

定式化集

平成 26 年 10 月 17 日

1 LP と主要問題

1.1 LP, LP の双対問題

LP 標準系

$$\text{maximize} \quad c^T x \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad Ax \leq b \quad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

双対 LP 標準系

$$\text{minimize} \quad b^T y \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad A^T y \geq c \quad (5)$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (6)$$

ただし, $A: m * n$ 行列, $x: n$ 列ベクトル, $y: m$ 列ベクトル

例:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

のとき最適解 $x = (1/3, 2/3), \gamma = 4/3$, を得る。図を描けばわかりやすい。これの双対 LP 解は $y = (1/3, 1/3), \gamma = 4/3$ である

1.1.1 不等式

Minimization *Maximization*

変数 制約式

\leq \geq

自由 $=$

\geq \leq

制約式 変数

\leq \leq

$=$ 自由

\geq \geq

1.2 最短経路問題と LP

(やる気があれば：脚注のような gap が存在するような問題を調べる)

概要

1. 自己ループ無し最短経路問題について
2. LP 形から最短経路問題への変換
3. INF 辺を忘れないようにする

線形計画問題として記述する

$s-t$ 最短経路問題 (自己ループが存在しないと仮定) とほぼ同値の問題を解説する。

しかし任意の $s-t$ 最短経路問題を下記の形で書くことで下記 LP の解とは一致しないことに注意が必要。LP から $s-t$ 最短経路問題の変形は可能。¹

具体的には、 s からすべての頂点に対して新しく コスト INF の辺を張らなければならない。他は i, j 間に有向グラフを張れば最短経路問題に変換可能。負閉路が検出されれば双対問題は解が存在せず、主問題では負へ発散となる。 x_t が INF のままなら、双対問題では正へ発散、主問題では解なしとなる。

前者の定式化はややわかりにくい形である。この形で出題はなかなかされない (最短経路問題をそのまま考えたほうがわかりやすいから)

後者の定式化は比較的よく出る。”差分制約”とおぼえておくのが良いだろう。俗に牛ゲーと呼ばれる。

LP 標準系 ($|E| + 1$ 変数, $|V|$ 制約)

$$\text{minimize} \quad \sum_{e=(i,j) \in E} c_e y_e \quad (7)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{e=(j,v) \in E} y_e - \sum_{e=(v,j) \in E} y_e \geq 0 \quad v \neq s, v \neq t \quad (8)$$

$$\sum_{e=(j,v) \in E} y_e - \sum_{e=(v,j) \in E} y_e \geq 1 \quad v = t \quad (9)$$

$$\sum_{e=(j,v) \in E} y_e - \sum_{e=(v,j) \in E} y_e + y_s \geq 0 \quad v = s \quad (10)$$

$$y_s = 0, y_e \geq 0 \quad e \in E \quad (11)$$

双対 LP 標準系 ($|V|$ 変数, $|E| + 1$ 制約)

$$\text{maximize} \quad x_t \quad (12)$$

$$\text{subject to} \quad x_j - x_i \leq c_e \quad e = (i, j) \in E \quad (13)$$

$$x_s = 0 \quad (14)$$

$$x_v \geq 0 \quad v \in V \quad (15)$$

(3 番目の式は本当は $x_s \leq 0$ だが、わかりやすさのためにこのような記述しておいた。)

¹INF をつける理由が非自明である。簡潔に理由を述べると INF 辺をつけなければ閉路の存在判定が正しくできないのである。双対バージョンの式をよく見ると負閉路がある場合に実行不能になることがわかる。一方、st 最短経路問題を実装するときには s から到達できる範囲に負閉路が存在しなければ負閉路の検出はできない。

1.3 最大流問題と LP

最大流最小カット定理は有名な定理だが、ここではその定式化とその類型を見る。

与えられる変数は c_{ij} である。これは各辺の最大流量を意味する

LP 主問題

x_{ts} を最大化する循環最大流問題を考える。

したがって x_{ts} を辺集合 E に付け加えて E' とする。

この状況下で $|E| + 1$ 変数 $|E| + |V|$ 制約となる。

$$\text{maximize} \quad x_{ts} \quad (16)$$

$$\text{subject to} \quad x_e \leq c_e \quad e = (i, j) \in E \quad (17)$$

$$\sum_{e=(j,v) \in E'} x_e - \sum_{e=(v,j) \in E'} x_e \leq 0 \quad (v \in V) \quad (18)$$

$$x_e \geq 0 \quad e \in E' \quad (19)$$

E, E' がそれぞれ登場していることに注意

LP 双対問題

v の不等式に対応する変数が p であり、 e の不等式に対応する変数が p であることに注意。

$|E| + |V|$ 変数 $|E| + 1$ 変数である

$$\text{minimize} \quad \sum_{e=(i,j) \in E} c_e y_e \quad (20)$$

$$\text{subject to} \quad y_e + p_j - p_i \geq 0 \quad e = (i, j) \in E \quad (21)$$

$$p_s - p_t \geq 1 \quad (22)$$

$$p_v \geq 0, y_e \geq 0 \quad v \in V, e \in E \quad (23)$$

まじめに考えると $p_s = 1, p_t = 0$ であることがわかり頂点に対応する p_i のうちどれを 1 にしてどれを 0 にするかという問題になり y_e はギリギリのところまで抑えるのがよいので結局最小カット問題であることがわかる

