ゲームグラフィックス特論

第3回 変換 (1)

同次座標

座標値（標準座標）の同次座標による表現

ベクトル

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

ベクトルは縦に表記することにします

内積

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

このニつの内積

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + w_1 w_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

要素ごとの積の輪

転置を表す記号

アフィン変換

- 線形変換と平行移動の組み合わせ

一次元

$$x' = \underbrace{ax}_{\text{線形変換}} + \underbrace{b}_{\text{平行移動}}$$

二次元

$$\begin{aligned} x' &= \underbrace{a_{xx}x + a_{yx}y}_{\text{線形変換}} + \underbrace{b_x}_{\text{平行移動}} \\ y' &= a_{xy}x + a_{yy}y + b_y \end{aligned}$$

三次元

$$\begin{aligned} x' &= \underbrace{a_{xx}x + a_{yx}y + a_{zx}z}_{\text{線形変換}} + \underbrace{b_x}_{\text{平行移動}} \\ y' &= a_{xy}x + a_{yy}y + a_{zy}z + b_y \\ z' &= a_{xz}x + a_{yz}y + a_{zz}z + b_z \end{aligned}$$

アフィン変換の行列表現

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{xx}x + a_{yx}y + a_{zx}z + b_x \\
y' &= a_{xy}x + a_{yy}y + a_{zy}z + b_y \\
z' &= a_{xz}x + a_{yz}y + a_{zz}z + b_z
\end{aligned}
$$

行列を使って表すと

合成変換が表しづらい

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{線形変換}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}}_{\text{平行移動}}
$$

アフィン変換の同次座標による表現

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} & b_x \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} & b_y \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

4行4列の行列を使って表しても同じ

$$\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{yx}y + a_{zx}z + b_x \\ y' &= a_{xy}x + a_{yy}y + a_{zy}z + b_y \\ z' &= a_{xz}x + a_{yz}y + a_{zz}z + b_z \end{aligned}$$

同次座標

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix}^\top$$

同次座標		標準座標（実座標）
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$	⇒	$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$	⇒	(x, y, z) の位置
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$	⇒	(x, y, z) の方向

同次座標の性質

- 同次座標にスカラーをかけても標準座標は変わらない

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \\ aw \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{ax}{aw}, \frac{ay}{aw}, \frac{az}{aw}\right) = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$$

同次座標で表された標準座標の差は通分してから求める

- 標準座標に直すために w 要素で割ってから引く

$$\frac{\mathbf{P}_1}{w_1} - \frac{\mathbf{P}_0}{w_0} = \begin{pmatrix} x_1/w_1 \\ y_1/w_1 \\ z_1/w_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0/w_0 \\ y_0/w_0 \\ z_0/w_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/w_1 - x_0/w_0 \\ y_1/w_1 - y_0/w_0 \\ z_1/w_1 - z_0/w_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

w_1 で割る

w_0 で割る

w 要素が0だと計算できない

- 「通分」すれば割り算不要

これを正規化する

$$w_0\mathbf{P}_1 - w_1\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} w_0x_1 \\ w_0y_1 \\ w_0z_1 \\ w_0w_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1x_0 \\ w_1y_0 \\ w_1z_0 \\ w_1w_0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} w_0x_1 - w_1x_0 \\ w_0y_1 - w_1y_0 \\ w_0z_1 - w_1z_0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

割り算不要

$w_0 w_1$をかける

同次座標の和は標準座標の重心（幾何中心）になる

同次座標

$$\begin{pmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i x_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

標準座標

$w_i \neq 0$ において (x_i, y_i, z_i) を表す

この総和

標準座標の加重平均

$$\sum_i \begin{pmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i x_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i w_i x_i \\ \sum_i w_i y_i \\ \sum_i w_i x_i \\ \sum_i w_i \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}, \frac{\sum_i w_i y_i}{\sum_i w_i}, \frac{\sum_i w_i z_i}{\sum_i w_i} \right)$$

座標変換

行列とベクトルの積

変換

4 行 4 列の行列と 4 要素のベクトルの積は内積 4 回

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

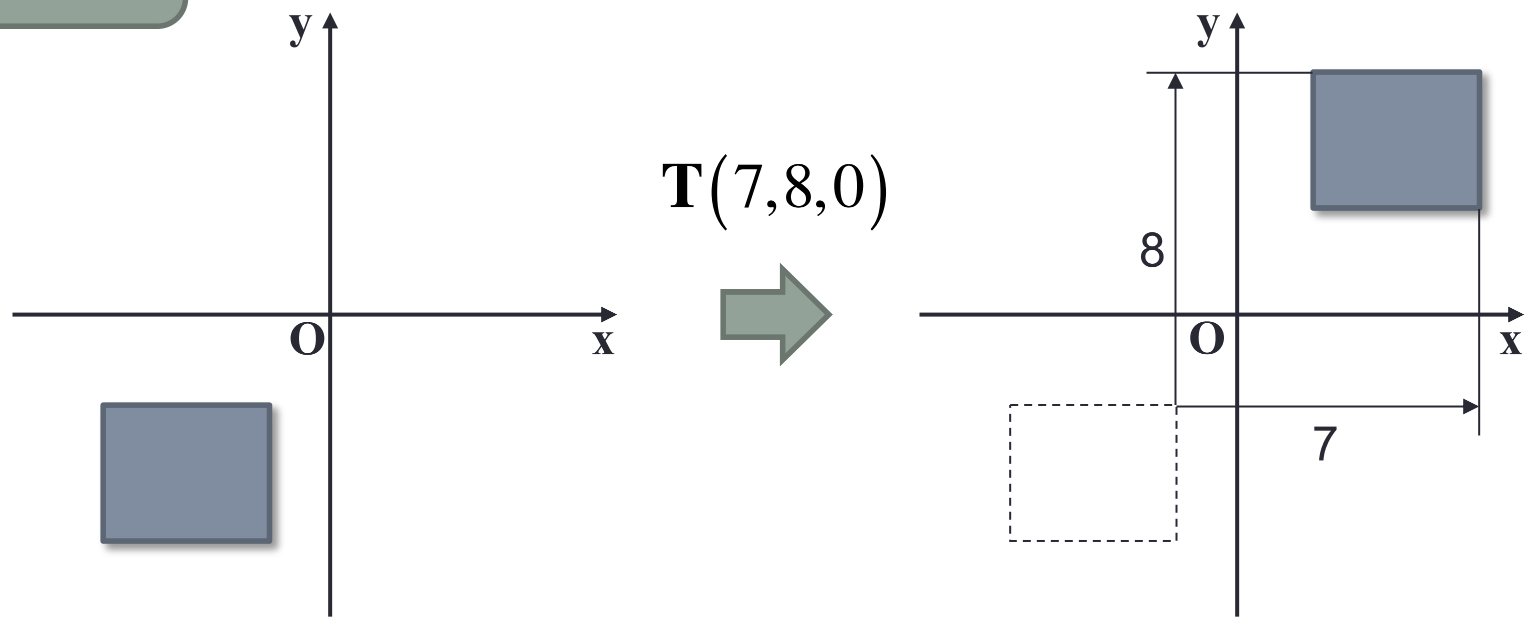
$\mathbf{v}'$ （ベクトル）　$\mathbf{M}$ （変換行列）　$\mathbf{v}$ （ベクトル）

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$$

平行移動の変換行列

$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$ だけ平行移動する変換



位置と方向の平行移動

位置

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

移動する

方向

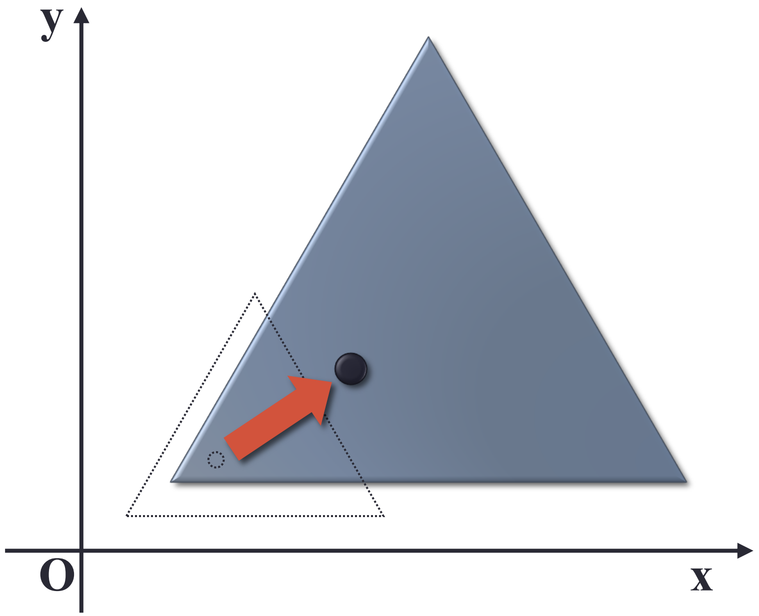
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

変化なし

拡大縮小の変換行列

x, y, z 方向に $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$
拡大縮小する変換

$$\mathbf{S}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



拡大縮小とw要素

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(ax,\ ay,\ az)$$

標準座標は同じ

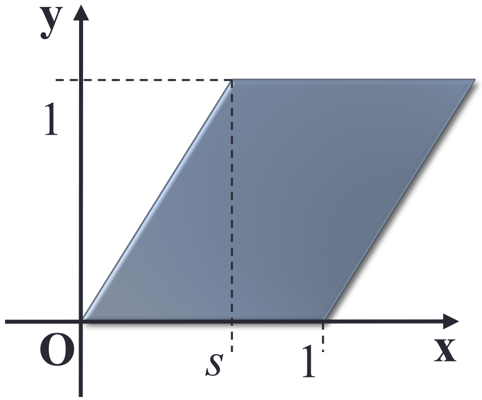
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1/a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1/a \end{pmatrix}$$

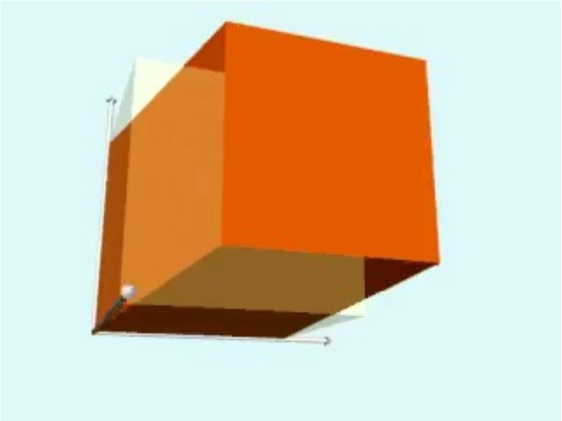
せん断の変換行列

$$\mathbf{H}_{xy}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y: せん断変形の基準となる座標軸

x: 変更される座標軸





$\mathbf{H}_{xz}(t)\ \mathbf{H}_{yz}(s)$

y 方向の 1 の変更に対して x 方向に s せん断変形する変換

せん断の変換行列は６種類ある

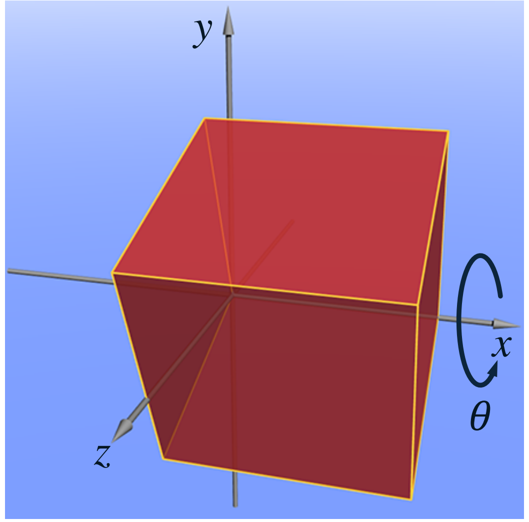
$$\mathbf{H}_{xy}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{yx}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{zx}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

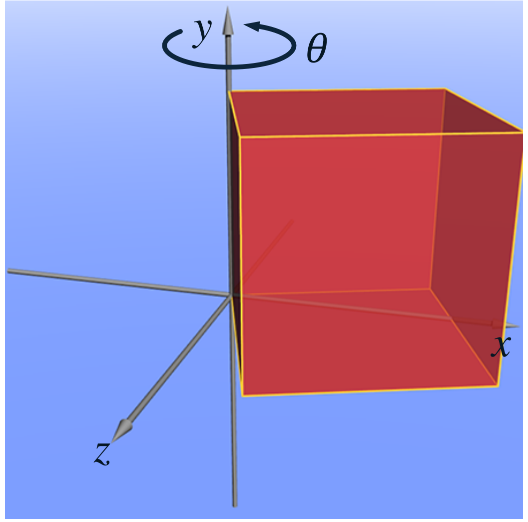
$$\mathbf{H}_{xz}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{yz}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_{zy}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

座標軸中心の回転の変換行列

X 軸中心に θ 回転

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



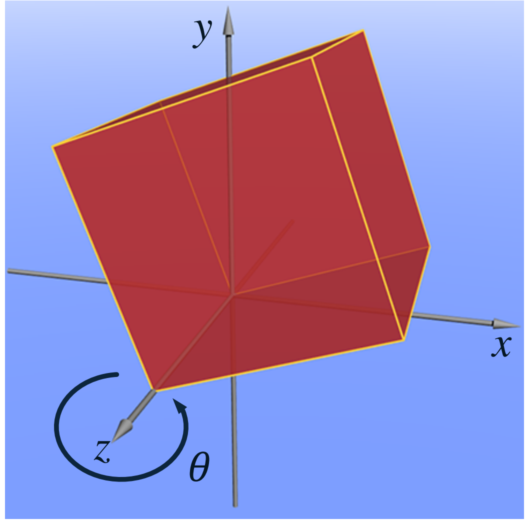


Y 軸中心に θ 回転

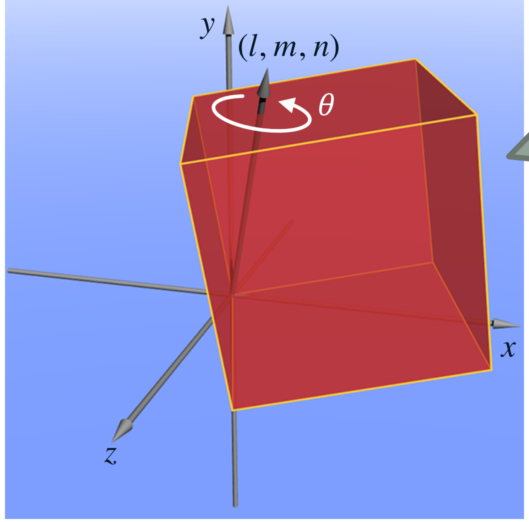
$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z 軸中心に θ 回転

