Профессиональный экзамен по математике страхования жизни Института и Факультета Актуариев Великобритании[1]

д.ф.м.н., проф. Г.И.Фалин
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им.М.В.Ломоносова

Мы подробно рассказываем о профессиональном экзамене CT5 «Актуарная математика в страховании жизни», который проводит Институт и Факультет Актуариев Великобритании. Приведены общие сведения об экзамене, а для экзамена, состоявшегося в апреле 2012 года, изложены все задачи с подробными решениями.

Ключевые слова: *Институт и Факультет Актуариев, программы подготовки, методы сертификации, экзамены, страхование жизни*

1.Введение

В недавней статье [1] мы привели общие сведения о программах подготовки и аттестации актуариев в США и Великобритании. Цель настоящей статьи – рассказать подробнее о курсе «Актуарная математика в страховании жизни» (Contingencies – курс CT5) Института и Факультета Актуариев Великобритании (ИФА). Мы надеемся, что статья будет полезна актуариям, которые захотят повысить свой профессиональный уровень и получить общепризнанную актуарную квалификацию.

Прежде всего отметим, что курс «Актуарная математика в страховании жизни», так же как и аналогичный курс «Модели страхования жизни» (Models for Life Contingencies – курс MLC) Общества Актуариев США, является ключевым элементом профессиональной подготовки актуария. По объёму покрываемого материала он примерно эквивалентен годовому университетскому специальному курсу.

Этот курс имеет ярко выраженную практическую направленность и даёт базовую подготовку в области актуарных расчетов (тарифы, резервы и т.д.), разработки страховых продуктов, андеррайтинга и т.д. Упор делается не абстрактное изучение теории, а на выработку твёрдых практических навыков. Соответственно задачи, предлагаемые на экзамене, непосредственно связаны с проблемами, которые реально приходится решать актуарию, а сам экзамен занимет центральное место в процессе изучения теоретического материала.

В нашей статье мы подробно расскажем о недавнем (апрель 2012 года) экзамене по курсу CT5 [2,3]. Условия задач слегка отредактированы, чтобы облегчить их понимание. Решения изложены гораздо подробнее, чем это требуется на экзамене. Мы сделали это для того, чтобы показать основные темы, включенные в программу курса, и уровень

[1] Г.И.Фалин. Профессиональный экзамен по математике страхования жизни Института и Факультета Актуариев Великобритании. *Страховое дело*, 2013, №10, стр.9-26.

требований к усвоению материала.

Экзамен проводится в традиционной письменной форме и длится 3 часа. За это время кандидат должен решить 15 задач, покрывающих основные темы курса. ИФА разрешает использовать на экзамене книгу [4], которая помимо разнообразных таблиц смертности, заболеваемости, финансовых и статистических таблиц, содержат сводку основных формул и результатов по анализу, теории вероятностей, математической статистике, финансовой и актуарной математике (фактически шпаргалку). Это, видимо, хорошо для подготовки актуариев к эффективной практической работе, но плохо для выработки навыков работы в новых ситуациях, когда нужно хорошо понимать и помнить принципы и методы, лежащие в основе стандартных актуарных моделей и формул. Этот сборник таблиц и формул стоит 15 фунтов (около 750 рублей) в интернет-магазине ИФА. В университетских книжных магазинах цена немного ниже (в университете Манчестера 12 фунтов 75 пенсов). На экамене можно пользоваться только определёнными моделями калькуляторов (их список публикуется ИФА). В настоящее время разрешены: Casio FX82, 83, 85, Hewlett Packard HP12c , Sharp EL531, Texas Instruments BAII Plus, TI-30.

Для подготовки к экзамену ИФА публикует учебное пособие [5], в котором изложены все необходимые понятия, методы и формулы актуарной математики. Цена последнего издания в интернет-магазине ИФА – 49 фунтов (около 2500 рублей). Кроме того, большое число учебных материалов для подготовки к актуарным экзаменам публикует Актуарная Образовательная Компания (The Actuarial Education Company – ActEd). На русском языке минимальный объём теоретических знаний для понимания условий задач и их решений изложен в книге [6].

В задачах используются реальные таблицы смертности, причём не только популяционные, но и страховые. Поэтому сейчас мы кратко о них расскажем.

Английские таблицы продолжительности жизни (English Life Tables – ELT) основаны на популяционной статистике смертности в Англии и Уэльсе. Они публикуются Управлением национальной статистики (The Office for National Statistics) Великобритании каждые 10 лет после очередной переписи населения. Техническую работу по составлению таблиц проводит Служба Правительственного Актуария (Government Actuary's Department). Первые таблицы были созданы после переписи 1841 года. В задачах рассматриваемого в статье экзамена используется пятнадцатая серия таблиц (ELT15), которая была опубликована в 1997 году после переписи 1991 года [7]. Они содержат актуарные величины q_x, l_x, $\dot{e}_x$ (таблица ELT15.1), d_x, T_x, μ_x (таблица ELT15.2) отдельно для мужчин и женщин, анализ динамики коэффициентов смертности и ожидаемой продолжительности жизни за предшествующие 80 лет, сравнительный анализ смертности мужчин и женщин (этот анализ оформлен как в виде таблиц, так и графически). Таблицы ELT15 основаны на популяционной статистике смертности в Англии и Уэльсе за 1990, 1991, 1992 гг. (для численности населения используются не данные переписи, а оценки для середины года). Техника построения таблиц, в частности, процедура сглаживания, кратко изложена в [7]. Ниже приведён фрагмент таблицы ELT15.1.

Age	Males			Females		
x	l_x	q_x	$\dot{e}_x$	l_x	q_x	$\dot{e}_x$
50	93925	.00464	26.159	96247	.00294	30.846
51	93489	.00519	25.279	95964	.00326	29.936
52	93004	.00577	24.408	95652	.00357	29.032
53	92467	.00642	23.547	95310	.00390	28.134
54	91873	.00714	22.696	94938	.00428	27.242
55	91217	.00797	21.856	94532	.00475	26.357

В задачах также используются таблицы серии «92» [8], подготовленные комитетом ИФА по непрерывному исследованию смертности (Continuous Mortality Investigation – CMI) на основе британской страховой статистики за 1991-1994 гг.

Для расчёта смертности среди мужчин, застрахованных по договору пожизненного или смешанного страхования, используется таблица AM92 (для временного страхования используется таблица TM92). Аналогичные таблицы для женщин называются AF92 и TF92. Таблицы AM92 и AF92 является таблицами отбора риска с периодом отбора, действующим 2 года. Таблицы TM92 и TF92 является таблицами отбора риска с периодом отбора, действующим 5 лет. Ниже приведён фрагмент таблицы AM92.

x	$q_{[x]}$	$q_{[x-1]+1}$	q_x
50	.001971	.002434	.002508
51	.002189	.002732	.002809
52	.002433	.003070	.003152
53	.002707	.003452	.003539
54	.003014	.003881	.003976
55	.003358	.004363	.004469

Для удобства расчётов в ходе экзамена используется модифицированный вариант таблицы AM92 из сборника [4], в который включены величины $l_{[x]}$, $l_{[x-1]+1}$ и l_x (в качестве начального берётся значение $l_{17} = 10000$), актуарные современные стоимости нескольких стандартных денежных потоков: $\ddot{a}_x$ – пожизненная выплата единичной денежной суммы, A_x – выплата единичной денежной суммы в конце последнего года жизни, $(IA)_x$ – выплата в конце последнего года жизни суммы, равной числу лет, прошедших с настоящего момента (все эти величины расчитаны для предельных вероятностей и при нескольких значениях технической процентной ставки) и т.д. Ниже приведён фрагмент расширенной таблицы AM92 для $i = 6\%$ (мы добавили в эту таблицу и стандартную упрощающую функцию $D_x = v^x l_x$).

