**2 апреля 2020 года, группа 309**

Контрольная работа по теме «Основы финансовой математики»

Инструкция по выполнению работы

* На выполнение работы даётся 2 недели: со 2 апреля 2020 г. до 16 апреля 2020 г. Занятие в четверг, 9 апреля, посвящается моим ответам на возможные ТЕХНИЧЕСКИЕ вопросы по работе (но НЕ консультации по темам, которые вы не удосужились разобрать сами).
* 16 апреля, **в 15:00 !!!,** регистрация на лекцию = e-mail с вашей работой (прикреплённый **pdf** файл). На лекции 16 апреля разбираем очередную тему по актуарной математике (детали 16 апреля).
* Мы можете использовать моё пособие: Фалин А.Г., Фалин Г.И.*Введение в математику финансов и инвестиций для актуариев:* Учебное пособие**.** – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2019 – 359 с., ил. (эл. изд.) ISBN 978-5-317-06167-8 и только это пособие. Вы должны использовать обозначения и термины из этой книги, но вам нельзя копировать теоретические выкладки и текст (если это необходимо, всё излагаете своими словами).
* Вычисления проводить с использованием Microsoft Excel.
* Вы **ДОЛЖНЫ**:

**«Излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.»**

Иначе говоря, решения задач должны быть очень подробными, с детальным объяснением всех идей, преобразований, с результатами всех промежуточных вычислений, точными ссылками на известные результаты (ссылаться можно только на упомянутую выше мою книгу). **Невыполнение этих требований автоматически означает, что задача не решена.**

**При совпадении в разных работах достаточно длинных фрагментов рассуждений или вычислений решение соответствующей задачи аннулируется у ВСЕХ вовлечённых сторон.**

* Решение набираете:
  + в Microsoft Word, шрифт Times New Roman 12 pt, line spacing 1.15, формулы – с помощью пакета MathType (предпочтительно) или Equation Editor, но сохраняете файл в формате pdf – у меня чрезвычайно подробные решения вместе с условиями заняли 18 стр. (минус 4 стр. условия = 14 стр. только!!!)
  + или в LaTex, но сохраняете файл в формате pdf.
* Работу выполняете прямо в этом файле (для LaTeX создаёте аналогичный документ; \documentclass{article}). В таблице на первом листе вашей работы вы указываете: ФИО и ответы ко всем задачам (баллы проставляю я).
* Контрольные высылаете мне на почту [MoscowMath@mail.ru](mailto:MoscowMath@mail.ru) с указанием темы по следующему образцу: Иванов\_Иван-309.

Напоминаю, что ФГОС среднего образования (приказ Минобрнауки №413 от 17 мая 2012 ) установил следующие требования к результатам обучения в средней школе:

« II.8.5) умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее – ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач …

II.8.8) владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;…»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Токаева Александра | Ответ | Баллов |
| задача 1(i) | 6.1064% |  |
| задача 1(ii) | 6.4949% |  |
| задача 1(iii) | 6.0450% |  |
| задача 2(i) | См. решение |  |
| задача 2(ii) | $28600.00 |  |
| задача 3(i)(a) | 7.0973 лет |  |
| задача 3(i)(b) | 7.2782 лет |  |
| задача 3(ii) | Страховая компания получит прибыль |  |
| задача 4(i) | £19381.14 |  |
| задача 4(ii) | £107.50 |  |
| задача 5(i) | £7.06 |  |
| задача 5(ii) | 7.11% |  |
| задача 6(i) | £958.86 |  |
| задача 6(ii) | £63180.49 |  |
| задача 6(iii)(a) | 1 апреля 2027 |  |
| задача 6(iii)(b) | £581.34 |  |
| задача 7(i) | YTM=5.44% |  |
| задача 7(ii) | См. решение |  |
| задача 7(iii) | См. решение |  |
| задача 8(i) | См. решение |  |
| задача 8(ii) | TWRR=24.61% |  |
| задача 8(iii) | См. решение |  |
| задача 8(iv)(a) | См. решение |  |
| задача 8(iv)(b) | См. решение |  |
| задача 8(iv)(c) | MWRR=29.41% |  |
| задача 9(i) | £12953.55 |  |
| задача 9(ii) | S10 ∼ LogN(9.448164; 0.0419216) |  |
| задача 9(iii) | £8491.89 |  |
|  | **Из 100 возможных баллов всего:** |  |