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



任意軸周りの回転の変換行列



方向余弦 (l, m, n)
を軸に θ 回転

$$\mathbf{R}(l, m, n, \theta)$$

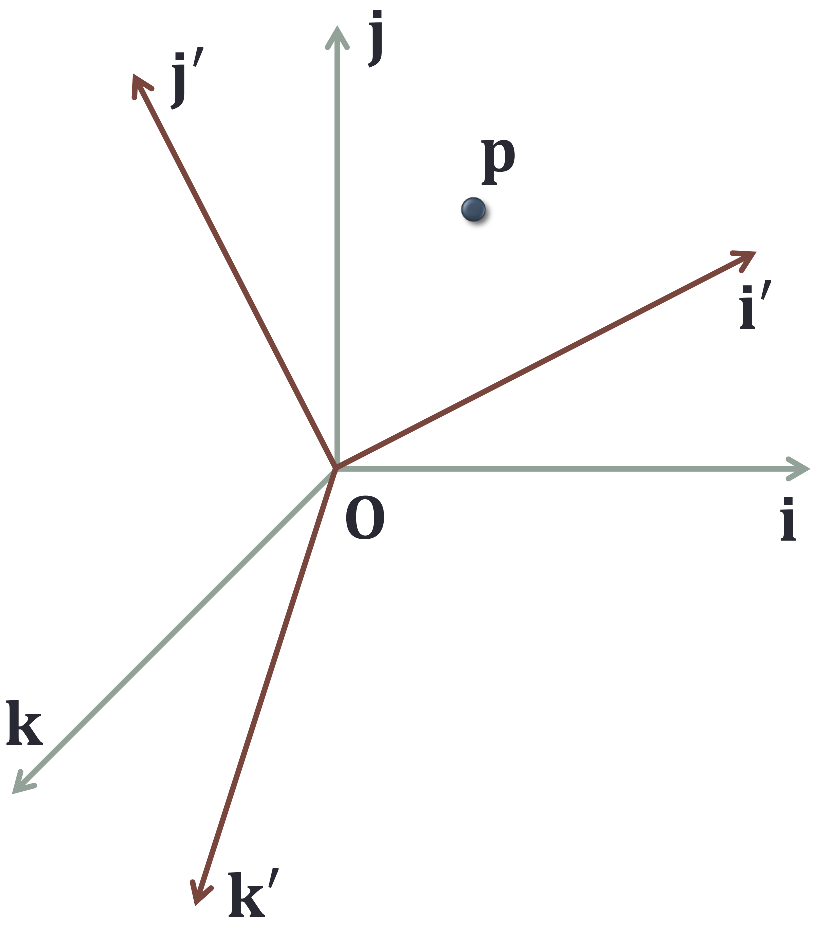
$$= \begin{pmatrix} l^2 + (1 - l^2)\cos\theta & lm(1-\cos\theta) - n\sin\theta & ln(1-\cos\theta) + m\sin\theta & 0 \\ lm(1-\cos\theta) + n\sin\theta & m^2 + (1 - m^2)\cos\theta & mn(1-\cos\theta) - l\sin\theta & 0 \\ ln(1-\cos\theta) - m\sin\theta & mn(1-\cos\theta) + l\sin\theta & n^2 + (1 - n^2)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

座標系の回転

正規直交基底の変換

同じ点を異なる正規直交座標系に置く

- 二つの正規直交座標系 $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, $(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$
  - 軸ベクトル $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ と $\mathbf{k}$ は直交している
  - 軸ベクトル $\mathbf{i}'$ と $\mathbf{j}'$ と $\mathbf{k}'$ は直交している
- 点 $\mathbf{p}$ の座標値
  - $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ の座標系での座標値 $\rightarrow (x,y,z)$
    - $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
  - $(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$ の座標系での座標値 $\rightarrow (x',y',z')$
    - $\mathbf{p} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$
- 座標系が異なっても $\mathbf{p}$ は**同じ点**
  - $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$



異なる正規直交座標系の関係

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

$$(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})^{-1}(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})^{\top}(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})^{\top}(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$$

$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ は正規直交座標系

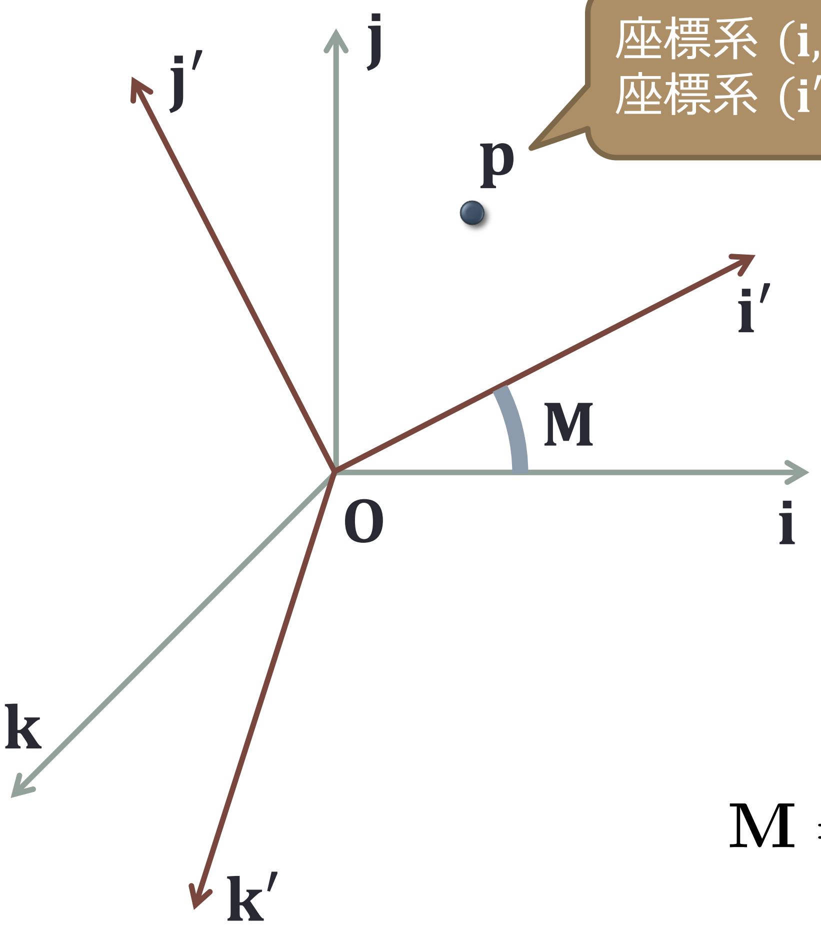
↓

$(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})$ は直交行列

↓

直交行列は
転置行列と逆行列が一致

M は正規直交基底の変換行列



座標系 $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ 上での位置は (x,y,z)
座標系 $(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$ 上での位置は (x',y',z')

M は座標系 $(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$ 上の点の位置 (x',y',z') の座標系 $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ 上の位置 (x,y,z) を求める変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{pmatrix}$$

座標系 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ への変換

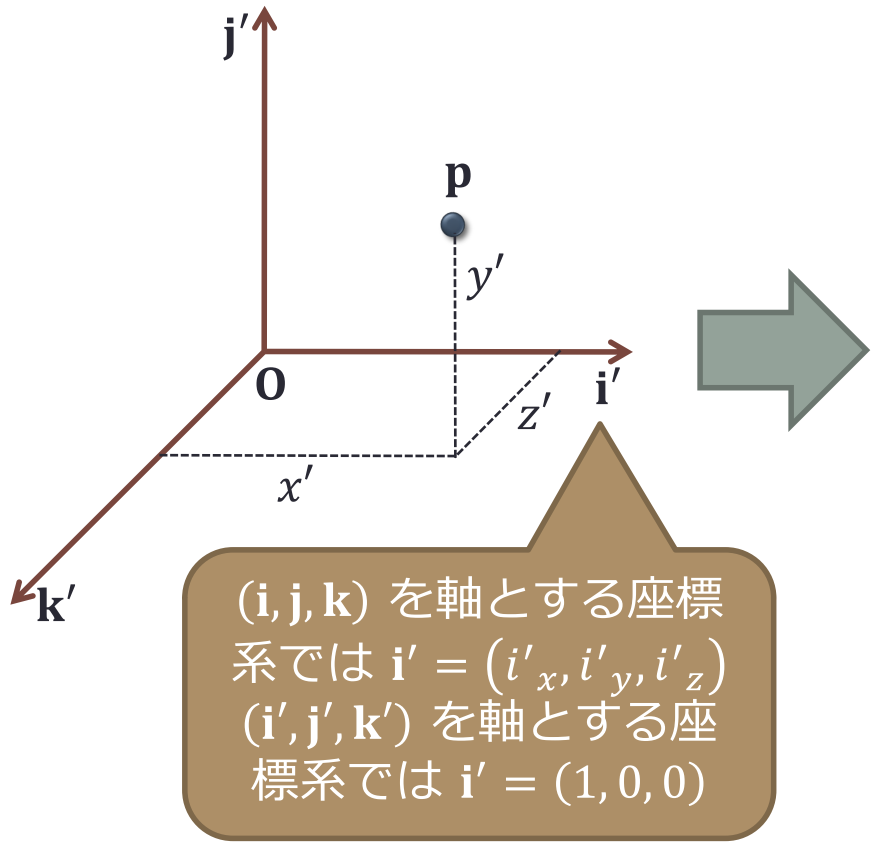
ここで $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{z}$

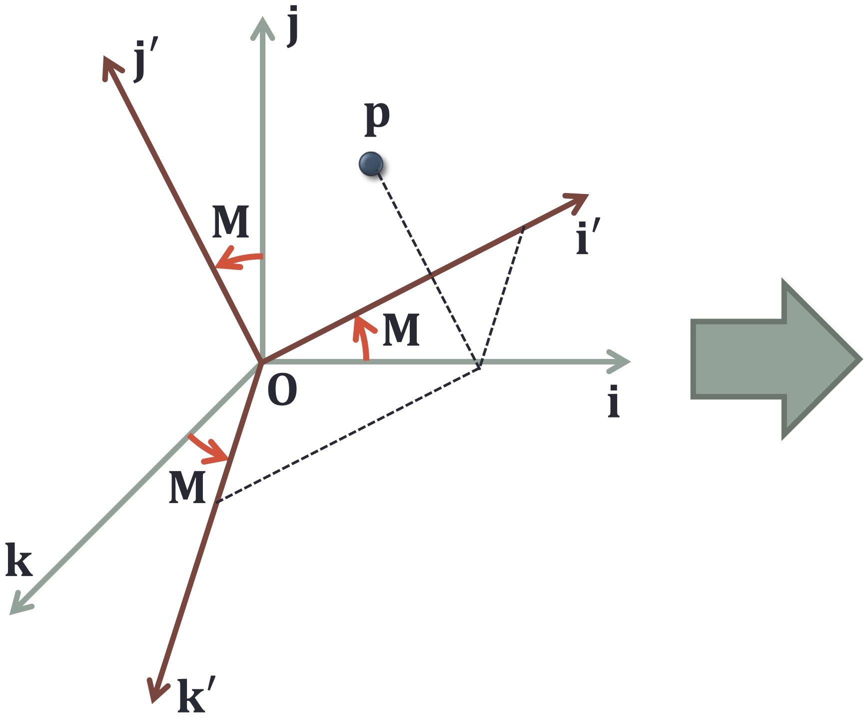
とすると

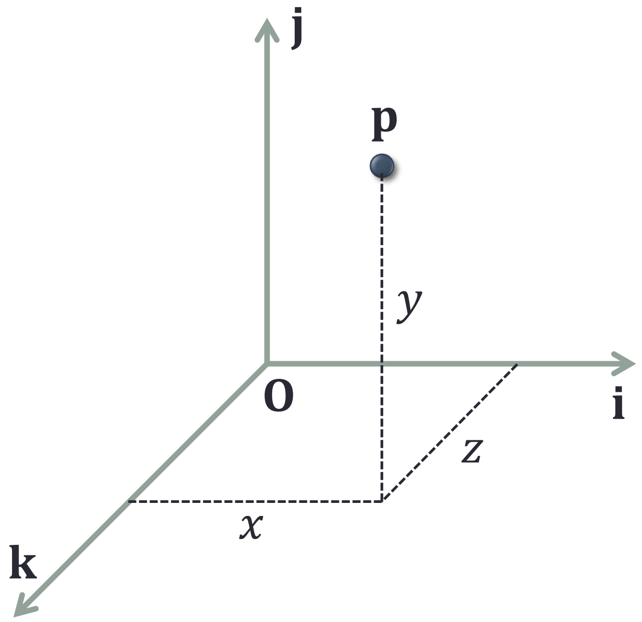
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}') = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$$

座標系 $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ の点の座標系 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ 上の位置を求める変換行列 $\mathbf{M}$ は $(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$

回転の変換







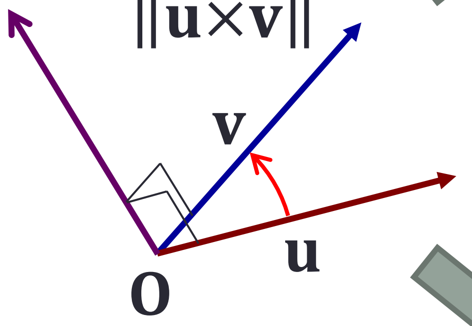
$$\mathbf{M} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$$

あるベクトルを別のベクトルの方向に向ける回転

u を v 方向に向ける

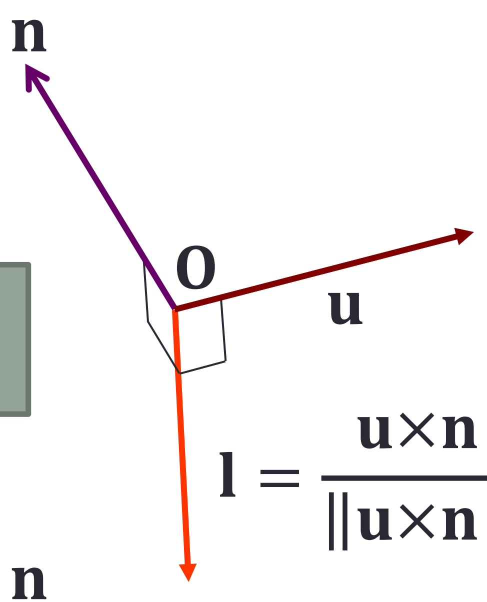
外積 **n** が回転軸

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}$$



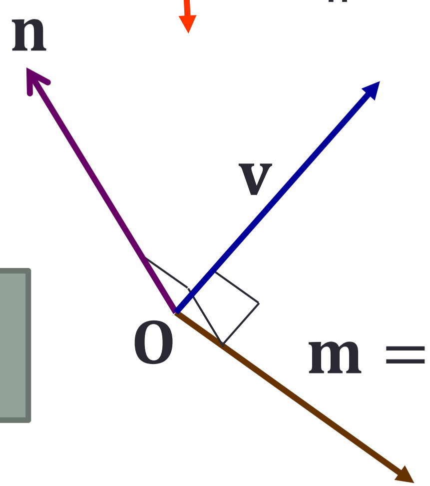
u, v のなす角が小さいと不安定

u, n, l の座標系



$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{n}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{n}\|}$$

v, n, m の座標系



$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{n}\|}$$

$$\mathbf{M}_u = (\mathbf{u} \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{l})$$

$$\mathbf{M}_v = (\mathbf{v} \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{m})$$