1.4 最小費用流と LP

最小費用流も有名である。

この問題では辺に対して 2 つの変数が与えられる。

c_{ij}, u_{ij} であり、それぞれ ij 間に 1 流すコスト, ij 間に流せる流量である。

さらに、 st 間に流せる量 F も与えられる。

$$\text{minimize} \quad \sum_{e=(i,j) \in E} c_e x_e \quad (24)$$

$$\text{subject to} \quad x_e \leq u_e \quad e = (i, j) \in E \quad (25)$$

$$\sum_{e=(j,v) \in E} x_e - \sum_{e=(v,j) \in E} x_e = 0 \quad (v \in V, v \neq s) \quad (26)$$

$$\sum_{e=(j,v) \in E} x_e - \sum_{e=(j,v) \in E} x_e = -F \quad (27)$$

$$x_e \geq 0 \quad e \in E \quad (28)$$

2 Problems

2.1 AOJ2230, How to Create a Good Game

問題概要

DAG が与えられる。DAG の最大長を維持しながら辺に長さを足す。足せる長さの最大値を答えよ

$|E| + |V|$ 変数, $E + 1$ 制約。

$$\text{maximize} \quad \sum_{e=(i,j) \in E} a_e \quad (29)$$

$$\text{subject to} \quad a_e - x_j + x_i \leq -c_e \quad e = (i, j) \in E \quad (30)$$

$$x_t \leq D \quad (31)$$

$$x_v \geq 0, a_e \geq 0 \quad v \in V, e \in E \quad (32)$$

双対を取る。

$$\text{minimize} \quad Dp_t - \sum_{e=(i,j) \in E} c_e y_e \quad (33)$$

$$\text{subject to} \quad - \sum_{e=(j,v) \in E} y_e + \sum_{e=(v,j) \in E} y_e \geq 0 \quad v \in V, v \neq t \quad (34)$$

$$p_t - \sum_{e=(j,v) \in E} y_e \geq 0 \quad v = t \quad (35)$$

$$y_e \geq 1 \quad e \in E \quad (36)$$

$$y_e \geq 0, p_t \geq 0 \quad e \in E \quad (37)$$

これは最低流量 1 の最小費用流である。

2.2 ジョブ割当問題

n 個のジョブと m 人の作業員がいる。 S_i はジョブ i を実行できる作業員の集合である。以下の様な定式化のもとで x_{ij} としてありうる最適解をひとつ求めよ。

$$\text{minimize} \quad \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i: j \in S_i} x_{ij} \quad (38)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j \in S_i} x_{ij} = t_i \quad i = 1, \dots, n \quad (39)$$

$$(40)$$

以下説明 max が出現した時の常套手段はそれに変数をつけて max の構成要素を制約式に持ってくることである

$$\text{minimize} \quad T \quad (41)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j \in S_i} x_{ij} = t_i \quad i = 1, \dots, n \quad (42)$$

$$\sum_{i: j \in S_i} x_{ij} \leq T \quad j = 1, \dots, m \quad (43)$$

この式は、頂点 s と頂点 i の間に容量 t_i の辺を張り、 j と t の間に容量 T の辺を張って $\sum_{i=1}^n t_i$ だけ最大流が流れるかどうかをチェックしつつ T を二分探索すればよい

3 ネットワークフローの定式化

3.1 maximum closure problem

N 個の頂点がある。最初どの頂点も集合 B に属しているが、これを集合 A に移すことで利益を最大化したい。
 i が A に属していた時には利得 p_i を得る。

さらに、 x_j が A に属し、かつ y_j が B に属していた時に z_j だけ損失をする。
最大スコアを求めよ

この問題に対する解は

$$\sum_{v \in V} p_v - \maxflow(s, t)$$

ただし $\maxflow(s, t)$ とは

$p_v > 0$ であれば s から v に容量 p_v の辺を張り

$p_v < 0$ であれば v から t に容量 $-p_v$ の辺を張り

x_j から y_j に容量 z_j の辺を張ったときの st 間の最大流である