





КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МОХОВ ОЛЕГ ИВАНОВИЧ

MEXMAT MCY

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ **ЕФАНОВА АНТОНА АЛЕКСАНДРОВИЧА**

Содержание

1.	Введ	дение в классическую дифференциальную геометрию. Базовые по-				
	нятия					
	1.1.	Предмет дифференциальной геометрии	6			
	1.2.	Базовые понятия	6			
	1.3.	Кривые в \mathbb{R}^n	6			
	1.4.	Способы задания кривой	8			
2.	Основные понятия, связанные с кривыми в дифференциальной геомет-					
	рии		11			
	2.1.	Другая формулировка теоремы о регулярности прообраза системы урав-				
		нений	11			
	2.2.	Касательная прямая в точке регулярной кривой	11			
	2.3.	Длина дуги регулярной кривой в \mathbb{R}^n	14			
	2.4.	Натуральный параметр регулярной кривой	14			
	2.5.	Кривизна регулярной кривой	15			
	2.6.	Соприкосновение кривых в \mathbb{R}^n	16			
		Главная нормаль и соприкасающаяся плоскость	17			
	2.8.	Соприкасающаяся окружность	18			
3.	Плоские кривые					
	3.1.	Геометрический смысл кривизны кривой в точке	21			
	3.2.	Кривизна кривой в произвольной параметризации	21			
	3.3.	Кривые на плоскости. Кривизна со знаком. Коориентация	23			
	3.4.	Репер и уравнения Френе для плоской кривой	24			
		Деривационные уравнения в \mathbb{R}^n	25			
	3.6.	Восстановление кривой по кривизне	26			
		Явные формулы восстановления кривой по кривизне для \mathbb{R}^2 . Нату-				
		ральные уравнения	27			
4.	Эво	пюта и эвольвента. Пространственные кривые	29			
	4.1.	Коэффициент вращения для замкнутой кривой	29			
	4.2.	Эволюта	29			
		Эвольвента	31			
		Кривые в \mathbb{R}^3	33			
		Геометрический смысл кручения	35			
		Вектор Дарбу	35			
	4.7.					
		ляющую плоскости	36			



5 .	Кри	вые в пространстве произвольной размерности	38		
	5.1.	Вычислительные формулы для кручения	38		
	5.2.	Восстановление пространственной кривой по кривизне и кручению	39		
	5.3.	Теорема об ортонормированности решения системы Френе	41		
	5.4.	$ У $ равнения Φ рене для кривых в \mathbb{R}^n	43		
6.	Криволинейные системы координат на поверхностях				
	6.1.	Дальнейшие результаты теории регулярных кривых	46		
	6.2.	Криволинейные системы координат в \mathbb{R}^n	46		
	6.3.	Матрица Грама и понятие о римановой метрике	50		
	6.4.	Деривационные уравнения	50		
7.	Криволинейные системы координат на поверхностях				
	7.1.	Критерий восстановления криволинейной системы координат по рима-			
		новой метрике	52		
	7.2.	Теорема Дарбу о совместных системах	52		
	7.3.	Условия совместности для деривационных уравнений. Тензор кривиз-			
		ны Римана. Критерии восстановления	53		
	7.4.	Кривые в криволинейных системах координат	54		
	7.5.		55		
	7.6.	Способы задания поверхностей	57		
8.	Подмногообразия				
	8.1.	Нормальное пространство	60		
	8.2.	Площадь поверхности. Элемент объема	61		
	8.3.	Деривационные уравнения подмногообразия	61		
	8.4.	Фундаментальные уравнения теории подмногообразий	63		
9.	Двумерные поверхности в трехмерном пространстве				
	9.1.	Общие результаты теории поверхностей в случае двумерных поверх-			
		ностей в трехмерном пространстве	66		
		Приложения теоремы Дарбу. Лемма Пуанкаре	67		
	9.3.	Доказательство теоремы Дарбу о совместных системах в случае дву-			
		мерных поверхностей	69		
	9.4.	Доказательство теоремы Бонне в случае двумерных поверхностей	70		
10		мерные поверхности в трехмерном пространстве (продолжение)	73		
		. Уравнения нулевой кривизны	73		
		. Кривые на поверхностях в \mathbb{R}^3	73		
	10.3	. Нормальные сечения	74		



11.Кривизны поверхностей	77
11.1. Теорема Менье и ее приложения	77
11.2. Главные кривизны, главные направления и Гауссова кривизна поверх-	
ности	79
12.Сопряженные направления и геодезические на поверхностях	82
12.1. Формулы Родрига	82
12.2. Сопряженные направления	82
12.3. Линии кривизны на поверхности	83
12.4. Сферическое отображение (отображение Гаусса)	84
12.5. Соприкасающийся параболоид	85
12.6. Индикатриса Дюпена	86
12.7. Геодезическая кривизна и геодезические на поверхности	87
13.Геодезические и их роль в дифференциальной геометрии	89
13.1. Геодезические	89
13.2. Теорема Клеро	91
13.3. Уравнение геодезической	92
13.4. Уравнения Эйлера-Лагранжа	94
13.5. Экстремальные свойства геодезических	95
14.Полугеодезические координаты	97
14.1. Полугеодезические координаты	97
14.2. Геодезические линии как локально крайтчашие	99
14.3. Изометрии и изгибания	101
15. Классификация поверхностей постоянной кривизны с точностью до изо)-
метрии	105
15.1. Доказательство теоремы о классификации. Формулы Бибербаха	105
15.2. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой	
15.3 Teorema Favora-Found	110



1. Введение в классическую дифференциальную геометрию. Базовые понятия

1.1. Предмет дифференциальной геометрии

Дифференциальная геометрия - одна из самых синтетических наук, использующая факты из таких разделов высшей математики как математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения и общая топология. Дифференциальная геометрия имеет многочисленные приложения: прикладная физика, математическая физика, теоретическая физика, компьютерная графика, дискретная дифференциальная геометрия и пр.

Классическая дифференциальная геометрия отличается тем, что изучает геометрические объекты в n-мерном евклидовом пространстве, в частности на плоскости и пространстве. Основные объекты изучения - кривые и поверхности.

1.2. Базовые понятия

Под \mathbb{R}^n понимается точечно-векторное пространство $\{(x^1,...,x^n)\}$, наделенное скалярным произведением:

$$(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} x^{i} y^{i}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^{n}.$$

Длина вектора $X\in\mathbb{R}^n$ определяется как $|X|=\sqrt{(X,X)}$, а расстояние между двумя точками - $\rho(X,Y)=\sqrt{(X-Y,X-Y)}$. Топология пространства стандартная - порожденная открытами шарами с центром X_0 и радиусом r>0, которые обозначим через $U(X_0,r)$.

Определение 1. Областью евклидового пространство называется такое множество точек V, что $\forall X_0 \in V \exists r > 0 : U(X_0, r) \subset V$.

1.3. Кривые в \mathbb{R}^n

Кривая может задаваться разными способами: уравнениями или параметрически. Например, на плоскости F(x,y)=0 и, соответственно, x=x(t),y=y(t).

Определение 2. Элементарной кривой или простой дугой называется множество точек в \mathbb{R}^n , являющихся образом гомеоморфизма (взаимнооднозначное и непрерывное в обе стороны отображение) отрезка.





Способов отобразить отрезок много, например, отрезок [0,1] может быть отражен как (t,t) или как (t^2,t^2) . Каждое такое отображение (то есть способ) называется параметризацией простой дуги. Каждая параметризация задается n функциями: $t\mapsto (x^1(t),...,x^n(t))$. Вектор $(x^1(t),...,x^n(t))$ называется paduyc-вектором и обозначается $\vec{r}(t)$.

Определение 3. Параметризация называется регулярной класса C^k , где k такое, какое требуется для тех или иных целей, если $x^i(t), 1 \leqslant i \leqslant n$, класса C^k и вектор скорости $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0 \ \ \forall \ t.$ Последнее условие называется условием регулярности.

Точки, для которых условие регулярности не выполнено, являются особенностями и их изучение в данный курс не входит.

Определение 4. Параметризация называется регулярной класса C^k , где k такое, какое требуется для тех или иных целей, если $x^i(t), 1 \leqslant i \leqslant n$, класса C^k и вектор скорости $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0 \ \ \forall \ t.$ Последнее условие называется условием регулярности.

Определение 5. Простая дуга называется регулярной, если существует регулярная параметризация.

Рассмотрим пример: полукубическая парабола, задается параметризацией $x=t^2,y=t^3$. Данная кривая не является регулярной, потому что в момент t=0 вектор скорости $(2t^2,3t^2)$ обнуляется. Но сами функции x(t),y(t) класса C^∞ . Если выполнено условие гладкости для функций $x^i(t)$, то будем говорить, что кривая гладко параметризована, но не обязательно регулярна.

Конечно, изучение простых дуг недостаточно, так как даже окружность простой дугой не является (не существует гомеоморфизма), не говоря уже о самопересекающихся кривых. Поэтому, мы будем изучать кривые, которые локально являются регулярными простыми дугами.

Определение 6. Кривая называется регулярной, если для каждого значения $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ существует окрестность $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$, образом которой служит простая регулярная дуга. Под I понимается не обязательно отрезок, а любое линейно связное подмножество \mathbb{R} .

Ясно, что нам хотелось бы менять параметризацию одной и той же регулярной кривой, поэтому следует ввести отношение эквивалентности для двух разных параметризаций.

Определение 7. Две регулярные параметризации $\varphi_1: I_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi_2: I_2 \to \mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\psi: I_1 \to I_2$ такой, ито $\varphi_2(\psi(t)) = \varphi_1(t) \ \ \forall t.$



Легко проверить, что данная эквивалентность является отношением эквивалентности. Таким образом, получен класс эквивалентности параметризованных кривых.

Утверждение 1. Если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(s)$ - регулярные эквивалентные параметризации, то t(s) и s(t) являются гладкими функциями.

Доказательство: Рассмотрим, например, параметризацию t. Так как обе параметризации регулярные, то вектор скорости $(x_t^1,...,x_t^n)$ в точке t_0 не обнуляется, а значит существует номер i_0 такой, что $x_t^{i_0}(t_0) \neq 0$. Тогда по теореме об обратной функции в некоторой окрестности можно выразить параметр t через x^{i_0} , то есть $t(x^{i_0})$ гладкая функция в некоторой окрестности данной точки. Но x^{i_0} является гладкой функцией от s. Таким образом, функция $t(s) = t(x^{i_0}(s))$ является гладкой функцией как суперпозиция гладких функций. \blacksquare

Важно подчеркнуть, что при доказательстве использовалось рассуждение, которое можно сформулировать так: на регулярной кривой в некоторой окрестности любой точки можно в качестве параметра выбрать одну из координат евклидового пространства. Если задан какой-то параметр t, то в силу регулярности и теоремы об обратной функции можно перейти к функции $t(x^{i_0})$, подстановка которой во все все другие координаты дает требуемый результат. Данный результат очень полезен при решении определенных задач.

Определение 8. Гладкая функция $f:U\to \mathbb{R}^m, U\subset \mathbb{R}^n$ класса C^k называется регулярной в точке $x_0\in U$, если ранг матрицы Якоби в этой точке максимально возможный:

$$\operatorname{rank} f|_{x_0} = \operatorname{rank} \left. \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_{x_0} \right) = \min(n, m).$$

Нас будет обычно интересовать случай $m \geqslant n$. Случай m = n нам будет также интересен, когда будут рассматриваться регулярные криволинейные системы координат. Это простейший случай, когда возникает тензор кривизны Римана.

Следует подчеркнуть, что множество регулярных точек открыто. Это следует из того, что раз в какой-то точке ранг максимально возможный, то существует некоторая окрестность, в которой функция регулярна. Таким образом, объединяя все эти окрестности, получим открытое множество.

1.4. Способы задания кривой

Мы рассмотрим два способа задания кривой: системой уравнений и параметрический:

$$\begin{cases} f_1(x^1, ..., x^n) = 0 \\ ... &, \quad \bar{r}(t) = (x^1(t), ..., x^n(t)) \\ f_{n-1}(x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases}$$



Докажем теорему о локальной эквивалентности задания кривой этими способами.

Теорема 1. Пусть дана гладкая фунция $f:U\to\mathbb{R}^{n-1},U\subset\mathbb{R}^n, f=(f_1,...,f_n),$ а точка $x_0\in U$ является регулярной точкой этого отображения и решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \dots \\ f_{n-1}(x) = 0 \end{cases}$$

тогда существует окрестность точки x_0 , в которой пространство решений этой системы представляет собой регулярную простую дугу.

Верно и обратное. В окрестности любой точки регулярной кривой ее можно задать системой уравнений, которая регулярна в этой точке.

Доказательство: 1. Так как точка x_0 регулярная точка отображения f, то ранг этого отображения равен n-1. Без ограничения общности можно считать, что первые n-1 столбцов дают нужный ненулевой минор (иначе перенумерация координат). Тогда по теореме о неявной функции решение этой системы в некоторой окрестности точки x_0 задается гладкими функциями $x^1(x^n),...,x^{n-1}(x^n)$, то есть система уравнений локально разрешена. Но это и означает, что локально решения представляют собой регулярную кривую, так как радиус-вектор задается в виде $\bar{r}(x^n) = (x^1(x^n),...,x^{n-1}(x^n),x^n)$, а вектор скорости последней компонентой будет иметь 1, то есть в ноль не обратится.

2. Теперь пусть мы рассматриваем регулярную параметризацию. Тогда, как упоминалось в утверждении 1, можно обратить параметр через некоторую евклидову координату $t(x^{i_0})$ и выбрать в качестве нового регулярного параметра эту координату. Не теряя общности, будем считать, что эта координата $x^n: \bar{r}(x^n) = (\varphi^1(x^n),...,\varphi^{n-1}(x^n),x^n)$. Теперь запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - \varphi^1(x^n) = 0 \\ \dots \\ x^{n-1} - \varphi^{n-1}(x^n) = 0 \end{cases}$$

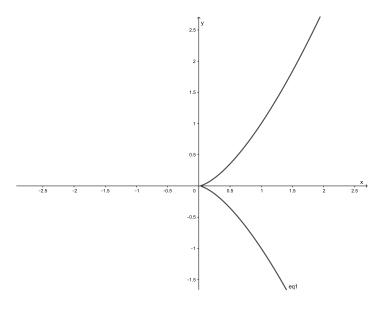
То есть кривая локально задается системой уравнений. Первые n-1 столбец матрицы Якоби составляют единичную матрицу, а значит ранг такого отображения равен n-1. \blacksquare

Решить такую систему зачастую невозможно, но понимать как устроено пространство решений можем и это важно. Это возможно в случае регулярной точки. Если же точка нерегулярна, то утверждать, что решение будет представлять нерегулярную простую дугу, нельзя. Рассмотрим следующие примеры.

Пусть $f: U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^2$, то есть рассматриваем уравнение $f_1(x,y) = 0$.



- 1. (Когда решение не регулярно, а окрестность соответствующая существует) В случае $f_1=x^2$ матрица Якоби имеет вид (2x-0) и обращается в ноль только в точках на прямой x=0, которая является решением системы $f_1=0$. То есть решения (0,y) системы НЕ являются регулярными точками, но при этом у каждой точки существует окрестность, в которой решения образуют регулярную простую дугу.
- 2. (Когда решение регулярно и окрестность существует) В случае $f_1 = x^3 y^2$ (Рис. 1) матрица Якоби имеет виде $(3x^2 2y)$ и обращается в ноль только в точке (0,0). То есть, из теоремы следует, любое решение системы $f_1 = 0$, кроме (0,0), является регулярным.



3. (Когда решение регулярно и окрестность существует) В случае $f_1=xy$ матрица Якоби имеет вид $(y\ x)$ и обращается в ноль только в точке (0,0). Решения системы $f_1=0$ представляют собой прямые x=0 и y=0. Каждое решение является регулярным, за исключением (0,0), и имеет окрестность, в которой пространство решений представляется регулярной простой дугой.

Рис. 1.

4. (Когда решение нерегулярно и окрестность соответствующая не существует) В случае $f_1=x^2+y^2$ матрица Якоби имеет вид $(2x\ 2y)$ и обращается в ноль только в точке (0,0), которая является единственным решением системы $f_1=0$, а значит нет окрестности этой точки, в которой решение представляло бы регулярную простую дугу.



2. Основные понятия, связанные с кривыми в дифференциальной геометрии

2.1. Другая формулировка теоремы о регулярности прообраза системы уравнений

Переформулируем последнюю теорему предыдущей лекции в следующем виде. **Теорема 2.** Пусть дана гладкая фунция $f:U\to\mathbb{R}^{n-1},U\subset\mathbb{R}^n, f=(f_1,...,f_n),$ а точка $x_0\in U$ является регулярной точкой этого отображения и решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = C^1 \\ \dots & , C^i \in \mathbb{R}, \\ f_{n-1}(x) = C^{n-1} \end{cases}$$

тогда прообразы точки $(C^1,...,C^{n-1})$ представляет собой регулярную простую дугу.

Доказательство: Рассмотрим новое отображение g, задаваемое функциями $g_i = f_i - C^i$. Данное отображение удовлетворяет условиям теоремы 1, так как x_0 является решением новой системы, а константы C^i не повлияют на матрицу Якоби, а значит ранг в точке x_0 будет максимальный. Таким образом, существует окрестность, где решения новой системы (прообразы) представляют собой регулярную простую дугу.

Условие регулярности кривой $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$ эквивалентно условию регулярности в каждой точке отображения $\vec{r}: U \to \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}$, так как матрица Якоби этого отображения совпадает с $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

2.2. Касательная прямая в точке регулярной кривой

Пусть регулярная кривая задана радиус-вектором $\vec{r}(t)$. Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки t_0 радиус-вектор:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=t_0} (t - t_0) + \bar{\bar{o}}(t - t_0).$$

Определение 9. Касательной прямой называется линеаризация кривой в точке, то есть в ряде Тейлора отбрасываются слагаемые более высокого порядка, чем $(t-t_0)$:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t=t_0} (t - t_0).$$





Так как кривая регулярная, то коэффициент $\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0}$ в ноль не обращается ни при каком t_0 .

Понятно, что при переходе к другому регулярному параметру, касательная не поменяется, так как

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds},$$

что означает, что вектора скорости в разных параметризациях коллинеарны, а проходят прямые через одну и ту же точку $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t(s_0))$, где $s_0 = s(t_0)$, значит совпадают.

Из курса математического анализа известно, что любая секущая, проходящая через точки $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$, при устремлении t к t_0 обращается в касательную к точке $\vec{r}(t_0)$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Теперь рассмотрим уравнение касательной в случае, когда кривая задана системой уравнений.

Утверждение 2. Пусть регулярная кривая задана системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x^1, ..., x^n) = 0 \\ ... \\ f_{n-1}(x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases}$$

тогда уравнение касательной дается в следующем виде

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \bigg|_{x=x_0} (x^j - x_0^j) = 0, i = 1...n - 1.$$

Доказательство: Рассмотрим некоторую регулярную параметризацию кривой $\vec{r}(t) = (x^1(t),...,x^n(t))$. Тогда вектор скорости имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx^1}{dt}, ..., \frac{dx^n}{dt}\right).$$

С другой стороны, продифферецируем систему уравнений: $\sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = 0$. То есть вектор скорости в точке $t=t_0$ обязан удовлетворять линейной системе уравнений $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\big|_{t=t_0} \cdot X = 0$. Так как матрица Якоби $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\big|_{t=t_0}$ имеет максимальный ранг в каждой точке, то данная линейная система уравнений имеет пространством решений прямую (или все решения коллинеарны). Остается сделать так, чтобы эта прямая проходила через точку x_0 : положим $X=x-x_0$. Теперь система принимает указанный вид.



Утверждение 3. Касательная прямая к кривой в точке $t=t_0$ является единственной прямой, расстояние до которой от точек кривой при приближении к t_0 имеет второй порядок малости.

Доказательство: Если прямая не проходит через точку $\vec{r}(t_0)$, то в пределе расстояние не будет равно нулю, а значит порядок малости меньше 2. Пусть теперь прямая l проходит через точку $\vec{r}(t_0)$ (на рис.2 точка A) и имеет направляющим вектором некоторый вектор \vec{a} . Опустим из точки $\vec{r}(t)$ (на рис.2 точка B) на прямую l высоту BC. Угол $\angle BAC$ обозначим через $\alpha(t)$.

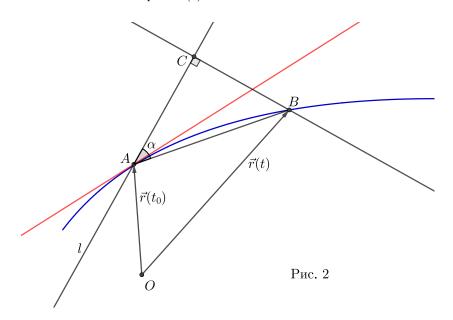


Рис. 2.

Из прямоугольного треугольника ΔABC находим, что расстояние от точки на кривой до прямой есть длина катета BC :

$$\rho_l(t) = |BC| = |AB| \cdot \sin(\angle BAC) = |\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| \cdot \sin(\alpha(t)).$$

Так как $t \to t_0$, то $\alpha(t) \to \alpha_0$, где α_0 есть угол между касательной и прямой l (прямая AB в пределе становится касательной).

Теперь разложим в ряд Тейлора каждый из множителей и продолжим равенство:

$$\rho_{l}(t) = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_{0}} \Delta t + \bar{\bar{o}} (\Delta t) \left| \cdot (\sin(\alpha_{0}) + \bar{\bar{o}} (1)) = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_{0}} \sin(\alpha_{0}) \Delta t + \bar{\bar{o}} (\Delta t) \right| =$$

$$= |\Delta t| \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_{0}} \sin(\alpha_{0}) + \bar{\bar{o}} (1) \right|.$$

Так как кривая регулярная, то вектор вектор скорости не может быть равен нулю. Если же и $\sin(\alpha_0)$ не ноль, то порядок малости равен 1. Таким образом, чтобы



появился второй порядок малости, требуется $\sin(\alpha_0) = 0$, то есть $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = \pi$. Оба этих случая соответствуют совпадению прямой l с касательной в силу определения угла α_0 .

2.3. Длина дуги регулярной кривой в \mathbb{R}^n

Определение 10. Длиной дуги кривой от точки $\vec{r}(t_0)$ до точки $\vec{r}(t)$ называется число

$$s = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt.$$

Утверждение 4. Длина дуги кривой не зависит от выбора параметра.

Доказательство: Пусть мы перешли к другом регулярному параметру τ . Будем считать, что вектора скорости сонаправлены, то есть коэффициент $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Тогда имеем:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right| d\tau = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right| \frac{d\tau}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = s.$$

2.4. Натуральный параметр регулярной кривой

Определение 11. Регулярный параметр s называется натуральным параметром регулярной кривой, если длина вектора скорости в этом параметре равна 1:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1 \quad \forall s.$$

Утверждение 5. Для каждой регулярной кривой натуральный параметр существует и определен с точностью до знака и сдвига на произвольную константу.

Доказательство: Ищем такой параметр, что длина вектора скорости в любой момент была равна единице $|\vec{r}'(s)|=1$. Перейдем к другому некоторому регулярному параметру t:

$$1 = \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \pm |\vec{r}'(t)| \Leftrightarrow s = \pm \int |\vec{r}'(t)| dt + C.$$

Последним равенством определяется натуральный параметр. Если параметр t также натурален, то интеграл равен t и тем самым утверждение доказано. \blacksquare



Утверждение 6. Если в какой-то регулярной параметризации t длина вектора скорости постоянна, то такой параметр пропорционален натуральному.

Доказательство: Перейдем в натуральную параметризацию в условии утверждения:

$$const = v = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| \left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \pm v \Leftrightarrow s = \pm vt + C.$$

Так как сдвиг всегда можно "занести" в натуральный параметр, а $\pm v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то получаем исходное утверждение $s=\pm vt$.

Последняя формула есть путь, пройденный за время t с постоянной скоростью v. Натуральная параметризация кривой естественна и очень важна в дифференциальной геометрии, так как большинство формул сильно упрощаются, если использовать именно ее.

2.5. Кривизна регулярной кривой

Обозначим вектор скорости в натуральной параметризации через $\vec{v}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$, а вектор ускорения через $\vec{k}(s)$ (в произвольном параметре обозначение может быть $\vec{a}(t)$).

Определение 12. Вектор ускорения регулярной кривой в натуральной параметризации называется вектором кривизны регулярной кривой, а его длина называется кривизной кривой в точке и обозначается соответственно k(s).

Как видно из определения, функция k(s) неотрицательна. Вектор кривизны и кривизна не зависят от того, какой натуральный параметр рассматривается.

Утверждение 7. Кривизна регулярной кривой на некотором интервале равна нулю тогда и только тогда, когда этот участок является прямой.

Доказательство: Рассмотрим прямую

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{a}(t - t_0), \quad \bar{a} = const \neq 0.$$

Перейдем к натуральному параметру. $\dot{\bar{r}}(t)=\bar{a}$, но вектор \bar{a} постоянен, а значит и длина постоянна. Таким образом, вектор скорости также имееют постоянную длину. Тогда из утверждения 6 находим, что $s=|\bar{a}|t$ или $t=s/|\bar{a}|$. Подставляя найденное в $\bar{r}(t)$, легко убеждаемся, что s имеет первую степень, а значит $\bar{r}''(s)=0$. Отсюда следует, что k(s)=0.

Теперь обратно. Если k(s)=0, то и $\bar{r}''(s)=0$. Тогда $\bar{r}(s)$ должен быть линеен по s, то есть быть уравнением прямой. \blacksquare



Определение 13. Если в какой-то точке кривой оказывается, что кривизна равна нулю, то такая точка называется точкой спрямления.

Определение 14. Регулярная кривая называется бирегулярной на некотором интервале (или в окрестности точки), если кривизна не равна нулю на этом интервале.

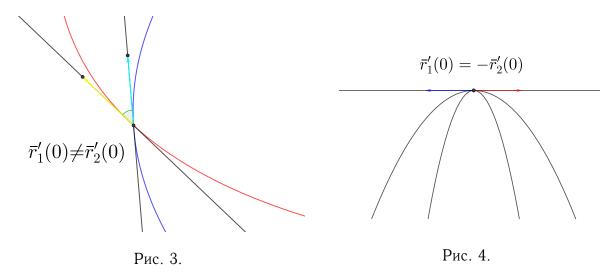
2.6. Соприкосновение кривых в \mathbb{R}^n

Пусть мы имеем две регулярные кривые в натуральных параметризациях $\vec{r_1}(s)$ и $\vec{r_2}(s)$, которые пересекаются в некоторой точке. Данную точку будем считать началом отсчета натурального параметра, то есть $\vec{r_1}(0) = \vec{r_2}(0)$. Теперь разложим в окрестности s=0 в ряд Тейлора оба радиус-вектора и вычтем их:

$$\bar{r}_1(s) = \bar{r}_1(0) + \bar{r}'_1(0)s + \dots,$$
 $\bar{r}_2(s) = \bar{r}_2(0) + \bar{r}'_2(0)s + \dots$
 $\bar{r}_1(s) - \bar{r}_2(s) = (\bar{r}'_1(0) - \bar{r}_2(0)')s + \dots$

Если вектора $\bar{r}_1'(0)$ и $\bar{r}_1'(0)$ неколлинеарны (длины равна 1) (если они коллинераны, но не соноправлены, то меняем любой натуральный параметр s на -s), то никакого касания кривых нет, так как угол между этими векторам ненулевой (рис. 3).

Если же эти вектора совпадают, то происходит касания кривых в точке (рис. 4).



Определение 15. Две регулярные кривые называются соприкасающимися т-го порядка, если в натуральной параметризации выполнено условие

$$\bar{r}_1^{(i)}(0) = \bar{r}_2^{(i)}(0), \quad i \leqslant m.$$

В этом случае, величина $\bar{r}_1(s) - \bar{r}_2(s)$ является величиной m+1 порядка малости.



2.7. Главная нормаль и соприкасающаяся плоскость

Определение 16. Вектором главной нормали бирегулярной кривой в натуральной параметризации называется

$$\bar{n}(s) = \frac{\bar{r}''(s)}{|\bar{r}''(s)|} = \frac{\bar{r}''(s)}{k(s)}$$

Утверждение 8. В натуральной параметризации вектор кривизны (вектор ускорения) ортогонален вектору скорости. В частности, вектор главной нормали ортогонален вектору скорости.

Доказательство: В натуральной параметризации выполнено условие:

$$(\bar{v}(s), \bar{v}(s)) = 1.$$

Продифференцируем его:

$$(\bar{v}(s), \bar{k}(s)) + (\bar{k}(s), \bar{v}(s)) = 0 \Leftrightarrow 2(\bar{v}(s), \bar{k}(s)) = 0 \Leftrightarrow \bar{v}(s) \perp \bar{k}(s).$$

Определение 17. Линейная оболочка вектора скорости и вектора главной нормали называется соприкасающейся плоскостью.

Утверждение 9. Соприкасающаяся плоскость не зависит от параметризации.

Доказательство: Перейдем от некоторого регулярного параметра t к натуральному параметру s:

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}(s)}{ds}\frac{ds}{dt}; \qquad \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}(s)}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\bar{r}(s)}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

Из первого видно, что все вектора скорости коллинеарны. А из последнего видно, что вектор ускорения в любой регулярной параметризации является линейной комбинацией вектора ускорения и вектора скорости в натуральной параметризации, а значит, принадлежит соприкасающейся плоскости. ■

Утверждение 10. Точка на регулярной кривой является точкой спрямления тогда и только тогда, когда вектор скорости коллинеарен вектору ускорения.

Доказательство: В точке спрямления кривизна равна нулю, а значит и ускорение в натуральной параметризации равно нулю. Из последней формулы утверждения 9 следует, что ускорение в любой другой параметризации коллинеарно вектору скорости



в натуральном параметре, а значит и вектору скорости в любой другой регулярной параметризации.

Обратно. Если вектор ускорения в регулярной параметризации коллинеарен вектору скорости, то первое слагаемое также должно быть ему коллинеарно, но это невозможно в силу ортогональности вектора ускорения и вектора скорости в натуральной параметризации, а значит обязан быть равен нулю (так как этой составляющей не должно быть). ■

В школьном курсе точки спрямления назывались точками перегиба. По одну сторону от этой точки, ускорения "уводит" вектор скорости в одном направлении, а по другую сторону, вектор скорости уже должен поворачиваться в "другую" сторону, а значит ускорение должно "изменить" полуплоскость. А промежуточным значением должен быть 0.

2.8. Соприкасающаяся окружность

Определение 18. Соприкасающейся окружностью называется окружность в соприкасающейся плоскости радиуса $R(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$ и центром в точке:

$$\bar{r} = \bar{r}(s_0) + R(s_0)\bar{n}(s_0).$$

В качестве упражнения: доказать, что кривизна окружности радиуса R равна 1/R; доказать, что если кривая имеет постоянную кривизну, то это либо прямая, либо окружность; доказать, что соприкасающаяся окружность получается проведением окружности через три заданные точки, лежающие в окрестности данной точки, и устремлением их в данную.

