О применении условного математического ожидания хвоста распределения к вычислению премий

В данной статье мы покажем, как вычислять премии, основываясь на минимизации условного математического ожидания хвоста (англ. Conditional Tail Expectation, or CTE) функции абсолютных потерь. Этот способ обобщает хорошо известные принципы назначения премий и дает осмысленные результаты при практическом применении. В качестве функции потерь рекомендуем выбрать именно функцию абсолютных потерь, потому что, во-первых, ее CTE легко вычислить, а во-вторых, принцип ее работы интуитивно понятен. Предлагаемый метод также может быть применен для подсчета VaR (англ. Value at Risk) и CTE риска, если премия по нему уже задана (например, диктуется условиями рынка).

1. Вступление

В терминологии страхования, **премия** — это цена за страховое покрытие, то есть плата полисодержателей за избавление от фактора случайности. **Принцип назначения премий** — это правило, приписывающее премии страховым рискам. В литературе можно найти множество различных принципов назначения премий. Изучение и обоснование свойств таких принципов является классической задачей актуарной науки.

Среди большого количества описанных в литературе способов обоснования принципов назначения премий, мы хотим упомянуть использование так называемых мер риска. В общем случае, **мера риска** — это функция, приписывающая каждому риску число, определенная в соответствии с интуитивным принципом, согласно которому более опасному риску соответствует большая мера риска.

Меры риска становятся все более и более важными в финансах и страховании, и многие классические финансовые и актуарные задачи получили новый подход, основанный на современных мерах риска, отличных от дисперсии. Конкретно в актуарной науке, мы можем найти применение мер риска к таким важным задачам, как задача оптимального перестрахования, расчет требований к капиталу, и, конечно, определение принципов назначения премий.

Существует много разных мер риска, например, согласованные меры, меры отклонений, меры риска с ограниченным математическим ожиданием, выпуклые (вниз) меры. Наиболее значимым подходом является первый, использующий согласованные меры риска. **Согласованная мера** ρ удовлетворяет следующим свойствам:

Субаддитивность: $\rho(Y+Z) \leq \rho(Y)+\rho(Z)$
Однородность для положительных констант: $\rho(cY) = c\rho(Y), \forall c > 0$
Инвариантность относительно сдвига: $\rho(Y+c) = \rho(Y)+c, \forall c \in \mathbb{R}$
Монотонность: $Y(\omega) \leq Z(\omega)\ \forall \omega \in \Omega \ \Rightarrow\ \rho(Y) \leq \rho(Z)$

Здесь Y, Z — обозначающие потери случайные величины, определенные на пространстве Ω.

Многие часто используемые в актуарной науке меры риска являются согласованными, например, CTE (англ. Conditional Tail Expectation), математическое ожидание относительно искаженных вероятностей и спектральные меры риска. Знаменитая мера VaR (англ. Value at Risk) не является согласованной, потому что не удовлетворяет условию субаддитивности.

Пусть X — страховой риск, то есть неотрицательная случайная величина, обозначающая полную величину иска по данному полису за данный промежуток времени. В случаях, когда для подсчета премий используется мера риска ρ, то предполагается, что премия совпадает с мерой риска:

$$P_X = \rho(X) \tag{1}$$

Для обоснования предположения (1) используется свойство инвариантности относительно сдвига, потому что после прибавления к риску премии, определенной в (1), его мера становится равной нулю:

$$\rho(X - P_X) = \rho(X) - P_X = \rho(X) - \rho(X) = 0$$

Отметим, что нет ничего удивительного в том, что в физическом смысле мы премию к риску прибавляем, а в формуле мы премию из риска вычитаем: ведь случайная величина X обозначает потери, поэтому прибавление к риску положительной константы обозначает, что потери уменьшились на эту константу, поэтому в формуле надо P_X вычитать из X.

В соответствии с этой моделью, если страховая компания взимает за риск X недостаточную премию $P < P_X$ (где P_X определяется в (1)), то остаточный риск имеет положительную меру $\rho(X - P) = \rho(X) - \rho(P) > 0$. Это интуитивно кажется правильным, потому что недостаточные премии влекут возможность больших денежных потерь для страховой компании. С другой стороны, в соответствии с нашей моделью, если компания взимает по риску X избыточную премию $P > P_X$, то никакого риска не останется, поскольку $\rho(X - P) = \rho(X) - \rho(P) < 0$. Интуитивно правильность такого решения не вполне очевидна, ведь в этом случае потери несет полисодержатель. Кроме того, избыточные премии могут побудить многих полисодержателей отказаться от услуг страховой компании. В целом, мы считаем рискованным взимать как недостаточные, так и избыточные премии, поэтому меры остаточного риска в обоих случаях должны быть положительными. То есть мы считаем, что в процессе назначения премий с использованием мер риска нужно принимать во внимание рискованность назначения как недостаточных, так и избыточных премий.

