Токаева Александра
Отчет по работе научных групп фонда Институт Вега в весеннем семестре 2023.

1 Введение

Основным предметом исследования в данной работе является стохастическая модель финансового рынка с дискретным временем, описывающая конкуренцию агентов (инвесторов) за несколько активов на бесконечном горизонте времени. Выплаты актива делятся между инвесторами пропорционально долям капитала, вложенным инвесторами в этот актив. Цены активов задаются эндогенно из условия краткосрочного равенства спроса и предложения на каждый из активов. Как следствие, прибыль или убыток инвестора зависят не только от реализовавшихся выплат активов, но и от действий остальных инвесторов.

Основная цель работы — нахождение стратегии, называемой стратегией относительного оптимального роста, или *лог-оптимальной*. Суть этой стратегии заключается в том, что логарифм относительного капитала использующего эту стратегию инвестора является субмартингалом вне зависимости от того, какие стратегии используют остальные инвесторы. Под относительным капиталом мы понимаем долю капитала инвестора от общего капитала на рынке.

Хорошо известно, что в стандартных моделях рынка субмартингальное свойство стратегии влечет за собой ряд оптимальных свойств (см. [1], [11]). В нашей модели найденная стратегия также окажется оптимальной в следующем смысле: относительный капитал использующего эту стратегию инвестора остается отделенным от нуля на бесконечном горизонте времени с вероятностью один. Такие стратегии мы будем называть *“выживающими”*. Кроме того, мы покажем, что если агрегированная стратегия остальных инвесторов асимптотически отличается от найденной лог-оптимальной стратегии, то доля капитала использующего лог-оптимальную стратегию инвестора стремится к единице, то есть он захватывает весь рынок.

Модель, изучаемую в работе, в общих словах можно описать следующим образом. На рынке присутствуют K активов, выплачивающих дивиденды в дискретные моменты времени, а также N агентов, которые могут покупать и продавать активы и получать выплачиваемые активами дивиденды. Короткие продажи запрещены. С течением времени капитал инвесторов изменяется только за счет получения дивидендов. Другими словами, активы являются “короткоживущими”, поэтому агент не получает прибыль или убыток от изменения цены актива, ведь актив живет только на протяжении одного временного промежутка, выплачивает дивиденды и исчезает. В целом, такая модель во многом схожа со стандартными моделями финансовой математики, с той лишь разницей, что в нашей модели цены активов определяются не экзогенно, а эндогенно, а именно, стратегиями инвесторов. Другими словами, в нашей модели мы считаем, что предложение каждой акции фиксировано (и, без ограничения общности, равно единице), а цена актива такова, что совокупный спрос всех инвесторов на этот актив равен предложению.

Эта задача является продолжением исследований в области теории оптимального роста. Первыми работами в этом направлении были [12], [6], где находились асимптотически оптимальные стратегии для моделей с дискретным временем и экзогенными ценами. Далее эти результаты были значительно улучшены. Среди множества работ можно выделить [1], где была рассмотрена общая модель с дискретным временем. Однако в этой работе цены активов все еще задавались экзогенно и, кроме того, рассматривалась задача одного (не влияющего на цены) инвестора, а не задача конкуренции нескольких инвесторов. Авторы работы [5] одними из первых исследовали "выживающие" стратегии в задаче с эндогенными ценами активов, но весьма простой структурой дивидендов. Более сложная структура дивидендов в модели с эндогенными дивидендами исследовалась в работе [3].

Наша модель обобщает модель из работы [3], в которой рассматривались лог-оптимальные стратегии в модели рынка с "короткоживущими" активами (то есть эндогенными ценами) в дискретном времени, но с не зависящими от стратегий инвесторов дивидендами. В нашей модели предполагается более сложная, аффинная структура дивидендов, что делает дивиденды зависящими от стратегий инвесторов и существенно затрудняет поиск лог-оптимальных стратегий. Кроме того, стоит отметить статью [7], в которой также обобщается модель из [3], но другим способом: а именно, добавлением на рынок безрискового актива (банковского счета) в дополнение к "короткоживущим" активам. Последние достижения в области эволюционных финансов представлены в [8].

Таким образом, наша модель в дискретном времени обладает следующими особенностями:

1) Мы рассматриваем не действия одного (не влияющего на цены) инвестора против всего остального рынка, а игру нескольких агентов, каждый из которых своей стратегией оказывает влияние на цены активов, что существенно усложняет поиск лог-оптимальных стратегий.

2) Активы в нашей модели "короткоживущие" в том смысле, что они выпускаются в момент t, в момент $t+1$ выплачивают дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже, и исчезают. Другими словами, "короткоживущие" активы нельзя продать в момент $t+1$ и получить от этого прибыль или убыток, от них можно только получить дивиденды.

3) Дивиденды задаются экзогенно, а цены активов определяются эндогенно из условия равенства спроса и предложения в каждый момент времени. Отметим, что в нашей модели действия инвесторов предшествуют установлению цен, то есть сначала инвесторы объявляют, какую долю своего капитала они хотят вложить в каждый из активов, а после этого цены на каждый актив устанавливаются из условия равенства спроса и предложения на этот актив.

4) Размер дивидендов, выплачиваемых активом, зависит от суммарного объема капитала, который вложили в этот актив все инвесторы на предыдущем шаге. Это экономически обоснованно, поскольку чем больше в компанию инвестировали, тем больше у нее возможностей для развития и, соответственно, для выплаты дивидендов. Отметим, что именно эта зависимость от объема вложенного капитала (который, в свою очередь, зависит от стратегий агентов) отличает нашу модель от других и делает нашу задачу более сложной.

5) Наша модель развивает подход, предложенный в [3], где также рассматривались лог-оптимальные стратегии в модели с эндогенными ценами в дис-

кретном времени, но величина дивидендов актива не зависела от объема вложенного в актив капитала. Именно поэтому в модели [3] удалось найти лог-оптимальную стратегию в явном виде. В нашем же случае мы не найдем явный вид лог-оптимальной стратегии, но докажем ее существование. Найденная нами стратегия будет зависеть от текущих капиталов инвесторов, которые в свою очередь зависят от их прошлых действий, в то время как в [3] оптимальная стратегия не зависела от прошлых действий инвесторов. При этом в частном случае нашей модели, соответствующем модели [3], найденная нами стратегия окажется в точности стратегией из [3].

Основной результат работы состоит в доказательстве существования стратегии относительного оптимального роста, или лог-оптимальной стратегии. Будет показано, что пропорция капитала, которую эта стратегия вкладывает в каждый из активов, задается неявно как неподвижная точка некоторого отображения, которое будет задано ниже.

Дипломная работа организована следующим образом. В разделе 2 описывается общая модель рынка с эндогенными ценами. В разделе 3 даются определения "выживающих" и лог-оптимальных стратегий, а также формулируются основные результаты о существовании и асимптотическом поведении этих стратегий. В разделе 4 приводится численный пример, демонстрирующий поведение "выживающей" стратегии на рынке. В разделе 5 показывается связь результатов в нашей модели с известными результатами в других моделях. Раздел 6 содержит доказательства основных результатов. Раздел 7 подводит итоги работы.

2 Модель рынка

В данном разделе будет предложена общая модель рынка с произвольным числом агентов и активов. В дальнейшем, однако, будет рассматриваться только частный случай двух агентов и двух активов.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство с полной дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, порожденной случайными величинами $s_1, s_2, \dots$ из измеримого множества Ω. Случайная величина s_t интерпретируется как состояние рынка в момент времени t. Другими словами, рынок эволюционирует под влиянием случайного фактора (возможно, многомерного), который моделируется посредством случайных величин $s_1, s_2, \dots$. Множество Ω, в котором принимают значения s_t — полное сепарабельное метрическое пространство (это условие нужно для существования регулярного условного распределения).

Рынок в модели состоит из $N \geq 2$ агентов и $K \geq 2$ "короткоживущих" активов. В каждый из моментов времени $t = 0, 1, \dots$ на рынке "рождается" одна единица каждого из K активов, а инвесторы одновременно и независимо принимают решение о том, в каких долях они инвестируют свой капитал в каждый из K активов на промежутке от t до $t + 1$. Цена на каждый из активов в момент t устанавливается эндогенно из условия равенства спроса и предложения на этот актив. После этого в момент $t + 1$ каждый из активов выплачивает дивиденды в соответствии с формулой, которая будет дана ниже. Эти дивиденды распределяются между инвесторами пропорционально капиталу, который они инвестировали в данный актив на предыдущем шаге. После выплаты дивидендов все активы “умирают”, рождаются заново, и цикл повторяется.

