Практикум на ЭВМ Токаева Александра 409
Задание 4: одномерный интеграл

Часть1: сравнение квадратуры Гаусса на 3 узлах и Симпсона
Мы хотим сравнить ошибки, доставляемые при приближении одного и того же интеграла квадратурой Гаусса на 3 узлах и квадратурой Симпсона и убедиться, что у Гаусса ошибка меньше.
Возьмем $[a, b]$ = [0,1], f(x)=$e^x sinx$.
Узлы для Гаусса на 3 узлах ищутся из условия, что это корни многочлена 3 степени со старшим коэффициентом 1, ортогонального относительно веса единица на этом отрезке $[a, b]$.
Для удобства вычисления интегралов, поскольку вес симметричен относительно середины отрезка $[a, b]$, перейдем на отрезок $[-1,1]$.

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, t \in [-1,1]$$

На отрезке $[-1,1]$ вычислим ортогональный многочлен 3 степени.
$e_0 = 1$
$e_1 = t$
$e_2 = t^2 + mt + n$
Из ортогональности:

$$< e_2, e_0 > = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (t^2 + mt + n)dt = \frac{2}{3} + 2n = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$$

$$< e_2, e_1 > = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (t^2 + mt + n)tdt = m\frac{2}{3} = 0 \Rightarrow m = 0$$

Следовательно, $e_2 = t^2 - \frac{1}{3}$
$e_3 = t^3 + kt^2 + dt + c$
Из ортогональности:

$$< e_3, e_0 > = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (t^3 + kt^2 + dt + c)dt = \frac{2}{3}k + 2c = 0 \Rightarrow k = -3c$$

$$< e_3, e_1 > = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (t^3 + kt^2 + dt + c)tdt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}d = 0 \Rightarrow d = -\frac{3}{5}$$

$< e_3, e_2 > = 0$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (t^3 + kt^2 + dt + c)(t^2 - \frac{1}{3})dt = \frac{2}{5}k + \frac{2}{3}c = 0 \Rightarrow k = -\frac{5}{3}c \Rightarrow k = c = 0$$

Следовательно, $e_3 = t^3 - \frac{3}{5}t$
Поэтому $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}};$
Коэффициенты c_1, c_2, c_3 ищем из условия точности квадратуры на мономах степени до $m = n - 1 = 2$ включительно:
$f = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = \int_{-1}^{1} dt = 2$
$f = t \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{5}}c_1 + 0 + \sqrt{\frac{3}{5}}c_3 = \int_{-1}^{1} tdt = 0 \Rightarrow c_1 = c_3$

$f = t^2 \Rightarrow \frac{3}{5}c_1 + 0 + \frac{3}{5}c_3 = \int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3} \Rightarrow 2c_1 = \frac{10}{9} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{9}$

В итоге $S^{[-1,1]}(f) = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

$$S^{[a,b]}(f) = \frac{5}{9}\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$+\frac{5}{9}\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

При этом из-за ортогональности многочлена, задающего корни, квадратура Гаусса оказывается точна для мономов степени $m = 2n - 1 = 5$

Поэтому обещаемая оценка погрешности по формуле

$$\frac{|f^{(m+1)}|}{(m+1)!}2^{1-(m+1)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1}\left(\int_a^b |p(x)|dx + \sum_{i=1}^{n}|c_i|\right) = \frac{|f^{(m+1)}|}{(m+1)!}2^{-2m}(b-a)^{m+2}$$

Получаем $err_g \le \frac{|f^{(6)}|}{1024*6!}(b-a)^7$;

Для нашей функции $f(x) = e^x sinx$, ее 6-я производная равна $-8e^x cosx$;

Поэтому на $[a,b]$ нам обещают оценку

$$err_g \le \frac{|f^{(6)}|}{1024*6!}(b-a)^7 = \frac{8e^b}{737280}(b-a)^7$$

Для квадратуры Симпсона узлы принудительно берутся равноотстоящими, а коэффициенты получаются из условия точности квадратуры на мономах степени до $n - 1 = 2$ включительно:

$f = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = \int_{-1}^{1} dt = 2$

$f = t \Rightarrow -c_1 + 0 + c_3 = \int_{-1}^{1} tdt = 0 \Rightarrow c_1 = c_3$

$f = t^2 \Rightarrow c_1 + 0 + c_3 = \int_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3} \Rightarrow 2c_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$

