Старков В.Н.

Материалы к
установочной лекции
Вопрос №18

1. Интегральная теорема Коши [3]

Сначала докажем интегральную теорему Коши , которая является центральной в теории аналитических функций.

Интегральная теорема Коши. Если D – односвязная область конечной плоскости и $f(z)$ –однозначная аналитическая в этой области функция, то для любой замкнутой спрямляемой кривой l , лежащей в области D, интеграл от функции $f(z)$ вдоль кривой l равен нулю

$$\int_l f(z)dz = 0 \qquad (1)$$

Доказательство. Напомним формулу Грина-Остроградского, которую будем использовать для доказательства:

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (2)$$

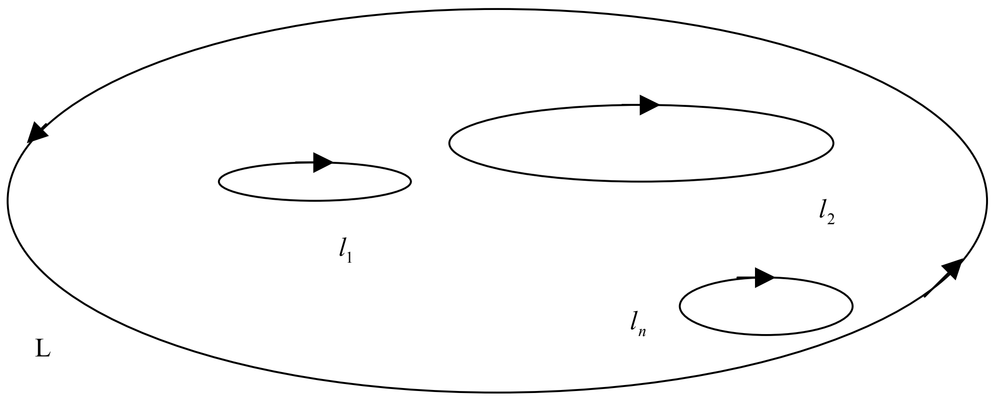
где G – внутренность замкнутой жордановой (без самопересечений) спрямляемой кривой l.
Возьмем $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и выпишем интеграл

$$\int_l f(z)dz = \int_l (udx - vdy) + i\int_l (vdx + udy) = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

В силу условий Коши-Римана для аналитической функции $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выражения в скобках обращаются в нуль, т.е. $\int_l f(z)dz = 0$.

Имеет место также теорема о составном контуре, когда область D не является односвязной.

Теорема [4]. Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области D, ограниченной извне контуром L, а изнутри контурами $l_1, l_2, l_3, ..., l_n$ и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда $\int_C f(z)dz = 0$, где $C = L + \sum_{j=1}^{n} l_j$ –полная граница области D, состоящая из контуров L и $l_1, l_2, l_3, ..., l_n$, причем обход границы C происходит в положительном направлении (т.е. так, что область D остается все время слева).
.



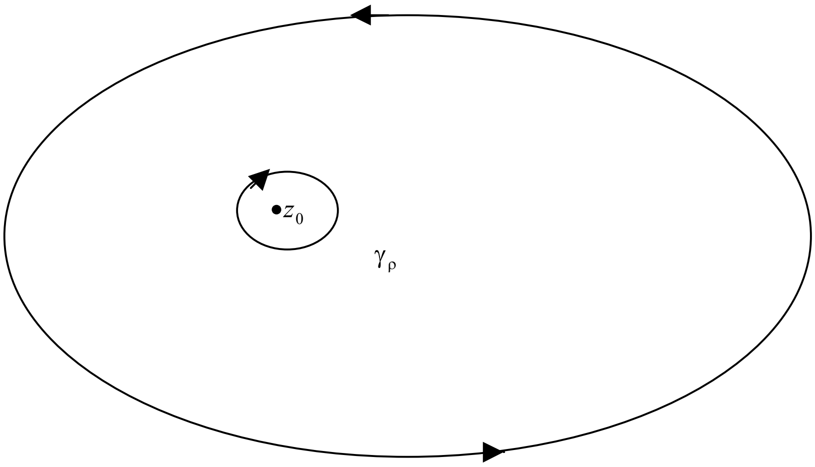
2. Интеграл Коши.

Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в односвязной или многосвязной области D и непрерывна в замкнутой $\overline{D}$ и l –граница области D. Можно показать [3], что значение функции $f(z)$ в любой точке z_0 области D $(z \notin l)$ можно вычислить, зная только значения $f(z)$ на границе l этой области по формуле

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)dz}{z-z_0} \qquad (3)$$

где граница l обходится в положительном направлении.

Интеграл в правой части называется интегралом типа Коши для функции $f(z)$, а сама формула носит название интегральной формулой Коши. Эта формула выражает значения аналитической функции внутри внутри замкнутой кривой через значения той же функции на самой кривой. Для вывода формулы (3) воспользуемся теоремой о составном контуре, приведенной ранее.



