Зимний научный выезд Фонда "Институт "Вега"

Локальная волатильность: калибровка и хеджирование

Александра Токаева, Альмира Шабакаева, Владимир Шин

Кураторы: Михаил Валентинович Житлухин, Шарль–Анри Рубине

Vega Institute Foundation

25 февраля 2022г

Table of contents

Постановка задачи

Цель: сравнить качества дельта-хеджирований в моделях БШ и ЛВ.
Выделяются несколько подзадач:

1. Калибровка функции ЛВ (и проблемы, связанные с построением поверхности ЛВ)
2. Вычисление цены опциона в модели ЛВ на каждом шаге
3. Написание алгоритма хеджирования

Модель локальной волатильности

Современная теория ценообразования опционов берет свое начало со статьи Ф. Блэка и М. Шоулза 1973 года. Динамика базового актива в модели Блэка–Шоулза (БШ) имеет постоянную волатильность:

$$dS_t = S_t\,(r\,dt + \sigma\,dW_t)$$

В 1994 году Б. Дюпир [Dup94] модернизировал эту модель, введя т.н. функцию локальной волатильности (ЛВ):

$$dS_t = S_t\,(r\,dt + \sigma(t, S_t)\,dW_t)$$

То есть $\sigma(t, S_t)$ – это ПОВЕРХНОСТЬ локальной волатильности.

Формула Дюпира

В предположении, что имеется полная безарбитражная ПОВЕРХНОСТЬ цен опционов, Дюпир вывел формулу для функции ЛВ, показав единственность процесса цены базового актива, генерирующего данную поверхность цен опционов.

$$\sigma^2(t,s) = \frac{2\,C'_T(t,s) + 2\,r\,s\,C'_K(t,s)}{s^2\,C''_{KK}(t,s)}.$$

То есть если у нас есть ПОВЕРХНОСТЬ цен опционов во всех точках - то по этой формуле мы сразу получаем ПОВЕРХНОСТЬ локальной волатильности во всех точках. На практике же на рынке торгуются опционы не со всеми возможными страйками и экспирациями, а только опционы с (K, T) на некоторой сетке. То есть у нас есть C только на сетке - и нам нужно из этих данных как-то построить ПОВЕРХНОСТЬ локальной волатильности.

Проблема интерполяции ЛВ

- Первое, что хочется сделать - интерполировать C по K и по T кубическими сплайнами; но так делать неправильно!
- Правильно интерполировать не цены опционов C, а iv, причем между страйками интерполировать кубическими сплайнами, а между временами - линейными сплайнами;
- интерполировать надо не в координатах (K, T), а в координатах $(y, T); y = ln\left(\frac{K}{S0}\right)$
- а экстраполировать надо линейно в соответствии с формулами Ли для правого и левого крыла - для того, чтобы поверхность получалась безарбитражная.
- то есть была формула Дюпира, в которой на вход шли $C(K, T)$, потом мы ее пересчитали так, чтобы на вход шли $iv(K, T)$, потом чтобы $iv(y, T)$, но там формула окажется такая, iv идет в комплекте с T, поэтому оказывается удобно ввести новую переменную $w(y, t) = iv^2 t$ - и уже ее интерполировать-экстраполировать

LV of iv in terms of (K,T) -см. [Coz12] стр. 23

$$C = C_{BS}(S_t, t, K, T, \sigma_I(K,T))\,.$$

Applying the chain rule of differentiation and using the Black-Scholes formula (9) and its T- and K- derivatives it is finally possible to prove [30] that:

$$\sigma_{LV}^2(K,T) = \frac{\sigma_I^2 + 2T\,\sigma_I\left(\frac{\partial\sigma_I}{\partial T} + (r-d)K\frac{\partial\sigma_I}{\partial K}\right)}{\left(1 + d_1\,K\sqrt{T}\,\frac{\partial\sigma_I}{\partial K}\right)^2 + K^2\,\sigma_I\,T\left(\frac{\partial^2\sigma_I}{\partial K^2} - d_1\sqrt{T}\left(\frac{\partial\sigma_I}{\partial K}\right)^2\right)}\,. \qquad (1.26)$$