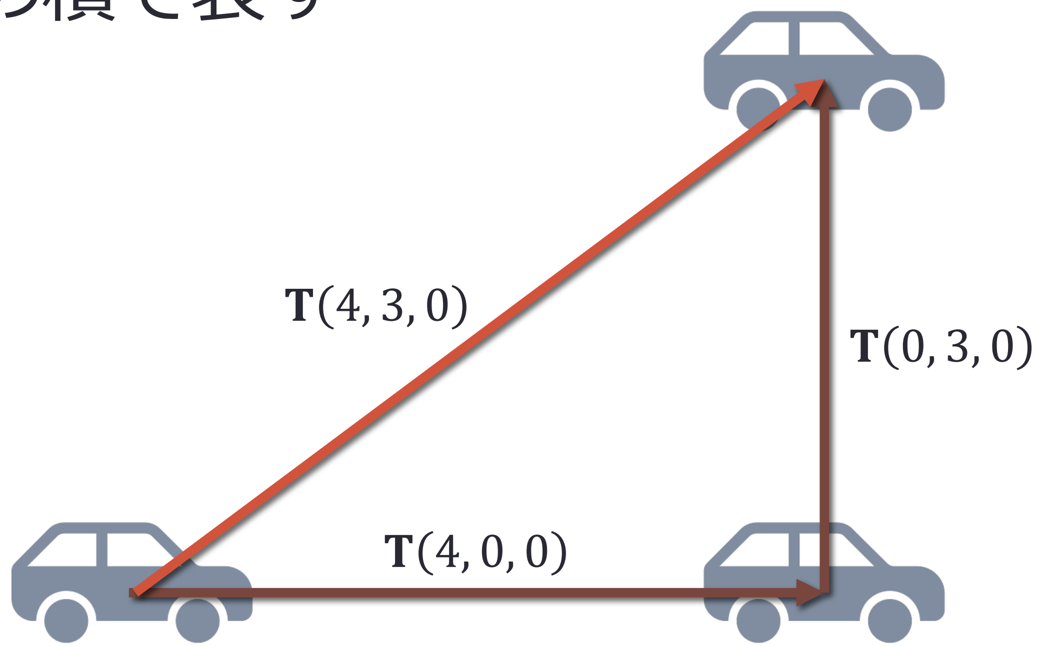
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_v \mathbf{M}_u{}^{-1} = \mathbf{M}_v \mathbf{M}_u{}^{\top}$$

変換の合成

変換行列の積

変換の合成

- 変換の合成は行列の積で表す



$$\mathbf{T}(0,3,0)\mathbf{T}(4,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(4,3,0)$$

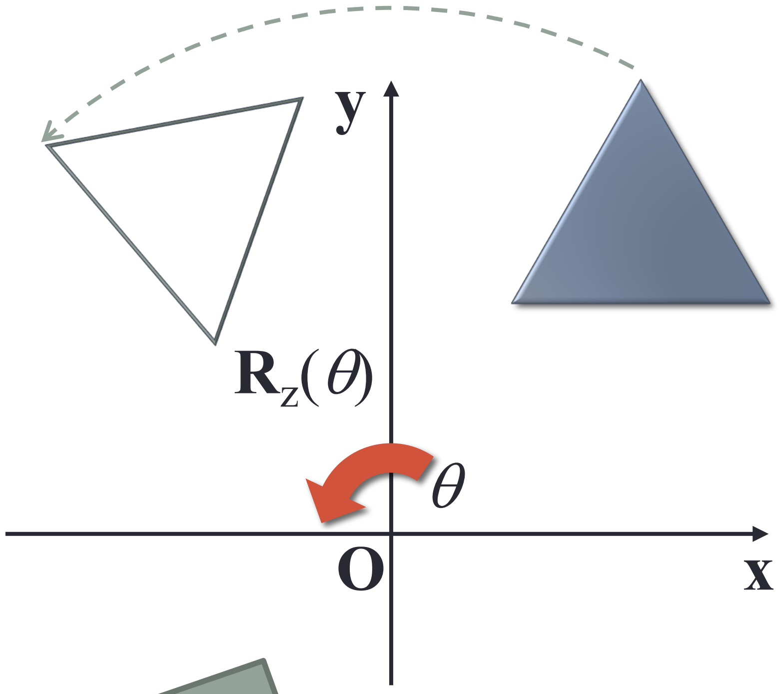
剛体変換

- 立体の移動と回転
- 一般的に立体の形状に影響を与えない（＝剛体）

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{t})\,\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} & t_x \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} & t_y \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

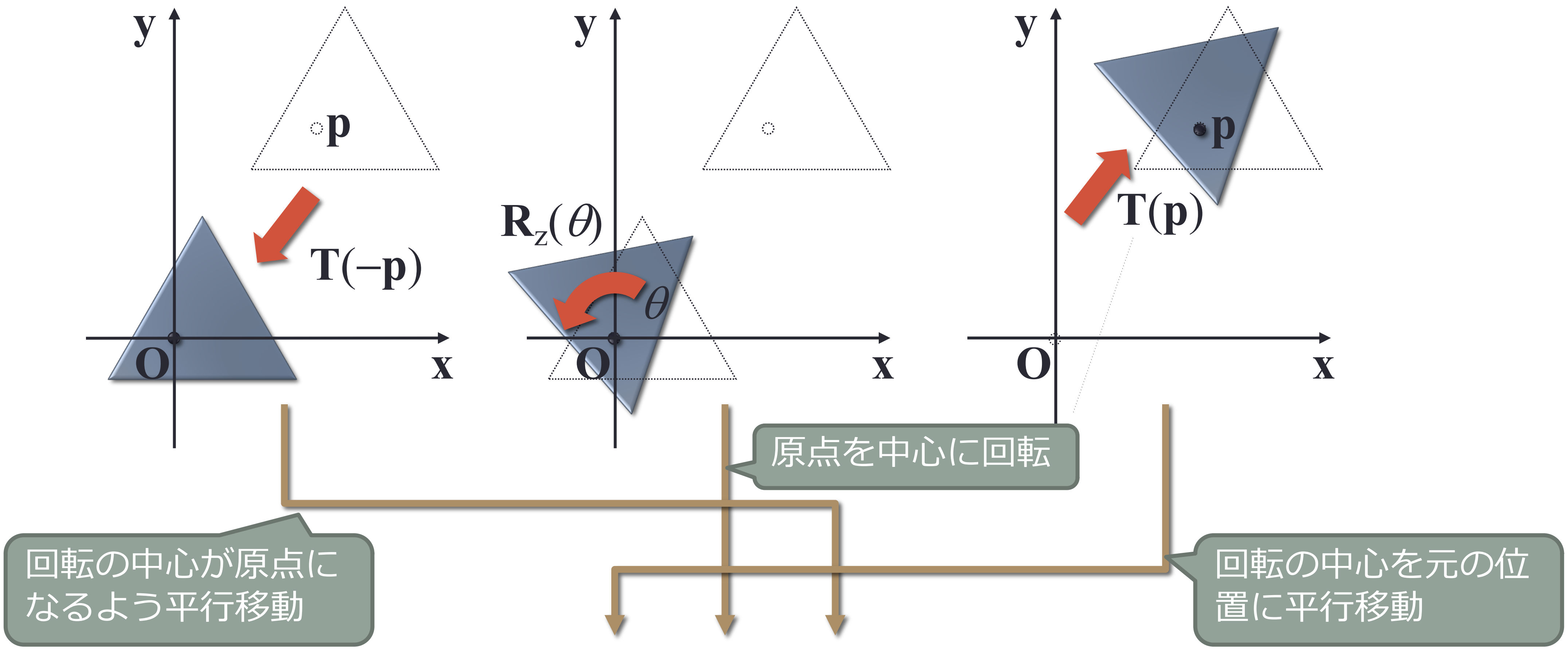
$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

回転



図形は原点を中心に回転される

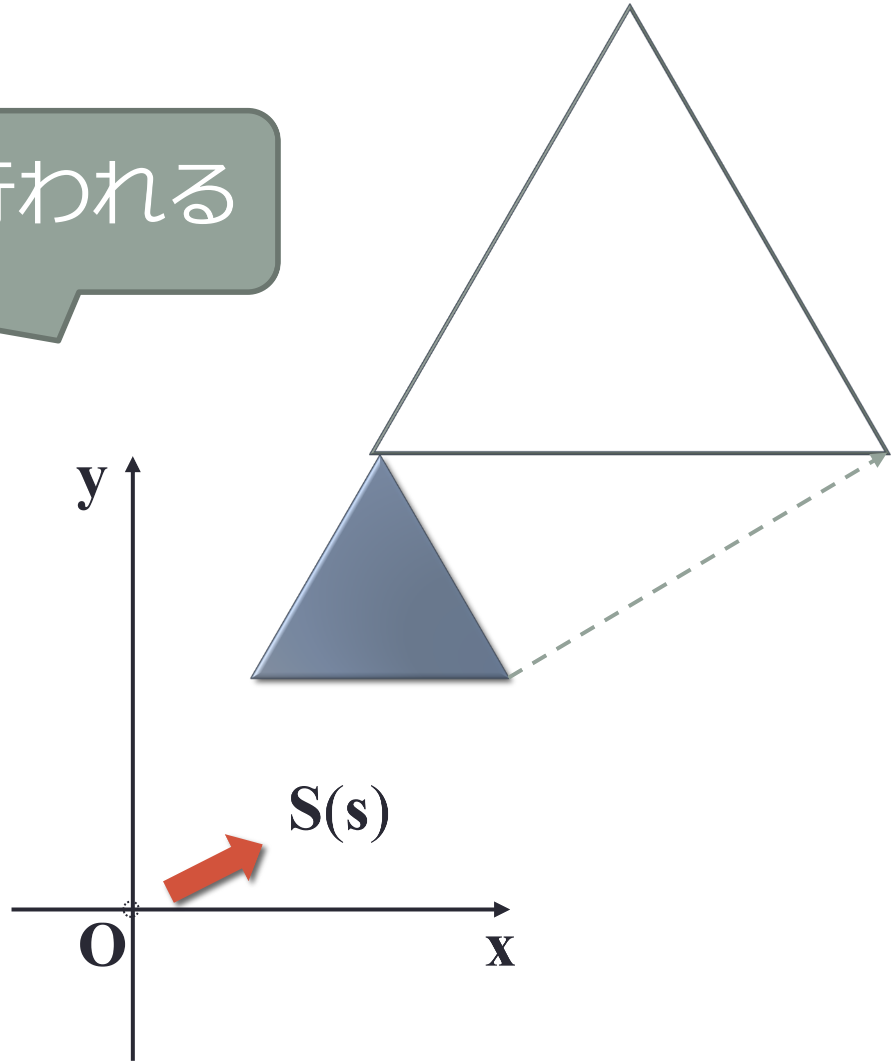
任意の点を中心にした回転



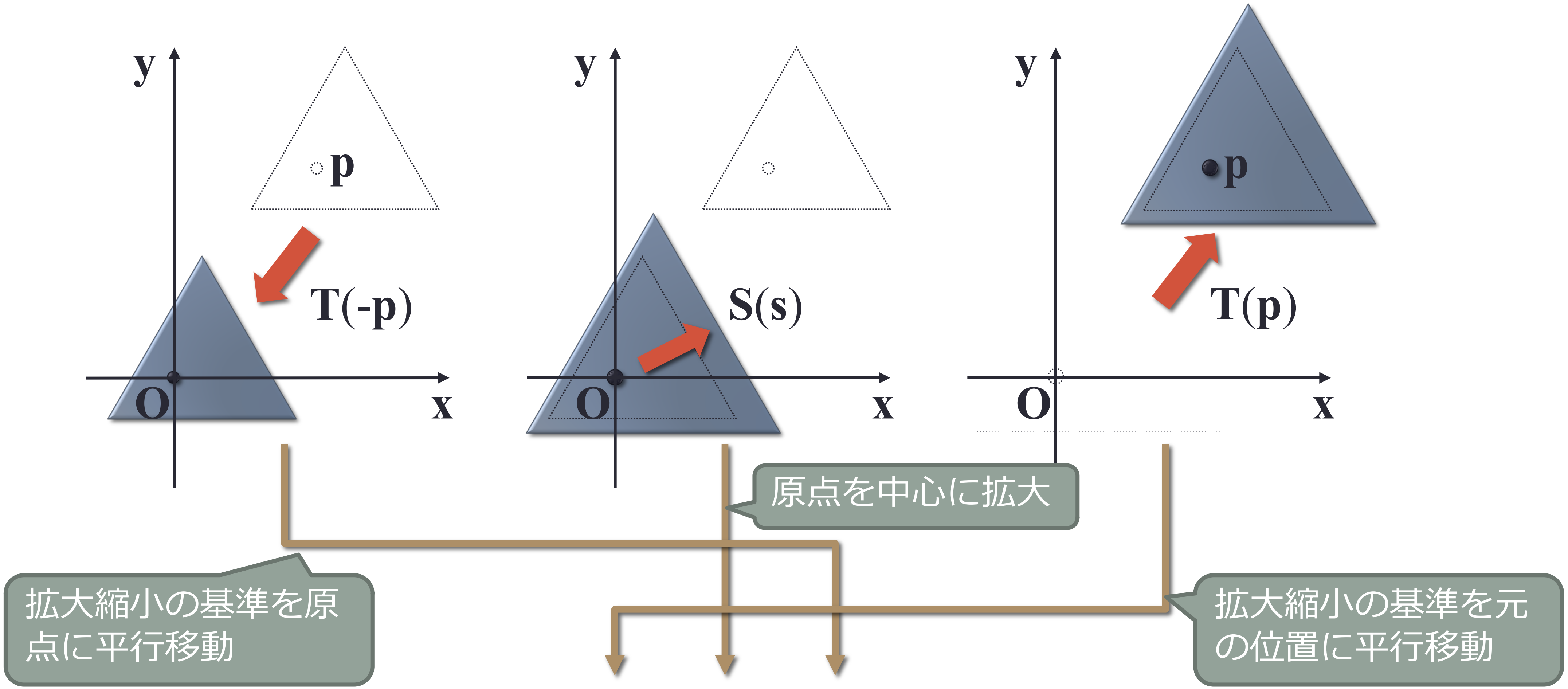
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p})\,\mathbf{R}_z(\theta)\,\mathbf{T}(-\mathbf{p})$$

