СБОРНИК МЕТОДИК
моделирования метрик рыночного и контрагентского кредитного рисков

Часть 7. Методика расчета показателя стоимости под риском (VaR)

Спецификация ВНД

1	Наименование документа	Методика расчета показателя стоимости под риском (VaR)
2	Участник Группы, на которого распространяется действие документа	ПАО Сбербанк, Группа ПАО Сбербанк
3	Группа ВНД	Вторая
4	Вид рисков	Рыночный риск торговой книги
5	Выделенная группа рисков	Рыночные риски операций на финансовых рынках
6	Этапы процесса управления рисками, регламентируемые ВНД	Оценка рисков
7	ВНД верхнего уровня	Политика управления рыночным и кредитным рисками операций на финансовых рынках ОАО «Сбербанк России» № 2625 от 09.08.2012.
8	ВНД, определяющие подчиненные процессы и методики	Отсутствуют

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Настоящий документ (далее – Методика) является нормативным документом ПАО Сбербанк (далее – Банк), определяющим метод расчета показателя стоимости под риском (VaR).

Показатель стоимости под риском (VaR) используется при расчете экономического капитала Группы Сбербанка, а также для целей расчета степени утилизации лимитов в рамках процесса У.3.20 управления рыночным риском Группы в соответствии с Регламентом управления рыночными рисками в Группе Сбербанк [1].

Департамент рисков CIB осуществляет методологическую поддержку и сопровождение (уточнение, внесение изменений, актуализацию параметров) Методики расчета показателя стоимости под риском (VaR). Расчет показателя VaR осуществляется Департаментом рисков CIB.

2 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В месте определения термины выделены *курсивом*.

В формулах прописными буквами обозначены: случайные величины и векторы, функции, операторы, вероятности, распределения, матрицы, сигма-алгебры, показатели, портфели. Строчными буквами обозначены числовые значения случайных величин и векторов, параметры, даты, индексы, вероятности, функции, операторы, а также в некоторых случаях[1] случайные величины и векторы. Используются как верхние, так и нижние индексы.

Приложение содержит сквозной пример, иллюстрирующий ключевые элементы рассматриваемого метода расчета показателя VaR.

3 ПОКАЗАТЕЛЬ СТОИМОСТИ ПОД РИСКОМ (VaR)

Показатель стоимости под риском (VaR) является мерой возможной отрицательной переоценки рыночной стоимости портфеля финансовых инструментов на заданном временном горизонте и при заданном доверительном уровне.

Для расчета показателя стоимости под риском (VaR) необходимо определить следующие параметры:

- *портфель* (*позиций по финансовым инструментам*)[2] Π, для которого рассчитывается показатель,
- *дата расчета* v, по отношению к стоимости портфеля на которую осуществляется его переоценка,

[1] Раздел 4.5 и страница 15.

[2] Портфель представляет собой набор позиций по финансовым инструментам, каждая из которых определяется финансовым инструментом и величиной позиции. Способ задания величины позиций зависит от типа инструмента (например, для облигаций величина позиции, как правило, выражается в единицах валюты ее номинала).

- *доверительный уровень* λ, представляющий собой значение вероятности, с которой отрицательная переоценка рыночной стоимости портфеля не превысит значения рассчитываемого показателя,

- *валюта расчета* c, в которой рассчитывается стоимость портфеля и производится ее переоценка,

- *временной горизонт* h, определяющий длину периода времени между датой расчета показателя и датой, на которую производится переоценка рыночной стоимости портфеля[3].

Показатель стоимости под риском $VaR(\Pi, v, h, \lambda, c)$ для заданных параметров Π, v, h, λ, c представляет собой величину, удовлетворяющую условию

$$P_v - P_{v+h} \leq VaR(\Pi, v, h, \lambda, c) \text{ с вероятностью}^4\ \lambda,$$

где P_v – стоимость портфеля П в валюте расчета с на дату расчета v, P_{v+h} – стоимость портфеля П в валюте расчета с на дату переоценки $v + h$[5].

4 СТАНДАРТНЫЙ МЕХАНИЗМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ $\boldsymbol{VaR}$

Настоящая методика определяет гибридный метод расчета VaR (*стандартный механизм*[6]), который является комбинацией исторического и параметрического методов.

Как и в случае использования исторического метода расчета VaR, для расчетов в рамках гибридного метода необходимо определить *историческое окно*, представляющее собой набор моментов времени, изменения значений рыночных факторов между которыми берутся за основу для построения сценариев возможного изменения рыночной стоимости портфеля между датой расчета v и датой переоценки $v + h$.

Историческое окно определяется следующими *параметрами вычисления показателя* VaR:

- *рабочий календарь*, задающий рабочие дни,

- *время закрытия*, определяющее правило, по которому каждой дате рабочего календаря ставится в соответствие некоторый конкретный момент времени[7],

- *длина исторического окна*, задающая длину периода между его первым и последним моментами времени[8].

Таким образом, используемое далее историческое окно состоит из моментов времени, соответствующих датам рабочего календаря между датой v и датой, отстоящей от нее в

---

[3] Например, один рабочий день.

[4] При наличии информации только до даты расчета v включительно.

[5] Под датой $v + h$ понимается такая дата, что длина периода между ней и датой v равна h. Далее используются аналогичные обозначения.

[6] На практике при вычислениях возникает необходимость в использовании дополнительных механизмов (см. раздел 5).

[7] Например, каждой дате может ставится в соответствие момент времени 18:45 MSK того же дня.

[8] Например, 2 года.

прошлое на длину исторического окна. Далее предполагается, что моменты времени исторического окна последовательно проиндексированы числами $0, \ldots, N$.

Для обеспечения статистической значимости результатов расчетов необходимо, чтобы длина исторического окна составляла не менее одного года.

Предполагается, что дата расчета v и дата переоценки $v + h$ присутствуют в рабочем календаре. Под значениями переменных на дату расчета v и дату переоценки $v + h$ понимаются значения переменных на моменты времени, определяемых для этих дат временем закрытия.

Вычисление показателя VaR, а также других связанных с ним риск-метрик, с помощью стандартного механизма можно разбить на следующие последовательные этапы (см. Рисунок 4.1), которые подробнее рассматриваются в дальнейших разделах:

- Анализ портфеля;
- Моделирование риск-факторов;
- Моделирование стоимости портфеля;
- Расчет риск-метрик.

Этап анализа портфеля заключается в определении формул ценообразования и входящих в них риск-факторов для каждого из инструментов и всего портфеля в целом на основе статических данных и данных по позиции. *Статические данные* представляют собой атрибуты инструментов[9], входящих в портфель, необходимые для их переоценки. *Данные по позиции* содержат идентификаторы инструментов и размеры позиций в портфеле П.

Этап моделирования риск-факторов включает в себя определение их значений на дату расчета, а также построение вероятностного распределения их изменений между датой расчета и датой переоценки на основе рыночных и справочных данных. *Рыночные данные* представляют собой текущие[10] и исторические значения наблюдаемых рыночных переменных, таких как цены инструментов, значения индексов, обменных курсов, подразумеваемых волатильностей. *Справочные данные* включают в себя данные по эмитентам[11], странам и валютам.

Этап моделирования стоимости портфеля состоит в преобразовании значений риск-факторов и распределения их изменений в распределение изменения стоимости портфеля с помощью формул ценообразования.

Этап расчета риск-метрик заключается в непосредственном вычислении значений показателя VaR и других риск-метрик как характеристик распределения риск-факторов и изменения стоимости портфеля.

[9] Например, расписания выплат по облигациям.

[10] Значения на дату расчета v.

[11] Например, рейтинги эмитентов.

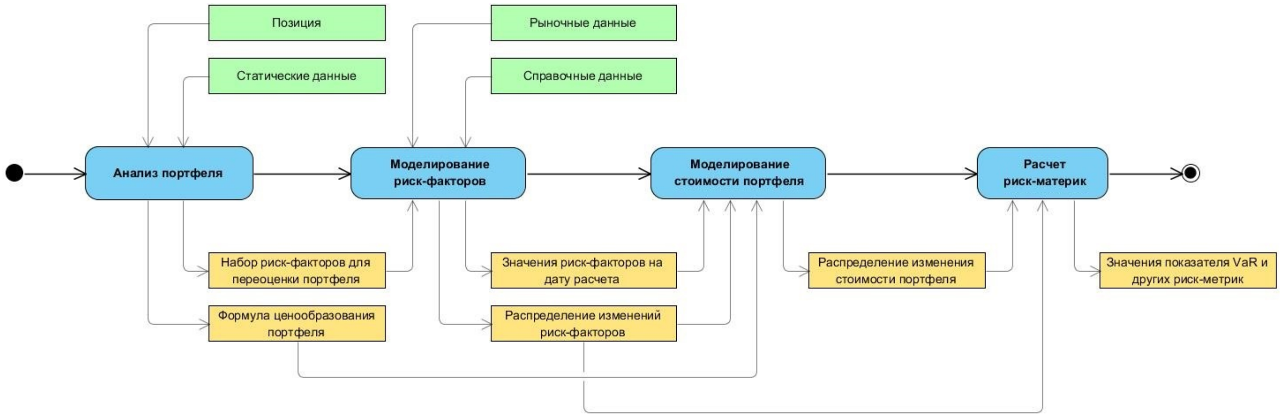

Рисунок 4.1 Вычисление показателя VaR.

4.1 Анализ портфеля

В рамках настоящей методики предполагается, что цены инструментов в портфеле выражаются через значения вспомогательных переменных, называемых *риск-факторами*. На этапе анализа портфеля, для каждого из входящих в него инструментов в зависимости от типа определяется *формула ценообразования инструмента*, позволяющая вычислить его цену[12] по значениям соответствующих риск-факторов.

Все риск-факторы, участвующие в формулах ценообразования всех инструментов в портфеле, образуют *набор риск-факторов для переоценки портфеля*. Далее будем предполагать, что риск-факторы данного набора проиндексированы числами $1, \dots, M$. Пусть $f = (f^1, \dots, f^M)$ – вектор значений риск-факторов $1, \dots, M$. Тогда соответствующая им стоимость $P^\Pi(f)$ портфеля П определяется по *формуле ценообразования портфеля*

$$P^\Pi(f) = \sum_{i \in \Pi} c^i P^i(f^{[i]}),$$

где $[i] = \left(m_1^i, \dots, m_{M^i}^i\right)$ – индексы риск-факторов, участвующих формуле ценообразования для инструмента i, $f^{[i]} = (f^{m_1^i}, \dots, f^{m_{M^i}^i})$ – значения этих риск-факторов, P^i – формула ценообразования для инструмента i, c^i – размер позиции по инструменту i в портфеле, а сумма берется по всем инструментам i в портфеле П.

Коэффициент чувствительности стоимости портфеля к изменению риск-фактора m $\frac{\partial P^\Pi}{\partial f^m}(f)$ представляет собой соответствующую частную производную и вычисляется[13] по формуле

$$\frac{\partial P^\Pi}{\partial f^m}(f) = \sum_{i: m \in [i]} c^i \frac{\partial P^i}{\partial f^{l_m^i}}(f^{[i]}), \qquad m \in \{1, \dots, M\},$$

[12] То есть стоимость позиции единичного размера по данному инструменту.

[13] Коэффициенты чувствительности вычисляются на этапе моделирования стоимости портфеля. Также коэффициенты чувствительности могут быть использованы для проверки корректности статических данных.

где производная $\frac{\partial P^i}{\partial f^{l^i_m}}(f^{m^i_1}, \dots, f^{m^i_{M_i}})$ берется по значению риск-фактора m (то есть l^i_m – такое число, что $m^i_{l^i_m} = m$), а $[i]$ и $f^{[i]}$ определены ранее.

4.2 Моделирование риск-факторов

На этапе моделирования риск-факторов осуществляется определение их значений f_v на дату расчета v, а также построение вероятностного распределения их изменений ΔF_{v+h} между датой расчета v и датой переоценки $v + h$.

4.2.1 Переменные и зависимости между ними

Далее используются следующие термины:

- *Переменная* – числовая величина, имеющая динамику во времени. Переменными являются: риск-фактор, переменная состояния, наблюдаемая переменная.
- *Наблюдаемая переменная* – переменная, значения которой наблюдаются непосредственно, и связанная с одной или несколькими переменными состояния уравнениями измерений (см. раздел 4.5.1). В частности, в качестве наблюдаемых переменных могут выступать рыночные котировки цен, обменных курсов, подразумеваемых волатильностей, значения индексов и т.д.
- *Переменная состояния* – переменная, динамика которой описывается с помощью уравнений перехода (см. раздел 4.5.1). Значения переменных состояния могут быть вычислены или оценены по значениям наблюдаемых переменных.
- *Достаточный набор зависимых переменных* (*для переменной состояния*) – набор переменных состояния, относительно которого рассматриваемая переменная состояния условно независима[14] со всеми остальными переменными состояния.

В рамках настоящей методики предполагается, что значения риск-факторов выражаются через переменные состояния, то есть имеют место соотношения вида

$$f^m = \phi^m\left(x^{[m]}\right),$$

где f^m – значение риск-фактора m, $[m] = (k^m_1, \dots, k^m_{K^m})$ – индексы переменных состояния, соответствующих риск-фактору m, $x^{[m]} = (x^{k^m_1}, \dots, x^{k^m_{K^m}})$ – значения этих переменных, ϕ^m – функция, определяющая связь риск-фактора m с переменными состояния $k^m_1, \dots, k^m_{K^m}$.

В том случае, когда исторические значения риск-фактора через значения соответствующих переменных состояния и наблюдаемых переменных оценить не удается, другие риск-факторы могут выступать в роли *прокси-показателей* для него, то есть использоваться в расчетах вместо данного риск-фактора[15].

---

[14] Под независимостью переменных состояния в данном контексте понимается их независимость как случайных векторов значений на моменты времени исторического окна.

[15] Волатильность риск-фактора, не объясняемая изменениями его прокси-показателя, учитывается с помощью параметрических поправок.

4.2.2 Классификация риск-факторов и переменных состояния

В зависимости от имеющихся рыночных данных, все переменные состояния делятся на наблюдаемые, моделируемые и немоделируемые, а все риск-факторы – на ликвидные, моделируемые и немоделируемые.

Переменная состояния является:

- *наблюдаемой*, если ее значения на все моменты времени исторического окна могут быть вычислены по имеющимся значениям наблюдаемых переменных (см. раздел 4.5);
- *моделируемой*, если она не является наблюдаемой, но ее значения на все моменты исторического окна можно оценить[16] с помощью модели динамики переменных (см. раздел 4.5);
- *немоделируемой*, если она не является наблюдаемой, либо моделируемой.

Риск-фактор является:

- *ликвидным*, если все соответствующие ему переменные состояния являются наблюдаемыми (таким образом, все исторические значения риск-фактора могут быть вычислены по имеющимся значениям наблюдаемых переменных);
- *моделируемым*, если среди соответствующих ему переменных состояния есть хотя бы одна моделируемая, а все остальные являются наблюдаемыми, либо моделируемыми;
- *немоделируемым*, если среди соответствующих ему переменных состояния имеется хотя бы одна немоделируемая.

4.2.3 Распределение изменений риск-факторов

В рамках настоящей методики моделирование риск-факторов осуществляется гибридным методом, в основе которого лежит исторический метод с использованием параметрических поправок. Распределение изменений риск-факторов между датой расчета v и датой переоценки $v + h$ задается с помощью набора исторических сценариев. Каждый *исторический сценарий изменения риск-факторов* соответствует определенному моменту времени[17] n исторического окна и включает в себя

- изменения риск-факторов Δf_n, представляющие собой вектор изменений риск-факторов $1, \dots, M$ между моментами времени $n - 1$ и n, рассчитанных на основе рыночных котировок, либо с помощью моделей динамики переменных (см. раздел 4.5) или через изменения прокси-показателей,
- параметрическую поправку C_n, представляющую собой ковариационную матрицу отклонений ненаблюдаемых исторических изменений риск-факторов между датами $n - 1$ и n от изменений, рассчитанных с помощью моделей динамики переменных или прокси-показателей, если они использовались.

---

[16] То есть построить распределение наблюдаемых значений переменной состояния относительно имеющихся значений наблюдаемых переменных.

[17] Используются все моменты времени исторического окна, начиная со второго по счету. Таким образом, число исторических сценариев изменения риск-факторов на единицу меньше, чем число моментов времени исторического окна.

Совместное распределение $Law[\Delta F_{v+h}]$ изменений риск-факторов $1, \dots, M$ между датой расчета v и датой переоценки $v+h$ моделируется как смесь многомерных нормальных распределений[18], соответствующих историческим сценариям изменения риск-факторов, то есть

$$Law[\Delta F_{v+h}] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathcal{N}(\Delta f_n, C_n),$$

где

- $\mathcal{N}(\Delta f_n, C_n)$ – многомерное нормальное распределение со средним Δf_n и ковариационной матрицей C_n,
- операцию суммирования и равенство в формуле можно понимать как относящиеся к функциям распределения соответствующих случайных векторов.

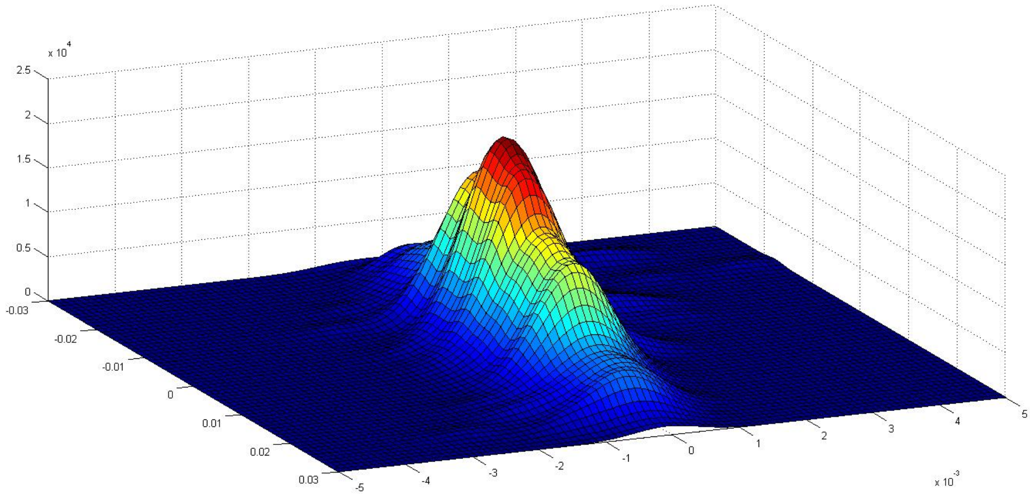

Рисунок 4.2. Плотность смеси двумерных нормальных распределений.

Для ликвидных риск-факторов параметрическая поправка во всех сценариях представляет из себя нулевую матрицу и моделирование распределения изменений риск-факторов по данной формуле совпадает с их моделированием в рамках исторического метода.

4.2.4 Построение исторических сценариев изменения риск-факторов

Исторические сценарии изменения риск-факторов строятся с помощью следующего алгоритма:

1. Набор риск-факторов для переоценки портфеля пополняется[19] дополнительными риск-факторами, так, чтобы получившийся в результате *полный набор риск-факторов* вместе с

[18] Случайная величина, имеющая вырожденное распределение (то есть случайная величина, принимающая одно значение с вероятностью единица), считается также нормально распределенной с нулевой дисперсией и нулевыми ковариациями с остальными случайными величинами.

[19] Перед пополнением в набор риск-факторов для переоценки портфеля могут также включаться дополнительные риск-факторы, не участвующие в формуле ценообразования портфеля. Например, это может

каждым немоделируемым риск-фактором содержал все возможные прокси-показатели для него.

