

## Практикум на ЭВМ, Токаева Александра 409

### Задание 4.5: двумерный интеграл

Мы хотим построить приближение для двумерного интеграла по квадрату

$$I = \iint_{x=0, y=0}^{x=1, y=1} f(x, y) dx dy$$

В качестве приближения возьмем

$$S = \sum_{\Delta_i; i=1}^{i=4N_x N_y} \int_{\Delta_i} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^{4N_x N_y} \frac{1}{3} S_{treug}(f(A) + f(B) + f(C))$$

Здесь  $A, B, C$  — это середины сторон треугольника.

Триангуляция такая: каждый из  $N_x N_y$  квадратов делим на 4 маленьких треугольника, проводя обе диагонали в квадратике. Получим  $4N_x N_y$  треугольничков, для каждого применим формулу.

Проверим, что получится на примере функции  $f_1(x, y) = 12x \sin(2x) y^2 dx dy$ ;

Настоящее значение ее интеграла равно

$$\int_0^1 \int_0^1 12x \sin(2x) y^2 = \sin 2 - 2 \cos 2 \approx 1.74159$$

А программа выдает:

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 1 1
Hello!
a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=1 N_y=1
otv=1.733032 err=8.559220e-03
Goodbuy!
```

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 5 5
Hello!
a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=5 N_y=5
otv=1.741587 err=4.569295e-06
Goodbuy!
```

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 15
15
Hello!
a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=15 N_y=15
otv=1.741591 err=5.303141e-08
Goodbuy!
```

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 30
30
```

Hello!

a\_x=0.000000 b\_x=1.000000 a\_y=0.000000 b\_y=1.000000 N\_x=30 N\_y=30

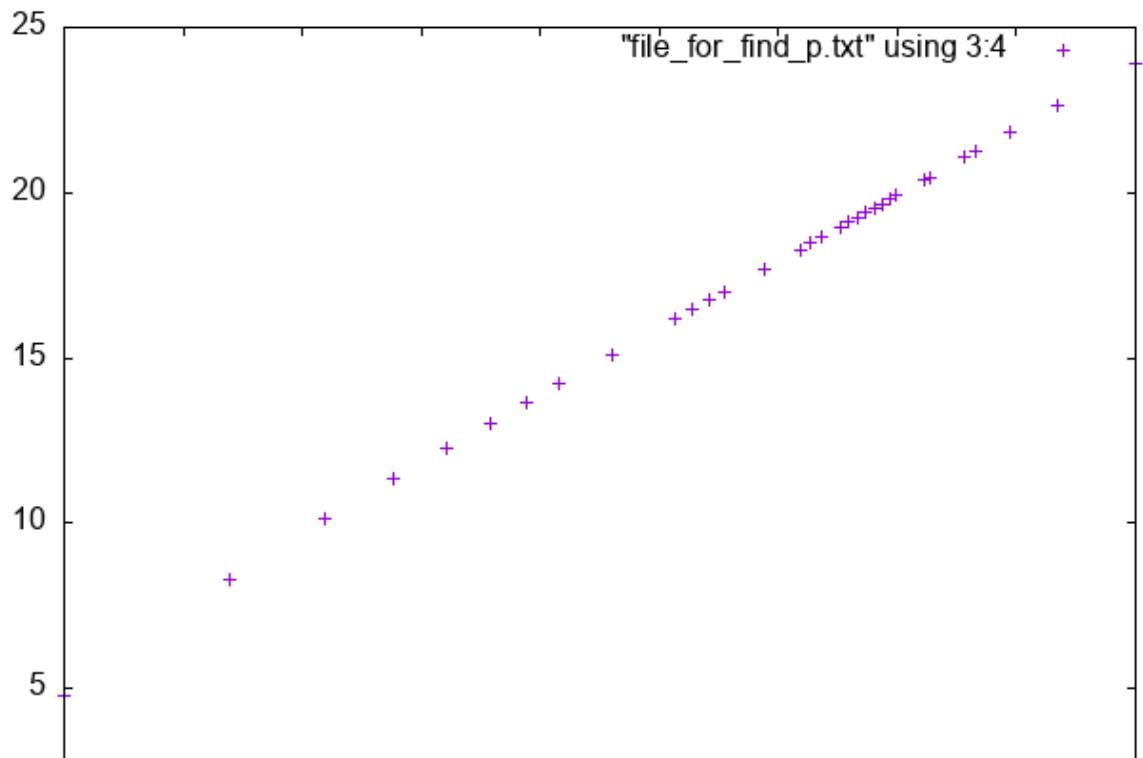
otv=1.741591 err=3.294816e-09

Goodbuy!