x	$l_{[x]}$	$l_{[x-1]+1}$	l_x	D_x	$\ddot{a}_x$	A_x	$(IA)_x$
50	9706.09776	9711.35237	9712.07282	527.25252	14.04352	0.20508	4.84555
51	9680.89904	9686.96694	9687.71494	496.16054	13.86089	0.21542	4.93126
52	9652.69654	9659.70755	9660.50215	466.76116	13.67095	0.22617	5.01287
53	9621.10064	9629.21153	9630.05225	438.95276	13.47367	0.23734	5.08994
54	9585.69162	9595.05632	9595.97149	412.64086	13.26905	0.24892	5.16203
55	9545.99290	9556.80034	9557.81791	387.73603	13.05711	0.26092	5.22868

Для пенсионеров используются вероятности смерти из таблиц PMA (мужчины) и PFA (женщины). Эти таблицы содержат только предельные вероятности. Расширенный вариант этих таблиц из сборника [4] содержит и актуарные функции $\ddot{a}_x^m$, $\ddot{a}_y^f$, $\ddot{a}_{x:y}$, которые можно использовать в процессе решения для упрощения вычислений.

Кроме вышеперечисленных в серию «92» входит ещё целый ряд таблиц, например, при актуарных расчётах рент используются вероятности смерти из таблиц IML, IMA (мужчины) и IFL, IFA (женщины). В этих таблицах период отбора равен 1 году. Конечно, в статье нет никакой возможности привести все эти таблицы полностью. Поэтому, в тех случаях, где это необходимо, мы просто используем в процессе решения величины из соответствующей таблицы смертности.

Желающих сдать квалификационные экзамены Института Актуариев и получить чрезвычайно востребованную на рынке труда квалификацию довольно много. Уровень требований таков, что до половины кандидатов проваливаются. Например, экзамен CT5 в апреле 2012 сдавали 846 человек. Успешно сдали 507 человек (60%). Кандидат может пересдавать экзамен без всяких проблем, если только у него есть достаточные средства, т.к. каждая попытка сдать экзамен обходится в 195 фунтов (около 10 тысяч рублей).

2. Экзаменационные задачи с решениями

Задача 1. (a) Разъясните смысл обозначения ${}_{4|5}q_{[60]+1}$. (b) Вычислите значение этй величины, используя таблицу смертности AM92 [*3 балла*]

Решение задачи 1. (a) Символ ${}_{4|5}q_{[60]+1}$ означает вероятность того, что человек в возрасте 61 год, который прошёл отбор 1 год тому назад (в возрасте 60 лет), проживёт ещё 4 года (т.е. доживёт до 65 лет), но умрёт на протяжении 5 последующих лет (т.е. не доживёт до 70 лет): ${}_{4|5}q_{[60]+1} = P\left(4 < T_{[60]+1} < 9\right)$. (b) Для подсчёта искомой вероятности ${}_{4|5}q_{[60]+1}$ удобно использовать формулу ${}_{4|5}q_{[60]+1} = \left(l_{65} - l_{70}\right) / l_{[60]+1}$. Из таблицы AM92 мы находим: $l_{65} = 8821.2612$, $l_{70} = 8054.0544$, $l_{[60]+1} = 9209.6568$, так что ${}_{4|5}q_{[60]+1} \approx 0.0833$.

Задача 2. В соответствии с условиями договора страхования жизни постоянная премия в размере P=£3,000 платится раз в год в начале каждого года действия договора. Страховая сумма, которая выплачивается в конце года смерти, равна сумме всех внесённых к этому моменту премий без процентов. Для договора, который всё ещё действует в начале двенадцатого года, дана следующая информация: резерв в начале двенадцатого года равен ${}_{11}V = £25,130$, резерв в конце этого года (в расчёте на каждого дожившего до этого момента) равен ${}_{12}V = £28,950$, вероятность смерти на протяжении этого года равна q=0.03, расходы в размере e=£90 должны быть выплачены в начале года, компания зарабатывает i=4% годовых (отрицательный балас по договору растёт в соответствии с той же процентной ставкой). Все резервы выше вычислены непосредственно перед поступлением очередной премии. Для каждого договора, действующего в начале двенадцатого года, подсчитайте ожидаемый доход или потери к концу этого года. [3 *балла*]

Решение задачи 2. Допустим, что договор действует в начале двенадцатого года (так что застрахованный ещё жив). В этот момент на каждый такой договор страховщик имеет активы, равные ${}_{11}V + P - e = £25,130 + £3,000 - £90 = £28,040$. За рассматриваемый год эти активы заработают проценты в размере $£28,040 \times 0.04 = £1,121.6$, так что в расчёте на каждый договор, действовавший в начале года, в конце года будут приходиться активы в размере £29,161.6. Далее, с вероятностью $p = 1 - q = 0.97$ в конце года договор всё ещё сохраняет силу, так что для него должны быть сформированы резервы в размере ${}_{12}V = £28,950$. Поэтому каждый такой договор принесёт доход в размере $£29161.6 - £28950 = £211.6$. С вероятностью $q = 0.03$ в конце года необходимо выплатить страховую сумму $SA = £36,000$ (к концу рассматриваемого года страхователь выплатит 12 премий по £3000 каждая). Для выплаты будут использованы накопленные активы в размере £29,161.6. Поэтому дополнительно нужно привлечь сумму $£36000 - £29161.6 = £6838.4$. Иначе говоря, каждый такой договор принесёт отрицательный «доход» в размере $-£6838.4$. Соответственно, ожидаемый доход равен $0.97\times £211.6-0.03\times £6838.4=£0.1$.

Задача 3. Подсчитайте $a_{50:\overline{15}|}$ и $(IA)^1_{50:\overline{15}|}$, используя техническую процентную ставку $i=6\%$ и таблицу смертности AM92. [*4 балла*]

Решение задачи 3. Символом $a_{50:\overline{15}|}$ обозначается современная актуарная стоимость (запаздывающей) временной пожизненной ренты, которая заключается в выплате суммы 1 в конце каждого года на протяжении 15 лет человеку, которому сейчас 50 лет и который прошёл отбор по меньшей мере 2 года тому назад. Для подсчёта этой величины есть много формул, но в нашей ситуации самой удобной будет следующая (мы применяем метод текущего платежа и простые алгебраические преобразования):

$$a_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{n}v^kP\left(T_x>k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}v^kP\left(T_x>k\right)-\sum_{k=n+1}^{\infty}v^kP\left(T_x>k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}v^kP\left(T_x>k\right)-\sum_{m=1}^{\infty}v^{n+m}P\left(T_x>n+m\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}v^kP\left(T_x>k\right)-v^nP\left(T_x>n\right)\sum_{m=1}^{\infty}v^mP\left(T_{x+n}>m\right)=a_x-\frac{v^nl_{x+n}}{l_x}a_{x+n}=\left(\ddot{a}_x-1\right)-\frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\ddot{a}_{x+n}-1\right).$$

,

Поэтому

$$a_{50:\overline{15}|}=\left(\ddot{a}_{50}-1\right)-\frac{D_{65}}{D_{50}}\left(\ddot{a}_{65}-1\right)=13.04352-\frac{199.8248}{527.2525}\cdot 9.56876=9.41703.$$

