ТЕХНОСФЕРА

Лекция 1
Основы нейронных сетей

Байгушев Данила

12 февраля 2021 г.

Организационные вопросы

Структура курса

- Часть 1: Общая теория
  - 7 лекций (1.5 часа)
  - 7 семинаров (1.5 часа) [21 балл]
  - Коллоквиум [15 баллов]
- Часть 2: Применение
  - 7 лекций (1.5 часа)
  - 7 семинаров (1.5 часа) [21 балл]
  - Коллоквиум [15 баллов]
- Исследовательский проект [30 баллов]

Структура курса

- Часть 1: Общая теория
  - 7 лекций (1.5 часа)
  - 7 семинаров (1.5 часа) [21 балл]
  - Коллоквиум [15 баллов]
- Часть 2: Применение
  - 7 лекций (1.5 часа)
  - 7 семинаров (1.5 часа) [21 балл]
  - Коллоквиум [15 баллов]
- Исследовательский проект [30 баллов]

Разбалловка:

- $[0, 50)$ — «неудовлетворительно»
- $[50, 70)$ — «удовлетворительно»
- $[70, 80)$ — «хорошо»
- $80+$ — «отлично»

Структура курса

- Общение: Slack, #_dm2_neural_networks
- Лекторы:
  - Данила Байгушев (@danila_baigushev, DanilaBay24@gmail.com)
  - Кузьма Храбров (@kuzma, k.khrabrov@corp.mail.ru)
- Задание сдаются через портал

Первая лекция

Биологический нейрон

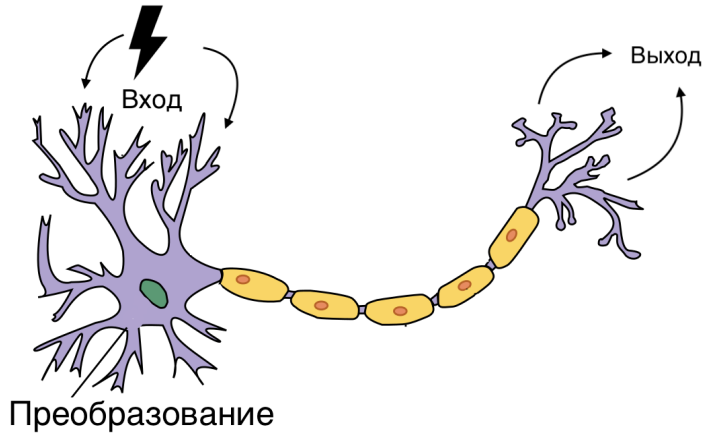


Figure: Структура нейрона

Выходной сигнал посылается при достижении определенного уровня входного сигнала.

Биологический нейрон

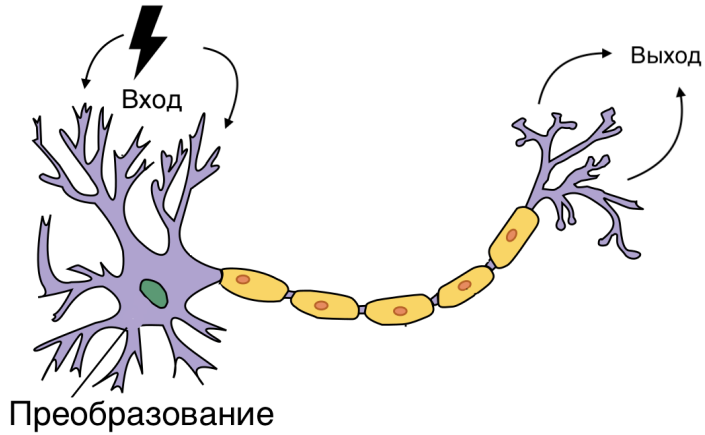
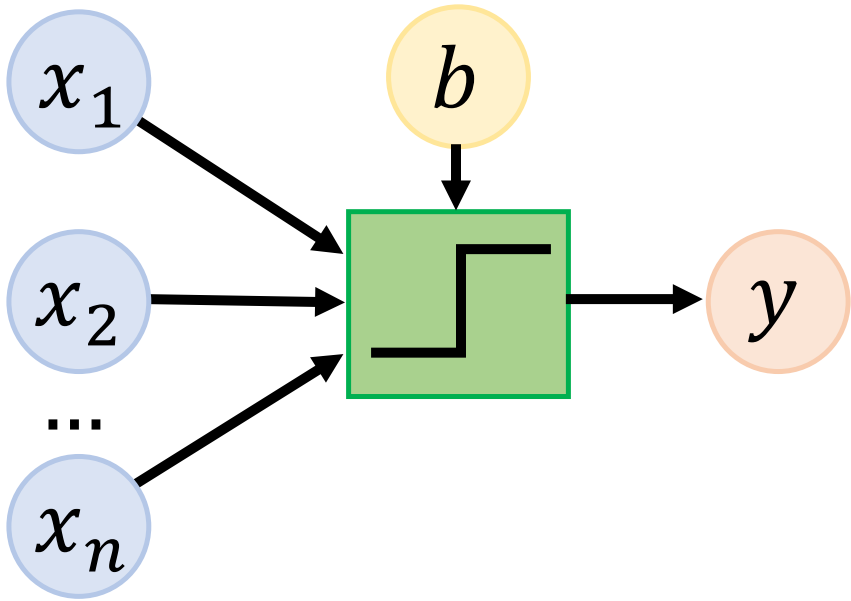


Figure: Структура нейрона

Выходной сигнал посылается при достижении определенного уровня входного сигнала.
Модель:

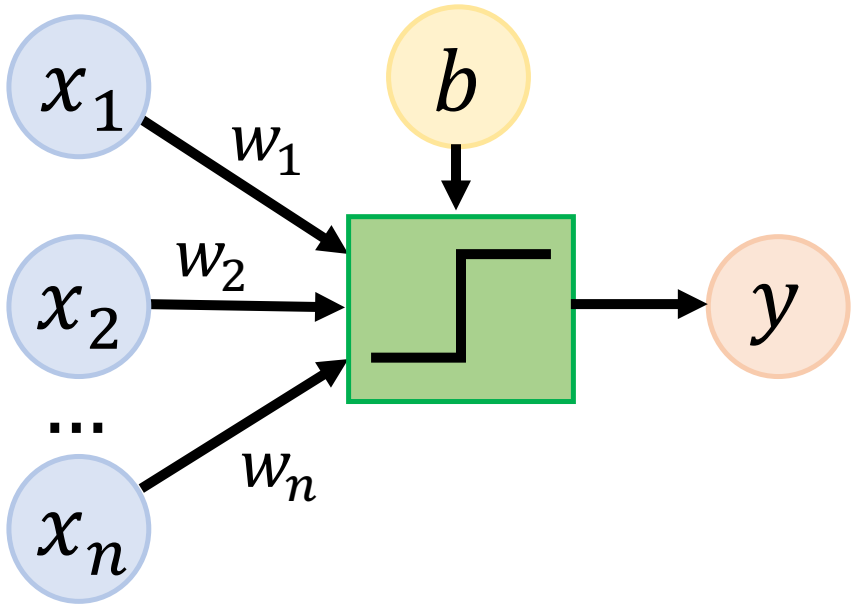
$$y = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{N} x_i > b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = I[\sum_{i=1}^{N} x_i > b]$$