2. Набор всех переменных состояния, соответствующих риск-факторам из полного набора риск-факторов, пополняется дополнительными переменными состояния так, чтобы получившийся в результате *полный набор переменных состояния*

    - вместе с каждой ненаблюдаемой переменной состояния содержал все переменные из достаточного набора для нее,

    - вместе с каждой переменной состояния, участвующей в уравнении измерений (см. раздел 4.5), содержал все остальные переменные состояния, участвующие в этом уравнении.

3. Получившийся полный набор переменных разбивается на *компоненты полного набора переменных состояния*, обладающие следующими свойствами:

    a. Вместе с каждой ненаблюдаемой переменной каждая компонента полного набора переменных состояния содержит все переменные состояния из достаточного набора зависимых переменных состояния для нее;

    b. Если переменная состояния принадлежит двум различным компонентам, то она является наблюдаемой;

    c. Все переменные состояния, одновременно участвующие в каком-либо уравнении измерений, принадлежат одним и тем же компонентам полного набора переменных состояния;

    d. Все переменные состояния, одновременно участвующие в каком-либо уравнении перехода, принадлежат одним и тем же компонентам полного набора переменных состояния.

4. Для каждой компоненты полного набора переменных состояния строится соответствующая модель динамики переменных (см. раздел 4.5.1), возвращающая условные распределения значений переменных состояния, принадлежащих данной компоненте, а также их изменений относительно наблюдаемых переменных для моментов времени исторического окна.

5. Производится подготовка к калибровке выбранных моделей динамики переменных (раздел 4.5). При необходимости из модели исключаются переменные состояния, для которых условные распределения не могут быть корректно построены. При этом исключенные переменные состояния считаются немоделируемыми. Таким образом, каждая моделируемая переменная относится к одной модели динамики переменных.

6. Изменение Δf_n^m риск-фактора m для исторического сценария, соответствующего дате n исторического окна

    a. в том случае, когда риск-фактор m является ликвидным, определяется по формуле

$$\Delta f_n^m = \phi^m\left(x_v^{[m]} + \Delta x_n^{[m]}\right) - \phi^m\left(x_v^{[m]}\right),$$

быть сделано для последующего выявления факторов, наиболее значимо влияющих на стоимость портфеля (см. раздел 4.4.3).

где

- $x_v^{[m]}$ и $\Delta x_n^{[m]}$ – соответственно, значения на дату расчета v и изменения между моментами времени $n-1$ и n исторического окна переменных состояния, соответствующих риск-фактору m, вычисленные по значениям наблюдаемых переменных,

- ϕ^m – функция, определяющая связь риск-фактора m с этими переменными состояния;

b. в том случае, когда риск-фактор m является моделируемым, определяется по формуле[20]

$$\Delta f_n^m = \phi^m\left(E[X_v^{[m]}|\mathcal{F}] + E[\Delta X_n^{[m]}|\mathcal{F}]\right) - \phi^m\left(E[X_v^{[m]}|\mathcal{F}]\right),$$

где

- $X_v^{[m]}$ и $\Delta X_n^{[m]}$ – соответственно, значения на дату расчета v и изменения между моментами времени $n-1$ и n исторического окна переменных состояния, соответствующих риск-фактору m,

- $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра, порожденная наблюдаемыми переменными[21],

- ϕ^m – функция, определяющая связь риск-фактора m с соответствующими переменными состояния,

- условные математические ожидания рассчитываются с помощью моделей динамики переменных[22] (раздел 4.5), к которым относятся соответствующие переменные состояния;

c. в том случае, когда риск-фактор m является немоделируемым, определяется по формуле

$$\Delta f_n^m = \beta^{m,p_m} \Delta f_n^{p_m},$$

где p_m – прокси-показатель для риск-фактора m, β^{m,p_m} – коэффициент чувствительности риск-фактора m к изменению прокси-показателя p_m.

2. Значение параметрической поправки $C_n^{m_1,m_2}$ для изменений $\Delta F_n^{m_1}$ и $\Delta F_n^{m_2}$ факторов m_1 и m_2 для даты n исторического окна

   a. в том случае, когда один из риск-факторов m_1 и m_2 является ликвидным, полагается равной нулю;

   b. в том случае, когда оба риск-фактора являются моделируемыми, рассчитывается по формуле

---

[20] Здесь и далее $E[.|.]$, $D[.|.]$, $cov[.|.]$ – соответственно, условные математическое ожидание, дисперсия и ковариация (см. [2]).

[21] Учитываются наблюдения до даты расчета v включительно, в том числе и на моменты времени, не относящиеся к историческому окну.

[22] Для расчета условных математических ожиданий используются только наблюдаемые переменные, связанные уравнениями измерений с переменными состояния, относящимися к данной модели.

$$C_n^{m_1,m_2} = \sum_{k_1,k_2 \in [m_1] \cup [m_2]} \frac{\partial \phi^{m_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \phi^{m_2}}{\partial x^{k_2}} cov(\Delta X_n^{k_1}, \Delta X_n^{k_2} | \mathcal{F}),$$

где

- производные $\frac{\partial \phi^{m_1}}{\partial x^{k_1}}$ и $\frac{\partial \phi^{m_2}}{\partial x^{k_2}}$ берутся, соответственно, в точках $E[X_v^{[m_1]}|\mathcal{F}] + E[\Delta X_n^{[m_1]}|\mathcal{F}]$ и $E[X_v^{[m_2]}|\mathcal{F}] + E[\Delta X_n^{[m_2]}|\mathcal{F}]$,
- условные математические ожидания рассчитываются с помощью моделей динамики переменных[23] (раздел 4.5), к которым относятся соответствующие переменные состояния;
- условная ковариация $cov(\Delta X_n^{k_1}, \Delta X_n^{k_2}|\mathcal{F})$ рассчитывается с помощью модели динамики переменных[24] (раздел 4.5), если переменные состояния k_1 и k_2 относятся к одной модели, а иначе полагается равной нулю;

c. в том случае, если риск-фактор m_1 является немоделируемым и $m_1 \neq m_2$, рассчитывается по формуле

$$C_n^{m_1,m_2} = \beta^{m_1,p_{m_1}} C_n^{p_{m_1},m_2},$$

где p_{m_1} – прокси-показатель для риск-фактора m_1, $\beta^{m_1,p_{m_1}}$ – коэффициент чувствительности риск-фактора m_1 к изменению прокси-показателя p_{m_1};

d. в том случае, если риск-фактор m_1 является немоделируемым и $m_1 = m_2$, рассчитывается по формуле

$$(\beta^{m_1,p_{m_1}})^2 C_n^{p_{m_1},p_{m_1}} + (\sigma^{m_1,p_{m_1}})^2,$$

где p_{m_1} – прокси-показатель для риск-фактора m_1, $\beta^{m_1,p_{m_1}}$ – коэффициент чувствительности риск-фактора m_1 к изменению прокси-показателя p_{m_1}, $\sigma^{m_1,p_{m_1}}$ – *специфическая волатильность риск-фактора m_1 по отношению к прокси-показателю*[25] p_{m_1}.

4.2.5 Построение значений риск-факторов на дату расчета

Значение F_v^m риск-фактора m на дату расчета v

a. в том случае, когда риск-фактор m является ликвидным, определяется по формуле

$$\Delta f_v^m = \phi^m \left(x_v^{[m]} \right),$$

---

[23] Для расчета условных математических ожиданий используются только наблюдаемые переменные, связанные уравнениями измерений с переменными состояния, относящимися к данной модели.

[24] Для расчета условных ковариаций используются только наблюдаемые переменные, связанные уравнениями измерений с переменными состояния, относящимися к данной модели.

[25] То есть стандартное отклонение случайной величины $\varepsilon_n^{m_1,p_{m_1}}$ в уравнении регрессии

$$\Delta F_n^{m_1} = \beta^{m_1,p_{m_1}} \Delta F_n^{p_{m_1}} + \varepsilon_n^{m_1,p_{m_1}}.$$

Прокси-показатели должны подбираться таким образом, чтобы случайные величины $\varepsilon_n^{m_1,p_{m_1}}$ не завесили от изменений всех риск-факторов, за исключением риск-фактора m_1.

где

- $x_v^{[m]}$ – значения на дату расчета v переменных состояния, соответствующих риск-фактору m, вычисленные по значениям наблюдаемых переменных,
- ϕ^m – функция, определяющая связь риск-фактора m с соответствующими переменными состояния;

b. в том случае, когда риск-фактор m является моделируемым, определяется по формуле

$$f_v^m = \phi^m\left(E[X_v^{[m]}|\mathcal{F}]\right),$$

где

- $X_v^{[m]}$ – значения[26] на дату расчета v переменных состояния, соответствующих риск-фактору m,
- $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра, порожденная наблюдаемыми переменными[27],
- ϕ^m – функция, определяющая связь риск-фактора m с соответствующими переменными состояния,
- условные математические ожидания рассчитываются с помощью моделей динамики переменных[28], к которым относятся соответствующие переменные состояния;

c. в том случае, когда риск-фактор m является немоделируемым, определяется в зависимости от типа риск-фактора.

4.2.6 Характеристики распределения изменений риск-факторов

В рамках используемого гибридного подхода к моделированию изменений риск-факторов их волатильности и корреляции[29] могут быть разложены на историческую и параметрическую компоненты. *Полная волатильность* σ_{total}^m риск-фактора m представляет собой стандартное отклонение его изменения ΔF_{v+1}^m и рассчитывается по формуле

$$\sigma_{total}^m = \sqrt{(\sigma_{historical}^m)^2 + \left(\sigma_{parametric}^m\right)^2},$$

где $\sigma_{historical}^m$ и $\sigma_{parametric}^m$ – историческая волатильность и параметрическая волатильность риск-фактора m. *Историческая волатильность риск-фактора* m определяется по формуле

[26] Поскольку в данном случае не все соответствующие переменные состояния наблюдаемы, речь идет о значениях случайных величин.

[27] Учитываются наблюдения до даты расчета v включительно, в том числе и на моменты времени, не относящиеся к историческому окну.

[28] Для расчета условных математических ожиданий используются только наблюдаемые переменные, связанные уравнениями измерений с переменными состояния, относящимися к данной модели.

[29] Величины, рассматриваемы в данном разделе, непосредственно не участвуют в вычислении показателя VaR, но могут быть использованы для проверки корректности расчетов.

$$\sigma^m_{historical} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\Delta f^m_n)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta f^m_n\right)^2}$$

и представляет собой оценку его волатильности по выборке исторических изменений $\Delta f^m_1, \dots, \Delta f^m_N$. *Параметрическая волатильность риск-фактора* m рассчитывается как

$$\sigma^m_{parametric} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C^{m,m}_n}$$

и представляет собой корень из среднего значения соответствующей параметрической поправки.

Аналогично, *полная, историческая* и *параметрическая ковариации* cov^{m_1,m_2}_{total}, $cov^{m_1,m_2}_{historical}$ и $cov^{m_1,m_2}_{parametric}$ между изменениями $\Delta F^{m_1}_{v+1}$ и $\Delta F^{m_2}_{v+1}$ риск-факторов m_1 и m_2 определяются формулами

$$cov^{m_1,m_2}_{total} = cov^{m_1,m_2}_{historical} + cov^{m_1,m_2}_{parametric},$$

$$cov^{m_1,m_2}_{historical} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta f^{m_1}_n \times \Delta f^{m_2}_n - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta f^{m_1}_n\right) \times \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta f^{m_2}_n\right),$$

$$cov^{m_1,m_2}_{parametric} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C^{m_1,m_2}_n.$$

Полная, историческая и параметрическая корреляции $corr^{m_1,m_2}_{total}$, $corr^{m_1,m_2}_{historical}$ и $corr^{m_1,m_2}_{parametric}$ между изменениями риск-факторов m_1 и m_2 определяются следующими формулами при условии, что входящие в них волатильности положительны:

$$corr^{m_1,m_2}_{total} = \frac{cov^{m_1,m_2}_{total}}{\sigma^{m_1}_{total} \times \sigma^{m_2}_{total}},$$

$$corr^{m_1,m_2}_{historical} = \frac{cov^{m_1,m_2}_{historical}}{\sigma^{m_1}_{historical} \times \sigma^{m_2}_{historical}},$$

$$corr^{m_1,m_2}_{parametric} = \frac{cov^{m_1,m_2}_{parametric}}{\sigma^{m_1}_{parametric} \times \sigma^{m_2}_{parametric}}.$$

Если $\sigma^{m_1}_{historical} \times \sigma^{m_2}_{historical} > 0$ и $\sigma^{m_1}_{parametric} \times \sigma^{m_2}_{parametric} > 0$, то формулу для полной корреляции можно записать в следующем виде:

$$corr^{m_1,m_2}_{total} = corr^{m_1,m_2}_{historical} \times \frac{\sigma^{m_1}_{historical}}{\sigma^{m_1}_{total}} \times \frac{\sigma^{m_2}_{historical}}{\sigma^{m_2}_{total}} + corr^{m_1,m_2}_{parametric} \times \frac{\sigma^{m_1}_{parametric}}{\sigma^{m_1}_{total}} \times \frac{\sigma^{m_2}_{parametric}}{\sigma^{m_2}_{total}}.$$

4.3 Моделирование стоимости портфеля

На этапе моделирования стоимости портфеля осуществляется построение вероятностного распределения величины PnL изменения стоимости портфеля между датой расчета v и датой переоценки $v+1$[30], а также совместного распределения этой величины и изменений риск-факторов ΔF_{v+1}.

4.3.1 Распределение изменения стоимости портфеля

На основе полученных сценариев изменения риск-факторов производится построение *исторических сценариев изменения стоимости портфеля*, каждый из которых соответствует определенному моменту времени n исторического окна и включает в себя

- значение pnl_n изменения стоимости портфеля, представляющее собой величину изменения стоимости портфеля, рассчитанную на основе значений $f_v^1, \dots, f_v^M$ риск-факторов $1, \dots, M$ на дату расчета v и их изменений $\Delta f_n^1, \dots, \Delta f_n^M$ в рамках исторического сценария изменения риск-факторов, соответствующего моменту времени n исторического окна,

- параметрическую поправку σ_n^2, представляющую собой дисперсию отклонения соответствующего исторического изменения стоимости портфеля[31] от рассчитанного значения pnl_n между моментами времени $n-1$ и n,

- набор параметрических поправок $c_n^1, \dots, c_n^M$, представляющих собой набор ковариаций между отклонением исторического изменения стоимости портфеля от значения pnl_n и отклонениями изменений риск-факторов от значений $\Delta f_n^1, \dots, \Delta f_n^M$.

Распределение $Law[PnL]$ величины PnL изменения стоимости портфеля между датой расчета v и датой переоценки $v+h$ моделируется как смесь одномерных нормальных распределений, а именно

$$Law[PnL] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathcal{N}(pnl_n, \sigma_n^2),$$

где

- $\mathcal{N}(\Delta pnl_n, \sigma_n^2)$ – одномерное нормальное распределение со средним Δpnl_n и дисперсией σ_n^2,

- операцию суммирования и равенство в формуле можно понимать как относящиеся к функциям распределения соответствующих случайных величин.

---

[30] Под датой $v+1$ понимается дата, следующая в рабочем календаре за датой расчета v.

[31] Под данной величиной понимается величина $P(f_v^1 + \Delta F_n^1, \dots, f_v^M + \Delta F_n^M) - P(f_v^1, \dots, f_v^M)$.

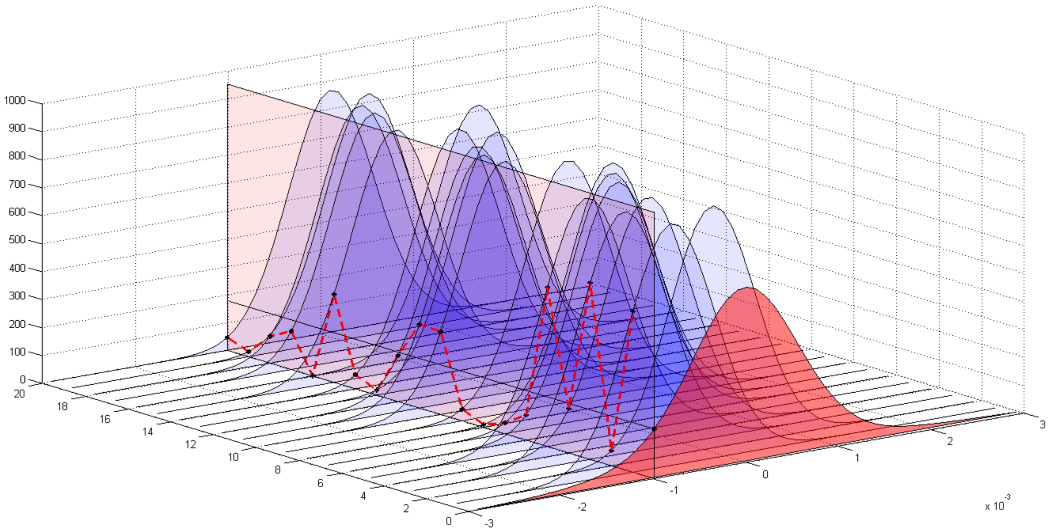

Рисунок 4.3. Смесь одномерных нормальных распределений.

Совместное распределение $Law[(PnL, \Delta F_{v+1}^1, \dots \Delta F_{v+1}^M)]$ величины PnL изменения стоимости портфеля и изменений риск-факторов $1, \dots, M$ между датой расчета v и датой переоценки $v + h$ моделируется как смесь многомерных нормальных распределений, а именно

$$Law[(PnL, \Delta F_v^1, \dots \Delta F_v^M)] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} pnl_n \\ \Delta f_n^1 \\ \vdots \\ \Delta f_n^M \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & c_n^1 & \cdots & c_n^M \\ c_n^1 & C_n^{1,1} & \cdots & C_n^{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n^M & C_n^{M,1} & \cdots & C_n^{M,M} \end{bmatrix}\right),$$

где

- $\mathcal{N}(.,.)$ – многомерное нормальное распределение,
- операцию суммирования и равенство в формуле можно понимать как относящиеся к функциям распределения соответствующих случайных векторов.

4.3.2 Построение исторических сценариев изменения стоимости портфеля

Исторические сценарии изменения риск-факторов строятся следующим образом:

1. Значения pnl_n рассчитываются по формуле

$$pnl_n = P(f_v^1 + \Delta f_n^1, \dots, f_v^M + \Delta f_n^M) - P(f_v^1, \dots, f_v^M).$$

2. Значения параметрических поправок σ_n^2 рассчитываются по формуле

$$\sigma_n^2 = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{M} \frac{\partial P}{\partial f^{m_1}}(f_v^1 + \Delta f_n^1, \dots, f_v^M + \Delta f_n^M) \times \frac{\partial P}{\partial f^{m_2}}(f_v^1 + \Delta f_n^1, \dots, f_v^M + \Delta f_n^M) \times C_n^{m_1, m_2}.$$

3. Значения параметрических поправок $c_n^1, \dots, c_n^M$ рассчитываются по формуле

$$c_n^m = \sum_{m'=1}^{M} \frac{\partial P}{\partial f^{m'}}(f_v^1 + \Delta f_n^1, \dots, f_v^M + \Delta f_n^M) \times C_n^{m,m'}.$$

4.3.3 Характеристики распределения изменения стоимости портфеля

Полная, *историческая* и *параметрическая волатильности*[32] величины изменения стоимости портфеля PnL определяются по формулам

$$\sigma_{total}^{PnL} = \sqrt{(\sigma_{historical}^{PnL})^2 + \left(\sigma_{parametric}^{PnL}\right)^2},$$

$$\sigma_{historical}^{PnL} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(pnl_n)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}pnl_n\right)^2},$$

$$\sigma_{parametric}^{PnL} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2}.$$

Полная, историческая и *параметрическая ковариации* между величиной изменения стоимости портфеля PnL и изменением риск-фактора m рассчитываются по формулам

$$cov_{total}^{PnL,m} = cov_{historical}^{PnL,m} + cov_{parametric}^{PnL,m},$$

$$cov_{historical}^{PnL,m} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}pnl_n \times \Delta f_n^m - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}pnl_n\right) \times \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Delta f_n^m\right),$$

$$cov_{parametric}^{PnL,m} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}c_n^m}.$$

4.4 Расчет риск-метрик

На этапе расчета риск-метрик осуществляется их вычисление как характеристик распределения изменения стоимости портфеля и распределений риск-факторов.

