5.1 Аннотация

В этой главе мы выводим выражения для оценки и анализа пожизненных рент, выплата которых обусловлена наступлением определенного события. Мы рассматриваем оценки страховых выплат для различных частот выплат, а также мы соотносим оценку выплат по ренте с оценкой связанных с ней страховых выплат.

Мы рассматриваем, как вычислить функции оценки ренты. Если доступна полная информация модели выживания, то вычисления будут точными для выплат, производящихся в дискретные моменты времени, и сколь угодно точными (используя численное интегрирование) для непрерывных выплат. Там, где мы вычисляет величины выплат, производимых чаще, чем раз в год (например, раз в месяц или неделю), используя только таблицу смертности с целочисленными годами, что является очень частой ситуацией, то тогда требуются приближения. Мы выводим некоторые часто используемые приближения, используя предположение о равномерном распределении смертей и формулу Вулхауса, а также численно исследуем их точность.

5.2 Введение

Мы используем термин “пожизненная рента” по отношению к серии платежей человеком (или человеку) до тех пор, пока человек жив на дату платежа. Обычно выплаты производятся с равными промежутками, и чаще всего выплаты равны. Оценка рент важна, поскольку ренты возникают при расчете премий (Глава 6), полисов (Глава 7) и пенсионных выплат (Глава 9). Текущая стоимость пожизненной ренты – это случайная величина, поскольку она зависит от остаточного времени жизни; однако, мы будем использовать некоторые результаты и обозначения из оценок детерминированных рент, которые не содержат никакой неопределенности, поэтому мы начнем с напоминания про детерминированные ренты.

5.3 Напоминание про детерминированные ренты

Напомним, что для целого n ( формула 5.1) обозначает текущую стоимость упреждающей детерминированной ренты величины 1, выплачиваемой на протяжении n лет. Далее, (формула) обозначает текущую стоимость запаздывающей детерминированной ренты величины 1, выплачиваемой на протяжении n лет. В-третьих, для любого n > 0 (формула 5.2) обозначает текущую стоимость непрерывной детерминированной ренты, выплачиваемой с интенсивностью 1 на протяжении n лет.

Когда выплаты величины 1 в год производятся упреждающе каждую 1/m часть года на протяжении n лет, то текущая стоимость равна (формула), а когда выплаты производятся с запаздыванием – то формула 5.3.

В этих обозначениях для рент, выплачиваемых m раз в год, мы считаем что n – целое число, делящееся на m.

5.4 Ежегодные пожизненные ренты

Ежегодная пожизненная рента платится каждый год, при условии что человек (аннуитент) жив на дату платежа. Если рента должна выплачиваться на протяжении всей жизни аннуитента, то такая рента называется пожизненной. Если существует максимальный возраст, после которого рента перестает выплачиваться, то рента называется временной.

Ежегодные ренты встречаются довольно редко. Чаще мы встретим ренты, выплачивающиеся раз в месяц или даже раз в неделю. Тем не менее, ежегодная рента все же имеет важное значение в ситуации, когда у нас нет полной информации о смертности между целыми значениями возрастов, например, если мы работаем с таблицами смертности, в которых указаны только целые значения возрастов. Кроме того, разработка функций оценки для ежегодных рент является хорошим началом перед рассмотрением более сложных схем выплат.

Как и в случае со страховыми функциями, в первую мы интересуемся матожиданием денежного потока , и определяем все текущие стоимости в терминах случайных величин остаточного времени жизни из глав 2 и 4, в первую очередь это T\_x, K\_x и K\_x^(m).

5.4.1 Пожизненная упреждающая рента

Сначала рассмотрим ренту величины 1, выплачиваемую в начале каждого года на протяжении всей жизни человека, которому сейчас x лет. Это пожизненная рента с упрежающими выплатами. Первая выплата делается незамедлительно, вторая – через год после текущего момента (при условии, что (x) жив в этот момент), и выплаты следуют с интервалом в один год, при условии, что (x) жив на момент очередной выплаты. На рисунке 5.1 мы показываем выплаты и соответствующие вероятности и функции дисконтирования на временной диаграмме.

Мы заметим, что если (x) должен умереть в возрасте между x+k и x+k+1 для некоторого положительного целого числа k, то выплаты ренты должны быть произведены в моменты 0,1,2 … k , всего k+1 выплата. Мы определяли K\_x таким образом, что смерть (x) происходит между x+K\_x и x+K\_x +1 , поэтому число выплат равно K\_x +1 , включая первоначальную выплату. Это значит, что для k=0,1,2 … текущая стоимость ренты равна (формула) если K\_x =k. Таким образом, используя равенство 5.1, текущая стоимость случайной величины , отвечающей этой серии платежей , может быть записана как (формула). Есть три полезных способа вывести формулы для подсчета матожидания этой случайной величины.

