ゲームグラフィックス特論

第3回 変換 (1)

変換行列

同次座標による座標変換

内積

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + w_1 w_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

アフィン変換

- 線形変換と平行移動の組み合わせ

一次元

$$x' = ax + b$$

二次元

$$x' = a_{xx}x + a_{yx}y + b_x$$
$$y' = a_{xy}x + a_{yy}y + b_y$$

三次元

$$x' = a_{xx}x + a_{yx}y + a_{zx}z + b_x$$
$$y' = a_{xy}x + a_{yy}y + a_{zy}z + b_y$$
$$z' = a_{xz}x + a_{yz}y + a_{zz}z + b_z$$

アフィン変換の行列表現

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{xx}x + a_{yx}y + a_{zx}z + b_x \\
y' &= a_{xy}x + a_{yy}y + a_{zy}z + b_y \\
z' &= a_{xz}x + a_{yz}y + a_{zz}z + b_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{線形変換}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}}_{\text{平行移動}}
$$

アフィン変換の同次座標による表現

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} & b_x \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} & b_y \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 × 4 の行列

$$\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{yx}y + a_{zx}z + b_x \\ y' &= a_{xy}x + a_{yy}y + a_{zy}z + b_y \\ z' &= a_{xz}x + a_{yz}y + a_{zz}z + b_z \end{aligned}$$

同次座標

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix}^T$$

転置

同次座標	実座標
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ ⇒	$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇒	(x, y, z) の位置
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒	(x, y, z) の方向

同次座標の性質

- 同次座標にスカラーをかけても実座標は変わらない

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \\ aw \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{ax}{aw}, \frac{ay}{aw}, \frac{az}{aw}\right) = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}\right)$$

同次座標の性質

- 実座標の差を求める

w_1で割る　w_0で割る

$$\frac{\mathbf{P}_1}{w_1} - \frac{\mathbf{P}_0}{w_0} = \begin{pmatrix} x_1/w_1 \\ y_1/w_1 \\ z_1/w_1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0/w_0 \\ y_0/w_0 \\ z_0/w_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/w_1 - x_0/w_0 \\ y_1/w_1 - y_0/w_0 \\ z_1/w_1 - z_0/w_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 同次座標の差は「通分」してから求める

これを正規化

$w_0 w_1$をかける

$$w_0\mathbf{P}_1 - w_1\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} w_0 x_1 \\ w_0 y_1 \\ w_0 z_1 \\ w_0 w_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 x_0 \\ w_1 y_0 \\ w_1 z_0 \\ w_1 w_0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} w_0 x_1 - w_1 x_0 \\ w_0 y_1 - w_1 y_0 \\ w_0 z_1 - w_1 z_0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

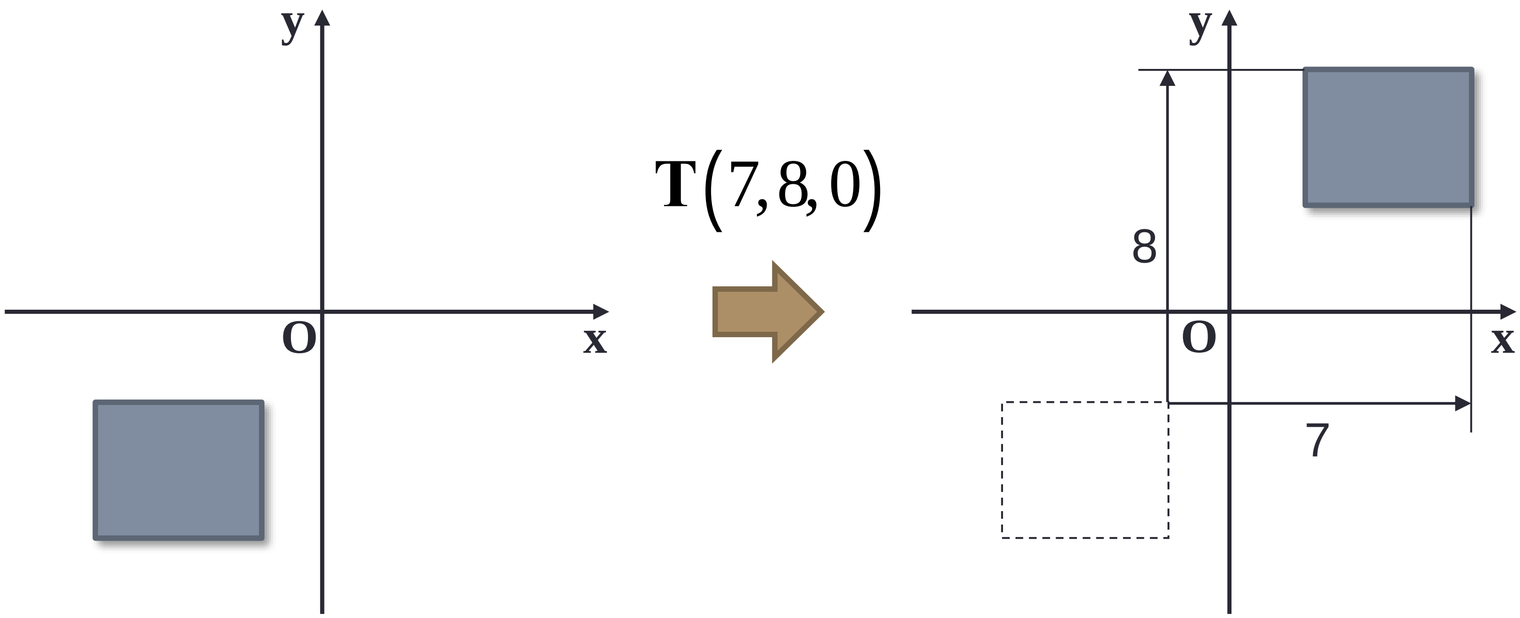
$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$$

平行移動

$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



位置と方向の平行移動

位置

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

移動する

方向

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

変化なし

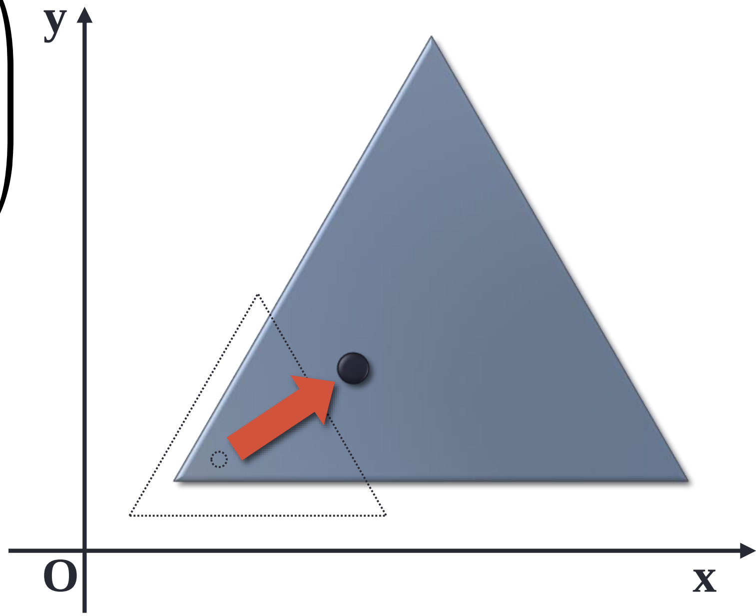
拡大縮小

$$\mathbf{S}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(ax,\ ay,\ az)$$

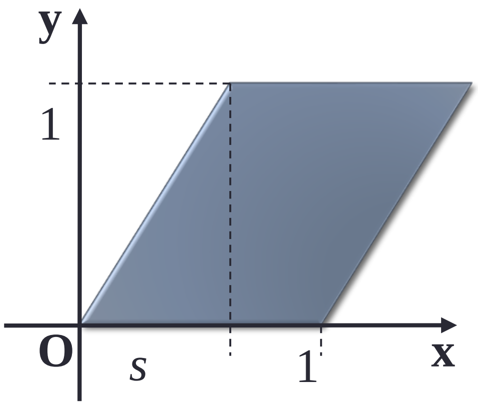
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1/a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1/a \end{pmatrix}$$

