ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА теории вероятностей

КУРСОВАЯ РАБОТА

специалиста

**О применении принципа минимизации меры риска функции потерь в задаче поиска оптимальной премии**

Выполнила студентка 409 группы

Токаева Александра Александровна

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

подпись студента

Научный руководитель:

профессор, д.ф.-м.н.

Фалин Геннадий Иванович

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

подпись научного руководителя

Москва 2021

# 

# **Оглавление**

[Оглавление 2](#_Toc70252002)

[1. Введение 3](#_Toc70252003)

[2. Необходимые сведения 5](#_Toc70252004)

[3. Постановка задачи 7](#_Toc70252005)

[4. Случай симметричной функции абсолютных потерь 10](#_Toc70252006)

[5. Случай несимметричной функции абсолютных потерь 12](#_Toc70252007)

[6. Случай квадратичной функции потерь 16](#_Toc70252008)

[7. Альтернативное применение результатов теоремы 1 20](#_Toc70252009)

[8. Выводы 24](#_Toc70252010)

[9. Список литературы 25](#_Toc70252011)

# **1. Введение**

Задача назначения оптимальной премии, несомненно, является одной из основополагающих в актуарной науке, поэтому существует большое количество различных принципов нахождения оптимальной премии.

Мы будем исследовать частный случай одного из таких принципов, заключающегося в минимизации меры риска функции потерь страховой компании в случае, когда мерой риска является (англ. Conditional Tail Expectation). Физический смысл — это математическое ожидание потерь при условии, что значение потерь превысило некий заранее оговоренный уровень (англ. Value at Risk).

Авторы статьи [1] на стр. 329 пишут, что (англ. Conditional Tail Expectation) иногда называется (англ. Conditional Value at Risk) или (англ. Tail Value at Risk). Кроме того, они подчеркивают, что в рассматриваемом случае — а именно, в случае непрерывного распределения — формулы для всех вышеперечисленных понятий приобретают одинаковый вид.

Мы считаем необходимым сделать здесь небольшое отступление от изложения наших результатов и привести формулы всех трех величин, чтобы убедиться, что для непрерывной случайной величины они действительно принимают одинаковый вид.

1) Согласно статье [1], для заданной непрерывной случайной величины с плотностью , определяется следующей формулой:

Нижний индекс показывает, что соответствующая величина ( или зависит от (заранее выбранной) величины , называемой “доверительной вероятностью”, или “уровнем доверия”. По определению, доверительная вероятность — это такая вероятность, что события с равной или большей вероятностью мы считаем практически достоверными. Часто выбирается значение , но мы будем писать , чтобы подчеркнуть нашу возможность назначить любое разумное (на наш взгляд) из этого промежутка.

2) Теперь определим использующуюся в определении величину .

Согласно статье [3], — это (также зависящая от) величина, выше которой потери могут оказаться только с вероятностью, не превышающей , то есть с пренебрежимо малой вероятностью. Формально это записывается так:

3) Теперь дадим определение величины .

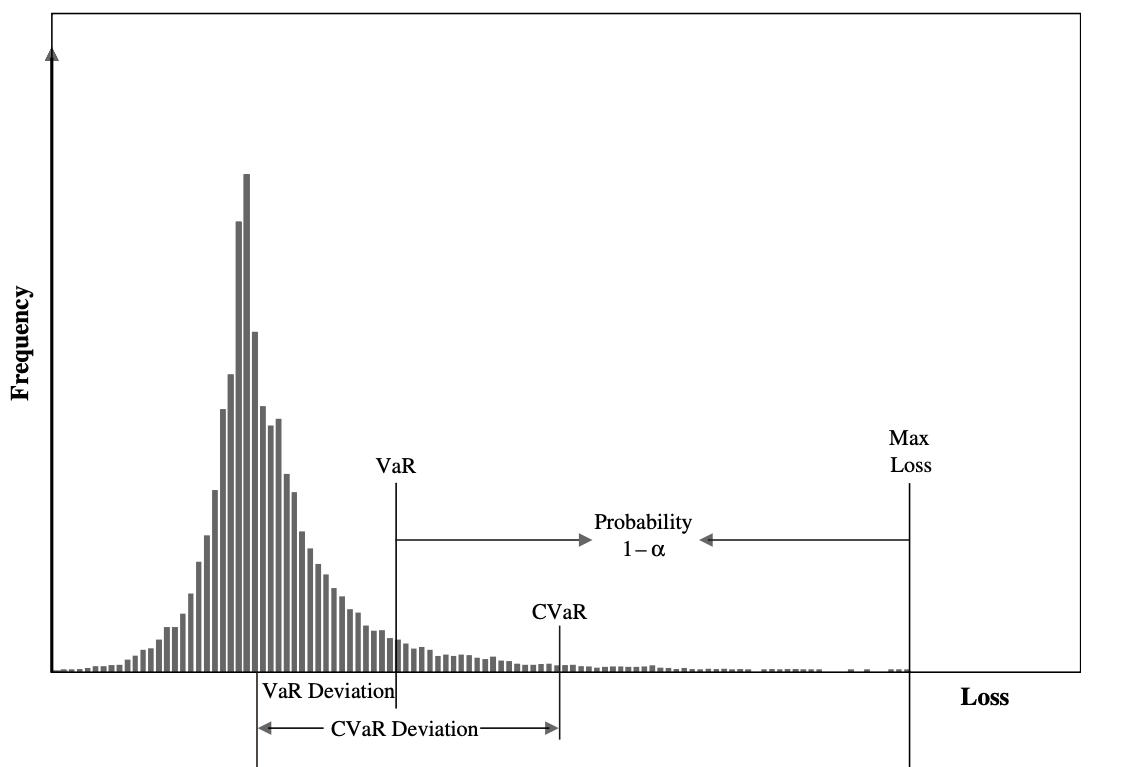
Согласно статье [4]:

Отсюда видно, что в случае непрерывной случайной величины, формулы для и совпадают. Другими словами, величина

,

называемая “нижней ”, совпадает с для непрерывных случайных величин, однако в общем случае она не является непрерывной относительно , а также не является выпуклой.

Отметим однако, что не стоит путать величины и , поскольку , в отличие от , показывает только критическое значение потерь, но ничего не говорит о том, как распределяются потери в случае превышения этого критического значения. Для наглядности изобразим эти величины на гистограмме некоторой случайной величины.



4) Наконец, величина для случайной величины определяется как

В актуарных приложениях мы рассматриваем как (неотрицательную) величину потерь, поэтому нас интересуют очень большие положительные, а не очень маленькие отрицательные значения этой случайной величины. Поэтому обозначая , получаем формулу, которая в случае непрерывной случайной величины совпадает с формулой для :

На этом мы заканчиваем отступление и вводим уже непосредственно ту функцию, которая будет использоваться в дальнейшем.

Здесь используются еще два понятия:

1) — функция потерь, определяемая в разделе 2.

2) — величина премии, которую мы назначаем за риск.

В разделе 3 данной работы мы дадим строгие определения для вышеперечисленных понятий и опишем метод, для использования которого они вводятся.

Преимущество метода минимизации меры риска функции потерь заключается в том, что, во-первых, он является обобщением таких хорошо известных принципов, как байесовский метод и классический метод мер риска. Байесовский метод состоит в минимизации ожидаемых потерь и не использует понятия мер риска. Метод мер риска, наоборот, не использует понятия функции потерь и просто минимизирует меру разности между реальным значением риска и премии по нему. Предлагаемый нами метод, в свою очередь, использует оба этих понятия, поскольку минимизируется мера риска функции потерь. Второе преимущество метода с использованием состоит в том, что для некоторых функций потерь (например, для функции абсолютных потерь) он довольно прост в применении и интуитивно понятен.

Цель данной работы — показать обоснованность и математическую корректность метода минимизации меры риска функции потерь для случая, когда в качестве меры риска выбрано , а в качестве функции потерь выбрана функция абсолютных потерь, и обобщить полученный результат на случаи, когда в качестве функции потерь берется несимметричная функция абсолютных потерь, а также квадратичная функция. Кроме того, мы покажем, как применять этот метод на практике и сделаем некоторые выводы.

Наши рассуждения опираются на статью Antonio Heras, Beatriz Balbás and José Luis Vilar, “Conditional Tail Expectation and Premium Calculation”, которая в свою очередь развивает подход, разработанный в статье Rockafellar & Uryasev Optimization of Conditional Value at Risk (2000). Мы изложим технику, которую Rockafellar & Uryasev (2000) предложили для функции абсолютных потерь и применим ее к двум другим функциям потерь. Однако мы не претендуем на авторство конкретных утверждений и результатов, а также используемых понятий из теории вероятности и страхования, поэтому вся работа, проделанная лично нами, отдельно отмечена. К такой работе относятся:

1) Сравнительный анализ в разделе 1

2) Программа на Python и график в разделе 3

3) Проверка того, что в теореме 1 найденная авторами статьи [1] критическая точка доставляет именно минимум функции в разделе 4

4) Формулировка и доказательство теоремы 2 в разделе 5

5) Формулировка и доказательство теоремы 3 в разделе 6

6) Весь раздел 7

# **2. Необходимые сведения**

Предварительно объясним, на каких соображениях базируется принцип минимизации меры риска функции потерь. Сначала рассмотрим классический принцип мер риска. Для этого нам потребуется согласованная мера риска. Это понятие, как и понятие меры риска, является классическим в финансовой математике и широко применяется на практике. Для сравнения отметим, что самая известная мера риска — дисперсия — не является согласованной, поскольку она не удовлетворяет свойству инвариантности относительно сдвига.

**Согласованная мера** удовлетворяет следующим свойствам:

Субаддитивность:

Однородность для положительных констант:

Инвариантность относительно сдвига:

Монотонность:

Здесь — случайные величины, определенные на пространстве . Эти случайные величины далее будут называться “страховыми рисками” и интерпретироваться как потери.

