06.03.21. ЭВМ. Задание 3

(9) Метод Адамса-Башфорта 4 порядка:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55f(x_k; y_k) - 59f(x_{k-1}; y_{k-1}) + 37f(x_{k-2}; y_{k-2}) - 9\cdot f(x_{k-3}; y_{k-3})\right)$$

Возьмём в качестве системы $\underline{Y}'(\vec{x}) = \vec{F}(x; Y(x))$; $Y(0) = Y^0$

такую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases} \Rightarrow z = -2x - \dot{y} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \cancel{2x} + y - \cancel{2x} - \dot{y} = y - \dot{y} \\ \underset{-2\dot{x} - \ddot{y}}{\dot{z}} = 2x + y - 4x - 2\dot{y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y - \dot{y} \\ 2x - 2\dot{x} = \ddot{y} - 2\dot{y} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y - \dot{y} \\ 2x - 2y + 2\dot{y} = \ddot{y} - 2\dot{y} + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y - \dot{y} \\ 2x = \ddot{y} - 4\dot{y} + 3y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{2y - 2\dot{y}}{2\dot{x}} = \dddot{y} - 4\ddot{y} + 3\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = 0.$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

- $\lambda = 1$ - корень.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 & \lambda - 1 \\ \underline{-\ \lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ \quad -3\lambda^2 + 5\lambda - 2 & \\ \quad \underline{-\ -3\lambda^2 + 3\lambda} & \\ \qquad 2\lambda - 2 & \\ \qquad \underline{-\ 2\lambda - 2} & \\ \qquad\quad 0. & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

$$D = 9 - 8 = 1.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

- $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$.

$$\Rightarrow y(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 \cdot e^{2t} \Rightarrow \dot{y} = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}$$

$$\ddot{y} = (C_1 + 2C_2 + C_2 t)e^t + 4C_3 e^{2t}$$

$$\Rightarrow 2x = \ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = (\cancel{C_1} + 2C_2 + C_2 t)e^t + 4C_3 e^{2t} - 4(C_1 + C_2 + C_2 t)e^t - 8C_3 e^{2t} +$$

$$+ 3(\cancel{C_1} + C_2 t)e^t + 3C_3 e^{2t} =$$

$$= e^t(-2C_2) - C_3 e^{2t}$$

$$\Rightarrow x(t) = -C_2 e^t - \frac{C_3}{2} e^{2t}$$

$$z = -2x - \dot{y} = 2C_2 e^t + C_3 e^{2t} - (C_1 + C_2 + C_2 t)e^t - 2C_3 e^{2t} = (-C_1 + C_2 - C_2 t)e^t - C_3 e^{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} -C_2 e^t - \frac{C_3}{2} e^{2t} \\ (C_1 + C_2 t) e^t + C_3 e^{2t} \\ (-C_1 + C_2 - C_2 t) e^t - C_3 e^{2t} \end{cases} ; \; C_1 C_2 C_3 \text{ — любые}$$

Выберем $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ — нам так захотелось.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \text{ — решение система } \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases} \text{ с нач. усл. } \begin{pmatrix} e^{2a} \\ 2e^a - 2e^{2a} \\ -2e^a + 2e^{2a} \end{pmatrix}$$

В обозначениях $\vec{Y}'(x) = \vec{F}(x, \vec{Y}(x))$:

$$\begin{pmatrix} (y_1)'(x) \\ (y_2)'(x) \\ (y_3)'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 + y_3 \\ -2y_1 - y_3 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}}_{= \vec{F}(x; \vec{Y}(x)), \text{ где } \vec{F} \text{ — не зав. от } x.} ; \; x \in [a, b].$$

Теперь проверим аналитически, что схема — 4 порядка точности.

Дано: $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{24}\Big(55\underbrace{y'(x_k)}_{= f(x_k; y_k)} - 59\underbrace{y'(x_k - h)}_{= f(x_k - h; y_{k-1})} + 37\underbrace{y'(x_k - 2h)}_{= f(x_k - 2h; y_{k-2})} - 9\underbrace{y'(x_k - 3h)}_{= f(x_k - 3h; y_{k-3})}\Big)$ ← т.к. $y' = f(x)$

Левая часть: $y_{k+1} = y_k + h \cdot y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_k) + \frac{h^5}{24 \cdot 5} y^{(5)}(x_k) + \ldots$

$$\Rightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y'(x_k) + \frac{h}{2} y''(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + \frac{h^3}{24} y^{(4)}(x_k) + \frac{h^4}{120} y^{(5)}(x_k) + \ldots \quad (*)$$

