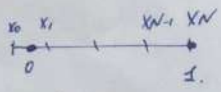
Задание 3

лок: 0101

поу: 0010



$1+\frac{h}{2} = N\cdot h.$

$2 = h(2N-1) \Rightarrow h = \frac{2}{2N-1} = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}.$

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0)=0 \\ y(1)=0. \end{cases}$$

- $y(1)=0 \Leftrightarrow y(x_N)=0.$

- $y(0)=0$: $\begin{cases} y(\frac{h}{2}) = y(0) + y'(0)\cdot\frac{h}{2} + O(h^2) \\ y(-\frac{h}{2}) = y(0) - y'(0)\cdot\frac{h}{2} + O(h^2) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{y(\frac{h}{2})+y(-\frac{h}{2})}{2} = y(0) + O(h^2)$

$\Rightarrow y(0)=0 \longleftrightarrow y(\frac{h}{2})+y(-\frac{h}{2})=0.$

$\Rightarrow y(x_0) = -y(x_1)$

- $y''(x) \approx \dfrac{\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h} = \dfrac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$

$\Rightarrow y''(x) = -\lambda y \longleftrightarrow \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k+1}}{h^2} = -\lambda y_k;\ k=1\ldots N-1.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k;\ k=1\ldots N-1 \\ y_0 = -y_1 \\ y_N = 0. \end{cases}$$

посмотрим на матрицу: $k=N-1$: $\frac{\overset{\parallel 0}{y_N} - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$

т.е. $\frac{-2y_{N-1}+y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$

$k=1$: $\frac{y_2 - 2y_1 + \overset{\parallel -y_1}{y_0}}{h^2} = -\lambda y_1$

$k=2$: $\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} = -\lambda y_2.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \ldots & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & \ldots & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Видим, что матрица симм.

$\Rightarrow$ скал. произв. $(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i$

$y_0 = y_N = 0$ — фиктивные коэф.

ищем собств. ф-ции задачи $\begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k; \ k=1\dots N-1 \\ y_0 = -y_1 \\ y_N = 0. \end{cases}$

имеем: $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k; \ k=1\dots N-1$

$y_{k+1} + y_k(-2+\lambda h^2) + y_{k-1} = 0.$

$y_{k+1} - 2\left(1-\frac{\lambda h^2}{2}\right) y_k + y_{k-1} = 0; \quad p = 1-\frac{\lambda h^2}{2}$

$y_{k+1} - 2p y_k + y_{k-1} = 0.$

Хар. ур-е: $\mu^2 - 2p\mu + 1 = 0.$

$D = 4p^2 - 4 = 4(p^2-1)$

$\Rightarrow \mu_{1;2} = \frac{2p \pm 2\sqrt{p^2-1}}{2} = p \pm \sqrt{p^2-1}$

[Если $p^2 \neq 1$, то $y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$
[Если $p^2 = 1$, то $y_k = (c_1 + kc_2)\mu^k$ →

пусть $p^2 = 1 \Rightarrow y_k = (c_1 + kc_2)\mu^k$ $\Rightarrow \mu = -\frac{c_1}{c_1+c_2}$

$\mu_0 = -\mu_1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -(c_1+c_2)\mu \\ (c_1+Nc_2)\mu^N = 0. \end{cases}$ $\mu_N = 0$ $\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{N}c_1$

$\Rightarrow \mu = -\frac{c_1}{c_1 - \frac{1}{N}c_1} = -\frac{N}{N-1}.$

но $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow \mu^2 = 1.$

но $\begin{cases} \mu^2 = 1 \\ \mu = -\frac{N}{N-1} \end{cases}$ — противоречие.

пусть $p^2 \neq 1 \Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$

$y_0 = -y_1 \Rightarrow c_1\cdot 1 + c_2 \cdot 1 = -(c_1\mu_1 + c_2\mu_2)$

$y_N = 0 \Rightarrow c_1\mu_1^N + c_2\mu_2^N = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1(1+\mu_1) = -c_2(1+\mu_2) \\ c_1\mu_1^N + c_2\cdot(\mu_1)^{-N} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1\mu_1^{2N} = -c_2$

т.к. $\mu_1\mu_2 = 1$

$\Rightarrow c_1(1+\mu_1) = c_1\cdot\mu_1^{2N}(1+\underbrace{\mu_2}_{=1/\mu_1}) = c_1\cdot\mu_1^{2N-1}(\mu_1+1).$

$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = 1 = e^{2\pi k i}$

$\Rightarrow \mu_{1,n} = e^{\pi i \cdot \frac{2n}{2N-1}} \quad n = 1\dots N-1$

$\mu_{2,n} = \overline{\mu_{1,n}} = e^{-\pi i \cdot \frac{2n}{2N-1}}$

~~$\Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N}\cdot\mu_2^k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N-k} = c_1\mu_1^N(\mu_1^{k-N} - \mu_1^{N-k}) =$~~

$\Rightarrow y_k = c_1\cdot\mu_1^k + c_2\cdot\mu_2^k \underset{c_2 = -c_1\mu_1^{2N}}{=} c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N}\cdot\mu_2^k \underset{\mu_1\mu_2=1}{=} c_1\mu_1^k - c_1\mu_1^{2N-k} = c_1\mu_1^N\cdot(\mu_1^{k-N} - \mu_1^{N-k}) = c_1\mu_1^N\cdot(\mu_1^{k-N} - \mu_2^{k-N}) =$