В итоге $S^{[-1,1]}(f) = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$

$$S^{[a,b]}(f) = \frac{1}{3}\frac{b-a}{2}f(a) + \frac{4}{3}\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}\frac{b-a}{2}f(b)$$

По построению формула Симпсона точна для $m = n - 1 = 2$, но из-за нечетности n и симметрии, она оказывается точна для $m = 3$;

4-я производная нашей функции $f(x) = e^x sinx$ равна $-4e^x sinx$

Поэтому на $[a,b]$ нам обещают оценку

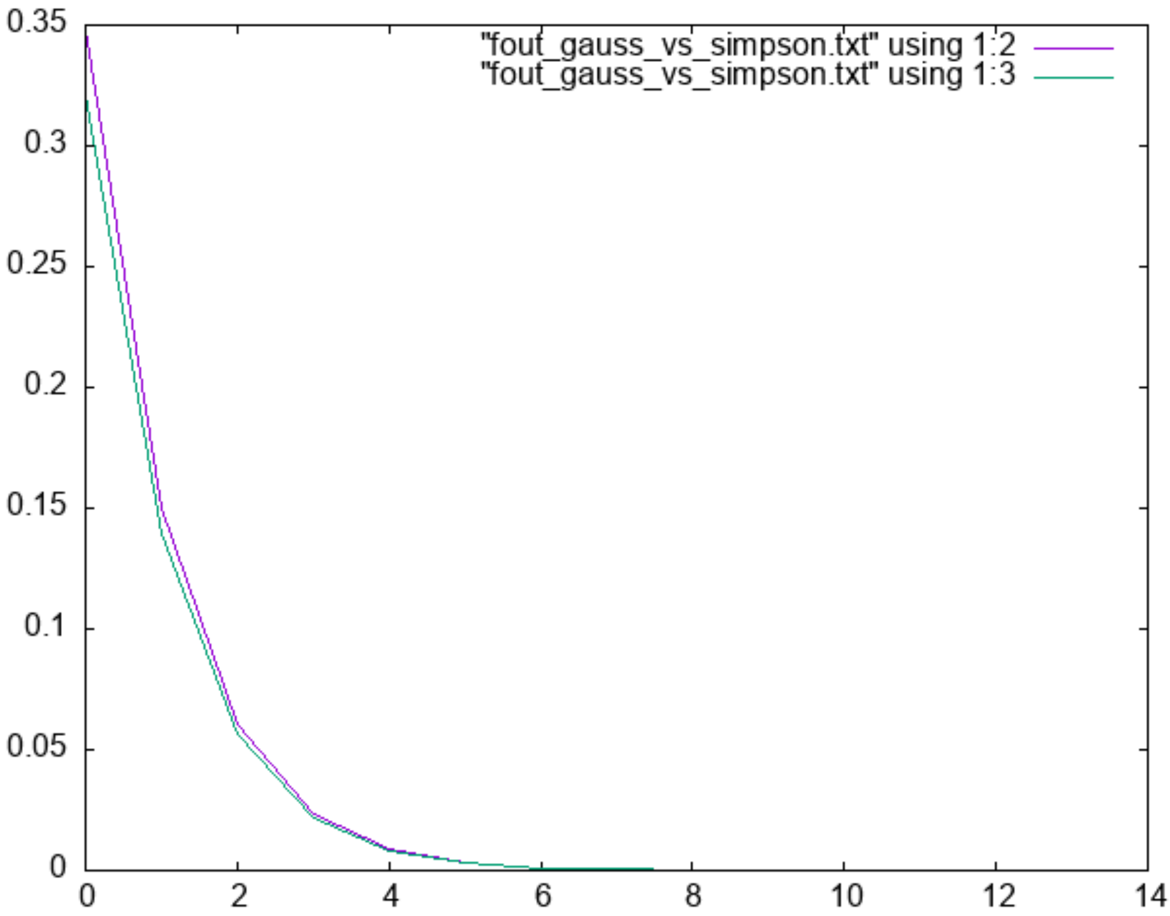
$$err_g \le \frac{|f^{(4)}|}{64*4!}(b-a)^5 = \frac{4e^b}{1536}(b-a)^5$$

Проверим результаты на практике для $[a_i, b_i]$ = $[0, \frac{1}{2^{i-1}}]$, f(x)=$e^{-x}sinx$.

