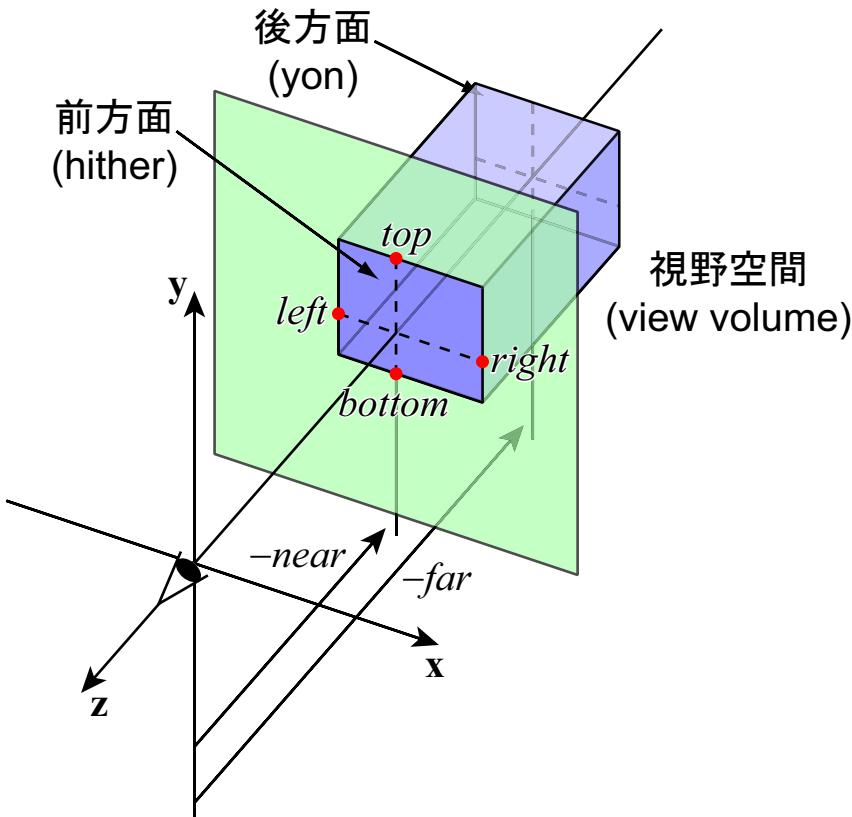


コンピュータグラフィックス

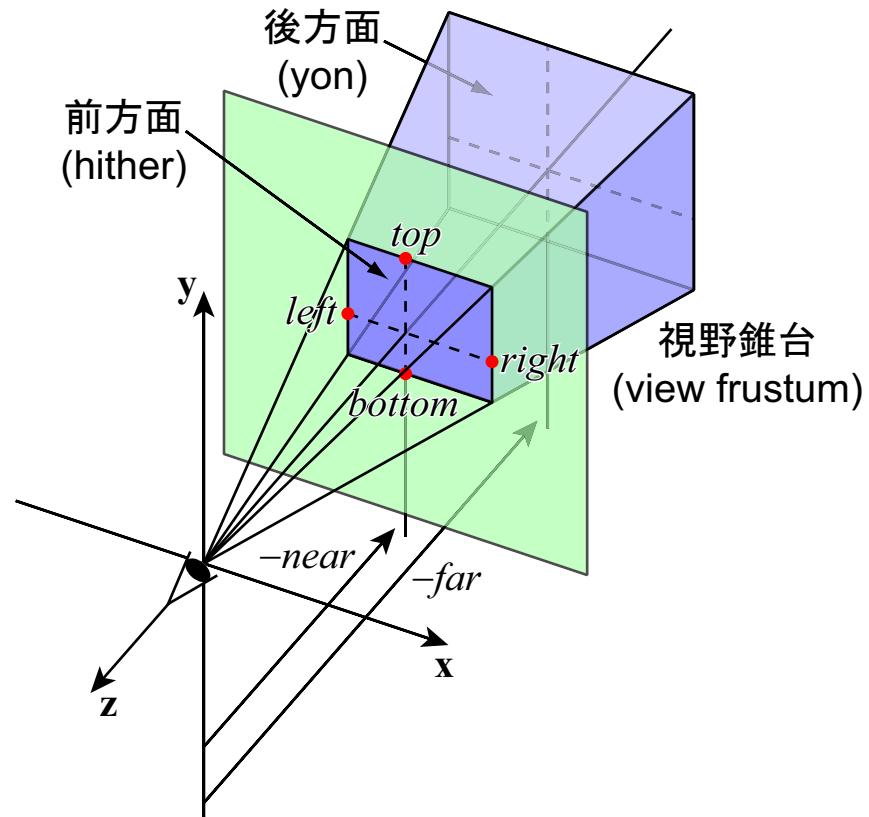
第8回：スクリーンに映す

投影

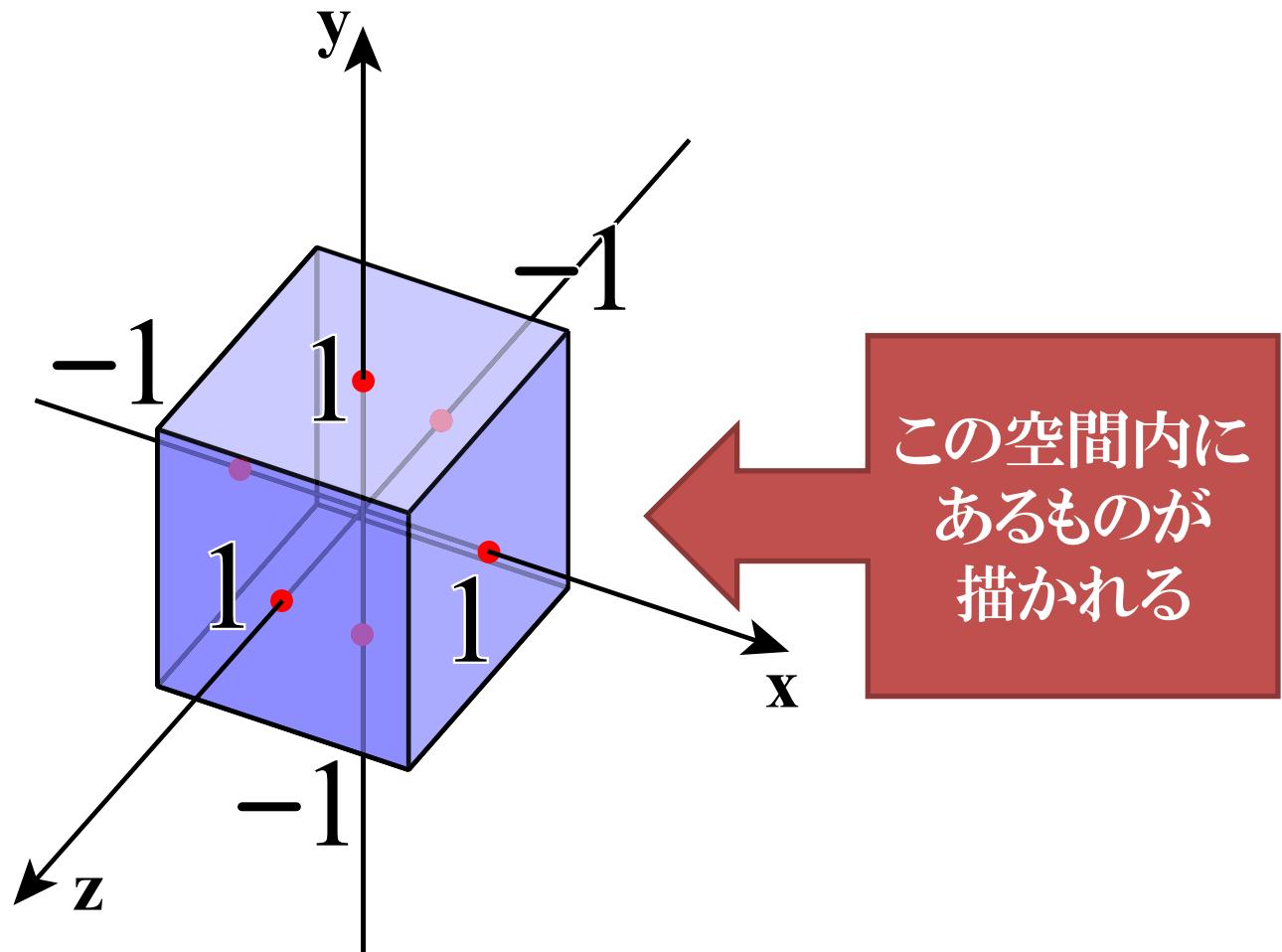
直交投影(平行投影)