Агент n, где $n = 1, \ldots, N$, характеризуется своим неслучайным начальным капиталом $W_0^n > 0$ и стратегией Λ^n. Капитал W_t^n n-го агента в произвольный отличный от начального момент времени t определяется из динамики, которая будет приведена ниже, и образует согласованную с фильтрацией случайную последовательность капиталов $W^n = (W_t^n)_{t=0}^{\infty}$.

В каждый момент времени t каждый агент n выбирает вектор долей $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \ldots, \lambda_t^{n,K})$, в которых он вкладывает свой капитал W_t^n в каждый из K активов в момент времени t (в нашей модели агент обязан вложить весь свой капитал в активы). Например, сумма $\lambda_t^{n,k} W_t^n$ тратится агентом n на покупку актива k (а сколько именно единиц актива k этот агент купил — будет определено, когда все агенты объявят, сколько денег они выделили на покупку актива k, и из краткосрочного равенства спроса и предложения определится цена данного актива).

Доли λ_t^n могут зависеть от истории состояний случайного фактора $\bar{s}_t := (s_1, ..., s_t)$, вектора начальных капиталов $\bar{W}_0 := (W_0^1, ..., W_0^N)$ и истории стратегий всех агентов $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, ..., \lambda_{t-1})$, где $\lambda_s = (\lambda_s^1, \ldots, \lambda_s^N)$.

Стратегия n-го агента — это последовательность $\Lambda^n = (\Lambda_t^n)_{t=0}^{\infty}$ измеримых векторнозначных функций

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$$

со значениями в стандартном K-симплексе

$$\Delta_K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \ldots + a^K = 1\}.$$

Для $k = 1, \ldots, K$, k-я координата $\Lambda_t^{n,k}$ соответствует доле капитала, которую n-й агент вложил в покупку k-го актива в момент времени t. Короткие продажи запрещены. Для $t = 0$, функция $\Lambda_0^n = \Lambda_0^n(\bar{W}_0)$ не зависит от истории состояний случайного фактора и истории стратегий агентов. Зависимость Λ_t^n от $\bar{\lambda}_{t-1}$ нельзя опустить, потому что построенная нами оптимальная стратегия будет зависеть от полного капитала рынка, который, в свою очередь, зависит от $\bar{\lambda}_{t-1}$.

Если заданы вектор начальных капиталов $\bar{W}_0 = (\bar{W}_0^1, \ldots, \bar{W}_0^N)$ и профиль стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$, то инвестиционные стратегии каждого агента на этом рынке определяются следующим рекурсивным соотношением:

$$\lambda_0^n = \Lambda_0^n(\bar{W}_0), \qquad \lambda_t^n(\bar{s}_t) = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})),\ t \geq 1, \tag{1}$$

где $\bar{\lambda}_t(\bar{s}_t)) = (\lambda_0, \lambda_1(\bar{s}_1)), \ldots, \lambda_t(\bar{s}_t)))$. Далее мы будем опускать зависимость от $\bar{s}_t$, где это не будет приводить к неоднозначности.

Обозначим за $\bar{P}_t = (P_t^1, \ldots, P_t^K)$ вектор цен активов в момент времени t. Координата P_t^k соответствует цене одной единицы актива k в момент t. Зададим динамику капитала $W_t^n = W_t^n(\bar{s}_t)$ n-го агента и вектора цен $\bar{P}_t = \bar{P}_t(\bar{s}_t)$ для заданного профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$ и вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$.

Цены формируются из условия равенства спроса и предложения в каждый момент времени. Состав портфеля агента n в момент времени $t \geq 0$ характеризуется вектором $\bar{X}_t^n = (X_t^{n,1}, \ldots, X_t^{n,K})$, где $X_t^{n,k}$ есть количество единиц актива k в портфеле. Скалярное произведение $\langle \bar{P}_t, \bar{X}_t^n \rangle = \sum_{k=1}^K P_t^k X_t^{n,k}$ соответствует цене всего портфеля агента n в момент времени t.

В момент времени $t = 0$ капитал n-го агента равен его неслучайному начальному капиталу W_0^n. За $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$, $k = 1, \ldots, K$, обозначим величину дивидендов, которые единица актива k выплачивает в момент времени $t \geq 1$. Поскольку мы предполагаем, что на рынке количество каждого актива равно единице, то величина A_t^k характеризует полную выплату дивидендов от актива k. Тогда величина капитала n-го агента в момент времени $t \geq 1$ равна

$$W_t^n = \langle \bar{A}_t, \bar{X}_{t-1}^n \rangle = \sum_{k=1}^K A_t^k X_{t-1}^{n,k}, \tag{2}$$

то есть величина капитала в момент времени t формируется из выплат активов, купленных в момент времени $t - 1$.

Если агент n вложил долю $\lambda_t^{n,k}$ своего капитала в покупку актива k в момент t, тогда число единиц актива, который он купил, равно

$$X_t^{n,k} = \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k}. \tag{3}$$

Напомним, что каждого актива на рынке ровно 1 единица, и при этом цены устанавливаются такие, чтобы спрос был равен предложению. Тогда для всех $t \geq 0$ и $k = 1, \ldots, K$ выполнено

$$1 = \sum_{n=1}^N X_t^{n,k} = \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} = \frac{1}{P_t^k} \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n.$$

Отсюда находим, что установившиеся равновесные цены имеют вид

$$P_t^k = \sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n. \tag{4}$$

Если правая часть этого выражения равна нулю на множестве $\bar{s}_t$, то в формуле (3) полагаем $X_t^{n,k} = 0$ на этом множестве.

Таким образом, имея профиль стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$ и вектор начальных капиталов, мы можем рекурсивно с помощью выражений (2)–(4) восстановить случайную траекторию системы, задаваемой последовательностями капиталов агентов W_t^n, равновесных цен $\bar{P}_t = (P_t^1, \ldots, P_t^K)$ и составов портфелей $X_t^n = (X_t^{n,1}, \ldots, X_t^{n,K})$.

В частности, используя (2)–(4), получаем, что последовательность капиталов W_t^n удовлетворяет соотношению

$$W_{t+1}^n = \sum_{k=1}^K X_t^{n,k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n} A_{t+1}^k, \tag{5}$$

при этом полагаем $0/0 = 0$ под знаком суммирования.

В нашей модели, в отличие от всех предыдущих моделей, дивидендам A_t^k разрешается зависеть от стратегий агентов. Далее мы будем рассматривать специальный случай формы дивидендов, который мы называем *аффинным*.

Обозначим за W_t полный капитал рынка в момент времени t, а за μ_t^k обозначим долю полного капитала рынка, вложенную в покупку k-го актива в момент времени t:

$$W_t = \sum_{n=1}^{N} W_t^n, \qquad \mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n.$$

Мы предполагаем, что величины дивидендов A_{t+1}^k являются аффинными функциями от μ_t^k:

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \beta_{t+1}^k \mu_t^k, \tag{6}$$

где α_{t+1}^k и β_{t+1}^k — произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \tag{7}$$

$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \tag{8}$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными функциями a_{t+1}^k, b_{t+1}^k.

Соотношения (6)–(8) означают, что величина дивидендов A_{t+1}^k в следующий момент времени $t+1$ может зависеть от текущего состояния рынка (которое зависит от истории случайных факторов $\bar{s}_t$, вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и прошлых действий агентов $\bar{\lambda}_{t-1}$), будущего состояния случайного фактора s_{t+1}, и инвестиционных пропорций λ_t агентов в текущий момент t, но зависимость от λ_t может быть только через μ_t^k.

Отметим, что μ_t^k представляет собой *взвешенную стратегию* всех агентов: стратегия n-го агента взвешивается с весом W_t^n/W_t, равным доле его капитала на рынке.

Для того чтобы модель не вырождалась, мы будем требовать, чтобы для всех $t \geq 1$ и любых значений $\bar{s}_t$, $\bar{W}_0$, $\bar{\lambda}_{t-2}$ выполнялось

$$\sum_{k=1}^{K} (a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})) > 0. \tag{9}$$

Замечание 1. Отметим, что наша модель позволяет рассматривать не только дивиденды, аффинно зависящие от *относительных* долей капиталов μ_t^k, но и дивиденды, аффинно зависящие от *абсолютных* долей капиталов $v_t^k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n$.