Модель 1: Схема



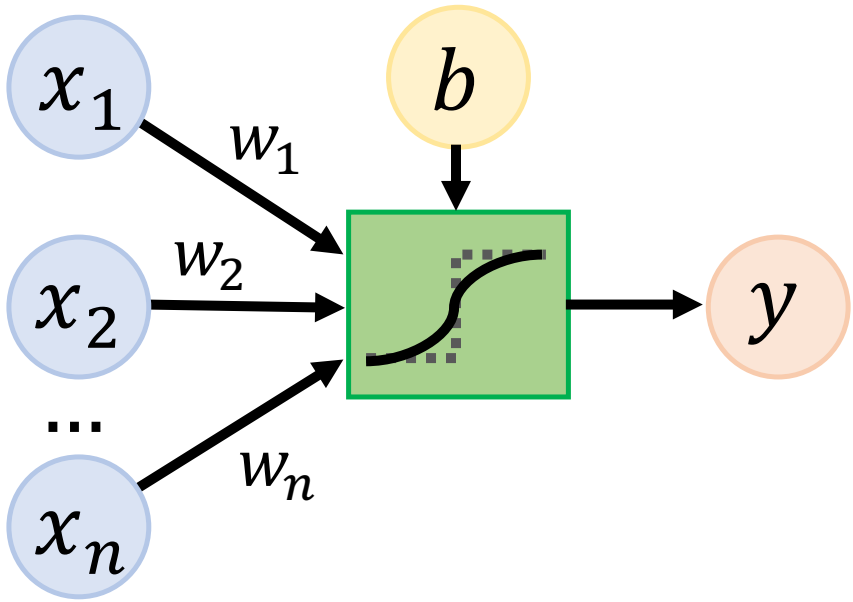
$$y = I[\sum_{i=1}^{N} x_i > b]$$

Модель 2: Чувствительность нейронов



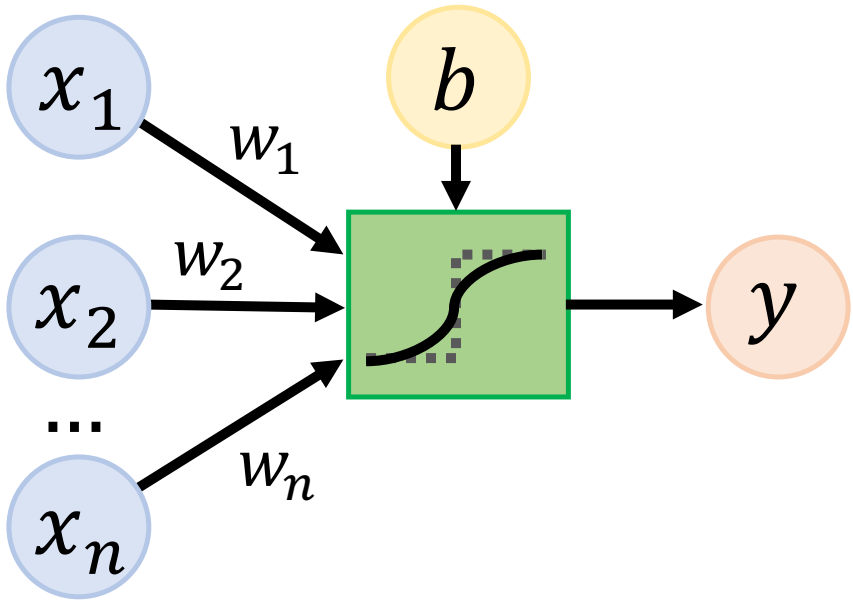
$$y = I[\sum_{i=1}^{N} w_i x_i > b] = I[w^T x > b]$$

Модель 3: Непрерывная активация



$$y = \sigma[\sum_{i=1}^{N} w_i x_i - b] = \sigma[w^T x - b]$$

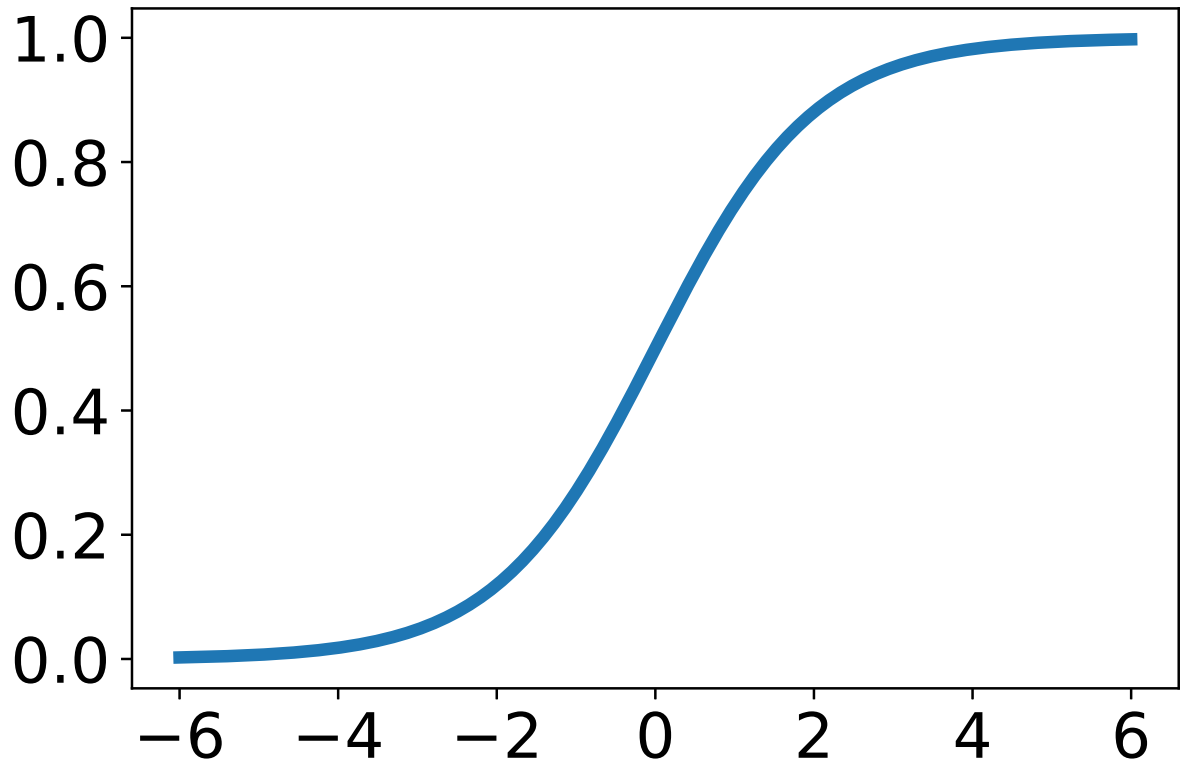
Модель 3: Непрерывная активация



$$y = \sigma[\sum_{i=1}^{N} w_i x_i - b] = \sigma[w^T x - b]$$

Параметры нейрона: w — веса, b — смещение.