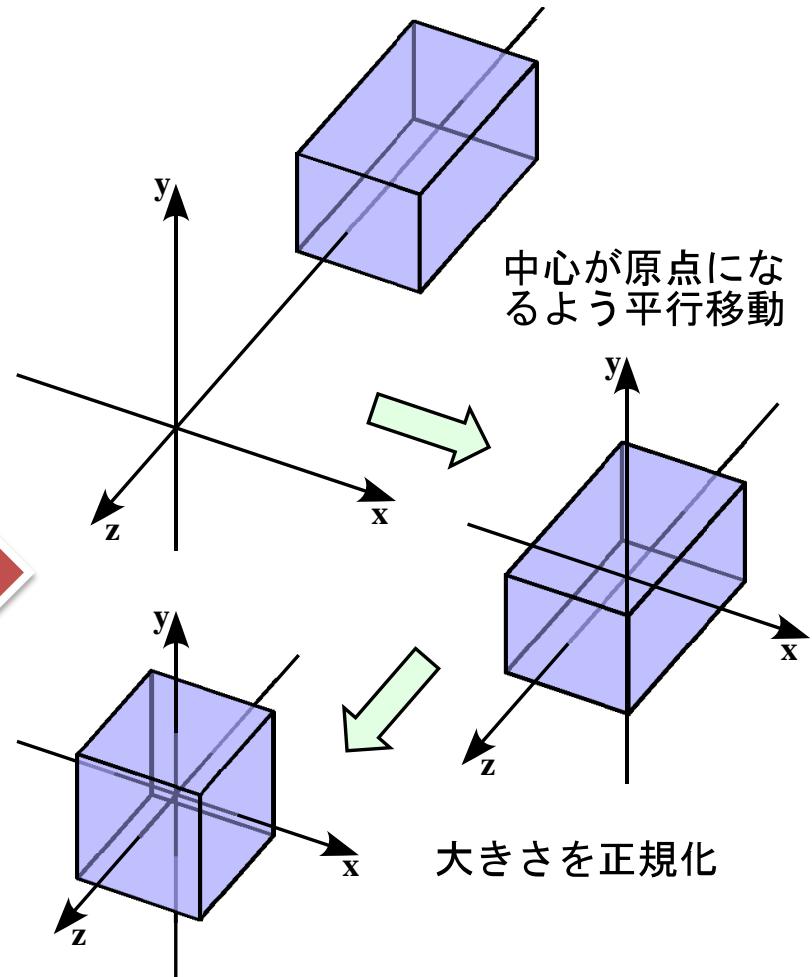
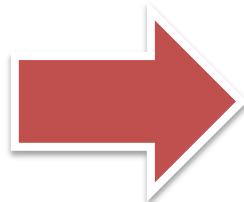
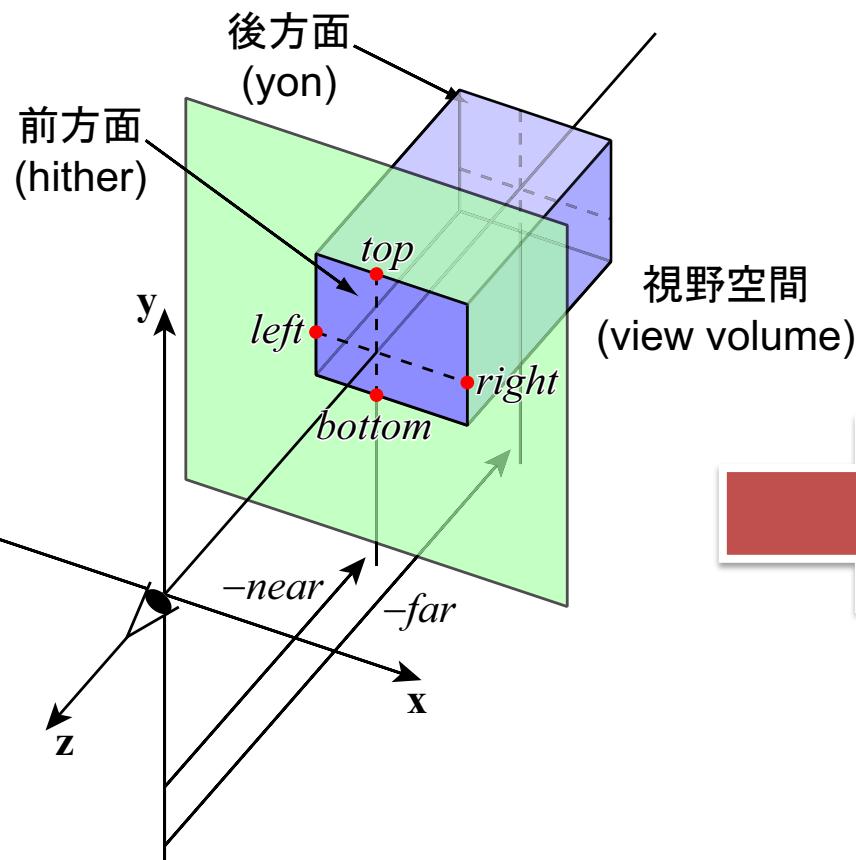
透視投影



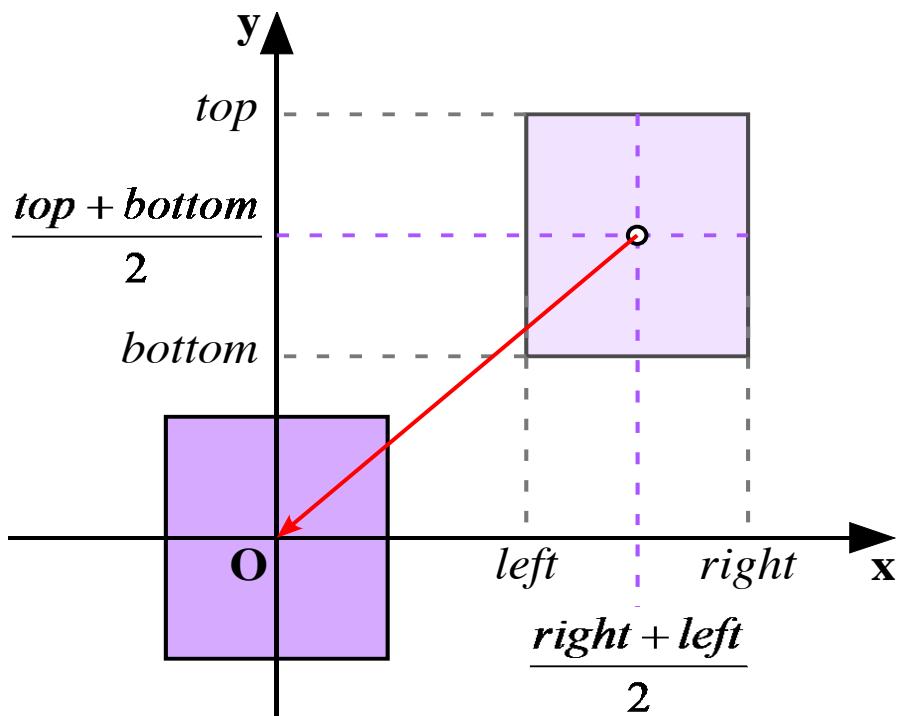
クリッピング空間



直交投影 (平行投影)

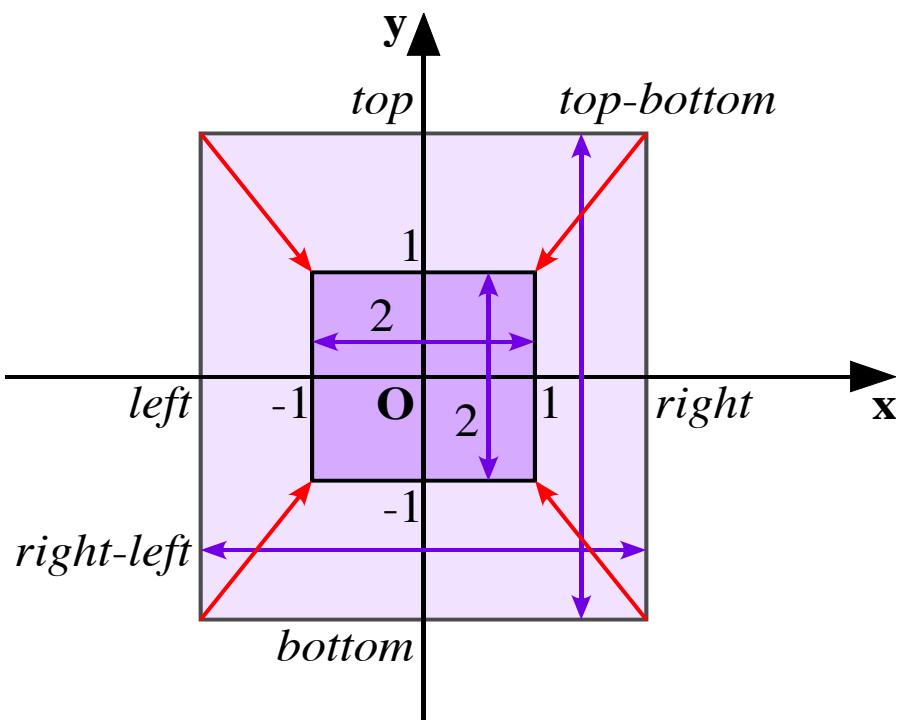


中心に平行移動



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{right + left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{top + bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{far + near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

