi| < 1$. Пусть точка x лежит вне шара. Рассмотрим сферу

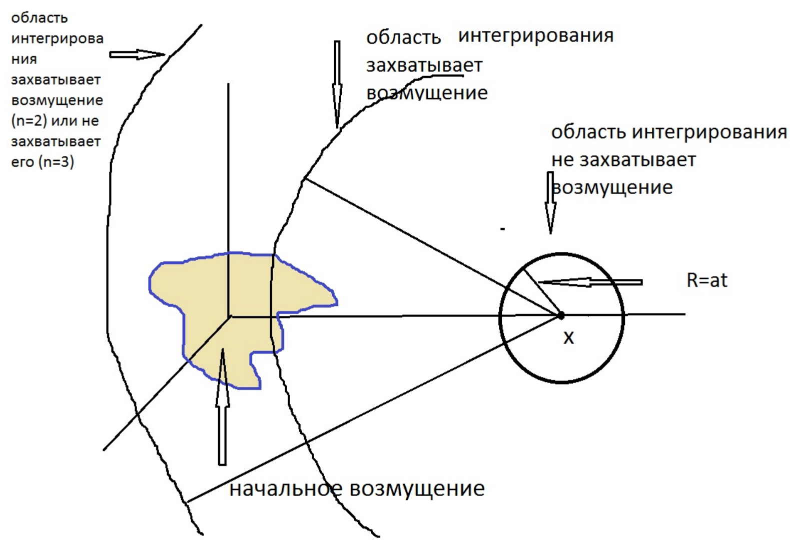

Рис. 2: $n = 2$ и $n = 3$: нахождение областей покоя

с центром в x радиуса at. Поверхность сферы не пересекается с шаром в двух случаях:

1) $|x| > 1 + at$ (передний фронт возмущения не дошел до точки x)

или

2) $|x| < -1 + at$ (задний фронт возмущения покинул точку x)

Возможность 1) реализуется при всех t, а возможность 2) – только начиная с $t > T = \frac{1}{a}$. Таком образом, мы можем наблюдать, как взрывается шар: до момента T шар раздувается, а при $t > T$ вблизи центра образуется область покоя и дальше возмущение расширяется, будучи сосредоточено в шаровом слое толщиной 2: внешняя его часть – передний фронт, а внутренняя – задний.

Задачи для решения.

Шамаев: 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.22, 3.23.
Комеч: упражнения со стр.55 и 56 (они разобраны).