Символом $(IA)^1_{50:\overline{15}|}$ обозначается разовая нетто-премия для 15-летнего временного страхования жизни с выплатой страхового возмещения в конце последнего года жизни и ежегодно возрастающей страховой суммой (точнее говоря, при выплате в момент *n* страховая сумма равна *n*). Этот договор заключён с человеком, которому сейчас 50 лет и который прошёл отбор по меньшей мере 2 года тому назад. Для подсчёта этой величины есть много формул, но в нашей ситуации самой удобной будет следующая:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{n}kv^kP\left(k-1<T_x<k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}kv^kP\left(k-1<T_x<k\right)-\sum_{k=n+1}^{\infty}kv^kP\left(k-1<T_x<k\right)$$

$$=(IA)_x-\sum_{m=1}^{\infty}(n+m)v^{n+m}P\left(n+m-1<T_x<n+m\right)$$

$$=(IA)_x-v^nP\left(T_x>n\right)\sum_{m=1}^{\infty}(n+m)v^mP\left(m-1<T_{x+n}<m\right)$$

$$=(IA)_x-v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}\left(n\sum_{m=1}^{\infty}v^mP\left(m-1<T_{x+n}<m\right)+\sum_{m=1}^{\infty}mv^mP\left(m-1<T_{x+n}<m\right)\right)$$

$$=(IA)_x-\frac{D_{x+n}}{D_x}\left(nA_{x+n}+(IA)_{x+n}\right).$$

Поэтому

$$(IA)^1_{50:\overline{15}|}=(IA)_{50}-\frac{D_{65}}{D_{50}}\left(15A_{65}+(IA)_{65}\right)=4.84555-\frac{199.8248}{527.2525}\cdot\left(15\cdot 0.401769+5.509851\right)=0.47335.$$

Задача 4. Супружеская пара, муж в возрасте 60 лет и жена в возрасте 55 лет, покупают полис совместного страхования жизни, который обеспечивает выплату страховой суммы £100,000 немедленно после второй смерти. Подсчитайте среднее значение современной стоимости этого договора. Техническая основа расчётов: таблица смертности PMA92C20 для мужчины, PFA92C20 для женщины; годовая процентная ставка 4% . Расходы не учитываются. [4 *балла*]

Решение задачи 4. Пусть x=60, y=55, T_x^m – остаточное время жизни мужа, T_y^f – остаточное время жизни жены, $T_{\overline{x:y}} = \max\left(T_x^m, T_y^f\right)$ – момент второй смерти (иначе говоря, момент потери статуса дожития последнего лица в группе), $T_{x:y} = \min\left(T_x^m, T_y^f\right)$ – момент первой смерти (иначе говоря, момент потери статуса совместной жизни). Принимая £100,000 в качестве условной денежной единицы, можно записать среднее значение современной стоимости рассматриваемого договора как $\overline{A}_{\overline{x:y}} = Ev^{T_{\overline{x:y}}}$.

Чтобы свести вычисление этой величины к значениям, которые доступны в таблицах, проведём следующие рассуждения. Поскольку неупорядоченная $\left(T_x^m, T_y^f\right)$ совпадает с неупорядоченной парой $\left(T_{\overline{x:y}}, T_{x:y}\right)$, верно равенство: $\overline{A}_{\overline{x:y}} + \overline{A}_{x:y} = \overline{A}_x^m + \overline{A}_y^f$, где $\overline{A}_{x:y} = Ev^{T_{x:y}}$ – современная актуарная стоимость страхования потери статуса совместной жизни, $\overline{A}_x^m = Ev^{T_x^m}$ – современная актуарная стоимость стандарного пожизненного страхования для мужа, $\overline{A}_y^f = Ev^{T_y^f}$ – современная актуарная стоимость стандарного пожизненного страхования для жены. Величины $\overline{A}_{x:y}$, $\overline{A}_x^m$, $\overline{A}_y^f$, в свою очередь, можно записать в терминах современных актуарных стоимостей соответствующих страндартных непрерывных рент: $\overline{A}_{x:y} = 1 - \delta\overline{a}_{x:y}$, $\overline{A}_x^m = 1 - \delta\overline{a}_x^m$, $\overline{A}_y^f = 1 - \delta\overline{a}_y^f$, так что $\overline{A}_{\overline{x:y}} = 1 - \delta\left(\overline{a}_x^m + \overline{a}_y^f - \overline{a}_{x:y}\right)$. Используя линейные интерполяции всех трёх функций выживания (мужа, жены, статуса совместной жизни) и малость технической процентной ставки, мы получим:

$$\overline{A}_{\overline{x:y}} \approx 1 - \delta\left(\ddot{a}_x^m + \ddot{a}_y^f - \ddot{a}_{x:y} - 0.5\right) = 1 - \ln 1.04 \cdot \left(15.632 + 18.210 - 14.756 - 0.5\right) \approx 0.27104$$

или, в абсолютных единицах, примерно £27,104.

Задача 5. Десятилетний договор инвестиционного страхования жизни имеет следующий вектор дохода: (−40, −12, −6, −1, 5, −4, 8, 20, 25, 30). Каким будет вектор дохода, если сформировать резервы, которые обнулят отрицательные значения дохода. База расчётов: вероятность смерти на протяжении года равна $q = 0.5\%$ для каждого возраста, годовая процентная ставка $i = 2.5\%$. [4 *балла*]

Решение задачи 5. Отрицательный доход за какой-то год означает, что страховая компания должна вкладывать средства в поддержание продукта. Эти средства необходимо предварительно (но не ранее начала рассматриваемого года) зарезервировать. Формирование резерва производится за счёт уменьшения дохода в предыдущие года.

В года 7, 8, 9, 10 ожидаемый доход положителен, так что резервы в начале этих лет, т.е. в моменты 6, 7, 8, 9 равны 0: ${}_6V = {}_7V = {}_8V = {}_9V = 0.$ Соответственно, значения дохода за эти годы не изменятся.

В момент 5 необходимо сформировать резерв в размере ${}_5V = \dfrac{4}{1.04} = 3.902439.$ К моменту 6 эти средства вырастут до величины ${}_5V \cdot (1+i) = 4$, что позволит профинансировать расходы в размере 4 в этот момент. Новое значение дохода за шестой год будет равно 0.

Резерв в момент 5 должен быть сформирован за счёт уменьшения дохода за пятый год. Этот доход в среднем равен 5 для каждого договора, действующего в начале этого года, т.е. в момент 4. В момент 5 только 99.5% из них будут действовать – лишь для них и должен формироваться резерв. Поэтому среднее уменьшение дохода за пятый год составит $0.995\times {}_5V=3.882927$. Соответственно, новое значение среднего дохода за пятый год равно $5-3.882927=1.117073$. Поскольку этот доход положителен, формировать резерв в начале четвёртого года не нужно.

В момент 3 необходимо сформировать резерв в размере ${}_3V=\dfrac{1}{1.025}=0.97561$. К моменту 4 эти средства вырастут до величины ${}_3V\cdot(1+i)=1$, что позволит профинансировать расходы в размере 1 в этот момент. Новое значение дохода за четвёртый год будет равно 0.

Доход за третий год отрицателен. Поэтому в момент 2 необходимо предусмотреть резерв, который бы позволил не только профинансировать потери в момент 3 в размере 6, но и сформировать резерв ${}_3V$ для 99.5% договоров, которые будут продолжать действовать. Иначе говоря, величина резерва в момент 2 определяется следующим соотношением: ${}_2V\cdot(1+i)=6+0.995\cdot {}_3V$, откуда ${}_2V=6.800714$. Новое значение дохода за третий год будет равно 0.

Доход за второй год отрицателен. Поэтому в момент 1 необходимо предусмотреть резерв, который бы позволил не только профинансировать потери в момент 2 в размере 12, но и сформировать резерв ${}_2V$ для 99.5% договоров, которые будут продолжать действовать. Иначе говоря, величина резерва в момент 1 определяется следующим соотношением: ${}_1V\cdot(1+i)=12+0.995\cdot {}_2V$, откуда ${}_1V=18.30899$. Новое значение дохода за второй год будет равно 0.

