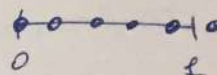


18.04.21. ЭОМ. Заранее Ч.

Ур-е теплопроводности (стационарное; нестационарное)

$0 \leq x \leq l \leftarrow$ смещ. осью
 $h = \frac{l}{N-0.5}$



↓
 для метода для метода

1) на решаем ур-е

$-u_{xx} + u \cdot p = f$ — это стационарное ур-е теплопроводности
 с краевыми усл: $u(0)=0; u'(l)=0$

или $u_t - u_{xx} + u \cdot p = f$ — это нестационарное ур-е теплопроводности
 с краевыми усл: $u(0)=0; u'(l)=0$; нач. усл $u(x,0) = u_0(x)$ — функция!

2) как работает метод правых прогонки:

$$AU = F$$

$$\begin{pmatrix} c_0 - b_0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -a_{N-1} & c_{N-1} - b_{N-1} \\ & & & -a_N & c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

мы представим $y_i = d_{i+1} y_{i+1} + p_{i+1}; i = 0 \dots N-1$.

нужно найти эти коэф.

• $c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0 \Rightarrow y_0 = \frac{b_0}{c_0} y_1 + \frac{f_0}{c_0} = d_1 y_1 + p_1$ ($i=0$)

для ермитаевой функции поочередно $d_0=0, p_0=0$, тогда y_0 — тоже вычисляется по обратной з.

• $-a_1 y_0 + c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1 \Rightarrow y_1 = \frac{b_1}{c_1 - d_1 a_1} y_2 + \frac{f_1 + a_1 p_1}{c_1 - d_1 a_1} = d_2 y_2 + p_2$ ($i=1$)

из i -ой строки:

$-a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i \Rightarrow y_i = \frac{b_i}{c_i - d_i a_i} y_{i+1} + \frac{f_i + a_i p_i}{c_i - d_i a_i} = d_{i+1} y_{i+1} + p_{i+1}$ ($i=N-1$)

Итак, вычислим $d_0 \dots d_N$
 $p_0 \dots p_N$

Для вычисления всех y_i найдем y_N .

Его найдем из системы $y_{N-1} = d_N y_N + p_N$

$-a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N$ — последняя строка матрицы
 $d_N y_N + p_N$

$\Rightarrow y_N = \frac{f_N + a_N p_N}{c_N - d_N a_N}$

$\Rightarrow y_{N-1} = d_N y_N + p_N \dots y_0 = d_1 y_1 + p_1 \Rightarrow$ найдем $y_0 \dots y_N, y_{i+1}$

2) Метод прогонки для ст. ур. с темп. равномерности:

$$-u'' + u \cdot p(x) = f(x)$$

Составим ~~систему~~ схему:

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + u_i \cdot p(x_i) = f(x_i) & ; i=1 \dots N-1 \\ u_0 = 0 \leftarrow \text{т.к. } u(0)=0 \\ u_N = u_{N-1} \leftarrow \text{т.к. } u'(1)=0, \text{ и сетка симметрична} \end{cases}$$

→ получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p(x_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p(x_2) & -\frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + p(x_{N-1}) & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

А её решаем методом прогонки:

$$C_0 = 1; C_i = \frac{2}{h^2} + p(i \cdot h); C_N = -1.$$

$$b_0 = 0; b_i = \frac{1}{h^2}; b_N = \text{что угодно, оно не используется}$$

$$a_0 = \text{что угодно}; a_i = \frac{1}{h^2}; a_N = -1$$

т.к. в матрице 1,
но $a_N = -a_N!$

$$f_0 = 0; f_i = f(i \cdot h); f_N = 0.$$

3) Метод прогонки для ст. ур. с проверкой на 2-х тестах:

$$-u'' = x \quad (\text{т.е. } p=0; f(x)=x)$$

$$x=0 \Rightarrow u(x) = ax + b \text{ - общее}$$

$$\text{частное: } u = x^2 \cdot (Ax + B)$$

$$u = A \cdot x^3$$

$$u'' = 6Ax \Rightarrow -6Ax = x \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \Rightarrow u = ax + b - \frac{x^3}{6}$$