$= -c_1\mu_1^N\cdot(\mu_1^{N-k} - \mu_2^{N-k}) = -c_1\cdot e^{\pi i\cdot\frac{2nN}{2N-1}}\cdot\left(e^{\pi i\cdot\frac{2n}{2N-1}(N-k)} - e^{-\pi i\cdot\frac{2n}{2N-1}(N-k)}\right) = -c_1\cdot e^{\pi i\frac{n(2N-1)+n}{2N-1}}\cdot\sin\left(\frac{2n(N-k)}{2N-1}\right)$

Пусть $p^2 \neq 1 \Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$

$y_0 = -y_1 \Rightarrow c_1\cdot 1 + c_2 \cdot 1 = -(c_1\mu_1 + c_2\mu_2)$

$y_N = 0 \Rightarrow c_1\mu_1^N + c_2\mu_2^N = 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(1+\mu_1) = -c_2(1+\mu_2) \\ c_1\mu_1^N + c_2\mu_2^N = 0. \end{cases} \Rightarrow c_2 = -\frac{c_1(\overset{\mu_1\mu_2}{1}+\mu_1)}{1+\mu_2} = -\frac{c_1\cdot\mu_1(1+\mu_2)}{1+\mu_2} = -c_1\mu_1 \Rightarrow y_k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1\mu_2^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_k = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1\mu_2^k \\ y_N = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1\mu_1^N - c_1\mu_1\underbrace{\mu_2^N}_{=\mu_1^{-N}} = 0.$$

$\Rightarrow c_1\mu_1^{2N} - c_1\mu_1 = 0.$

$\Rightarrow c_1\mu_1(\mu_1^{2N-1} - 1) = 0.$

$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = 1. = e^{2\pi i n}$

$\Rightarrow \mu_{1,n} = e^{\frac{2\pi i n}{2N-1}} = e^{\frac{\pi i n}{N-\frac12}}$; $n = 1\ldots N-1$

$\Rightarrow \mu_{2,n} = \overline{\mu_{1,n}} = e^{-\frac{\pi i n}{N-\frac12}}$; $n = 1\ldots N-1$

(n) – номер. собств. вектора

$$\Rightarrow \underset{\text{коорд}}{y_k^{(n)}} = c_1\mu_1^k - c_1\mu_1\mu_2^k = c_1 e^{\frac{\pi i n k}{N-\frac12}} - c_1\cdot e^{\frac{\pi i n}{N-\frac12}}\cdot e^{-\frac{\pi i n k}{N-\frac12}} =$$

$$= \underbrace{c_1\cdot e^{\frac12 \frac{\pi i n}{N-\frac12}}}_{=\tilde{c}_1}\cdot\left(e^{\frac{\pi i n(k-\frac12)}{N-\frac12}} - e^{-\frac{\pi i n(k-\frac12)}{N-\frac12}}\right) = \tilde{c}_1\cdot \sin\frac{\pi n(k-\frac12)}{N-\frac12}\ ;\ n = 1\ldots N-1.$$

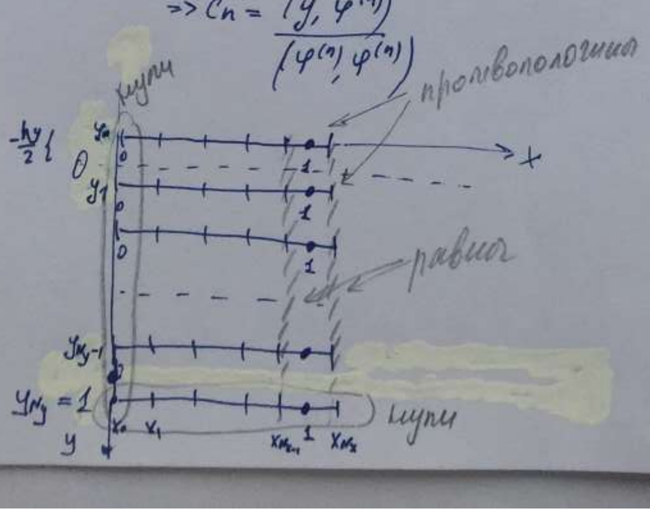
$h = \frac{1}{N-\frac12}$

$x_k = kh - \frac{h}{2} = h(k-\frac12) = \frac{k-\frac12}{N-\frac12} \Rightarrow y_k^{(n)} = \sin\frac{\pi n(k-\frac12)}{N-\frac12} = \sin \pi n x_k\ ;\ n = 1\ldots N-1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\pi x_0 \\ \sin\pi x_1 \\ \vdots \\ \sin\pi x_{N-1} \\ \sin \pi x_N \end{pmatrix}}_{=\varphi^{(1)}} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \sin 2\pi x_0 \\ \sin 2\pi x_1 \\ \vdots \\ \sin 2\pi x_{N-1} \\ \sin 2\pi x_N \end{pmatrix}}_{=\varphi^{(2)}} + \ldots + c_{N-1}\underbrace{\begin{pmatrix} \sin(N-1)\pi x_0 \\ \sin(N-1)\pi x_1 \\ \vdots \\ \sin(N-1)\pi x_{N-1} \\ \sin(N-1)\pi x_N \end{pmatrix}}_{=\varphi^{(N-1)}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n\cdot\varphi^{(n)}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{(y, \varphi^{(n)})}{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})}$$