Действительно, пусть дивиденды имеют вид

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \widetilde{\beta}_{t+1}^k v_t^k, \tag{10}$$

где $\widetilde{\beta}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = \widetilde{b}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1}))$, а функции α_{t+1}^k такие же, как раньше. Тогда для того, чтобы свести (10) к (6), положим

$$b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) = \widetilde{W}_t(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) \widetilde{b}_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}),$$

где $\widetilde{W}_t = \sum_{n=1}^N \widetilde{W}_t^n$ с

$$\widetilde{W}_0^n = W_0^n, \qquad \widetilde{W}_t^n(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_{t-1}^{n,k} \widetilde{W}_{t-1}^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_{t-1}^{n,k} \widetilde{W}_{t-1}^n} A_t^k,\ t \geq 1.$$

Функции $\widetilde{W}_t^n$ показывают зависимость капитала агента от полной истории игры. То есть зная вектор начальных капиталов $\bar{W}_0$, историю стратегий агентов $\bar{\lambda}_{t-1}$ и историю состояний случайного фактора $\bar{s}_t$, мы можем восстановить траекторию капитала агента.

3 Выживающие и лог-оптимальные стратегии

3.1 Определения выживающей и лог-оптимальной стратегии

Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой

$$r_t^n := \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Следующие определения вводят два основных понятия в работе.

Определение 1. Стратегия Λ^n n-го агента называется *“выживающей”*, если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ с заданной стратегией Λ^n и произвольными стратегиями Λ^j агентов $j \neq n$ выполняется неравенство $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$

Согласно определению, “выживающие” стратегии позволяют агенту сохранять ненулевую долю от общего капитала рынка вне зависимости от того, какие стратегии используют остальные агенты.

Может показаться, что рассмотрение “выживающих” стратегий значительно ограничивает спектр стратегий, потому что о “выживании” приходится думать только когда “все идет плохо”. Однако это не так. Оказывается, что в большинстве моделей эволюционных финансов класс “выживающих” стратегий совпадает с классом “непобеждаемых” стратегий, которые на длинном горизонте с точки зрения роста капитала работают не хуже, чем любая другая стратегия. Другими словами, чтобы не быть вытесненной с рынка, стратегия должна быть “непобеждаемой” (см. [8]).

Кроме того, оказывается, что “выживающие” стратегии определяют структуру рынка на длинном горизонте времени. Более подробно мы поговорим про это в разделе 3.3.

Чтобы найти “выживающую” стратегию, будем искать *лог-оптимальную стратегию*, определение которой мы сейчас дадим.

Перед этим напомним, что случайная величина ξ_t, согласованная с порожденной случайным процессом $(s_t)_{t=0,1,\dots}$ фильтрацией, называется *субмартингалом*, если $\mathrm{E}\,|\xi_t| < \infty$ и $\mathrm{E}_t\,\xi_{t+1} \geq \xi_t$ п.н. для всех $t \geq 0$, где $\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot \mid \bar{s}_t)$

обозначает условное ожидание при условии $\bar{s}_t = (s_1, \dots, s_t)$. Для $t = 0$, положим $\mathrm{E}_0(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot)$.

Определение 2. Стратегия Λ^n называется *лог-оптимальной*, если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$, где Λ^n — заданная стратегия, выполнено $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\ln r_t^n \text{ является субмартингалом.} \tag{11}$$

Понятие лог-оптимальной стратегии в смысле этого определения похоже на понятие лог-оптимальной стратегии в классической теории роста капитала с экзогенными ценами. В этой теории стратегия называется лог-оптимальной, если она максимизирует ожидаемый логарифм доходности. Хорошо известно, что такая стратегия максимизирует асимптотическую скорость роста капитала агента (см. [1]).

В разделе 5 мы покажем, что в частном случае, когда наша модель сводится к модели с экзогенными выплатами, поиск лог-оптимальной в смысле определения 2 стратегии приводит к той же самой стратегии, которая максимизирует ожидаемый логарифм доходности.

Однако в общем случае в нашей модели лог-оптимальная стратегия может не максимизировать абсолютное значение капитала W_t^n агента. Можно привести пример рынка, где лог-оптимальная стратегия в смысле определения 2 обладает таким свойством, что заставляет капитал всех агентов стремиться к нулю, но при этом капитал лог-оптимальной стратегии стремится к нулю медленнее, чем капитал других агентов (см. раздел 6 в [7]).

Более того, стратегия, максимизирующая W_t^n в том или ином смысле вне зависимости от стратегий других агентов, в общем случае не существует, потому что капитал агента зависит от всего профиля стратегий через эндогенные цены активов и дивиденды.

Таким образом, в нашей модели агент, который использует лог-оптимальную стратегию, не максимизирует абсолютное значение своего капитала, но достигает оптимальности относительного капитала в смысле определения (11).

Утверждение 1. Любая лог-оптимальная стратегия является “выживающей”.

Доказательство. Известно, что неположительный субмартингал с вероятностью 1 имеет конечный предел при $t \to \infty$; (см.[13, Гл. 7.4]). В нашем случае $r_t^n \leq 1$, поэтому $\ln r_t^n \leq 0$. Тогда, если Λ^n является лог-оптимальной стратегией, то $\lim_{t\to\infty} \ln r_t^n$ конечен, откуда следует, что $\inf_{t\geq 0} r_t^n > 0$. □

3.2 Построение лог-оптимальной стратегии

Для $t \geq 1$ определим Δ^K-значные функции $g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})$, $\lambda^* \in \Delta^K$, по формулам

$$g_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) = a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + \lambda^* b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}).$$

Аргументы $\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}$ имеют такой же смысл, как в (7)–(8). Для краткости, далее будем использовать обозначение $\bar{\chi}_t = (\bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$ для пары из вектора начальных капиталов и истории игры. Например, будем писать $g_t = g_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_{t-1})$. Для $t = 0$, положим $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Пусть $\mathrm{P}_t(\cdot) = \mathrm{P}(\,\cdot \mid \bar{s}_t)$ и $\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\,\cdot \mid \bar{s}_t)$ обозначают условную вероятность и условное ожидание при условии $\bar{s}_t$ (где $\mathrm{P}_0(\cdot) = \mathrm{P}(\cdot)$, $\mathrm{E}_0(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot)$). Введем функции $L_t = L_t(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $t \geq 0$, со значениями в Δ^K, определенные по формуле

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathrm{E}_t\left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right).$$

Напомним, что поскольку Ω является полным сепарабельным метрическим пространством, то существует регулярное условное распределение (см. [13], Гл. 2.7). Поэтому мы сразу будем предполагать, что условные вероятности $\mathrm{P}_t(\cdot)$ и ожидания $\mathrm{E}_t(\cdot)$ вычисляются по отношению к некоторому фиксированному варианту регулярного условного распределения $\bar{s}_{t+1}$. Из этого следует, что функции L_t^k измерима по совокупности своих аргументов. Для $t = 0$, функция $L_0 = L_0(\lambda^*, \bar{\chi}_0)$ не зависит от состояний случайного фактора.

Утверждение 2. Для любого $t \geq 0$ существует измеримая функция $\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ со значениями в Δ^K со следующими свойствами:

(a) для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено:

$$\mathrm{P}_t\left(\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) = 0\right) = 0 \text{ п.н.}, \tag{12}$$

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right) \leq 1 \text{ п.н.}, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{13}$$

(b) Λ_t^* — неподвижная точка отображения L_t, то есть для любого $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$L_t(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) \text{ п.н.}, \tag{14}$$

где для $t = 0$ полагаем $\Lambda_0^* = \Lambda_0^*(\bar{\chi}_0)$ зависит только от $\bar{\chi}_0 = \bar{W}_0$.

Следующая теорема является первым главным результатом работы.

Теорема 1. Стратегия $\Lambda^* = (\Lambda_t^*)_{t=0}^\infty$, состоящая из функций, удовлетворяющих свойствам (12)–(14), является лог-оптимальной, а значит, "выживающей".

К сожалению, в общем случае не существует универсального метода для нахождения неподвижной точки в (14). Тем не менее теорема 1 интересна тем, что в ней доказывается существование лог-оптимальной стратегии, что в нашей модели не очевидно. В следующем разделе мы приведем примеры, в которых лог-оптимальная стратегия находится в явном виде.

Замечание 2. (a) Функции Λ_t^* со свойствами (12)–(14) в общем случае не единственны. Теорема 1 утверждает, что любая последовательность неподвижных точек отображения L_t составляет лог-оптимальную стратегию.