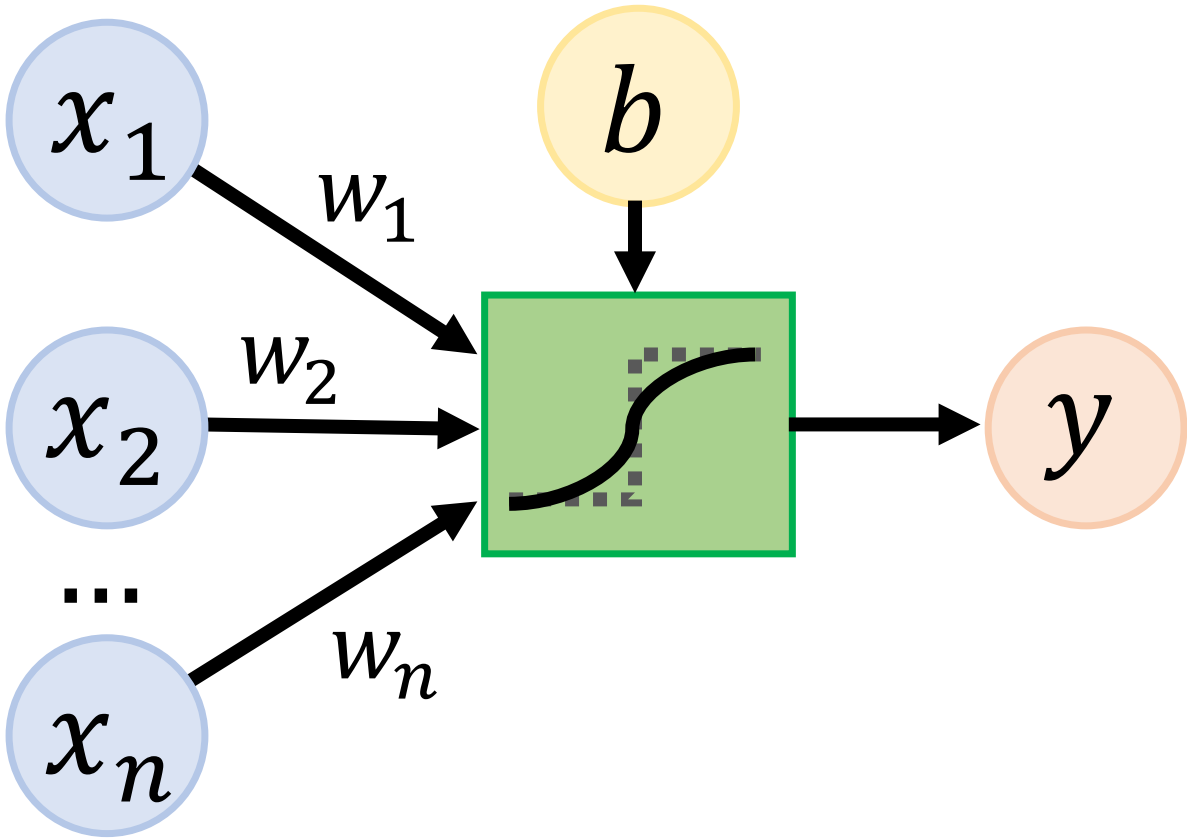
Функция активации



$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

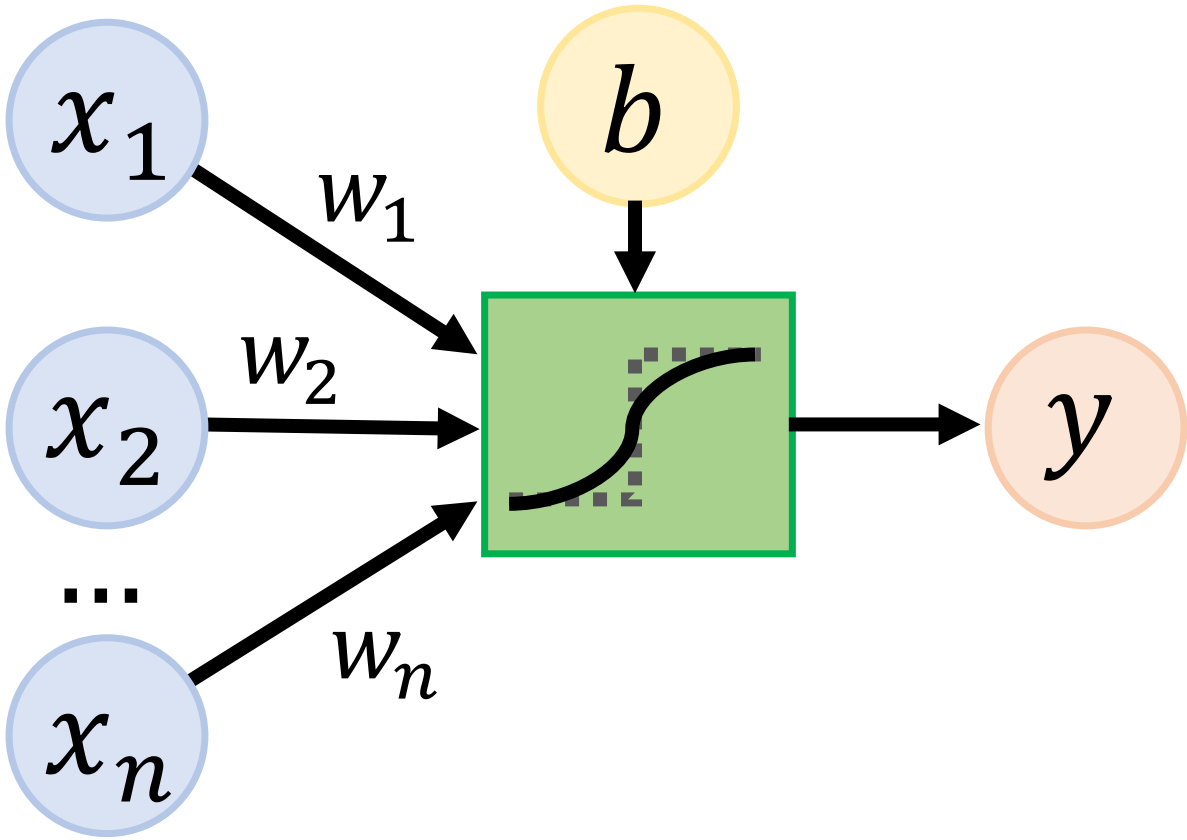
Полносвязные сети

Перцептрон



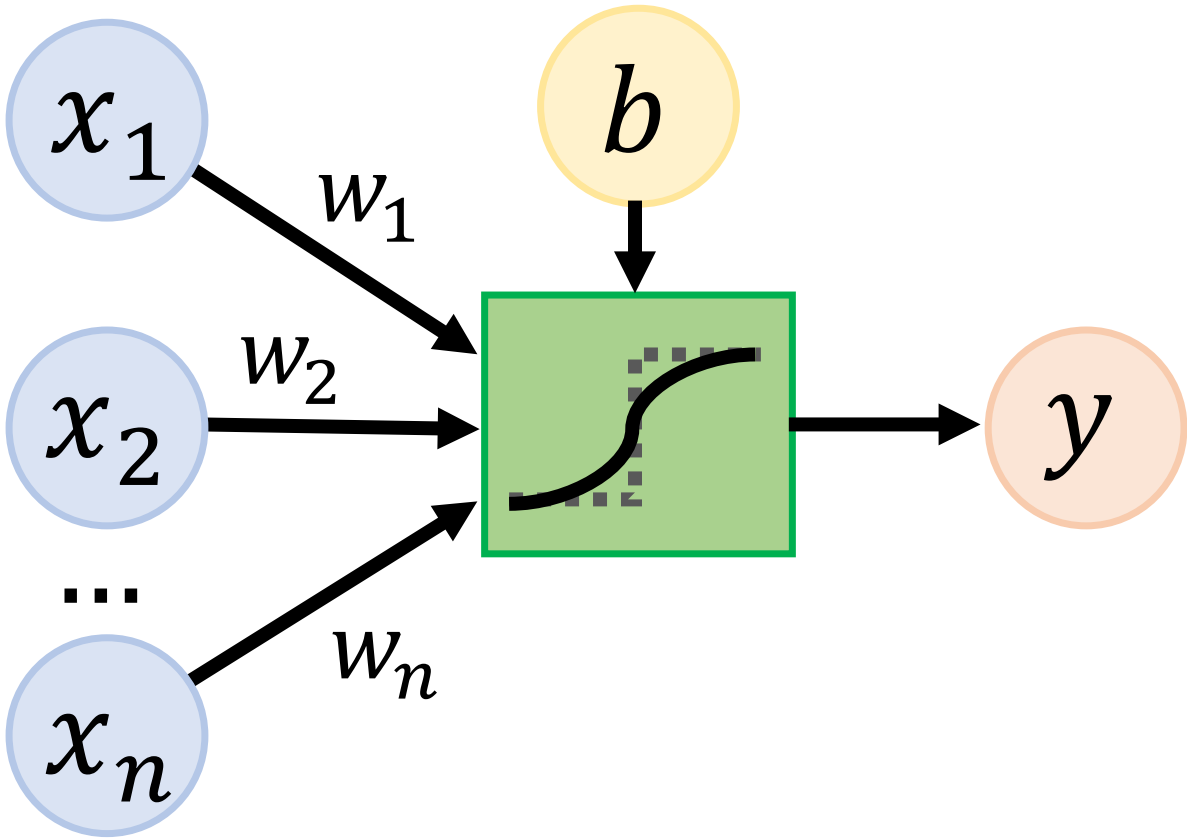
- Можем моделировать:

Перцептрон



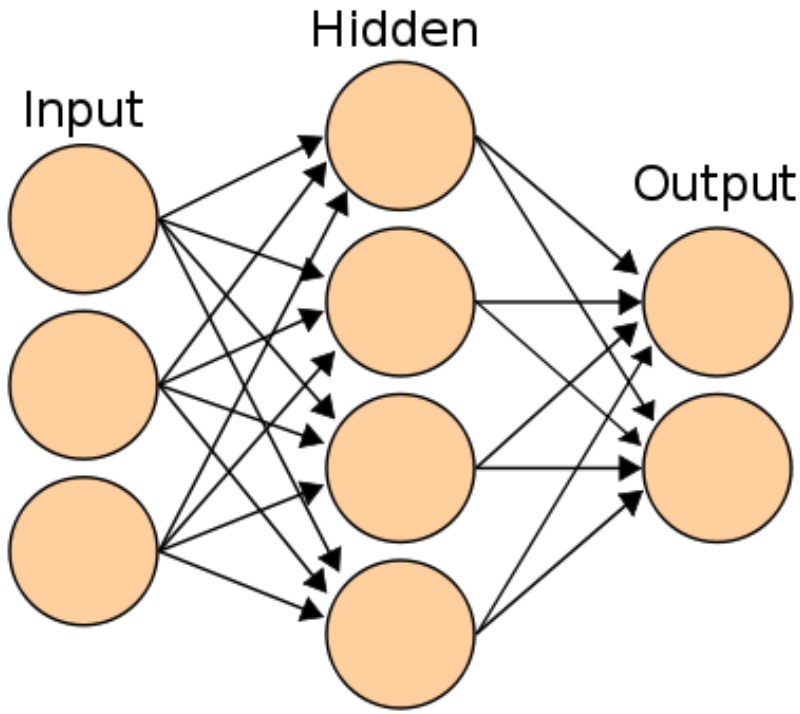
- Можем моделировать: NOT, AND, OR
- Не можем моделировать:

Перцептрон



- Можем моделировать: NOT, AND, OR
- Не можем моделировать: XOR

Сети с одним скрытым слоем



Теорема (универсальный аппроксиматор)[1]

Любую непрерывную на компакте функцию можно равномерно приблизить нейронной сетью с одним скрытым слоем.

