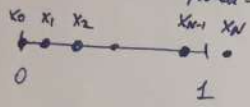
14.02.2021. ЭВМ. Задание 1.

Вариант 0101

сетка смещена только справа
слева - значение
справа - производная



$1+\frac{h}{2} = N\cdot h$

$\Rightarrow 2+h = 2Nh$

$h(2N-1) = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{2N-1} = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

- $y(0)=0 \Rightarrow y_0 = 0$

- $$\begin{cases} y(1+\frac{h}{2}) = y(1) + y'(1)\cdot\frac{h}{2} + \frac{y''(1)}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \underline{O}(h^3) \\ y(1-\frac{h}{2}) = y(1) - y'(1)\cdot\frac{h}{2} + \frac{y''(1)}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \underline{O}(h^3) \end{cases}$$

$\Rightarrow y(1+\frac{h}{2}) - y(1-\frac{h}{2}) = y'(1)\cdot h + \underline{O}(h^3)$

$\Rightarrow \frac{y(1+\frac{h}{2}) - y(1-\frac{h}{2})}{h} = y'(1) + \underline{O}(h^2)$

$\Rightarrow y'(1) = 0 \longleftrightarrow \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = 0$, т.е $y_N = y_{N-1}$

- $y''(x) \approx \dfrac{\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h} = \dfrac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$

$\Rightarrow -y''(x) = \lambda y \longleftrightarrow -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k;\ k = 1 \dots N-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k;\ k=1\dots N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

смотрим на матрицу: $k=1$: $-\frac{y_2 - 2y_1 + \overset{0}{y_0}}{h^2} = \lambda y_1$

$k=2$ $-\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} = \lambda y_2$

$\dots$

$k=N-1$ $-\frac{\overset{=y_{N-1}}{y_N} - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\frac{-y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = \lambda y_{N-1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

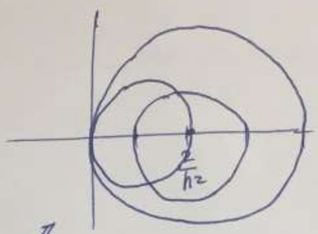
Матрица – симметрична, с диагональным преобладанием

по т. Гершгорина: $a_1 = \frac{2}{h^2}$; $r_1 = \frac{1}{h^2}$

$a_2 = \frac{2}{h^2}$; $r_2 = \frac{2}{h^2}$

$\vdots$

$a_{N-1} = \frac{1}{h^2}$; $r_{N-1} = \frac{1}{h^2}$



$\Rightarrow$ матрица ещё положит. определена (ну $\lambda \neq 0$, т.к $\det \neq 0$)

$\Rightarrow$ все её собств. числа – веществ.

И базис состоит из $N-1$ ф-ции. (ну $n = 1 \dots N-1$) – т.к матрица $(N-1)\times(N-1)$

$\bar{y} = (0, y_1, \dots y_{N-1}, 0)$ $k = 0 \dots N$ – координат

фиктивные коорд.
(ну $y_0 = 0$
$y_N = y_{N-1}$)

Скал. произв. $(u,v)_h = h \cdot \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i v_i$

в таком скал. произв. собств. ф-ции будут ортогональны, т.к матрица симметрична.

теперь решаем:

$$\begin{cases} -\dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = \lambda y_k; \ k = 1 \dots N-1. \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1}. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $y_k = \mu^k$.

$$\Rightarrow -\frac{\mu^2 - 2\mu + 1}{h^2} = \lambda\mu.$$

$$\mu^2 - 2\mu + 1 = -\lambda h^2 \mu$$

$$\mu^2 - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)\mu + 1 = 0.$$

Обозн. $p = 1 - \frac{\lambda h^2}{2}$

$$\Rightarrow \mu^2 - 2p\mu + 1 = 0.$$

$$D = 4p^2 - 4 = 4(p^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{2p \pm 2\sqrt{p^2-1}}{2} = p \pm \sqrt{p^2-1}.$$

Если $p = \pm 1$, то $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow y_k = (C_1 + C_2 k)\mu^k$ но $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \cdot N \cdot \mu^N = C_2 (N-1) \cdot \mu^{N-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{N-1}{N} \text{ – но это не удов. ур. } \mu_1\mu_2 = 1. \\ C_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \end{cases}$

Если $p \neq \pm 1$, то $y_k = C_1 \mu_1^k + C_2 \mu_2^k$

Теперь ищем решение в случае $\mu_1 \neq \mu_2$:

$$y_k = c_1\mu_1^k + c_2\mu_2^k$$

• $y_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow y_k = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k)$

• $y_N = y_{N-1} \Rightarrow c_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = c_1(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})$

$$\Rightarrow \mu_1^{N-1}(\mu_1 - 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 - 1)$$

т.к. $\mu_1\mu_2 = 1$.

$$\mu_1^{2N-2} = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1} = \frac{\mu_2 - \mu_1\mu_2}{\mu_1 - 1} = \frac{\mu_2(1-\mu_1)}{\mu_1 - 1} = -\mu_2 = -\frac{1}{\mu_1}.$$

$$\Rightarrow \mu_1^{2N-1} = -1. = e^{\pi i + 2\pi n i}$$

$$\Rightarrow \mu_1^{(n)} = e^{\frac{\pi i + 2\pi i n}{2N-1}} = e^{\frac{2\pi i(n+\frac{1}{2})}{2N-1}} = e^{\frac{\pi i(n+\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}}};\ n = 0\dots N-1.$$

$$\Rightarrow \mu_1^{(n)} = e^{\frac{\pi i(n-\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}}};\ n = 1\dots N. \Rightarrow \mu_2^{(n)} = \left(\mu_1^{(n)}\right)^{-1} = e^{-\frac{\pi i(n-\frac{1}{2})}{N-\frac{1}{2}}};\ n = 1\dots N$$

