Принцип суперпозиции для вероятностных решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова

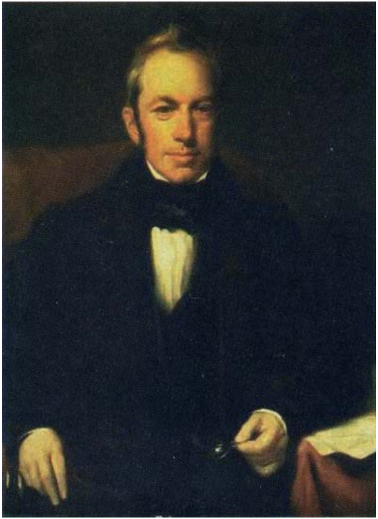
Станислав Валерьевич Шапошников
механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

План лекций:

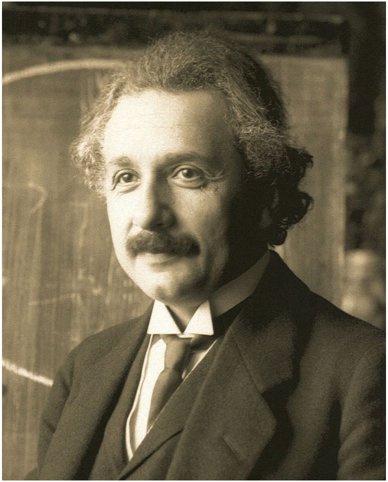
- Диффузионные процессы и уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.
- Принцип суперпозиции для уравнения непрерывности и его приложения в теории игр среднего поля.
- Принцип суперпозиции для линейных и нелинейных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова.
- Единственность вероятностных решений и обобщение принципа суперпозиции.

Диффузионные процессы и уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

В **1827** г. ботаник **Роберт Броун** обратил внимание на хаотическое движение пыльцевых зерен в жидкости, которое не имеет видимых причин. Сейчас это явление называют броуновским движением.



В **1905** г. **Альберт Эйнштейн** в знаменитой работе «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно–кинетической теорией теплоты» закладывает основы математического описания броуновского движения.



В **1923** г. **Норберт Винер** в знаменитой работе «Differential-space» исследует свойства траекторий броуновского движения.

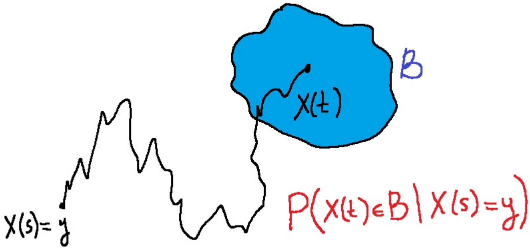
В **1931** г. **Андрей Николаевич Колмогоров** в знаменитой работе «Об аналитических методах в теории вероятностей» строит математическую модель диффузионных процессов и выводит дифференциальные уравнения для переходных вероятностей.

Случайный (марковский) процесс ξ_t описывается набором переходных вероятностей:

$$P(s, y, t, B) = P\big(\xi_t \in B \,|\, \xi_s = y\big),$$

для которых выполняются уравнения Колмогорова–Чепмена

$$P(s, y, u, B) = \int P(t, z, u, B) P(s, y, t, dz).$$



Одномерные распределения P_t процесса ξ_t определяются равенством $P_t(B) := P(\xi_t \in B)$.

Процесс ξ_t является Марковским с переходными функциями $P(s, y, t, B)$ тогда и только тогда, когда равенство

$$P\big((\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in C\big) = \int_X \cdots \int_X I_C(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \cdots P(t_1, x_1, t_2, dx_2) P_{t_1}(dx_1) \quad (1)$$

справедливо для всех $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^n$ и $t_i \geq 0$, где $t_1 < \cdots < t_n$.

Диффузионный процесс
Марковский процесс с переходными вероятностями $P(s, x, t, B)$ называется диффузионным, если существуют отображение $b\colon \mathbb{R}^d \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^d$, называемое **коэффициентом сноса**, и отображение $(x, t) \mapsto A(x, t)$ со значениями в пространстве симметричных неотрицательно определенных матриц, называемое **коэффициентом диффузии**, с которыми выполняются следующие условия:

(i) для всяких $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} P\big(t, x, t+h, \{y\colon |x-y| \geq \varepsilon\}\big) = 0,$$

(ii) для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_{|x-y|<\varepsilon} (y-x)\, P(t, x, t+h, dy) = b(x,t),$$

(iii) для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $t \geq 0$, $x, z \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_{|x-y|<\varepsilon} \langle y-x, z\rangle^2\, P(t, x, t+h, dy) = 2\langle A(x,t)z, z\rangle.$$

Пусть переходные вероятности задаются плотностями:

$$P(s, y, t, B) = \int_B \varrho(s, y, t, x)\, dx.$$

При некоторых дополнительных условиях А.Н.Колмогоров доказал, что плотности

$$(t, x) \to \varrho(s, y, t, x)$$

удовлетворяют **уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова**

$$\partial_t \varrho = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \left(a^{ij} \varrho\right) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \left(b^i \varrho\right).$$

Теорема 1

Предположим, что условия (i)–(iii) *выполнены локально равномерно по x и функции a^{ij}, b^i локально ограничены. Пусть*

$$\mu_t(B) = P(s, y, t, B).$$

Тогда семейство вероятностных мер μ_t является (*в смысле обобщенных функций*) *решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова*

$$\partial_t \mu_t = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \mu_t) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} (b^i \mu_t).$$

Доказательство можно найти в И.И. Гихман, А.В. Скороход «Теория случайных процессов»

Важный пример

Винеровский процесс $\{w_t\}_{t\geq 0}$ — случайный процесс со следующими свойствами:

- траектории $t \to w_t(\omega)$ непрерывны и $w_0 = 0$,
- случайные величины $w_{t_1}, w_{t_2} - w_{t_1}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$, где $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, независимы
- для всех $t > s$ случайная величина $w_t - w_s$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $t - s$.

Для $t > s$ верно равенство

$$P(w_t \in B | w_s = y) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}} \, dx$$

и плотность

$$\varrho(s, y, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}}$$

является решением уравнения теплопроводности

$$\partial_t \varrho = \tfrac{1}{2} \partial_x^2 \varrho.$$

Это простой и важный пример уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

С **1943** по **1951** гг. **Киёси Ито** публикует серию знаменитых работ, посвященных стохастическому интегралу и стохастическим дифференциальным уравнениям.