拡大縮小

拡大縮小も原点を基準に行われる



任意の点を基準にした拡大縮小



$$M = T(p)\ S(s)\ T(-p)$$

特定方向への拡大縮小

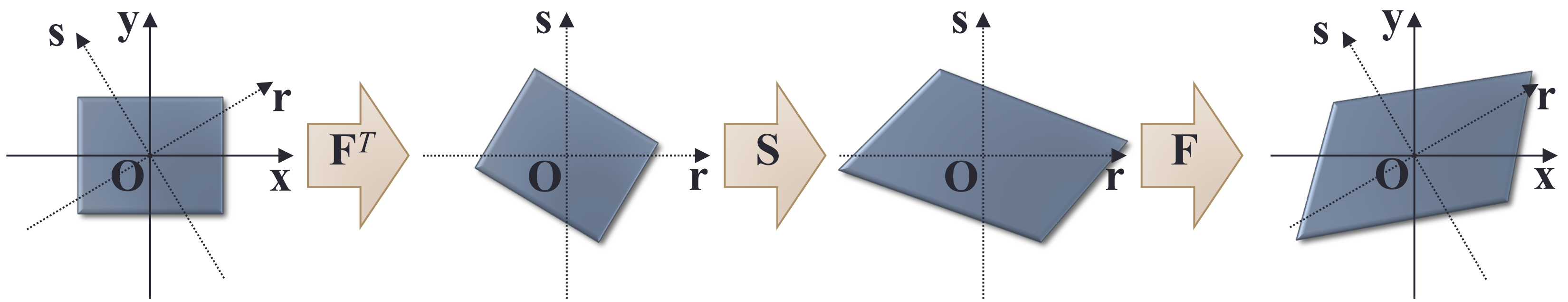
$\mathbf{S}$ ← (x y z) 軸方向の拡大縮小

$\begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{s} & \mathbf{t} \end{pmatrix}$ ← 拡大縮小する軸の方向

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{s} & \mathbf{t} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ← (x y z) 軸の空間から (r s t) 軸の空間への回転

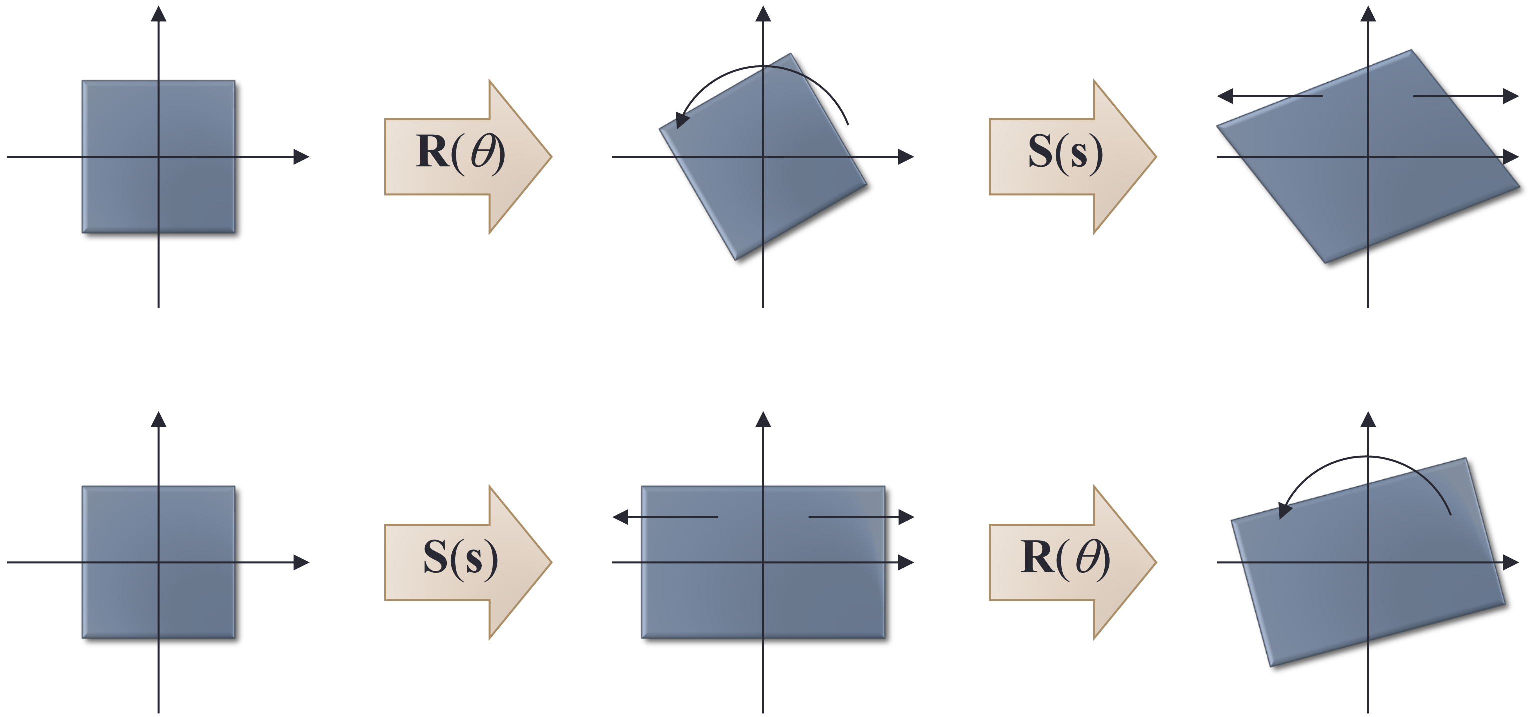
$$\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$$ ←

(r s t) 軸の空間 → (x y z) 軸の空間への回転
(x y z) 軸方向の拡大縮小
(x y z) 軸の空間 → (x y z) 軸の空間への回転



変換の連結

- 行列の積は非可換
  - 連結した変換の結果は行列の順序に依存する



オイラー変換

三つの角度で姿勢を決める

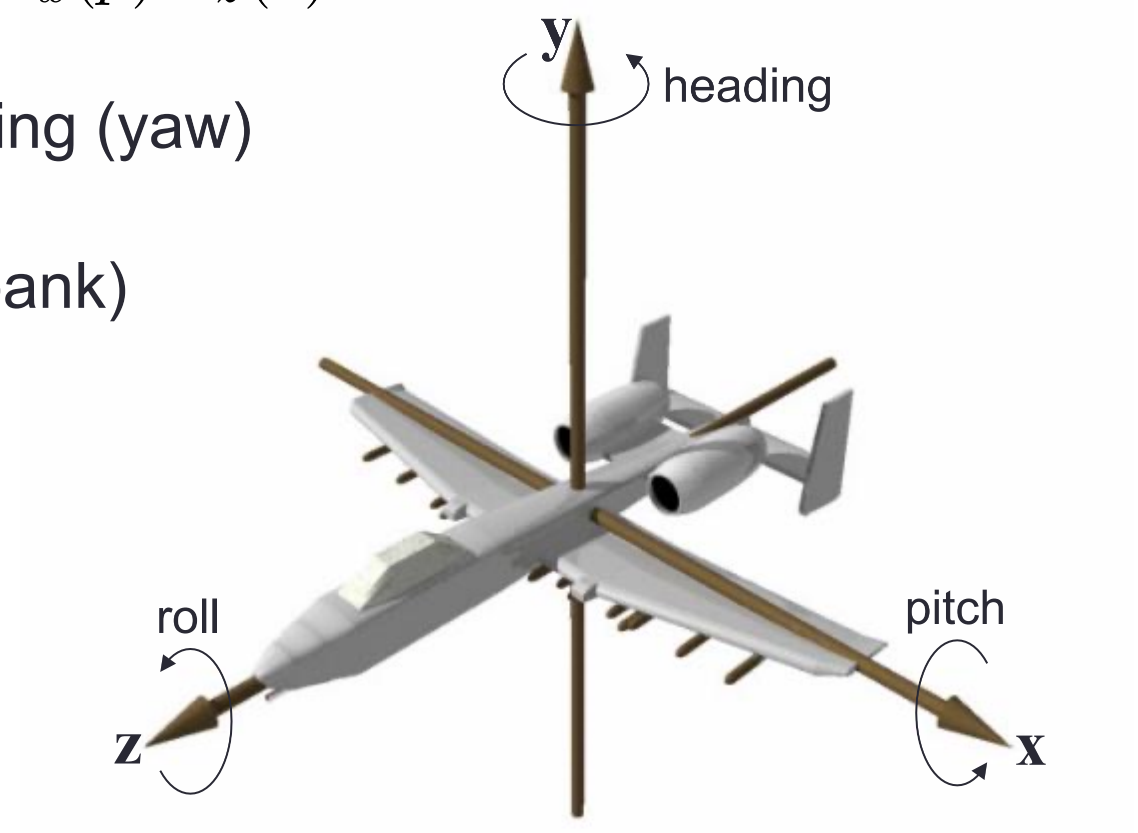
オイラー変換

$$\mathbf{E}(h, p, r) = \mathbf{R}_y(h)\mathbf{R}_x(p)\mathbf{R}_z(r)$$

オイラー角

h: heading (yaw)
p: pitch
r: roll (bank)

3つの角度で
姿勢を指定



オイラー変換

掛け方の順序は色々ある

heading (Y 軸中心の回転)

pitch (X 軸中心の回転)

roll (Z 軸中心の回転)

$$\mathbf{E}(h,p,r)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos h & 0 & \sin h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin h & 0 & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p & -\sin p & 0 \\ 0 & \sin p & \cos p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r & -\sin r & 0 & 0 \\ \sin r & \cos r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin h \sin p \sin r + \cos h \cos r & \sin h \sin p \cos r - \cos h \sin r & \sin h \cos p & 0 \\ \cos p \sin r & \cos p \cos r & -\sin p & 0 \\ \cos h \sin p \sin r - \sin h \cos r & \cos h \sin p \cos r + \sin h \sin r & \cos h \cos p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ジンバルロック

$p \to \pi/2$ のとき

$$\mathbf{E}(h, \pi/2, r) = \begin{pmatrix} \sin h \sin r + \cos h \cos r & \sin h \cos r - \cos h \sin r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos h \sin r - \sin h \cos r & \cos h \cos r + \sin h \sin r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(h-r) & \sin(h-r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(h-r) & \cos(h-r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r \to p \to h$ の順に回転するので $p \to \pi/2$ の回転を行うと r の回転軸（z 軸）が h の回転軸（y 軸）と一致してしまう

- これは $(r - h)$ の単一の角度に依存する1軸中心の回転

自由度が 1 つ減る

回転変換行列からオイラー角を算出する

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix} = \mathbf{E}(h, p, r) \text{ とすると}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \cos p \sin r \\ m_5 &= \cos p \cos r \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad r = \mathtt{atan2}(m_5, m_1)$$

$$m_9 = -\sin p \qquad \rightarrow \quad p = \mathtt{asin}(-m_9)$$

$$\left.\begin{aligned} m_8 &= \sin h \cos p \\ m_{10} &= \cos h \cos p \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad h = \mathtt{atan2}(m_{10}, m_8)$$

$$\text{もし } m_1 = m_5 = 0 \Rightarrow \cos p = 0 \quad \rightarrow \quad p = \pm\pi/2$$

これはジンバルロックの状態

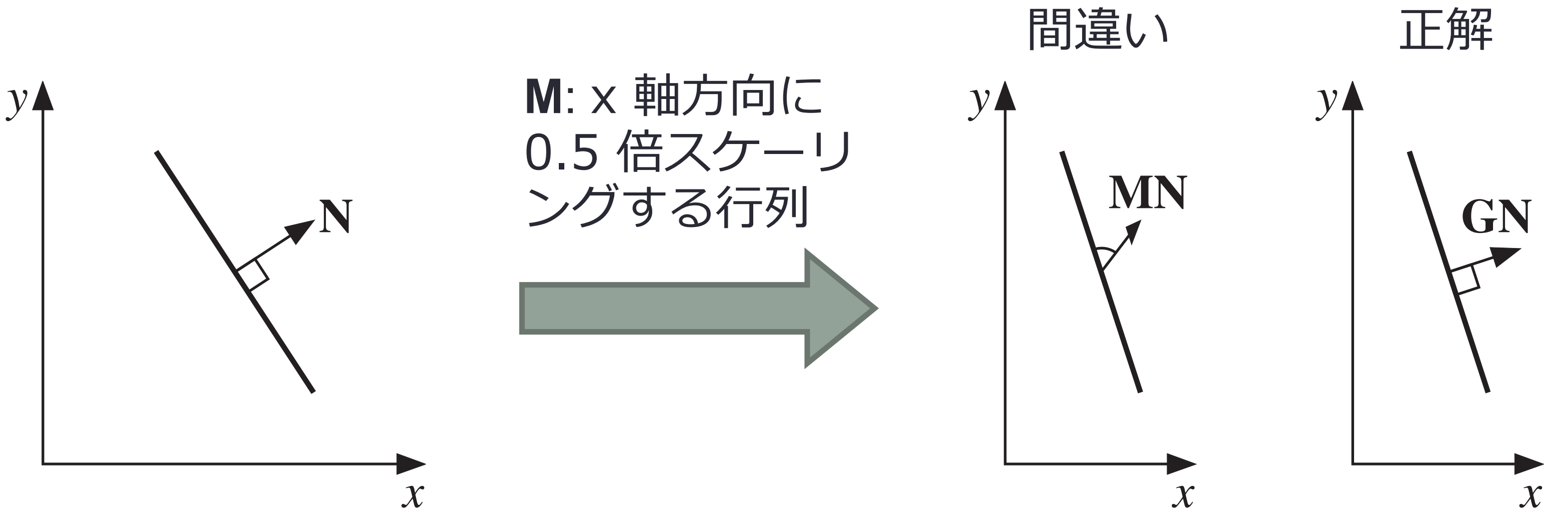
$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \cos(h \mp r) \\ m_4 &= \sin(h \mp r) \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} h &= 0 \\ r &= -\mathtt{atan2}(m_0, m_4) \end{aligned}$$

法線ベクトルの変換

面との直交性の維持

変換と法線ベクトル

- ベクトルも変換行列によって変換できる
- 面の頂点に適用した座標変換の行列をそのままその面の法線ベクトルに適用しても正しく変換できない場合がある



法線ベクトルの正しい変換

- $\mathbf{M}$: 形状の変換に用いる行列
- $\mathbf{G}$: この形状の法線ベクトルの変換に用いる行列

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{adj}\,(\mathbf{M})\}^{\top}$$