Утверждение 11. Соприкасающаяся окружность - это единственная окружность в \mathbb{R}^n , которая имеет порядок соприкосновения равный двум.

Доказательство: Согласно определению 15, нужно построить окружность с условиями:

$$\bar{r}_1(s_0) = \bar{r}_2(s_0), \quad \bar{r}_1'(s_0) = \bar{r}_2'(s_0), \quad \bar{r}_1''(s_0) = \bar{r}_2''(s_0),$$

где $r_1(s)$ - данная кривая, а $r_2(s)$ - искомая окружность.

Отметим, что в натуральном параметре главная нормаль направлена к центру окружности. Исходя из определения соприкасающейся окружности следует, что она проходит через точку $\bar{r}_1(s_0)$, таким образом первое условие выполнено. Так как центр соприкасающейся окружности строится через вектор главной нормали кривой $\bar{n}(s)$, то он является главной нормалью в данной точке и для соприкасающейся окружности (направлен к центру и имеет длину 1). Так как соприкасающаяся окружность



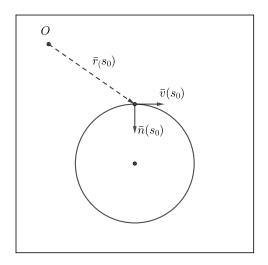


Рис. 5.

лежит в соприкасающейся плоскости, а вектор скорости ортогонален главной нормали в натуральном параметре, то для его выбора есть всего две возможности, которые коллинеарны вектору скорости кривой в данной точке (так как последний лежит в соприкасающейся плоскости и ортогонален вектор главной нормали $\bar{n}(s)$). Если вектора скорости не совпадают, то достаточно сменить натуральный параметр, например, на окружности на ему противоположный по знаку. Выходит, что соприкасающаяся окружность имеет порядок соприкосновения равный двум.

Единственность. Пусть $\bar{r}(s)$ - некоторая окружность на плоскости. Если мы задаем условие $\bar{r}(s_0) = \bar{r}_0(s_0)$ (то есть задали точку, через которую хотим, чтобы она проходила), тогда таких окружностей бесконечно много (Рис. 6). Добавим условие $\bar{r}'(s_0) = \bar{r}'_0(s_0)$, тогда таких окружностей останется всего две (Рис. 7). Третье условие для $\bar{r}''(s_0) = \bar{r}''_0(s_0)$ одназночно определяет искомую окружность, так как кривизна соприкасающейся окружности совпадает с кривизной кривой в точке $\bar{r}''(s_0) = k(s_0)\bar{n}(s_0)$. Таким образом, эти три условия однозначно определяют окружность. \blacksquare

Соприкасающаяся окружность демонстрирует геометрический смысл кривизны кривой в точке. О том, как еще можно трактовать кривизну, узнаем на следующей лекции.



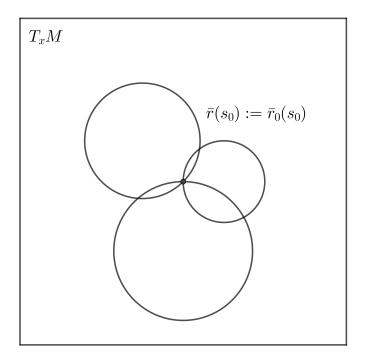


Рис. 6.

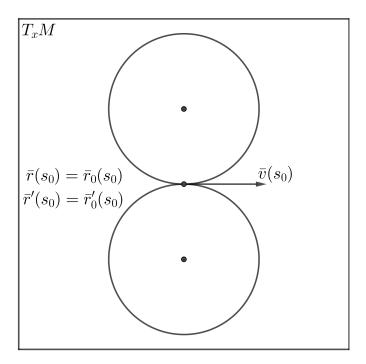


Рис. 7.

3. Плоские кривые

3.1. Геометрический смысл кривизны кривой в точке

Рассмотрим вектора скорости в точках s и $s+\Delta s$ (Рис. 8). Разложим в ряд Тейлора:

$$\bar{r}'(s+\Delta s) = \bar{r}'(s) + \bar{r}''(s)\Delta s + \bar{\bar{o}}(\Delta s) \Leftrightarrow \frac{\bar{r}'(s+\Delta s) - \bar{r}'(s)}{\Delta s} = \bar{r}''(s) + \bar{\bar{o}}(1).$$

В числителе последней дроби стоит вектор \bar{AB} (Рис. 8), длина которого при $\Delta s \to 0$ с точностью до бесконечно малой не отличается от длины дуги окружности, стягиваемой точками A и B, то есть от угла $\Delta \varphi$ между векторами $\bar{r}'(s+\Delta s)$ и $\bar{r}'(s)$ (так как окружность единичного радиуса). Таким образом, получаем:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\bar{r}'(s + \Delta s) - \bar{r}'(s)}{\Delta s} \right| = \varphi'(s),$$

что совместно с первым окончательно дает

$$|\bar{r}''(s)| = \varphi'(s).$$

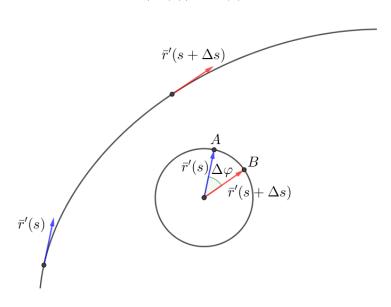


Рис. 8.

То есть еще один геометрической смысл кривизны кривой в точке заключается в скорости вращения вектора скорости кривой.

3.2. Кривизна кривой в произвольной параметризации

Найдем формулу, выражающую вектор кривизны и саму кривизну в произвольной параметризации. Пусть дана регулярная кривая в произвольной параметризации $\bar{r}(t)$. Натуральный параметр определяется соотношением $ds = |\dot{\bar{r}}(t)| \, dt$. Выразим



вектор скорости и вектор ускорения, записанный в натуральном параметре, через произвольный параметр t:

$$\bar{r}' = \dot{\bar{r}} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\bar{r}} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dot{\bar{r}} \cdot \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|} = \frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|};$$

$$\bar{r}'' = \frac{d}{ds} \left(\bar{r}'\right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|}\right) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\ddot{\bar{r}} |\dot{\bar{r}}| - \dot{\bar{r}} |\dot{\bar{r}}|^{\bullet}}{|\dot{\bar{r}}|^{2}} \cdot \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|}.$$

Вычислим отдельно $|\dot{\bar{r}}|^{\bullet}$:

$$|\dot{r}|^2 = (\dot{r}, \dot{r}) \Leftrightarrow 2 |\dot{r}| |\dot{r}|^{\bullet} = 2 (\dot{r}, \ddot{r}) \Leftrightarrow |\dot{r}|^{\bullet} = \frac{(\dot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}|}.$$

Подставляя в предыдущее, имеем:

$$\bar{r}'' = \frac{\ddot{\bar{r}} \, |\dot{\bar{r}}| - \dot{\bar{r}} \frac{\left(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}\right)}{\left|\dot{\bar{r}}\right|}}{\left|\dot{\bar{r}}\right|^2} \cdot \frac{1}{\left|\dot{\bar{r}}\right|} = \frac{\ddot{\bar{r}} \, |\dot{\bar{r}}|^2 - \dot{\bar{r}} \, (\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}})}{\left|\dot{\bar{r}}\right|^4} = \frac{\ddot{\bar{r}} \, (\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}}) - \dot{\bar{r}} \, (\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}})}{\left(\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}}\right)^2}.$$

Для того, чтобы найти кривизну, нужно найти длину \bar{r}'' . Для удобства, вычислим скалярный квадрат, $\varphi = \angle \left(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}} \right)$:

$$(k(t))^{2} = (\bar{r}'', \bar{r}'') = \frac{(\ddot{r}(\dot{r}, \dot{r}) - \dot{r}(\dot{r}, \dot{r}) , \ddot{r}(\dot{r}, \dot{r}) - \dot{r}(\dot{r}, \ddot{r}))}{(\dot{r}, \dot{r})^{4}} =$$

$$= \frac{(\ddot{r}, \ddot{r}) (\dot{r}, \dot{r})^{2} + (\dot{r}, \dot{r}) (\dot{r}, \ddot{r})^{2} - 2 (\dot{r}, \dot{r}) (\dot{r}, \ddot{r})^{2}}{(\dot{r}, \dot{r})^{4}} = \frac{(\ddot{r}, \ddot{r}) (\dot{r}, \dot{r})^{2} - (\dot{r}, \dot{r}) (\dot{r}, \ddot{r})^{2}}{(\dot{r}, \dot{r})^{4}} =$$

$$= \frac{|\ddot{r}|^{2} |\dot{r}|^{4} - |\dot{r}|^{2} |\dot{r}|^{2} |\ddot{r}|^{2} \cos^{2} \varphi}{|\dot{r}|^{8}} = \frac{|\ddot{r}|^{2} - |\ddot{r}|^{2} \cos^{2} \varphi}{|\dot{r}|^{4}} = \frac{|\ddot{r}|^{2} \sin^{2} \varphi}{|\dot{r}|^{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k(t) = \frac{|\ddot{r}| |\sin \varphi|}{|\dot{r}|^{2}} = \frac{|\dot{r}| |\ddot{r}| |\sin \varphi|}{|\dot{r}|^{3}} = \frac{S(\dot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}|^{3}},$$

где $S\left(\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}}\right)$ -площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\dot{\bar{r}}$ и $\ddot{\bar{r}}$.

Рассмотрим частные случаи этой формулы:

- 1. В случае \mathbb{R}^3 площадь можно вычислить через векторное произведение $S\left(\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}}\right)=|[\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}}]|$;
- 2. В случае \mathbb{R}^2 векторное произведение можно вычислить через соответствующий определитель: $|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]| = |\dot{x}\ddot{y} \ddot{x}\dot{y}|$ и формула примет вид:

$$k(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}};$$

3. Если кривая на плоскости задана функционально y=f(x), то в качестве параметра можно взять x :

$$k(t) = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}};$$
22





3.3. Кривые на плоскости. Кривизна со знаком. Коориентация

Рассмотрим регулярную кривую на плоскости в натуральном параметре. На участках бирегулярности задан вектор $\bar{n}(s)$. На плоскости мы всегда можем рассмотреть прямую ортогональную вектору скорости. Тогда для вектора нормали есть два варианта. То есть вектор кривизны определен с точностью до знака с помощью кривизны. Оказывается, что в случае плоских кривых можно и удобно ввести понятие кривизны со знаком.

Из математического анализа известно понятие ориентации. Ввести ориентацию на кривой означает выбрать поле скоростей гладко зависимое от точки. Таких направлений всего два. Если выбрано поле скоростей и выборано поле нормалей (также гладко зависимое от точки на участках бирегулярности), то в натуральном параметре пара векторов $\{\bar{v}(s), \bar{n}(s)\}$ образует ортогональный базис для всей плоскости в каждой точке, при этом его ориентация, в силу фиксации выбора полей скоростей и нормалей, в каждой точке одинакова.

Определение 19. Когда на кривой в натуральном параметре выбрано поле скоростей и поле нормалей, гладко зависимых от точки на участках бирегулярности, то говорят, что на кривой выбрана коориентация.

Кривизна кривой определялась как длина вектора ускорения в натуральном параметре. Теперь, чтобы для выбранной коориентации сохранялось соотношение

$$\bar{r}''(s) = k(s)\bar{n}(s),$$

нужно определить кривизну со знаком. Откуда она берется? На Рис.9 изображены главные нормали, а на Рис.10 выбрана коориентация. Таким образом, чтобы обобщить это соотношение для коориентации, нужно рассматривать со знаком минус кривизну в тех точках, где вектор поля нормалей противоположен вектору главной нормали, а там, где они сонаправлены, оставить кривизну без изменений. Обозначим через \bar{n}_g поле главных нормалей, а через K(s)-кривизну со знаком, которая формально определяется так:

$$K(s)=k(s)\cdot(\bar{n},\bar{n}_g)=\left\{egin{array}{ll} k(s), & \mbox{если} & \bar{n}=\bar{n}_g, \\ -k(s), & \mbox{если} & \bar{n}=-\bar{n}_g. \end{array}
ight.$$

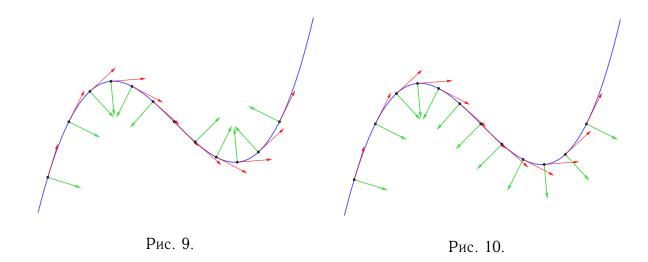
Таким образом, соотношение для поля главных нормалей может быть обобщено для коориентации следующим образом:

$$\bar{r}''(s) = k(s)\bar{n}_g(s) = |K(s)|\,\bar{n}_g(s) = K(s)\bar{n}(s).$$

В точках спрямления поле нормалей можно доопределить таким единичным вектором ортоганальным вектору скорости в этой точке, чтобы их ориентация совпадала







с ориентацией в точках с отличной от нуля кривизной, и тогда поле нормалей будет гладко зависимо от точки на множестве определения бирегулярной кривой.

Конструкция коориентации очень важна для последующих рассуждений, в частности, для криволинейных систем координат, так как базис должен сохранять свою ориентацию в каждой точке.

3.4. Репер и уравнения Френе для плоской кривой

Определение 20. Если на бирегулярной кривой выбрана коориентация, то базис $\{\bar{v}(s), \bar{n}(s)\}$ называется репером Френе.

Далее нам будет интересно понять, как ведет себя базис Френе в зависимости от точки, то есть изучить поведение его производных. Уравнения, которые получатся в результате, называются деривационными уравнениями или уравнениями Френе в случае плоскости.

Для вектора скорости мы уже знаем как выражается его производная (везде под k(s) понимается кривизна со знаком):

$$\bar{v}'(s) = k(s)\bar{n}(s).$$

Остается найти разложение по базису для производной нормали:

$$\bar{n}'(s) = \alpha(s)\bar{v}(s) + \beta(s)\bar{n}(s).$$

Для того, чтобы определить коэффициенты, следует воспользоваться соотношениями:

$$(\bar{v}(s), \bar{n}(s)) = 0, \quad (\bar{v}(s), \bar{v}(s)) = (\bar{n}(s), \bar{n}(s)) = 1,$$



продифференцируем первое:

$$(\bar{v}'(s), \bar{n}(s)) + (\bar{v}(s), \bar{n}'(s)) = 0 \Leftrightarrow (k(s)\bar{n}(s), \bar{n}(s)) + (\bar{v}(s), \alpha(s)\bar{v}(s) + \beta(s)\bar{n}(s)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k(s)(\bar{n}(s), \bar{n}(s)) + \alpha(s)(\bar{v}(s), \bar{v}(s)) + \beta(s)(\bar{v}(s), \bar{n}(s)) = 0 \Leftrightarrow k(s) \cdot 1 + \alpha(s) \cdot 1 + \beta(s) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha(s) = -k(s).$$

Чтобы найти $\beta(s)$ нужно продифференцировать последнее соотношение:

$$(\bar{n}(s), \bar{n}(s))' = 1' \Leftrightarrow (\bar{n}(s), \bar{n}'(s)) = 0 \Leftrightarrow (\bar{n}(s), \alpha(s)\bar{v}(s) + \beta(s)\bar{n}(s)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha(s)(\bar{n}(s), \bar{v}(s)) + \beta(s)(\bar{n}(s), \bar{n}(s)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) \cdot 0 + \beta(s) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \beta(s) = 0.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}'(s) = k(s)\bar{n}(s), \\ \bar{n}'(s) = -k(s)\bar{v}(s); \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \bar{v}(s) \\ \bar{n}(s) \end{array} \right)' = \left(\begin{array}{ll} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \bar{v}(s) \\ \bar{n}(s) \end{array} \right).$$

Тот факт, что получаенная матрица с кривизной является кососимметрической, не случаен. Для этого рассмотрим более общую ситуацию.

3.5. Деривационные уравнения в \mathbb{R}^n

Пусть в \mathbb{R}^n задана бирегулярная кривая в натуральной параметризации. Допустим, что в каждой точке этой задан ортонормированный базис $\{\bar{v}_1(s),...,\bar{v}_n(s)\}$. Рассмотрим этот базис в точке s+t, где t-малый параметр, и в точке s. Так как в обеих точках базисы ортонормированы, то естественно они связаны между собой некоторым ортогональным преобразованием B(s,t):

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} (s+t) = B(s,t) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} (s), \quad B \cdot B^T = E, \quad B(s,0) = E.$$

Продифференцируем условие ортогональности по t и подставим t=0:

$$B'_{t}(s,0) \cdot B^{T}(s,o) + B(s,0) \cdot (B'_{t}(s,o))^{T} = 0 \Leftrightarrow B'_{t}(s,0) \cdot E + E \cdot (B'_{t}(s,o))^{T} = 0 \Leftrightarrow B'_{t}(s,0) + (B'_{t}(s,o))^{T} = 0 \Leftrightarrow (B'_{t}(s,o))^{T} = -B'_{t}(s,0).$$

То есть матрица $B_t'(s,o)$ является кососимметрической. Продифференцируем теперь базис по t и подставим t=0 :

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}'(s) = B'_t(s,0) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}(s).$$



Таким образом, в деривационных уравнениях матрица, связывающая производную репера и сам репер, всегда кососимметрична.

3.6. Восстановление кривой по кривизне

Утверждение 12. Пусть две кривые связаны постоянным ортогональным преобразованием и сдвигом, тогда кривизны и уравнения Френе этих двух кривых совпадают.

Доказательство: Дано $\bar{r}_2(s) = A\bar{r}_1(s) + \bar{r}_0, \ A \in O(2).$ Продифференцировав, получаем

$$\bar{v}_2(s) = A\bar{v}_1(s), \quad \bar{r}_2''(s) = A\bar{r}_1''(s).$$

Так как ортогональное преобразование сохраняет длины, то кривизны таких кривых совпадают. Следовательно, совпадают и нормали, а значит совпадают и уравнения Френе. ■

Утверждение 13. Если две кривые в натуральных параметризациях имеют одинаковую функцию кривизны, то такие кривые можно совместить движением плоскости.

Доказательство: Произведем сдвиг так, чтобы кривые имели общую точку: $\bar{r}_1(0) = \bar{r}_2(0)$. Тогда в этой точке мы будем иметь два набора реперов Френе $\{\bar{v}_1(s), \bar{n}_1(s)\}$ и $\{\bar{v}_2(s), \bar{n}_2(s)\}$. Один набор можно перевести в другой с помощью ортогонального преобразования, при этом одна кривая в этой точке будет связана с другой соотношением из утверждения 12. То есть мы применили это ортогональное преобразования для всей кривой, репер которой переводим в другой. Так как кривизны одинаковы, то уравнения Френе совпадают. По теореме существования и единственности для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (в точке s=0 реперы совпадают (начальные данные совпадают)) во всех точках реперы Френе совпадают. Посколько совпадают вектора скорости, то интегрированием получаем, что одна кривая может отличаться от другой на сдвиг, но мы требовали общую точку, значит они полностью совпадают.

Из утверждения 13 кривизну кривой можно интерпретировать как геометрический инвариант кривой.

Утверждение 14. Для гладкой функци k(s) существует регулярная коориентированная кривая.





Доказательство: Рассмотрим некоторую точку $s=s_0$ на плоскости и некоторый ортонормированный репер в этой точке. Тогда система уравнений Френе с этими начальными данными дает единственное решение. Надо доказать, что решение представляет собой ортонормированный репер.

Введем вспомогательные функции и продифференцируем их

$$\begin{cases} a(s) = (\bar{v}, \bar{v}) - 1, & a(s_0) = 0, \\ b(s) = (\bar{v}, \bar{n}), & b(s_0) = 0, \\ c(s) = (\bar{n}, \bar{n}) - 1, & c(s_0) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'(s) = 2(\bar{v}, \bar{v}'), \\ b'(s) = (\bar{v}', \bar{n}) + (\bar{v}, \bar{n}'), \\ c'(s) = 2(\bar{n}, \bar{n}'); \end{cases}$$

Так как \bar{v} и \bar{n} решения уравнений Френе, то заменим их производные в данной системе:

$$\begin{cases} a'(s) = 2(\bar{v}, k\bar{n}) = 2kb(s), \\ b'(s) = (k\bar{n}, \bar{n}) + (\bar{v}, -k\bar{n}) = k(c(s) - a(s)), \\ c'(s) = 2(\bar{n}, -k\bar{v}) = -2kb(s); \end{cases}$$

Полученная система является системой обыкновенных однородных дифференциальных уравнений с начальными условиями $a(s_0)=b(s_0)=c(s_0)=0$. Заметим, что у данной системы есть тождественно нулевое решение, удовлетворяющее начальным данным. А по теореме о существовании и единственности решения других решений нет, таким образом получаем, что все введенные функции тождественно нулевые, а это значит, что $\{\bar{v}, \bar{n}\}$ -ортонормированный репер в каждой точке кривой.

Интегрированием вектора скорости получаем радиус-вектор искомой кривой. Данная кривая имеет вектором скорости и вектором нормали соответственно вектора $\{\bar{v},\bar{n}\}$, которые удовлетворяют изначально рассмотренной системе уравнений Френе, то есть кривизна данной кривой совпадает с функцией k(s).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть задана гладкая функция k(s) от некоторого натурального параметра. Тогда существует единственная с точностью до движения регулярная коориентировання кривая, кривизна которой совпадает с функцией k(s).

Следует отметить, что если отказаться от коориентации и рассматривать кривизну как неотрицательную величину, то нет однозначность? можно симметрично пойти в разные стороны (Рис.11). Поэтому в таком случае следует обязательно накладывать условие k(s)>0.

3.7. Явные формулы восстановления кривой по кривизне для \mathbb{R}^2 . Натуральные уравнения

Если задана функция кривизны, то уравнения Френе, по которым следует восстанавливать радиус-вектор кривой, называются натуральными уравнениями.







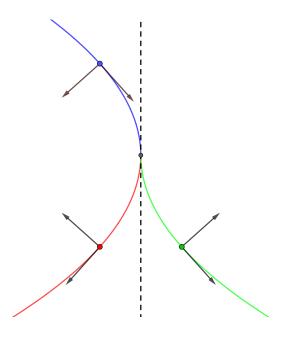


Рис. 11.

Пусть мы рассматриваем кривую в натуральной параметризации на плоскости $\bar{r}(s) = (x(s), y(s))$. Тогда вектор скорости и кривизны примут вид:

$$\bar{r}'(s) = (x'(s), y'(s)) \,, \quad \bar{r}''(s) = (x''(s), y''(s)) \,.$$

Так как длина вектора скорости равна 1, то введя угол $\alpha(s)$ между вектором скорости и первым ортом, получим:

$$\bar{r}'(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))), \quad \bar{r}''(s) = (-\alpha'(s)\sin(\alpha(s)), \alpha'(s)\cos(\alpha(s))) =$$
$$= \alpha'(s) (-\sin(\alpha(s)), \cos(\alpha(s))) = \alpha'(s)\bar{n}(s).$$

Следовательно получаем, что $k(s) = \alpha'(s)$. Отсюда находим:

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} k(s)ds, \quad x(s) = \int_{s_0}^{s} \cos(\alpha(s))ds, \quad y(s) = \int_{s_0}^{s} \sin(\alpha(s))ds.$$



4. Эволюта и эвольвента. Пространственные кривые

4.1. Коэффициент вращения для замкнутой кривой

Пусть мы рассматриваем замкнутую кривую γ (возможно с самопересечениями) в натуральной параметризации. Замкнутую кривую следует рассматривать как образ гомеоморфизма окружности на плоскость. Пусть точка s_0 не является точкой самопересечения, а при s_1 мы снова попадем в эту точку, то есть, пройдя по всей кривой, мы вернемся в эту точку. Таким образом s_1-s_0 -длина кривой.

Из выше сказанного получаем, что $\bar{r}(s_0) = \bar{r}(s_1)$ и $\bar{v}(s_0) = \bar{v}(s_1)$. Но вектор скорости на плоскости можно представить как $\bar{v}(s) = (\cos{(\alpha(s))}, \sin{(\alpha(s))})$. Тогда последнее условие перепишется в виде системы

$$\begin{cases} \cos(\alpha(s_0)) = \cos(\alpha(s_1)) \\ \sin(\alpha(s_0)) = \sin(\alpha(s_1)) \end{cases} \Leftrightarrow \alpha(s_1) = \alpha(s_0) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

На прошлой лекции мы получили условие

$$\alpha'(s) = k(s) \Leftrightarrow \alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^{s} k(s)ds;$$

подставляя в него $s=s_1$ и $\alpha(s_1)$ из предыдущего равенства, получаем важное соотношение

$$\int\limits_{s_0}^{s_1} k(s)ds = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int\limits_{\gamma} k(s)ds = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Число m называется коэффициентом вращения для замкнутой кривой.

4.2. Эволюта

Определение 21. Эволютой бирегулярной кривой в натуральной параметризации называется кривая, описываемая центром кривизны (центром соприкасающейся окружности), то есть

$$\bar{r}_1(s) = \bar{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\bar{n}(s).$$

Важно отметить, что параметр s для эволюты не является натуральным. Посмотрим, когда эволюта является регулярной кривой, для этого продифференцируем по параметру и применим формулы Φ рене:

$$\bar{r}'_1(s) = \bar{r}'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\bar{n}(s) + \frac{1}{k(s)}\bar{n}'(s) =$$



$$= \bar{v}(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)} \bar{n}(s) + \frac{1}{k(s)} \left(-k(s) \bar{v}(s) \right) = -\frac{k'(s)}{k^2(s)} \bar{n}(s).$$

Таким образом, регулярность имеет место при условии $k'(s) \neq 0$. Также отсюда легко находится натуральный параметр на участках k'(s) > 0 для эволюты:

$$\tilde{s} = \int |\bar{r}'_1(s)| \, ds = \int \left| \frac{k'(s)}{k^2(s)} \right| \, ds = \int \frac{d(k(s))}{k^2(s)} = -\frac{1}{k(s)} + C.$$

В качестве примера рассмотрим Рис. 12. В точках A_i , i=1...7 эллипса проведены нормали. Кривая, которая касается (красным цветом) этого множества нормалей есть огибающая, она же является эволютой. Полная эволюта для эллипса есть астроида (часть красным и часть синим пунктиром).

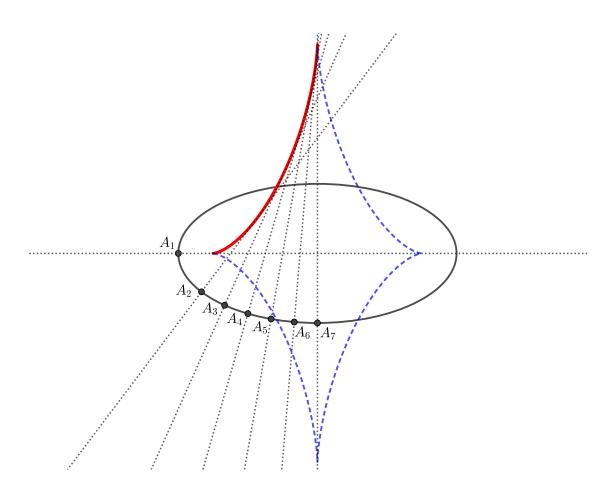


Рис. 12.

Теорема 4. Кривая γ является эволютой бирегулярной кривой тогда и только тогда, когда является огибающей поля нормалей, то есть касается соответствующих нормалей.



Доказательство: Если кривая является эволютой, то ее вектор скорости, как было показано выше, коллинеарен вектору главной нормали исходной кривой, то есть эволюта касается поля нормалей.

Теперь пусть кривая касается поля нормлей кривой, докажем, что это обязательно эволюта. Как строится наша огибающая: нужно от точки $\bar{r}(s)$ вдоль нормали пройти некоторое расстояние $\lambda(s)$ до точки на огибающей:

$$\bar{\rho}(s) = \bar{r}(s) + \lambda(s)\bar{n}(s).$$

Осталось воспользоваться вторым условием: в этой точке, огибающая обязана касаться нормали, то есть вектор скорости должен быть коллинеарен вектору нормали:

$$\bar{\rho}'(s) = \bar{r}'(s) + \lambda'(s)\bar{n}(s) + \lambda(s)\bar{n}'(s) = \bar{v}(s) + \lambda'(s)\bar{n}(s) - \lambda(s)k(s)\bar{v}(s) \Rightarrow$$

(в силу независимости векторов $\bar{v}(s)$ и $\bar{n}(s)$)

$$\Rightarrow 1 - \lambda(s)k(s) = 0 \Leftrightarrow \lambda(s) = \frac{1}{k(s)}.$$

То есть вектор $\bar{\rho}(s)$ описывает эволюту.

4.3. Эвольвента

Определение 22. Эвольвентой бирегулярной кривой γ называется кривая α , для которой γ является эволютой.

Эвольвента неоднозначно определяется по кривой в отличии от эволюты.

Теорема 5. Следующие утверждения эквиваленты:

- 1. Кривая α является ортогональной траекторией к касательным кривой γ .
- 2. На кривой γ в натуральной параметризации выберем точку s_0 и касательную в ней. Поворачиваем эту касательную без проскальзывания вдоль кривой. Тогда траектория точки s_0 , зафиксированная изначально на касательной, опишет кривую, которая является эвольвентой. Так как точка s_0 была произвольна, то множество таких представляет собой однопараметрическое семейство.

Доказательство: Докажем для начала $2 \Rightarrow 1$. Запишем радиус-вектор кривой, получающейся при повороте касательной без проскальзывания вдоль кривой (Рис. 13):

$$\tilde{\bar{r}}(s) = \bar{r}(s) - (s - s_0)\,\bar{r}'(s) \Rightarrow \tilde{\bar{r}}'(s) = \bar{r}'(s) - (s - s_0)\,\bar{r}''(s) = -(s - s_0)\,\bar{r}''(s).$$



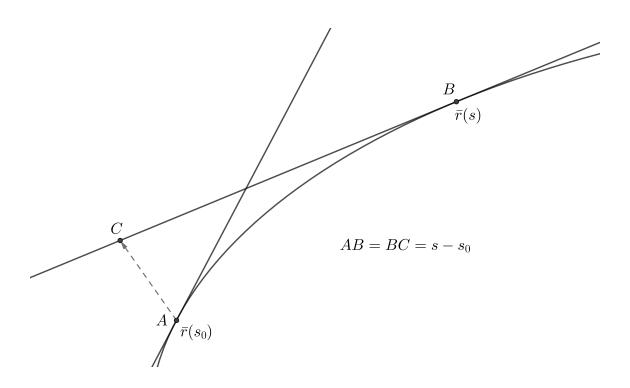


Рис. 13.

Из последнего мы видим, что вектор скорости данной кривой коллинеарен вектору ускорения кривой, а значит ортогонален вектору скорости кривой в каждой точке. Таким образом, построенная кривая ортогональна касательным кривой γ .

Вектор $\tilde{r}(s)$ на самом деле зависит не только от s, но и от параметра s_0 , то есть это однопараметрическое семейтсво кривых.