Важнейший способ построения диффузионного процесса состоит в решении стохастического уравнения

$$d\xi_t = b(t, \xi_t)dt + \sigma(t, \xi_t)dw_t$$

Напомним, что ξ_t является решением, если

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t b(s, \xi_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, \xi_s)\, dw_s \quad \text{п.н.}$$

Положим

$$L = a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + b^i\partial_{x_i}, \quad A = \sigma\sigma^t/2.$$

По формуле Ито для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$f(\xi_t) = f(\xi_0) + \int_0^t Lf(\xi_s)\,ds + \text{мартингал},$$

из которого получаем

$$\mathbb{E}f(\xi_t) = \mathbb{E}f(\xi_0) + \int_0^t \mathbb{E}Lf(\xi_s)\,ds.$$

Положим $\mu_t(B) = P(\xi_t \in B)$. Тогда

$$\int f(x)\,d\mu_t = \int f(x)\,d\mu_0 + \int_0^t \int Lf(x)\,d\mu_s\,ds,$$

что в силу произвольности функции f дает равенство

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i\mu_t).$$

Уравнение непрерывности

Предположим, что $\sigma = 0$. Пусть $X_t(y)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = b(t, x), \\ x(0) = y. \end{cases}$$

Тогда процесс $\xi_t = X_t(\xi_0)$ является решением уравнения

$$d\xi_t = b(t, \xi_t)\, dt.$$

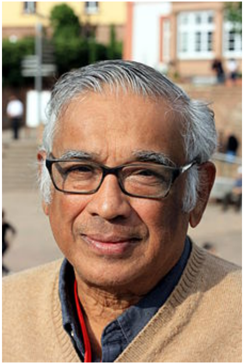
Пусть ν — распределение величины ξ_0. Тогда

$$\mu_t(B) = P(\xi_t \in B) = P(\xi_0 \in X_t^{-1}(B)) = \nu \circ X_t^{-1}(B)$$

и μ_t удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0.$$

Cruzeiro A.B.(1983), Diperna R.J., Lions P.L. (1988),
Ambrosio L., Gigli N., Savare G. (2000-),
Le Bris C., Lions P.L. (2008)



В 1979 году выходит знаменитая книга

Д.В. Струка и **С.Р.С. Варадана**

«Многомерные диффузионные процессы», в которой рассматривается описание диффузии в терминах мартингалов.

Обозначим через
$$\Omega_d := C([0,T],\mathbb{R}^d)$$
пространство непрерывных функций $\omega\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ со стандартной нормой $\|\omega\| = \sup_t |\omega(t)|$.
Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$.

Борелевская вероятностная мера P_ν на Ω_d является решением мартингальной задачи (L,ν), если

(i) $P_\nu\big(\omega\colon \omega(0)\in B\big)=\nu(B)$ для всех борелевских $B\subset\mathbb{R}^d$,

(ii) для всякой функции $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, отображение

$$(\omega,t)\mapsto f(\omega(t))-f(\omega(0))-\int_0^t Lf(s,\omega(s))\,ds$$

является мартингалом относительно меры P_ν и естественной фильтрации $\mathcal{F}_t=\sigma(\omega(s),s\in[0,t])$.

Семейство мер $\mu_t=P_\nu\circ e_t^{-1}$, где $e_t(\omega)=\omega(t)$, является решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

$$\partial_t\mu_t=L^*\mu_t.$$

Имеют место следующие связи между уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова, стохастическим дифференциальным уравнением и мартингальной задачей. Предположим, что коэффициенты a^{ij} и b^i оператора L являются борелевскими локально ограниченными функциями.

- Каждое слабое решение ξ_t стохастического уравнения порождает решение P мартингальной задачи.
- Всякому решению мартингальной задачи соответствует слабое решение стохастического уравнения.
- Всякое решение P мартингальной задачи порождает решение μ_t уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.
- При некоторых условиях на коэффициенты и решение μ_t уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова этому решению μ_t соответствует решение P мартингальной задачи.

Представление решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова через решения соответствующей мартингальной задачи называется **принципом суперпозиции**.

Принцип суперпозиции для уравнения непрерывности

Предположим, что $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ и $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим отображение

$$y \to X_t(y),$$

где

$$\dot{X}_t = b(t, X_t), \quad X_0(y) = y.$$

Положим $\mu_t = \nu \circ X_t^{-1}$, где $\nu \circ X_t^{-1}(B) = \nu\big(X_t^{-1}(B)\big)$. Тогда отображение $t \to \mu_t$ из $[0, T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ непрерывно относительно слабой топологии и удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_t \mu_t + \mathrm{div}(b\mu_t) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Рассмотрим отображение

$$\Psi(y) = (y, X_\bullet(y)) \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times C([0,T], \mathbb{R}^d).$$

Мера

$$P = \nu \circ \Psi^{-1} \quad \text{на пространстве} \quad \mathbb{R}^d \times C([0,T], \mathbb{R}^d)$$

удовлетворяет следующим условиям:

- $P\Big\{(y, x_\bullet) \colon x_t = y + \int_0^t b(s, x_s)\, ds\Big\} = 1,$
- $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$, где $e_t(y, x_\bullet) = x_t$.

Итак, получили три уровня описания динамической системы:

(I) фазовая кривая $t \to X_t$, порождаемая системой

$$\dot{X}_t = b(t, X_t);$$

(II) кривая $t \to \mu_t$, которая является решением уравнения непрерывности $\partial_t \mu_t + \mathrm{div}(b\mu) = 0$;

(III) мера P на $\mathbb{R}^d \times C([0, T])$, которая с одной стороны сосредоточена на кривых $t \to X_t$ из (I), а с другой стороны ее проекция $t \to \mu_t = P \circ e_t^{-1}$ является решением уравнения непрерывности из (II).

С **2000** по **2010** гг. **Луиджи Амброзио** опубликовал работы о транспортных уравнениях и об уравнениях непрерывности, в которых, в частности, сформулировал и доказал принцип суперпозиции.

Теорема 2 (L. Ambrosio, 2005)

Предположим, что непрерывная кривая $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ *в пространстве вероятностных мер со слабой топологией является решением уравнения непрерывности*

$$\partial_t \mu_t + \mathrm{div}(b\mu_t) = 0,$$

где b *— борелевское векторное поле на* $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ *и*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|b(x,t)|}{1+|x|}\, \mu_t(dx)\, dt < \infty.$$

Тогда существует такая мера P *на пространстве* $\mathbb{R}^d \times C([0,T], \mathbb{R}^d)$*, что* P *сосредоточена на парах* $(y, x_\bullet)$*, где* x_t *является решением интегрального уравнения*

$$x_t = y + \int_0^t b(x_s, s)\, ds,$$

и меры $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$*, где* $e_t(y, x_\bullet) = x_t$*.*

Предположим для простоты, что b является измеримым и ограниченным векторным полем на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.