$\mathbf{G}$ に $\mathbf{M}$ の随伴行列の転置を用いる

$\mathrm{adj}\,(\mathbf{M})$: $\mathbf{M}$の随伴行列 (adjoint)

もし変換行列 $\mathbf{M}$ が回転のように直交行列なら
随伴行列はその転置行列なので

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}$$

随伴行列 (adjoint) の求め方

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boxed{m_{00}} & m_{10} & m_{20} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} \\ m_{02} & m_{12} & m_{12} \end{pmatrix} \qquad d^{\mathbf{M}}_{00} = \underbrace{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{12} \end{vmatrix}}_{\text{余因子}}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{00} & \boxed{m_{10}} & m_{20} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} \\ m_{02} & m_{12} & m_{12} \end{pmatrix} \qquad d^{\mathbf{M}}_{10} = \underbrace{\begin{vmatrix} m_{01} & m_{21} \\ m_{02} & m_{12} \end{vmatrix}}_{\text{余因子}}$$

$$\mathrm{adj}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \boxed{d^{\mathbf{M}}_{00}} & -d^{\mathbf{M}}_{01} & d^{\mathbf{M}}_{02} \\ \boxed{-d^{\mathbf{M}}_{10}} & d^{\mathbf{M}}_{11} & -d^{\mathbf{M}}_{12} \\ d^{\mathbf{M}}_{20} & -d^{\mathbf{M}}_{21} & d^{\mathbf{M}}_{22} \end{pmatrix}$$

ちなみに

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathrm{adj}(\mathbf{M})$$

であるから

でも $|\mathbf{M}|$ で割るのが嫌

$$\mathbf{G} = (\mathbf{M}^{-1})^{\top}$$

でも可

逆変換

逆行列をできるだけ簡単に求める

逆行列の計算

- クラメールの公式
  - 3 × 3 までの行列なら簡単
- ガウスの消去法など
  - 数値計算的手法
- 一般に計算コストが高い
  - できるだけ「楽に」逆行列を求めたい

$$\boxed{\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\operatorname{adj}(\mathbf{M})}$$

逆行列の求め方

- 平行移動

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(-\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 拡大縮小

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 回転

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}^T(\theta)$$

- せん断

$$\mathbf{H}_{ij}^{-1}(s) = \mathbf{H}_{ij}(-s)$$

逆行列の求め方

- 剛体変換

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{t})\,\mathbf{R}(\theta) \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R}(\theta)^{-1}\,\mathbf{T}(\mathbf{t})^{-1} = \mathbf{R}(-\theta)\,\mathbf{T}(-\mathbf{t}) = \mathbf{R}(\theta)^{\top}\,\mathbf{T}(-\mathbf{t})$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{\top} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{,0} & \mathbf{r}_{,1} & \mathbf{r}_{,2} & -\mathbf{R}^{\top}\mathbf{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \boxed{\mathbf{r}_{,0}{}^{\top}} \\ \rightarrow \boxed{\mathbf{r}_{,1}{}^{\top}} \\ \rightarrow \boxed{\mathbf{r}_{,2}{}^{\top}} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{\mathbf{r}_{0,}} & \boxed{\mathbf{r}_{1,}} & \boxed{\mathbf{r}_{2,}} \end{array} & \end{array} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{0,} & \mathbf{r}_{1,} & \mathbf{r}_{2,} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{,0}^{\top} \\ \mathbf{r}_{,1}^{\top} \\ \mathbf{r}_{,2}^{\top} \end{pmatrix}$$

逆行列の求め方

- オイラー変換

$$\mathbf{E}(h,p,r) = \mathbf{R}_y(h)\mathbf{R}_x(p)\mathbf{R}_z(r)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{-1}&(h,p,r)\\ &= \mathbf{E}^\top(h,p,r)\\ &= \{\mathbf{R}_y(h)\mathbf{R}_x(p)\mathbf{R}_z(r)\}^\top\\ &= \mathbf{R}_z^\top(r)\mathbf{R}_x^\top(p)\mathbf{R}_y^\top(h)\end{aligned}$$

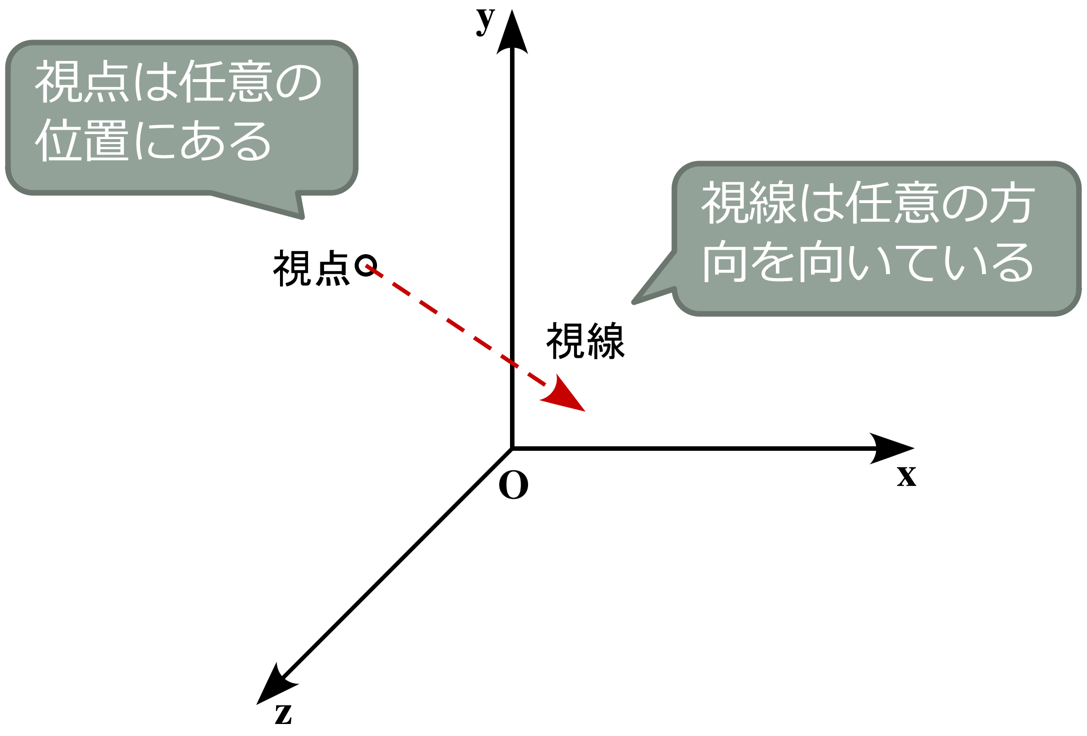
転置したものを
逆順に並べる

ビュー変換

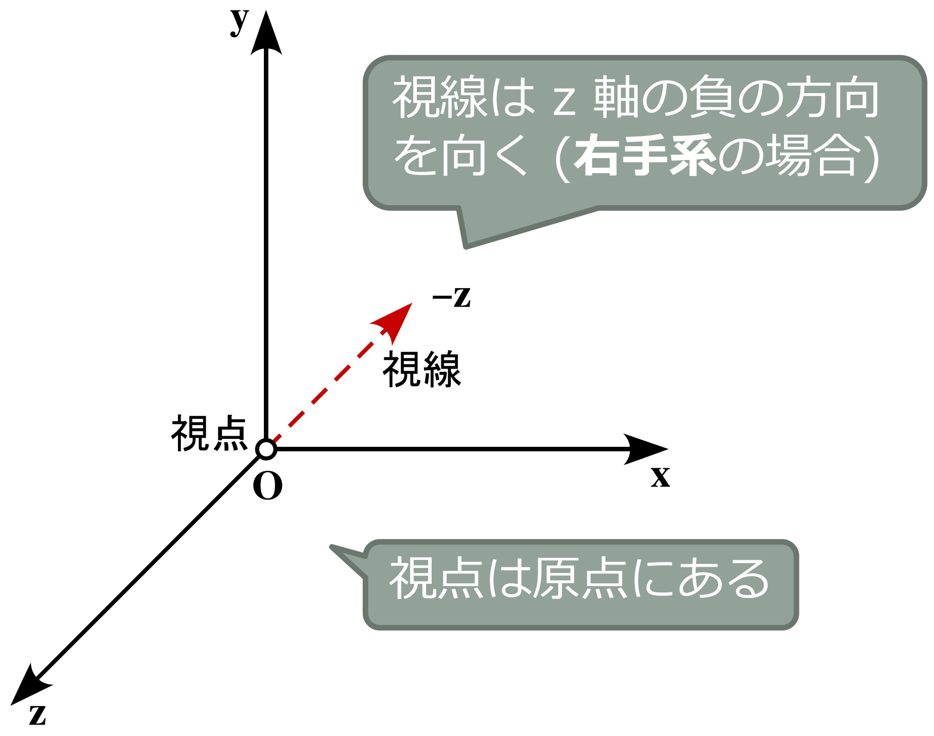
視点の位置や視線の方向を変更する

ビュー変換 (視野変換)

ビュー変換前

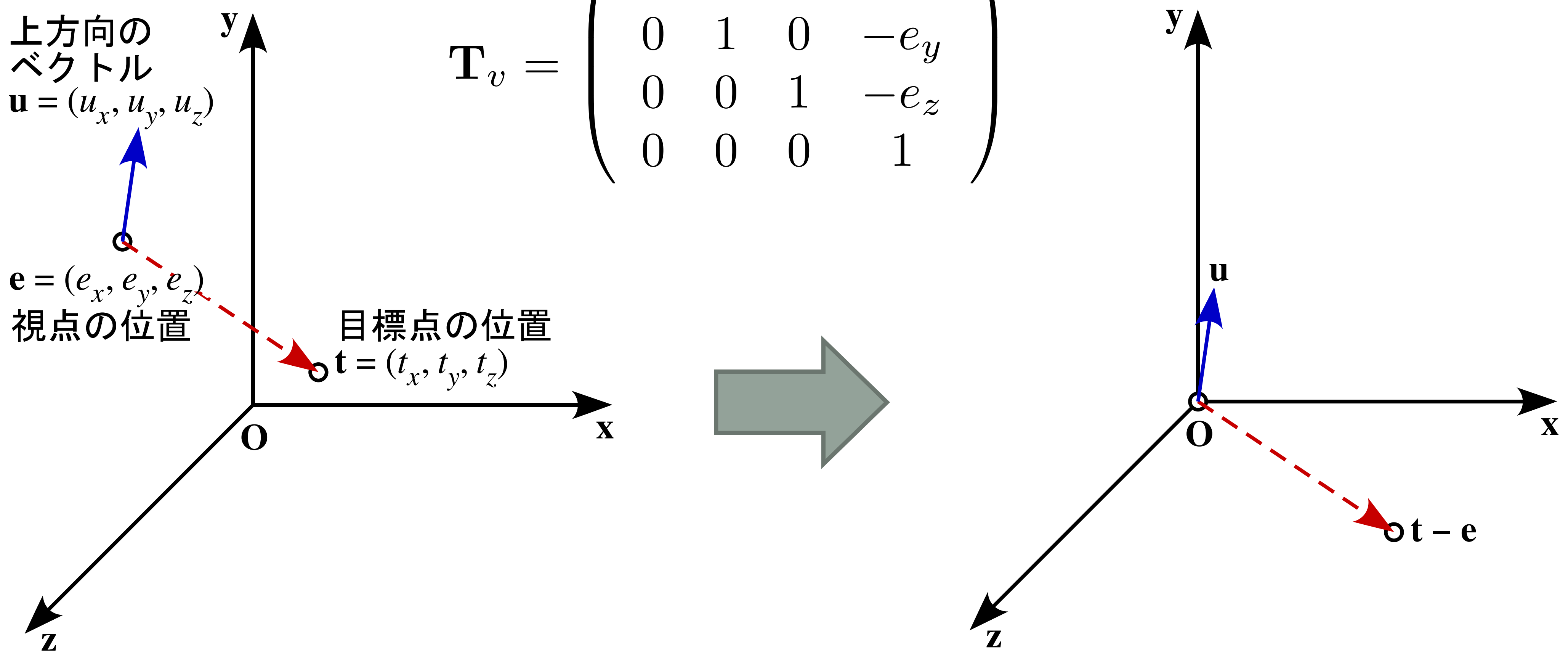


ビュー変換後



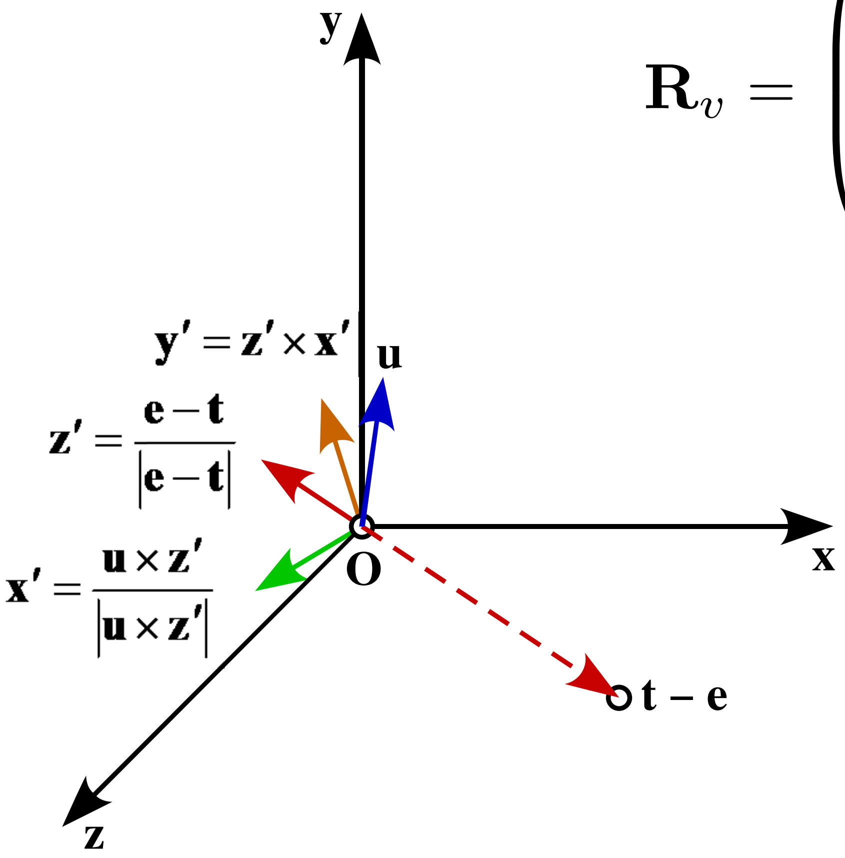
視点を原点に移す

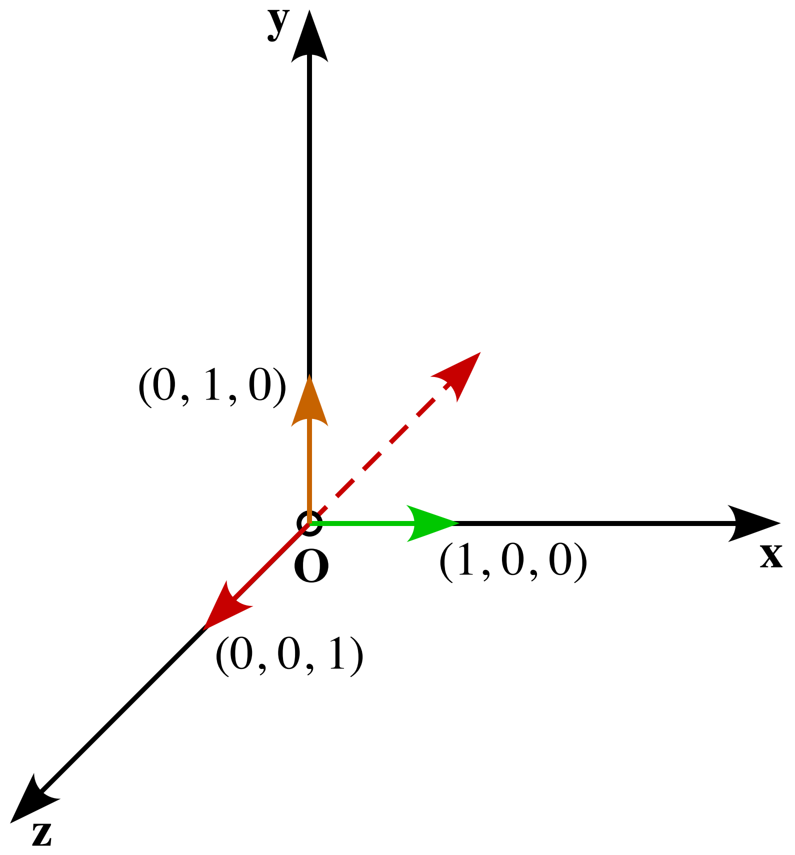
$$\mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



