Летний научный выезд Фонда "Институт "Вега"

Эволюционная модель с эндогенными аффинными выплатами

Александра Токаева

Supervisors: Житлухин Михаил Валентинович

Vega Institute Foundation

24 июля 2023г

Содержание

Введение

- Цель работы — построить стратегию, “выживающую” на рынке вне зависимости от стратегий других инвесторов.
- Рассматривается стохастическая модель рынка с дискретным временем, эндогенными ценами и аффинными дивидендами.
- Обобщается модель из статьи Amir R., Evstigneev I., and Schenk-Hoppé K. R. *Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games (2013)*.
- Необходимость рассмотрения такой модели указана в статье Evstigneev I., Hens T., and Schenk-Hoppé K. R. *Evolutionary behaviorial finance (2016)*.
- Результаты работы изложены в статье Evstigneev I., Tokaeva A., Vanaei M., and Zhitlukhin M. *Survival strategies in an evolutionary finance model with endogenous asset payoffs (2023)*.
- Подход Evolutionary Behavorial Finance — уйти от Вальрасовской модели, где каждый участник максимизирует (ненаблюдаемые) utility functions, и позволить участникам рынка использовать любые стратегии, а рынку — отбирать те стратегии, которые хорошо себя показывают.

Общая модель рынка с эндогенными ценами

- $N \geq 2$ агентов.
- $K \geq 2$ активов, активы “короткоживущие”.
- Каждый агент n в каждый момент времени t выбирает вектор долей $\lambda_t^n = (\lambda_t^{n,1}, \ldots, \lambda_t^{n,K})$, в которых он вкладывает свой капитал W_t^n в каждый из K активов в момент времени t.
- Цены устанавливаются эндогенно из условия равенства спроса и предложения на каждый из активов.
- Активы платят случайные дивиденды A_t^k.

Стратегии

- Стратегия n-го агента — это последовательность $\Lambda^n = (\Lambda_t^n)_{t=0}^{\infty}$ измеримых векторнозначных функций

$$\Lambda_t^n = \Lambda_t^n(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$$

  со значениями в стандартном K-симплексе

$$\Delta^K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \ldots + a^K = 1\}.$$

- $\bar{s}_t := (s_1, ..., s_t)$ — история состояний случайного фактора.
- $\bar{W}_0 := (W_0^1, ..., W_0^N)$ — вектор начальных капиталов.
- $\bar{\lambda}_{t-1} := (\lambda_0, ..., \lambda_{t-1})$, где $\lambda_s = (\lambda_s^1, \ldots, \lambda_s^N)$ — история игры.

Выживающие стратегии

- Мы будем интересоваться поведением *относительных капиталов* агентов, определяемых формулой $r_t^n := \frac{W_t^n}{W_t}$.

Определение 1

Стратегия Λ^n n-го агента называется “**выживающей**”, если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и любого профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$ с заданной стратегией Λ^n и произвольными стратегиями Λ^j агентов $j \neq n$ выполняется неравенство $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и

$$\inf_{t \geq 0} r_t^n > 0 \text{ п.н.}$$

Выживающая и лог-оптимальная стратегия

- Чтобы найти выживающую стратегию, мы будем искать *лог-оптимальную стратегию*.

Определение 2

Стратегия Λ^n называется **лог-оптимальной** , если для любого вектора начальных капиталов $\bar{W}_0$ и профиля стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$, где Λ^n - данная стратегия, выполнено $W_t^n > 0$ п.н. для всех $t \geq 0$ и $\ln r_t^n$ является субмартингалом.

Утверждение

Любая лог-оптимальная стратегия является “выживающей”.

Модель 1: Активы с взаимоисключающими дивидендами

- $\bar{A}_t = \bar{A}_t(s_t) \in \{e_1, \ldots, e_K\}$ – вектор дивидендов от всех активов в момент времени $t \geq 1$.
- $e_i = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.
- $\lambda_t^n(s_t) \in \Delta^K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \ldots + a^K = 1\}$.

Теорема, Blume, Easley, 1992

Выживающей стратегией является константная стратегия $\lambda^* = (\lambda^{*,1}, \ldots, \lambda^{*,K})$, где $\lambda^{*,k} = P(A_t^k = 1)$.
При этом стратегия λ^* является единственной выживающей стратегией в классе константных стратегий.
Кроме того, репрезентативная стратегия рынка стремится к стратегии λ^*.

Модель 2: Активы с произвольными случайными дивидендами

- Рассмотрим ту же модель, но будем считать, что $\bar{A}_t$ – последовательность произвольных н.о.р. случайных величин в R^K с условием $P(A_t^k > 0) > 0$.
- $\lambda_t^n(s_t) \in \Delta^K = \{(a^1, \ldots, a^K) \in \mathbb{R}_+^K : a^1 + \ldots + a^K = 1\}$.

Теорема, Amir, Evstigneev, 2013

Выживающая стратегия $\lambda_t^* = (\lambda^{*,1}, \ldots, \lambda^{*,K})$ задается равенством

$$\lambda_t^* = \frac{A_t^k}{A_t^1 + \cdots + A_t^K}$$

Кроме того, если на рынке один из игроков использует стратегию λ^*, то для репрезентативной стратегии рынка μ_t выполнено:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ п.н.},$$

Модель 3: Активы с аффинными дивидендами

- $W_t = \sum_{n=1}^{N} W_t^n$ – полный капитал рынка в момент времени t.
- $\mu_t^k = \frac{1}{W_t} \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n$ – доля W_t, вложенная в k-й актив.
- $A_t^k = A_t^k(\bar{s}_t)$, $k = 1, \ldots, K$ – дивиденды от единицы актива k в момент времени $t \geq 1$.
- Дивиденды аффинные:

$$A_{t+1}^k = \alpha_{t+1}^k + \beta_{t+1}^k \mu_t^k,$$

где α_{t+1}^k и β_{t+1}^k – произвольные случайные величины вида

$$\alpha_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = a_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})), \tag{1}$$

$$\beta_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}) = b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1}(\bar{s}_{t-1})) \tag{2}$$

с некоторыми измеримыми неотрицательными коэффициентами a_{t+1}^k, b_{t+1}^k.

Динамика капитала

- $\bar{P}_t = (P_t^1, \dots, P_t^K)$ – вектор цен активов в момент времени t.
- $\bar{X}_t^n = (X_t^{n,1}, \dots, X_t^{n,K})$, где $X_t^{n,k} = \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k}$ – количество единиц актива k в портфеле.
- Из равенства спроса и предложения находим цены.

$$1 = \sum_{n=1}^{N} X_t^{n,k} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} \Rightarrow \boxed{P_t^k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n}$$

- Динамика капитала имеет вид

$$W_{t+1}^n = \sum_{k=1}^{K} X_{t-1}^{n,k} A_{t+1}^k = \sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{P_t^k} A_{t+1}^k = \boxed{\sum_{k=1}^{K} \frac{\lambda_t^{n,k} W_t^n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_t^{n,k} W_t^n} A_{t+1}^k}$$

Утверждение 2

- $g_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) = a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + \lambda^* b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})$.
- Обозначим $\bar{\chi}_t = (\bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-1})$.
- Введем отображение

$$L_t^k(\lambda^*, \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \mathbb{E}_t\left(\frac{g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\lambda^*, \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right).$$

Утверждение 2 (продолжение)

Proposition 1

Для любого $t \geq 0$ *существует измеримая функция* $\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t)$ *со значениями в* Δ^K *со следующими свойствами:*

- *для любого* $\bar{\chi}_t$ *выполнено:*

$$\mathbb{P}_t\left(\sum_{k=1}^{K} g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t) = 0\right) = 0 \text{ п.н.}, \tag{3}$$

$$\mathbb{E}_t\left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^{K} g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}\right) \leq 1 \text{ п.н.}, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{4}$$

- Λ_t^* *– неподвижная точка отображения* L_t*, то есть для любого* $\bar{\chi}_t$ *выполнено*

$$L_t(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_t, \bar{\chi}_t) = \Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t) \text{ п.н.}, \tag{5}$$

Основная теорема (теорема 1)

Теорема 1

Пусть $\sum_{k=1}^{K}(a_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2}) + b_t^k(\bar{s}_t, \bar{W}_0, \bar{\lambda}_{t-2})) > 0.$
Тогда "выживающая" стратегия Λ_t^* существует.

"Выживающая" стратегия Λ_t^* является неподвижной точкой отображения L_t, явный вид которого представлен в тексте работы:

$$L_t(\Lambda_t^*) = \Lambda_t^* \text{ п.н.} \tag{6}$$

Основная теорема 2

Теорема 2

Если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^N)$ агент n использует стратегию Λ^*, то при $t \to \infty$ выполнено

$$\|\lambda_t^n - \mu_t\| \to 0.$$

То есть выживающая стратегия в некотором смысле единственна.

Основная теорема 2, подробнее

Теорема 2

Пусть стратегия Λ^* удовлетворяет условиям теоремы 1 и некоторому более сильному условию на функции g_{t+1}^k: существует $\epsilon > 0$ такой что для всех $t \geq 0$ и $\bar{\chi}_t$ выполнено

$$\mathbb{E}_t \left(\frac{b_{t+1}^k(\bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)}{\sum_{k=1}^K g_{t+1}^k(\Lambda_t^*(\bar{s}_t, \bar{\chi}_t), \bar{s}_{t+1}, \bar{\chi}_t)} \right) \leq 1 - \epsilon \text{ п.н.}, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{7}$$

Тогда, если в профиле стратегий $\Lambda = (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^N)$ агент n использует стратегию Λ^*, то выполнено

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\lambda_t^n - \mu_t\|^2 < \infty \text{ п.н.},$$

В частности, $\|\lambda_t^n - \mu_t\| \to 0$ при $t \to \infty$.

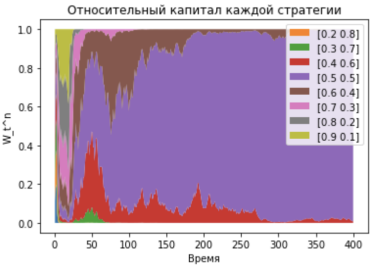
Основная теорема 3

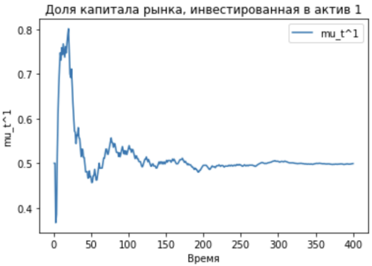
Теорема 3

Пусть последовательность состояний случайного фактора s_t, $t \geq 1$ состоит из н.о.р. случайных величин, а коэффициенты α_t^k, β_t^k зависят только от s_t, то есть $\alpha_t^k = a^k(s_t)$, $\beta_t^k = b^k(s_t)$. Тогда:
а) "Выживающая" стратегия существует и постоянна.
б) Пусть дополнительно $\mathbb{P}(\alpha_t^k > 0) > 0$ для всех $k = 1, \dots, K$. Тогда "выживающая" стратегия единственна в классе постоянных стратегий. При этом "выживающая" стратегия оказывается полностью диверсифицированной.
в) "Выживающая" стратегия "захватывает" рынок. Другими словами, $r_t^n \to 0$ п.н. при $t \to \infty$ для любого агента n, который использует постоянную полностью диверсифицированную стратегию $\Lambda^n \neq \Lambda^*$.

Численный пример

- Выплата каждого из двух активов равна либо $1 + \mu_t^k$ с вероятностью p, либо нулю с вероятностью $1 - p$, $p = 2/3$.
- "Выживающая" стратегия $\Lambda^* = (1/2, 1/2)$.
- На рынке есть 9 инвесторов со стратегиями $\Lambda^n = (n/10, 1 - n/10)$, где $n = 1, 2, \ldots, 9$.





Результаты

1. Исследована модель рынка с дискретным временем, эндогенными ценами и аффинными выплатами.
2. Доказаны существование и асимптотическая единственность “выживающей” стратегии.
3. Найдены условия, при которых “выживающая” стратегия захватывает рынок.

Литература

[1] Amir R., Evstigneev I. V., and Schenk-Hoppé, K. R. (2013).
Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games.
Annals of Finance, 9(2):121–144.

[2] Blume L. and Easley D. (1992).
Evolution and market behaviour. *Journal of Economic Theory*, 58(1):9–40.

[3] Evstigneev I., Tokaeva A., Vanaei M., and Zhitlukhin M.(2023).
Survival strategies in an evolutionary finance model with endogenous asset payoffs. *Annals of Operations Research*.

[4] Evstigneev, I., Hens, T., and Schenk-Hoppé, K. R. (2016).
Evolutionary behaviorial finance. In Haven, E. et al., editors, *The handbook of Post Crisis Financial Modelling*, 214-234. Palgrave Macmillan UK.