Следствие 1

Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — борелевское множество. Следующие утверждения равносильны:
(i) *для всякого $y \in E$ существует не более одного решения задачи Коши $\dot{X} = b(t, X)$, $X_0 = y$,*
(ii) *для всякой вероятностной меры ν, сосредоточенной на множестве E, существует не более одной непрерывной кривой $\{\mu_t\}_{t \in [0,T]}$ в пространстве вероятностных мер, которая является решением задачи Коши*

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}\big(b\mu_t\big) = 0, \quad \mu_0 = \nu.$$

Доказательство

Если для некоторого $y \in E$ существует два различных решения X_t^1 и X_t^2 задачи Коши $\dot{X} = b(t, X)$, $X_0 = y$, то кривые $t \to \delta_{X_t^1}$ и $t \to \delta_{X_t^2}$ являются различными решениями задачи Коши для уравнения непрерывности с начальным условием $\nu = \delta_y$.

Предположим теперь, что для всякого $y \in E$ решение задачи Коши $\dot{X} = b(t, X)$, $X_0 = y$, единственно. Пусть μ_t — решение уравнения непрерывности с начальным условием ν.

По принципу суперпозиции существует такая вероятностная мера P на $\mathbb{R}^d \times C([0,T],\mathbb{R}^d)$, что для P – почти всех $(y, x_\bullet)$ отображение $t \to x_t$ является решением задачи Коши $\dot{X} = b(t, X)$, $X_0 = y$, и $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$. Следовательно, проекция P на y равна ν. Пусть P_y — условные меры относительно ν, то есть $P = P_y \nu(dy)$. Поскольку для ν почти всех y решение $X_t(y)$ задачи Коши $\dot{X} = b(t, X)$, $X_0 = y$, единственно, то $P_y = \delta_{X_\bullet(y)}$ для ν почти всех y. Таким образом, мера $P = \delta_{X_\bullet(y)}\,\nu(dy)$ однозначно определяется мерой ν, а это влечет единственность μ_t.

Единственность решения системы уравнений теории игр среднего поля

Принцип суперпозиции играет ключевую роль при обосновании единственности решения системы уравнений теории игр среднего поля.
Хороший обзор этой теории дан в статье: Cardaliaguet, P., Porretta, A. «An Introduction to Mean Field Game Theory» In: Cardaliaguet, P., Porretta, A. (eds) Mean Field Games. Lecture Notes in Mathematics, vol 2281. Springer, Cham. 2020.

Рассмотрим типичный пример:

$$\begin{cases} -\partial_t u + \frac{1}{2}|\nabla_x u|^2 = F(x, \mu_t), \\ \partial_t \mu_t - \mathrm{div}(\mu_t \nabla_x u) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(MFG)}$$

и $\mu_0 = \nu$, $u(x, T) = g(x)$. Можно считать, что функция u липшицева и λ – вогнута для некоторого $\lambda > 0$. Будем предполагать, что $\nu = \varrho_0\, dx$ и $\mu_t = \varrho(x, t)\, dx$. Поскольку u является вязкостным решением и почти всюду дифференцируема, то уравнение на функцию u выполняется не только в вязкостном смысле, но и почти всюду.

Пусть (u^1, μ_t^1) и (u^2, μ_t^2) — два решения.
Имеем

$$0 = \int_0^T \int \frac{d}{dt}(u^1(t,x) - u^2(t,x))(\varrho^1(t,x) - \varrho^2(t,x))\, dx\, dt =$$

$$\int_0^T \int \Big(\frac{1}{2}|\nabla_x u^1|^2 - \frac{1}{2}|\nabla_x u^2|^2 + F(x, \mu_t^2) - F(x, \mu_t^1)\Big)(\varrho^1 - \varrho^2)\, dx\, dt -$$

$$- \int_0^T \int (\nabla_x u^1 - \nabla_x u^2)(\nabla_x u^1 \varrho^1 - \nabla_x u^2 \varrho^2)\, dx\, dt.$$

Приходим к равенству

$$\int_0^T \int \frac{1}{2} |\nabla_x u^1 - \nabla_x u^2|^2 (\varrho^1 + \varrho^2) \, dx \, dt =$$

$$\int_0^T \int \big(F(x, \mu_t^2) - F(x, \mu_t^1) \big) \, d(\mu_t^1 - \mu_t^2) \, dt.$$

Предположим, что функция F удовлетворяет условию монотонности

$$\int \Big(F(x,\mu) - F(x,\sigma) \Big) (\mu - \sigma)(dx) \geq 0 \quad \forall \mu, \sigma.$$

Например, такое условие выполнено, если

$$F(x,\mu) = \int f(K * \mu(y)) K(x-y)\, dy,$$

где функция f возрастает, $K(x) = K(-x)$, $K \geq 0$ и

$$K * \mu(y) = \int K(y-x)\, \mu(dx).$$

Тогда

$$\int_0^T \int \big(F(x,\mu_t^2) - F(x,\mu_t^1)\big)\, d(\mu_t^1 - \mu_t^2)\, dt \le 0$$

и $(\varrho^1 + \varrho^2)\, dx\, dt$–почти всюду справедливо равенство

$$\nabla_x u^1(t,x) = \nabla_x u^2(t,x).$$

Следовательно, μ_t^1 и μ_t^2 решают задачу Коши для одного уравнения непрерывности с одним начальным условием.

Положим $u = u^1$. Для завершения доказательства единственности надо проверить, что в классе вероятностных абсолютно непрерывных мер решение задачи Коши

$$\partial_t \mu_t - \mathrm{div}(\mu_t \nabla_x u) = 0, \quad \mu_0 = \nu,$$

единственно. Известные результаты о единственности требуют более сильной регулярности векторного поля $\nabla_x u$ и не могут быть применены в рассматриваемой ситуации.

Функция u является функцией Беллмана в задаче оптимального контроля:

$$\int_t^T \frac{|\dot{X}_s(y)|^2}{2} + F(X_s(y), \mu_s^1)\, ds + g(X_T(y)) \to \inf,$$

то есть

$$u(t,y) = \inf\Big\{ \int_t^T \frac{|\dot{X}_s(y)|^2}{2} + F(X_s(y), \mu_s^1)\, ds + g(X_T(y)) \Big\}.$$

Множество оптимальных траекторий $\mathcal{A}(t,y)$ непусто и замкнуто. Нам будут полезны следующие свойства функции u и оптимальных траекторий.

