Материалы к семинару по уравнениям в частных производных -28.04.2020

Пространства Соболева. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона.

Задачник под ред. Шамаева - параграф 1.2 и 5.3, задачник под ред. Владимирова - параграфы 4 и 19

Необходимость рассмотрения решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в областях с меньшей гладкостью, чем требуют условия разрешимости для таких задач в их классической постановке, диктуется практикой. Естественно также предположить, что там, где граница области теряет гладкость, гладкость теряет и решение. Например, уравнения Пуассона описывают электрическое поле и хорошо известно явление огней святого Эльма, возникающее вблизи заостренных предметов (говоря математическим языком, задача ставится в круге с вырезанным сектором). Также можно привести пример задачи о распределении напряжений в областях с трещинами (напряжения растут у вершины трещины).

В рамках классической теории такие задачи рассматривать нельзя.

1. Заметим, что если мы имеем дело с классической задачей Дирихле

$$\nabla u = f,\, x \in \Omega, \quad u|_{x\in\partial\Omega} = \phi, \quad f \in C(\Omega), \quad \phi \in C(\partial\Omega),$$

то можно умножить обе части уравнения на $v \in C_0^\infty(\Omega)$ (бесконечно дифференцируемая функция с носителем, содержащимся в Ω), проинтегрировать по области и применить формулу Грина. Это можно сделать, так как мы находимся в рамках классической постановки задачи и граница области гладкая. Интеграл по $\partial\Omega$ равен нулю, получим

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = -\int\limits_{\Omega} f v \, dx. \tag{$*$}$$

Обратим внимание, что мы не пользовались бесконечной дифференцируемостью v, нам нужна только первая производная.

Идея состоит в том, чтобы в духе теории обобщенных функция принять (*) за определение при условии, что тождество выполняется для любой v из некого пространства основных функций. То есть мы теперь говорим о решении, как о функционале.

При такой постановке нигде не используется гладкость границы области, вторые производные решения не нужны, а от градиента решения и f требуется только интегрируемость.

Это очень нестрогие рассуждения, потому что пока, например, неясно, как быть с краевыми условиями. Также неясно, будет ли вообще существовать решение такой задачи, если мы откажемся от нужной гладкости решения. Собственно, в дальнейшем нужно навести математическую строгость на эти рассуждения.

2. Как правило, когда мы говорим об обобщенных (или слабых) решениях (не только уравнения Пуассона, а вообще), мы уходим от аппарата дифференциальных уравнений к аппарату функционального анализа. Искусство состоит в том, чтобы правильно выбрать пространство решений и применить какую-нибудь теорему, гарантирующую существование и единственность решения.

Такой теоремой очень часто является **теорема Рисса:**

> *Пусть H гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)_H$. Если $l(u)$ – линейный ограниченный функционал на H, то существует единственный элемент $h \in H$ такой, что $l(u) = (h, u)$.*

То есть нам надо выбрать подходящее нашей задаче гильбертово пространство, а остальное достанется даром.

Пространства Соболева H^1 и H_0^1 служат именно этому. Связанные с ними определения можно найти в параграфе 1.2 в Шамаеве. Хочу подчеркнуть, что обобщенные производные по Соболеву определяются точно так же, как мы определяли обобщенные производные раньше, только вместо пробных функций, с носителем, компактным в $\mathbb{R}^n$ рассматриваются функции с носителем в ограниченной области Ω.

В пространство H^1 входят функции, принадлежащие L_2 такие, что их первые обобщенные производные по Соболеву принадлежат L_2. Это требуется для того, чтобы сделать пространство гильбертовым. Например, функция Хевисайда $\theta(x)$ не принадлежит H^1, так как ее обобщенная производная $\delta(x)$ не является интегрируемой.

Можно рассмотреть пространства H^s, $s \in \mathbb{N}$, когда условия принадлежности L_2 накладывается на s первых обобщенных производных. Пространства Соболева могут быть устроены достаточно хитро и их конструкция зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^n$, которому принадлежит Ω.

Например, при $n = 1$ всякая функция из $H^1([a, b])$ непрерывна (обратное неверно, см. задачу 1.10), а в пространствах большей размерности она даже не обязана быть ограниченной (классический пример – $f = |x|^\alpha$ в $B_1^n(0)$, задача 1.8). Подробно такие задачи рассмотрим в следующий раз.

Полезно иметь в виду **теорему вложения Соболева,** которая говорит о том, что

$H^s(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ *при* $s > \frac{n}{2}$.

То есть существование достаточного числа интегрируемых с квадратом обобщенных производных обеспечивает непрерывность функции.

Неравенство Фридрихса устанавливает для функций из H_0^1 эквивалентность норм H^1 и H_0^1.