スケーリングして大きさを正規化



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

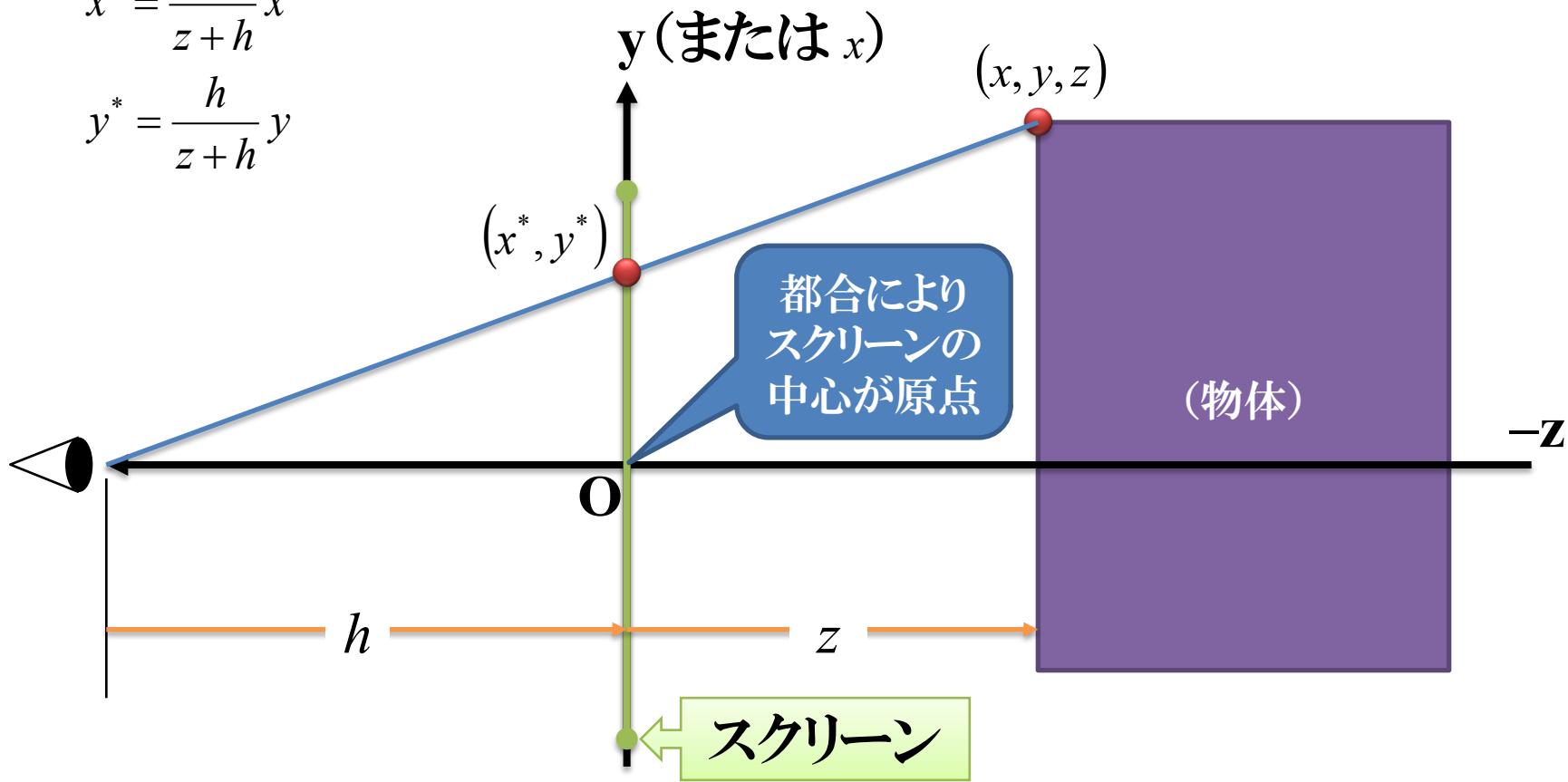
直交投影(平行投影)変換行列

スケーリング(正規化)	平行移動
$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{right + left}{2} \\ -\frac{top + bottom}{2} \\ \frac{far + near}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & -\frac{right + left}{right - left} \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & -\frac{top + bottom}{top - bottom} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & -\frac{far + near}{far - near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

透視投影

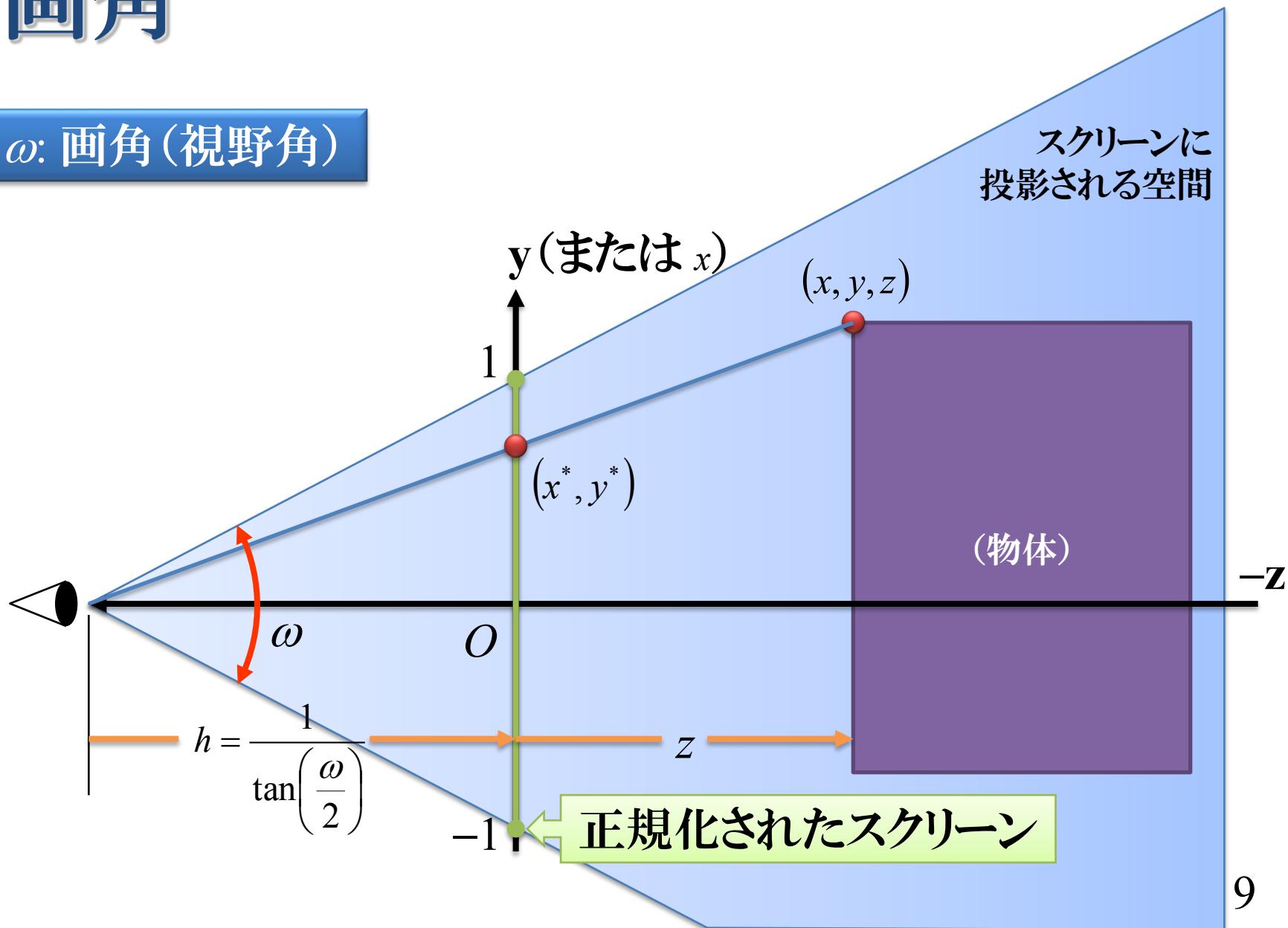
$$x^* = \frac{h}{z+h} x$$

$$y^* = \frac{h}{z+h} y$$



画角

ω : 画角(視野角)



透視変換行列

$$\left. \begin{array}{l} x^* = \frac{h}{z+h} x \\ y^* = \frac{h}{z+h} y \end{array} \right\} \frac{h}{z+h} \text{で } x, y \text{ を割る} \rightarrow w = \frac{1}{\frac{h}{z+h}} = z/h + 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/h + 1 \end{pmatrix}$$

変換行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/h + 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x^* = \frac{x'}{w'} = \frac{1}{z/h + 1} x = \frac{h}{z+h} x \\ y^* = \frac{y'}{w'} = \frac{1}{z/h + 1} y = \frac{h}{z+h} y \\ z^* = \frac{z'}{w'} = \frac{1}{z/h + 1} z = \frac{h}{z+h} z \end{array}$$

