Литература по госам

Антон Болычев
Борис Шигида

Билет 1

Определение непрерывной функции: определение 1 [Зорич, с. 198] [Зорич, с. 198], определение 3 [Зорич, с. 201].

Локальные свойства непрерывных функций: теорема 1 [Зорич, с. 207].

Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении: теорема 2 [Зорич, с. 208], следствие [Зорич, с. 209].

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении: теорема 3 [Зорич, с. 210].

Определение равномерно непрерывной функции: определение 1 [Зорич, с. 211].

Теорема Кантора-Гейне о равномерной непрерывности: теорема 4 [Зорич, с. 212].

Билет 2

Дифференцируемая функция: определение 1 [Зорич, с. 528] и ниже. Замечание: $\alpha(h) = o(h)$, если $\|\alpha(h)\|_{\mathbb{R}^n} = o\left(\|h\|_{\mathbb{R}^m}\right)$.

Геометрический смысл: для скалярной функции $y - f(x_0) = L(x)(x - x_0)$ — касательное подпространство.

Мотивировка и определение частной производной: пункт 2 [Зорич, с. 529] без примеров.

Матрица Якоби: пункт 3 [Зорич, с. 533].

Дифференцирование композиции: пункт a [Зорич, с. 538].

Определение градиента: [Зорич, с. 542] (возможно с водой из пункта c).

Достаточное условие дифференцируемости: теорема 2 [Зорич, с. 554].

Билет 3

Разбиение, база на множестве разбиений, интегральная сумма, интеграл Римана: определения 1-4 [Зорич, с. 409].

Необходимое условие интегрируемости: [Зорич, с. 412].

Суммы Дарбу и утверждения про них: все определения и утверждения с определения 6 [Зорич, с. 417] до конца пункта.

Свойства интеграла: утверждение 4 [Зорич, с. 420].

Линейность: теорема 1 [Зорич, с. 428]. Аддитивность: лемма 1 [Зорич, с. 429]. Оценка интеграла и монотонность: теорема 3 (про C не надо) и теорема 4 [Зорич, с. 432].

Интеграл с переменным верхним пределом: [Зорич, с. 442]. Лемма 1 про производную его: [Зорич, с. 443]. Теорема 1 как переформулировка: [Зорич, с. 444]. Отсюда непосредственно следует формула Ньютона-Лейбница (можно не доказывать или доказывать для необобщённой первообразной): [Зорич, с. 445].

Билет 4

Простейшая теорема о неявной функции: утверждение 1 [Зорич, с. 584]. Для скалярной многомерной функции: утверждение 2 [Зорич, с. 588].

Если останется время, теорема о неявном отображении: [Зорич, с. 592].

Билет 5

Определение ряда и сходимость: [Зорич, с. 130].

Критерий Коши: теорема 6 [Зорич, с. 131], следствие 5 [Зорич, с. 132].

Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами, теорема сравнения, признак Вейерштрасса: теорема 7, теорема 8, следствие 1 [Зорич, с. 135].

Признак Коши: следствие 2 [Зорич, с. 136].

Признак Даламбера: следствие 3 [Зорич, с. 137].

Признак Дирихле и Абеля: [mekhmat-gosy, с. 18].

Интегральный признак: [Зорич, с. 487].

Билет 6

Абсолютная сходимость, условная сходимость, лемма о том, что из первой следует вторая [Зорич, с. 133]

Теорема про переместительное свойство: утверждение 4 [Зорич, с. 338] (или с ошибкой [АСЧ, с. 374]).

Перемножение рядов: определения 1 и 2 [АСЧ, с. 378]

Теорема про перемножение абсолютно сходящихся рядов: утверждение 5 [Зорич, с. 339] (или теорема 1 [АСЧ, с. 378]).

Билет 7

Определения 1–6 [АСЧ, с. 389]

Определение 1 и 2 объединить [АСЧ, с. 392]

Критерий Коши [АСЧ, с. 395]

Про непрерывность теорема 1 [АСЧ, с. 392]

Ограниченность (добавить про ограниченность предельной функции): утверждение 1 [АСЧ, с. 393]

Признак Вейерштрасса: определение 1, теорема 1 только достаточность, теорема 2 [АСЧ, с. 398]

Интегрирование и предельный переход: теорема 3 [Зорич2, с. 471] и следствие 4 [Зорич2, с. 472] (или теорема 1 [АСЧ, с. 403]).

