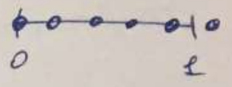
18.04.21. ЭВМ. Задание 4.

Ур-е теплопроводности (стац; нестац)

явн. метод — неявн. метод

0101 ← смещ. сетка

$h = \frac{1}{N-0.5}$



0) Мы решаем ур-е

$-u_{xx} + u \cdot p = f$ — это стац. ур-е теплопроводности

с краевыми усл: $u(0)=0;\ u'(1)=0$

или $u_t - u_{xx} + u \cdot p = f$ — это нестац. ур-е теплопроводности

с краевыми усл: $u(0)=0;\ u'(1)=0$; нач. усл ~~[illegible]~~ $u(x,t)\big|_{t=0} = \tilde{u}_0(x)$ ← функция!

1) Как работает метод правой прогонки:

$Au = f$

$$\begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & \dots & & 0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & & & \\ 0 & -a_2 & c_2 & -b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} \\ & & & & -a_N & c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Мы представим $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1};\ i = 0 \dots N-1.$

Нужно найти эти коэф:

- $c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0 \Rightarrow y_0 = \underbrace{\frac{b_0}{c_0}}_{=\alpha_1} y_1 + \frac{f_0}{c_0} = \beta_1$ $\quad i=0$

Для единообразия формул положим $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, тогда y_0 — тоже вычисляется по общей ф-ле.

- $-a_1 \underset{\alpha_1 y_1 + \beta_1}{\underset{\parallel}{y_0}} + c_1 y_1 - b_1 y_2 = f_1 \Rightarrow y_1 = \underbrace{\frac{b_1}{c_1 - \alpha_1 a_1}}_{\alpha_2} y_2 + \frac{f_1 + a_1 \beta_1}{c_1 - \alpha_1 a_1} = \beta_2$ $\quad i=1$

- Из i-й строки:

$-a_i \cdot \underset{\alpha_i y_{i+1} + \beta_i}{\underset{\parallel}{y_{i-1}}} + c_i y_i - b_i \cdot y_{i+1} = f_i \Rightarrow y_i = \underbrace{\frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}}_{\alpha_{i+1}} y_{i+1} + \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - \alpha_i a_i} = \beta_{i+1}$ $\quad i = N-1$

Итак, вычислили $\alpha_0 \dots \alpha_N$, $\beta_0 \dots \beta_N$

Для вычисления всех y_i нам нужен y_N.

Его найдем из системы $\begin{cases} y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N \\ -a_N \underset{\alpha_N y_N + \beta_N}{\underset{\parallel}{y_{N-1}}} + c_N y_N = f_N \text{ — последняя строка матрицы} \end{cases}$

$\Rightarrow y_N = \dfrac{f_N + a_N \beta_N}{c_N - \alpha_N a_N}$

$\Rightarrow y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N \dots\ y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \Rightarrow$ нашли $y_0 \dots y_N$. Чтд.

2) Метод прогонки для стац. ур-я теплопроводности:

$$-u'' + u \cdot p(x) = f(x).$$

Составляем схему:
$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + u_i \cdot p(x_i) = f(x_i) & ; i = 1 \dots N-1. \\ u_0 = 0 \leftarrow \text{т.к } u(0)=0 \\ u_N = u_{N-1} \leftarrow \text{т.к } u'(1)=0, \text{ и сетка смещенная} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ получаем матрицу:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p(x_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & & \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p(x_2) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+p(x_{N-1}) & -\frac{1}{h^2} \\ & \dots & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

А её решаем методом прогонки:

$c_0 = 1$; $c_i = \frac{2}{h^2} + p(i \cdot h)$; $c_N = -1$.

$b_0 = 0$; $b_i = \frac{1}{h^2}$; $b_N =$ что угодно, оно не используется

$a_0 =$ что угодно; $a_i = \frac{1}{h^2}$; $a_N = -1$

т.к в матрице 1, но это $= -a_N$!