Одним из возможных путей решения этой проблемы может быть метод, использующий одновременно и меры риска, и функции потерь. Прежде чем использовать этот метод, определим сначала **функцию потерь** для измерения ошибок упорядочивания. Эти ошибки упорядочивания возникают, когда премия P не совпадает со значением x случайной величины X. Мы будем обозначать потери, соответствующие премии P и значению $X = x$ как $L(P, x)$. Такая функция потерь каждой ошибке ставит в соответствие численное значение, обозначающее потери страховой компании в этом случае. Как только мы выбрали эту функцию потерь, следующим шагом мы можем применить хорошо известный подход мер риска, чтобы подсчитать суммарный риск страховой компании. Такая процедура, при которой страховая премия устанавливается путем решения минимизационной задачи, удовлетворяет двухступенчатой процедуре оценки риска, предлагаемой Гувертцем.

В данной статье мы придерживаемся этого предложения, и мы объявляем, что премия должна быть назначена как величина, минимизирующая меру риска потерь страховой компании. Кроме того, мы предлагаем метод вычисления этой оптимальной премии в некоторых частных случаях. В разделе 2 мы строго формулируем задачу на математическом языке и показываем, что она обобщает другие хорошо известные принципы назначения премий, такие как байесовский метод и обычный метод мер риска. В разделе 3 мы объясняем процедуру вычисления оптимальной премии в случае, когда мерой риска является CTE, а в разделе 4 мы получаем математическое выражение для оптимальной премии в случае, когда в качестве функции потерь взята простая и понятная функция абсолютных потерь. Кроме того, в этом разделе мы доказываем, что наш метод может быть применен для вычисления VaR и CTE риска при заданной премии. Наконец, в разделе 5 мы применяем наш метод на практике.

2. Формулировка задачи

Как мы уже отмечали во вступлении, мы предлагаем назначать в качестве премии за риск X ту величину P_X, которая минимизирует меру риска функции потерь. Прежде чем вычислять эту оптимальную премию, следует сначала выбрать как функцию потерь L, так и меру риска ρ. Как только они выбраны, следующим шагом мы минимизируем $\rho\big(L(P,X)\big)$. То есть, оптимальная премия вычисляется как такое значение P_X, которое минимизирует

$$\rho[L(P,X)] \qquad (2)$$

Убедимся, что такой подход является обобщением как байесовского подхода, так и обычного метода мер риска.
С одной стороны, если взять в качестве меры риска ρ математическое ожидание (которое, кстати, является согласованной мерой), то (2) превращается в следующее выражение:

$$E[L(P,X)] \qquad (3)$$

В этом случае, оптимальная премия и есть байесовская премия, определяемая как величина, минимизирующая ожидаемые потери (3). Отметим, что байесовский метод вычисления премий является классическим в актуарной математике. Например, стоит упомянуть Хельмана (1989), который показал, что некоторые из наиболее известных принципов назначения премий (например, принцип дисперсии, принцип Эсшера и экспоненциальный принцип) могут быть получены минимизацией ожидаемых потерь при правильно выбранной функции потерь.

С другой стороны, оптимальная премия, полученная минимизацией (2), принимает вид (1), если мы выберем в качестве функции потерь $L(P,X) = x - P$ (потому что мы рассматриваем только неотрицательные значения мер риска, и соответственно, ее минимальное значение есть ноль). Отметим, что такая функция потерь принимает положительные значения только если премия P недостаточная по отношению к значению $X = x$. В противном случае, то есть при избыточной премии, потери превращаются в прибыль, то есть L принимает отрицательные значения. В дальнейшем мы будем работать с более общей функцией потерь, которая считает потерями как недостаточную премию по риску (что вполне естественно), так и избыточную (что не вполне естественно, но мы считаем это правильным).

Как мы уже говорили во введении, целью данной статьи является предоставление метода минимизации выражения (2) и проверка того, что получаемое решение имеет разумные свойства. На самом деле, мы до сих пор изучаем лишь частный случай (2), который в качестве функции потерь использует функцию абсолютных потерь, а в качестве меры риска использует CTE. Однако предложенный метод может использоваться и для других функции потерь и меры риска.

Далее мы будем предполагать, что величина суммарных потерь X является абсолютно непрерывной случайной величиной, принимающей неотрицательные значения, и мы будем обозначать как $F(x)$ и $f(x)$ ее функцию распределения и плотность соответственно.

