Стратегия оптимального роста в многоагентной модели рынка с афинными выплатами

Токаева Александра Александровна
(науч. рук. – к.ф.-м.н. Житлухин Михаил Валентинович)

МГУ им. М.В.Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра теории вероятностей, 609 группа

Москва
Конференция "Ломоносов 2023"
19 апреля 2023 г.

План доклада

1. История вопроса
2. Модель рынка с эндогенными ценами
3. Основные результаты: нахождение стратегии, называемой стратегией оптимального относительного роста; эта стратегия окажется выживающей;
4. Численный пример: выживающая стратегия захватывает рынок;

Цель работы и предпосылки для исследования

- Наша цель — построить стратегию, оптимальную на долгосрочном горизонте.
- Оптимальная стратегия — это стратегию, которая "выживает"на рынке вне зависимости от стратегий других агентов.
- Применяем эволюционный подход к моделированию динамики рынка (evolutionary behavioral finance).
- Отход от идеи, что агенты максимизируют свои ненаблюдаемые utility functions; напротив, преполагается, что агенты не обязательно полностью рациональны; они могут использовать разнообразные (допустимые) стратегии, зависящие от состояния рынка, от предыдущих действий других агентов, от истории игры.

Модель риска с эндогенными ценами.

- N агентов
- K активов
- Активы короткоживущие в том смысле, что они рождаются, живут один цикл, выплачивают дивиденды, умирают, и далее цикл повторяется.
- В каждый момент времени t каждый агент n выбирает вектор долей $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \dots, \lambda_t^{n,K})$, в которых он вкладывает свой капитал W_t^n в каждый из K активов в момент времени t.
- В нашей модели агент обязан вложить весь свой капитал в активы, банковского счета нет, короткие продажи запрещены.

Стратегия агента

Доли λ_t^n для разделения капитала могут зависеть от истории состояний случайного фактора $\bar{s}_{t-1} := (s_1, ..., s_{t-1})$, вектора начальных капиталов $\bar{W}_0 := (W_0^1, ..., W_0^N)$ и истории стратегий всех агентов $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, ..., \lambda_{t-1})$, где $\lambda_s = (\lambda_s^1, \ldots, \lambda_s^N)$.
Стратегия n-го агента — это последовательность $\Lambda^n = (\Lambda_t^n)_{t=0}^{\infty}$ векторнозначных функций

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$$

со значениями в стандартном K-симплексе

$$\Delta_K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \ldots + a^K = 1\}$$

Характеристика портфеля

- $\bar{P}_t = (P_t^1, \dots, P_t^K)$ — вектор цен активов в момент времени t.
- $\bar{X}_t^n = (X_t^{n,1}, \dots, X_t^{n,K})$, где $X_t^{n,k}$ — количество единиц актива k в портфеле.
- $\langle \bar{P}_t, \bar{X}_t^n \rangle = \sum_{k=1}^K P_t^k X_t^{n,k}$ — цена всего портфеля агента n в момент времени t.
- $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$, $k = 1, \dots, K$ — величина дивидендов, которые единица актива k выплачивает в момент времени $t \geq 1$.
- Величина капитала $W_t^n = \langle \bar{A}_t, \bar{X}_{t-1}^n \rangle = \sum_{k=1}^K A_t^k X_{t-1}^{n,k}$
- Если агент n вложил долю $\lambda_{t,k}^n$ своего капитала в покупку актива k в момент t, тогда число единиц актива, который он купил, равно $X_t^{n,k} = \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k}$.

Динамика капитала

• Напомним, что каждого актива на рынке ровно 1 единица, и при этом цены устанавливаются такие, чтобы спрос был равен предложению.

$$1 = \sum_{n=1}^{N} X_t^{n,k} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} = \frac{1}{P_t^k} \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n,$$

• Отсюда находим установившиеся цены: $P_t^k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n$.

• В частности, получаем, что последовательность капиталов W_t^n удовлетворяет соотношению

$$W_{t+1}^n = \sum_{k=1}^{K} X_{t-1}^{n,k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n} A_{t+1}^k,$$

Аффинные дивиденды

Обозначим за W_t полный капитал рынка в момент времени t, а за μ_t^k обозначим долю полного капитала рынка, вложенную в покупку k-го актива в момент времени t:

$$W_t = \sum_{n=1}^{N} W_t^n, \qquad \mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n.$$

Мы предполагаем, что величины дивидендов A_{t+1}^k являются афинными функциями от μ_t^k:

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \beta_{t+1}^k \mu_t^k,$$

где α_{t+1}^k и β_{t+1}^k — произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \tag{1}$$

$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \tag{2}$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными функциями a_{t+1}^k, b_{t+1}^k.