 $1\Rightarrow 2$. Так как кривая α является ортогональной к каждой касательной кривой γ , то она их и пересекает, то есть на каждой касательной есть точка, принадлежащая кривой α . Таким образом, чтобы попасть в эту точка, сначала нужно попасть в точку $\bar{r}(s)$ и пройти по касательной некоторое расстояние f(s):

$$\tilde{\bar{r}}(s) = \bar{r}(s) + f(s)\bar{r}'(s).$$

Вторым условием является то, что кривая ортогональна в этой точке касательной, то есть вектор скорости в этой точке ортогонален вектору скорости кривой γ . Вычислим вектор скорости кривой α и потребуем, чтобы скалярное произведение с вектором скорости кривой γ равнялось 0:

$$\tilde{r}'(s) = \bar{r}'(s) + f'(s)\bar{r}'(s) + f(s)\bar{r}''(s),$$

$$0 = (\tilde{r}'(s), \bar{r}'(s)) = (\bar{r}'(s) + f'(s)\bar{r}'(s) + f(s)\bar{r}''(s), \bar{r}'(s)) =$$

$$= (\bar{r}'(s), \bar{r}'(s)) + f'(s)(\bar{r}'(s), \bar{r}'(s)) + f(s)(\bar{r}''(s), \bar{r}'(s)) = 1 + f'(s) \Leftrightarrow$$

$$32$$





$$\Leftrightarrow f'(s) = -1 \Leftrightarrow f(s) = -s + s_0.$$

Подставляя последнее равенство в $\tilde{\bar{r}}(s)$, получаем:

$$\tilde{\bar{r}}(s) = \bar{r}(s) - (s - s_0)\,\bar{r}'(s),$$

что совпадает с уравнением полученным для кривой, описанной при доказательстве $2 \Rightarrow 1. \blacksquare$

Теорема 6. Если кривая α является ортогональной траекторией к касательным кривой γ , то γ является для α эволютой.

Доказательство: Пусть s-натуральный параметр на кривой $\alpha: \bar{r}(s)$. Построим кривую $\gamma:$ нужно из точки $\bar{r}(s)$ пройти некоторое расстояние f(s) до точки касания вдоль касательной к кривой $\gamma:$

$$\bar{\gamma}(s) = \bar{r}(s) + f(s)\bar{n}(s).$$

Осталось потребовать ортогональность кривой α касательным кривой γ , то есть потребовать ортогональность вектора скорости кривой $\bar{\gamma}(s)$ вектору скорости кривой α :

$$0 = (\bar{\gamma}'(s), \bar{r}'(s)) = (\bar{r}'(s) + f'(s)\bar{n}(s) + f(s)\bar{n}'(s), \bar{r}'(s)) =$$

$$= (\bar{r}'(s), \bar{r}'(s)) + f'(s)(\bar{n}(s), \bar{r}'(s)) - k(s)f(s)(\bar{r}'(s), \bar{r}'(s)) \Leftrightarrow 0 = 1 - k(s)f(s) \Leftrightarrow f(s) = \frac{1}{k(s)}.$$

Таким образом, вектор $\bar{\gamma}(s)$ совпадает с определением эволюты для кривой α .

4.4. Кривые в \mathbb{R}^3

Рассматриваем бирегулярную кривую $\bar{r}(s)$ в натуральной параметризации. В каждой точке определены вектор скорости $\bar{v}(s)$ и вектор главной нормали $\bar{n}(s)$. Достроим эту пару до базиса всего пространства с помощью вектора $\bar{b}(s)$, определяющегося естественным образом:

$$\bar{b}(s) = [\bar{v}(s), \bar{n}(s)]$$

и называющегося вектором бинормали кривой.

Тройка векторов $\left\{ \bar{v}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s) \right\}$ называется *репером Френе* пространственой кривой. Из определения бинормали следует, что репер Френе всегда имеет одну и ту же ориентацию. Но определяется он неоднозначно, так как вектор скорости при смене параметризации s на -s меняется на противоположный и тогда вектор бинормали также меняется на противоположный. При этом ориентация сохраняется. При такой замене не меняется только вектор главной нормали.



Далее рассмотрим деформацию репера Френе вдоль кривой, то есть уравнения Френе:

$$\begin{pmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{n}(s) \\ \bar{b}(s) \end{pmatrix}' = B(s) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{n}(s) \\ \bar{b}(s) \end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что $\bar{v}'(s) = k(s)\bar{n}(s)$ и, как обсуждалось на прошлой лекции, матрица B(s) является кососимметричной, то есть:

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \alpha(s) \\ 0 & -\alpha(s) & 0 \end{pmatrix},$$

где æ(s) некоторая функция, называющаяся *кручением* пространственной кривой.

Определить матрицу B(s) можно было (аналогично плоскому случаю) и использовав разложения по базису и соответствующие условия на скалярные произведения:

$$\begin{cases} \bar{v}'(s) = k(s)\bar{n}(s) \\ \bar{n}'(s) = \alpha(s)\bar{v}(s) + \beta(s)\bar{b}(s) \end{cases}, \begin{cases} (\bar{v},\bar{v}) = (\bar{n},\bar{n}) = (\bar{b},\bar{b}) = 1 \\ (\bar{v},\bar{n}) = (\bar{v},\bar{b}) = (\bar{n},\bar{b}) = 0. \end{cases}$$

Важно подчеркнуть, что уравнения Френе следует рассматривать исключительно на участках бирегулярности, в противном случае, могут появиться недоразумения. Утверждение 15. Бирегулярная пространственная кривая плоская на некотором интервале тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}(s) = 0$ на этом интервале.

Доказательство: Если кривая $\bar{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$ принадлежит некоторой плоскости $(\bar{n}_0,\bar{r}(s))=A_0\in\mathbb{R},$ то продифференцировав один и два раза, получим, соответственно, что вектора скорости и главной нормали лежат в этой плоскости. Если трижды продифференцировать, то получим условие $\mathbf{æ}(s)\left(\bar{n}_0,\bar{b}(s)\right)=0.$ Но скалярное произведение нулю равняться не может в силу определения $\bar{b}(s)$, а значит $\mathbf{æ}(s)=0.$ Более того, что $\bar{b}(s)=\pm\bar{n}_0.$

Иначе говоря, если кривая плоская, тогда вектор бинормали постоянен для такой плоскости. Тогда его производная равна нулю, а из уравнений Френе следует, что $0 = \bar{b}'(s) = - \Re(s) \bar{n}(s) \Leftrightarrow \Re(s) = 0.$

Если же æ(s)=0, то из того же уравнения получаем, что $\bar{b}'(s)=0 \Leftrightarrow \bar{b}(s)=b=const$, следовательно $\left(\bar{b},\bar{r}'(s)\right)=0 \Leftrightarrow \left(\bar{b},\bar{r}(s)\right)=A_0 \in \mathbb{R}$, то есть кривая лежит в некоторой плоскости с нормалью b.



4.5. Геометрический смысл кручения

Рассмотрим вектор бинормали в точках s и $s+\Delta s$ и их разность:

$$\bar{b}(s + \Delta s) - \bar{b}(s) = \bar{b}'(s)\Delta s + \bar{\bar{o}}(\Delta s)$$
.

Вектора $\bar{b}(s+\Delta s)$ и $\bar{b}(s)$ являются единичными, а угол между ними $\Delta \varphi$ с точностью до бесконечно малых равен длине их разности:

$$\Delta \varphi = \left| \bar{b}(s + \Delta s) - \bar{b}(s) \right| + \bar{\bar{o}}(\Delta s) = \left| \bar{b}'(s) \Delta s + \bar{\bar{o}}(\Delta s) \right| + \bar{\bar{o}}(\Delta s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \left| \bar{b}'(s) + \bar{\bar{o}}(1) \right| + \bar{\bar{o}}(1) \Leftrightarrow \varphi'(s) = \left| \bar{b}'(s) \right| = \left| \mathbf{æ}(s) \right|.$$

То есть кручение пространственной кривой есть скорость вращения соприкасающейся плоскости.

Определение 23. Плоскость, натянутая на вектора $\bar{n}(s)$ и $\bar{b}(s)$, называется нормальной плоскостью.

Плоскость, натянутая на вектора $\bar{v}(s)$ и $\bar{b}(s)$, называется спрямляющей плоскостью.

4.6. Вектор Дарбу

Определение 24. Вектором Дарбу $\bar{w}(s)$ называется вектор вдоль кривой, с помощью которого уравнения Френе могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{v}'(s) = [\bar{w}(s), \bar{v}(s)] \\ \bar{n}'(s) = [\bar{w}(s), \bar{n}(s)] \\ \bar{b}'(s) = [\bar{w}(s), \bar{b}(s)] \end{cases}.$$

Утверждение 16. Вектор Дарбу существует в каждой точке.

Доказательство: Предположим, что такой вектор существует, тогда разложим его по базису Френе $\bar{w}(s) = \alpha(s)\bar{v}(s) + \beta(s)\bar{n}(s) + \gamma(s)\bar{b}(s)$ и подставим в первое уравнение Дарбу:

$$\bar{v}'(s) = \left[\alpha(s)\bar{v}(s) + \beta(s)\bar{n}(s) + \gamma(s)\bar{b}(s), \bar{v}(s)\right] =$$

$$= \alpha(s)\left[\bar{v}(s), \bar{v}(s)\right] + \beta(s)\left[\bar{n}(s), \bar{v}(s)\right] + \gamma(s)\left[\bar{b}(s), \bar{v}(s)\right] = -\beta(s)\bar{b}(s) + \gamma(s)\bar{n}(s).$$

С другой стороны, выполнены уравнения Френе, откуда следует, что $\beta(s)=0$ и $\gamma(s)=k(s)\Rightarrow \bar{w}(s)=\alpha(s)\bar{v}(s)+k(s)\bar{b}(s)$. Теперь подставим во второе уравнение:

$$\bar{n}'(s) = \left[\alpha(s)\bar{v}(s) + k(s)\bar{b}(s), \bar{n}(s)\right] = \alpha(s)\left[\bar{v}(s), \bar{n}(s)\right] + k(s)\left[\bar{b}(s), \bar{n}(s)\right] = \alpha(s)\bar{b}(s) - k(s)\bar{v}.$$



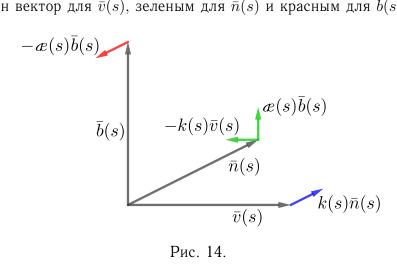


Аналогично из уравнений Френе получае $\alpha(s) = \alpha(s) \Rightarrow \bar{w}(s) = \alpha(s)\bar{v}(s) +$ $k(s)\bar{b}(s)$. Осталось проверить выполнение третьего уравнения Дарбу для такого вектора:

$$\begin{split} \bar{b}'(s) &= \left[\bar{w}(s), \bar{b}(s)\right] = \left[\mathbb{E}(s)\bar{v}(s) + k(s)\bar{b}(s), \bar{b}(s)\right] = \\ &= \mathbb{E}(s)\left[\bar{v}(s), \bar{b}(s)\right] + k(s)\left[\bar{b}(s), \bar{b}(s)\right] = -\mathbb{E}(s)\bar{n}(s), \end{split}$$

что соответствует третьему уравнению Френе. Таким образом, вектор Дарбу существует и определен однозначно.

Геометрический смысл вектора Дарбу заключается в том, что это направляющий вектор мгновенной оси вращения репера Френе, а его длина есть угловая скорость вращения. Вектор Дарбу всегда лежит в спрямляющей плоскости. На Рис. 14 показано какие вектора заставляют изменяться каждый из векторов репера Френе: синим цветом показан вектор для $\bar{v}(s)$, зеленым для $\bar{n}(s)$ и красным для b(s).



4.7. Локальные проекции кривой на соприкасающуюся, нормальную и спрямляющую плоскости

Разложим в ряд Тейлора радиус-вектор бирегулярной кривой:

$$\bar{r}(s+\Delta s) = \bar{r}(s) + \bar{r}'(s)\Delta s + \frac{1}{2}\bar{r}''(s)\Delta s^2 + \frac{1}{6}\bar{r}'''(s)\Delta s^3 + \bar{\bar{o}}(\Delta s^3).$$

Выразим производные радиус-вектора через репер Френе, используя уравнения Френе:

$$\bar{r}'(s) = \bar{v}(s); \qquad \bar{r}''(s) = \bar{v}'(s) = k(s)\bar{n}(s);$$

$$\bar{r}'''(s) = (k(s)\bar{n}(s))' = k'(s)\bar{n}(s) + k(s)\bar{n}'(s) = k'(s)\bar{n}(s) + k(s)\left(-k(s)\bar{v}(s) + \text{æ}(s)\bar{b}(s)\right) =$$

$$= -k^2(s)\bar{v}(s) + k'(s)\bar{n}(s) + k(s)\text{æ}(s)\bar{b}(s).$$



Теперь подставим в разложение ряда Тейлора и перегруппируем по базису Френе:

$$\bar{r}(s + \Delta s) - \bar{r}(s) =$$

$$= \left(\Delta s - \frac{1}{6}k^2(s)\Delta s^3\right)\bar{v}(s) + \left(\frac{1}{2}k(s)\Delta s^2 + \frac{1}{6}k'(s)\Delta s^3\right)\bar{n}(s) + \left(\frac{1}{6}k(s)\varpi(s)\Delta s^3\right)\bar{b}(s) + \bar{\bar{o}}\left(\Delta s^3\right).$$

Теперь рассмотрим поведение проекций кривой на плоскости $\langle \bar{v}(s), \bar{n}(s) \rangle$, $\langle \bar{v}(s), \bar{b}(s) \rangle$ и $\langle \bar{n}(s), \bar{b}(s) \rangle$ при $\Delta s \to 0$, откинув все порядки, что выше минимально возможного в разложении.

Для соприкасающейся плоскости $\langle \bar{v}(s), \bar{n}(s) \rangle$ обозначим черех x и y координатные линии, задаваемые соответственно векторами $\bar{v}(s)$ и $\bar{n}(s)$. Тогда $x=\Delta s, y=\frac{1}{2}k(s)\Delta s^2$ или $y=\frac{1}{2}k(s)x^2$, то есть это парабола.

Для спрямляющей плоскости $\langle \bar{v}(s), \bar{b}(s) \rangle$ обозначим черех x и y координатные линии, задаваемые соответственно векторами $\bar{v}(s)$ и $\bar{b}(s)$. Тогда $x=\Delta s, y=\frac{1}{6}k(s)æ(s)\Delta s^3$ или $y=\frac{1}{6}k(s)æ(s)x^3$, то есть это кубическая парабола.

Для нормальной плоскости $\left\langle \bar{n}(s), \bar{b}(s) \right\rangle$ обозначим черех x и y координатные линии, задаваемые соответственно векторами $\bar{n}(s)$ и $\bar{b}(s)$. Тогда $x=\frac{1}{2}k(s)\Delta s^2, y=\frac{1}{6}k(s)æ(s)\Delta s^3$ или $y^2=\frac{2}{9}\frac{æ^2(s)}{k(s)}x^3,$ то есть это полукубическая парабола.



5. Кривые в пространстве произвольной размерности

5.1. Вычислительные формулы для кручения

Выпишем формулы, полученные для первых трех производных вектора скорости бирегулярной кривой в натуральной параметризации:

$$\bar{r}'(s) = \bar{v}(s); \quad \bar{r}''(s) = k(s)\bar{n}(s); \quad \bar{r}'''(s) = -k^2(s)\bar{v}(s) + k'(s)\bar{n}(s) + k(s)æ(s)\bar{b}(s).$$

Из третьей производной и определения $\bar{b}(s)$ находим, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(s) &= \frac{1}{k(s)} \left(\bar{r}'''(s), \bar{b}(s) \right) = \frac{1}{k(s)} \left(\bar{r}'''(s), [\bar{v}(s), \bar{n}(s)] \right) = \frac{(\bar{r}'(s), \bar{r}''(s), \bar{r}'''(s))}{k^2(s)} = \\
&= \frac{(\bar{r}'(s), \bar{r}''(s), \bar{r}'''(s))}{|\bar{r}''(s)|^2}.
\end{aligned}$$

Теперь найдем формулу в произвольной параметризации.

$$\bar{r}'(s) = \frac{\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|}; \quad \bar{r}''(s) = \frac{\ddot{\bar{r}}\,|\dot{\bar{r}}| - |\dot{\bar{r}}|^{\bullet}\,\dot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|^{2}} \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|}; \quad \Rightarrow \quad [\bar{r}'(s), \bar{r}''(s)] = \frac{[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]}{|\dot{\bar{r}}|^{3}};$$

$$\bar{r}'''(s) = \frac{\left(\ddot{\bar{r}}\,|\dot{\bar{r}}| + \ddot{\bar{r}}\,|\dot{\bar{r}}|^{\bullet} - |\dot{\bar{r}}|^{\bullet\bullet}\,\dot{\bar{r}} - |\dot{\bar{r}}|^{\bullet}\,\dot{\bar{r}}\right)|\dot{\bar{r}}|^{3} - \left(|\dot{\bar{r}}|^{3}\right)^{\bullet}\left(\ddot{\bar{r}}\,|\dot{\bar{r}}| - |\dot{\bar{r}}|^{\bullet}\,\dot{\bar{r}}\right)}{|\dot{\bar{r}}|^{6}} \frac{1}{|\dot{\bar{r}}|}$$

вспомним, что скалярное произведение вектора $[\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}}]$ с векторами $\dot{\bar{r}}$ и $\ddot{\bar{r}}$ равно нулю, таким образом получаем:

$$(\bar{r}'(s), \bar{r}''(s), \bar{r}'''(s)) = ([\bar{r}'(s), \bar{r}''(s)], \bar{r}'''(s)) = \left(\frac{[\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}}]}{|\dot{\bar{r}}|^3}, \bar{r}'''(s)\right) = \left(\frac{[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]}{|\dot{\bar{r}}|^3}, \frac{\ddot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|^3}\right) = \frac{([\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}], \ddot{\bar{r}})}{|\dot{\bar{r}}|^6} = \frac{(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}})}{|\dot{\bar{r}}|^6}.$$

Теперь вспомним, что кривизна кривой в произвольной параметризации вычислялась по формуле:

$$k(s(t)) = \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3}$$

и подставим ее в формулу кручения:

$$\mathfrak{E}(t) = \mathfrak{E}(s(t)) = \frac{(\bar{r}'(s), \bar{r}''(s), \bar{r}'''(s))}{k^2(s)} = \frac{\frac{(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dot{\bar{r}}')}{|\dot{\bar{r}}|^6}}{\frac{|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]|^2}{|\dot{\bar{r}}|^6}} = \frac{(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}})}{|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]|^2}.$$





Вывести данную формулу можно было и проще, если заметить, что выражение $(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}) (dt)^6$ инвариантно относительно параметризации. Это напрямую следует из доказанного, но чисто символьно это получается следующим образом:

$$(d\bar{r}, d^2\bar{r}, d^3\bar{r}) = (\dot{\bar{r}}dt, \ddot{\bar{r}}dt^2, \ddot{\bar{r}}dt^3) = (\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}) dt^6.$$

Если воспользоваться этим, то смешанное произведение можно получить быстрее:

$$\begin{split} \left(\bar{r}'(s),\bar{r}''(s),\bar{r}'''(s)\right)ds^6 &= \left(\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}},\dddot{\bar{r}}\right)dt^6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\bar{r}'(s),\bar{r}''(s),\bar{r}'''(s)\right) &= \left(\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}},\dddot{\bar{r}}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = \left(\dot{\bar{r}},\ddot{\bar{r}},\dddot{\bar{r}}\right)\frac{1}{|\dot{\bar{r}}|^6}. \end{split}$$

И, воспользовавшись формулой кривизны, получить итоговый ответ:

$$\mathbf{æ}(t) = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dot{r})}{\left|\left[\dot{r}, \ddot{r}\right]\right|^2}$$

5.2. Восстановление пространственной кривой по кривизне и кручению

Теорема 7. Для некоторых гладких функций k(s) > 0 и æ(s) существует единственная с точностью до собственных движений в пространстве бирегулярная кривая, для которой эти функции кривизна и кручение соответственно.

Доказательство: Рассмотрим кривую $\bar{r}(s)$ и кривую, полученную из нее с помощью постоянного специального ортогонального преобразования и сдвига:

$$\tilde{\bar{r}}(s) = A\bar{r}(s) + \bar{r}_0, \quad A \in SO(3).$$

Тогда кривизна и кручение полученной кривой совпадают с изначальной:

$$\tilde{\bar{r}}'(s) = A\bar{r}'(s); \quad \tilde{\bar{r}}''(s) = A\bar{r}''(s).$$

Но специальное ортогональное преобразование сохраняет длины, поэтому кривизна сохраняется. А так как сохраняются и углы, то репер Френе перейдет в соответствующий репер Френе. А значит уравнения Френе также сохраняются, а значит сохраняется и кручение.

Докажем единственность. Пусть есть две кривые $\bar{r}_1(s)$ и $\bar{r}_2(s)$, у которых кривизна и кручение в натуральном параметре совпадают. Тогда возьмем две точки - одна на первой кривой, другая - на второй, причем кривизна и кручение соответственно в этих точках совпадают. Важно отметить, что могло так случиться, что есть две точки с одинаковыми кривизной и кручением. Чтобы выбрать правильную, нужно



выбрать какое то значение параметра на графике кривизны и кручения первой кривой и такое же на графиках кривизны и кручения второй кривой, этому значению на кривых соответствуют вполне определенные точки. То есть смотрим не на совпадение кривизны и кручения, а на выбор параметра. Выбрав значение параметра на одной кривой, используем его и для другой в силу совпадение кривизны и кручения как функций.

Теперь, с помощью сдвига, мы можем совместить эти точки. От этого кривизна и кручение не изменятся. Тогда мы имеем две пересекающиеся кривые и в этой точке пересечения у нас имеются два репера Френе. Оба репера имеют одинаковую ориентацию, так как вектор бинормали достраивался в соответствии с ориентацией пространства, а она неизменна. Поэтому, с помощью специального ортогонального преобразования оба репера могут быть совмещены в этой точке. Применив этоже ортогональное преобразование к кривой, которую сдвинули, получим, что они будут иметь одинаковую систему Френе.

Теперь рассмотрим систему Френе:

$$\begin{cases} \bar{v}'(s) = k(s)\bar{n}(s) \\ \bar{n}'(s) = -k(s)\bar{v}(s) + \hat{w}(s)\bar{b}(s) \\ \bar{b}'(s) = -\hat{w}(s)\bar{n}(s); \end{cases}$$

Получаем две кривые, имеющие одну общую точку, один и тот же репер Френе в этой точке, тогда по теореме существования и единственности обыкновенного дифференциального уравнения существует единственное решение такой системы с такими начальными данными. Поэтому вектора скорости для эти кривых совпадают (после применения специального ортогонального преобразования), а значит радиусвекторы могут отличаться на константу, которая обязана равняться нулю в силу наличия общей точки.

Существование. Рассмотрим произвольную точку в \mathbb{R}^3 и репер в этой точки с правильной ориентацией. Далее рассматриваем систему Френе с такими начальными данными. По теореме существования и единственности существует единственное решение с такими начальными данными. Нужно доказать, почему такое решение задает бирегулярную кривую с такими кривизной и кручением. Докажем сначала, что решения $\tilde{v}(s)$, $\tilde{h}(s)$, $\tilde{b}(s)$ образуют в каждой точке ортонормированный репер. Для



этого введем вспомогательные функции:

$$\begin{cases} a(s) = (\tilde{v}(s), \tilde{v}(s)) - 1, & a(s_0) = 0 \\ b(s) = (\tilde{n}(s), \tilde{n}(s)) - 1, & b(s_0) = 0 \\ c(s) = (\tilde{b}(s), \tilde{b}(s)) - 1, & c(s_0) = 0 \\ d(s) = (\tilde{v}(s), \tilde{n}(s)), & d(s_0) = 0 \\ e(s) = (\tilde{v}(s), \tilde{b}(s)), & e(s_0) = 0 \\ f(s) = (\tilde{n}(s), \tilde{b}(s)), & f(s_0) = 0 \end{cases}$$

Продифференцируем их и воспользуемся тем, что $\tilde{\bar{v}}(s), \tilde{\bar{n}}(s), \tilde{\bar{b}}(s)$ являются решениями системы Френе.

$$\begin{cases} a'(s) = 2\left(\tilde{v}, \tilde{v}'\right) = 2\left(\tilde{v}, k\tilde{n}\right) = 2kd \\ b'(s) = 2\left(\tilde{n}, \tilde{n}'\right) = 2\left(\tilde{n}, -k\tilde{v} + \omega\tilde{b}\right) = -2kd + 2\omega f \\ c'(s) = 2\left(\tilde{b}, \tilde{b}'\right) = 2\left(\tilde{b}, -\omega\tilde{n}\right) = -2\omega f \\ d'(s) = (\tilde{v}', \tilde{n}) + (\tilde{v}, \tilde{n}') = (k\tilde{n}, \tilde{n}) + (\tilde{v}, -k\tilde{v} + \omega\tilde{b}) = k\left(b+1\right) - k\left(a+1\right) + \omega e = \\ = kb - ka + \omega e \\ e'(s) = \left(\tilde{v}', \tilde{b}\right) + \left(\tilde{v}, \tilde{b}'\right) = \left(k\tilde{n}, \tilde{b}\right) + (\tilde{v}, -\omega\tilde{n}) = kf - \omega d \\ f'(s) = \left(\tilde{n}', \tilde{b}\right) + \left(\tilde{n}, \tilde{b}'\right) = \left(-k\tilde{v} + \omega\tilde{b}, \tilde{b}\right) + (\tilde{n}, -\omega\tilde{n}) = -ke + \omega\left(c+1\right) - \omega\left(b+1\right) = \\ = -ke - \omega b + \omega c \end{cases}$$

Таким образом, мы получили однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. У этой системы имеется нулевое решение, удовлетворяющее начальным данным в точке $s=s_0$. А в силу теоремы о существовании и единственности других решений нет. В итоге получаем, все введенные вспомогательные функции тождественно равны нулю, то есть решение системы Френе образует ортонормированный репер. Проинтегрировав вектор скорости, мы получим некоторый радиус-вектор, который имеет соответствующую систему Френе, а значит, в качестве кривизны и кручения имеет соответственно функции k(s) и $\mathfrak{E}(s)$, а значит задает бирегулярную кривую с такими кривизной и кручением.

5.3. Теорема об ортонормированности решения системы Френе

Теорема 8. Рассмотрим семейство матриц $X(t) \in M_{n \times n}$ гладко зависящих от параметра, причем $X(0) \in O(n)$. Тогда следующие два утверждения эквиваленты.

1.
$$X(t) \in O(n) \ \forall t$$
.





2. $\dot{X}(t)X^{-1}(t)$ - кососимметрическая матрица.

Доказательство: Введем удобные обозначения: $A(t) = X(t)X^T(t), \ B(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t).$ Так как $X(0)X^T(0) = E \Rightarrow A(0) = E.$ В этих обозначениях нам нужно доказать $A(t) = E \Leftrightarrow B(t) + B^T(t) = 0.$

Продифференцируем A(t):

$$\dot{A}(t) = \dot{X}(t)X^{T}(t) + X(t)\dot{X}^{T}(t) = B(t)A(t) + A(t)B^{T}(t).$$

Если мы находимся в условиях первого пункта, то A(t) = E, $\forall t \Rightarrow \dot{A}(t) = 0$, $\forall t$. Подставляя эти два условия в полученное равенство, получим $0 = B(t) + B^T(t)$, что и означает кососимметричность матрицы B(t).

Теперь пусть наоборот дано $B(t) + B^T(t) = 0$. Тогда для уравнения

$$\dot{A}(t) = B(t)A(t) + A(t)B^{T}(t)$$

единичная матрица является решением и удовлетворяет начальному условию A(0) = E. Значит, это единственное решение, то есть A(t) = E, $\forall t$.

Применим эту теорему к восстановлению кривой по кривизне и кручению. Пусть у нас задан какой-то ортонормированный репер вдоль кривой $\{\bar{v}_1(t),...,\bar{v}_n(t)\}$. И рассмотрим производную матрицы его координат:

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \dots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix}' = B(t) \cdot \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix}.$$

В роли матрицы X(t) будет матрица координат нашего репера, тогда матрица B(t) совпадает с матрицей B(t) в предыдущей теореме. В начальной точке наш репер ортонормирован, то есть матрица X(0) ортогональна, более того, по условию, $X(t) \in O(n) \ \forall t.$ А значит, из теоремы получаем, что матрица B(t) кососимметрична. Это утверждение доказывалось ранее немного в другом виде.

Теперь, если наоборот, мы находимся в условиях теоремы о существовании кривой, то мы имеем ту же систему, только теперь мы знаем, что матрица B(t) кососимметрична (система Френе), а в некоторой точке задано начальное условие в виде ортонормированности репера. Тогда из предыдущей теоремы следует, что матрица X(t) ортогональна в любой точке, то есть базис ортонормирован.

Для случая \mathbb{R}^3 выпишем явно это уравнение:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix}'}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \infty \\ 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix}}_{B(T)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix}}_{X(t)}.$$





5.4. Уравнения Френе для кривых в \mathbb{R}^n

Рассматриваем бирегулярную кривую в \mathbb{R}^n в натуральной параметризации. Мы хотим построить в каждой точке ортонормированный базис $\{\bar{m}_1(s),...,\bar{m}_n(s)\}$ всего пространства и функции кривизны $k_1(s)>0,k_2(s)>0,...,k_{n-2}(s)>0,k_{n-1}(s)$.

В качестве первого вектора выбираем вектор скорости кривой $\bar{m}_1(s)=\bar{v}(s)=\bar{r}'(s)$. В качестве второго вектора выбираем вектор главной нормали $\bar{m}_2(s)=\bar{n}(s)=\frac{1}{|\bar{r}''(s)|}\bar{r}''(s)$, а первая кривизна - обычная кривизна: $k_1(s)=k(s)>0$.

Теперь рассмотрим их производные:

$$\bar{m}'_1(s) = k_1(s)\bar{m}_2(s); \qquad \bar{m}'_2(s) = \alpha(s)\bar{m}_1(s) + k_2(s)\bar{m}_3(s).$$

На вектор $\bar{m}_3(s)$ нужно наложить ограничения: он должен быть единичной длины и ортогонален векторам $\bar{m}_1(s)$ и $\bar{m}_2(s)$, а функция $k_2(s)$ должна быть строго больше нуля.

Откуда берутся такие условия? Дополним вектора $\bar{m}_1(s)$ и $\bar{m}_2(s)$ до некоторого ортонормированного базиса $\{\bar{m}_1(s), \bar{m}_2(s), \bar{e}_3(s), ..., \bar{e}_n(s)\}$. Теперь разложим $\bar{m}_2'(s)$ по этому базису:

$$\bar{m}_2'(s) = \alpha(s)\bar{m}_1(s) + \underbrace{\sum_{i=3}^n \beta_i(s)\bar{e}_i(s)}_{\neq 0}.$$

Требование, чтобы этот вектор (сумма) был ненулевым, связано с тем, что если это так, то такой случай специальный и для такой кривой ни базиса Френе, ни уравнений Френе нет.

