Слайд 1

Добрый день, уважаемые члены экзаменационной комиссии! Меня зовут Александра Токаева, я студентка 609 группы кафедры теории вероятности. Мой научный руководитель Ширяев Альберт Николаевич, соруководитель Житлухин Михаил Валентинович. Тема моей дипломной работы “ Стратегии относительного оптимального роста в модели рынка с аффинными выплатами”

Слайд2

План моего выступления такой: сначала я скажу немного о мотивации для поиска оптимальной стратегии в модели рынка с аффинными дивидендами, затем кратко расскажу про саму модель, и наконец, представлю три теоремы, из которых будет видно, что в нашей модели оптимальная стратегия существует, является неподвижной точкой некоторого отображения и обладает рядом хороших свойств. В конце я приведу численный пример, демонстрирующий поведение найденной оптимальной стратегии.

Слайд3

Моя дипломная работа посвящена поиску стратегий, которые позволят инвестору не быть вытесненным с рынка на бесконечном горизонте времени вне зависимости от действий других инвесторов. Такие стратегии мы будем называть выживающими. Постановка задачи мотивирована исследованиями из статьи 2013 года Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games авторов Рабаха Амира и Игоря Евстигнеева. Эта статья входит в цикл работ в области Эволюционных финансов – области, которая появилась двадцать лет назад и очень активно развивается в последние годы. И в своей дипломной работе я обобщаю модель, предложенную Амиром и Евстигнеевым, на случай более сложной структуры дивидендов активов, а именно афффинной струкуры.

Слайд 4

Перейдем к описанию рынка. Время дискретно. Рынок представляет собой K активов и N инвесторов, которые вкладывают свой капитал в эти активы и получают от активов дивиденды. Активы короткоживущие в том смысле, что нельзя получить прибыль или убыток от изменения их цены на длинном горизонте, потому что короткоживущие активы живут всего один промежуток времени, потом умирают и рождаются заново. Цены на активы устанавливаются эндогенно из условия равенства спроса и предложения. Случайность на рынке моделируется случайным фактором s\_t из измеримого множества Омега. Последовательность случайных факторов s\_t порождает фильтрацию F, относительно которой мы будем хотеть, чтобы наши стратегии были измеримы. Каждый агент в каждый момент времени выбирает вектор долей лямбд, в которых он вкладывает свой капитал в каждый из активов.

Слайд 5

Стратегия агента – это последовательность измеримых векторнозначных функций Лямбда большое, которые могут зависеть от истории состояний случайного фактора, вектора начальных капиталов и истории игры.

Слайд 6

Введем еще некоторые обозначения.

Обозначим за Wt сумму всех капиталов всех агентов, а за mu\_t^k – долю всего капитала рынка, вложенного в k-й актив. Число mu\_t^k можно рассматривать как взвешенную на капиталы агентов сумму стратегий всех агентов.

Через A\_t^k обозначим величину дивидендов, которые выплачивает единица k-го актива в момент t.

В нашей модели мы предполагаем, что дивиденды являются аффинными функциями от mu\_t^k с некоторыми измеримыми неотрицательными функциями akt+1, bkt+1.

Слайд 7

За Pt обозначим вектор цен активов, за X\_t^k обозначим вектор количеств каждого из активов в портфеле у инвестора. Разумеется, X\_t^k равно капиталу, вложенному инвестором в k-й актив, разделенному на цену k-го актива. Мы предполагаем, что в каждый момент времени на рынке есть ровно одна единица каждого из активов. Тогда из равенства единице спроса на каждый из активов, мы получаем выражения для установившихся равновесных цен на каждый из активов по этой формуле. Подставив выражение для цены в выражение для капитала на следующем шаге, мы получаем рекуррентное соотношение для динамики капитала агента.

Слайд 8

Мы будем интересоваться поведением относительных капиталов агентов, определяемых формулой rt :=W\_t^n/Wt.

И нам хочется найти стратегию, которая позволит инвестору обладать отделенной от нуля долей рынка на бесконечном горизонте времени. Такую стратегию мы будем называть выживающей. То есть выживающая – это такая стратегия, что при любых векторах начального капитала и стратегиях других агентов, почти наверно выполнено, что инфинум по t от W\_t^n больше нуля.

Чтобы найти выживующую стратегию, мы будем искать так называемую лог-оптимальную стратегию. По определению, лог-оптимальная стратегия – это такая стратегия, что при любом веекторе начальных капиталов и стратегиях других агентов , логарифм относительного капитала является субмартингалом.

Слайд 9

Введем векторы g\_t^k по следующей формуле,

Обозначим за хи\_t вектор из начального капитала и истории игры до момента t

И введем отображение L\_t по такой формуле

И тогда первая теорема говорит нам, что при некоторых условиях на функции g\_t^k, неподвижная точка этого отображения будет искомой лог-оптимальной стратегией.

Доказательство приведено в тексте работы.

Слайд 10

Вторая теорема говорит, что при немного более строгих условиях на g\_t^k, наличие лог-оптимальной стратегии на рынке определяет структуру рынка в том смысле, что любые другие стратегии, асимптотически не равные лог-оптимальной стратегиии, не выживают на рынке. То есть лог-оптимальная стратегия является единственной выживающей стратегией.

Слайд 11

Теорема 3 говорит, что если коэффициенты из выражения для дивидендов – независимые одинаково распределенные величины, то лог-оптимальная стратегия существует, единственна и при этом захватывает весь рынок.

Слайд 12

Приведем численный пример, демонстрирующий результаты теорем 1-3. Рассмотрим простую модель рынка, на котором всего два актива, и выплата каждого из двух активов равна либо $1 + \mu\_{t}^k$ с вероятностью $p$, любо нулю с вероятностью $1-p$.

С вероятнстью $2p-1$, оба актива платят дивиденды одновременно.

P= параметр. Положим его равным, например, 2/3

В силу симметрии, лог-оптимальной стратегией в этой модели является $\Lambda^\*=(1/2, 1/2)$; Нетрудно проверить, что эта стратегия удовлетворяет условиям утверждения~\ref{lemma2-lambda-star}.

По теореме~\ref{theorem3-iid}(б), это единственнная выживающая стратегия в классе константных стратегий.

Поместим нашу стратегию на рынок, где есть 9 инветоров, каждый из которых использует стратегию (n/10, 1-n/10), просимулируем 400 по времени и построим график доли на рынке капитала каждого из агентов, доли капитала рынка, вложенного в перый актив и график доли взвешенной стратегии всех агентов. Как и обещалось, мы видим, что стратегия (1/2,1/2) выживает, захватывает рынок и при этом еще взвешенная стратегия рынка стремится к (1/2,1/2)

Слайд 13

Еще раз посмотрим на результаты работы:

\item{Получена формула для лог-оптимальной, а значит, выживающей, стратегии.}

\item{Доказана теорема 1: лог-оптимальная стратегия является неподвижной точкой некоторого отображения.}

\item{Доказана теорема 2: наличие на рынке лог-оптимальной стратегии определяет долгосрочное состояние рынка.}

\item{Доказана теорема 3: лог-оптимальная стратегия захватывает рынок.}

\item{Приведен численный пример, показывающий эволюцию рынка с оптимальной стратегией.}

\item{Результаты исследования доложены на конференции Ломоносов-2023.}

\item{Результаты исследования опубликованы в журнале Annals of Operations Research в статье Survival strategies in an evolutionary finance model with endogenous asset payoffs.}

Спасибо ЗА ВНИМАНИЕ!

ального роста в модели рынка с аффинными выплатами