Выживающая стратегия

Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой

$$r_t^n := \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Определение

Стратегия Λ^n n-го агента называется *выживающей*, если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$ с заданной стратегией Λ^n и произвольными стратегиями Λ^j агентов $j \neq n$, выполняется неравенство $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$

Лог-оптимальная стратегия

Чтобы найти выживающую стратегию, мы будем искать *лог-оптимальную стратегию*, определение котрой мы сейчас дадим.

Определение

Стратегия Λ^n называется *лог-оптимальной* , если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$, где Λ^n - данная стратегия, выполнено $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\ln r_t^n \text{ является субмартингалом.} \quad (3)$$

Неподвижная точка

Для $t \geq 1$ определим Δ^K-значные функции $g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})$, $\lambda^* \in \Delta^K$, по формулам

$$g_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) = a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + \lambda^* b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}).$$

Введем функции $L_t = L_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $t \geq 0$, со значениями в Δ_K, определенные по формуле

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathrm{E}_t \left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Основная теорема: Предложение

Предложение

Для любого $t \geq 0$ существует измеримая функция $\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ со значениями в Δ^K со следующими свойствами: для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено:

$$\mathrm{P}_t\left(\sum_{k=1}^{K} g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) = 0\right) = 0 \text{ п.н.,} \tag{4}$$

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^{K} g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right) \leq 1 \text{ п.н.,} \quad k = 1, \ldots, K, \tag{5}$$

Λ_t^* — неподвижная точка отображения L_t, то есть для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$L_t(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) \text{ п.н.,} \tag{6}$$

где для $t = 0$ полагаем $\Lambda_0^* = \Lambda_0^*(\bar{\chi}_0)$ зависит только от $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Основная теорема 1

Теорема

Стратегия $\Lambda^* = (\Lambda^*_t)_{t=0}^{\infty}$, состоящая из функций, удовлетворяющих свойствам (4)–(6) является лог-оптимальной, а значит, выживающей.

Приведем пример, когда лог-оптимальная стратегия неединственна. Пусть $a^k_t \equiv 0$, $b^k_t \equiv 1$ для всех t, k, и начальный капитал рынка $W_0 = 1$. Тогда уравнение динамики капитала превращается в

$$W^n_{t+1} = \frac{W^n_t}{W_t}.$$

Отсюда $W_t = 1$ для всех $t \geq 0$, то есть капиталы W^n_t не изменяются вне зависимости от того, какие стратегии они используют. Следующий результат показывает, что при некоторых дополнительных условиях, если хотя бы один агент использует лог-оптимальную стратегию, то μ^k_t стремяется к этой оптимальной стратегии при $t \to \infty$ с вероятностью единица.

Основная теорема 2

Теорема

Пусть стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (4), (6) и следующей более сильной версии условия (5): существует $\varepsilon > 0$ такой что для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$\mathrm{E}_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 - \varepsilon \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K. \tag{7}$$

Тогда, если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ агент n использует стратегию Λ^*, то выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ a.s.},$$

В частности, $\|\lambda_t^n - \mu_t\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Основная теорема 3

Теорема

Пусть последовательность состояний случайного фактора s_t, $t \geq 1$ состоит из н.о.р. случайных величин, и коэффициенты α_t^k, β_t^k зависят только от s_t, то есть $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$. Тогда:

(a) $\exists$ константная лог-оптимальная стратегия $\Lambda_t^* \equiv \Lambda^* \in \Delta^K$.

(b) Пусть дополнительно $\mathrm{P}(\alpha_t^k > 0) > 0$ для всех $k = 1, \ldots, K$. Тогда стратегия Λ^* - это единственная выживающая стратегия в классе константных стратегий и $\Lambda^{*,k} > 0$, $k = 1, \ldots, K$, то есть стратегия оказывается полностью диверсифицированной. Более того, Λ^* удовлетворяет (7).

(c) При дополнительном условии в любом профиле стратегий, в котором некоторый агент использует стратегию Λ^*, а остальные агенты используют произвольные константные полностью диверсифицированные стратегии ($\Lambda^{n,k} > 0$ для всех n, k), выполнено $r_t^n \to 0$ п.н. при $t \to \infty$ для любого агента n, который использует стратегию $\Lambda^n \neq \Lambda^*$.