Where

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - d + \frac{1}{2}\sigma_I^2)T}{\sigma_I\sqrt{T}}\,.$$

LV of iv in terms of (y,T) -см. [Coz12] стр. 26

1.2.5 Reconstructing the Local Volatility Surface

Once the model is calibrated for each maturity we can finally reconstruct the local volatility surface. For this purpose we notice that $\boxed{1.26}$ requires the values of σ_I, $\frac{\partial \sigma_I}{\partial K}$, $\frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial K^2}$ and $\frac{\partial \sigma_I}{\partial T}$. Applying the chain rule we have that:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_I}{\partial K} &= \frac{\partial x}{\partial K}\frac{\partial \sigma_I}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial \sigma_I}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial K^2} &= \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{1}{K}\frac{\partial \sigma_I}{\partial x}\right) = \frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x^2} - \frac{1}{K^2}\frac{\partial \sigma_I}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Then, we can finally obtain a closed formula for the Local Volatility Surface. Assuming a null dividend yield $d = 0$, for every $x \in \mathbb{R}$ and for $T \in [T_n, T_{n+1}]$ we have that:

$$\sigma_{LV}(x,T) = \sqrt{\frac{\sigma_I^2 + 2T\,\sigma_I\left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial T} + r\frac{\partial \sigma_I}{\partial x}\right)}{\left(1 + d_1\sqrt{T}\,\frac{\partial \sigma_I}{\partial x}\right)^2 + \sigma_I T\left(\frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x^2} - \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} - d_1\sqrt{T}\left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial x}\right)^2\right)}}\,. \quad (1.31)$$

LV of w in terms of (y,T) -см. Gatheral стр. 11

Мы поняли, что нужно переписать формулу Дюпира от w в переменных (y, T);

- $w = \mathrm{iv}^2\, t$ – полная предполагаемая дисперсия (total variance)
- $y = \log(S/K)$ – логденежность (logmoneyness)

$$\sigma^2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{1 - \frac{y}{w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{w} + \left(\frac{y}{w}\right)^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}. \qquad (1)$$

На входе имеется конечное множество рыночных цен опционов $\{C(T_i, K_i)\}_{i=1}^{n}$, из которых получается соответствующее множество точек iv, а затем и w. Далее нужно интерполировать и экстраполировать w'_t, w'_y, w''_{yy}, принимая во внимание условия безабритражности, и подставить все в формулу для функции ЛВ (1).

Безарбитражность: формулы Ли из SVI

Пусть $\widehat{\sigma}(x)$ – предполагаемая волатильность Блэка для опциона колл с лог-денежностью $x = \ln(K/F_0)$, и $w(x) = T\widehat{\sigma}^2(x)$, где время до исполнения T фиксировано.

Теорема (формула Ли для правого крыла). Определим

$$\widetilde{p} = \sup\{p > 0 : \mathrm{E}\, S_T^{1+p} < \infty\}, \qquad \beta_R = \limsup_{x \to +\infty} \frac{w(x)}{x}.$$

Тогда

$$\beta_R = 2 - 4(\sqrt{\widetilde{p}^2 + \widetilde{p}} - \widetilde{p}) \in [0, 2].$$

Напомним, что для вычисления интеграла нам нужна $f(s) = C''(s)$ - по формуле Бридена-Литценбергера.

Что нам дальше делать с поверхностью LV?

Мы собираемся дельта-хеджировать опцион в модели BS и в модели LV. Что такое дельта-хеджирование?
Представим, что мы входим в позицию по Европейскому опциону. Тогда дельта-хеджирование – это стратегия, позволяющая построить портфель ценных бумаг, стоимость Π_t которого в момент экспирации будет равна выплате по данному опциону:

$$\Pi_T = (S_T - K)^+$$

Согласно теории дельта-хеджирования, на каждом шаге по времени наш портфель должен иметь Δ акций:

$$\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Почему в модели LV вычислить дельту сложно?