視線を z 軸の負の方向に向ける

$$\mathbf{R}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'^\top & 0 \\ \mathbf{y}'^\top & 0 \\ \mathbf{z}'^\top & 0 \\ \mathbf{0}'^\top & 1 \end{pmatrix}$$





視線の回転の変換行列

$$\mathbf{R}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'^{\top} & 0 \\ \mathbf{y}'^{\top} & 0 \\ \mathbf{z}'^{\top} & 0 \\ \mathbf{0}'^{\top} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & 0 \\ y'_x & y'_y & y'_z & 0 \\ z'_x & z'_y & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}'^{\top} = \begin{pmatrix} z'_x & z'_y & z'_z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} e_x - t_x & e_y - t_y & e_z - t_z \end{pmatrix}}{\sqrt{(e_x - t_x)^2 + (e_y - t_y)^2 + (e_z - t_z)^2}}$$

$$\mathbf{x}'^{\top} = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} u_y z'_z - u_z z'_y & u_z z'_x - u_x z'_z & u_x z'_y - u_y z'_x \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(u_y z'_z - u_z z'_y\right)^2 + \left(u_z z'_x - u_x z'_z\right)^2 + \left(u_x z'_y - u_y z'_x\right)^2}}$$

$$\mathbf{y}'^{\top} = \begin{pmatrix} y'_x & y'_y & y'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_y x'_z - z'_z x'_y & z'_z x'_x - z'_x x'_z & z'_x x'_y - z'_y x'_x \end{pmatrix}$$

ビュー変換行列

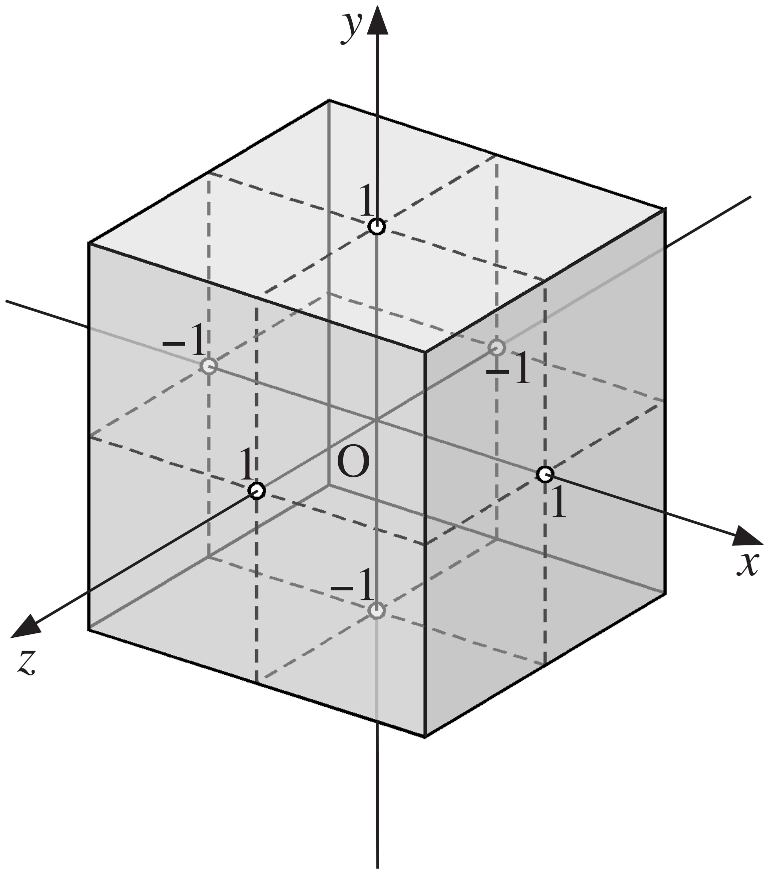
$$\mathbf{M}_v = \mathbf{R}_v \mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & 0 \\ y'_x & y'_y & y'_z & 0 \\ z'_x & z'_y & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & -e_x x'_x - e_y x'_y - e_z x'_z \\ y'_x & y'_y & y'_z & -e_x y'_x - e_y y'_y - e_z y'_z \\ z'_x & z'_y & z'_z & -e_x z'_x - e_y z'_y - e_z z'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

投影変換

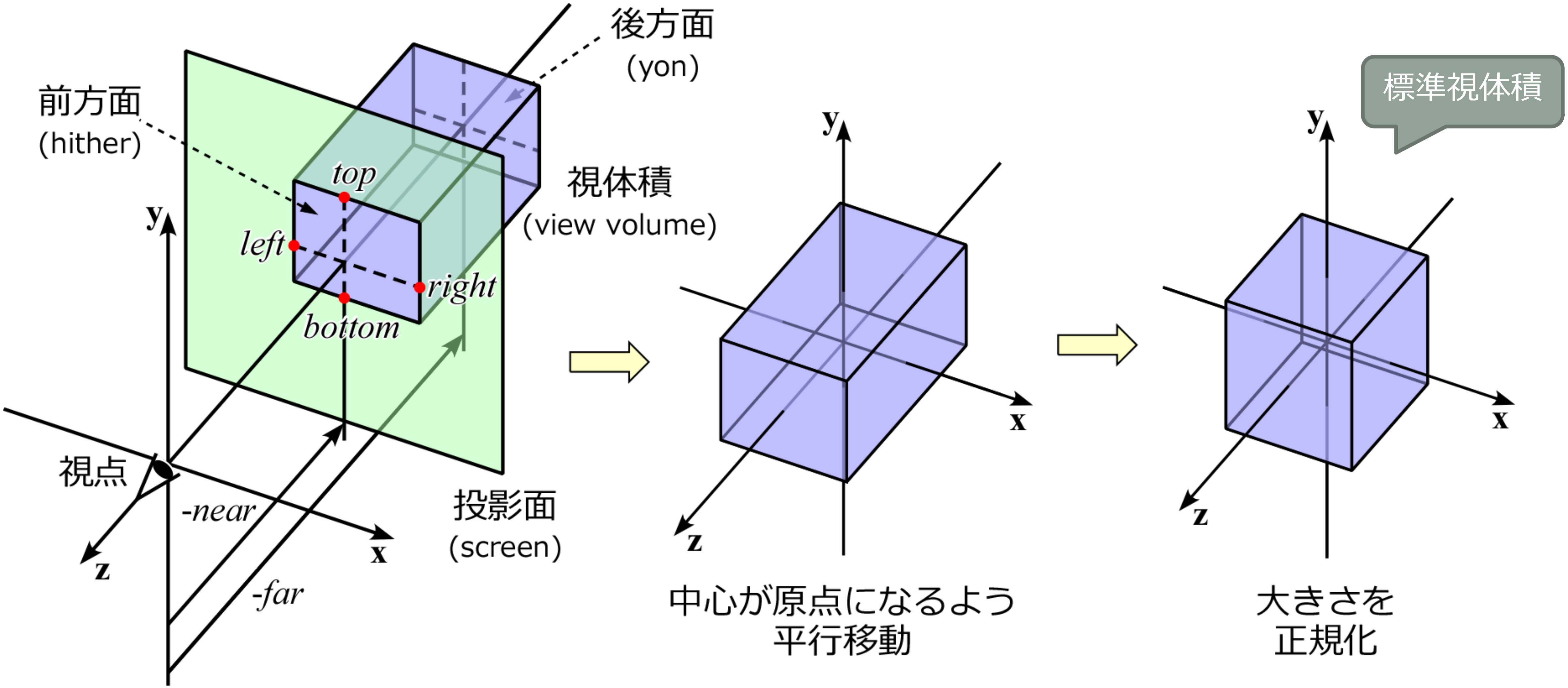
直交投影と透視投影

標準視体積 (Canonical View Volume)

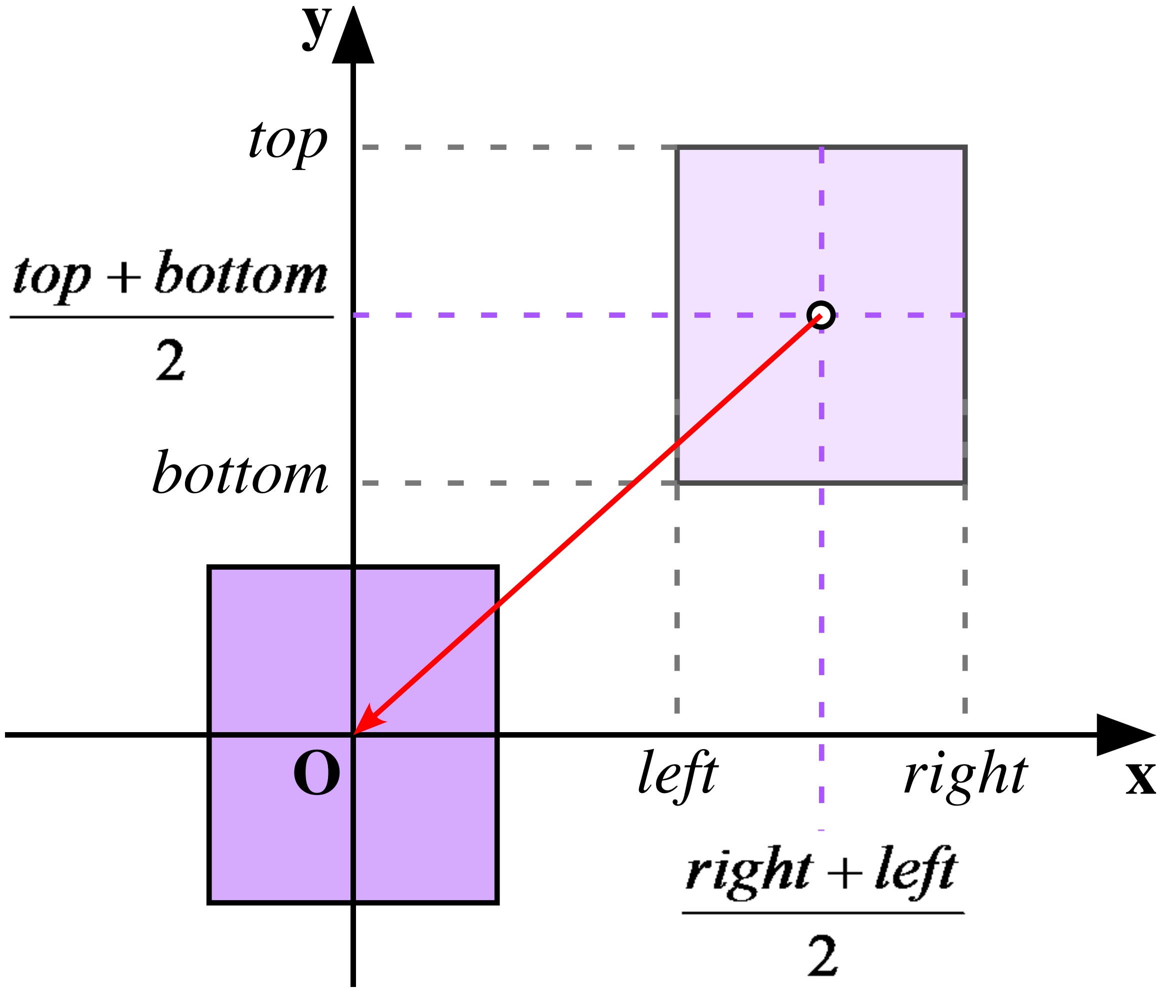


- グラフィックスハードウェアが図形を描画する空間
- $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ の立方体の空間
- この空間からはみ出たものは**クリッピング**される
  - はみ出た部分は画面には描かれない
- この空間のxy平面への直交投影像がデバイスの**ビューポート**に表示される
- この座標系はクリッピング座標系