3. Вычисление премии путем минимизации CTE потерь

Как мы уже говорили ранее, наиболее известными мерами риска являются согласованные меры. А наиболее часто употребляемой мерой среди согласованных мер, несомненно, является CTE (Conditional Tail Expectation), также называемая Conditional Value at Risk (CVaR), Tail Value at Risk (TVaR), Average Value at Risk (AVaR), Expected Tail Loss. Предлагаемые в литературе определения этих понятий совпадают для непрерывных случайных величин, но для дискретных случайных величин могут встречаться отличия в определении, и иногда полученная мера риска оказывается несогласованной. Тем не менее, Rockafellar & Uryasev в 2002 г. и Rockafellar в 2006 г. предложили общие определения, согласно которым мера риска всегда оказывается согласованной, а ее математическое ожидание — ограниченным. Однако нас проблема дискретных распределений не волнует, поскольку мы договорились рассматривать только непрерывные случайные величины. Отметим, что CTE (которая является согласованной мерой) принадлежит также более широкому классу спектральных мер (в смысле Acerbi 2002). Кроме того, CTE может быть получена как искаженное математическое ожидание (в смысле Wang 1995, 1996). Наконец, CTE может рассматриваться как взвешенный принцип назначения премий (в смысле Furman & Zitikis 2008). Более того, CTE обладает хорошими теоретическими свойствами (например, полнотой стохастического доминирования), предоставляет информацию о степени риска в денежном эквиваленте, а также очень известна и легка в восприятии. По этим причинам, мы выбрали именно CTE в качестве нашей меры риска ρ. То есть мы предлагаем определять оптимальную премию как значение P^*, минимизирующее CTE потерь:

$$CTE\big(L(P,X)\big)$$

Для того, чтобы дать строгое определение CTE, сначала дадим строгое определение хорошо известной величины VaR (Value at Risk). При выбранном уровне доверия $\beta \in (0,1)$, соответствующее VaR определяется как минимальная величина $\alpha \geq 0$ такая, что потери на превосходят α с вероятностью не меньше β. А соответствующее CTE определяется как условное математическое ожидание потерь при условии, что потери превысили это значение α (то есть VaR).

В нашей задаче, при заданных уровне доверия $\beta \in (0,1)$, премии P и функции потерь $L(P,x)$, VaR определяется как

$$VaR_\beta(P) = min\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : Pr(L(P,X) \leq \alpha) \geq \beta\}$$

CTE определяется как

$$CTE_\beta(P) = \frac{1}{1-\beta}\int_{\text{x}:\, L(P,x) > VaR_\beta(P)}^{\infty} L(P,x)f(x)dx$$

Опять напомним себе, что мы рассматриваем только непрерывные распределения, поэтому плотность существует.

При заданном уровне доверия $\beta \in (0,1)$ и заданной функции потерь, мы определяем оптимальную премию как такое значение P_β^*, которое минимизирует CTE потерь, то есть $CTE_\beta(P)$. Может показаться, что минимизация $CTE_\beta(P)$ является очень сложной задачей, но Rockafellar & Uryasev (2000) разработали оптимальную технику для вычисления VaR и CTE, которую мы и применим к нашей задаче. На самом деле, Теорема 1 из Rockafellar & Uryasev (2000) подразумевает, что при заданной премии P, соответствующее $CTE_{\beta}(P)$ может быть подсчитано как минимальное значение следующей выпуклой и непрерывно дифференцируемой функции параметра α:

$$U(\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{\infty} [\,L(P,x) - \alpha]^{+} f(x)dx \tag{4}$$

Здесь
$[\,L(P,x) - \alpha]^{+} = L(P,x) - \alpha$ если $L(P,x) \geq \alpha$ и
$[\,L(P,x) - \alpha]^{+} = 0$ если $L(P,x) < \alpha$.
И оптимальное решение α, если оно единственно, то оно совпадает с $VaR_{\beta}(P)$.

Более того, если мы рассмотрим предыдущую функцию $U(\alpha)$ как функцию $V(P,\alpha)$ двух аргументов, P и α:

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{\infty} [\,L(P,x) - \alpha]^{+} f(x)dx \tag{5}$$

то Теорема 2 в работе Rockafellar & Uryasev (2000) показывается, что функция V выпукла и непрерывно дифференцируема по обеим переменным, и что при минимизации этой функции мы получаем пару $(P_{\beta}^{*}, \alpha_{\beta}^{*})$ такую, что P_{β}^{*} минимизирует $CTE_{\beta}(P)$, а α_{β}^{*} (при условии единственности) дает соответствующее $VaR_{\beta}(P_{\beta}^{*})$.

В случае, когда выбранной мерой риска является CTE, для получения осмысленных результатов вовсе не обязательно выбирать очень сложную функцию потерь. В следующем разделе мы решим эту оптимизационную задачу для случая, когда в качестве функции потерь берется функция абсолютных потерь $L(P,x) = |P - x|$, и мы получим премии, удовлетворяющие разумным свойствам. Тем не менее, предлагаемый нами метод применим и в случае других функций потерь.