1 столбец — это номер шага, 2 — истинное значение интеграла, 3 — значение квадратуры, 4 — истинная погрешность, 5 — оценка погрешности из теории.

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4_integr1 aleksandra$ ./a.out
Hello!
 gauss: 0 9.093307e-01 9.093364e-01 5.693109e-06 2.949525e-05
simpson: 0 9.093307e-01 9.081853e-01 1.145404e-03 7.078859e-03
gauss: 1 1.717750e-01 1.717751e-01 3.853196e-08 1.397638e-07
simpson: 1 1.717750e-01 1.717609e-01 1.410909e-05 1.341733e-04
gauss: 2 3.678240e-02 3.678240e-02 2.722777e-10 8.503764e-10
simpson: 2 3.678240e-02 3.678220e-02 1.938855e-07 3.265445e-06
gauss: 3 8.483865e-03 8.483865e-03 2.010232e-12 5.862926e-12
simpson: 3 8.483865e-03 8.483862e-03 2.834864e-09 9.005455e-08
gauss: 4 2.035776e-03 2.035776e-03 1.514327e-14 4.302898e-14
simpson: 4 2.035776e-03 2.035776e-03 4.282623e-11 2.643701e-09
gauss: 5 4.985332e-04 4.985332e-04 2.166236e-16 3.258212e-16
simpson: 5 4.985332e-04 4.985332e-04 6.577881e-13 8.007383e-11
gauss: 6 1.233468e-04 1.233468e-04 1.035413e-17 2.506014e-18
simpson: 6 1.233468e-04 1.233468e-04 1.020351e-14 2.463512e-12
gauss: 7 3.067683e-05 3.067683e-05 1.074715e-17 1.942588e-20
simpson: 7 3.067683e-05 3.067683e-05 1.478310e-16 7.638566e-14
gauss: 8 7.649282e-06 7.649282e-06 9.377332e-17 1.511730e-22
simpson: 8 7.649282e-06 7.649282e-06 9.624666e-17 2.377746e-15
gauss: 9 1.909833e-06 1.909833e-06 3.087435e-19 1.178735e-24
simpson: 9 1.909833e-06 1.909833e-06 3.472835e-19 7.415957e-17
gauss: 10 4.771477e-07 4.771477e-07 7.401977e-17 9.199876e-27
simpson: 10 4.771477e-07 4.771477e-07 7.402030e-17 2.315224e-18
gauss: 11 1.192481e-07 1.192481e-07 7.940934e-23 7.183894e-29
simpson: 11 1.192481e-07 1.192481e-07 1.058791e-22 7.231545e-20
gauss: 12 2.980717e-08 2.980717e-08 7.401487e-17 5.611047e-31
simpson: 12 2.980717e-08 2.980717e-08 7.401488e-17 2.259306e-21
gauss: 13 7.451187e-09 7.451187e-09 0.000000e+00 4.383096e-33
simpson: 13 7.451187e-09 7.451187e-09 0.000000e+00 7.059470e-23
gauss: 14 1.862721e-09 1.862721e-09 1.966020e-17 3.424084e-35
simpson: 14 1.862721e-09 1.862721e-09 1.966020e-17 2.205950e-24
```