---

[1] Отличная визуализация:
`http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap4.html`

Идея доказательства

Рассмотрим случай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Достаточно рассматривать $m = 1$

Идея доказательства

Рассмотрим случай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Достаточно рассматривать $m = 1$
2. Заменяем функцию на кусочно-постоянную

Идея доказательства

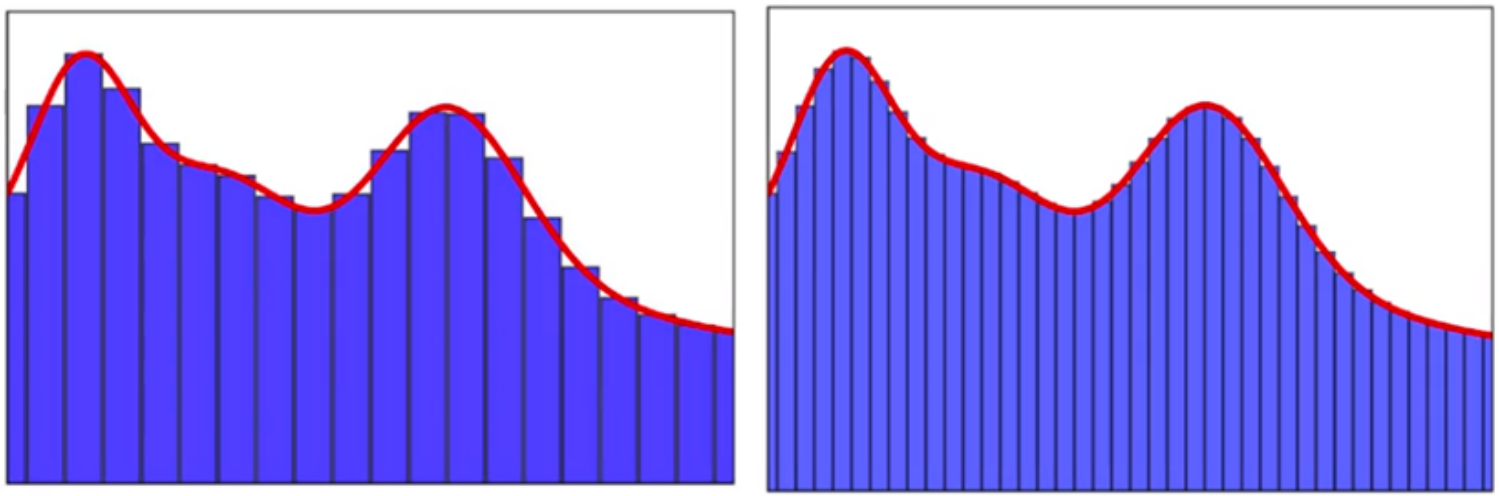
Рассмотрим случай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Достаточно рассматривать $m = 1$
2. Заменяем функцию на кусочно-постоянную
3. Учимся приближать $f(x) = I[a \leq x \leq b]$ с помощью первого слоя

Идея доказательства

Рассмотрим случай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Достаточно рассматривать $m = 1$
2. Заменяем функцию на кусочно-постоянную
3. Учимся приближать $f(x) = I[a \leq x \leq b]$ с помощью первого слоя
4. Учимся приближать $f(x) = \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) I[a_i \leq x \leq b_i]$ с помощью второго слоя



Как обучить нейронную сеть?

Обучить нейронную сеть — подобрать значения всех настраиваемых параметров (веса и смещения).
Два этапа:

1. Задать функцию потерь $\mathcal{L}$
2. Подобрать веса, минимизирующие $\mathcal{L}$

Регрессия

Хотим предсказать непрерывную величину y для объекта X (задача регрессии).
Имеется выборка $(X_1, t_1), \ldots, (X_n, t_n)$. Пусть сеть предсказала y на объекте с правильной меткой t. Функция потерь: $\delta = t - y$

- Mean Squared Error (MSE): δ^2
- Mean Absolute Error (MAE): $|\delta|$
- Разная стоимость пере- и недопрогноза:
  $\delta^2(a \cdot \mathcal{I}[\delta < 0] + b \cdot \mathcal{I}[\delta \geq 0])$

Классификация: Negative log-likelihood

Хотим предсказать класс объекта. Функция потерь:
$-\sum_{c=1}^{C} I[t = c] \log p_c$

$p_1, \ldots, p_C$ — предсказания вероятностей от нейросети: $\sum_{c=1}^{C} p_c = 1$

- Как обеспечить условие $\sum_{c=1}^{C} p_c = 1$?

Классификация: Negative log-likelihood

Хотим предсказать класс объекта. Функция потерь:
$-\sum_{c=1}^{C} I[t = c] \log p_c$

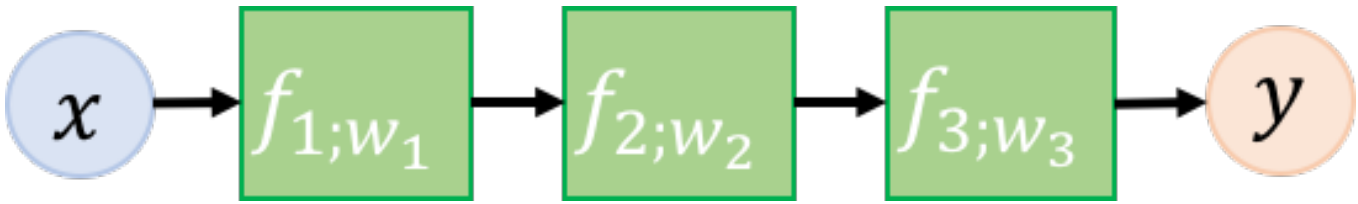
$p_1, \ldots, p_C$ — предсказания вероятностей от нейросети: $\sum_{c=1}^{C} p_c = 1$

- Как обеспечить условие $\sum_{c=1}^{C} p_c = 1$?
- $p_i = \frac{e^{y_i}}{\sum_{k=1}^{C} e^{y_k}}$ ← Softmax («мягкий» максимум)

Отдельный случай: бинарная классификация.

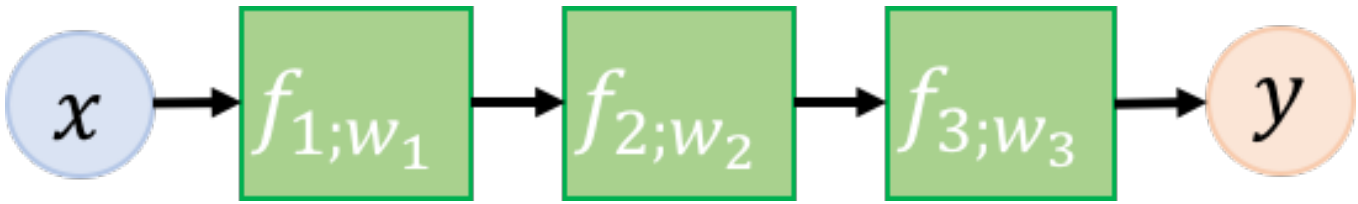
- $\mathcal{L} = -t \log(p) - (1 - t) \log(1 - p)$
- Достаточно одного выхода нейросети, пропущенного через σ

Обучение



$$y = f_3(f_2(f_1(x; w_1); w_2); w_3)$$

Обучение

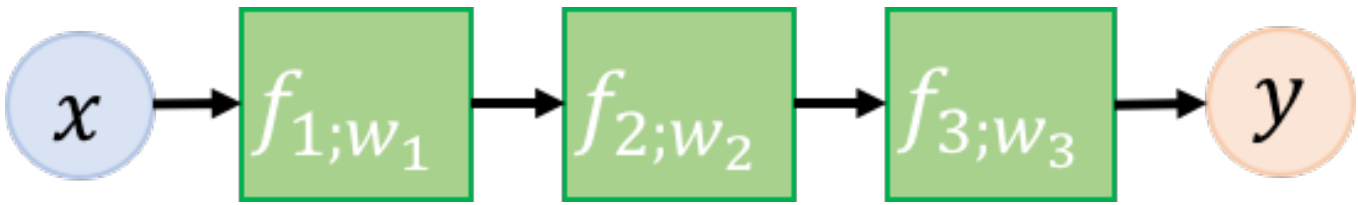


$$y = f_3(f_2(f_1(x; w_1); w_2); w_3)$$

$$y = \sigma\Big(W_3[\sigma(W_2[\sigma(W_1 x + b_1)] + b_2)] + b_3\Big)$$

$$\mathcal{L} = ||y - t||^2 \rightarrow \min_{W_1, W_2, W_3, b_1, b_2, b_3}$$

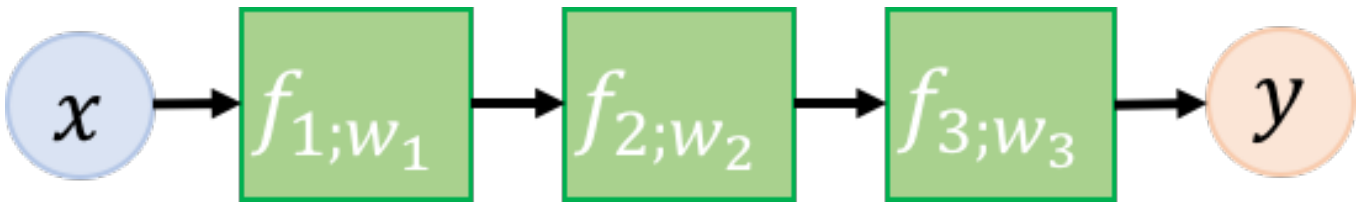
Обучение



Градиентный спуск:

1. $W^0 \leftarrow$ Начальное приближение : $W_i \sim \mathcal{N}(0, 0.1), b_i = 0$
2. WHILE not converged:
3. $W^k \leftarrow W^{k-1} - \eta \nabla_W \mathcal{L}$

Обучение

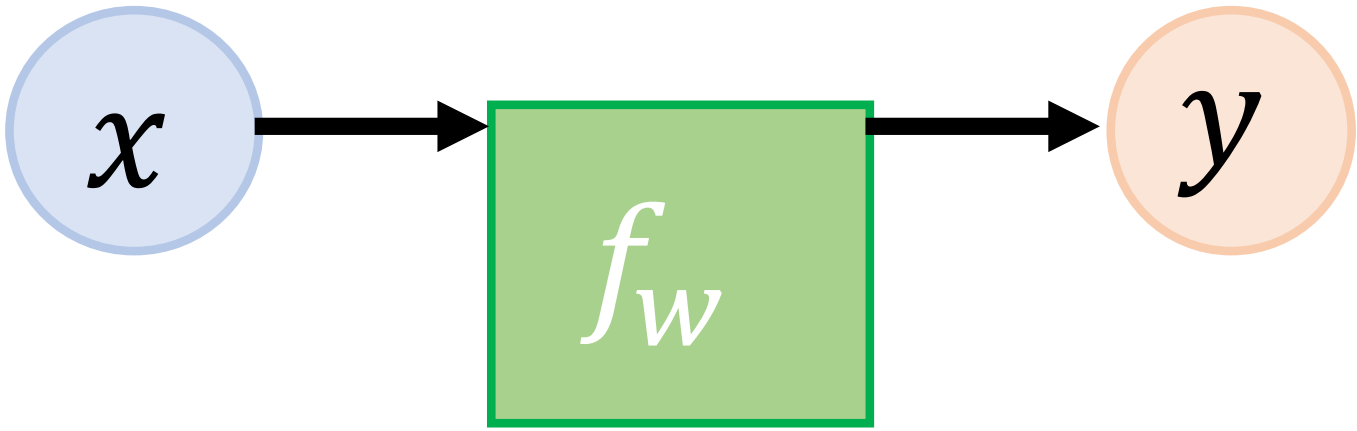


Градиентный спуск:

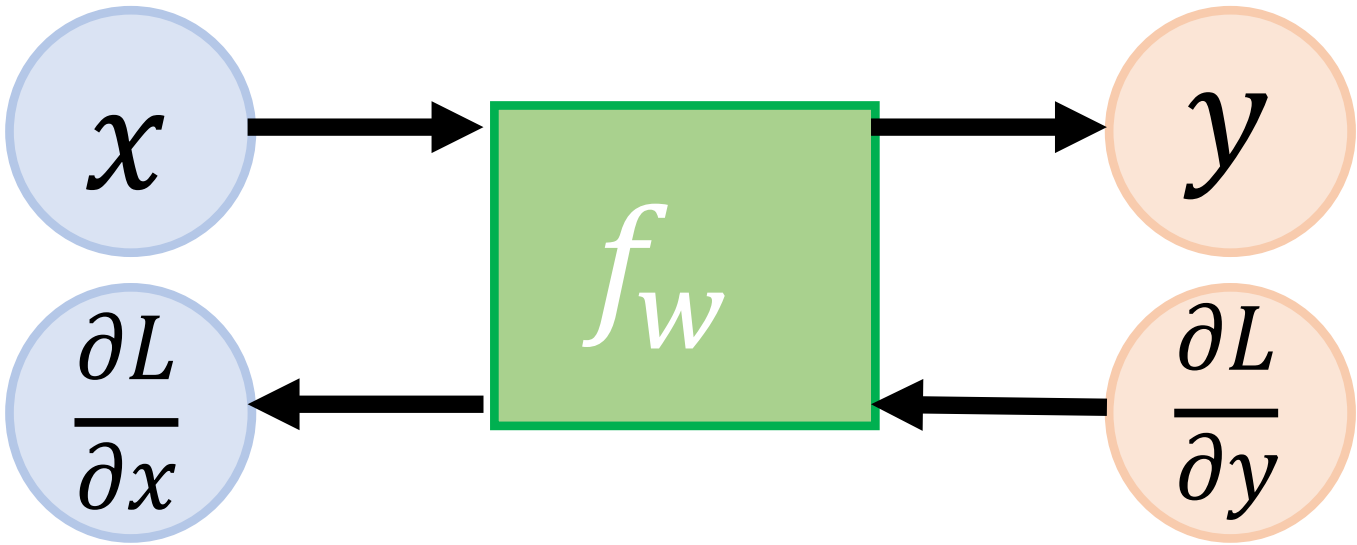
1. $W^0 \leftarrow$ Начальное приближение : $W_i \sim \mathcal{N}(0, 0.1), b_i = 0$
2. WHILE not converged:
3. $W^k \leftarrow W^{k-1} - \eta \nabla_W \mathcal{L}$

$y = \sigma\Big(W_3[\sigma(W_2[\sigma(W_1 x + b_1)] + b_2)] + b_3\Big)$: Сложность вычисления градиента растет с увеличением размера сети

