13.05.2023. Rough Path. КР2. Токаева Александра

(62) 1) Верно ли, что производная Губинелли определена единств. образом?

2) Док-ть, что если $\forall v\neq 0$: $\overline{\lim\limits_{t\to s^+}} \dfrac{|\langle X_{st}, v\rangle|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty$, то Y_s' опр. однозначно.

3) Убедиться, что произв. Губинелли относит. винер. процесса опр. однозначно.

Решение: Напомним, что пара (Y_t, Y_t') - контролируемая траектория относит. X_t, если Y_t, Y_t' - гельдерова с показателем α и $\forall s\leq t$:

$$Y_{st} = \underbrace{(Y_s')}_{\uparrow\text{произв. Губинелли}} X_{st} + R_{st} \; ; \; |R_{st}| \leq C|t-s|^{2\alpha}$$

1) Нет, это неверно, мы на лекции 10 разбирали, и даже в печатных лекциях на стр. 43 это написано;
т.е. если было $Y_{st} = Y_s' X_{st} + R_{st}$, то если мы возьмём в качестве произв. Губинелли $Y_s' + Z_s'$, то нужно, чтобы $\widetilde{R}_{st} = Z_s' X_{st} + R_{st}$, ~~тогда~~ и если $|X_{st}| \leq C|t-s|^{2\alpha}$ (т.е. X - непрер. дифф. или липшицева), то в качестве Z_s' - можно взять любую кривую C^α. И единственность наступает, когда X - реально негладкая.

2) Пусть $\forall v\neq 0$: $\overline{\lim\limits_{t\to s^+}} \dfrac{|\langle X_{st}; v\rangle|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty$

Предположим, что произв. Губинелли опр. неоднозн.:

$$\begin{cases} Y_{st} = Y_s' X_{st} + R_{st} \\ Y_{st} = \widetilde{Y}_s' X_{st} + \widetilde{R}_{st} \end{cases} \Rightarrow (Y_s' - \widetilde{Y}_s')X_{st} = \widetilde{R}_{st} - R_{st}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(Y_s' - \widetilde{Y}_s')X_{st}}{|t-s|^{2\alpha}}}_{\substack{\downarrow t\to s+ \\ \infty \text{ по усл. (если вект. } Y_s' - \widetilde{Y}_s' \neq \bar{0})}} = \underbrace{\frac{\widetilde{R}_{st} - R_{st}}{|t-s|^{2\alpha}}}_{\leq c \text{ по опр. произв. Губинелли}} \Rightarrow Y_s' = \widetilde{Y}_s'$$

3) Проверим выполнение этого усл. для винер. процесса

$$\overline{\lim\limits_{t\to s^+}} \frac{|\langle W_{st}; v\rangle|}{|t-s|^{2\alpha}} = \overline{\lim\limits_{t\to s^+}} \frac{\|v\|\cdot|\widetilde{W}_{st}|}{|t-s|^{2\alpha}} = \overline{\lim\limits_{t\to s^+}} \frac{\|v\|\cdot|\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s|}{|t-s|^{2\alpha}} \geq \overline{\lim\limits_{t\to s^+}} \underbrace{\widetilde{c}\cdot|t-s|^{\overbrace{\frac{1}{2}-2\alpha}^{<0}}\cdot \ln\ln\left(\frac{1}{|t-s|}\right)}_{\to\infty}$$

↑ линейн. комб. винер - снова винер.

$\Rightarrow$ против.

(67) Док-ть, что интеграл Стратоновича п.н. совп. с интегралом по соотв. грубой траектории.

Решение: В общем виде: • интеграл Стратоновича $= \int_0^T Y_u \circ dX_u = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{[u,v]} \frac{Y_u + Y_v}{2} X_{uv}$

• грубый интеграл $= \int_0^T Y_u dX_u = \lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{[u,v]} (Y_u X_{uv} + Y_u' \mathbb{X}_{uv})$

У нас: $X_t = B_t$

$\mathbb{X}^{(ito)\,ij}_{st} = \int_s^t B^i_{su}\, dB^j_u$ т.е $(B_t, \mathbb{B}_{st})$ - грубая траект. по Ито

$\tilde{\mathbb{X}}^{(strat)\,ij}_{st} = \int_s^t B^i_{su} \circ dB^j_u$, $(B_t, \tilde{\mathbb{B}}_{st})$ - поднятие с помощью Стратоновича

0) Стратонович через Ито:

$$\tilde{\mathbb{B}}^{ij}_{st} = \mathbb{B}^{ij}_{st} + \frac{1}{2}(t-s) I$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{B}}_{st} = \int_s^t B_{su}\circ dB_u = \int_s^t B_{su}\, dB_u + \frac{1}{2}(t-s) I = \underbrace{\mathbb{B}_{st} + \frac{1}{2}(t-s) I}$$

1) Интеграл по грубой траектории:

$$\int_0^T Y_t\, dB_t = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \left(Y_u B_{uv} + Y'_u \tilde{\mathbb{B}}_{uv}\right) = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \left(Y_u B_{uv} + Y'_u \mathbb{B}_{uv} + Y'_u \frac{(v-u)}{2} I\right) =$$

$$= \int_0^T Y_t\, dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T Y'_u I\, du$$

