

Credit Valuation Adjustment: Wrong Way Risk

June 9, 2022

Theoretical considerations

Для начала приведем формулу для CVA

$$CVA = \mathbb{E}(V_{\tau} 1_{\tau < T})$$

- T — maturity
- V — exposure = $\min(0, \text{price})$
- τ — default time

В целом, мы всегда будем генерировать два стохастических процесса, один из которых будет некоторым образом задавать момент дефолта, а другой — отвечает движению цены базового актива.

Различия моделей состоят как раз в выборе процесса, задающего дефолт.

- Model without WWR
- Structure model
- Analytical model
- Hazard rate correlation model
- Jump model

Реализована функция, дающая правильную оценку CVA, считая, что дефолт контрагента не зависит от цены базового актива.

Parameters:

- type of derivative
- maturity
- volatility
- price
- underlying asset rate
- risk-free rate

$$CVA = \mathbb{E}(V(T)) \cdot PD$$

One period structure model

Данная модель предполагает, что дефолт контрагента происходит в случае, если нормально распределенная случайная величина оказалась меньше какой-то константы, которая калибруется из известного PD. Считается, что как раз с этой случайной величиной коррелирует цена актива. Причем рассматривается только время заключения контракта и время экспирации (поэтому one period).

Parameters:

- correlation
- type of derivative
- maturity
- volatility
- price
- underlying asset rate
- risk-free rate

Structure model

Предыдущая модель, конечно, не вполне правдоподобна. Однако уже очень естественным выглядит ее "расширение" на непрерывное время.

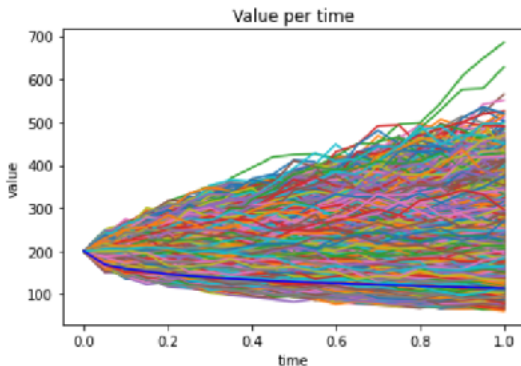
- 1 Разбиваем отрезок $[0, maturity]$ на маленькие кусочки
- 2 Из известного hazard rate или survival probability калибруем функцию \mathcal{L} , с которой должен пересечься *GBM* — процесс дефолта, чтобы мы считали, что он произошел.
- 3 Далее запускаем два скоррелированных процесса: оба *GBM* (процесс дефолта и актива).
- 4 Смотрим на моменты, когда какая-то симуляция процесса дефолта опустилась ниже функции \mathcal{L} , считаем, сколько в этот момент стоит дериватив, и, усреднив эти значения по всем симуляциям, получаем CVA.

Замечание

Удобно считать, что процесс дефолта это активы компании, а функция, которую мы калибруем — ее долг (Модель Мертона).

Structure model

Ниже приведены симуляции процесса дефолта, а синяя функция — это долг, который мы калибруем.



Analytical model of structure approach

Реализована модель, которая по уже откалиброванной функции \mathcal{L} аналитически считает CVA для европейского колл-опциона. Однако временные затраты на действие интегрирования и нахождения обратной функции, которые приходится использовать, считая CVA аналитически, оказываются существенно выше, чем в симуляции большого количества процессов.

Hazard rate correlation model

Есть существенно другой подход к расчету CVA.

В прошлой модели мы считали hazard rate детерминированным, а можно, напротив, считать его стохастическим, и именно он будет коррелировать с процессом цены базового актива.

В данной модели мы считаем, что он является экспонентой от процесса Орнштейна-Уленбека сдвинутого на константу ξ .

- 1 Калибруется константа ξ , чтобы сошлось с ценой CDS.
- 2 Генерируются два скореллированных процесса: один отвечает hazard rate, другой базовому активу.
- 3 Вероятность дефолта на i -ом шаге равна как раз hazard rate в этот момент (по определению)
- 4 Таким образом, на каждом отдельном шаге вычисляется свой CVA_i , затем все складывается и усредняется по большому количеству симуляций.

Данная модель, помимо прежних параметров, которые можно калибровать из рыночных данных, зависит также от волатильности процесса hazard rate.

Удалось вывести достаточно громоздкое дифференциальное уравнение на функцию зависимости цены дериватива от курса: если $v(x)$ это цена дериватива при курсе $S_0 + x$, то для того, чтобы модель была инвариантна относительно волатильности нужно, чтобы для $g(x) := \frac{v(x)+v(-x)}{2}$, $h(x) := \frac{v(x)-v(-x)}{2}$, было верно:

$$c \cdot x^2 g' + 2xh' - h = 0$$

Легко заметить, что линейные v ему удовлетворяют, но никакие другие из встречающихся — нет.