Резерв в момент 1 должен быть сформирован за счёт дальнейшего уменьшения дохода за первый год. Этот доход в среднем равен –40 для каждого договора, действующего в начале этого года, т.е. в момент 0. В момент 1 только 99.5% из них будут действовать – лишь для них и должен формироваться резерв. Поэтому среднее уменьшение дохода за первый год составит $0.995\times {}_1V=18.21744$. Соответственно, новое значение среднего дохода за первый год равно $-40-18.21744=-58.21744$. Доход за первый год, конечно, остаётся отрицательным, т.к. продажа договора страхования жизни всегда требует от страховщика значительных расходов.

Итак, новый вектор дохода будет иметь вид: (−58.217, 0, 0, 0, 1.117, 0, 8, 20, 25, 30).

Задача 6. (a) Предположим, что на промежутке [67;68] интенсивность смертности является постоянной величиной. Найдите её для предельной таблицы AM92. (b) Подсчитайте значение ${}_{0.5}q_{67.25}$, используя предположение о постоянной интерсивности смертности и результат, полученный в пункте (a). [4 *балла*]

Решение задачи 6. (a) Поскольку $s(x)=\exp\left\{-\int_0^x \mu_u du\right\}$, для $x\in[67;68]$ верно равенство:

$$s(x)=\exp\left\{-\int_0^{67} \mu_u du\right\}\exp\left\{-\int_{67}^{x} \mu_u du\right\}=s(67)\exp\left\{-\int_{67}^{x} \mu_u du\right\}=s(67)e^{-\mu(x-67)}.$$

В частности, $s(68)=s(67)e^{-\mu}$. Отсюда:

$$\mu=-\ln\frac{s(68)}{s(67)}=-\ln(1-q_{67})=-\ln(1-0.017824)=0.017984761.$$

(b) Величина ${}_{0.5}q_{67.25}$ – это вероятность смерти человека, которому сейчас 67.25 лет, на протяжении ближайшего полугода:

$${}_{0.5}q_{67.25} = P\left(T_{67.25} < 0.5\right) = 1 - \frac{s(67.75)}{s(67.25)} = 1 - e^{-0.5\mu} = 1 - \sqrt{\frac{s(68)}{s(67)}} = 1 - \sqrt{1 - q_{67}} = 0.008952.$$

Задача 7. Опишите типичные выплаты при выходе на пенсию участника пенсионной схемы, привязанной к окладу. [6 *баллов*]

Решение задачи 7. Прежде всего следует отметить, что подобная пенсионная схема обычно имеет фиксированный возраст нормального выхода на пенсию. Размер пенсии обычно зависит от рабочего стажа, определение которого даётся в правилах схемы (часто стаж – это период членства в схеме). В качестве базы для расчёта пенсии может использоваться: (1) заработная плата в момент выхода на пенсию, (2) средняя заработная плата за определённый промежуток времени перед выходом на пенсию. (3) средняя заработная плата за всё время членства в схеме. Пенсия на каждый год стажа начисляется как доля от этой базы (например, 1/80). Обычно условия схемы предполагают регулярное увеличение пенсии в зависимости от инфляции. В случае смерти пенсионера вдове может начисляться пенсия, составляющая определённую долю от основной пенсии. Кроме того, основная пенсия может выплачиваться на протяжении некоторого гарантированного периода, скажем 5 лет.

Задача 8. Опишите влияние профессии на смертность и заболеваемость. [6 *баллов*]

Решение задачи 8. Влияние профессии на смертность и заболеваемость может быть как положительным, так и отрицательным и проявляется по разному на разных этапах жизни человека.

(1) Поступление на работу. При поступлении на работу может проводиться медицинское обследование (например, лётчиков, водителей автобусов). Сам выбор профессии предполагает определённую оценку здоровья самим человеком. Вряд ли человек с плохим здоровьем пойдёт работать строительным рабочим. С одной стороны это снижает риск смертности или заболеваемости, а с другой – свидетельствует о потенциальной опасности жизни и здоровью в процессе работы. На лёгкую и неопасную работу (скажем, продавцом газет или сторожем) может поступить человек, который уволился по состоянию здоровья с тяжёлого и опасного производства.

(2) Работа. Человек проводит на работе бóльшую часть дня. На протяжении рабочего дня он может работать в опасных условиях (например, строительные рабочие часто работают на большой высоте, имеют дело с тяжёлыми предметами), подвергаться воздействию опасных веществ (рабочие на химических заводах, мебельных фабриках). Вред здоровью может причинить даже работа в офисе (сидячий образ жизни, длительная работа за компьютером). Работа на свежем воздухе в сельском хозяйстве предпочтительнее работы в офисе или на заводе. Ряд профессий предполагает регулярные медицинские обследования, что позволяет выявить заболевания на ранней стадии. Хотя работа в офисе не очень полезна сама по себе, офисные работники часто имеют хорошее образование/доход и понимают важность здорового образа жизни (регулярно отдыхают на курортах, занимаются спортом, следят за своим питанием). С другой стороны человек пожет потакать своим слабостям (злоупотреблять алкоголем, курить, часто посещать ночные клубы), что отрицательно влияет на его здоровье.

(3) Увольнение. Человек может уволиться с работы и перейти на новое место работы в связи со сменой места жительства, изменением жизненных обстоятельств или по состоянию здоровья. На пенсию он межет выйти как по возрасту, так и по

состоянию здоровья. Эта информация о рабочей истории позволяет понять, увеличен или нет риск смертности и заболеваемости для этого человека.

Задача 9. (i) Перечислите основные виды расходов страховой компании, занимающейся страхованием жизни. [2 *балла*]

(ii) Приведите по одному примеру расхода каждого вида (из перечисленных в вашем ответе на вопрос (i)) и укажите, как он обычно учитывается при расчёте премии. [4 *балла*] [*Всего* 6 *баллов*]

Решение задачи 9. Основные расходы страховой компании можно разбить на четыре основные группы:

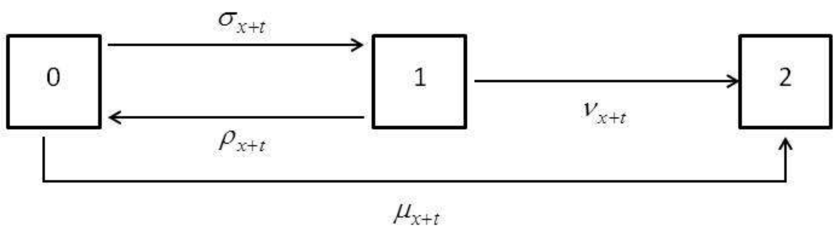
1. Расходы, связанные с заключением договора:
    a. расходы на андеррайтинг, в частности, медицинское обследование – эти расходы обычно составляют фиксированную сумму для полиса;
    b. оформление документов и, в частности, собственно договора страхования – эти расходы обычно составляют фиксированную сумму для полиса;
    c. комиссионные агенту – обычно определённый процент от премии;
    d. рекламные расходы – обычно фиксированная сумма для полиса (эта сумма расчитывается, исходя из оценки количества договоров, которые удастся заключить);
2. Периодически повторяющиеся расходы:
    a. административные расходы на поддержание договора, в частности, в связи с получением премий – обычно фиксированная сумма для полиса в год, которая увеличивается с инфляцией;
    b. комиссионные агенту – обычно определённый процент от премии;
    c. расходы на инвенстиционную деятельность – они уменьшают общий размер активов;
3. Расходы, связанные с наступлением страхового случая:
    a. административные расходы, связанные с подготовкой документов и выплатой страхового возмещения – обычно определённый процент от премии;
    b. судебные издержки в спорных случаях – обычно определённый процент от страховой суммы;
4. Накладные расходы:
    a. Расходы на обеспечение деятельности страховой компании (содержание офиса и персонала, компьтерной техники и т.д. – обычно фиксированная сумма для полиса в год, которая увеличивается с инфляцией.

