Материалы к семинару по уравнениям в частных производных 20.03.2020

Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Задачник под ред. Владимирова - параграф 13, задачник под ред. Шамаева - параграф 4.2

Формулировка задачи Коши для уравнения теплопроводности, формула для ее решения и основные свойства решения приведены в задачнике под ред. Шамаева.

1. Происхождение формулы для решения. Проще всего ее получить так:

а) Используем преобразование Фурье для получения фундаментального решения оператора теплопроводности (см. главу III, параграф 11, пункт 6 в учебнике Владимирова). Идея проста: делаем прямое преобразование Фурье, получаем обыкновенный дифференциальный оператор (двойственная переменная ξ – параметр), находим его фундаментальное решение, а затем делаем обратное преобразование Фурье. На последнем шаге приходится выделить под экспонентой полный квадрат, вынести за знак интеграла экспоненту, не содержащую ξ, а затем вычисляем интеграл по оси, параллельной действительной оси. Можно сделать это формально, но строгое обоснование есть в главе II, параграфе 9, пункте 6, пример b). (Обязательно проделайте все выкладки, это важно!)

б) Представляем задачу Коши как

$$u_t - a^2 \Delta u = f(t,x) + u_0(x)\delta(t)$$

и делаем свертку фундаментального решения с правой частью (мы показывали раньше, что так получается решение неоднородного уравнения.

c) Свертка существует для тех $u_0(x)$ и $f(t,x)$, для которых сходится интеграл. Обычно требуется ограниченность этих функций (легче доказывать теоремы) и, если речь идет о классическом решении, гладкость (стандартные условия - в Шамаеве). Но формула справедлива и для начальных данных, которые растут на бесконечности медленнее $\exp(k^2x^2)$, и даже для разрывных начальных данных, если задача понимается в обобщенном смысле.

d) Формулу для решения задачи Коши для однородного уравнения можно получить без нахождения фундаментального решения, находя преобразование Фурье от начальных данных и сводя к задаче для ОДУ. **Проделайте это!** Формулу для неоднородного уравнения можно получить из принципа Дюамеля точно так же, как мы это делали для волнового уравнения (см. задачу 13.1)

2. Практические приемы для решения задачи Коши.

а) Существует теорема о единственности решения задачи Коши, что позволяет находить решение любым удобным способом. Поэтому, если для однородного уравнения ($f = 0$) в качестве начальных данных мы видим константу, $\sin kx$, $\cos kx$, $\exp kx$, то ищем решение в виде $T(t) \sin kx$ и т.д. Не забываем, что уравнение линейное, поэтому если в начальном условии мы видим сумму "удобных"функций, то решение будет суммой решений нескольких задач Коши.

б) Если начальное данное для однородного уравнения константа, очевидно, что решение - эта же константа (проверка). Этот результат дало бы и непосредственное применение формулы, так как интегрировать придется дельтообразную функцию (плотность нормального распределения), что даст единицу.

в) Для неоднородного уравнения решение есть сумма решения задачи Коши для однородного уравнения с исходными начальными данными и решения неоднородной задачи с нулевыми начальными данными (все как было раньше). Если $f = f(t)$, то решение неоднородной задачи с нулевыми начальными данными - просто $\int_0^t f(\tau) d\tau$, оставшийся длинный интеграл в формуле - единица.

г) Без использования формулы не обойтись, когда в начальных данных стоит $\exp(-x^2)$, $x \exp(-x^2)$ и т.д. Придется выделять полный квадрат под знаком экспоненты подобно тому, как делалось при подсчете обратного преобразования Фурье (см. выше). Для произвольных начальных данных интеграл до конца не вычисляется. Для разрывных начальныхданных решение выражается через интеграл вероятностей $\Phi(x)$.

д) В случае, если пространственная размерность больше 1, а начальные данные представляют собой произведение функций каждая от своей переменной, то решение задачи Коши по теореме Фубини представляет собой произведение одномерных задач Коши (см.задачу 13.2). Это удобный прием.

б) Если начальное данное - линейная комбинация пространственных переменных, то делаем ортогональную замену (точно так, как делали при решении задачи Коши для волнового уравнения)

Задачи для решения.

Владимиров: 13.2, 13.3, 13.5 (1, 3, 5, 6, 7, 8), 13.6 (3, 4), 13.7 (2, 4), 13.8 (1, 2, 3, 5).

Решение задач 13.5 (5, 7) можно использовать как заготовку для решения следующих задач, не производя заново длинных выкладок.