$$u(x,y) \approx \sum_{\substack{m=1\ldots N_x-1 \\ n=1\ldots N_y-1}} c_{mn}\cdot \underbrace{\sin\pi(m-\tfrac12)x}_{=\varphi^{(m)}}\cdot\underbrace{\sin\pi n y}_{=\varphi^{(n)}}$$

$$u_{ij} = \sum_{m,n} c_{mn}\cdot\varphi_{ij}^{(m)(n)} = \sum_{m,n} c_{mn}\cdot\varphi_i^{(m)}\varphi_j^{(n)}$$

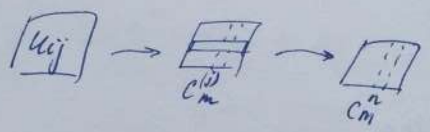
$$\Big(\underbrace{\sum_{m,n} C_{mn}\,\varphi_i^{(m)}\varphi_j^{(n)}}_{u_{ij}};\ \varphi_i^{(k)}\Big)_1 = \sum_{m,n} C_{mn}\cdot\varphi_j^{(n)}\,\underbrace{(\varphi_i^{(m)},\varphi_i^{(k)})_1}_{\text{то при } m=k} = \sum_n C_{kn}\,\varphi_j^{(n)}\cdot(\varphi_i^{(k)},\varphi_i^{(k)})_1$$

$$\Rightarrow \big((u_{ij},\varphi_i^{(k)})_1;\ \varphi_j^{(l)}\big)_2 = C_{kl}\cdot(\varphi_j^{(l)},\varphi_j^{(l)})_2\cdot(\varphi_i^{(k)},\varphi_i^{(k)})_1.$$

$$\Rightarrow C_{kl} = \frac{\left(\dfrac{(u_{ij};\varphi_i^{(k)})_1}{(\varphi_i^{(k)},\varphi_i^{(k)})};\ \varphi_j^{(l)}\right)_2}{(\varphi_j^{(l)};\varphi_j^{(l)})_2}$$

$$\varphi^{(m)} = \sin\pi\left(m-\tfrac{1}{2}\right)x;\quad m=1\dots N_x-1$$
$$\varphi^{(n)} = \sin\pi n y;\quad n=1\dots N_y-1$$

Т.е



2-мерная задача:
$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{h_y^2} = -\lambda u_{ij}; & i=1\dots N_x-1,\ j=1\dots N_y-1 \\ u_{0j}=0;\ u_{N_x-1,j}=u_{N_x,j} \\ u_{i0}=-u_{i1}; \end{cases}$$

$$\left(\ \frac{u_{i+1j}-2u_{ij}+u_{i-1j}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}-2u_{ij}+u_{ij-1}}{h_y^2} = -\lambda u_{ij}\ \right)\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix}$$

Если j-фикс, а i-бегает, то компоненты рядом

Если i-фикс, а j-бегает, то не рядом

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{h_y^2} & \cdots 0 & \dfrac{1}{h_x^2} & \left(\dfrac{-2}{h_x^2}-\dfrac{2}{h_y^2}\right) & \dfrac{1}{h_x^2} & 0\cdots 0 & \dfrac{1}{h_y^2} \\ u_{ij-1} & & u_{i-1j} & u_{ij} & u_{i+1j} & & u_{ij+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} u_{00}\\ u_{10}\\ u_{20}\\ \vdots\\ u_{n0}\\ \hline u_{01}\\ u_{11}\\ \vdots\\ \hline u_{M0}\\ u_{M1}\\ \vdots\\ u_{MN}\end{pmatrix}$$

Токаева Александра, 409 группа
Отчет по практикуму на ЭВМ

Задание 3 (по x: 1010, по y: 0010):
загадана некоторая функция f=f (x, y) с условиями
$f(a_x, y) = 0;\ f'(b_x, y) = 0; f\left(x, a_y\right) = 0; f\left(x, b_y\right) = 0;$
дан квадрат $[a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$,
на этом квадрате дана (N_x+1) * (N_y+1) точка
$x_{i,j} = (a_x + ih_x, b_x + jh_y)$, i = 0 …$N_x$, j = 0 …N_y

даны значения $f_{i,j} = f(x_{i,j})$ загаданной функции в этих точках.