- Если $X_\bullet \in \mathcal{A}(t,y)$, то при $s \in (t, T]$ ограничение $X_\bullet$ на $[s, T]$ является единственным элементом $\mathcal{A}(s, X_s(y))$.
- Функция $x \to u(t,x)$ дифференцируема в точке y тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{A}(t,y)$ состоит из единственного элемента $X_\bullet(y)$. Более того, если существует $\nabla_x u(t,y)$, то $\dot{X}_t(y) = -\nabla_x u(t,y)$.
- Если $X_\bullet \in \mathcal{A}(t,y)$, то при $s \in (t, T]$ функция $x \to u(s,x)$ дифференцируема в точке $X_s(y)$ и выполнено равенство $\dot{X}_s = -\nabla_x u(s, X_s(y))$.

- Пусть $\nabla_x u$ — всюду определенное борелевское векторное поле, совпадающее почти всюду с градиентом функции $x \to u(t,x)$. Если $\dot{X}_s = -\nabla_x u(s, X_s)$, $X_t = y$ и отображение $x \to u(s,x)$ дифференцируемо в точке $X_s(y)$ для почти всех $s \in (t, T]$, то $X_t \in \mathcal{A}(t,y)$.
- Если $x \to u(t,x)$ дифференцируема в точке y, то задача Коши $\dot{X}_s = -\nabla_x u(s, X_s)$, $X_t = y$ имеет не более одного решения, для которого отображение $x \to u(s,x)$ дифференцируемо в точке $X_s(y)$ для почти всех $s \in (t, T]$.

Пусть P — вероятностная мера из принципа суперпозиции, соответствующая решению μ_t^1. Поскольку u почти всюду на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ дифференцируема и меры μ_t^1 абсолютно непрерывны, то для P — почти всех $(y, X_\bullet)$ функция $x \to u(t, x)$ дифференцируема в точке X_t для почти всех t. Действительно, если E — множество точек (t, x), в которых u не является дифференцируемой, то

$$\int \Bigl(\int_0^T I_E(X_t)\, dt \Bigr) P(dydX_\bullet) =$$

$$\int_0^T \int I_E(X_t)\, P(dydX_\bullet)\, dt = \int_0^T \int I_E(x) \varrho^1(t, x)\, dx\, dt = 0.$$

Далее обоснование единственности повторяет рассуждения доказанного выше следствия.

Отметим, что идея представления решения уравнения непрерывности с помощью меры на траекториях позволяет ввести удобное и естественное определение решения системы уравнений (MFG).

Следуя работам P.Cannarsa, R.Capuani, P.Cardaliaguet назовем пару (u, μ_t) решением в среднем системы (MFG), если $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$ и

$$u(t, y) = \inf_{X_\bullet :\, X_0 = y} \int_t^T \frac{1}{2}|\dot{X}_t|^2 + h(X_t, \mu_t)\, dt + g(X_T, \mu_T),$$

где вероятностная мера P на $\mathbb{R}^d \times C([0, T], \mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям: $P|_{\mathbb{R}^d_x} = \nu$ и носитель $\operatorname{sp} P$ лежит в множестве пар $(y, X_\bullet)$, у которых $X_0 = y$ и $X_\bullet$ — точка минимума функционала

$$X_\bullet \to \int_0^T \frac{1}{2}|\dot{X}_t|^2 + h(X_t, P \circ e_t^{-1})\, dt + g(X_T, P \circ e_T^{-1})$$

на множестве всех абсолютно непрерывных функций $X_\bullet$ с условием $X_0 = y$.

Принцип суперпозиции для уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i} \partial_{x_j} \big(a^{ij} \mu_t \big) - \partial_{x_i} \big(b^i \mu_t \big), \quad \mu_0 = \nu. \tag{2}$$

Далее мы записываем это уравнение в виде

$$\partial_t \mu_t = L^* \mu_t,$$

где L^* — формально сопряженный оператор к дифференциальному оператору

$$Lu = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + b^i \partial_{x_i} u.$$

Далее всегда предполагаем, что матрица

$$A(t,x) = (a^{ij}(t,x))_{i,j\leq d}$$

симметрична и неотрицательно определена, а функции

$$(t,x) \mapsto a^{ij}(t,x) \text{ and } (t,x) \mapsto b^{i}(t,x)$$

борелевски измеримы на $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Вероятностным решением называем такое непрерывное отображение $t \mapsto \mu_t$ из $[0, T]$ в пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ со слабой топологией, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\nu + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L\varphi \, d\mu_s \, ds$$

для всех $t \in [0, T]$ и всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, причем предполагается, что a^{ij} и b^i локально интегрируемы относительно меры $\mu_t \, dt$:

$$a^{ij}, b^i \in L^1_{loc}(\mu_t \, dt).$$

Пусть ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Вероятностная мера P_ν на пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ является решением мартингальной задачи с оператором L и начальным условием ν, если

(M1) $P_\nu\big(\omega\colon \omega(0)\in B\big)=\nu(B)$ для всех борелевских множеств $B\subset\mathbb{R}^d$,

(M2) для всякой функции $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, процесс

$$\xi_t(\omega)=f(\omega(t))-f(\omega(0))-\int_0^t Lf(s,\omega(s))\,ds$$

является мартингалом относительно меры P_ν и естественной фильтрации $\mathcal{F}_t=\sigma(\omega(s),s\in[0,t])$, то есть

$$\mathbb{E}_{P_\nu}\big(\xi_t|\mathcal{F}_s\big)=\xi_s,\quad s\le t.$$

Напомним, что семейство мер $\mu_t=P_\nu\circ e_t^{-1}$, где $e_t(\omega)=\omega(t)$, является решением задачи Коши $\partial_t\mu_t=L^*\mu_t$, $\mu_0=\nu$.

ПРОБЛЕМА
Верно ли, что для всякого вероятностного решения μ_t задачи Коши

$$\partial_t \mu_t = L^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu,$$

существует такое решение P_ν соответствующей мартингальной задачи, что
(МЗ)

$$\mu_t = P_\nu \circ e_t^{-1}?$$

В 2008 г. **А. Фигалли** обосновал принцип суперпозиции в случае глобально ограниченных коэффициентов.
В 2016 г. **Д. Тревизан** обосновал принцип суперпозиции для вероятностных решений, относительно которых коэффициенты глобально интегрируемы.

Теорема 3 (Bogachev V.I., Röckner M., Sh., 2021)
Предположим, что $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ *— вероятностное решение задачи Коши* $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$, $\mu_0=\nu$, *причем*

$$\int_0^T \int \frac{\|A(t,x)\| + |\langle b(t,x), x\rangle|}{1+|x|^2}\,\mu_t(dx)\,dt < \infty$$

Тогда существует вероятностная мера P_ν *на* $C([0,T],\mathbb{R}^d)$*, для которой справедливы утверждения* $(\mathrm{M1})$, $(\mathrm{M2})$ *и* $(\mathrm{M3})$.