Следует помнить, что оно справедливо для **ограниченной** области и константа $C(\Omega)$ зависит от области, но не зависит от конкретной u. Если область неограничена, то неравенство Фридрихса, вообще говоря, не выполняется. Однако, если мы вспомним, как оно доказывается, то поймем, что использовалась ограниченность только по одному координатному направлению. То есть для полосы оно справедливо, а для координатного угла – нет.

3. Строгое **определение обобщенных решений задач Дирихле и Неймана** есть в п.5.3 в Шамаеве.

Приятным моментом является то, что нахождение решений таких задач **конструктивно.** Существует эквивалентная **вариационная** постановка, которая, фактически, является алгоритмом нахождения решения, который можно реализовать, например, численно. С другой стороны, иногда целью является именно нахождение инфимумов от интегральных функционалов, и исходную задачу бывает проще перевести в задачу Дирихле.

4. **Соотношение между классическим и обобщенным решениями.**

Понятно, что если задача имеет обобщенное решение, то она не обязана иметь классического. Но когда мы переходим от классической постановки задачи к обобщенной, мы всегда надеемся на то, что если задача имеет классическое решение, то она имеет и обобщенное, совпадающее с классическим. К сожалению, в данном случае это не так. Проблема в том, что краевое условие, функция ϕ, в классической постановке задается только на границе области, а в обобщенной постановке – это функция из $H^1(\Omega)$. То есть возникает вопрос о возможности продолжения функции с границы во всю область как функции из $H^1(\Omega)$. Если это можно сделать, то да, если задача обладает классическим решением, то оно же является и обобщенным. В этом случае говорят, что ϕ является следом функции из $H^1(\Omega)$.

Для круга вопрос о том, можно ли продолжить функцию с границы с соблюдением нужной гладкости, достаточно прост. Нам помогает переход в полярные координаты. Задачи 4.79 и 4.80 из Владимирова дают полный ответ. Действительно, выразим $|\nabla f|^2+|f|^2$ в полярных координатах. Нам надо проверить, что интеграл по единичному кругу от этой функции сходится. Сначала надо вспомнить, что $|\nabla f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2$, взять интеграл, а потом исследовать вопрос о сходимости ряда.

В задаче 4.80 содержится критерий того, что функцию можно продолжить с границы. Действительно, если

$$\sum_k k(a_k^2+b_k^2)<\infty, \qquad (**)$$

то нужная функция – это f из задачи 4.78, мы уже проверили, что она при этом условии – из $H^1(B_1^2(0))$.

Задача 19.27 из Владимирова дает возможность попрактиковаться в использовании этого условия. Полезно помнить, что существует связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее коэффициентов Фурье. В частности, условие (**) заведомо не выполнено для разрывной функции.

5. Итак, если нам надо решить обобщенную задачу

$$\nabla u=f, \quad x\in\Omega, \quad u|_{x\in\partial\Omega}=\phi, \quad f\in L_2(\Omega), \quad \phi \text{ – след функции из } H^1(\partial\Omega),$$

то нам надо проверить, нельзя ли построить решение в классическом смысле. Если да, то оно совпадает с обобщенным.

Если область можно "поправить"на множество меры нуль так, чтобы в "поправленной"области задача могла быть решена в классическом смысле, но найденное решение совпадает с обобщенным. Речь может идти о добавлении точки или отрезка. Действительно, значение интегралов не меняется от этого (см. задачу 5.50 из Шамаева (в условии, кстати, опечатка, найдите ее!)).

6. Если нужно решить задачу в вариационной постановке, то надо переписать ее, руководствуясь алгоритмом на стр. 65 (Шамаев), в виде (5.5), а дальше решать как выше.

Надо понимать, что задач, которые могут быть решены явно, очень мало, они, как правило, могут быть сведены к классической постановке.

Например, **5.52 (Шамаев).** Переобозначим $f=\phi$, чтобы обозначения совпали с (5.5). Здесь $\phi=x_1^2$, $f=0$. Итак, нам надо решить задачу

$$\nabla u=0, \quad x\in B_1^2(0), \quad u|_{x\in S_1^2(0)}=x_1^2=\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta.$$

Здесь θ – полярный угол. Решаем, как в прошлом семестре. Согласно (7) п.16 во Владимирове,

$$u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\cos 2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2).$$

Чтобы получить ответ, надо найти $|\nabla u|^2=x_1^2+x_2^2$ и посчитать

$$\int\limits_{B_1^2(0)}|\nabla u|^2\,dx=2\pi\int\limits_0^1\rho^3\,d\rho=\frac{\pi}{2}.$$

Задачи для решения.

Владимиров: 4.79, 4.80 (идея обсуждалась, провести вычисления), 19.27 (а, б, в), 19.23, 19.24.

Шамаев: 5.50, 5.53, 5.54, 5.47 (есть решение, разобрать его).