ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Теории вероятностей

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Актуарный анализ договоров страхования жизни для логистической модели смертности

Выполнил студент
609 группы
Бичаев Роман Михайлович

____
подпись студента

Научный руководитель:
проф. Фалин Геннадий Иванович

____
подпись научного руководителя

Москва, 2021 г.

Оглавление

1 Введение

Пусть T — время жизни человека из некоторой группы людей. Основной предположение актуарной математики заключается в том, что T — случайная величина. Обозначим через $F(x) = \mathsf{P}(T < x)$ функцию распределения этой величины, а через $f(x)$ соответствующую ей плотность. Пусть также $s(x) \equiv 1 - F(x)$ — функция выживания. Тогда интенсивность смертности определяется как (см. [1])

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{s(x)}.$$

В реальных статистических данных относительно смертности или числа доживших до заданного возраста лиц можно найти определенные закономерности. Они, в свою очередь, позволяют задать функцию выживания или интенсивность смертности простыми аналитическими формулами. Подобные аналитические законы чрезвычайно важны для сглаживания статистических данных и упрощения актуарных расчетов.

На протяжении долгого времени ученые пробовали подобрать аналитические законы смертности, подходящие для решения прикладных задач. В 1825 году Гомпертц предложил модель, учитывающую изменение интенсивности смертности со временем

$$\mu_x = Be^{\alpha x}.$$

Возможные значения параметров зависят от рассматриваемой группы и могут быть равны, например, $B = 0.0000843$, $\alpha = 0.0831$ (см. [7]). График интенсивности смертности для этих параметров представлен на рисунке 1.

В 1867 году Мэйкам предложил модель, учитывающую как изменение смертности со временем, так и факторы, не зависящие от возраста (влияние несчастных случаев)

$$\mu_x = A + Be^{\alpha x}. \tag{1}$$

Возможные значения параметров зависят от рассматриваемой группы и могут быть равны, например, $A = 4.27502400 \cdot 10^{-4}$, $B = 1.35972296 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 1.03699885 \cdot 10^{-1}$ (см. раздел 4.1). График интенсивности смертности для этих значений представлен на рисунке 2.

В 1932 году Перкс предложил модель, которая учитывает замедление роста смертности на старших возрастах

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + De^{\alpha x}}. \tag{2}$$

Эта модель называется логистическим законом смертности. Возможные варианты значений параметров: $A = 0$, $B = 8.4 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 0.0832$, $D = 2.1212 \cdot 10^{-9}$ (см. [7]). График интенсивности смертности для этих параметров представлен на рисунке 3.

В 1951 году Вейбул предложил следующую модель

$$\mu_x = \alpha x^{\beta}.$$

Возможные значения параметров зависят от рассматриваемой группы и могут быть равны, например, $\alpha = 4.1 \cdot 10^{-10}$, $\beta = 4.25$ (см. [7]). График интенсивности смертности для этих параметров представлен на рисунке 4.

В 1980 году Хелигмен и Поллард предложили более сложную модель

$$\frac{q_x}{1-q_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x,$$

где q_x — вероятность индивида, дожившего до x лет, умереть в течение следующего года. В статье [9] автор замечает, что для высоких возрастов первые два слагаемых пренебрежимо малы, поэтому закон можно свести к форме $\mathrm{logit}(q_x) = \alpha + \beta x$, где $\mathrm{logit}(q) = \ln \frac{q}{1-q}$, $\alpha = \ln G$, $\beta = \ln H$. Небольшими рассуждениями автор доказывает, что асимптотическое поведение этой модели для интенсивности смертности линейно: $\mu_x = \alpha - \frac{1}{2}\beta + \beta x$.

В оригинальной статье [8] авторы исследуют приближение этим законом популяционной статистики населения Австралии за 1946-48, 1960-62 и 1970-72 годы. Значения параметров получались в пределах $0.0000196 \leq G \leq 0.0000862$ и $1.0970 \leq H \leq 1.1136$.

В статье [9] Thatcher пишет, что указанные выше модели хорошо приближают реальные данные и почти близки друг к другу на возрастах, где сконцентрирована большая часть смертей. Однако на больших возрастах эти модели ведут себя по-разному, потому что имеют разное асимптотическое поведение — экспоненциальное, степенное, линейное.

В статье [10] авторы утверждают, что разница в описании больших возрастов была давно известна, и до того момента не была хорошо изучена, так как не хватало подходящих данных. В этой же статье проводится анализ для возрастов от 80 до 120 лет некоторых аналитических законов смертности.

На рисунке 5 показано разное поведение нескольких описанных выше законов с параметрами, полученными в статье [10], для базы данных мужчин за 1980-90 годы. Параметры для закона Гомпертца равны $B = 1.02750 \cdot 10^{-4}, \alpha = 8.59946 \cdot 10^{-2}$. Параметры для логистического закона равны $A = 9.93451 \cdot 10^{-6}$, $B = 2.9926535978289682 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 1.02220 \cdot 10^{-1}$, $D = 2.4593437424631164 \cdot 10^{-5}$. Параметры для закона Вейбулла равны $\alpha = 5.90111 \cdot 10^{-16}$, $\beta = 7.47301$. Параметры для закона Хелигмена и Полларда равны $G = 5.64065 \cdot 10^{-5}$, $H = 1.099202$. Рисунок 5 иллюстрирует экспоненциальное, степенное и линейное поведение функций.

С точки зрения Thatcher (см. [9]) для описания реальных данных смертности больше всего подходит логистический закон. Согласно работе [9] существует несколько теорий, которые это объясняют.

Во-первых, логистический закон можно рассматривать как закон смертности в неоднородной популяции. В 1959 году Beard в своей работе [2] доказал, что если смертность в каждой группе этой популяции подчинена закону Мэйкама с параметрами A, B, α, а параметр B имеет гамма-распределение, то закон смертности всей популяции будет логистическим. Подробнее это свойство будет рассмотрено далее.

Во-вторых, в 1976 году Le Bras предположил, что старение может быть смоделировано случайным процессом, где индивиды в случайные моменты времени переходят по цепочке ухудшающихся состояний. В начальный момент времени все индивиды находятся в одном однородном состоянии. По истечении x лет однородное состояние становится неоднородным, и при определенных предположениях средняя интенсивность смертности подчиняется логистическому закону.

В-третьих, в своей работе [9] Thatcher ссылается на биологическую теорию старения. Согласно ей у организмов существуют функциональные резервы, которые тратятся на непосредственное выживание, размножение, восстановление и на «технический уход». Объем этих резервов уменьшается по достижении репродуктивного возраста. Причиной этого служат гены с противоположными фенотипическими эффектами — они поддерживаются в популяции благодаря их положительному эффекту в молодом возрасте, несмотря на негативные эффекты в позднем (антагонистическая плейотропия). Также причиной уменьшения резервов является накопление вредных мутаций. Казалось бы экспоненциальное увеличение смертности соответствует описываемому процессу, однако, эксперименты с плодовыми мошками показали, что их интенсивность смертности со временем не возрастает, а выходит на плато и может убывать. В 1996 году Mueller и Rose построили несколько математических моделей, которые объясняли бы появление плато согласно эффектам, описанным выше. По их результатам это возможно, если вероятность смерти в течение следующего года меньше единицы; тогда интенсивность смертности стремится к конечному пределу. Эта теория весьма спорная, но по мнению Thatcher (см. [9]), если аргументы Mueller и Rose (возможно, с некоторыми добавлениями) применить к людям, то получится биологическая причина для ограниченности интенсивности смертности сверху — как в логистическом законе.

Цель данной работы — исследовать свойства логистического закона смертности, а также получить формулы для необходимых в актуарных расчетах упрощающих функций в случае логистического закона вида

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x}}.$$

Направление исследования упрощающих функций возникло в статье [11] для закона Мэйкама. Анализ логистического закона продолжает работу в этом направлении, так как в отличие от закона Мэйкама, где популяция однородна, логистический закон предполагает неоднородную популяцию. Таким образом, данная работа — обобщение результатов, полученных для закона Мэйкама в статье [11].

Еще одна цель этой работы — иллюстрация отличий логистического закона и закона Мэйкама. Для этого получены формулы разовой нетто-премии, периодической нетто-премии, а также резервов для временного страхования жизни. Вычислительные эксперименты показали, что применение логистической модели может уменьшить размеры необходимых резервов. Так, использование этой модели может привести к послаблениям со стороны вышестоящих инстанций в отношении требований резервов для страховых компаний.

Далее работа устроена следующим образом. В разделе 2 показано, как можно моделировать время жизни в логистической модели. Также доказано необходимое и достаточное условие соответствия смертности неоднородной популяции логистическому закону в предположении, что каждая группа популяции подчинена закону Мэйкама со случайным параметром B (в [2] доказано только достаточное условие). Дополнительно рассмотрен случай уменьшения случайной составляющей интенсивности смертности. В разделе 3 рассматривается частный случай логистического закона, когда коэффициенты B и D равны (см. [9]). Для него сформулированы и доказаны математические факты, с помощью которых необходимые в актуарной математике упрощающие функции выражаются через гипергеометрическую функцию, которую можно посчитать с помощью современных статистических пакетов. В разделе 4 для временного страхования жизни проводится расчет разовых нетто-премий и резервов в предположении логистического закона смертности. Дополнительно для сравнения различий на старших возрастах, проведены расчеты тех же величин для закона Мэйкама. Для сопоставимости параметры обоих законов подобраны по части данных о смертности населения Англии и Уэльса [13]. Для проведения этих расчетов сформулированы и доказаны несколько лемм, выражающие разовые нетто-премии и резервы для временного страхования. В разделах 5 и 6 содержатся выводы и заключение. В раздел 7 вынесены полученные в работе графики и таблицы с числовыми значениями. Также приведены ключевые элементы программного кода, написанного на языке программирования `Python 3` для численных расчетов.

2 Свойства логистического закона

2.1 Моделирование времени жизни для логистического закона

Лемма 1. *Функция выживания для логистического закона в форме (2) имеет вид*

$$s(x) = e^{-Ax}\left(\frac{1+D}{1+De^{\alpha x}}\right)^{\frac{B}{\alpha D}}. \tag{3}$$

Доказательство. В [1] доказано, что функция выживания и интенсивность смертности связаны следующим образом

$$s(x) = \exp\left\{-\int_0^x \mu_u du\right\}.$$

Тогда

$$s(x) = \exp\left\{-\int_0^x \left(A + \frac{Be^{\alpha u}}{1+De^{\alpha u}}\right) du\right\} = \\ = \exp\left\{-Ax - \int_0^x \frac{Be^{\alpha u}}{1+De^{\alpha u}} du\right\}.$$

Посчитаем интеграл. Внесем экспоненту с константой под знак дифференциала

$$\int_0^x \frac{Be^{\alpha u}}{1+De^{\alpha u}} du = \frac{B}{\alpha D}\int_0^x \frac{1}{1+De^{\alpha u}} dDe^{\alpha u}$$

и сделаем замену $t = De^{\alpha u}$. Тогда

$$\int_0^x \frac{Be^{\alpha u}}{1+De^{\alpha u}} du = \frac{B}{\alpha D}\int_D^{De^{\alpha x}} \frac{dt}{1+t} = \frac{B}{\alpha D}\ln\left(\frac{1+De^{\alpha x}}{1+D}\right).$$

Значит

$$s(x) = \exp\left\{-Ax - \frac{B}{\alpha D}\ln\left(\frac{1+De^{\alpha x}}{1+D}\right)\right\} = \\ = e^{-Ax}\left(\frac{1+D}{1+De^{\alpha x}}\right)^{\frac{B}{\alpha D}}.$$

□

Имитационное моделирование непрерывной случайной величины основано на следующих утверждениях (см. [5]). Пусть $F(x)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция распределения. Тогда на промежутке $0 < y < 1$ определена обратная функция $x = F^{-1}(y)$. Пусть Z — равномерно распределенная на $(0,1)$ случайная величина. Тогда случайная величина $F^{-1}(Z)$ имеет распределение $F(x)$

$$\mathsf{P}(F^{-1}(Z) \leq x) = \mathsf{P}(Z \leq F(x)) = F(x).$$

В актуарной математике удобнее работать не с функциями распределения, а с функциями выживания. Пусть $s(x) = 1 - F(x)$ — монотонно убывающая функция выживания. Тогда на промежутке $0 < y < 1$ определена обратная функция $x = s^{-1}(y)$. Пусть Z — равномерно распределенная на $(0,1)$ случайная величина. Тогда случайная величина $s^{-1}(Z)$ имеет распределение $F(x)$

$$\mathsf{P}(s^{-1}(Z) \leq x) = \mathsf{P}(Z > s(x)) = 1 - s(x) = F(x).$$

В языках программирования есть возможность получить равномерно распределенные на $(0,1)$ случайные величины. Поэтому если мы умеем вычислять $F^{-1}(y)$ или $s^{-1}(y)$, то мы можем генерировать последовательности случайных величин, распределенных по закону $F(x)$.

Теорема 1. *Время жизни T человека в логистической модели смертности вида (2) можно моделировать по формуле*

$$T \overset{d}{=} \min\left\{-\frac{1}{A}\ln Z_1, \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}Z_2^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right)\right\}, \tag{4}$$

где Z_1 и Z_2 — равномерно распределенные на $(0,1)$ независимые случайные величины.

Доказательство. Представим функцию выживания (3) в виде произведения двух множителей

$$s(x) = s_\xi(x)s_\eta(x),$$

где

$$s_\xi(x) = e^{-Ax},$$

$$s_\eta(x) = \left(\frac{1+D}{1+De^{\alpha x}}\right)^{\frac{B}{\alpha D}}.$$

Заметим, что каждый из этих множителей можно рассматривать как функцию выживания для некоторой случайной величины. Обозначим эти величины за ξ и η соответственно.

Поскольку функция выживания времени жизни T есть произведение функций выживания величин ξ и η, то, полагая их независимыми, получим

$$\mathsf{P}(T > x) = s(x) = \mathsf{P}(\xi > x)\mathsf{P}(\eta > x) = \mathsf{P}(\xi > x, \eta > x) = \mathsf{P}(\min\{\xi, \eta\} > x).$$

Это означает, что для моделирования случайной величины T достаточно моделировать величину $\min\{\xi, \eta\}$.