Мы хотим приблизить нашу функцию так:
$f(x) \approx \sum_{m=1}^{N_x-1} \sum_{n=1}^{N_y-1} C_{m,n} * \sin(\pi m x) * \sin(\pi(n-0.5)y).$

То есть $\begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{i,j} \\ f_{N_x,N_y} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{N_x-1} \sum_{n=1}^{N_y-1} C_{m,n} \varphi^{(m)} \psi^{(n)}$

Где $\varphi^{(m)}$- собственная функция задачи по оси x
$\psi^{(n)}$- собственная функция задачи по оси y

$$\varphi^{(m)} = \begin{pmatrix} \sin\left(\pi \cdot (m-0.5) \cdot x_{0,0}\right) \\ \sin\left(\pi \cdot (m-0.5) \cdot x_{i,j}\right) \\ \sin\left(\pi \cdot (m-0.5) \cdot x_{N_x,N_y}\right) \end{pmatrix}; m = 1 \dots (N_x - 1)$$

$$\psi^{(n)} = \begin{pmatrix} \sin\left(\pi \cdot n \cdot x_{0,0}\right) \\ \sin\left(\pi \cdot n \cdot x_{i,j}\right) \\ \sin\left(\pi \cdot n \cdot x_{N_x,N_y}\right) \end{pmatrix}; n = 1 \dots (N_y - 1)$$

Тогда матрица $f_{i,j}$ имеет размерность (N_x+1) * (N_y+1), а матрица $C_{m,n}$ имеет размерность (N_x-1) * (N_y-1); Для чисто технического удобства мы хотим равенства размерностей матриц f и c, поэтому мы введем фиктивные нулевые значения
$c_{0,n} = c_{m,0} = c_{m,N_y} = c_{N_x,n} = 0.$

Отметим, что по оси x и по оси y скалярные произведения, вообще говоря, разные (но нам повезло, что они одинаковые по форме):
$(u, v)_1 = h_x \cdot \sum_{i=1}^{N_x-1} u_i v_i; (u, v)_2 = h_y \cdot \sum_{i=1}^{N_y-1} u_i v_i$

Теперь нам надо найти коэффициенты $C_{m,n}$;
Это можно сделать за $\left(N_xN_y\right)^4$, а можно за $\left(N_xN_y\right)^3$;
Сделаем за $\left(N_xN_y\right)^3$
Для этого заметим, что благодаря ортогональности собственных функций (по каждому направлению отдельно) :
$(f,\varphi^{(k)})_1 = (\sum_{m=1}^{N_x-1}\sum_{n=1}^{N_y-1} C_{m,n}\varphi^{(m)}\psi^{(n)};\ \varphi^{(k)})_1 = (\varphi^{(k)},\varphi^{(k)})_1 \sum_{n=1}^{N_y-1} C_{k,n}\psi^{(n)}$
Поэтому $(\left(f,\varphi^{(k)}\right)_1;\psi^{(l)})_2 = C_{k,l}\cdot(\varphi^{(k)},\varphi^{(k)})_1\cdot(\psi^{(l)},\psi^{(l)})_2$
То есть мы нашли нужный коэффициент

$$C_{k,l} = \frac{(\left(f,\varphi^{(k)}\right)_1;\psi^{(l)})_2}{(\varphi^{(k)},\varphi^{(k)})_1(\psi^{(l)},\psi^{(l)})_2}$$

Еще нам требуется найти, какой степени h=h_xh_y пропорционален err=максимум по всем узлам (а мы между каждыми двумя исходными узлами поместим еще по 2 дополнительных узла) модулей разностей между $f_{i,j}$ и нашим тригонометрическим многочленом;
Пусть мы из каких-то соображений надеемся, что этот максимум пропорционален h в какой-то степени p; чтобы приблизительно оценить значение p (то есть понять, p примерно равно 1, 3/2, 5, 10 и тд), мы посчитаем err для N=2,2,4…30 и построим график зависимости log(1/err) от log(N_xN_y). Если наша гипотеза про то что err=C*h^p верна, то на графике мы увидим прямую, и тангенс угла наклона этой прямой и будет искомым значением p, потому что
$err = Ch^p = C\left(\frac{1}{N_xN_y}\right)^p$ => $\log(err) = logC + plog(\frac{1}{N_xN_y})$
=> $-\log(err) = -logC - plog(\frac{1}{N_xN_y})$
=> $\log(1/err) = -logC + plog(N_xN_y)$
Но $log(\frac{1}{N_xN_y})$ будет очень близок к (-infinity) при растущих N_xN_y, поэтому график зависимости $\log(err)$ от $log(\frac{1}{N_xN_y})$ мы строить не будем, а построим график зависимости log(1/err) от log(N_xN_y).

Для начала проверим, что наша программа вообще правильно работает. Для этого введем в качестве функции

f=sin(pi*2.5*x)* sin(pi*2*y);
тогда очевидно, что все коэффициенты, кроме $c_{3,2} = 1$, будут равны нулю.
Проверяем это для $N_x = 4$, $N_y = 6$:

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task3_0101_0010 aleksandra$ ./a.out 0 1
4 0 1 6 ravnom myfunc2
Hello!
 a_x=0.000000 b_x=1.000000  N_x=4 a_y=0.000000  b_y=1.000000  N_y=6
is_ravnom=0 myfunc2
ravnom uzl
Matrix c:
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 -0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 -0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 -0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 -0.000000 -0.000000 -0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

tmp_str=46
output_name=output_46ravnommyfunc2.txt
-0.090909:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
-0.090909:0.095238 -0.367729 -0.367729 1.429026e-08
-0.090909:0.190476 -0.539129 -0.539129 1.324371e-08
-0.090909:0.285714 -0.422690 -0.422690 -1.179404e-08
-0.090909:0.380952 -0.080578 -0.080578 -5.931423e-08
-0.090909:0.476190 0.304554 0.304554 -1.189324e-07
-0.090909:0.571429 0.527086 0.527086 -1.765977e-07
-0.090909:0.666667 0.468209 0.468209 -2.209510e-07
-0.090909:0.761905 0.159357 0.159357 -2.476093e-07
-0.090909:0.857143 -0.234575 -0.234575 -2.593972e-07
-0.090909:0.952381 -0.503268 -0.503268 -2.627797e-07
-0.090909:1.047619 -0.503268 -0.503268 -2.627797e-07
-0.090909:1.142857 -0.234575 -0.234575 -2.593972e-07
-0.030303:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
-0.030303:0.095238 -0.128724 -0.128724 -1.010018e-08
-0.030303:0.190476 -0.188722 -0.188722 -1.899227e-08
-0.030303:0.285714 -0.147963 -0.147963 -2.640337e-08
-0.030303:0.380952 -0.028206 -0.028206 -3.334920e-08
-0.030303:0.476190 0.106609 0.106609 -4.165148e-08
-0.030303:0.571429 0.184506 0.184506 -5.284179e-08
-0.030303:0.666667 0.163896 0.163896 -6.703988e-08
-0.030303:0.761905 0.055783 0.055783 -8.244593e-08
-0.030303:0.857143 -0.082113 -0.082113 -9.578868e-08
-0.030303:0.952381 -0.176169 -0.176169 -1.035776e-07
-0.030303:1.047619 -0.176169 -0.176169 -1.035776e-07
-0.030303:1.142857 -0.082113 -0.082113 -9.578868e-08
0.030303:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.030303:0.095238 0.128724 0.128724 1.010018e-08
0.030303:0.190476 0.188722 0.188722 1.899227e-08
0.030303:0.285714 0.147963 0.147963 2.640337e-08
0.030303:0.380952 0.028206 0.028206 3.334920e-08
0.030303:0.476190 -0.106609 -0.106609 4.165148e-08
```

```
0.030303:0.571429 -0.184506 -0.184506 5.284179e-08
0.030303:0.666667 -0.163896 -0.163896 6.703988e-08
0.030303:0.761905 -0.055783 -0.055783 8.244593e-08
0.030303:0.857143 0.082113 0.082113 9.578868e-08
0.030303:0.952381 0.176169 0.176169 1.035776e-07
0.030303:1.047619 0.176169 0.176169 1.035776e-07
0.030303:1.142857 0.082113 0.082113 9.578868e-08
0.090909:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.090909:0.095238 0.367729 0.367729 -1.429026e-08
0.090909:0.190476 0.539129 0.539129 -1.324371e-08
0.090909:0.285714 0.422690 0.422690 1.179404e-08
0.090909:0.380952 0.080578 0.080578 5.931423e-08
0.090909:0.476190 -0.304554 -0.304554 1.189324e-07
0.090909:0.571429 -0.527086 -0.527086 1.765977e-07
0.090909:0.666667 -0.468209 -0.468209 2.209510e-07
0.090909:0.761905 -0.159357 -0.159357 2.476093e-07
0.090909:0.857143 0.234575 0.234575 2.593972e-07
0.090909:0.952381 0.503268 0.503268 2.627797e-07
0.090909:1.047619 0.503268 0.503268 2.627797e-07
0.090909:1.142857 0.234575 0.234575 2.593972e-07
0.151515:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.151515:0.095238 0.554052 0.554052 -1.251714e-07
0.151515:0.190476 0.812298 0.812298 -1.826713e-07
0.151515:0.285714 0.636861 0.636861 -1.369512e-07
0.151515:0.380952 0.121406 0.121406 -4.441651e-10
0.151515:0.476190 -0.458867 -0.458867 1.745969e-07
0.151515:0.571429 -0.794153 -0.794153 3.235359e-07
0.151515:0.666667 -0.705443 -0.705444 4.014277e-07
0.151515:0.761905 -0.240100 -0.240101 4.030129e-07
0.151515:0.857143 0.353431 0.353431 3.606891e-07
0.151515:0.952381 0.758267 0.758267 3.224452e-07
0.151515:1.047619 0.758267 0.758267 3.224452e-07
0.151515:1.142857 0.353431 0.353431 3.606891e-07
0.212121:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.212121:0.095238 0.661000 0.661000 -2.656641e-07
0.212121:0.190476 0.969094 0.969095 -4.021500e-07
0.212121:0.285714 0.759793 0.759793 -3.422045e-07
0.212121:0.380952 0.144841 0.144841 -1.108590e-07
0.212121:0.476190 -0.547441 -0.547441 1.907877e-07
0.212121:0.571429 -0.947446 -0.947447 4.390444e-07
0.212121:0.666667 -0.841614 -0.841614 5.498231e-07
0.212121:0.761905 -0.286446 -0.286447 5.170298e-07
0.212121:0.857143 0.421653 0.421653 4.078728e-07
0.212121:0.952381 0.904634 0.904634 3.191101e-07
0.212121:1.047619 0.904634 0.904634 3.191101e-07
0.212121:1.142857 0.421653 0.421653 4.078728e-07
0.272727:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.272727:0.095238 0.673250 0.673250 -3.202586e-07
0.272727:0.190476 0.987054 0.987054 -4.912660e-07
0.272727:0.285714 0.773874 0.773874 -4.347156e-07
0.272727:0.380952 0.147525 0.147525 -1.781430e-07
0.272727:0.476190 -0.557586 -0.557586 1.633895e-07
0.272727:0.571429 -0.965005 -0.965005 4.482342e-07
0.272727:0.666667 -0.857211 -0.857211 5.792011e-07
0.272727:0.761905 -0.291755 -0.291756 5.476009e-07
0.272727:0.857143 0.429467 0.429467 4.282620e-07
```

```
0.272727:0.952381 0.921399 0.921398 3.300308e-07
0.272727:1.047619 0.921399 0.921398 3.300308e-07
0.272727:1.142857 0.429467 0.429467 4.282620e-07
0.333333:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.333333:0.095238 0.589047 0.589047 -2.147076e-07
0.333333:0.190476 0.863604 0.863604 -3.305578e-07
0.333333:0.285714 0.677086 0.677086 -2.941788e-07
0.333333:0.380952 0.129074 0.129075 -1.204234e-07
0.333333:0.476190 -0.487849 -0.487850 1.185482e-07
0.333333:0.571429 -0.844312 -0.844313 3.313340e-07
0.333333:0.666667 -0.750000 -0.750000 4.521920e-07
0.333333:0.761905 -0.255265 -0.255266 4.695034e-07
0.333333:0.857143 0.375754 0.375754 4.238528e-07
0.333333:0.952381 0.806160 0.806160 3.783053e-07
0.333333:1.047619 0.806160 0.806160 3.783053e-07
0.333333:1.142857 0.375754 0.375754 4.238528e-07
0.393939:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.393939:0.095238 0.420455 0.420455 1.043668e-08
0.393939:0.190476 0.616430 0.616430 2.269038e-08
0.393939:0.285714 0.483296 0.483296 3.989649e-08
0.393939:0.380952 0.092132 0.092132 6.658622e-08
0.393939:0.476190 -0.348221 -0.348221 1.070529e-07
0.393939:0.571429 -0.602660 -0.602661 1.626456e-07
0.393939:0.666667 -0.535341 -0.535342 2.294440e-07
0.393939:0.761905 -0.182206 -0.182206 2.978088e-07
0.393939:0.857143 0.268209 0.268209 3.544928e-07
0.393939:0.952381 0.575428 0.575428 3.867408e-07
0.393939:1.047619 0.575428 0.575428 3.867408e-07
0.393939:1.142857 0.268209 0.268209 3.544928e-07
0.454545:0.000000 0.000000 0.000000 0.000000e+00
0.454545:0.095238 0.191627 0.191627 2.193676e-07
0.454545:0.190476 0.280945 0.280944 3.606126e-07
0.454545:0.285714 0.220267 0.220267 3.825748e-07
0.454545:0.380952 0.041990 0.041990 2.991586e-07
0.454545:0.476190 -0.158706 -0.158706 1.696117e-07
0.454545:0.571429 -0.274669 -0.274669 6.656494e-08
0.454545:0.666667 -0.243988 -0.243988 3.890184e-08
0.454545:0.761905 -0.083042 -0.083042 8.890532e-08
0.454545:0.857143 0.122239 0.122239 1.751935e-07
0.454545:0.952381 0.262257 0.262257 2.390172e-07
0.454545:1.047619 0.262257 0.262257 2.390172e-07
0.454545:1.142857 0.122239 0.122239 1.751935e-07
0.515152:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.515152:0.095238 -0.064655 -0.064655 2.826088e-07
0.515152:0.190476 -0.094790 -0.094791 4.784213e-07
0.515152:0.285714 -0.074318 -0.074318 5.360344e-07
0.515152:0.380952 -0.014167 -0.014168 4.580647e-07
0.515152:0.476190 0.053547 0.053547 2.947709e-07
0.515152:0.571429 0.092673 0.092673 1.170283e-07
0.515152:0.666667 0.082321 0.082321 -1.691227e-08
0.515152:0.761905 0.028018 0.028018 -8.407535e-08
0.515152:0.857143 -0.041243 -0.041243 -9.842762e-08
0.515152:0.952381 -0.088485 -0.088485 -9.279302e-08
0.515152:1.047619 -0.088485 -0.088485 -9.279302e-08
0.515152:1.142857 -0.041243 -0.041243 -9.842762e-08
0.575758:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
```

```
0.575758:0.095238 -0.311673 -0.311673 1.788328e-07
0.575758:0.190476 -0.456945 -0.456946 3.323502e-07
0.575758:0.285714 -0.358256 -0.358256 4.352035e-07
0.575758:0.380952 -0.068295 -0.068296 4.646709e-07
0.575758:0.476190 0.258128 0.258128 4.067373e-07
0.575758:0.571429 0.446738 0.446738 2.635383e-07
0.575758:0.666667 0.396836 0.396836 5.819569e-08
0.575758:0.761905 0.135065 0.135065 -1.667270e-07
0.575758:0.857143 -0.198817 -0.198817 -3.584694e-07
0.575758:0.952381 -0.426551 -0.426551 -4.687567e-07
0.575758:1.047619 -0.426551 -0.426551 -4.687567e-07
0.575758:1.142857 -0.198817 -0.198817 -3.584694e-07
0.636364:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.636364:0.095238 -0.514040 -0.514040 1.191940e-08
0.636364:0.190476 -0.753636 -0.753636 7.158115e-08
0.636364:0.285714 -0.590869 -0.590869 1.899080e-07
0.636364:0.380952 -0.112639 -0.112639 3.260993e-07
0.636364:0.476190 0.425729 0.425728 4.044097e-07
0.636364:0.571429 0.736801 0.736801 3.546575e-07
0.636364:0.666667 0.654498 0.654498 1.548324e-07
0.636364:0.761905 0.222761 0.222761 -1.479515e-07
0.636364:0.857143 -0.327907 -0.327907 -4.511573e-07
0.636364:0.952381 -0.703507 -0.703507 -6.401276e-07
0.636364:1.047619 -0.703507 -0.703507 -6.401276e-07
0.636364:1.142857 -0.327907 -0.327907 -4.511573e-07
0.696970:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.696970:0.095238 -0.642764 -0.642764 -7.313820e-08
0.696970:0.190476 -0.942358 -0.942358 -8.392213e-08
0.696970:0.285714 -0.738831 -0.738831 -8.529515e-09
0.696970:0.380952 -0.140845 -0.140845 1.214222e-07
0.696970:0.476190 0.532338 0.532338 2.334623e-07
0.696970:0.571429 0.921308 0.921307 2.530280e-07
0.696970:0.666667 0.818395 0.818395 1.457033e-07
0.696970:0.761905 0.278544 0.278544 -6.008552e-08
0.696970:0.857143 -0.410020 -0.410020 -2.828805e-07
0.696970:0.952381 -0.879676 -0.879676 -4.263270e-07
0.696970:1.047619 -0.879676 -0.879676 -4.263270e-07
0.696970:1.142857 -0.410020 -0.410020 -2.828805e-07
0.757576:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.757576:0.095238 -0.679402 -0.679402 -7.950760e-09
0.757576:0.190476 -0.996074 -0.996074 -2.059788e-08
0.757576:0.285714 -0.780946 -0.780946 -3.807345e-08
0.757576:0.380952 -0.148873 -0.148873 -5.423164e-08
0.757576:0.476190 0.562682 0.562682 -5.903225e-08
0.757576:0.571429 0.973824 0.973824 -4.393278e-08
0.757576:0.666667 0.865044 0.865044 -7.409248e-09
0.757576:0.761905 0.294421 0.294421 4.252663e-08
0.757576:0.857143 -0.433392 -0.433392 9.049111e-08
0.757576:0.952381 -0.929819 -0.929820 1.198326e-07
0.757576:1.047619 -0.929819 -0.929820 1.198326e-07
0.757576:1.142857 -0.433392 -0.433392 9.049111e-08
0.818182:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.818182:0.095238 -0.618707 -0.618707 1.444295e-07
0.818182:0.190476 -0.907088 -0.907089 1.814835e-07
0.818182:0.285714 -0.711179 -0.711179 6.857163e-08
0.818182:0.380952 -0.135574 -0.135573 -1.434239e-07
```