Видим, что погрешность уменьшается. Посмотрим, пропорционально какой степени она уменьшается. Для этого построим зависимость

$\log\left(\frac{1}{err}\right)$  от  $\log(N_x N_y)$ ;

Запустим программу для  $N_x = N_y = 1 \dots 53$



1	1	0.000000	4.760746
5	5	3.218876	12.296152
15	15	5.416100	16.752381
30	30	6.802395	19.530916
65	65	8.348775	22.625128
90	90	8.999619	23.926778
1	1	0.000000	4.760746
2	2	1.386294	8.314748
3	3	2.197225	10.137354
4	4	2.772589	11.365937
5	5	3.218876	12.296152
6	6	3.583519	13.046346
7	7	3.891820	13.675720
8	8	4.158883	14.218201
9	9	4.394449	0.226075
10	10	4.605170	15.120672

11 11 4.795791 0.387648  
12 12 4.969813 0.460074  
13 13 5.129899 16.177360  
14 14 5.278115 16.475240  
15 15 5.416100 16.752381  
16 16 5.545177 17.011494  
17 17 5.666427 0.761516  
18 18 5.780744 0.812466  
19 19 5.888878 17.700920  
20 20 5.991465 0.907295  
21 21 6.089045 0.951581  
22 22 6.182085 18.288590  
23 23 6.270988 18.466710  
24 24 6.356108 18.637224  
25 25 6.437752 1.111559  
26 26 6.516193 18.957853  
27 27 6.591674 19.109007  
28 28 6.664409 19.254650  
29 29 6.734592 19.395169  
30 30 6.802395 19.530916  
31 31 6.867974 19.662200  
32 32 6.931472 19.789309  
33 33 6.993015 19.912498  
34 34 7.052721 1.399164  
35 35 7.110696 1.426579  
36 36 7.167038 1.453265  
37 37 7.221836 20.370475  
38 38 7.275172 20.477214  
39 39 7.327123 1.529314  
40 40 7.377759 1.553435  
41 41 7.427144 1.576989  
42 42 7.475339 1.600003  
43 43 7.522400 1.622500  
44 44 7.568379 21.063940  
45 45 7.613325 1.666035  
46 46 7.657283 21.241825  
47 47 7.700295 1.707758  
48 48 7.742402 1.727986  
49 49 7.783641 1.747814  
50 50 7.824046 1.767256  
51 51 7.863651 1.786329  
52 52 7.902487 1.805045

53 53 7.940584 21.808632

*Посчитаем тангенс угла наклона*

46 46 7.657283 21.241825

53 53 7.940584 21.808632

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21.808632 - (21.241825)}{7.940584 - 7.657283} = \frac{0.566807}{0.283301} = 2.000723612$$

*Значит,  $err \sim C N_x N_y$*

*Теперь для функции с особенностью  $f_2(x, y) = 3\sqrt{x}e^y$ ;*

*Настоящее значение ее интеграла равно*

$$\int_0^1 \int_0^1 3\sqrt{x}e^y dx dy = 2(e - 1) \approx 1.14552$$

*А программа выдает:*

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 1 1
Hello!
```

```
  a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=1 N_y=1
otv=3.392429 err=4.413420e-02
```

Goodbuy!

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 5 5
Hello!
```

```
  a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=5 N_y=5
otv=3.431920 err=4.643765e-03
```

Goodbuy!

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 15
15
```

Hello!