5. Вычисление премии, минимизирующей CTE абсолютной функции потерь

Функция абсолютных потерь не используется в байесовских моделях назначения премий, поскольку она отдает предпочтение премии, равной медиане распределения потерь, а это неприемлемо, поскольку реальные потери имеют асимметрическое распределение (хвост справа), поэтому их медиана меньше среднего значения, и как следствие, у страховых компаний будут проблемы с платежеспособностью, ведь они в среднем будут терять деньги. Тем не менее, это возражение можно преодолеть, если рассматривать премии, вычисленные нашим методом с достаточно большим (то есть близким к единице) уровнем доверия β, как мы и увидим ниже. На самом деле, по мере увеличения β, премия в конце концов превысит нетто-премию, поэтому функция абсолютных потерь привлекательна в качестве функции потерь, ведь она предоставляет именно такие премии. Более того, функция абсолютных потерь проста в восприятии, поскольку она измеряет потери в денежных единицах. Напомним, однако, что функция абсолютных потерь считает потерями не только потери страховой компании при $P < x$, но и потери полисодержателей при $P > x$. Конечно, выбор в качестве функции потерь функции абсолютных потерь имеет и свои минусы. Например, в реальной жизни ущерб при избыточной премии может отличаться от ущерба при недостаточной премии. Такая ситуация может возникнуть, если потери страховой компании при взимании недостаточной премии не совпадают с потерями при взимании избыточной премии. Более того, в реальной жизни, из-за проблем ликвидности, потери могут быть нелинейными при большой ошибке. Поэтому в данной статье мы неявно предполагаем, что размер ошибки не очень велик, поэтому проблем с ликвидностью не возникает. В этом разделе мы сначала изучим симметричный случай, когда функция потерь есть просто функция абсолютных потерь, а после этого мы изучим более общий несимметричный случай.

Теорема 1 Если $L(P,x) = |P-x|$, то $\left(P_\beta^*, \alpha_\beta^*\right)$ доставляет минимум функции V тогда и только тогда, когда P_β^* и α_β^* являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} F(P-\alpha) &= \frac{1-\beta}{2} \\ F(P+\alpha) &= \frac{1+\beta}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Напомним, что F — это функция распределения случайной величины X.

Доказательство:

Нам нужно минимизировать функцию

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^\infty [\,|P-x|-\alpha]^+ f(x)dx$$

Перепишем ее в виде (напомним, что при $|P-x| < \alpha$ подынтегральное выражение будет равно нолю):

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\left[\int_{P+\alpha}^\infty (x-P-\alpha)f(x)dx + \int_0^{P-\alpha}(P-x-\alpha)f(x)dx + \right]$$

Исследуем каждый из интегралов по отдельности, потом проинтегрируем по частям и обозначим $S(x) = 1 - F(x)$, получим:

$$\int_{P+\alpha}^\infty (x-P-\alpha)f(x)dx + \int_0^{P-\alpha}(P-x-\alpha)f(x)dx =$$

$$\int_{P+\alpha}^\infty xf(x)dx - (P+\alpha)\int_{P+\alpha}^\infty f(x)dx + (P-\alpha)\int_0^{P-\alpha} f(x)dx - \int_0^{P-\alpha} xf(x)dx =$$

$$= \int_{P+\alpha}^\infty xf(x)dx - (P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big) + (P-\alpha)(F(P-\alpha)-0) - \int_0^{P-\alpha} xf(x)dx =$$

$$= (P+\alpha)\Big(1-F\big((P+\alpha)\big)\Big) + \int_{P+\alpha}^\infty \big(1-F(x)\big)dx - (P+\alpha)\big(1-F(P+\alpha)\big)$$

$$+(P-\alpha)F(P-\alpha) - \left((P-\alpha)F(P-\alpha) - 0 - \int_0^{P-\alpha} F(x)dx\right) =$$

$$= \int_{P+\alpha}^\infty \big(1-F(x)\big)dx + \int_0^{P-\alpha} F(x)dx = \int_{P+\alpha}^\infty S(x)dx + \int_0^{P-\alpha} F(x)dx$$

Поэтому функция V приняла вид

$$V(P,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\left[\int_0^{P-\alpha} F(x)dx + \int_{P+\alpha}^\infty S(x)dx\right]$$

Берем частные производные по P и по α:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{1-\beta}[F(P-\alpha) - S(P+\alpha)] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{1-\beta}[F(P-\alpha) + S(P+\alpha)] = 0$$

Получаем:

$$F(P-\alpha) = \frac{1-\beta}{2}$$

$$F(P+\alpha)=\frac{1+\beta}{2}$$

Теорема доказана.

Отметим, что поскольку оптимальные решения зависят как от уровня доверия β, так и от случайной величины X, то мы будем обозначать эти решения как $\left(P^*_{X,\beta},\alpha^*_{X,\beta}\right)$. Чтобы упростить обозначения, мы будем опускать X и β, когда из контекста ясно, о чем идет речь.

Замечание 1: Решение системы (6) ведет себя разумно: P^*_β стремится к медиане при $\beta\longrightarrow 0$, а при $\beta\longrightarrow 1$: $P^*_\beta\longrightarrow\infty$. Как следствие, если взять достаточно большой (то есть близкий к единице) уровень доверия β, то мы получим премию с нагрузкой, поскольку оптимальная премия P^*_β в какой-то момент превысит нетто-премию.