Мы докажем это утверждение лишь в случае, когда коэффициенты ограничены, что соответствует результату А.Фигалли.

Гладкие коэффициенты

В случае гладких коэффициентов принцип суперпозиции является следствием двух утверждений: 1) существование решения стохастического дифференциального уравнения и 2) единственность вероятностного решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в книге А.В.Булинский, А.Н.Ширяев «Теория случайных процессов»

Теорема 4

Предположим, что σ^{ij}, b^i *— ограниченные борелевские функции на* $[0, T] \times \mathbb{R}^d$*, причем*

$$|\sigma^{ij}(t,x) - \sigma^{ij}(t,y)| + |b^i(t,x) - b^i(t,y)| \le C_{b,\sigma}|x-y|.$$

Пусть $(w_t, \mathcal{F}_t)$ *— винеровский процесс на вероятностном пространстве* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\big)$*. Тогда для всякой* $\mathcal{F}_0$ *измеримой величины* ξ *существует единственное сильное решение* ξ_t *стохастического дифференциального уравнения*

$$d\xi_t = b(t,\xi_t)\,dt + \sigma(t,\xi_t)\,dw_t, \quad \xi_0 = \xi,$$

причем отображение $t \to \xi_t(\omega)$ *непрерывно для всех* ω*.*

Пусть ξ имеет распределение ν. Вероятностная мера $P_\nu = \mathbb{P} \circ \xi_\cdot^{-1}$ является решением мартингальной задачи с начальным условием ν и оператором

$$Lu = a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}u, \quad A = \sigma\sigma^t/2.$$

Это немедленно следует из формулы Ито и того, что стохастический интеграл является мартингалом.

Компактность мер P_ν

Лемма 1 *Для всякой непрерывной функции f на $[0, T]$ справедливо неравенство*

$$|f(t) - f(s)|^p \le N|t - s|^{p\alpha - 1} \int_0^T \int_0^T \frac{|f(u) - f(v)|^p}{|u - v|^{p\alpha + 1}} \, du \, dv,$$

где $p \ge 1$, $p^{-1} < \alpha < 1$, $N > 0$ — некоторые константы.

Пусть ξ_t — решение стохастического уравнения (из теоремы) и справедливы неравенства

$$|b(t,x)| + \|A(t,x)\| \leq M.$$

Тогда

$$\mathbb{E}|\xi_u - \xi_v|^p \leq 2^p \mathbb{E}\Big|\int_v^u b(s,\xi_s)\,ds\Big|^p + 2^p \mathbb{E}\Big|\int_v^u \sigma(s,\xi_s)\,dw_s\Big|^p.$$

Первое слагаемое оцениваем следующим образом:

$$2^p \mathbb{E}\Big|\int_v^u b(s,\xi_s)\,ds\Big|^p \leq (2M)^p |u-v|^p,$$

Для оценки второго слагаемого напомним, что для мартингала Y_t справедливо неравенство Буркхолдера–Дэвиса–Ганди:

$$\mathbb{E} \sup_{[s,t]} |Y_\tau|^p \leq C(p)\mathbb{E}\langle Y_t \rangle^{p/2}.$$

В случае, когда

$$Y_\tau = \int_s^\tau \sigma(u, \xi_u)\, dw_u,$$

имеем

$$\langle Y_t \rangle = \int_s^t A(u, \xi_u)\, du.$$

Второе слагаемое оцениваем следующим образом:

$$2^p \mathbb{E}\left|\int_v^u \sigma(s,\xi_s)\,dw_s\right|^p \le 2^p \mathbb{E}\left|\int_v^u A(s,\xi_s)\,ds\right|^{p/2} \le$$

$$\le (4M)^{p/2}|u-v|^{p/2}.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\mathbb{E}|\xi_u - \xi_v|^p \leq$$
$$\leq (2M)^p|u-v|^p + (4M)^{p/2}|u-v|^{p/2} \leq$$
$$\leq C(p, M, T)|u-v|^{p/2}.$$

По теореме Фубини

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \frac{|\xi_u - \xi_v|^p}{|u-v|^{p\alpha+1}}\,du\,dv \leq C\int_0^T\int_0^T \frac{1}{|u-v|^{p(\alpha-1/2)+1}}\,du\,dv,$$

Положим $p = 4$ и $\alpha = 3/8$. Тогда $p(\alpha - 1/2) + 1 = 1/2$ и

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \frac{|\xi_u - \xi_v|^4}{|u-v|^{5/2}}\,du\,dv \leq C'.$$

По неравенству Чебышёва

$$P_\nu\Big(\omega\colon |\omega(t)-\omega(s)| \le Q|t-s|^{1/8}\Big) \ge 1 - \frac{C'N}{Q^4}.$$

Кроме того, для всякого $R > 0$

$$P_\nu\Big(\omega\colon |\omega(0)| \le R\Big) = \nu\Big(x\colon |x| \le R\Big).$$

В пространстве $C[0, T]$ рассмотрим компакт

$$K_{R,Q} = \Big\{\omega\colon |\omega(0)| \le R,\, |\omega(t)-\omega(s)| \le Q|t-s|^{1/8}\Big\}.$$

Имеет место оценка

$$P_\nu\Big(K_{R,Q}\Big) \ge 1 - \nu\Big(x\colon |x| \ge R\Big) - \frac{C'N}{Q^4},$$

где правая часть стремится к единице при стремлении R и Q к бесконечности.

Единственность решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

Пусть функции a^{ij}, b^i ограниченны и измеримы, причем для каждого $t \in [0, T]$ отображения $x \to a^{ij}(t,x)$ и $x \to b^i(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируемы и их частные производные первого и второго порядка – ограниченные функции.

Теорема 5

Вероятностное решение задачи Коши $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$, $\mu_0 = \nu$, единственно.

Доказательство следующего утверждения можно найти в книгах N.V.Krylov «Introduction to the theory of diffusion process» и D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan «Multidimensional Diffusion Processes».