Пусть — страховой риск, то есть неотрицательная случайная величина, обозначающая полную величину иска по данному полису за данный промежуток времени. В случаях, когда для подсчета премий используется мера риска , то предполагается, что премия совпадает с мерой риска:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Для обоснования предположения используется свойство инвариантности относительно сдвига. Действительно, после прибавления к риску премии, определенной в , его мера риска становится равной нулю, то есть вся неопределенность пропадает:

Подчеркнем, что в этой формуле константа именно вычитается из риска, поскольку символ обозначает потери по риску, то есть реальное прибавление константы к риску соответствует вычитанию этой константы в модели.

Теперь объясним, почему же вполне оправдано назначать премию, исходя из формулы . С одной стороны, если страховая компания взимает за риск премию (где определяется в ), то остаточный риск имеет положительную меру . Поскольку мера риска положительна, значит, риск все еще содержит неопределенность, значит, премию по этому риску нужно увеличить. Этот результат вполне логичен, ведь чем меньше премии, тем больше вероятность невыполнения страховой компанией своих обязательств. С другой стороны, в соответствии с нашей моделью, если компания взимает по риску премию , то никакого риска не останется, поскольку . Почему же тогда не сделать премию очень большой, ведь такой подход позволит страховой компании увеличить свою прибыль? Ответ на этот вопрос пришел из практики и состоит в следующем: слишком большие премии могут побудить многих полисодержателей отказаться от услуг страховой компании. Поэтому мы считаем (вслед за авторами статьи [1]), что в процессе назначения премий с использованием мер риска нужно принимать во внимание рискованность назначения как слишком маленьких, так и слишком больших премий.

Одним из возможных путей решения этой проблемы может быть метод, использующий одновременно и меры риска, и функции потерь. Прежде чем использовать этот метод, определим сначала **функцию потерь** для измерения ошибок упорядочивания. Эти ошибки упорядочивания возникают, когда премия не совпадает со значением случайной величины . Мы будем обозначать потери, соответствующие премии и значению как . Такая функция потерь каждой ошибке ставит в соответствие численное значение, обозначающее потери страховой компании в этом случае. Как только мы выбрали эту функцию потерь, следующим шагом мы находим страховую премию как решение задачи минимизации меры риска функции потерь.

# **3. Постановка задачи**

Как мы уже отмечали во вступлении, авторы статьи [1] вслед за авторами статьи [2] предлагают назначать в качестве премии за риск ту величину , которая минимизирует меру риска функции потерь. Прежде чем вычислять эту оптимальную премию, следует сначала выбрать как функцию потерь , так и меру риска . Как только они выбраны, следующим шагом мы минимизируем . То есть, оптимальная премия вычисляется как такое значение , которое минимизирует

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Убедимся, что такой подход является обобщением как байесовского подхода, так и обычного метода мер риска.

С одной стороны, если взять в качестве меры риска математическое ожидание (которое, кстати, является согласованной мерой), то превращается в следующее выражение:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В этом случае, оптимальная премия и есть байесовская премия, определяемая как величина, минимизирующая ожидаемые потери .

С другой стороны, оптимальная премия, полученная минимизацией , принимает вид , если мы выберем в качестве функции потерь (потому что мы рассматриваем только неотрицательные значения мер риска, и соответственно, ее минимальное значение есть ноль). Отметим, что такая функция потерь принимает положительные значения только если премия оказалась меньше, чем реальное значение . Далее будем называть такую премию недостаточной. В противном случае, при , премия называется избыточной, а потери превращаются в прибыль, то есть принимает отрицательные значения. В дальнейшем мы будем работать с более общей функцией потерь, которая считает потерями как недостаточную премию по риску (что вполне естественно), так и избыточную (что не вполне естественно, но по мнению авторов статьи [1], вполне разумно).

Мы будем изучать частный случай , когда в качестве меры риска выбирается (Conditional Tail Expectation). То есть мы (вслед за Rockafellar & Uryasev (2000)) предлагаем определять оптимальную премию как значение , минимизирующее потерь:

Для того, чтобы дать строгое определение , сначала дадим строгое определение хорошо известной величины (Value at Risk). Напомним, что в разделе 1 мы уже дали определения “уровня доверия”, или “доверительной вероятности” как такой вероятности, что события с равной или большей вероятностью мы считаем практически достоверными. Также напомним, что часто выбирается значение , но мы будем писать , чтобы подчеркнуть нашу возможность назначить любое разумное (на наш взгляд) из этого промежутка.

При выбранном уровне доверия , соответствующее определяется как минимальная действительная величина такая, что потери не превосходят с вероятностью не меньше . То есть больше, чем , потери могут быть только с пренебрежимо малой вероятностью .

Cоответствующее определяется как условное математическое ожидание потерь при условии, что потери превысили это значение (то есть ).

Выбор , а не в качестве меры предпочтителен, поскольку дает только минимальное значение “плохих” потерь, но ничего не говорит о том, как эти плохие потери распределены.