```
set terminal png size 640,480
set output 'fout_gauss_vs_simpson.png'
plot "fout_gauss_vs_simpson.txt" using 1:2 with lines,
"fout_gauss_vs_simpson.txt" using 1:3 with lines
```



Видим, что во-первых, 4 столбец всегда меньше 5, то есть заявленная оценка погрешности действительно выполняется. А во-вторых, на одинаковом номере шага, погрешность у Гаусса всегда меньше, чем у Симпсона - и так и должно быть, поскольку у Гаусса точность 5, а у Симпсона только 3.

Дальше уже мельчить отрезок бессмысленно, поскольку погрешность уже меньше машинного нуля.

Часть2: нахождение порядка у составной квадратуры Гаусса на 3 узлах

На N-м шаге мы разбиваем отрезок $[a, b]$ = [0,1] на N отрезочков $[a_i, b_i]$ длины $h = \frac{b-a}{N}$, на каждом из отрезочков берем обычную квадратуру Гаусса на 3 узлах, а потом складываем эти квадратуры:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} S^{[a_i,b_i]}(f)$$

В итоге оценка погрешности для всего отрезка:

$$\left|R^{[a,b]}(f)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} R^{[a_i,b_i]}(f)\right| \leq \sum_{i=1}^{N} |R^{[a_i,b_i]}(f)| \leq N \frac{|f^{(6)}|_{[a,b]}}{1024 * 6!}\left(\frac{b-a}{N}\right)^7$$

$$\Rightarrow err = \left|R^{[a,b]}(f)\right| \leq N \frac{|f^{(6)}|_{[a,b]}}{1024 * 6!}\left(\frac{b-a}{N}\right)^7 \leq N \frac{8e^b}{1024 * 6!}\left(\frac{b-a}{N}\right)^7 = \frac{const}{N^6}$$

Значит, $log\left(\frac{1}{err}\right) = 6logN + const$.

То есть, построив график зависимости $log\left(\frac{1}{err}\right)$ от $logN$,

Мы должны увидеть прямую с тангенсом угла наклона=6.

Проверяем:

1 0.000000e+00 -2.427200e+01
2 6.931472e-01 -2.375395e+01
3 1.098612e+00 -2.329437e+01
4 1.386294e+00 -2.216828e+01
5 1.609438e+00 -2.086748e+01
6 1.791759e+00 -1.944029e+01
7 1.945910e+00 -1.770534e+01
8 2.079442e+00 -1.520605e+01
9 2.197225e+00 -1.634276e+01
10 2.302585e+00 -1.621550e+01
11 2.397895e+00 -1.590978e+01
12 2.484907e+00 -1.555344e+01
13 2.564949e+00 -1.518562e+01
14 2.639057e+00 -1.482158e+01
15 2.708050e+00 -1.446776e+01
16 2.772589e+00 -1.412675e+01
17 2.833213e+00 -1.379941e+01
18 2.890372e+00 -1.348571e+01
19 2.944439e+00 -1.318520e+01
20 2.995732e+00 -1.289723e+01
21 3.044522e+00 -1.262109e+01
22 3.091042e+00 -1.235604e+01
23 3.135494e+00 -1.210136e+01
24 3.178054e+00 -1.185639e+01
25 3.218876e+00 -1.162049e+01
26 3.258097e+00 -1.139306e+01
27 3.295837e+00 -1.117358e+01
28 3.332205e+00 -1.096153e+01
29 3.367296e+00 -1.075646e+01
30 3.401197e+00 -1.055795e+01
31 3.433987e+00 -1.036561e+01
32 3.465736e+00 -1.017908e+01
33 3.496508e+00 -9.998038e+00