Лемма 2

Пусть функции α^{ij}, β^i *на* $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ *ограниченны, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по* x, *частные производные первого и второго порядка ограниченны. Тогда для всякой функции* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *и всякого* $0 < \tau < T$ *существует непрерывная ограниченная функция* f, *которая имеет непрерывную производную первого порядка по* t *и ограниченные непрерывные частные производные первого и второго порядка по* x *и является решением задачи Коши*

$$\partial_t f + \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f + \sum_i \beta^i \partial_{x_i} f = 0, \quad f(x, \tau) = \psi(x).$$

Доказательство единственности

Пусть g — ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}^{d+1}$, причем по x функция g непрерывна. Положим

$$g_n(t,x) = n\int_t^{t+1/n} g(s,x)\,ds.$$

Проверим, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int |g_n(t,x) - g(t,x)|\,d\mu_t\,dt = 0.$$

Пусть $\widetilde{g}$ — непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}^d$. Заметим, что

$$\int_0^T \int |g_n(t,x) - \widetilde{g}_n(t,x)|\, d\mu_t\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^T \int |g(t+s/n,x) - \widetilde{g}(t+s/n,x)|\, d\mu_t\, dt\, ds \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_{s/n}^{T+s/n} \int |g(t,x) - \widetilde{g}(t,x)|\, d\mu_{t-s/n}\, dt\, ds.$$

Получаем

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^T \int |g_n(t,x) - \widetilde{g}_n(t,x)|\, d\mu_t\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \int |g(t,x) - \widetilde{g}(t,x)|\, d\mu_t\, dt.$$

Учитывая, что $\widetilde{g}_n$ поточечно сходится к $\widetilde{g}$, приходим к оценке

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^T \int |g_n(t,x) - g(t,x)|\, d\mu_t\, dt \leq$$

$$\leq 2\int_0^T \int |g(t,x) - \widetilde{g}(t,x)|\, d\mu_t\, dt.$$

Поскольку функцию g можно приблизить непрерывной функцией $\widetilde{g}$, получаем требуемое.

Будем считать, что коэффициенты a^{ij}, b^i продолжены вне полосы $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ нулем. Положим

$$\alpha_n^{ij}(t, x) = n \int_t^{t+1/n} a^{ij}(s, x)\, ds, \quad \beta_n^i(t, x) = n \int_t^{t+1/n} \beta^i(s, x)\, ds.$$

Пусть $0 < \tau < T$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и f_n — решение задачи Коши

$$\partial_t f_n + \sum_{i,j} \alpha_n^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f_n + \sum_i \beta_n^i \partial_{x_i} f_n = 0, \quad f_n(x, \tau) = \psi(x).$$

Предположим, что задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова имеет два решения μ_t^1 и μ_t^2. Тогда разность $\mu_t = \mu_t^1 - \mu_t^2$ является решением задачи Коши с нулевым начальным условием. Из определения решения следует равенство

$$\int \psi(x)\, d\mu_\tau = \int_0^\tau \int \Big[\sum_{i,j}(a^{ij} - \alpha_n^{ij})\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_n + \sum_i (b^i - \beta_n^i)\partial_{x_i} f_n\Big]\, d\mu_t\, dt.$$

Поскольку правая часть стремиться к нулю при $n \to \infty$, получаем

$$\int \psi(x)\, d\mu_\tau = 0.$$

В силу произвольности ψ мера μ_τ нулевая и $\mu_\tau^1 = \mu_\tau^2$.

Доказательство принципа суперпозиции

Рассмотрим теперь случай, когда функции a^{ij}, b^i измеримы и для некоторого числа $M>0$ справедливы неравенства

$$|a^{ij}(t,x)|+|b^i(t,x)|\le M \quad \forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d.$$

Пусть

$$\rho(x)=c\exp\bigl(-\sqrt{1+|x|^2}\bigr), \quad \rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon),$$

где c — положительная константа, с которой ρ является вероятностной плотностью.

Положим

$$\mu_t^\varepsilon = \mu_t * \rho_\varepsilon, \quad a^{ij}_\varepsilon = \frac{(a^{ij}\mu_t) * \rho_\varepsilon}{\mu_t * \rho_\varepsilon}, \quad b^i_\varepsilon = \frac{(b^i\mu_t) * \rho_\varepsilon}{\mu_t * \rho_\varepsilon}.$$

Поскольку функция ρ_ε всюду строго положительна и $t \to \mu_t$ — непрерывная кривая, то μ_t^ε — непрерывна положительна функция, а по переменной x еще и вероятностная плотность. Меры μ_t^ε сходятся слабо к μ_t.
Функции a^{ij}_ε, b^i_ε непрерывны и по x дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того,

$$|a^{ij}_\varepsilon(t,x) + |b^i_\varepsilon(t,x)| \leq M.$$

Положим

$$L_\varepsilon u = a_\varepsilon^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + b_\varepsilon^i \partial_{x_i} u.$$

По доказанному выше для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая мера P^ε на $C([0,T],\mathbb{R}^d)$, что $P^\varepsilon \circ e_t^{-1} = \mu_t^\varepsilon$ и для всякой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$(\omega, t) \to f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t L_\varepsilon f(\omega(s), s)\, ds$$

является мартингалом относительно P^ε и фильтрации $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \in [0,t])$. Более того, семейство мер P^ε удовлетворяет условиям теоремы Прохорова и можно (переходя к последовательности) считать, что меры P^ε слабо сходятся к некоторой вероятностной мере P.

Проекции $P^\varepsilon \circ e_t^{-1} = \mu_t^\varepsilon$ сходятся слабо к проекции $\mu_t = P \circ e_t^{-1}$. Остается проверить, что P является решением мартингальной задачи с оператором L.
Пусть h — ограниченная, непрерывная и $\mathcal{F}_s$ – измеримая функция на $C([0,T],\mathbb{R}^d)$, а $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда

$$\int \Big(f(\omega(t)) - f(\omega(s)) - \int_s^t L_\varepsilon f(\omega(\tau),\tau)\, d\tau \Big) h(\omega) P^\varepsilon(d\omega) = 0.$$

После предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\int \Big(f(\omega(t)) - f(\omega(s)) - \int_s^t L f(\omega(\tau),\tau)\, d\tau \Big) h(\omega) P(d\omega) = 0.$$

Обоснования требует лишь переход к пределу в выражении, содержащем L_ε. Пусть $\widetilde{a}^{ij}$, $\widetilde{b}^i$ — непрерывные и ограниченные функции с компактным носителем в $\mathbb{R}^{d+1}$, а $\widetilde{L}$ — оператор с коэффициентами $\widetilde{a}^{ij}$, $\widetilde{b}^i$. Имеют место оценки

$$\int\int_s^t |Lf(\omega(\tau),\tau) - \widetilde{L}f(\omega(\tau),\tau)|\, d\tau\, P(d\omega) \leq$$

$$\leq C(f)\int_0^T\int |a^{ij}-\widetilde{a}^{ij}| + |b^i - \widetilde{b}^i|\, d\mu_t\, dt,$$

$$\int\int_s^t |L_\varepsilon f(\omega(\tau),\tau) - \widetilde{L}_\varepsilon f(\omega(\tau),\tau)|\, d\tau\, P^\varepsilon(d\omega) \leq$$

$$\leq C(f)\int_0^T\int |a^{ij}-\widetilde{a}^{ij}| + |b^i - \widetilde{b}^i|\, d\mu_t\, dt.$$