4.4.1 Расчет показателя VaR

Значение показателя VaR вычисляется по функции распределения величины PnL портфеля, значение которой в каждой точке x определяется формулой[33]

$$F_{PnL}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}F_{\mathcal{N}}(x, pnl_n, \sigma_n^2),$$

где $F_{\mathcal{N}}(x, m, \sigma^2)$ – значение в точке x функции нормального распределения со средним m и дисперсией σ^2.

Для временного горизонта, равного одному рабочему дню (обозначим такой временной горизонт через 1), качестве значения показателя $VaR(\Pi, v, 1, \lambda, c)$ берется с

---

[32] Величины, рассматриваемы в данном разделе, непосредственно не участвуют в вычислении показателя VaR, но могут быть использованы для проверки корректности расчетов.

[33] Данное соотношение является эквивалентной записью формулы для распределения PnL из раздела 4.3.1.

противоположным знаком квантиль[34] уровня $1 - \lambda$ распределения величины PnL изменения стоимости портфеля, то есть[35]

$$VaR(\Pi, v, 1, \lambda, c) = -\sup\{z : F_{PnL}(z) \leq 1 - \lambda\}.$$

Значение показателя VaR для больших временных горизонтов может быть приближенно[36] вычислено по формуле

$$VaR(\Pi, v, h, \lambda, c) \approx \sqrt{h} \times VaR(\Pi, v, 1, \lambda, c),$$

где $\sqrt{h}$ – корень из длины временного горизонта в рабочих днях.

4.4.2 Расчет показателя $CVaR$

Показатель вклада в стоимость под риском ($CVaR$[37]) представляет собой оценку вклада некоторого подпортфеля Π' в величину VaR портфеля Π и определяется по формуле

$$CVaR(\Pi, \Pi', v, h, \lambda, c) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} VaR(\Pi + \varepsilon\Pi', v, h, \lambda, c)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Если портфель Π является объединением подпортфелей $\Pi_1, \dots, \Pi_S$, то из определения показателя $CVaR$ вытекает[38], что

$$\sum_{s=1}^{S} CVaR(\Pi, \Pi_s, v, h, \lambda, c) = VaR(\Pi, v, h, \lambda, c).$$

Для выполнения данного свойства при численных расчетах, величина $CVaR$ для подпортфеля Π_s рассчитывается по формуле[39]

$$CVaR(\Pi, \Pi_s, v, h, \lambda, c) = \frac{VaR(\Pi + \varepsilon\Pi_s, v, h, \lambda, c) - VaR(\Pi - \varepsilon\Pi_s, v, h, \lambda, c)}{\sum_{s'=1}^{S}\big(VaR(\Pi + \varepsilon\Pi_{s'}, v, h, \lambda, c) - VaR(\Pi - \varepsilon\Pi_{s'}, v, h, \lambda, c)\big)} \times VaR(\Pi, v, h, \lambda, c).$$

4.4.3 Расчет множественного коэффициента корреляции и определение наиболее значимых факторов

Множественный коэффициент корреляции $\rho_{PnL|m_1,\dots,m_L}$ представляет собой максимально возможную величину корреляции между PnL портфеля и линейной комбинацией изменений факторов $m_1, \dots, m_L$.

---

[34] Более точно – правая квантиль.

[35] Квантиль находится численно по функции распределения, например, методом бисекции (см. [7]). Необходимо, чтобы получаемое относительное значение VaR не менялось при масштабировании портфеля, то есть выполнялось свойство $VaR(\alpha\Pi, v, h, \lambda, c) = \alpha VaR(\Pi, v, h, \lambda, c)$, где α – любое положительное число (портфель $\alpha\Pi$ – состоит из тех же инструментов, что и портфель Π, но их количества отличаются в α раз). Для этого точность определения квантили и начальное приближение можно установить в терминах стандартного отклонения распределения величины PnL.

[36] При использовании данной формулы необходимо учитывать, что точность приближения снижается по мере увеличения длины временного горизонта.

[37] Сокращение от «Component VaR».

[38] Доказательство приведено в [8].

[39] При $\varepsilon = 0{,}1$.

Величина $\rho_{PnL|m_1,\dots,m_L}$ вычисляется по формулам

$$\rho_{PnL|m_1,\dots,m_L} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_{total}^{PnL|<m_1,\dots,m_L>}}{\sigma_{total}^{PnL}}\right)^2}$$

$$\sigma_{total}^{PnL|<m_1,\dots,m_L>} = \sqrt{\min_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_L} E\left[PnL - \sum_{l=1}^{L}\beta_l \Delta F_{v+1}^{m_l} - \beta_0\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sigma_{historical}^{PnL|<m_1,\dots,m_L>}\right)^2 + \left(\sigma_{parametric}^{PnL|<m_1,\dots,m_L>}\right)^2}$$

$$\sigma_{parametric}^{PnL|<m_1,\dots,m_L>} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial P}{\partial f}(f_v + \Delta f_n) - \tilde{\beta}^*\right)^T C_n \left(\frac{\partial P}{\partial f}(f_v + \Delta f_n) - \tilde{\beta}^*\right)},$$

$$\frac{\partial P}{\partial f}(f_v + \Delta f_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial f^1}(f_v^1 + \Delta f_n^1, \dots, f_v^M + \Delta f_n^M) \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial f^M}(f_v^1 + \Delta f_n^1, \dots, f_v^M + \Delta f_n^M) \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{historical}^{PnL|<m_1,\dots,m_L>} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(pnl_n - \sum_{l=1}^{L}\beta_l\, \Delta f_n^{m_l} - \beta_0^*\right)^2},$$

$$\beta^* = \begin{bmatrix}\beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_L^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cov_{total}^{m_1,m_1} & \cdots & cov_{total}^{m_1,m_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{total}^{m_L,m_1} & \cdots & cov_{total}^{m_L,m_L}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} cov_{total}^{PnL,m_1} \\ \dots \\ cov_{total}^{PnL,m_L}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\beta}^* = \begin{bmatrix}\tilde{\beta}_1^* \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_L^*\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\beta}_m^* = \begin{cases}\beta_l^*, \text{при } m = m_l, l \in \{1, \dots, L\} \\ 0, \text{иначе}\end{cases},$$

$$\beta_0^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(pnl_n - \sum_{l=1}^{L}\beta_l\, \Delta f_n^{m_l}\right).$$

Наиболее значимым риск-фактором, влияющим на стоимость портфеля П, будет являться риск-фактор m_1^*, для которого величина $\rho_{PnL|m}$ максимальна, то есть

$$m_1^* = \operatorname*{argmax}_{m\in\{1,\dots,M\}}\left(\rho_{PnL|m}\right).$$

Аналогично, *k*-м *наиболее значимым риск-фактором*, влияющим на стоимость портфеля П, будет риск-фактор m_k^*, определяемый как

$$m_k^* = \operatorname*{argmax}_{m\in\{1,\dots,M\}}\left(\rho_{PnL|m_1^*,\dots,m_{k-1}^*,m}\right).$$

4.5 Моделирование переменных состояния

Для построения исторических сценариев изменения риск-факторов (раздел 4.2.4) и их значений на дату расчета (раздел 4.2.5), необходимо вычислить уловные математические ожидания $E[X_v^{[m]}|\mathcal{F}]$ и $E[\Delta X_n^{[m]}|\mathcal{F}]$, а также условные ковариации $cov(\Delta X_n^{k_1}, \Delta X_n^{k_2}|\mathcal{F})$.

Расчет данных величин осуществляется в следующей последовательности:

- из модели динамики переменных (раздел 4.5.1) исключаются немоделируемые переменные состояния (раздел 4.5.3.1),
- осуществляется калибровка модели динамики переменных (раздел 4.5.3.2) с использованием обобщенной функции правдоподобия (раздел 4.5.2.3.2) и обобщенного алгоритма фильтрации (раздел 4.5.2.2.2),
- выполняется обобщенный алгоритм сглаживания (раздел 4.5.2.5),
- по соответствующим формулам рассчитываются искомые значения условных математических ожиданий и ковариаций (раздел 4.5.2.6).

4.5.1 Модель динамики переменных

В рамках используемого в настоящей методике гибридного метода расчета VaR сценарии изменения моделируемых риск-факторов строятся при помощи моделей динамики переменных (см. раздел 4.2.4).

Каждая модель динамики переменных описывает совместную динамику пары многомерных случайных процессов $(X_n)_{n=0}^N$ и $(Y_n)_{n=1}^N$ для моментов времени $t_1, \dots, t_N$[40]. Процесс $(X_n)_{n=0}^N$ представляет собой значения переменных состояния, которые являются непосредственно риск-факторами, либо через которые риск-факторы выражаются функционально. Процесс $(Y_n)_{n=1}^N$ представляет собой наблюдаемые переменные (например, рыночные котировки).

В *модели динамики переменных*[41] совместная динамика процессов $(X_n)_{n=0}^N$ и $(Y_n)_{n=1}^N$ определяется *уравнениями перехода*

$$X_n = A_n X_{n-1} + \varepsilon_n, \qquad n \in \{1, \dots, N\}$$

и *уравнениями измерений*

$$Y_n = B_n X_n + \eta_n, \qquad n \in \{1, \dots, N\},$$

в которых

- X_n, X_{n-1} и Y_n рассматриваются как случайные матрицы-столбцы,
- A_n и B_n – $(\mathcal{F}_{n-1})$-измеримые случайные матрицы (здесь и далее $\mathcal{F}_n$ – сигма-алгебра, порожденная случайными векторами $Y_1, \dots, Y_n$),

[40] Моменты времени включают в себя все моменты времени из исторического окна, а также все моменты времени, для которых имеются значения наблюдаемых переменны в период между первой и последней датой исторического окна. Величина N в данном случае как правило существенно больше, чем число моментов времени исторического окна, в отличие от остальных разделов, где N на единицу меньше числа моментов времени исторического окна.

[41] В англоязычной литературе для обозначения данной модели используется термин «state-space model».

- ε_n и η_n – случайные векторы, рассматриваемые как матрицы-столбцы, относительно которых для всех $n \in \{1, \dots, N\}$ делаются следующие предположения:
  - $Law[\varepsilon_n|\mathcal{F}_n]$ и $Law[\eta_n|\mathcal{F}_n]$ – многомерные нормальные распределения (здесь и далее $\mathrm{Law}[.|.]$ – условное распределение случайного вектора относительно сигма-алгебры, см. [2]),
  - $cov[\varepsilon_n, X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$ (здесь и далее $cov[.,.|.]$ – условная ковариационная матрица образованная попарными условными ковариациями между элементами случайных векторов сигма-алгебры, см. [2]),
  - $cov[\eta_n, X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$.

4.5.2 Формулы и алгоритмы для модели динамики переменных

4.5.2.1 Алгоритм фильтрации

4.5.2.1.1 Предварительные замечания

Алгоритм фильтрации (см. также [3]) позволяет вычислять величины $E[X_n|\mathcal{F}_n]$ и $D[X_n|\mathcal{F}_n]$ для всех $n \in \{1, \dots, N\}$ ($E[.|.]$ и $D[.|.]$ – соответственно, условные математическое ожидание и дисперсия[42] относительно сигма-алгебры, см. [2]), если известны $E[X_0|\mathcal{F}_0]$ и $D[X_0|\mathcal{F}_0]$, то есть оценивать значения переменных состояния по имеющимся прошлым и текущим наблюдениям и рассчитывать точности получаемых оценок.

Из уравнения перехода получаем, что

$$E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = A_n E[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + E[\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}],$$

$$D[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = A_n D[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] A_n^T + D[\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}].$$

Далее, пользуясь обобщением теоремы о нормальной корреляции (см. [2]) и предполагая, что матрица $D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ является невырожденной[43], имеем

$$E[X_n|\mathcal{F}_n] = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + cov[X_n, Y_n|\mathcal{F}_{n-1}](D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}])^{-1}(Y_n - E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]),$$

$$D[X_n|\mathcal{F}_n] = D[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - cov[X_n, Y_n|\mathcal{F}_{n-1}](D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}])^{-1}(cov[X_n, Y_n|\mathcal{F}_{n-1}])^T.$$

Кроме того, из уравнения измерений следует, что

$$cov[X_n, Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = D[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] B_n^T,$$

$$D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = B_n D[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] B_n^T + D[\eta_n|\mathcal{F}_{n-1}].$$

4.5.2.1.2 Формулы алгоритма фильтрации

Введем следующие обозначения:

$$Z_n = E[X_n|\mathcal{F}_n], \quad P_n = D[X_n|\mathcal{F}_n], \quad W_n = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}], \quad Q_n = D[X_n|\mathcal{F}_{n-1}],$$

$$V_n = E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}], \quad F_n = D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}], \quad H_n = cov[X_n, Y_n|\mathcal{F}_{n-1}], \quad G_n = F_n^{-1}.$$

Полученные выше соотношения приводят к следующим формулам:

[42] Под дисперсией случайного вектора понимается матрица попарных ковариаций между его элементами.

[43] Формулы для произвольного случая представлены в разделе 4.5.2.2.

$$W_n = A_n Z_{n-1} + E[\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}],$$
$$Q_n = A_n P_{n-1} A_n^T + D[\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}],$$
$$V_n = B_n W_n + E[\eta_n|\mathcal{F}_{n-1}],$$
$$F_n = B_n Q_n B_n^T + D[\eta_n|\mathcal{F}_{n-1}],$$
$$G_n = F_n^{-1}$$
$$H_n = Q_n B_n^T,$$
$$Z_n = W_n + H_n G_n (Y_n - V_n),$$
$$P_n = Q_n - H_n G_n H_n^T,$$

Если величины Z_0 и P_0 заданы, то данные формулы определяют *алгоритм фильтрации*, позволяющий последовательно вычислить Z_n и P_n для всех $n \in \{1, \dots, N\}$ при условии, что все матрицы F_n являются невырожденными.

4.5.2.2 Обобщенный алгоритм фильтрации

4.5.2.2.1 Предварительные замечания

В том случае, когда матрица $D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ вырождена, для использования теоремы о нормальной корреляции необходимо отбросить «лишние» наблюдения. Предположим, что для каждого $n \in \{1, \dots, N\}$ построена матрица O_n такая, что $O_n\, D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]O_n^T$ – диагональная матрица, размерность которой равна рангу матрицы $D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]$.

Пусть $Y_n^* = O_n(Y_n - V_n)$, $n \in \{1, \dots, N\}$. Вектор Y_n^* выражается через векторы $Y_1, \dots, Y_n$. Поскольку вектор Y_n также выражается через векторы $Y_1^*, \dots, Y_n^*$, то равенство $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^*$ выполнено для всех $n \in \{1, \dots, N\}$. Таким образом, наблюдаемые переменные $(Y_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}$ можно заменить на выражающиеся через них переменные Y_n^*, для которых справедливо предположение о невырожденности матриц $D[Y_n^*|\mathcal{F}_{n-1}^*]$.

4.5.2.2.2 Формулы обобщенного алгоритма фильтрации

Формулы для вычисления Z_n и P_n в алгоритме фильтрации можно заменить на следующие соотношения:

$$Y_n^* = O_n(Y_n - V_n),$$
$$H_n^* = H_n O_n^T,$$
$$Z_n = W_n + H_n^* (F_n^*)^{-1} Y_n^*,$$
$$P_n = Q_n - H_n^* (F_n^*)^{-\frac{1}{2}} \left(H_n^* (F_n^*)^{-\frac{1}{2}} \right)^T,$$

где O_n – такая, что $O_n\, D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]O_n^T$ – диагональная матрица, с размерностью равной рангу матрицы $D[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, алгоритм построения которой приводится далее, $(F_n^*)^{-\frac{1}{2}}$ – диагональная матрица с элементами $(F_{n,i,i}^*)^{-\frac{1}{2}}$ на диагонали.

Таким образом, для того, чтобы отказаться от предположения о невырожденности матриц F_n в алгоритме фильтрации, в качестве матриц G_n можно использовать матрицы $F_n^+ = O_n^T (F_n^*)^{-\frac{1}{2}} O_n$. В том случае, когда все матрицы F_n невырождены, данный *обобщенный* *алгоритм фильтрации* дает те же итоговые и промежуточные матрицы, что и исходный алгоритм.

4.5.2.2.3 Алгоритм построения матрицы O_n

Алгоритм состоит в приведении матрицы F_n с помощью последовательности симметричных элементарных преобразований ее строк и столбцов к диагональному виду и последующему удалению из нее нулевых строк и столбцов. При этом матрица O_n получается из единичной матрицы с помощью тех же преобразований, которые применялись к строкам матрицы F_n.

Инициализация

Пусть $F_n^* = F_n$ и O_n – единичная матрица, размерность которой равна размерности матрицы F_n.

Шаг алгоритма

Пусть осуществлено $k-1$ шагов алгоритма, где $k \in \{1, \dots, \dim F_n\}$. Пусть i_k – та строка среди строк $\{k, \dots, \dim F_n\}$ матрицы F_n^*, в которой стоит наибольший по модулю диагональный элемент, то есть

$$i_k = \underset{i \in \{k, \dots, \dim F_n\}}{\operatorname{argmax}} \left| F_{n,i,i}^k \right|.$$

Если $i_k > k$, то строки i_k и k, а затем столбцы i_k и k матрицы F^*, а также строки i_k и k матрицы O_n меняются местами.

Если $|F_{n,k,k}^*| < \delta_1$,[44] то из матрицы O_n удаляются строки $\{k, \dots, \dim F_n\}$ и выполнение алгоритма завершается. При этом должно выполняться следующее условие: все элементы вектора $O_n Y_n$, начиная с элемента k по модулю должны быть меньше δ_2, иначе рассматриваемая модель в пространстве состояний считается некорректной по отношению к наблюдениям.

Если же $\left|F_{n,k,k}^*\right| \geq \delta_1$, то для каждого $i \in \{k+1, \dots, \dim F_n\}$ вычисляется значение $\lambda_i^k = F_{n,i,k}^* / F_{n,k,k}^*$, в матрицах F_n^* и O_n из строки i вычитается строка k, умноженная на λ_i^k, а затем в матрице F_n^* из столбца i вычитается столбец k, умноженный на λ_i^k. Если $k < \dim F_n$, то выполняется следующий шаг алгоритма, иначе выполнение алгоритма завершается.

После выполнения k шагов алгоритма первые k строк и столбцов матрицы F_n^* содержат ненулевые элементы только на главной диагонали.

4.5.2.3 Функция правдоподобия

Функция правдоподобия и обобщенная функция правдоподобия используются для калибровки модели динамики переменных.

4.5.2.3.1 Вычисление функции правдоподобия

Пусть матрицы A_n, B_n, $E[\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, $D[\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, $E[\eta_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, $D[\eta_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, $E[X_0|\mathcal{F}_0]$, $D[X_0|\mathcal{F}_0]$ являются функциями от некоторого вектора параметров $\theta \in \Theta$. Поскольку $Law[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathcal{N}(V_n, F_n)$ ($\mathcal{N}(m, C)$ – многомерное нормальное распределение со средним m и

---

[44] Рекомендуемые значения параметров – $\delta_1 = 10^{-12}$, $\delta_2 = 6\delta_1$.