Приведем пример, когда лог-оптимальная стратегия не единственна. Пусть $a_t^k \equiv 0$, $b_t^k \equiv 1$ для всех t, k, и начальный капитал рынка $W_0 = 1$. Тогда уравнение динамики капитала (5) после подстановки (6) в (5) и сокращения суммы в знаменателе превращается в

$$W_{t+1}^n = \frac{W_t^n}{W_t}.$$

Отсюда $W_t = 1$ для всех $t \geq 0$, то есть капиталы W_t^n не изменяются вне зависимости от того, какие стратегии используют агенты.

(б) Если стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (12) и (14), то достаточным условием для выполнения (13) является следующее: для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$\mathrm{P}_t(a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) > 0) > 0 \text{ п.н.}, \qquad k = 1, \dots, K.$$

Действительно, в этом случае (13) выполнено, так как $L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$ для всех $\lambda^* \in \Delta^K$, откуда $\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$, поэтому после домножения числителя и знаменателя на $\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) > 0$ и прибавления к числителю $a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)$ получаем

$$\mathrm{E}_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq \frac{L_t^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)}{\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)} = 1.$$

3.3 Лог-оптимальная стратегия определяет агрегированное поведение рынка

Как было отмечено выше, дроби μ_t^k можно рассматривать как взвешенную стратегию всех агентов. Следующий результат показывает, что при некоторых дополнительных условиях, если хотя бы один агент использует лог-оптимальную стратегию, то μ_t^k стремятся к этой лог-оптимальной стратегии при $t \to \infty$ с вероятностью единица.

Теорема 2. Пусть стратегия Λ^* удовлетворяет условиям (12), (14) и следующей более сильной версии условия (13): существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$\mathrm{E}_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 - \varepsilon \text{ п.н.}, \quad k = 1, \dots, K. \tag{15}$$

Тогда, если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ агент n использует стратегию Λ^*, то выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ п.н.},$$

где $\lambda_t^n = \lambda_t^n(\bar{s}_t)$ и $\mu_t = \mu_t(\bar{s}_t)$ обозначают, соответственно, реализацию стратегии n-го агента и реализацию взвешенной стратегии всех агентов в этом профиле стратегий (см. (1)). В частности, $\|\lambda_t^n - \mu_t\| \to 0$ при $t \to \infty$.

В общем случае, условие (15) проверить достаточно сложно. Однако в случае н.о.р. коэффициентов α_t^k, β_t^k это удается сделать. Более того, мы докажем, что в этом случае Λ^* окажется единственной выживающей стратегией в классе постоянных стратегий (при некоторых дополнительных условиях). В этом заключается третий главный результат работы.

Теорема 3. Пусть последовательность состояний случайного фактора s_t, $t \geq 1$ состоит из н.о.р. случайных величин, и коэффициенты α_t^k, β_t^k из (6)–(8) зависят только от s_t, то есть $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$. Тогда:

(а) Существует постоянная лог-оптимальная стратегия $\Lambda_t^* \equiv \Lambda^* \in \Delta^K$.

(б) Пусть дополнительно выполнено

$$\mathrm{P}(\alpha_t^k > 0) > 0 \text{ для всех } k = 1, \ldots, K. \tag{16}$$

Тогда стратегия Λ^* — это единственная "выживающая" стратегия в классе постоянных стратегий, и, кроме того, $\Lambda^{*,k} > 0$, $k = 1, \ldots, K$, то есть эта стратегия оказывается полностью диверсифицированной. Более того, Λ^* удовлетворяет (15). В частности, для любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$, в котором какой-то из агентов использует стратегию Λ^*, выполнено, что $\mu_t \to \Lambda^*$ с вероятностью единица при $t \to \infty$.

(с) Пусть дополнительно к (16), выполнено, что случайные величины $\alpha_t^k/\Lambda^{*,k} + \beta_t^k$ линейно независимы (то есть если $\sum_{k=1}^K c_k(\alpha_t^k/\Lambda_k^* + \beta_t^k) = 0$ п.н. для некоторых констант c_k, то $c_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, K$).

Тогда в любом профиле стратегий, в котором некоторый агент использует стратегию Λ^*, а остальные агенты используют произвольные постоянные полностью диверсифицированные стратегии ($\Lambda^{n,k} > 0$ для всех n, k), выполнено $r_t^n \to 0$ п.н. при $t \to \infty$ для любого агента n, который использует стратегию $\Lambda^n \neq \Lambda^*$ (то есть лог-оптимальная стратегия захватывает весь рынок).

4 Численный пример

Проиллюстрируем основные результаты работы, проведя симуляции эволюции рынка. Рассмотрим простую модель, в которой всего два актива. Пусть случайное состояние мира моделируется последовательностью н.о.р. случайных векторов $s_t = (s_t^1, s_t^2)$ со значениями в $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ и симметричным совместным распределением

$$\mathrm{P}(s_t = (1,0)) = \mathrm{P}(s_t = (0,1)) = 1 - p, \qquad \mathrm{P}(s_t = (1,1)) = 2p - 1,$$

где $1/2 \leq p < 1$ — параметр. Пусть коэффициенты $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$ в функции дивидендов задаются как

$$a^k(s_t) = b^k(s_t) = \mathrm{I}(s_t^k = 1), \qquad k = 1, 2.$$

То есть выплата каждого из двух активов равна либо $1 + \mu_t^k$ с вероятностью p, либо нулю с вероятностью $1 - p$. С вероятностью $2p - 1$, оба актива платят дивиденды одновременно.

В силу симметрии, лог-оптимальной стратегией в этой модели является $\Lambda^* = (1/2, 1/2)$; Нетрудно проверить, что эта стратегия удовлетворяет условиям

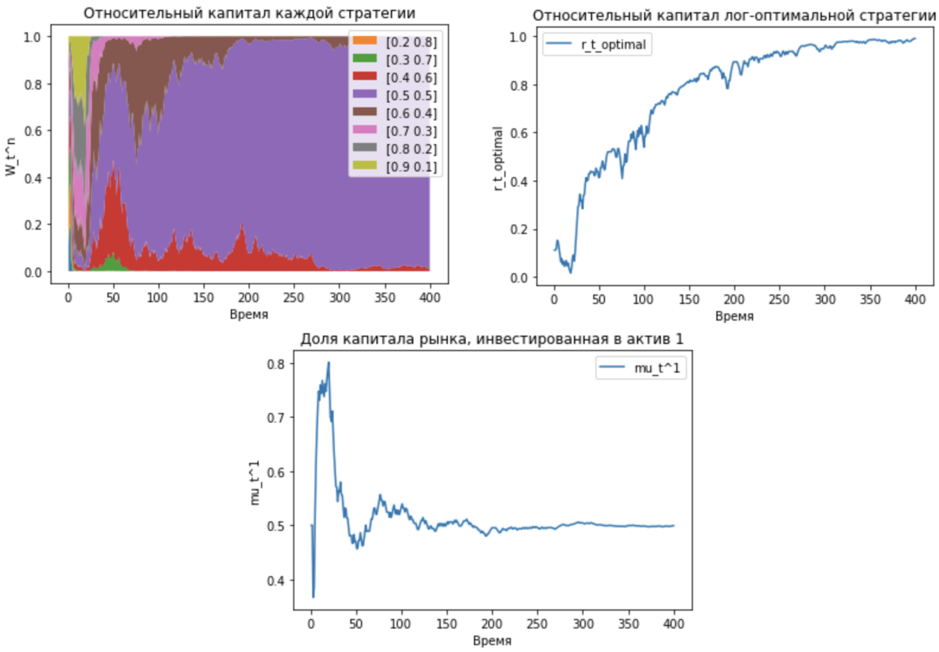

Рис. 1: Эволюция капиталов агентов в одной симуляции рынка длиной в 400 шагов. Слева сверху: относительные капиталы стратегий $\Lambda^n = (n/10, 1-n/10)$. Справа сверху: относительный капитал оптимальной стратегии Λ^*. Снизу: доля μ_t^1 от капитала рынка, вложенная в первый актив.

утверждения 2. По теореме 3(б), это единственная "выживающая" стратегия в классе постоянных стратегий. Отметим также, что эта стратегия удовлетворяет условию из части (с) теоремы 3, то есть $\alpha_t^k/\Lambda^{*,k} + \beta_t^k$ — линейно независимые случайные величины.

Поместим стратегию Λ^* на рынок. Пусть на рынке есть 9 инвесторов, каждый из которых использует стратегию $\Lambda^n = (n/10, 1-n/10)$, где $n = 1, 2, \ldots, 9$. В частности, агент $n = 5$ использует стратегию Λ^*. Мы не рассматриваем стратегии $\Lambda^0 = (0,1)$ и $\Lambda^{10} = (1,0)$, поскольку их капитал становится нулем за конечное число периодов. Положим для определенности $p = 2/3$.