透視深度

透視深度の正規化

$$z^* = \frac{z'}{w'} = \frac{1}{z/h+1} z = \frac{h}{z+h} z \rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h}{z+h} z = 0, \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{h}{z+h} z = h \rightarrow 0 \leq z^* \leq h$$

$$0 \leq z^* \leq h \rightarrow -1 \leq z_c \leq 1 \quad (z_c: \text{クリッピング座標系の座標値})$$

2 / h 倍して 1 を引く

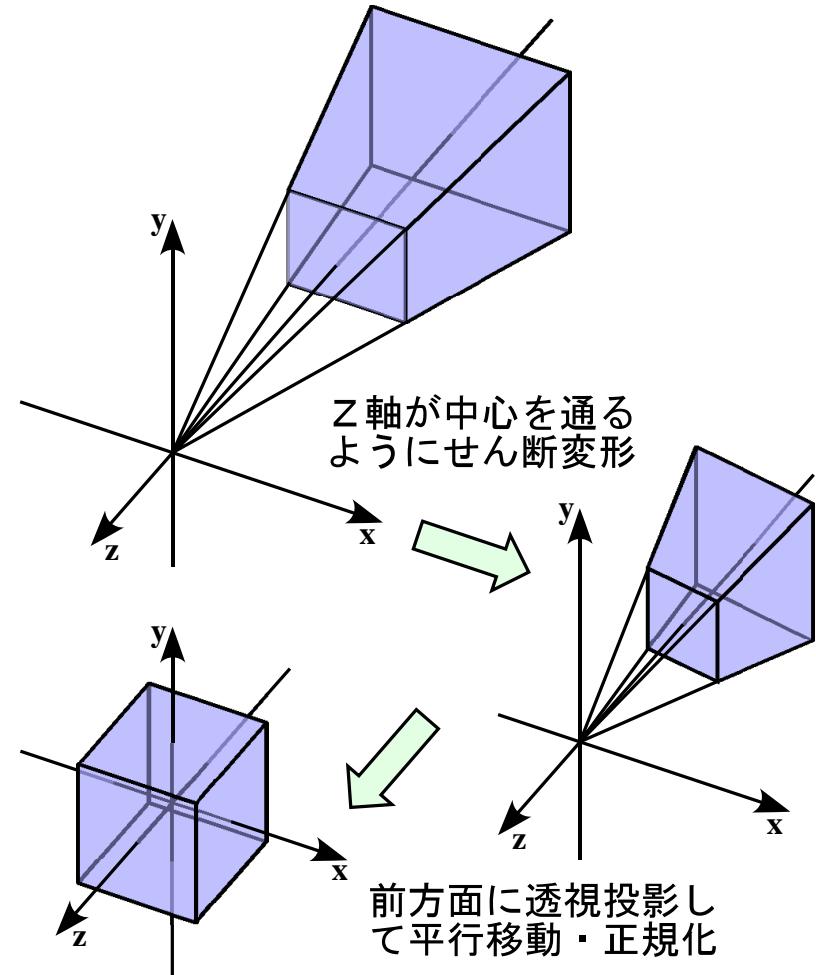
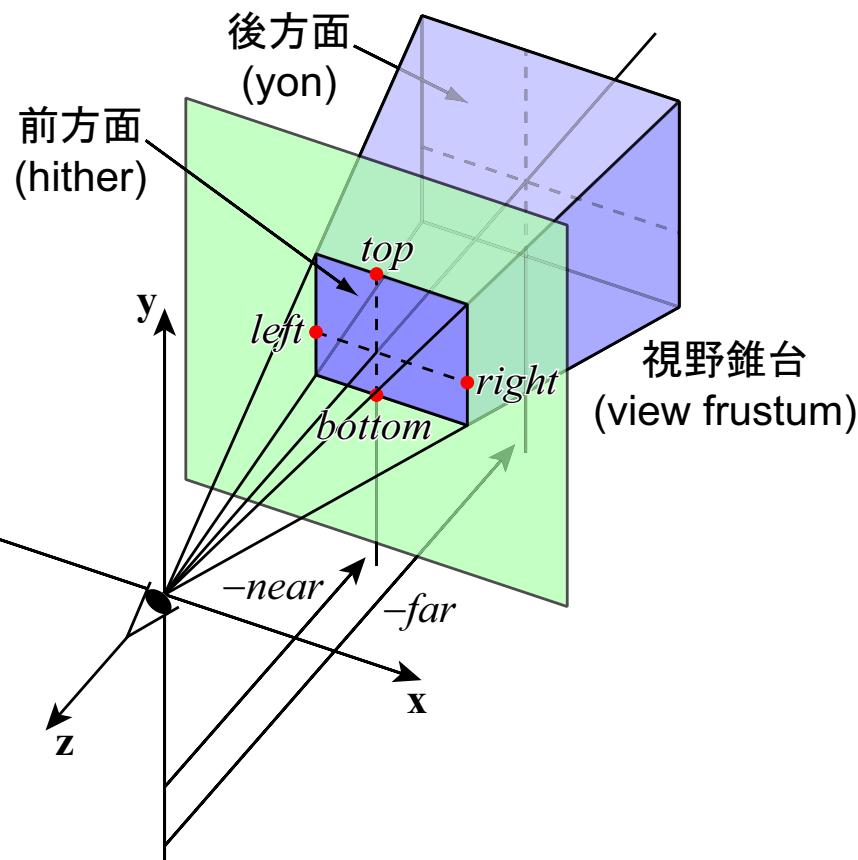
$$z^* = \frac{2}{z+h} z - 1 = \frac{z-h}{z+h}$$

変換行列

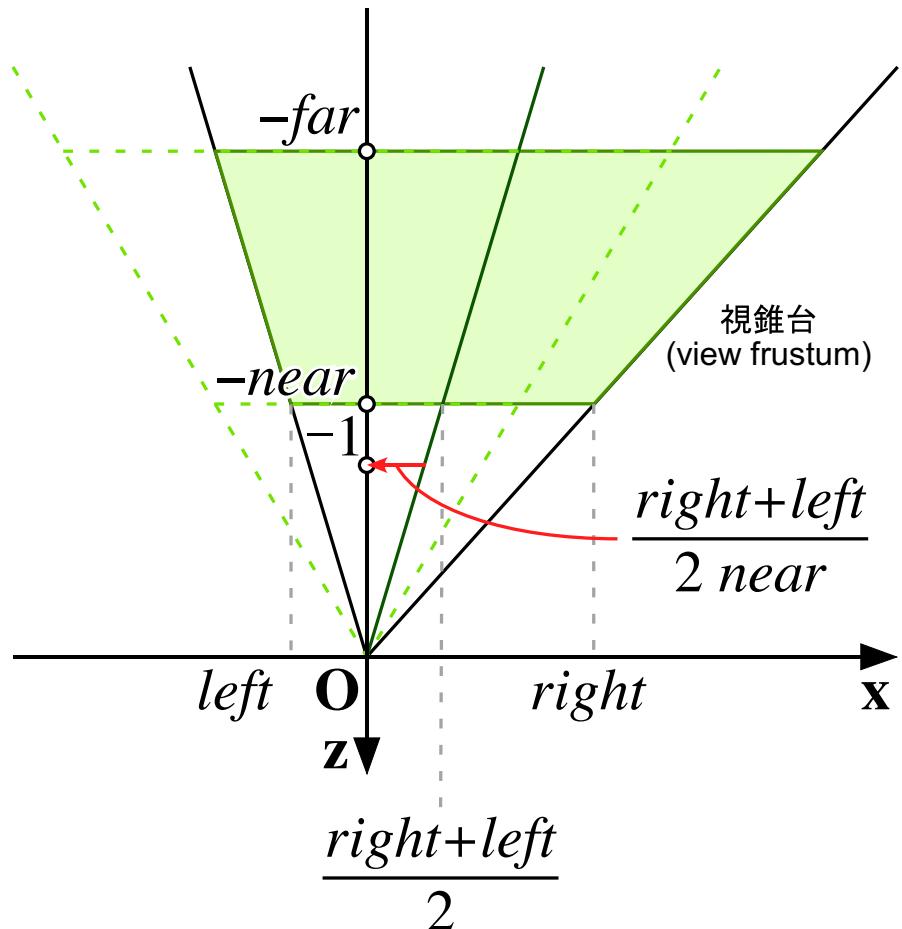
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/h & -1 \\ 0 & 0 & 1/h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z/h-1 \\ z/h+1 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \frac{x'}{w'} = \frac{h}{z+h} x$$
$$y^* = \frac{y'}{w'} = \frac{h}{z+h} y$$
$$z^* = \frac{z'}{w'} = \frac{z-h}{z+h}$$