Удовлетворим краевые укл:

$$u = ax + b - \frac{x^3}{6}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$u'(x) = a - \frac{x^2}{2}$$

$$u'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$$

4) $-u'' - 10x = x$ (т.е. $p = -10; f(x) = x$)

$$u(0) = 0$$

$$u'(1) = 0.$$

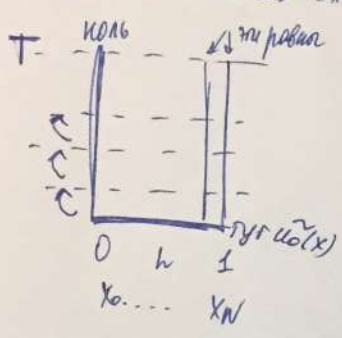
$$u(x) = \frac{1}{100} (\sqrt{10} \cdot \sec(\sqrt{10}) \cdot \sin(\sqrt{10}x) - 10x)$$

$\frac{1}{\cos(\sqrt{10})}$

5) нестат. ур. е: $u_t - u_{xx} + p \cdot u = f$. У нас $p=0; f=0$, т.е. $u_t = u_{xx}$

$u(0)=0; u(1)=0; u(x,0)=\tilde{u}_0(x)$

сначала введем схему:



$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}; \quad n \geq 0.$$

(u_m^0 - это $\tilde{u}_0(m \cdot h)$)

$$\text{т.е. } u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \cdot \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}; \quad m = 1 \dots N-1.$$

на границах
 $u_0 = 0$
 $u_M = u_{M-1}$

(где, у меня N-то пох,
 а M-то T,
 что все совпа-
 даст с размер-
 ностями u_m^n)

↑ которое уже посчитано. тут

то есть по ~~той~~ текущему состоянию вычисляем следующие.
 Эта схема 2-го порядка по h и 1-го по τ .

т.е. $O(h^2 + \tau)$ - мутит аппрокс на решении.

Введем схему учитывая при $\tau \leq C \cdot h^2$ - погрешность 40 400000 ± - работает,
 а 0.000000 40 40 ± - не работает.

6) методная схема:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right) u_m^{n+1} - \frac{u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = \left(\frac{u_m^n}{\tau}\right) = f_m$$

← можно решить.

⇒ это преобразование 3-диагональной матрицы,
 как. где $-u_{xx}'' + p \cdot u = f$, где $p \equiv \frac{1}{\tau}$.
 Решается методом прогонки.

7) на чем проверить введённую/методную схему для нестат. ур. с

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \end{cases} \quad u = T \cdot X \Rightarrow T' \cdot X = T \cdot X''$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' = -\lambda X \\ X(0)=0 \\ X'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow X_n = \sin \pi(n-0.5)x$$

$$\lambda_n = (\pi(n-0.5))^2$$

$$\Rightarrow \text{ур. е на } T: \frac{T'}{T} = -\lambda_n$$

$$T' \pm \lambda_n T \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n t}$$

$$\Rightarrow U_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\lambda_n t} \cdot \sin \pi(n-0.5)x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(\pi(n-0.5))^2 t} \cdot \sin \pi(n-0.5)x.$$

\Rightarrow например, для U_n - решение:

$$U_n = e^{-(\pi \cdot \frac{1}{2})^2 t} \cdot \sin \pi(n-0.5)x$$

$$U|_{t=0} = \sin \pi(n-0.5)x$$

$$\Rightarrow \text{ндр пределе } \begin{cases} U_0(x) = \sin \pi(n-0.5)x \\ U_0 = 0 \\ U_{n-1} = U_n \end{cases}$$

- и получается "отражающая" функция, которая есть точным решением нашей задачи

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U(0) = 0 \\ U'(1) = 0 \end{cases}$$

$$U|_{t=0} = \sin \pi(n-0.5)x$$

Проблемы:

а) $\begin{cases} -U'' = x \\ U(0) = 0 \\ U'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow U = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$ - проблема

б) $\begin{cases} -U'' - 10x = x \\ U(0) = 0 \\ U'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow U = \frac{1}{100} (\sqrt{10} \sec(\sqrt{10}) \cdot \sin(\sqrt{10}x) - 10x)$ - проблема

в) $\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U(0) = 0 \\ U'(1) = 0 \\ U|_{t=0} = \sin \pi(n-0.5)x \end{cases} \Rightarrow U = e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \cdot \sin \pi(n-0.5)x$ - эволюция

г) $\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U(0) = 0 \\ U'(1) = 0 \\ U|_{t=0} = \sin \pi(n-0.5)x \end{cases} \Rightarrow U = e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \cdot \sin \pi(n-0.5)x$ - первый элемент