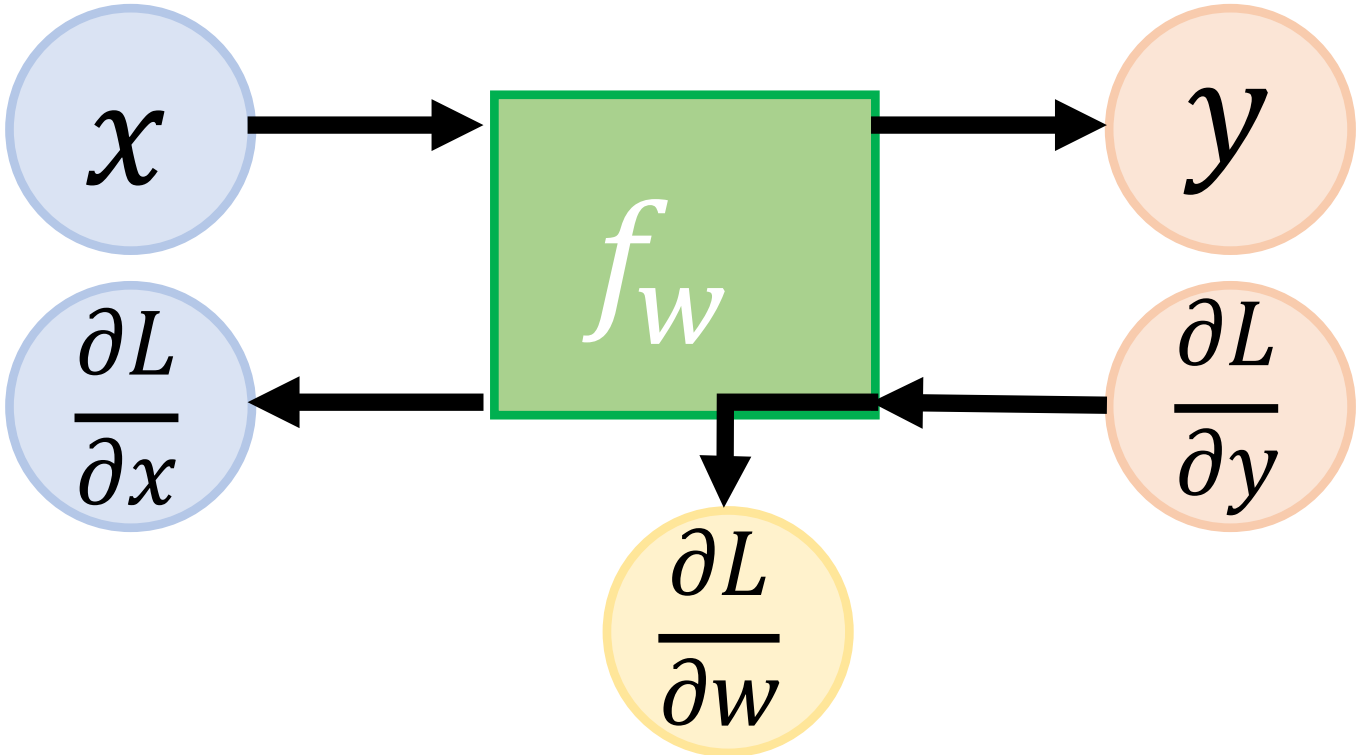
Back propagation



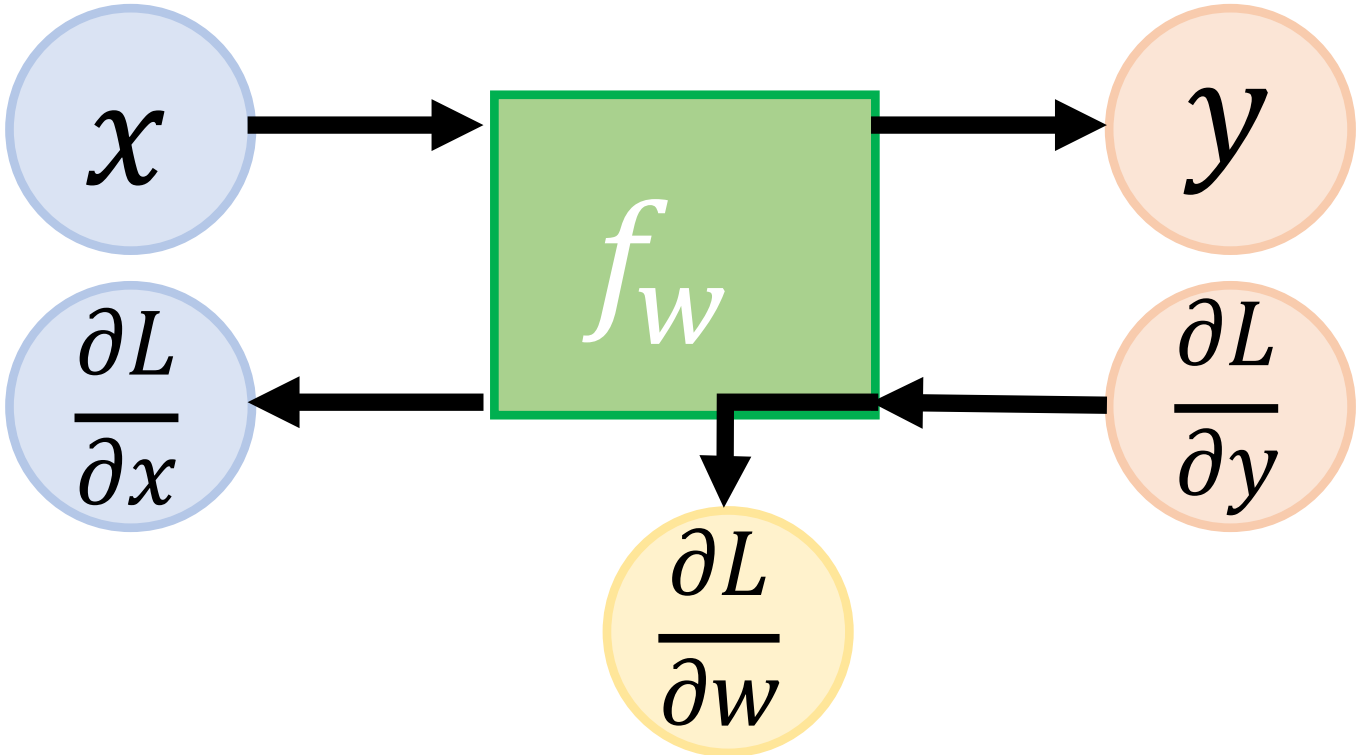
Back propagation



Back propagation

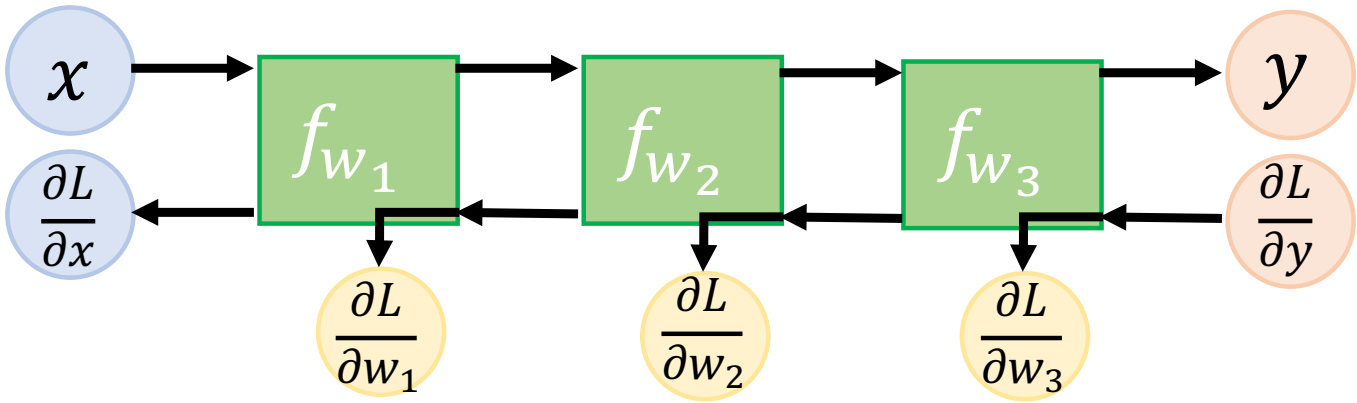


Back propagation

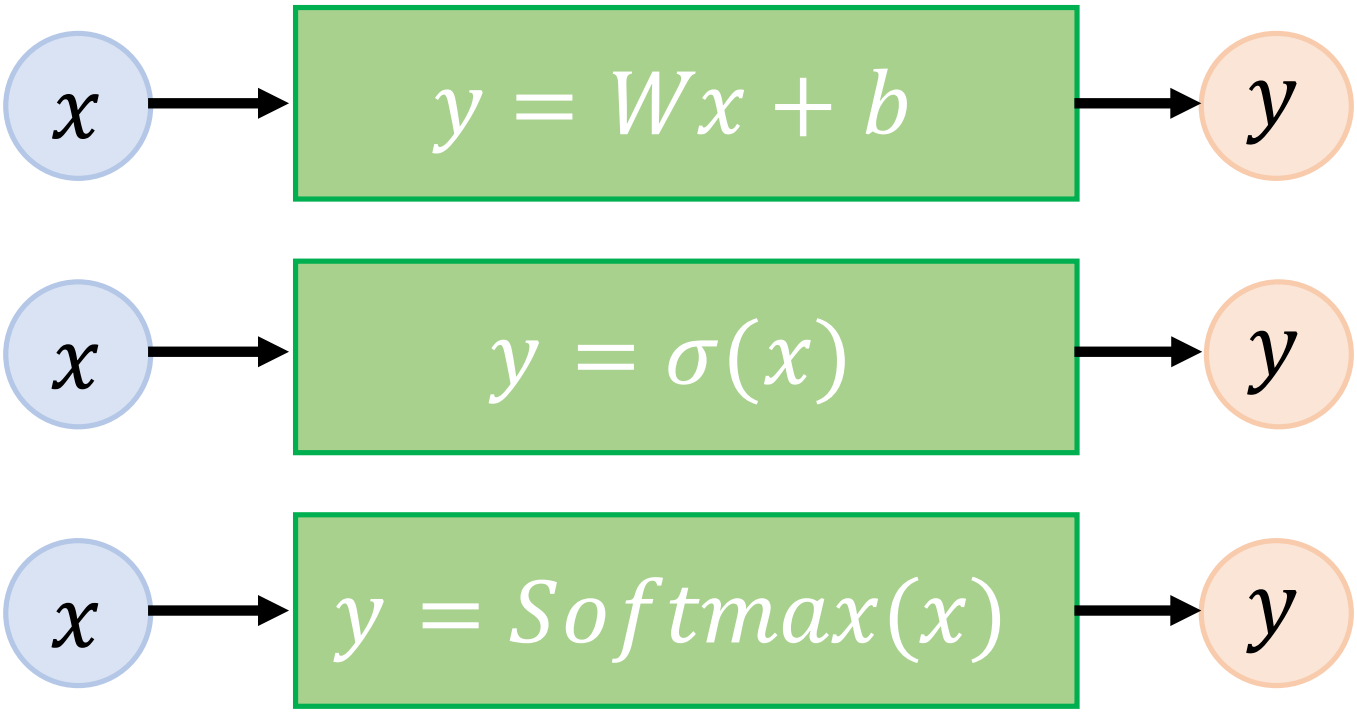


$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Back propagation



Building blocls



Gradient checking

Можно проверить корректность реализации, сравнив:

- Посчитанный градиент
- Численный градиент:

$$\frac{\partial L}{\partial w} \approx \frac{L(w+\epsilon) - L(w-\epsilon)}{2\epsilon}$$