```
0.818182:0.476190 0.512414 0.512414 -3.340861e-07
0.818182:0.571429 0.886826 0.886826 -3.779152e-07
0.818182:0.666667 0.787764 0.787765 -2.148799e-07
0.818182:0.761905 0.268119 0.268119 1.112750e-07
0.818182:0.857143 -0.394675 -0.394675 4.686346e-07
0.818182:0.952381 -0.846753 -0.846753 6.998180e-07
0.818182:1.047619 -0.846753 -0.846753 6.998180e-07
0.818182:1.142857 -0.394675 -0.394675 4.686346e-07
0.878788:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.878788:0.095238 -0.469373 -0.469373 2.430162e-07
0.878788:0.190476 -0.688149 -0.688150 3.220085e-07
0.878788:0.285714 -0.539525 -0.539526 1.693314e-07
0.878788:0.380952 -0.102851 -0.102851 -1.431502e-07
0.878788:0.476190 0.388735 0.388736 -4.386347e-07
0.878788:0.571429 0.672777 0.672778 -5.300006e-07
0.878788:0.666667 0.597626 0.597626 -3.239443e-07
0.878788:0.761905 0.203404 0.203404 1.217629e-07
0.878788:0.857143 -0.299414 -0.299415 6.199111e-07
0.878788:0.952381 -0.642376 -0.642377 9.446281e-07
0.878788:1.047619 -0.642376 -0.642377 9.446281e-07
0.878788:1.142857 -0.299414 -0.299415 6.199111e-07
0.939394:0.000000 -0.000000 0.000000 -0.000000e+00
0.939394:0.095238 -0.252795 -0.252795 1.868531e-07
0.939394:0.190476 -0.370623 -0.370623 2.519937e-07
0.939394:0.285714 -0.290577 -0.290578 1.444809e-07
0.939394:0.380952 -0.055393 -0.055393 -8.404667e-08
0.939394:0.476190 0.209365 0.209365 -3.044536e-07
0.939394:0.571429 0.362344 0.362344 -3.792116e-07
0.939394:0.666667 0.321869 0.321869 -2.386271e-07
0.939394:0.761905 0.109549 0.109549 7.703416e-08
0.939394:0.857143 -0.161258 -0.161259 4.329689e-07
0.939394:0.952381 -0.345971 -0.345971 6.657541e-07
0.939394:1.047619 -0.345971 -0.345971 6.657541e-07
0.939394:1.142857 -0.161258 -0.161259 4.329689e-07
err=9.446281e-07
Goodbuy!
```

Видим, что действительно коэффициент $c_{3,2}$= 1, а остальные- нулевые;

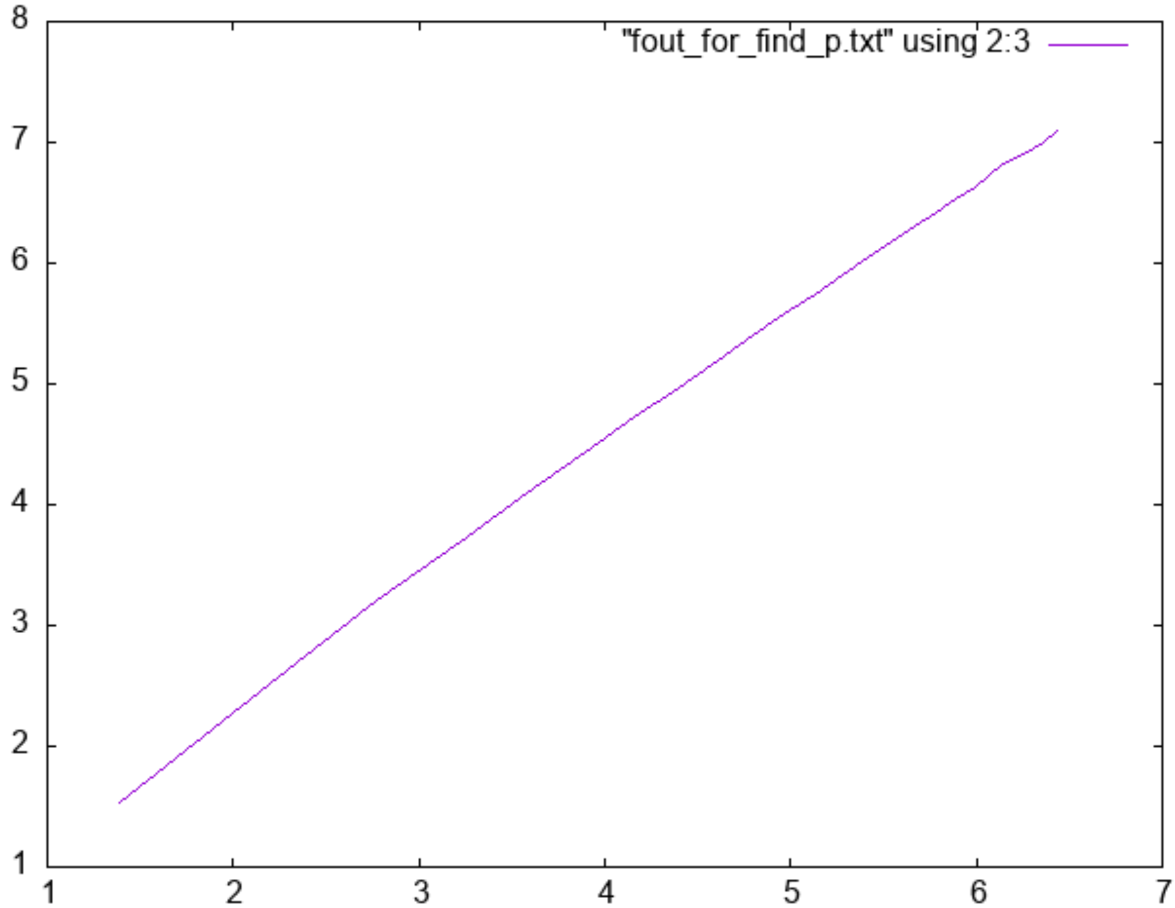
Теперь для построения графика зависимости log(1/err) от log($N_x N_y$) запусим программу на функции f=x*(x-2)*y*(y-1) для $N_x =$ N_y=2,3,4…25 и запишем результаты в формате $N_x N_y$, log($N_x N_y$) , log(1/err) в файл `"fout_for_find_p.txt"`

А потом построим график `plot "fout_for_find_p.txt" using 2:3 with lines`

2 1.386294 1.540222
3 2.197225 2.522914
4 2.772589 3.204017

5 3.218876 3.701125
6 3.583519 4.104466
7 3.891820 4.436868
8 4.158883 4.723874
9 4.394449 4.973461
10 4.605170 5.196144
11 4.795791 5.396151
12 4.969813 5.578077
13 5.129899 5.744888
14 5.278115 5.898522
15 5.416100 6.041504
16 5.545177 6.174951
17 5.666427 6.299991
18 5.780744 6.417383
19 5.888878 6.528360
20 5.991465 6.633889
21 6.135565 6.828738
23 6.270988 6.920404
24 6.356108 7.006540
25 6.437752 7.089998

Получим график



Это явно почти прямая, и p=тангенс угла наклона
Посчитаем разность значений для строчек с N=5 и N=20
5 3.218876 3.701125
20 5.991465 6.633889

=>p=(6.633889-3.701125)/(5.991465-3.218876)=
2.932765/2.772589=1.05777

То есть p примерно равно 1.057

То есть эмпирически получилось, что $err \approx C*h\hat{}(1.057)$