Первый способ: матожидание и дисперсия могут быть найдены из матожидания и дисперсии величины v^(K\_x+1), которые были выведены в разделе 4.4.2. Для матожидания величины Y=a\_x мы имеем формулы 5.4

Этот подход очень полезен, и он сразу дает нам и дисперсию величины Y (формула 5.5)

Второй способ: мы можем использовать подход индикаторных функций из раздела 4.6. Условием выплаты в момент k является факт того, что (x) жив в момент x+k, то есть T\_x >k.

Текущая стоимость случайной величины Y может быть выражена как формула 5.6 и поэтому матожидание ренты равно сумме матожиданий отдельных слагаемых. Вспомним, что (много формул)

Это очень полезное выражение для a\_x. Однако этот подход не ведет к полезным формулам для дисперсии и высших моментов для Y. Это происходит потому, что отдельные слагаемые в формуле 5.6 являются зависимыми случайными величинами.

Третий способ: мы можем использовать функцию распределения величины K\_x, и поскольку P(K\_x =k ) = k|q\_x, то формула 5.8

Эта формула используется реже, чем выражения 5.4 и 5.7. Разница между выражениями 5.7 и 5.8 в том, что в выражении 5.7 суммирование ведется по возможным датам платежа, а в выражении 5.8 – по возможным датам смерти.

Пример 5.1 – много формул

5.4.2 Временная упреждающая рента

Теперь предположим, что мы хотим оценить упреждающую временную ренту, выплачивающую сумму 1 ежегодно. Мы предполагаем, что рента платится ежегодно человеку, которому сейчас x лет, максимум n лет. То есть выплаты производятся в моменты k=0,1,2, … n-1 при условии, что (x) дожил до возраста x+k. Текущая стоимость этой ренты Y есть формула.

Матожидание этой ренты обозначается как

Мы уже встречались со случайной величиной раньше, где выводилось матожидание Поэтому матожидание этой ренты равно

Временная диаграмма денежного потока временной упреждающей ренты показана на рисунке 5.2. Отметим, что поскольку выплаты делаются с упреждением, то в момент n не делается никакой выплаты.

Используя рисунок 5.2 и суммируя матожидания отдельных слагаемых, получим

Кроме того, мы можем записать матожидание как , используя выражение 5.8. Второе слагаемой возникает из определения Y – то есть, если человек будет жив на протяжении всех n лет, то получится обычная n-летняя рента.

5.4.3 Пожизненная запаздывающая рента

Теперь рассмотрим пожизненную запаздывающую ренту, выплачивающую сумму 1 раз в конце каждого года, при условии, что (x) жив на момент платежа. Мы используеем термин “ запаздывающая рента” для обозначения ренты, в соответствии с которой платежи производятся в конце платежных периодов, а не в начале. Актуарные обозначения для матожидания этой ренты есть a\_x , а временная диаграмма денежного потока показана на рисунке 5.3

Пусть Y^\* обозначает текущую стоимость случайной величины, отвечающей этой ренте. Используя подход индикаторных функций , имеем

Мы видим из этого выражения и из диаграммы, что разница в текущей стоимости упреждающей и запаздывающей рент – просто в первом платеже в момент t=0, который в случае упреждающей ренты точно происходит.

Поэтому, если Y – это случайная величина, равная текущей стоимости пожизненной упреждающей ренты, а Y^\* - это это случайная величина, равная текущей стоимости пожизненной запаздывающей ренты, мы имеем Y^\* = Y-1, то есть формулы

5.4.4 Временная запаздывающая рента

Матожидание временной запаздывающей ренты , выплачивающей сумму 1 в конце каждого года, обозначается как . В соответствии с этой рентой платежи величины 1 делаются в моменты k=1,2 … n при условии, что человек жив.

Случайная величина, равная текущей стоимости – это

И временная диаграмма денежного потока дана на рис. 5.4

Суммируя матожидания отдельных слагаемых, получаем

Разница между матожиданием временных упреждающей и запаздывающей рент обнаруживается при вычитании выражений 5.10 и 5.12

Эта разница возникает из-за разницы момента первой выплаты упреждающей ренты и момента последней выплаты запаздывающей ренты.

5.5 Непрерывные ренты

5.5.1 Пожизненные непрерывные ренты

На практике обычно ренты платятся с дискретными интервалами, но если интервалы расположены очень близко, например, с разницей в неделю, то удобно считать, что выплаты производятся непрерывно. Рассмотрим теперь ренту, которая платит непрерывно сумму 1 в течение года, пока (x) жив. Если бы рента платилась раз в неделю (мы считаем, что в году 52 недели), то каждый платеж равнялся бы 1/52. Если бы выплаты производились каждый день, то выплаты бы равнялись 1/365. Аналогично, для на протяжении этого промежутка.

Матожидание обозначается a-x . Соответствующая случайная величина – это Y, где Y

По аналогии с ежегодной упреждающей рентой, мы можем вывести формулы для матожидания этой ренты тремя различными способами.