Замечание 2: Если возможно найти обратную функцию F^{-1} к функции распределения F, то система (6) легко решается:

$$\begin{aligned} P^*_\beta &= \frac{1}{2}\left[F^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)+F^{-1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\right] \\ \alpha^*_\beta &= \frac{1}{2}\left[F^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)-F^{-1}\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\right] \end{aligned} \qquad (7)$$

Например, если X имеет экспоненциальное распределение с параметром $a>0$, то $F(x)=1-e^{-\frac{x}{a}}$ при $x>0$.
То есть $F^{-1}(y)=-a\cdot log(1-y)$ при $y>0$.
Тогда

$$\begin{aligned} P^*_\beta &= -\frac{a}{2}\left[log\left(\frac{1-\beta}{2}\right)+log\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\right] \\ \alpha^*_\beta &= -\frac{a}{2}\left[log\left(\frac{1-\beta}{2}\right)-log\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Замечание 3: Оптимальные премии, полученные как решение системы (6), обладают хорошими свойствами, перечисленными ниже. Отметим, что свойства отсутствия необоснованной нагрузки, отсутствия обворовывания полисодержателя, инвариантности относительно сдвига, масштабной инвариантности и субаддитивности выполняются для любой согласованной меры, а не только для CTE.

Отсутствие необоснованной нагрузки:
Если случайная величина X все время принимает постоянное значение c (то есть $X(\omega)=c\geq 0\ \forall\omega\in\Omega$), то оптимальная премия и будет равна этому значению: $P^*_X=c$. Это действительно так, потому что именно при таком выборе премии мера риска CTE принимает свое наименьшее значение, равное нулю.

Отсутствие обворовывания полисодержателя:
Если $X(\omega)\leq c\ \forall\omega\in\Omega$, то и $P^*_X\leq c$.
От противного: предположим, что $P^*_X>c$.

Тогда $|P_X^* - X(\omega)| = |c - X(\omega)| + (P_X^* - c), \forall\omega \in \Omega$.
Тогда по свойству инвариантности меры относительно сдвига мы имеем:

$$\rho(|P_X^* - X|) = \rho\big(|c - X| + (P_X^* - c)\big) = \rho(|c - X|) + (P_X^* - c) > \rho(|c - X|)$$

Но это противоречит тому, что P_X^* минимизирует (2).

Инвариантность относительно сдвига:
Если риск X увеличить на константу c, то и премия увеличится на эту же константу: $P_{X+c}^* = P_X^* + c$.
Действительно, поскольку $F_{X+c}(x) = F_X(x - c)$, то если (P_X^*, α_X^*) есть решение системы (6), то $(P_X^* + \text{c}, \alpha_X^*)$ есть оптимальное решение новой системы

$$F_{X+c}(P - \alpha) = \frac{1 - \beta}{2}$$
$$F_{X+c}(P + \alpha) = \frac{1 + \beta}{2}$$

Вообще это свойство выполняется для любой согласованное меры, в силу единственности решения задачи (2). Действительно:

$$\rho[L(P_{X+c}^*, X + c)] \le \rho[L(P_X^* + c, X + c)] = \rho[L(P_X^*, X)] \le \rho[L(P_{X+c}^* - c, X)]$$
$$= \rho[L(P_{X+c}^* - c, X + c - c)] = \rho[L(P_{X+c}^*, X + c)]$$

Значит, все знаки неравенства на самом деле равенства, поэтому получаем $P_{X+c}^* = P_X^* + c$.

Масштабная инвариантность: $P_{\lambda X}^* = \lambda P_X^*$
Действительно, поскольку $F_{\lambda X}(x) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, то если (P_X^*, α_X^*) есть решение системы (6), то $(\lambda P_X^*, \lambda\alpha_X^*)$ есть оптимальное решение новой системы

$$F_{\lambda X}(P - \alpha) = \frac{1 - \beta}{2}$$
$$F_{\lambda X}(P + \alpha) = \frac{1 + \beta}{2}$$

Как и в предыдущем случае, свойство масштабной инвариантности верно для любой согласованной меры:

$$\rho[L(P_{\lambda X}^*, \lambda X)] \le \rho[L(\lambda P_X^*, \lambda X)] = \rho[\lambda L(P_X^*, X)] = \lambda\rho[L(P_X^*, X)] \le \lambda\rho\left[L\left(\frac{1}{\lambda}P_{\lambda X}^*, X\right)\right]$$
$$= \lambda\rho\left[L\left(\frac{1}{\lambda}P_{\lambda X}^*, \frac{1}{\lambda}\lambda X\right)\right] = \rho[L(P_{\lambda X}^*, \lambda X)]$$

Значит, все знаки неравенства на самом деле равенства,
поэтому получаем $P_{\lambda X}^* = \lambda P_X^*$.

Монотонность: $X(\omega) \le Y(\omega), \forall\omega \in \Omega \Rightarrow P_X^* \le P_Y^*$
Действительно, если существует обратная функция к функции распределения, то имеем:

$$X(\omega) \le Y(\omega), \forall\omega \in \Omega \Rightarrow F_X(x) \ge F_Y(x), \forall x \ \Rightarrow F_X^{-1}(\beta) \le F_Y^{-1}(\beta), \forall\beta$$

Поэтому по первой формуле из (7) получаем $P_X^* \le P_Y^*$.