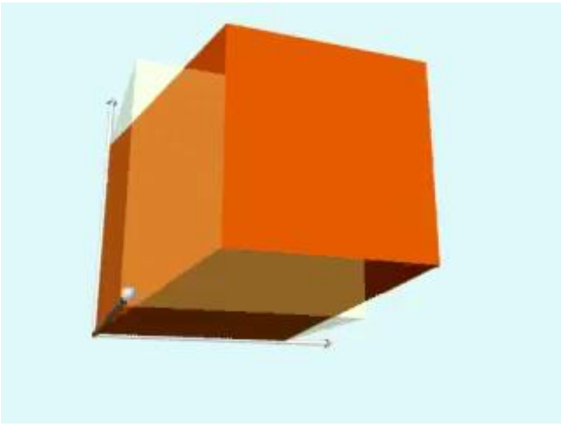


実座標は同じ

せん断

$$\mathbf{H}_{xy}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





$\mathbf{H}_{xz}(t)\ \mathbf{H}_{yz}(s)$

y: せん断変形の基準となる座標軸

x: 変更される座標軸

$$\mathbf{H}_{yx}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{xz}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}_{yz}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{zx}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H}_{zy}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

座標軸中心の回転

X 軸中心の回転

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

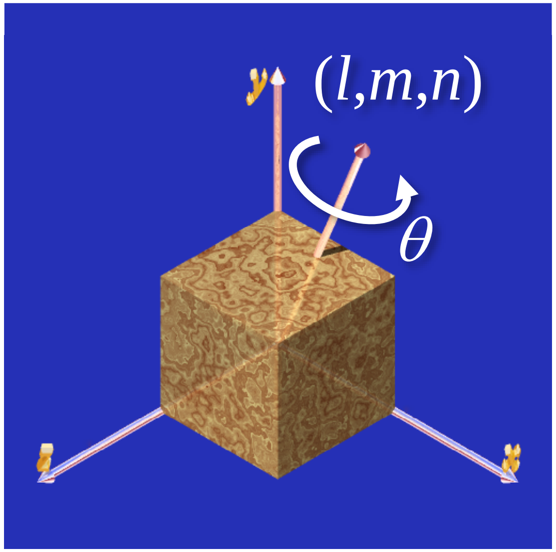
Z 軸中心の回転

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y 軸中心の回転

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

任意軸周りの回転

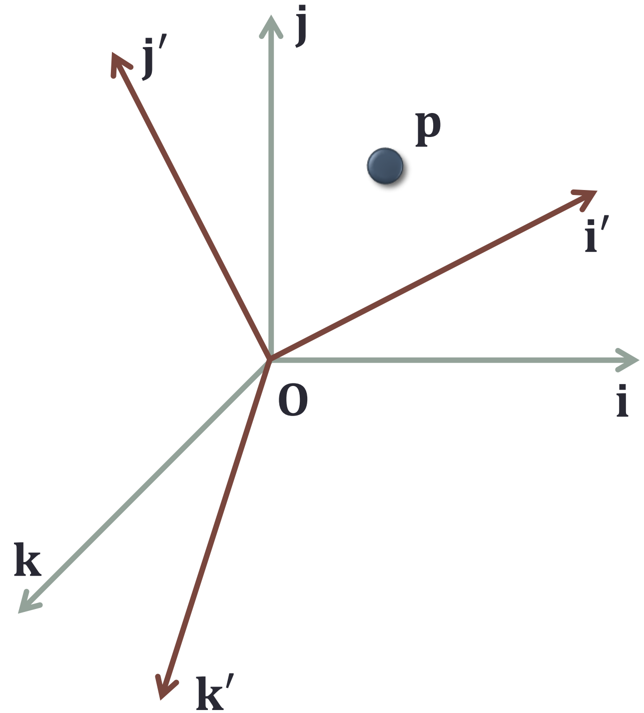


$$\mathbf{R}(l,m,n,\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} l^2+(1-l^2)\cos\theta & lm(1-\cos\theta)-n\sin\theta & ln(1-\cos\theta)+m\sin\theta & 0 \\ lm(1-\cos\theta)+n\sin\theta & m^2+(1-m^2)\cos\theta & mn(1-\cos\theta)-l\sin\theta & 0 \\ ln(1-\cos\theta)-m\sin\theta & mn(1-\cos\theta)+l\sin\theta & n^2+(1-n^2)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同じ点を異なる直交座標系に置く

- 二つの直交座標系 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$
  - 軸ベクトル $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ と $\mathbf{k}$ は直交している
  - 軸ベクトル $\mathbf{i}'$ と $\mathbf{j}'$ と $\mathbf{k}'$ は直交している
- 点 $\mathbf{p}$ の座標値
  - $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ の座標系 $\rightarrow (x, y, z)$
    - $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
  - $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ の座標系 $\rightarrow (x', y', z')$
    - $\mathbf{p} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$
- 座標系が異なっても $\mathbf{p}$ は同じ点
  - $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$



異なる直交座標系の関係

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

$$(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})^{-1}(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})^{T}(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})^{T}(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$$

変換行列

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

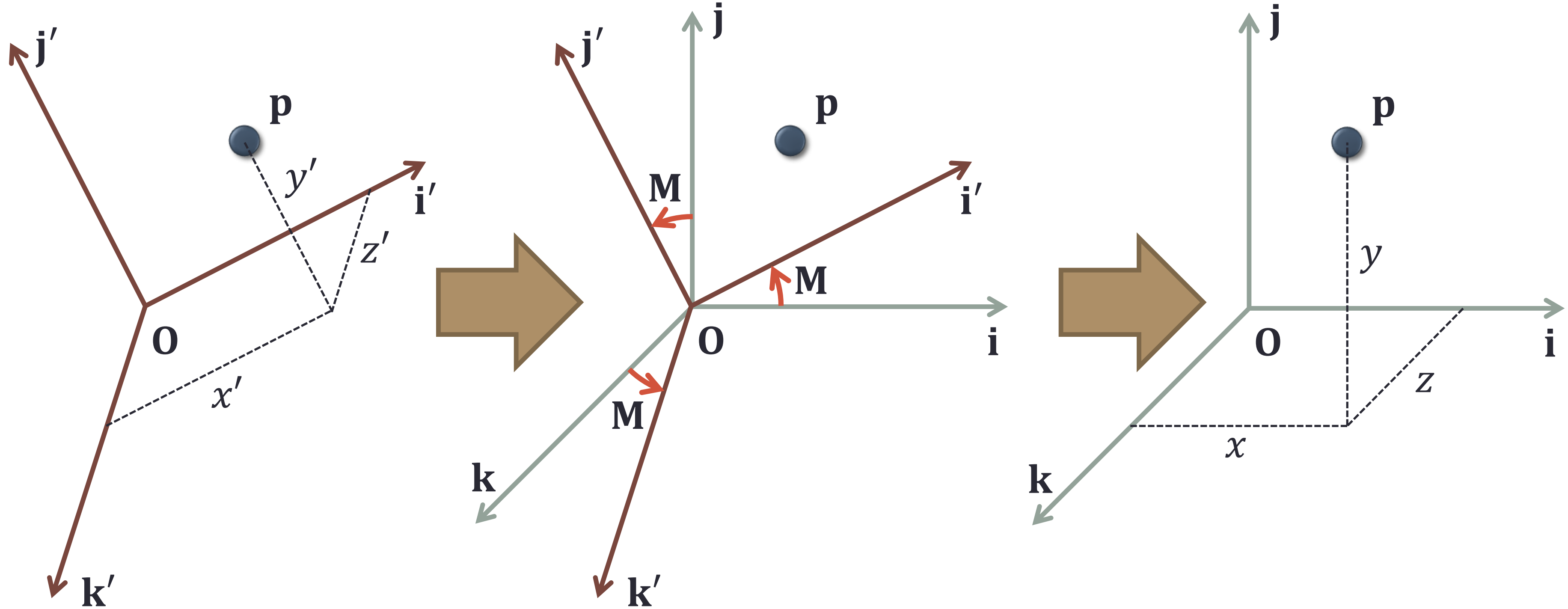
(x, y, z) への変換

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{z}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}') = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$$