Например, если дано стандартное нормальное распределение и выбран уровень доверия , то — это будет (примерно равная 3.09) квантиль стандартного нормального распределения уровня . Действительно, по определению квантили

Все числа, меньшие , в качестве не подойдут — из-за строго монотонного возрастания функции распределения стандартного нормального распределения.

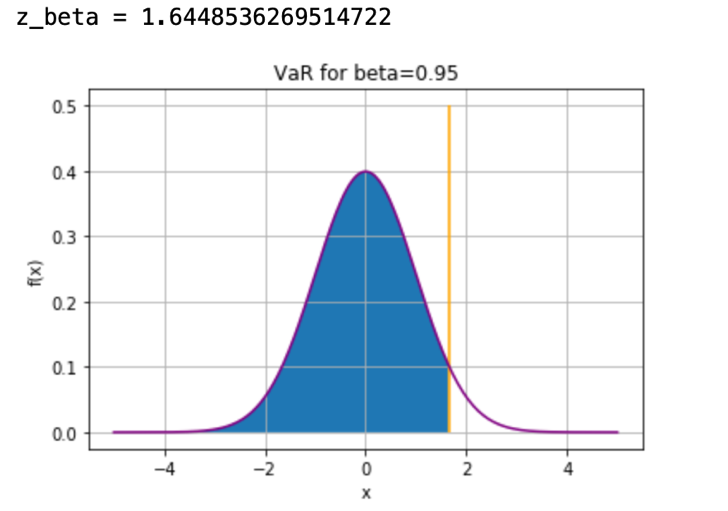
Далее, согласно данной на стр. 3 формуле:

Поэтому для стандартной нормальной величины имеем:

Для наглядности напишем программу на языке Python, которая вычислит нужную квантиль и отметит ее на графике плотности стандартного нормального распределения. Отметим, однако, что данные вычисления можно провести и в Microsoft Excel, используя встроенную функцию =НОРМ.СТ.ОБР(). Например, вводя в ячейку А2 число 0,5 и вызывая функцию =НОРМ.СТ.ОБР(), получим значение 0, а вызывая эту функцию от 0,9999 — получим 3,71901649;

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание



В нашей задаче, при заданных уровне доверия , премии и функции потерь , определяется как

определяется как

Опять напомним себе, что мы рассматриваем только непрерывные распределения, поэтому плотность существует.

При заданном уровне доверия и заданной функции потерь, мы определяем оптимальную премию как такое значение , которое минимизирует потерь, то есть . Может показаться, что минимизация является очень сложной задачей, но Rockafellar & Uryasev (2000) разработали оптимальную технику для вычисления и , которую мы и применим к нашей задаче. Она состоит в том, что вместо вычисления по формуле из определения, предлагается находить как минимальное значение некоторого специального выражения. На самом деле, Теорема 1 из Rockafellar & Uryasev (2000) подразумевает, что при заданной премии , соответствующее может быть подсчитано как минимальное значение следующей выпуклой и непрерывно дифференцируемой функции параметра :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Здесь

И оптимальное решение , в случае единственности, совпадает с .

Более того, если мы рассмотрим предыдущую функцию как функцию двух аргументов, и ,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

то Теорема 2 в работе Rockafellar & Uryasev (2000) показывает, что функция выпукла и непрерывно дифференцируема по обеим переменным, причем при минимизации этой функции мы получаем пару такую, что минимизирует , а (при условии единственности) дает соответствующее .

Теперь явно получим решение для случая, когда в качестве функции потерь берется функция абсолютных потерь . Далее мы рассмотрим эту же задачу для других функций потерь.

# **4. Случай симметричной функции абсолютных потерь**

Возьмем в качестве функции потерь и явно покажем, как минимизировать в этом случае. Эта теорема была доказана не нами, а авторами статьи [2], но далее мы применим предложенную ими технику для получения собственного результата, а именно теорем 2 и 3.

**Теорема 1** Если , то доставляет минимум функции тогда и только тогда, когда являются решениями системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Напомним, что — это функция распределения случайной величины .

**Доказательство:**

Нам нужно минимизировать функцию

Перепишем ее в виде (напомним, что при подынтегральное выражение будет равно нулю):

Сейчас мы исследуем каждый из интегралов по отдельности, потом проинтегрируем по частям и обозначим .

Сначала раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

Второе и третье слагаемые несложно выражаются через функцию распределения, причем из-за непрерывности распределения, а первое и четвертое слагаемые пока просто переписываем:

Теперь в первом слагаемом заносим под дифференциал и превращаем его в , в четвертом заносим под дифференциал и превращаем его в :

Интегрируем по частям первое и четвертое слагаемые:

Теперь подставляем пределы интегрирования и пользуемся тем, что , (ведь , а поскольку , то интеграл в левой части этого неравенства стремится к нулю):

Все четыре неинтегральные слагаемые взаимно сократились.