Применение нейронных сетей

Neural networks vs Human writing

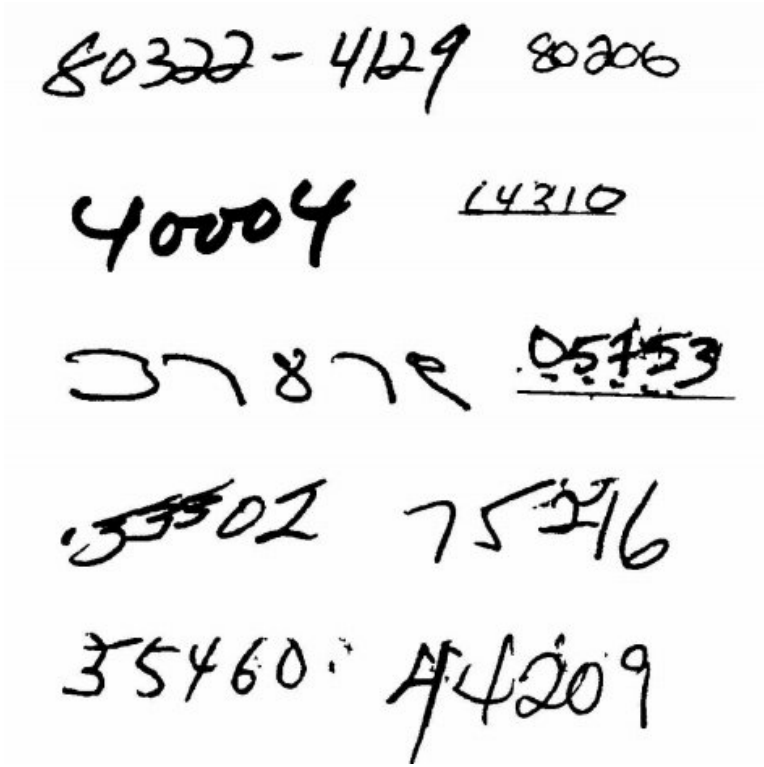


Figure: Zip codes

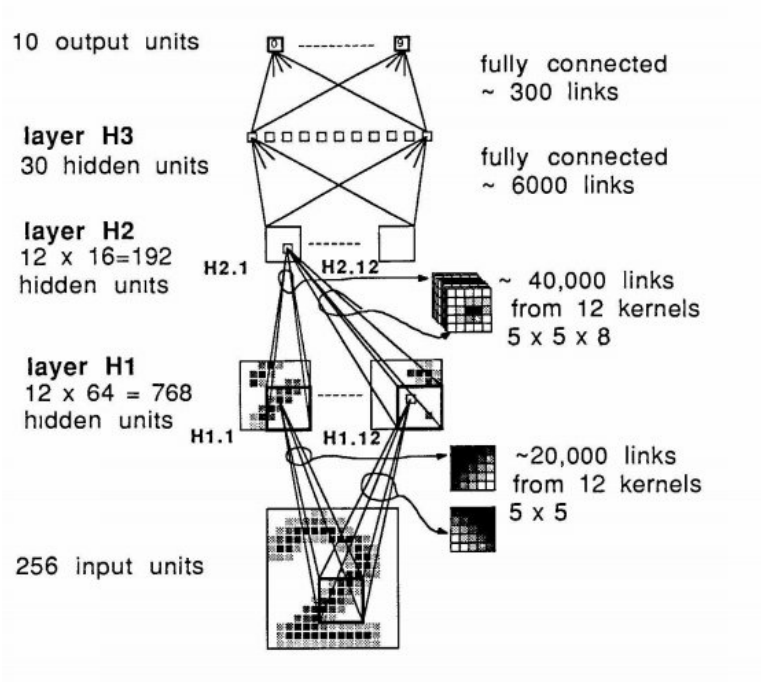


Figure: Network

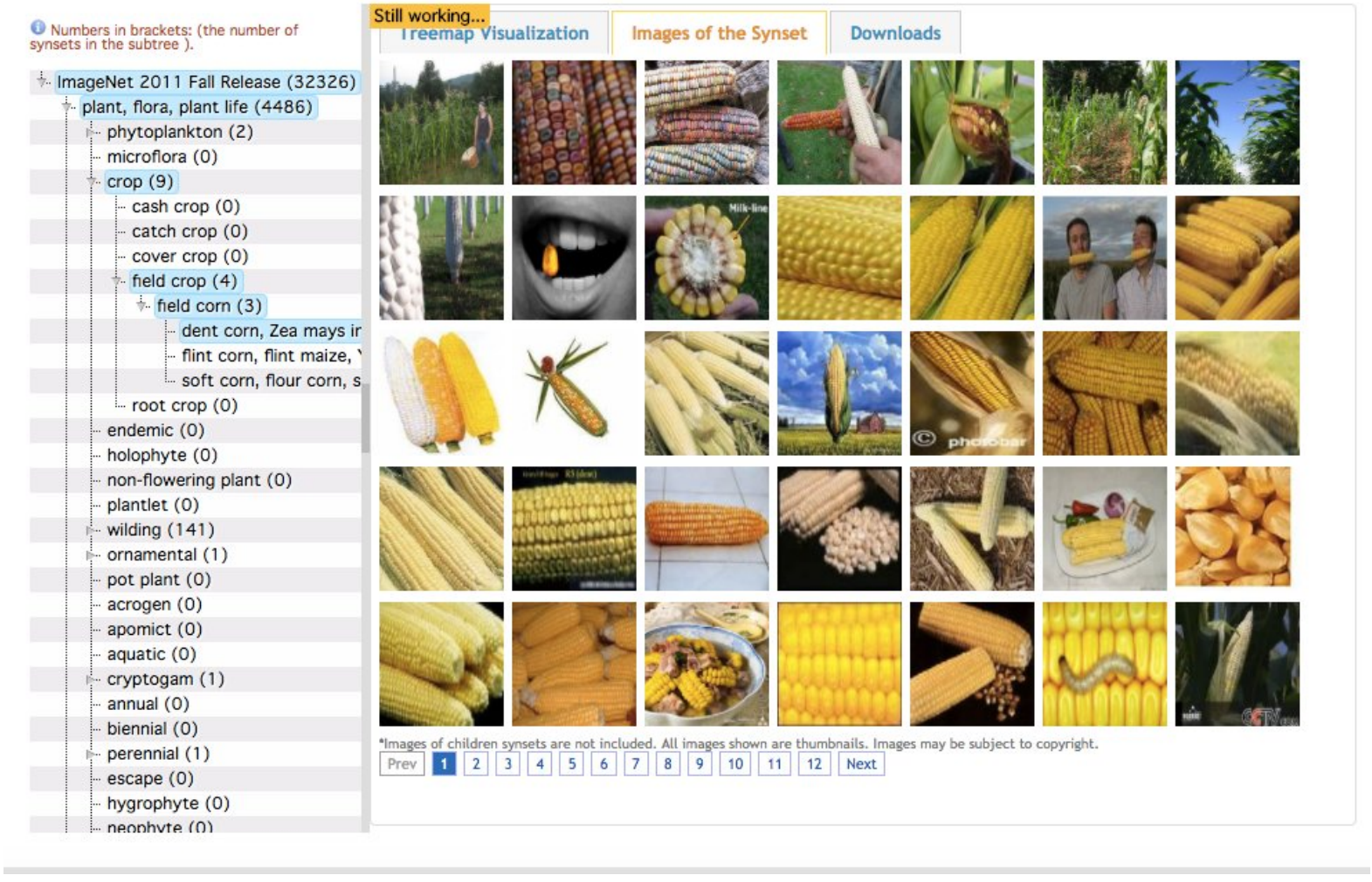
AlphaGo

The South Korean professional Go player Lee Sedol reviews the match after finishing against Google's artificial-intelligence program, AlphaGo.