直交投影

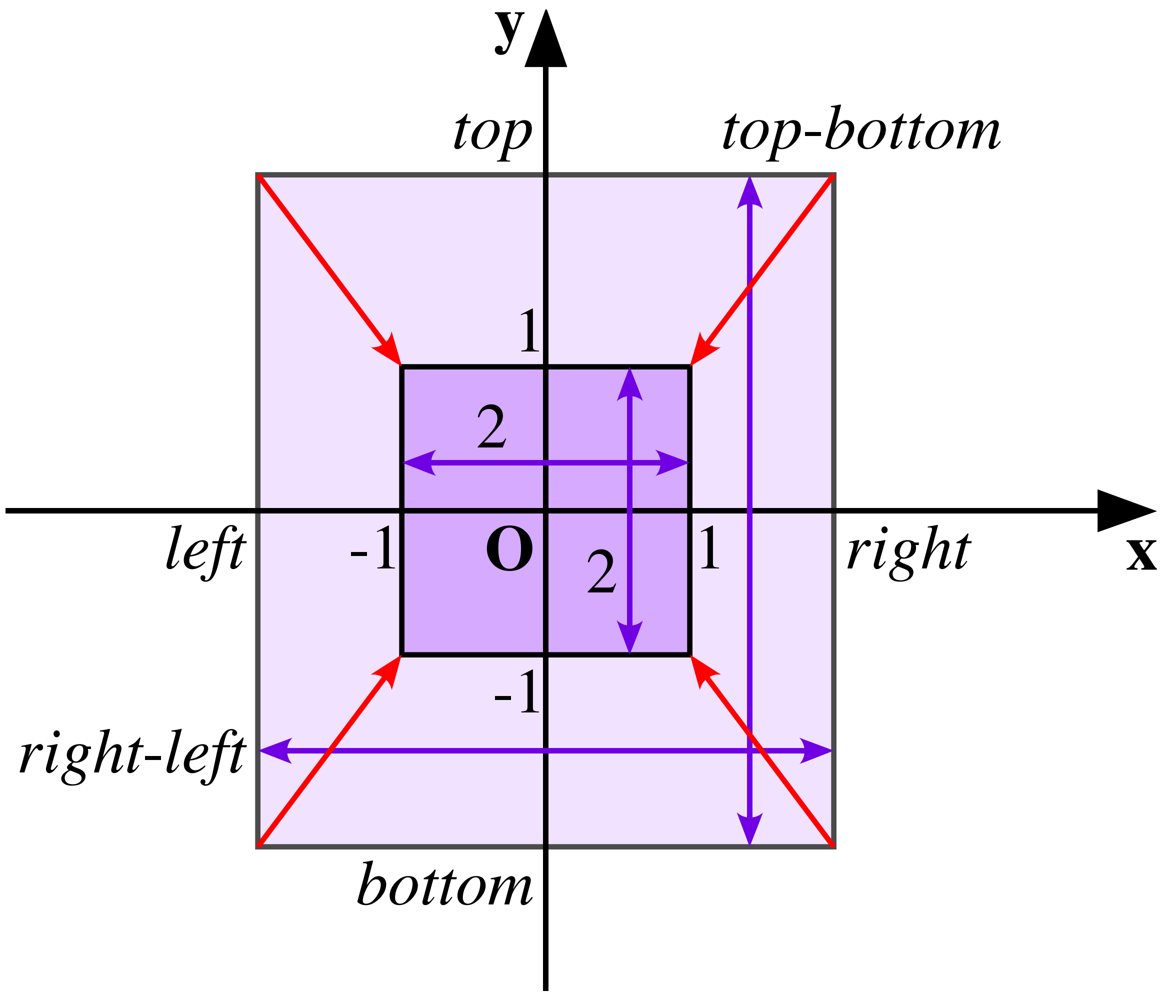

後方面
(yon)
前方面
(hither)
視体積
(view volume)
top
left
right
bottom
y
x
z
視点
-near
-far
投影面
(screen)
標準視体積
中心が原点になるよう
平行移動
大きさを
正規化

中心に平行移動



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{right + left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{top + bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{far + near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

スケーリングして大きさを正規化



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

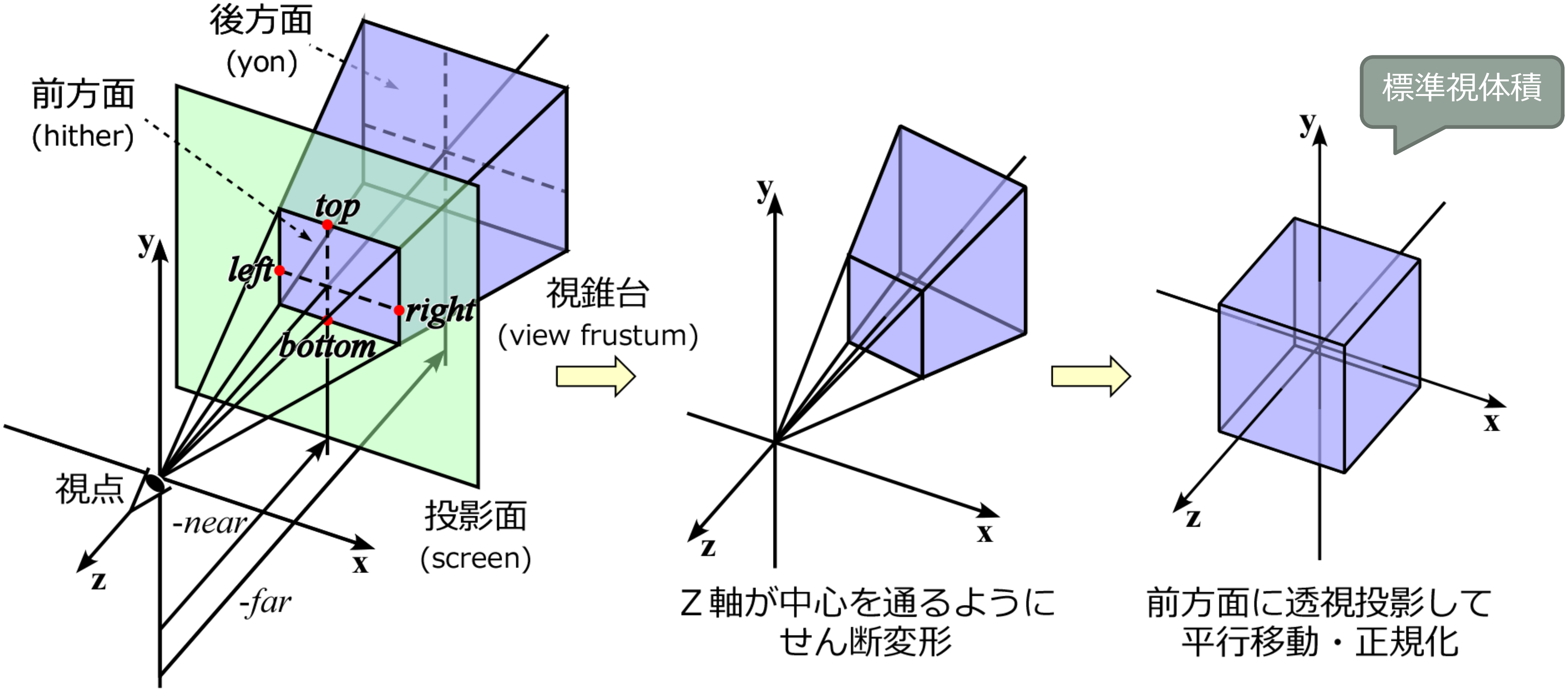
直交投影変換行列

スケーリング（正規化）　　平行移動

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{right+left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{top+bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{far+near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & -\frac{right+left}{right-left} \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

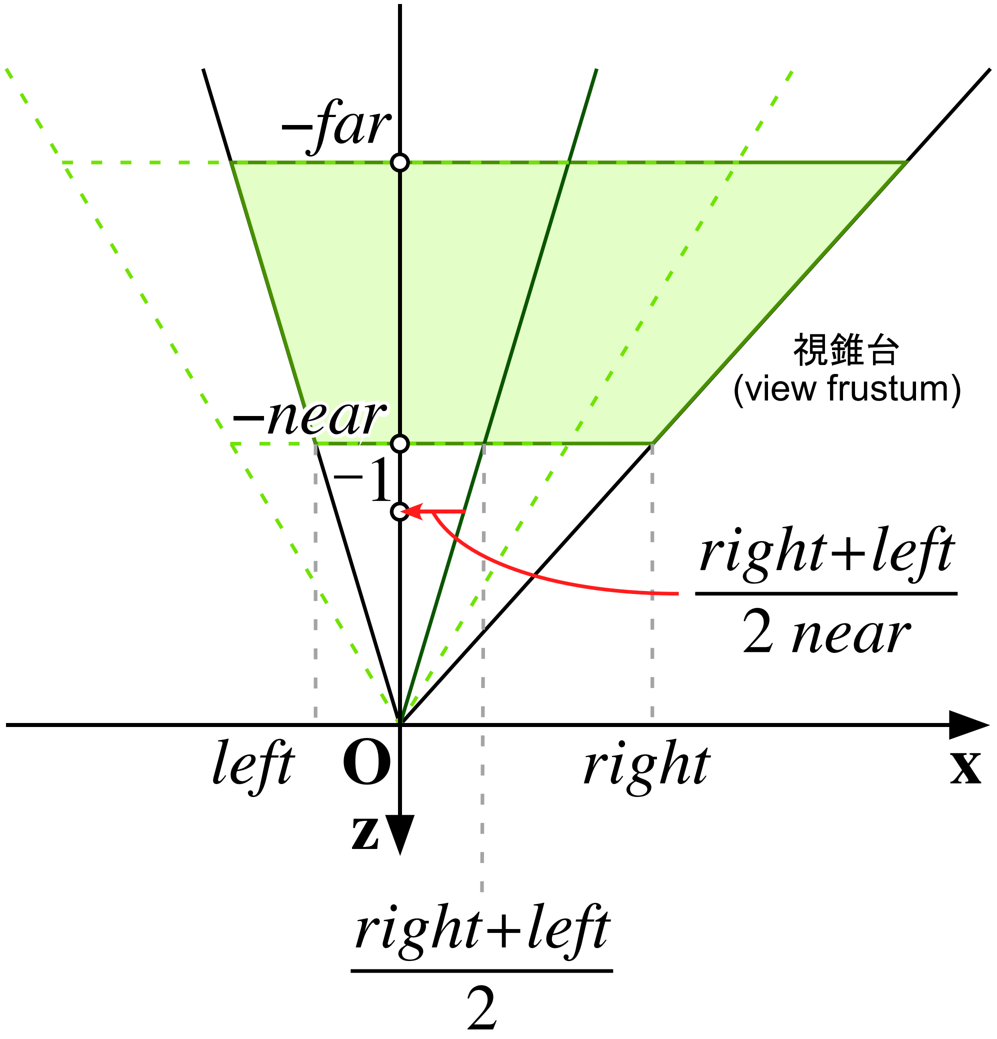
透視投影



Z 軸が中心を通るように
せん断変形

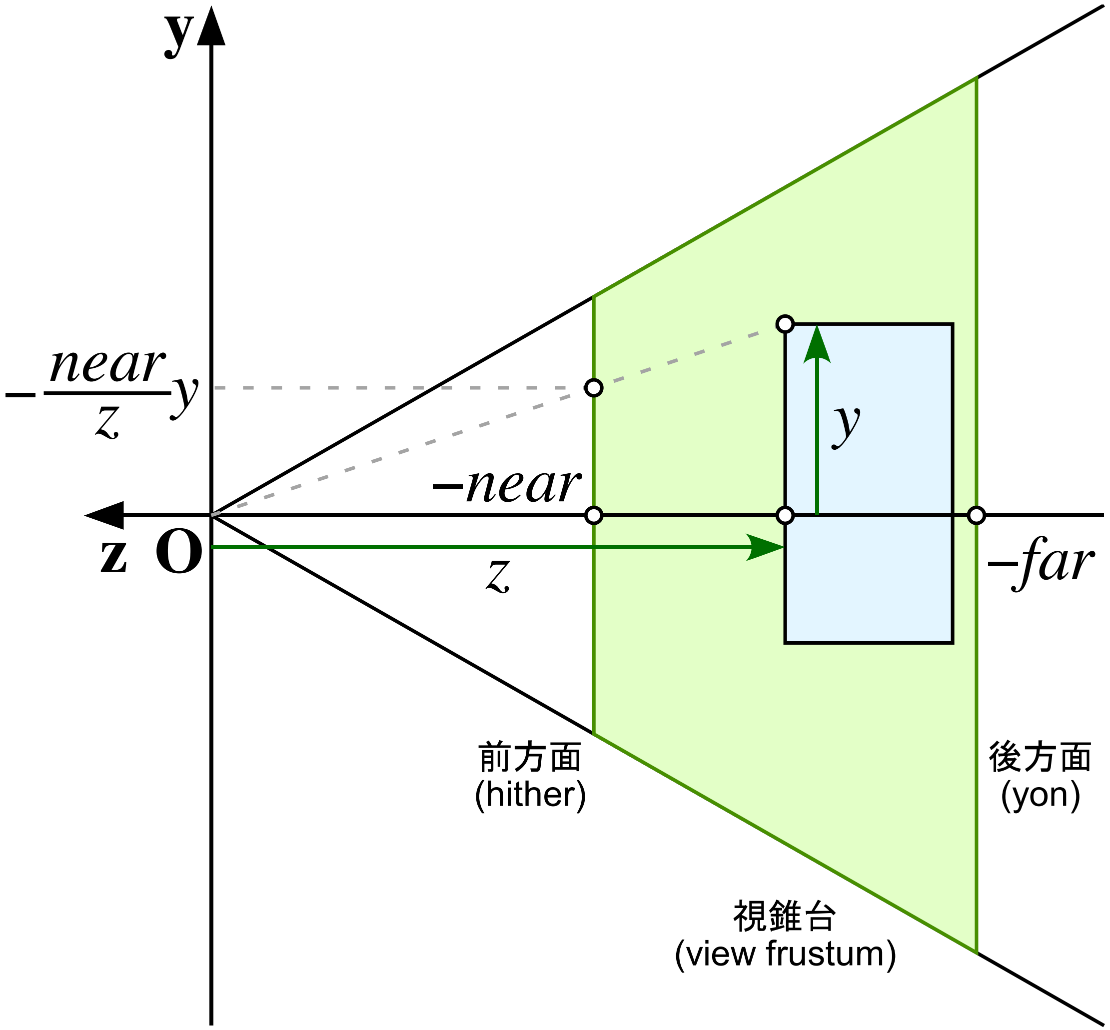
前方面に透視投影して
平行移動・正規化

視線が視錐台の中央を通るようにせん断変形



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{right+left}{2\,near} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{top+bottom}{2\,near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