$f_0 = 0$; $f_i = f(i \cdot h)$; $f_N = 0$.

3) Метод прогонки для стац. ур-я я проверяю на 2-х тестах:

$-u'' = x.$ (т.е $p=0; f(x)=x$)

$\lambda^2 = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b$ - общее

частное: $u = x^2 \cdot (Ax+B)$

$u = A \cdot x^3$

$u'' = 6Ax \Rightarrow -6Ax = x \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \Rightarrow u = ax + b - \frac{x^3}{6}.$

Удовлетворим краевые усл:

$u = ax + b - \frac{x^3}{6}$

$u(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$u'(x) = a - \frac{x^2}{2}$

$u'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$

4) $\begin{cases} -u'' - 10x = x \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0. \end{cases}$ (т.е $p = -10; f(x) = x$)

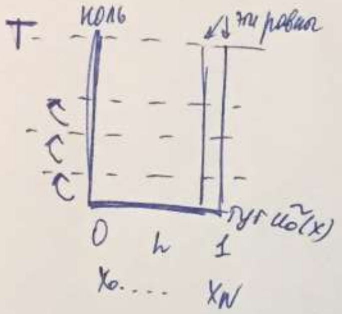
$$u(x) = \frac{1}{100}\left(\sqrt{10} \cdot \underbrace{\sec(\sqrt{10})}_{=\frac{1}{\cos(\sqrt{10})}} \cdot \sin(\sqrt{10}x) - 10x\right)$$

5) Нестац. ур-е: $\boxed{u_t - u_{xx} + p \cdot u = f}$ У нас $p=0$; $f=0$, т.е. $u_t = u_{xx}$

$u(0)=0$; $u'(1)=0$; $u(x,0)=\tilde{u}_0(x)$

Сначала явная схема: $\dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$; $n \geq 0$.

(u_m^0 — это $\tilde{u}_0(m \cdot h)$)



т.е. $$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \cdot \left(\dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) \\ u_0^{n\text{-любое}} = 0 \\ u_M^{n\text{-любое}} = u_{M-1}^{n\text{-любое}} \end{cases}$$; $m = 1 \ldots N-1$.

~~т.е. мы просто по~~

(да, у меня N — по x, а M — по T, что не совпадает с обозначением u_m^n)

↑ которое уже посчитано тут

То есть по текущему слою вычисляем следующий.

Эта схема 2 порядка по h и 1 по τ.

т.е. $O(h^2 + \tau)$ — нужн. аппрокс на решении.

Явная схема устойчива при $\tau \leq C \cdot h^2$ — поэтому ./a.out 40 400.000 1 — работает, (N — шагов по x, M — шагов по времени, T)

точно

а ./a.out 40 40 1 — не работает

6) Неявная схема: $\dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \dfrac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \left(\dfrac{2}{h^2} + \dfrac{1}{\tau}\right) u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^{n+1}}{h^2} = \dfrac{u_m^n}{\tau} = f_m \\ u_0^{n+1} = 0 \\ u_M^{n+1} = u_{M-1}^{n+1} \end{cases}$$ ← мы его знаем.

$\Rightarrow$ это просто 3-диагональная ~~схема~~ матрица, как для $-u_x'' + p \cdot u = f$, где $p = \dfrac{1}{\tau}$.

Решается методом прогонки.

7) На чём проверять явную/неявную схему для нестац. ур-я

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases} \quad u = T \cdot X$$

$\Rightarrow T' X = T \cdot X''$

$\Rightarrow \dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda.$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' = -\lambda X \\ X(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n = \sin \pi(n - 0.5)x$$

$\lambda_n = (\pi(n-0.5))^2$

$\Rightarrow$ ур-е на T: $\dfrac{T'}{T} = -\lambda_n$

$T' = -\lambda_n T \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n t}$

$$\Rightarrow u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\lambda_n t} \cdot \sin \pi(n-0.5)x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(\pi(n-0.5))^2 t} \cdot \sin \pi(n-0.5)x.$$