Наконец, обозначим и получим:

Поэтому функция приняла вид

Берем частные производные по и по и приравниваем их к нулю, ведь мы ищем критическую точку для функции :

Получаем:

Проверим, что удовлетворяющая этой системе уравнений критическая точка

доставляет именно минимум функции . Для этого составим матрицу вторых производных и проверим ее положительную определенность.

Тогда по критерию Сильвестра матрица вторых производных положительно определена, поскольку плотность — всегда больше нуля:

Теорема доказана.

**Замечание:** Решение системы ведет себя разумно: стремится к медиане при , а при : . Как следствие, если взять достаточно большой (то есть близкий к единице) уровень доверия , то мы получим премию с нагрузкой, поскольку оптимальная премия в какой-то момент превысит нетто-премию.

# **5. Случай несимметричной функции абсолютных потерь**

Теперь применим предложенную авторами статьи [2] технику для того, чтобы получить два наших основных результата, которые мы изложим в теоремах 2 и 3.

Рассмотрим такую несимметричную функцию потерь:

Минимизируем в этом случае.

**Теорема 2**

Если , то доставляет минимум функции тогда и только тогда, когда являются решениями системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Напомним, что — это функция распределения случайной величины .

**Доказательство:**

Нам нужно минимизировать функцию

Перепишем ее в виде (напомним, что при подынтегральное выражение будет равно нулю):

Сейчас мы исследуем каждый из интегралов по отдельности, потом проинтегрируем по частям и обозначим .

Сначала раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

Второе и третье слагаемые несложно выражаются через функцию распределения, а первое и четвертое слагаемые пока просто переписываем:

Теперь в первом слагаемом заносим под дифференциал и превращаем его в , в четвертом заносим под дифференциал и превращаем его в , а затем интегрируем по частям:

Теперь подставляем пределы интегрирования и пользуемся тем, что , (ведь , а поскольку , то интеграл в левой части этого неравенства стремится к нулю):

Видим, что неинтегральные слагаемые взаимно сократились.

Наконец, обозначим и получим:

Поэтому функция приняла вид

Берем частные производные по и по и приравниваем их к нулю, чтобы найти критическую точку, ведь мы ищем точку минимума:

Поэтому

Следовательно

Получаем:

Проверим, что удовлетворяющая этой системе уравнений критическая точка

доставляет именно минимум функции . Для этого составим матрицу вторых производных и проверим ее положительную определенность.

Тогда по критерию Сильвестра матрица вторых производных положительно определена, поскольку плотность — всегда больше нуля:

Последний переход следует из неравенства , которое в свою очередь следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

.

Теорема доказана.

# **6. Случай квадратичной функции потерь**

Возьмем в качестве функции потерь .

Опять применим предложенную авторами статьи [2] технику, чтобы получить наш второй основной результат, изложенный в теореме 3 ниже.

**Теорема 3**

Если , то доставляет минимум функции тогда и только тогда, когда являются решениями системы уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Доказательство:**

Возьмем в качестве функции потерь .

Тогда интеграл имеет вид:

Сначала раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

Третье и шестое слагаемые несложно выражаются через функцию распределения, а первое, второе, четвертое и шестое слагаемые интегрируем по частям:

Теперь подставляем пределы интегрирования и пользуемся тем, что , (ведь , а поскольку , то интеграл в левой части этого неравенства стремится к нулю):

Приведем подобные слагаемые и увидим, что первые два слагаемых равны нулю:

Поэтому остается только:

Таким образом, искомая функция приняла вид

Теперь для поиска минимума возьмем от нее частные производные (и потом приравняем их к нулю), ведь мы ищем критическую точку:

Приравнивая обе производные к нулю, получаем систему

Дифференцируем по первое уравнение:

Осталось проверить, что полученная критическая точка доставляет именно минимум. Для этого составим матрицу вторых производных и проверим ее положительную определенность.

Имеем:

Поэтому

Тогда по критерию Сильвестра матрица вторых производных положительно определена, поскольку плотность — всегда больше нуля, а

:

Теорема доказана.

# **7. Альтернативное применение результатов теоремы 1**

Вместо того, чтобы искать оптимальную премию, которая гарантирует минимальный риск невыполнения страховой компанией своих обязательств, мы можем считать премию заданной (например, величина премии может диктоваться условиями рынка), и вычислить риск, которому мы подвергаемся при назначении такой премии. Для этого вспомним, что при заданной премии , величина подсчитывается как минимальное значение функции

Более того, по теореме, доказанной Rockafellar & Uryasev (2000) оказывается, что величина , доставляющая минимум функции , совпадает с . То есть можно вычислять как решение системы

которая была найдена в теореме 1, когда мы искали оптимальную премию.

Покажем на примере, как по этой формуле вычислять величину риска , считая премию заданной.

Возьмем случайную величину , которая имеет экспоненциальное распределение с параметром , тогда:

,

.