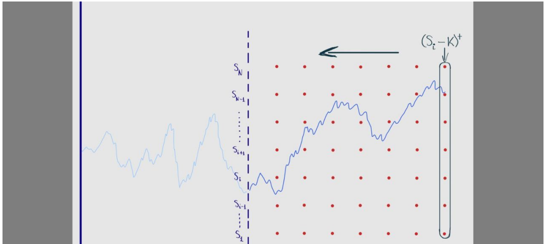
В модели BS цена опциона удовлетворяла УРЧП (которое называется уравнением BSM); но это УРЧП имеет аналитическое решение - и поэтому дельту опциона в модели BS мы можем найти НЕ решая численно на сетке УРЧП - просто по аналитической формуле $\Delta = \Phi(d_1)$
А в модели LV УРЧП есть, но аналитической формулы для его решения нет - поэтому чтобы посчитать дельту, придется численно решить на сетке УРЧП, найти цены опционов на сетке, численно их продифференцировать - и это будет искомая дельта.
Подчеркнем, что если подставить в формулу $\Delta = \Phi(d_1)$ для дельты из модели BS в качестве волатильности найденную локальную волатильность - то это не будет дельтой в модели LV, потому что в модели LV цена опциона не задается формулой $S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$ - а значит, и дельта не задается формулой $\Delta = \Phi(d_1)$.

Цена опциона в модели ЛВ

В модели ЛВ цена Европейского опциона колл $V(t, X)$, $X = \log S$, на актив S_t удовлетворяет УРЧП

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = r\,V, \tag{2}$$

Данное УРЧП будем решать численно полностью неявной схемой 1-го порядка, на каждом шаге применяя метод прогонки. Почему неявной - потому что явная неустойчива, а почему не схемой Кранка-Николсон - потому что она неустойчива, если payoff негладкий - а у нас он негладкий.



Неявная схема 1 порядка

- $V_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)V_x + \dfrac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} = rV, \quad \nu := r - \dfrac{1}{2}\sigma^2$
- $\dfrac{V_j^i - V_j^{i-1}}{\tau} + \nu_j^{i-1}\dfrac{V_{j+1}^{i-1} - V_{j-1}^{i-1}}{2h} + \dfrac{1}{2}(\sigma^2)_j^{i-1}\dfrac{V_{j-1}^{i-1} - 2V_j^{i-1} + V_{j+1}^{i-1}}{h^2} = rV_j^{i-1}$
- $\left(\dfrac{\tau\nu_j^{i-1}}{2h} - \dfrac{\tau}{2h^2}(\sigma^2)_j^{i-1}\right)V_{j-1}^{i-1} + \left(1 + \dfrac{\tau}{h^2}(\sigma^2)_j^{i-1} + r\tau\right)V_j^{i-1} +$
  $+ \left(-\dfrac{\tau\nu_j^{i-1}}{2h} - \dfrac{\tau}{2h^2}(\sigma^2)_j^{i-1}\right)V_{j+1}^{i-1} = V_j^i$

Граничные условия:

$$V_0^i - V_1^i = 0, \;\; V_M^i - V_{M-1}^i = s_M - s_{M-1}.$$

Кроме того:

$$V_j^N = (s_j - K)^+$$

Дельта-хеджинг

Рассматривается рынок, подчиненный модели Хестона с заданными параметрами.
Сэмплируется траектория цены актива по схеме Эйлера $\{S_{t_i}\}_{i=0}^{n}$. Далее численно решается УРЧП на сетке, находится цена опциона V, а затем и $\frac{\partial V}{\partial S}$.
Для каждой фиксированной траектории цены мы идем по времени вперед и перебалансируем наш портфель в соответствии с дельтой:

$$\Pi_{t_{i+1}} = \Pi_{t_i} e^{r\,\Delta t_i} + (\Delta_{t_i} - \Delta_{t_{i+1}})\, S_{t_{i+1}}, \quad i = 0, ..n-2.$$