$\Rightarrow$ например, такое u_n – решение:

$$u_m = e^{-(\pi\cdot\frac{1}{2})^2 t} \cdot \sin \pi(n-0.5)x$$

$$u|_{t=0} = \sin \pi(n-0.5)x$$

$\Rightarrow$ мы задаем $\begin{cases} u_0^\circ(x) := \sin \pi(n-0.5)x \\ u_0 = 0 \\ u_{M-1} = u_M \end{cases}$ – и пытаемся "отгадать" эту функцию, которая явл. точным решением нашей задачи $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \\ u|_{t=0} = \sin \pi(n-0.5)x. \end{cases}$

Проверим:

а) $\begin{cases} -u''=x \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$ – прогонкой

б) $\begin{cases} -u''-10x=x \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{100}(\sqrt{10}\sec(\sqrt{10})\cdot\sin(\sqrt{10}x) - 10x)$ – прогонкой

в) $\begin{cases} u_t=u_{xx} \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \\ u|_{t=0} = \sin\pi(n-0.5)x \end{cases} \Rightarrow u = e^{-\frac{\pi^2}{4}\cdot t}\cdot\sin\pi(n-0.5)x$ – явной схемой

г) $\begin{cases} u_t=u_{xx} \\ u(0)=0 \\ u'(1)=0 \\ u|_{t=0} = \sin\pi(n-0.5)x \end{cases} \Rightarrow u = e^{-\frac{\pi^2}{4}t}\cdot\sin\pi(n-0.5)x$ – неявной схемой

д) ./a.out 40 40 1 : явной – не работает, т.к. τ ~~$\leq c$~~ $\cdot h^2$
неявной – работает

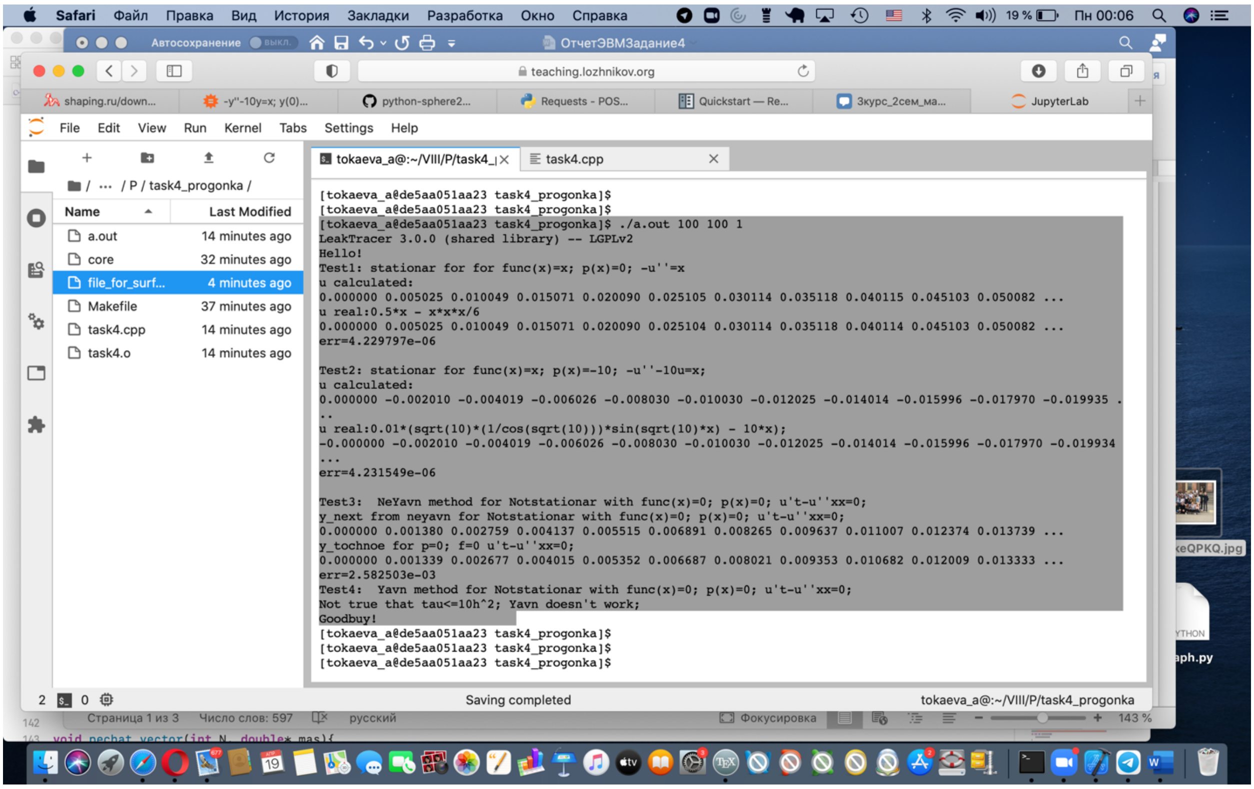
е) ./a.out 40 4000000 1 – и явной, и неявной работают