**1.** Вычислите в виде процентов с четырьмя знаками после запятой номинальную годовую процентную ставку, начисляемую раз в полугодие, которая эквивалентна:

(i) эффективной месячной учётной ставке 0.5%. [2 балла]

(ii) номинальной годовой учётной ставке 6%, применяемой каждые два года. [2 балла]

(iii) номинальной годовой процентной ставке 6%, применяемой ежеквартально. [2 балла]

[Всего 6 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**(iii)**

**2.** (i) Объясните смысл термина «без дивиденда» («ex-dividend») применительно к продаже ценной бумаги, по которой выплачиваются дивиденды. [1 балл]

Человек купил 10,000 акций 1 декабря 2017. Дивиденды по ним выплачиваются 1 января и 1 июля каждого года; предполагается, что они будут выплачиваться до бесконечности. Очередные дивиденды, которые будут выплачены 1 января 2018 года, составляют $0.07 на акцию. Ожидается, что для любого календарного года обе дивидендные выплаты будут одинаковы, но от года к году будут расти на 2% в год.

Допустим, что 1 декабря 2017 года эти акции продаются ex-dividend, а для оценки текущей стоимости денежных потоков используется эффективная годовая проценая ставка 7%.

(ii) Вычислите стоимость этого пакета в день покупки, предполагая, что покупатель будет держать его вечно. [5 баллов]

[Всего 6 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**3.** Человек покупает в страховой компании ренту за разовую премию. Рента будет выплачивать £10,000 в конце каждого года на протяжении 15 лет. Страховая компания инвестирует премию в облигацию, которая платит купон раз в год по ставке 6% годовых и будет погашена по номиналу ровно через девять лет.

(i) (a) Вычислите средний дисконтированный срок выплат для ренты при годовой эффективной процентной ставке 5%. [2 балла]

(b) Вычислите средний дисконтированный срок выплат для облигации при годовой эффективной процентной ставке 5%. [3 балла]

(ii) Объясните, получит страховая компания прибыль или понесёт убытки, если процентные ставки слегка уменьшатся для всех сроков. [3 балла]

[Всего 8 баллов]

**Решение.**

**(i)(a)**

**(i)(b)**

**(ii)**

4. Интенсивность процентов, , является функцией времени и в любой момент времени  (лет) даётся формулой:



(i) Для инвестиции в размере £15,000, сделанной в момент , вычислите накопление в момент . [4 балла]

(ii) Вычислите текущую стоимость (в момент ) денежного потока, который выплачивается непрерывно с интенсивностью  от момента  до момента . [6 баллов]

[Всего 10 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**5.** 1 февраля 2017 года инвестор обдумывал покупку обычных акций компании Online Education PLC. Дивиденды выплачиваются раз в год, 1 февраля, и только что были выплачены дивиденды в размере £0.40 на акцию. В момент покупки акции ожидалось, что дивиденды будут ежегодно возрастать: на 5% за первый год, на 4% за второй, на 3% за третий и последующие годы. Инвестор не имел права на получение только что выплаченных дивидендов.

(i) Вычислите максимальную цену, которую мог бы заплатить за акцию инвестор, если он предполагает держать акцию бессрочно и рассчитывает на эффективную годовую доходность от этой операции в размере 9%. [6 баллов]

Инвестор купил пакет акций 1 февраля 2017 года по цене £7.00 за акцию и продал его 1 февраля 2019 года, немедленно после получения причитающихся ему дивидентов, по цене £7.50 за акцию.

(ii) Вычислите эфффективную годовую доходность этой операции для инвестора, используя следующую информацию:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Дата | Индекс  инфляции | Дивиденды  на одну акцию |
| 1 февраля 2017 | 211.0 | £0.400 |
| 1 февраля 2018 | 215.7 | £0.428 |
| 1 февраля 2019 | 221.2 | £0.449 |

[5 баллов]

[Всего 11 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

6. 1 января 2016 года был выдан заём на сумму £80,000. Он должен быть погашен за 10 лет постоянными ежемесячными платежами 1 числа каждого последующего месяца (вплоть до 1 января 2026 года включительно).