Если это условие выполнено, то мы можем нормировать его. Обозначим этот вектор через $\bar{m}(s)$, тогда предыдущее выражение примет вид:

$$\bar{m}_2'(s) = \alpha(s)\bar{m}_1(s) + |\bar{m}(s)| \frac{\bar{m}(s)}{|\bar{m}(s)|} \Rightarrow k_2(s) := |\bar{m}(s)| > 0, \quad \bar{m}_3(s) := \frac{\bar{m}(s)}{|\bar{m}(s)|}.$$

Введенный вектор $\bar{m}_3(s)$ единичной длины и ортогонален векторам $\bar{m}_1(s)$ и $\bar{m}_2(s)$ в силу ортогональности векторов дополненного базиса. Таким образом

$$\bar{m}_2'(s) = \alpha(s)\bar{m}_1(s) + k_2(s)\bar{m}_3(s),$$

причем вектора $\bar{m}_1(s), \bar{m}_2(s)$ и $\bar{m}_3(s)$ ортонормированы. Выясним теперь, что такое $\alpha(s)$. Для этого скалярно умножим вектор $\bar{m}_2'(s)$ на вектор $\bar{m}_1(s)$:

$$\alpha(s) = (\bar{m}_2'(s), \bar{m}_1(s)) = -(\bar{m}_2(s), \bar{m}_1'(s)) = -(\bar{m}_2(s), k_1(s)\bar{m}_2(s)) = -k_1(s).$$

Таким образом, первые два уравнения будущей системы Френе имеют вид:

$$\bar{m}'_1(s) = k_1(s)\bar{m}_2(s); \qquad \bar{m}'_2(s) = -k_1(s)\bar{m}_1(s) + k_2(s)\bar{m}_3(s).$$
43





Теперь перейдем к индукции. В качестве базы будем использовать уже построенные вектора. Предположим, что мы построили p таких векторов и p-1 кривизну: $\{\bar{m}_1(s),...,\bar{m}_p(s)\}$ и $k_1(s)>0,...,k_{p-1}(s)>0$. Причем

$$\bar{m}'_{i-1}(s) = -k_{i-2}(s)\bar{m}_{i-2}(s) + k_{i-1}(s)\bar{m}_i(s), \quad \forall i \leq p.$$

База индукции выполняется при i=3. Теперь нужно построить вектор $\bar{m}_{p+1}(s)$ и кривизну $k_p(s)>0$, причем должно выполняться уравнение:

$$\bar{m}'_p(s) = -k_{p-1}(s)\bar{m}_{p-1}(s) + k_p(s)\bar{m}_{p+1}(s).$$

Найдем производную $\bar{m}_p'(s)$ и разложим ее по базису. Вектора $\{\bar{m}_1(s),...,\bar{m}_p(s)\}$ дополним до базиса всего пространства $\{\bar{m}_1(s),...,\bar{m}_p(s),\tilde{\bar{e}}_{p+1}(s),...,\tilde{\bar{e}}_n(s)\}$ так, чтобы эта система была ортонормирована. Вектор $\bar{m}_p(s)$ в разложении участвовать не будет, так как он единичный, а значит ортогонален своей производной.

$$\bar{m}'_{p}(s) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{i}(s)\bar{m}_{i}(s) + \sum_{j=p+1}^{n} \tilde{\beta}_{j}(s)\tilde{\tilde{e}}_{j}(s).$$

Последняя сумма есть вектор, который ортогонален всем построенным векторам $\bar{m}_i(s)$. Будем снова требовать, чтобы этот вектор был ненулевым, тогда можем нормировать его и обозначить через $\bar{m}_{p+1}(s)$, а его длину объявить кривизной $k_p(s)>0$. Остается вычислить $\alpha_i(s)$. Для этого скалярно умножим вектор $\bar{m}'_p(s)$ на $\bar{m}_i(s)$ при i=1..p-1 и воспользуемся предположением индукции:

$$\alpha_i(s) = (\bar{m}_p'(s), \bar{m}_i(s)) = -(\bar{m}_p(s), \bar{m}_i'(s)) = -(\bar{m}_p(s), -k_{i-1}(s)\bar{m}_{i-1}(s) + k_i(s)\bar{m}_{i+1}(s))$$

Очевидно, что единственный ненулевой случай при i = p - 1:

$$\alpha_{p-1}(s) = -\left(\bar{m}_p(s), -k_{p-2}(s)\bar{m}_{p-2}(s) + k_{p-1}(s)\bar{m}_p(s)\right) = -k_{p-1}(s).$$

Таким образом, требуемое уравнение получено.

Если таким образом построены первые n-1 векторов, то n-й вектор достраивается автоматически в соответствии с ориентацией пространства. Для этого не нужно проводить данную процедуру, он единственен. И именно поэтому на оставшуюся кривизну требования положительности можно не накладывать. В разложении $\bar{m}'_{n-1}(s)$ по базису функция $k_{n-1}(s)$ не имеет ограничений, потому что последний вектор определен заранее, а не наоборот:

$$\bar{m}'_{n-1}(s) = -k_{n-2}(s)\bar{m}_{n-2}(s) + k_{n-1}(s)\bar{m}_n(s); \quad \bar{m}'_n(s) = -k_{n-1}(s)\bar{m}_{n-1}(s).$$





Получившуюся систему Френе можно записать матрично:

$$\begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \\ \bar{m}_4 \\ \bar{m}_5 \\ \dots \\ \bar{m}_{n-1} \\ \bar{m}_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \\ \bar{m}_4 \\ \bar{m}_5 \\ \dots \\ \bar{m}_{n-1} \\ \bar{m}_n \end{pmatrix}$$

Запишем аналогичную теорему восстановления для случая \mathbb{R}^n , но оставим без доказательства в виде упражнения, так как абсолютно аналогично случаям \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . **Теорема 9.** Пусть заданы гладкие функции $k_1(s)>0,...,k_{n-2}(s)>0,k_{n-1}(s)$. Тогда существует единственная регулярная (в высшем смысле, то есть первые n-2 кривизны положительны) кривая с точностью до собственных движений в пространстве, для которой эти функции являются кривизнами.



6. Криволинейные системы координат на поверхностях

6.1. Дальнейшие результаты теории регулярных кривых

Теорема 10 (Фенхель, Борсук). Пусть $k(s) \geqslant 0$ -кривизна регулярной замкнутой кривой в \mathbb{R}^n , тогда выполнено неравенство Фенхеля

$$\int_{\gamma} k(s)ds \geqslant 2\pi.$$

Более того, если неравенство обращается в равенство, то эта кривая плоская и ограничивает выпуклое множество.

Теорема 11 (Фари-Милнера). *Если кривая заузлена в* \mathbb{R}^3 , то

$$\int_{\gamma} k(s)ds > 4\pi,$$

то есть развязать нельзя; если неравенство ≤, то такой узел развязывается.

Теорема 12 (Интеграл Гаусса для зацеплений). Если две кривые зацеплены, то

$$I\left(\gamma_{1}, \gamma_{2}\right) = \frac{1}{4\pi} \iint_{T} \frac{\left(\bar{r}_{2}(t_{2}) - \bar{r}_{1}(t_{1}), \bar{r}_{t_{1}}, \bar{r}_{t_{2}}\right)}{\left|\bar{r}_{2}(t_{2}) - \bar{r}_{1}(t_{1})\right|^{3}} dt_{1}dt_{2}$$

всегда является целым числом и, если кривые можно расцепить, то I=0, то есть это необходимое условие для расцепления. Обратно, вообще говоря, неверно.

6.2. Криволинейные системы координат в \mathbb{R}^n

Начнем с примеров. На плоскости примером служит полярная система координат:

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \end{cases}, \quad r > 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

В пространстве полярная система координат заменяется на цилиндрическую:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \quad , \quad r>0, 0\leqslant \varphi < 2\pi, z\in\mathbb{R}. \\ x^3 = z \end{array} \right.$$





Сферическая система координат в пространстве:

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi \sin \theta \\ x^2 = r \sin \varphi \sin \theta , \quad r > 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi, 0 \leqslant \theta < \pi. \end{cases}$$
$$x^3 = r \cos \theta$$

Далее будем рассматривать некоторую область $X\subset\mathbb{R}^n$. У каждой x точки этой области есть естественные евклидовы координаты $(x^1,...,x^n)$. Но каждой точке этой области можно сопоставить и другие координаты. Если мы рассматриваем еще один экземпляр евклидова пространства \mathbb{E}^n с евклидовыми координатами $(u^1,...,u^n)$, то сопоставляем нашей точке из X некотороую точку из $U\subset\mathbb{E}^n$. То есть мы задаем отображение $X\to U$, которое задается функциями $u^1(x^1,...x^n),...,u^n(x^1,...,x^n)$. Тогда говорят, что задана система координат в области X, если задан гомеоморфизм областей X и U (Рис.15) Но раз это гомеоморфизм, то существуют и обратные функции $x^1(u^1,...,u^n),...,x^n(u^1,...,u^n)$.

Для наших целей требуется возможность дифференцировать, то есть эти функции должны быть гладкими и отображение не должно иметь особенностей.

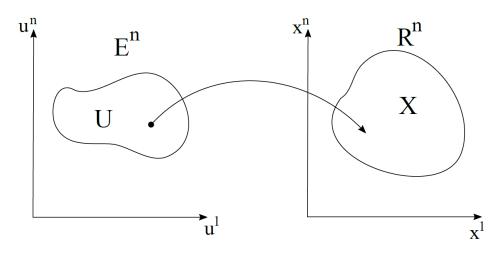


Рис. 15.

Определение 25. Регулярная система координат задается гладкими функциями $u^1(x^1,...x^n),...,u^n(x^1,...,x^n)$, отображение областей $X \to U$ биективно и якобиан этого отображения не равен нулю (условие регулярности).

По теореме об обратной функции (якобиан не равен нулю) существует обратное отображение и задается оно гладкими функциями. В случае гладкого невырожденного гомеоморфизма говорят диффеоморфизм областей.

Если заданы гладкие функции с условием регулярности, но без условия биективности, то в этом случае нужно о локальной системе координат, то есть в каждой



точке области существует окрестность, в которой эти функции задают биекцию. Это возможно из-за того, что якобиан не обращается в ноль в этой точке, а значит не обращается в ноль в некоторой окрестности этой точки.

В случае полярных координат якобиан равняется r и обращается в ноль только в начале координат. Из-за периодичности тригонометрии пропадает биективность, поэтому следует вырезать какой-нибудь луч, например, $x^1 \geqslant 0, x^2 = 0$.

В случае цилиндрических координат якобиан остается прежнем и нужно вырезать целую полуплоскость $x^1\geqslant 0, x^2=0.$

В сферических координатах якобиан обращается в ноль при $r=0, \theta=0, \pi.$ Нужно аналогично вырезать $x^1\geqslant 0, x^2=0.$

Рассмотрим теперь криволинейную систему координат и радиус-вектор

$$\bar{r}(u^1,...,u^n) = (x^1(u^1,...,u^n),...,x^n(u^1,...,u^n)).$$

 $u^1,...,u^n$ называются криволинейными координатами. Рассмотрим точку $(u^1_0,...,u^n_0)$ и зафиксируем все координат кроме первой, рассматривая ее как параметр, $(u^1,u^2_0,...,u^n_0)$. В таком случае задана некоторая кривая, которая называется координатной линией, отвечающей координате u^1 . Аналогично получаются все остальные координатные линии. В итоге имеем n координатных линий $\bar{r}\left(u^1\right),...,\bar{r}\left(u^n\right)$, проходящих через точку $(u^1_0,...,u^n_0)$. Эти кривые являются регулярными, так как вектора скорости являются столбцами матрицы Якоби. А так как якобиан ненулевой, то все эти вектора ненулевые и линейно независимы как столбцы матрицы якоби.

Определение 26. Если вектора скорости координатных линий ортогональны друг другу, то говорят, что криволинейная система координат ортогональная.

Рассмотрим на примере полярной системы координат. Если зафиксировать $r=r_0$, а угол менять, то получится окружность с центром в начале координат и радиуса r_0 . Таким образом, меняя r_0 мы получим концентрические окружности (Рис. 16). Если зафиксировать угол $\varphi=\varphi_0$ и менять расстояние, то получится луч. Таким образом, меняя φ_0 мы получим лучи выходящие из начала координат под углом φ_0 к оси абсцисс.

Вектора скорости полярной системы координат имеют вид:

$$\bar{r}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \bar{r}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi).$$

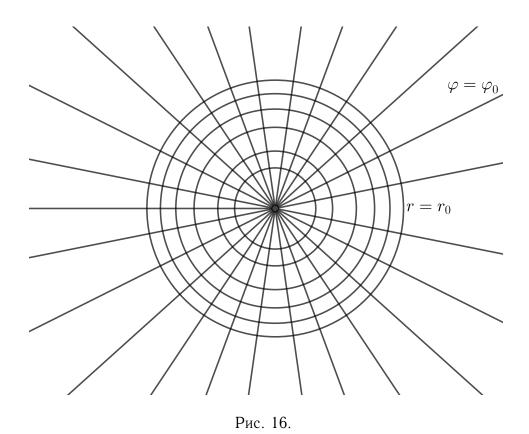
Они, очевидно, ортогональны, поэтому полярная система координат является ортогональной.

Для цилиндрической системы координаты добавляется координатная линия в виде прямой, параллельной оси z. Вектора скорости имеют вид:

$$\bar{r}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \bar{r}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \quad \bar{r}_z = (0, 0, 1).$$

48





Они также ортогональны и цилиндрическая система координат ортогональная.

Для сферической системы координат: если фиксированы углы, то получаются лучи, исходящие из начала координат по всем возможным направлениям; если фиксированы r и θ , то получаются окружности, лежащие в плоскости $z=r_0\cos\theta_0$ с центром на оси z и радиуса $r_0\sin\theta_0$; если фиксированы r и φ , то получаются окружности, лежащие плоскости, проходящей через ось z и радиуса r_0 . Вектора скорости имеют вид:

$$\begin{split} \bar{r}_r &= \left(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,\cos\theta\right), \quad \bar{r}_\varphi = \left(-r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi\sin\theta,0\right), \\ \bar{r}_\theta &= \left(r\cos\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\cos\theta,-r\sin\theta\right). \end{split}$$

Они ортогональны и сферическая система координат является ортогональной.

Также можно говорить о координатных поверхностях, когда фиксированы m координат и m необязательно равно n-1.

Вектора скорости $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, 1\leqslant i\leqslant n$ линейно независимы (так как якобиан ненулевой) и образуют базис всего евклидова пространства.



6.3. Матрица Грама и понятие о римановой метрике

Рассмотрим матрицу Грама системы векторов скоростей координатных линий:

$$g_{ij}\left(u^{1},...,u^{n}\right)=\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{i}},\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{j}}\right), \quad 1\leqslant i,j\leqslant n$$

Эта матрица гладко зависит от точки и обладает следующими свойствами:

- 1. $g_{ij}(u) = g_{ji}(u)$ в силу симметрии скалярного произведения;
- 2. $det(g_{ij}(u)) \neq 0$, так как набор вектор линейно независим; более того, по этой же причине она положительно определена;
- 3. При замене координат изменяется по следующему (тензорному закону):

$$\tilde{g}_{ij}\left(v^{1},...,v^{n}\right) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v^{i}},\frac{\partial \bar{r}}{\partial v^{j}}\right) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{l}}\frac{\partial u^{l}}{\partial v^{i}},\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{p}}\frac{\partial u^{p}}{\partial v^{j}}\right) = g_{lp}\left(u^{1},...,u^{n}\right)\frac{\partial u^{l}}{\partial v^{i}}\frac{\partial u^{p}}{\partial v^{j}}$$

Или в матричном виде $\tilde{G} = J^T G J$.

Соглашение Эйнштейна: если встречаются одинаковые индексы сверху и снизу относительно дробей или индексов, то по такому индексу ведется суммирование, а сам индекс называется слепым.

Определение 27. Говорят, что в области $X \subset \mathbb{R}^n$ задана риманова метрика, если для любой регулярной криволинейной системы координат $(z^1,...,z^n)$ в X задана матрица $g_{ij}(z)$ такая, что:

- 1. Симметрична $g_{ij}(z) = g_{ji}(z)$;
- 2. Невырождена и положительно определена;
- 3. Закон изменения при замене координат: $\tilde{g}_{ij}\left(v^{1},...,v^{n}\right)=g_{lp}\left(z^{1},...,z^{n}\right)\frac{\partial z^{l}}{\partial v^{i}}\frac{\partial z^{p}}{\partial v^{j}}$.

Если отказаться от условия положительной определенности, то такая матрица называется псевдоримановой.

6.4. Деривационные уравнения

Деривационные уравнения (аналог уравнений Френе) говорят как вектора базиса изменяются вдоль координатных линий. Для этого нужно продифференцировать и разложить по базису:

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j} = a_{ij}^k(u) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}.$$

Сразу можно отметить, что в силу коммутативности по частным производным коэффициенты симметричны по нижним индексам: $a_{ij}^k(u)=a_{ji}^k(u)$. Теперь нужно



попытаться выразить эти коэффициенты через геометрические характеристики объекта, в данном случае через риманову метрику. Умножим скалярно вторые частные производные на вектора базиса:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l}\right) = \left(a_{ij}^k(u) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l}\right) = a_{ij}^k g_{kl}.$$

А теперь продифференцируем матрицу Грама:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^k}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) + \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}\right) = a_{ik}^s g_{sj} + a_{jk}^s g_{si}.$$

Рассмотрим циклические перестановки индексов $\{i,j,k\}$ для полученной формулы:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \underbrace{a_{ik}^s g_{sj}}_A + \underbrace{a_{jk}^s g_{si}}_B;$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \underbrace{a_{kj}^s g_{si}}_B + \underbrace{a_{ij}^s g_{sk}}_C;$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \underbrace{a_{ji}^s g_{sk}}_C + \underbrace{a_{ki}^s g_{sj}}_A.$$

В силу симметричности, можно заметить одинаковые слагаемые, обозначенные через A, B, C. Тогда сложим последние два и вычтем первое:

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2a_{ij}^s g_{sk} \Leftrightarrow a_{ij}^s = \frac{1}{2}g^{sk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right).$$

Через g^{sk} обозначена матрица обратная матрице Грама (римановой метрике), по индексу k ведется суммирование. Выражение, полученное для a^s_{ij} называется символами Кристоффеля и обозначается Γ^s_{ij} . Таким образом, получается выражение через риманову метрику (индексы s и k поменяли местами):

$$a_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{ks}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s}\right).$$



7. Криволинейные системы координат на поверхностях

7.1. Критерий восстановления криволинейной системы координат по римановой метрике

На прошлой лекции было получено равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma^s_{ik} g_{sj} + \Gamma^s_{jk} g_{si} \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ik} g_{sj} - \Gamma^s_{jk} g_{si} = 0;$$

левую часть последнего равенства обозначим через $\nabla_k g_{ij}$, который называется ковариантной производной римановой метрики. На данный момент это просто определение, далее мы увидим смысл этого определения, а сейчас будем понимать как обозначение.

Зададимся вопросом: пусть нам задана риманова метрика в области, существует ли криволинейная система координат, метрика которой совпадает с указанной? То есть можно ли по матрице с определенным набором свойств восстановить криволинейную систему координат (так как мы учились восстанавливать кривую по кривизне)?

Важно отметить, что, если мы рассматриваем матрицу Грама некоторой криволинейной системы координат, то всегда существует замена координат, переводящая данную матрицу в единичную. Это связано с тем, что в области евклидова пространства всегда есть евклидовы координаты, а раз в одной и той же области заданы две системы криволинейных координат, то существует замена координат. А перейдя к евклидовым координатам, мы получим единичную матрицу Грама. Таким образом, если матрица Грама построена по криволинейной системе координат, то всегда существует замена координат, в которых она примет вид единичной матрицы. Далее мы увидим, что верно и обратное.

Ответ на поставленный вопрос следует искать в деривационных уравнениях. Если какая то матрица претендует быть метрикой криволинейной системы координат, то она должна удовлетворять системе деривационных уравнений, куда она входит через символы Кристоффеля. Таким образом, из заданной матрицы нужно получить символы Кристоффеля и попытаться решить система дифференциальных уравнений в частных производных. К сожалению, соответствующей классической теоремы существования и единственности для таких уравнений нет. Но есть определенный аналог, который называется теоремой Дарбу. Запишем эту теорему, а доказательство проведем позднее.

7.2. Теорема Дарбу о совместных системах



Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial u^i} = \bar{F}_i \left(u^1, ..., u^k, y^1, ..., y^l \right), \quad \bar{y} = \left(y^1, ..., y^l \right), \quad \bar{F}_i = \left(F_i^1, ..., F_i^l \right), \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Функции \bar{F}_i гладкие на $U \times V, \ U \subset \mathbb{R}^k, \ V \subset \mathbb{R}^l$. Допустим, что для некоторых векторов $\bar{a} \in U, \bar{b} \in V$ заданы начальные данные $\bar{y}\left(a^1,...,a^k\right) = \bar{b}$. Допустим также, что решение существует, тогда продифференцируем:

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial u^j} = \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial y^s} F_j^s.$$

В правой части участвует только функция F. Теперь, в силу коммутативности частных производных, мы можем переставим индексы i и j и получим равенство:

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial y^s} F_j^s = \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial y^s} F_i^s.$$

Эти условия на функцию F являются необходимыми для существования решения. Так как мы требуем существования решения для произвольных начальных данных (совместность) (это очень важное условие, которое нужно для того, чтобы задавать криволинейную систему координат в окрестности любой точки данной области), то эти соотношения должны выполняться на всей области определения функции F. Эти условия называются условиями совместности. Но теорема Дарбу утверждает больше: если эти условия выполнены для заданых функции \bar{F}_i , то для любых начальных данных \bar{a} и \bar{b} в некоторой окрестности точки \bar{a} существует единственное решение этой системы.

7.3. Условия совместности для деривационных уравнений. Тензор кривизны Римана. Критерии восстановления

Проделаем процедуру написания условий совместнсти для деривационных уравнений.

$$\frac{\partial^3 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \Gamma^k_{ij} \Gamma^s_{kl} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s},$$

У базисных векторов везде будем писать индекс суммирования s. Переставив индексы j и l, в силу коммутативности получаем условия совместности:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} = \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}$$

А так как это разложение по базису, то окончательно получаем:

$$\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l} + \Gamma^k_{ij} \Gamma^s_{kl} = \frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{il} \Gamma^s_{kj} \Leftrightarrow \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ij} \Gamma^s_{kl} - \Gamma^k_{il} \Gamma^s_{kj} = 0.$$



Выражение стоящее слева, называется *тензором кривизны Римана* и обозначается R_{iil}^s .

Таким образом, из теоремы Дарбу следует, что если тензор кривизны Римана заданой матрицы Грама равен нулю (такие метрики называются плоскими), то для нее существует криволинейная система координат, метрика которой совпадает с заданной матрицей Грама.

Сформулируем критерии. Пусть задана некоторая матрица Грама. Если тензор кривизны для этой матрицы равен нулю, то по теореме Дарбу существует криволинейная система координат с такой матрицей Грама. Для любой матрицы Грама криволинейной системы координат в евклидовом пространстве существует замена координат, с помощью которой она приводится к единичной матрице. Раз матрица Грама единичная, то из формул для символов Кристоффеля следует, что все они равны нулю. Если символы Кристоффеля равны нулю, тогда и тензор кривизны Римана равен нулю. В итоге цепочка замкнулась:

$$g: R(g) = 0 \Rightarrow \exists (u^1, ..., u^n) \Rightarrow \exists$$
 замена: $g_{ij} \to \delta_{ij} \Rightarrow \Gamma(\delta_{ij}) = 0 \Rightarrow R(\delta_{ij}) = 0$.

Теорема 13. Матрица Грама g_{ij} является матрицей Грама некоторой криволинейной системы координат тогда и только тогда, когда

- 1. существует замена координат, в которой она принимает вид едининой матрицы;
- 2. существует замена координат, в которой символы Кристоффеля обращаются в ноль;
- 3. тензор кривизны Римана обращается в ноль.

Очевидно, что самым эффективным способом проверки является подсчет всех компонент тензора кривизны Римана.

7.4. Кривые в криволинейных системах координат

Утверждение 17. Пусть в области U заданы криволинейные координаты и есть диффеоморфизм области U и X, где в последней заданы евклидовы координаты. Тогда, если в области U имеется регулярная кривая, она задаст регулярную кривую в области X и наоборот.

Доказательство: В области U кривая задается радиус-вектором $(u^1(t),...,u^n(t))$, вектор скорости соответственно u^i_t . Радиус-вектор в области X примет вид $x\left(u(t)\right)$. Тогда получаем вектор скорости

$$x_t^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} u_t^j.$$
54





Получается связь между векторами скорости происходит через матрицу Якоби криволинейной системы координат. Она невырождена, поэтому эта система имеет единственное решение. И если в одной системе вектор-скорости ненулевой, то и в другой. ■

Рассмотрим длину вектора скорости в криволинейной системе координат:

$$|\bar{r}_t| = \sqrt{(\bar{r}_t, \bar{r}_t)} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i} u_t^i, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j} u_t^j\right)} = \sqrt{g_{ij}(u) u_t^i u_t^j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{ij}(u) u_t^i u_t^j dt^2 = g_{ij}(u) du^i du^j.$$

Это есть метрика криволинейной системы координат, то есть она может быть записана в таком виде.

7.5. k-мерные регулярные поверхности (подмногообразия) в \mathbb{R}^n

Пусть задано \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^k , где $k\leqslant n$. Если рассматривать k=n, это криволинейные системы координат. Поэтому мы будем строить обобщение. Пусть в \mathbb{R}^k заданы области

$$U = \left\{ \left(u^{1}\right)^{2} + \dots + \left(u^{k}\right)^{2} < R^{2} \right\}.$$

Определение 28. Элементарной k-мерной поверхностью (подмногообразием) называется образом открытого шара U гомеоморфизма $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$. Данный гомеоморфизм задается функциями $\left(x^1\left(u^1,...,u^k\right),...,x^n\left(u^1,...,u^k\right)\right)$ и называется параметризацией поверхности.

На самом деле мы хотим рассматривать не просто гомеоморфизм, а диффеоморфизм (так как хотим дифференцировать). Поэтому будем рассматривать функции $x^i\left(u^1,...,u^k\right)$ гладкими и такие, что ранг матрицы Якоби должен равняться k (максимально возможному значению). В таком случае, параметризация φ называется регулярной, а соответствующая k-мерная элементарная поверхность регулярной.

Под такое определение элементарной поверхности не попадают многие классические поверхности такие как сфера, тор, крендель и пр. Поэтому, как и в случае кривых, следует дополнить определение следующим условием: для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ \exists окрестность $U(x_0)$: либо $U \cap M = \varnothing$, либо $U \cap M$ - регулярная элементарная поверхность. Таким образом, получается определение регулярной поверхности:

Определение 29. k-мерной регулярной поверхностью M^k в \mathbb{R}^n называется образ диффеоморфизма некоторой области V в \mathbb{R}^k , причем для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ \exists окрестность $U(x_0)$: либо $U \cap M^k = \varnothing$ либо $U \cap M^k$ - регулярная элементарная k-мерная поверхность.





Определение 30. Координатными линиями на поверхности называются кривые, полученные в результате фиксации любых k-1 координат (параметров) поверхности, разрешая лишь k-му меняться. При этом фиксируется некоторая точка, через которую будет проходить данная кривая. То есть через каждую точку поверхности проходит k координатных линий и k векторов $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$, $1 \leq i \leq k$, которые являются линейно-независимыми как столбцы матрицы Якоби.

Аналогично можно рассматривать координатные поверхности. Важно помнить, что координатные линии и координатные поверхности будут регулярными, так как вектора скорости не обращаются в ноль.

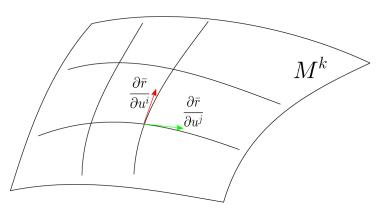


Рис. 17.

Определение 31. Касательным пространством в точке x поверхности M^k называется линейная оболочка касательных векторов координатных линий в этой точке:

$$T_x M^k = \left\langle \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} \right\rangle.$$

Касательное пространство является k-мерным линейным пространством (как линейная оболочка).

Утверждение 18. $T_x M^k$ состоит из векторов скоростей гладко параметризованных кривых на поверхности, проходящих через данную точку x.

Доказательство: Рассмотрим произвольную кривую на поверхности $\bar{r}\left(u(t)\right)$. Тогда ее вектор скорости примет вид:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i} u_t^i,$$

а это есть линейная комбинация векторов базиса касательного пространства. u_t^i есть координаты вектора скорости в базисе касательного пространства.



Теперь рассмотрим какой-то вектор касательного пространства и покажем, что он есть вектор скорости соответствующей кривой. Для этого запишем произвольный вектор в базисе касательного пространства:

$$a^i \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$$
.

И рассмотрим в области параметров кривую $u^i=a^it+u^i_0$, где u^i_0 есть точка, отображаемая на поверхность в точку x. При достаточно малых t участок этой кривой попадет в окрестность точки x. И тогда вектор скорости кривой на поверхности совпадет с рассмотренным. \blacksquare

Из формулы вектора скорости следует аналогичное утверждение про регулярную кривую для криволинейных систем координат: если задать регулярную кривую в области параметров, то ее образ будет регулярной кривой, и обратно.

Определение 32. Первой квадратичной формой поверхности называется матрица Грама базиса касательного пространства:

$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k.$$

Легко видеть, что закон преобразования матрицы Грама такой же как при замене координат в случае криволинейных систем координат матрицы Грама:

$$\tilde{g}_{ij}(v) = g_{lp}(u) \frac{\partial u^l}{\partial v^i} \frac{\partial u^p}{\partial v^j}.$$

Она симметричная, невырожденна и положительно определенная матрица, так как система векторов линейно независима, и является примером римановой метрики на поверхности. В отличие от ситуации с криволинейными системами координат, когда тензор кривизны Римана матрицы Грама любой криволинейной системы координат равен нулю, тензор кривизны Римана не обязан равняться нулю, то есть нетривиальный случай тензора кривизны Римана. Тензор кривизны Римана для любой кривой тождественно равен нулю, поэтому понятия кривизны для кривых и для поверхностей координально отличаются.