2) Интеграл Стратоновича:

$$\int_0^T Y_t \circ dW_t = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \frac{Y_u + Y_v}{2} W_{uv} = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \Big[\underbrace{\sum_{[u,v]} Y_u W_{uv}}_{\downarrow \int_0^T Y_t\, dW_t} + \underbrace{\sum_{[u,v]} \frac{Y_v - Y_u}{2} W_{uv}}_{\downarrow ?} \Big]$$

3) $\Rightarrow$ осталось док-ть, что $\lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \frac{Y_v - Y_u}{2} W_{uv} \overset{?}{=} \frac{1}{2}\int_0^T Y'_u I\, du$

Имеем: $$\sum_{[u,v]} \frac{Y_v - Y_u}{2} W_{uv} = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \frac{Y'_u W_{uv} + R_{uv}}{2} W_{uv} = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \frac{Y'_u W_{uv}^2}{2} + \underbrace{\sum_{[u,v]} \frac{Y_u}{2} W_{uv} R_{uv}}_{\to 0 \text{ при } \lambda(\Pi)\to 0}$$

т.к $|R_{uv}| \le C|u-v|^{2\alpha}$, $|B_{uv}| \le C|u-v|^{\alpha}$, а $3\alpha > 1$.

$\Rightarrow$ Хотим: $\lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \frac{Y'_u W_{uv}^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^T Y'_u I\, du$

Ну $$E\Big[\Big(\sum_{[u,v]} Y'_u W_{uv}^2 - \sum_{[u,v]} Y'_u I(v-u)\Big)^2\Big] = E\Big[\Big(\sum_{[u,v]} Y'_u (W_{uv}^2 - I(v-u))\Big)^2\Big] =$$

$\leftarrow$ E от перекрестных членов $=0$ ввиду независимости прираш. W_t

$$= E\Big[\sum_{[u,v]} (Y'_u)^2 (W_{uv}^2 - (v-u)I)^2\Big] \le C^2 \sum_{[u,v]} \underbrace{E(W_{uv}^2 - (v-u)I)^2}_{= E((v-u)\xi^2 - (v-u)I)^2 \,=\, E(v-u)^2 (\xi^2 - 1)^2,\ \xi \sim N(0,1),\ (\xi^2-1)^2 \to K} \le C^2 \sum_{[u,v]} (v-u)^2 K \xrightarrow[\lambda(\Pi)]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{[u,v]} \frac{Y_v - Y_u}{2} W_{uv} = \frac{1}{2}\int_0^T Y'_u I\, du$$ чтд.

(70) пусть $(Y,Y'), (Z,Z')$ — контролир. относ. X траект.

проверить: $\underbrace{\int_0^T Y_t\,dU_t}_{\text{из N67}} = \int_0^T \underbrace{Y_t Z_t\,dX_t}_{\text{грубые интегралы}}$, $U_t = \underbrace{\int_0^t Z_s\,dX_s}$

<u>Решение:</u> Хотим: $\left|\int_s^t Y\,dU - \int_s^t YZ\,dX\right| \le C\cdot|t-s|^{3\alpha}$, $3\alpha > 1$

это ≈ $Y_s U_{st} + Y_s' U_s' \mathbb{X}_{st}$ с точностью до $|t-s|^{3\alpha}$ (см. N69)

это ≈ $Y_s Z_s X_{st} + (Y_s' Z_s + Y_s Z_s')\mathbb{X}_{st}$ с точностью до $|t-s|^{3\alpha}$ (т.к. это грубый интеграл) $\Rightarrow$ всё получено

Осталось только убедиться, что $(YZ)'_s = Y_s' Z_s + Y_s Z_s'$:

$$(YZ)_{st} = Y_t Z_t - Y_s Z_s = Y_t Z_t - Y_s Z_t + Y_s Z_t - Y_s Z_s = (Y_t - Y_s) Z_t + Y_s (Z_t - Z_s) =$$

$$= Y_{st} Z_t + Y_s Z_{st} = (Y_s' X_{st} + R^Y_{st}) Z_t + Y_s (Z_s' X_{st} + R^Z_{st}) =$$

$$= (Y_s' Z_t + Y_s Z_s') X_{st} + R^Y_{st} Z_t + Y_s R^Z_{st} = \underbrace{(Y_s' Z_s + Y_s Z_s')}_{\substack{\text{произв. Губинелли} \\ \text{"}(YZ)'_s\text{"}}} X_{st} + \underbrace{Y_s' Z_{st} X_{st} + R^Y_{st} Z_t + Y_s R^Z_{st}}_{\in C^{2\alpha}} \text{ чтд.}$$

(75) Решить грубое дифф. ур-е $dY = YZ\,dX$,
где $(X,\mathbb{X})$ — грубая траектория, (Z,Z') — контролир. отн. X траект.