Тогда система имеет вид

Отсюда

Возьмем

Тогда

Поэтому

Отсюда находим

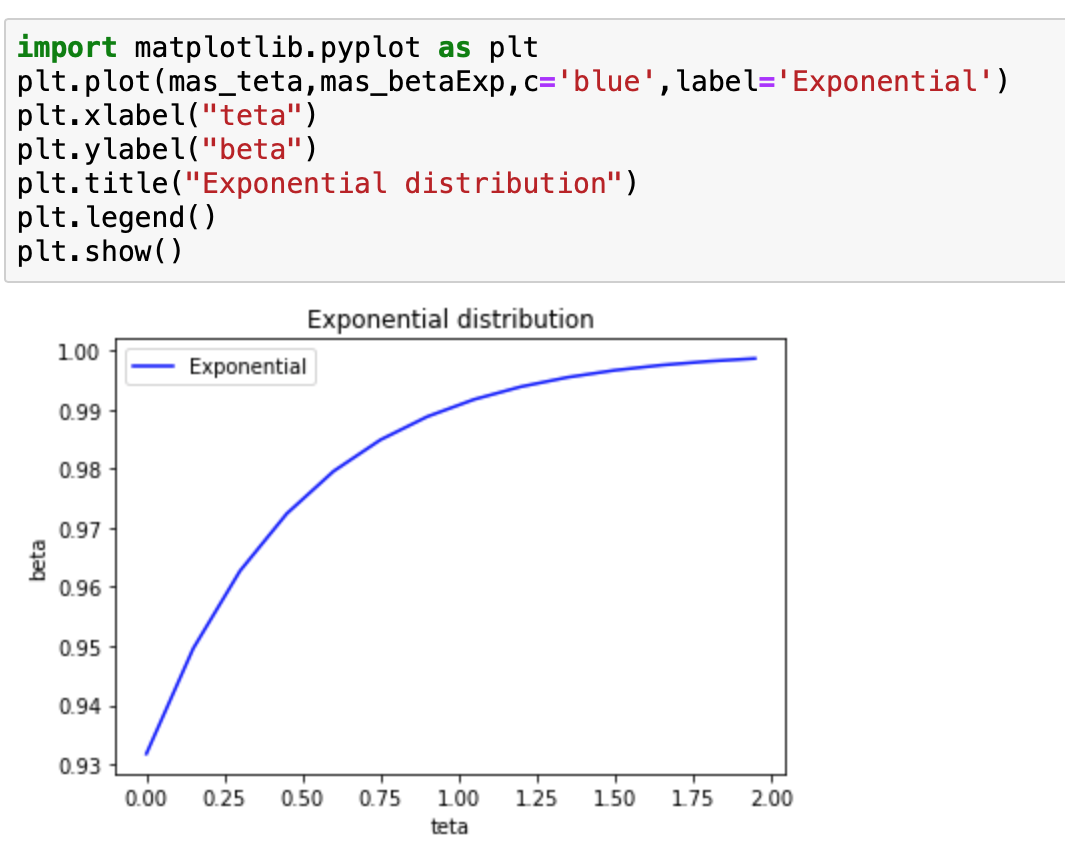
Мы будем искать риск, которому мы подвергаемся, считая величину премии заданной, и интерпретируя премии через надбавку , то есть . Данный принцип назначения премий является широко известным и называется Expected Value Premium Principle.

Для этого напишем программу на языке Python, которая будет вычислять и печатать список из значений в интервале с шагом 0.15 и соответствующих им значений .

*Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание*

Для наглядности нарисуем полученный график зависимости .



Теперь проделаем аналогичную операцию для распределения Парето с параметрами и убедимся, что значения для получаются примерно такими же, но немного меньше, то есть экспоненциальное распределение немного менее рискованное, чем распределение Парето.

Напомним, что случайная величина имеет распределение Парето с параметрами , если ее плотность дается формулой