Субаддитивность:
при добавлении в портфель новых рисков суммарный риск уменьшается.
Действительно, по свойствам субаддитивности и монотонности согласованных мер имеем:

$$\rho[L(P_{X+Y}^*, X+Y)] \le \rho[L(P_X^* + P_Y^*, X+Y)] = \rho(|P_X^* + P_Y^* - (X+Y)|)$$
$$\le \rho(|P_X^* - X| + |P_Y^* - Y|) \le \rho(|P_X^* - X|) + \rho(|P_Y^* - Y|)$$

Замечание 4: Вместо того, чтобы вычислять премию, гарантирующую минимальный риск, мы можем считать премию заданной и вычислить риск, которому мы подвергнемся при таком значении премии. Для того, чтобы сделать это, вспомним, что при заданной премии P, мера риска $CTE_\beta(P)$ может быть подсчитана как минимальное значение функции

$$U(\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_0^\infty [\,L(P,x) - \alpha]^+ f(x)dx$$

из формулы (4). Более того, согласно работе Rockafellar & Uryasev (2000), доставляющее минимум этой функции значение α^* совпадает с $VaR_\beta(P)$. Действуя аналогично доказательству Теоремы 1, мы можем получить, что $VaR_\beta(P)$ может быть подсчитан как решение α^* уравнения (8):

$$F(P+\alpha) - F(P-\alpha) = \beta \tag{8}$$

Замечание 5: До сих пор мы предполагали, что наша функция потерь симметрична относительно премии. В силу вышеназванных причин (см. начало раздела 5), в реальной ситуации такое допущение может быть неприемлемо. На самом деле, наш метод работает и для случая, когда функция потерь несимметрична, то есть приписывает разные веса в случаях недостаточной и избыточной премий. Например, рассмотрим такую несимметричную функцию потерь:

$$L(P,X) = \omega_1(P-x), P > x$$
$$L(P,X) = \omega_2(P-x), P \le x$$

Здесь ω_1 и ω_2 есть веса, соответствующие избыточной и недостаточной премии.
В этом случае, модифицируем доказательство Теоремы 1 и получим, что оптимальное решение $(P_\beta^*, \alpha_\beta^*)$ совпадает с решением следующей системы уравнений:

$$F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) = \frac{\omega_2 - \beta\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \tag{9}$$
$$F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) = \frac{\omega_2 + \beta\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

Более того, в этом случае (8) принимает вид

$$F\left(P + \frac{\alpha}{\omega_2}\right) - F\left(P - \frac{\alpha}{\omega_1}\right) = \beta \tag{10}$$

Свойства оптимальной премии, получаемые из системы (9), похожи на свойства в симметричном случае: отсутствие необоснованной нагрузки, отсутствие обворовывания полисодержателя, инвариантность относительно сдвига, масштабная инвариантность, субаддитивность и монотонность. Опять же, первые пять свойств выполнены для любой согласованной меры, не только для CTE. Кроме того, если возможно найти обратную функцию F^{-1} к функции распределения F, то система (9) легко решается:

$$\begin{gathered} P_\beta^* = \frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2} F^{-1}\left(\frac{\omega_2-\beta\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right) + \frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\ F^{-1}\left(\frac{\omega_2+\beta\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\right) \\ \alpha_\beta^* = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\left[F^{-1}\left(\frac{\omega_2+\beta\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\right) - F^{-1}\left(\frac{\omega_2-\beta\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)\right] \end{gathered} \tag{11}$$

Например, если X имеет экспоненциальное распределение с параметром $a > 0,$ то:

$$P_\beta^* = -\frac{a}{\omega_1+\omega_2}\left|\omega_1 log\left(\frac{\omega_2+\beta\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right) + \omega_2 log\left(\frac{\omega_1-\beta\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\right)\right|$$

$$\alpha_\beta^* = \frac{a\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\left[log\left(\frac{\omega_1+\beta\omega_2}{\omega_1-\beta\omega_1}\right)\right]$$

Интересно отметить, что в предельных случаях, когда один из весов равен нулю, мы получаем разумные результаты. Например, если веса равны $\omega_1 \longrightarrow 0,\ \omega_2 = 1$ (то есть мы штрафуем за недостаточную премию и совсем не штрафуем за избыточную премию), то $P_\beta^* \longrightarrow \infty$, что вполне разумно, ведь если страховую компанию не волнует избыточность премий, то логично взимать очень большие премии. Наоборот, если $\omega_1 = 1,\ \omega_2 \longrightarrow 0$, то $P_\beta^* \longrightarrow 0$. Как мы уже говорили ранее, в реальной жизни страховой компании следует выбирать оба веса положительными, но, возможно, различными.