視野錐台による透視投影

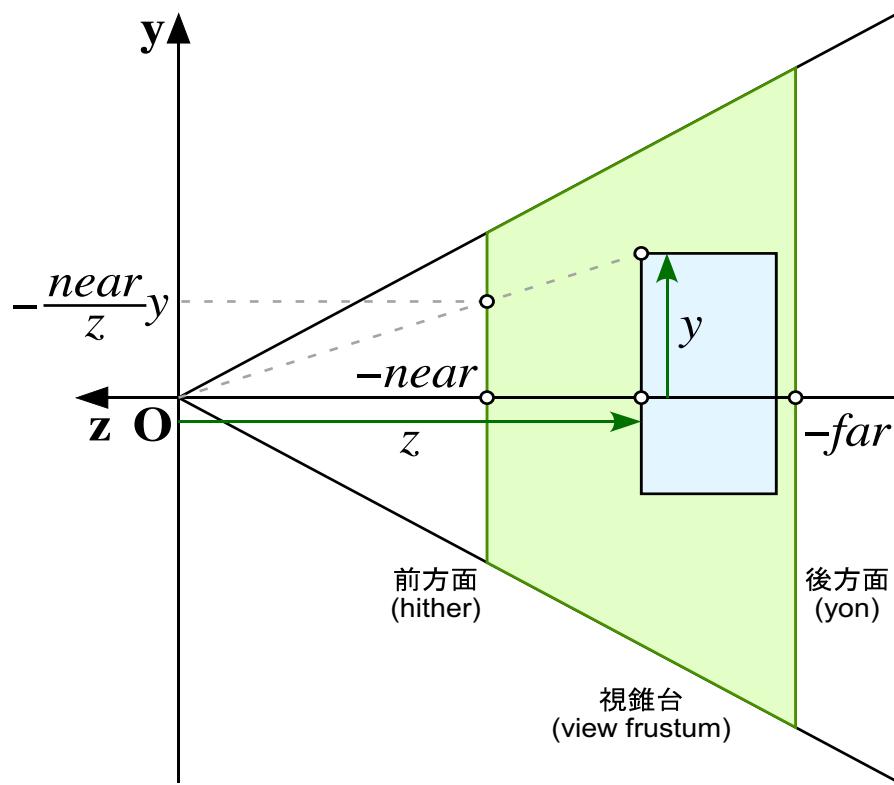


せん断変形



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{right+left}{2 \ near} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{top+bottom}{2 \ near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

透視投影



$$x^* = -\frac{near}{z} x$$

$$y^* = -\frac{near}{z} y$$

$$z^* = -\frac{far + near}{2} - \frac{far - near}{z}$$

透視深度

透視投影變換行列

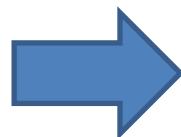
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far + near}{2} & far \cdot near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = near \cdot x$$

$$y' = near \cdot y$$

$$z' = \frac{far + near}{2} \cdot z + far \cdot near$$

$$w' = -z$$

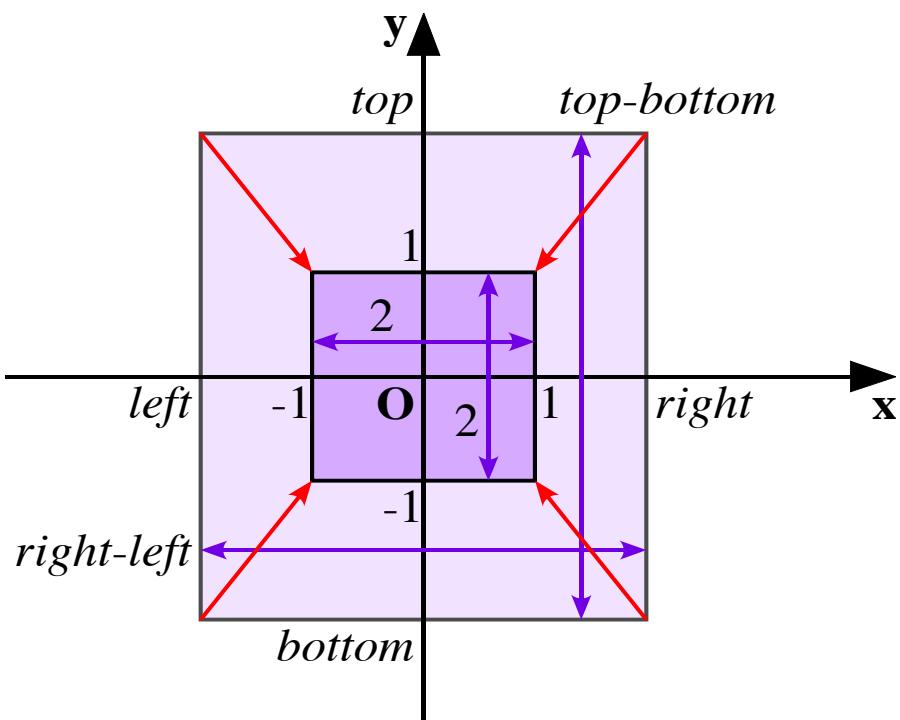


$$x^* = -\frac{near}{z} x$$

$$y^* = -\frac{near}{z} y$$

$$z^* = -\frac{far + near}{2} - \frac{far \cdot near}{z}$$

スケーリングして大きさを正規化



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

視野錐台による透視投影変換行列

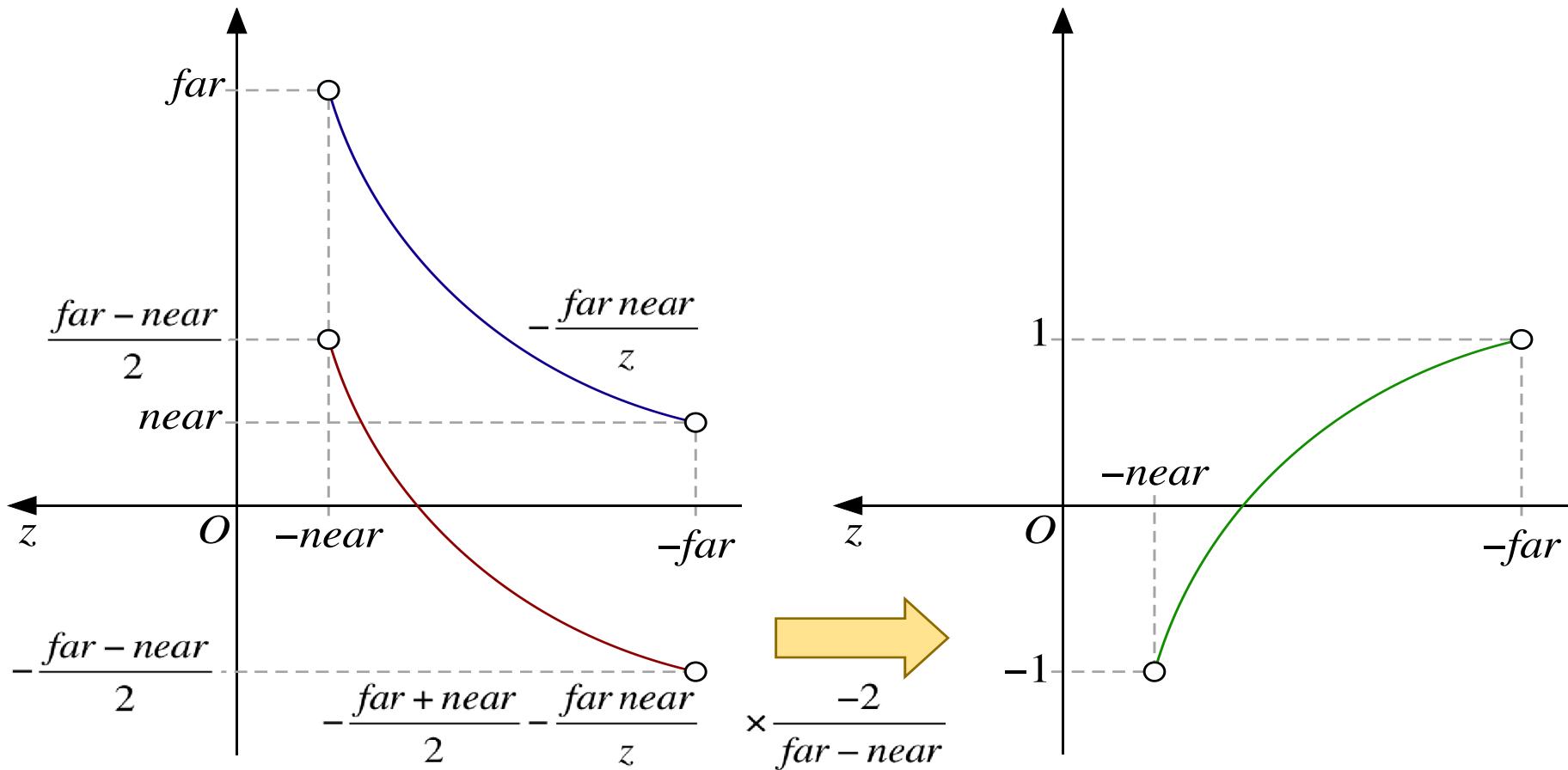
スケーリング(正規化)