номер

$$\Rightarrow y_k^{(n)} = c_1(\mu_1^k - \mu_2^k) = c_1\left(e^{\frac{\pi i(n-\frac{1}{2})k}{N-\frac{1}{2}}} - e^{-\frac{\pi i(n-\frac{1}{2})k}{N-\frac{1}{2}}}\right) = \tilde{c}_1 \sin\frac{\pi(n-\frac{1}{2})k}{N-\frac{1}{2}},\ \begin{cases} n = 1\dots N \\ k = 1\dots N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = y_{N-1} \end{cases}$$

коорд.

$$\frac{h}{2} + 1 = N\cdot h \Rightarrow h(1-2N) = -2$$

$$\Rightarrow h = \frac{2}{2N-1} = \frac{1}{N-\frac{1}{2}}.$$

$$\Rightarrow x_k = k\cdot h = \frac{k}{N-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y_k^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})k}{N-\frac{1}{2}}\right) = \sin\pi(n-\tfrac{1}{2})x_k\ ;\ n = 1\dots N$$ — это N-1 собств. ф-ций

$k = 1\dots N-1.$

Найдём собств. значения:

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\frac{\sin\pi(n-\frac{1}{2})x_{k+1} - 2\sin\pi(n-\frac{1}{2})x_k + \sin\pi(n-\frac{1}{2})x_{k-1}}{h^2} =$$

$$= -\left(\frac{2\sin\pi(n-\frac{1}{2})\overbrace{\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2}}^{=x_k}\cdot\cos\pi(n-\frac{1}{2})h - 2\sin\pi(n-\frac{1}{2})x_k}{h^2}\right) = \frac{2\sin\pi(n-\frac{1}{2})x_k}{h^2}\left(1 - \cos\pi(n-\tfrac{1}{2})h\right) =$$

$$= \frac{2}{h^2}\cdot y_k\cdot 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(n-\tfrac{1}{2})h\right) \overset{?}{=} \lambda\cdot y_k$$

$$\Rightarrow \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(n-\tfrac{1}{2})h\right)\quad n = 1\dots N-1.$$

Ортогональность собств. векторов следует из симметричности матрицы.

Проверим ортонормальность:

Имеем: $(y^{(n)}, y^{(n)})_h = h \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (y_k^{(n)})^2 = h \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2(\pi(n-\frac{1}{2})kh) = h \sum_{k=1}^{N-1} [1 - \cos(2\pi(n-\frac{1}{2})kh)] =$

$= (N-1)\cdot h - h \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \cos(2\pi(n-\frac{1}{2})kh) = (N-1)h - h \cdot Re \sum_{k=1}^{N-1} e^{2\pi i (n-\frac{1}{2}) k \underset{= \frac{k}{N-\frac{1}{2}}}{h}} =$

$= (N-1)h - h \cdot Re \sum_{k=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (2n-1)k}{2N-1}} =$

$= (N-1)h - h \cdot Re \left[\sum_{k=1}^{N-1} \sqrt[2N-1]{\underset{=1}{e^{-2\pi k i}} \cdot \underset{=1}{e^{4\pi n i}}} \right] = (N-1)h - h \cdot (N-1) = 0 ?$

- Ищем самую неортог. пару.

$(y^{(n)}, y^{(m)})_h \overset{?}{=} 0$, при $m \neq n$.

$N=10$ $i_0 = 7; j_0 = 8;$ $\delta_{i_0 j_0} = 1.04 \cdot 10^{-15}$
$N=100$ $i_0 = 98; j_0 = 99;$ $\delta_{i_0 j_0} = 5.08 \cdot 10^{-15}$
$N=1000$ $i_0 = 997; j_0 = 998;$ $\delta_{i_0 j_0} = 4.5 \cdot 10^{-14}$

- Ищем $\max_n \dfrac{\| A y^{(n)} - \lambda_n y^{(n)} \|}{\lambda_n} = \varepsilon(N)$

$N=10$ $n_0 = 8;$ $\varepsilon_{n_0} = 7.7 \cdot 10^{-13}$
$N=100$ $n_0 = 99;$ $\varepsilon_{n_0} = 3.45 \cdot 10^{-9}$
$N=1000$ $n_0 = 979;$ $\varepsilon_{n_0} = 7.78 \cdot 10^{-6}$

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:8sem aleksandra$ ./a.out 0 1 10
Hello!
 a=0.000000 b=1.000000 N=10
Worst ortogonal:1.040104e-15;  i0=7, j0=8
Worst nevyazka:7.707997e-13;  n0=8
Goodbuy!
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:8sem aleksandra$ ./a.out 0 1 100
Hello!
 a=0.000000 b=1.000000 N=100
Worst ortogonal:5.087131e-15;  i0=98, j0=99
Worst nevyazka:3.451488e-09;  n0=99
Goodbuy!
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:8sem aleksandra$ ./a.out 0 1 1000
Hello!
 a=0.000000 b=1.000000 N=1000
Worst ortogonal:4.531235e-14;  i0=997, j0=998
Worst nevyazka:7.782850e-06;  n0=979
Goodbuy!
```