Замечание

Однако, как правило, зависимость от волатильности такая маленькая, что доверительные интервалы разных моделей при достаточно большом количестве симуляций сильно пересекаются.

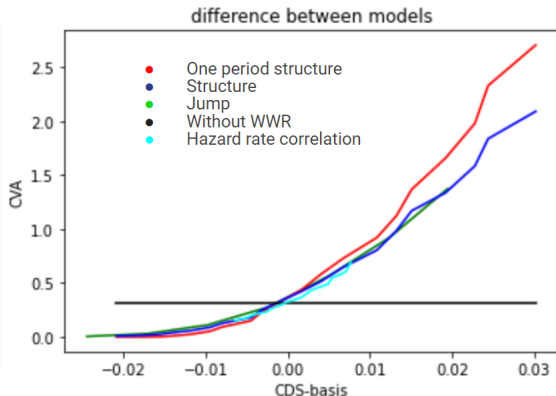
Естественным расширением предыдущей модели является добавление коэффициента $\text{Jump}'а$. Считается, что теперь курс в момент дефолта "подпрыгивает" в заданную константу раз.

Кажется, что эта модель, использует все предыдущие гиперпараметры, но добавляет еще один, что неудобно. Однако можно считать волатильность hazard rate околонулевой, потому что мы хотим, чтобы CVA в данной модели зависело практически только от коэффициента прыжка, который калибруется опять же из цен на CDS. Вычисляется и генерируется все аналогично предыдущей модели.

Сравнение моделей

Ниже приведены графики всех реализованных моделей CVA от CDS-basis.

Входные данные:	
дериватив	европейский колл-опцион
цена актива	100
страйк	110
волатильность	0.3
risk-free rate	0
hazard rate	0.05
recovery rate	0.2



Общие черты и различия моделей

На первый взгляд не очень понятно, как связаны друг с другом модели.

Верно ли, что одна с некоторыми входными параметрами совпадает с другой?

На самом деле, в нашем случае это неправда. Однако, если добавить коэффициент $\text{Jump}'а$ в риск-фактор структурной модели, то получится нечто очень похожее на *hazard rate correlation model*.

И действительно, в данном случае можно считать, что для структурной модели определен аналог стохастического *hazard rate*. Вероятность мгновенного дефолта действительно в этом случае является стохастическим процессом.

Замечание

Во всех моделях CVA считается следующим образом: на каждом маленьком временном отрезочке считается вероятность дефолтнуть на нем (для текущей симуляции) и умножается на текущую экспозицию дериватива, потом все дисконтируется, складывается и усредняется

Сейчас мы постараемся описать модель, которая обобщает все рассмотренные наши подходы.

При некоторых (на самом деле очень частных) параметрах она совпадает с структурной моделью, при других с Hazard rate, при других с Jump. Общая модель устроена, как структурная, но с двумя джампами. Пусть теперь процесс дефолта совершает большой джамп (например, даже велью компании становится 0) с вероятностью $H(t)$, где H произвольный стохастический процесс, коррелирующий с курсом актива. Пусть так же во время дефолта, то есть, когда процесс дефолта оказывается ниже, чем liabilities, происходит джамп курса базового актива в заданное — умножается на заданную константу.

Выражение всех моделей через общую

Ниже мы приведем выражения для всех моделей, причем заметно, что это очень частные случаи ("крайние") общей модели. Однако, именно они выглядят естественными.

- 1 При нулевом $H(t)$ и нулевом джампе курса актива, мы, конечно, получаем структурную модель.
- 2 При $H(t)$ равном экспоненте процесса Орнштейна-Уленбека и нулевой волатильности процесса дефолта и нулевом джампе курса актива, мы имеем как раз hazard rate correlation model
- 3 Уже из hazard rate correction model легко получить Jump model, взяв маленькую волатильность $H(t)$ и добавив джамп курса актива.

Какая модель лучше?

На самом деле, сложно ответить на этот вопрос.

Однако все модели дают очень близкие результаты. По крайней мере по модулю того, что на практике рыночные данные всегда очень неопределенные, например, доверительный интервал для цены CDS оказывается очень широким.

Таким образом, нам кажется, что стоит исходить скорее из наличия рыночных данных для калибровки и простоты технической реализации.

Кроме того, на практике возникает трейд-офф: для общей модели может не хватить рыночных данных для калибровки, а для узких моделей — наоборот, не все рыночные продукты мы можем правильно запрайсить, или возникают ограничения, типа в модели hazard rate correlation получается ограниченным CDS-basis, пропорционально волатильности процесса hazard rate.

- [1] — Modelling, Pricing, and Hedging Counterparty Credit Exposure: A Technical Guide (Springer Finance), 2010, Giovanni Cesari, John Aquilina, Niels Charpillon, Zlatko Filipovic, Gordon Lee, Ion Manda
- [2] — Simple Wrong-Way Risk, 2015, A.Antonov, M.Konikov
- [3] — CVA Wrong Way Risk: Calibration using Quanto CDS Basis, 2019, J.Gregory, T.Chung