Пусть Z_1 и Z_2 — равномерно распределенные на $(0, 1)$ независимые случайные величины. Используем упомянутое ранее утверждение об обращении функции выживания. Рассмотрим уравнение

$$y = s_\xi(x), 0 < y < 1.$$

Подставляя выражение для $s_\xi(x)$ и выражая x, получим

$$y = e^{-Ax},$$
$$x = -\frac{1}{A}\ln y.$$

Значит, для моделирования случайной величины ξ необходимо для каждого значения Z_1 считать величину

$$-\frac{1}{A}\ln Z_1.$$

Аналогично рассмотрим уравнение

$$y = s_\eta(x), 0 < y < 1.$$

Подставляя выражение для $s_\eta(x)$ и выражая x, получим

$$y = \left(\frac{1+D}{1+De^{\alpha x}}\right)^{\frac{B}{\alpha D}},$$
$$x = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}y^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right).$$

Значит, для моделирования случайной величины η необходимо для каждого значения Z_2 считать величину

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}Z_2^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right).$$

Таким образом,

$$T \overset{d}{=} \min\left\{-\frac{1}{A}\ln Z_1, \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}Z_2^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right)\right\}.$$

$\square$

Теорема 2. *Для времени жизни T человека в логистической модели смертности вида (2) верно*

$$T \overset{d}{=} \min\left\{\xi, \frac{\ln(1+\eta)}{\alpha}\right\},$$

где ξ имеет показательное распределение с параметром A, а η — распределение Парето с параметрами $\frac{1+D}{D}$ и $\frac{B}{\alpha D}$.

Доказательство. Используем равенство (4).

Покажем, что случайная величина $\xi \equiv -\frac{1}{A}\ln Z_1$ имеет показательное распределение с параметром A. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(-\frac{1}{A}\ln Z_1 \le x\right) &= \mathsf{P}\left(\ln Z_1 > -Ax\right) = \\ &= \mathsf{P}\left(Z_1 > e^{-Ax}\right) = \\ &= 1 - e^{-Ax}, \end{aligned}$$

что соответствует функции показательного распределения с параметром A.

Рассмотрим другую величину из (4)

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}Z_2^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right).$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}Z_2^{-\alpha D/B} - \frac{1}{D}\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+D}{D}\left(Z_2^{-\alpha D/B} - 1\right) + 1\right).$$

Покажем, что случайная величина

$$\eta \equiv \frac{1+D}{D}\left(Z_2^{-\alpha D/B} - 1\right)$$

имеет распределение Парето с параметрами $\frac{1+D}{D}$ и $\frac{B}{\alpha D}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\frac{1+D}{D}\left(Z_2^{-\alpha D/B}-1\right)\leq x\right) &= \mathsf{P}\left(Z_2^{-\alpha D/B}\leq\frac{Dx}{1+D}+1\right)=\\ &=\mathsf{P}\left(Z_2>\left(\frac{1+D}{1+D+Dx}\right)^{\frac{B}{D\alpha}}\right)=\\ &=1-\left(\frac{1+D}{1+D+Dx}\right)^{\frac{B}{D\alpha}}=\\ &=1-\left(\frac{\frac{1+D}{D}}{\frac{1+D}{D}+x}\right)^{\frac{B}{D\alpha}},\end{aligned}$$

что соответствует распределению Парето с параметрами $\frac{1+D}{D}$ и $\frac{B}{\alpha D}$.

Таким образом,

$$T\stackrel{d}{=}\min\left\{\xi,\frac{\ln(1+\eta)}{\alpha}\right\},$$

где ξ имеет показательное распределение с параметром A, а η — распределение Парето с параметрами $\frac{1+D}{D}$ и $\frac{B}{\alpha D}$. □

2.2 Логистический закон как закон для неоднородной популяции

Рассмотрим закон Мэйкама

$$\mu_x^B=A+Be^{\alpha x}, \tag{5}$$

$$s(x,B)=e^{-Ax-B\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}}, \tag{6}$$

где $s(x,B)$ — функция выживания.

Пусть параметр B является случайной величиной, то есть рассмотрим неоднородную популяцию, где в каждой группе смертность определяется законом Мэйкама с параметрами A,B и α.

Лемма 2. *Пусть $s(x)$ — функция выживания всей популяции, μ_x — интенсивность смертности всей популяции. Тогда*

$$\begin{aligned}s(x)&=e^{-Ax}\varphi(s),\\ \mu_x&=A-e^{\alpha x}\left[\ln\varphi(s)\right]',\end{aligned} \tag{7}$$

где $s=(e^{\alpha x}-1)/\alpha$, $\varphi(s)$ — преобразование Лапласа случайной величины B.

Доказательство. Если $s(x)$ — функция выживания всей популяции, то

$$s(x) = \mathsf{E}s(x, B).$$

Применим равенство (6)

$$\begin{aligned} s(x) &= \mathsf{E}\exp\left\{-Ax - B\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}\right\} = \\ &= e^{-Ax}\mathsf{E}\exp\left\{-B\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}\right\} = \\ &= e^{-Ax}\varphi(s), \end{aligned}$$

где $s = (e^{\alpha x} - 1)/\alpha$.

В [1] доказано, что функция выживания и интенсивность смертности связаны соотношением

$$\mu_x = \frac{-s'(x)}{s(x)}. \tag{8}$$

Найдем производную функции выживания

$$s'(x) = -Ae^{-Ax}\varphi(s) + e^{-Ax+\alpha x}\varphi'(s).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{Ae^{-Ax}\varphi(s) - e^{-Ax+\alpha x}\varphi'(s)}{e^{-Ax}\varphi(s)} = \\ &= A - e^{\alpha x}\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \\ &= A - e^{\alpha x}\left[\ln\varphi(s)\right]'. \end{aligned}$$

□

Теорема 3. *Интенсивность смертности всей популяции определяется логистическим законом вида*

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + De^{\alpha x}} \tag{9}$$

тогда и только тогда, когда параметр B в законе (5) имеет гамма распределение с параметрами γ и p, причем связь между параметрами логистического закона и гамма распределения следующая

$$B = \frac{\alpha p}{\alpha\gamma - 1}, D = \frac{1}{\alpha\gamma - 1},$$
$$\gamma = \frac{1 + D}{\alpha D}, p = \frac{B}{\alpha D}.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть параметр B в законе (5) имеет гамма распределение с параметрами γ и p. Покажем, что тогда интенсивность смертности всей популяции определяется логистическим законом вида (9).

Для гамма распределения с параметрами γ и p преобразование Лапласа равно (см. [4])

$$\varphi(s) = \left(\frac{\gamma}{s+\gamma}\right)^p.$$

Для применения равенства (7) положим $s = (e^{\alpha x} - 1)/\alpha$. Тогда

$$\varphi(s) = \left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x}}\right)^p.$$

Производная равна

$$\varphi'(s) = -\frac{p\alpha^2\gamma e^{\alpha x}}{(\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x})^2}\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x}}\right)^{p-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[\ln\varphi(s)]' = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} &= \\
&= -\frac{\alpha^2\gamma p e^{\alpha x}(\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x})}{\alpha\gamma(\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x})^2} = \\
&= -\frac{\alpha p e^{\alpha x}}{\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x}}.
\end{aligned}$$

Согласно (7) интенсивность смертности всей популяции выражается как

$$\begin{aligned}
\mu_x &= A - e^{\alpha x}\left[\ln\varphi(s)\right]' = \\
&= A + e^{\alpha x}\frac{\alpha p e^{\alpha x}}{\alpha\gamma - 1 + e^{\alpha x}} = \\
&= A + \frac{\frac{\alpha p}{\alpha\gamma - 1}e^{\alpha x}}{1 + \frac{1}{\alpha\gamma - 1}e^{\alpha x}} = \\
&= A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + De^{\alpha x}},
\end{aligned}$$

где $B = \frac{\alpha p}{\alpha\gamma - 1}, D = \frac{1}{\alpha\gamma - 1}$.

Необходимость. Пусть интенсивность смертности всей популяции описывается логистическим законом вида (9). Покажем, что тогда параметр B в законе (5) имеет гамма распределение с параметрами $\gamma = \frac{1+D}{\alpha D}, p = \frac{B}{\alpha D}$.

Согласно (7) имеем

$$\frac{Be^{\alpha x}}{1+De^{\alpha x}} = -e^{\alpha x}\left[\ln\varphi(s)\right]',$$
$$s = \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}.$$

Выразим из второго уравнения $e^{\alpha x} = 1+\alpha s$ и подставим в первое

$$[\ln\varphi(s)]' = -\frac{B}{1+D+\alpha Ds}.$$

Проинтегрируем

$$\ln\varphi(s) = -\int\frac{Bds}{1+D+\alpha Ds} + \ln C =$$
$$= -\frac{B}{\alpha D}\ln(1+D+\alpha Ds) + \ln C,$$

где C — константа интегрирования.

Тогда

$$\varphi(s) = C(1+D+\alpha Ds)^{-\frac{B}{\alpha D}}.$$

Учтем, что $\varphi(0) = 1$, откуда

$$C = (1+D)^{\frac{B}{\alpha D}}.$$

Тогда

$$\varphi(s) = \left(\frac{1+D}{1+D+\alpha Ds}\right)^{\frac{B}{\alpha D}} =$$
$$= \left(\frac{\gamma}{\gamma+s}\right)^{p},$$

где $\gamma = \frac{1+D}{\alpha D}, p = \frac{B}{\alpha D}$, что соответствует гамма распределению с параметрами γ и p. □

Посмотрим, что будет, если в равенстве (5) случайным будет еще и коэффициент A. Пусть он имеет гамма-распределение с параметрами γ_1 и p_1, а B имеет имеет гамма-распределение с параметрами γ_2 и p_2. Пусть коэффициенты A и B независимы. Полагая $s = \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}$, получим

$$s(x) = \mathsf{E}s(x,A,B) = \mathsf{E}e^{-Ax}e^{-Bs} = \mathsf{E}e^{-Ax}\cdot\mathsf{E}e^{-Bs} = \varphi_1(x)\varphi_2(s).$$

Производная функции выживания равна

$$s'(x) = \varphi_1'(x)\varphi_2(s) + \varphi_1(x)\varphi_2'(s)e^{\alpha x}.$$

Производная преобразования Лапласа для гамма-распределения равна

$$\varphi'(x) = -\frac{p}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)^{p+1}.$$

Тогда с учетом подстановки $s = \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha}$ интенсивность смертности равна

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \frac{-s'(x)}{s(x)} = -\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\varphi_2'(s)}{\varphi_2(s)}e^{\alpha x} = \\
&= \frac{p_1}{x+\gamma_1} + \frac{p_2}{s+\gamma_2}e^{\alpha x} = \frac{p_1}{x+\gamma_1} + \frac{\alpha p_2 e^{\alpha x}}{\alpha\gamma_2 - 1 + e^{\alpha x}} = \\
&= \frac{p_1}{x+\gamma_1} + \frac{\frac{\alpha p_2}{\alpha\gamma_2 - 1}e^{\alpha x}}{1 + \frac{1}{\alpha\gamma_2-1}e^{\alpha x}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Прежде чем интерпретировать полученное равенство, обратим внимание на то, что интенсивность смертности логистического закона (2) может быть записана иначе

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+De^{\alpha x}} = A + \frac{B}{D} - \frac{B}{D(1+De^{\alpha x})}.$$

Принято считать, что слагаемое A отвечает за случайные смерти, а слагаемое $\frac{Be^{\alpha x}}{1+De^{\alpha x}}$ — за смерти, зависящие от возраста. В эквивалентной записи также выделяется константа, которую можно интерпретировать как отвечающую за случайные смерти. Но здесь и далее будем придерживаться общепринятого мнения.

Так в равенстве (10) можно заметить, что второе слагаемое подчиняется логистическому закону, а первое теперь зависит от возраста x. При увеличении этого возраста слагаемое, которое раньше было постоянным и отвечало за случайные смерти, уменьшается. Таким законом можно описывать популяции, подчиненные логистическому закону, в котором с возрастом случайная составляющая смертности постепенно уменьшает свой вклад.

3 Упрощающие функции для логистического закона

В статье [9] автор отмечает, что для больших возрастов (от 80 до 120 лет) опытным путем было установлено приблизительное равенство коэффициентов B и D в логистическом законе (2). Поэтому далее этот закон будет рассмотрен в виде

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x}}. \tag{11}$$

В актуарной математике используют так называемые упрощающие функции (см. [1] и [11]), которые определяются следующим образом

$$\begin{aligned} D_x &= e^{-\delta x} l_x = l_0 e^{-\delta x} s(x), \qquad (12) \\ \overline{N}_x &= \int_x^\infty D_t dt, \\ \overline{M}_x &= \int_x^\infty D_t \mu_t dt, \end{aligned}$$

где δ — интенсивность процентов, l_0 — начальный размер исследуемой популяции.

В [1] доказаны следующие равенства

$$\begin{aligned} \frac{\overline{N}_x}{D_x} &= \overline{a}_x, \qquad (13) \\ \overline{M}_x &= D_x - \delta \overline{N}_x, \end{aligned}$$

где $\overline{a}_x$ — актуарная приведенная стоимость непрерывной пожизненной ренты. Значит

$$\begin{aligned} \overline{N}_x &= \overline{a}_x D_x, \qquad (14) \\ \overline{M}_x &= D_x - \delta \overline{N}_x = \\ &= D_x - \delta \overline{a}_x D_x = \\ &= D_x (1 - \delta \overline{a}_x). \qquad (15) \end{aligned}$$

В статье [11] автор проводит расчет функций D_x и $\overline{a}_x$ для закона Мэйкама (1). Полученные им формулы позволяют считать упрощающие функции с помощью современных статистических пакетов.

Цель данного раздела — провести расчет функций D_x и $\overline{a}_x$ для логистичсекого закона в форме (11). Полученные формулы позволят посчитать упрощающие функции с помощью современных статистических пакетов.

Лемма 3. *В случае логистического закона в форме (11) упрощающая функция D_x выражается следующим образом*

$$D_x = l_0 s(x; A+\delta, B, \alpha). \tag{16}$$

Доказательство. Учтем в (3) условие $B = D$. Тогда

$$s(x; A, B, \alpha) = e^{-Ax} \left(\frac{1+B}{1+Be^{\alpha x}} \right)^{1/\alpha}. \tag{17}$$

Подставим это в в (12)

$$\begin{aligned} D_x &= l_0 e^{-\delta x} s(x; A, B, \alpha) = \\ &= l_0 e^{-\delta x} e^{-Ax} \left(\frac{1+B}{1+Be^{\alpha x}} \right)^{1/\alpha} = \\ &= l_0 e^{-(A+\delta)x} \left(\frac{1+B}{1+Be^{\alpha x}} \right)^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Значит, упрощающая функция D_x выражается через функцию выживания как

$$D_x = l_0 s(x; A+\delta, B, \alpha).$$

□

Пусть T и T_x — остаточное время жизни новорожденного и человека возраста x лет соответственно, $e_0(A, B, \alpha) \equiv \mathsf{E}T$ и $e_x(A, B, \alpha) \equiv \mathsf{E}T_x$ — среднее остаточное время жизни новорожденного и человека возраста x лет соответственно, $s(t; A, B, \alpha)$ и $s_x(t; A, B, \alpha)$ — функции выживания новорожденного и человека возраста x лет соответственно.

