

Отчет по ЭВМ: Задание2

Нужно найти асимптотику по h для 5 схем, по которым предлагается численно решать одномерное дифференциальное уравнение $y'(x) + A(x) = 0$; $y(0) = 1$; $x \in [0,1]$ с известным точным решением $y(x) = e^{-Ax}$;

Мы рассмотрим $A=1,100,1000$;

По h мы предполагаем, что $err = Ch^p \Rightarrow \log\left(\frac{1}{err}\right) = \log\left(\frac{1}{C}\right) + p \cdot \log\left(\frac{1}{h}\right)$, поэтому мы построим график зависимости $\log\left(\frac{1}{err}\right)$ от $\log\left(\frac{1}{h}\right)$, это должна получиться прямая, и возьмем у нее тангенс угла наклона.

Мы рассмотрим $h = 10^{-1} \dots 10^{-7}$

Схема1: $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_k = 0$; $y_0 = 1$

То есть $y_{k+1} = (1 - Ah)y_k$

Запускаем программу:

Hello!

A=1.000000

h=1.000000e-01 err=1.920100e-02

h=1.000000e-02 err=1.847100e-03

h=1.000000e-03 err=1.840164e-04

h=1.000000e-04 err=1.839474e-05

h=1.000000e-05 err=1.839403e-06

h=1.000000e-06 err=1.839504e-07

h=1.000000e-07 err=1.820029e-08

h=1.000000e-08 err=3.687983e-09

p=1.000017

A=100.000000

h=1.000000e-01 err=6.561000e+03

h=1.000000e-02 err=3.678794e-01

h=1.000000e-03 err=1.920100e-02

h=1.000000e-04 err=1.847100e-03

h=1.000000e-05 err=1.840164e-04

h=1.000000e-06 err=1.839474e-05

h=1.000000e-07 err=1.839403e-06

h=1.000000e-08 err=1.839504e-07

p=1.001634

A=1000.000000

h=1.000000e-01 err=9.900000e+01

h=1.000000e-02 err=6.561000e+03

h=1.000000e-03 err=3.678794e-01

h=1.000000e-04 err=1.920100e-02

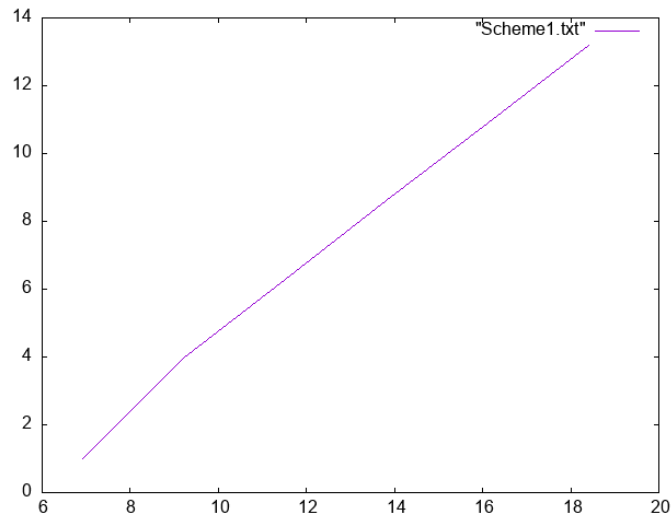
h=1.000000e-05 err=1.847100e-03

h=1.000000e-06 err=1.840164e-04

h=1.000000e-07 err=1.839474e-05

h=1.000000e-08 err=1.839403e-06

p=1.016833



Goodbuy!

Смотрим на график: это прямая, с углом наклона 1

То есть $p=1$, но при больших A схема непригодна.

Схема2: $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + Ay_{k+1} = 0; y_0 = 1$

То есть $y_{k+1} = y_k \frac{1}{1+Ah}$

Запускаем программу:

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task2_schems aleksandra$ ./a.out Scheme2
Hello!
```