<u>Решение:</u> $dY_t = Y_t Z_t\,dX_t$

$\Leftrightarrow Y_t = y_0 + \int_0^t Y_s Z_s\,dX_s$

но по задаче 70 $\int_0^t Y_s Z_s\,dX_s = \underbrace{\int_0^t Y_s\,dU_s}_{\text{из N67}}$, где $U_t = \int_0^t Z_s\,dX_s$

грубые

$\Rightarrow Y_t = y_0 + \int_0^t Y_s Z_s\,dX_s = y_0 + \int_0^t Y_s\,dU_s$

$\Rightarrow$ хотим решить $dY_t = Y_t\,dU_t$.

Но мы его решали на лекции: $Y_t = e^{U_t - \frac{1}{2}[U]_t}$.

А по задаче 73 мы знаем, что $[Z]_t = \int_0^t Y_s \otimes Y_s\,d[X]_s$, где $Z_t = \int_0^t Y_s\,dX_s$

$\Rightarrow$ У нас $Y_t = e^{\int_0^t Z_s\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s \otimes Z_s\,d[X]_s}$ чтд.

(76) Распространить т. $\exists!$ на грубые диф. ур-я вида $dY = g(Y)dt + f(Y)dX$,

где $(X, \mathbb{X})$ - грубая траект., а g, f - трижды диф. ф-ции с огр. произв.

Указание: увеличить размерность и свести к ур-ю $dY = f(Y)dX$ - оно было на лекции.

<u>Решение:</u> положим $\tilde{X}_t := \begin{pmatrix} t \\ X_t \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbb{X}}_{st} := \begin{pmatrix} \frac{(t-s)^2}{2} & \int_s^t (u-s)dX_u \\ \int_s^t X_{su}du & \mathbb{X}_{st} \end{pmatrix} \quad (*);$$

покажем, что $(\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$ - грубая траектория

грубая траект. - это мультипликативный ф-л X_{st} степени K, удовл. $|\mathbb{X}_{st}^{(m)}| \le C_m |t-s|^{m\alpha}$

$(X, \mathbb{X})$ - это обозн. для $(1, X_{st}^{(1)}, X_{st}^{(2)})$

Надо проверить соотн. Чена: $\mathbb{X}_{st}^{ij} = \mathbb{X}_{su}^{ij} + \mathbb{X}_{ut}^{ij} + X_{su}^i X_{ut}^j$ и оценки $|X_{st}^i| \le C|t-s|^\alpha$,

$$\mathbb{X}_{st}^{ij} = \int_s^t (X_r^i - X_s)dX_r^j \qquad |\mathbb{X}_{st}^{ij}| \le C|t-s|^{2\alpha}$$

имеем: $\int_s^t X_{s\tau}d\tau - \int_s^u X_{s\tau}d\tau - \int_u^\tau X_{u\tau}d\tau = \int_u^t X_{s\tau}d\tau - \int_u^\tau X_{u\tau}d\tau = \int_u^\tau X_{su}d\tau = X_{su}(\tau-u)$

$$\int_s^t (\tau-s)dX_\tau - \int_s^u (\tau-s)dX_\tau - \int_u^t (\tau-u)dX_\tau = (u-s)X_{ut} \Rightarrow \text{тожд. Чена вып.}$$

Далее, смотрим на компоненты $(*)$

- $\frac{(t-s)^2}{2} = \underline{O}(t-s)^{2\alpha}$
- $|\int_s^t X_{su}du| \le \|X\|_\alpha \cdot |t-s|^\alpha \cdot |t-s| = \underline{O}(t-s)^{2\alpha}$
- $|\int_s^t (u-s)dX_u| \le C \cdot |t-s|^{1+\alpha} = \underline{O}(t-s)^{2\alpha}$ (по лемме о сшивке: $|A_{st} - A_{su} - A_{ut}| \le M|t-s|^{1+\varepsilon}$ $\Downarrow$ $|\gamma_t - \gamma_s - A_{st}| \le C(\varepsilon) M \cdot |t-s|^{1+\varepsilon}$)

$\Rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$ - грубая траектория.

А для нее мы на лекции доказали т. $\exists!$.

$$dY_t = \tilde{f}(Y_t)d\tilde{X}_t \Rightarrow \text{на } [0,\tau] \ \exists! \ Y_t = y_0 + \int_0^t \tilde{f}(Y_u)d\tilde{X}_u$$

$\Rightarrow$ в нашем случае, где $\tilde{\mathbb{X}}_{st}$ - это $(*)$:

$$\int_0^t \tilde{f}(Y_u)d\tilde{X}_u = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{(u,v)} \left(\tilde{f}(Y_u)\tilde{X}_{uv} + (\tilde{f}(Y))_u' \tilde{\mathbb{X}}_{uv}\right) =$$

$$= \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{(u,v)} \left(g(Y_u)(v-u) + f(Y_u)X_{uv}\right) + (f(Y))_u' \mathbb{X}_{uv} + \underline{O}(|u-v|^{1+\alpha})$$

$$= \int_0^t g(Y_u)du + \int_0^t f(Y_u)dX_u \quad \text{Чтд.}$$