Так как коэффициенты оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ равномерно приближаются к коэффициентам оператора $\widetilde{L}$, то при $\varepsilon \to 0$ верхний предел выражения

$$\Big|\int h \int_s^t L_\varepsilon f(\omega(\tau),\tau)\, d\tau\, P^\varepsilon(d\omega) - \int h \int_s^t Lf(\omega(\tau),\tau)\, d\tau\, P(d\omega)\Big|$$

оценивается сверху величиной

$$2C(f) \sup|h| \int_0^T \int |a^{ij} - \widetilde{a}^{ij}| + |b^i - \widetilde{b}^i|\, d\mu_t\, dt.$$

Остается заметить, что эту величину с помощью подходящих $\widetilde{a}^{ij}$ и $\widetilde{b}^i$ можно сделать сколь угодно малой.

Нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

Доказанный выше принцип суперпозиции справедлив не только для линейных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, но и для нелинейных уравнений. Пусть $\{\mu_t\}$ — вероятностное решение задачи Коши

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}(t,x,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(t,x,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu.$$

Предположим, что коэффициенты глобально ограничены. Решение $\{\mu_t\}$ нелинейного уравнения можно считать решением линейного уравнения с коэффициентами $\widetilde{a}^{ij}(t,x) = a^{ij}(t,x,\mu)$ и $\widetilde{b}^{i}(t,x) = b^{i}(t,x,\mu)$. По принципу суперпозиции существует решение P_ν мартингальной задачи, причем проекция P_ν при отображении $\omega \to \omega(t)$ равна μ_t.

Таким образом, мера P_ν решает мартингальную задачу, соответствующую стохастическому уравнению

$$d\xi_t = b(t, \xi_t, \mathbb{P} \circ \xi_t^{-1})dt + \sqrt{2A(t, \xi_t, \mathbb{P} \circ \xi_t^{-1})}\, dw_t.$$

Принцип суперпозиции и разрешимость (в слабом смысле) нелинейного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова влекут разрешимость стохастического уравнения Маккина–Власова. Кроме того, полезно иметь ввиду, что при выполнении принципа суперпозиции единственность решения мартингальной задачи влечет единственность решения задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Это оказывается полезным при исследовании вырожденных уравнений.

Единственность вероятностных решений и обобщения принципа суперпозиции

В работе А.Н.Колмогорова
Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 1931. B 104. S. 415–458.
(«Об аналитических методах в теории вероятностей»)
в §15 «Постановка вопроса об однозначности и о существовании решений для второго дифференциального уравнения» сформулирована следующая проблема:

«При каких условиях можно утверждать, что при заданных s и y может существовать лишь единственная неотрицательная функция $\varrho(s, y, t, x)$ переменных t, x, определенная для всех значений x и $t > 0$, удовлетворяющая уравнению (133) и условиям (142)-(143)?»
Ссылка (133) — уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, ссылки (142) и (143) — условия:

$$\int \varrho(s, y, t, x)\, dx = 1, \quad \lim_{t \to s} \int |x - y|^2 \varrho(s, y, t, x)\, dx = 0.$$

Несложно проверить, что уравнение

$$\partial_x^2 \varrho - \partial_x(b\varrho) = 0$$

имеет не более одного вероятностного решения.
Для параболического уравнения аналогичное утверждение существенно сложнее.

Теорема 6 (Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Ш. 2020)
Пусть $b(x)$ — борелевская локально ограниченная функция. Если вероятностное решение задачи Коши

$$\partial_t \varrho = \partial_x^2 \varrho - \partial_x(b\varrho), \quad \varrho|_{t=0} = \nu,$$

существует, то оно единственно.

Доказательство теоремы опирается на следующие утверждения. Положим

$$B(x) = \int_0^x b(s)\, ds.$$

Лемма 3

Если

$$e^B \in L^1(\mathbb{R}),$$

то вероятностное решение единственно.

Лемма 4

Пусть функция w неотрицательна, абсолютно непрерывна на отрезках и удовлетворяет неравенству

$$w'' - bw' \geq w$$

в смысле обобщенных функций. Предположим, что существует конечный предел

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x) = q.$$

Тогда

(i) *если $q = 0$, то $w = 0$;*

(ii) *если $q > 0$, то $e^B \in L^1(\mathbb{R})$.*

«Доказательство теоремы»
Предположим, что задача Коши имеет два решения ϱ_1 и ϱ_2. Тогда $e^B \notin L^1(\mathbb{R})$. Положим

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{x} r(y,t)\,dy,$$

$$r(y,t) = \varrho_1(y,t) - \varrho_2(y,t), \quad F(x,0) = 0,$$

то есть F является разностью функций распределения.

Заметим, что

$$\partial_x\big(\partial_t F\big) = \partial_x\big(\partial_x^2 F - b\partial_x F\big).$$

Для некоторой непрерывной функции $Q(t)$, $Q(0) = 0$, функция $H(x,t) = F(x,t) - Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t H = \partial_x^2 H - b\partial_x H$$

и $H(x,0) = 0$.

Функция
$$w(x) = \frac{1}{2}\int_0^T H(x,t)^2 e^{-t}\,dt,$$
неотрицательна и удовлетворяет неравенству
$$w'' - bw' \geq w.$$
Кроме того, существует конечный предел $\lim_{|x|\to+\infty} w(x)$.
Из предположения $e^B \notin L^1(\mathbb{R})$ следует, что $w = 0$.

Примеры неединственности

При $d = 2$ можно построить пример такого уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \varrho = \Delta \varrho - \mathrm{div}\big(b\varrho\big),$$

что **для всякого вероятностного начального условия задача Коши имеет бесконечномерный симплекс вероятностных решений.**

Обсудим схему построения примера.