ковариационной матрицей C), то, если для всех $n \in \{1, \dots, N\}$ матрицы F_n невырождены, значение логарифмической функции правдоподобия может быть вычислено по формуле

$$L(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\ln 2\pi \sum_{n=1}^{N} d_n + \sum_{n=1}^{N} \ln\det F_n + \sum_{n=1}^{N} \langle Y_n - V_n, G_n(Y_n - V_n)\rangle\right), \qquad \theta \in \Theta,$$

где d_n – размерность Y_n, $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов.

4.5.2.3.2 Вычисление обобщенной функции правдоподобия

Формулу для вычисления значения логарифмической функции правдоподобия можно заменить следующим выражением:

$$L^*(\theta) = -\frac{1}{2}\left(\ln 2\pi \sum_{n=1}^{N} d_n - \sum_{n=1}^{N} \ln\det O_n O_n^T + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_n} \ln F^*_{n,i,i} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_n} \frac{\left(Y^*_{n,i}\right)^2}{F^*_{n,i,i}}\right), \qquad \theta \in \Theta,$$

где d_n – размерность вектора $Y_n^* = (Y^*_{n,1}, \dots, Y^*_{n,d_n})$.

Для всех $\theta \in \Theta$, для которых матрицы F_n невырождены при всех $n \in \{1, \dots, N\}$, будет выполнено равенство $L^*(\theta) = L(\theta)$.

4.5.2.4 Алгоритм сглаживания

4.5.2.4.1 Предварительные замечания

Алгоритм сглаживания позволяет рассчитывать величины $E[X_n|\mathcal{F}_N]$ и $D[X_n|\mathcal{F}_N]$ для всех $n \in \{1, \dots, N\}$, если известны $E[X_N|\mathcal{F}_N]$ и $D[X_N|\mathcal{F}_N]$. Таким образом, алгоритм сглаживания вместе с алгоритмом фильтрации позволяет строить оценки переменных состояния по всем имеющимся наблюдениям и вычислять точности получаемых оценок.

Из предположений модели и леммы о независимости вытекает, что

$$Law[X_n|\mathcal{F}_N, X_{n+1}] = Law[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}].$$

Согласно обобщению теоремы о нормальной корреляции, если матрица $D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ является невырожденной, то выполнены соотношения

$$E[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}] = E[X_n|\mathcal{F}_n] + cov[X_n, X_{n+1}|\mathcal{F}_n](D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^{-1}(X_{n+1} - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]),$$
$$D[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}] = D[X_n|\mathcal{F}_n] - cov[X_n, X_{n+1}|\mathcal{F}_n](D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^{-1}(cov[X_n, X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^T.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E[X_n|\mathcal{F}_N] &= E[E[X_n|\mathcal{F}_N, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N] = E[E[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N] \\ &= E[X_n|\mathcal{F}_n] + cov[X_n, X_{n+1}|\mathcal{F}_n](D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^{-1}(E[X_{n+1}|\mathcal{F}_N] - E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} D[X_n|\mathcal{F}_N] &= E[D[X_n|\mathcal{F}_N, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N] + D[E[X_n|\mathcal{F}_N, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N] \\ &= E[D[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N] + D[E[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N] \\ &= D[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}] + D[E[X_n|\mathcal{F}_n, X_{n+1}]|\mathcal{F}_N]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D[X_n|\mathcal{F}_N] = D[X_n|\mathcal{F}_n] - cov[X_n, X_{n+1}|\mathcal{F}_n](D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^{-1}(D[X_{n+1}|\mathcal{F}_N] \\ - D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])((D[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^{-1})^T(cov[X_n, X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^T. \end{aligned}$$

4.5.2.4.2 Формулы алгоритма сглаживания

Введем следующие обозначения:

$U_n = E[X_n|\mathcal{F}_N], \quad R_n = D[X_n|\mathcal{F}_N], \quad S_n = P_{n-1}A_n^T Q_n^{-1}, \qquad Q_n = D[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$

Полученные выше соотношения приводят к следующим формулам:

$$S_n = P_{n-1}A_n^T Q_n^{-1},$$
$$U_{n-1} = Z_{n-1} + S_n(U_n - W_n)$$
$$R_{n-1} = P_{n-1} + S_n(R_n - Q_n)S_n^T$$

Если величины Z_N и P_N заданы и матрицы Q_n являются невырожденными[45], то данные формулы вместе с соотношениями $U_N = Z_N$ и $R_N = P_N$ определяют *алгоритм сглаживания*, который позволяет в обратной последовательности вычислить U_n и R_n для всех $n \in \{0, \dots, N\}$.

4.5.2.5 Обобщенный алгоритм сглаживания

В формулах алгоритма сглаживания матрицы Q_n^{-1} могут быть заменены на матрицы Q_n^+, которые определяются аналогично матрицам F_n^+ в алгоритме сглаживания. Такая замена дает *обобщенный алгоритм сглаживания*, который позволяет отказаться от предположения невырожденности матриц Q_n.

4.5.2.6 Распределение приращений переменных состояния

Для произвольных моментов времени $n - k$ и n:

$$E[X_n - X_{n-k}|\mathcal{F}_N] = U_n - U_{n-k}$$
$$D[X_n - X_{n-k}|\mathcal{F}_N] = R_n + R_{n-k} - 2cov[X_{n-k}, X_n|\mathcal{F}_N]$$
$$\begin{aligned}
E[X_{n-k}X_n^T|\mathcal{F}_N] &= E[E[X_{n-k}X_n^T|\mathcal{F}_N, X_n, X_{n-k+1}]|\mathcal{F}_N] = E[E[X_{n-k}|\mathcal{F}_N, X_n, X_{n-k+1}]X_n^T|\mathcal{F}_N] \\
&= E[E[X_{n-k}|\mathcal{F}_n, X_n, X_{n-k+1}]X_n^T|\mathcal{F}_N] \\
&= E[(Z_{n-k} + S_{n-k+1}(X_{n-k+1} - W_{n-k+1}))X_n^T|\mathcal{F}_N] \\
&= (Z_{n-k} - S_{n-k+1}W_{n-k+1})U_n^T + S_{n-k+1}E[X_{n-k+1}X_n^T|\mathcal{F}_N] \\
&= (Z_{n-k} - S_{n-k+1}W_{n-k+1})U_n^T + S_{n-k+1}(cov[X_{n-k+1}, X_n|\mathcal{F}_N] + U_{n-k+1}U_n^T) \\
&= \big(Z_{n-k} + S_{n-k+1}(U_{n-k+1} - W_{n-k+1})\big)U_n^T + S_{n-k+1}cov[X_{n-k+1}, X_n|\mathcal{F}_N] \\
&= U_{n-k}U_n^T + S_{n-k+1}cov[X_{n-k+1}, X_n|\mathcal{F}_N]
\end{aligned}$$

$$cov[X_{n-k}, X_n|\mathcal{F}_N] = S_{n-k+1}cov[X_{n-k+1}, X_n|\mathcal{F}_N] = S_{n-k+1} \dots S_n R_n$$

Пусть моментам времени $1, \dots, N'$[46] исторического окна соответствуют моменты времени $(n(n'))_{n'=1}^{N'}$ в модели динамики переменных. Полученные формулы позволяют вычислить величины $E\big[\Delta X_{n(n')}\big|\mathcal{F}_N\big]$ и $D\big[\Delta X_{n(n')}\big|\mathcal{F}_N\big]$ для всех $n' \in \{2, \dots, N'\}$, где $\Delta X_{n(n')} = X_{n(n')} - X_{n(n'-1)}$ – изменения переменных состояния между двумя последовательными моментами времени исторического окна.

---

[45] Формулы для произвольного случая представлены в разделе 4.5.2.5.

[46] В данном разделе обозначения моментов времени исторического окна отличаются от используемых в остальных разделах, поскольку аналогичные обозначения используются для нумерации моментов времени в модели динамики переменных.

4.5.3 Подготовка и калибровка модели динамики переменных

4.5.3.1 Исключение немоделируемых переменных состояния

Перед калибровкой модели из модели динамики переменных необходимо исключить переменные состояния, для которых оценки значений которых имеющихся значений наблюдаемых переменных недостаточно[47].

Пусть B_n – матрицы измерений в модели, столбцы которой соответствуют переменным состояния, а строки – наблюдаемым переменным. Исключение переменных происходит по следующему алгоритму:

1. Из модели исключатся наблюдаемые переменные, число относящихся к датам исторического окна значений которых меньше заданного порогового числа значений[48].
2. Историческое окно разбивается равномерно на заданное число интервалов[49].
3. Из исходного набора переменных состояния для каждого из интервалов исторического окна последовательно исключаются немоделируемые переменные состояния. При этом для каждого из интервалов используется один и тот же набор наблюдаемых переменных, получившийся на шаге 1, то есть они не исключаются последовательно. Для каждого из интервалов исторического окна применяется следующий алгоритм:
   a. Формируется матрица B как объединение[50] строк матриц B_n, относящихся к данному интервалу. При этом несколько строк матрицы B могут соответствовать одной наблюдаемой переменной.
   b. Из исходной матрицы B выбираются столбцы, соответствующие оставшимся переменным состояния и удаляются строки, в которых имеются ненулевые значение вне выбранных столбцов, а также соответствующие наблюдаемые перемененные. Также удаляются наблюдаемые переменные, для которых нет ни одного значения, относящегося к датам рассматриваемого интервала исторического окна и соответствующие им строки матрицы B. Получившуюся матрицу обозначим через $\bar{B}$.
   c. Если ранг матрицы $\bar{B}$ равен числу ее столбцов, то на данном интервале исторического окна все необходимые переменные состояния уже удалены и необходимо перейти к следующему интервалу, если таковой имеется.
   d. Если ранг матрицы $\bar{B}$ меньше числа ее столбцов, то определяется столбец, являющийся линейной комбинацией остальных[51].
   e. Найденный на предыдущем шаге столбец и соответствующая ему переменная состояния удаляются. Также удаляются строки, содержащие ненулевые

---

[47] Изложенный далее алгоритм близок к определению моделируемых риск-факторов согласно [6].

[48] Необходимо использовать не менее 20 значений.

[49] Необходимо использовать не менее 24 интервалов.

[50] Строки, в которых нули стоят на одних и тех же местах, можно считать одинаковыми и не дублировать их в матрице B.

[51] Такой столбец всегда существует, поскольку ранг матрицы $\bar{B}$ меньше числа ее столбцов. Если таких столбцов несколько, конечный результат алгоритма не зависит от выбора того или другого из них.

значения в удаленном столбце и соответствующие им наблюдаемые переменные.

f. Алгоритм повторяется начиная с шага c. для оставшихся столбцов и строк матрицы $\bar{B}$.

4. Из матрицы B выбираются столбцы, соответствующие переменным состояния, которые не были исключены на предыдущем шаге и удаляются строки, содержащие ненулевые значения вне выбранных столбцов.

Модель строится для получившейся матрицы B и соответствующих ей переменных состояния и наблюдаемых переменных. Исключенные переменные состояния считаются немоделируемыми.

4.5.3.2 Калибровка модели

Модель динамики переменных калибруется методом максимального правдоподобия. В качестве вектора параметров используется вектор $\hat{\theta}$, при котором значение обобщенной функции правдоподобия максимально, то есть

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} L^*(\theta).$$

Для численного решения данной оптимизационной задачи можно использовать квази-метод Ньютона, EM-алгоритм, либо другие методы оптимизации (см. [4]).

5 КОНСЕРВАТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ $\boldsymbol{VaR}$

При расчете показателя VaR на практике построить распределение изменения стоимости всего портфеля П в рамках стандартного механизма часто не удается по различным причинам, таким, например, как технические сбои или недостаточность статических данных. В этом случае показатель VaR с помощью стандартного механизма может быть вычислен лишь для неполного портфеля Π^+. Подпортфель Π^+ получается из исходного портфеля исключением подпортфеля позиций по «проблемным» инструментам Π^- (таким образом, портфель П является объединением портфелей Π^+ и Π^-).

Консервативный механизм вычисления показателя VaR позволяет скорректировать результаты расчетов, полученные при помощи стандартного механизма, так, чтобы они были адекватны для всего портфеля.

5.1 Предварительные замечания

Пусть PnL, PnL^+ и PnL^- – соответственно, изменение стоимостей портфелей П, Π^+ и Π^- на рассматриваемом временном горизонте. Функция распределения F^+ случайной величины PnL^+ предполагается известной (простроенной в рамках стандартного механизма вычисления показателя VaR), а про функцию распределения F^- случайной величины PnL^-

предполагается, что она принадлежит некоторому параметрическому семейству $(F_\theta^-)_{\theta\in\Theta}$. Оценим квантиль[52] уровня λ случайной величины $PnL = PnL^+ + PnL^-$.

Пусть q – любое действительное число, а q_1 и q_2 – такие числа, что $q = q_1 + q_2$. Тогда

$$P(PnL^+ + PnL^- \geq q) \geq P(PnL^+ \geq q_1, PnL^- \geq q_2)$$
$$= P(PnL^+ \geq q_1) - P(PnL^+ \geq q_1, PnL^- < q_2) \geq P(PnL^+ \geq q_1) - P(PnL^- < q_2)$$

Далее, пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. Тогда

$$P\left(PnL^+ + PnL^- \geq q_{\lambda_1}(PnL^+) + q_{\lambda_2}(PnL^-)\right)$$
$$\geq P\left(PnL^+ \geq q_{\lambda_1}(PnL^+)\right) - P\left(PnL^- < q_{\lambda_2}(PnL^-)\right) \geq 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \geq 1 - \lambda.$$

Следовательно, $q_\lambda(PnL) \geq q_{\lambda_1}(PnL^+) + q_{\lambda_2}(PnL^-)$, то есть

$$VaR(\Pi, v, h, 1 - (\lambda_1 + \lambda_2), c) \leq VaR(\Pi^+, v, h, 1 - \lambda_1, c) + VaR(\Pi^-, v, h, 1 - \lambda_2, c)^{53}.$$

Пусть $VaR^\theta(\Pi^-, v, h, 1 - \lambda, c)$[54] – значение показателя VaR для портфеля Π^- в предположении, что случайная величина PnL^- имеет функцию распределения F_θ^-. Пользуясь полученным неравенством, имеем

$$VaR(\Pi, v, h, 1 - \lambda, c) \leq \inf_{\lambda_1,\lambda_2:\lambda_1+\lambda_2=\lambda}\{VaR(\Pi^+, v, h, 1 - \lambda_1, c) + VaR(\Pi^-, v, h, 1 - \lambda_2, c)\}$$
$$\leq \inf_{\lambda_1,\lambda_2:\lambda_1+\lambda_2=\lambda}\left\{VaR(\Pi^+, v, h, 1 - \lambda_1, c) + \sup_{\theta\in\Theta} VaR^\theta(\Pi^-, v, h, 1 - \lambda_2, c)\right\} \leq$$
$$\leq \min_{\lambda'\in\{\lambda^1,\dots,\lambda^n\}:0<\lambda'<\lambda}\left\{VaR(\Pi^+, v, h, 1 - \lambda + \lambda', c) + \sup_{\theta\in\Theta} VaR^\theta(\Pi^-, v, h, 1 - \lambda', c)\right\}.$$

Предположим, что портфель Π^- включает в себя позиции по инструментам $1, \dots, K$ величиной $c^1, \dots, c^K$ соответственно, изменения цен инструментов на временном горизонте h имеют многомерное нормальное распределение, причем стандартное отклонение изменения (волатильность) цены инструмента i ограничена сверху величиной σ^i_{max}[55]. Тогда при $\lambda' > \frac{1}{2}$ выполнено

$$\sup_{\theta\in\Theta} VaR^\theta(\Pi^-, v, h, 1 - \lambda', c) = -q_N(\lambda') \times (|c^1|\sigma^1_{max} + \dots + |c^K|\sigma^K_{max}),$$

где $q_N(\lambda')$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня λ'.

Чтобы исключить значения доверительных уровней, для которых расчет VaR может оказаться некорректным, необходимо также потребовать, чтобы

$$\lambda_{critical} \leq \lambda' \leq \lambda - \lambda_{critical}$$

---

[52] В данном разделе под квантилью уровня λ случайной величины Z понимается число $q_\lambda(Z)= sup\,\{q: P(Z < q) \leq \lambda\}$. Можно показать, что $P(Z \leq q_\lambda) \geq \lambda$, $P(Z > q_\lambda) \leq 1 - \lambda$, $P(Z < q_\lambda) \leq \lambda, P(Z \geq q_\lambda) \geq 1 - \lambda$, а также что выполнено равенство $VaR(\Pi, v, h, 1 - \lambda, c) = -q_\lambda(PnL)$.

[53] Например, $VaR(\Pi, v, h, 99\%, c) \leq VaR(\Pi^+, v, h, 99{,}1\%, c) + VaR(\Pi^-, v, h, 99{,}9\%, c)$, если выбрать $\lambda_1 = 0{,}9\%$ и $\lambda_2 = 0{,}1\%$.

[54] В данном разделе, в отличие от других разделов, для удобства выкладок доверительный уровень выражается через параметр λ как $1 - \lambda$.

[55] При данных предположениях $(F_\theta^-)_{\theta\in\Theta} = \left(\mathcal{N}(0,\sigma^2)\right)_{\sigma\in[0,|c^1|\sigma^1_{max}+\dots+|c^K|\sigma^K_{max}]}$, где $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ – нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2.

где $\lambda_{critical}$ – значение, соответствующее максимальному доверительному уровню, для которого расчеты считаются корректными[56]. Множество $\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ в формуле выше можно задать, разбив интервал $[\lambda_{critical}, \lambda - \lambda_{critical}]$ точками с постоянным шагом.

5.2 Расчет значения показателей VaR и $CVaR$ с учетом консервативной поправки

Значение *показателя VaR с учетом консервативной поправки* вычисляется по формуле

$$VaR(\Pi, v, h, 1-\lambda, c) =$$
$$= \inf_{\lambda' \in \{\lambda^1,\dots,\lambda^n\}: 0<\lambda'<\lambda} \{VaR(\Pi^+, v, h, 1-\lambda+\lambda', c) - q_N(\lambda')(|c^1|\sigma^1_{max} + \ldots + |c^K|\sigma^K_{max})\},$$

где

- Π^+ – подпортфель позиций портфеля П, вычисления показателя VaR по которым удалось осуществить с помощью стандартного механизма,
- Π^- – подпортфель позиций портфеля П, не вошедших в портфель Π^+,
- $\sigma^1_{max}, \ldots, \sigma^K_{max}$ и $c^1, \ldots, c^K$ – *консервативные волатильности цен инструментов*[57] и размеры соответствующих им позиций в портфеле Π^-,
- $q_N(\lambda')$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня λ',
- $\lambda^k = \lambda_{critical} + \frac{k-1}{n-1}(\lambda - 2\lambda_{critical}), k \in \{1, \dots, n\}$,
- $\lambda_{critical}$ – значение, соответствующее максимальному доверительному уровню, для которого расчеты считаются корректными[58].

Значение *консервативной поправки*, то есть величины, на которую увеличилось значение показателя VaR в результате действия консервативного механизма, рассчитывается по формуле

$$VaR(\Pi, v, h, 1-\lambda, c) - VaR(\Pi^+, v, h, 1-\lambda, c),$$

где $VaR(\Pi^+, v, h, 1-\lambda, c)$ и $VaR(\Pi, v, h, 1-\lambda, c)$ – соответственно, значение показателя VaR и значение показателя VaR с учетом консервативной поправки для портфелей Π^+ и П.

Значение *показателя $CVaR$ с учетом консервативной поправки* вычисляется по тем же формулам, что и при использовании стандартного механизма[59].

