**Практикум на ЭВМ Токаева Александра 409**

**Задание 4: одномерный интеграл**

Часть1: сравнение квадратуры Гаусса на 3 узлах и Симпсона

Мы хотим сравнить ошибки, доставляемые при приближении одного и того же интеграла квадратурой Гаусса на 3 узлах и квадратурой Симпсона и убедиться, что у Гаусса ошибка меньше.

Возьмем = [0,1], f(x)=.

Узлы для Гаусса на 3 узлах ищутся из условия, что это корни многочлена 3 степени со старшим коэффициентом 1, ортогонального относительно веса единица на этом отрезке .

Для удобства вычисления интегралов, поскольку вес симметричен относительно середины отрезка , перейдем на отрезок .

На отрезке вычислим ортогональный многочлен 3 степени.

Из ортогональности:

Следовательно,

Из ортогональности:

Следовательно,

Поэтому

Коэффициенты ищем из условия точности квадратуры на мономах степени до включительно:

В итоге

При этом из-за ортогональности многочлена, задающего корни, квадратура Гаусса оказывается точна для мономов степени

Поэтому обещаемая оценка погрешности по формуле

Получаем ;

Для нашей функции , ее 6-я производная равна ;

Поэтому на нам обещают оценку

Для квадратуры Симпсона узлы принудительно берутся равноотстоящими, а коэффициенты получаются из условия точности квадратуры на мономах степени до включительно:

В итоге

По построению формула Симпсона точна для , но из-за нечетности и симметрии, она оказывается точна для ;

4-я производная нашей функции равна

Поэтому на нам обещают оценку

Проверим результаты на практике для = [0,], f(x)=.

1 столбец — это номер шага, 2 — истинное значение интеграла, 3 — значение квадратуры, 4 — истинная погрешность, 5 — оценка погрешности из теории.

(base) MacBook-Pro-Aleksandra:task4\_integr1 aleksandra$ ./a.out

Hello!