Дифференцирование и предельный переход: теорема 4 [Зорич2, с. 473] и следствие 5 [Зорич2, с. 475] (или теорема 3 [АСЧ, с. 405]).

Билет 8

Формула Коши-Адамара: утверждение 1 [Зорич, с. 337].

Равномерная сходимость степенных рядов: утверждение 2 [Зорич2, с. 457] и теорема 2 [Зорич2, с. 458]

Следствие для действительнозначных рядов не доказывать: абсолютная равномерная сходимость на отрезке $[-r, r]$, где $r < R$.

Почленное дифференцирование и интегрирование: предложения внизу [mekhmat-gosy, с. 25].

Билет 9

Определение несобственного интеграла: определение 3 [Зорич, с. 483].

Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра: [Зорич2, с. 504].

Критерий Коши: утверждение 1 [Зорич2, с. 508] (если нужно, можно смотреть [Зорич2, с. 451]).

Признак Вейерштрасса: утверждение 2 [Зорич2, с. 510].

Лемма о перестановке предельных переходов: теорема 1 [Зорич2, с. 465]. *Можно не доказывать.*

Лемма о непрерывности равномерного предела непрерывных функций: теорема 2 [Зорич2, с. 467] и следствие 2 [Зорич2, с. 468]. *Можно не доказывать.*

Теорема о предельном переходе под знаком собственного интеграла: [Зорич2, с. 471].

Непрерывность собственного интеграла, зависящего от параметра: [Зорич2, с. 495].

Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла: [Зорич2, с. 514].

Непрерывность несобственного интеграла по параметру: утверждение 5 [Зорич2, с. 516].

Дифференцирование и предельный переход: теорема 4 [Зорич2, с. 473]. *Можно не доказывать.*

Дифференцирование собственного интеграла по параметру: утверждение 2 [Зорич2, с. 497].

Дифференцирование несобственного интеграла по параметру: [Зорич2, с. 517].

Интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра: [Зорич2, с. 501].

Интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра: [Зорич2, с. 520].

Признак Абеля-Дирихле [Зорич2, с. 511].

Билет 10

Определение локально интегрируемой функции, носителя, финитной функции, $C_0^{(m)}(G)$: [Зорич2, с. 546].

Определение δ-образного семейства функций: определение 4 [Зорич2, с. 550].

Теорема о сходимости свёртки: утверждение 5 [Зорич2, с. 552].

Определение тригонометрического ряда Фурье для $f(x)$ [Зорич2, с. 636]. Чуть ниже написано, с какими функциями будем работать. Комплексная запись: формулы $(9')$, $(6')$.

Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье, ядро Дирихле: пункт a [Зорич2, с. 640].

Лемма Римана: лемма 1 [Зорич2, с. 642].

Условия Дини: определение 2 [Зорич2, с. 645].

Признак Дини: теорема 3 [Зорич2, с. 646].

Теорема Фейера и теорема Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими многочленами: пункт d [Зорич2, с. 649].

Билет 11

Кососимметрический тензор: [Тужилин2, с. 35].

Определение внешней дифференциальной формы: [Тужилин2, с. 39]. Внешнее умножение: [Тужилин2, с. 40].

Свойства внешнего умножения (без доказательства): [Тужилин2, с. 40]. Лемма про детерминант: [Тужилин2, с. 42].

Базис в пространстве кососимметрических тензоров: утверждение 3.1 [Тужилин2, с. 36].

Определение внешнего дифференциала формы: [Тужилин2, с. 49] (или определение 2 [Зорич2, с. 256]).

Корректность определения внешнего дифференцирования: лемма 4.1 [Тужилин2, с. 50] (или [Зорич2, с. 263]). Перенос формы: утверждение 4.1 [Тужилин2, с. 50] четвёртое свойство (или [Зорич2, с. 259]).

Интегрирование дифференциальных форм на ориентированных многообразиях: [Тужилин2, с. 52] (или для поверхности определение $1'$ [Зорич2, с. 278]). Корректность и свойства: лемма 4.4 [Тужилин2, с. 54], утверждение 4.3 [Тужилин2, с. 55] (или для поверхностей [Зорич2, с. 277]).

Интеграл по подмногообразию и общая формула Стокса: [Тужилин2, с. 62].