座標系 $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ の点の $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ 上の位置を求める変換行列 $\mathbf{M}$ は $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ そのもの

回転の変換行列

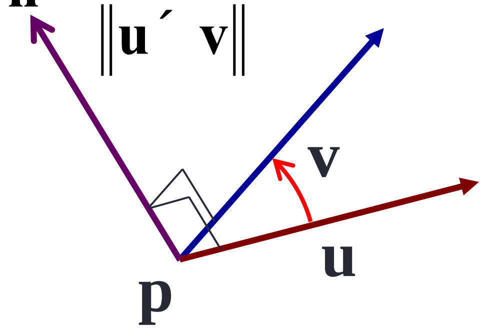


$$\mathbf{M} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')$$

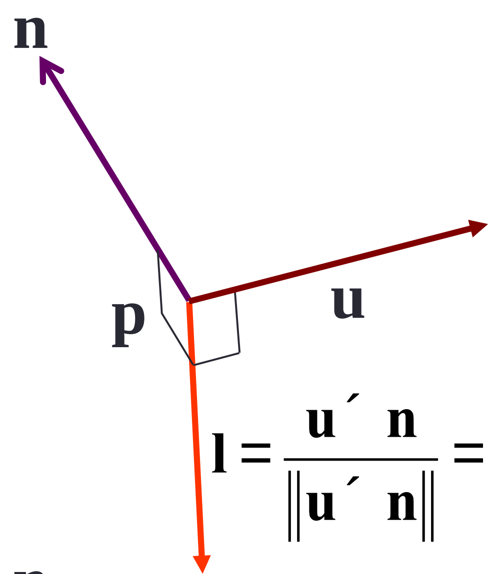
ベクトルの回転に伴う二つの直交座標系

法線ベクトルが回転軸

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\left\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \right\|}$$

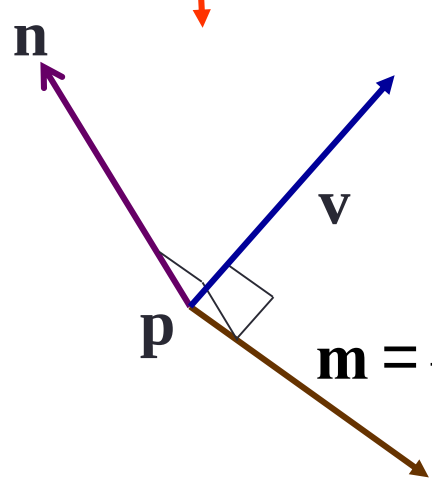


u, n の座標系



$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{n}}{\left\| \mathbf{u} \times \mathbf{n} \right\|} = \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\left\| \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \right\|}$$

v, n の座標系



$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{\left\| \mathbf{v} \times \mathbf{n} \right\|} = \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\left\| \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \right\|}$$

回転の変換行列を求める

$$\mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{n} & \mathbf{l} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \dfrac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\left\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right\|} & \dfrac{\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}{\left\|\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\right\|} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_v\mathbf{M}_u^{-1} = \mathbf{M}_v\mathbf{M}_u^{T}$$

$$\mathbf{M}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{n} & \mathbf{m} \end{pmatrix}$$

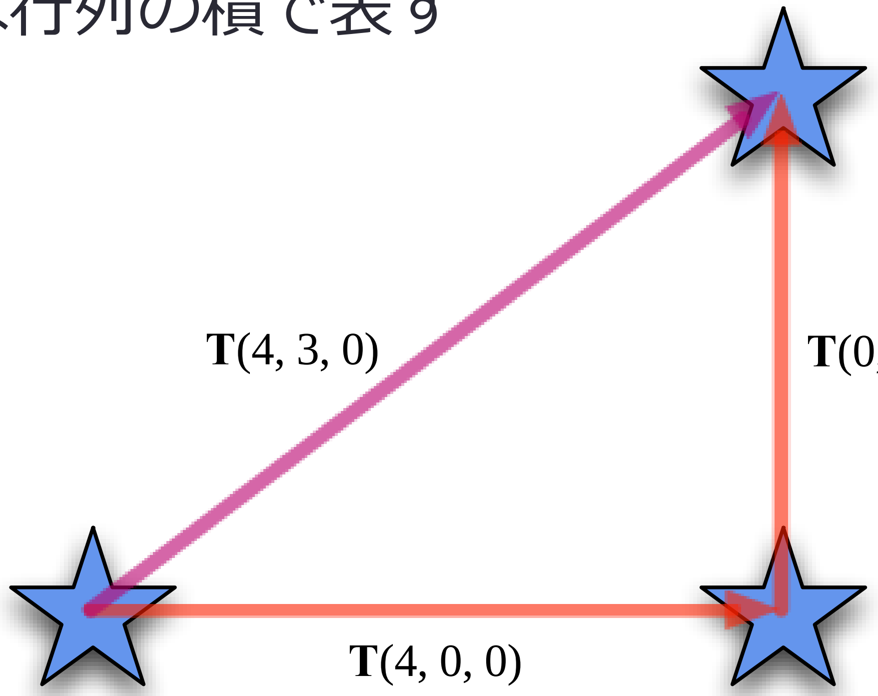
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \dfrac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\left\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right\|} & \dfrac{\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})}{\left\|\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\right\|} \end{pmatrix}$$

変換の合成

変換行列の積

変換の合成

- 変換の合成は行列の積で表す



$$\mathbf{T}(0,3,0)\mathbf{T}(4,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(4,3,0)$$