```
A=1.000000
h=1.000000e-01 err=1.766385e-02
h=1.000000e-02 err=1.831771e-03
h=1.000000e-03 err=1.838631e-04
h=1.000000e-04 err=1.839321e-05
h=1.000000e-05 err=1.839387e-06
h=1.000000e-06 err=1.839699e-07
h=1.000000e-07 err=1.817911e-08
h=1.000000e-08 err=4.075154e-09
p=0.999984
A=100.000000
h=1.000000e-01 err=9.086369e-02
h=1.000000e-02 err=1.321206e-01
h=1.000000e-03 err=1.766385e-02
h=1.000000e-04 err=1.831771e-03
h=1.000000e-05 err=1.838631e-04
h=1.000000e-06 err=1.839321e-05
h=1.000000e-07 err=1.839387e-06
h=1.000000e-08 err=1.839699e-07
p=0.998377
A=1000.000000
h=1.000000e-01 err=9.900990e-03
h=1.000000e-02 err=9.086369e-02
h=1.000000e-03 err=1.321206e-01
h=1.000000e-04 err=1.766385e-02
h=1.000000e-05 err=1.831771e-03
h=1.000000e-06 err=1.838631e-04
h=1.000000e-07 err=1.839321e-05
h=1.000000e-08 err=1.839387e-06
```

p=0.984214
Goodbuy!

Опять видим, что p=1

Схема3: $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + A \frac{y_{k+1}+y_k}{2} = 0; y_0 = 1$

То есть $y_{k+1} = y_k \frac{2-Ah}{2+Ah}$

Запускаем программу:

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task2_schems aleksandra$ ./a.out Scheme3  
Hello!
```

```
A=1.000000  
h=1.000000e-01 err=3.068988e-04  
h=1.000000e-02 err=3.065695e-06  
h=1.000000e-03 err=3.065658e-08  
h=1.000000e-04 err=3.069315e-10  
h=1.000000e-05 err=5.473233e-12  
h=1.000000e-06 err=1.059614e-11  
h=1.000000e-07 err=1.937646e-10  
h=1.000000e-08 err=2.235344e-09  
p=1.748797  
A=100.000000  
h=1.000000e-01 err=6.667121e-01  
h=1.000000e-02 err=3.454611e-02  
h=1.000000e-03 err=3.068988e-04  
h=1.000000e-04 err=3.065695e-06  
h=1.000000e-05 err=3.065658e-08  
h=1.000000e-06 err=3.069314e-10  
h=1.000000e-07 err=5.473177e-12  
h=1.000000e-08 err=1.059614e-11  
p=2.000005  
A=1000.000000  
h=1.000000e-01 err=9.607843e-01  
h=1.000000e-02 err=6.667121e-01  
h=1.000000e-03 err=3.454611e-02  
h=1.000000e-04 err=3.068988e-04  
h=1.000000e-05 err=3.065695e-06  
h=1.000000e-06 err=3.065658e-08  
h=1.000000e-07 err=3.069314e-10  
h=1.000000e-08 err=5.473233e-12  
p=2.000466  
Goodbuy!  
Тут p=2
```

Схема4: $\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + Ay_k = 0; y_0 = 1; y_1 = 1 - Ah$

То есть $y_{k+1} = y_k(1 - 2Ah) + y_{k-1}$

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task2_schems aleksandra$ ./a.out Scheme4  
Hello!  
A=1.000000
```

```

h=1.000000e-01 err=6.496956e-03
h=1.000000e-02 err=7.043279e-05
h=1.000000e-03 err=7.096392e-07
h=1.000000e-04 err=7.101684e-09
h=1.000000e-05 err=7.101603e-11
h=1.000000e-06 err=6.866729e-13
h=1.000000e-07 err=7.699397e-14
h=1.000000e-08 err=2.639000e-13
p=2.000005
A=100.000000
h=1.000000e-01 err=7.276100e+04
h=1.000000e-02 err=5.934182e+16
h=1.000000e-03 err=2.183217e+17
h=1.000000e-04 err=2.493647e+15
h=1.000000e-05 err=2.498225e+13
h=1.000000e-06 err=2.499995e+11
h=1.000000e-07 err=2.499793e+09
h=1.000000e-08 err=2.402054e+07
p=1.999203
A=1000.000000
h=1.000000e-01 err=9.900000e+01
h=1.000000e-02 err=7.276100e+04
h=1.000000e-03 err=5.934182e+16
h=1.000000e-04 err=2.183217e+17
h=1.000000e-05 err=2.493647e+15
h=1.000000e-06 err=2.498225e+13
h=1.000000e-07 err=2.499995e+11
h=1.000000e-08 err=2.499793e+09
p=1.942262
Goodbuy!

```

Тут $p=2$, но при больших A схема категорически непригодна.

Схема5: $\frac{1.5y_{k+1}-2y_k+0.5y_{k-1}}{h} + Ay_{k-1} = 0; y_0 = 1; y_1 = 1 - Ah$

То есть $y_{k+1} = \frac{2y_k - (0.5 + Ah)y_{k-1}}{1.5}$

```

(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task2_schems aleksandra$ ./a.out Scheme5
Hello!
A=1.000000
h=1.000000e-01 err=8.280446e-02
h=1.000000e-02 err=7.435698e-03
h=1.000000e-03 err=7.365267e-04
h=1.000000e-04 err=7.358355e-05
h=1.000000e-05 err=7.357664e-06
h=1.000000e-06 err=7.357712e-07
h=1.000000e-07 err=7.338167e-08
h=1.000000e-08 err=9.125933e-09
p=1.000041
A=100.000000

```

```
h=1.000000e-01 err=1.832222e+02
h=1.000000e-02 err=1.383120e+00
h=1.000000e-03 err=8.280446e-02
h=1.000000e-04 err=7.435698e-03
h=1.000000e-05 err=7.365267e-04
h=1.000000e-06 err=7.358355e-05
h=1.000000e-07 err=7.357664e-06
h=1.000000e-08 err=7.357712e-07
p=1.004133
A=1000.000000
h=1.000000e-01 err=9.900000e+01
h=1.000000e-02 err=1.832222e+02
h=1.000000e-03 err=1.383120e+00
h=1.000000e-04 err=8.280446e-02
h=1.000000e-05 err=7.435698e-03
h=1.000000e-06 err=7.365267e-04
h=1.000000e-07 err=7.358355e-05
h=1.000000e-08 err=7.357664e-06
p=1.046732
Goodbuy!
```

Тут опять $p=1$, и опять при больших A схема разбалтывается.

Вывод: хорошая схема 2 порядка точности—это схема3.
Хорошая схема 1 порядка точности — это схема2.