д) .1.0.000 40 40 1 : эволюция - не проходит, $\sin x \neq x^2$
 невидимый - радиус

е) .1.0.000 40 400000 1 - и эволюция, и невидимый радиус

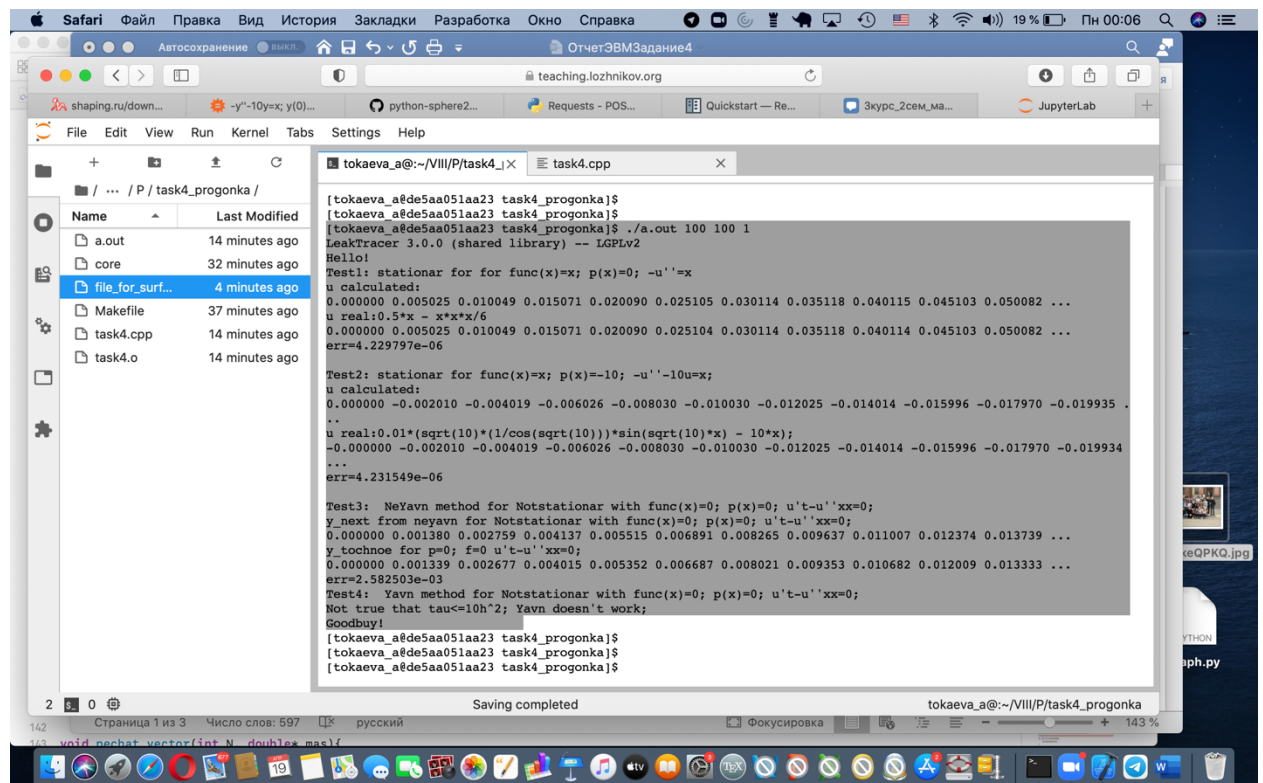
ж) .1.0.000 100 100 1 $\log(\text{невидимый}) = 2.5818 \cdot 10^{-3}$

з) .1.0.000 1000 10000 1 $\log(\text{невидимый}) = 2.5814 \cdot 10^{-5} \Rightarrow 0/n^2 + c)$

и) построена левая

Проверяем численно:

1) Запускаем ./a.out 100 100 1



```
[tokaeva_a@e5aa051aa23 task4_progonka]$ ./a.out 100 100 1
LeakTracer 3.0.0 (shared library) -- LGPLv2
Hello!
Test1: stationar for for func(x)=x; p(x)=0; -u''=x
u calculated:
0.000000 0.005025 0.010049 0.015071 0.020090 0.025105 0.030114 0.035118 0.040115 0.045103 0.050082 ...
u real:0.5*x - x*x*x/6
0.000000 0.005025 0.010049 0.015071 0.020090 0.025104 0.030114 0.035118 0.040114 0.045103 0.050082 ...
err=4.229797e-06

Test2: stationar for func(x)=x; p(x)=-10; -u''-10u=x;
u calculated:
0.000000 -0.002010 -0.004019 -0.006026 -0.008030 -0.010030 -0.012025 -0.014014 -0.015996 -0.017970 -0.019935 ...
u real:0.01*(sqrt(10)*(1/cos(sqrt(10))))*sin(sqrt(10)*x) - 10*x;
-0.000000 -0.002010 -0.004019 -0.006026 -0.008030 -0.010030 -0.012025 -0.014014 -0.015996 -0.017970 -0.019934 ...
err=4.231549e-06

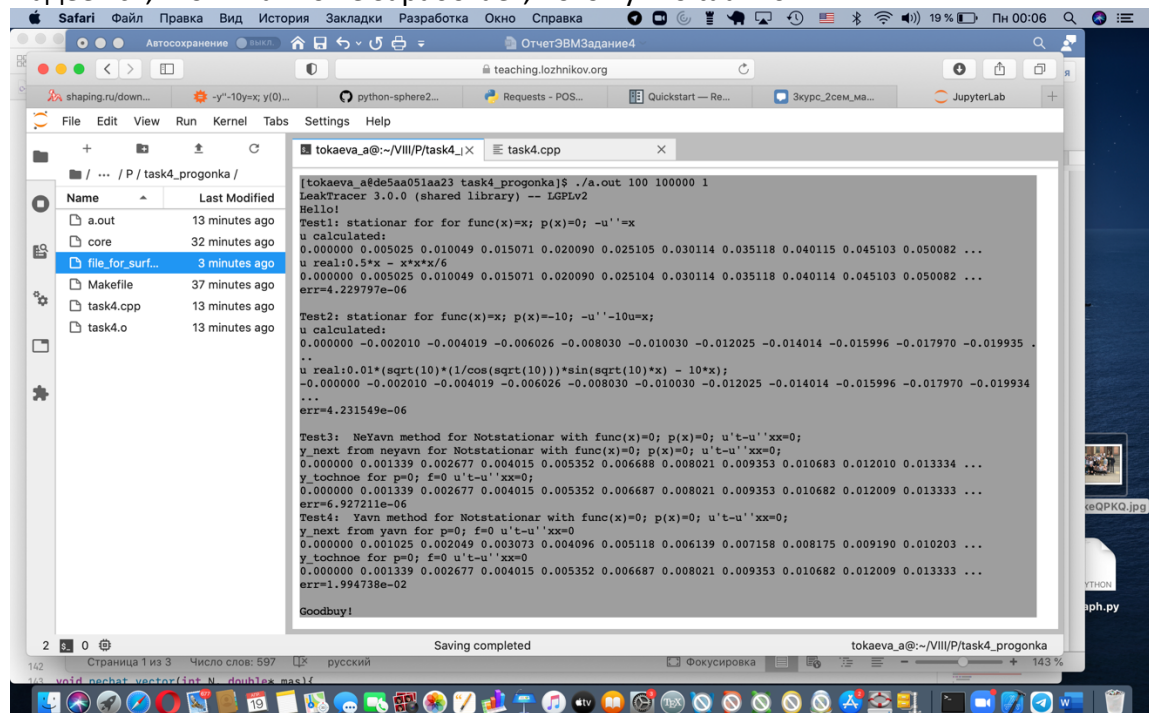
Test3: NeYavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
y next from neyavn for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
0.000000 0.001380 0.002759 0.004137 0.005515 0.006891 0.008265 0.009637 0.011007 0.012374 0.013739 ...
y tochnoe for p=0; f=0 u't-u''xx=0;
0.000000 0.001339 0.002677 0.004015 0.005352 0.006687 0.008021 0.009353 0.010682 0.012009 0.013333 ...
err=2.582503e-03

Test4: Yavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
Not true that tau<=10h^2; Yavn doesn't work;
Goodbuy!
[tokaeva_a@e5aa051aa23 task4_progonka]$
```

Видим, что все, кроме явной схемы - работает хорошо. Явная и не должна работать, потому что у нас тут $\tau = h$, а она работает (в смысле не разбалтывается) только при $\tau \leq C \cdot h^2$;