Лемма 4. *В случае логистического закона в форме (11) функции выживания новорожденного и человека возраста x лет связаны следующим образом*

$$s_x(t; A, B, \alpha) = s(t; A, Be^{\alpha x}, \alpha), \tag{18}$$

то есть смертность человека возраста x лет описывается логистическим законом с параметрами $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = Be^{\alpha x}$, $\tilde{\alpha} = \alpha$.

Доказательство. В общем случае функции выживания новорожденного и человека возраста x лет связаны следующим образом (см. [1])

$$s_x(t; A, B, \alpha) = \frac{s(t+x; A, B, \alpha)}{s(t; A, B, \alpha)}.$$

Подставим выражения функций выживания из формулы (17)

$$\begin{aligned} s_x(t; A, B, \alpha) &= e^{-At}\left(\frac{1+Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha(t+x)}}\right)^{1/\alpha} = \\ &= e^{-At}\left(\frac{1+Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}e^{\alpha t}}\right)^{1/\alpha} = \\ &= s(t; A, Be^{\alpha x}, \alpha). \end{aligned}$$

□

Согласно [1] среднее время жизни и функция выживания связаны следующим образом

$$e_0(A, B, \alpha) = \int_0^\infty s(t; A, B, \alpha)dt, \tag{19}$$

$$e_x(A, B, \alpha) = \int_0^\infty s_x(t; A, B, \alpha)dt. \tag{20}$$

Лемма 5. *В случае логистического закона в форме (11) среднее время жизни новорожденного и человека возраста x лет связаны следующим образом*

$$e_x(A, B, \alpha) = e_0(A, Be^{\alpha x}, \alpha). \tag{21}$$

Доказательство. В силу равенств (18), (19) и (20) имеем

$$e_x(A, B, \alpha) = \int_0^\infty s_x(t; A, B, \alpha)dt = \int_0^\infty s(t; A, Be^{\alpha x}, \alpha) = e_0(A, Be^{\alpha x}, \alpha).$$

□

Обозначим через $\overline{a}_x \equiv \overline{a}_x(A, B, \alpha, \delta)$ — актуарную приведенную стоимость непрерывной пожизненной ренты.

Лемма 6. *В случае логистического закона в форме (11) актуарная приведенная стоимость непрерывной пожизненной ренты выражается следующим образом*

$$\overline{a}_x \equiv \overline{a}_x(A, B, \alpha, \delta) = e_0(A+\delta, Be^{\alpha x}, \alpha). \tag{22}$$

Доказательство. В [1] доказано, что

$$\begin{aligned} \overline{a}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\mathsf{P}(T_x > t)dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} s_x(t; A, B, \alpha)dt. \end{aligned}$$

Используем последовательно равенства (18), (17) и (19). Функция выживания человека возраста x лет выражается через функцию выживания новорожденного, а среднее остаточное время жизни выражается через интеграл от функции выживания

$$\begin{aligned}\overline{a}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t} s_x(t; A, B, \alpha) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} s(t; A, Be^{\alpha x}, \alpha) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-At} \left(\frac{1 + Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x} e^{\alpha t}} \right)^{1/\alpha} dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-(A+\delta)t} \left(\frac{1 + Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x} e^{\alpha t}} \right)^{1/\alpha} dt = \\ &= \int_0^\infty s(t; A + \delta, Be^{\alpha x}, \alpha) dt = \\ &= e_0(A + \delta, Be^{\alpha x}, \alpha).\end{aligned}$$

□

Обозначим через $(p)_n$ символ Похгаммера, который равен произведению

$$(p)_n = p \dots (p + n - 1).$$

Гипергеометрической функцией называется сумма гипергеометрического ряда [12]

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \tag{23}$$

где $|z| < 1$ и $c \neq 0, -1, -2, \dots$.

Значение гипергеометрической функции может быть посчитано с помощью языка программирования Python (используя библиотеку `scipy` и функцию `scipy.special.hyp2f1(a, b, c, z)`) и с помощью языка R (используя пакет `hypergeo` и функцию `hypergeo(a, b, c, z)`).

Теорема 4. *Пусть $B, \alpha > 0$. Значение $e_0(A, B, \alpha)$ выражается через гипергеометрическую функцию следующим образом*

$$e_0(A, B, \alpha) = \frac{\theta}{\theta + \gamma} F\left(\theta, 1, \theta + \gamma + 1, (1 + B)^{-1}\right). \tag{24}$$

где $\theta = 1/\alpha$, $\gamma = A/\alpha$.

Доказательство. Подставим (17) в (19)

$$e_0(A,B,\alpha)=\int_0^\infty e^{-Ax}\left(\frac{1+Be^{\alpha x}}{1+B}\right)^{-1/\alpha}dx=$$
$$=(1+B)^{1/\alpha}\int_0^\infty e^{-Ax}(1+Be^{\alpha x})^{-1/\alpha}dx.$$

Сделаем замену $t=(1+Be^{\alpha x})^{-1}$. Тогда $dx=-\frac{1}{\alpha}\frac{dt}{t(1-t)}$ и $e^{-Ax}=(e^{\alpha x})^{-A/\alpha}=\left(\frac{1-t}{Bt}\right)^{-A/\alpha}$. Поэтому

$$e_0(A,B,\alpha)=\frac{(1+B)^{1/\alpha}B^{A/\alpha}}{\alpha}\int_0^{1/(1+B)}t^{1/\alpha+A/\alpha-1}(1-t)^{-A/\alpha-1}dt.$$

Обозначим $\theta=1/\alpha$, $\gamma=A/\alpha$. Тогда

$$e_0(A,B,\alpha)=\theta(1+B)^\theta B^\gamma\int_0^{1/(1+B)}t^{\theta+\gamma-1}(1-t)^{-\gamma-1}dt. \tag{25}$$

Поскольку t принадлежит отрезку от 0 до $1/(1+B)$ и $B>0$, то имеет место разложение

$$(1-t)^{-\gamma-1}=1+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n(\gamma+1)\dots(\gamma+n)(-t)^n}{n!}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^\infty\frac{(\gamma+1)\dots(\gamma+n)t^n}{n!}.$$

Подставим это разложение в (25)

$$e_0(A,B,\alpha)=\theta(1+B)^\theta B^\gamma\left[\int_0^{1/(1+B)}t^{\theta+\gamma-1}dt+\right.$$
$$\left.+\int_0^{1/(1+B)}t^{\theta+\gamma-1}\sum_{n=1}^\infty\frac{(\gamma+1)\dots(\gamma+n)t^n}{n!}\right]=$$
$$=\theta(1+B)^\theta B^\gamma\left[\frac{1}{(\theta+\gamma)(1+B)^{\theta+\gamma}}+\right.$$
$$\left.+\int_0^{1/(1+B)}\sum_{n=1}^\infty t^{n+\theta+\gamma-1}\frac{(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}{n!}\right].$$

Для того, чтобы поменять местами интеграл по отрезку и сумму ряда, достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^\infty t^{n+\theta+\gamma-1}\frac{(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}{n!}$$

сходится равномерно. Заметим, что модуль каждого члена ряда можно ограничить константой c_n

$$\left| t^{n+\theta+\gamma-1} \frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}{n!} \right| \leq \left(\frac{1}{1+B} \right)^{n+\theta+\gamma-1} \frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}{n!} =: c_n,$$

а ряд из c_n сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\frac{1}{1+B} \right)^{\theta+\gamma-1} \times \left[\left(1 - \frac{1}{1+B} \right)^{-\gamma-1} - 1 \right].$$

Значит, по признаку Вейерштрасса есть равномерная сходимость и

$$e_0(A, B, \alpha) = \theta(1+B)^{\theta} B^{\gamma} \left[\frac{1}{(\theta+\gamma)(1+B)^{\theta+\gamma}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/(1+B)} t^{n+\theta+\gamma-1} \frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}{n!} \right].$$

Проинтегрировав каждое слагаемое ряда, получим

$$e_0(A, B, \alpha) = \theta(1+B)^{\theta} B^{\gamma} \left[\frac{1}{(\theta+\gamma)(1+B)^{\theta+\gamma}} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}{n!(n+\theta+\gamma)(1+B)^{n+\theta+\gamma}} \right].$$

Заметим, что $(\gamma+1)\ldots(\gamma+n) = (\gamma+1)_n$ — символ Похгаммера. Его определение позволяет считать, что $(\gamma+1)_0 = 1$ (пустое произведение). Тогда можно записать первое слагаемое в скобках под знак суммы

$$e_0(A, B, \alpha) = \theta(1+B)^{\theta} B^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1)_n}{n!(n+\theta+\gamma)(1+B)^{n+\theta+\gamma}} = \\ = \frac{\theta(1+B)^{\theta} B^{\gamma}}{(1+B)^{\theta+\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1)_n}{n!(n+\theta+\gamma)(1+B)^{n}} = \\ = \frac{\theta B^{\gamma}}{(1+B)^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1)_n}{(n+\theta+\gamma)n!} \left(\frac{1}{1+B} \right)^{n}.$$

Умножим числители и знаменатели на $(\theta+\gamma)$

$$e_0(A, B, \alpha) = \frac{\theta B^{\gamma}}{(\theta+\gamma)(1+B)^{\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1)_n(\theta+\gamma)}{(n+\theta+\gamma)n!} \left(\frac{1}{1+B} \right)^{n}. \tag{26}$$

Покажем, что часть выражения под знаком суммы можно записать через символы Похгаммера следующим образом

$$\frac{(\theta+\gamma)}{(n+\theta+\gamma)} = \frac{(\theta+\gamma)_n}{(\theta+\gamma+1)_n}.$$

Действительно,

$$\frac{(\theta+\gamma)_n}{(\theta+\gamma+1)_n} = \frac{(\theta+\gamma)(\theta+\gamma+1)\dots(\theta+\gamma+n-1)}{(\theta+\gamma+1)\dots(\theta+\gamma+n-1)(\theta+\gamma+n)} = \\ = \frac{(\theta+\gamma)}{(n+\theta+\gamma)}.$$

Значит, равенство (26) можно записать в виде

$$e_0(A,B,\alpha) = \frac{\theta B^\gamma}{(\theta+\gamma)(1+B)^\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1)_n(\theta+\gamma)_n}{(\theta+\gamma+1)_n n!} \left(\frac{1}{1+B}\right)^n = \\ = \frac{\theta B^\gamma}{(\theta+\gamma)(1+B)^\gamma} \times F\left(\gamma+1, \theta+\gamma, \theta+\gamma+1, \frac{1}{1+B}\right). \quad (27)$$

Известно (см. [12]), что

$$F(a,b,c,z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, z),$$

где $|z| < 1$ и $a, b, c-a, c-b$ не являются неположительными целыми числами.

Тогда

$$F\left(\gamma+1, \theta+\gamma, \theta+\gamma+1, \frac{1}{1+B}\right) = \left(\frac{B}{1+B}\right)^{-\gamma} F\left(\theta, 1, \theta+\gamma+1, \frac{1}{1+B}\right).$$

Подставляя это в (27), получим

$$e_0(A,B,\alpha) = \frac{\theta}{\theta+\gamma} F\left(\theta, 1, \theta+\gamma+1, (1+B)^{-1}\right).$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Актуарная приведенная стоимость непрерывной пожизненной ренты выражается через гипергеометрическую функцию следующим образом*

$$\overline{a}_x \equiv \overline{a}_x(A,B,\alpha,\delta) = \beta^{-1} F\left(\alpha^{-1}, 1, 1+\beta\alpha^{-1}, (1+Be^{\alpha x})^{-1}\right), \quad (28)$$

где $\beta = 1 + A + \delta$.

Доказательство. Подставим значения $\theta = 1/\alpha$ и $\gamma = A/\alpha$ в равенство (24)

$$e_0(A, B, \alpha) = \frac{1}{1+A} F\left(\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1+\alpha+A}{\alpha}, \frac{1}{1+B}\right).$$

Теперь сделаем замену параметров, согласно равенству (22)

$$\begin{aligned}\overline{a}_x &= e_0(A+\delta, Be^{\alpha x}, \alpha) = \\ &= \frac{1}{1+A+\delta} F\left(\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1+\alpha+A+\delta}{\alpha}, \frac{1}{1+Be^{\alpha x}}\right) = \\ &= \beta^{-1} F\left(\alpha^{-1}, 1, 1+\beta\alpha^{-1}, (1+Be^{\alpha x})^{-1}\right),\end{aligned}$$

где $\beta = 1 + A + \delta$. □

Итогом всех вышеописанных рассуждений является следующая теорема.

Теорема 5. *В случае логистического закона в форме (11) упрощающие функции D_x, $\overline{N}_x$ и $\overline{M}_x$ выражаются следующим образом*

$$\begin{aligned} D_x &= l_0 s(x; A+\delta, B, \alpha), \\ \overline{N}_x &= \overline{a}_x D_x, \\ \overline{M}_x &= D_x(1 - \delta\overline{a}_x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{a}_x &= \beta^{-1} F\left(\alpha^{-1}, 1, 1+\beta\alpha^{-1}, (1+Be^{\alpha x})^{-1}\right), \\ \beta &= 1 + A + \delta. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из (16), (14), (15) и (28). □

4 Актуарный анализ

Чтобы проверить и проанализировать полученные математические результаты, сравним логистическую модель (11) и модель Мэйкама (1). Чтобы провести сравнение моделей, нужно обеспечить их сопоставимость. Используем для этого данные из ELT17 (см. [13]). ELT17 является семнадцатой в серии таблиц с характеристиками продолжительности жизни и смертности. Эти данные регулярно публикуются в Англии каждые десять лет (начиная с 1841 года). При составлении ELT17 используется популяционная статистика смертности для населения Англии и Уэльса за 2010, 2011 и 2012 годы.