Численный пример

Рассмотрим простую модель, в которой всего два актива. Пусть случайное состояние мира моделируется последовательностью н.о.р. случайных векторов $s_t = (s_t^1, s_t^2)$ со значениеми в $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ и симметричным совместным распределением

$$\mathrm{P}(s_t = (1,0)) = \mathrm{P}(s_t = (0,1)) = 1 - p, \qquad \mathrm{P}(s_t = (1,1)) = 2p - 1,$$

где $1/2 \le p < 1$ — параметр. Пусть коэффициенты $\alpha_t^k = a^k k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$ в функции дивидендов задаются как

$$a^k(s_t) = b^k(s_t) = \mathrm{I}(s_t^k = 1), \qquad k = 1, 2.$$

То есть выплата каждого из двух активов равна либо $1 + \mu_t^k$ с вероятностью p, любо нулю с вероятностью $1 - p$. С вероятнстью $2p - 1$, оба актива платят дивиденды одновоременно.
В силу симметрии, лог-оптимальной стратегией в этой модели является $\Lambda^* = (1/2, 1/2)$;

Численный пример: продолжение

Поместим стратегию Λ^* на рынок. Пусть на рынке есть 9 инвесторов, каждый из которых использует стратегию $\Lambda^n = (n/10, 1 - n/10)$, where $n = 1, 2, \ldots, 9$. В частности, агент $i = 5$ использует стратегию Λ^*. Мы не рассматриваем стратегии $\Lambda^0 = (0, 1)$ и $\Lambda^{10} = (1, 0)$, поскольку их капитал становится нулем за конечное число периодов. Рис. 1 показывает эволюцию капиталов агентов на одной симуляции рынка длиной в 400 шагов по времени и параметром $p = 2/3$. На первом рисунке показаны относительные капиталы r_t^n каждого из агентов, где r_t^n соответствует высоте закрашенного столбика в момент t.
На втором графике показан относительный капитал лог-оптимальной стратегии.

Численный пример: симуляции

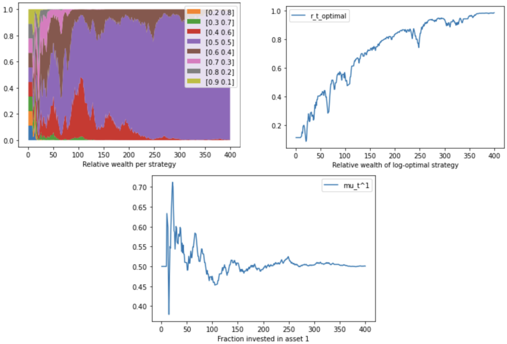

Рис.: Эволюция капиталов агентов в одной симуляции рынка длиной в 400 шагов. Слева сверху: относительные капиталы стратегий $\Lambda^n = (n/10, 1 - n/10)$. Справа сверху: относительный капитал оптимальной стратегии Λ^*. Снизу: доля μ_t^1 от капитала рынка, вложенная в первый актив.

Результаты работы

1. Получена формула для лог-оптимальной, а значит, выживающей, стратегии.
2. Доказана теорема о том, что использование оптимальной стратегии определяет долгосрочное состояние рынка.
3. Приведен численный пример, показывающий эволюцию рынка с оптимальной стратегией.

Algoet, P. H. and Cover, T. M. (1988).
Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment.
The Annals of Probability, 16(2):876–898.

Aliprantis C. D., and Border K. C. (2006).
Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.
Springer, 3rd edition, 591–600.

Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013).
Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games.
Annals of Finance, 9(2):121–144.

Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2005).
Market selection and survival of investment strategies.
Journal of Mathematical Economics, 41(1-2):105-122.

Blume L. and Easley D. (1992).
Evolution and market behaviour.
Journal of Economic Theory, 58(1):9–40.

Breiman, L. (1961).
Optimal gambling systems for favorable games.
Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1:63–68.

Drokin, Y. and Zhitlukhin, M. (2020).
Relative growth optimal strategies in an asset market game.
Annals of Finance, 16:529–546.

Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016).
Evolutionary behaviorial finance. In Haven, E. et al., editors,
The handbook of Post Crisis Financial Modelling, 214-234. Palgrave Macmillan UK.

Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016).
Market selection of financial trading strategies: Global stability.
Mathematical Finance, 12(4):329-339.

Благодарю за внимание!