Задача 10. В соответствии с договором страхования жизни страховыми случаями являются смерть застрахованного (страховая сумма равна £10,000) и назначение инвалидности (разовая выплата £1,000).

(a) Нарисуйте диаграмму переходов цепи Маркова, которая могла бы использоваться при актуарном оценивании этого договора.

(b) Выпишите формулу для актуарной современной стоимости выплат по такому договору. [6 *баллов*]

Решение задачи 10. (a) Застрахованный может находиться в одном из трёх состояний: «0» – здоров и трудоспособен, «1» – жив, но является инвалидом, «2» – умер. Если считать, что интенсивности переходов зависят от возраста застрахованного, то состояние застрахованного может быть описано неоднородной цепью Маркова $S(t)$ с непрерывным временем и следующей диаграммой переходов (ниже x – возраст застрахованного в момент t=0 заключения договора):



(b) Пусть $p_{i,j}(t)$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j за время t, i – техническая процентная ставка, $\delta = \ln(1+i)$ – соответствующая интенсивность процентов. Тогда актуарная современная стоимость выплат по рассматриваемому договору может быть записана в виде (мы, конечно, предполагаем, что в момент t=0 застрахованный находится в состоянии «0»):

$$10000\int_0^{+\infty} e^{-\delta t}\left(p_{0,0}(t)\mu_{x+t} + p_{0,1}(t)\nu_{x+t}\right)\mathrm{d}t + 1000\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} p_{0,0}(t)\sigma_{x+t}\mathrm{d}t.$$

Задача 11. (i) Опишите преимущества и недостатки использования необработанных коэффициентов смертности (crude mortality rate) и непосредственно стандартизованных коэффициентов смертности (directly standardised mortality rate) для сравнения смертности в двух или более различных группах населения. [4 *балла*]

Вам известны следующие данные относительно некоторой группы людей:

Возраст	50	55	60
Численность	100,000	95,000	80,000

Общее число смертей в этой группе равно 1,250.

(ii) Используя таблицу ELT15 (для мужчин) подсчитайте стандартизованное отношение смертностей (standardised mortality ratio – SMR). [3 *балла*]

[Всего 7 *баллов*]

Решение задачи 11. Необработанный коэффициент смертности (общий) вычисляется как отношение числа умерших в течение календарного года к среднегодовой численности населения (которая обычно рассчитывается как среднее арифметическое численностей населения на начало данного и начало следующего года). Его обычно умножают на 1000 (т.е. выражают в промилле; в этой форме коэффициент смертности указывает число смертей на 1000 человек населения) или 100,000 (в этой форме коэффициент смертности указывает число смертей на 100,000 человек населения). Хотя эта характеристика и является очень грубой оценкой ситуации со смертностью в анализируемой популяции, она точно описывает влияние смертности на рост населения. Для расчёта общего коэффициента смертности нет необходимости собирать информацию о числе умерших в данном возрасте, а также информацию о среднегодовой численности лиц данного возраста для каждого возраста в отдельности. Поэтому он позволяет быстро сравнить смертность в двух группах. Недостаток связан с тем, что не учитывается различие в возрастной структуре сравниваемых групп. Поэтому группа с бóльшей долей молодого населения может иметь меньший общий коэффициент смертности даже при более высокой смертности в каждом отдельном возрасте. В частности, во многих странах общий коэффициент смертности растёт от года к году, хотя во всех возрастных группах смертность снижается. Это связано с уменьшением рождаемости и старением населения.

Непосредственно стандартизованный коэффициент смертности для данной группы является средним значением необработанных коэффициентов смертности в данном возрасте, усреднённым в соответствии с долей людей в данном возрасте в некоторой стандартной группе. В качестве стандартной группы берут население в Европе, население мира или даже одну из сравниваемых групп. Этот показатель уже отражает различия в уровнях смертности для разных возрастов. Однако его расчёт требует знания возрастных коэффициентов смертности для сравниваемых групп (но не использует распределение населения в рассматриваемой популяции по возрастам).

(ii) Стандартизованное отношение смертностей – это дробь, в числителе которой стоит действительное число смертей в рассматриваемой группе, а в знаменателе – ожидаемое (в соответствии с используемой таблицей смертности) число смертей. Для его расчёта, в отличие от непосредственно стандартизованного коэффициента смертности, нужно знать распределение населения в рассматриваемой популяции по возрастам, но не требуется знание возрастных коэффициентов смертности в рассматриваемой популяции. Из таблицы ELT15.1 (для мужчин) мы знаем, что $q_{50}=4.64‰$, $q_{55}=7.97‰$, $q_{60}=13.92‰$. Поэтому ожидаемое число смертей равно $100\cdot 4.64+95\cdot 7.97+80\cdot 13.92=2334.75$. Соответственно, SMR=0.535389.

Задача 12. Договор смешанного страхования жизни на 10 лет гарантирует выплату страховой суммы £100,000 в случае смерти застрахованного до истечения срока действия договора и выплату £50,000, если застрахованный проживёт эти 10 лет. Подсчитайте среднее значение и дисперсию современной стоимости обязательств страховщика по этому договору. Техническая основа расчётов: постоянная интенсивность смертности $\mu_x=0.03$ на протяжении всего срока действия договора, годовая процентная ставка 5%. [8 *баллов*]

Решение задачи 12. Пусть T_x – остаточное время жизни застрахованного, n – срок действия договора, $S_1=£100000$, $S_2=£50000$. Тогда современная стоимость обязательств страховщика по рассматриваемому договору равна $Z=S_1e^{-\delta T_x}I\left(T_x<n\right)+S_2e^{-\delta n}I\left(T_x\ge n\right)$, где, как обычно, $\delta=\ln(1+i)$ – интенсивность процентов. Предположение о постоянстве интенсивности смертности на протяжении всего срока действия договора означает, что для $t\le n$ верно равенство: $P\left(T_x<t\right)=1-e^{-\mu t}$. Поэтому среднее значение современной стоимости обязательств страховщика по этому договору есть

$$A\equiv EZ=S_1\int_0^n e^{-\delta t}dP\left(T_x<t\right)+S_2e^{-\delta n}P\left(T_x>n\right)=S_1\mu\int_0^n e^{-(\delta+\mu)t}dt+S_2e^{-(\delta+\mu)n}$$

$$=S_1\frac{\mu}{\delta+\mu}\left(1-e^{-(\delta+\mu)n}\right)+S_2e^{-(\delta+\mu)n}\approx £43{,}498.91.$$

Для квадрата случайной величины Z мы имеем: $Z^2=S_1^2e^{-2\delta T_x}I\left(T_x<n\right)+S_2^2e^{-2\delta n}I\left(T_x\ge n\right)$. Здесь мы используем тот факт, что $I\left(T_x<n\right)\cdot I\left(T_x\ge n\right)=0$. Поэтому второй момент фактически совпадает с первым моментом, но подсчитанным при удвоенной интенсивности процентов и с новыми значениями сумм S_1 и S_2: $S_1^*=S_1^2$, $S_2^*=S_2^2$. Таким образом,

$$EZ^2=S_1^2\frac{\mu}{2\delta+\mu}\left(1-e^{-(2\delta+\mu)n}\right)+S_2^2e^{-(2\delta+\mu)n}\approx 2392933128.15.$$

Соответственно, $VarZ=E\left(Z^2\right)-\left(EZ\right)^2\approx 500777956.96$, а стандартное отклонение равно £22378.07.