Подберем параметры моделей так, чтобы модели хорошо описывали смертность на возрастах от 0 до 80 лет, и посмотрим, как они поведут себя на возрастах старше 80 лет. Такая процедура сравнения выбрана всвязи с тем, что Thatcher в работе [9] утверждает, что исследуемые им модели (в том числе логистическая и Мэйкама) ведут себя похожим образом на возрастах, где наступает большинство смертей, и расходятся на старших возрастах. Влияние этого расхождения на разовую нетто-премию и резервы исследуются в этом разделе.

4.1 Подбор параметров моделей

В работе [13] опубликованы таблицы с величинами $l_x, x = 0, 10, 20, \ldots, 100$. На официальном сайте Office of National Statistics можно найти дополнение к этим таблицам, в которых есть информация о ежегодных величинах $l_x, x = 0, 1, 2, \ldots, 112$. Будем использовать ежегодные значения, опубликованные для мужского населения.

Поскольку

$$l_x = l_0 s(x),$$

то достаточно использовать только функции выживания $s(x)$.

Чтобы подобрать параметры моделей, решим следующую задачу оптимизации

$$L(A, B, \alpha) \equiv \sum_{k=0}^{80} (s(k) - \hat{s}(k))^2 \to \min_{A,B,\alpha},$$

где $L(A, B, \alpha)$ — функционал качества, $s(k)$ — функция выживания для возраста k, найденная из рассматриваемых данных как $s(k) = l_k/l_0$, а $\hat{s}(k)$ — приближение логистическим законом (или законом Мэйкама) с параметрами A, B, α в точке k.

Поскольку функции $\hat{s}(x)$ достаточно сложны, для поиска минимума $L(A, B, \alpha)$ будем использовать адаптивный градиентный спуск RMSProp (см. [14]). На каждом шаге t этого градиентного спуска изменение параметров моделей происходит согласно формуле

$$\theta_t = \theta_{t-1} - \frac{\eta}{\sqrt{G_{t-1} + \varepsilon}} g_{t-1},$$

где θ_t и θ_{t-1} — новый и предыдущий параметр соответственно, g_{t-1} — градиент функционала $L(\theta)$, вычисленный в момент $t-1$, G_{t-1} — сглаженная сумма квадратов градиентов за предыдущие шаги

$$G_{t-1} = \rho G_{t-2} + (1-\rho) g_{t-1}^2.$$

Величины η, ε, ρ — гиперпараметры градиентного спуска. Их оптимизация производилась с учетом выбора моделей, на который максимум модуля относительных отклонений $s(x)$ и $\hat{s}(x)$ был минимальным.

При использовании 2000 шагов градиентного спуска были получены следующие результаты. Оптимальные гиперпараметры для подбора параметров логистической модели

$$\begin{aligned} &\eta = 0.003, \\ &\varepsilon = 2 \cdot 10^{-9}, \\ &\rho = 0.125. \end{aligned}$$

Максимум модуля отклонений $s(x)$ и $\hat{s}(x)$ равен 0.00432429, значение функционала качества 0.00034681.

Оптимальные параметры логистической модели равны

$$\begin{aligned} &A = 4.32925877 \cdot 10^{-4}, \\ &B = 1.27283805 \cdot 10^{-5}, \\ &\alpha = 1.04938113e \cdot 10^{-1}. \end{aligned}$$

Сравнение исходной функции выживания и приближенной логистическим законом можно увидеть на рисунке 6.

Относительные ошибки функции выживания при приближении логистическим законом можно найти в таблице 1.

Оптимальные гиперпараметры для подбора параметров модели Мэйкама

$$\begin{aligned} &\eta = 0.0027, \\ &\varepsilon = 1^{-11}, \\ &\rho = 0.1. \end{aligned}$$

Максимум модуля отклонений $s(x)$ и $\hat{s}(x)$ равен 0.00432883, значение функционала качества 0.000340628.

Оптимальные параметры модели Мэйкама равны

$$\begin{aligned} A &= 4.27502400 \cdot 10^{-4}, \\ B &= 1.35972296 \cdot 10^{-5}, \\ \alpha &= 1.03699885 \cdot 10^{-1}. \end{aligned}$$

Сравнение исходной функции выживания и приближенной законом Мэйкама можно увидеть на рисунке 7.

Относительные ошибки функции выживания при приближении логистическим законом можно найти в таблице 2.

Сравнение поведения обеих моделей с исходными данными можно увидеть на рисунке 8. Как и ожидалось, у логистического закона на высоких возрастах смертность менее интенсивна, чем у модели Мэйкама. При этом обе модели переоценивают смертность — это связано с тем, что подбор параметров осуществлялся для возрастов от 0 до 80 лет.

Отличие поведения обеих моделей на высоких возрастах отдельно показано на рисунках 9 и 10.

Сравнение интенсивностей смертности обеих моделей для возрастов от 80 до 120 показано на рисунке 11. Как и ожидалось, интенсивность смертности у закона Мэйкама растет быстрее, чем у логистического закона.

4.2 Сравнение разовой нетто-премии и резервов

Для сравнения разовых нетто-премий и резервов будем использовать n-летнее (временное) страхование жизни. При таком виде страхования страховая компания выплачивает фиксированную сумму, если застрахованный умер в течение n лет срока действия договора. Если застрахованный прожил эти n лет, то страховая компания ничего не платит.

Разовая нетто-премия

Обозначим через $\overline{Z}^{1}_{x:\overline{n}|}$ — приведенную стоимость обязательств компании на момент заключения договора

$$\overline{Z}^{1}_{x:\overline{n}|} \equiv e^{-\delta T_x} I\{T_x \leq n\}.$$

Актуарная приведенная стоимость обязательств компании на момент заключения договора — это величина $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$, которая равна математическому ожиданию приведенной стоимости $\overline{Z}^{1}_{x:\overline{n}|}$.

Разовая нетто-премия — актуарная приведенная стоимость обязательств компании на момент заключения договора, то есть $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$. Это следует из следующих соображений. В силу принципа эквивалентности обязательств обязательства страховой компании на момент заключения договора должны равняться обязательствам застрахованного, то есть разовой нетто-премии.

Актуарный коэффициент дисконтирования определяется следующим образом

$$ {}_tE_x = e^{-\delta t} s_x(t), $$

где $s_x(t)$ — функция выживания человека возраста x лет.

Лемма 7. *Актуарная приведенная стоимость обязательств компании на момент заключения договора может быть посчитана по формуле*

$$ \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x - \delta \overline{a}_x + \delta {}_nE_x \overline{a}_{x+n}, \tag{29} $$

где ${}_nE_x$ — актуарный коэффициент дисконтирования, а $\overline{a}_t$ — актуарная приведенная стоимость непрерывной пожизненной ренты.

Доказательство. В [1] доказано, что для временного страхования жизни актуарная приведенная стоимость обязательств страховой компании на момент заключения договора выражается через упрощающие функции как

$$ \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \delta \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+n}}{D_x}. $$

Это можно переписать в виде

$$ \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \delta \frac{\overline{N}_x}{D_x} + \delta \frac{\overline{N}_{x+n}}{D_{x+n}} \frac{D_{x+n}}{D_x}. $$

Используя (13), получим

$$ \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \delta \overline{a}_x + \delta \overline{a}_{x+n} \frac{D_{x+n}}{D_x}. $$

Найдем отношение D_{x+n}/D_x. По определению $D_x = e^{-\delta x} l_x = l_0 e^{-\delta x} s(x)$. Значит,

$$ \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{l_0 e^{-\delta(x+n)} s(x+n)}{l_0 e^{-\delta x} s(x)} = e^{-\delta n} \frac{s(x+n)}{s(x)} = e^{-\delta n} s_x(n). $$

Окончательно имеем

$$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - e^{-\delta n} s_x(n) - \delta \overline{a}_x + \delta e^{-\delta n} \overline{a}_{x+n} s_x(n) =$$
$$= \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x - \delta \overline{a}_x + \delta {}_nE_x \overline{a}_{x+n}.$$

□

Для расчета пожизненной ренты в логистической модели будем использовать следствие 1 из теоремы 4 этой работы. Для расчета пожизненной ренты в модели Мэйкама будем использовать результат работы [11], где доказано, что такую ренту можно посчитать как

$$\overline{a}_x \equiv \overline{a}_x(A, B, \alpha, \delta) = e_0(A + \delta, Be^{\alpha x}, \alpha),$$
$$e_0(A, B, \alpha) = \frac{1}{A}\left(1 - \left(\frac{B}{\alpha}\right)^{A/\alpha} e^{B/\alpha} \Gamma\left(1 - \frac{A}{\alpha}\right)\left[1 - G\left(\frac{B}{\alpha}; 1 - \frac{A}{\alpha}, 1\right)\right]\right),$$

где $\Gamma(\eta) = \int_0^\infty y^{\eta-1} e^{-y} dy$ — гамма-функция, $G(z; \eta, 1) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_0^z y^{\eta-1} e^{-y} dy$ — функция распределения случайной величины, имеющей гамма распределение.

Часть результатов расчетов для процентой ставки $i = 5\%$ представлены в таблицах 3 и 4. Вычислительные эксперименты показали, что в некоторых случаях разовая нетто-премия для логистического закона меньше, чем для закона Мэйкама.

Для сравнения моделей расчеты были проведены для возрастов $x = 20, \dots, 79$ лет и для срока страхования $n = 1, \dots, 59$ лет с ограничением $x + n \leq 120$. Суммарно это 3410 вариантов. Из них в 3041 вариантах оказалось, что разовая нетто-премия для логистического закона меньше, чем для закона Мэйкама.

Резервы

Рассмотрим теперь договор временного страхования на n лет с выплатой страховой суммы в момент смерти, по которому застрахованный в каждую годовщину заключения этого договора платит периодическую нетто-премию $P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$.

Пусть момент заключения договора — это начальный момент времени. Предположим, что спустя время t застрахованный еще жив. Обозначим актуарную приведенную стоимость на этот момент обязательств страховой компании через ${}_ta_B$, а актуарную приведенную стоимость обязательств застрахованного через ${}_ta_C$. Величина ${}_ta_B$ определяет среднюю сумму, которую предстоит выплатить в будущем страховой компании, а величина ${}_ta_C$ — среднюю сумму, которая поступит от застрахованного. В таком случае резервом называется величина (см. [1])

$$ {}_tV = {}_ta_B - {}_ta_C. $$

Определим размер периодической нетто-премии.

Лемма 8. *Периодическая нетто-премия может быть посчитана следующим образом*

$$ P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \frac{s(x; A+\delta, B, \alpha)\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\sum_{k=x}^{x+n-1} s(k; A+\delta, B, \alpha)}. \tag{30} $$

Доказательство. Пусть T_x — остаточное время жизни индивида возраста x лет.

Актуарная приведенная стоимость обязательств компании на момент заключения договора — это величина $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$, которая равна математическому ожиданию приведенной стоимости $\overline{Z}^{1}_{x:\overline{n}|} \equiv e^{-\delta T_x} I\{T_x \leq n\}$. Тогда

$$ a_B \equiv {}_0a_B = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}. $$

В [1] доказано, что обязательства застрахованного в случае временного страхования равны

$$ a_C \equiv {}_0a_C = P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \frac{1}{D_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} D_k. $$

Согласно теореме 2 функция D_x выражается как

$$ D_x = l_0 s(x; A+\delta, B, \alpha). $$

Тогда

$$ a_C = \frac{P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})}{s(x; A+\delta, B, \alpha)} \sum_{k=x}^{x+n-1} s(k; A+\delta, B, \alpha). $$

В силу принципа эквивалентности обязательств $a_B = a_C$. Значит

$$ \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})}{s(x; A+\delta, B, \alpha)} \sum_{k=x}^{x+n-1} s(k; A+\delta, B, \alpha), \tag{31} $$

и периодическая нетто-премия выражается как

$$P(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \frac{s(x; A+\delta, B, \alpha)\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\sum_{k=x}^{x+n-1} s(k; A+\delta, B, \alpha)}.$$

□

Теперь найдем размер резерва.

Лемма 9. *Пусть t — время, прошедшее с момента заключения договора, и застрахованный еще жив.*

Если $t = \lfloor t \rfloor = k$, то размер резерва может быть посчитан по формуле

$${}_kV(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \overline{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|}\left(1 - \frac{P(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})}{P(\overline{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|})}\right).$$

Если $t = k+s, k = \lfloor t \rfloor, s = t - \lfloor t \rfloor \in (0,1)$, то размер резерва может быть посчитан по формуле

$${}_tV(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}) = \overline{A}^1_{x+t:\overline{n-t}|} - e^{-\delta(1-s)}{}_{1-s}p_{x+t}P(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})\frac{\overline{A}^1_{x+k+1:\overline{n-k-1}|}}{P(\overline{A}^1_{x+k+1:\overline{n-k-1}|})}.$$

Доказательство. Предположим, что спустя время t после заключения договора застрахованный еще жив. Для начала предположим, что t — целое число, то есть $t = \lfloor t \rfloor = k$. Посчитаем средние обязательства сторон.

Обязательства страховой компании в момент k состоит в выплате единичной суммы в момент смерти застрахованного возраста $x+k$, если он наступит раньше момента времени n. Поскольку от n лет в страховании уже прошло k лет, то на остальной промежуток приходится $n-k$ лет, и актуарная приведенная ценность обязательств на момент k равна $\overline{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|}$, то есть

$${}_ka_B = \overline{A}^1_{x+k:\overline{n-k}|}.$$

Застрахованный все еще обязан в каждую годовщину заключения договора выплачивать сумму $P(\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})$. Поскольку k — целое число, то первая такая выплата будет произведена в этот момент. С учетом того, что застрахованный дожил до возраста $x+k$, поток будущих премий можно записать как

$$
\begin{aligned}
{}_k a_C &= \mathsf{E}\left[P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\sum_{l=0}^{n-k-1} e^{-\delta l} I\{T_x > k+l\}\middle| T_x > k\right] = \\
&= P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\sum_{l=0}^{n-k-1} e^{-\delta l}\mathsf{E}\left[I\{T_x > k+l\}\middle| T_x > k\right] = \\
&= P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\sum_{l=0}^{n-k-1} e^{-\delta l}\mathsf{P}(T_x > k+l | T_x > k).
\end{aligned}
$$

Условная вероятность равна

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(T_x > k+l | T_x > k) &= \frac{\mathsf{P}(T_x > k+l)}{\mathsf{P}(T_x > k)} = \frac{s_x(k+l)}{s_x(k)} = \\
&= \frac{s(x+k+l)/s(x)}{s(x+k)/s(x)} = \frac{s(x+k+l)}{s(x+k)} = \\
&= {}_l p_{x+k}.
\end{aligned}
$$

Значит,

$$
{}_k a_C = P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\sum_{l=0}^{n-k-1} e^{-\delta l}{}_l p_{x+k}.
$$

Заметим, что это равенство можно интерпретировать следующим образом: мы дисконтируем суммы $P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$ с коэффициентом дисконтирования $e^{-\delta l}$ только в том случае, если застрахованный возраста $x+k$ доживает до момента оплаты l, что происходит с вероятностью ${}_l p_{x+k}$.