34 3.526361e+00 -9.822176e+00
35 3.555348e+00 -9.651216e+00
36 3.583519e+00 -9.484898e+00
37 3.610918e+00 -9.322984e+00
38 3.637586e+00 -9.165252e+00
39 3.663562e+00 -9.011495e+00
40 3.688879e+00 -8.861522e+00
41 3.713572e+00 -8.715155e+00
42 3.737670e+00 -8.572226e+00
43 3.761200e+00 -8.432582e+00
44 3.784190e+00 -8.296075e+00
45 3.806662e+00 -8.162571e+00

46 3.828641e+00 -8.031942e+00
47 3.850148e+00 -7.904068e+00
48 3.871201e+00 -7.778837e+00
49 3.891820e+00 -7.656142e+00
50 3.912023e+00 -7.535885e+00
51 3.931826e+00 -7.417970e+00
52 3.951244e+00 -7.302310e+00
53 3.970292e+00 -7.188820e+00
54 3.988984e+00 -7.077422e+00
55 4.007333e+00 -6.968040e+00
56 4.025352e+00 -6.860603e+00
57 4.043051e+00 -6.755044e+00
58 4.060443e+00 -6.651298e+00
59 4.077537e+00 -6.549305e+00
60 4.094345e+00 -6.449007e+00
61 4.110874e+00 -6.350349e+00
62 4.127134e+00 -6.253278e+00
63 4.143135e+00 -6.157745e+00
64 4.158883e+00 -6.063701e+00
65 4.174387e+00 -5.971101e+00
66 4.189655e+00 -5.879903e+00
67 4.204693e+00 -5.790063e+00
68 4.219508e+00 -5.701543e+00
69 4.234107e+00 -5.614304e+00
70 4.248495e+00 -5.528311e+00
71 4.262680e+00 -5.443528e+00
72 4.276666e+00 -5.359921e+00
73 4.290459e+00 -5.277459e+00
74 4.304065e+00 -5.196111e+00
75 4.317488e+00 -5.115848e+00
76 4.330733e+00 -5.036640e+00
77 4.343805e+00 -4.958461e+00
78 4.356709e+00 -4.881283e+00
79 4.369448e+00 -4.805084e+00
80 4.382027e+00 -4.729836e+00
81 4.394449e+00 -4.655518e+00
82 4.406719e+00 -4.582106e+00
83 4.418841e+00 -4.509579e+00
84 4.430817e+00 -4.437916e+00
85 4.442651e+00 -4.367097e+00
86 4.454347e+00 -4.297101e+00
87 4.465908e+00 -4.227911e+00
88 4.477337e+00 -4.159506e+00
89 4.488636e+00 -4.091873e+00
90 4.499810e+00 -4.024991e+00
91 4.510860e+00 -3.958843e+00
92 4.521789e+00 -3.893417e+00
93 4.532599e+00 -3.828693e+00
94 4.543295e+00 -3.764659e+00
95 4.553877e+00 -3.701300e+00
96 4.564348e+00 -3.638601e+00

97 4.574711e+00 -3.576551e+00
98 4.584967e+00 -3.515133e+00
99 4.595120e+00 -3.454336e+00
100 4.605170e+00 -3.394148e+00

Смотрим на точки с номерами 80 и 100:
80 4.382027e+00 -4.729836e+00
100 4.605170e+00 -3.394148e+00

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3.394148-(-4.729836)}{4.605170-4.382027} = \frac{1.335688}{0.223143}$=5.985793863

Действительно, почти 6 и получилось!

<u>Часть3: нахождение порядка у составной квадратуры трапеций для формулы с особенностью</u>

Если мы запустим составную квадратуру Гаусса на функции с особенностью $f(x) = e^x\sqrt{x}$, для $[a,b]$ = [0,1], то теория нам не даст никакую оценку для погрешности, потому что у функции не ограничена производная.