透視変換

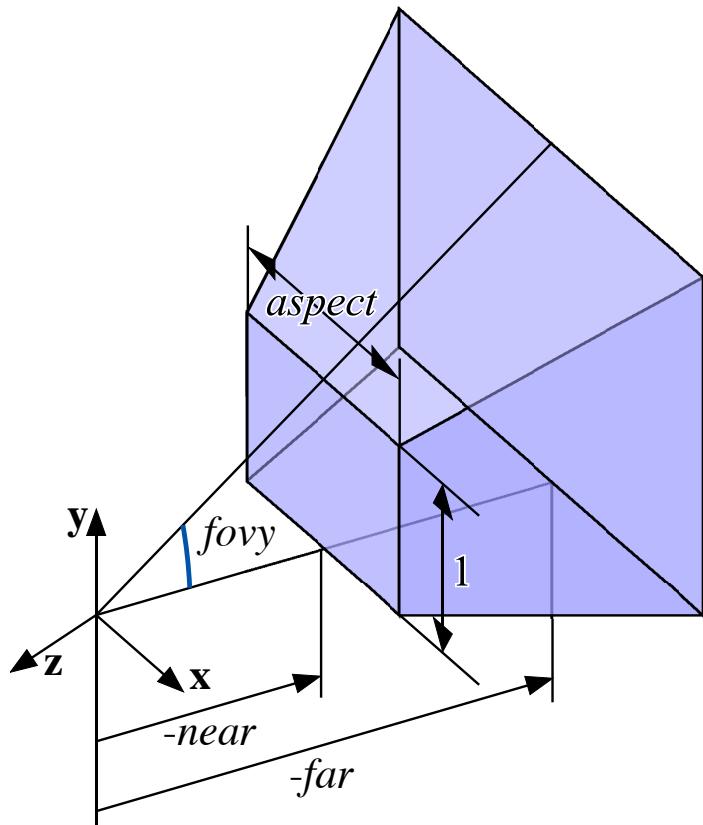
せん断

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{2} & far \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{right+left}{2near} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{top+bottom}{2near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} \frac{2near}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & -\frac{2far}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

透視深度



画角をもとにした透視投影変換行列

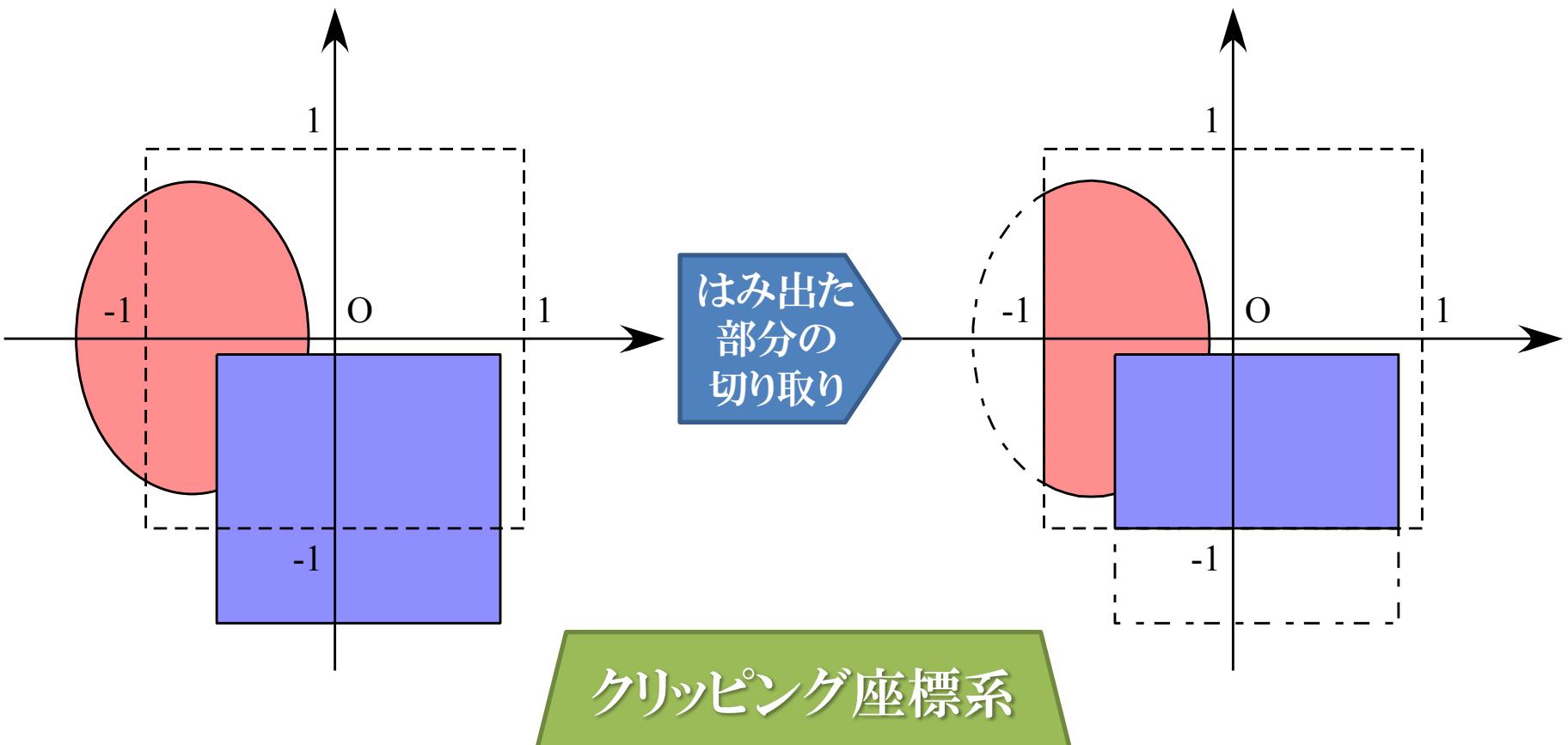


$$f = \frac{1}{\tan\left(\frac{fov y}{2}\right)}$$

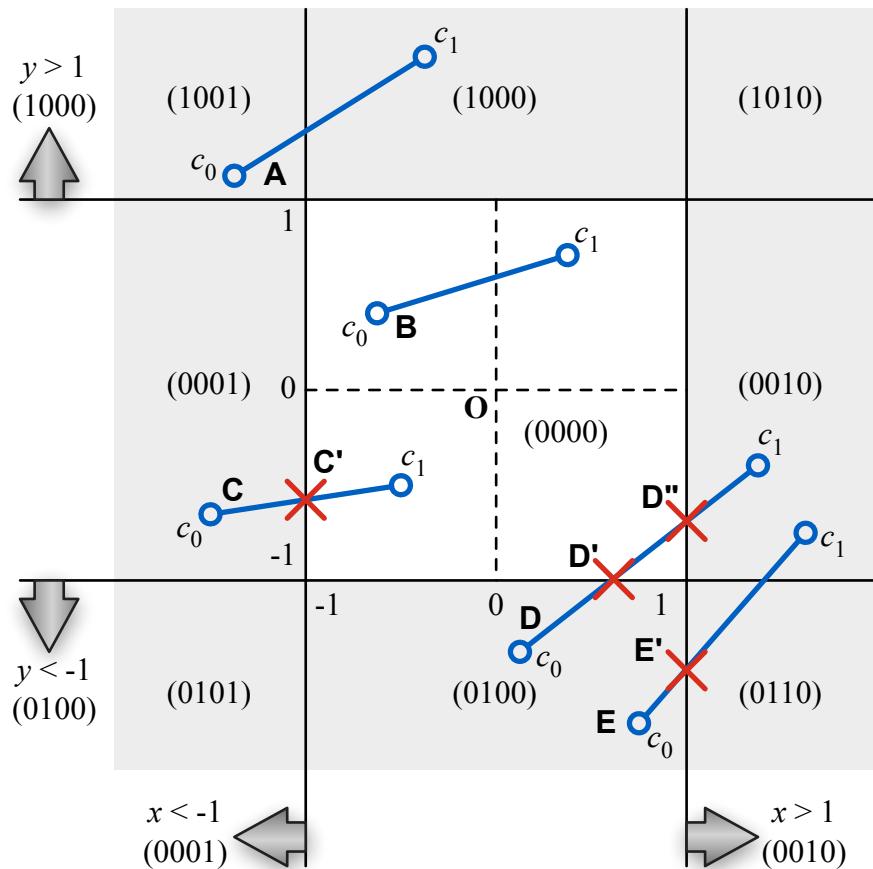
$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{f}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2far near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fov y: y 方向の画角 (field of view - fov)
aspect: 表示領域の縦横比