(i) Вычислите размер этого постоянного ежемесячного платежа используя годовую эффективную процентную ставку 8%. [2 балла]

(ii) Вычислите размер непогашенной задолженности 1 ноября 2018 года (немедленно после того, как произведён очередной платёж в соответствии с установленным расписанием). [3 балла]

1 ноября 2018, немедленно после платежа очередной суммы в счёт погашения долга, заёмщик попросил уменьшить размер ежемесячной выплаты до £900 и продлить промежуток времени, оставшийся до погашения долга (чтобы непогашенную задолженность можно было полностью оплатить уменьшенными ежемесячными платежами). Последний платёж должен быть равен размеру оставшейся задолженности, если она меньше, чем £900.

Кредитор согласился с этими изменениями при следующих дополнительных условиях:

* в будущем будет применяться годовая процентная ставка 9%, начисляемая ежемесячно;
* к непогашенному долгу по состоянию на 1 ноября 2018 года добавляется сбор за оформление документов в размере £250.

(iii) (a) Определите новую дату погашения долга. [2 балла]

(b) Вычислите размер последней выплаты по долгу. [4 балла]

[Всего 11 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**(iii)(a)**

**(iii)(b)**

**7.** Эффективная годовая форвардная ставка для промежутка времени , где  и  измеряются годами, обозначена  (иначе говоря,  – это *r*-летняя форвардная ставка через *t* лет). Известно, что , ,  and 

(i) Определите доходность к погашению в момент эмиссии для четырёхлетней облигации, которая гасится по номиналу и платит купон по ставке 4% в конце каждого года. [7 баллов]

(ii) Объясните, почему эта доходность меньше, чем  [3 балла]

(iii) Как вы могли бы интерпретировать тот факт, что последовательность , , ,  возрастающая. [4 балла].

[Всего 14 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**(iii)**

**8.** Стоимость активов инвестиционного фонда 1 января 2015 года была £100m, но через два года, 1 января 2017 года, он оценивался только в £64. Немедленно после оценки фонда 1 января 2017 года в фонд поступила сумма £16m и к 1 июля 2018 года стоимость фонда выросла до £270m.

(i) Дайте определение средней по времени эффективной годовой ставки дохода, *TWRR*. В каких случаях её разумно использовать? [2 балла]

(ii) Вычислите *TWRR* за период с 1 января 2015 года до 1 июля 2018 года; ответ округлите до целого числа базисных пунктов. [4 балла]

(iii) Дайте определение эквивалентной по финансовому результату ставки дохода, *MWRR*. В каких случаях её разумно использовать? [2 балла]

(iv) Докажите, что для рассматриваемого примера

(a) *MWRR* за период с 1 января 2015 года до 1 июля 2018 года существует; [4 балла]

(b) верно неравенство  [2 балла]

(c) вычислите *MWRR*; ответ округлите до целого числа базисных пунктов. [4 балла]

Всего[18 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**(iii)**

**(iv)(a)**

**(iv)(b)**

**(iv)(c)**

**9.** Инвестор предполагает вложить сумму  в некоторый фонд на  лет. Он моделирует неопределённость в изменении стоимости активов фонда предположением, что годовая доходность от вложения средств в фонд является случайной величиной. Пусть  – эта доходность за *k*-й год. Инвестор предполагает, что случайные величины  независимы в совокупности и одинаково распределены со средним 8% и стандартным отклонением 7%, причём годовые коэффициенты роста  имеют логнормальное распределение.

(i) Вычислите ожидаемый размер суммы , которую получит в результате инвестор. [2 балла]

(ii) По какому закону распределена сумма ? [2 балла]

(iii) На какую минимальную сумму может рассчитывать инвестор через 10 лет практически гарантированно при доверительной вероятности 97.5%? [12 баллов]

Всего [16 баллов]

**Решение.**

**(i)**

**(ii)**

**(iii)**