6.1 Краткое изложение

В этой главе мы обсуждаем принципы назначения премий для страховых полисов и рент. Сначала мы напомним, что мы подразумеваем под понятиями премия, нетто-премия и брутто-премия. Потом мы вводим случайную величину, отвечающую за текущую стоимость будущих потерь. Мы определяем принцип эквивалентности для премий, а потом показываем, как этот принцип может быть применен для назначения премий для разных типов полисов. Мы рассматриваем, как можно использовать случайную величину, отвечающую за текущую стоимость будущих потерь, чтобы понять, когда контракт становится из убыточного прибыльным или наоборот. Далее мы вводим еще один принцип назначения премий, называемый принципом квантилей, и показываем, как можно назначить премию, используя среднее и дисперсию случайной величины, отвечающей за текущую стоимость будущих потерь. В конце мы обсуждаем, как назначать премию, если застрахованный объект подвержен повышенному риску.

6.2 Предварительные сведения

Страховой полис- это финансовое соглашение между страховой компанией и держателем полиса. Страховая компания обязуется обеспечить некоторые страховые выплаты, например, страховую сумму при смерти держателя полиса внутри промежутка действия договора страхования, при условии, что держатель полиса обязуется платить страховой компании премии, чтобы обеспечить страховую выплату. Кроме того, премии должны возмещать страховой компании убытки, связанные с обеспечением полиса.

Принцип назначения премии не обязательно подразумевает возможность убытков для компании. В таком случае мы говорим о нетто-премии, или математической премии. Если же принцип назначения премии явно подразумевает возможность убытков для компании, то премия называется брутто-премией, или офисной ремией.

Премия может быть одиночной суммой, вносимой держателем премии, или премия может быть серией платежей, вносимых раз в год, квартал, месяц или неделю. Ежемесячные платежи встречаются очень часто, потому что многие люди получают зарплату раз в месяц, и им удобно производить выплаты с той же частотой, что и получение дохода.

Регулярные премии часто имеют равные платежи, но это не обязательно.

Отличительной чертой любого страхового полиса является тот факт, что все премии выплачиваются заранее, причем первая премия платится в момент покупки полиса. Чтобы понять, почему это необходимо, предположим, что возможно купить полис пожизненного страхования с ежегодными премиями, причем первая премия выплачивается в конце первого года после покупки полиса. В таком случае, человек может купить такой полис, а потом разорвать договор в конце первого года, не выплатив полагающуюся премию. Тогда этот человек будет иметь годовую страховку, которая ему ничего не стоит.

Регулярные премии по полиса страхования одной жизни прекращают поступать со смертью держателя полиса. Период выплат премий для полиса-это максимальный период времени, на протяжении которого платятся премии. Период выплат премий может совпадать с длительностью полиса, но может быть и короче. Если мы рассмотрим полис пожизненного страхования, то часто премии, обеспечивающие посмертную страховую выплату, платятся до достижения человеком определенного возраста – например, 65 лет, когда человек выйдет на пенсию, или 80 лет, когда реальный доход человека может уменьшиться.

Как мы уже отмечали в главе 1, премии платятся, чтобы обеспечить страховую выплату ренты или страхового полиса. Отложенные ренты могут покупаться одним платежом в начале отложенного периода, или регулярными премиями на протяжении отложенного периода. Запаздывающие ренты всегда покупаются одним платежом. Например, человек, которому 45 лет, может обеспечить себе доход на пенсии, платя ежегодные премии на протяжении 20 лет, до достижения 65-летия. Или человек, которому 65 лет, может обеспечить себе ежегодную ренту от страховой компании, внеся единовременный платеж.

Для традиционных полисов, основным принципом назначения нетто и брутто- премий является принцип эквивалентности, и в этой главе мы детально разберем его применение. Однако есть и другие принципы назначения премий, и мы обсудим один из них, принцип квантилей портфеля.

Более современный подход, который часто используется для нетрадиционных полисов, заключается в том, чтобы рассмотреть денежный поток от портфеля и назначить премию так, чтобы она удовлетворяла некому специальному критерию. Этот подход обсуждается в главе 11.

6.3 Предположения

Как и в главе 4, если не сказано иное, в численных примерах этой главы мы используем стандартный набор допущений о смертности и ставках. Мы используем модель с двухгодичным отбором из примера 3.13 с годовой эффективной процентной ставкой 5%. Напомним, что модель выживания определяется так

Выборочная и окончательная таблицы, с целыми годами, для этой модели приведены в таблице 3.7, а значения A\_x при годовой эффективной процентной ставке 5% приведены ы в таблице 4.1. Мы называем эту модель Стандартной моделью выживания с отбором.