Частные случаи без доказательства: формула Стокса в $\mathbb{R}^3$ [Зорич2, с. 306], формула Гаусса-Остроградского [Зорич2, с. 302].

Дивергенция, вихрь [Зорич2, с. 257].

(Замечание на всякий случай. Определение риманового многообразия [Тужилин1, с. 212]. Звезда Ходжа: [Тужилин2, с. 45]. Определение многообразия с краем: [Тужилин2, с. 57].)

Билет 12

Определение векторного (линейного) пространства над произвольным полем: [Кострикин2, с. 12]

Определение линейного подпространства и линейной оболочки: [Кострикин2, с. 14]

Определение линейной комбинации: [Кострикин2, с. 13]

Определение линейной зависимости: [Кострикин2, с. 18]

Теорема: вектора линейно зависимы $\Longleftrightarrow$ один вектор выражается через остальные: [Кострикин2, с. 18], ссылка на [Кострикин1, с. 69]. В [Кострикин1, с. 69] приведена более широкая формулировка для векторов в $\mathbb{R}^n$. Лучше доказывать её.

Система линейных уравнений. Ассоциированная однородная. [Кострикин1, с. 19], [Кострикин1, с. 20]

Определение элементарных преобразований. Определение эквивалентности. Теорема о том, что системы эквивалентны, если одна получается из другой элементарными преобразованиями. [Кострикин1, с. 21] *Наверное, можно без доказательства*

Лемма(можно вкратце доказать самим). Если количество строк в ЛОР строго меньше количества столбцов, то существует нетривиальное решение. Доказательство: решаем методом Гаусса, главные выражаем через свободные. [Кострикин1, с. 24]

Теорема 2 + Следствие из неё [Кострикин2, с. 18]. (Надо пользоваться леммой)

Определение размерности и базиса конечномерного векторного пространства: [Кострикин2, с. 20].

Теорема о том, что любой вектор представим через базис: [Кострикин2, с. 20].

Определение ранга по столбцам и ранга по строкам + определение эквивалентных преобразований для матрицы: [Кострикин1, с. 74]

Лемма: элементарные преобразования матрицы не меняют ранг по строкам/столбцам: [Кострикин1, с. 74].

Теорема о ранге матрицы (ранг по столбцам = рангу по строкам): [Кострикин1, с. 75]

Теорема Кронекера-Капелли: [Кострикин1, с. 77]

Решения однородной системы образуют линейное пространство размерности $n - \operatorname{rk} A$: [Кострикин1, с. 96] (конкретно про размерность, наверное, можно не доказывать)

Определение ФСР – базис пространства решений [Кострикин1, с. 98]

Геометрический смысл решения $Ax = b$. Если x_1 и x_2 — решения $\Longrightarrow x_1 - x_2$ — решение $Ax = 0$. Кроме того, если $Ax_0 = b$, то $x_0 + y$ — тоже решение неоднородной системы при условии, что $Ay = 0$.

Билет 13

Определение билинейной формы: [Кострикин2, с. 41]

Определение матрицы F билинейной формы + матричная запись $x^T F y$: [Кострикин2, с. 42]

Закон измененения билинейной формы $A^T F A$: теорема 1 [Кострикин2, с. 43]

Определение ранга билинейной формы: [Кострикин2, с. 43]

Теорема: ранг билинейной формы не зависит от базиса. *Надо воспользоваться утверждением, что* $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$. Выкладка есть в Следствии 1 [Кострикин1, с. 88].

Определение кососимметричной и симметричной билинейных форм: [Кострикин2, с. 43], [Кострикин2, с. 44].

Квадратичная форма q. Билинейная форма f, полярная к q. Взаимная однозначность между билинейными формами и их поляризациями $f \mapsto q_f$. Матрица квадратичной формы. [Кострикин2, с. 45].

Определение канонического вида q и определение канонического базиса: [Кострикин2, с. 46].

Существование канонического базиса (теорема 4 из §3: [Кострикин2, с. 39], не доказывать) + следствия: [Кострикин2, с. 46], [Кострикин2, с. 47]. Приведение формы к каноническому виду: [Кострикин2, с. 48] (очевидно, как потом перейти к нормальному виду).

Если мы работаем над полем $\mathbb{R}$, то следствия выше уточняются до Следствия $1'$: [Кострикин2, с. 49].

Закон инерции, определения индексов инерции: [Кострикин2, с. 49] (теорема 6 из §2: [Кострикин2, с. 26], не доказывать).