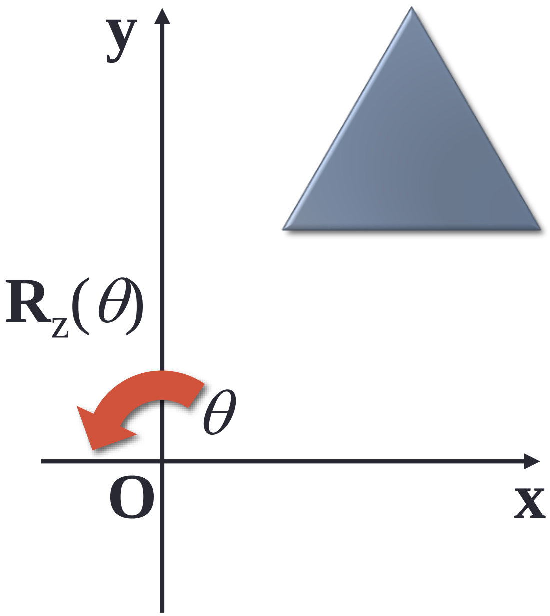
剛体変換

- 立体の移動と回転
- 一般的に立体の形状に影響を与えない（＝剛体）

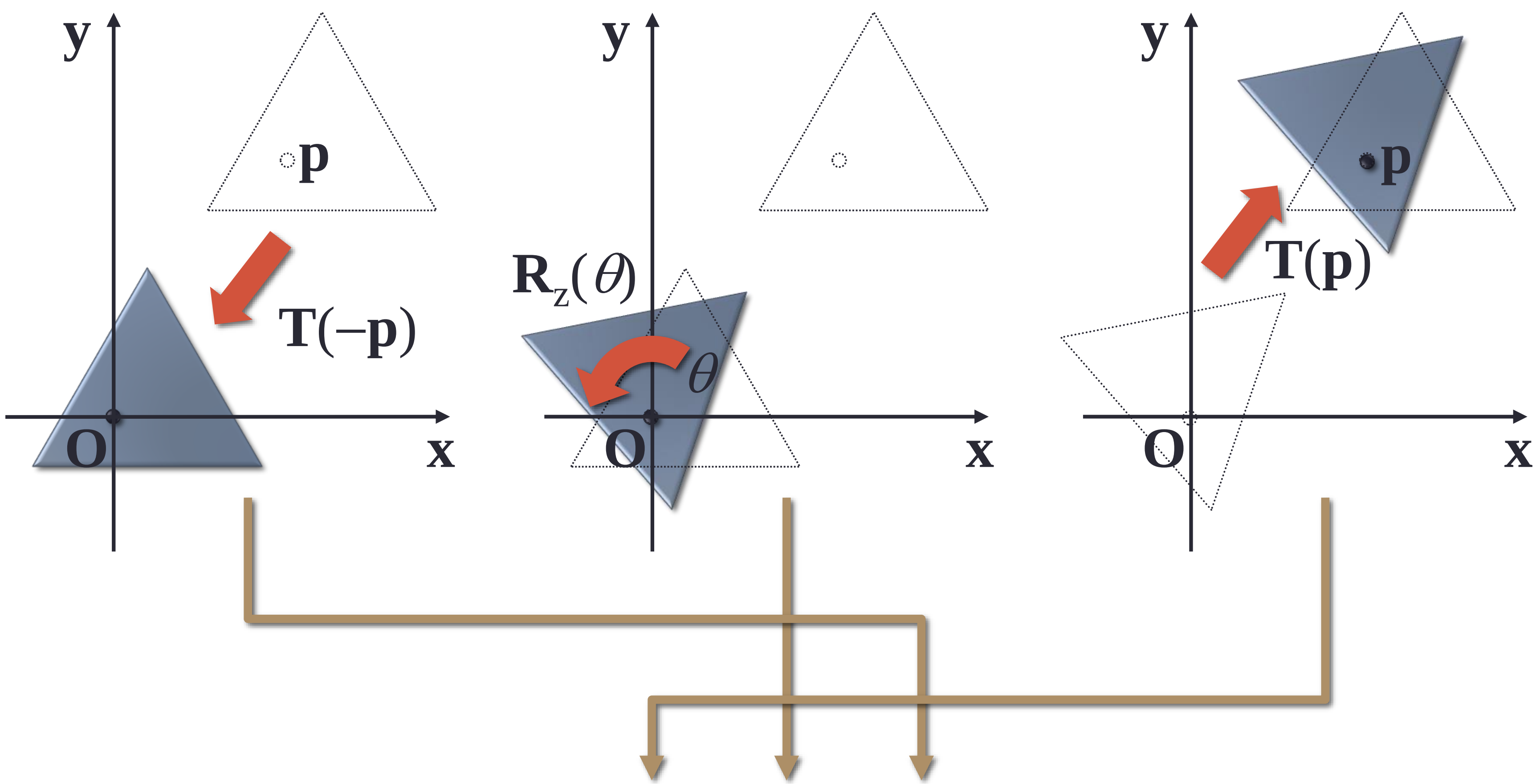
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{t})\,\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} & t_x \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} & t_y \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{0,} & \mathbf{r}_{1,} & \mathbf{r}_{2,} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{,0}^T \\ \mathbf{r}_{,1}^T \\ \mathbf{r}_{,2}^T \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{R}} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

原点中心の回転

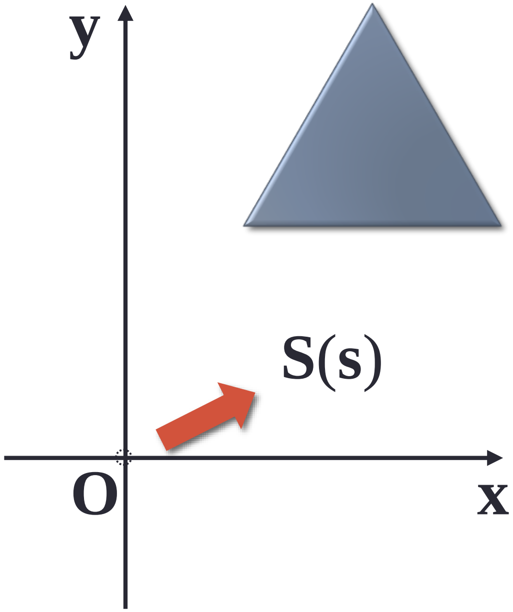


任意の点を中心にした回転

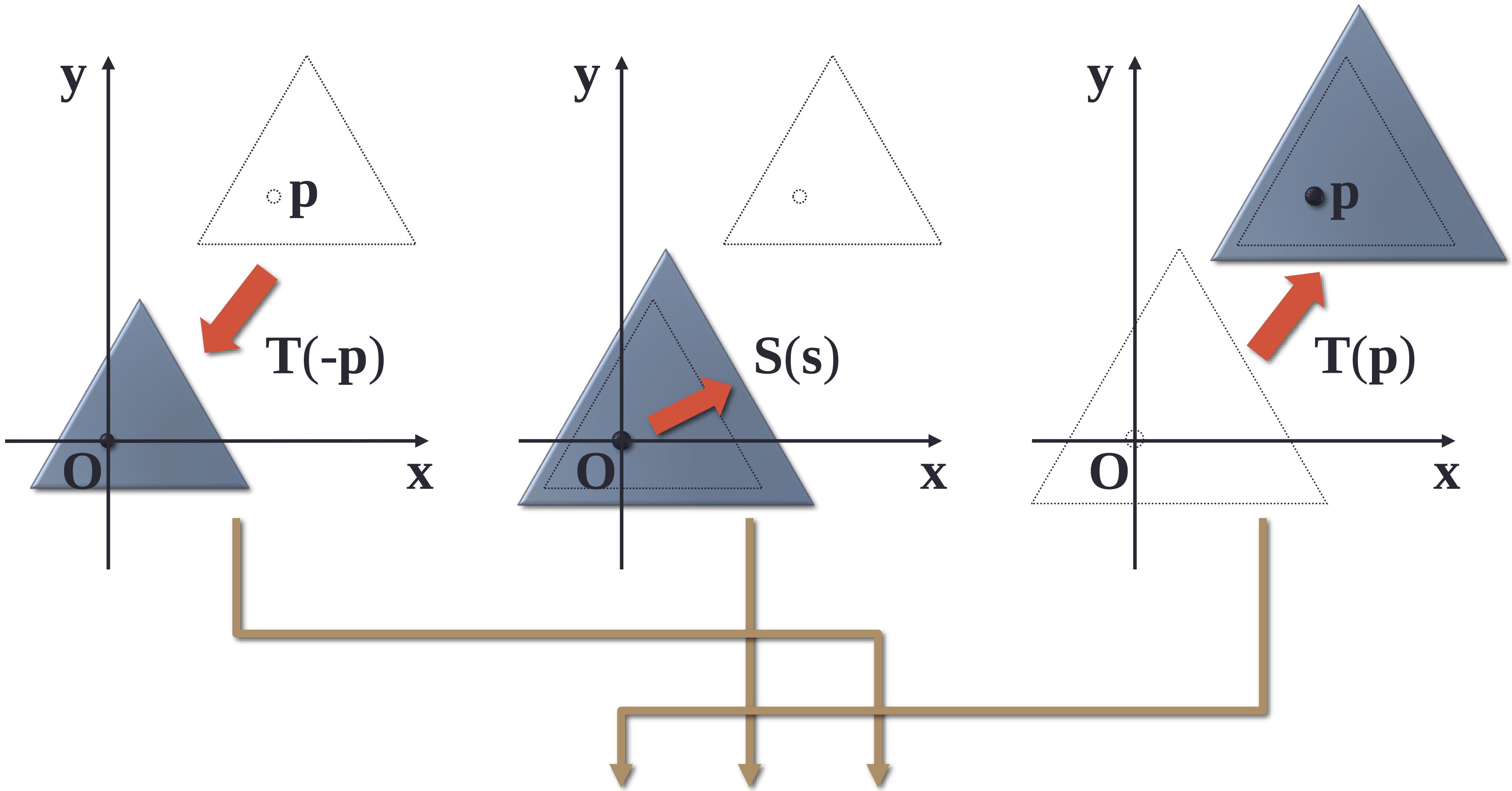


$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p})\,\mathbf{R}_z(\theta)\,\mathbf{T}(-\mathbf{p})$$