Первый способ: используем формулу для детерминированной ренты

Используя это определение для случайной величины Y, мы можем вывести формулу для дисперсии текущей стоимости непрерывной ренты с непрерывной страховой выплатой

Второй способ заключается в использовании суммы (здесь-интеграла) произведений сумм, выплачиваемых в каждый в бесконечно, коэффициента дисконтирования для этого периода и вероятности, что этот платеж будет совершен.

Мы отметим, что эта формула для матожидания может быть выведена, используя индикаторы, выражая текущую стоимость как

Вывод формулы 5.15 проиллюстрирован на рис. 5.5. Мы показываем, какой вклад в интеграл дает условный платеж ренты, сделанный в бесконечно малый промежуток времени (t,t+dt). Интервал настолько мал, что можно считать платеж сделанным точно в момент t.

Наконец, мы можем сразу выписать матожидание ренты через распределение T\_x

Мы можем оценить это, используя интегрирование по частям и заметив, что при дифференцировании получится

Когда delta=0, мы получим ожидаемую полную продолжительность жизни.

5.5.2 Временная непрерывная рента

Случайная величина, соответствующая текущей стоимости временной непрерывной ренты, имеет матожидание, обозначаемое через

Используя результаты для накопительных страховых функций из раздела 4.4.7, имеем

Используя подход индикаторных функций, имеем

А беря матожидание от случайной величины-текущей стоимости, имеем

Один из способов понять разницу между вторым и третьим способами- это заметить, что во втором способе мы интегрируем по возможным датам платежа, а в третьем – по возможным датам смерти. Третья формула используется реже всего.

5.6 Ренты, выплачиваемые m раз в год

5.6.1 Введение

Для премий, рент и пенсий случай выплат 1 раз в год является редким. Премии чаще всего платятся раз в месяц, квартал или даже неделю. Пенсии и покупные ренты платятся в соответствии с графиком выплат зарплат, то есть часто встречаются выплаты, производимые раз в месяц или неделю. Мы можем определить текущую стоимость ренты, выплачиваемой m раз в год, в терминах случайной величины K\_x^(m). Напомним, что K\_x – это остаточное время жизни, округленное до целой 1/m части года с недостатком.

Также мы будем пользоваться формулой для текущей стоимости детерминированной ренты, выплачиваемой m раз в год. Например, это текущая стоимость ренты, выплачивающей за год сумму 1 m равными платежами на протяжении n лет, причем первый платеж происходит в момент t=0, а последний – в момент n-1/m. Важно помнить, что это годовой множитель, поэтому при рассмотрении рент с другими выплатами, надо это домножать на сумму выплат новой ренты за год.

Например, мы хотим рассмотреть ренту, выплачивающую 12000 в год ежемесячными платежами до достижения человеком возраста 60 лет. Ежемесячная выплата равна 1000. Соответствующее остаточное время жизни равно K\_60^(12). Если K\_60^(12)=0, то человек умер в первый же месяц, и единственная выплата была совершена в момент t=0 и текущая стоимость равна

Если K\_60^(12)=1/12 , то человек умер во второй месяц, и было совершено 2 платежа каждый по 1000, и коэффициент домножения равен

Продолжая так, мы видим, что текущая стоимость ренты может быть записана как

5.6.2 Пожизненные ренты, выплачиваемые m раз в год

Рассмотрим сначала ренту, выплачивающую за год сумму 1, равными платежами величины в начале каждого месяца, пока человек жив. На рис. 5.6 показан денежный поток этой ренты.

Случайная величина, соответствующая текущей стоимости этой ренты, равна

Матожидание этой ренты обозначается как и дается формулой

Используя подход с использованием индикаторных функций, мы получаем

Для запаздывающих рент, выплачиваемых m раз в год, мы можем использовать сравнение с упреждающей рентой. Единственным отличием является первый платеж в размере 1/m, поэтому матожидание запаздывающей ренты, выплачивающей ежемесячно сумму 1/m, равно

5.6.2 Временные ренты, выплачиваемые m раз в год

Мы можем расширить предыдущий вывод на случай, когда сумма 1/m выплачивается m раз в год максимум n лет. Рассмотрим теперь ренту, выплачивающую ежегодно сумму 1 равными платежами m раз в год, пока человек жив, максимум n лет. Размеры выплат, соответствующие вероятности и коэффициенты дисконтирования показаны на рис. 5.7.

Случайная величина, соответствующая текущей стоимости этой ренты равна

Матожидание этой ренты равно и обозначается

Используя подход индикаторных функций, мы получаем

Для запаздывающей ренты, выплачиваемой m раз в год, отличие от такой же упреждающей ренты состоит в первой выплате упреждающей ренты с матожиданием 1/m и последней выплате запаздывающей ренты с матожиданием , поэтому

Это аналогично результату 5.3 для детерминированных рент. Далее, положив m=1 в выражениях 5.19 и 5.21, мы получим выражений 5.7 и 5.10. А устремив m к бесконечности, получим выражения 5.15 и 5.17 для непрерывных рент

Мы можем вывести формулы для других видов рент, выплачиваемых m раз в год, а также мы можем найти моменты более высоких порядков для них, как мы делали для ежегодных рент.