Теперь запишем равенство (31), заменив x на $x+k$, а n на $n-k$

$$
\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} = P(\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})\sum_{l=0}^{n-k-1} e^{-\delta l}{}_l p_{x+k}.
$$

Отсюда

$$
\sum_{l=0}^{n-k-1} e^{-\delta l}{}_l p_{x+k} = \frac{\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{P(\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})}.
$$

Тогда обязательства застрахованного можно записать в виде

$$
{}_k a_C = P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\frac{\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{P(\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})}. \tag{32}
$$

Значит, резерв можно посчитать следующим образом

$$
\begin{aligned}
{}_kV(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) &= {}_ka_B - {}_ka_C = \\
&= \overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\frac{\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}}{P(\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})} = \\
&= \overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}\left(1 - \frac{P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})}{P(\overline{A}^{1}_{x+k:\overline{n-k}|})}\right).
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим случай $t = k + s, k = \lfloor t \rfloor, s = t - \lfloor t \rfloor \in (0, 1)$.

Обязательства страховой компании в момент t состоит в выплате единичной суммы в момент смерти застрахованного возраста $x + t$, если он наступит раньше момента времени n. Поскольку от n лет в страховании уже прошло t лет, то на остальной промежуток приходится $n - t$ лет, и актуарная приведенная ценность обязательств на момент t равна $\overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}$, то есть

$$
{}_ta_B = \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}.
$$

Так как $k < t < k + 1$, то выплата премии застрахованным в момент k уже произошла. Выплата в момент $k+1$ произойдет, если застрахованный доживет до момента $k + 1$, то есть если он проживет еще по крайней мере $1 - s$ лет. В таком случае, применяя равенство (32) для момента $k + 1$, обязательства застрахованного на момент $k + 1$ будет равна

$$
{}_{k+1}a_C = P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\frac{\overline{A}^{1}_{x+k+1:\overline{n-k-1}|}}{P(\overline{A}^{1}_{x+k+1:\overline{n-k-1}|})}.
$$

С учетом того, что застрахованный уже прожил $x + t = x + k + s$ лет, вероятность дожития до момента $k + 1$ равна ${}_{1-s}p_{x+t}$. Приводя премию момента $k+1$ к моменту t с помощью коэффициента дисконтирования $e^{-\delta(1-s)}$, а также учитывая вероятность дожития, получаем, что обязательства застрахованного в момент t равны

$$
{}_ta_C = e^{-\delta(1-s)}{}_{1-s}p_{x+t}P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\frac{\overline{A}^{1}_{x+k+1:\overline{n-k-1}|}}{P(\overline{A}^{1}_{x+k+1:\overline{n-k-1}|})}.
$$

Теперь, резерв можно посчитать как разность ${}_ta_B - {}_ta_C$, то есть

$$
{}_tV(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - e^{-\delta(1-s)}{}_{1-s}p_{x+t}P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\frac{\overline{A}^{1}_{x+k+1:\overline{n-k-1}|}}{P(\overline{A}^{1}_{x+k+1:\overline{n-k-1}|})}.
$$

□

Некоторые результаты вычислительных экспериментов приведены на графиках 12, 13, 14. Скачки резервов в сторону уменьшения объясняются внесением застрахованным премии в годовщину заключения договора.

Вычислительные эксперименты показали, что в некоторых случаях резервы для логистического закона могут оказаться меньше, чем резервы для закона Мэйкама.

На графике 12 видно, что с течением времени разница в резервах увеличивается. То же самое можно заметить на графике 14. В обоих случаях резервы для логистического закона меньше, чем для закона Мэйкама.

Для сравнения моделей расчеты были проведены для возрастов $x = 20, \ldots, 79$ лет и для срока страхования $n = 1, \ldots, 59$ лет с ограничением $x + n \leq 120$. Суммарно это 3410 вариантов. Резервы считались каждую десятую часть года. Из 3410 вариантов в 2294 оказалось, что резервы для логистичсекого закона меньше резервов для закона Мэйкама в каждой точке расчета.

Например, при $x \geq 71$ не было случаев, когда резервы для закона Мэйкама были меньше, чем для логистического.

При $x = 20$ в промежутке от $n = 5$ до $n = 34$ резервы для логистичсекого закона меньше, чем для закона Мэйкама.

При $x = 25$ в промежутке от $n = 29$ до $n = 52$ резервы для логистичсекого закона больше, чем для закона Мэйкама.

При $x = 35$ также выделяется такой промежуток: от $n = 17$ до $n = 42$.

Для старших возрастов, например, для $x = 50$, это промежуток от $n = 2$ до $n = 27$. А для $x = 60$ от $n = 1$ до $n = 16$.

К сожалению, на рассмотренных графиках для случев, когда находился промежуток для n, на котором резервы для закона Мэйкама были меньше, чем для логистического, это отличие практически неотличимо. Это можно увидеть на графике 13.

Итак, для каждого возраста x могут существовать промежутки n, в которых резервы для логистического закона меньше.

В общем объеме экспериментов доля случаев, когда резервы для логистического закона меньше, равна $2294/3410 \approx 0.673$ – в большинстве вариантов это верно. Таким образом, если при расчете резервов использовать логистичсекий закон, то размеры резервов могут быть меньше, что может привести к послаблениям со стороны вышестоящих инстанций в отношении требований резервов для страховых компаний.

5 Выводы

Рассмотренная выше логистическая модель

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x}}$$

была получена Thatcher'ом ([9]) при исследовании смертности на основе архива данных о старении популяций (см. [10]). Необходимым и достаточным условием соответствия интенсивности смертности неоднородной популяции логистическому закону в предположении, что каждая группа популяции подчинена закону Мэйкама со случайным параметром B, является гамма распределение этого параметра.

Существует несколько причин и теорий, побуждающих использовать именно логистическую модель смертности. Среди них неоднородность популяции, исследования в области моделирования смертности случайными процессами, наблюдения из биологической теории старения.

Современное программное обеспечение позволяет легко посчитать необходимые в актуарных расчетах упрощающие функции для логистической модели смертности.

Сравнительный актуарный анализ этой модели с известной моделью Мэйкама показал, что при временном страховании применение логистической модели может уменьшить размеры необходимых резервов. Таким образом, использование этой модели может привести к послаблениям со стороны вышестоящих инстанций в отношении требований резервов для страховых компаний.

6 Заключение

Целью данной работы было исследование свойств логистического закона смертности, а также получение формул для необходимых в актуарных расчетах упрощающих функций в случае логистического закона смертности вида

$$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1 + Be^{\alpha x}}.$$

Направление исследования упрощающих функций возникло в статье [11] для закона Мэйкама. Анализ логистического закона продолжает работу в этом направлении, так как в отличие от закона Мэйкама, где популяция однородна, логистический закон предполагает неоднородную популяцию. Таким образом, данная работа — обобщение результатов, полученных для закона Мэйкама в статье [11].

Еще одна цель этой работы состояла в иллюстрации отличий логистического закона и закона Мэйкама при их сопоставимости. Для этого были получены формулы разовой нетто-премии, периодической нетто-премии, а также резервов для временного страхования жизни. Вычислительные эксперименты показали, что применение логистической модели может уменьшить размеры необходимых резервов. Таким образом, использование этой модели может привести к послаблениям со стороны вышестоящих инстанций в отношении требований резервов для страховых компаний.

7 Приложение

Рис. 1: График интенсивности смертности для модели Гомпертца, $\mu_x = Be^{\alpha x}$, $B = 0.0000843, \alpha = 0.0831$.

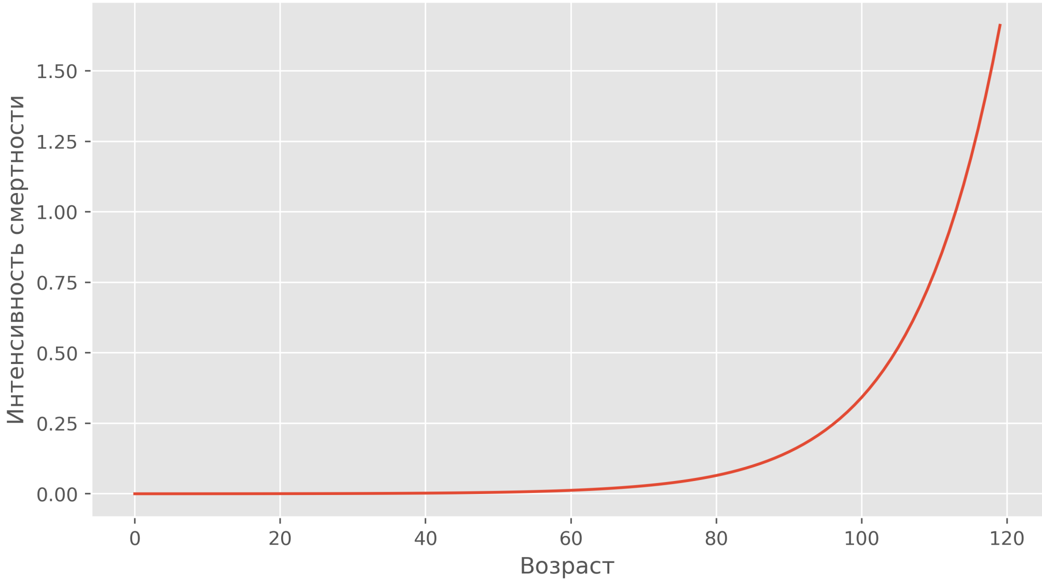

Рис. 2: График интенсивности смертности для модели Мэйкама, $\mu_x = A + Be^{\alpha x}$, $A = 5.02 \cdot 10^{-4}, B = 4.2 \cdot 10^{-5}, \alpha = 8.68 \cdot 10^{-2}$.

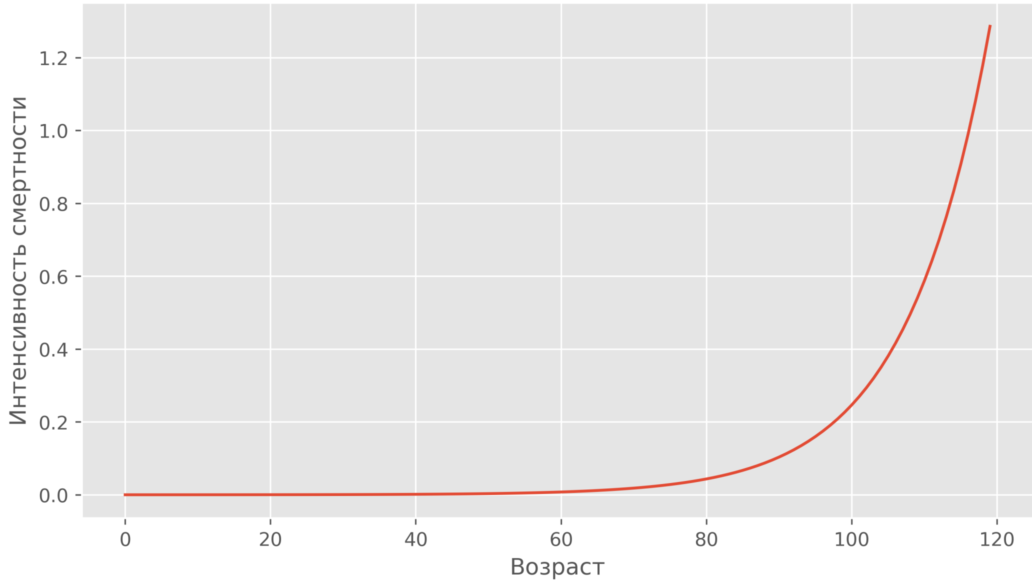

Рис. 3: График интенсивности смертности для модели Перкса,
$\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+De^{\alpha x}}$, $A = 0, B = 8.4 \cdot 10^{-5}, \alpha = 0.0832, D = 2.1212 \cdot 10^{-9}$.

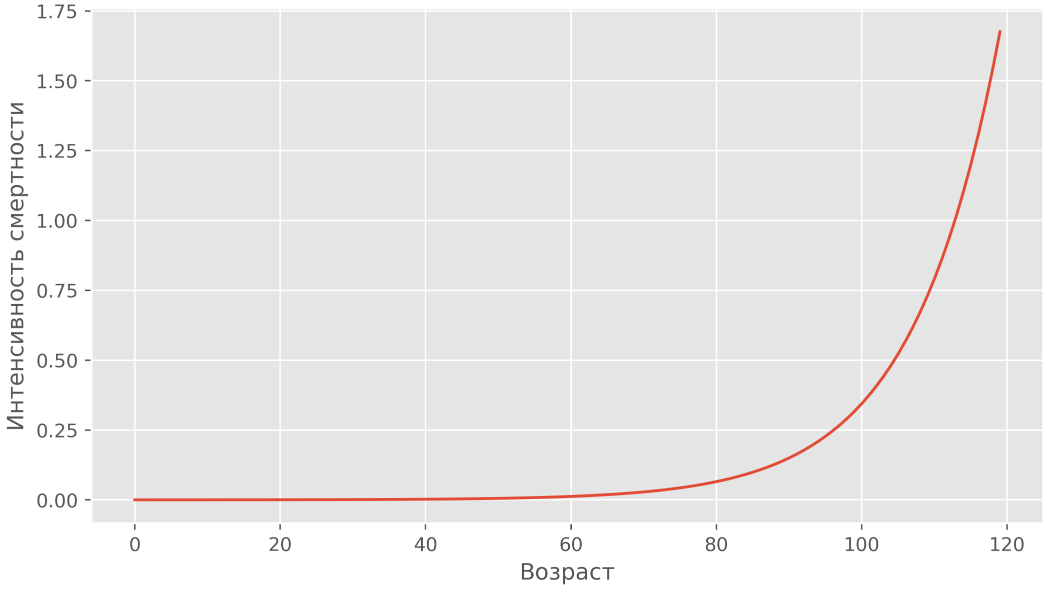

Рис. 4: График интенсивности смертности для модели Вейбулла,
$\mu_x = \alpha x^{\beta}$, $\alpha = 4.1 \cdot 10^{-10}, \beta = 4.25$.