Задача 13. Страховая компания заключает с мужчиной в возрасте *x*=20 лет договор смешанного страхования жизни на *n*=20 лет. В момент смерти или по окончании срока действия договора (в зависимости от того, какое событие наступит раньше) выплачивается страховая сумма *SA*=£85,000 плюс бонус. Компания предполагает, что размер будущего бонуса на очередной год будет определяться в конце каждого года действия договора таким образом, что полная выплата B_n на *n*-й год будет равна $SA\cdot(1+b)^{n-1}$, где *b*=1.92308%, а полная выплата по дожитию будет равна $SA\cdot(1+b)^{40}$. Подсчитайте ежемесячную премию *P* по этому договору.

Основа расчётов: таблица смертности – AM92, техническая процентная ставка – *i*=6% годовых, первоначальная комиссия равна 480% от первой премии, возобновляемая комиссия составляет 2.5% от последующих премий, первоначальные расходы составляют £325, возобновляемые расходы равны £75 и оплачиваются в начале второго и последующих лет действия договора. Кроме того, предполагается, что возобновляемые расходы будут расти на £5 в год, начиная с третьего года действия договора. [10 *баллов*]

Решение задачи 13. Искомую премию мы найдём из принципа эквивалентности обязательств: $a_{\mathrm{C}}=a_{\mathrm{B}}+a_{\mathrm{E}}$, где a_{C} – современная актуарная стоимость обязательств страхователя, a_{B} – современная актуарная стоимость страхового возмещения, a_{E} – современная актуарная стоимость расходов страховщика (исключая страховые выплаты).

Поток ежемесячных премий образует 40-летнюю пожизненную упреждающую ренту с выплатой *p*=12 раз в год и алгебраической суммой выплат за год в размере 12*P*. Поэтому современная актуарная стоимость обязательств страхователя равна $12P\ddot{a}^{(12)}_{[20]:\overline{40|}}$. Используя линейную интерполяцию функции выживания, для $\ddot{a}^{(12)}_{[20]:\overline{40|}}$ мы имеем:

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(12)}_{[20]:\overline{40|}}&=\frac{id}{i^{(12)}d^{(12)}}\ddot{a}_{[20]:\overline{40|}}-\frac{i-i^{(12)}}{i^{(12)}d^{(12)}}\left(1-v^{40}\frac{l_{60}}{l_{[20]}}\right)\\&=\frac{id}{i^{(12)}d^{(12)}}\left(\ddot{a}_{[20]}-v^{40}\frac{l_{60}}{l_{[20]}}\ddot{a}_{60}\right)-\frac{i-i^{(12)}}{i^{(12)}d^{(12)}}\left(1-v^{40}\frac{l_{60}}{l_{[20]}}\right)\end{aligned}$$

Чтобы свести вычисление величины $\ddot{a}_{[20]}$ к вычислению величины $\ddot{a}_{20}$, проведём следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{[20]}&=1+p_{[20]}v+p_{[20]}p_{[20]+1}v^2+p_{[20]}p_{[20]+1}p_{22}v^3+\ldots\\&=1+p_{[20]}v+\frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\left(p_{20}p_{21}v^2+p_{20}p_{21}p_{22}v^3+\ldots\right)\\&=1+p_{[20]}v+\frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\left(\ddot{a}_{20}-1-p_{20}v\right)\\&=\frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\ddot{a}_{20}+\left(1-\frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\right)+p_{[20]}v\left(1-\frac{p_{[20]+1}}{p_{21}}\right).\end{aligned}$$

Поэтому $\ddot{a}_{[20]}=16.87665$, $\ddot{a}_{[20]:\overline{40|}}=15.80085$, $\ddot{a}^{(12)}_{[20]:\overline{40|}}=15.37952$. Соответственно, современная актуарная стоимость потока премий равна $a_{\mathrm{C}}=184.5542P$.

Теперь займёмся вычислением современной стоимости расходов.

Поток ежемесячных комиссий удобно представить как композицию из

1. выплаты разовой суммы в размере 477.5% от премии в момент заключения договора,
2. 40-летней пожизненной упреждающей ренты с выплатой *p*=12 раз в год и алгебраической суммой выплат за год в размере $12\cdot0.025P=0.3P$.

Поэтому современная актуарная стоимость потока комиссий равна $4.775P + 0.3P\ddot{a}^{(12)}_{[20]:\overline{40}|} = 9.38885564P$.

Поток расходов, выплачиваемых в абсолютных суммах, можно рассматривать как композицию из

1. выплаты разовой суммы в размере £255,
2. 40-летней пожизненной упреждающей ренты с выплатой £65 в год,
3. 40-летней пожизненной возрастающей упреждающей ренты с выплатой суммы £$5 \cdot n$ в начале n-го года действия договора.

Поэтому современная актуарная стоимость этих обязательств страховщика равна $255 + 65\ddot{a}_{[20]:\overline{40}|} + 5(I\ddot{a})_{[20]:\overline{40}|}$. Величину $\ddot{a}_{[20]:\overline{40}|}$ мы уже подсчитали, а для $(I\ddot{a})_{[20]:\overline{40}|}$ мы имеем:

$$(I\ddot{a})_{[20]:\overline{40}|} = 1 + 2p_{[20]}v + 3p_{[20]}p_{[20]+1}v^2 + 4p_{[20]}p_{[20]+1}p_{22}v^3 + \ldots + 40p_{[20]}p_{[20]+1}p_{22}\ldots p_{58}v^{39}$$

$$= 1 + 2p_{[20]}v + \frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\left(3p_{20}p_{21}v^2 + 4p_{20}p_{21}p_{22}v^3 + \ldots + 40p_{20}p_{21}p_{22}\ldots p_{58}v^{39}\right)$$

$$= 1 + 2p_{[20]}v + \frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\left((I\ddot{a})_{20:\overline{40}|} - 1 - 2p_{20}v\right)$$

$$= \frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}(I\ddot{a})_{20:\overline{40}|} + \left(1 - \frac{p_{[20]}p_{[20]+1}}{p_{20}p_{21}}\right) + 2p_{[20]}v\left(1 - \frac{p_{[20]+1}}{p_{21}}\right).$$

Величина $(I\ddot{a})_{20:\overline{40}|}$, которая рассчитывается по предельным вероятностям, может быть записана как $(I\ddot{a})_{20} - v^{40}\frac{l_{60}}{l_{20}}\left(40\ddot{a}_{60} + (I\ddot{a})_{60}\right)$. Поэтому $(I\ddot{a})_{20:\overline{40}|} = 209.323513$, $(I\ddot{a})_{[20]:\overline{40}|} = 209.364296$, а современная актуарная стоимость потока фиксированных расходов равна 2328.87653.