ж) ./a.out 100 100 1 err(неявной) = $2.5816\cdot10^{-3}$
./a.out 1000 10000 1 err(неявной) = $2.5814\cdot e^{-5}$ $\Big\} \Rightarrow \underline{O}(h^2+\tau)$

з) построить пов-ть.

Проверяем численно:

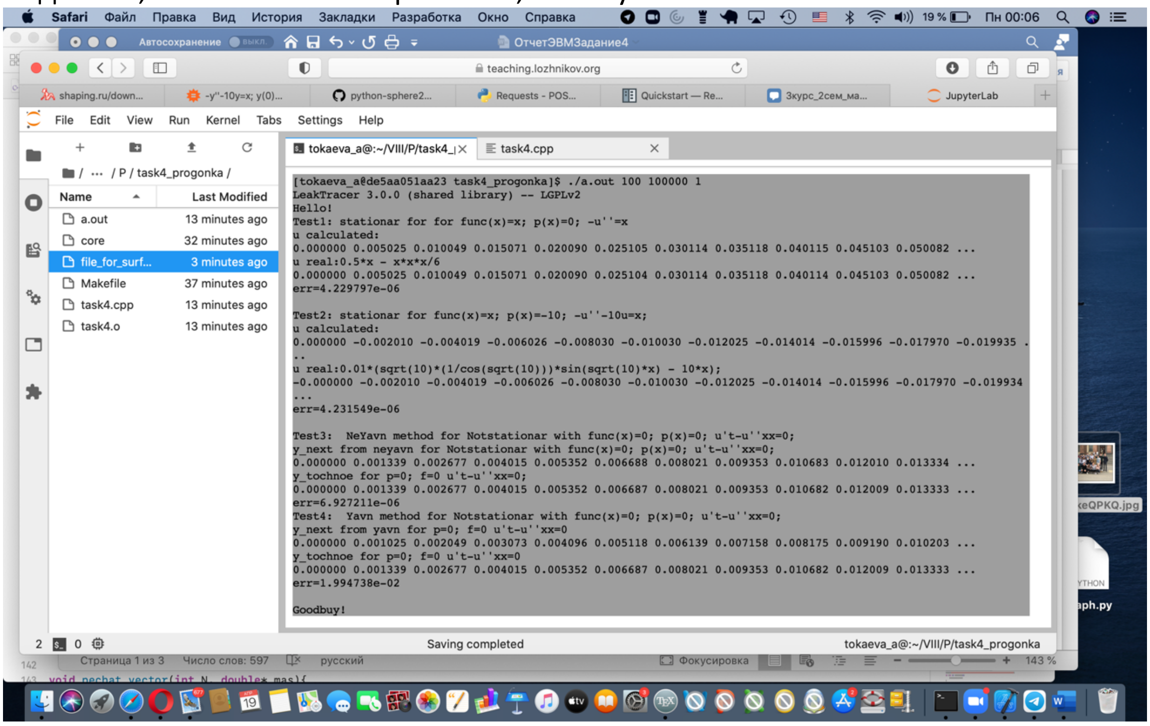
1) Запускаем ./a.out 100 100 1



Видим, что все, кроме явной схемы - работает хорошо. Явная и не должна работать, потому что у нас тут tau=h, а она работает (в смысле не разбалтывается) только при tau<=C*h^2;