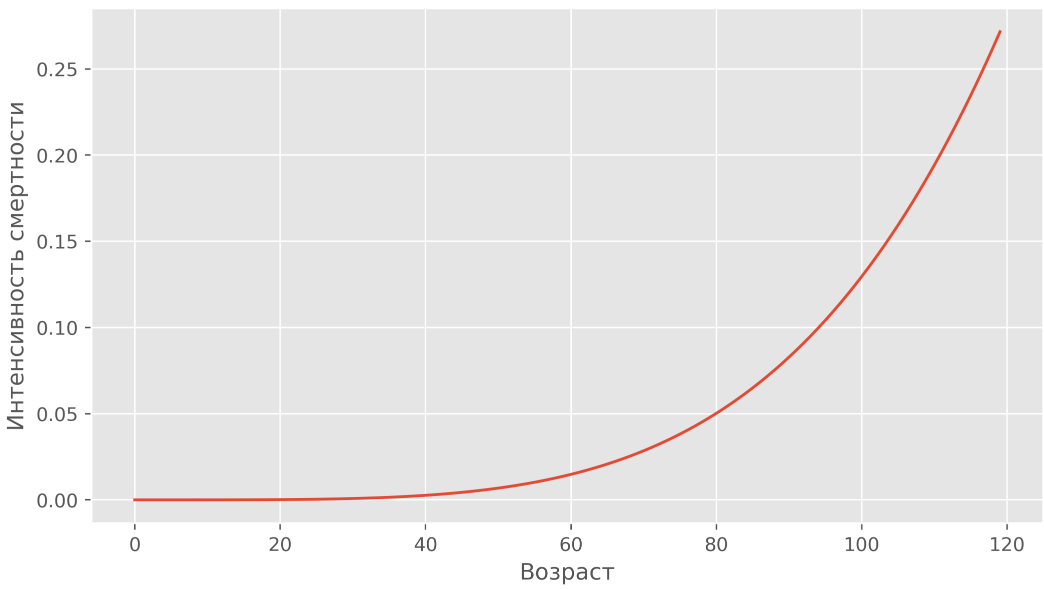

Рис. 5: Сравнение интенсивности смертности нескольких моделей для возрастов 80-120 лет.

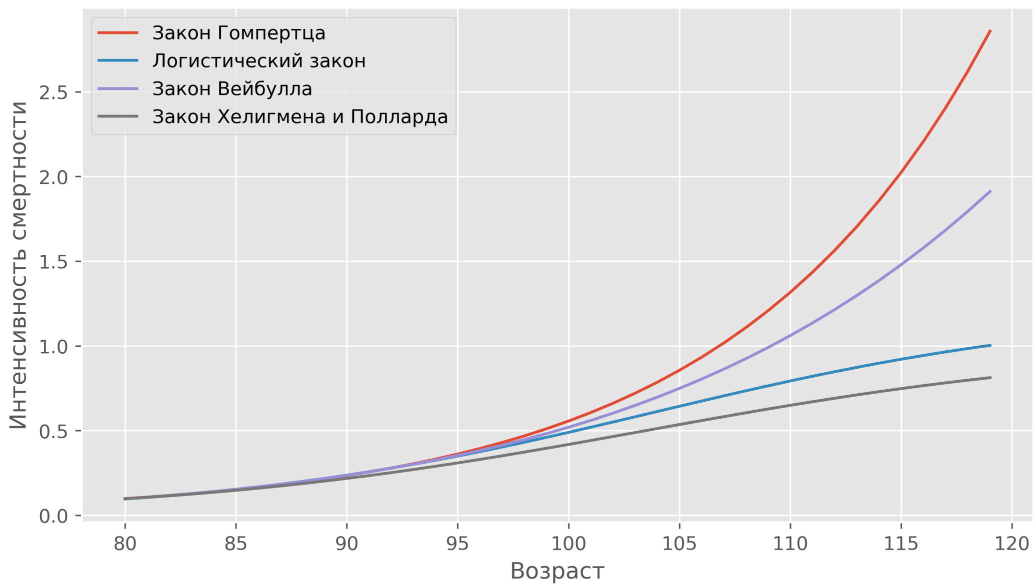

Рис. 6: Приближение логистическим законом функции выживания для данных о смертности ELT17 (мужчины). Параметры логистического закона: $\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}}, A = 4.32925877{\cdot}10^{-4}, B = 1.27283805{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.04938113e{\cdot}10^{-1}$.

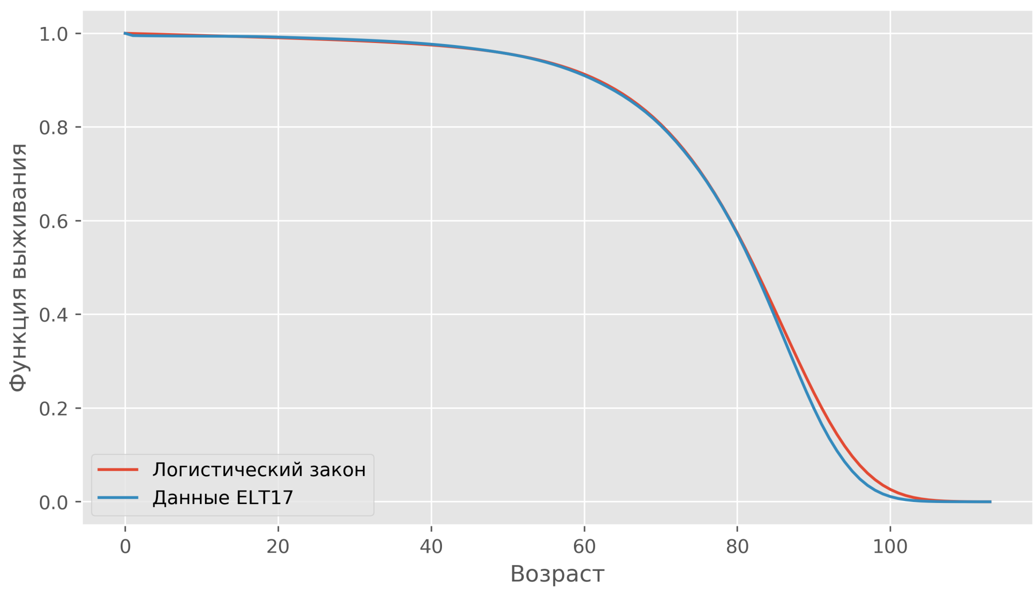

Рис. 7: Приближение законом Мэйкама функции выживания для данных о смертности ELT17 (мужчины). Параметры закона Мэйкама: $\mu_x = A + Be^{\alpha x}, A = 4.27502400 \cdot 10^{-4}, B = 1.35972296 \cdot 10^{-5}, \alpha = 1.03699885 \cdot 10^{-1}$.

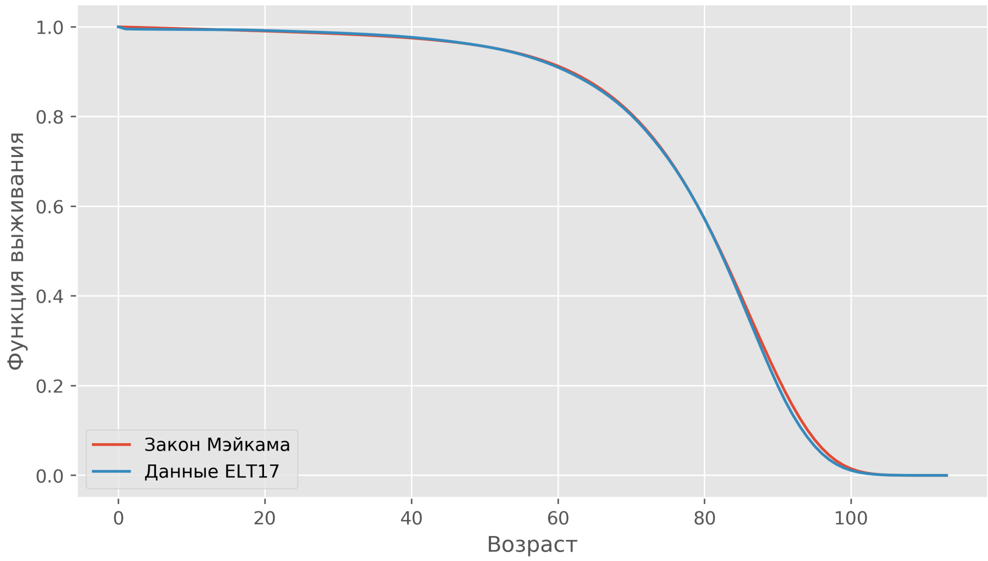

Рис. 8: Сравнение функций выживания аналитических законов с реальными данными о смертности ELT17 (мужчины). Параметры логистического закона: $\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}}, A = 4.32925877 \cdot 10^{-4}, B = 1.27283805 \cdot 10^{-5}, \alpha = 1.04938113e \cdot 10^{-1}$. Параметры закона Мэйкама: $\mu_x = A + Be^{\alpha x}, A = 4.27502400 \cdot 10^{-4}, B = 1.35972296 \cdot 10^{-5}, \alpha = 1.03699885 \cdot 10^{-1}$.

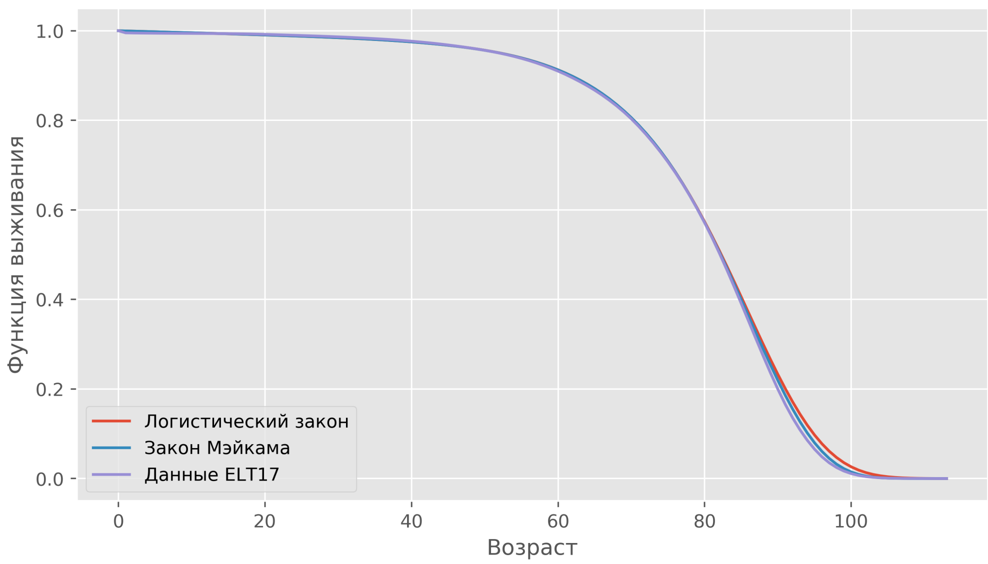

Рис. 9: Сравнение функций выживания аналитических законов на возрастах от 80 до 100. Параметры логистического закона: $\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}}, A = 4.32925877{\cdot}10^{-4}, B = 1.27283805{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.04938113e{\cdot}10^{-1}$. Параметры закона Мэйкама: $\mu_x = A + Be^{\alpha x}, A = 4.27502400{\cdot}10^{-4}, B = 1.35972296{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.03699885{\cdot}10^{-1}$.

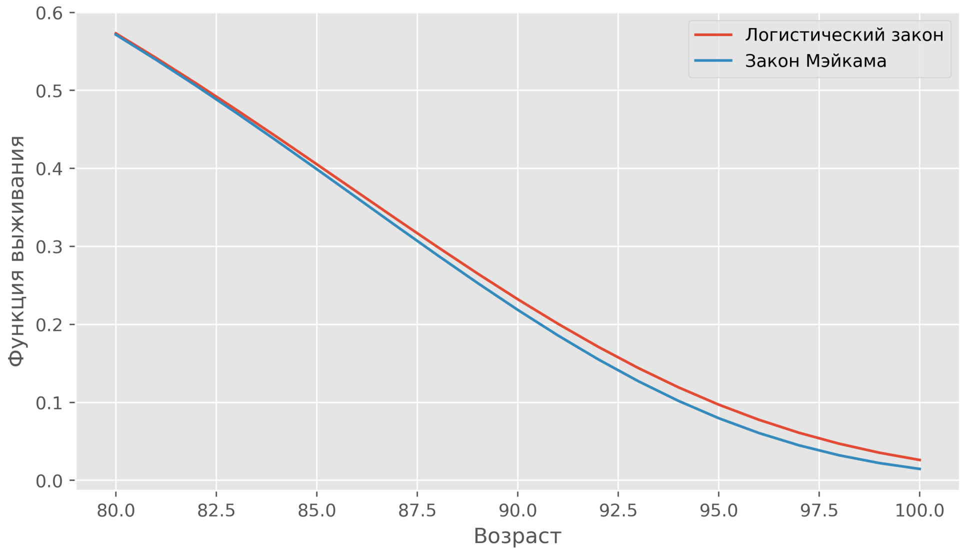

Рис. 10: Сравнение функций выживания аналитических законов на возрастах от 100 до 120. Параметры логистического закона: $\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}}, A = 4.32925877{\cdot}10^{-4}, B = 1.27283805{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.04938113e{\cdot}10^{-1}$. Параметры закона Мэйкама: $\mu_x = A + Be^{\alpha x}, A = 4.27502400{\cdot}10^{-4}, B = 1.35972296{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.03699885{\cdot}10^{-1}$.