```
  a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=15 N_y=15
otv=3.435664 err=8.996653e-04
```

Goodbuy!

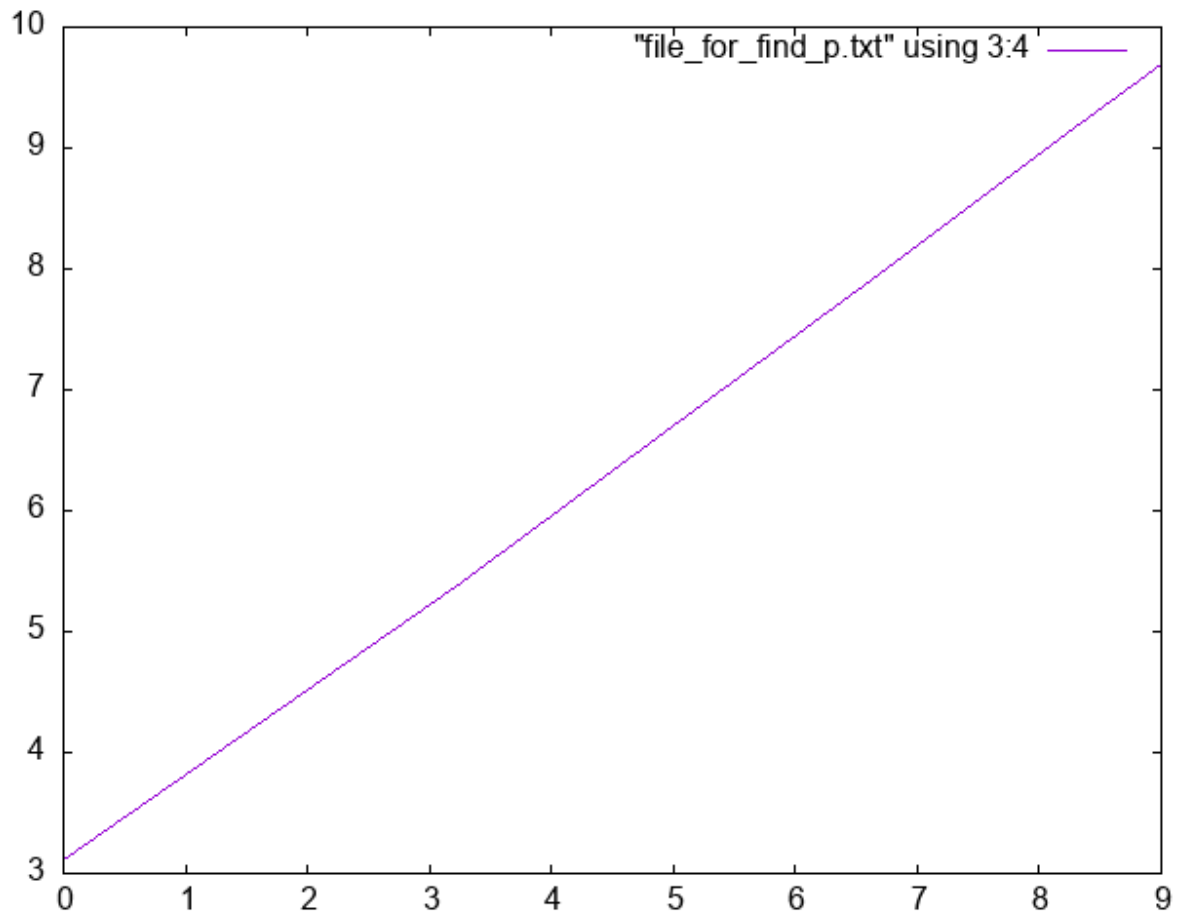
```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4.5_integr2d aleksandra$ ./a.out 0 1 0 1 30
30
```

Hello!

```
  a_x=0.000000 b_x=1.000000 a_y=0.000000 b_y=1.000000 N_x=30 N_y=30
otv=3.436245 err=3.182880e-04
```

Goodbuy!

Видим, что погрешность убывает, но не так быстро, как для функции без особенности.



```
1 1 0.000000 3.120520
5 5 3.218876 5.372230
15 15 5.416100 7.013488
30 30 6.802395 8.052554
65 65 8.348775 9.212163
90 90 8.999619 9.700274
```

Посчитаем тангенс угла наклона

```
65 65 8.348775 9.212163
90 90 8.999619 9.700274
```

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9.700274 - 9.212163}{8.999619 - 8.348775} = \frac{0.488111}{0.650844} = 0.749966$$