2) Запускаем ./a.out 100 100000 1

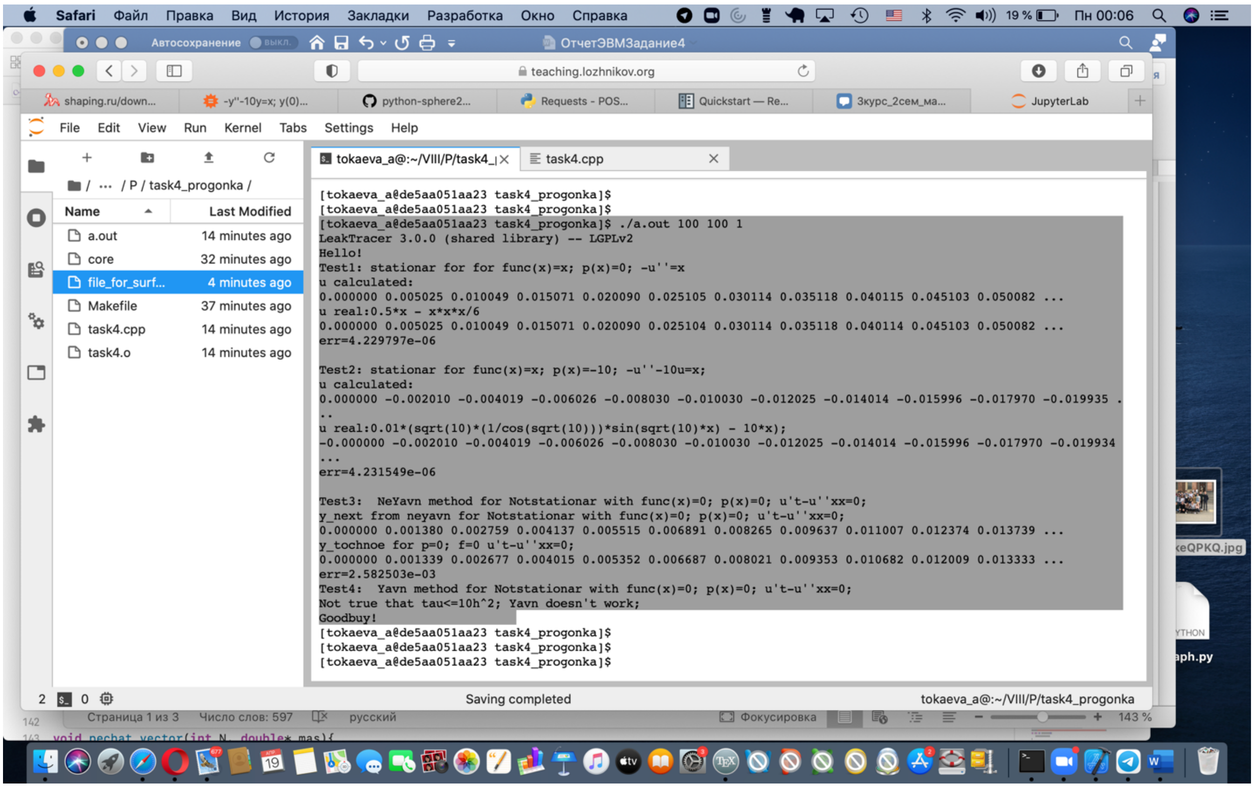
Надеемся, что явная тоже заработает, потому что tau=10h^2.