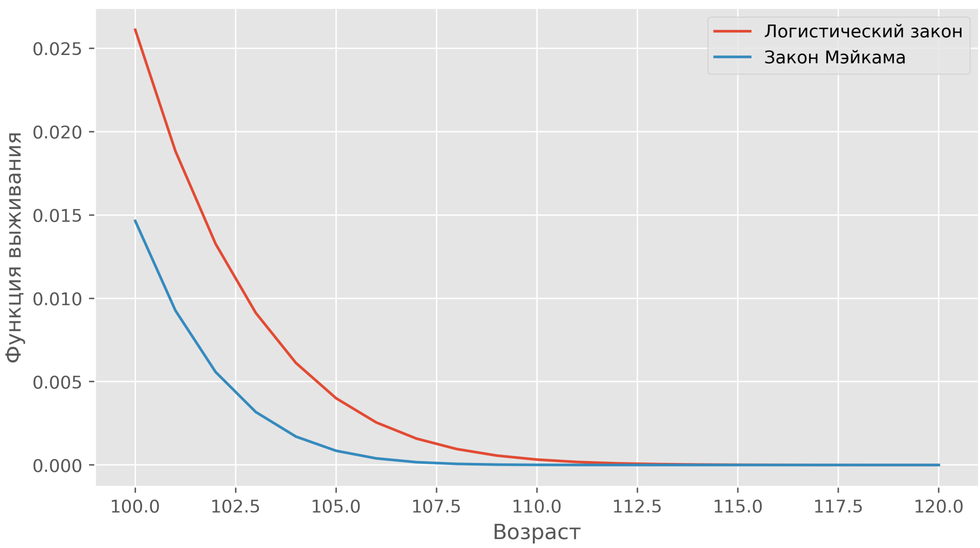

Рис. 11: Сравнение интенсивностей смертности аналитических законов на возрастах от 80 до 120. Параметры логистического закона: $\mu_x = A + \frac{Be^{\alpha x}}{1+Be^{\alpha x}}, A = 4.32925877{\cdot}10^{-4}, B = 1.27283805{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.04938113e{\cdot}10^{-1}$. Параметры закона Мэйкама: $\mu_x = A + Be^{\alpha x}, A = 4.27502400{\cdot}10^{-4}, B = 1.35972296{\cdot}10^{-5}, \alpha = 1.03699885{\cdot}10^{-1}$.

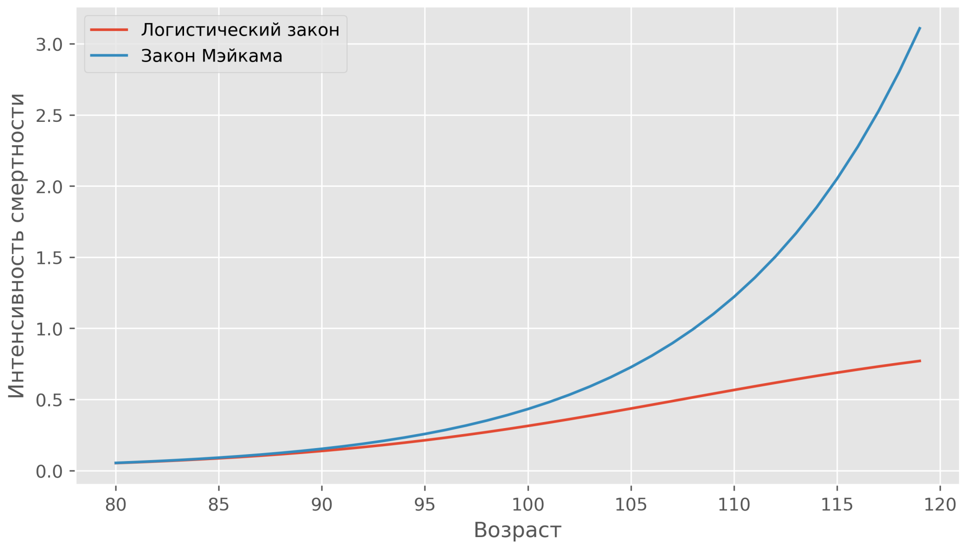

Рис. 12: Сравнение резервов для 60-летнего страхования человека возраста 40 лет

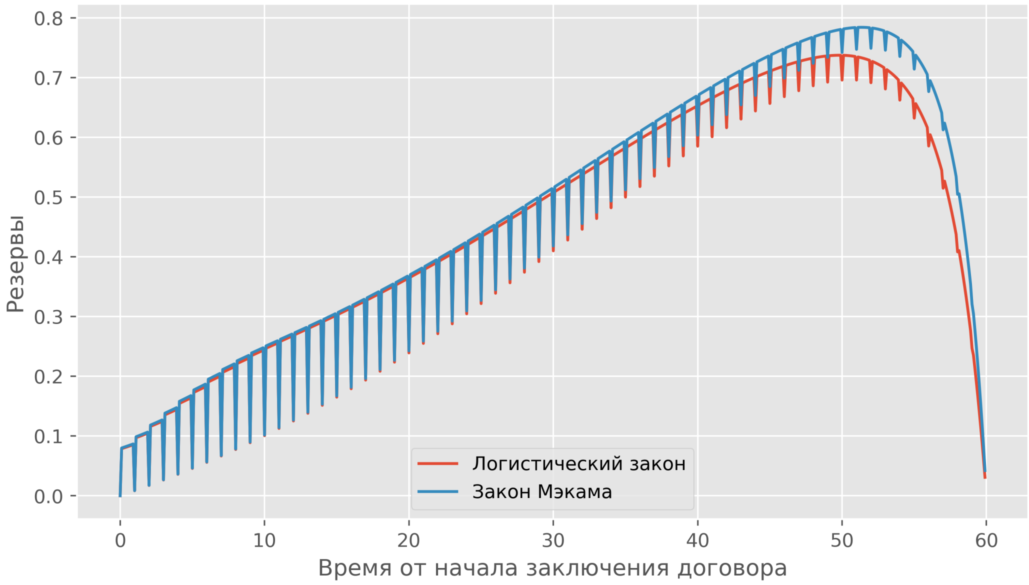

Рис. 13: Сравнение резервов для 15-летнего страхования человека возраста 50 лет

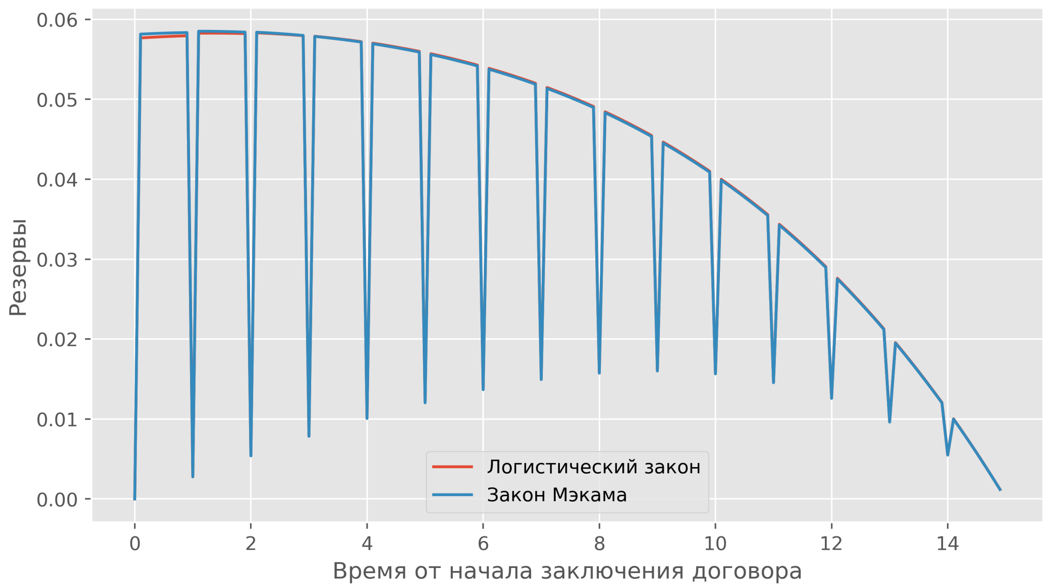

Рис. 14: Сравнение резервов для 20-летнего страхования человека возраста 80 лет

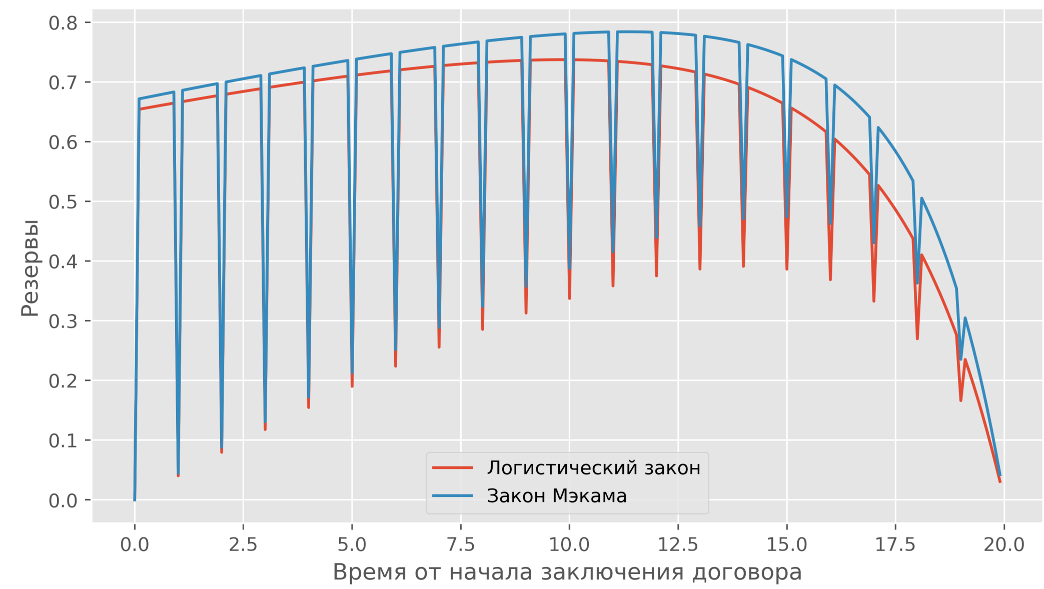

Таблица 1: Относительные ошибки при приближении логистическим законом (раздел 4.1)

Возраст	**Ошибка**	**Возраст**	**Ошибка**	**Возраст**	**Ошибка**
1	-0.00432429	34	0.00204284	67	-0.00375010
2	-0.00417732	35	0.00205580	68	-0.00347907
3	-0.00393796	36	0.00203908	69	-0.00320567
4	-0.00362622	37	0.00200841	70	-0.00310957
5	-0.00329239	38	0.00192925	71	-0.00320857
6	-0.00293624	39	0.00180834	72	-0.00333232
7	-0.00256762	40	0.00166339	73	-0.00328866
8	-0.00219636	41	0.00151302	74	-0.00302614
9	-0.00181207	42	0.00136661	75	-0.00257116
10	-0.00143456	43	0.00119347	76	-0.00211818
11	-0.00105338	44	0.00098440	77	-0.00188486
12	-0.00066811	45	0.00076221	78	-0.00196996
13	-0.00028835	46	0.00053054	79	-0.00248844
14	0.00007636	47	0.00032563	80	-0.00376225
15	0.00043666	48	0.00015447	81	-0.00639600
16	0.00076303	49	0.00002591	82	-0.01085644
17	0.00103607	50	-0.00009098	83	-0.01737649
18	0.00123645	51	-0.00022542	84	-0.02625614
19	0.00136503	52	-0.00039420	85	-0.03796022
20	0.00144284	53	-0.00063310	86	-0.05309422
21	0.00149104	54	-0.00089100	87	-0.07243565
22	0.00152086	55	-0.00118780	88	-0.09695157
23	0.00156382	56	-0.00151932	89	-0.12791039
24	0.00161133	57	-0.00192129	90	-0.16657414
25	0.00166503	58	-0.00236183	91	-0.21260473
26	0.00173681	59	-0.00277189	92	-0.26428613
27	0.00180851	60	-0.00315376	93	-0.32285578
28	0.00187224	61	-0.00353908	94	-0.39433081
29	0.00193046	62	-0.00390039	95	-0.48517025
30	0.00195555	63	-0.00410300	96	-0.59957270
31	0.00198084	64	-0.00410544	97	-0.74031681
32	0.00198945	65	-0.00399866	98	-0.91322544
33	0.00201549	66	-0.00389682	99	-1.12282329
				100	-1.37794520

Таблица 2: Относительные ошибки при приближении законом Мэйкама (раздел 4.1)

Возраст	**Ошибка**	**Возраст**	**Ошибка**	**Возраст**	**Ошибка**
1	-0.00432883	34	0.00200636	67	-0.00383793
2	-0.00418631	35	0.00202532	68	-0.00360951
3	-0.00395131	36	0.00201522	69	-0.00337583
4	-0.00364384	37	0.00199181	70	-0.00331223
5	-0.00331416	38	0.00192053	71	-0.00343048
6	-0.00296206	39	0.00180810	72	-0.00355199
7	-0.00259736	40	0.00167223	73	-0.00347362
8	-0.00222989	41	0.00153151	74	-0.00312949
9	-0.00184924	42	0.00139525	75	-0.00252730
10	-0.00147522	43	0.00123275	76	-0.00183734
11	-0.00109736	44	0.00103471	77	-0.00124605
12	-0.00071524	45	0.00082386	78	-0.00081218
13	-0.00033843	46	0.00060373	79	-0.00059956
14	0.00002353	47	0.00041041	80	-0.00086446
15	0.00038130	48	0.00025076	81	-0.00212594
16	0.00070538	49	0.00013343	82	-0.00474006
17	0.00097637	50	0.00002726	83	-0.00879783
18	0.00117498	51	-0.00009717	84	-0.01441611
19	0.00130206	52	-0.00025696	85	-0.02182148
20	0.00137867	53	-0.00048819	86	-0.03130784
21	0.00142601	54	-0.00074010	87	-0.04324216
22	0.00145530	55	-0.00103293	88	-0.05804698
23	0.00149812	56	-0.00136294	89	-0.07625990
24	0.00154587	57	-0.00176627	90	-0.09817420
25	0.00160022	58	-0.00221150	91	-0.12229472
26	0.00167310	59	-0.00263002	92	-0.14561253
27	0.00174636	60	-0.00302454	93	-0.16756474
28	0.00181213	61	-0.00342707	94	-0.19123420
29	0.00187290	62	-0.00381042	95	-0.21893075
30	0.00190106	63	-0.00404005	96	-0.24968277
31	0.00192998	64	-0.00407439	97	-0.28004591
32	0.00194279	65	-0.00400400	98	-0.30741950
33	0.00197361	66	-0.00394224	99	-0.32659936
				100	-0.33357172

Таблица 3: Разовые нетто-премии для временного (n лет) страхования жизни. Указаны значения для логистического закона, а в скобках для закона Мэйкама (раздел 4.1)