Проведем окружность γ_ρ с центром в точке z_0 и радиуса столь малого, что круг $|z-z_0|\le\rho$ лежит внутри D. Тогда функция $\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{z-z_0}$ будет аналитической в области D_ρ, полученной из D удалением этого круга, и на границе области D_ρ, состоящей из l и окружности γ_ρ.

В силу теоремы о составном контуре интеграл от функции $\varphi(z)$ по границе области D_ρ, ориентированной положительно относительно D_ρ, равен нулю:

$$\int_l \varphi(z)dz+\oint_{\gamma\rho}\varphi(z)dz=0\,.$$

Отсюда, поменяв ориентацию γ_ρ на противоположную, получим $\int_l \varphi(z)dz=\oint_{\gamma\rho}\varphi(z)dz$

Вернемся к виду $\varphi(z)$ и найдем предел этого выражения при $\rho\to 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)dz}{z-z_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma\rho}\frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

Следуя формуле (3), левая часть равна $f(z)$. Оценим разность

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma\rho}\frac{f(z)dz}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)dz}{z-z_0}-\frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_{\gamma\rho}\frac{dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

Здесь было использовано равенство $\oint_{\gamma\rho}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$.

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z_0 для любого положительного ε найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что неравенство $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ будет выполняться для всех $z\in U_{z_0}^{\delta}$ (окрестность точки z_0 радиуса ρ). Для $|z-z_0|<\rho<\delta$ получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{z-z_0}-f(z_0)\right|\le\frac{1}{2\pi}\max_{z\in\gamma_\rho}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|2\pi\rho<\frac{\varepsilon}{2\pi\rho}2\pi\rho=\varepsilon\,.$$

Следовательно $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=f(z_0)$ и $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=f(z_0)$.

Если же z_0 принадлежит внешности кривой l, то подынтегральная функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ является аналитической не только на l, но и всюду внутри l (знаменатель $z-z_0$ отличен от нуля на l и внутри l). Для $z_0\in l$ интеграл Коши теряет смысл не только как собственный, но и как несобственный интеграл. Итак

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=\begin{cases} f(z_0), & z\in D\\ 0, & z\notin D\end{cases} \qquad (4)$$

С помощью этой формулы можно вычислить некоторые контурные интегралы по замкнутым контурам.

Пример. Вычислить $\int\limits_{l}\frac{e^z dz}{z(z-3)}$, где l –окружность радиуса $\frac{3}{2}$ с центром в точке 2.

В качестве функции $f(z)$ надо взять $\frac{e^z}{z}$, аналитическую в круге $|z-2|<\frac{3}{2}$. Применив формулу Коши, находим $\int\limits_{l}\frac{e^z dz}{z(z-3)}=\int\limits_{l}\frac{f(z)dz}{z-3}=2\pi i\cdot f(3)=2\pi i\cdot\frac{e^3}{3}$.

Из формулы Коши можно получить формулу для производных функции $f(z)$.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, то в каждой точке области D она дифференцируема сколько угодно раз, причем $n-$ая производная представляется формулой

$$f^{(m)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad (5)$$

где l – граница области D обходится в положительном направлении.

Эта формула может также служить для вычисления некоторых контурных интегралов.

Пример. Вычислить $\int\limits_{l}\frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, где $l-$ произвольный контур, однократно обходящий точку i в положительном направлении. Функция $f(z)=e^z$ аналитична в области, ограниченной контуром l. По формуле (5) находим $\int\limits_{l}\frac{e^z dz}{(z-i)^3}=\frac{2\pi i}{2!}f''(i)=\pi i e^i=\pi(-\sin 1+i\cos 1)$.

Использованная литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е.-М.: Наука, 1965.-716 с.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций.-М.: ГИТТЛ, 1957.-335 с.
3. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций.-М.: Просвещение, 1977.-320 с.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.-М.: Наука, 1967.-301 с.

Литература для дополнительного изучения ТФКП и ее приложений

5. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного.-М.: Высшая школа, 1984.-192 с.
6. Алешков Ю.З. Лекции по теории функций комплексного переменного.-СПб: изд-во СПбГУ, 1999.-196 с.
7. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. Учебное пособие.-Л.: изд. ЛГУ, 1986.-248 с.
8. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.-М.: Наука, 1984.-320 с.
9. Евграфов М.А. Аналитические функции.-М.: Наука, 1965.-424 с.
10. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. Пер. с нем.-М.: ИЛ, 1963.-406 с.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.-М.: Наука. 1977.-444 С.
12. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.-М.: Наука. 1976.-408 с.
13. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их приложения.-М.: Наука, 1988.
14. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Пер. с румын.-М.: ИЛ, 1962.Т.1.-364 с., Т.2.-416 с.
15. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.-М.-Л.: Наука, 1951.-308 с.