Рис. 1 показывает эволюцию капиталов агентов на одной симуляции рынка длиной в 400 шагов по времени. На первом рисунке показаны относительные капиталы r_t^n каждого из агентов, где r_t^n соответствует высоте закрашенного столбика в момент t.

На втором графике показан относительный капитал лог-оптимальной стратегии. Как видно из этих двух графиков, лог-оптимальная стратегия захватывает рынок, и ее относительный капитал стремится к единице, как и было показано в теореме 3(с). На третьем графике показана доля рынка капитала, вложенного в актив 1, то есть μ_t^1. Эта доля, как и было доказано, стремится к $\Lambda^{*,1} = 1/2$. При этом доля капитала рынка, инвестированная во второй актив, равна $\mu_t^2 = 1 - \mu_t^1$ и тоже стремится к $1/2$.

5 Связь с другими моделями

Покажем, что в рамках нашей модели можно получить уже известные для других, менее общих моделей, результаты про лог-оптимальные и "выживающие" стратегии.

В первой части этого раздела мы рассмотрим эволюционную финансовую модель с короткоживущими активами, предложенную в [3]. В этой модели размеры дивидендов A_t^k зависят только от случайного фактора s_t, но не зависят от истории игры (то есть от стратегий игроков $\bar{\lambda}_{t-1} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{t-1})$).

Во второй части мы рассмотрим классическую модель рынка с экзогенными ценами активов, в которой действия агентов не влияют на цены активов и на капитал остальных агентов.

5.1 Модель с дивидендами, не зависящими от истории игры

Предположим, что в нашей модели $b_t^k = 0$, и $a_t^k = a_t^k(\bar{s}_t)$ — зависит только от случайных состояний, но не зависит от стратегий агентов и начальных капиталов, то есть дивиденды $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t) = a_t^k(\bar{s}_t)$. Тогда уравнение динамики капитала (5) превращается в

$$W_{t+1}^n = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k} W_t^n} a_{t+1}^k.$$

Тогда, согласно нашим результатам, единственной стратегией, удовлетворяющей условиям (12)-(14) из утверждения 2, является

$$\Lambda_t^{*,k}(\bar{s}_t) = \mathrm{E}_t \left(\frac{a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1})}{\sum_{k=1}^K a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1})} \right),$$

где Λ_0^* — постоянный вектор. Эта стратегия распределяет капитал между активами пропорционально условным математическим ожиданиям их относительных дивидендов. Свойство выживаемости этой стратегии впервые было доказано в работе [3]. Однако при дополнительных ограничениях на величины дивидендов A_t^k оно было известно и ранее, см. [5, 4, 9].

5.2 Классическая модель с экзогенными ценами

Рассмотрим модель рынка с экзогенными ценами активов $S_t^k(\bar{s}_t) > 0$, как в классической модели без коротких продаж (см. [10, Гл. 5]). Мы покажем, что эта модель рынка является частным случаем нашей модели, а построенная в теореме 1 лог-оптимальная стратегия максимизирует ожидаемый логарифм капитала агента (или, что эквивалентно, ожидаемый логарифм доходности портфеля).

Как следствие, мы получаем новое свойство стратегии, максимизирующей ожидаемый логарифм капитала: она является неподвижной точкой отображения (14).

Обозначим за $B^k_{t+1} = S^k_{t+1}/S^k_t$ доходности активов. Тогда эволюция капитала W_t агента, использующего стратегию $\Lambda = \Lambda_t(\bar{s}_t)$, определяется соотношением

$$W_{t+1} = W_t \langle \Lambda_t, B_{t+1} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. Эта модель получится как частный случай нашей модели, если в (6) положить

$$\alpha^k_{t+1} = 0, \qquad \beta^k_{t+1} = W_t B^k_{t+1}, \tag{17}$$

где W_t обозначает полный капитал рынка (в замечании 1 показано, что (17) можно записать в терминах μ^k_t).

Напомним, что лог-оптимальная стратегия Λ^* в классической теории роста капитала — это стратегия, максимизирующая ожидаемый логарифм доходности портфеля в каждый момент времени, то есть

$$\Lambda^*_t(\bar{s}_t) \in \arg\max\nolimits_{\lambda \in \Delta^K} \mathrm{E}_t \ln \langle \lambda, B_{t+1}(\bar{s}_{t+1}) \rangle. \tag{18}$$

Эта стратегия называется *стратегией Келли*. Оптимизационная задача (18) может не иметь решения, если лог-доходности не интегрируемы. Но если они интегрируемы (то есть $\mathrm{E} \ln B^n_{t+1} < \infty$), и мы введем *относительные доходности*

$$R^k_t = \frac{B^k_t}{\sum_{k=1}^K B^k_t}, \qquad k = 1, \ldots, K,$$

то, согласно классическому результату, лог-оптимальная стратегия будет являться решением задачи максимизации логарифмов относительных доходностей

$$\Lambda^*_t(\bar{s}_t) \in \arg\max\nolimits_{\lambda \in \Delta^K} \mathrm{E}_t \ln \langle \lambda, R_{t+1}(\bar{s}_{t+1}) \rangle. \tag{19}$$

В частности, задача (19) всегда имеет решение при условии, что $\sum_{n=1}^N R^n_t > 0$ п.н. (однако решение может быть не единственно, если, например, R^n_t линейно зависимы). Кроме того, если задача (18) имеет хотя бы одно решение, тогда множество решений задач (18) и (19) совпадают.

Исследуем связь между теми стратегиями, которые удовлетворяют условиям (12)–(14) в нашей модели, и классическими лог-оптимальными стратегиями в смысле (19). Отметим, что условие (12) выполняется для любой стратегии в этой модели, поскольку оно эквивалентно условию

$$\mathrm{P}_t(W_t \langle \Lambda^*_t, B_{t+1} \rangle = 0) = 0,$$

которое, очевидно, выполнено в силу $B^k_{t+1} > 0$. Условия (13) и (14) эквивалентны, соответственно, следующим условиям:

$$\mathrm{E}_t \left(\frac{R^k_{t+1}}{\langle \Lambda^*_t, R_{t+1} \rangle} \right) \le 1, \tag{20}$$

$$\mathrm{E}_t \left(\frac{\Lambda^{*,k}_t R^k_{t+1}}{\langle \Lambda^*_t, R_{t+1} \rangle} \right) = \Lambda^{*,k}_t. \tag{21}$$

Легко видеть, что из (20) следует (21). Действительно, домножая обе части (20) на $\Lambda_t^{*,k}$, мы получаем неравенство $\mathrm{E}_t\left(\frac{\Lambda_t^{*,k}R_{t+1}^k}{\langle\Lambda_t^*,R_{t+1}\rangle}\right) \le \Lambda_t^{*,k}$, в котором должно быть равенство с вероятностью один, потому что иначе, суммируя обе части по $k = 1,\dots,K$, мы получаем противоречие $1 < 1$ с положительной вероятностью.

Таким образом, в частном случае рассматриваемой модели, условия (12)–(14) эквивалентны условию (20).

Утверждение 3. Стратегия $\Lambda^* = \Lambda_t^*(\bar{s}_t)$ является (измеримым) решением максимизационной задачи (19) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (12)–(14) из утверждения 2 (или, эквивалентно, условию (20)).

Доказательство. Пусть сначала стратегия Λ^* удовлетворяет условию (20). Тогда для любой другой стратегии $\Lambda = \Lambda_t(\bar{s}_t)$, пользуясь неравенством $\ln x \le x-1$, имеем

$$\mathrm{E}_t \ln\langle\Lambda_t, R_{t+1}\rangle - \mathrm{E}_t \ln\langle\Lambda_t^*, R_{t+1}\rangle = \mathrm{E}_t \ln\left(\frac{\langle\Lambda_t, R_{t+1}\rangle}{\langle\Lambda_t^*, R_{t+1}\rangle}\right) \le \mathrm{E}_t\left(\frac{\langle\Lambda_t, R_{t+1}\rangle}{\langle\Lambda_t^*, R_{t+1}\rangle}\right) - 1 =$$
$$= \left\langle \Lambda_t,\ \mathrm{E}_t\left(\frac{R_{t+1}}{\langle\Lambda_t^*, R_{t+1}\rangle}\right)\right\rangle - 1 = \langle\Lambda_t, 1\rangle - 1 = \sum_{k=1}^K \Lambda_t^k - 1 = 0.$$

Обратно, пусть стратегия Λ_t^* является решением задачи (19). Тогда известно (см. [1, Т. 1]), что для любой стратегии Λ

$$\mathrm{E}_t \frac{\langle\Lambda_t, R_{t+1}\rangle}{\langle\Lambda_t^*, R_{t+1}\rangle} \le 1.$$

Подставляя $\Lambda_t = (0,\dots,1,\dots,0)$, получаем (20). □

6 Доказательства основных результатов

6.1 Вспомогательные результаты

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм, которые потребуются для доказательства основных результатов.

Лемма 1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^K$ — компактное множество, а $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Пусть функция $L(x,\omega)\colon C\times\Omega \to C$ непрерывна по x и измерима по ω.

Тогда L имеет измеримую неподвижную точку $\xi(\omega)$, то есть $L(\xi(\omega),\omega) = \xi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$, неподвижная точка ξ отображения $L(x,\omega)$ существует по теореме Брауэра. Поэтому случайное множество $\Gamma(\omega) = \{x \in C : L(x,\omega) = x\}$ непусто для каждого ω.

По теореме Филлипова о неявной функции (см.[2, Гл. 18.3]), это случайное множество является слабо измеримым [1] и допускает измеримый селектор $\xi(\omega) \in \Gamma(\omega)$. Это и дает искомую измеримую неподвижную точку. □

[1] Мы называем случайное множество $\Gamma\colon \Omega \to 2^{\mathbb{R}^K}$ *слабо измеримым*, если $\{\omega : \Gamma(\omega) \cap A \ne \emptyset\} \in \mathcal{F}$ для любого открытого $A \subset \mathbb{R}^K$.

Лемма 2. Пусть $L^n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ со значениями в компактном множестве $C \subset \mathbb{R}^K$. Тогда существует измеримая функция $L^*(\omega)$ и строго возрастающая последовательность целочисленных измеримых функций $n_i(\omega) \ge 1$, $i = 1, 2, \dots$ таких, что $\lim_{i\to\infty} L^{n_i(\omega)}(\omega) = L^*(\omega)$ для всех ω.

Доказательство. По теореме Кастена (см. утверждение 18.14 в [2]), непустое замкнутое случайное множество слабо измеримо тогда и только тогда, когда оно может быть представлено как замыкание счетного числа измеримых селекторов из этого отображения. Следовательно, случайные множества $\Gamma^n = \mathrm{cl}\{L^k,\ k \ge n\}$, $n \ge 1$ слабо измеримы. Поскольку счетное пересечение компактных слабо измеримых случайных множеств слабо измеримо, то $\Gamma(\omega) = \bigcap_{n\ge1} \Gamma^n(\omega)$ слабо измеримо. Более того, $\Gamma(\omega)$ непусто, поскольку содержит предельную точку некоторой подпоследовательности $L^n(\omega)$. Тогда по теореме Кастена существует измеримый селектор $L^*(\omega) \in \Gamma(\omega)$.

Тогда нужная последовательность n_i может быть построена по индукции следующим образом. Пусть $n_1 = 1$. Если n_i уже определено для некоторого $i \ge 1$, то рассмотрим случайное множество $\Psi_i(\omega) = \{k > n_i(\omega) : \|L^k(\omega) - L^*(\omega)\| \le i^{-1}\}$. Оно слабо измеримо, непусто и замкнуто. Пусть n_{i+1} — измеримый селектор из Ψ_i. Тогда $\|L^{n_{i+1}} - L^*\| < \frac{1}{i}$, что дает искомую сходимость. □

Лемма 3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N_+$ — два вектора, такие что $\sum_n \alpha^n \le 1$, $\sum_n \beta^n \le 1$ и для всех $n = 1, \dots, N$ выполнено, что если $\beta^n = 0$, то $\alpha^n = 0$. Тогда верно следующее:

$$\sum_{n=1}^N \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} \ge \frac{\|\alpha - \beta\|^2}{4} + \sum_{n=1}^N (\alpha^n - \beta^n), \tag{22}$$

где полагаем $\alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} = 0$ если $\alpha^n = 0$ или $\beta^n = 0$.

Доказательство. Используя неравенство $-\ln x \ge 2(1 - \sqrt{x})$ для всех $x > 0$, мы получаем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \alpha^n \ln \frac{\alpha^n}{\beta^n} &= -\sum_{n\,:\,\alpha^n\neq0} \alpha^n \ln \frac{\beta^n}{\alpha^n} \ge 2\sum_{n=1}^N (\alpha^n - \sqrt{\alpha^n\beta^n}) \\ &= \sum_{n=1}^N (\sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\beta^n})^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha^n - \beta^n).\end{aligned}$$

Тогда мы можем использовать неравенство $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \ge (x - y)^2/4$, которое верно для всех $x, y \in [0, 1]$, и получить (22). □

Последняя лемма — это классический результат из теории мартингалов (она утверждает, что ограниченный сверху обобщенный субмартингал [2] является субмартингалом).

[2]Напомним, что последовательность S_t называется обобщенным субмартингалом, если $\mathrm{E}\,|S_0| < \infty$ и $\mathrm{E}(S_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \ge S_{t-1}$ для всех $t \ge 1$ (но необязательно $\mathrm{E}\,|S_t| < \infty$). В лемме 4 доказывается, что если $S_t \le C$ для всех t, то S_t интегрируемо и, следовательно, является настоящим субмартингалом.

Лемма 4. Пусть $\zeta_t = \zeta_t(\bar{s}_t)$, $t = 0, 1, \dots$ (ζ_0 константа) — равномерно ограниченная сверху случайная последовательность (то есть $\zeta_t \le c$ п.н. для всех t и некоторой константы c) и $\mathrm{E}_{t-1}\, \zeta_t \ge \zeta_{t-1}$ п.н. для всех $t \ge 1$. Тогда $\mathrm{E}\,|\zeta_t| < \infty$, то есть ζ_t — настоящий субмартингал.

Доказательство. Последовательность M_t с $M_0 = 0$ и

$$M_t = \zeta_t - \sum_{s=1}^{t} (\mathrm{E}_{t-1}\, \zeta_t - \zeta_{t-1}), \quad t \ge 1,$$

является локальным мартингалом, поскольку $\mathrm{E}_{t-1}\, M_t = M_{t-1}$ [13, Гл. 7.1, Т. 1]. Поскольку она ограничена сверху, эта последовательность является настоящим мартингалом [13, Гл. 7.1, Т. 3], следовательно, $\mathrm{E}\,|M_t| < \infty$. Используя тот факт, что $M_t \le \zeta_t \le c$, получаем $\mathrm{E}\,|\zeta_t| < \infty$. □

Лемма 5. Пусть X_t, $t = 0, 1, \dots$ — процесс в дискретном времени, $\mathrm{E}\,|X_t| \le \infty$. Тогда его компенсатор имеет вид

$$A_t := \sum_{i=0}^{t-1} (\mathrm{E}_i\, X_{i+1} - X_i).$$

Доказательство. Пусть A_t — компенсатор для X_t, то есть A_t — предсказуемая последовательность, и $(X_{t+1} - A_{t+1})$ — локальный мартингал. Тогда

$$\mathrm{E}_t\,(X_{t+1} - A_{t+1}) = X_t - A_t.$$

Следовательно,

$$E_t X_{t+1} - X_t = A_{t+1} - A_t.$$

Отсюда получаем формулу для A_t:

$$A_t := \sum_{i=0}^{t-1} (\mathrm{E}_i\, X_{i+1} - X_i).$$

□

6.2 Доказательство утверждения 2 о неподвижной точке

Доказательство. Зафиксируем $t \ge 0$. Введем Δ^K-значные функции $g_t^n(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_{t-1})$ и $L_t^n(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, $n = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$g_t^{n,k} = g_t^k + \frac{1}{n},$$
$$L_t^{n,k}(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathrm{E}_t \left(\frac{g_{t+1}^{n,k}(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^{n,k}(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right).$$

Напомним, что $\mathrm{E}_t(\cdot)$ обозначает условное ожидание относительно зафиксированного варианта регулярного условного распределения $\bar{s}_{t+1}$. Функции L_t^n непрерывны по $\lambda^* \in \Delta^K$ и измеримы по $(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$. Тогда по лемме 1 у них есть измеримые неподвижные точки $\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$, то есть для любых $(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ выполнено

$$L_t^n(\Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t). \tag{23}$$

Пусть
$$\delta_t^{n,k}(\bar{s}_t,\bar{\chi}_t) = \mathrm{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1},\bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^{n,k}(\Lambda_t^n(\bar{s}_t,\bar{\chi}_t),\bar{s}_{t+1},\bar{\chi}_t)}\right).$$
Заметим, что
$$\delta_t^{n,k} \le 1, \quad k=1,\dots,K, \tag{24}$$
поскольку
$$(1-\delta_{t,n}^k)\Lambda_{t,n}^k = \mathrm{E}_t\left(\frac{a_{t+1}^k + 1/n}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^{n,k}(\Lambda_t^n)}\right) > 0.$$
По лемме 2, можно найти возрастающую последовательность $n_i = n_i(\bar{s}_t,\bar{\chi}_t)$, $i=1,2,\dots$ такую, что существует предел
$$\Lambda_t^* = \lim_{i\to\infty}\Lambda_t^{n_i}$$
Теперь, для фиксированного $\bar{\chi}_t$, переходя к пределу по $i\to\infty$ и $n_i\to\infty$ в (24) (используя лемму Фату и предположение (9)), получаем, что (12) выполнено. Далее, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем (13) из (24) и (14) из (23).

□

6.3 Доказательство теоремы 1

Доказательство. Зафиксируем вектор начальных капиталов и профиль стратегий, в котором один агент использует стратегию Λ^*. Без потери общности, предположим, что стратегию Λ^* использует агент 1.

Введем обозначение (опуская зависимость от $\bar{s}_t$ для краткости)
$$\theta_t^k = \frac{\lambda_t^{1,k}}{\mu_t^k}.$$

Напомним, что
$$W_t = \sum_{n=1}^N W_t^n, \qquad \mu_t^k = \frac{1}{W_t}\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k}W_t^n.$$

Тогда уравнение динамики капитала (5) переписывается в виде
$$W_{t+1}^1 = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_t^{1,k}W_t^1}{\sum_{n=1}^N \lambda_t^{n,k}W_t^n}A_{t+1}^k = r_t^1\sum_{k=1}^K \theta_t^k A_{t+1}^k = r_t^1\sum_{k=1}^K(\theta_t^k\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k}\beta_{t+1}^k),$$
а полный капитал рынка удовлетворяет уравнению
$$W_{t+1} = \sum_{k=1}^K A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^K(\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k\beta_{t+1}^k).$$

Поэтому

$$r_{t+1}^1 = \frac{W_{t+1}^1}{W_t} = \frac{r_t^1 \sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k)}$$

Из последнего равенства получаем

$$\ln r_{t+1}^1 - \ln r_t^1 = \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k)}\right). \tag{25}$$

Следовательно, мы можем выразить

$$\mathrm{E}_t \ln r_{r+1}^1 - \ln r_t^1 = \mathrm{E}_t (F_{t+1} + G_{t+1}),$$

где

$$F_{t+1} = \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^K (\theta_t^k \alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}\right), \tag{26}$$

$$G_{t+1} = \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \mu_t^k \beta_{t+1}^k)}\right). \tag{27}$$

Покажем, что $\mathrm{E}_t (F_{t+1} + G_{t+1}) \geq 0$. Рассмотрим аргумент логарифма в (26) как выпуклую комбинацию чисел

$$\theta_t^k, \ \ldots, \ \theta_t^K, 1$$

с коэффициентами

$$\frac{\alpha_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}, \ k = 1, \ldots, K, \qquad \frac{\sum_{k=1}^K \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}.$$

Из-за выпуклости вверх логарифма получаем

$$F_{t+1} \geq \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)} \ln \theta_t^k. \tag{28}$$

Обозначим

$$\gamma_t^k = 1 - \mathrm{E}_t \left(\frac{\beta_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}\right), \qquad k = 1, \ldots, K. \tag{29}$$

Из (13), мы имеем $\gamma_t^k \in [0, 1]$, а из (14) следует, что

$$\gamma_t^k \lambda_t^{1,k} = \mathrm{E}_t \left(\frac{\alpha_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k} \beta_{t+1}^k)}\right). \tag{30}$$

Беря ожидание в (28), получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t F_{t+1} &\geq \sum_{k=1}^K \gamma_t^k \lambda_t^{1,k} \ln \theta_t^k = \sum_{k=1}^K \gamma_t^k \lambda_t^{1,k} \ln \frac{\gamma_t^k \lambda_t^{1,k}}{\gamma_t^k \mu_t^k} \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^K (\gamma_t^k (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k))^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_t^k (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k), \end{aligned} \tag{31}$$

где во втором неравенстве мы применили лемму 3 к векторам α, β с координатами

$$\alpha_k = \gamma_t^k \lambda_t^{1,k}, \qquad \beta_k = \gamma_t^k \mu_t^k.$$

Отметим, что условия $\sum_{k=1}^K \alpha_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^K \beta_k \leq 1$ из леммы выполнены, так как векторы λ_t^1 and μ_t сами удовлетворяют этому свойству, а $\gamma_t^k \in [0,1]$.

Для оценки снизу $\mathrm{E}_t\, G_{t+1}$, мы используем неравенство $\ln a \geq 1 - a^{-1}$ и получаем

$$\mathrm{E}_t\, G_{t+1} \geq \mathrm{E}_t \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k)\beta_{t+1}^k}{\sum_{k=1}^K (\alpha_{t+1}^k + \lambda_t^{1,k}\beta_{t+1}^k)} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^K (1-\gamma_t^k)(\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k) = \sum_{k=1}^K \gamma_t^k (\mu_t^k - \lambda_t^{1,k}), \quad (32)$$

где последнее равенство получается из-за того, что $\sum_{k=1}^K \lambda_t^{1,k} = \sum_{k=1}^K \mu_t^k = 1$.

Из оценок (31) и (32) получаем:

$$\mathrm{E}_t (F_{t+1} + G_{t+1}) \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^K (\gamma_t^k (\lambda_t^{1,k} - \mu_t^k))^2, \quad (33)$$

поэтому $\mathrm{E}_t (F_{t+1} + G_{t+1}) \geq 0$. По лемме 4, оценивая $\ln r_t^1$ сверху нулем, получаем, что $\ln r_t^1$ — субмартингал.

□

6.4 Доказательство теоремы 2

Предположим, что стратегию Λ^* использует агент 1. В ходе доказательства теоремы 1, мы показали, что $\zeta_t := \ln r_t^1$ является субмартингалом, так как $\mathrm{E}_t \ln r_{t+1}^1 - \ln r_t^1 = F_t + G_t \geq 0$.

Применяя разложение Дуба, получаем $\zeta_t = \zeta_0 + M_t + A_t$, где M_t — мартингал, A_t — предсказуемая неубывающая последовательность (*компенсатор* ζ_t), и $M_0 = A_0 = 0$.

При этом $r_t^1 \leq 1$, а значит, $\ln r_t^1 \leq 0$, то есть $\ln r_t^1$ является ограниченным субмартингалом. По следствию из теоремы Дуба о сходимости, этот субмартингал сходится.

Но поскольку ограниченный субмартингал ζ_t сходится к конечному пределу при $t \to \infty$, то и его компенсатор имеет конечный предел, другими словами, $\lim_{t\to\infty} A_t < \infty$ п.н.

Из формулы для компенсатора из леммы 5 и оценки (33) получаем

$$A_t := \sum_{u=0}^{t-1} (\mathrm{E}_u\, \zeta_{u+1} - \zeta_u) \geq \frac{1}{4} \sum_{u=0}^{t-1} \sum_{k=1}^K (\gamma_u^k (\lambda_u^{1,k} - \mu_u^k))^2.$$

Тогда из условия (15) Теоремы 2 и соотношения (29), получаем, что $\gamma_t^k \geq \varepsilon > 0$. Теперь утверждение теоремы следует из сходимости A_t.

6.5 Доказательство теоремы 3

(a) Существование постоянной стратегии, удовлетворяющей условиям (12)–(14) (а следовательно, являющейся лог-оптимальной), следует из доказательства утверждения 2.

(б) Пусть предположение (16) выполнено. Пусть

$$\gamma^k = 1 - \mathrm{E}\left(\frac{b^k(s_t)}{\sum_{k=1}^K (a^k(s_t) + \Lambda^{*,k} b^k(s_t))}\right), \qquad k = 1, \dots, K. \tag{34}$$

Тогда из (14) получаем

$$\gamma^k \Lambda^{*,k} = \mathrm{E}\left(\frac{a^k(s_t)}{\sum_{k=1}^K (a^k(s_t) + \Lambda^{*,k} b^k(s_t))}\right), \tag{35}$$

поэтому $\gamma^k \Lambda^{*,k} > 0$, а значит, $\gamma^k > 0$, то есть условие (15) выполнено. Из теоремы 2, мы получаем сходимость $\mu_t \to \Lambda^*$.

Если $\widetilde{\Lambda} \in \Delta^K$ — другая “выживающая” стратегия, то она обязана выживать в профиле стратегий $(\widetilde{\Lambda}, \Lambda^*, \dots, \Lambda^*)$.

Это значит, что $\inf_{t \geq 0} r_t^1 > 0$ п.н.

Но тогда сходимость $\mu_t = r_t^1 \widetilde{\Lambda} + (1 - r_t^1)\Lambda^* \to \Lambda^*$ имеет место только при $\widetilde{\Lambda} = \Lambda^*$. Следовательно, Λ^* — единственная "выживающая” стратегия.

(c) Рассмотрим профиль стратегий, в котором агент 1 использует стратегию Λ^*. Пусть агент i использует постоянную стратегию $\Lambda^i \neq \Lambda^*$. Для доказательства теоремы, мы должны показать, что $r_t^1 / r_t^i \to \infty$ с вероятностью единица при $t \to \infty$.

Для этого мы покажем, что

$$\liminf_{t \to \infty} t^{-1} \ln \frac{r_t^1}{r_t^i} > 0. \tag{36}$$

Из равенства (25) в доказательстве теоремы 1, после сокращения знаменателей в вычитаемых дробях получаем

$$D_{t+1} := \ln \frac{r_{t+1}^1}{r_{t+1}^i} - \ln \frac{r_t^1}{r_t^i} = \ln \frac{r_{t+1}^1}{r_t^1} - \ln \frac{r_{t+1}^i}{r_t^i} = \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\theta_t^{1,k} \alpha_{t+1}^k + \Lambda^{*,k} \beta_{t+1}^k)}{\sum_{k=1}^K (\theta_t^{i,k} \alpha_{t+1}^k + \Lambda^{i,k} \beta_{t+1}^k)} \right),$$

где $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$, и $\theta_t^{1,k} = \Lambda^{*,k} / \mu_t^k$, $\theta_t^{i,k} = \Lambda^{i,k} / \mu_t^k$.

Тогда получаем

$$t^{-1} \ln \frac{r_t^1}{r_t^i} = t^{-1} \ln \frac{r_0^1}{r_0^i} + t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} \mathrm{E}_u\, D_{u+1} + t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - \mathrm{E}_u\, D_{u+1}).$$

Заметим, что последовательность D_t равномерно ограничена:

$$\frac{1}{c} \leq D_t < c,$$

где $c = \max_{i,k} \Lambda^{i,k} / \min_{i,k} \Lambda^{i,k}$.

Из усиленного закона больших чисел для мартингалов, получаем п.н. сходимость

$$\xi_t := t^{-1} \sum_{u=0}^{t-1} (D_{u+1} - \mathrm{E}_u D_{u+1}) \to 0$$

Значит, для того, чтобы получить (36), достаточно показать, что существуют $\varepsilon > 0$ и случайный момент времени τ такой, что для $t \geq \tau$ выполнено

$$\mathrm{E}_t D_{t+1} \geq \varepsilon. \tag{37}$$

Согласно теореме 1, мы имеем $\mu_{t,k} \to \Lambda^{*,k}$, поэтому $\theta_t^{1,k} \to 1$ и $\theta_t^{i,k} \to \Lambda^{i,k}/\Lambda^{*,k}$. Поэтому, с вероятностью единица, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}_t D_{t+1} = \mathrm{E} \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\alpha^k + \Lambda^{*,k}\beta^k)}{\sum_{k=1}^K (\Lambda^{i,k}\alpha^k/\Lambda^{*,k} + \Lambda^{i,k}\beta^k)} \right) =: \mathrm{E} \ln \zeta,$$

где (α, β) — пара векторов из $\mathbb{R}^K$ с таким же распределением, как и у $(a(s_t), b(s_t))$.

Поэтому, чтобы получить (37), нам нужно показать, что $\mathrm{E} \ln \zeta > 0$, или, что эквивалентно, $\mathrm{E} \ln \zeta^{-1} < 0$. Используя строгую выпуклость вверх логарифма и неравенство Йенсена, достаточно показать, что $\mathrm{E}\, \zeta^{-1} = 1$ и ζ не константа п.н. (чтобы в неравенстве Йенсена было строгое неравенство).

Для доказательства последнего утверждения, используем (34) и (35), откуда получаем

$$\mathrm{E}\, \zeta^{-1} = \mathrm{E} \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\Lambda^{i,k}\alpha^k/\Lambda^{*,k} + \Lambda^{i,k}\beta^k)}{\sum_{k=1}^K (\alpha^k + \Lambda^{*,k}\beta^k)} \right) = \sum_{k=1}^K (\gamma^k \Lambda^{i,k} + (1-\gamma^k)\Lambda^{i,k}) = 1.$$

Тот факт, что ζ не константа, следует из того, что случайные величины $a_t^k/\Lambda^{*,k} + b_t^k$ линейно независимы. В самом деле, если $\zeta = c$, тогда

$$\sum_{k=1}^K (c\Lambda^{*,k} - \Lambda^{i,k}) \left(\frac{\alpha_k}{\Lambda^{*,k}} + \beta^k \right) = 0,$$

откуда $c\Lambda^{*,k} = \Lambda^{i,k}$ для всех k, откуда $\Lambda^i = \Lambda^*$, что противоречит нашему предположению.

7 Заключение

Была сформулирована и изучена модель рынка с дискретным временем, “короткоживущими” активами и аффинными выплатами этих активов. Предложено определение “выживающих” стратегий, которые позволяют использующему их инвестору быть не вытесненным с рынка на бесконечном горизонте времени. В предложенной модели, во-первых, найдено описание лог-оптимальной (а значит, “выживающей”) стратегии как неподвижной точки специального отображения (см. теорему 1).

Во-вторых, доказано, что лог-оптимальная стратегия определяет агрегированное поведение рынка на бесконечном горизонте времени в том смысле, что если в профиле стратегий какой-то агент использует лог-оптимальную стратегию, то (при немного более сильных условиях на функции дивидендов) взвешенная стратегия всех остальных агентов в этом профиле стратегий стремится к лог-оптимальной стратегии (см. теорему 2).

В третьих, доказано, что в случае независимых одинаково распределенных коэффициентов у аффинных функций из определения дивидендов, лог-оптимальная стратегия оказывается единственной "выживающей" стратегией в классе постоянных стратегий и, более того, захватывает весь рынок (см. теорему 3).

Кроме того, показано, что частными случаями предложенной нами аффинной модели являются модель с не зависящими от истории игры дивидендами и классическая модель с экзогенными ценами.

Наконец, написана программа на языке Python, позволяющая провести симуляции и наглядно увидеть поведение лог-оптимальной стратегии на примере рынка с двумя активами.

8 Список литературы

[1] Algoet, P. H. and Cover, T. M. (1988). Asymptotic optimality and asymptotic equipartition properties of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, 16(2):876–898.

[2] Aliprantis C. D., and Border K. C. (2006). Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide. *Springer*, 3rd edition, 591–600.

[3] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013). Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games. *Annals of Finance*, 9(2):121–144.

[4] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2005). Market selection and survival of investment strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 41(1-2):105-122.

[5] Blume L. and Easley D. (1992). Evolution and market behaviour. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40.

[6] Breiman, L. (1961). Optimal gambling systems for favorable games. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1:63–68.

[7] Drokin, Y. and Zhitlukhin, M. (2020). Relative growth optimal strategies in an asset market game. *Annals of Finance*, 16:529–546.

[8] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016). Evolutionary behaviorial finance. In Haven, E. et al., editors, *The handbook of Post Crisis Financial Modelling*, 214-234. Palgrave Macmillan UK.

[9] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2002). Market selection of financial trading strategies: Global stability. *Mathematical Finance*, 12(4):329-339.

[10] Föllmer, H. and Schied, A. (2011). *Stochastic Finance: an Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin/New York, 3rd edition.

[11] Karatzas, I. and Kardaras, C. (2007). The numeraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, 11(4):447–493.

[12] Kelly, Jr, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal*, 35(4):917–926.

[13] Ширяев, А.Н. (2017). Вероятность-2. *МЦНМО*, 6-е издание.