Билет 14

Определения линейного отображения, ядра, образа: [Кострикин2, с. 60]. Размерность образа (ранг отображения): теорема 1 [Кострикин2, с. 60].

Матрица линейного отображения и совпадение рангов: [Кострикин2, с. 61] (лучше коротко, не формулируя подробно теорему).

Связь размерностей ядра и образа: теорема 4 [Кострикин2, с. 63].

Определение линейного оператора: [Кострикин2, с. 64] внизу.

Матрицы линейного оператора в различных базисах: [Кострикин2, с. 69].

След и определитель линейного оператора, корректность: [Кострикин2, с. 71].

Собственный вектор, собственное подпространство: [Кострикин2, с. 77].

Мотивировка и определение характеристического многочлена: [Кострикин2, с. 78] и определение 4 [Кострикин2, с. 79]. Характеристические многочлены подобных матриц совпадают: теорема 3 [Кострикин2, с. 79] (поэтому можно рассматривать характеристический многочлен матрицы в любом базисе).

Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы: лемма 1 [Кострикин2, с. 80].

Билет 15

Определение евклидова векторного пространства: [Кострикин2, с. 104].

Длина (норма) вектора: определение 2 [Кострикин2, с. 105]. Неравенство Коши-Буняковского: теорема 4 [Кострикин2, с. 105]. Ортогональные векторы: определение 3 [Кострикин2, с. 106].

Ортогональный, ортонормированный базис: [Кострикин2, с. 107].

Ортогональные матрицы: определение 7 и теорема 10 [Кострикин2, с. 113].

Сопряжённый линейный оператор, его матрица: [Кострикин2, с. 126] (только вещественный случай, доказать, что матрица транспонированная и всё).

Симметричный линейный оператор (симметричное преобразование), его представление в ортонормированном базисе симметричной матрицей: [Кострикин2, с. 128].

Наличие у каждого симметричного линейного оператора собственного вектора: лемма 2 [Кострикин2, с. 132].

У симметричного оператора есть ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна: теорема 6 [Кострикин2, с. 132] (только вместо «самосопряжённый» писать «симметричный»).

Приведение квадратичной формы к главным осям: теорема 7 [Кострикин2, с. 133].

Билет 16

Определение группы: [Кострикин1, с. 139] (без моноида, просто аксиомы). Определение подгруппы: [Кострикин1, с. 140] последний крупный абзац.

Определение смежного класса: [Кострикин3, с. 18]. Разные смежные классы не пересекаются: теорема 1 [Кострикин3, с. 19]. Умножение слева на элемент $g \in G$ — это биекция $H \to gH$, поэтому все смежные классы равномощны. Поэтому доказана теорема Лагранжа: теорема 2 [Кострикин3, с. 20]. Множество всех левых смежных классов обозначается G/H, его мощность — индекс группы G по подгруппе H, обозначаемый $(G : H)$.

Циклическая группа, порождённая элементом: [Кострикин1, с. 142] вверху. Свойство $a^m a^n = a^{m+n}$ (не обязательно доказывать, потому что тривиально): теорема 1 [Кострикин1, с. 142].

Порядок элемента и его равенство мощности циклической группы, порождённой им: [Кострикин1, с. 142] конец, начало следующей страницы и теорема 2 [Кострикин1, с. 143].

Изоморфизм групп: определение [Кострикин1, с. 144].

Все циклические группы одного порядка изоморфны: теорема 3 [Кострикин1, с. 145].

Следствие теоремы Лагранжа, что группа простого порядка циклическая и единственная: [Кострикин3, с. 20].

Если $a \sim c$, $b \sim d$, то $ab \sim cd$: [Кострикин3, с. 31]. Определение умножения смежных классов там же внизу, его корректность тем самым доказана. Теорема, вводящая факторгруппу: [Кострикин3, с. 32].

Гомоморфизм, его ядро: [Кострикин1, с. 147]. Эпиморфизм, мономорфизм: [Кострикин1, с. 148] словарик.

Основная теорема о гомоморфизмах: [Кострикин3, с. 33] (то, что ядро нормально, очевидно из определения нормальности: $xKx^{-1} = K$).