<u>5. Примеры</u>

В этом разделе мы произведем некоторые вычисления, применяя наши результаты к реальному примеру. Пусть X имеет обратное гауссовское распределение (у него как раз правая сторона более пологая, чем левая, то есть медиана меньше среднего). Плотность этого распределения:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\vartheta}{\pi x^3}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\vartheta(x-\mu)^2}{\mu^2 x}}, x > 0, \mu > 0, \vartheta > 0$$

Среднее и дисперсия такой случайной величины равны μ и $\frac{\mu^3}{\mu}$, а параметры мы возьмем $\mu = 0.15514, \vartheta = 0.15582$. Нетто-премия совпадает с EX, то есть 0.15514 в нашем случае. Подсчитаем значения P_β^* и α_β^* по формуле (6) для близких к 1 значений β. Результаты представлены в таблице 1. Отметим, что полученные премии больше, чем нетто-премия, то есть мы получили премию с нагрузкой. Кроме того, значения наших премий ниже, чем премий, подсчитанных обычным методом CTE. Например, для $\beta = 0.9$ минимизирующая CTE потерь премия P_β^* равна 0.24069, в то время как $CTE(X)$ для этого значения β равно 0.51875.

β	P_β^*	α_β^*	$CTE_\beta\left(L\left(X, P_\beta^*\right)\right)$	$CTE_\beta(X)$
0.9	0.24069	0.21204	0.31518	0.51875
0.925	0.26612	0.23994	0.34515	0.57328
0.95	0.30373	0.28041	0.38838	0.65291
0.975	0.37213	0.35251	0.46472	0.79574

Таблица 1

В следующих двух таблицах мы меняем постановку задачи. Вместо того, чтобы вычислять оптимальную премию, минимизирующую меру риска потерь, мы будем предполагать, что премия P уже задана (например, диктуется рынком), и посчитаем соответствующие значения $VaR_\beta\big(L(P,X)\big)$ и $CTE_\beta\big(L(P,X)\big)$, следуя алгоритму из замечания 4. Мы будем интерпретировать премии через надбавку θ, то есть $P=(1+\theta)EX$. Таблицы 2 и 3 показывают численные результаты. Например, страховая надбавка в 30%, то есть $\theta=0.3$ дает премию $P=0.201682$, и при уровне доверия $\beta=0.9$ получаем $VaR=0.178438, CTE=0.32438$.

Результаты в таблице 2 можно также использовать для аппроксимации премии, минимизирующей VaR. Например, для $\beta=0.9$ из третьего столбца таблицы 2 мы получаем, что премия с наименьшим VaR примерно равняется 0.178411, то есть страховая надбавка $\theta=0.15$. Аналогично, последние три столбца таблицы 2 показывают, что $\theta=0.3$ для $\beta=0.925$, $\theta=0.45$ для $\beta=0.95$, $\theta=0.9$ для $\beta=0.975$. Конечно, мы можем получить и более точное приближение, если рассмотрим сетку для θ с более мелким шагом. Аналогично из таблицы 3 можно найти премию, минимизирующую CTE. Например, для $\beta=0.9$ из третьего столбца таблицы 3 мы получаем, что премия с наименьшим CTE примерно равняется 0.248224. Конечно, нам этот приближенный анализ таблицы 3 уже не нужен, поскольку в таблице 1 мы уже посчитали точное значение премии, минимизурующей CTE, и оно равняется 0.24069.

θ	P	0.9	0.925	0.95	0.975
0	0.15514	0.177084	0.225655	0.297603	0.429012
0.15	0.178411	0.162251	0.202384	0.0274332	0.405741
0.3	0.201682	0.178438	0.18675	0.251061	0.38247
0.45	0.224953	0.198046	0.203592	0.22779	0.359199
0.6	0.248224	0.218872	0.223706	0.231066	0.335928
0.9	0.294766	0.262365	0.266697	0.272046	0.289388
1.05	0.318037	0.284654	0.288878	0.293916	0.302393
1.2	0.341308	0.307173	0.311326	0.316174	0.323394
1.35	0.364579	0.329862	0.333965	0.338688	0.345301
1.5	0.38785	0.352678	0.356747	0.361383	0.367636
1.65	0.411121	0.375592	0.379635	0.384209	0.390228

Таблица 2

θ	P	0.9	0.925	0.95	0.975
0	0.15514	0.363615	0.418144	0.497777	0.6406
0.15	0.178411	0.340671	0.394873	0.474506	0.617329
0.3	0.201682	0.32438	0.371856	0.451235	0.594058
0.45	0.224953	0.316558	0.355192	0.427964	0.570787
0.6	0.248224	0.315474	0.346899	0.406873	0.547516
0.9	0.294766	0.327825	0.34894	0.388792	0.500974
1.05	0.318037	0.339176	0.35666	0.389343	0.481206
1.2	0.341308	0.352981	0.36757	0.394523	0.469666
1.35	0.364579	0.368706	0.380982	0.403347	0.464997
1.5	0.38785	0.385942	0.396362	0.415045	0.465825
1.65	0.411121	0.40437	0.413299	0.42902	0.471032