Возраст x	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
30	0.00362 (0.00365)	0.00737 (0.00742)	0.01149 (0.01157)
35	0.00480 (0.00483)	0.01008 (0.01015)	0.01620 (0.01630)
40	0.00678 (0.00682)	0.01464 (0.01472)	0.02409 (0.02419)
45	0.01011 (0.01016)	0.02227 (0.02234)	0.03719 (0.03725)
50	0.01570 (0.01573)	0.03496 (0.03498)	0.05869 (0.05864)
55	0.02503 (0.02501)	0.05586 (0.05576)	0.09329 (0.09309)
60	0.04050 (0.04039)	0.08966 (0.08943)	0.14720 (0.14708)
65	0.06578 (0.06561)	0.14275 (0.14273)	0.22690 (0.22787)
70	0.10618 (0.10636)	0.22226 (0.22378)	0.33543 (0.34001)
75	0.16847 (0.17045)	0.33270 (0.33918)	0.46607 (0.47817)
80	0.25908 (0.26693)	0.46948 (0.48682)	0.59905 (0.62052)
85	0.37971 (0.40193)	0.61353 (0.64633)	0.71063 (0.73710)
90	0.52094 (0.56942)	0.73725 (0.78091)	0.79066 (0.81671)

Таблица 4: Разовые нетто-премии для временного (n лет) страхования жизни. Указаны значения для логистического закона, а в скобках для закона Мэйкама (раздел 4.1)

Возраст x	$n = 20$	$n = 25$	$n = 30$
30	0.01627 (0.01637)	0.02202 (0.02213)	0.02907 (0.02917)
35	0.02357 (0.02369)	0.03261 (0.03272)	0.04374 (0.04382)
40	0.03569 (0.03578)	0.04998 (0.05003)	0.06732 (0.06733)
45	0.05556 (0.05557)	0.07787 (0.07782)	0.10397 (0.10398)
50	0.08749 (0.08737)	0.12119 (0.12114)	0.15803 (0.15842)
55	0.13708 (0.13698)	0.18496 (0.18543)	0.23164 (0.23339)
60	0.21010 (0.21073)	0.27142 (0.27373)	0.32121 (0.32563)
65	0.30894 (0.31215)	0.37557 (0.38158)	0.41659 (0.42379)
70	0.42733 (0.43576)	0.48393 (0.49398)	0.50743 (0.51561)
75	0.54821 (0.56269)	0.58231 (0.59408)	0.59073 (0.59939)
80	0.65285 (0.67018)	0.66613 (0.67859)	0.66788 (0.67900)
85	0.73460 (0.75247)	0.73776 (0.75323)	0.73797 (0.75323)
90	0.79771 (0.81847)	0.79818 (0.81849)	0.79819 (0.81849)

```
Построение типичных графиков
----------------------------
def get_figure_mu_x(mu_x_function, params, filename):

    ages = [i for i in range(120)]
    mu_x = [mu_x_function(age, **params) for age in ages]

    fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(9,5))

    plt.xlabel('Возраст')
    plt.ylabel('Интенсивность смертности')
    plt.plot(ages, mu_x)
    plt.savefig(filename)

def mu_gompertz_law(age, B, alpha):
    return B * math.exp(alpha*age)

def mu_makeham_law(age, A, B, C):
    return A + B * C**age

def mu_perks_law(age, A, B, alpha, D):
    return A + (B*math.exp(alpha*age))/(1 + D*math.exp(alpha*age))

def mu_weibull_law(age, alpha, beta):
    return alpha * age**beta

def mu_hel_pol_linear(age, G, H):
    alpha = math.log(G)
    beta = math.log(H)
    return alpha - 0.5*beta + beta*age


Поиск параметров градиентным спуском
------------------------------------
# Для логистического закона

class LogisticApproximator:
    def __init__(self, alpha=0.001, epsilon=0.9, rho=0.001, max_epoch=50):
        """
        n - срок страхования
        x - возраст человека
        alpha - скорость спуска
        max_epoch - максимальное количество эпох
        """
        self.alpha = alpha
        self.epsilon = epsilon
        self.rho = rho
        self.grad_mem = np.array([0,0,0])
        self.max_epoch = max_epoch
        self.errors_log = {'iter' : [], 'loss' : []}
```

```
def prediction(self, t_i):
    A, B, alpha = self.theta
    return math.exp(-math.exp(A)*t_i - math.log((1+math.exp(B)*
    math.exp(math.exp(alpha)*t_i))/(1+math.exp(B))) / math.exp(alpha))

def error(self, t_i, y_i):
    return y_i - self.prediction(t_i)

def squared_error(self, t_i, y_i):
    return self.error(t_i, y_i)**2

def grad_of_squared_error(self, t_i, y_i):
    A, B, alpha = self.theta
    A = math.exp(A)
    B = math.exp(B)
    alpha = math.exp(alpha)
    s_x = self.prediction(t_i)
    der_A = -s_x * A * t_i
    der_B = s_x * B * (1-math.exp(alpha*t_i))/
    (alpha*(1+B*math.exp(alpha*t_i))*(1+B))
    der_alpha = s_x * alpha * (math.log((1+B*math.exp(alpha*t_i))/
    (1+B))/alpha**2 - (t_i*B*math.exp(alpha*t_i))/
    (alpha*(1+B*math.exp(alpha*t_i))))

    return np.array([-2*self.error(t_i, y_i)*der_A,
                     -2*self.error(t_i, y_i)*der_B,
                     -2*self.error(t_i, y_i)*der_alpha])

def calc_loss(self, t, y):
    loss = 0

    for t_i, y_i in zip(t, y):
        loss += self.squared_error(t_i, y_i)

    return loss

def calc_loss_grad(self, t, y):
    loss_grad = []

    for t_i, y_i in zip(t, y):
        loss_grad.append(self.grad_of_squared_error(t_i, y_i))

    loss_grad = np.array(loss_grad).sum(axis=0)

    return loss_grad

def update_weights(self, new_grad):
    self.theta = self.theta - self.alpha*new_grad /
    np.sqrt(self.epsilon + self.grad_mem)

def fit(self, t, y):
```

```
        np.random.seed(2345)
        self.theta = (math.log(0.000005), math.log(0.000002), math.log(0.05))

        for n in range(self.max_epoch):
            grad = self.calc_loss_grad(t, y)
            self.grad_mem = self.rho*self.grad_mem + (1-self.rho)*grad*grad
            self.update_weights(grad)
            loss = self.calc_loss(t, y)
            self.errors_log['iter'].append(n)
            self.errors_log['loss'].append(loss)

        return self

    def predict(self, X):
        pass

# Для закона Мэйкама

class MakehamApproximator:
    def __init__(self, alpha=0.001, epsilon=0.9, rho=0.001, max_epoch=50):
        """
        n - срок страхования
        x - возраст человека
        alpha - скорость спуска
        max_epoch - максимальное количество эпох
        """
        self.alpha = alpha
        self.epsilon = epsilon
        self.rho = rho
        self.grad_mem = np.array([0,0,0])
        self.max_epoch = max_epoch
        self.errors_log = {'iter' : [], 'loss' : []}

    def prediction(self, t_i):
        A, B, alpha = self.theta
        return math.exp(-math.exp(A)*t_i - math.exp(B)/math.exp(alpha) *
        (math.exp(math.exp(alpha)*t_i) - 1))

    def error(self, t_i, y_i):
        return y_i - self.prediction(t_i)

    def squared_error(self, t_i, y_i):
        return self.error(t_i, y_i)**2

    def grad_of_squared_error(self, t_i, y_i):
        A, B, alpha = self.theta
        A = math.exp(A)
        B = math.exp(B)
        alpha = math.exp(alpha)
        s_x = self.prediction(t_i)
        der_A = -s_x * A * t_i
```

```
        der_B = -s_x * B * (math.exp(alpha*t_i) - 1) / alpha
        der_alpha = s_x * alpha * B * (math.exp(alpha*t_i) -
        alpha*t_i*math.exp(alpha*t_i) - 1) / (alpha**2)

        return np.array([-2*self.error(t_i, y_i)*der_A,
                         -2*self.error(t_i, y_i)*der_B,
                         -2*self.error(t_i, y_i)*der_alpha])

    def calc_loss(self, t, y):
        loss = 0

        for t_i, y_i in zip(t, y):
            loss += self.squared_error(t_i, y_i)

        return loss

    def calc_loss_grad(self, t, y):
        loss_grad = []

        for t_i, y_i in zip(t, y):
            loss_grad.append(self.grad_of_squared_error(t_i, y_i))

        loss_grad = np.array(loss_grad).sum(axis=0)

        return loss_grad

    def update_weights(self, new_grad):
        self.theta = self.theta - self.alpha*new_grad /
        np.sqrt(self.epsilon + self.grad_mem)

    def fit(self, t, y):
        np.random.seed(2345)
        self.theta = (math.log(0.000005), math.log(0.000002), math.log(0.05))

        for n in range(self.max_epoch):
            grad = self.calc_loss_grad(t, y)
            self.grad_mem = self.rho*self.grad_mem + (1-self.rho)*grad*grad
            self.update_weights(grad)
            loss = self.calc_loss(t, y)
            self.errors_log['iter'].append(n)
            self.errors_log['loss'].append(loss)

        return self

    def predict(self, X):
        pass


Расчет разовых нетто-премий
---------------------------
# Для логистического закона
```

```
class LogisticA_x_n:

    def __init__(self, A, B, alpha, delta):
        self.A = A
        self.B = B
        self.alpha = alpha
        self.delta = delta

    def s_x(self, x):
        return math.exp(-self.A*x - math.log((1+
        self.B*math.exp(self.alpha*x))/(1+self.B))
        / self.alpha)

    def s_x_n(self, x, n):
        return self.s_x(x+n) / self.s_x(x)

    def e_0(self, A, B, alpha):

        theta = 1/alpha
        gamma = A/alpha

        a = theta
        b = 1
        c = theta + gamma + 1
        z = 1/(1+B)

        coeff = theta/(theta+gamma)
        hyper_funct = special.hyp2f1(a, b, c, z)

        return coeff * hyper_funct

    def a_x(self, x):
        return self.e_0(self.A + self.delta,
                        self.B*math.exp(self.alpha*x),
                        self.alpha)

    def A_x_n(self, x, n):
        return (1 - math.exp(-self.delta*n)*self.s_x_n(x, n) -
        self.delta*self.a_x(x) + self.delta*self.a_x(x+n)*
        math.exp(-self.delta*n)*self.s_x_n(x, n))

    def mu_x(self, x):
        return self.A + (self.B*math.exp(self.alpha*x))
        /(1+self.B*math.exp(self.alpha*x))

# Для модели Мэйкама

class MakehamA_x_n:

    def __init__(self, A, B, alpha, delta):
```

```
        self.A = A
        self.B = B
        self.alpha = alpha
        self.delta = delta

    def s_x(self, x):
        return math.exp(-self.A*x - (self.B *
        (math.exp(self.alpha*x) - 1)) / self.alpha)

    def s_x_n(self, x, n):
        return self.s_x(x+n) / self.s_x(x)

    def e_0(self, A, B, alpha):
        theta = B/alpha
        gamma = A/alpha
        return ((1 - theta**gamma * math.exp(theta) *
        special.gamma(1-gamma) *
        (1 - stats.gamma.cdf(theta, 1-gamma, scale=1))) / A)

    def a_x(self, x):
        return self.e_0(self.A + self.delta,
                        self.B*math.exp(self.alpha*x),
                        self.alpha)

    def A_x_n(self, x, n):
        return (1 - math.exp(-self.delta*n)*self.s_x_n(x, n) -
        self.delta*self.a_x(x) + self.delta*self.a_x(x+n)*
        math.exp(-self.delta*n)*self.s_x_n(x, n))

    def mu_x(self, x):
        return self.A + self.B*math.exp(self.alpha*x)

Расчет резервов
---------------

def premium(x, n, i, model):
    v = 1/(1+i)
    summ = 0

    if n == 0:
        return 0

    for l in range(n):
        summ += v**l * model.s_x_n(x, l)

    return model.A_x_n(x, n) / summ

def reserve(t, x, n, model):
    k = int(t)
    s = t - k
    i = math.exp(model.delta) - 1
```

```
if t == k:
    return (model.A_x_n(x+k, n-k) - premium(x, n, i, model)*
            model.A_x_n(x+k, n-k)/premium(x+k, n-k, i, model))
else:
    v = 1/(1+i)
    p = model.s_x_n(x+t+1-s, x+t)

if n == k + 1:
    return model.A_x_n(x+t, n-t)
else:
    return (model.A_x_n(x+t, n-t) - v**(1-s)*p*premium(x, n, i, model)*
            model.A_x_n(x+k+1, n-k-1)/premium(x+k+1, n-k-1, i, model))
```

Литература

[1] Фалин, Г.И., *Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем*, 3-е издание: АНКИЛ, Москва, 2007. 304 с. ISBN 978-5-86476-235-6.

[2] Beard, R.E., *Note on some mathematical mortality models*, In: Wolstenholme, G.E.W. and O'Conner, M., Eds., Ciba Foundation Colloquium on Ageing, Little, Brown and Company, Boston, 1959, pp. 302-311.

[3] Beard, R.E., *Some aspects of theories of mortality, cause of death analysis, forecasting and stochastic processes*, In: Biological Aspects of Demography (ed. W. Brass), 1971, pp. 57–68.

[4] Фалин, Г.И., *Математический анализ рисков в страховании*, Российский Юридический Издательский Дом, 1994.

[5] Фалин, Г.И., *Анализ рисков с помощью метода Монте-Карло*, Управление Риском, 2017, №1, стр.3-19.

[6] Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В., *Методы теории функций комплексного переменного*, издательство «Наука», 1965.

[7] David L. Wilson, *The analysis of survival (mortality) data: Fitting Gompertz, Weibull, and logistic functions*, Mechanisms of Ageing and Development, Volume 74, Issues 1–2, May 1994, pp. 15-33.

[8] Heligman, L., Pollard, J.H., *The age pattern of mortality*, Journal of the Institute of Actuaries, Volume 107, Issue 1, January 1980, pp. 49-80.

[9] Thatcher, A.R., *The Long-Term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age*, Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), Vol. 162, No. 1 (1999), pp. 5-43.

[10] Thatcher, A.R., Kannisto, V., Vaupel, J.W., *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*, Odense: Odense University Press, Monographs on Population Aging, Vol. 5, 1998.

[11] Andreas Nordvall Lagerås, *Commutation functions under Gompertz–Makeham mortality*, Scandinavian Actuarial Journal, 2010:2, pp. 161-164.

[12] Бейтмен, Г., Эрдейи, А., *Высшие трансцендентные функции*, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1973.

[13] Elizabeth Arias, Jiaquan Xu, *English Life Tables No.17: 2010 to 2012*, Office of National Statistics, Statistical bulletin, 2015.

[14] Николенко, С., Кадурин, А., Архангельская Е., *Глубокое обучение*, издательство «Питер», серия «Библиотека программиста», 2019.