Положим

$$L_x = \partial_x^2 + b(x)\partial_x, \quad L_y = \partial_y^2 + c(y)\partial_y,$$

$$L = L_x + L_y.$$

Пусть пока начальное условие $\nu = \delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0}$.
Будем строить решение задачи Коши $\partial_t \varrho = L^* \varrho$, $\varrho|_{t=0} = \nu$ в виде произведений $u(x,t)v(y,t)$, где

$$\partial_t u = L_x^* u, \quad u|_{t=0} = \delta_{x_0},$$

$$\partial_t v = L_y^* u, \quad u|_{t=0} = \delta_{y_0}.$$

Можно подобрать $b(x)$ так, что у соответствующей задачи Коши существует неотрицательное решение u и функция

$$q(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx$$

строго убывает на $[0,+\infty)$.
Можно подобрать $c(y)$ так, что у соответствующей задачи Коши существует бесконечно много линейно независимых неотрицательных решений v, у которых

$$\int_{\mathbb{R}} v(y,t)\,dy = \frac{1}{q(t)}.$$

Пусть теперь ν – произвольная вероятностная мера, а $\varrho_j(a, x, y, t)$ – линейно независимые решения задачи Коши с начальным условием δ_a. Тогда искомый набор решений имеет вид

$$\varrho_j(x, y, t) = \int \varrho_j(a, x, y, t)\nu(da).$$

В качестве b и c можно взять функции:

$$b(x) = -x - 6e^{x^2/2}, \quad c(y) = -(1 + y^2)\mathrm{arctg}\, y + \frac{2y}{1 + y^2}.$$

В отличии от решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для решений мартингальной задачи ситуация с единственностью совершенно иная. Следующее утверждение является частью теоремы 10.1.3 из книги D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan «Multidimensional Diffusion Processes»

Теорема 7

Предположим, что A и b локально ограничены, матрица A локально липшицева по x и локально положительно определена. Тогда для вских $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ существует не более одного решения мартингальной задачи с оператором L и начальным условием $\nu = \delta_z$ при $t = s$.

Таким образом, даже в случае гладких и невырожденных коэффициентов в принципе суперпозиции нельзя отказаться от глобальных условий. Важной проблемой является получение глобальных условий на решение и коэффициенты уравнения, достаточных для выполнения принципа суперпозиции.

Д. Тревизан показал, что для выполнения принципа суперпозиции достаточно условия

$$\|A(t,x)\|,\ |b(t,x)| \in L^1(\mu_t dt).$$

Согласно теореме 3 условие

$$\int_0^T \int \frac{\|A(t,x)\| + |\langle b(t,x), x\rangle|}{1+|x|^2}\, \mu_t(dx)\, dt < \infty$$

влечет принцип суперпозиции.

Перечисленные условия гарантируют, что порождаемый оператором L случайный процесс с одномерными распределениями $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$, с вероятностью единица не уходит в бесконечность за время, меньшее T. Классическим условием для этого является существование функции Ляпунова:

$$V \in C^2(\mathbb{R}^d), \qquad \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \qquad LV \le C + CV.$$

Возникает естественный вопрос о достаточности существования функции Ляпунова для справедливости принципа суперпозиции.

Полезно иметь ввиду следующее утверждение.

Теорема 8

Предположим, что $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ *является решением задачи Коши* $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$ *with* $\mu_0 = \nu$ *и существует такая неотрицательная функция* $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$*, что* $V \in L^1(\nu)$ *и*

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(t,x) \le C + CV(x), \quad C > 0.$$

Тогда

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} V\,d\mu_t < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |LV|\,d\mu_t\,dt < \infty.$$

«Доказательство»
Справедливо равенство

$$\int V\,d\mu_t = \int V\,d\nu + \int_0^t \int LV\,d\mu_s\,ds,$$

из которого следует неравенство

$$\int V\,d\mu_t \leq \int V\,d\nu + Ct + C\int_0^t \int V\,d\mu_s\,ds.$$

С помощью неравенству Гронуолла получаем оценку интеграла от V по мере μ_t.

Пусть $(LV)_+ = \max\{LV, 0\}$ и $(LV)_- = \max\{-LV, 0\}$. Поскольку $C \geq 0$ и $V \geq 0$, то $(LV)_+ \leq C + CV$ и справедливо неравенство

$$\int_0^T \int (LV)_- \, d\mu_s \, ds \leq \int V \, d\nu + \int_0^t \int (LV)_+ \, d\mu_s \, ds.$$

Остается заметить, что $|LV| = (LV)_+ + (LV)_-$.

Из теорем 3 и 8 можно получить следующее утверждение.

Следствие 2

Пусть $\log(1+|x|^2) \in L^1(\nu)$ *и*

$$\|A(t,x)\| \leq C + C|x|^2 \log(1+|x|^2),$$

$$\langle b(t,x), x\rangle \leq C + C|x|^2 \log(1+|x|^2).$$

Тогда принцип суперпозиции справедлив для всякого вероятностного решения задачи Коши с начальным условием ν.

Итак, если дополнительно к

$$V \in C^2(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad LV \leq C + CV,$$

предположить, что $V \in L^1(\nu)$, то, выполнено

$$\int_0^T \int |LV| \, d\mu_t \, dt < \infty. \tag{3}$$

Возникает естественный вопрос о достаточности условия (3) для справедливости принципа суперпозиции. Ответ на этот вопрос пока остается открытым.

Открытые проблемы:

- Единственно ли вероятностное решение задачи Коши в одномерном случае, если $a = 1$ и коэффициент b зависит от (x, t)?
- Зависит ли единственность вероятностного решения от начального условия?
- Верен ли в одномерном случае с $a = 1$ принцип суперпозиции без глобальных условий на коэффициент b?
- Достаточно ли существования функции Ляпунова для справедливости принципа суперпозиции?

Литература

1. Ambrosio, L. Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields. Lecture Notes in Math. 1927, 2–41 (2008)
2. Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V. On the Ambrosio–Figalli–Trevisan Superposition Principle for Probability Solutions to Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2021, V. 33, P. 715–739.
3. Figalli, A. Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients. J. Funct. Anal. 254(1), 109–153 (2008)
4. Trevisan, D. Well-posedness of multidimensional diffusion processes with weakly differentiable coefficients. Electron. J. Probab. 21, Paper No. 22, 41 pp. (2016)
5. Stepanov, E., Trevisan, D. Three superposition principles: currents, continuity equations and curves of measures. J. Funct. Anal. 272(3), 1044–1103 (2017)

6. Rockner M, Xie L., Zhang X. Superposition principle for non-local Fokker–Planck operators. arXiv:1910.11022, 2019
7. Dieckmann M. A restricted superposition principle for (non-)linear Fokker–Planck–Kolmogorov equations on Hilbert spaces. arXiv preprint arXiv: 2008.02390, 2020.
8. Rehmeier M. Linearization and a superposition principle for deterministic and stochastic nonlinear Fokker-Planck-Kolmogorov equations. arXiv preprint arXiv: 2012.13530, 2020
9. Lacker D., Shkolnikov M., Zhang J. Superposition and mimicking theorems for conditional McKean–Vlasov equations. arXiv preprint arXiv: 2004.00099, 2020
10. Barbu, V., Rockner, M. Probabilistic representation for solutions to nonlinear Fokker–Planck equations. SIAM J. Math. Anal. 50(4), 4246–4260 (2018)

СПАСИБО!