---

[56] Таким образом, расчет показателя VaR считается корректным при $\lambda_{critical} \le \lambda$, а рассматриваемый алгоритм применим при $\lambda_{critical} \le \frac{\lambda}{2}$.

[57] Данные величины являются параметрами вычисления показателя VaR с учетом консервативной поправки и представляют собой максимально возможные волатильности цен инструментов в абсолютном выражении в предположении нормальной распределенности их изменений.

[58] Рекомендуемое значение при длине исторического окна 2 года – 99,9%.

[59] В соответствующих формулах раздела 4.4.2 используются значения показателя VaR с учетом консервативной поправки.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Список терминов и определений

- **Алгоритм сглаживания/Обобщенный алгоритм сглаживания** – алгоритм для модели динамики переменных, позволяющий оценивать значения переменных состояния по всем имеющимся значениям наблюдаемых переменных.
- **Алгоритм фильтрации/Обобщенный алгоритм фильтрации** – алгоритм для модели динамики переменных, позволяющий оценивать значения переменных состояния по значениям наблюдаемых переменных до текущего момента времени.
- ***Банк*** – Публичное акционерное общество «Сбербанк России» (ПАО Сбербанк).
- **Валюта расчета –** параметр вычисления показателя VaR. Значение показателя выражается в валюте расчета.
- **Временной горизонт –** параметр вычисления показателя VaR, определяющий длину периода времени между датой расчета и датой переоценки.
- **Время закрытия** – параметр вычисления показателя VaR, вместе с другими параметрами определяющий историческое окно.
- ***Группа Сбербанка*** – объединение ПАО Сбербанк, его дочерних и ассоциированных компаний, занимающихся банковской деятельностью.
- **Данные по позиции** – идентификаторы инструментов и размеры позиций в портфеле.
- ***Дата переоценки*** – дата, возможная переоценка портфеля на которую рассматривается при вычислении показателя VaR.
- **Дата расчета** – параметр вычисления показателя VaR, представляющий собой дату по отношению к стоимости портфеля на которую осуществляется его переоценка.
- **Длина исторического окна** – параметр вычисления показателя VaR, вместе с другими параметрами определяющий историческое окно.
- **Доверительный уровень –** параметр расчета показателя VaR, представляющий собой значение вероятности, с которой отрицательная переоценка рыночной стоимости портфеля не превысит значения рассчитываемого показателя.
- **Достаточный набор зависимых переменных состояния (для переменной состояния)** – набор переменных состояния, относительно которого данная переменная состояния независима с остальными переменными состояния.
- **Значения показателя $VaR/CVaR$ с учетом консервативной поправки** – значение показателя $VaR/CVaR$, получаемое в результате использования стандартного и консервативного механизмов.
- **Исторический сценарий изменения риск-факторов –** набор числовых значений, определяющих распределение изменений риск-факторов между двумя последовательными моментами времени исторического окна.
- **Исторический сценарий изменения стоимости портфеля –** набор числовых значений, определяющих распределение изменения стоимости портфеля, а также

совместное распределение данной величины и изменений риск-факторов между двумя последовательными моментами времени исторического окна.

- ***Историческое значение переменной*** – значение переменной на один из моментов времени исторического окна.

- **Историческое окно –** набор моментов времени, изменения значений рыночных факторов между которыми берутся за основу для построения сценариев возможного изменения рыночной стоимости портфеля.

- **Компонента полного набора переменных состояния –** поднабор полного набора переменных состояния, относящихся к одной модели динамики переменных.

- **Консервативная волатильность цены инструмента** – параметр, используемый в рамках консервативного механизма расчета VaR.

- **Консервативная поправка** – величина, на которую увеличивается значение показателя VaR в результате действия консервативного механизма.

- **Консервативный механизм (вычисления показателя $\boldsymbol{VaR}$)** – вспомогательный способ расчета показателя VaR, определяемый настоящей методикой в дополнение к стандартному механизму.

- **Коэффициент чувствительности стоимости портфеля к изменению риск-фактора** – производная стоимости портфеля по значению риск-фактора.

- **Ликвидный риск-фактор** – риск-фактор, выражающийся только через наблюдаемые переменные состояния.

- **Множественный коэффициент корреляции** – максимально возможное значение коэффициента корреляции между изменением стоимости портфеля и изменением линейной комбинации риск-факторов.

- **Моделируемая переменная состояния** – переменная состояния, все исторические значения которой могут быть оценены с помощью модели динамики переменных.

- **Моделируемый риск-фактор –** риск-фактор, выражающийся только через наблюдаемые, либо моделируемые переменные состояния.

- **Модель динамики переменных** – математическая модель, описывающая в форме многомерного случайного процесса совместную динамику набора переменных состояния и связанных с ними наблюдаемых переменных.

- **Наблюдаемая переменная –** переменная, значения которой наблюдаются непосредственно.

- **Наблюдаемая переменная состояния** – переменная состояния, все исторические значения которой могут быть вычислены.

- **Набор риск-факторов для переоценки портфеля** – все риск-факторы, участвующие в формуле ценообразования портфеля.

- **Наиболее значимый/$\boldsymbol{k}$-ый наиболее значимый фактор, влияющий на стоимость портфеля –** риск-фактор для которого значение соответствующего множественного корреляции максимально среди всех риск-факторов.

- **Немоделируемая переменная состояния** – переменная состояния, не являющаяся наблюдаемой или моделируемой.

- **Немоделируемый риск-фактор –** риск-фактор, не являющийся ликвидным или моделируемым.

- ***Параметрическая поправка*** – элемент исторического сценария изменения риск-факторов или стоимости портфеля, позволяющий учесть неполноту рыночных данных при расчете показателя VaR.

- **Переменная –** числовая величина, имеющая динамику во времени.

- **Переменная состояния –** переменная, динамика которой описывается с помощью уравнений перехода.

- **Позиция по финансовому инструменту** – финансовый инструмент и величина позиции.

- **Показатель вклада в стоимость под риском ($\boldsymbol{CVaR}$)** – мера вклада подпортфеля в значение показателя VaR всего портфеля.

- **Показатель стоимости под риском ($\boldsymbol{VaR}$) –** мера возможной отрицательной переоценки рыночной стоимости портфеля финансовых инструментов на заданном временном горизонте и при заданном доверительном уровне.

- **Полная/историческая/параметрическая волатильность/корреляция/ковариация изменений риск-факторов/изменения стоимости портфеля** – числовые характеристики распределения изменений риск-факторов/стоимости портфеля между датой расчета и датой переоценки.

- **Полный набор переменных состояния** – набор переменных состояния, соответствующих риск-факторам из полного набора риск-факторов, пополненный дополнительными переменными состояния в рамках использования стандартного механизма расчета показателя VaR.

- **Полный набор риск-факторов** – набор риск-факторов для переоценки портфеля, пополненный дополнительными риск-факторами в рамках использования стандартного механизма расчета показателя VaR.

- **Портфель (позиций по финансовым инструментам)** – параметр расчета показателя VaR, представляющий собой набор позиций по финансовым инструментам.

- **Прокси-показатель** – риск-фактор, используемый для построения сценариев изменения другого немоделируемого риск-фактора.

- **Рабочий календарь** – параметр вычисления показателя VaR, вместе с другими параметрами определяющий историческое окно.

- ***Регулятивный капитал*** – величина капитала, которым должен/должна обладать Банк/Группа в соответствии с требованиями регулирующих органов. См. также [5] и [6].

- **Риск-фактор** – переменная, входящая в формулу ценообразования инструмента или портфеля.

- **Рыночные данные** – текущие и исторические значения наблюдаемых рыночных переменных.
- ***Рыночный риск*** – риск возникновения убытков у Группы вследствие неблагоприятного изменения рыночной стоимости финансовых инструментов.
- **Специфическая волатильность риск-фактора по отношению к прокси-показателю** – волатильность риск-фактора, не объясняемая изменениями прокси-показателя.
- **Справочные данные** – данные по эмитентам, странам и валютам, используемые при расчете показателя VaR.
- **Стандартный механизм (расчета показателя VaR)** – основной способ расчета показателя VaR, определяемый настоящей методикой.
- **Статические данные** – значения атрибутов финансовых инструментов, используемые при расчете показателя VaR.
- **Уравнения измерений** – уравнения в модели динамики переменных, описывающие связь переменных состояния с наблюдаемыми переменными.
- **Уравнения перехода** – уравнения в модели динамики переменных, описывающие динамику переменных состояния.
- ***Финансовый инструмент*** – физический или виртуальный документ, представляющий некоторое юридическое соглашение и имеющий рыночную стоимость.
- **Формула ценообразования инструмента/портфеля** – формула, выражающая цену инструмента/стоимость портфеля через значения риск-факторов.
- ***Экономический капитал*** – величина капитала Банка/Группы, необходимая для покрытия всех видов рисков (в том числе кредитного, операционного, рыночного, бизнес-риска), принимаемых Банком/Группой в процессе своей деятельности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Перечень сокращений

ДР CIB – Департамент рисков CIB

VaR, Value at risk – показатель стоимости под риском

P&L, profit and loss – изменение стоимости финансового инструмента или портфеля

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Перечень ссылочных документов

[1] *Регламент управления рыночными рисками в Группе Сбербанк №2948,* 27.06.2013.

[2] А. Н. Ширяев, Вероятность-1, Москва: МЦНМО, 2011.

[3] A. C. Harvey , *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter,* Cambridge: Cambridge University Press , 1989.

[4] G. McLachlan и K. Thriyambakam, The EM Algorithm and Extensions, Wiley, 2008.

[5] Базельский комитет по банковскому надзору, *Международная конвергенция параметров и нормативов капитала,* 2006.

[6] Basel Committee on Banking Supervision, Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework, 2013.

[7] Ф. П. Васильев, Численные методы решения экстремальных задач, Новосибирск: Наука, 1988.

[8] P. Jorion, Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk, McGraw-Hill Education, 2006.

[9] Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведев, Математическая статистика, Либроком, 2014.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Пример расчета показателей VaR и $CVaR$

В данном разделе представлены итоговые и некоторые[60] промежуточные результаты вычисления показателей VaR и $CVaR$ для гипотетического портфеля.

1. Параметры расчета показателя VaR

Показатель VaR вычислен для портфеля П, включающего в себя

- позицию по депозитарным распискам на акции ОАО «Газпром» (далее – «Газпром, гдр», ISIN – US3682872078) величиной 20 000 RUB по рыночной стоимости позиции[61],
- позицию по облигациям федерального займа Министерства финансов Российской Федерации выпуска 46018 (далее – «Россия, 46018», ISIN – RU000A0D0G29) величиной 100 000 RUB по номиналу облигаций,
- позицию по облигациям федерального займа Министерства финансов Российской Федерации выпуска 29011 (далее – «Россия, 29011», ISIN – RU000A0JV7J9) величиной 10 000 RUB по номиналу облигаций,
- позицию по обыкновенным акциям ОАО «Читаэнергосбыт» (далее – «Читаэнергосбыт, ао», ISIN – RU000A0JNGK4) величиной 1 000 RUB по рыночной стоимости позиции,

а также следующих параметров расчета:

- дата расчета $v = 22.06.2015$,
- доверительный уровень $\lambda = 99\%$,
- валюта расчета $c = RUB$,
- временной горизонт $h = 1$ день.

Используемое историческое окно содержит 499 моментов времени, соответствующих моментам окончания основной торговой сессии на Московской бирже внутри двухлетнего интервала, предшествующего дате расчета. Указанное количество моментов времени соответствует $N = 498$ историческим сценариям.

Также в данном разделе вычисляется показатель $CVaR$ двух подпортфелей Π_1 и Π_2 портфеля П, содержащих, соответственно, позиции по акциям и позиции по облигациям.

2. Анализ портфеля

Статические данные для позиций в рассматриваемом портфеле представлены в следующих таблицах:

---

[60] Полностью расчет в настоящем документе не приводится ввиду большого объема данных.

[61] То есть размер позиции соответствует такому количеству акций, рыночная стоимость которых на дату расчета равна 20 000 RUB.

Инструмент	*Тип инструмента*	*Эмитент*
Газпром, гдр	Глобальные депозитарные расписки на обыкновенные акции	ОАО «Газпром»[62]
Россия, 46018	Облигации	Министерство финансов России
Россия, 29011	Облигации	Министерство финансов России
Читаэнергосбыт, ао	Обыкновенные акции	ОАО «Читаэнергосбыт»

Таблица 1. Типы инструментов и эмитенты.

Облигация	*Валюта номинала*
Россия, 46018	RUB
Россия, 29011	RUB

Таблица 2. Валюты номинала облигаций.

Дата	*Выплата купона*	*Погашение номинала*
15.06.2005	23.68	
14.09.2005	23.68	
14.12.2005	23.68	
15.03.2006	23.68	
14.06.2006	23.68	
13.09.2006	23.68	
13.12.2006	23.68	
14.03.2007	22.44	
13.06.2007	22.44	
12.09.2007	22.44	
12.12.2007	22.44	
12.03.2008	22.44	
11.06.2008	22.44	
10.09.2008	22.44	
10.12.2008	22.44	
11.03.2009	21.19	
10.06.2009	21.19	
09.09.2009	21.19	
09.12.2009	21.19	
10.03.2010	21.19	
09.06.2010	21.19	
08.09.2010	21.19	
08.12.2010	21.19	
09.03.2011	19.95	
08.06.2011	19.95	
07.09.2011	19.95	
07.12.2011	19.95	
07.03.2012	19.95	
06.06.2012	19.95	
05.09.2012	19.95	
04.12.2013	17.45	
05.03.2014	17.45	
04.06.2014	17.45	
03.09.2014	17.45	
03.12.2014	17.45	
04.03.2015	16.21	
03.06.2015	16.21	
02.09.2015	16.21	
02.12.2015	16.21	
02.03.2016	16.21	
01.06.2016	16.21	
31.08.2016	16.21	
30.11.2016	16.21	
01.03.2017	16.21	
31.05.2017	16.21	
30.08.2017	16.21	
29.11.2017	16.21	
28.02.2018	16.21	
30.05.2018	16.21	
29.08.2018	16.21	
28.11.2018	16.21	
27.02.2019	16.21	
29.05.2019	16.21	
28.08.2019	16.21	
27.11.2019	16.21	300
26.02.2020	11.34	
27.05.2020	11.34	
26.08.2020	11.34	
25.11.2020	11.34	300
24.02.2021	6.48	

[62] Эмитент базового инструмента.

05.12.2012	19.95	
06.03.2013	17.45	
05.06.2013	17.45	
04.09.2013	17.45	
26.05.2021	6.48	
25.08.2021	6.48	
24.11.2021	6.48	400

Таблица 3. Расписание выплат по облигации Россия, 46018.

Номинал	1000 RUB
Ставка купона	1 купон - 11.12% годовых, 2-10 купоны - среднее арифметическое значений ставок РУОНИА за шесть месяцев до даты определения процентной ставки + 0.97%
Периодичность выплаты купона	2 раза в год
Дата погашения	29.01.2020

Таблица 4. Расписание выплат по облигации Россия, 29011.

Формула ценообразования для портфеля П имеет следующий вид:

$$P(f^1, \dots, f^{26}, f_v^1, \ \dots, f_v^{26}) = 20000e^{f^1 - f_v^1} + 100000 \sum_i c_i DF_{rf}(t_i, f^2, \dots, f^{25}) + 10000\ e^{f^{26} - f_v^{26}}$$

где

- f_1 – значение риск-фактора логарифм цены инструмента «Газпром, гдр» в RUB (далее – риск-фактор F^1),
- $f_2, \dots, f_{25}$ – логарифмы фактора дисконтирования кривой доходности облигаций федерального займа для срочностей 1D, 2D, 1W, 2W, 3W, 1M, 2M, 3M, 6M, 9M, 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 6Y, 7Y, 8Y, 9Y, 10Y, 15Y, 20Y, 25Y, 30Y (далее – риск-факторы $F^2, \dots, F^{25}$),
- f_{26} – логарифм цены обыкновенной акции «Читаэнергосбыт, ао» в RUB (далее – риск-фактор F^{26}),
- t_i и c_i – моменты времени по облигации «Россия, 46018» после даты расчета v и соответствующие им размеры выплат[63] (Таблица 3),
- $DF_{rf}(t_i, f_2, \dots, f_{25})$ – фактор дисконтирования кривой доходности облигаций федерального займа Министерства финансов России для момента времени t_i, полученный линейной интерполяцией факторов $f_2, \dots, f_{25}$.

В представленной формуле ценообразования отсутствует слагаемое, соответствующее позиции по облигациям «Россия, 29011». Из-за наличия плавающих купонов реализация стандартного механизма расчета в данном случае нетривиальна. В то же время, величина позиции по данному инструменту позволяет использовать механизм консервативной оценки VaR.

[63] Размер выплаты включает в себя купонной выплаты и погашения номинала на дату.

Таким образом, в рассматриваемом примере портфель Π^*, для которого значение VaR рассчитывается с помощью консервативного механизма (см. раздел 5), состоит из позиции по облигациям «Россия, 29011» величиной 10 000 RUB по номиналу облигаций. Портфель Π^0, для которого используется стандартный механизм расчета VaR, состоит из всех остальных позиций, входящих в портфель П.

3. Моделирование риск-факторов

3.1 Наблюдаемые переменные и риск-факторы

При моделировании риск-факторов используются следующие наблюдаемые переменные:

- Y^1 – наблюдаемая переменная, представляющая цену депозитарных расписок «Газпром, гдр» в USD на момент закрытия торгов Лондонской фондовой биржи,
- Y^2 – наблюдаемая переменная, представляющая цену обыкновенных акций ОАО «Газпром» (ISIN – RU0007661625) в RUB на момент закрытия режима основных торгов Московской биржи,
- Y^3 – наблюдаемая переменная, представляющая значения отраслевого нефтегазового индекса РТС (RTSOG$ Index) в USD на момент закрытия режима основных торгов Московской биржи,
- Y^4 – наблюдаемая переменная, представляющая котировки обменного курса USD/RUB по данным информационно-аналитического агентства «ФИНАМ» на момент закрытия режима основных торгов Московской биржи,
- Y^5 – наблюдаемая переменная, представляющая значения отраслевого индекса РТС электроэнергетики (RTSEU$ Index) в USD на момент закрытия режима основных торгов Московской биржи,
- $Y^6, \dots, Y^{30}$ – наблюдаемые переменные, представляющие чистые цены облигаций федерального займа Министерства финансов России с фиксированным купоном в процентах от номинала облигаций на момент закрытия режима основных торгов Московской биржи.