Билет 18

Постановка задачи Коши, начальная точка, решение [Сергеев, с. 24]

Интегральное уравнение Лемма 10 [Сергеев, с. 27]

Все нормы эквивалентны (наверное, нигде не понадобиться) [Сергеев, с. 29]

Операторная норма [Сергеев, с. 30]

Оценка конечных приращений Лемма 13 [Сергеев, с. 31]

Полное метрическое пространство непрерывных функций (просто ввести) [Сергеев, с. 32]

Определение сжимающего отображения + теорема о неподвижной точке ([Сергеев, с. 32], [Сергеев, с. 33])

Приближение Пикара [Сергеев, с. 33]

Формулировка теоремы о существовании и единственности локального решения [Сергеев, с. 27], начало доказательства [Сергеев, с. 34]

Глобальная единственность [Сергеев, с. 39]

Билет 19

Ввести уравнение линейной однородной системы $\dot{x} = A(t)x$. Сказать что уравнение $y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} y^{(n-k)} a_k(t) = 0$ сводится к $\dot{z} = A(t)z$ следующим образом

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t) = u_1(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-2}(t) = u_{n-1}(t) \\ \dot{u}_{n-1}(t) = -\sum_{k=1}^{n} u_{n-k}(t) a_k(t) \end{cases} \tag{1}$$

Определение векторного пространства функций $\Phi(I)$, ввести множество непродолжаемых решений $\mathcal{S}_A$: [Сергеев, с. 76]

Теореме об изоморфизме решений и начальных условий, следствия из неё, фундаментальная система решений, фундаментальная матрица, следствия 42+43: [Сергеев, с. 77], [Сергеев, с. 78], [Сергеев, с. 79].

Определитель Вронского, все леммы связанные с ним + формула Лиувиля Остроградского: [Сергеев, с. 82], [Сергеев, с. 83], [Сергеев, с. 84]. В формуле Лиувилля остроградского быть внимательным: в определителе W на [Сергеев, с. 85] имеются в виду

строки. Кроме того, есть ссылка на лемму 46. Чтобы ссылка была корректной, из доказательства леммы 46 в доказательство формулы Лиувиля Остроградского достаточно переписать первый абзац.

Общее решение неоднородной системы [Сергеев, с. 86].

Билет 20

Линейное однородное уравнение [Сергеев, с. 135]

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)} = 0$$

с постоянными коэффициентами сводится к линейной однородной системе [Сергеев, с. 120]

$$\dot{x} = Ax$$

с помощью канонической замены (1). В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Определение e^A [Сергеев, с. 118]. Абсолютная и равномерная сходимость e^A: [Сергеев, с. 119]. Без доказательства.

Определение оператора Коши для $\dot{x} = Ax$: [Сергеев, с. 79] + привести без доказательства лемму 46 на [Сергеев, с. 82], которая сформулирована в *матричной* форме. Далее доказать теорему про явный вид оператора коши для $\dot{x} = Ax$ [Сергеев, с. 120] (отсюда в частности следует явный вид решения, фундаментальная система решений и прочее, таким образом, мы свели задачу к нахождению экспоненты от матрицы, но для этого нам пригодится ЖНФ, а для этого нам надо комплексифицировать систему).

Определение комплексификации оператора $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ и пространства $\mathbb{R}^n$ дано в [Сергеев, с. 121], [Сергеев, с. 122]. Символом $\operatorname{End}\mathbb{F}^n$ обозначается множество линейных операторов $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. Стоит б/д привести лемму 91.

Определение комплексификации системы + лемма 92 с доказательством: [Сергеев, с. 123]. Следствие на [Сергеев, с. 124] тоже лучше указать.

Согласно разделу **4.3 Метод Жордановых форм** ([Сергеев, с. 124]) в той или иной форме привести и (по возможности/необходимости) доказать все теоремы и леммы, касающиеся **только экспоненты**, про логарифм ничего писать не надо.

Теорема про фундаментальную систему решений на [Сергеев, с. 128].

Теперь про **4.5 Метод неопределенных коэффициентов** на [Сергеев, с. 132].

Определение квазимногочленов и линейных пространств над ними [Сергеев, с. 132]. Привести лемму 105 [Сергеев, с. 133].

Явный вид решения комплексифицированной системы Теорема 106 [Сергеев, с. 133].

Определение характеристического многочлена и доказательство того, что он совпадает с $\det(\lambda E - A)$ [Сергеев, с. 135].

Аналогично ему определяется оператор дифференцирования $L(\mathcal{D})$ [Сергеев, с. 136].