原点中心の拡大縮小



任意の点を基準にした拡大縮小



$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p})\ \mathbf{S}(\mathbf{s})\ \mathbf{T}(-\mathbf{p})$$

特定方向への拡大縮小

$\mathbf{S}$ ← (x y z) 軸方向の拡大縮小

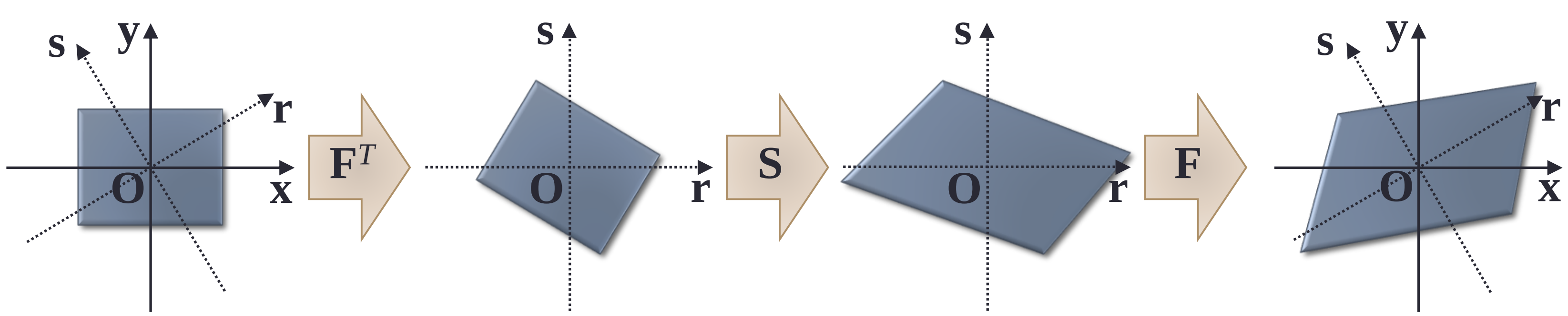
$(\ \mathbf{r}\quad \mathbf{s}\quad \mathbf{t}\ )$ ← 拡大縮小する軸の方向

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{s} & \mathbf{t} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

← (x y z) 軸の空間から (r s t) 軸の空間への回転

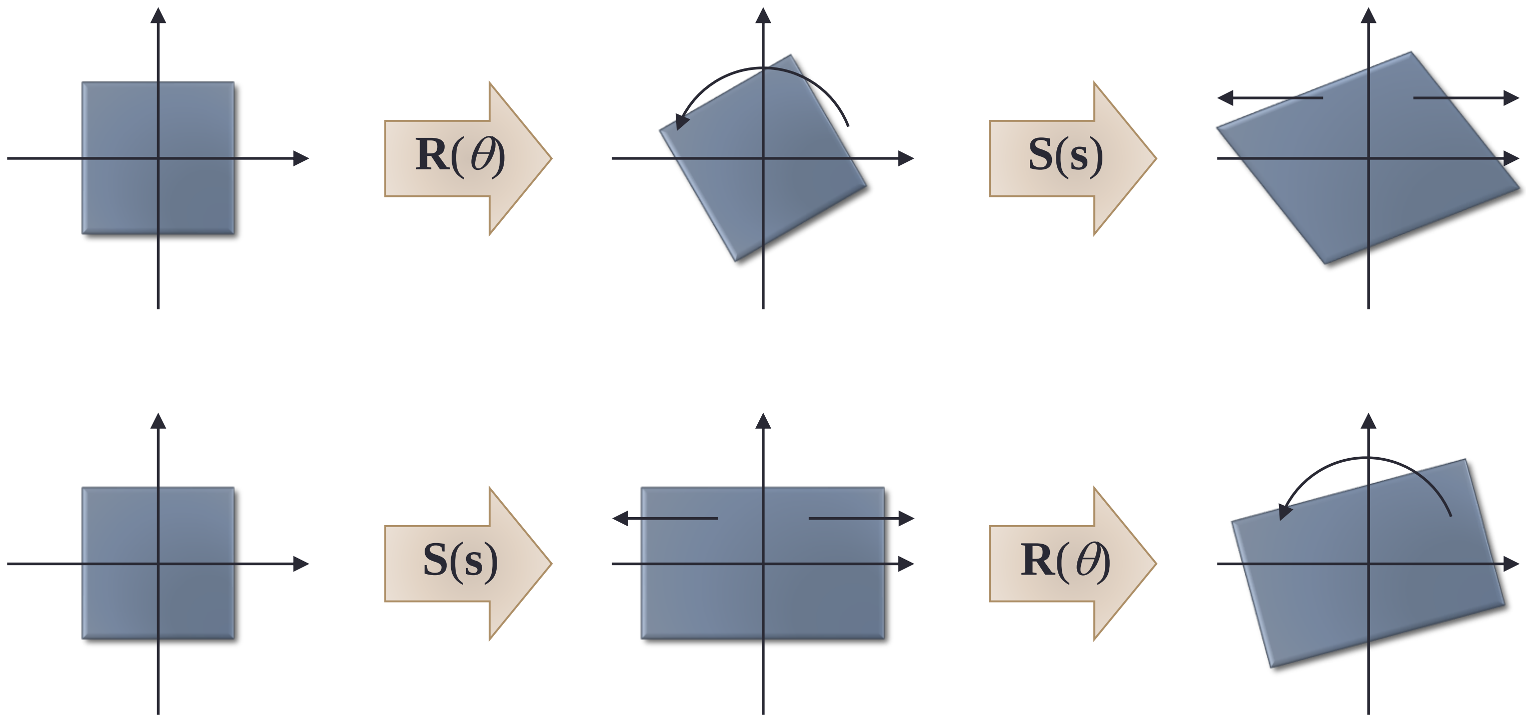
$$\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

←
(r s t) 軸の空間 → (x y z) 軸の空間への回転
(x y z) 軸方向の拡大縮小
(x y z) 軸の空間 → (x y z) 軸の空間への回転



変換の連結

- 行列の演算は非可換
  - 連結した変換の結果は行列の順序に依存する

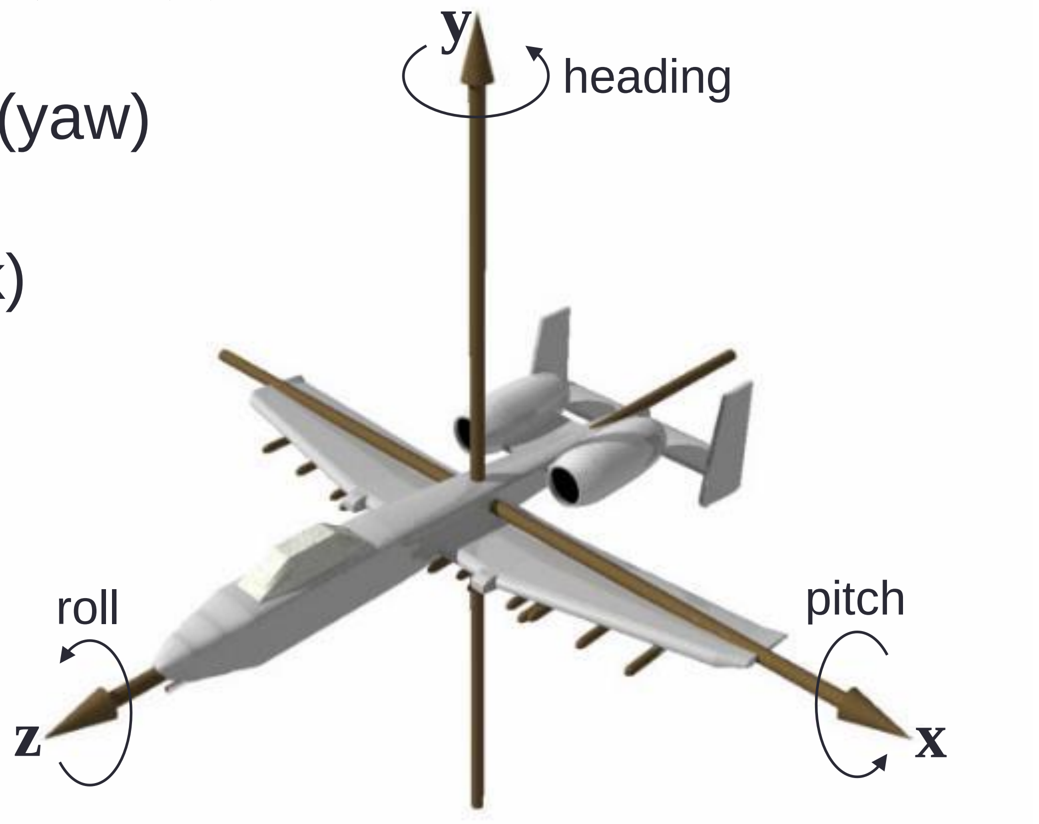


オイラー変換

$$\mathbf{E}(h,p,r) = \mathbf{R}_y(h)\mathbf{R}_x(p)\mathbf{R}_z(r)$$

オイラー角

h: heading (yaw)
p: pitch
r: roll (bank)