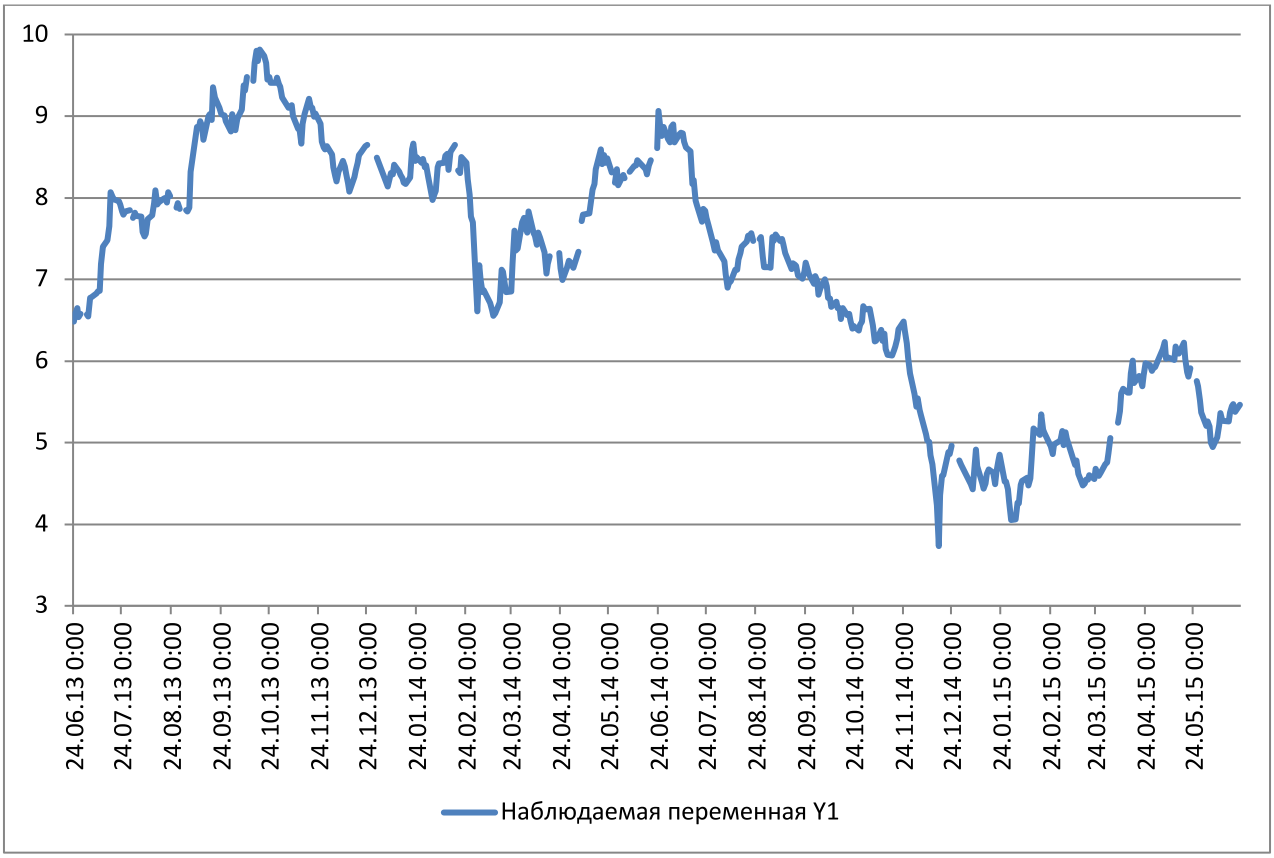

Рисунок 1. Значения наблюдаемой переменной Y^1 (до логарифмирования).

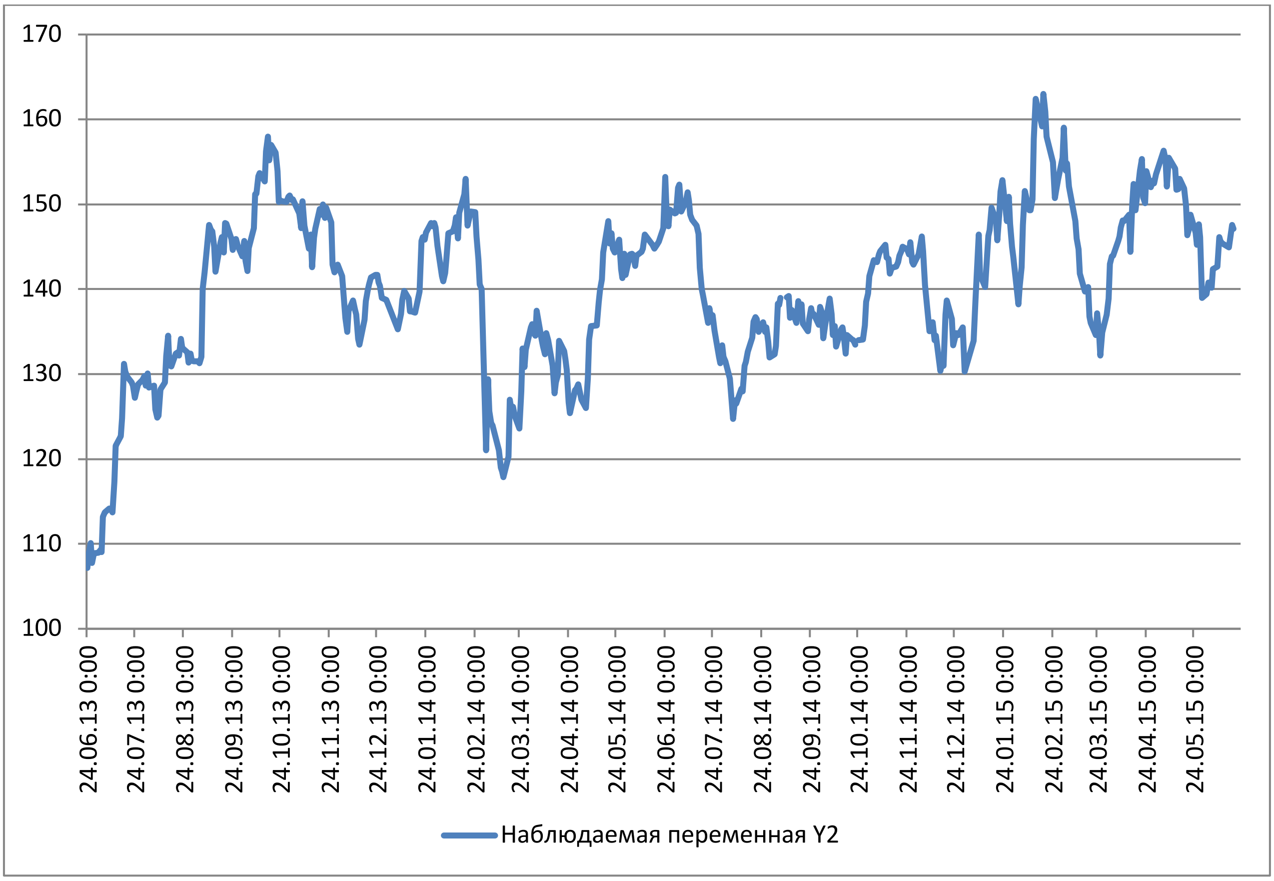

Рисунок 2. Значения наблюдаемой переменной Y^2 (до логарифмирования).

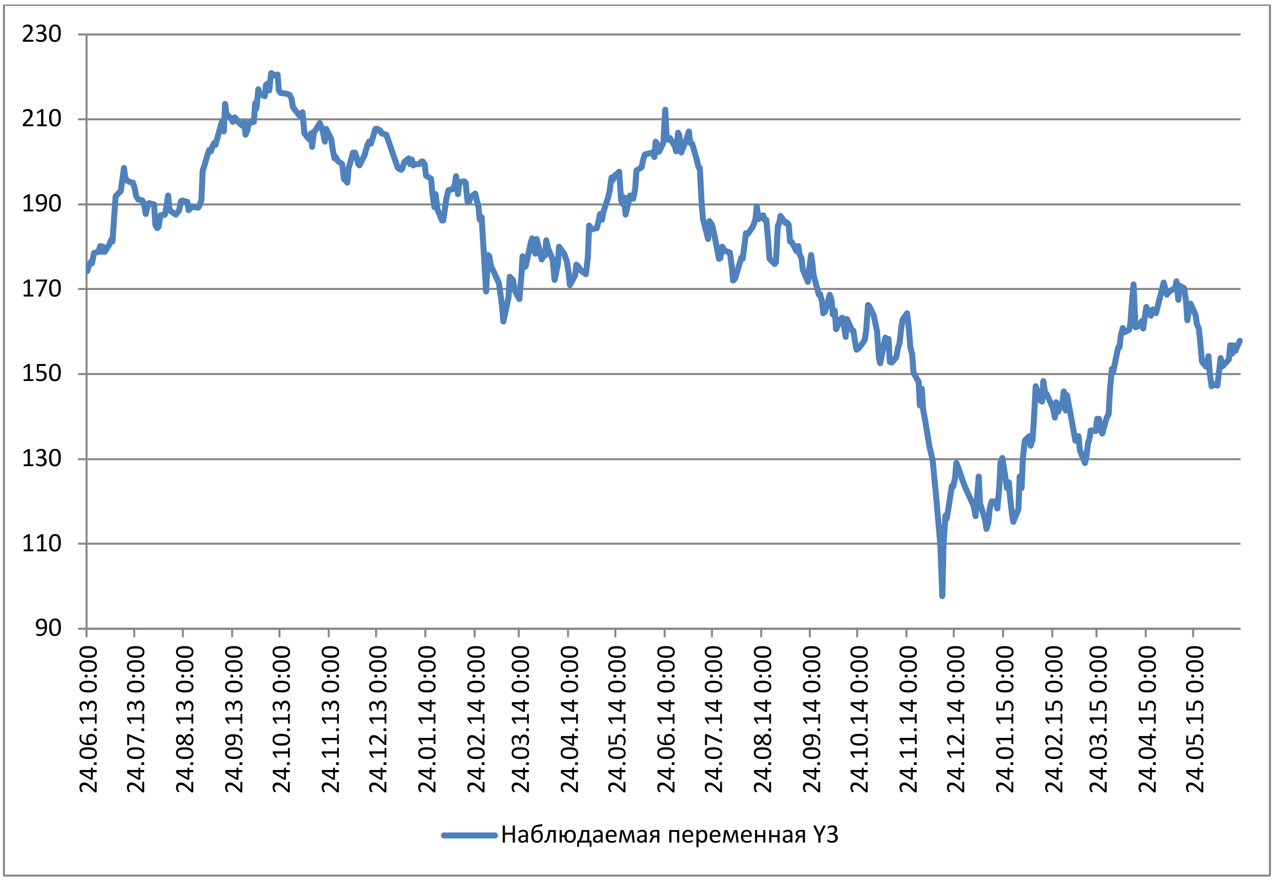

Рисунок 3. Значения наблюдаемой переменной Y^3 (до логарифмирования).

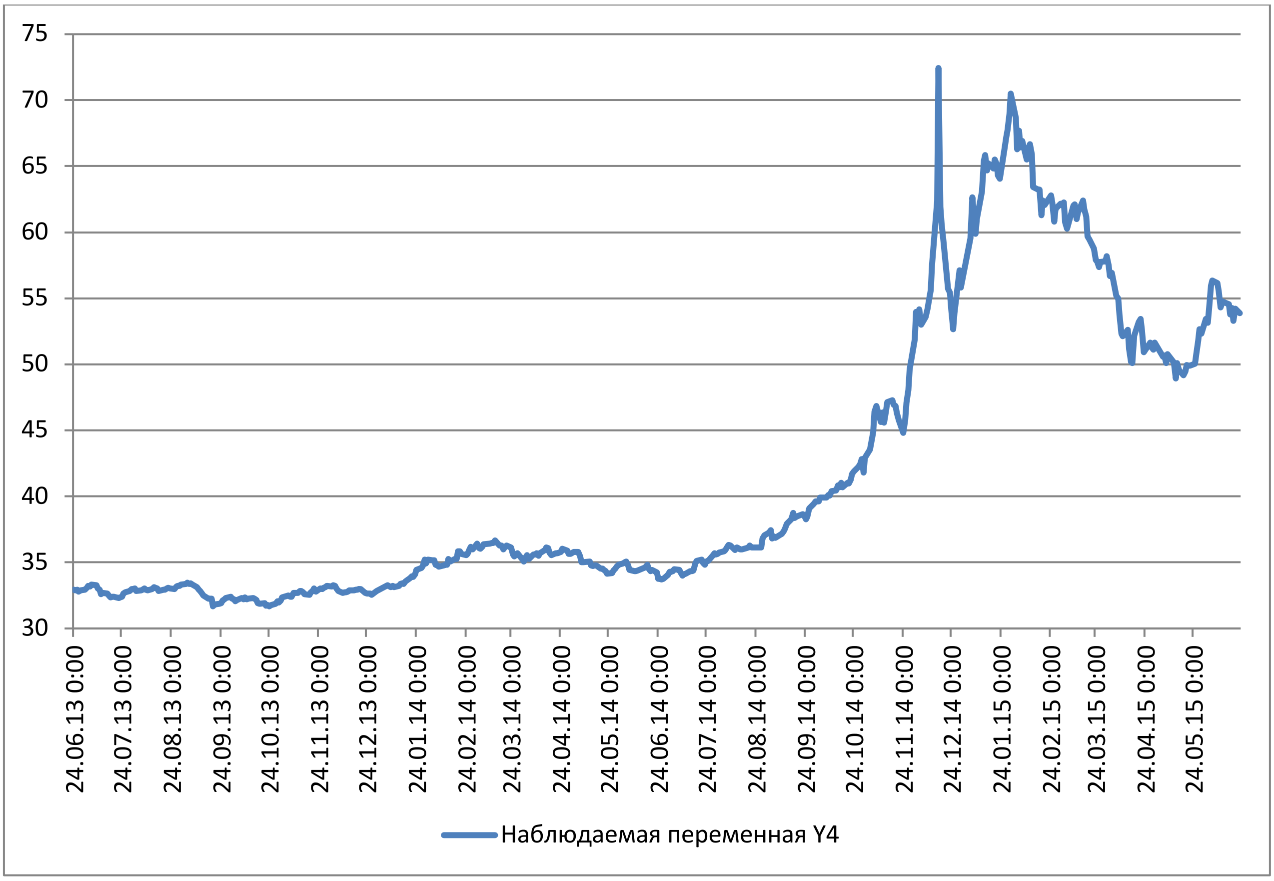

Рисунок 4. Значения наблюдаемой переменной Y^4 (до логарифмирования).

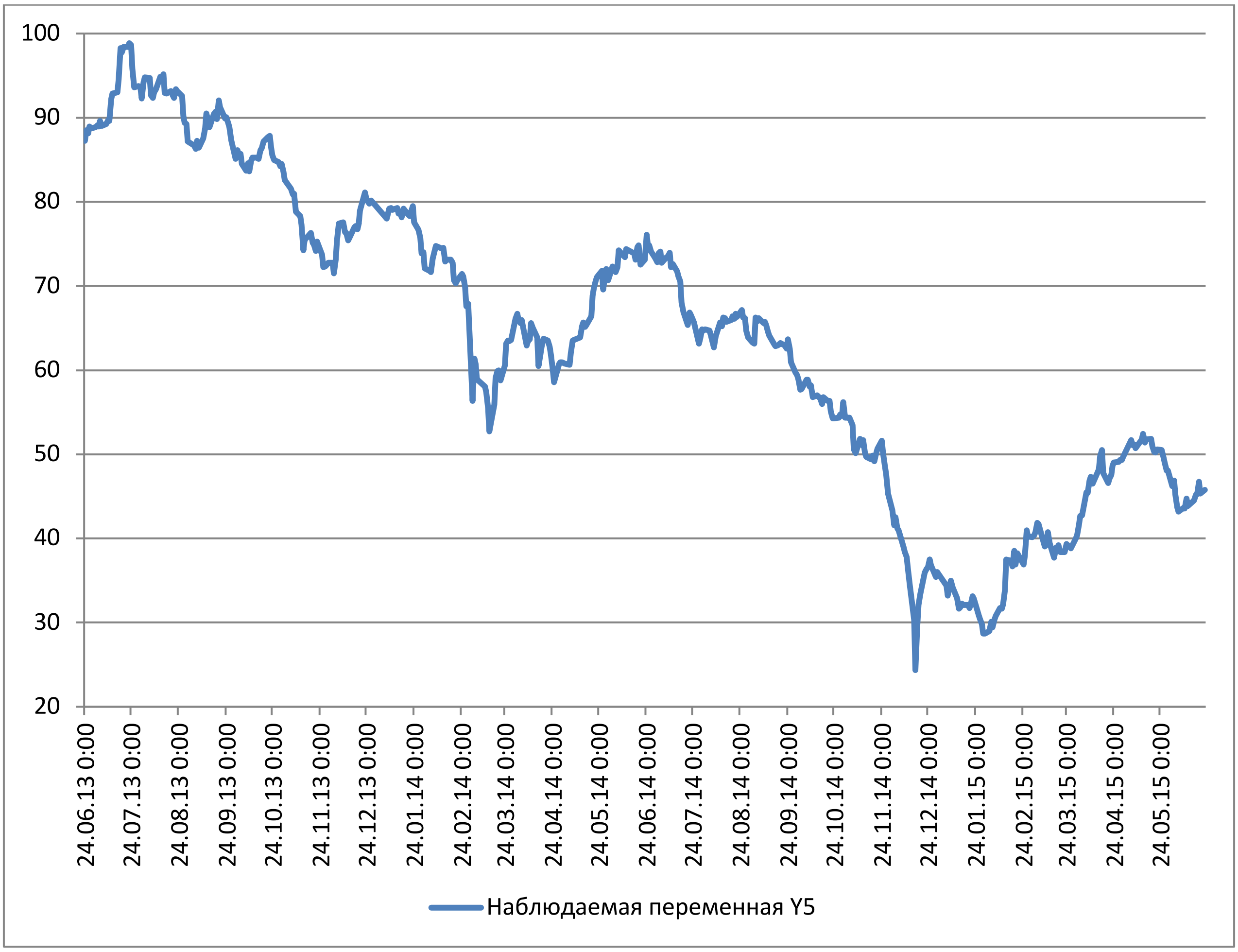

Рисунок 5. Значения наблюдаемой переменной Y^5 (до логарифмирования).

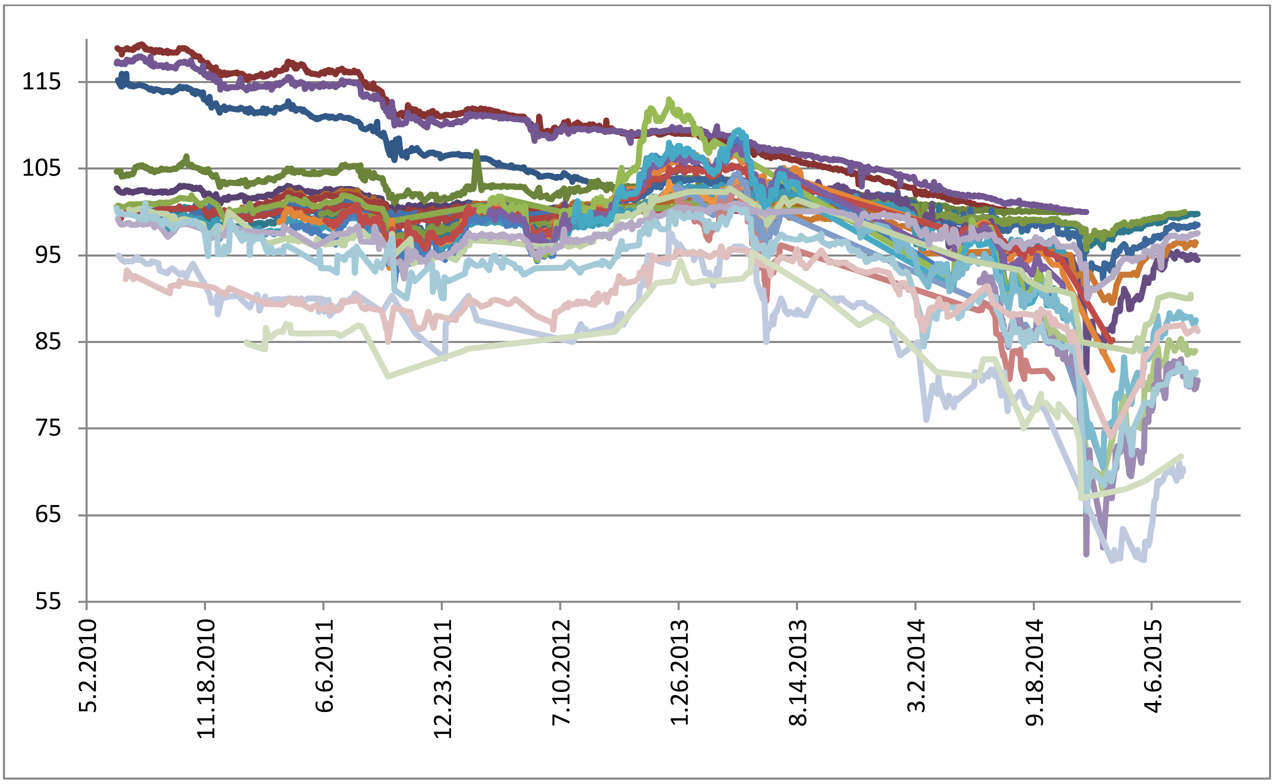

Рисунок 6. Значения наблюдаемых переменных $Y^6, \dots, Y^{30}$ (до логарифмирования).