Поэтому объявим множитель $\sqrt{x}$ с особенностью — весом, а остаток e^x — новой функцией, построим для этой функции составную формулу трапеций (с весом $\sqrt{x}$) и найдем ее порядок. Можно было бы и составного Гаусса, но это тяжело, потому что надо искать ортогональный многочлен 3 степени с весом $\sqrt{x}$ на отрезке $[a,b]$. Поэтому строим составную формулу трапеций:

$$\int_a^b \sqrt{x}e^x dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 найдем из условия точности квадратуры на мономах степени до $m = n-1 = 1$. Они получатся такими же, если мы их найдем, исходя из интерполяционной формулы:

$$c_i = \int_a^b p(x)\Phi_i(x), \quad \text{где } \Phi_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

В нашем случае $x_1 = a;\ x_2 = b$

$$\Phi_1(x) = \frac{x-b}{a-b}; \Phi_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$c_1 = \int_a^b p(x)\Phi_1(x) = \int_a^b \sqrt{x}\frac{x-b}{a-b} = \frac{1}{a-b}\frac{2}{15}x^{\frac{3}{2}}(3x-5b) \text{ в подстановке от } a \text{ до } b$$

$$c_2 = \int_a^b p(x)\Phi_2(x) = \int_a^b \sqrt{x}\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{a-b}\frac{2}{15}x^{\frac{3}{2}}(3x-5a) \text{ в подстановке от } a \text{ до } b$$

Формула трапеций точна для $m = 1$.
Новая функция $f(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$;
<u>Внимание!</u> Именно $f(x) = e^x$, а не $f(x) = e^x\sqrt{x}$!
Тогда теория обещает погрешность

$$err = \left|R^{[a,b]}(f)\right| \leq N\frac{|f^{(2)}|_{[a,b]}}{4*2!}\left(\frac{b-a}{N}\right)^3 \leq N\frac{e^b}{8}\left(\frac{b-a}{N}\right)^3 = \frac{const}{N^2}$$

Значит, $log\left(\frac{1}{err}\right) = 2logN + const$.

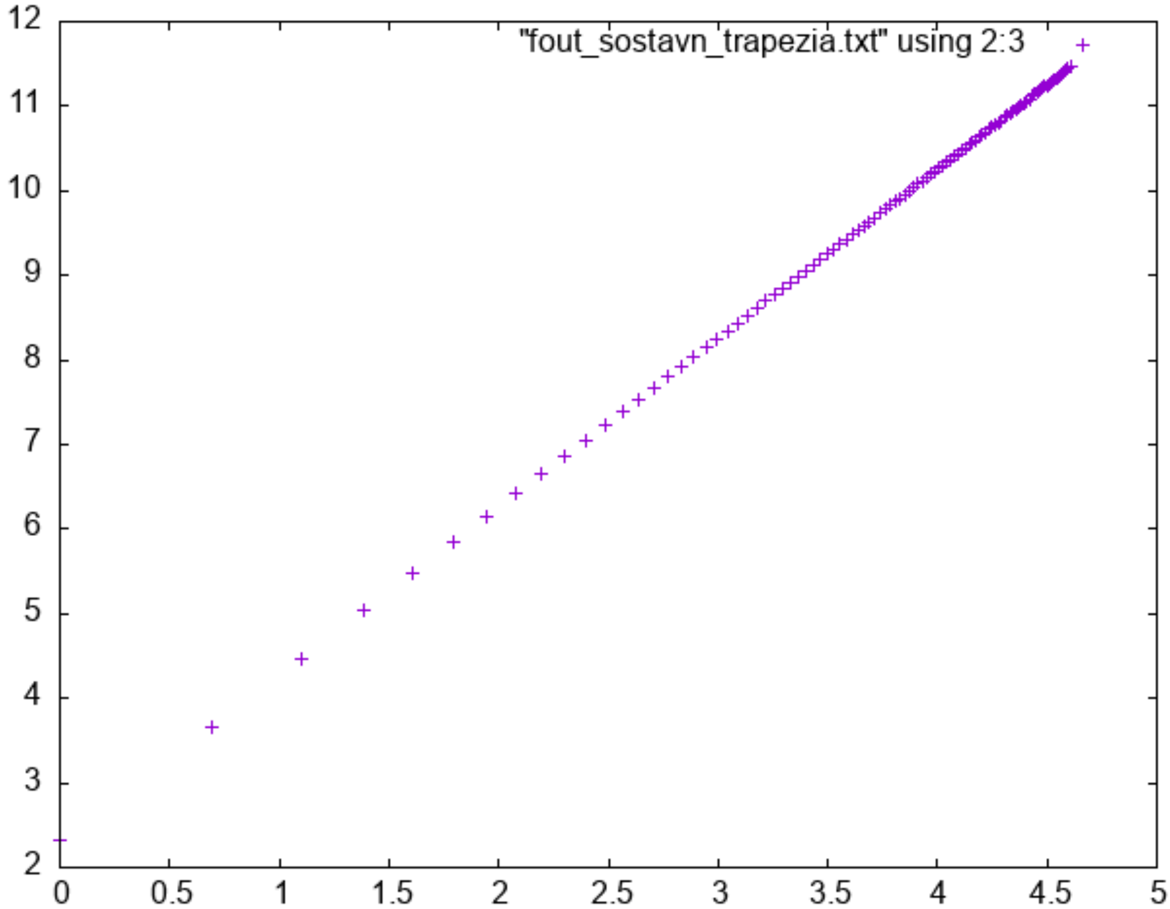
То есть, построив график зависимости $log\left(\frac{1}{err}\right)$ от $logN$,
Мы должны увидеть прямую с тангенсом угла наклона=2.

Проверяем:
```
set terminal png size 640,480
set output 'fout_sostavn_trapezia.png'
plot "fout_sostavn_trapezia.txt" using 2:3
```

1 0.000000e+00 2.319229e+00
2 6.931472e-01 3.657276e+00
3 1.098612e+00 4.459946e+00
4 1.386294e+00 5.032600e+00
5 1.609438e+00 5.477705e+00
6 1.791759e+00 5.841739e+00
7 1.945910e+00 6.149690e+00
8 2.079442e+00 6.416533e+00
9 2.197225e+00 6.651952e+00
10 2.302585e+00 6.862568e+00
11 2.397895e+00 7.053110e+00
12 2.484907e+00 7.227070e+00
13 2.564949e+00 7.387103e+00
14 2.639057e+00 7.535274e+00
15 2.708050e+00 7.673219e+00
16 2.772589e+00 7.802258e+00
17 2.833213e+00 7.923470e+00
18 2.890372e+00 8.037752e+00
19 2.944439e+00 8.145851e+00
20 2.995732e+00 8.248402e+00
21 3.044522e+00 8.345946e+00