Для среднего значения имеем

Тогда система имеет вид

У нас

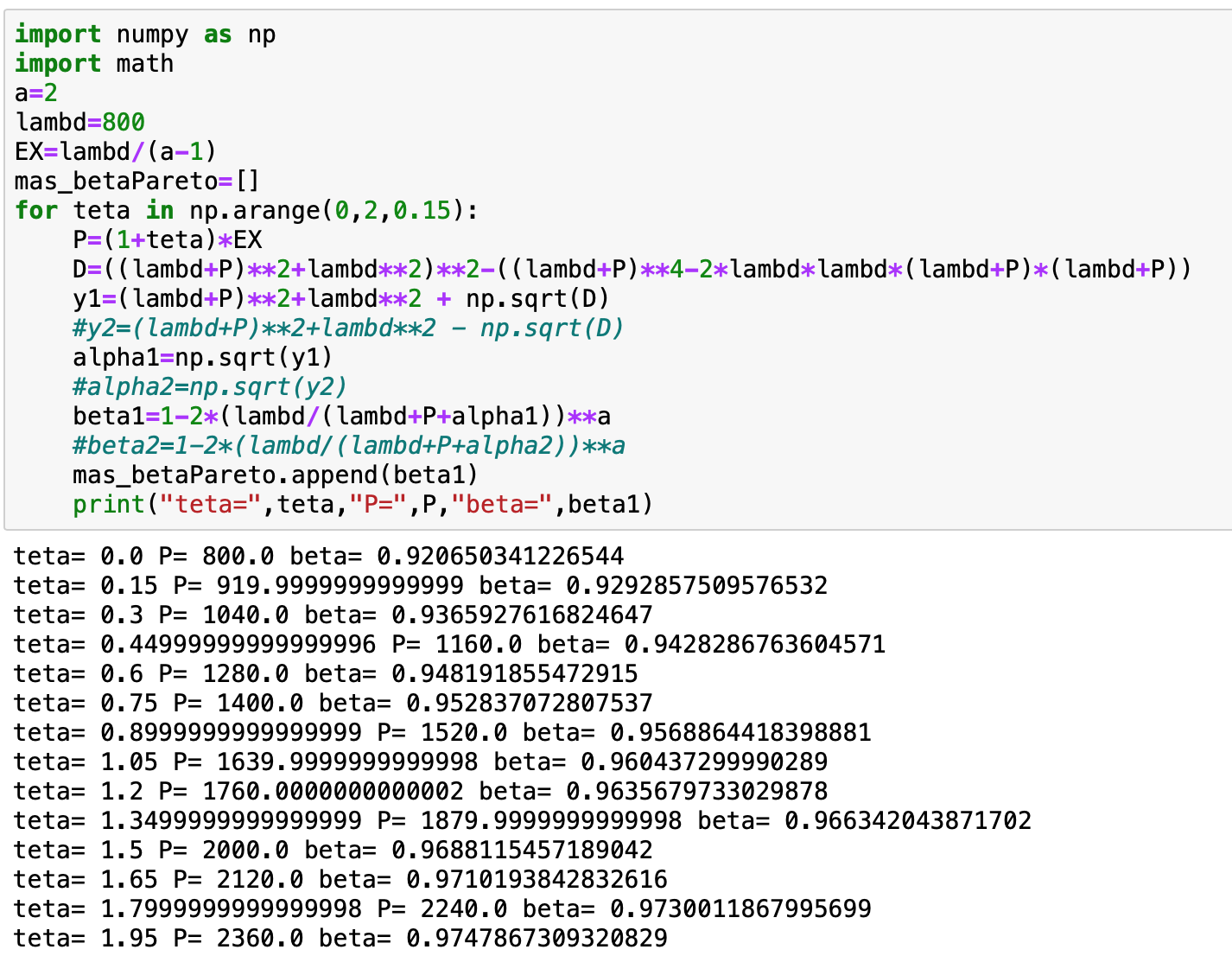
Отсюда

Обозначим и получим квадратное уравнение на :

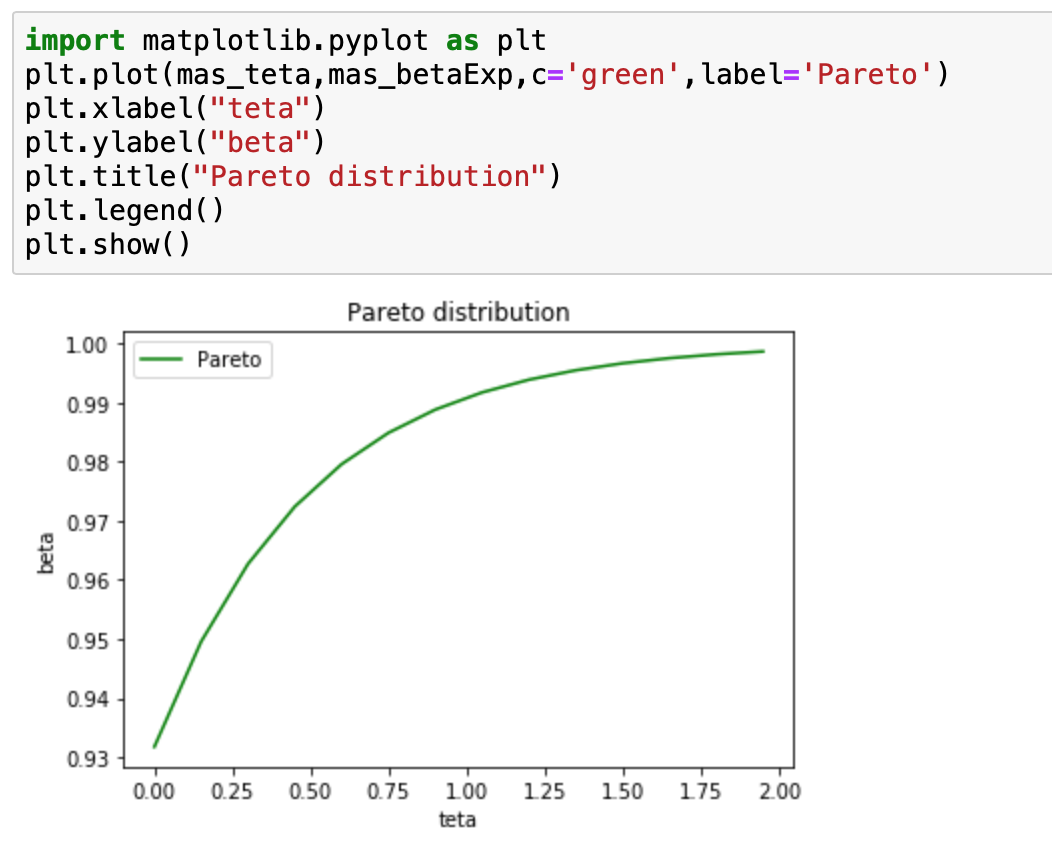
Нам подходит только то , которое с плюсом.