Таблица 3

В таблицах 4,5,6 мы численно иллюстрируем случай несимметричной функции потерь. Мы рассматриваем ту же случайную величину, но теперь функция потерь приписывает разные веса при недостаточных и избыточных оценках значения нашей случайной величины. Следуя обозначениям из замечания 5, рассмотрим несимметричную функцию потерь с весами $\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 5$. В таблице 4 показаны новые оптимальные значения P_β^* и α_β^*, вычисленные по формуле (9). Отметим, что поскольку $\omega_2 > \omega_1$, то мы больше штрафуем за недостаточные премии, чем за избыточные. Как следствие, в таблице 4 мы получаем более высокие премии, чем в таблице 1. Таблицы 5 и 6 соответствуют таблицам 2 и 3. Например, страховая надбавка в 30%, то есть $\theta = 0.3$ дает премию $P = 0.201682$, и при уровне доверия $\beta = 0.9$ получаем $VaR = 0.261084, CTE = 0.634146$. Новые значения VaR и CTE тоже больше, чем старые. Опять же, таблицу 5 можно использовать для приблизительного вычисления премии, минимизирующей VaR, а таблицу 6 — для приблизительного вычисления премии, минимизирующей CTE. Например, для $\beta = 0.9$ из третьего столбца таблицы 5 мы получаем, что премия с наименьшим VaR примерно равняется 0.224953, то есть защитная надбавка $\theta = 0.45$.

β	P_β^*	α_β^*	$CTE_\beta\left(L\left(X, P_\beta^*\right)\right)$	$CTE_\beta(X)$
0.9	0.36281	0.33119	0.47403	0.51875
0.925	0.39898	0.37033	0.51546	0.57328
0.95	0.45198	0.42670	0.57494	0.65291
0.975	0.54729	0.52629	0.67942	0.79574

Таблица 4

θ	P	0.9	0.925	0.95	0.975
0	0.15514	0.354168	0.451309	0.595205	0.858024
0.15	0.178411	0.307626	0.404767	0.548663	0.811482
0.3	0.201682	0.261084	0.358225	0.502121	0.76494
0.45	0.224953	0.215136	0.311683	0.455579	0.718398
0.6	0.248224	0.22735	0.265141	0.409037	0.671856
0.9	0.294766	0.267499	0.273145	0.315953	0.578772
1.05	0.318037	0.288901	0.293925	0.302315	0.53223
1.2	0.341308	0.310737	0.315433	0.32197	0.485688
1.35	0.364579	0.33288	0.337376	0.343172	0.439146
1.5	0.38785	0.355248	0.359613	0.365001	0.392604
1.65	0.411121	0.377789	0.382062	0.387193	0.396399

Таблица 5

θ	P	0.9	0.925	0.95	0.975
0	0.15514	0.72723	0.836288	0.995554	1.2812
0.15	0.178411	0.680688	0.789746	0.949012	1.234658
0.3	0.201682	0.634146	0.343204	0.90247	1.188116
0.45	0.224953	0.587606	0.696662	0.855928	1.141574
0.6	0.248224	0.546633	0.65012	0.809386	1.095032
0.9	0.294766	0.496006	0.571291	0.716302	1.001948
1.05	0.318037	0.482888	0.546747	0.671387	0.955406

1.2	0.341308	0.475944	0.530255	0.636175	0.908864
1.35	0.364579	0.474051	0.520379	0.610524	0.862322
1.5	0.38785	0.476304	0.515946	0.592834	0.81578
1.65	0.411121	0.481971	0.516001	0.581743	0.772552

Таблица 6

6. Заключение

Хорошо известно, что по тематике мер риска в последнее время проводилось много исследований, как в финансах, так и в актуарной науке. В данной статье мы показали, что современные меры риска, такие как VaR и CTE, помогаю нам справиться с задачей назначения премий. В литературе можно найти примеры, когда при заданном уровне доверия, премия вычисляется как VaR или CTE случайной величины, обозначающей суммарные потери. Мы же предложили альтернативную двухступенчатую процедуру вычисления премии. На первом шаге мы должны выбрать функцию потерь, обозначающую ущерб при недостаточных и избыточных премиях. На втором шаге мы вычисляем оптимальную премию как величину, минимизирующую меру риска этой функции потерь. Мы показали, что при выборе CTE в качестве меры риска, это минимальное значение легко найти для некоторых функций потерь, например, для функции абсолютных потерь. Кроме того, полученные премии удовлетворяют разумным свойствам. Далее мы рассмотрели асимметричную функцию потерь, в которой мы учитываем недостаточные и избыточные премии с разными весами. Еще мы показали процедуру вычисления VaR и CTE в случае, когда премия считается заданной заранее, например, диктуется рынком. Наконец, эта процедура позволяет нам аппроксимировать значение премии, которая доставляет минимум VaR.

Этот метод может быть применен и в случае других функций потерь, отличных от функции абсолютных потерь, хотя в этом случае могут понадобиться более сложные вычисления.