7.6. Способы задания поверхностей

Способ задания $\bar{r}\left(u^{1},...,u^{k}\right)$ называется параметрическим заданием поверхности. Без ограчения общности можно считать, что условие максимальности ранга матрицы Якоби реализуется на первых k строчках, то есть минор $\partial x^{i}/\partial u^{j}1\leqslant i,j\leqslant k$ ненулевой (иначе перенумерация координат). В таком случае, по теореме о неявной функции координаты $x^{k+1},...,x^{n}$ являются некоторым функциями от первых k координат,



так как мы можем обратить отображение на этих координатах $u^i=u^i\left(x^1,...,x^k\right), 1\leqslant i\leqslant k$. И подставим их в $x^{k+1}\left(u^1,...,u^k\right),...,x^n\left(u^1,...,u^k\right)$:

$$\begin{cases} x^{1} = x^{1} (u^{1}, ..., u^{k}) \\ ... \\ x^{k} = x^{k} (u^{1}, ..., u^{k}) \\ x^{k+1} = x^{k+1} (u^{1}, ..., u^{k}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^{1} = u^{1} (x^{1}, ..., x^{k}) \\ ... \\ u^{k} = u^{k} (x^{1}, ..., x^{k}) \\ x^{k+1} = x^{k+1} (u^{1} (x^{1}, ..., x^{k}), ..., u^{k} (x^{1}, ..., x^{k})) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{k+1} = x^{k+1} (u^{1} (x^{1}, ..., x^{k}), ..., u^{k} (x^{1}, ..., x^{k})) \\ ... \\ x^{n} = x^{n} (u^{1} (x^{1}, ..., x^{k}), ..., u^{k} (x^{1}, ..., x^{k})) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{1} = x^{1} \\ ... \\ x^{k} = x^{k} \\ x^{k+1} = x^{k+1} (x^{1}, ..., x^{k}) \\ ... \\ x^{n} = x^{n} (x^{1}, ..., x^{k}) \end{cases}$$

Все эти функции гладкие, а матрица Якоби такого отображения единичная. Таким образом, в окрестности каждой точки регулярной поверхности в качестве параметров можно выбрать какие то k координат. Более того, мы доказали, что если есть две регулярные параметризации поверхности, то они гладко зависят друг друга, так как мы можем перейти от одной параметризации к другой через эти самые k координат, а теорема о неявной функции гарантирует сохранение гладкости: $v\left(x\left(u\right)\right)$.

Последний факт позволяет ввести определение гладкой функции на поверхности, так как ее гладкость не зависит от регулярной параметризации на поверхности.

Теперь рассмотрим задание поверхности с помощью уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x^1, ..., x^n) = 0 \\ ... & , m \leq n \ m+k=n. \end{cases}$$

$$f_m(x^1, ..., x^n) = 0$$

Число m называется коразмерностью поверхности. Решать такую систему бывает зачастую невозможно или сложно, но понять геометрию решения можно.

Пусть $(x_0^1,...,x_0^n)$ -решение этой системы и в этой точке система регулярна, то есть ранг матрицы $\partial f_i/\partial x^j$ равен m.

Теорема 14. Существует окрестность точки x_0 такая, что в этой окрестности пространство решений представляет собой регулярную k-мерную поверхность.

Доказательство: Так ранг максимален, то по теореме о неявной функции можно выразить некоторые m координат через оставшиеся k (без ограничения общности



будем считать, что через $(x^1,...,x^k)$):

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^{k+1} (x^1, ..., x^k) \\ ... \\ x^{k+m} = x^{k+m} (x^1, ..., x^k) \end{cases},$$

При этом эти функции и есть решения системы (по теореме о неявной функции). А это и есть параметрическое задание регулярной поверхности. ■

Таким образом, как и в теории кривых, доказана эквивалентность представления регулярной поверхности в виде параметрического задания и задания уравнениями.



8. Подмногообразия

8.1. Нормальное пространство

Зададим регулярную поверхность системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^1, ..., x^n) = 0\\ ... & \operatorname{rank} \frac{\partial F_i}{\partial x^j} = m; \quad m+k = n\\ F_m(x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases}$$

и пусть точка x_0 -решение системы и ранг матрицы Якоби в этой точке равен m. Рассмотрим некоторую кривую, проходящую через эту точку на поверхности. Тогда она должна удовлетворять всем уравнениям этой системы $F_s\left(x^1(t),...,x^n(t)\right)=0$ в некоторой окрестности. Продифференцируем:

$$\frac{\partial F_s}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant m.$$

Если рассмотреть вектора $\left(\frac{\partial F_s}{\partial x^1},...,\frac{\partial F_s}{\partial x^n}\right)$, то из последнего равенства видно, что все эти вектора ортогональны вектору скорости (так как написано скалярное произведение) кривой, лежащей на поверхности. При этом все эти вектора линейно независимы, так как ранг матрицы Якоби нашей системы максимально возможный. А согласно Утверждению 18, все эти вектора ортогональны любому вектору из касательного пространства. Таким образом, линейная оболочка этих векторов образует ортогональное касательному линейное пространство и называется нормальным пространством поверхности в точке:

$$N_x M^k = \left\langle \left(\frac{\partial F_1}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial F_1}{\partial x^n} \right), ..., \left(\frac{\partial F_n}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial F_n}{\partial x^n} \right) \right\rangle.$$

Этот базис гладко зависит от точки. Обычно в нормальном пространстве выбирается ортонормированный базис благодаря процессу ортогонализации, при котором гладкость от точки сохраняется.

Можно подойти к этому вопросу с другой стороны - параметрической записи. Тогда рассмотрев некоторый вектор евклидова пространства $(z^1,...,z^n)$ и потребовав, чтобы он был ортогонален всем базисным векторам касательного пространства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} z^1 + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial u^1} z^n = 0 \\ \dots & , \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^k} z^1 + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial u^k} z^n = 0 \end{cases}$$

которая является линейной системой уравнений. Так как ранг матрицы Якоби равен k, то пространством решений имеем линейное n-k-мерное пространство гладко зависящее от точки. Это и есть нормальное пространство. Процессом ортогонализации





мы также можем построить ортонормированный базис нормального пространства, которй далее будем обозначать $\{\bar{n}_1(u),...,\bar{n}_m(u)\}$. Вместе с базисом касательного пространства они образуют базис всего евклидова пространства:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}, \bar{n}_1(u), ..., \bar{n}_m(u) \right\rangle = T_x M^K \oplus N_x M^k = \mathbb{R}^n.$$

8.2. Площадь поверхности. Элемент объема

Пусть на поверхности задана некоторая криволинейная система координат $(u^1,...,u^k)$ и рассмотрим бесконечно малые сдвиги вдоль каждой из координатных линий du^i . Тогда $d\bar{r}=\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}du^i$. И рассмотрим параллелограмм, натянутый на вектора $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$. Напомним, что объем такого параллелограмма вычисляется по формуле:

$$V(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = \begin{vmatrix} a_1^1 & ... & a_1^n \\ ... & ... & ... \\ a_n^1 & ... & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Если рассмотреть квадрат объема и одну из матриц транспонировать, то получим

$$V^{2}(\bar{a}_{1},...,\bar{a}_{n}) = \begin{vmatrix} a_{1}^{1} & ... & a_{1}^{n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n}^{1} & ... & a_{n}^{n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1}^{1} & ... & a_{n}^{1} \\ ... & ... & ... \\ a_{1}^{n} & ... & a_{n}^{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\bar{a}_{1},\bar{a}_{1}) & ... & (\bar{a}_{1},\bar{a}_{n}) \\ ... & ... & ... \\ (\bar{a}_{n},\bar{a}_{1}) & ... & (\bar{a}_{n},\bar{a}_{n}) \end{vmatrix}.$$

То есть квадрат объема есть определитель матрицы Грама. Теперь, если подставим вместо векторов \bar{a}_i базис касательного пространства, получим:

$$(dV)^2 = \det g_{ij} \cdot \left(du^1 \cdot \dots \cdot du^k \right)^2 \Leftrightarrow dV = \sqrt{\det g_{ij}} du^1 \cdot \dots \cdot du^k.$$

Последнее равенство и есть элемент объема. В случае кривой $g_{11}=\left(\frac{d\bar{r}}{dt},\frac{d\bar{r}}{dt}\right)\Rightarrow ds=|\dot{r}|\,dt.$ В случае двумерной поверхности получаем площадь поверхности:

$$S = \int_{\Omega} \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2.$$

8.3. Деривационные уравнения подмногообразия

Мы ввели базис касательного пространства и базис нормального пространства. Теперь будем изучать его деформации, то есть деривационные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \sum_{\alpha=1}^m b_{ij,\alpha} \bar{n}_{\alpha}$$





$$\frac{\partial \bar{n}_{\alpha}}{\partial u^{i}} = c_{i,\alpha}^{k} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{k}} + \sum_{\alpha=1}^{m} d_{i,\alpha\beta} \bar{n}_{\beta}.$$

Все коэффициенты находятся исключительно из знания матрицы Грама базиса касательного и нормального пространства. Для касательного пространства это метрика g_{ij} , а для нормального пространства - единичная матрица. Касательные вектора и базис нормального пространства ортогональны, поэтому их скалярные произведения нулевые.

Первое разложение по базису называется разложением Гаусса, а второе - Вайнгартена (при найденных коэффициентах). Коэффициенты Γ^k_{ij} не случайно обозначены через символы Кристоффеля. Процедура их нахождения совпадает с процедурой в случае криволинейных систем координат. Сразу следует отметить, что коэффициенты Γ^k_{ij} и $b_{ij,\alpha}$ симметричны по индексам i и j. Продифференцируем матрицу Грама и подставим разложения:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^l}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) + \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^j \partial u^l}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}\right) = \Gamma^k_{il} g_{kj} + \Gamma^k_{lj} g_{ki} \Leftrightarrow \nabla_l g_{ij} = 0.$$

То есть мы получили такую формулу, как получили в случае криволинейных систем координат. Остается выполнить циклические престановки и решить линейную систему, получим такую же формулу

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial u^{j}} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{s}} \right).$$

Теперь рассмотрим коэффициенты $b_{ij,\alpha}$, которые называеются вторыми квадратичными формами, то есть для каждого вектора нормального пространства мы имеем квадратичную форму, в итоге их получится m штук. Рассмотрим как меняются вторые квадратичные формы при замене координат. Умножим разложение Гаусса скалярно на вектор \bar{n}_{α} :

$$b_{ij,\alpha}(u) = \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \bar{n}_{\alpha}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v^k} \frac{\partial v^k}{\partial u^j}\right), \bar{n}_{\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^k \partial v^l} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \frac{\partial v^k}{\partial u^j} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v^k} \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j}, \bar{n}_{\alpha}\right) = \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial v^k \partial v^l} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \frac{\partial v^k}{\partial u^j}, \bar{n}_{\alpha}\right) = \tilde{b}_{kl,\alpha}(v) \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \frac{\partial v^k}{\partial u^j}$$

В качестве задачи оставим показать, что коэффициенты $c_{i,\alpha}^k$ и $d_{i,\alpha\beta}$ меняются при замене координат как тензоры типа (1,1) и (0,1) соответственно.

Вторые квадратичные формы являются фундаментальными геометрическими характеристиками подмногообразия. Коэффициенты $d_{i,\alpha\beta}$ называются коэффициентами кручения подмногообразия и также являются фундаментальными геометрическими характеристиками. Коэффициенты $c_{i,\alpha}^k$ называются операторами Вайнгартена.



Выразим операторы Вайнгартена через метрику и вторые квадратичные формы, умножив разложение Вайнгартена скалярно на вектор базиса касательного пространства:

$$c_{i,\alpha}^k g_{kl} = \left(\frac{\partial \bar{n}_{\alpha}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l}\right) = -\left(\bar{n}_{\alpha}, \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^l \partial u^i}\right) = -b_{il,\alpha} \Leftrightarrow c_{i,\alpha}^k = -g^{kl} b_{il,\alpha}.$$

Теперь рассмотрим коэффициенты кручения, умножив разложение Вайнгартена на \bar{n}_{β} :

$$d_{i,\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \bar{n}_{\alpha}}{\partial u^{i}}, \bar{n}_{\beta}\right) = -\left(\frac{\partial \bar{n}_{\beta}}{\partial u^{i}}, \bar{n}_{\alpha}\right) = -d_{i,\beta\alpha}.$$

То есть коэффициенты кручения кососимметричны по индексам α и β . В случае коразмерности m=1 получаем $d_{11}=0$. То есть подмногообразие без кручения. Если в нормальном пространстве существует базис, в котором все коэффициенты кручения равны нулю, то такие подмногообразия называются подмногообразиями без кручения.

8.4. Фундаментальные уравнения теории подмногообразий

Фундаментальными уравнениями называются условия совместности. Данная система деривационных уравнений подходит под условия теорма Дарбу. В качестве неизвестных компонент вектора \bar{y} в теореме Дарбуя берутся компоненты векторов касательного и нормального пространств. Выведем условия совместности.

Продифференцируем разложение Гаусса:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k \partial u^l} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial b_{ij,\alpha}}{\partial u^l} \bar{n}_{\alpha} + \sum_{ij,\alpha} \frac{\partial \bar{n}_{\alpha}}{\partial u^l} = 0$$

$$=\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \Gamma^k_{ij}\left(\Gamma^s_{kl}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \sum_{\alpha=1}^m b_{kl,\alpha}\bar{n}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial b_{ij,\alpha}}{\partial u^l}\bar{n}_\alpha + \sum b_{ij,\alpha}\left(-g^{sp}b_{pl,\alpha}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \sum_{\beta=1}^m d_{l,\alpha\beta}\bar{n}_\beta\right);$$

Теперь нужно требовать симметричность по индексам j и l (так как частные производные коммутируют). Сгруппировав все базису и поменяв индексы, мы можем приравнять коэффициенты:

при
$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}$$
: $\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^p_{ij}\Gamma^s_{pl} - \Gamma^p_{il}\Gamma^s_{pj} = \sum_{\alpha=1}^m g^{sp} \left(b_{ij,\alpha} b_{pl,\alpha} - b_{il,\alpha} b_{pj,\alpha} \right)$.

В левой части этого равенства стоит тензор кривизны Римана первой квадратичной формы R^s_{ilj} . Если опустить s получим:

$$R_{kilj} := g_{ks}R_{ilj}^s = \sum_{\alpha=1}^m b_{ij,\alpha}b_{kl,\alpha} - b_{il,\alpha}b_{kj,\alpha}.$$







Это уравнение называется уравнением Гаусса и это только одно условие совместности. Таким образом, тензор кривизны Римана выражается через вторые квадратичные формы. Теперь при векторах базиса нормального пространства (единообразно сделав индекс суммирования β и сменив индекс j и l):

при
$$\bar{n}_{\beta}$$
: $\Gamma^{k}_{ij}b_{kl,\beta} - \Gamma^{k}_{il}b_{kj,\beta} + \frac{\partial b_{ij,\beta}}{\partial u^{l}} - \frac{\partial b_{il,\beta}}{\partial u^{j}} + \sum_{\alpha=1}^{m} \left(b_{ij,\alpha}d_{l,\alpha\beta} - b_{il,\alpha}d_{j,\alpha\beta}\right) = 0.$

Полученные уравнения называются уравнения Кодацци-Петерсона-Майнарди. В дифференциальной геометрии они известны несколько в другом виде - через ковариантную произвую, которую мы ввели как обозначение:

$$\nabla_l b_{ij,\beta} := \frac{\partial b_{ij,\beta}}{\partial u^l} - \Gamma^s_{il} b_{sj,\beta} - \Gamma^s_{jl} b_{is,\beta}.$$

Тогда уравнения Кодацци примут вид:

$$\nabla_l b_{ij,\beta} - \nabla_j b_{il,\beta} = \sum_{\alpha=1}^m \left(b_{il,\alpha} d_{j,\alpha\beta} - b_{ij,\alpha} d_{l,\alpha\beta} \right).$$

Для гиперповерхностей (коразмерности 1) уравнения Кодацци принимают вид $\nabla_l b_{ij} = \nabla_j b_{il}.$

Теперь выпишем условия совместности для разложения Вайнгартена. Продифференцируем:

$$\frac{\partial^2 \bar{n}_{\alpha}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial c_{i,\alpha}^k}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + c_{i,\alpha}^k \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^k \partial u^j} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial d_{i,\alpha\beta}}{\partial u^j} \bar{n}_{\beta} + \sum_{\beta=1}^m d_{i,\alpha\beta} \frac{\partial \bar{n}_{\beta}}{\partial u^j} =$$

$$\frac{\partial c_{i,\alpha}^k}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + c_{i,\alpha}^k \left(\Gamma_{kj}^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \sum_{\beta=1}^m b_{kj,\beta} \bar{n}_{\beta} \right) + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial d_{i,\alpha\beta}}{\partial u^j} \bar{n}_{\beta} + \sum_{\beta=1}^m d_{i,\alpha\beta} \left(c_{j,\beta}^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} + \sum_{\gamma=1}^m d_{j,\beta\gamma} \bar{n}_{\gamma} \right).$$

В качестве упражнения оставим доказать, что если рассмотреть уравнение, полученное приравниванием кооэффициентов при векторах касательного пространства после смены индексов i и j, то получится уравнение Кодацци. Перейдем к приравниванию коэффициентов при векторах базиса нормального пространства (индекс суммирования везде сделаем γ):

при
$$\bar{n}_{\gamma}: c_{i,\alpha}^k b_{kj,\gamma} - c_{j,\alpha}^k b_{ki,\gamma} + \frac{\partial d_{i,\alpha\gamma}}{\partial u^j} - \frac{\partial d_{j,\alpha\gamma}}{\partial u^i} + \sum_{\beta=1}^m d_{i,\alpha\beta} d_{j,\beta\gamma} - \sum_{\beta=1}^m d_{j,\alpha\beta} d_{i,\beta\gamma} = 0.$$

Полученное уравнение называется уравнением Риччи. Дополнительно следовало бы заменить операторы Вайнгартена через первую и вторые квадратичные формы. Если коэффициенты кручения тождественно нулевые, то уравнения Риччи обращаются в условие коммутирования операторов Вайнгартена. Но в случае коразмерности



1 всего 1 оператор Вайнгартена, а он, очевидно, коммутирует с самим собой, поэтому уравнений Риччи в случае коразмерности 1 просто нет.

Естественно теперь задаться вопросом о восстановлении подмногообразия по его геометрическим характеристикам: метрике, вторым квадратичным формам и коэффициентам кручения.

Сформулируем эту теорему для общего случая, но оставим доказательство в качестве упражнения (оно абсолютно аналогично доказательству для криволинейных систем координат и доказательству в случае двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, которое будет приведено позже).

Теорема 15 (Бонне). Пусть в некоторой области U евклидова пространства заданы симметричная, невырожденная, положительно определенная матрица $g_{ij}(u)$, симметричные матрицы $b_{ij,\alpha}(u)$ и кососимметричные по индексам α и β коэффициенты $d_{i,\alpha\beta}(u)$. Тогда, если приведенные объекты удовлетворяют уравнениям Гаусса, Кодацци и Риччи, то существует единственное (с точностью до движения) подмногообразие, у которого первой квадратичной формой будет $g_{ij}(u)$, вторыми квадратичными формами будут матрицы $b_{ij,\alpha}(u)$ и коэффициентами кручения будут $d_{i,\alpha\beta}(u)$.

То есть произвольное решение фундаментальных уравненией теории подмногообразий можно задать в качестве геометрических характеристик некоторого k-мерного регулярного подмногообразия.



9. Двумерные поверхности в трехмерном пространстве

9.1. Общие результаты теории поверхностей в случае двумерных поверхностей в трехмерном пространстве

У нас есть облась U с координатами (u^1,u^2) в \mathbb{R}^2 и задано отображение в \mathbb{R}^3 . В параметрическом виде поверхность задается радиус-вектором

$$\bar{r}(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), ..., x^3(u^1, u^2)),$$

где x^1, x^2, x^3 -евклидовы координаты трехмерного пространства. Условие регулярности rank $\partial x^i/\partial u^j=2$. Касательное пространство двумерно, нормальное пространство одномерно (коразмерность 1):

$$T_x M^2 = \left\langle \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2} \right\rangle, \quad N_x M^2 = \left\langle \bar{n}(u) \right\rangle.$$

Главное, чтобы нормаль гладко зависела от точки.

Если мы задаем уравнениями, то оно одно $F(x^1, x^2, x^3) = 0$, rank $\partial F/\partial x^i = 1$.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^1},\frac{\partial F}{\partial x^2},\frac{\partial F}{\partial x^3}\right)\bot T_xM^2.$$

Таким образом, в каждой точке имеется базис всего пространства

$$\left\langle \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2}, \bar{n}(u) \right\rangle.$$

Запишем деривационные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + b_{ij} \bar{n}; \qquad \frac{\partial \bar{n}}{\partial u^i} = c^k_i \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = -g^{ks} b_{si} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}.$$

Исторически первую и вторую квадратичные формы обозначали матрицами

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Выпишем условия совместности. Уравнение Гаусса:

$$R_{kilj} = b_{ij}b_{kl} - b_{il}b_{kj}.$$

Уравнение одно, так как есть (проверьте!) кососимметричность по парам индексов (l,j) и (k,i), а индексы меняются только между 1 и 2. Поэтому получается только одна независимая ненулевая компонента

$$R_{1212} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \det b_{ij} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}.$$





Уравнения Кодации:

$$\nabla_k b_{ij} = \nabla_j b_{ik}, \quad \nabla_k b_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ik} b_{sj} - \Gamma^s_{jk} b_{si}.$$

9.2. Приложения теоремы Дарбу. Лемма Пуанкаре

Пусть нам задана система:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial u^1} = \bar{F}_1 \left(u^1, ..., u^k, y^1, ..., y^l \right) \\ ... \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial u^k} = \bar{F}_k \left(u^1, ..., u^k, y^1, ..., y^l \right) \end{cases}$$

то есть функции $\bar{F}_i\left(u^1,...,u^k,y^1,...,y^l\right)$ заданы в области $U\times V\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$, где $U\subset\mathbb{R}^k,V\subset\mathbb{R}^l$, и гладкие в этой области (хотя достаточно класса C^2). Также мы хотим, чтобы данная система имела решения для любых начальных данных из указанных областей, то есть для любых точек $\bar{a}\in U,\bar{b}\in V$ требуем начальные данные $\bar{y}\left(\bar{a}\right)=\bar{b}$.

Такая система называется совместной, если для любых начальных данных в окрестности точки \bar{a} существует гладкое решение этой системы.

Ранее было показано, что для таких систем должно выполняться условие совместности:

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^s} F^s_j = \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial u^s} F^s_i.$$

То есть эти соотношения выполняются на решениях системы. Но мы требовали существование решения для любых начальных данных, а в силу гладкости функций \bar{F}_i , получаем, что это соотношение выполняется на всей области $U \times V$.

Теорема Дарбу заключается в том, что если есть система с указанными условиями и выполняются условия совместности, то существует единственное решение в некоторой окрестности точки \bar{a} .

Перед доказательством рассмотрим полезные приложения теоремы Дарбу.

1. Пусть функции \bar{F}_i не зависят от y^j . Тогда система уравнений и условия совместности превращаются в следующие соотношения:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial u^i} = \bar{F}_i; \qquad \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial u^i}.$$

Другими словами, мы получили, что если выполнены эти условия, то существует функция y, для которой каждая функция F_i будет иметь соответствующий вид. Это утверждение называется леммой Пуанкаре. Функция \bar{y} в этом случае называется потенциалом.



2. Теперь рассмотрим противоположный случай - \bar{F}_i не зависят от u^j . Системы такого типа возникают при изучении векторных полей на подмногообразии.

Определение 33. Пусть задано k-мерное подмногообразие. Тогда векторным полем $\bar{X}(u)$ на подмногообразии называется отображение, которое каждой точке подмногообразия сопоставляет вектор из касательного пространства $x\mapsto \bar{v}(x)\in T_x(M^k)$. Дополнительно будем требовать, чтобы была гладкая зависимость от точки на подмногообразии - гладкое векторное поле.

Если заданы координаты, то на касательном пространстве задан базис и векторное поле раскладывается по этому базису:

$$\bar{X}(u) = X^k(u) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}.$$

Легко видеть как меняются координаты векторного поля при замене координат (как тензор типа (1,0)):

$$\tilde{X}^p(v) = X^s(u(v)) \frac{\partial v^p}{\partial u^s}.$$

Теперь рассмотрим следующую задачу. Пусть на k-мерном подмногообразии заданы k векторных полей $\bar{X}_i, 1 \leqslant i \leqslant k$. При каких условиях эти векторные поля являются базисом касательного пространства в каждой точке для некоторой системы координат. То есть когда они являются вектрами скоростей данных координатных линий. Другими словами, когда существует система координат $(\tilde{u}^1,...,\tilde{u}^k)$ такая, что $\bar{X}_i=\partial \bar{r}/\partial \tilde{u}^i$.

Понятно, что первое требование о линейной независимости этих векторов в каждой точке, то есть $\det X_i^s \neq 0$. Если так, то в некоторой окрестности этой точки эта система векторов также линейно независима.

Рассмотрим координатное поле в заданной системе координат:

$$X_i^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial \tilde{u}^s} = \bar{X}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^i} \Leftrightarrow X_i^s = \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^i}.$$

В обозначениях системы Дарбу $\bar{F}_i=\bar{X}_i(u), y^i=u^i(\tilde{u}).$ Тогда условия совместности

$$\frac{\partial X_i^s}{\partial u^l}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} = \frac{\partial X_j^s}{\partial u^l}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^i} \Leftrightarrow \frac{\partial X_i^s}{\partial u^l}X_j^l = \frac{\partial X_j^s}{\partial u^l}X_i^l \Leftrightarrow \frac{\partial X_i^s}{\partial u^l}X_j^l - \frac{\partial X_j^s}{\partial u^l}X_i^l = 0.$$

Полученное выражение слева называется коммутатором векторных полей и обозначается $[X_j, X_i]$. Таким образом, в терминах коммутатора все векторные поля должны коммутировать относительного коммутатора векторных полей.



Можно доказать, что коммутатор векторных полей не зависит от выбранной системы координат, кососимметричен при перестановке индексов i и j и удовлетворяет тождеству Якоби. Если на пространстве можно ввести такую операцию, то оно называются алгебрами Ли.

9.3. Доказательство теоремы Дарбу о совместных системах в случае двумерных поверхностей

При k=2 имеем систему условия совместности:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial u^1} = \bar{F}_1\left(u^1, u^2, y^1, ..., y^l\right) \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial u^2} = \bar{F}_2\left(u^1, u^2, y^1, ..., y^l\right) \end{cases}, \quad \frac{\bar{a} = (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^3}{\bar{b} \in V \subset \mathbb{R}^l}, \quad \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial u^2} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial y^s} F_2^s = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial u^1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y^s} F_1^s.$$

Докажем содержательную часть теоремы Дарбу (о существовании и единственности).

Рассмотрим первое дифференциальное уравнение. Это обыкновенное дифференциальное уравнение по u^1 , а u^2 просто параметр. Поэтому решим первое уравнение при значении параметра $u^2=a^2$. Из теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что существует функция $\bar{f}(u^1)$ такая, что

$$\frac{d\bar{f}}{du^1} = \bar{F}_1(u^1, a^2, \bar{f}(u^1)), \quad \bar{f}(a^1) = \bar{b}.$$

То мы рассматриваем решение в окрестности a^1 . Теперь рассмотрим второе уравнение. Для каждого значения u^1 (то есть как параметр) из этой окрестности мы будем искать функцию $\bar{y}(u^1,u^2)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{du^2} = \bar{F}_2(u^1, u^2, \bar{y}) \\ \bar{y}(u^1, a^2) = \bar{f}(u^1) \end{cases}.$$

Решение этой системы для каждого u^1 существует и единственно. Таким образом, функция \bar{y} удовлетворяет последней системе уравнений, начальным данным исходной системы, а первой системе только при $u^2=a^2$. Остается доказать, что она удовлетворяет первой системе при любом значении u^2 (тут и понадобятся условия совместности). Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\bar{\rho}(u^1, u^2) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial u^1} - \bar{F}_1(u^1, u^2, \bar{y}(u^1, u^2)), \quad \bar{\rho}(u^1, a^2) = 0.$$

То есть мы хотим доказать, что введенная функция тождественно нулевая. Продифференцируем (полная производная) по u^2 :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial u^2}.$$

$$69$$





Функция \bar{y} удовлетворяет второй системе для любых значений u^1 , значит заменим $\frac{\partial y^s}{\partial u^2}$ на F_2^s :

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \bar{F}_2 - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial y^s} F_2^s;$$

в условиях теоремы Дарбу заданы условия совместности, а последние два слагаемых их и представляют. Изменим индексы в послених двух слагаемых из условий совместности и продифференцируем \bar{F}_2 по u^1 (полная производная):

$$\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial u^1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y^s} \frac{\partial y^s}{\partial u^1} - \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y^s} F_1^s = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y^s} \left(\frac{\partial y^s}{\partial u^1} - F_1^s \right) = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y^s} \rho^s \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u^2} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial y^s} \rho^s.$$

Таким образом, функция $\bar{\rho}$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений по u^2 (даже линейных), а значит существует единственное решение с начальными данными $\bar{\rho}(u^1,a^2)=0$ для произвольного значения u^1 . Всем этим условиям удовлетворяет нулевая функция, следовательно $\bar{\rho}\equiv 0$.

9.4. Доказательство теоремы Бонне в случае двумерных поверхностей

Запишем деривационные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + b_{ij} \bar{n}; \qquad \frac{\partial \bar{n}}{\partial u^i} = -g^{ks} b_{si} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}.$$

Это линейная система на $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \bar{n}.$

Теорема 16 (Бонне). Пусть в некоторой области U евклидова пространства \mathbb{R}^2 заданы симметричная, невырожденная, положительно определенная матрица $g_{ij}(u)$ и симметричные матрицы $b_{ij}(u)$. Тогда, если приведенные объекты удовлетворяют уравнениям Гаусса и Кодацци, то существует единственная (с точностью до движения) поверхность в \mathbb{R}^3 , у которой первой квадратичной формой будет $g_{ij}(u)$, а второй квадратичной формой будет матрица $b_{ij}(u)$.

Доказательство:

1. Единственность. Пусть имеются две поверхности с одинаковыми первой и квадратичной формой. Теперь возьмем точку на второй поверхности, в которой совпадают значения координат и значения первой и второй квадратичной формы. Относительно сдвига деривационные уравнения не меняются, а также не меняются первая и вторая квадратичная форма.

Таким образом, в одной точке заданы два репера с одинаковыми матрицами Грама, тогда существует ортогональное преобразование, переводящее один репер в другой (факт из линейной алгебры).



Теперь подействуем постоянным ортогональным преобразованием A. Тогда вектора $A\bar{r}, A\bar{n}$ будут также решениями системы деривационных уравнений. Обе квадратичные формы сохраняются из-за того, что ортогональное преобразование сохраняет длины.

Мы получили две поверхности, имеющих одинаковые начальные данные и одинаковые системы деривационных уравнений. Так как мы требуем выполнение условий совместности (уравнения Гаусса и Кодацци), то по теореме Дарбу существует единственная поверхность с таким начальнами данными и имеющая первой квадратичной формой и второй квадратичной формой те, что были рассмотрены у двух поверхностей. Таким образом, они обязаны совпадать.

2. Существование. Пусть у нас заданы две квадратичные формы с указанными свойствами. Первая квадратичная форма положительно определенная. Из линейной алгебры известно, что существует базис, матрица Грама которого совпадает с указанной матрицей Грама. Если мы рассмотрим матрицу Грама

$$\left(\begin{array}{ccc}
g_{11} & g_{12} & 0 \\
g_{21} & g_{22} & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{array}\right),$$

то для нее сущетвует репер всего пространства с этой матрицей в некоторой рассматриваемой точке. И рассматриваем систему деривационных уравнений с такими начальными данными. Поскольку выполнены условия совместности, то по теореме Дарбу существует единственное решение $\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \bar{n}\right)$ с такими начальными данными. Остается показать, что для полученной поверхности g_{ij} и b_{ij} являются первой и второй квадратичными формами в каждой точке (пока только в одной точке это выполняется).

