$Au = \Delta((1-|x|^2)u)$ $\quad P_n \to P_n$

$Au = P$ $\quad A^{-1}P = u$ — мн-н $\quad (1-|x|^2)u(x)$

$\begin{cases} \Delta u = P & \text{на } B \\ u|_{\partial B} = G \end{cases}$ $\quad P, G$ — мн-ны

Теорема $\forall g \in C(\partial B)$ $\exists!$ решен

$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } B \\ u|_{\partial B} = g \end{cases}$

$\{ K \subset \mathbb{R}^d$, $C(K) \supset A$, x_k, Стоун-Вейерш., $\bar{A} = C(K)$

Д-во: $G_n \rightrightarrows g$ на ∂B, мн-ны

$\begin{cases} \Delta u_n = 0 \\ u_n|_{\partial B} = G_n \end{cases}$ $\quad u_n$

u_n $\quad \max_{\bar{B}} |u_n - u_m| \le \max_{\partial B} |G_n - G_m|$

$u_n \rightrightarrows u$ $\quad u \in C(\bar{B})$

$B' \subset B$ $\quad \max_{B'} |u_n^{(k)} - u_m^{(k)}| \le C \cdot \max_{\bar{B}} |u_n - u_m|$

$\Rightarrow$ $u_n^{(k)} \rightrightarrows u^{(k)}$ $\quad C^\infty(B)$

$\Delta u = 0.$

Сл: $\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } B \\ u|_{\partial B} = g \end{cases}$ $\quad g \in C(\partial B)$, $f \in C^2(\bar{B})$

Д: f — продол на $\mathbb{R}^d$ до ф-ции класса C^2 с комп носит.

$v(x) = \int G(x,y) f(y)\,dy$

G — ф-ция реш опер Лапласа $\quad G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| & d=2 \\ \frac{-C_d}{|x-y|^{d-2}} & d>2 \end{cases}$

Упр: $\Delta v = f$. $\quad \begin{cases} \Delta(u-v) = 0 \\ u-v|_{\partial B} = g - v|_{\partial B} \end{cases}$

Метод Перрона

Класс субгарм ф-ций на Ω: $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u \geq 0$.

Обобщ: $u \in C(\bar{\Omega})$ наз субгарм, если
$\forall \bar{B} \subset \Omega$ $\forall$ гарм v на B из $u \le v$ на ∂B
следует $u \le v$ на B.

$u'' \geq 0$ $\quad$ Аналогично опр супергарм.

$|x|$

Ут: $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ старое и новое опр эквив.

Д: 1) $\Delta u \geq 0$ $\quad B$: $\Delta v = 0$, $v \geq u$ на ∂B $\overset{?}{\Rightarrow}$ $v \geq u$ на B

пр-п сравн

2) $\forall B$ $\forall v$ $\Delta v = 0$ $v \geq u$ на ∂B $\Rightarrow$ $\boxed{v \geq u}$ на B !

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $\Delta u \geq 0$ $\quad v - u$

от против $\exists B$: $\Delta u < 0$ на B $\quad \Delta u < 0$

$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial B} = u \end{cases}$ $\quad v - u|_{\partial B} = 0$

$\Delta(v-u) = -\Delta u > 0$

$v - u \le 0$ $\quad v \le u$, но $v \geq u$

$\Rightarrow$ $v = u$ на B $\quad \Delta u = 0 \Rightarrow$ пр-ие.

Ω на $\partial\Omega$ $\quad g \in C(\partial\Omega)$

$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$ $\quad$ Идея метода Перрона: $S_g = \{ u \in C(\bar{\Omega})$: 1) субгарм на Ω; 2) $u \le g$ на $\partial\Omega \}$

$u(x) = \sup_{v \in S_g} v(x)$ — искомое реш з Дирихле. (и для этого треб т. пр-п max.)

$Lu = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu =$

$= \operatorname{tr}(AD^2u) + \langle b, \nabla u \rangle + cu$

$\boxed{A = A^t}$ $\quad \boxed{A \geq 0 \\ c \le 0}$ $\quad \langle A\xi, \xi \rangle \geq 0$

$A(x) = (a^{ij}(x))_{1 \le i,j \le d}$

$\boxed{x_0 \text{ — т. лок max } u \Rightarrow (Lu)(x_0) \le 0. \quad \nabla u(x_0) = 0 \quad u(x_0) \geq 0}$!