前方面に透視投影



$$x^* = -\frac{near}{z}x$$

$$y^* = -\frac{near}{z}y$$

$$z^* = -\frac{far \cdot near}{z} - \frac{far + near}{2}$$

求め方は後述

透視深度

透視投影変換行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{2} & far \cdot near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = near \cdot x$$

$$y' = near \cdot y$$

$$z' = \frac{far+near}{2} z + far \cdot near$$

$$w' = -z$$

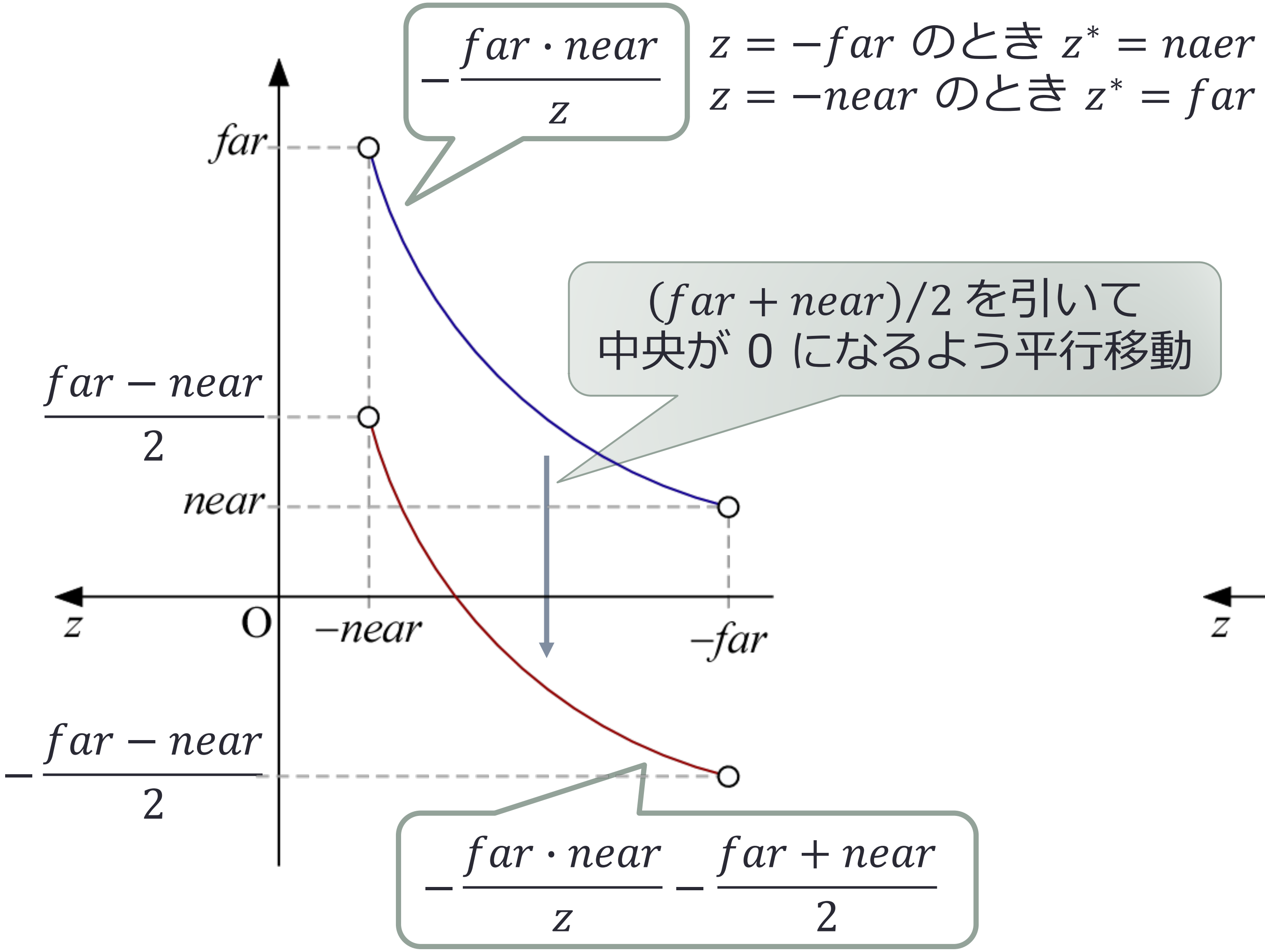
w'で割って標準座標を求める

$$x^* = -\frac{near}{z} x$$

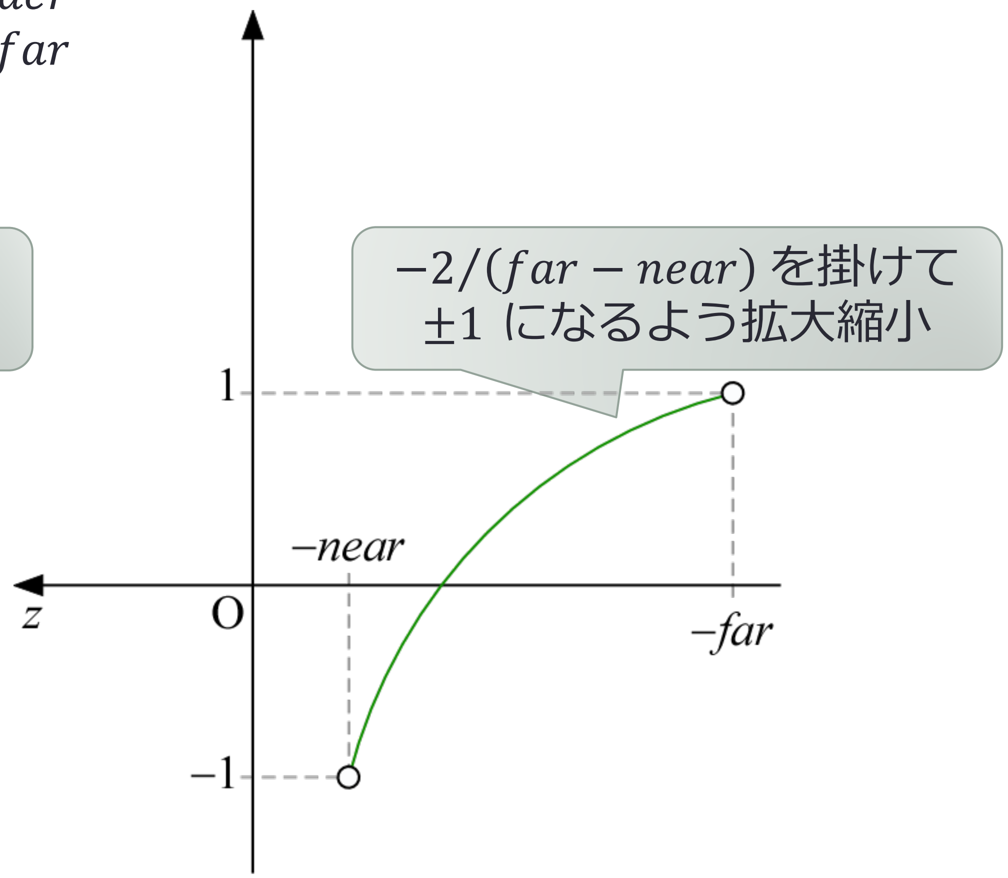
$$y^* = -\frac{near}{z} y$$

$$z^* = -\frac{far \cdot near}{z} - \frac{far+near}{2}$$

透視深度



$-\dfrac{far \cdot near}{z}$
$z = -far$ のとき $z^* = naer$
$z = -near$ のとき $z^* = far$
far
$\dfrac{far - near}{2}$
$near$
$(far + near)/2$ を引いて
中央が 0 になるよう平行移動
z
O
$-near$
$-far$
$-\dfrac{far - near}{2}$
$-\dfrac{far \cdot near}{z} - \dfrac{far + near}{2}$



$-2/(far - near)$ を掛けて
± 1 になるよう拡大縮小
1
$-near$
z
O
$-far$
-1

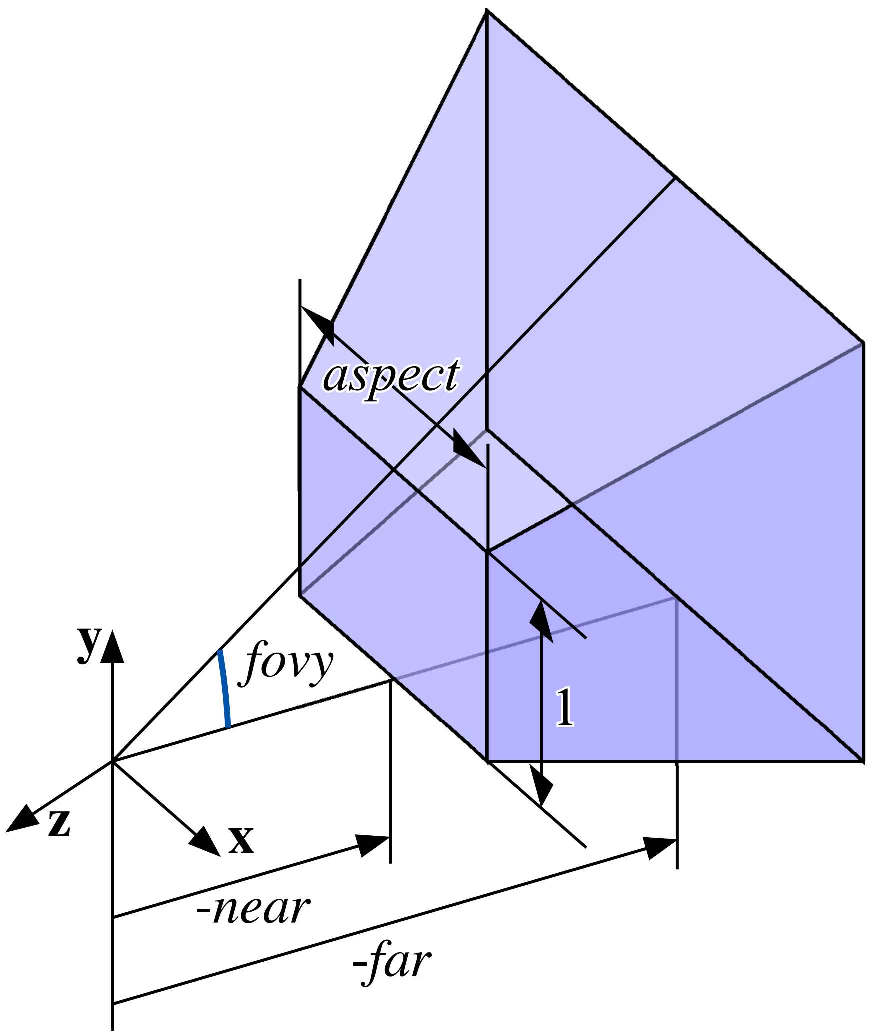
視錐台による透視投影変換行列

スケーリング（正規化）　透視投影　せん断

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{2} & far\,near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{right+left}{2near} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{top+bottom}{2near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2near}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & -\frac{2\,far\,near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

画角をもとにした透視投影変換行列



画角: field of view – fov
（y 方向の画角: fov-y → fovy）

$$f = \frac{1}{\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)} = \cot\left(\frac{fovy}{2}\right)$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{f}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2\,far\,near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

各変換行列の使い道

$\mathbf{M}_m$: モデリング変換行列（パーツごとの拡大・縮小，回転，平行移動等）

$\mathbf{M}_v$: ビュー変換行列　$\mathbf{M}_p$: 投影変換行列

$\mathbf{P}_l$: ローカル座標系の座標値　$\mathbf{N}_l$: ローカル座標系の法線ベクトル

$$\mathbf{P}_w = \mathbf{M}_m \mathbf{P}_l$$

ワールド座標系の座標値
陰影付けなどに用いる

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{adj}(\mathbf{M}_m)\}^\top \Rightarrow \mathbf{N}_w = \mathbf{G}\mathbf{N}_l$$

(要正規化)

ワールド座標系の法線ベクトル
陰影付けなどに用いる

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_p \mathbf{M}_v \mathbf{M}_m \Rightarrow \mathbf{P}_c = \mathbf{M}_c \mathbf{P}_l$$

クリッピング座標系の座標値
gl_Position に代入する

OpenGL の変換行列

GLSL における座標変換と uniform 変数

OpenGL の変換行列の要素の順序

この講義での行列表記

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix}$$

C/C++ 言語の配列の格納順序

```
GLfloat m[] = {
  m[ 0], m[ 1], m[ 2], m[ 3],
  m[ 4], m[ 5], m[ 6], m[ 7],
  m[ 8], m[ 9], m[10], m[11],
  m[12], m[13], m[14], m[15],
};
```

見かけ上転置している

変換行列をシェーダプログラムで使う

- **uniform 変数**
  - 描画単位 (glDrawArrays(), glDrawElements() 等) で不変な値
    - 変換行列，光源位置，視点位置，材質情報等
  - 各シェーダステージから共通して参照される
    - CPU 側のプログラムで値を設定する
    - シェーダプログラムからは**読み出しのみ**

attribute 変数は
頂点ごとに変化する

バーテックスシェーダのソースプログラム

```
#version 410

// シェーダの入力変数の宣言
in vec4 pv;

// 変換行列の uniform 変数の宣言
uniform mat4 mc;

// バーテックスシェーダのエントリポイント
void main(void)
{
  gl_Position = mc * pv;
}
```

行列と
ベクトルの積

- **uniform**
  - uniform 変数の宣言
- **mat4**
  - 実数 (float) 4×4 要素の行列データ型
- **mc**
  - mat4 型のユーザ定義 uniform 変数

uniform 変数に行列を設定する

- シェーダプログラムの作成（loadShader() を使う場合）
  - GLuint program = createProgram(…);
- この後に uniform 変数 mc の場所 (location) を求める
  - GLint mcLoc = glGetUniformLocation(program, "mc");
    - uniform 変数はシェーダのハードウェアの**共有メモリ**に割り当てられる
    - glGetUniformLocation() は uniform 変数に割り当てられた共有メモリの**場所**を求める
- 描画時に使用するシェーダプログラムの選択
  - glUseProgram(program);
- その後に mat4 型の uniform 変数に値を設定する
  - glUniformMatrix4fv(mcLoc, *count*, *transpose*, mc);
    - *count*: 設定する配列変数の数（行列の数が１個なら1）, *transpose*: m を転置するなら GL_TRUE, しないなら GL_FALSE

glDrawArrays() による描画

```
// uniform 変数 mc の場所を得る
const GLint mcLoc(glGetUniformLocation(program, "mc"));

// クリッピング座標系への 4 行 4 列の変換行列 Mc
GLfloat mc[16];
==============================================================
// シェーダプログラムを選択する
glUseProgram(program);

// uniform 変数 mc に配列 mc の内容を格納する
glUniformMatrix4fv(mcLoc, 1, GL_FALSE,  mc);

// 描画する頂点配列オブジェクトを選択する
glBindVertexArray(vao);

// 図形を描画する
glDrawArrays(GL_POINTS, 0, 6);
```

行列の数は 1 つ

mc の内容を転置しない

小テストー変換 (1)

Moodle の小テストに解答してください

宿題

- 第２回の宿題の図形にビュー変換と透視投影変換を行ってください
  - 次のプログラムの ggsample03.cpp で定義している関数 lookat() および perspective() には中身が実装されていません
    - https://github.com/tokoik/ggsample03
  - これらの関数の中身を実装してください
    - 透視投影変換行列を求めて引数の配列変数 m に格納する関数 perspective()
    - ビュー変換行列を求めて引数の配列変数 m に格納する関数 lookat()
  - また関数 app() で透視投影変換行列とビュー変換行列の積を求め，シェーダプログラムの uniform 変数 mc に格納してください
  - バーテックスシェーダで頂点座標に uniform 変数 mc をかけてください
- ggsample03.cpp と ggsample03.vert を**アップロード**してください

結果

このような画像が表示されれば、多分、正解です。