2) Запускаем ./a.out 100 100000 1

Надеемся, что явная тоже заработает, потому что $\tau = 10h^2$.



```
[tokaeva_a@e5aa051aa23 task4_progonka]$ ./a.out 100 100000 1
LeakTracer 3.0.0 (shared library) -- LGPLv2
Hello!
Test1: stationar for for func(x)=x; p(x)=0; -u''=x
u calculated:
0.000000 0.005025 0.010049 0.015071 0.020090 0.025105 0.030114 0.035118 0.040115 0.045103 0.050082 ...
u real:0.5*x - x*x*x/6
0.000000 0.005025 0.010049 0.015071 0.020090 0.025104 0.030114 0.035118 0.040114 0.045103 0.050082 ...
err=4.229797e-06

Test2: stationar for func(x)=x; p(x)=-10; -u''-10u=x;
u calculated:
0.000000 -0.002010 -0.004019 -0.006026 -0.008030 -0.010030 -0.012025 -0.014014 -0.015996 -0.017970 -0.019935 ...
u real:0.01*(sqrt(10)*(1/cos(sqrt(10))))*sin(sqrt(10)*x) - 10*x;
-0.000000 -0.002010 -0.004019 -0.006026 -0.008030 -0.010030 -0.012025 -0.014014 -0.015996 -0.017970 -0.019934 ...
err=4.231549e-06

Test3: NeYavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
y next from neyavn for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
0.000000 0.001339 0.002677 0.004015 0.005352 0.006687 0.008021 0.009353 0.010682 0.012009 0.013333 ...
y tochnoe for p=0; f=0 u't-u''xx=0;
0.000000 0.001339 0.002677 0.004015 0.005352 0.006687 0.008021 0.009353 0.010682 0.012009 0.013333 ...
err=6.927211e-06

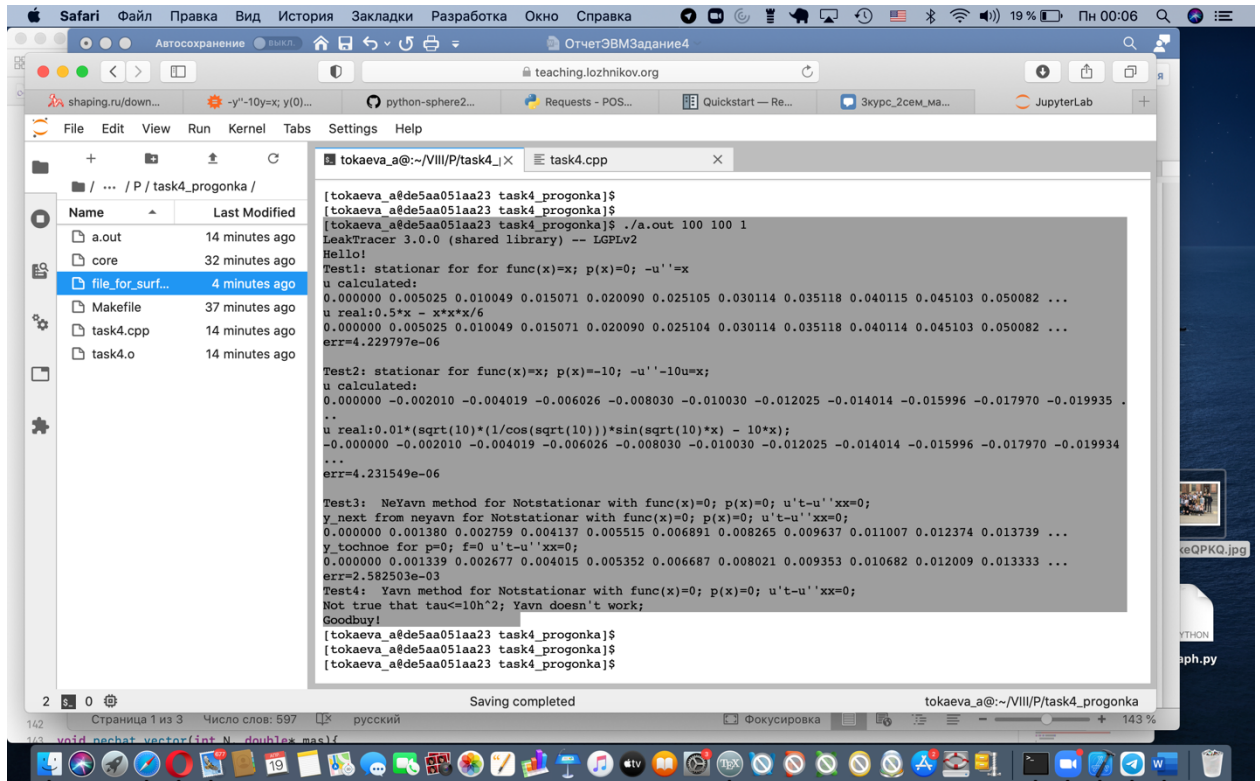
Test4: Yavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
y next from yavn for p=0; f=0 u't-u''xx=0;
0.000000 0.001025 0.002049 0.003073 0.004096 0.005118 0.006139 0.007158 0.008175 0.009190 0.010203 ...
y tochnoe for p=0; f=0 u't-u''xx=0;
0.000000 0.001339 0.002677 0.004015 0.005352 0.006687 0.008021 0.009353 0.010682 0.012009 0.013333 ...
err=1.994738e-02
Goodbuy!
```


Заработала, но с маленькой точностью. Чтобы точность росла, надо увеличить M.

3) Проверим, что схема порядка $O(\tau + h^2)$;

Для этого запустим 100 100 1 (см выше)

Точность у неявного метода $\text{err}=2.582503\text{e-}03$

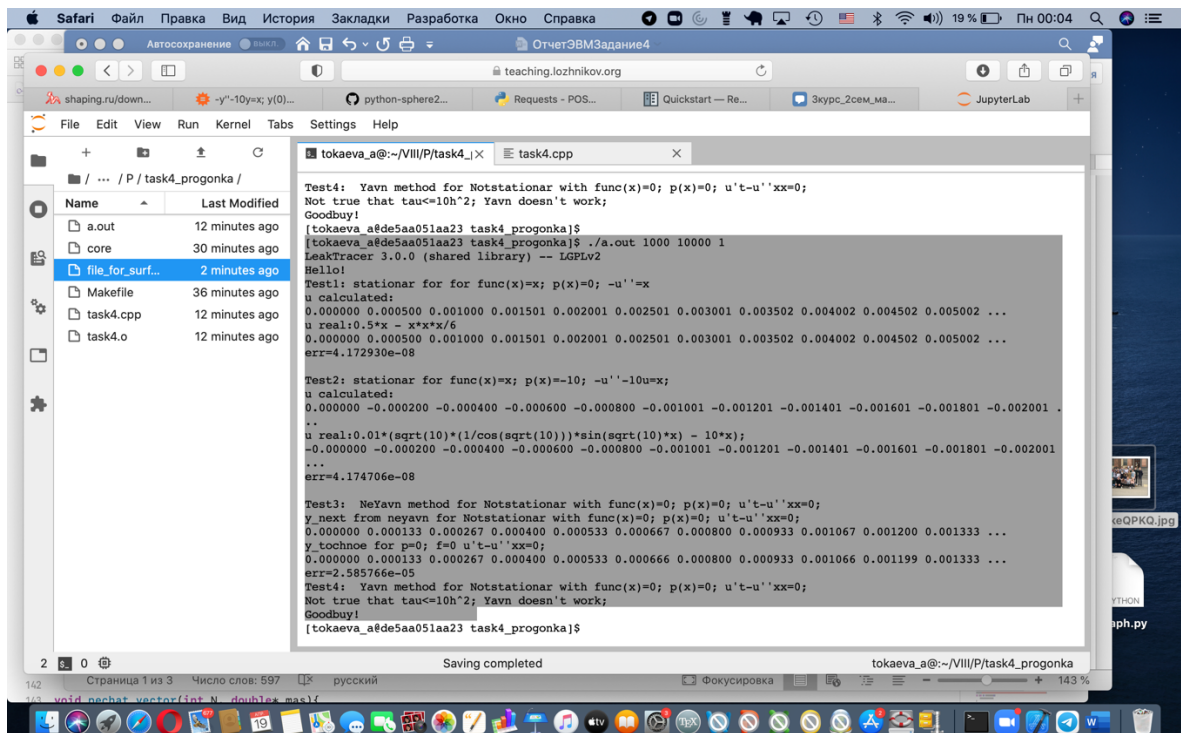


```
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$ ./a.out 100 100 1
LeakTracer 3.0.0 (shared library) -- LGPLv2
Hello!
Test1: stationar for func(x)=x; p(x)=0; -u'='x
u calculated:
0.000000 0.005025 0.010049 0.015071 0.020090 0.025105 0.030114 0.035118 0.040115 0.045103 0.050082 ...
u real:0.5*x - x*x*x/6
0.000000 0.005025 0.010049 0.015071 0.020090 0.025104 0.030114 0.035118 0.040114 0.045103 0.050082 ...
err=4.229797e-06

Test2: stationar for func(x)=x; p(x)=-10; -u'=-10u=x;
u calculated:
0.000000 -0.002010 -0.004019 -0.006026 -0.008030 -0.010030 -0.012025 -0.014014 -0.015996 -0.017970 -0.019935 ...
u real:0.01*(sqrt(10)*(1/cos(sqrt(10))))*sin(sqrt(10)*x) - 10*x;
-0.000000 -0.002010 -0.004019 -0.006026 -0.008030 -0.010030 -0.012025 -0.014014 -0.015996 -0.017970 -0.019934 ...
err=4.231549e-06

Test3: NeYavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
y_next from neyavn for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
0.000000 0.001380 0.002759 0.004137 0.005515 0.006891 0.008265 0.009637 0.011007 0.012374 0.013739 ...
y_tochnoe for p=0; f=0 u't-u''xx=0;
0.000000 0.001339 0.002677 0.004015 0.005352 0.006687 0.008021 0.009353 0.010682 0.012009 0.013333 ...
err=2.582503e-03
Test4: Yavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
Not true that tau<=10h^2; Yavn doesn't work;
Goodbuy!
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
```