Введем вспомогательные функции:

$$\begin{cases} \alpha_{ij}(u) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) - g_{ij}(u), & \alpha_{ij}(u_0) = 0; \\ \beta_i(u) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \bar{n}\right), & \beta_i(u_0) = 0; \\ \gamma(u) = (\bar{n}, \bar{n}) - 1, & \gamma(u_0) = 0; \end{cases}$$

и продифференцируем их и воспользуемся деривационными уравнениями (так как решение им удовлетворяет):

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(u)}{\partial u^k} = \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^k}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) + \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^j \partial u^k}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} =$$

$$= \left(\Gamma_{ik}^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) + \left(b_{ik}\bar{n}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^j}\right) + \left(\Gamma_{jk}^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}\right) + \left(b_{jk}\bar{n}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} =$$

$$71$$





$$=\Gamma_{ik}^{s}\left(\alpha_{sj}+g_{sj}\right)+b_{ik}\beta_{j}+\Gamma_{jk}^{s}\left(\alpha_{si}+g_{si}\right)+b_{jk}\beta_{i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{k}}$$

Так как символы Кристоффеля строились по метрике, то выполняются следующие условия (ковариантная производная метрики равна нулю):

$$\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{si} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial \alpha_{ij}(u)}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^s \alpha_{sj} + b_{ik}\beta_j + \Gamma_{jk}^s \alpha_{si} + b_{jk}\beta_i.$$

Аналогично для β_i и γ :

$$\begin{split} \frac{\partial \beta_i(u)}{\partial u^k} &= \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^k}, \bar{n}\right) + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar{n}}{\partial u^k}\right) = \left(\Gamma^s_{ik} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}, \bar{n}\right) + \left(b_{ik} \bar{n}, \bar{n}\right) + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}, -g^{sl} b_{lk} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}\right) = \\ &= \Gamma^s_{ik} \beta_s + b_{ik} \left(\gamma + 1\right) - g^{sl} b_{lk} \left(\alpha_{is} + g_{is}\right) = \Gamma^s_{ik} \beta_s + b_{ik} \gamma + b_{ik} - g^{sl} b_{lk} \alpha_{is} - g_{is} g^{sl} b_{lk} = \\ &= \Gamma^s_{ik} \beta_s + b_{ik} \gamma + b_{ik} - g^{sl} b_{lk} \alpha_{is} - \delta^l_i b_{lk} = \Gamma^s_{ik} \beta_s + b_{ik} \gamma + b_{ik} - g^{sl} b_{lk} \alpha_{is} - b_{ik} = \\ &= \Gamma^s_{ik} \beta_s + b_{ik} \gamma - g^{sl} b_{lk} \alpha_{is}. \\ &= \Gamma^s_{ik} \beta_s + b_{ik} \gamma - g^{sl} b_{lk} \alpha_{is}. \\ &\frac{\partial \gamma(u)}{\partial u^k} = 2 \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial u^k}, \bar{n}\right) = 2 \left(-g^{sl} b_{lk} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}, \bar{n}\right) = -2g^{sl} b_{lk} \beta_s. \end{split}$$

Таким образом, мы получили систему линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Далее можно действовать по-разному. Если предположить, что введенные функции аналитичны в области U, то есть раскладываются в ряд Тейлора. Но мы только что доказали, что производные введенных функций являются линейной комбинацией по ним самим же, а значит и все старшие производные также. Выходит, что все производные в данной точке нулевые. Для аналитических функций это означает тождественное обнуление в данной области.

Можно использовать снова теорему Дарбу. Это совместная (условия совместности следуют из совместности деривационных уравнений) линейная система с нулевыми начальными данными, а значит решение тождественно нулевое.



10. Двумерные поверхности в трехмерном пространстве (продолжение)

10.1. Уравнения нулевой кривизны

Уравнения нулевой кривизны возникают в современной математической и теоретической физике. Рассмотрим $\bar{z} \in \mathbb{R}^l$ и систему уравнений:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial u^i} = \bar{z} F_i(u), \quad F_i \in M_{l \times l}.$$

То есть в правой части происходит умножение вектора на матрицу. Это система уравнений Дарбу, где функции, стоящие справа, линейно зависят от \bar{z} . Запишем условия совместности такой системы:

$$\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial u^k} F_i + \bar{z} \frac{\partial F_i}{\partial u^k} = \bar{z} \left(F_k F_i + \frac{\partial F_i}{\partial u^k} \right) \Rightarrow \bar{z} \left(F_k F_i + \frac{\partial F_i}{\partial u^k} - F_i F_k - \frac{\partial F_k}{\partial u^i} \right) = 0.$$

Эти условия должны выполняться функционально, то есть для любых значений u,z из соответствующих областей, значит z можно убрать:

$$F_k F_i - F_i F_k + \frac{\partial F_i}{\partial u^k} - \frac{\partial F_k}{\partial u^i} = 0.$$

Полученные уравнения называются уравнения нулевой кривизны. Как эти уравнения связаны с дифференциальной геометрией и о какой кривизне идет речь? Можно обратить внимание, что полученные условия похожи на равенство нулю тензора кривизны Римана, только вместо матриц стояли символы Кристоффеля. Если положить $(F_i)_j^k = \Gamma_{ji}^k$, то уравнения в точности совпадут с условием $R_{ilj}^k = 0$. Здесь Γ_{ji}^k не символы Кристоффеля, а некоторые матрицы. Отсюда и идет такое название.

10.2. Кривые на поверхностях в \mathbb{R}^3

Пусть задана регулярная поверхность $\bar{r}(u^1,u^2)$. Будем рассматривать регулярная кривую на поверхности $\bar{r}(u^1(t),u^2(t))$, тогда ее вектор скорости и вектор ускорения будут иметь вид:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{i}} u_{t}^{i}, \quad \bar{r}_{tt} = \frac{\partial^{2} \bar{r}}{\partial u^{i} \partial u^{j}} u_{t}^{i} u_{t}^{j} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{i}} u_{tt}^{i} = \Gamma_{ij}^{k} u_{t}^{i} u_{t}^{j} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{k}} + b_{ij} u_{t}^{i} u_{t}^{j} \bar{n} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{i}} u_{tt}^{i} = \left(\Gamma_{ij}^{k} u_{t}^{i} u_{t}^{j} + u_{tt}^{k}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{k}} + b_{ij} u_{t}^{i} u_{t}^{j} \bar{n}.$$

Далее будем обозначать нормаль к поверхности через \bar{m} , а главная нормаль кривой - \bar{n} . То есть ускорение перепишется так:

$$\bar{r}_{tt} = \left(\Gamma_{ij}^k u_t^i u_t^j + u_{tt}^k\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + b_{ij} u_t^i u_t^j \bar{m}.$$

$$73$$





Отсюда следует, что проекция вектора ускорения на главную нормаль есть значение второй квадратичной формы на векторе скорости $b\left(\bar{r}_t\right)$. Также ранее показывалось, что квадрат вектора скорости выражается через геометрические характеристики поверхности так: $\left|\bar{r}_t\right|^2 = g_{ij}u_t^iu_t^j$, то есть значение первой квадратичной формы на векторе скорости.

Зададимся вопросом: когда две регулярные поверхности пересекаются по регулярной кривой? Кривая в \mathbb{R}^3 может задаваться системой уравнений (пересечение поверхностей):

$$\begin{cases} F_1(x^1, x^2, x^3) = 0 \\ F_2(x^1, x^2, x^3) = 0 \end{cases},$$

где F_1 и F_2 задают регулярные поверхности, то есть rank $\partial F_1/\partial x^i=1$, rank $\partial F_2/\partial x^i=1$. Допустим, что у этих поверхностей есть общая точка x_0 . Ранее доказывалось, что такая точка является регулярной точкой такой системы, то есть rank $\partial F_i/\partial x^j=2$, то в некоторой окрестности этой точки пространство решений представляет собой регулярную кривую.

Допустим, что эта точка не является регулярной точкой системы, тогда исходя из условий регулярности каждой из поверхностей, остается только один возможных вариант: rank $\partial F_i/\partial x^j=1$. А отсюда следует, что вектора $\partial F_1/\partial x^i$ и $\partial F_2/\partial x^i$ линейно зависимы, коллинеарны. Но эти вектора есть вектора, сонаправленные с нормалью к поверхности. То есть в общей точке двух регулярных поверхностей вектора нормали к обеим поверхностям коллинеарны, а отсюда следует, что касательные плоскости в этих точках совпадают. Очевидно, что верно и обратное. Таким образом, получаем, что касательные плоскости в общей точке двух регулярных поверхностей совпадают тогда и только тогда, когда ранг системы равен 1. Отсюда следует, что ранг равный 2 достигается при несовпадении касательных плоскостей в этой точке, а в этом случае пересечением двух регулярных поверхностей (локально) будет регулярной кривой.

10.3. Нормальные сечения

Теперь рассмотрим точку на поверхности и касательную плоскость в ней. Теперь будем проводить через эту точку плоскости, не совпадающие с касательной, тогда локальное пересечение - регулярная кривая. В частности, если мы будем проводить плоскости (однопараметрическое семейство плоскостей) через эту точку и нормаль к поверхности, то будем получать некоторые плоские регулярные кривые, которые называются нормальными сечениями поверхности в точке.

Нормальное сечение в точке задается, например, с помощью вектора \bar{v} в касательном пространстве, и называется нормальным сечением в направлении вектора \bar{v} . У нормального сечения определена в каждой точке кривизна k. Вектор главной нормали определялся только на участках бирегулярности, потребуем этого и здесь $k \neq 0$. Тогда определен вектор главной нормали $\bar{n}(u)$.



Вектор скорости регулярной кривой коллинеарен вектору \bar{v} , так как кривая лежит в плоскости $\langle \bar{v}, \bar{m} \rangle$, а вектор \bar{v} из касательного пространства, то есть касается ее в этой точке, а все вектора скорости регулярной кривой коллинеарны. Вектор главной нормали определен однозначно, вне зависимости выбора натурального параметра на кривой, причем выполнено равенство $\bar{r}_{ss} = k(s)\bar{n}, k(s) > 0$. Так как вектор главной нормали и вектор нормали поверхности лежат в одной плокости, оба единичной длины и оба ортогональны вектору скорости, то $\bar{m} = \pm \bar{n}$.

Теперь рассмотрим все семейство нормальных сечений и попробуем приписать знак кривизне нормального сечения: кривизной нормального сечения в направлении вектора \bar{v} называется величина:

$$k_{\bar{v}}(s) = k(s) \cdot (\bar{m}, \bar{n}) \Rightarrow \bar{r}_{ss} = k_{\bar{v}}\bar{m}.$$

Ранее выводилась формула проекции ускорения на нормаль к поверхности:

$$(\bar{r}_{ss}, \bar{m}) = b_{ij} u_s^i u_s^j = b_{ij} u_t^i u_t^j \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{b_{ij} u_t^i u_t^j}{g_{ij} u_t^i u_t^j} \Rightarrow k_{\bar{v}}(t) = \frac{b_{ij} u_t^i u_t^j}{g_{ij} u_t^i u_t^j}.$$

 u_t^i - вектор скорости кривой. Обратим внимание, что если в какой-то другой параметризации вектор скорости умножается на ненулевую константу, то она скоращается в этом выражении. То есть кривизна нормального сечения в направлении \bar{v} не зависит от выбора параметризации (этого и следовало ожидать, ведь направлений задающих одну и ту же плоскость целая прямая без точки, а сечение геометрически одно). А это значит, что можно использовать в качестве вектора скорости вектор \bar{v} . И тогда получаем (первая и вторая квадратичная форма обозначены как I и II):

$$k_{\bar{v}} = \frac{II(v)}{I(v)}.$$

Важно отметить, проекция вектора ускорения на нормаль поверхности для любой регулярной кривой, проходящей через данную точку и касающуюся направления \bar{v} сохраняется и равна $k_{\bar{v}}$:

$$(\bar{r}_{ss}, \bar{m}) = \frac{II(u_t)}{I(u_t)} = \frac{II(v)}{I(v)} = k_{\bar{v}}(s)$$

Если кривая не является нормальным сечением, то $\bar{m} \neq \pm \bar{n}$ (Рис.18). Все формулы с участием кривизны вдоль направления верны и в случае обнуления кривизны кривой в точке.



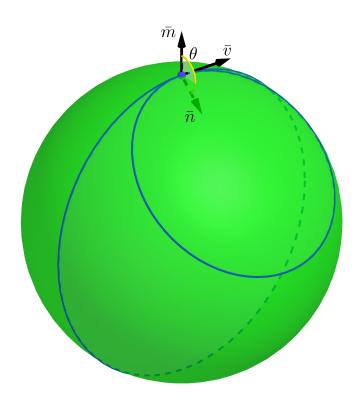


Рис. 18.



11. Кривизны поверхностей

11.1. Теорема Менье и ее приложения

Из полученного на прошлой лекции соотношения для $k_{\bar{v}}$ следует, что $k_{\bar{v}}=0\Leftrightarrow II(v)=0.$

Определение 34. Направление $\bar{v} \in T_x M$ называется асимптотическим, если $II(v) = 0 \Leftrightarrow b_{ij} v^i v^j = 0$.

Возникает вопрос о том, сколько может быть асимптотических направлений. Разберем возможные случаи:

1. Во-первых, матрица второй квадратичной формы может быть вся равна нулю в данной точке (такие точки называются *точками уплощения*) и тогда любое направление асимптотическое.

Утверждение 19. Если в каждой точке некоторой области поверхности вторая квадратичная форма равна нулю, то это тогда и только тогда, когда эта области плоскости.

Доказательство: В обратную сторону очевидно (простое утверждение). Нужно только отметить, что раз вторая квадратичная форма равна нулю в какой-то параметризации, то она ноль и в любой другой в силу закона преобразования при замене координат.

Теперь, если воспользоваться разложением Вайнгартена, то получим:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial u^i} = -g^{ks}b_{si}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = 0 \Leftrightarrow \bar{n} = \bar{n}_0 = const.$$

А чтобы получить уравнение плоскости, нужно проинтегрировать равенство $(n_0,\partial \bar{r}/\partial u^i)=0.$

2. Пусть у матрицы квадратичной формы есть ненулевой элемент в данной точке, тогда уравнение на компоненты вектора \bar{v} имеет вид:

$$b_{11}(v^1)^2 + 2b_{12}v^1v^2 + b_{22}(v^2)^2 = 0.$$

Если $v^1 \neq 0$, то, введя новую переменную $z = v^2/v^1$, получим квадратное уравнение:

$$b_{22}z^2 + 2b_{12}z + b_{11} = 0.$$

У этого уравнения не более двух решений. Если же $v^1=0,$ то есть вектор (0,1) является решением, то $b_{22}=0,$ поэтому решений не более, чем два.



Теорема 17 (Менье). Кривизна k регулярной кривой на поверхности, проходящей через данную точку и касающуюся заданного направления \bar{v} , связана с кривизной $k_{\bar{v}}$ нормального сечения в направлении \bar{v} следующим соотношением:

$$k\cos\theta = k_{\bar{v}}, \quad R_{\bar{v}}\cos\theta = R,$$

где θ - угол между вектором нормали к поверхности в данной точке и векторов главной нормали к кривой; R и $R_{\bar{v}}$ - соответствующие радиусы кривизны в данной точке (Puc.18).

Доказательство: На предыдущей лекции было получено соотношение:

$$k_{\bar{v}} = (\bar{r}_{ss}, \bar{m}) = (k\bar{n}, \bar{m}) = k|n||m|\cos\theta = k\cos\theta.$$

Вспоминая определение радиуса кривизны кривой в точке R=1/k, получаем второе соотношение. \blacksquare

Если мы рассматриваем какую-то кривую и ее кривизна в точке равна нулю, то тогда кривизна нормального сечения также нулевая, а значит это направление асмптотическое. Обратное неверно, так в теореме Менье есть еще множитель $\cos\theta$ и он может обнулиться при $\theta=\pi/2$. Так бывает, например, на торе. Если "положить" касательную плоскость на тор сверху, то касанием будет окружность, ее нормаль направлена к центру окружности, а нормаль поверхности в каждой точке окружности перпендикулярна вектору главной нормали, то есть угол $\theta=\pi/2$. Кривизна кривой (окружности) не ноль, косинус ноль и кривизна нормального сечения ноль.

Рассмотрим теперь неасимптотическое направление, то есть $k_{\bar{v}} \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ (если бы кривизна равнялась нулю, то и кривизна нормального сечения равнялась нулю). И отсюда следует $\theta \neq \pi/2$.

Теорему Менье можно еще сформулировать так: центры соприкасающихся окружностей регулярных кривых в данной точке лежат на одной окружности диаметра $R_{\bar{v}}$. Рассмотрим пару примеров применения теоремы Менье.

1. Рассмотрим сферу. В любом заданном направлении нормальным сечением будет большая окружность. Центр кривизны этой окружности - центр сферы. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку касания и заданное направление. В сечении получим окружность (Рис.18). Тогда получим, что ортогональная проекция из центра сферы на построенную плоскость, попадет в центр сечения - центр окружности. И тогда зависимость радиусов очевидна находится из прямоугольного треугольника. Это и есть теорема Менье. То есть "заслуга" теоремы Менье заключается в том, что центр кривизны и радиус кривизны получается ортогональным проектированием центра, который уже известен.



2. (Менее тривальный пример) Рассмотрим поверхность вращения $(f(z)\cos\varphi,f(z)\sin\varphi,z)$. На таких поверхностях есть два важных семейства кривых. Первое семейство получается сечением плоскости, проходящей через ось вращения $(\varphi=\varphi_0)$ - мериадианы, а второе семейство получается сечением плоскости, перепендикулярной оси вращения $(z=z_0$ - окружности) - параллели. Рассмотрим направление в виде касательного вектора к параллели и нормальное сечение в этом направлении. Из теормы Менье немедленно следует, что центр кривизны нормального сечения находится на оси вращения, так как центр кривизны параллели, находящийся на оси вращения, должен получаться ортогональным проектированием, а ортогональная ось в данном случае единственна - ось вращения.

11.2. Главные кривизны, главные направления и Гауссова кривизна поверхности

Рассмотрим касательную плоскость в точке регулярной поверхности. На ней определены две квадратичные формы g_{ij} и b_{ij} . Первая симметричная, положительно определенная, а вторая симметричная. Из курса линейной алгебры известно, что в этой касательной плоскости данной точки существует ортонормированный базис \bar{e}_1, \bar{e}_2 так, что в этом базисе первая и вторая квадратичная форма принимают вид:

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Это теорема о приведении к каноническому виду. Числа λ_k (собственные значения пары квадратичных форм) определяются из соотношения $\det(B-\lambda A)=0$, а вектора из соотношения $(b_{ij}-\lambda_k g_{ij})\,e_k^j=0$, где e_k^j компоненты искомого базиса в базисе касательного пространства $\partial \bar{r}/\partial u^i$.

Рассмотрим некоторый ненулевой вектор $\bar{v}\in T_xM^2$ и нормальное сечение в этом направлении. Обозначим угол между \bar{v} и \bar{e}_1 через φ . Тогда кривизна нормального сечения:

$$k_{\bar{v}} = \frac{II(v)}{I(v)} = \frac{\lambda_1 (v^1)^2 + \lambda_2 (v^2)^2}{(v^1)^2 + (v^2)^2} = \lambda_1 \frac{(v^1)^2}{(v^1)^2 + (v^2)^2} + \lambda_2 \frac{(v^2)^2}{(v^1)^2 + (v^2)^2} = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi.$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 18 (Эйлера). Кривизна нормального сечения выражается по формуле:

$$k_{\bar{v}} = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi$$

Определение 35. Собственные значения λ_1 и λ_2 называются главными кривизнами поверхности в точке, а векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 - главные направления, отвечающие соответствующим главным кривизнам.





Если теперь рассмотрим в качестве \bar{v} вектор \bar{e}_1 , то есть $\varphi=0$, то $k_{\bar{e}_1}=\lambda_1$. Соответственно, если $\varphi=\pi/2$, то $k_{\bar{e}_2}=\lambda_2$.

Главные направления определены однозначно, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если же $\lambda_1 = \lambda_2$, то из теоремы Эйлера следует, что в любом направлении $k_{\bar{v}} = \lambda_1 = \lambda_2$.

Произведем более подробный анализ для кривизны нормального сечения. $k_{\bar{v}}$ зависит только от φ . Во-первых, эта функция периодична с периодом π . Поэтому достаточно рассматривать поведение этой функции на участке $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. Более того, легко видеть, что эта функция четная $k_{\bar{v}}(-\varphi)=k_{\bar{v}}(\varphi)$, поэтому рассматриваемую область можно сузить до $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

Будем рассматривать случай $\lambda_1 > \lambda_2$. С помощью тригонометрической единицы перепишем функцию кривизны:

$$k_{\bar{v}} = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \left(1 - \cos^2 \varphi \right) = \lambda_2 + \underbrace{\left(\lambda_1 - \lambda_2 \right)}_{>0} \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\geqslant 0} \geqslant \lambda_2.$$

То есть кривизна нормального сечения не меньше, чем меньшая из главных кривизн $\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$. Более того, функция $\cos^2\varphi$ строго убывает от 1 до 0. То есть максимальное значение λ_1 , а минимум λ_2 .

Определение 36. Если в точке главные кривизны совпадают, то такая точка называется омбилической.

На сфере все точки являются омбилическими $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/R$. Если главные кривизны не совпадают, то они являются минимальным и максимальным значениями кривизн семесйтва нормальных сечений в точке.

Определение 37. Гауссовой кривизной поверхности в точке называется величина $K = \lambda_1 \lambda_2$. Средней кривизной называется величина $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

Рассмотрим поведение Гауссовой кривизны поверхности в точке.

- 1. λ_1 и λ_2 одного знака. Тогда K>0. Такие точки на поверхности называются эллиптическими.
- 2. λ_1 и λ_2 разных знаков. Тогда K < 0. Такие точки на поверхности называются гиперболическими.
- 3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Такие точки являются омбилическими точками уплощения.
- 4. Одна из главных кривизн равна нулю, тогда такие точки называются параболическими.

У конуса и цилиндра все точки параболичекого типа.

Определение 38. Линии, которые в каждой точке поверхности касаются одного из двух главных направлений, называются линиями кривизны.





На поверхностях вращения линиями кривизны являются меридианы и параллели.

Чем характеризуются эти точки? Если точка эллиптическая, то асимптотических направлений в ней нет. Если гиперболическая, то только ровно 2 асимптотических направления, так в первом квадранте будет одно значение, то из-за симметрии (четность) появится еще одно направление, проходящее через 2 и 4 квадранты. Для точек уплощения любое направление асмптотическое, то есть бесконечно много. Для точек параболического типа только одно направление, соответствующее нулевой главной кривизне.

Теперь рассмотрим подробнее уравнение на главные кривизн:

$$0 = \det \left(\begin{array}{cc} b_{11} - \lambda g_{11} & b_{12} - \lambda g_{12} \\ b_{12} - \lambda g_{12} & b_{22} - \lambda g_{22} \end{array} \right) = \det \left(G \right) \cdot \lambda^2 - \operatorname{tr} \left(G^{-1} B \right) \cdot \lambda + \det \left(B \right).$$

Из теоремы Виета следует, что

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det(G)}{\det(B)}, \qquad H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\operatorname{tr}(G^{-1}B)}{2}.$$

Матрица $-G^{-1}B$ является оператором Вайнгартена, собственные значения которого совпадают с $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, так как совпадают с решениями уравнения $\det(G^{-1}B-\lambda E)=0.$

Теорема 19 (Гаусса, Egregium). Гауссова кривизна поверхности зависит только от первой квадратичной формы.

Доказательство: Выпишем уравнение Гаусса для двумерных поверхностей и воспользуемся выведенными формулами:

$$R_{1212} = \det(B) = K \cdot \det(G) \Leftrightarrow K = \frac{R_{1212}}{\det(G)}.$$

Тензор кривизны Римана полностью определяется первой квадратичной формой, а из последней формулы следует, что и Гауссова кривизна определяется только ей. ■

Теорема Egregium говорит о том, что, Гауссова кривизна определяется только внутренней геометрией поверхности, то есть метрикой (метрические свойства), и не зависит от того, как эта поверхность вложена в \mathbb{R}^3 .

Позже будет показано, что Гауссова кривизна есть геометрический инвариант, который сохраняется при изометрических преобразованиях.

Существуют более простые формулы, которые вычисляют Гауссову кривизну исключительно по метрике, например, формула Бибербаха, доказательство которой будет приведено, возможно, позже.



12. Сопряженные направления и геодезические на поверхностях

12.1. Формулы Родрига

Пусть имеется регулярная поверхность с радиус-вектором \bar{r} и нормалью \bar{m} , а $\bar{e}_k, k=1,2$ - главные направления. На предыдущей лекции также говорилось, что собственные значения оператора Вайнгартена $\left(c_i^k\right)$ равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$. Воспользуемся этим для доказательства следующего факта.

Теорема 20 (Родрига). Имеет место следующая формула:

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial \bar{e}_k} := e_k^s \frac{\partial \bar{m}}{\partial u^k} = -\lambda_k e_k^s \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}.$$

Доказательство: Рассмотрим разложение Вайнгартена и умножим на e_k^i :

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial u^i} = -g^{ls}b_{si}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l} \Rightarrow e^i_k\frac{\partial \bar{m}}{\partial u^i} = -g^{ls}b_{si}e^i_k\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l} = c^l_ie^i_k\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l} = -\lambda_ke^l_k\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l}.$$

12.2. Сопряженные направления

Если $\bar{X}, \bar{Y} \in T_xM$, то скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = g_{ij} X^i Y^j.$$

Рассмотрим некоторый линейный оператор A. Сопряженный ему оператор определяется из соотношения

$$(A\bar{X},\bar{Y}) = (\bar{X},A^*\bar{Y}).$$

Если выходит так, что $A^* = A$, то оператор называется самосопряженным (симметричный). Проверим, что оператор Вайнгартена является самосопряженным:

$$(A\bar{X},\bar{Y}) = g_{ij} \left(-g^{is}b_{sl}X^l \right) Y^j = -\delta^s_j b_{sl}X^l Y^j = -b_{jl}X^l Y^j;$$

$$(\bar{X}, A\bar{Y}) = g_{ij}X^i \left(-g^{js}b_{sl}Y^l\right) = -\delta_i^s b_{sl}X^i Y^l = -b_{il}X^l Y^j.$$

Индексы суммирования можно поменять и получатся одинаковые выражения.

Определение 39. Два направления в касательной плоскости называются сопряженными, если $(\bar{X}, A\bar{Y}) = 0$, где A - оператор Вайнгартена. Это условие эквивалентно условию $b_{ij}X^iY^j = 0$.





Если точка не является омбилической, то главные направления являются сопряженными:

$$(\bar{e}_1, A\bar{e}_2) = (\bar{e}_1, -\lambda_2\bar{e}_2) = 0,$$

так как главные направления ортогональны.

Из определения сопряженных направлений следует, что асимптотическое направление является самосопряженным и только самосопряженные направления являются асимптотическими (по определению).

Определение 40. Система координат на поверхности называется сопряженной, если в каждой точке поверхности ее координатные линии сопряжены (сопряжены вектора скорости координатных линий).

Утверждение 20. Система координат является сопряженной тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма диагональна, то есть $b_{12} = 0$.

Доказательство: Так вектора $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2}$ являются базисом касательного пространства, то их координаты соответственно $X^1=1, X^2=0, Y^1=0, Y^2=1$. Напишем условие сопряжения для этих векторов:

$$0 = b_{11}X^{1}Y^{1} + b_{12}X^{1}Y^{2} + b_{21}X^{2}Y^{1} + b_{22}X^{2}Y^{2} = b_{12}.$$

Таким образом, если система координат сопряженная, то есть требуем ноль, то $b_{12}=0$. Если же наоборот, то получаем выполнения условия сопряжения.

12.3. Линии кривизны на поверхности

По определению, это кривая, которая в каждой точке касается главного направления. Если точка не является омбилической, то в ее окрестности линии кривизны определяют координатную сеть.

Утверждение 21. Координатные линии являются линиями кривизны в окрестности неомбилической точки тогда и только тогда, когда обе квадратичные формы диагональны, то есть $g_{12} = b_{12} = 0$.

Доказательство: Пусть первая и вторая квадратичные формы диагональны. Тогда $g_{11} \neq 0$ и $g_{22} \neq 0$. В том случае $\lambda_1 = b_{11}/g_{11}, \lambda_2 = b_{22}/g_{22}$. Это следует из соответствующего уравнения на собственный значения. Определим главные значения:

$$\begin{cases} (b_{11} - \lambda_k g_{11}) e_k^1 + (b_{12} - \lambda_k g_{12}) e_k^2 = 0 \\ (b_{21} - \lambda_k g_{21}) e_k^1 + (b_{22} - \lambda_k g_{22}) e_k^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_{11} - \lambda_k g_{11}) e_k^1 = 0 \\ (b_{22} - \lambda_k g_{22}) e_k^2 = 0 \end{cases}$$

С учетом того, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ эти уравнения выполняются для направлений $(\alpha,0)$ и $(0,\beta)$, а значит и для (1,0),(0,1), то есть для $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1},\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2}$.



Наоборот. Нужно доказать, что направления $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2}$ являются главными, то удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (b_{11} - \lambda_k g_{11}) e_k^1 + (b_{12} - \lambda_k g_{12}) e_k^2 = 0 \\ (b_{21} - \lambda_k g_{21}) e_k^1 + (b_{22} - \lambda_k g_{22}) e_k^2 = 0 \end{cases}$$

Подставляя их координаты, находим условия:

$$\begin{cases} b_{11} - \lambda_1 g_{11} = 0 \\ b_{21} - \lambda_1 g_{21} = 0 \\ b_{12} - \lambda_2 g_{12} = 0 \\ b_{22} - \lambda_2 g_{22} = 0 \end{cases}$$

Так как первая и вторая квадратичные формы симметричны, то из 2 и 3 уравнения получаем, что

$$\lambda_1 = \frac{b_{12}}{q_{12}} = \lambda_2.$$

Но мы предполагали, что точка не является омбилической, значит $b_{12}=0$. Тогда 2 и 3 уравнения обращаются в условия $\lambda_k g_{12}=0$. Если $g_{12}\neq 0$, то $\lambda_1=\lambda_2=0$, что снова противоречит предположению. Остается $g_{12}=0$. Таким образом, обе квадратичные формы диагональны. (Также можно было вычесть из третьего второе уравнения и получить условие $(\lambda_1-\lambda_2)\,g_{12}=0$)

12.4. Сферическое отображение (отображение Гаусса)

Пусть мы рассматриваем регулярную поверхность, в каждой точке которой определена нормаль \bar{m} . То есть каждой точке P поверхности мы сопоставляем вектор \bar{m} , перенесенный в начало координат \mathbb{R}^3 . Так вектор нормали единичной длины, то его конец будет лежать на сфере единичного радиуса. Таким образом, каждой точке поверхности сопоставляется точка на сфере. Это отображение и называется $c \phi e p u u e c kum$.