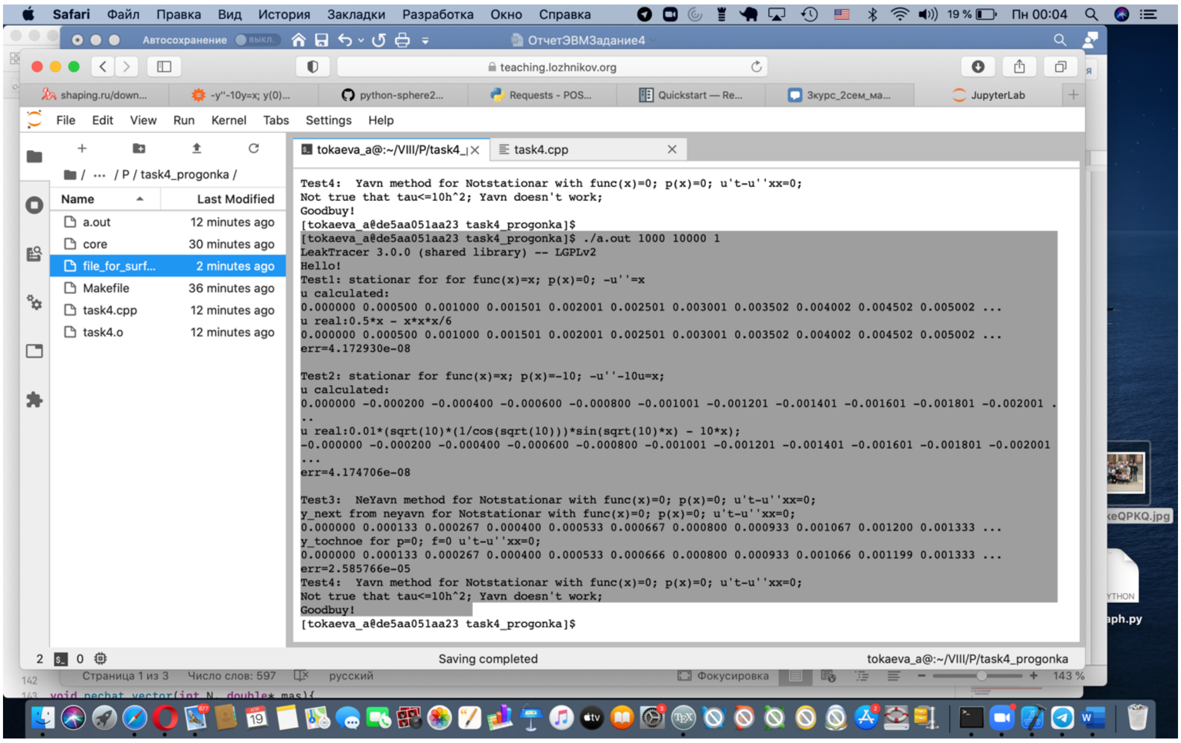
Заработала, но с маленькой точностью. Чтобы точность росла, надо увеличить M.

3) Проверим, что схема порядка O(tau+h^2);

Для этого запустим 100 100 1 (см выше)
Точность у неявного метода err=2.582503e-03



И запустим 1000 10000 1



Увидим, что у него err=2.585766e-05
То есть прям в 100 раз точность увеличилась при уменьшении h в 10 раз, а tau в 100 раз.
Это и доказывает нужное O(tau+h^2);

4) Построим поверхность, как u(x,t) эволюционировало при t от 0 до 1.
Для этого все y_next из неявного метода сложим в файл “file_for_surface.txt”;
Потом пишем в командной строке gnuplot, потом в гнуплоте:

```
gnuplot> set pm3d
gnuplot> splot "file_for_surface.txt" matrix with lines
qt.qpa.fonts: Populating font family aliases took 433 ms. Replace uses
of missing font family "Sans" with one that exists to avoid this cost.
gnuplot>
```

И рисуется поверхность, которую можно поворачивать.