Тогда

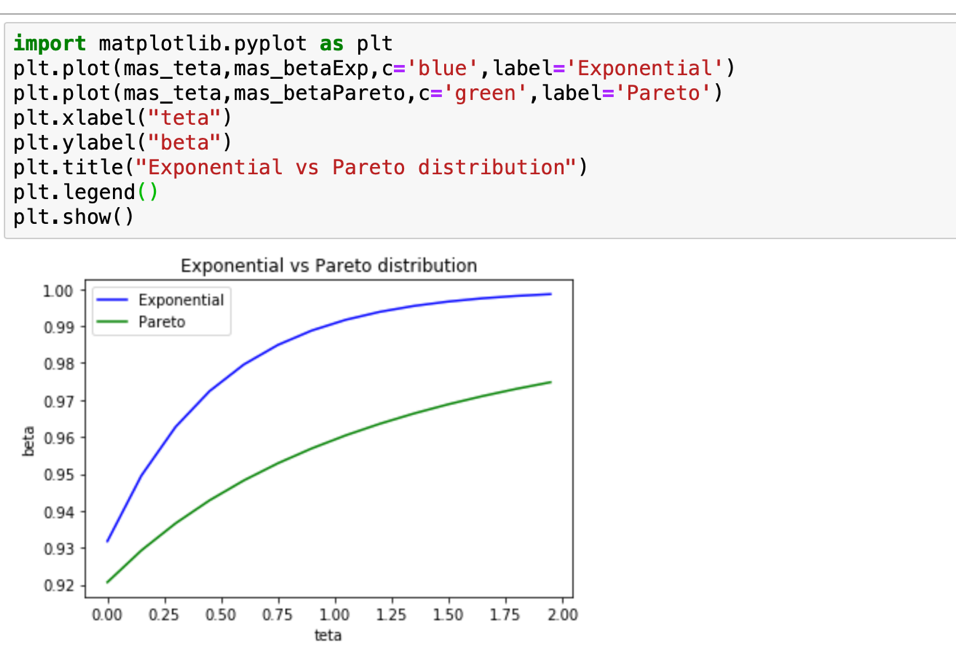
Составим таблицу из значений в интервале с шагом 0.5 и соответствующих им значений .

**

Для наглядности нарисуем график зависимости .



Теперь нарисуем оба графика на одном и том же чертеже.



Видим, что значения при одинаковых для распределения Парето получились немного меньше, чем для экспоненциального распределения. Отметим, что этот результат можно было получить и математически. А именно, доказать, что

всегда больше, чем

Для этого достаточно проверить, что функция

всегда меньше, чем функция

Отсюда видно, почему был выбран именно графический метод решения.

# **8. Выводы**

В данной работе мы в теории и на практике показали, как использовать такие меры риска, как и для решения задачи назначения премий. А именно, был тщательно исследован предложенный Rockafellar & Uryasev в 2000 году двухшаговый алгоритм, использующий одновременно и функции потерь, и меры риска. В соответствии с этим алгоритмом, для нахождения премии по риску необходимо сначала выбрать функцию потерь, которая будет отвечать за правильный учет избыточных и недостаточных премий. На втором шаге премия вычисляется как значение, минимизирующее меру риска функции потерь. В качестве меры риска мы взяли . Далее мы отдельно исследовали случаи, когда в качестве функции потерь берется симметричная и несимметричная функция абсолютных потерь, а также квадратичная функция потерь. В каждом из случаев была выведена точная формула, пригодная для практических расчетов. Кроме того, в разделе 7 мы показали еще одно практическое применение полученных теоретических результатов: вычислили риск, которому подвергается страховая компания, назначая премию, величина которой диктуется рынком. Были рассмотрены и сравнены случаи экспоненциального распределения и распределения Парето.

# **9. Список литературы**

1) Antonio Heras, Beatriz Balbás and José Luis Vilar. Conditional Tail Expectation and Premium Calculation, ASTIN Bulletin, Volume 42, Issue 01, May 2012, pp 325 - 342

2) Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value at Risk, Journal of Risk 2, 21-41.

3) Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2002) Conditional Value at Risk for General Loss Distributions, Journal of Banking and Finance 26, 1443-1471.

4) S. Uryasev, S. Sarykalin, G. Serraino (2008), Value-at\_Risk vs Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization