Оптимальный план исполнения заявки для случая детерминированной структуры ликвидности

Токаева Александра Александровна

МГУ им. М. В. Ломоносова

31 июля 2022

Постановка задачи, часть 1/2

1)

Мы хотим купить x акций, где x - достаточно большое, то есть агент своими действиями по покупке влияет на цену. Важно, что допускаются только монотонные стратегии.

2)

Мы хотим купить эти x акций монотонно, причем так, чтобы минимизировать издержки от своего импакта на цену из-за покупки этих акций (формула для издержек будет дана ниже). Импакт от трейда бывает временный и постоянный: временный заключается в том, что мы в момент трейда откусили кусок ордер-бука и этим подвинули цену, а постоянный - в том, что этот наш текущий трейд будет в будущем тоже влиять на цену (например, трейдеры увидели нашу заявку и тоже стали покупать эти акции, тем самым повышая цену).

Постановка задачи, часть 2/2

3)

То, как сильно наши трейды влияют на цену — определяется параметрами ликвидности рынка: глубиной δ_t и упругостью r_t. От них и будет зависеть наша стратегия.

4)

В моделях Обижаевой-Ванга δ_t и r_t были постоянными, а в нашей модели они будут зависеть от времени (но они детерминированные функции). Если взять δ_t и r_t постоянными и применить полученную формулу для оптимальной стратегии — то получится как раз оптимальная стратегия, полученная Обижаевой и Вангом.

5)

Мы найдем явный вид для оптимальной стратегии с помощью выпуклых оболочек и условий 1-го порядка (которые являются следствием выпуклости).

Обозначения

• Процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — непрерывный справа возрастающий процесс с $X_{0-} = 0$. Он отвечает за то, сколько у нас акций в момент времени t.

• Время идет с $t = 0-$, а не просто с $t = 0$, чтобы разрешить процессу в момент $t = 0$ делать скачок.

• Отклонение цены от "unaffected price"описывает процесс η_t^X: $d\eta_t^X = \frac{dX_t}{\delta_t} - r_t \eta_t dt$. $\eta_{0-}^X = \eta_0 \geq 0$.

• У этого СДУ есть решение $\eta_t^X = \frac{\eta_0 + \int_{[0,t]} \frac{\rho_s}{\delta_s} dX_s}{\rho_t}$, где $\rho_t = e^{\int_0^t r_s ds}$

Предположения относительно r_t и δ_t

- $r_t : [0, \infty) \to (0, \infty)$— строго положительно и локально интегрируемо по Лебегу
- $\delta_t : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неотрицательно, не тождественно ноль, полунепрерывно сверху, и еще $\limsup_{t\to\infty} \frac{\delta_t}{\rho_t} = 0$

Функционал издержек

Минимизируемый функционал задается формулой:

$$C(X) = \int_{[0,+\infty)} \left(\eta_{t-}^{X} + \frac{\Delta_t X}{2\delta_t} \right) dX_t$$

Наша задача - минимизировать этот функционал на множестве $X \in \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — множество непрерывных справа возрастающих процессов с $X_{0-} = 0, X_{\infty} = x, C(X) \leq \infty$. Здесь $\Delta_t X = X_{t+} - X_{t-}; X_{\infty} = \lim_{t\to\infty} X_t$.

Главная теорема

Теорема 3.1

Пусть выполнены предположения относительно r_t и ρ_t. Обозначим $\lambda_t := \frac{\delta_t}{\rho_t}$, $\widetilde{\lambda}_t = sup_{u \geq t} \lambda_u$, $L_t^* = \inf_{u<t} \frac{\widetilde{\lambda}_u - \widetilde{\lambda}_t}{\frac{\widetilde{\lambda}_u}{\rho_u} - \frac{\widetilde{\lambda}_t}{\rho_t}}$.

Тогда оптимальная стратегия имеет вид:

$$X_t^* = \lambda_0 (y^* L_0^* - \eta_0)^+ + \int_{(0,t]} \lambda_s d sup_{0 \leq v \leq s} \left[(y^* L_v^*) \vee \eta_0 \right]$$

Константа $y^* > 0$ выбирается так, чтобы $x_\infty^* = x$. Это можно сделать, если правая часть выражения при $y^* = 1$ ограничена при $t \to \infty$, иначе решения нет. Отметим, что если взять решение теоремы 1 для константных r_t и δ_t, то получится в точности результат, полученный Обижаевой и Вангом.

План доказательства

- Предл. 3.2: перепараметризацией процесса и введением параметров $\lambda = \frac{\delta}{\rho}, \kappa = \frac{\lambda}{\rho}$ сводим задачу минимизации функционала $C(X)$ к задаче минимизации функционала $K(Y) = 0.5 \int_{[0,\infty)} \kappa_t d(Y_t^2)$
- Предл. 3.3: Находим условие на κ, чтобы функционал $K(Y)$ был выпуклым.
- Теорема 3.4: Вводим выпуклую задачу $\widetilde{K}(\widetilde{Y})$, которая эквивалентна задаче с $K(Y)$, и причем при некоторых условиях решение задачи $\widetilde{K}(\widetilde{Y})$ является решением задачи $K(Y)$.
- Предл. 3.5: Условие 1-го порядка, чтобы проверять, является ли какой-то $\widetilde{Y^*}$ решением задачи $\widetilde{K}(\widetilde{Y})$.
- Теорема 3.6: Предъявляем $\widetilde{Y_t^*} = y\partial\Lambda_{\widetilde{\kappa}_t} \wedge \eta_0$
- Предл. 3.7: находим условия, при которых y_0^* можно выбрать так, чтобы удовлетворить начальные условия.
- Теорема 3.1: Вводим L_t^* и получаем требуемое.

Предложение 3.2

Пусть выполнены предположения относительно δ_t и r_t.
$\lambda = \frac{\delta}{\rho}$, $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{\delta}{\rho^2}$
$Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ — возрастающий и непрерывный справа.
$K(Y) = 0.5 \int_{[0,\infty)} k_t d(Y_t^2)$
Тогда

$$\begin{cases} Y_t = \eta_0 + \int_{[0,t]} \frac{dX_s}{\lambda_s} & Y_{0-} = \eta_0 \\ X_t = \int_{[0,t]} \lambda_s dY_s & X_{0-} = 0 \end{cases}$$

это взяимно-однозначное отображение из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, где $\mathbb{Y}$ - множество $(Y_t)_{t \geq 0}$ - непрерывен справа, возрастает, $Y_{0-} = \eta_0$; $\int_{[0,\infty)} \lambda_t dY_t = x$, $K(Y) < \infty$.
При этом $C(X) = K(Y)$.

Предложение 3.3

Для полунепрерывной сверху k, функционал $K = K(Y)$ является (строго) выпуклым для непрерывного справа Y с $Y_{0-} = \eta_0$ тогда и только тогда, когда k (строго) положительна и (строго) убывает.

Теорема 3.4

Пусть $\lambda = \frac{\delta}{\rho}$, $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{\delta}{\rho^2}$
Тогда задача с $K(Y)$ имеет то же оптимальное значение функционала, что и выпуклая задача минимизации
$\widetilde{K}(\widetilde{Y}) = 0.5 \int_{[0,\infty)} \widetilde{k}_t d(\widetilde{Y_t^2})$ по $\widetilde{Y} \in \widetilde{\mathbb{Y}}$
Здесь $\widetilde{k}_t = \frac{\widetilde{\lambda}_t}{\rho_t}$, $\widetilde{\lambda}_t = sup_{u \geq t} \lambda_u$
$\widetilde{\mathbb{Y}}$ — множество $(\widetilde{Y_t})$ - непрерывных справа, возрастает,
$\widetilde{Y_{0-}} = \eta_0, \int_{[0,\infty)} \widetilde{\lambda}_t d\widetilde{Y}_t = x$, $\widetilde{K}(\widetilde{Y}) < \infty$
Более того, если $\widetilde{Y^*}$ – решение задачи для $\widetilde{K}(\widetilde{Y})$ с условием $\{\widetilde{Y^*} > 0\} \in \{\widetilde{\lambda} = \lambda\}$ - то это решение задачи с $K(Y)$.

Предложение 3.5 (проверялка)

Для $\widetilde{k}, \widetilde{\lambda} \geq 0$ как в предыдущей теореме, $\widetilde{Y^*} \in \widetilde{\mathbb{Y}}$ решение задачи с $\widetilde{K}(\widetilde{Y})$ тогда и только тогда, когда существует $y > 0$ такой что: $-\int_{[t,\infty)} \widetilde{Y^*_u} d\widetilde{k_u} \geq y\widetilde{\lambda}_t$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $d\widetilde{Y^*_t} > 0$.

Теорема 3.6

Пусть выполнены предположения про δ_t и r_t.// Рассмторим $\tau_k = inf_{t \geq 0 : \widetilde{k_t} \leq k}$ (ну $\widetilde{k_t}$ убывает);
$\widetilde{\Lambda_k} := k\rho_{\tau_k}; k \in (0, \widetilde{k_0}]; \widetilde{\Lambda_0} := 0.$
Тогда:
• $\widetilde{\Lambda}$ - непрерывно возрастающее отображение на $[0, \widetilde{k_0}]$
• Его выпуклая оболочка $\hat{\Lambda}$ абсолютно непрерывна с непрерывной слева убывающей плотностью $\partial\hat{\Lambda} = (\partial\hat{\Lambda}_k)_{0 < k \leq \widetilde{k} \geq 0}$.
• Более того, положив $\partial\hat{\Lambda}_0 = \partial\hat{\Lambda}_0^+$, мы имеем $\widetilde{Y_t^*} = (y\partial\hat{\Lambda}_{\widetilde{k_t}}) \vee \eta_0$, $\widetilde{Y_{0-}^*} = \eta_0$ дает непрерывный справа возрастающий процесс, который удовлетворяет условию 1-го порядка (прогверялке).

Пример

Пусть $\delta_t = \delta_0 I_{[0,T]}(t)$, $r_t = r_0 \geq 0$, $\eta_0 = 0$.
То есть параметры ликвидности рынка у нас постоянные. Мы хотим убедиться, что полученный нами ответ в таком частном случае совпадает с ответом из Обижаевой и Ванга.

Имеем: $\lambda_t = \frac{\delta_t}{\rho_t}$, $\rho_t = e^{\int_0^t r_s ds} = e^{tr_0}$

$\Rightarrow \lambda_t = \widetilde{\lambda}_t = \delta_0 e^{-r_0 t} I_{[0,T]}(t)$

$k_t = \widetilde{k}_t = \delta_0 e^{-2r_0 t} I_{[0,T]}(t)$ $\tau_k := inf(t \geq 0 : \widetilde{k}_t \leq k)$

Ищем τ_k, то есть хотим, чтобы $\delta_0 e^{-2r_0\tau_k} I_{[0,T]}(t) = k$

Если $t \in [0, T]$, то $r_0\tau_k = 0.5 ln\left(\frac{\delta_0}{k}\right)$

А если нет, то $r_0\tau_k = 0.5 ln\left(\frac{\delta_0}{k_T}\right)$

Пример продолжение

$$\Rightarrow \rho_{\tau_k} = e^{\tau_k r_0} = e^{0.5 ln\left(\frac{\delta_0}{max(k,k_T)}\right)} = \sqrt{\frac{\delta_0}{max(k,k_T)}}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{\tau_k} = k\rho_{\tau_k} = k\sqrt{\frac{\delta_0}{max(k,k_T)}} = \sqrt{\delta_0 k} \wedge \sqrt{\frac{\delta_0}{k_T}}k; 0 \le k \le \delta_0$$

Λ уже выпукло вверх, поэтому его менять не нужно.

$$\partial\Lambda_k = \begin{cases} 0.5\frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{k}} & k \ge k_T \\ \sqrt{\frac{\delta_0}{k_T}} = \sqrt{e^{2r_0 T}} = e^{r_0 T} & k \le k_T \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_t := \partial\Lambda_{k_\tau} = \begin{cases} 0.5\frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{k_t}} = 0.5e^{r_0 t} & t \le T \\ \sqrt{\frac{\delta_0}{k_T}} = e^{r_0 T} & t \ge T \end{cases}$$

Теперь берем нашу формулу для X_t^*, и пока туда просто какое-то $y \geq 0$ подставляем, не обязательно оптимальное y_0^*:

$$X_t^* = \lambda_0(y^*\Lambda_{k_0}^* - \eta_0)^+ + \int_{(0,t]} \lambda_s d\left[(y^*\partial\Lambda_{k_s}^*) \vee \eta_0\right]$$

Получаем $X_t^y = 0.5y\delta_0(1 + r_0(t \wedge T)) + I_{[T,+\infty)}(t)$
Мы хотим $X_T^y = x$, то есть $0.5y\delta_0(2 + r_0 T) = x$, откуда
$y^* = \frac{x}{\delta_0(1+0.5r_0 T)}$

Спасибо за внимание!