Пример 6.1 Используйте стандартную модель выживания, описанную выше, с годовой процентной ставкой 5%, чтобы получить таблицу, показывающую величины Предполагается, что q\_131=1

Решение: вычисление вероятностей выживания для этой модели обсуждалось в примере 3.13. Поскольку мы предполагаем, что q\_131=1, то a\_131=1. Величины ренты могут теперь быть вычислены рекурсивно, используя

6.4 Текущая стоимость будущих потерь

Денежный поток для традиционного контракта страхования жизни состоит из выплат по договору страхования или ренты (и связанных расходов) и дохода от премий. Оба обычно жизне-зависимые, то есть денежный поток доходов и выплат зависит от остаточного времени жизни держателя полиса, если только контракт не покупается единовременной премией, и в этом случае нет никакой неопределенности относительно дохода от премий. Поэтому мы можем моделировать будущие выплаты и в меньшей степени будущий доход случайной величиной, которая обозначает текущую стоимость будущих потерь. Если мы исключаем расходы, то мы называем это будущими нетто-потерями, и обозначаем L\_0^n. Если расходы включаются, то премии называются брутто-премиями, а случайная величина называется будущими брутто-потерями, и обозначается L\_0^g. Другими словами,

L\_0^n = PV выплат – PV дохода от нетто-премий

L\_0^g = PV выплат + PV расходов – PVдохода от брутто-премий

В случае, если значение очевидно из контекста, мы опускаем буквы n и g.

Пример 6.2 Страховщик заключает с 60-летним человеком договор пожизненного страхования, с условием выплаты суммы S немедленно после смерти. Премии платятся в начале каждого года, до достижения 80-летия или смерти, Нетто-премия равна P. Выпишите величину L\_0^n будущих нетто-потерь для этого контракта в терминах случайной величины длительности жизни этого человека.

Решение: из главы 4 мы знаем, что текущая стоимость страховых выплат равна Sv^T[60], а из главы 5 мы знаем, что текущая стоимость дохода равна , поэтому

Поскольку оба выражения зависят только от величины продолжительности жизни этого человека, то они однозначно определены.

Отметим, что поскольку премии платятся с упреждением, то условие того, что премии платятся в начале каждого года, до достижения 80-летия или смерти, означает, что последняя возможная выплата производится держателем полиса в свой 79-й день рождения, а в 80 никакой премии уже не вносится.

Располагая надлежащей моделью выживания, а предположения о будущих процентных ставках и будущих брутто-премиях и расходах, страховщик может найти распределение текущей стоимости будущих потерь. Распределение может использоваться для нахождения надлежащих премий для заданных величин выплат, или подходящей выплаты для заданных премий. Чтобы это сделать, страховщик должен использовать принцип назначения премий. Это метод нахождения подходящей премии, используя заданное распределение потерь. В этой главе мы обсуждаем два принципа.

6.5 Принцип эквивалентности

6.5.1 Нетто-премии

Для нетто-премий мы принимаем во внимание только страховые выплаты. То есть расходы не включаются в расчет нетто-премий. Страховая выплата может быть посмертной выплатой, выплатой по дожитию или их комбинацией.

Мы начнем с принципа эквивалентности. В соответствии с ним, нетто-премии назначаются таким образом, чтобы в момент заключения контракта матожидание будущих потерь было равно нулю. Это значит, что E[L\_0^n]=0, что влечет что E[PV выплат – PV нетто-премий]=0

То есть в соответствии с принципом эквивалентности, матожидание страховых выплат=матожиданию нетто-премий.

Пример 6.3 Рассмотрим проданный x-летнему человеку договор накопительного страхования на n лет со стразовой суммой S, выплачиваемой или при смерти, или при окончании договора. Премии в размере P платятся ежегодно на протяжении действия договора страхования. Выведите формулы в терминах S, P и стандартных актуарныз функций для

1. Величины будущих нетто-потерь L\_0^n
2. Среднего значения L\_0^n
3. Дисперсии L\_0^n
4. Ежегодной нетто-премии по контракту

Решение: a) величина будущих потерь равна

b) среднее значение L\_0^n

с) Обобщение предыдущего выражения на L\_0^n дает

d) Приравнивая матожидания премий и выплат, получаем значение нетто-премии

Более того, используя формулу (6.2) и вспоминая, что , мы видим, что решение может быть записано в виде, то есть для вычисления P при заданном значении S требуются только актуарные функции.