オイラー変換

掛け方の順序には色々ある

$$
\mathbf{E}(h,p,r)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos h & 0 & \sin h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin h & 0 & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p & -\sin p & 0 \\ 0 & \sin p & \cos p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r & -\sin r & 0 & 0 \\ \sin r & \cos r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sin h \sin p \sin r + \cos h \cos r & \sin h \sin p \cos r - \cos h \sin r & \sin h \cos p & 0 \\ \cos p \sin r & \cos p \cos r & -\sin p & 0 \\ \cos h \sin p \sin r - \sin h \cos r & \cos h \sin p \cos r + \sin h \sin r & \cos h \cos p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ジンバルロック

$$p \to \pi/2$$

$$\mathbf{E}(h, \pi/2, r) = \begin{pmatrix} \sin h \sin r + \cos h \cos r & \sin h \cos r - \cos h \sin r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos h \sin r - \sin h \cos r & \cos h \cos r + \sin h \sin r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(h-r) & \sin(h-r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(h-r) & \cos(h-r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r \to p \to h$ の順に回転するので $p \to \pi/2$ の回転を行うと r の回転軸（z 軸）が h の回転軸（y 軸）と一致してしまう

- これは $(r - h)$ の単一の角度に依存する1軸中心の回転
- したがって自由度が一つ減る

回転変換行列からオイラー角を算出

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix} = \mathbf{E}(h, p, r)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \cos p \sin r \\ m_5 &= \cos p \cos r \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad r = \mathtt{atan2}(m_5, m_1)$$

$$m_9 = -\sin p \quad \rightarrow \quad p = \mathtt{asin}(-m_9)$$

$$\left.\begin{aligned} m_8 &= \sin h \cos p \\ m_{10} &= \cos h \cos p \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad h = \mathtt{atan2}(m_{10}, m_8)$$

もし$m_1 = m_5 = 0 \Rightarrow \cos p = 0 \quad \rightarrow \quad p = \pm\pi/2$

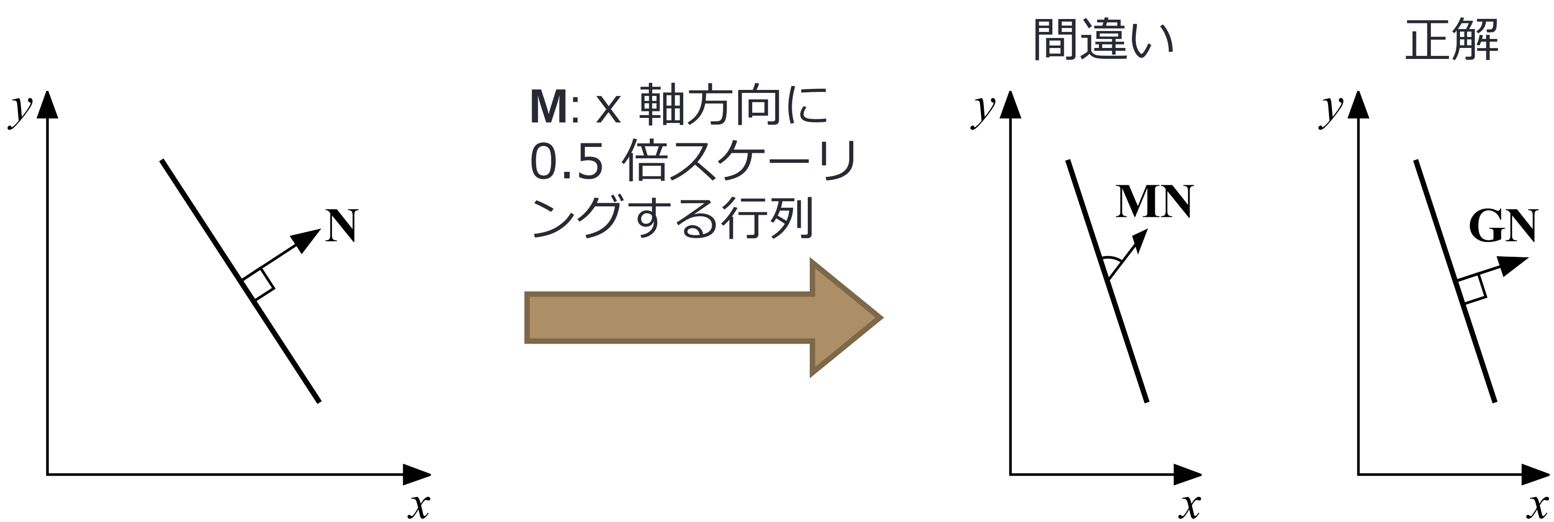
$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \cos(h \mp r) \\ m_4 &= \sin(h \mp r) \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} h &= 0 \\ r &= -\mathtt{atan2}(m_0, m_4) \end{aligned}$$

法線ベクトルの変換

面との直交性の維持

変換と法線ベクトル

- ベクトルも変換行列によって変換できる
- 面の頂点に適用した座標変換の行列をそのままその面の法線ベクトルに適用しても正しく変換できない場合がある



法線ベクトルの正しい変換

- M: 形状の変換に用いる行列
- G: この形状の法線ベクトルの変換に用いる行列

$$\mathbf{G} = \left(\mathrm{adj}(\mathbf{M})\right)^T$$

$\mathrm{adj}(\mathbf{M})$:**M**の随伴行列 (adjoint)

もし変換行列 M が回転のように直交行列なら
随伴行列はその転置行列なので

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}$$

随伴行列 (adjoint)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$$

余因子

$$d_{00}^{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{vmatrix} \qquad d_{10}^{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} m_{01} & m_{21} \\ m_{02} & m_{22} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} d_{00}^{\mathbf{M}} & -d_{01}^{\mathbf{M}} & d_{02}^{\mathbf{M}} \\ -d_{10}^{\mathbf{M}} & d_{11}^{\mathbf{M}} & -d_{12}^{\mathbf{M}} \\ d_{20}^{\mathbf{M}} & -d_{21}^{\mathbf{M}} & d_{22}^{\mathbf{M}} \end{pmatrix}$$

ちなみに $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathrm{adj}(\mathbf{M})$ したがって $\mathbf{G} = \left(\mathbf{M}^{-1}\right)^T$ でも可

でも |M| で割るのが嫌

逆行列

逆変換を行う

逆行列の計算

- クラメールの公式
  - 3×3までの行列なら簡単

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathrm{adj}(\mathbf{M})$$

- ガウスの消去法など
  - 数値計算的手法
- 一般に計算コストが高い
  - できるだけ「楽に」逆行列を求めたい

逆行列の求め方

- 平行移動

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(-\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 拡大縮小

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{s}) = \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 回転