Обозначим это отображение через a. Дифференциал отображения a, это отображение касательных пространств $da:T_xM\to T_{a(x)}S^2$. Касательная плоскость поверхности ортогональна вектору нормали, а так как радиус-вектор сферы совпадает с нормалью, то касательная плоскость сферы ортогональна нормали поверхности. С учетом того, что мы находим в \mathbb{R}^3 , получаем совпадение касательных плоскостей. Таким образом, дифференциал отображает касательную плоскость в себя.

Рассмотрим подробнее. Отображение задается вектором \bar{m} . Пусть $\bar{X} \in T_x M$. Дифференциал сопоставляет этому вектору вектор

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial u^i} X^i = -g^{ks} b_{si} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} X^i \Leftrightarrow X^i \mapsto -g^{ks} b_{si} X^i = c_i^k X^i \Leftrightarrow \bar{X} \mapsto A\bar{X},$$





где через A обозначен оператор Вайнгартена. Напомним, что

$$\det A = \det \left(G^{-1} B \right) = \frac{\det B}{\det G} = K, \quad \operatorname{tr}(A) = 2H.$$

Сферическое отображение позволяет понимать Гауссову кривизну следующим образом. Определитель матрицы есть ориентированная площадь соответствующая, поэтому в пределе гауссову кривизу можно понимать как отношение площади образа к площади прообраза.

Это понимание следует из следующей простой картинки. Если взять на плоскости два вектора и подействовать линейным преобразованием, то отношение площадей образа и прообраза будет равно определителю матрицы линейного отображения.

12.5. Соприкасающийся параболоид

Рассматриваем регулярную поверхность и точку на ней. Для удобства введем специальную систему координат x^1, x^2, x^3 , связанную с этой точкой. Начало координат поместим в эту точку. Плоскость $x^3=0$ совпадает с касательной плоскостью поверхности в этой точке. В этой касательной плоскости, если точка неомбилическая, то существуют главные направления \bar{e}_1, \bar{e}_2 , которые и задают координаты x^1, x^2 соответственно.

Поверхность задана радиус-вектором

$$\bar{r}(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)).$$

Базис касательного пространства лежит в плоскости $x^3=0$, поэтому третья координат обязана равняться нулю в этой точке: $\partial x^3/\partial u^i=0$.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, 0\right), \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, 0\right).$$

Но базис в этой точке линейно независим, поэтому соответствующий минор не ноль:

$$\frac{\partial x^1}{\partial u^1} \frac{\partial x^2}{\partial u^2} - \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции в качестве локальных координат на поверхности можно выбрать x^1, x^2 так, что $x^3 = f(x^1, x^2)$. При этом f(0,0) = 0. Теперь наша поверхность задается радиус-вектором:

$$\bar{r}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2)) \Rightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^1} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x^1}), \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x^2}).$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial f}{\partial x^1}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0)=0$, так как вектора скорости лежат в касательной плоскости $x^3=0$.



Вычислим вторую квадратичную форму:

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right), \bar{m} = (0, 0, 1) \Rightarrow b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x^i \partial x^j}, \bar{m}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

С другой стороны, мы вспоминаем, что \bar{e}_1, \bar{e}_2 - главные направления, в которых квадратичная форма принимает вид:

$$b_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1 (dx^1)^2 + \lambda_2 (dx^2)^2 \Rightarrow b_{11} = \lambda_1, b_{22} = \lambda_2, b_{12} = 0.$$

Тогда в нашей точке получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} = \lambda_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} = \lambda_2.$$

Разложим теперь функцию $f(x^1, x^2)$ в ряд Тейлора в начале координат:

$$x^{3} = f(x^{1}, x^{2}) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x^{i}}(0, 0)x^{i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{i}\partial x^{j}}(0, 0)x^{i}x^{j} + \bar{o}(|x|^{2}) =$$

$$= \frac{\lambda_{1}(x^{1})^{2} + \lambda_{2}(x^{2})^{2}}{2} + \bar{o}(|x|^{2}).$$

Если отбросить бесконечно малые третьего порядка, то получится уравнение параболоида в каноническом виде:

$$x^{3} = \frac{\lambda_{1} (x^{1})^{2} + \lambda_{2} (x^{2})^{2}}{2},$$

который и называется соприкасающимся параболоидом в данной точке. Таким образом, в первом приближении это касательная плоскость, а во втором - параболоид. Выясним его свойства.

Если $\lambda_1\lambda_2>0$ это эллиптический параболоид (поверхность вращения); если $\lambda_1\lambda_2<0$, то это гиперболический параболоид; если $\lambda_1\neq0\lambda_2=0$, то это параболический цилиндр; если $\lambda_1=\lambda_2=0$, то сказать ничего нельзя, так как получаем плоскость, совпадающую с касательной.

Если вращать стакан равномерно, то жидкость, находящаяся в нем, примет форму эллиптического параболоида.

12.6. Индикатриса Дюпена

Рассмотрим точку на поверхности, не являющуюся точкой уплощения. Тогда найдется неасимптотическое направление задаваемое вектором $\bar{v}, k_{\bar{v}} \neq 0$. Отложим в обе стороны от рассматриваемо точки вдоль рассматриваемого направления расстояния равные $1/\sqrt{|k_{\bar{v}}|}$. Мы также вправе потребовать, чтобы полученные точки являлись



концами вектора \bar{v} , то есть $|\bar{v}|=1/\sqrt{|k_{\bar{v}}|}$. Тогда, рассматривая все неасимптотические направления, получим некоторую кривую в касательной плоскости, которая называется $uh\partial ukampucou$ Дюпена.

Разложим вектор \bar{v} по базису касательной плоскости:

$$\bar{v} = v^1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2} \Rightarrow |\bar{v}|^2 = g_{ij} v^i v^j \Rightarrow \sqrt{g_{ij} v^i v^j} = \frac{1}{\sqrt{|k_{\bar{v}}|}} = \frac{\sqrt{g_{ij} v^i v^j}}{\sqrt{|b_{ij} v^i v^j|}} \Leftrightarrow |b_{ij} v^i v^j| = 1.$$

Последнее соотношение определяет нашу кривую, которая полность определяется второй квадратичной формой. Раз мы рассматриваем точку, не являющуюся точкой уплощения, то вторая квадратичная форма ненулевая.

Полученное условие характеризует кривую второго порядка на плоскости:

$$\left| b_{11} \left(v^1 \right)^2 + 2b_{12} v^1 v^2 + b_{22} \left(v^2 \right)^2 \right| = 1.$$

Если $\det B>0\ (K>0)$ то это эллипс. Если $\det B<0\ (K<0)$ то это гипербола с двумя асимптотическими направлениями. Если $\det B=0\ (K=0)$ то это две параллельные прямые, параллельные единственному асимптотическому направлению в этой точке.

12.7. Геодезическая кривизна и геодезические на поверхности

Рассмотрим регулярную поверхность и кривую на ней. Пусть кривая задана в натуральной параметризации радиус-вектором $\bar{r}(s)$. Когда мы изучали кривые в пространстве, то строили репер Френе. Для этого требовали бирегулярность. Если кривая лежит на поверхности, то в каждой точке в качестве нормали кривой можно взять нормаль поверхности, она определена и перпендикулярна вектору скорости кривой в каждой точке. Остается определить третий вектор, естественно, через векторное произведение:

$$\bar{c}(s) = \left[\bar{v}(s), \bar{m}(s)\right].$$

Так как вектор $\bar{m}(s)$ ортогонален касательной плоскости, то $\bar{c}(s)$ лежит в касательной плоскости. Более того, он лежит в нормальной плоскости кривой. Таким образом, этот вектор лежит в пересечении нормальной плоскости $\langle \bar{m}(s), \bar{c}(s) \rangle$ кривой и касательной плоскости $\langle \bar{v}(s), \bar{c}(s) \rangle$. Вектор $\bar{c}(s)$ называется тангенциальной нормалью кривой.

Рассмотрим деривационные уравнения для этого репера (аналог уравнений Френе). Напомним, что связующая матрица должна быть кососимметричной:

$$\begin{pmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{m}(s) \\ \bar{c}(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{m}(s) \\ \bar{c}(s) \end{pmatrix}.$$





Отсюда получаем вектор кривизны:

$$\bar{k}(s) := \bar{r}'' = \bar{v}' = \alpha \bar{m} + \beta \bar{c}.$$

Ранее доказывалось, что $(\bar{r}'', \bar{m}) = k_{\bar{v}}$. Таким образом $\alpha = k_{\bar{v}}$. Выпишем подробнее вектор ускорения:

$$\bar{r}'' = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j} u_s^i u_s^j + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i} u_{ss}^i = \left(\Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j + u_{ss}^k \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + b_{ij} u_s^i u_s^j \bar{m}.$$

Коэффициент перед нормалью и есть $k_{\bar{v}}$. Тогда вектор кривизны можно переписать так:

$$\bar{k} = \bar{k}_g + \bar{k}_m, \quad \bar{k}_g = \left(\Gamma^k_{ij} u^i_s u^j_s + u^k_{ss}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}, \quad \bar{k}_m = k_{\bar{v}} \bar{m}.$$

Вектор \bar{k}_g называется вектором геодезичекой кривизны, то есть проекция вектора кривизны на касательную плоскость, а вектор \bar{k}_m - вектор нормальной кривизны кривой. Длина вектора \bar{k}_g называется геодезической кривизной кривой и определена только для кривых, лежащих на поверхности.

Таким образом

$$\beta = |\bar{k}_a| = |(\bar{r}'', \bar{c})| = |(\bar{r}'', [\bar{r}', \bar{m}])| = |(\bar{r}'', \bar{r}', \bar{m})|.$$

Определение 41. Кривая на поверхности называется геодезической, если ее геодезическая кривизна в каждой точке равна нулю.



13. Геодезические и их роль в дифференциальной геометрии

13.1. Геодезические

На прошлой лекции была рассмотрена формула:

$$\bar{k}(s) = \bar{r}'' = \underbrace{\left(\Gamma^k_{ij} u^i_s u^j_s + u^k_{ss}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}}_{\bar{k}_q} + \underbrace{b_{ij} u^i_s u^j_s \bar{m}}_{\bar{k}_m}.$$

Для любой кривой, касающейся направления \bar{v} компонента \bar{k}_m одна и та же, так как (\bar{r}'', \bar{m}) сохраняется. А вот компонента \bar{k}_g меняется. И длина вектора кривизны минимальна при обнулении компоненты \bar{k}_g . На прошлой лекции было дано определение геодезической. Позже мы покажем, что на регулярной поверхности в каждой точке и каждом направлении выходит ровно одна геодезическая. Геодезическая характеризуется тем, что эта кривая минимально возможной кривизны. Если трактовать кривизну на воздействие некоторой силы (ускорения), то геодезическая та кривая, на которой не действуют силы. На плоскости это прямые. На компоненты нормальной кривизны мы повлиять не можем.

Из разложения вектора кривизны следует, что $k(s)=|\bar{k}|\geqslant k_g=|\bar{k}_g|$ и минимально возможное значение кривизны совпадает с кривизной нормального сечения $|\bar{k}_m|$.

Обнуление длины вектора геодезической кривизны равносильно обнулению самого вектора геодезической кривизны, а значит и его компонент, отсюда получаем уравнение геодезических в натуральной параметризации:

$$\Gamma^k_{ij} u^i_s u^j_s + u^k_{ss} = 0, \forall k.$$

Это же условие равносильно тому, что вектор кривизны кривой коллинеарен вектору нормали поверхности. Таким образом получаем критерии геодезической: Утверждение 22. Кривая является геодезической \Leftrightarrow вектор кривизны (ускорения) в натуральной параметризации коллинеарен вектор нормали поверхности \Leftrightarrow

$$\Gamma^k_{ij} u^i_s u^j_s + u^k_{ss} = 0, \forall k.$$

Получим формулу для геодезической кривизны:

$$k_{g} = |\bar{k}_{g}| = \sqrt{\left(\left(\Gamma_{ij}^{k} u_{s}^{i} u_{s}^{j} + u_{ss}^{k}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{k}}, \left(\Gamma_{pr}^{l} u_{s}^{p} u_{s}^{r} + u_{ss}^{l}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{l}}\right)} = \sqrt{g_{kl} \left(\Gamma_{ij}^{k} u_{s}^{i} u_{s}^{j} + u_{ss}^{k}\right) \left(\Gamma_{pr}^{l} u_{s}^{p} u_{s}^{r} + u_{ss}^{l}\right)}.$$

$$89$$





На прошлой лекции были рассмотрены уравнени Френе. Было получено, что $\alpha=k_{\bar v}, \beta \bar c=\bar k_a,$ а γ называется геодезическим кручением.

Также на прошлой лекции была получена и другая формула для подсчета геодезической кривизны:

$$k_g = (\bar{r}'', \bar{r}', \bar{m}).$$

Рассмотрим более подробно формулу:

$$\Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j + u_{ss}^k = 0, \ \forall k.$$

Здесь $u_s^k = v^k$ и $u_{ss}^k = \frac{\partial v^k}{\partial u^l} u_s^l$. Тогда эта формула перепишетя так:

$$v^{l} \frac{\partial v^{k}}{\partial u^{l}} + \Gamma^{k}_{ij} v^{i} v^{j} = 0 \Leftrightarrow v^{l} \left(\frac{\partial v^{k}}{\partial u^{l}} + \Gamma^{k}_{li} v^{i} \right) = 0 \Leftrightarrow v^{l} \nabla_{l} v^{k} = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\bar{v}} \bar{v} = 0,$$

то есть ковариантная произодная вектора скорости вдоль вектора скорости равна нулю.

Рассмотрим примеры.

- 1. Пусть на поверхности лежит прямая линия. Является ли она геодезической? Конечно, так как кривизна прямой ноль, а значит вектор геодезической кривизны равен нулю и геодезическая кривизна равна нулю.
- 2. Пусть задана поверхность вращения:

$$(\rho(z)\cos\varphi, \rho(z)\sin\varphi, z), \quad \rho(z) > 0.$$

Меридианы являются геодезическими. Любой меридиан лежит в плоскости, проходящей через ось вращения, то есть является плоской кривой. Нормаль поверхности в точке, лежащей на меридиане, обязана лежать в этой плоскости, так как, если это не так, то отразим нормаль относительно этой плоскости и получим вторую нормаль, что невозможно. Вектор кривизны кривой лежит также в этой плоскости и обязан быть ортогональным вектору скорости. Но и нормаль к поверхности ортогональна вектору скорости. Таким образом, вектор кривизны меридиана коллинеарен вектору нормали поверхности, а значит это геодезическая.

Теперь параллель. Это плоская кривая, окружность. Вектор главной нормали и вектор кривизны направлены к центру окружности и лежат в ее плоскости. Так как нормаль поверхности лежит в плоскости оси вращения, то нормаль поверхности и вектор кривизны кривой лежат в плоскости, проходящей через ось вращения. Когда они коллинеарны? Тогда и только тогда, когда касательная к меридиану параллельна оси вращения или там, где $\rho'(z) = 0$.



13.2. Теорема Клеро

Теорема 21 (Клеро). Для любой поверхности вращения выполняется равенство:

$$\rho(s)\cos\alpha(s) = const,$$

где угол $\alpha(s)$ есть угол между параллелью и геодезической в точке пересечения, а $\rho(s)$ - расстояние от точки пересечения до оси вращения (радиус соответствующей параллели).

P.S. Такие "объекты" называются первыми интегралами.

Доказательство: Расположим начало координат на оси вращения, тогда радиусвектор геодезической можно разложить на две компоненты: первая вдоль оси вращения, а вторая - вдоль радиуса параллели, на которой лежит точка пересечения. Эти две компоненты ортогональны, так как ось вращения перпендикулярна плоскости параллели (Рис. 19).

$$\bar{r}(s) = \bar{r}_1(s) + \bar{r}_2(s).$$

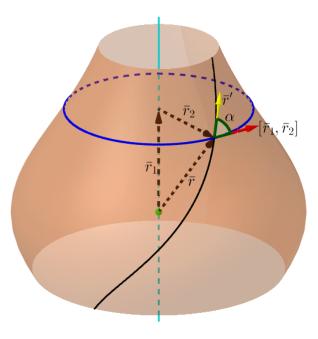


Рис. 19.

Вектор скорости геодезической определяется как $\bar{r}'(s)$. Вместо вектора скорости параллели можно взять (для угла это не имеет значения) ему коллинеарный, в данном случае подходит вектор $[\bar{r}_1,\bar{r}_2]$. Функция $\rho(s)=|\bar{r}_2|$. Таким образом, выражение теоремы перепишется так:

$$\rho(s)\cos\alpha(s) = |\bar{r}_{2}| \frac{(\bar{r}', [\bar{r}_{1}, \bar{r}_{2}])}{|\bar{r}'| |[\bar{r}_{1}, \bar{r}_{2}]|} = |\bar{r}_{2}| \frac{(\bar{r}', \bar{r}_{1}, \bar{r}_{2})}{1 \cdot |\bar{r}_{1}| |\bar{r}_{2}|} = \frac{(\bar{r}', \bar{r}_{1}, \bar{r}_{2})}{|\bar{r}_{1}|} = (\bar{r}', \bar{e}, \bar{r}_{2}),$$

$$91$$





где вектор $\bar{e}=\bar{r}_1/\left|\bar{r}_1\right|$ не зависит от s, так единичный и направлен вдоль постоянной оси вращения.

Остается продифференцировать:

$$(\rho(s)\cos\alpha(s))' = (\bar{r}', \bar{e}, \bar{r}_2)' = (\bar{r}'', \bar{e}, \bar{r}_2) + (\bar{r}', \bar{e}', \bar{r}_2) + (\bar{r}', \bar{e}, \bar{r}_2').$$

Так как кривая геодезическая, то вектор кривизны (ускорения) коллинеарен вектору нормали поверхности, значит вектор ускорения, вектор \bar{e} и вектор \bar{r}_2 лежат в одной плоскости, а значит их смешанное произведение равно нулю.

Второе слагаемое также нулевое, потому что вектор \bar{e} постоянен. Теперь применим разложение радиус-вектора геодезической для третьего слагаемого:

$$(\bar{r}', \bar{e}, \bar{r}'_2) = (\bar{r}'_1 + \bar{r}'_2, \bar{e}, \bar{r}'_2) = (\bar{r}'_1, \bar{e}, \bar{r}'_2) = ((|\bar{r}_1| \bar{e})', \bar{e}, \bar{r}'_2) = ((|\bar{r}_1|)' \bar{e}, \bar{e}, \bar{r}'_2) = 0.$$

Рассмотрим на примере теорему Клеро. Пусть мы рассматриваем случае, когда $\rho(s) \to \infty$, например, конус. Тогда $\cos \alpha(s) \to 0 \Leftrightarrow \alpha(s) \to \pi/2$. То есть геодезическая стремится на бесконечности к меридиану. Если же наоборот $\rho(s) \to 0$, то $\cos \alpha(s)$ обязан возрастать, но косинус ограничен по модулю сверху 1. Причем 1 достигается при $\rho=c$, то равняется константе, стоящей справа. В этом случае угол равен 0, то есть происходит касания геодезической с соответствующей параллелью $\rho=c$.

Что если параллель является сама геодезической? Так как из одной точки в данном направлении выходит только одна геодезическая, то геодезическая каснуться параллели, которая сама является геодезической, не может, поэтому будет бесконечно приближаться к ней. В силу теорему Клеро, пересечь она параллель также не может, так как в точках параллели выполняется равенство $\cos\alpha(s)=1$.

13.3. Уравнение геодезической

Важно понимать, что уравнение геодезической написано в натуральной параметризации.

Утверждение 23. Пусть некоторая регулярная кривая на поверхности в некоторой параметризации удовлетворяет системе уравнений

$$u_{tt}^k + \Gamma_{ij}^k u_t^i u_t^j = 0.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда эта кривая является геодезической, а параметр t пропорционален некоторому натуральному параметру t=cs.

Доказательство: Пусть регулярная кривая удовлетворяет этому уравнению. Рассмотрим квадрат длины вектора скорости этой кривой:

$$|\bar{v}|^2 = g_{ij}u_t^i u_t^j.$$





Продифференцируем:

$$(g_{ij}u_t^i u_t^j)_t = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u_t^k u_t^i u_t^j + g_{ij}u_{tt}^i u_t^j + g_{ij}u_t^i u_{tt}^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{is}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_{tt}^i u_t^j = (\Gamma_{ik}^s g_{sj} + \Gamma_{jk}^s g_{sj}) u_t^k u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_t^i u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_t^i u_t^i u_t^j + 2g_{ij}u_t^i u_t^i u_t^i u_t^i u_t^i + 2g_{ij}u_t^i u_t^i u_$$

(произведем смену индексов)

$$= \Gamma_{pr}^{i} g_{ij} u_{t}^{p} u_{t}^{r} u_{t}^{j} + g_{ij} u_{tt}^{i} u_{t}^{j} + \Gamma_{pr}^{i} g_{ij} u_{t}^{j} u_{t}^{p} u_{t}^{r} + g_{ij} u_{tt}^{i} u_{t}^{j} =$$

$$= g_{ij} u_{t}^{j} \left(\Gamma_{pr}^{i} u_{t}^{p} u_{t}^{r} + u_{tt}^{i} \right) + g_{ij} u_{t}^{j} \left(\Gamma_{pr}^{i} u_{t}^{p} u_{t}^{r} + u_{tt}^{i} \right) = 0.$$

Таким образом, длина вектора скорости постоянна, а значит параметри t пропорционален натуральному: $t=s/|\bar{v}|$. Если перейти к натуральному параметру, то указанные уравнения совпадут с уравнениями геодезических в натуральной параметризации (так как уравнения инварианты относительно линейных замен).

В обратную сторону. Если дана геодезическая, а параметр на ней пропорционален натуральному, то, перейдя к натуральной параметризации, мы получим уравнения геодезической в натуральной параметризации. А если вернемся к параметру t, то уравнения не изменятся, так как инварианты относительно линейных замен.

Теорема 22. На регулярной поверхности рассмотрим произвольную точку, касательную плоскость в этой точке и произвольное направление \bar{v} в касательной плоскости. Тогда локально существует единственная геодезическая на поверхности, касающаяся направления \bar{v} в этой точке.

Доказательство:Рассмотрим систему уравнений с начальными данными:

$$u_{tt}^k + \Gamma_{ij}^k u_t^i u_t^j = 0, \quad u_t^i = \bar{v}.$$

По теореме существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений такое решение существует и единственно с такими начальным данным. Из утверждения 23 следует, что данное решение обязательно является геодезической.

Если предположить, что вектор \bar{v} единичной длины, то полученное решение будет геодезической в натуральной параметризации. Таким образом, для произвольной длины, получается геодезическая в параметризации пропорциональной натуральному. То есть кривая одна и та же будет получаться, только в разной параметризации.

Из этой теоремы следует, что различные геодезические на поверхности касаться не могут, так как в точке касания будет отсутствовать единственности, что противоречит теореме 22.



Отсюда легко понять какие геодезические на сфере. Мы знаем, что все мериадианы являются геодезическими (как поверхности вращения). Если через точку на сфере и ее центр проведена плоскость, то в сечении получится меридиан. Эта плоскость задается некоторым направлением в касательной плоскости. Получается, что в данном направлении других геодезических кроме мериадиана нет. Так как точка на сфере бралась произвольной, то других геодезических, кроме как мериадианов, на сфере нет.

13.4. Уравнения Эйлера-Лагранжа

Пусть даны две точки P и Q на поверхности. Рассмотрим на поверхности все регулярные кривые $(u^1(t),u^2(t))$, соединяющие эти точки $t\in [a,b]$, $(u^1(a),u^2(a))=P,\;(u^1(b),u^2(b))=Q$. И рассмотрим функционал (то есть сопоставление функции число):

$$S[\gamma] = \int_{a}^{b} L(u, u_t, t) dt.$$

Функция L называется Лагранжианом. Рассмотрим дополнительно кривую $(\alpha^1(t),\alpha^2(t))$ такую, что $\alpha^i(a)=\alpha^i(b)=0$. Тогда получаем однопараметрическое семейство $(u^1(t)+\varepsilon\alpha^1(t),u^2(t)+\varepsilon\alpha^2(t))$. По сути, это некоторая деформация рассматриваемой кривой, ε здесь параметр, отклонение от функции. Новая кривая также соединяет точки P и Q. Тогда можно записать так:

$$S[\varepsilon] = \int_{a}^{b} L(u + \varepsilon \alpha, u_{t} + \varepsilon \alpha_{t}, t) dt.$$

Mы хотим экстремум при $\varepsilon=0.$ Теперь это просто функция от $\varepsilon,$ то есть нужно требовать:

$$0 = \frac{dS\left[\varepsilon\right]}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial L}{\partial u^{i}}\alpha^{i} + \frac{\partial L}{\partial u^{i}_{t}}\alpha^{i}\right)dt = \int_{a}^{b} \frac{\partial L}{\partial u^{i}}\alpha^{i}dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial u^{i}_{t}}\alpha^{i}}_{=0}\bigg|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{i}_{t}}\right)\alpha^{i}dt = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial L}{\partial u^{i}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{i}_{t}}\right)\right)\alpha^{i}dt$$

Но равенство нулю последнего интеграла должно быть выполнено при любых функциях α^i . Если предположить, что выражение, стоящее в скобках, не ноль в некоторой точке, значит не ноль и в некоторой окрестности этой точки, тогда в качестве α^i возьмем функции равные нулю всюду, кроме этой окрестности, где отождествим их этим выражением. Тогда подинтыгральная функция будет суммой квадратой. Ее интеграл ноль. Из математического анализа известно, что это обязательно



влечет тождественное обнуление всей функции. Можно было также положить в качестве α^i эти выражения, но с некоторым положительным множителем (функцией), который обнулялся бы на концах. Таким образом, получаем уравнения:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t^i} \right) = 0,$$

которые называются уравнениями Эйлера-Лагранжа. Решения этих уравнений называются экстремалями.

13.5. Экстремальные свойства геодезических

Теорема 23. Пусть даны две точки P и Q на поверхности. Рассмотрим все регулярные кривые $\gamma(t)=(u^1(t),u^2(t))$, соединяющие эти точки $t\in[a,b]$, $(u^1(a),u^2(a))=P$, $(u^1(b),u^2(b))=Q$. И рассмотрим функционал

$$S\left[\gamma\right] = \int_{a}^{b} L\left(u, u_{t}, t\right) dt, \quad L = \sqrt{g_{ij} u_{t}^{i} u_{t}^{j}}.$$

Тогда экстремалями будут геодезические.

Доказательство: Рассмотрим вместо указанного функционала другой:

$$S\left[\gamma\right] = \int_{a}^{b} g_{ij} u_{t}^{i} u_{t}^{j} dt.$$

Напишем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$0 = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u_t^i u_t^j - \frac{d}{dt} \left(2g_{kj} u_t^j \right) = \frac{\partial g_{sj}}{\partial u^k} u_t^s u_t^j - 2 \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^s} u_t^s u_t^j - 2g_{kj} u_{tt}^j \Leftrightarrow$$
$$2g_{kj} u_{tt}^j = \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial u^k} - 2 \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^s} \right) u_t^s u_t^j$$

Если домножить справа и слева на обратную матрицу $\frac{1}{2}g^{lk}$, то справа получится выражение совпадающее символами Кристоффеля (со знаком минус) (нужно дополнительно в одном из слагаемых поменять индексы суммирования s и j местами), а это и есть уравнение геодезических (параметр пропорционален натуральному).

Теперь вернемся к функционалу длины $L=\sqrt{g_{ij}u_t^iu_t^j}$. Функционал длины не зависит от параметризации в отличие от предыдущего. Напишем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} u_t^i u_t^j}{\sqrt{g_{pr} u_t^p u_t^r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{g_{kj} u_t^j}{\sqrt{g_{pr} u_t^p u_t^r}} \right).$$





Функционал длины записан для произвольной параметризации. Мы знаем, что в произвольной параметризации уравнения геодезических не совпадают с видом в параметре пропорциональном натуральному. Уравнения Эйлера-Лагранжа дадут уравнения геодезических, но они не будут иметь вид в натуральном параметре. Чтобы получить указанный вид, нужно рассмотреть в параметризации пропорциональной натуральному. Мы можем так сделать, потому что функционал длины не зависит от параметризации. Поэтому вдоль всех кривых может рассматривать параметризации пропорциональные натуральным. Натуральную параметризацию мы рассматривать не можем, так как тогда все рассматриваемые кривые будут иметь длину b-a. А пропорциональность позволяет сделать параметр от a до b. Мы доказвали, что в этом случае длина вектора скорости постоянна. Тогда выражение $\sqrt{g_{pr}u_t^pu_t^r}$ есть константа и в уравнениях Эйлера-Лагранжа их можно сократить. \blacksquare

Таким образом, доказано, что геодезические есть экстремали функционала длины, доставляют минимум этого функционала. Чтобы показать, что геодезические локально являются кратчайшими, потребуется вспомогательная система координат, которая будет рассмотрена на следующей лекции.



14. Полугеодезические координаты

14.1. Полугеодезические координаты

Рассмотрим произвольную регулярную поверхность и произвольную точку на ней. Тогда существует окрестность, в которой можно ввести полугеодезическую систему координат.

Определение 42. Криволинейная система координат на поверхности называется полугеодезической, если первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^{2} = (du^{1})^{2} + G(u^{1}, u^{2})(du^{2})^{2}, \quad G > 0.$$

Рассмотрим свойства такой системы координат.

- 1. Во-первых, такая система координат является ортогональной (матрица первой квадратичной формы диагональна).
- 2. На координатной линии $u^2 = const$ координата u^1 является натуральным параметром:

$$1 = g_{11} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}\right) \Leftrightarrow \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}\right| = 1.$$

Можно по-другому сказать, что координатная линия задается как $(u^1, const)$, тогда вектор скорости имеет координаты (1,0) и, вычисляя квадрат его длины, получим

$$g_{ij}v^iv^j = g_{11} = 1.$$

- 3. Легко видеть, что, если для криволинейной системы координат выполняются первые два свойства, то она полугеодезическая.
- 4. Для полугеодезической системы координат выполнено равенство $\Gamma_{11}^k=0$. Вычислим эти компоненты:

$$\Gamma_{11}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^k} \right) = g^{kk} \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^1}.$$

Если k=1, то $g_{11}=1$ и производная равна 0. Если k=2, то $g_{21}=0$ и то же получаем 0.

5. Координатные линии $u^2=const$ являются геодезичискими (это отражает название такой системы координат). Мы рассматриваем кривые $(u^1,const)$, вектор скорости $(u_s^1,u_s^2)=(1,0)$. Тогда $u_{ss}^k=0$ и единственное ненулевое слагаемое в уравнение геодезических будет при $i=j=1 \mapsto \Gamma_{11}^k$. Но в свойстве 4 мы доказали, что все эти компоненты нулевые, таким образом уравнения геодезических верны и эта координатная линия является геодезической на поверхности.