И запустим 1000 10000 1



```
Test4: Yavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
Not true that tau<=10h^2; Yavn doesn't work;
Goodbuy!
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$ ./a.out 1000 10000 1
LeakTracer 3.0.0 (shared library) -- LGPLv2
Hello!
Test1: stationar for func(x)=x; p(x)=0; -u'='x
u calculated:
0.000000 0.000500 0.001000 0.001501 0.002001 0.002501 0.003001 0.003502 0.004002 0.004502 0.005002 ...
u real:0.5*x - x*x*x/6
0.000000 0.000500 0.001000 0.001501 0.002001 0.002501 0.003001 0.003502 0.004002 0.004502 0.005002 ...
err=4.172930e-08

Test2: stationar for func(x)=x; p(x)=-10; -u'=-10u=x;
u calculated:
0.000000 -0.000200 -0.000400 -0.000600 -0.000800 -0.001001 -0.001201 -0.001401 -0.001601 -0.001801 -0.002001 ...
u real:0.01*(sqrt(10)*(1/cos(sqrt(10))))*sin(sqrt(10)*x) - 10*x;
-0.000000 -0.000200 -0.000400 -0.000600 -0.000800 -0.001001 -0.001201 -0.001401 -0.001601 -0.001801 -0.002001 ...
err=4.174706e-08

Test3: NeYavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
y_next from neyavn for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
0.000000 0.000133 0.000267 0.000400 0.000533 0.000666 0.000800 0.000933 0.001066 0.001199 0.001333 ...
y_tochnoe for p=0; f=0 u't-u''xx=0;
0.000000 0.000133 0.000267 0.000400 0.000533 0.000666 0.000800 0.000933 0.001066 0.001199 0.001333 ...
err=2.585766e-05
Test4: Yavn method for Notstationar with func(x)=0; p(x)=0; u't-u''xx=0;
Not true that tau<=10h^2; Yavn doesn't work;
Goodbuy!
[tokaeva_a@de5aa051aa23 task4_progonka]$
```

Увидим, что у него $\text{err}=2.585766\text{e-}05$

То есть прямо в 100 раз точность увеличилась при уменьшении h в 10 раз, а τ в 100 раз.

Это и доказывает нужное $O(\tau+h^2)$;

4) Построим поверхность, как $u(x,t)$ эволюционировало при t от 0 до 1.

Для этого все y_{next} из неявного метода сложим в файл "file_for_surface.txt";

Потом пишем в командной строке `gnuplot`, потом в гнуплоте:

```
gnuplot> set pm3d
```

```
gnuplot> splot "file_for_surface.txt" matrix with lines
```

qt.qpa.fonts: Populating font family aliases took 433 ms. Replace uses of missing font family "Sans" with one that exists to avoid this cost.

```
gnuplot>
```

И рисуется поверхность, которую можно поворачивать.