Кроме риск-факторов, входящих в формулу ценообразования портфеля, в полный набор переменных добавлены[64] следующие риск-факторы:

- F^{27} – риск-фактор, представляющий собой логарифм значения обменного курса USD/RUB,
- F^{28} – риск-фактор, представляющий собой логарифм отраслевого нефтегазового индекса РТС (RTSOG$ Index) в RUB,
- F^{30} – риск-фактор, представляющий собой логарифм цены обыкновенных акций ОАО «Газпром» (GAZP, RU0007661625) в RUB.

3.2 Построение полного набора риск-факторов

Для построения полного набора риск-факторов необходимо также добавить риск-фактор F^{29}, представляющий собой логарифм отраслевого индекса электроэнергетики РТС (RSTEU$ Index) в RUB, поскольку он является прокси-показателем для немоделируемого риск-фактора F^{26} (см. раздел 4.2.4).

3.3 Исторические сценарии изменения риск-факторов

В таблицах ниже (см. Таблица 5 и Таблица 6) представлены изменения риск-факторов и параметрическая поправка для исторического сценария, соответствующего моменту времени $n = 1$ исторического окна[65].

m	Δf_1^m
1	1.46%
2	0.00%
3	0.00%
4	0.00%
5	0.00%
6	-0.01%
7	-0.01%
8	-0.01%
9	-0.02%
10	-0.03%

m	Δf_1^m
11	-0.03%
12	-0.03%
13	0.00%
14	0.05%
15	0.09%
16	0.14%
17	0.17%
18	0.21%
19	0.23%
20	0.26%

m	Δf_1^m
21	0.28%
22	0.36%
23	0.39%
24	0.41%
25	0.42%
26	1.27%
27	-0.15%
28	0.56%
29	1.27%
30	1.44%

Таблица 5. Изменения риск-факторов между датами $n = 0$ и $n = 1$ исторического окна.

m_1	m_2	$C_1^{m_1,m_2}$
1	1	0.0000106229
1	7	0
1	12	0
1	27	0
1	28	0
1	29	0

m_1	m_2	$C_1^{m_1,m_2}$
27	28	0
27	29	0
27	30	0
28	1	0
28	7	0
28	12	0

[64] Дополнительные риск-факторы добавлены с целью иллюстрации вычислений.

[65] Изменения риск-факторов и параметрические поправки для остальных исторических сценариев и всех риск-факторов здесь не приводятся по причине большого объема данных.

1	30	0.0000092907		28	27	0
7	1	0		28	28	0
7	7	0.0000000046		28	29	0
7	12	0.0000000325		28	30	0
7	27	0		29	1	0
7	28	0		29	7	0
7	29	0		29	12	0
7	30	0		29	27	0
12	1	0		29	28	0
12	7	0.0000000325		29	29	0
12	12	0.0000002551		29	30	0
12	27	0		30	1	0.0000092907
12	28	0		30	7	0
12	29	0		30	12	0
12	30	0		30	27	0
27	1	0		30	28	0
27	7	0		30	29	0
27	12	0		30	30	0.0000094631
27	27	0				

Таблица 6 . Параметрическая поправка для исторического сценария изменения риск-факторов между датами $n = 0$ и $n = 1$.

3.4 Характеристики совместного распределения риск-факторов

В таблицах представлены характеристики совместного распределения изменений риск-факторов, соответствующего историческим сценариям – полные, исторические и параметрические волатильности и корреляции (см. раздел 4.2.6).

Параметрические волатильности абсолютно ликвидных риск-факторов (F^{27}, F^{28} и F^{29}) равны нулю, а корреляции между ними совпадают с историческими.

m	σ^m_{total}	σ^m_{hist}	σ^m_{param}		m	σ^m_{total}	σ^m_{hist}	σ^m_{param}
1	1.70%	1.67%	0.34%		16	0.68%	0.63%	0.27%
2	0.00%	0.00%	0.00%		17	0.78%	0.71%	0.33%
3	0.00%	0.00%	0.00%		18	0.87%	0.78%	0.38%
4	0.00%	0.00%	0.00%		19	0.94%	0.84%	0.43%
5	0.01%	0.01%	0.00%		20	1.00%	0.89%	0.47%
6	0.01%	0.01%	0.01%		21	1.06%	0.93%	0.50%
7	0.02%	0.02%	0.01%		22	1.23%	1.07%	0.61%
8	0.04%	0.03%	0.02%		23	1.31%	1.13%	0.66%
9	0.05%	0.05%	0.02%		24	1.34%	1.16%	0.68%
10	0.10%	0.09%	0.04%		25	1.36%	1.17%	0.69%
11	0.14%	0.13%	0.06%		26	2.62%	1.69%	2.00%
12	0.18%	0.17%	0.07%		27	1.61%	1.61%	0.00%
13	0.32%	0.30%	0.11%		28	1.38%	1.38%	0.00%
14	0.45%	0.43%	0.15%		29	1.69%	1.69%	0.00%
15	0.57%	0.53%	0.21%		30	1.70%	1.67%	0.32%

Таблица 7 . Полные, исторические и параметрические волатильности риск-факторов.

m_1	m_2	$corr_{total}^{m_1,m_2}$	$corr_{hist}^{m_1,m_2}$	$corr_{param}^{m_1,m_2}$	m_1	m_2	$corr_{total}^{m_1,m_2}$	$corr_{hist}^{m_1,m_2}$	$corr_{param}^{m_1,m_2}$
1	7	14.73%	17.16%	0.00%	27	28	5.26%	5.26%	0.00%
1	12	17.01%	18.72%	0.00%	27	29	-32.07%	-32.07%	0.00%
1	27	-7.22%	-7.37%	0.00%	27	30	-11.65%	-11.86%	0.00%
1	28	82.07%	83.73%	0.00%	28	1	82.07%	83.73%	0.00%
1	29	60.84%	62.07%	0.00%	28	7	13.09%	14.95%	0.00%
1	30	99.57%	99.81%	93.46%	28	12	14.79%	15.95%	0.00%
7	1	14.73%	17.16%	0.00%	28	27	5.26%	5.26%	0.00%
7	12	96.94%	98.63%	93.22%	28	29	58.44%	58.44%	0.00%
7	27	-46.77%	-53.44%	0.00%	28	30	83.29%	84.76%	0.00%
7	28	13.09%	14.95%	0.00%	29	1	60.84%	62.07%	0.00%
7	29	34.26%	39.14%	0.00%	29	7	34.26%	39.14%	0.00%
7	30	17.15%	19.94%	0.00%	29	12	37.58%	40.55%	0.00%
12	1	17.01%	18.72%	0.00%	29	27	-32.07%	-32.07%	0.00%
12	7	96.94%	98.63%	93.22%	29	28	58.44%	58.44%	0.00%
12	27	-52.47%	-56.61%	0.00%	29	30	62.90%	64.01%	0.00%
12	28	14.79%	15.95%	0.00%	30	1	99.57%	99.81%	93.46%
12	29	37.58%	40.55%	0.00%	30	7	17.15%	19.94%	0.00%
12	30	19.71%	21.64%	0.00%	30	12	19.71%	21.64%	0.00%
27	1	-7.22%	-7.37%	0.00%	30	27	-11.65%	-11.86%	0.00%
27	7	-46.77%	-53.44%	0.00%	30	28	83.29%	84.76%	0.00%
27	12	-52.47%	-56.61%	0.00%	30	29	62.90%	64.01%	0.00%

Таблица 8. Полные, исторические и параметрические корреляции риск-факторов.

Индивидуальные распределения изменений ликвидных риск-факторов являются равномерными дискретными на множестве их исторических изменений $\{\Delta f_1^m, \dots, \Delta f_N^m\}$, поскольку все параметрические поправки $C_n^{m,m}$ для них нулевые. В частности функция распределения изменения риск-фактора F^{27} (Рисунок) определяется равенствами

$$P_v(F_{v+1}^{27} - F_v^{27} = \Delta f_n^{27}) = \frac{1}{N},\ \ n = 1 \dots N,$$

$$P_v(F_{v+1}^{27} - F_v^{27} \leq x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} I(\Delta f_n^{27} \leq x)\,,\ x \in R.$$

Индивидуальные распределения изменений моделируемых риск-факторов (F^1 и F^{30}) являются смесью нормальных распределений со средними $\{\Delta f_1^m, \dots, \Delta f_N^m\}$ и дисперсиями $\{C_1^{m,m}, \dots, C_N^{m,m}\}$ параметры которых возвращаются моделью динамики переменных (см. раздел 6). В частности распределение изменения риск-фактора F^1 (Рисунок 1)

$$P_v(F_{v+1}^1 - F_v^1 \leq x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_{\mathcal{N}}(x, \Delta f_n^1, C_n^{11})\,,\ x \in R.$$

Индивидуальные распределения изменений немоделируемых риск-факторов являются смесью нормальных распределений со средними $\{\beta\Delta f_1^{p_m}, \dots, \beta\Delta f_N^{p_m}\}$, вычисляемые на основе исторических сценариев изменения прокси-показателей $\{\Delta f_1^{p_m}, \dots, \Delta f_N^{p_m}\}$, и постоянными для каждого риск-фактора дисперсиями σ_m^2.

В частности, распределение изменения риск-фактора F^{26} (см. Рисунок 2) является смесью нормальных распределений со средними $\{\Delta f_1^{29}, \dots, \Delta f_N^{29}\}$ и дисперсией $\sigma_{26}^2 = 2\%$ (прокси-показателем для риск-фактора F^{26} является риск-фактор F^{29}, коэффициент чувствительности $\beta = 1$ полагается равным 1) и вычисляется по формуле

$$P_v(F_{v+1}^1 - F_v^1 \leq x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_{\mathcal{N}}(x, \Delta f_n^{29}, \sigma_{26}^2)\,,\ x \in R.$$

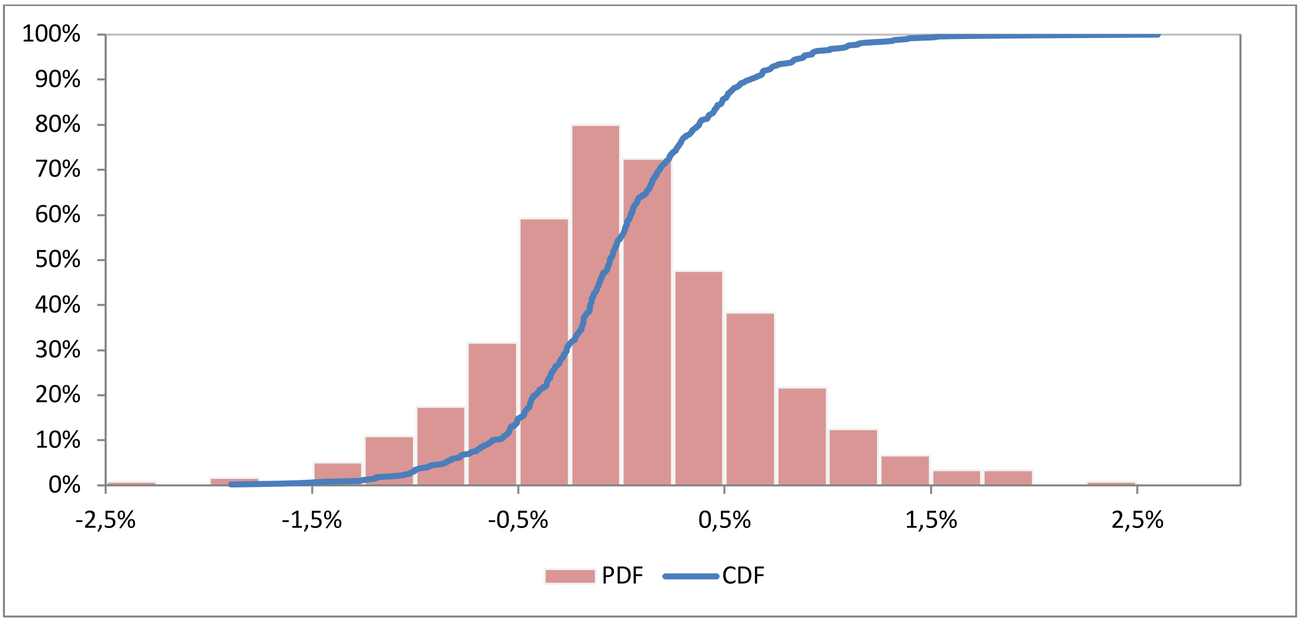

Рисунок 7. График функции и гистограмма распределения изменения $F_{v+1}^{27} - F_v^{27}$.

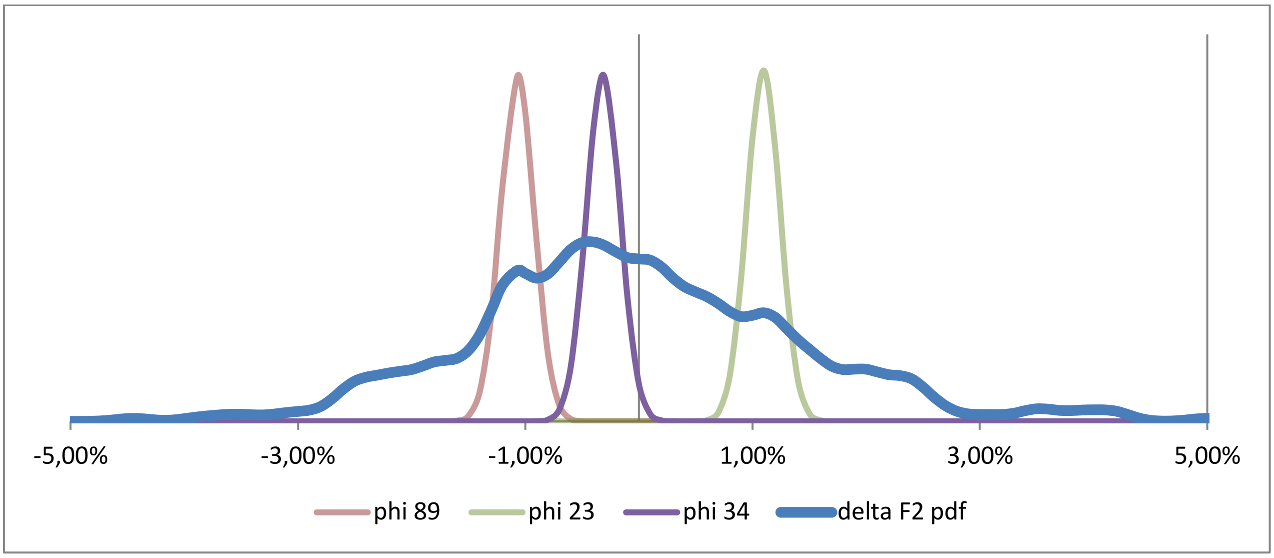

Рисунок 1. Плотность распределения изменения $F_{v+1}^1 - F_v^1$.

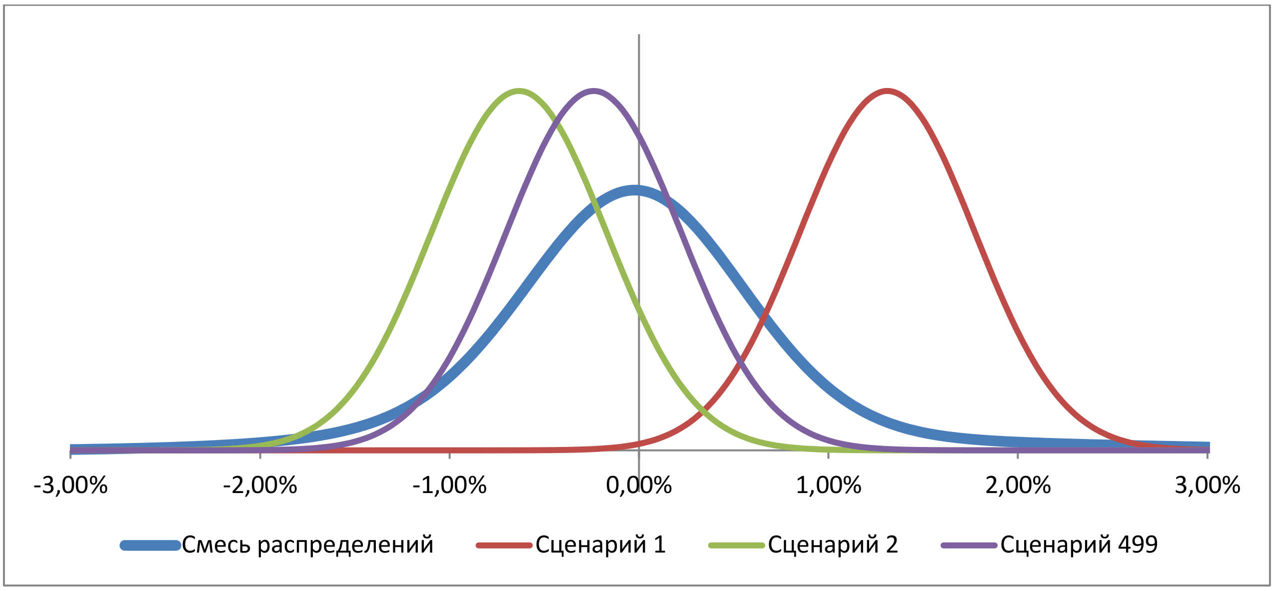

Рисунок 2. Плотность распределения изменения $F_{v+1}^{26} - F_v^{26}$.

3.5 Значения риск-факторов на дату расчета

Значения риск-факторов на дату расчета v представлены ниже (см. Таблица 9).

Для риск-факторов, имеющих котировки на заданную дату, берутся их котировки. В случае, если котировок нет, значением риск-фактора на дату расчета полагается последняя имеющаяся котировка в течение месяца. Если в течение последнего месяца не было котировок, в этом случае берется среднее значение риск-фактора на протяжении всего исторического окна.

m	f_v^m	m	f_v^m	m	f_v^m
1	5.685767	11	-0.076352	21	-1.030712
2	-0.000374	12	-0.103111	22	-1.482430
3	-0.000747	13	-0.211455	23	-1.912436
4	-0.001870	14	-0.320944	24	-2.332686
5	-0.003744	15	-0.429090	25	-2.748241
6	-0.005624	16	-0.535287	26	1
7	-0.008263	17	-0.639139	27	3.986256
8	-0.016745	18	-0.740460	28	9.047902
9	-0.025057	19	-0.839375	29	7.809229
10	-0.050430	20	-0.936210	30	5.000423

Таблица 9. Значения риск-факторов на дату расчета v.