22 3.091042e+00 8.438949e+00
23 3.135494e+00 8.527815e+00
24 3.178054e+00 8.612895e+00
25 3.218876e+00 8.694499e+00
26 3.258097e+00 8.772900e+00
27 3.295837e+00 8.848338e+00
28 3.332205e+00 8.921029e+00
29 3.367296e+00 8.991167e+00
30 3.401197e+00 9.058923e+00
31 3.433987e+00 9.124455e+00
32 3.465736e+00 9.187902e+00
33 3.496508e+00 9.249395e+00
34 3.526361e+00 9.309048e+00
35 3.555348e+00 9.366969e+00
36 3.583519e+00 9.423255e+00
37 3.610918e+00 9.477996e+00
38 3.637586e+00 9.531273e+00
39 3.663562e+00 9.583164e+00
40 3.688879e+00 9.633738e+00
41 3.713572e+00 9.683060e+00
42 3.737670e+00 9.731190e+00
43 3.761200e+00 9.778184e+00

44	3.784190e+00	9.824095e+00
45	3.806662e+00	9.868971e+00
46	3.828641e+00	9.912858e+00
47	3.850148e+00	9.955797e+00
48	3.871201e+00	9.997830e+00
49	3.891820e+00	1.003899e+01
50	3.912023e+00	1.007932e+01
51	3.931826e+00	1.011885e+01
52	3.951244e+00	1.015760e+01
53	3.970292e+00	1.019562e+01
54	3.988984e+00	1.023292e+01
55	4.007333e+00	1.026953e+01
56	4.025352e+00	1.030548e+01
57	4.043051e+00	1.034079e+01
58	4.060443e+00	1.037548e+01
59	4.077537e+00	1.040958e+01
60	4.094345e+00	1.044310e+01
61	4.110874e+00	1.047606e+01
62	4.127134e+00	1.050849e+01
63	4.143135e+00	1.054039e+01
64	4.158883e+00	1.057179e+01
65	4.174387e+00	1.060270e+01
66	4.189655e+00	1.063313e+01
67	4.204693e+00	1.066310e+01
68	4.219508e+00	1.069262e+01
69	4.234107e+00	1.072171e+01
70	4.248495e+00	1.075038e+01
71	4.262680e+00	1.077864e+01
72	4.276666e+00	1.080650e+01
73	4.290459e+00	1.083398e+01
74	4.304065e+00	1.086107e+01
75	4.317488e+00	1.088780e+01
76	4.330733e+00	1.091417e+01
77	4.343805e+00	1.094020e+01
78	4.356709e+00	1.096588e+01
79	4.369448e+00	1.099124e+01
80	4.382027e+00	1.101627e+01
81	4.394449e+00	1.104099e+01
82	4.406719e+00	1.106540e+01
83	4.418841e+00	1.108951e+01
84	4.430817e+00	1.111334e+01
85	4.442651e+00	1.113687e+01
86	4.454347e+00	1.116013e+01
87	4.465908e+00	1.118312e+01
88	4.477337e+00	1.120584e+01
89	4.488636e+00	1.122830e+01
90	4.499810e+00	1.125050e+01
91	4.510860e+00	1.127246e+01
92	4.521789e+00	1.129418e+01
93	4.532599e+00	1.131565e+01
94	4.543295e+00	1.133690e+01

95 4.553877e+00 1.135791e+01
96 4.564348e+00 1.137871e+01
97 4.574711e+00 1.139928e+01
98 4.584967e+00 1.141964e+01
99 4.595120e+00 1.143979e+01
100 4.605170e+00 1.145974e+01



Смотрим на точки с номерами 80 и 100:
80 4.382027e+00 1.101627e+01
100 4.605170e+00 1.145974e+01

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11.45974 - 11.01627}{4.605170 - 4.382027} = \frac{0.44347}{0.223143} = 1.98738029$$

Действительно, почти 2 и получилось!