Решение однородной системы Теорема 110 [Сергеев, с. 138].

Лемма 115 [Сергеев, с. 141]. Определение резонанса кратности k [Сергеев, с. 141] + теорема о частном решении в комплексном случае + следствие из неё (действительный случай) [Сергеев, с. 142] + [Сергеев, с. 143].

Билет 21

$\mathbb{R}$-дифференцируемость: [Домрин, с. 24] всё до пункта 2.2. $\mathbb{C}$-дифференцируемость [Домрин, с. 25], теорема об условиях Коши-Римана [Домрин, с. 26].

Голоморфная функция в области, конформное отображение: определения [Домрин, с. 29]. Критерий конформности отображения в точке, заодно геометрический смысл модуля и аргумента производной: предложение [Домрин, с. 29]. Тривиальные замечания про поворот и растяжение элементов кривой: [Домрин, с. 31].

Билет 22

Определение конформности: [Домрин, с. 29]. Голоморфность и конформность отображений расширенной комплексной плоскости: оба определения [Домрин, с. 32].

Дробно-линейное отображение: [Домрин, с. 33] само определение и ниже доопределение. Это гомеоморфизм: предложение 3.1 [Домрин, с. 34].

Конформность дробно-линейных отображений: [Домрин, с. 34] весь пункт 3.2 (кроме «можно доказать её и по-другому»).

Примеры элементарных функций: [Шабат, с. 60] пункты 1, 2 (некомформна в ± 1 по критерию конформности), показательная, можно коротко ввести функции из пункта про тригонометрические.

Аналитический элемент, непосредственное продолжение, аналитическое продолжение по цепочке: определения 1, 2, 3 [Шабат, с. 149].

Канонический элемент: определение 1 [Шабат, с. 150]. Аналитическое продолжение канонического элемента вдоль пути: определение 2 [Шабат, с. 151]. Единственность продолжения: теорема 1 [Шабат, с. 152] (не доказывать). Эквивалентность продолжений по пути и по цепочке: теорема 2 [Шабат, с. 153] (не доказывать).

Эквивалентные элементы: определение 1 [Шабат, с. 157]. Аналитическая функция: определение 2 [Шабат, с. 158] и на два абзаца выше через аналитические элементы. Равные аналитические функции: определение 3 [Шабат, с. 159].

Простейшие многозначные функции: [Шабат, с. 162] пункты 1 (введение через аналитический элемент плюс формула (6)) и 2 (введение через аналитический элемент плюс формула (12)).

Билет 23

Определение интеграла: [Шабат, с. 74]. Свойства интеграла: [Шабат, с. 76] все пункты без доказательства.

Определение первообразной: [Шабат, с. 78]. Тривиальный факт, что все первообразные отличаются на константу: теорема 1 [Шабат, с. 78].

Лемма о том, что если интеграл по треугольникам нулевой, то есть первообразная: лемма 1 [Шабат, с. 79] (без доказательства). Лемма Гурса о том, что у голоморфной функции интеграл по треугольникам нулевой: лемма 2 [Шабат, с. 80] (без доказательства). Очевидный вывод: теорема 2 [Шабат, с. 81] (уже доказано).

Определение первообразной вдоль пути: определение 2 [Шабат, с. 82]. Теорема о её существовании: теорема 3 [Шабат, с. 82] (можно не доказывать). Формула Ньютона-Лейбница: теорема 4 [Шабат, с. 83] (можно не доказывать).

Определение гомотопных путей: определение 1 [Шабат, с. 87]. Гомотопические классы, гомотопность нулю: [Шабат, с. 88]. Инвариантность интеграла при гомотопиях: теорема 1 [Шабат, с. 88]. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру: теоремы 2 и 3 [Шабат, с. 90] (доказать 2, 3 очевидна). Теорема Коши для многосвязных областей: теорема 1 [Шабат, с. 93].

Интегральная формула Коши: теорема 1 [Шабат, с. 96] (понадобится пример 1 [Шабат, с. 74] для $n = -1$ и теорема Коши для многосвязных областей).

Существование ряда Тейлора: теорема 1 [Шабат, с. 100]. Заметить, что по теореме об инвариантности интеграла c_n не зависят от радиуса окружности γ_r. Теорема о том, что сумма степенного ряда голоморфна в круге сходимости: теорема 5 [Шабат, с. 105]. Формула для коэффициентов ряда Тейлора: теорема 2 [Шабат, с. 106].