gauss: 0 9.093307e-01 9.093364e-01 5.693109e-06 2.949525e-05

simpson: 0 9.093307e-01 9.081853e-01 1.145404e-03 7.078859e-03

gauss: 1 1.717750e-01 1.717751e-01 3.853196e-08 1.397638e-07

simpson: 1 1.717750e-01 1.717609e-01 1.410909e-05 1.341733e-04

gauss: 2 3.678240e-02 3.678240e-02 2.722777e-10 8.503764e-10

simpson: 2 3.678240e-02 3.678220e-02 1.938855e-07 3.265445e-06

gauss: 3 8.483865e-03 8.483865e-03 2.010232e-12 5.862926e-12

simpson: 3 8.483865e-03 8.483862e-03 2.834864e-09 9.005455e-08

gauss: 4 2.035776e-03 2.035776e-03 1.514327e-14 4.302898e-14

simpson: 4 2.035776e-03 2.035776e-03 4.282623e-11 2.643701e-09

gauss: 5 4.985332e-04 4.985332e-04 2.166236e-16 3.258212e-16

simpson: 5 4.985332e-04 4.985332e-04 6.577881e-13 8.007383e-11

gauss: 6 1.233468e-04 1.233468e-04 1.035413e-17 2.506014e-18

simpson: 6 1.233468e-04 1.233468e-04 1.020351e-14 2.463512e-12

gauss: 7 3.067683e-05 3.067683e-05 1.074715e-17 1.942588e-20

simpson: 7 3.067683e-05 3.067683e-05 1.478310e-16 7.638566e-14

gauss: 8 7.649282e-06 7.649282e-06 9.377332e-17 1.511730e-22

simpson: 8 7.649282e-06 7.649282e-06 9.624666e-17 2.377746e-15

gauss: 9 1.909833e-06 1.909833e-06 3.087435e-19 1.178735e-24

simpson: 9 1.909833e-06 1.909833e-06 3.472835e-19 7.415957e-17

gauss: 10 4.771477e-07 4.771477e-07 7.401977e-17 9.199876e-27

simpson: 10 4.771477e-07 4.771477e-07 7.402030e-17 2.315224e-18

gauss: 11 1.192481e-07 1.192481e-07 7.940934e-23 7.183894e-29

simpson: 11 1.192481e-07 1.192481e-07 1.058791e-22 7.231545e-20

gauss: 12 2.980717e-08 2.980717e-08 7.401487e-17 5.611047e-31

simpson: 12 2.980717e-08 2.980717e-08 7.401488e-17 2.259306e-21

gauss: 13 7.451187e-09 7.451187e-09 0.000000e+00 4.383096e-33

simpson: 13 7.451187e-09 7.451187e-09 0.000000e+00 7.059470e-23

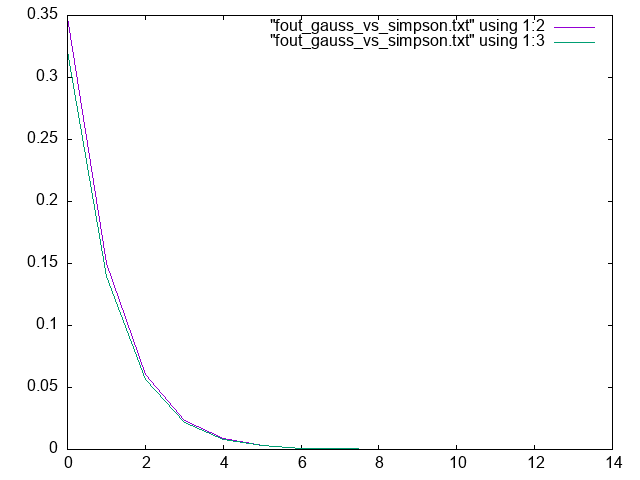
gauss: 14 1.862721e-09 1.862721e-09 1.966020e-17 3.424084e-35

simpson: 14 1.862721e-09 1.862721e-09 1.966020e-17 2.205950e-24

set terminal png size 640,480

set output 'fout\_gauss\_vs\_simpson.png'

plot "fout\_gauss\_vs\_simpson.txt" using 1:2 with lines, "fout\_gauss\_vs\_simpson.txt" using 1:3 with lines



Видим, что во-первых, 4 столбец всегда меньше 5, то есть заявленная оценка погрешности действительно выполняется. А во-вторых, на одинаковом номере шага, погрешность у Гаусса всегда меньше, чем у Симпсона - и так и должно быть, поскольку у Гаусса точность 5, а у Симпсона только 3.

Дальше уже мельчить отрезок бессмысленно, поскольку погрешность уже меньше машинного нуля.

Часть2: нахождение порядка у составной квадратуры Гаусса на 3 узлах

На N-м шаге мы разбиваем отрезок = [0,1] на N отрезочков длины , на каждом из отрезочков берем обычную квадратуру Гаусса на 3 узлах, а потом складываем эти квадратуры:

В итоге оценка погрешности для всего отрезка:

Значит, .

То есть, построив график зависимости от,

Мы должны увидеть прямую с тангенсом угла наклона=6.

Проверяем:

1 0.000000e+00 -2.427200e+01

2 6.931472e-01 -2.375395e+01

3 1.098612e+00 -2.329437e+01

4 1.386294e+00 -2.216828e+01

5 1.609438e+00 -2.086748e+01

6 1.791759e+00 -1.944029e+01

7 1.945910e+00 -1.770534e+01

8 2.079442e+00 -1.520605e+01

9 2.197225e+00 -1.634276e+01

10 2.302585e+00 -1.621550e+01

11 2.397895e+00 -1.590978e+01

12 2.484907e+00 -1.555344e+01

13 2.564949e+00 -1.518562e+01

14 2.639057e+00 -1.482158e+01

15 2.708050e+00 -1.446776e+01

16 2.772589e+00 -1.412675e+01

17 2.833213e+00 -1.379941e+01

18 2.890372e+00 -1.348571e+01

19 2.944439e+00 -1.318520e+01

20 2.995732e+00 -1.289723e+01

21 3.044522e+00 -1.262109e+01

22 3.091042e+00 -1.235604e+01

23 3.135494e+00 -1.210136e+01

24 3.178054e+00 -1.185639e+01

25 3.218876e+00 -1.162049e+01

26 3.258097e+00 -1.139306e+01

27 3.295837e+00 -1.117358e+01

28 3.332205e+00 -1.096153e+01

29 3.367296e+00 -1.075646e+01

30 3.401197e+00 -1.055795e+01

31 3.433987e+00 -1.036561e+01

32 3.465736e+00 -1.017908e+01

33 3.496508e+00 -9.998038e+00

34 3.526361e+00 -9.822176e+00

35 3.555348e+00 -9.651216e+00

36 3.583519e+00 -9.484898e+00

37 3.610918e+00 -9.322984e+00

38 3.637586e+00 -9.165252e+00

39 3.663562e+00 -9.011495e+00

40 3.688879e+00 -8.861522e+00

41 3.713572e+00 -8.715155e+00

42 3.737670e+00 -8.572226e+00

43 3.761200e+00 -8.432582e+00

44 3.784190e+00 -8.296075e+00

45 3.806662e+00 -8.162571e+00

46 3.828641e+00 -8.031942e+00

47 3.850148e+00 -7.904068e+00

48 3.871201e+00 -7.778837e+00

49 3.891820e+00 -7.656142e+00

50 3.912023e+00 -7.535885e+00

51 3.931826e+00 -7.417970e+00

52 3.951244e+00 -7.302310e+00

53 3.970292e+00 -7.188820e+00

54 3.988984e+00 -7.077422e+00

55 4.007333e+00 -6.968040e+00

56 4.025352e+00 -6.860603e+00

57 4.043051e+00 -6.755044e+00

58 4.060443e+00 -6.651298e+00

59 4.077537e+00 -6.549305e+00

60 4.094345e+00 -6.449007e+00

61 4.110874e+00 -6.350349e+00

62 4.127134e+00 -6.253278e+00

63 4.143135e+00 -6.157745e+00

64 4.158883e+00 -6.063701e+00

65 4.174387e+00 -5.971101e+00

66 4.189655e+00 -5.879903e+00

67 4.204693e+00 -5.790063e+00

68 4.219508e+00 -5.701543e+00

69 4.234107e+00 -5.614304e+00

70 4.248495e+00 -5.528311e+00

71 4.262680e+00 -5.443528e+00

72 4.276666e+00 -5.359921e+00

73 4.290459e+00 -5.277459e+00

74 4.304065e+00 -5.196111e+00

75 4.317488e+00 -5.115848e+00

76 4.330733e+00 -5.036640e+00

77 4.343805e+00 -4.958461e+00

78 4.356709e+00 -4.881283e+00

79 4.369448e+00 -4.805084e+00

80 4.382027e+00 -4.729836e+00

81 4.394449e+00 -4.655518e+00

82 4.406719e+00 -4.582106e+00

83 4.418841e+00 -4.509579e+00

84 4.430817e+00 -4.437916e+00

85 4.442651e+00 -4.367097e+00

86 4.454347e+00 -4.297101e+00

87 4.465908e+00 -4.227911e+00

88 4.477337e+00 -4.159506e+00

89 4.488636e+00 -4.091873e+00

90 4.499810e+00 -4.024991e+00

91 4.510860e+00 -3.958843e+00

92 4.521789e+00 -3.893417e+00

93 4.532599e+00 -3.828693e+00

94 4.543295e+00 -3.764659e+00

95 4.553877e+00 -3.701300e+00

96 4.564348e+00 -3.638601e+00

97 4.574711e+00 -3.576551e+00

98 4.584967e+00 -3.515133e+00

99 4.595120e+00 -3.454336e+00

100 4.605170e+00 -3.394148e+00

Смотрим на точки с номерами 80 и 100:

80 4.382027e+00 -4.729836e+00

100 4.605170e+00 -3.394148e+00

=5.985793863

Действительно, почти 6 и получилось!

Часть3: нахождение порядка у составной квадратуры трапеций для формулы с особенностью

Если мы запустим составную квадратуру Гаусса на функции с особенностью

, для = [0,1], то теория нам не даст никакую оценку для погрешности, потому что у функции не ограничена производная.

Поэтому объявим множитель с особенностью — весом, а остаток

— новой функцией, построим для этой функции составную формулу трапеций (с весом ) и найдем ее порядок. Можно было бы и составного Гаусса, но это тяжело, потому что надо искать ортогональный многочлен 3 степени с весом на отрезке . Поэтому строим составную формулу трапеций:

Коеффициенты и найдем из условия точности квадратуры на мономах степени до . Они получатся такими же, если мы их найдем, исходя из интерполяционной формулы:

В нашем случае

Формула трапеций точна для .

Новая функция ; ;

Внимание! Именно , а не !

Тогда теория обещает погрешность

Значит, .

То есть, построив график зависимости от,

Мы должны увидеть прямую с тангенсом угла наклона=2.

Проверяем:

set terminal png size 640,480

set output 'fout\_sostavn\_trapezia.png'