Правая часть:

$$\frac{1}{24}\left(55y'(x_k) - 59y'(x_k - h) + 37y'(x_k - 2h) - 9y'(x_k - 3h)\right) =$$

$$= \frac{55 y'(x_k)}{24}$$
$$- \frac{59}{24}\left(y'(x_k) - h \cdot y''(x_k) + \frac{h^2}{2} y'''(x_k) - \frac{h^3}{6} y^{(4)}(x_k) + \frac{h^4}{24} y^{(5)}(x_k) - \frac{h^5}{120} y^{(6)}(x_k) + \ldots\right.$$
$$+ \frac{37}{24}\left(y'(x_k) - 2h \cdot y''(x_k) + 4 \cdot \frac{h^2}{2} y'''(x_k) - \frac{8h^3}{6} y^{(4)}(x_k) + 16 \cdot \frac{h^4}{24} y^{(5)}(x_k) - 32 \cdot \frac{h^5}{120} y^{(6)}(x_k) + \ldots\right.$$
$$- \frac{9}{24}\left(y'(x_k) - 3h \cdot y''(x_k) + 9 \cdot \frac{h^2}{2} y'''(x_k) - 27 \cdot \frac{h^3}{6} y^{(4)}(x_k) + 81 \cdot \frac{h^4}{24} y^{(5)}(x_k) - \frac{243 \cdot h^5}{120} y^{(6)}(x_k) + \ldots\right. =$$

$$= \frac{1}{24}\Big(24y'(x_k) + h \cdot y''(x_k) \cdot \underbrace{(59 - 37 \cdot 2 + 27)}_{= 12} + \frac{h^2}{2} \cdot y'''(x_k) \underbrace{(-59 + 4 \cdot 37 - 81)}_{= 8} +$$
$$+ \frac{h^3}{6} y^{(4)}(x_k) \underbrace{(59 - \underbrace{8 \cdot 37}_{= 296} + \underbrace{9 \cdot 27}_{= 243})}_{= 6} + \frac{h^4}{24} \underbrace{(-59 + \underbrace{16 \cdot 37}_{= 592} - \underbrace{81 \cdot 9}_{= 729})}_{= -196} + \ldots\Big) =$$

$$= y'(x_k) + \frac{h}{2} \cdot y''(x_k) + \frac{h^2}{6} y'''(x_k) + \frac{h^3}{24} \cdot y^{(4)}(x_k) - \frac{196 h^4}{24 \cdot 24} y^{(5)}(x_k) + \ldots$$

Что отличается от (*) на $\underline{O}(h^4)$. Ура!

~~Проверяем на практике~~

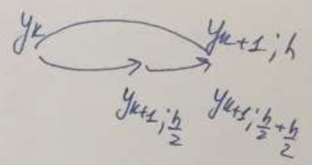
теперь автоматический выбор шага:

$p = 4$ — проверили

$$\begin{cases} y(x+h) - y_{k+1;h} = M \cdot h^p + \cancel{\tilde{M} h^{p+1} + \dots} \\ y(x+h) - y_{k+1;\frac{h}{2}+\frac{h}{2}} = M\left(\frac{h}{2}\right)^p + \cancel{\tilde{M}\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \dots} \end{cases}$$

где $y_{k+1;h}$ — шагнули с шагом h

$y_{k+1;\frac{h}{2}+\frac{h}{2}}$ — шагнули с шагом $\frac{h}{2}$ и ещё раз с $\frac{h}{2}$



$$\Rightarrow M(h^p) - M\left(\frac{h}{2}\right)^p = -y_{k+1;h} + y_{k+1;\frac{h}{2}+\frac{h}{2}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{y_{k+1;\frac{h}{2}+\frac{h}{2}} - y_{k+1;h}}{h^p - \left(\frac{h}{2}\right)^p}$$

пока $M \cdot h^p$ не станет $< eps$ — уменьшаем шаг

пока $M \cdot h^p$ не станет $> \frac{eps}{2}$ — увеличиваем шаг.

Задание3 ЭВМ: Метод Адамса-Башфорта 4 порядка

Проверим на практике, что метод действительно 4 порядка.
Для этого для количеств точек 100, 200, 400, 800, 1600, 3200 выведем максимальную ошибку на отрезке и степень, в которую она уменьшилась по сравнению с предыдущим шагом.

```
(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task3_Adams aleksandra$ ./a.out 0 1 0.01
Hello!
a=0.000000 b=1.000000
n_steps=100 max_err=1.532134e-06
n_steps=200 max_err=9.876892e-08 p=3.955341
n_steps=400 max_err=6.268827e-09 p=3.977790
n_steps=800 max_err=3.948326e-10 p=3.988883
n_steps=1600 max_err=2.475531e-11 p=3.995431
n_steps=3200 max_err=1.568523e-12 p=3.980259
n_steps=6400 max_err=3.375078e-14 p=5.538342
Now avtom step, wanted eps=1.000000e-02.
max_err=8.333915e-03
Goodbuy!
```

Видим, что почти в 4 раза. А в конце уже плохо из-за слишком маленьких степеней.
И видим, что автоматический выбор шага тоже работает: попросили точность 0.01, он выдал 8.333915e-03 <0.01.