クリッピング



線分のクリッピング

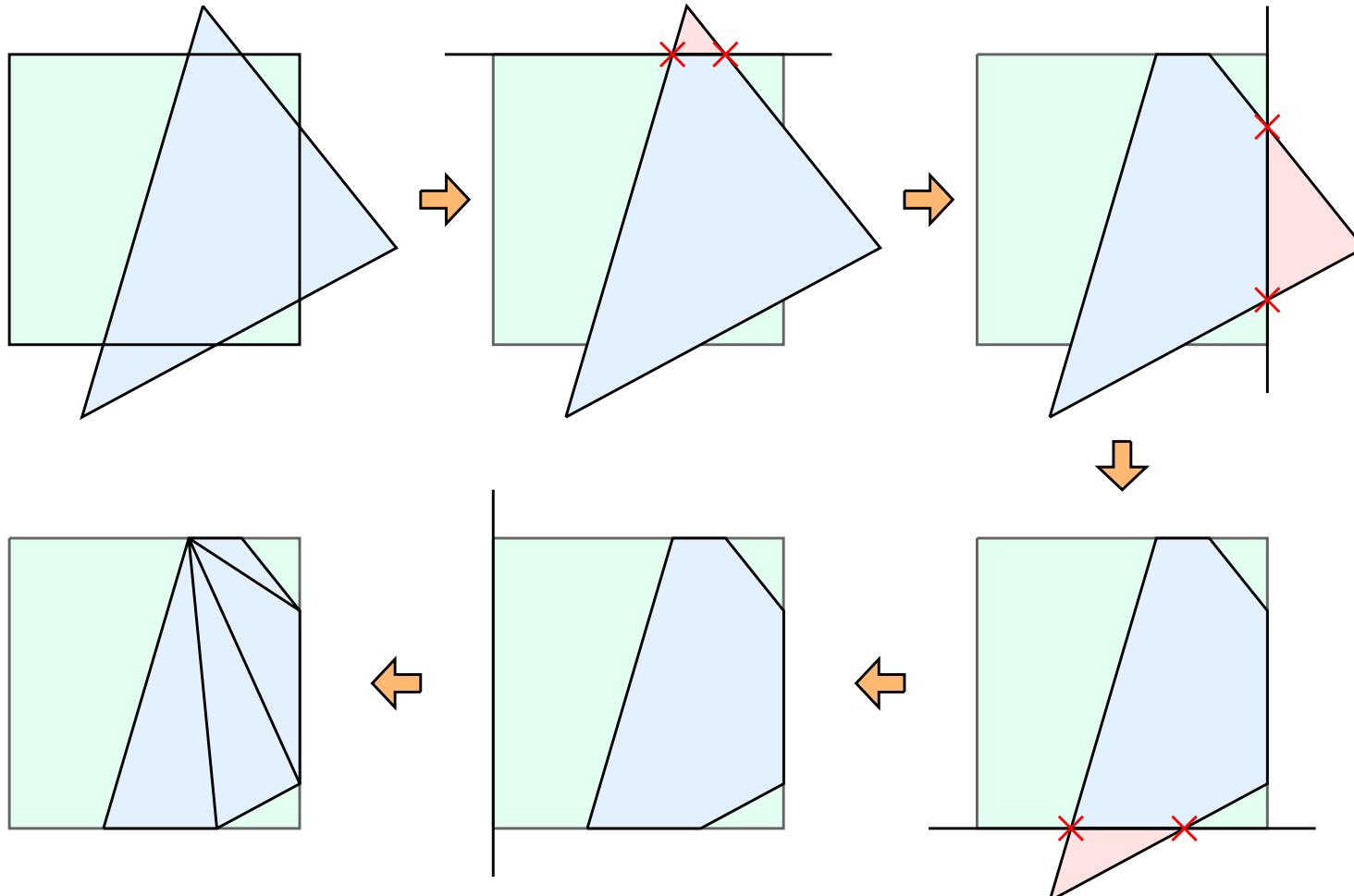


	c_1	c_2	c_1 and c_2	c_1 or c_2	処理
A	1001	1000	<u>1000</u>	1001	非表示
B	0000	0000	0000	<u>0000</u>	表示
C	0001	0000	0000	<u>0001</u>	c_1 側切詰
C'	0000	0000	0000	<u>0000</u>	表示
D	0100	0010	0000	<u>0110</u>	c_1 側切詰
D'	0000	0010	0000	<u>0010</u>	c_2 側切詰
D''	0000	0000	0000	<u>0000</u>	表示
E	0100	0010	0000	<u>0110</u>	c_1 側切詰
E'	0110	0010	<u>0010</u>	0110	非表示