Допустим, что задана система координат на поверхности такая, что координатные линии $u^2=const$ являются геодезическими и u^1 является натуральным параметром на них.

Так как параметр u^1 натуральный на линиях $u^2 = const$, то $g_{11} = 1$. Снова рассматриваем эти линии $(u^1, const)$, вектор скорости (1,0) и уравнения геодезических превращаются в уравнение $\Gamma_{11}^k = 0$. Вычислим эти компоненты (диагональность не предполагается):

$$0 = \Gamma_{11}^k = g^{ks} \frac{\partial g_{s1}}{\partial u^1}$$

Так как матрица g^{ks} невырожденная, то можно домножить на метрику и получим условие $\frac{\partial g_{s1}}{\partial u^1}=0$. При l=1 очевидно, а при l=2 получаем, что g_{12} зависит только от u^2 .

Пока мы не получили ортогональность. Оказывается, что достаточно потребовать, чтобы при каком то значении параметра $u^1=u^1_0$, соответствующая координатная линия была ортогональна другому семейству координатных линий (геодезическим). Тогда $g_{12}\left(u^1_0,u^2\right)=0$. Но так как g_{12} не зависит от u^1 , то она тождественно равна нулю при любом значении u^2 .

Таким образом, доказана следующая важная теорема.

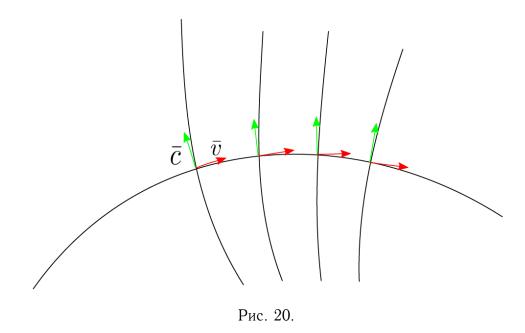
Теорема 24. Допустим, что задана система координат на поверхности такая, что координатные линии $u^2=const$ являются геодезическими и u^1 является натуральным параметром вдоль них. И одна из координатных линий $u^1=u^1_0=const$ ортогональна геодезическим. Тогда эта система координат полугеодезическая.

Теорема 25. Для любой точки регулярной поверхности существует окрестность, в которой можно ввести полугеодезические координаты.

Доказательство: Рассмотрим произвольную точку на поверхности и регулярную кривую $\bar{r}(t)$, лежащую на поверхности и проходящую через эту точку. Теперь рассмотрим тангенциальную нормаль \bar{c} . Выпускаем вдоль этого направления геодезическую. Для каждой точки кривой, лежащей в окрестности выбранной точки, проделываем такую же процедуру: вдоль тангециальной нормали выпускаем геодезическую. Эти геодезические по построению ортогональны данной кривой в соответствующих точках (Рис.20).

В качестве параметра на геодезической выбираем натуральный s. Тогда вводим координаты (s,t), где t - параметр на кривой. У точки с координатами (s,t) есть координаты на поверхности (u^1,u^2) . Мы получаем отображение $(s,t)\mapsto (u^1,u^2)$. Почему это отображение является заменой координат локально в окрестности нашей точки? Функции $u^1(s,t),\,u^2(s,t)$ гладкие в силу теоремы обыкновенных дифференциальных уравнений о том, что решения гладко зависят от начальных условий (параметров).





Речь идет о том, что выбранная точка на кривой (параметр t), а сдвиг вдоль геодезический означает, что, решая систему уравнений геодезической, мы получим решение $u^1(s,t),\ u^2(s,t),$ которое гладко зависит от своего натурального аргумента и введенного параметра. Остается показать невырожденность матрицы Якоби:

$$\left(\begin{array}{cc} u_s^1 & u_s^2 \\ u_t^1 & u_t^2 \end{array}\right).$$

Первая строка этой матрицы - вектор скорости геодезической, который по построению совпадает с вектором тангенциальной нормали кривой. Вторая строка - вектор скорости самой кривой. Но вектора скорости и тангенциальной нормали ортогональны по построению, а значит линейно независимы, значит и определитель матрицы Якоби не ноль. Таким образом, пара (s,t) определяет регулярную систему координат, удовлетворяющую всем условию теоремы 24, значит, это полугеодезическая система координат.

В этой конструкции есть большая свобода. Например, мы можем стартовать не с произвольную регулярной кривой, а с геодезической и брать на ней не произвольную параметризацию, а натуральную.

14.2. Геодезические линии как локально крайтчашие

Теорема 26. Рассмотрим некоторую геодезическую на поверхности и выберем на ней произвольную точку. Тогда для достаточно близких к данной точке двух других точек геодезическая является кратчайшей среди всех кривых на поверхности, соединяющих эти точки.



Доказательство: Рассмотрим геодезическую и хотим включить ее в полугеодезическую систему координат. Для этого достаточно через данную точку провести любую регулярную кривую, перпендикулярную нашей геодезической. А затем из каждой точки введенной кривой выпустить в ортогональном направлении геодезические. Таким образом, введена полугеодезическая система координат (s,t), где s натуральный параметр на геодезических, а t - регулярный параметр на введенной регулярной кривой, причем наша геодезическая является одной из координатных линий.

Будем далее обозначать полугеодезическую систему координат как (u^1,u^2) , где $u^2=const$ - геодезические с натуральным параметром u^1 . Метрика в этой окрестности имеет соответствующий вид $g_{11}=1,\ g_{12}=0,\ g_{22}=G\left(u^1,u^2\right)$.

Ясно, что не все кривые на поверхности лежат в рассматриваемой окрестности, а значит и во введенной полугеодезической системе координат. Рассмотрим шар с центром в нашей точке достаточно малого радиуса ε в \mathbb{R}^3 с центром в нашей точке (Рис.21) и еще один шар с тем же центром, но радиусом $\varepsilon/2$. Мы будем рассматривать точки на геодезической, которые в натуральной параметризации отстают от нашей точки не более, чем на $\varepsilon/2$, а значит находятся внутри малого шара. Тогда длина геодезической между этими точками не более, чем ε .

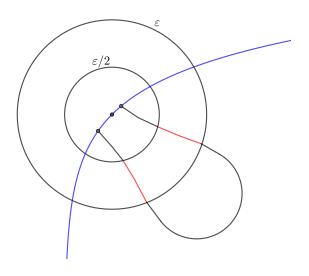


Рис. 21.

Теперь, если кривая вышла за большой шар, то участки между большим и малым шарами (на Рис.21 красные участки) по длине будут больше чем $\varepsilon/2$, а сумма больше чем ε . Таким образом, такие кривые заведомо длиннее, чем рассматриваемый участок геодезической, и так кривые мы не рассматриваем. В данной конструкции остались только те кривые, что лежат внутри большого шара, а значит лежат в области полугеодезических координат.

Пусть мы рассматриваем кривую $(u^1(t),u^2(t))$, лежащую внутри шара радиуса ε и

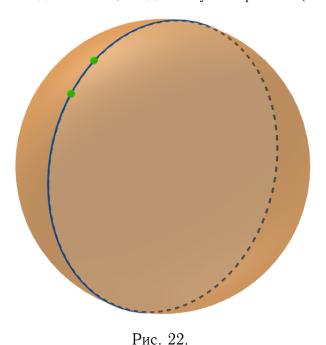


концами имеет точки, лежающие на геодезической и отстающие от рассматриваемой точки не более чем на $\varepsilon/2$. Пусть в данной параметризации конца достигаются при t=a и t=b соответственно и $t\in [a,b]$. Но на геодезической u^1 является натуральным параметром, следовательно, получаем $u^1(a)=s^1$ и $u^1(b)=s^2$, то есть совпадает со значениями натурального параметра на геодезической. Перейдем к рассмотрению длины:

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{g_{ij} u_{t}^{i} u_{t}^{j}} dt = \int_{a}^{b} \sqrt{(u_{t}^{1})^{2} + \underbrace{G(u^{1}, u^{2})}_{>0} (u_{t}^{2})^{2}} dt \geqslant \int_{a}^{b} |u_{t}^{1}| dt \geqslant \left| \int_{a}^{b} u_{t}^{1} dt \right| =$$
$$= |u^{1}(b) - u^{1}(a)| = |s^{2} - s^{1}|.$$

То есть длина любой кривой, соединяющей данные точки, не превосходит длины участка геодезической, соединяющей эти же точки. ■

Локальность здесь очень важна. Например, на сфере выбираем любой меридиан и выбираем две точки, не являющиеся диаметрально противоположными. Тогда эти точки соединяют две геодезические, но длины у них разные (Рис.22).



14.3. Изометрии и изгибания

Ранее мы доказывали теорему Бонне: если у нас заданы первая и вторая квадртичные формы, удовлетворяющие фундаментальным уравнениям, то такая поверхность существует и единственна с точностью до движения. То есть все, что нам позволено делать с поверхностью - движения и повороты.



Теперь рассмотрим ситуацию, когда фиксирована первая квадратичная форма поверхности, а вторая - нет. Такая фиксация мотивирована тем, что первая квадратичная форма определяют всю внутреннюю геометрию поверхности. Что мы можем делать в таком случае?

Определение 43. Изометрией двух поверхностей M_1 и M_2 называется диффеоморфизм $\varphi: M_1 \to M_2$, который сохраняет длины всех кривых.

Различают глобальные и локальные изометрии: если диффеоморфизм глобален и локален соответственно.

Теорема 27. Диффеоморфизм двух поверхностей является изометрией тогда и только тогда, когда метрики этих поверхностей совпадают (локально).

Доказательство: Пусть на M_1 заданы локальные координаты (u^1, u^2) в некоторой области. Так как φ диффеоморфизм, то (u^1, u^2) локальные координаты на M_2 (композиця диффеоморфизмов):

$$\tilde{\bar{r}}(u) = \varphi(\bar{r}(u)).$$

Нам нужно доказать, что $g_{ij}(u) = \tilde{g}_{ij}(u)$. Пусть метрики совпадают. Тогда длина кривой выражается через метрики:

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{g_{ij} u_t^i u_t^j} dt.$$

Но раз координаты на поверхностях одни и те же, то интеграл для одной метрики и для другой совпадают в силу совпадения самих метрик.

Оратно. Пусть дана изометрия:

$$\int_{a}^{t} \sqrt{g_{ij} u_t^i u_t^j} dt = \int_{a}^{t} \sqrt{\tilde{g}_{ij} u_t^i u_t^j} dt, \quad \forall t \in [a, b].$$

Раз интеграл по переменному верхнему пределу тождественно нулевой, то и его производная ноль, то подинтегральная функция ноль. Получаем такое выражение:

$$(g_{ij} - \tilde{g}_{ij}) u_t^i u_t^j = 0.$$

Мы рассматривали произвольное значение на какой-то выбранной кривой. Но и кривая должна быть произвольна, а значит произволен и вектор скорости. Нужно рассмотреть сначала вектор (1,0), это даст $g_{11}=\tilde{g}_{11}$; затем вектор (0,1), это даст $g_{22}=\tilde{g}_{22}$; и наконекц вектор (1,1) с учетом полученного даст $g_{12}=\tilde{g}_{12}$.

Как определить изометричны ли поверхности, существует ли диффеоморфизм. Иначе говоря, если заданы метрики обеих поверхностей, то существует ли замена



координат, после которой метрики совпадут? Вообще говоря, это сложный вопрос, но он решен.

В таких ситуациях уместно искать инварианты поверхностей. Если при изометрии сохраняется метрика, то сохраняются и все функции, которые вычисляются исключительно по метрике. Одной из таких функций является Гауссова кривизна в точке. В каждой точке это число и при замене координат не меняется, число не зависит от координат. Если существует изометрия (замена координат), то эти функции должны совпадать локально. То есть первым, что нужно сделать - вычислить гауссовы кривизны и если они локально не совпадают, то поверхности не могут быть локально изометричны.

Если же функции гауссовых кривизн совпадают $K_1(u^1, u^2) = K_2(v^1, v^2)$, то этого, вообще говоря, недостаточно. Нужны еще соотношения. Для этого Ламе и Бельтрами были введены параметры (функции на поверхности):

$$\Delta_{1}(\varphi,\psi) = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial u^{i}} \frac{\partial \psi}{\partial u^{j}}, \quad \Delta_{1}(\varphi) = \Delta_{1}(\varphi,\varphi).$$

$$\Delta_{2}\left(\varphi\right)=g^{ij}\nabla_{j}\nabla_{i}\varphi=g^{ij}\left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial u^{i}\partial u^{j}}-\Gamma_{ij}^{s}\frac{\partial\varphi}{\partial u^{s}}\right).$$

Выпишем инварианты изометрий:

- 1. *K*:
- 2. $\Delta_1(K)$;
- 3. $\Delta_1(K, \Delta_1(K))$;
- 4. $\Delta_1(\Delta_1(K))$;
- 5. $\Delta_2(K)$;
- 6. $\Delta_1(K, \Delta_2(K))$;
- 7. $\Delta_1(\Delta_2(K))$.

Оказывается, что этого достаточно, что поверхности изометричны. Но алгоритм очень сложный и доказательство его приведено не будет в данном курсе.

Определение 44. Изгибанием называется однопараметрическое непрерывное семейство изометрий $\{\varphi_t\}$, $t \in [0,1]$, $\varphi_0 = id$, $\varphi_1 : M_1 \to M_2$.

Понятие изгибания соответствует нашему естественному пониманию того, что мы можем как то манипулировать предметами, но при этом не растягивая их. Если мы имеем цилиндр или конус, то мы можем разрезать по образующей и уложить в плоскость. Раз изгибания есть семейство изометрий, то все, что связано с первой

103



квадратичной формой, сохранится. Например, геодезическая кривизна. Если при изгибании можно получить плоскость, то все геодезические на поверхности перейдут в прямые, так как на плоскости геодезические только прямые.

Определение 45. Поверхности называются поверхностями постоянной кривизны, если гауссова кривизны всюду одинакова K = const.

Такой поверхностью, например, является сфера.

Теорема 28. Поверхности постоянный кривизны локально изометричны тогда и только тогда, когда у них совпадает гауссова кривизна.

В одну сторону очевидно: если поверхности локально изометричны, то гауссовы кривизны обязаны совпадать как функции, ну а раз они постоянны, то совпадают всюду. А вот в обратную сторону содержательная часть, что для поверхностей постоянной кривизны этого достаточно.



15. Классификация поверхностей постоянной кривизны с точностью до изометрии

15.1. Доказательство теоремы о классификации. Формулы Бибербаха

Продолжим доказательство теоремы 28.

Введем полугеодезическую систему координат, но не общую, а специальную. Через точку на поверхности проведем некоторую геодезическу и возьмем ее в качестве регулярной кривой и в натуральной параметризации. Ортогонально этой геодезической выпустим геодезические, которые будут соответствовать координатным линиям $u^2=const$ с натуральным параметром u^1 . Рассмотренная точка будет иметь координаты (0,0), а начальная геодезическая $u^1=0$ натуральным параметром возьмем u^2 (назначаем, масштабируем). Это полугеодезическая система координат, тогда метрика будет иметь вид

$$ds^{2} = (du^{1})^{2} + G(u^{1}, u^{2}) (du^{2})^{2}.$$

Вычислим гауссову кривизну поверхности в полугеодезических координатах. **Теорема 29** (Бибербаха). *Гауссова кривизна поверхности может быть вычислена по следующим формулам*:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1 \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \Gamma_{21}^1 \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) \right),$$

$$\mathcal{E}\partial e \ g = \det g_{ij}.$$

Доказательство опустим, оно чисто техническое. Применим эту формулу для полугеодезической системы координат. Воспользуемся второй формулой, так как ранее мы доказывали, что $\Gamma_{11}^k=0$. Поэтому имеем:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right).$$

Вычислим отдельно Γ^2_{12} .

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{2s}\left(\frac{\partial g_{s1}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{s2}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^s}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u^1}.$$

Тогда кривизна примет вид:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{G}}{1} \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{(\partial u^1)^2}.$$





Эта формула в общем случае. Теперь будем воспринимать K константой. Обозначим $b=\sqrt{G}$. Тогда имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 b}{(\partial u^1)^2} = -Kb.$$

Это обыкновенное дифференциальное линейное уравнение второго порядка. Нужно рассмотреть всевозможные случаи:

1. K > 0. Общее решение:

$$b\left(u^{1}, u^{2}\right) = C_{1}\left(u^{2}\right)\cos\left(\sqrt{K}u^{1}\right) + C_{2}\left(u^{2}\right)\sin\left(\sqrt{K}u^{1}\right).$$

 $2. \ K < 0. \$ Общее решение:

$$b\left(u^{1}, u^{2}\right) = C_{1}\left(u^{2}\right) \cosh\left(\sqrt{-K}u^{1}\right) + C_{2}\left(u^{2}\right) \sinh\left(\sqrt{-K}u^{1}\right).$$

3. K = 0. Общее решение:

$$b(u^{1}, u^{2}) = C_{1}(u^{2}) + C_{2}(u^{2})u^{1}.$$

Теперь нужно воспользоваться тем, что мы выбирали систему координат специальным образом. При $u^1=0$ кривая $(0,u^2)$ геодезическая и u^2 натуральный параметр на ней. Отсюда следует, что $G(0,u^2)=1$ (квадрат длины скорости). Тогда $b\left(0,u^2\right)=1$. Во всех трех случаях это влечет $C_1\left(u^2\right)=1$. Так C_1 от u^1 не зависит, то это равенство выполнено во всей области.

Mы не использовали тот факт, что эта кривая геодезическая, то есть в натуральном параметре $s=u^2$ должно быть выполнено уравнение геодезических для этой кривой (для веткора скорости (0,1)):

$$0 = u_{ss}^k + \Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j = \Gamma_{22}^k (0, u^2)$$

При k=1:

$$0 = \frac{\partial G}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right) = \frac{\partial b^2}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right) = 2b \left(0, u^2 \right) \frac{\partial b}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right) = 2 \frac{\partial b}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right).$$

Продифференцируем в каждом случае функцию b по u^1 и подставим $u^1=0$:

1. K > 0.

$$\frac{\partial b}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right) = C_2 \left(u^2 \right) \sqrt{K} \Rightarrow C_2 \left(u^2 \right) = 0 \Rightarrow b \left(u^1, u^2 \right) = \cos \left(\sqrt{K} u^1 \right)$$

2. K < 0.

$$\frac{\partial b}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right) = C_2 \left(u^2 \right) \sqrt{-K} \Rightarrow C_2 \left(u^2 \right) = 0 \Rightarrow b \left(u^1, u^2 \right) = \cosh \left(\sqrt{K} u^1 \right)$$
106





3.
$$K = 0$$
.
$$\frac{\partial b}{\partial u^1} \left(0, u^2 \right) = C_2 \left(u^2 \right) \Rightarrow C_2 \left(u^2 \right) = 0 \Rightarrow b \left(u^1, u^2 \right) = 1$$

Это и есть классификация. Выпишем ее в итоговом виде:

1. Любая метрика постоянной положительной кривизны K>0 заменой координат приводится к виду

$$ds^{2} = \left(du^{1}\right)^{2} + \cos^{2}\left(\sqrt{K}u^{1}\right)\left(du^{2}\right)^{2}.$$

2. Любая метрика постоянной отрицательной кривизны K < 0 заменой координат приводится к виду

$$ds^{2} = \left(du^{1}\right)^{2} + \cosh^{2}\left(\sqrt{K}u^{1}\right)\left(du^{2}\right)^{2}.$$

3. Любая метрика постоянной нулевой кривизны K=0 заменой координат приводится к виду

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$$
.

Если гауссова кривизна поверхности постоянна и положительна, то поверхность локально изометрична сфере. Если гауссова кривизна поверхности постоянна и отрицательна, то поверхность локально изометрична геометрии Лобачевского (исключительно локально, так как в \mathbb{R}^3 глобальной реализации на поверхностях геометрии Лобачевского нет). Если гауссова кривизна постоянна и равна нулю, то это геометрия плоскости.

Глобально, геометрия Лобачевского реализуется в модели Пуанкаре на верхней полуплоскости y>0 и с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Необходимо также отметить, что сфера является неизгибаемой в классе C^2 . Не существует изометричных гладких деформаций. Более того, любая замкнутая поверхность с положительной гауссовой кривизной в каждой точке неизгибаема. Для невыпуклых поверхностей это не доказано, нет ни одного примера изгибаемой поверхности на данный момент. Изгибаемость является очень важным вопросом и возникает в различных задачах.

15.2. Ковариантная производная векторного поля вдоль кривой

Рассмотрим векторное поле на поверхности

$$\bar{w}(u) = w^k(u) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}.$$
107





Mы можем ограничить это поле на некоторую регулярную кривую на поверхности, то есть рассматривать векторное поле вдоль кривой. Если на кривой параметр t, то:

$$\bar{w}(t) = w^k(u) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} \in T_{\bar{r}(t)} M.$$

Хотим научиться дифференцировать векторное поле вдоль кривой:

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{dw^k}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} + w^k \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^k \partial u^i} u_t^i = \left(\frac{dw^l}{dt} + \Gamma_{ki}^l w^k u_t^i\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^l} + b_{ki} w^k u_t^i \bar{m}.$$

Как видно из разложения по базису, производная не лежит в касательном пространстве. А мы под векторными полями подразумеваем вектора лежащие в касательной плоскости. Заметим, что компонента касательного пространства зависит только от метрики и от самого векторного поля.

Определение 46. Ковариантной производной векторного поля на поверхности называется

$$\frac{D\bar{w}}{dt} = \left(w_t^k + \Gamma_{ij}^k w^i u_t^j\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = u_t^j \left(\frac{\partial w^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^k w^i\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = u_t^j \left(\nabla_j \bar{w}\right)^k \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = \left(\nabla_{u_t} \bar{w}\right)^k \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = \nabla_{u_t} \bar{w}$$

Свойства ковариантной производной:

1. Линейность:

$$\frac{D\left(\lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2\right)}{dt} = \lambda_1 \frac{D\bar{w}_1}{dt} + \lambda_2 \frac{D\bar{w}_2}{dt}.$$

2. Правило Лейбница для умножения на функцию:

$$\frac{D(f(u)\bar{w}(u))}{dt} = \frac{df}{du}\bar{w} + f\frac{D\bar{w}}{dt}.$$

Определение 47. Векторное поле называется ковариантно постоянным (или параллельным) вдоль кривой, если ковариантная производная равна нулю.

Условие обнуления ковариантной производной эквивалентно тому, что производная векторного поля вдоль кривой коллинеарна нормали поверхности (это следует из разложения по базису). У нас есть в касательном пространстве естественные поля: поле скоростей, поле тангенциальных нормалей.

Рассмотрим для поля скоростей: когда поле скоростей в натуральной параметризации ковариантно постоянно вдоль кривой? Пусть в натуральной параметризации вектор скорости (u_s^1, u_s^2) . Выпишем условие ковариантно постоянного поля:

$$0 = \frac{Du_s^k}{ds} = u_{ss}^k + \Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j = 0,$$







то есть наша кривая является геодезической. Мы получили, что кривая является геодезической тогда и только тогда, когда поле ее скоростей ковариантно постоянно.

Выпишем условие ковариантно постоянного поля в локальных координатах:

$$w_t^k + \Gamma_{ij}^k w^i u_t^j = 0.$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений. Если у нас задана точка на поверхности, а в ее касательном пространстве задан некоторый вектор в качестве начальных данных, тогда по теореме о существования и единственности следует, что существует единственно векторное поле такое, что в начальной точке совпадает с начальными данными.

Если поле ковариантно постоянно, то еще говорят, что происходит параллельный перенос. При параллельном переносе сохраняются длины и скорости, то есть скалярное произведение. Рассмотрим скалярное произведение (\bar{w},\bar{w}) и его производную $2(\bar{w}_t,\bar{w})$, применив условие параллельного переноса (касательной составляющей нет): $\bar{w}_t = \lambda \bar{m}$, но векторное поле из касательного пространства, а значит последнее скалярное произведение нулевое, тогда $(\bar{w},\bar{w}) = const.$ Теперь, если мы хотим рассмотреть перенесение двух ковариантно постоянных полей, то

$$(\bar{w} + \bar{v}, \bar{w} + \bar{v}) = (\bar{w}, \bar{w}) + (\bar{v}, \bar{v}) + 2(\bar{w}, \bar{v}).$$

Из этой формулы видно, что слагаемое (\bar{w},\bar{v}) также постоянно. Таким образом, теорема о существовании и единственности дает отображение между касательными пространствами, которое является изометрией.

Пусть задано векторное поле \bar{w} на поверхности и задан некоторый вектор \bar{v} в касательном пространстве некоторой точки поверхности. Хотим определеить ковариантное дифференцирование на поверхности. Нужно провести некоторую регулярную кривую на поверности, касающуюся вектора \bar{v} . Найдя значение ковариантной производной в момент t=0, и определяется ковариантной производной векторного поля на поверхности. Легко показать, что от выбранной кривой это определение не зависит. Таким образом, получается формула:

$$\nabla_{\bar{v}}\bar{w} = v^s \left(\frac{\partial w^k}{\partial u^s} + \Gamma^k_{is} w^i\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}.$$

То есть получили формулу для дифференцирования векторного поля вдоль другого векторного поля на поверхности.

Свойства такого ковариантного дифференцирования сохраняются. Появляется линейность и по векторному полю \bar{v} , только здесь уже можно умножать на функции, а не константы. Ковариантное дифференцирование скалярного произведения:

$$\nabla_{\bar{v}} (\bar{w}_1, \bar{w}_2) = (\nabla_{\bar{v}} \bar{w}_1, \bar{w}_2) + (\bar{w}_1, \nabla_{\bar{v}} \bar{w}_2).$$





Можно рассмотреть ковариантную производную на базисных векторах $\partial \bar{r}/\partial u^k$. В координатах у этих векторах на k месте стоит единица, а на всех остальных нули:

$$\nabla_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k} = v^i \Gamma^s_{ki} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^s}.$$

Вспомним уравнения Френе для кривой, лежащей на поверхности:

$$\begin{pmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{m}(s) \\ \bar{c}(s) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}(s) \\ \bar{m}(s) \\ \bar{c}(s) \end{pmatrix}.$$

Вектора \bar{v} и \bar{c} являются векторными полями и можно рассмотреть их ковариантную производную вдоль кривой:

$$\frac{D\bar{v}}{ds} = \beta \bar{c}; \qquad \frac{D\bar{v}}{ds} = -\beta \bar{v}.$$

С точки зрения ковариантного дифференцирования эти уравнения напоминают уравнения Френе на плоскости. Это позволяет ввести геодезическую кривизну со знаком. Обозначим через $\bar{n}=-\bar{c}$. В каждой касательной плоскости положительная ориентация задается своим стандартным базисом $\partial \bar{r}/\partial u^1, \partial \bar{r}/\partial u^2$. Коориентриванной кривой на плоскости будем называть кривую, в каждой точке которой задан ориентированный базис \bar{v}, \bar{n} . Тогда геодезическая кривизна со знаком определяется так:

$$k_g = \left(\frac{D\bar{v}}{ds}, \bar{n}\right).$$

15.3. Теорема Гаусса-Бонне

Теорема 30 (Гаусса-Бонне). Пусть на регулярной поверхности задан многоугольник, ограничивающий односвязную область Ω , его стороны есть некоторые регулярные кривые на поверхности. Ориентацию в каждой касательной плоскости задает стандартный базис. А для каждой стороны выбран репер \bar{v}, \bar{n} , ориентацию которого совпадает с ориентацией стандартного базиса. Определена геодезическая кривизна со знаком k_q . Тогда

$$\int_{\Omega} Kd\sigma + \oint k_g ds + \sum_i \Delta \psi_i = 2\pi,$$

где K - гауссова кривизна, $d\sigma$ - элемент площади, $\Delta \psi$ - углы многоугольника (углы между касательными векторами соседних сторон в вершине; Puc.23).



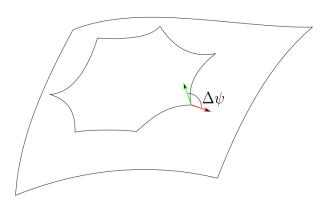


Рис. 23.

Если область неодносвязная (поверхность рода g>1 Рис.24), то правая часть изменится на $2\pi\chi\left(\Omega\right)$, где $\chi\left(\Omega\right)$ - эйлерова характеристика. Если двумерная поверхность замкнутая, ориентируемая, то теорема имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega}K\underbrace{\sqrt{g}du^{1}du^{2}}_{=d\sigma}=2\pi\chi\left(\Omega\right).$$

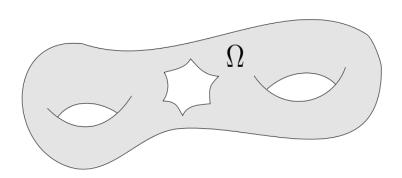


Рис. 24.

Если многоугольник геодезический, то есть стороны являются геодезическими, то исчезает среднее слагаемое. Если поверхность постоянной кривизны, то первое слагаемое превращается в KS, где S - площадь области Ω .

Доказательство: Первая идея заключается в том, чтобы ввести полугеодезическую систему координат в области. Чтобы обощить, нужно применять симлициальное разбиение и на каждом треугольнике применять теорему Гаусса-Бонне. Эйлерова характеристика появится из числа этих треугольников.

Пусть задана полугеодезическая система координат в области многоугольника:

$$ds^{2} = (du^{1})^{2} + G(u^{1}, u^{2}) (du^{2})^{2}.$$

Вектор скорости в натуральной параметризации (u_s^1,u_s^2) имеет единичную длину, поэтому получаем

$$(u_s^1)^2 + G(u_s^2)^2 = 1.$$





Отсюда несложно найти явный вид для $\bar{n}=-\bar{c}$:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(-Gu_s^2, u_s^1 \right).$$

Ориентация верна, так как, если рассмотреть определитель из векторов \bar{v} и $\sqrt{G}\bar{n}$, то получим 1. Найдем теперь геодезическую кривизну:

$$k_g = \left(\frac{D\bar{v}}{ds}, \bar{n}\right) = \left(\left(u_{ss}^k + \Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^k}, -\sqrt{G}u_s^2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} + \frac{u_s^1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2}\right) = -u_{ss}^1 \sqrt{G}u_s^2 - \sqrt{G}\Gamma_{ij}^1 u_s^i u_s^j u_s^2 + u_{ss}^2 \sqrt{G}u_s^1 + \sqrt{G}\Gamma_{ij}^2 u_s^i u_s^j u_s^1.$$

До конца вычисления проводить не будем. Надо сказать, что нужно оставить только ненулевые символы Кристоффеля и оставшееся выражение представить в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u_s^1} u_s^2,$$

где φ - угол между вектором \bar{v} и $\partial \bar{r}/\partial u^1$. Для этого нужно заметить, что $\cos \varphi = u_s^1$, и $\sin \varphi = \sqrt{G} u_s^2$. Отсюда находится $\tan \varphi$ и $\arctan s$.

После нужно проинтегрировать по контуру и применить теорму Стокса (формула Грина):

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\partial G}{\partial u_s^1} du^2 = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\left(\partial u^1\right)^2} du^1 du^2.$$

Если в последнем подинтегральном выражении домножить и поделить на \sqrt{G} , то получим гауссову кривизну в полугеодезических координатах.