4. Моделирование стоимости портфеля

4.1 Построение исторических сценариев стоимости портфеля

В Таблица 10 представлены значения риск-факторов и коэффициентов чувствительности стоимости портфеля к их изменению, соответствующие историческому сценарию 1.

m	$f_v^m + \Delta f_1^m$	$\frac{\partial P}{\partial f^m}(f_v^1 + \Delta f_1^1, \dots, f_v^M + \Delta f_1^M)$	m	$f_v^m + \Delta f_1^m$	$\frac{\partial P}{\partial f^m}(f_v^1 + \Delta f_1^1, \dots, f_v^M + \Delta f_1^M)$
1	5.700368	20 205	16	-0.533111	20 405

2	-0.000375	0	17	-0.636442	20 199
3	-0.000750	0	18	-0.737303	8 772
4	-0.001876	0	19	-0.835819	0
5	-0.003756	0	20	-0.932309	0
6	-0.005641	0	21	-1.026517	0
7	-0.008288	0	22	-1.477306	0
8	-0.016789	1 025	23	-1.906903	0
9	-0.025115	905	24	-2.326974	0
10	-0.050500	1 541	25	-2.742451	0
11	-0.076398	1 514	26	1.012742	1 003
12	-0.103102	3 571	27	3.984772	0
13	-0.211029	5 264	28	9.053506	0
14	-0.319945	4 719	29	7.821971	0
15	-0.427489	14 718	30	5.014834	0

Таблица 10. Значения риск-факторов и чувствительностей стоимости портфеля к изменению риск-факторов, соответствующие сценарию $n = 1$.

Изменение стоимости портфеля pnl_1 и параметрическая поправка σ_1^2 для данного исторического сценария вычисляются по формулам

$$pnl_1 = P(f_v^1 + \Delta f_1^1, \dots, f_v^M + \Delta f_1^M) - P(f_v^1, \dots, f_v^M)$$
$$\approx \sum_{m=1}^{31} \Delta f_1^m \times \frac{\partial P}{\partial f^m}(f_v^1 + \Delta f_1^1, \dots, f_v^M + \Delta f_1^M)$$

и

$$\sigma_1^2 = \sum_{m_1, m_2 = 1}^{M} \frac{\partial P}{\partial f^{m_1}}(f_v^1 + \Delta f_1^1, \dots, f_v^M + \Delta f_1^M) \times \frac{\partial P}{\partial f^{m_2}}(f_v^1 + \Delta f_1^1, \dots, f_v^M + \Delta f_1^M) \times C_1^{m_1, m_2},$$

что соответственно дает $pnl_1 = 465$ и $\sigma_1^2 = (142)^2$.

Аналогично вычисляются изменения стоимости портфеля и параметрическая поправка для остальных исторических сценариев (см. Рисунок 3).

4.2 Распределения изменения стоимости портфеля и его характеристики

Распределение изменения стоимости портфеля являются смесью нормальных распределений с математическими ожиданиями $\{pnl_1, \dots, pnl_N\}$ и стандартными отклонениями $\{\sigma_1^1, \dots, \sigma_N^1\}$, полученными из модели (см. раздел 4.3).

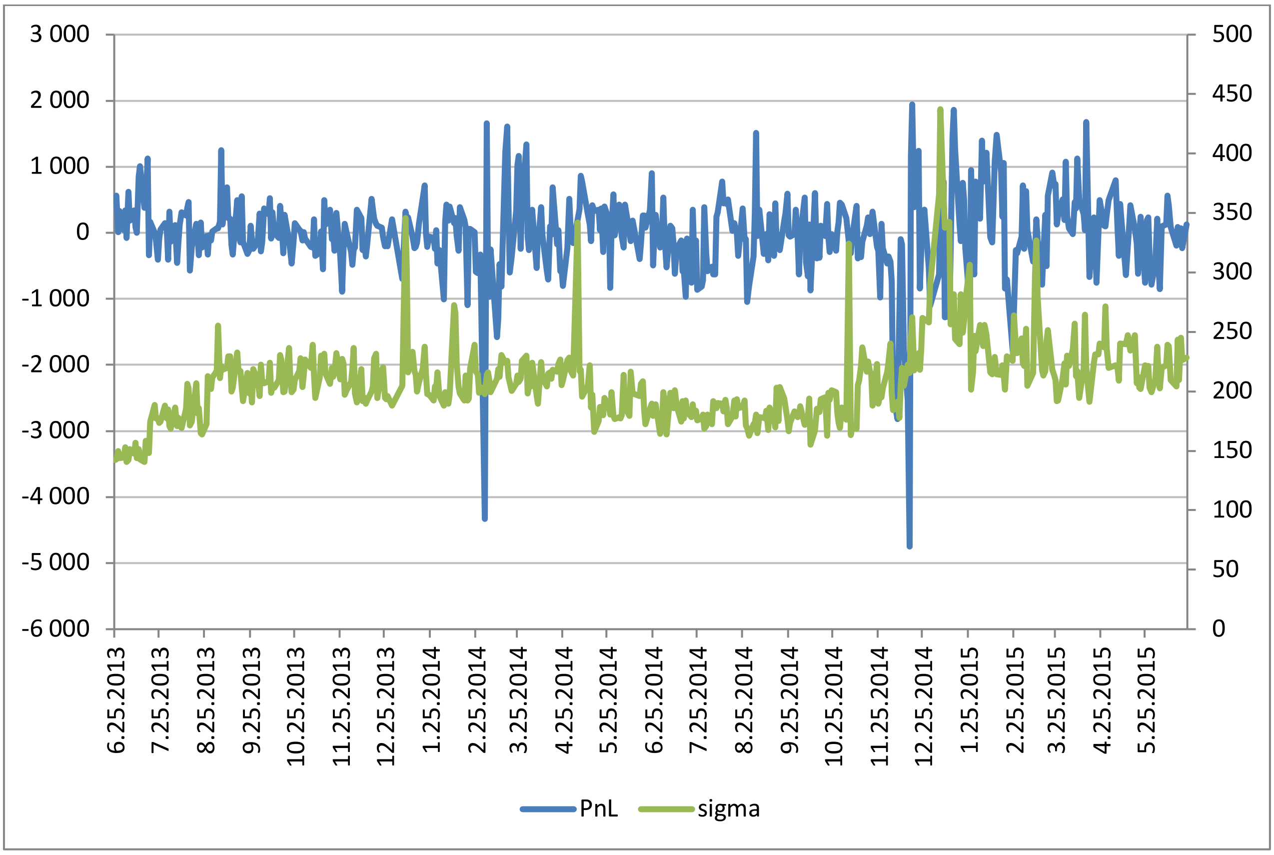

Рисунок 3. Исторические сценарии изменения стоимости портфеля и параметрическая поправка.

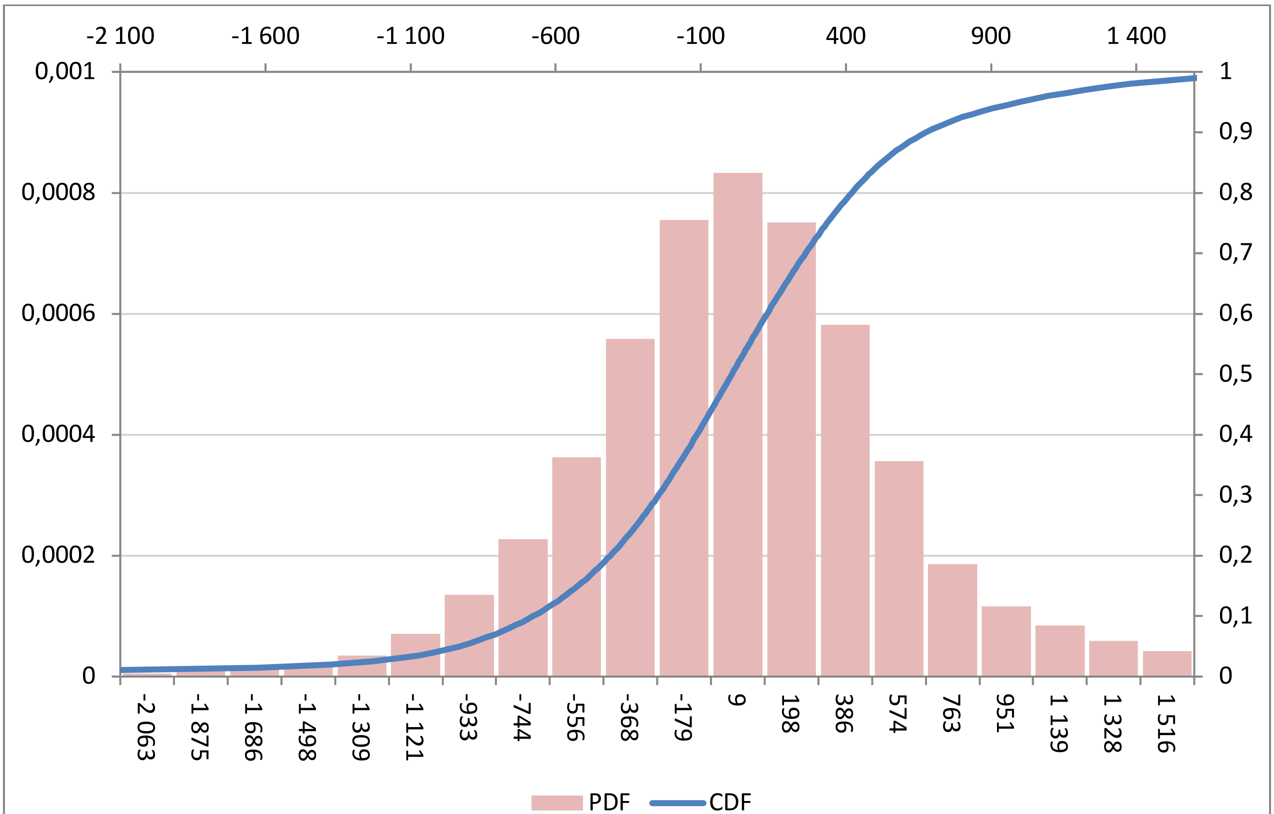

Рисунок 41. Функция и гистограмма распределения изменения стоимости портфеля.

Полная, историческая и параметрическая волатильности изменения стоимости портфеля (σ_{total}^{PnL}, $\sigma_{historical}^{PnL}$ и $\sigma_{parametric}^{PnL}$), соответственно, равны 662, 628 и 210. Коэффициенты корреляции изменения стоимости портфеля и риск-факторов представлены в Таблица 11.

m	$corr_{total}^{PnL,m}$	$corr_{hist}^{PnL,m}$	$corr_{param}^{PnL,m}$
1	66.57%	69.46%	32.07%
2	59.42%	72.85%	-3.85%
3	59.48%	72.89%	-3.74%
4	59.69%	72.99%	-3.40%
5	60.02%	73.16%	-2.82%
6	60.36%	73.32%	-2.24%
7	60.82%	73.55%	-1.42%
8	62.27%	74.26%	1.28%
9	63.63%	74.91%	4.01%
10	67.42%	76.66%	12.81%
11	70.76%	78.15%	22.44%
12	73.69%	79.41%	32.77%
13	81.25%	82.55%	70.11%
14	84.37%	83.90%	88.50%
15	85.33%	84.39%	93.58%

m	$corr_{total}^{PnL,m}$	$corr_{hist}^{PnL,m}$	$corr_{param}^{PnL,m}$
16	85.41%	84.50%	94.21%
17	85.15%	84.45%	93.68%
18	84.80%	84.34%	92.93%
19	84.45%	84.22%	92.24%
20	84.13%	84.10%	91.65%
21	83.86%	84.00%	91.16%
22	83.02%	83.65%	89.80%
23	82.68%	83.50%	89.28%
24	82.53%	83.44%	89.07%
25	82.47%	83.41%	88.99%
26	41.64%	64.29%	9.50%
27	-44.66%	-47.10%	0.00%
28	55.12%	58.13%	0.00%
29	60.96%	64.29%	0.00%
30	68.45%	71.57%	29.97%

Таблица 11. Коэффициенты корреляции изменения стоимости портфеля и риск-факторов.

5. Расчет показателей VaR и $CVaR$ с использованием консервативного механизма

В рассматриваемом примере значение $VaR(\Pi^0, v, h, \lambda, c)$ равно 2 147 RUB (Рисунок 5).

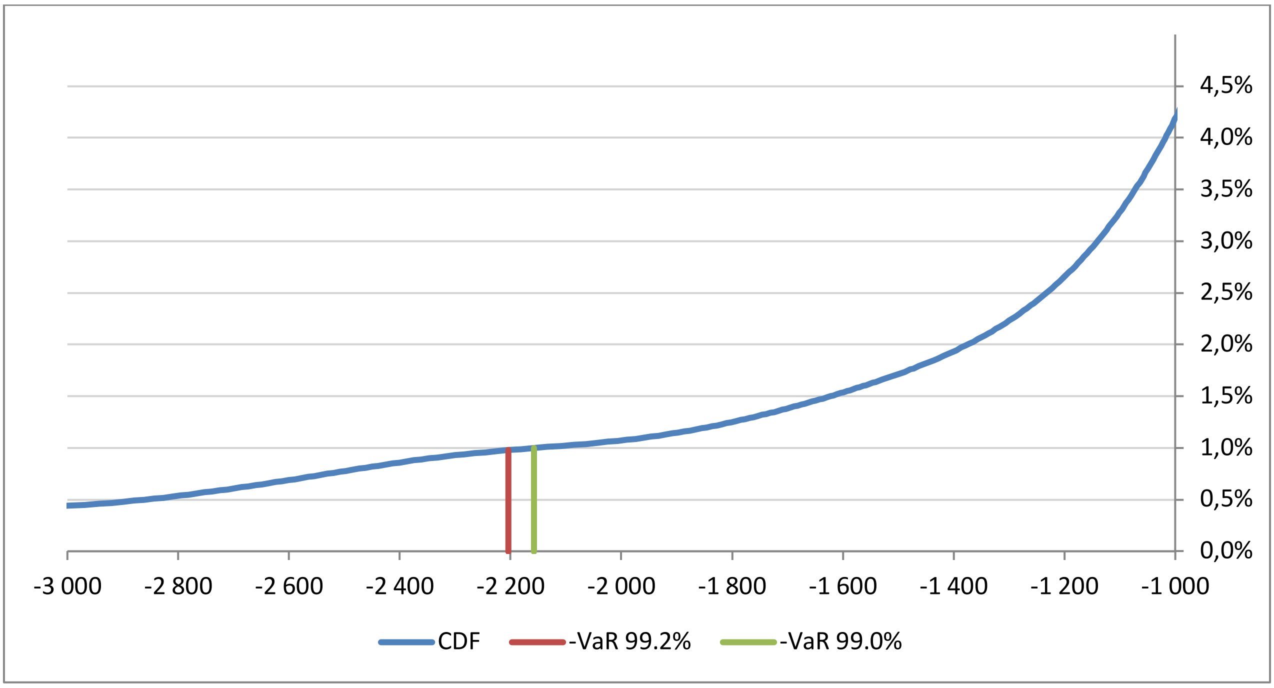

Рисунок 5. Функция распределения сценариев изменения портфеля и VaR.

Исключенные из расчета в рамках основного механизма позиция по облигации «Россия, 29011» учитывается с помощью механизма консервативной оценки.

Консервативная волатильность цены инструмента «Россия, 29011» экспертно полагается равной $\sigma_1^{max} = 0.35\% \times T = 0.35\% \times 4.6 = 1.6\%$, где T – срок до погашения облигации в годах.

В Таблица 12 представлены значения $VaR(\Pi^0, v, h, \lambda + \lambda', c)$ и $\sup_{\theta\in\Theta} VaR^{\theta}(\Pi^*, v, h, 1 - \lambda', c)$. Наименьшее значение суммы $VaR(\Pi^0, v, h, \lambda + \lambda', c) + \sup_{\theta\in\Theta} VaR^{\theta}(\Pi^*, v, h, 1 - \lambda', c)$ достигается при $\lambda' = 0{,}02\%$ и берется в качестве результата расчета величины $VaR(\Pi, v, h, \lambda, c)$.

λ'	$VaR(\Pi^0, v, h, \lambda + \lambda', c)$	$\sup_{\theta\in\Theta} VaR^{\theta}(\Pi^*, v, h, 1 - \lambda', c)$	$VaR(\Pi^0, v, h, \lambda + \lambda', c)$ $+\sup_{\theta\in\Theta} VaR^{\theta}(\Pi^*, v, h, 1 - \lambda', c)$
0,10%	2 347	498	2 845
0,03%	2 225	553	2 778
0,02%	2 204	571	2 775
0,01%	2 181	600	2 781

Таблица 12. Оценки сверху для значений VaR по частям портфеля Π^0 и Π^*.

Таким образом, $VaR(\Pi, v, h, \lambda, c) = 2\ 775$ RUB.

Аналогично $VaR(\Pi_1, v, h, \lambda, c) = 705$ RUB и $VaR(\Pi_2, v, h, \lambda, c) = 2\ 237$ RUB.

Показатель $CVaR$ для портфелей Π_1 и Π_2 рассчитывается следующим образом:

$$CVaR(\Pi, \Pi_1, v, h, \lambda, c) = \\ = \frac{VaR(\Pi + \varepsilon\Pi_s, v, h, \lambda, c) - VaR(\Pi - \varepsilon\Pi_s, v, h, \lambda, c)}{\sum_{s'=1}^{S}\left(VaR(\Pi + \varepsilon\Pi_{s'}, v, h, \lambda, c) - VaR(\Pi - \varepsilon\Pi_{s'}, v, h, \lambda, c)\right)} \times VaR(\Pi, v, h, \lambda, c) \\ = \frac{2827 - 2725}{(2827 - 2725) + (3002 - 2550)} \times 2775 = 510 \text{ RUB}$$

$$CVaR(\Pi, \Pi_2, v, h, \lambda, c) = \frac{3002 - 2550}{(2827 - 2725) + (3002 - 2550)} \times 2775 = 2\ 265 \text{ RUB}$$

6. Модели динамики переменных

Для построения исторических сценариев риск-факторов F^1, F^{27}, F^{28} и F^{30} используется следующая модель динамики переменных (см. раздел 4.5):

- t_n – моменты времени, для которых имеется хотя бы одно наблюдаемое значение переменных Y^1, Y^2, Y^3 и Y^4,
- В качестве вектора переменных состояния выступает вектор

$$X = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^{27} \\ F^{28} \\ F^{30} \end{bmatrix},$$

(таким образом, функции $\phi^1, \phi^{27}, \phi^{28}$ и ϕ^{30}, определяющие связь переменных состояния и риск-факторов, являются тождественными),

- A_n – единичная матрица,
- $D\varepsilon_n = \Delta t_n C$, где $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ – длина периода времени между двумя моментами времени, для которых имеются котировки, C – постоянная матрица,
- уравнение измерений $Y_n = B_n X_n + D\eta_n$ получается исключением из уравнения

$$\begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \\ Y^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{bmatrix} + D\eta_n,$$

  наблюдаемых переменных, значения которых не наблюдаются в момент времени t_n (при этом матрица $D\eta_n$ предполагается диагональной и является параметром модели),
- $DX_0 = 0$.

Параметры модели, получающиеся после калибровки методом максимального правдоподобия:

$$EX_0 = \begin{bmatrix} 5.36 \\ 3.49 \\ 8.64 \\ 4.67 \end{bmatrix},$$

$$C^{66} = \begin{bmatrix} 1.72\% & -8.63\% & 81.41\% & 99.57\% \\ -8.63\% & 1.56\% & 4.37\% & -12.92\% \\ 81.41\% & 4.37\% & 1.43\% & 82.74\% \\ 99.57\% & -12.92\% & 82.74\% & 1.72\% \end{bmatrix},$$

$$D\eta_n = \begin{bmatrix} 0.0033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0033 \end{bmatrix}.$$

[66] В данной матрице для удобства интерпретации на диагонали представлены волатильности переменных состояния, вне диагонали – их корреляции. Чтобы использовать матрицу C в уравнении перехода, нужно предварительно произвести ее трансформацию в матрицу ковариаций.