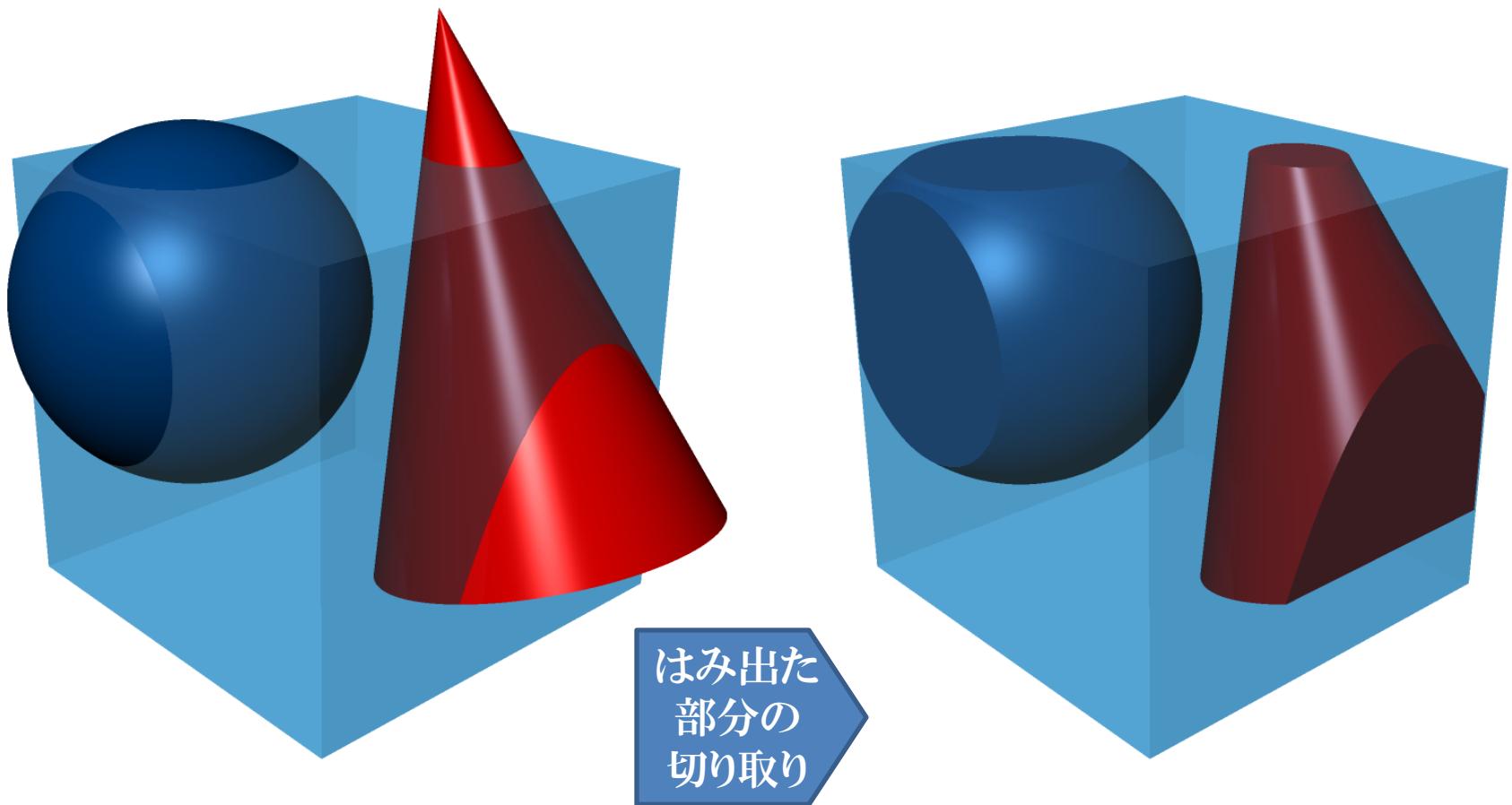
非0なら非表示

0なら表示

三角形のクリッピング

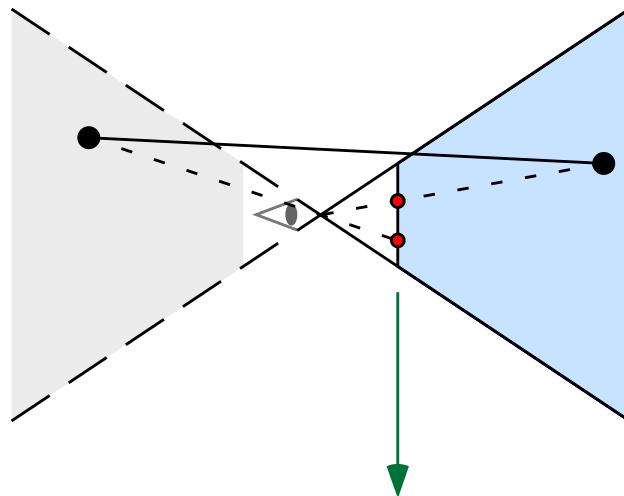


3次元のクリッピング

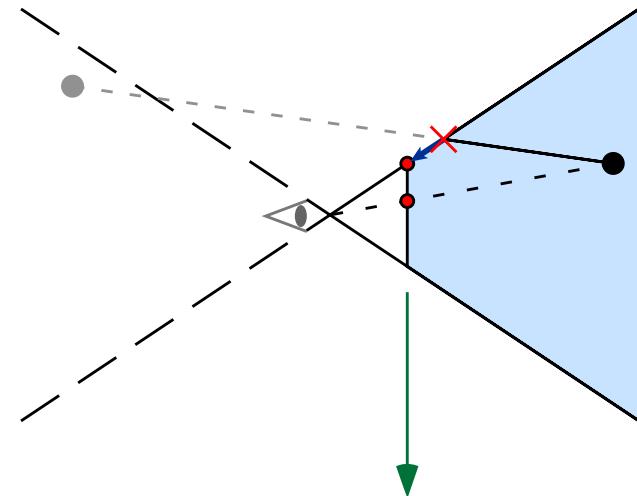


3次元クリッピングの必要性

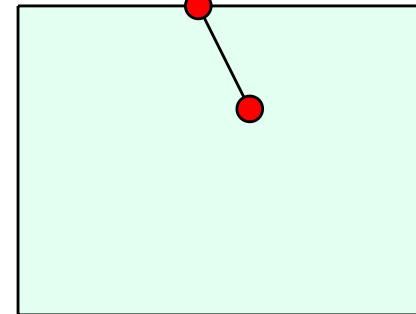
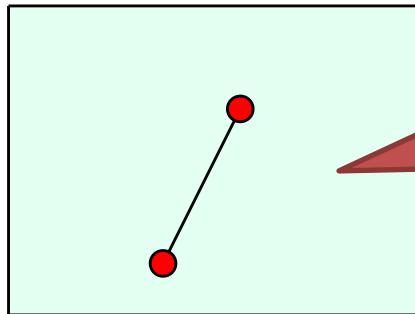
端点が両方とも表示領域内



3次元クリッピング

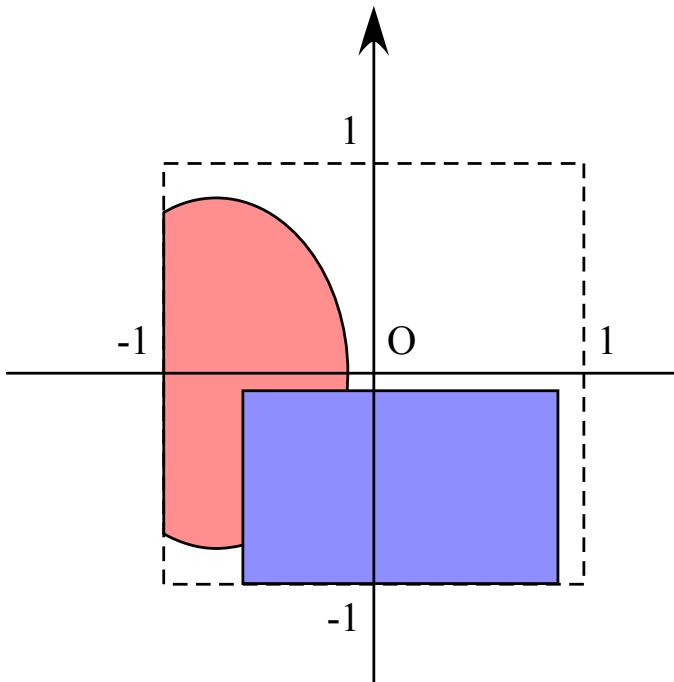


ウォークスルー
などの際に表示
が潰れてしまう



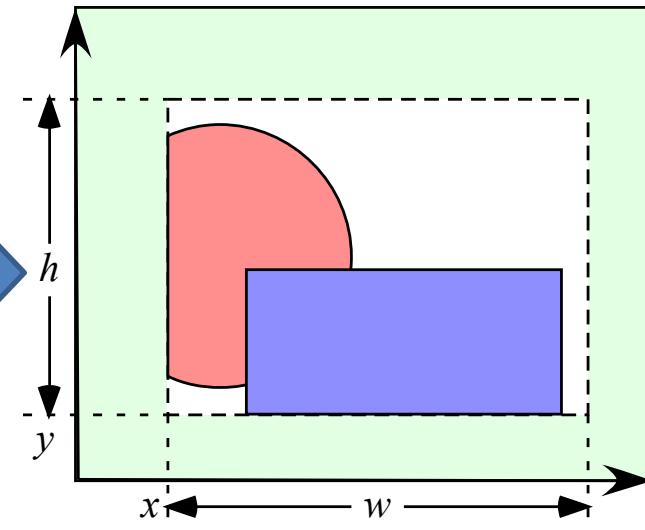
ビューポート

- 表示装置上の表示領域



クリッピング座標系

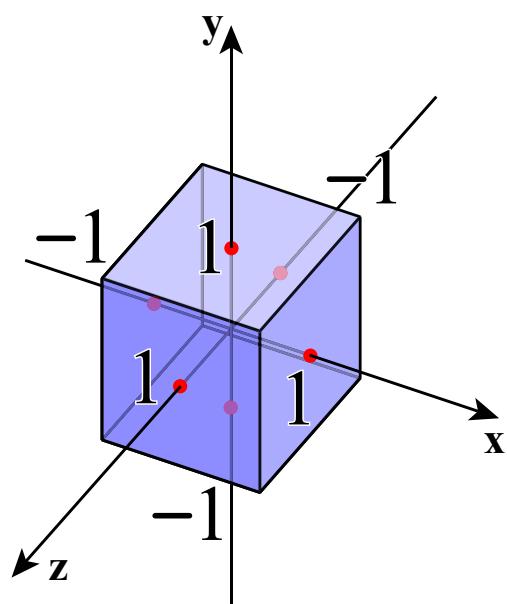
平行移動
拡大縮小



デバイス座標系(ビューポート)

ビューポート変換行列

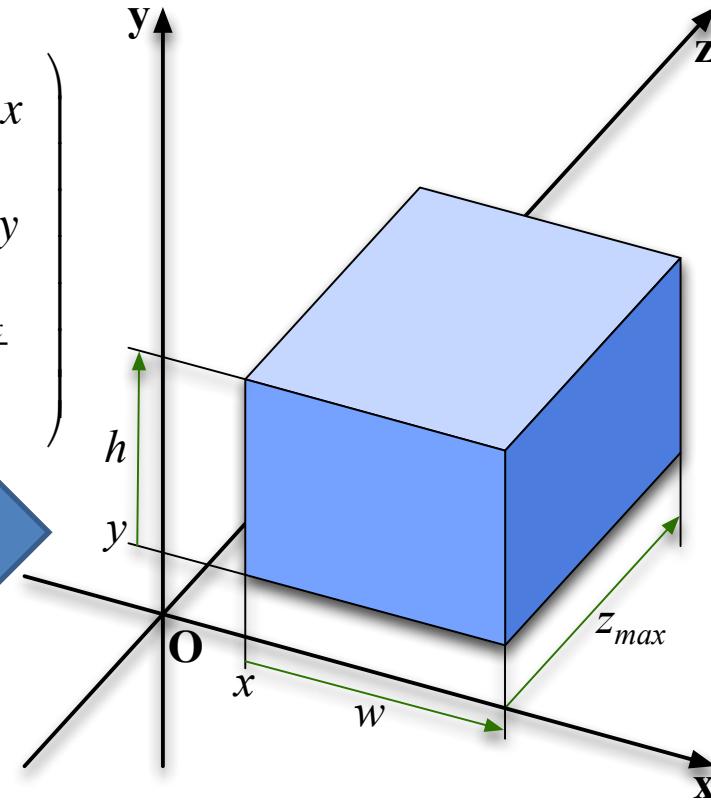
クリッピング座標系



$$\begin{pmatrix} \frac{w}{2} & 0 & 0 & \frac{w}{2} + x \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & \frac{h}{2} + y \\ 0 & 0 & \frac{z_{max}}{2} & \frac{z_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

変換行列

デバイス座標系(ビューポート)



z_{max} : z 方向の表現可能な最大値

int 型なら INT_MAX, unsigned int 型なら UINT_MAX

おわり

課題

- 視点からの距離が2の位置にある前方面に画角90度で透視投影する変換行列を求めなさい
- 視点から遠方面までの距離は7とする
- 投影された図形は画面上の横400画素・縦320画素の表示領域に表示するものとする(がその形は正方形)

解答例

- $fovy = 90^\circ$, $f = 1 / \tan(90 / 2) = 1$
- $aspect = 400 / 320 = 1.25$
- $near = 2, far = 7$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{f}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2far near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8 & -5.6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