plot "fout\_sostavn\_trapezia.txt" using 2:3

1 0.000000e+00 2.319229e+00

2 6.931472e-01 3.657276e+00

3 1.098612e+00 4.459946e+00

4 1.386294e+00 5.032600e+00

5 1.609438e+00 5.477705e+00

6 1.791759e+00 5.841739e+00

7 1.945910e+00 6.149690e+00

8 2.079442e+00 6.416533e+00

9 2.197225e+00 6.651952e+00

10 2.302585e+00 6.862568e+00

11 2.397895e+00 7.053110e+00

12 2.484907e+00 7.227070e+00

13 2.564949e+00 7.387103e+00

14 2.639057e+00 7.535274e+00

15 2.708050e+00 7.673219e+00

16 2.772589e+00 7.802258e+00

17 2.833213e+00 7.923470e+00

18 2.890372e+00 8.037752e+00

19 2.944439e+00 8.145851e+00

20 2.995732e+00 8.248402e+00

21 3.044522e+00 8.345946e+00

22 3.091042e+00 8.438949e+00

23 3.135494e+00 8.527815e+00

24 3.178054e+00 8.612895e+00

25 3.218876e+00 8.694499e+00

26 3.258097e+00 8.772900e+00

27 3.295837e+00 8.848338e+00

28 3.332205e+00 8.921029e+00

29 3.367296e+00 8.991167e+00

30 3.401197e+00 9.058923e+00

31 3.433987e+00 9.124455e+00

32 3.465736e+00 9.187902e+00

33 3.496508e+00 9.249395e+00

34 3.526361e+00 9.309048e+00

35 3.555348e+00 9.366969e+00

36 3.583519e+00 9.423255e+00

37 3.610918e+00 9.477996e+00

38 3.637586e+00 9.531273e+00

39 3.663562e+00 9.583164e+00

40 3.688879e+00 9.633738e+00

41 3.713572e+00 9.683060e+00

42 3.737670e+00 9.731190e+00

43 3.761200e+00 9.778184e+00

44 3.784190e+00 9.824095e+00

45 3.806662e+00 9.868971e+00

46 3.828641e+00 9.912858e+00

47 3.850148e+00 9.955797e+00

48 3.871201e+00 9.997830e+00

49 3.891820e+00 1.003899e+01

50 3.912023e+00 1.007932e+01

51 3.931826e+00 1.011885e+01

52 3.951244e+00 1.015760e+01

53 3.970292e+00 1.019562e+01

54 3.988984e+00 1.023292e+01

55 4.007333e+00 1.026953e+01

56 4.025352e+00 1.030548e+01

57 4.043051e+00 1.034079e+01

58 4.060443e+00 1.037548e+01

59 4.077537e+00 1.040958e+01

60 4.094345e+00 1.044310e+01

61 4.110874e+00 1.047606e+01

62 4.127134e+00 1.050849e+01

63 4.143135e+00 1.054039e+01

64 4.158883e+00 1.057179e+01

65 4.174387e+00 1.060270e+01

66 4.189655e+00 1.063313e+01

67 4.204693e+00 1.066310e+01

68 4.219508e+00 1.069262e+01

69 4.234107e+00 1.072171e+01

70 4.248495e+00 1.075038e+01

71 4.262680e+00 1.077864e+01

72 4.276666e+00 1.080650e+01

73 4.290459e+00 1.083398e+01

74 4.304065e+00 1.086107e+01

75 4.317488e+00 1.088780e+01

76 4.330733e+00 1.091417e+01

77 4.343805e+00 1.094020e+01

78 4.356709e+00 1.096588e+01

79 4.369448e+00 1.099124e+01

80 4.382027e+00 1.101627e+01

81 4.394449e+00 1.104099e+01

82 4.406719e+00 1.106540e+01

83 4.418841e+00 1.108951e+01

84 4.430817e+00 1.111334e+01

85 4.442651e+00 1.113687e+01

86 4.454347e+00 1.116013e+01

87 4.465908e+00 1.118312e+01

88 4.477337e+00 1.120584e+01

89 4.488636e+00 1.122830e+01

90 4.499810e+00 1.125050e+01

91 4.510860e+00 1.127246e+01

92 4.521789e+00 1.129418e+01

93 4.532599e+00 1.131565e+01

94 4.543295e+00 1.133690e+01

95 4.553877e+00 1.135791e+01

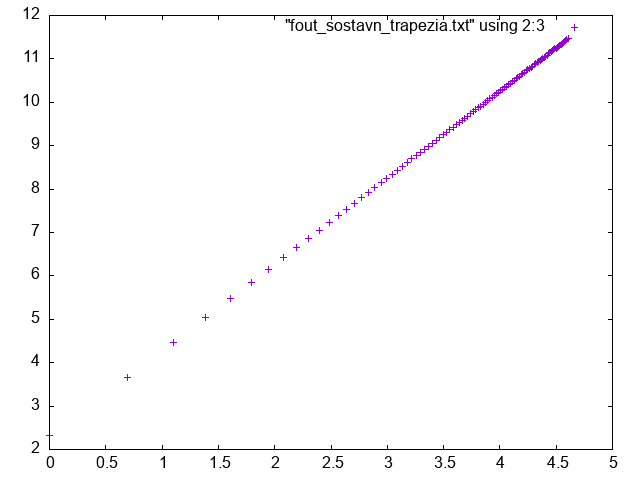
96 4.564348e+00 1.137871e+01

97 4.574711e+00 1.139928e+01

98 4.584967e+00 1.141964e+01

99 4.595120e+00 1.143979e+01

100 4.605170e+00 1.145974e+01



Смотрим на точки с номерами 80 и 100:

80 4.382027e+00 1.101627e+01

100 4.605170e+00 1.145974e+01

Действительно, почти 2 и получилось!