Пример 6.4 Страховщик продает x-летнему человеку регулярную запаздывающую ренту. Премии платятся ежемесячно с запаздывнием на протяжении всего периода. Страховая выплата размера X в год платятся ежемесячно с упреждением с возраста x+n до момента смерти человека (x).

1. Выпишите величину будущих нетто-премий в терминах величины продолжительности жизни (X)
2. Выведите формулу для месячной нетто-премии
3. Предположим, что контракт подразумевает посмертную выплату в размере S. Выпишите величину будущих потерь и найдите месячную премию.

Решение:

1. Обозначим ежемесячную премию за P, тогда премия за год равна 12P. Тогда
2. Матожидание страховых выплат равно, а матожидание дохода от премий равно. Приравнивая эти матожидания, мы получаем уравнение, из которого P равно
3. Страховые выплаты имеют то же матожидание, что и в b); посмертные выплаты – это временная страховая выплата с матожиданием, поэтому теперь уравнение на P дает

Пример 6.4 показывает, что выражение для величины будущих потерь может быть довольно сложным. Обычно вычисление премий не требует нахождения величины будущих потерь. Мы можем сразу применять принцип эквивалентности и приравнивать значения матожидания страховых выплат и дохода от премий для нахождения нетто-премий.

Пример 6.5 Рассмотрим договор накопительного страхования со страховой суммой $100000, проданный 45-летнему человеку, сроком 20 лет, причем в случае смерти выплата производится в конце года смерти. Используя стандартную модель выживания и процентную ставку 5%, вычислите величину годовой нетто-премии, выплачиваемой a) раз в год b) раз в кварта c) раз в месяц и прокомментируйте эти значения.

Решение: пусть P обозначает величину премий, выплаченных за год. Тогда матожидание дохода от премий равно , а матожидание страховых выплат

Значения величин могут быть вычислены либо напрямую, либо с использованием одного из приближений из раздела 5.11. Отметим, что приближение W3\* из этого раздела не может быть использовано, потому что p\_[x]-1 не имеет смысла, поэтому мы не можем оценить mu\_45 из таблицы смертиности, составленной в целых годах. Таблица 6.2 показывает значения , полученные c использованием предаоложения о равномерной смертности и формулы Вулхауса. Порядок этих премий при m=1,4,12 отражает факт упорядочивания матожиданий рент, выплачиваемых с частотой 1/m, рассмотренных в главе 5. В этом примере формула Вулхауса дает очень хорошее приближение, в то время как предположение о равномерном распределени смертности дает достаточно точное значение премии.

6.6 Вычисление брутто-премии

Когда мы вычисляем брутто-премию для страхового полиса или ренты, мы принимаем во внимание сопутствующие расходы страховщика. Есть три главных вида расходов, связанных с полисами – изначальные расходы, расходы на продление и расходы на завершение проекта.

Страховщик навлекает на себя изначальные расходы, когда полис выпускается, и когда мы считаем брутто-премию, принято предполагать, что страховщик несет эти расходы именно в тот момент, когда платится первая премия, хотя на практике эти расходы возникают немного ранее этого события. Есть два главных типа начальных расходов – комиссия агентам за факт продажи полиса и андеррайтинговые расходы. Комиссия обычно платится агенту в форме высокого процента от премий первого года плюс гораздо более низких процентов от последующих премий, которые платятся при по тому же графику, что и поступают премии. Андеррайтинговые расходы могут разниться в зависимости от посмертной выплаты. Например, страховщик может потребовать более строгое медицинское обследование от человека, который хочет получить $10 посмертно, по сравнению с человеком, который хочет $10000.

Расходы по продлению обычно возникают каждый раз, когда вносится премия, а в случае ренты они возникают в момент выплаты ренты. Эти расходы возникают разными способами. Процесс обработки продления и выплат ренты требует времени персонала и инвестиционных расходов. Расходы по продления также покрывают текущие фиксиованные убытки, такие как зарплаты персоналу, рента за помещение, а также специфические траты, такие как ежегодные уведомления держателям полисов об из полисах.

Начальные и продолжающие расходы могут быть пропорциональны премиям, пропорциональны страховым выплатам, или могут быть “за полис”, то есть величина расходов фиксированная для всех полисов, и не зависит от величины контракта. Часто предполагается, что продолжающие расходы за полис возрастают пропорционально длительности полиса, чтобы учесть влияние инфляции.

Расходы по завершению возникают, когда действие полиса истекает, часто по причине смерти держателя полиса (или аннуитента) или окончания срока временного страхования или накопительного договора. Обычно эти расходы малы, и по большей части связаны с бумажной работой, требующейся для завершения проекта и выплаты страховой суммы. При вычислении брутто-премий, обычно не делается специфических допущений для завершающих расходов. Если допущения делаются, то обычно это пропорциональность величине страховой премии.