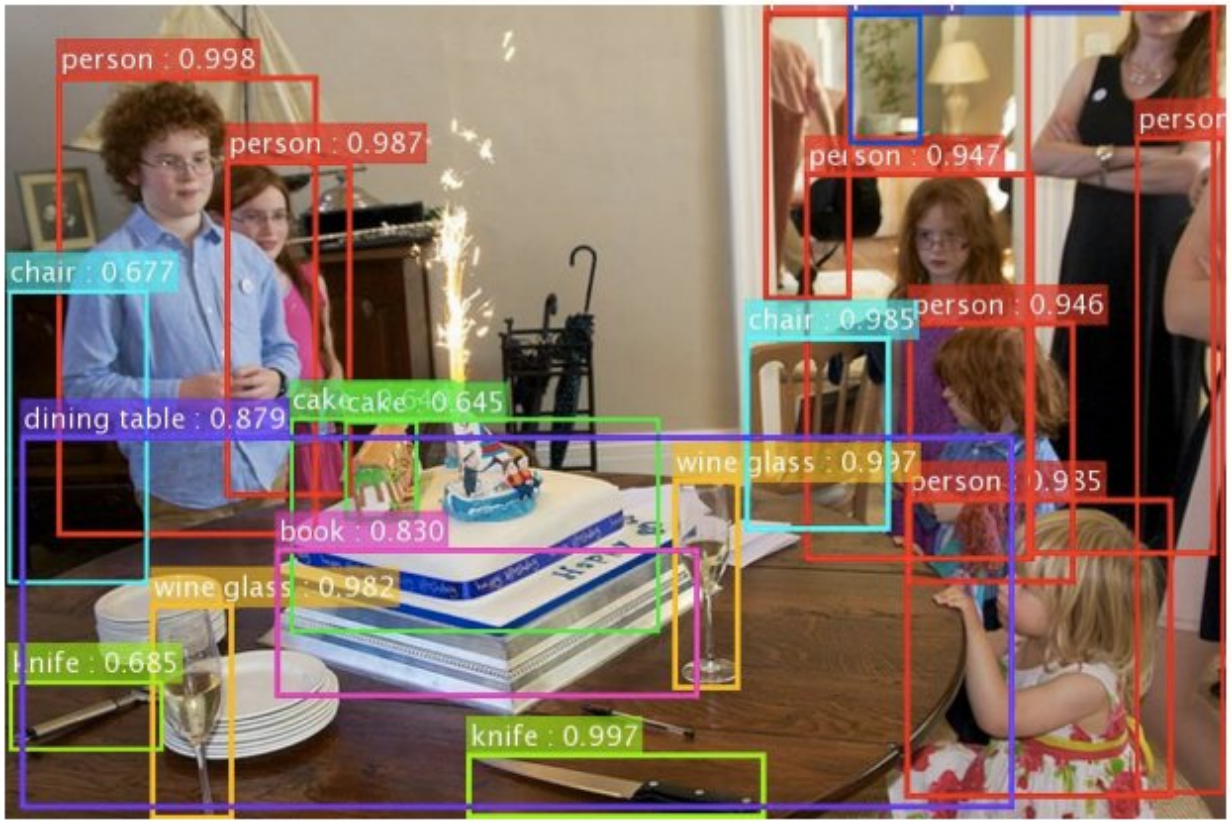
Lee Jin-man / AP

How Google's AlphaGo Beat a Go World Champion

Imagenet


Numbers in brackets: (the number of synsets in the subtree).
ImageNet 2011 Fall Release (32326)
plant, flora, plant life (4486)
phytoplankton (2)
microflora (0)
crop (9)
cash crop (0)
catch crop (0)
cover crop (0)
field crop (4)
field corn (3)
dent corn, Zea mays ir
flint corn, flint maize,
soft corn, flour corn, s
root crop (0)
endemic (0)
holophyte (0)
non-flowering plant (0)
plantlet (0)
wilding (141)
ornamental (1)
pot plant (0)
acrogen (0)
apomict (0)
aquatic (0)
cryptogam (1)
annual (0)
biennial (0)
perennial (1)
escape (0)
hygrophyte (0)
neophyte (0)
Still working...
Treemap Visualization
Images of the Synset
Downloads
*Images of children synsets are not included. All images shown are thumbnails. Images may be subject to copyright.
Prev 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Next

Classification: object detection



Artistic Style

DCGAN

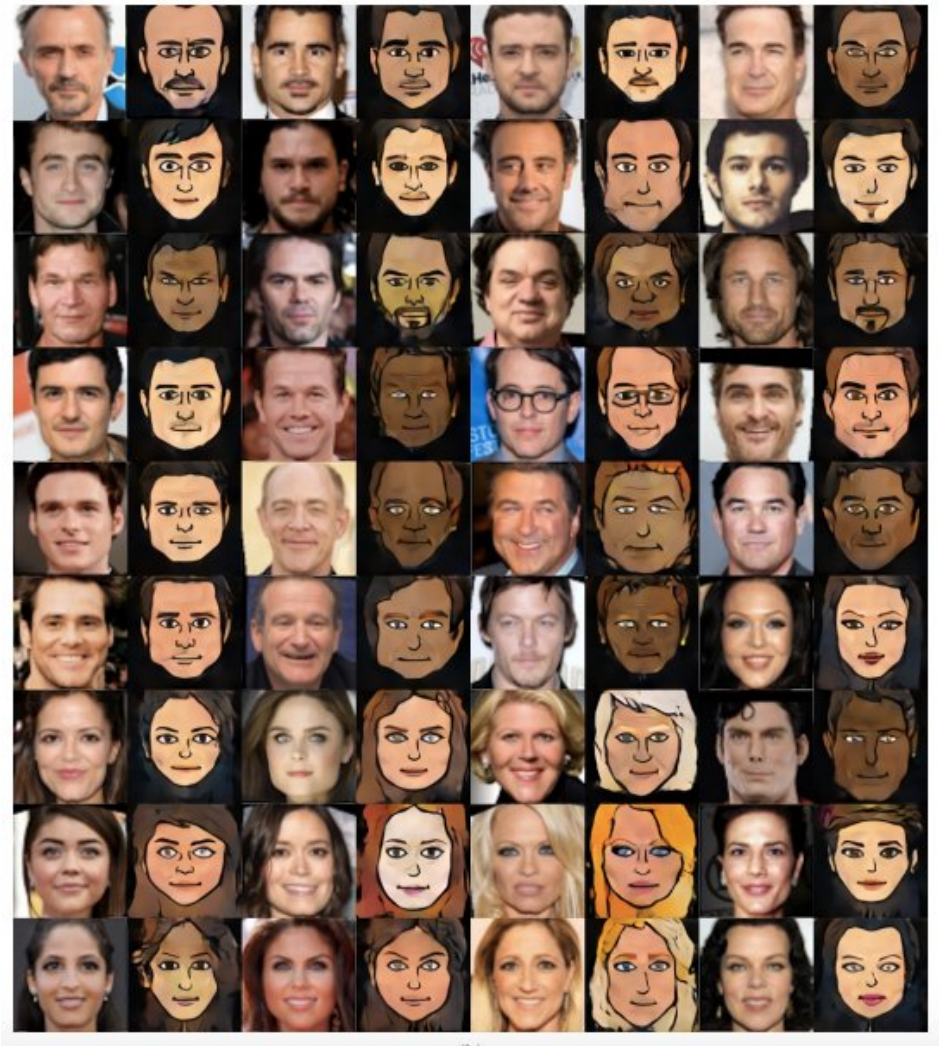
Figure: Faces

Figure: Anime

Более хорошие результаты:

`https://www.youtube.com/watch?v=X0xxPcy5Gr4`

Cross-domain



Семинар

№1: Матричные производные

В нейронных сетях мы обычно имеем дело с фукнциями $F : X \to Y$, где X, Y - линейные нормируемые пространста, например, матрицы, скаляры, вектор-столбцы и вектор-строки.
Если можно получить вот такое приближение функции в точке

$$F(x) = F(x_0) + (dF)|_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

то говорят, что dF – линейное отображение из X в Y – дифференциал функции F в точке x_0.

Свойства:

$$d(X + Y) = d(X) + d(Y)$$

$$d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$$

$$d(X^T) = d(X)^T$$

№1: Линейные отображения

Важно понимать, как выглядят произольные линейные отображения:

[2] Другой подход к матричным производным:
http://cs231n.stanford.edu/handouts/derivatives.pdf

№1: Линейные отображения

Важно понимать, как выглядят произольные линейные отображения:

- Вектор-столбец в вектор-столбец: $\Lambda(x) = Ax$
- Вектор-столбец в вектор-строку: $\Lambda(x) = x^T A$
- Вектор-столбец в число: $\Lambda(x) = a^T x$
- Матрицу в число: $\Lambda(X) = \sum_{i,j} a_{i,j} \cdot x_{i,j} = tr(AX)$
- Вектор-столбец в матрицу: $\Lambda(x) = \sum_i A_i \cdot x_i =$???

Каждый раз все коэффициенты можно получить как производную соответствующей координаты выхода по всем координатам входа. [2]

[2] Другой подход к матричным производным:
`http://cs231n.stanford.edu/handouts/derivatives.pdf`

№1: Матричные производные – определения

Пусть f – скалярная функция, F – вектор-функция, $A = (a_{ij})$ – матрица, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ – вектор-солбец, x – скаляр.

- $\frac{\partial f(A)}{\partial A} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial a_{ij}}\right)_{ij}$
- $\frac{\partial f(v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial f(v)}{\partial v_1}, \frac{\partial f(v)}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial f(v)}{\partial v_n}\right)$
- $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial F_n(x)}{\partial x}\right)^T$
- $\frac{\partial F(v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial F_i(v)}{\partial v_j}\right)_{ij}$

№1: Матричные производные

- $\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = ?$
- $\frac{\partial}{\partial A} x^T A x = ?$
- $\frac{\partial}{\partial x} ||Ax + b||^2 = ?$
- $\frac{\partial}{\partial A} tr(AB) = ?$

№2: Линейная регрессия

- Выпишите функционал для линейной регрессии
- Найдите оптимальное значение весов

№3: Дифференцирование NLL

- Выпишите значение связки Softmax + NLL
- Выведите градиент $\frac{\partial}{\partial y}\text{NLL}(\text{Softmax}(y); t)$

№4: Логистическая регрессия

- $p(y|x) = \sigma(y[w^T x])$
- Выпишите функцию правдоподобия
- Выпишите градиент логарифма функции правдоподобия
- Как ведет себя градиент на правильно классифицированных объектах?
- Как ведет себя градиент на неправильно классифицированных объектах?

Вопросы