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}^T(\theta)$$

- せん断

$$\mathbf{H}_{ij}^{-1}(s) = \mathbf{H}_{ij}(-s)$$

逆行列の求め方

- 剛体変換

$$\mathbf{M}=\mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{R}(\theta) \Rightarrow \mathbf{M}^{-1}=\mathbf{R}^{-1}(\theta)\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t})=\mathbf{R}(-\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{t})=\mathbf{R}^{T}(\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{t})$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^{T} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{,0} & \mathbf{r}_{,1} & \mathbf{r}_{,2} & -\mathbf{R}^{T}\mathbf{t} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{R}}=\begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{0,} & \mathbf{r}_{1,} & \mathbf{r}_{2,} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{,0}^{T} \\ \mathbf{r}_{,1}^{T} \\ \mathbf{r}_{,2}^{T} \end{pmatrix}$$

逆行列の求め方

- オイラー変換

$$\mathbf{E}(h,p,r)=\mathbf{R}_y(h)\mathbf{R}_x(p)\mathbf{R}_z(r)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}^{-1}(h,p,r)=\mathbf{E}^T(h,p,r)$$

$$=\left(\mathbf{R}_y(h)\mathbf{R}_x(p)\mathbf{R}_z(r)\right)^T$$

$$=\mathbf{R}_z^T(r)\mathbf{R}_x^T(p)\mathbf{R}_y^T(h)$$

OpenGL の変換行列

GLSL における座標変換

OpenGL の変換行列の要素の順序

この講義での行列表記

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 & m_4 & m_8 & m_{12} \\ m_1 & m_5 & m_9 & m_{13} \\ m_2 & m_6 & m_{10} & m_{14} \\ m_3 & m_7 & m_{11} & m_{15} \end{pmatrix}$$

C/C++ 言語の配列の格納順序

```
GLfloat m[] = {
    m[ 0], m[ 1], m[ 2], m[ 3],
    m[ 4], m[ 5], m[ 6], m[ 7],
    m[ 8], m[ 9], m[10], m[11],
    m[12], m[13], m[14], m[15],
};
```

見かけ上転置している

課題

- y 軸中心に r ラジアン回転したあと，y 方向に d 平行移動する変換行列を右の配列変数 m に設定しなさい．関数 sin() / cos() は使って構わない．
- この配列変数は OpenGL で使用するものとする．

```
GLfloat m[16];


m[0] = … ;
m[1] = … ;
…
m[15] = … ;
```

行列をシェーダプログラムで使う

- uniform 変数
  - 描画単位 (glDrawArrays(), glDrawElements() 等) で不変な値
    - 変換行列，光源位置，視点位置，材質情報等
  - 各シェーダステージから共通して参照される
    - CPU 側のプログラムで値を設定する
    - シェーダプログラムからは読み出しのみ

attribute 変数は
頂点ごとに変化する

バーテックスシェーダ

```
#version 150 core
in vec4 pv;
uniform mat4 mc;
void main(void)
{
  gl_Position = mc * pv;
}
```

行列と
ベクトルの積

uniform
uniform 変数の宣言
mat4
実数 (float) 4×4 要素の行列データ型
mc
mat4 型のユーザ定義
uniform 変数

uniform 変数に行列を設定する

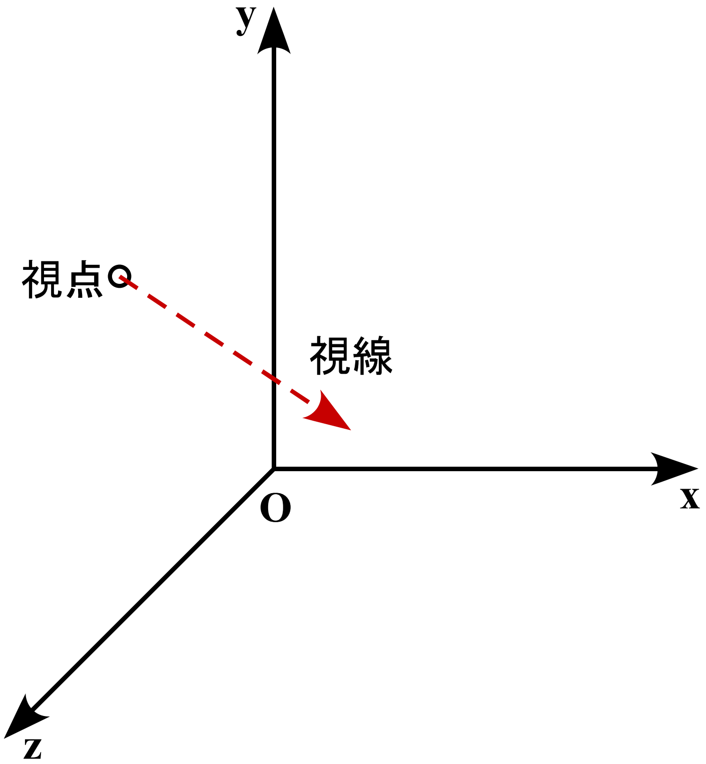
- シェーダプログラムの作成（loadShader() を使う場合）
  - GLuint program = createProgram(…);
- この後に uniform 変数 mc のインデックスを求める
  - GLint mcLoc = glGetUniformLocation(program, "mc");
    - uniform 変数はシェーダのハードウェアの「レジスタ」に割り当てられる
    - glGetUniformLocation() は uniform 変数に割り当てられたレジスタの「インデックス」を求める
- 描画時に使用するシェーダプログラムの選択
  - glUseProgram(program);
- その後に uniform 変数に値を設定する
  - glUniformMatrix4fv(mcLoc, *count*, *transpose*, mc);
    - *count*: 設定する配列変数の数（行列の数が 1 個なら1）, *transpose*: m を転置するなら GL_TRUE, しないなら GL_FALSE

ビュー変換

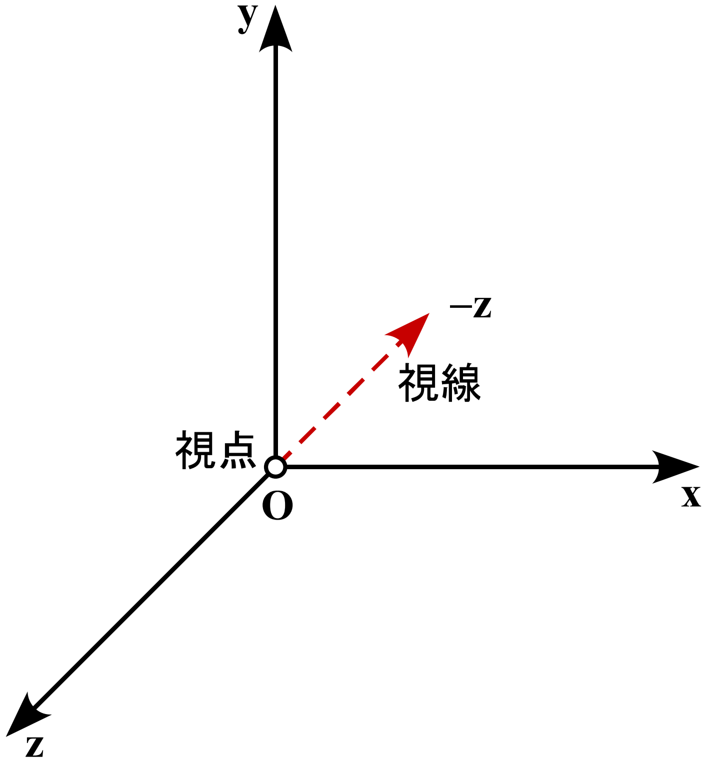
視点の位置や視線の方向を変更する

ビュー変換 (視野変換)