Современную стоимость страхового возмещения можно записать в виде:

$$Z = SA\cdot(1+b)^{K_{[20]}}v^{T_{[20]}}I\left(T_{[20]} < 40\right) + SA\cdot(1+b)^{40}v^{40}I\left(T_{[20]} > 40\right)$$

$$= \frac{SA}{1+b}v^{\tau_{[20]}-1}v_*^{K_{[20]}+1}I\left(T_{[20]} < 40\right) + SA\cdot v_*^{40}I\left(T_{[20]} > 40\right) = \frac{SA}{1+b}v^{\tau_{[20]}-1}Z^1_{[20]:\overline{40}|} + SA\cdot Z_{[20]:\overset{1}{\overline{40}|}},$$

где $v_* = v(1+b)$, а величины $Z^1_{[20]:\overline{40}|}$ (современная стоимость стандарного временного страхования) и $Z_{[20]:\overset{1}{\overline{40}|}}$ (современная стоимость стандарного чисто накопительного страхования) подсчитаны при коэффициенте дисконтирования v_*. Этот коэффициент дисконтирования соответствует технической процентной ставке $i_* = \frac{i-b}{1+b} = 4\%$. Поэтому $a_{\text{В}} = \frac{SA}{1+b}\frac{i}{\delta}A^1_{[20]:\overline{40}|} + SA\cdot A_{[20]:\overset{1}{\overline{40}|}}$ (как обычно, мы используем линейную интерполяцию функции выживания для дробных возрастов). Величина $A_{[20]:\overset{1}{\overline{40}|}}$ равна $v_*^{40}\frac{l_{60}}{l_{[20]}} = 0.19382571$, а для $A^1_{[20]:\overline{40}|}$ мы имеем: $A^1_{[20]:\overline{40}|} = A_{[20]:\overline{40}|} - A_{[20]:\overset{1}{\overline{40}|}}$, где $A_{[20]:\overline{40}|} = 1 - d_*\ddot{a}_{[20]:\overline{40}|}$. Величину $\ddot{a}_{[20]:\overline{40}|}$ подсчитаем так же, как мы делали это при расчёте обязательств страхователя: $\ddot{a}_{[20]:\overline{40}|} = 20.34605,$ так что $A_{[20]:\overline{40}|} = 0.21746024$, $A^1_{[20]:\overline{40}|} = 0.02363453$, $a_{\text{В}} = 18504.77$.

Теперь мы можем найти искомую премию: $P = \frac{18504.77 + 2328.87653}{184.5542 - 9.38885564} \approx 118.94.$

Задача 14. Страховая компания заключила с группой 40-летних мужчин ряд договоров страхования жизни на 20 лет с убывающей страховой суммой. Страховая выплата производится в конце года смерти и составляет £200,000 для первого года действия договора, £190,000 – для второго и т.д., т.е. ежегодно уменьшается на £10,000 пока не достигнет величины £10,000 для двадцатого (последнего) года действия договора. Премии выплачиваются раз в год на протяжении всего срока действия договора. Компания рассчитывает свои резервы на базе нетто-премий; допускаются отрицательные резервы.

(i) Покажите, что годовая нетто-премия для каждого договора примерно равна £204. [4 *балла*]

Предположим, что в начале 10-го года портфель страховщика содержал 625 таких договоров и 3 застрахованных умерли на протяжении этого года.

(ii) Подсчитайте доход или потери страховой компании за 10-й год от смертности. [6 *баллов*]

(iii) Кратко прокомментируйте результаты, полученные при выполнении задания (ii). [2 *балла*]

Основа расчётов: таблица смертности – предельная AM92, процентная ставка 4% годовых, расходов нет. [Всего 12 *баллов*]

Решение задачи 14. (i) Выплату премий страхователем можно рассматривать как 20-летнюю пожизненную упреждающую ренту с ежегодной выплатой суммы *P*. Её актуарная современная стоимость равна $P\ddot{a}_{40:\overline{20}|}$. Имея в виду величины, включённые в таблицу AM92, удобно использовать формулу $\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \ddot{a}_x - \frac{D_{x+m}}{D_x}\ddot{a}_{x+m}$, так что $\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = 13.92747942$.

Описанное в задаче страхование с убывающей страховой суммой удобно рассматривать как разность 20-летнего страхования со страховой суммой £210,000 и 20-летнего страхования с возрастающей страховой суммой (£10,000 в первый год, £20,000 во торой год, …, £200,000 в двадцатый год). Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховой компании равна $210000A^1_{40:\overline{20}|} - 10000(IA)^1_{40:\overline{20}|}$. Имея в виду величины, включённые в таблицу AM92, удобно использовать формулы:

$$A^1_{x:\overline{m}|} = A_x - \frac{D_{x+m}}{D_x}A_{x+m},\ (IA)^1_{x:\overline{m}|} = (IA)_x - \frac{D_{x+m}}{D_x}\left(mA_{x+m} + (IA)_{x+m}\right),$$

так что $210000A^1_{40:\overline{20}|} = 7201.124162$, $10000(IA)^1_{40:\overline{20}|} = 4355.04669$, а актуарная современная стоимость обязательств страховой компании равна 2846.077472. Поэтому искомая премия равна $P = \frac{2846.077472}{13.92747942} \approx 204.35$.

(ii) Прежде всего подсчитаем резерв в конце 10-года действия договора. В этот момент застрахованному 50 лет, а срок действия договора ограничен 10 годами. Страховая сумма на следующий, 11-й, год равна £100,000, после чего она ежегодно уменьшается на £10,000. Это страховое покрытие удобно рассматривать как разность 10-летнего страхования со страховой суммой £110,000 и 10-летнего страхования с возрастающей страховой суммой (£10,000 в первый год, £20,000 во торой год, …, £100,000 в десятый год). Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховой компании в конце 10-го года равна $110000A^1_{50:\overline{10}|} - 10000(IA)^1_{50:\overline{10}|}$. Здесь: $A^1_{50:\overline{10}|} = A_{50} - \frac{D_{60}}{D_{50}}A_{60} = 0.034230633,$ $\quad (IA)^1_{50:\overline{10}|} = (IA)_{50} - \frac{D_{60}}{D_{50}}\left(10A_{60} + (IA)_{60}\right) = 0.20872393.$

Поэтому актуарная современная стоимость обязательств страховой компании в конце 10-го года равна ${}_{10}a_B = 1678.130333$. Выплату премий страхователем можно рассматривать как 10-летнюю пожизненную упреждающую ренту с ежегодной выплатой суммы *P*. Её актуарная современная стоимость равна $P\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = P\left(\ddot{a}_{50} - \dfrac{D_{60}}{D_{50}}\ddot{a}_{60}\right) = 1698.903825$ – это актуарная современная стоимость обязательств страхователя, ${}_{10}a_C$. Поэтому чистые обязательства страховщика, т.е. нетто-резерв, равны ${}_{10}V = {}_{10}a_B - {}_{10}a_C = -20.7735$.

Страховая сумма на 10-й год равна *SA*=£110,000. Поэтому сумма под риском в этом году для одного договора равна $SA - {}_{10}V = £110,020.7735$.

Ожидаемое число страховых случаев в этом году равно $625 \cdot q_{49} = 1.400625$, что превышает реальное число страховых случаев. По каждой «лишней» смерти страховой компании нужно найти сумму £110,020.7735. Поэтому потери страховой компании за 10-й год от смертности составят сумму $£110,020.7735 \times (3 - 1.400625) = £175,964.47$.

(iii) Прежде всего следует отметить, что сумма под риском на 10-й год очень велика и даже чуть превышает страховую сумму на этот год. Хотя реальное число смертей более, чем в два раза превышает ожидаемое, малый размер портфеля не позволяет утверждать, что при актуарных расчётах используется слишком оптимистические предположения о смертности. Тем не менее, было бы разумно внимательно проанализировать смертность на протяжении бóльшего промежутка времени и/или для бóльших портфелей.

Задача 15. Страховая компания заключает договор временного страхования жизни на 3 года с мужчиной в возрасте 57 лет. Постоянная премия платится в начале каждого года действия договора (если застрахованный жив в этот момент). Страховая сумма равна £150,000 и выплачивается в конце года смерти. При подсчёте премии компания использует следующие предположения: компания зарабатывает 6% годовых (отрицательный балас по договору растёт в соответствии с той же процентной ставкой), смертность описывается таблицей AM92, начальные расходы равны £350, в момент выплаты второй и третьей премий имеются возобновляемые расходы в размере £50, начальная комиссия составляет 15% от первой премии, в момент выплаты второй и третьей премий имеются возобновляемая комиссия в размере 2.5% от премии, техническая процентная ставка, используемая при дисконтировании денежных сумм, равна 6%.