В последний момент времени мы продаем все акции, так что портфель имеет стоимость:

$$\Pi_{t_n} = \Pi_{t_{n-1}} e^{r\Delta t_{n-1}} + \Delta_{t_{n-1}} S_{t_n}.$$

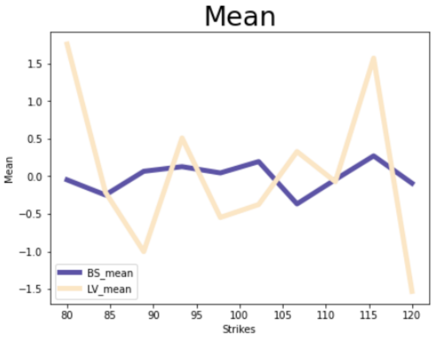
Ошибкой хеджирования называется разность между капиталом портфеля в последний момент времени Π_{t_n} и выплатой опциона $(S_{t_n} - K)^+$.

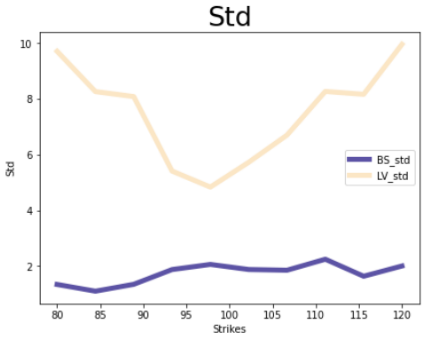
Про перекалибровку модели

Отметим, что для лучшего хеджирования нужно на каждом шаге по времени перекалибровывать модель локальной волатильности. Это значит, что в момент времени $t = 0$ мы видим на рынке цены опционов с экспирациями 1y, 2y от текущего момента - и калибруем модель локальной волатильности к ним. В момент $t = 0.5$ мы видим новое состояние рынка - там все так же торгуются опционы с временами до экспирации 1y,2y от настоящего момента $t = 0.5$, то есть абсолютные даты экспирации у них уже 1.5y,2.5y, считая от $t = 0$. У этих новых опционов свои новые цены - и мы снова калибруем под них нашу поверхность LV, снова решаем УРЧП и получаем дельту для этого момента времени. В итоге мы сравнивали 4 модели: BS без перекалибровки, BS с перекалибровкой, LV без перекалибровки и LV с перекалибровкой.

Результаты

Сравнение ошибок БШ и ЛВ хеджирования для ITM, ATM, OTM опционов ($S_0 = 100$):





Заключение

- Научились строить поверхность локальной волатильности, правильно интерполируя и экстраполируя
- Научились находить цены опционов в модели локальной волатильности, численно решая СДУ (полностью неявная схема).
- Сравнили качество хеджирования в модели Блэка-Шоулза и модели локальной волатильности.
- Однако сделали это для случаев, когда рынок соотвествует модели БШ и Хестона.
- В дальнейшем можно улучшить написанный нами код: получить численный алгоритм хеджинга для произвольных реальных рыночных данных.

Литература

[Dup94] Bruno Dupire. «Pricing with a Smile». В: 1994.

[DFW96] B. Dumas, J. Fleming и R.E. Whaley. «Implied volatility functions: empirical tests». В: 1996, с. 199—233.

[Lee04] Roger Lee. «The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes». В: (2004), с. 469—480.

[Gat06] Jim Gatheral. «The Volatility Surface: A Practitioner's Guide». В: 2006.

[Coz12] Daniele Cozzi. «Local Stochastic Volatility Models Solving the Smile Problem with a Nonlinear Partial Integro-Differential Equation». В: 2012.

[LS14] Timothy Ling и Pavel Shevchenko. «Historical Backtesting of Local Volatility Model using AUD/USD Vanilla Options». В: (2014).