Билет 24

Теорема про ряд Лорана: [Шабат, с. 118]. Радиуса кольца: формулы (11), (13): [Шабат, с. 120]. Формулы для коэффициентов ряда Лорана: теорема 2 [Шабат, с. 121].

Неравенства Коши: [Шабат, с. 123] (см. доказательства [Шабат, с. 101]).

Определение изолированной особой точки: определение 1 [Шабат, с. 125]. Классификация особых точек: определение 2 [Шабат, с. 125]. Критерий устранимости особой точки: теорема 1 [Шабат, с. 127]. Критерий полюса: теорема 2 [Шабат, с. 128]. Порядок полюса: определение 3 [Шабат, с. 129]. Критерий сущ. особой точки: теорема 3 [Шабат, с. 129].

Определение вычета: определение 1 [Шабат, с. 134]. Теорема об интеграле по границе области: теорема 1 [Шабат, с. 134]. Вычет равен c_1: теорема 2 [Шабат, с. 135]. Доказать формулу (7) [Шабат, с. 136].

Определение вычета в бесконечности: определение 2 [Шабат, с. 136]. Теорема о полной сумме вычетов: теорема 3 [Шабат, с. 137].

Билет 25

Определение элементарной поверхности: [Шафаревич, с. 18]. Определение кривой на поверхности: определение 2 [Шафаревич, с. 19]. Касательное пространство: утверждение 1 и определение 3 [Шафаревич, с. 20]. Замена координат: после определения 3.

Первая квадратичная форма: определение 5 [Шафаревич, с. 21]. Написать формулу для скалярного произведения, длины касательного вектора и косинуса угла между векторами ниже.

Длина кривой, объём: формулы на [Шафаревич, с. 22].

Закон преобразования матрицы первой квадратичной формы, запись через дифференциалы: [Шафаревич, с. 23].

Билет 26

Гиперповерхность: определение 1 [Шафаревич, с. 35]. Рассматриваем только гиперповерхности, поэтому нормальное пространство (ортогональное дополнение к касательному) одномерно. Нормальное сечение: определение 2 [Шафаревич, с. 35]. Определение $\widetilde{k}$: ниже определения 2. Определение второй квадратичной формы и предложение про неё: определение 3 и предложение 1 [Шафаревич, с. 36] («докажите» там очевидно из определения $\widetilde{k}$, кривизны кривой и того, что вектор нормали единичный).

Теорема Мёнье: теорема 1 [Шафаревич, с. 37].

Билет 27

Теорема о приведении матриц второй и первой квадратичных форм к симпатичному виду: теорема 2 [Шафаревич, с. 38].

Главные кривизны и главные направления: определение 4 [Шафаревич, с. 39]. Ниже формула Эйлера.

Экстремальные кривизны главных сечений: [Шафаревич, с. 39] под замечанием 4.

Литература

[Зорич] Зорич, Математический анализ. Часть I. — 6-е изд, до- полн.— М.: МЦНМО, 2012. — XVIII + 702 с. Библ.: 55 назв. Илл.: 65.

[Зорич2] Зорич, Математический анализ. Часть II. — 6-е изд, до- полн.— М.: МЦНМО, 2012. — XIV + 818 с. Библ.: 60 назв. Илл.: 41.

[Кострикин1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. 3-е издание. ФИЗМАТЛИТ, 2004 г. — 272 с.

[Кострикин2] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. ФИЗМАТЛИТ, 2000 г. — 368 с.

[Кострикин3] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры. ФИЗМАТЛИТ, 2004 г. — 272 с.

[Сергеев] Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения, учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Издательский центр «Академия», 2013 — 288 с.

[Домрин] А. В. Домрин, А. Г. Сергеев. Лекции по комплексному анализу. Первое полугодие. Москва, 2004.

[Шабат] Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ.

[Шафаревич] А. И. Шафаревич. Курс лекций по классической дифференциальной геометрии. Москва, 2007 г.

[АСЧ] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. 1999.

[Тужилин1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Лекции по классической дифференциальной геометрии.

[Тужилин2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Лекции по дифференциальной геометрии и топологии.

[mekhmat-gosy] Написанные билеты в файле `mekhmat_gosy.pdf`.
Все номера страниц в pdf-файлах, а не на бумаге.