$D^2u \le 0$ $\quad$ т.о. $\operatorname{tr}(A(x_0) D^2u(x_0)) \le 0$?

$\lambda_1(x_0) u_{x_1x_1}(x_0) + \ldots + \lambda_n(x_0) u_{x_nx_n}(x_0) \le 0$

$u_{x_ix_i} = \langle D^2u\, e_i, e_i \rangle \le 0$

$\boxed{Lu > 0 \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad u|_{\partial\Omega} \le 0 \Rightarrow u \le 0 \text{ в } \Omega}$

Ω $\quad x_0$ $\quad u(x_0) > 0$ max $\quad Lu(x_0) \le 0$, но $Lu(x_0) > 0$ пр-ие.

$Lu(x_0) \le 0$ в т неотр max u

⑤ $L: C^\infty(\Omega) \to \mathcal{F}(\Omega)$

1) L — линейн
2) x_0 — т. лок max u и $u(x_0) \geq 0$ $\Rightarrow$ $Lu(x_0) \le 0$.

$\Rightarrow$ $Lu = \operatorname{tr}(AD^2u) + \langle b, \nabla u \rangle + cu.$

$A = A^t$, $A \geq 0$, $c \le 0$.

x_0 $\quad u(x)$: $\quad Lu(x_0) = 0$

1 $\quad L1 \le 0$

$u(x_0) = 0$ $\quad \nabla u(x_0) = 0$ $\quad D^2u(x_0) = 0$

$\boxed{u(x) = \bar{o}(|x-x_0|^2) \quad x \to x_0}$ $\quad |x-x_0|^2(\bar{o}(1) - \varepsilon)$, $x \to x_0$

$Lu(x_0) \overset{?}{=} 0$ $\quad u(x) - \varepsilon|x-x_0|^2 = v(x)$

в т x_0 лок max

$(Lv)(x_0) \le 0$ $\quad (Lu)(x_0) - \varepsilon (L|x-x_0|^2)(x_0) \le 0$!

$\varepsilon \to 0$ $\quad (Lu)(x_0) \le 0$

$-u$ $\quad -(Lu)(x_0) \le 0$ $\quad \Rightarrow \boxed{Lu(x_0) = 0}$

$\bar{o}(|x-x_0|^2) = u(x) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), x-x_0 \rangle - \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle$

$\operatorname{Ker} \ell \oplus \langle v \rangle = X$ $\quad \ell(x - \lambda v) = 0$, $\ell(x) = \lambda \ell(v)$.

$0 = L\left(u - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle - \frac{1}{2}\langle D^2u(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle\right)$

$Lu = u(x_0)(L1)(x_0) + \langle L(x-x_0)(x_0), \nabla u(x_0) \rangle +$ $\quad$ ($c(x_0)$, $b(x_0)$)

$+ \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A D^2u(x_0))$

A $\quad a^{ij} = L((x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j))$

$c \le 0$ $\quad c = L1 \le 0$

$A \geq 0$ $\quad L$ $\quad \langle A\xi, \xi \rangle = L\langle x - x_0, \xi \rangle^2 \geq 0$

$-\langle x - x_0, \xi \rangle^2$ в т x_0 max

$f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ $\quad C^\alpha$

$\int_{\mathbb{R}^d} \ldots$ $\quad$ (C)

Кл опр $\quad \Delta u \geq 0$ $\quad u \in C^2(\Omega)$

Об. опр $\quad B$: $\Delta v = 0$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$ $\Rightarrow$ $v \geq u$ в B

? $\quad u \in C(\bar{\Omega})$ $\quad \forall \varphi \geq 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\quad \int_\Omega u \Delta\varphi\, dx \geq 0$

по частям

В кл случ $u \in C^2$ $\quad \int_\Omega (\Delta u) \varphi\, dx \geq 0$ $\quad \forall \varphi \geq 0$

$\Rightarrow \Delta u \geq 0$