На практике, выделение разных расходов, связанных с ведением страховой компаниии, - дело сложное, и в этой главе мы просто предполагаем, что все расходы известны.

Принцип эквивалентности, примененный к брутто-премиям, утверждает, что матожидание будущих брутто-расходов должно быть нулем. Это значит, что E[L\_o^g]=0; то есть матожидание страховых выплат + матожидание расходов – матожидание брутто-премий = 0. Другими словами, согласно принципу эквивалентности, матожидание страховых выплат + матожидание расходов = матожиданию дохода от премий.

Мы завершаем этот раздел тремя примерами, в каждом из которых мы применям принцип эквивалентности для нахождения премии.

Пример 6.6 Страховщик продает 30-летнему человеку 25-летнее ежегодное чисто накопительное страхование со страховой суммой $100000. Страховщик несет начальные расходы в размере $2000 плюс 50% от первой премии, и расходы на продолжение в размере 2.5% от каждой последующей премии. Посмертная выплата производится непосредственно в момент смерти.

1. Выпишите брутто-премию величины будущих потерь
2. Вычислите брутто-премию, используя стандартную модель выживания и процентную ставку 5%

Решение: Пусть S=100000, x=30, n=25 и пусть P обозначает ежегодную брутто-премию

Отметим, что связанные с премиями расходы в размере 50% от первой премии и 2.5% второй и последующих премий более удобно записать как 2.5% от каждой премии и еще 47.5% от первой премии. Выражая принцип эквивалентности таким образом, мы можем упростить выпражение для будущих потерь, и последующие вычисления.

1. Мы можем смотреть отдельно на три части уравнения на брутто-премию.

Матожидание посмертной выплаты может быть найдено численным интегрировнием или по формуле Вулхауса

Таким образом, принципэквивалентности дает

Прмер 6.7 Вычислите ежемесячную брутто-премию для 10-летнего договора страхования с посмертной суммой $50000, проданного 55-летнему человеку, используя следующее:

Модель выживания: Стандартная модель выживания, предполагается равномерное распределение смертей внутри года

Процентная ставка: 5% в год

Начальные расходы: $500 + 10% от кадой ежемесячной премии на протяжени первого года

Последующие расходы: 1% от каждой ежемесячной премии во второй и последующие годы

Решение: Пусть P обозначает ежемесячную премию. Тогда матожидание дохода от премий равно. Чтобы найти матожидание связанных с премиями расходов, мы можем применить идею из предыдущего примера, заметив, что начальные расходы применяются к каждой премии за первый год. Таким образом, мы можем записать матожидание всех расходов как

Где расходы за первый год были разбиты на 9% + 1%, то есть мы имеем 9% от первого года и 1% от каждого года. Матожидание страховых выплат равно , тогда по принципу эквивалентности

Прямое вычисление матожидания дает такой же ответ с точностью до 4 знаков.

Пример 6.8 Вычислите брутто-премии за отложенную ренту величины $80000 в год, выплачиваемую в начале каждого месяца, проданную 50-человеку, с первой выплатой в его 65 день рождения. Примите начальные расходы за $1000, а последующие расходы будут %20 в первую годовщину даты покупки, а дальше расходы возрастают вместе с инфляцией в сответствии со ставкой 1% в год. Используйте стандартную модель выживания и процентную ставку 5%.

Решение: Отдельная премия равна матожиданию отложенной ренты плюс матожидание расходов. 6.6 и 6.7. В примере 6.7 ежегодная премия равнялась $2295.04, а расходы в момент 0 равны $2000 плюс 50% от первой премии, в сумме $3146.75, что превосходит величину первой премии. Аналогично, в примере 6.7 суммарные премии за первый год равны $227.88, а полные расходы за первый год равны $500 плюс 10% от премий за первый год. Эта ситуация часто встречается на практике, особенно, когда высоки комиссии агентам, и называется “напряжение нового бизнеса”. Следствием этого является тот факт, что чтобы страховщику продавать полисы, ему нужно иметь доступные стредства. Время от времени, страховщики попадают в финансовые трудности из-за того, что следуют стратегиии агрессивного роста, не имея достаточного капитала, чтобы покрыть проблемы нового бизнеса. На самом деле, страховщик берет в долг у держателя доли (или полиса) деньги для того, чтобы начать новый бизнес. Эти ранние расходы постепенно окупаются за счет будущими премий. Часть премий, которая идет на компенсацию этой суммы, называется “отложенная стоимость приобретения”.