(i) Запишите выражение для случайной величины, которая даёт общие будущие потери в момент начала действия договора. [5 *баллов*]

(ii) Приравнивая среднее значение величины приведённых потерь к 0, подсчитайте премию (используйте формулы для стандартных видов страхования и рент). [4 *балла*]

(iii) При тех же предположениях вычислите премию с использованием метода денежных потоков (разрывы договоров в расчёт не принимать). [6 *баллов*]

(iv) Без каких-либо дополнительных вычислений объясните влияние:

(a) формирования резервов на расчёты в пункте (iii).

(b) увеличения технической процентной ставки до 8%. [2 *балла*]

[Всего 17 *баллов*]

Решение задачи 15. (i) Пусть $T_{[57]}$ – остаточное время жизни застрахованного, $K_{[57]}$ – его округлённое остаточное время жизни. Обозначим через P искомую премию, учитывающую расходы (здесь и ниже все денежные суммы выражены в фунтах стерлингов). Обязательства компании прежде всего заключаются в выплате 150,000 по договору о 3-х летнем временном страховании; актуарная приведённая стоимость этого обязательства есть $150000 \cdot Z^1_{[57]:\overline{3}|}$. Выплату комиссионных агенту можно представить как комбинацию разовой выплаты суммы $0.125P$ в момент заключения договора и 3-х летней временной упреждающей пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат $0.025P$. Приведённая стоимость этих обязательств равна $0.125P + 0.025P \cdot \ddot{Y}_{[57]:\overline{3}|}$. Аналогично, фиксированные расходы можно представить как комбинацию разовой выплаты суммы 300 в момент заключения договора и 3-х летней временной упреждающей пожизненной ренты с величиной ежегодных выплат 50. Приведённая стоимость этих обязательств равна $300 + 50 \cdot \ddot{Y}_{[57]:\overline{3}|}$. Поступающие премии (они уменьшают потери страховщика) образуют временную упреждающую пожизненную ренту с величиной ежегодных выплат P – приведённая стоимость этого потока есть $P \cdot \ddot{Y}_{[57]:\overline{3}|}$. Таким образом, общие потери страховой компании равны

$$150000 \cdot Z^1_{[57]:\overline{3}|} + \left(0.125P + 300\right) + \left(50 - 0.975P\right) \cdot \ddot{Y}_{[57]:\overline{3}|}.$$

(ii) Актуарная приведённая стоимость потерь страховщика может быть записана как $150000 \cdot A^1_{[57]:\overline{3}|} + \left(0.125P + 300\right) + \left(50 - 0.975P\right) \cdot \ddot{a}_{[57]:\overline{3}|}$. Отсюда для премии имеем выражение:

$$P = \frac{300 + 150000 \cdot A^1_{[57]:\overline{3}|} + 50 \cdot \ddot{a}_{[57]:\overline{3}|}}{0.975 \cdot \ddot{a}_{[57]:\overline{3}|} - 0.125}.$$

Для численных расчётов будем использовать известные формулы:

$$\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} = 1 + vp_{[x]} + \ldots + v^{n-1} p_{[x]} p_{[x]+1} \cdots p_{[x]+n-1},$$

$$A^1_{[x]:\overline{n}|} = v\left(q_{[x]} + vp_{[x]} q_{[x]+1} + \ldots + v^{n-1} p_{[x]} p_{[x]+1} \ldots q_{[x]+n-1}\right).$$

Поэтому

$$\ddot{a}_{[57]:\overline{3}|} = 1 + vp_{[57]} + v^2 p_{[57]} p_{[57]+1} \approx 2.820268349,$$

$$A^1_{[57]:\overline{3}|} = v\left(q_{[57]} + vp_{[57]} q_{[57]+1} + v^2 p_{[57]} p_{[57]+1} q_{59}\right) \approx 0.015345126.$$

Соответственно, $P \approx 1044.96$.

(iii) Метод денежных потоков подсчитывает средний чистый доход страховщика за каждый год действия договора, а затем общий средний приведённый доход за всё время действия договора. Равенство нулю последней величины является ещё одной формой принципа эквивалетности обязательств и позволяет определить премию. Расчёт этих величин оформляется в виде таблицы (обычно в Microsoft Excel) примерно следующего вида.

	Год действия договора, k	**1**	**2**	**3**
(1)	Вероятность смерти в течение года, $q_{[57]+k-1}$	0.004171	0.006180	0.007140
(2)	Вероятность дожития до начала года, $P(T_{[57]} \geq k-1)$	1	0.995829	0.989674777
(3)	Чистые поступления (премия - расходы) в начале года	$0.85P - 350$	$0.975P - 50$	$0.975P - 50$
(4)	Проценты за год, 6% от (3)	$0.051P - 21$	$0.0585P - 3$	$0.0585P - 3$

(5)	Ожидаемые выплаты в конце года. $150000\times(1)$	625.65	927.00	1071.00
(6)	Доход за год при условии, что договор действовал на начало года, $F_k=(3)+(4)-(5)$	$0.901P-996.65$	$1.0335P-980$	$1.0335P-1124$
(7)	Средний доход за год на каждый заключённый договор, $F_k^{(0)}=(6)\times(2)$	$0.901P-996.65$	$1.029189P-975.9124$	$1.022829P-1112.394$
(8)	Коэффициент дисконтирования, 1.06^{-k}	0.943396	0.889996	0.839619
(9)	Ожидаемый доход за год, приведённый к начальному моменту, $v^k\cdot F_k^{(0)}=(7)\times(8)$	$0.85P-940.2356$	$0.915974P-868.5581$	$0.858787P-933.9871$

Поэтому общий ожидаемый приведённый доход страховщика за всё время действия договора, NPV, равен $2.624761P-2742.781$. Приравнивая эту величину к 0, мы получим: $P\approx 1044.96$, т.е. то же самое значение, что в пункте (ii) решения. Отметим, что для этого значения премии вектор ожидаемого дохода за год, приведённый к начальному моменту, есть $(-52.0162;88.6024;-36.5862)$. На практике, при использовании Microsoft Excel, премия находится с помощью команды Goal Seek (Подбор параметра) – выбирается какое-нибудь разумное значение премии, для этого значения заполняется приведённая выше таблица и подсчитывается NPV. Затем, меняя значение ячейки, в которой записано значение премии, нужно сделать значение ячейки, в которой записан NPV, равным 0.

(iv) (a) формирование резервов приводит к отодвиганию дохода, но, поскольку процентная ставка совпадает с технической процентной ставкой (используемой при дисконтировании денежных потоков), это никак не влияет на NPV и величину премии;

(b) поскольку процентная ставка меньше технической процентной ставки (используемой при дисконтировании денежных потоков), то NPV. Поэтому, чтобы добиться нулевого значения NPV, нужно увеличить премию.

Литература

1. Г.И.Фалин. Актуарное образование в США и Великобритании. Страховое дело, 2012, №4, 47-55.

2. Subject CT5 – Contingencies. Examination 23 April 2012. The Institute and Faculty of Actuaries.
http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/pdf/iandfct5201204examfinal.pdf

3. Subject CT5 – Contingencies. Examiner's Report, April 2012 Examinations. The Institute and Faculty of Actuaries.
http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/pdf/iandfct5201204examinersreport.pdf

4. Formulae and Tables, The Faculty of Actuaries & The Institute of Actuaries, 2nd ed., 2002.

5. Subject CT5 – Contingencies. Core Reading. The Actuarial Profession. 2012.

6. Г.И.Фалин. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Анкил, 2007.

7. English Life Tables No.15. The Office for National Statistics, London, 1997.

8. http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/pages/92-series-mortality-tables-assured-lives-annuitants-and-pensioners