ビュー変換前

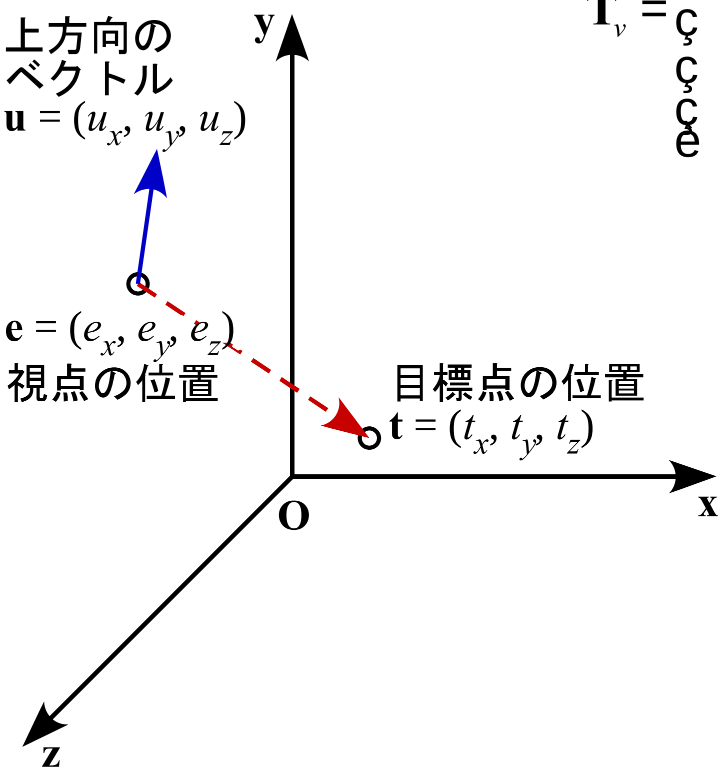


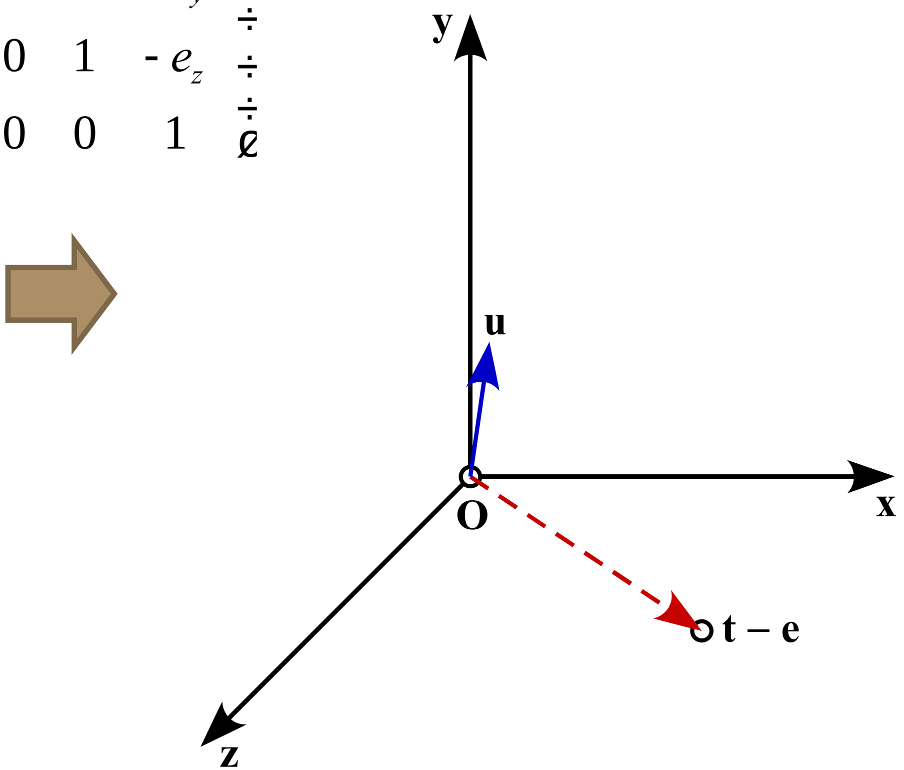
ビュー変換後



視点の移動

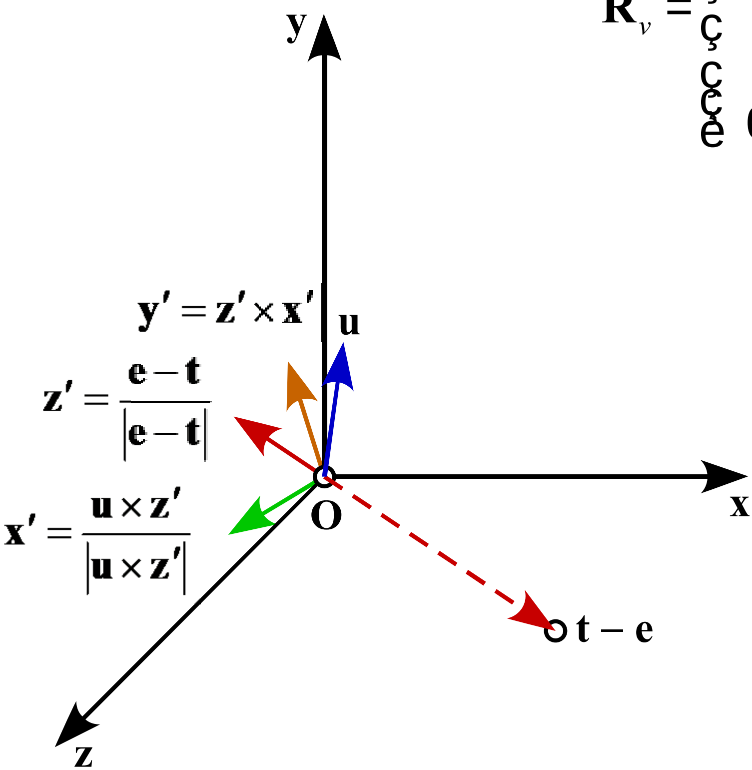
$$\mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

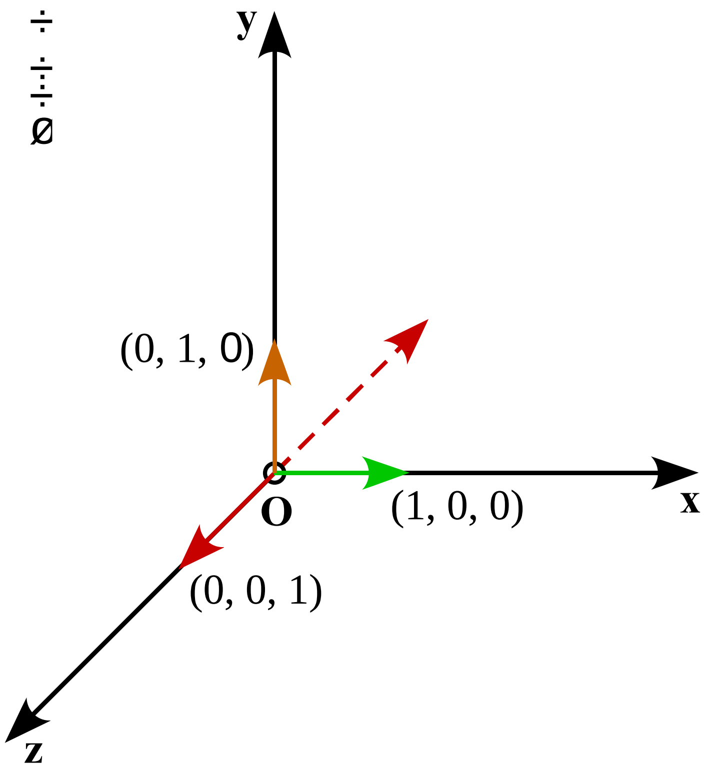




視線の回転

$$\mathbf{R}_v = \begin{pmatrix} & \mathbf{x}'^T & & 0 \\ & \mathbf{y}'^T & & 0 \\ & \mathbf{z}'^T & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





回転の変換行列

$$\mathbf{R}_v = \begin{pmatrix} & \mathbf{x}'^T & & 0 \\ & \mathbf{y}'^T & & 0 \\ & \mathbf{z}'^T & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & 0 \\ y'_x & y'_y & y'_z & 0 \\ z'_x & z'_y & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}'^T = \begin{pmatrix} z'_x & z'_y & z'_z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} e_x - t_x & e_y - t_y & e_z - t_z \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(e_x - t_x\right)^2 + \left(e_y - t_y\right)^2 + \left(e_z - t_z\right)^2}}$$

$$\mathbf{x}'^T = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} u_y z'_z - u_z z'_y & u_z z'_x - u_x z'_z & u_x z'_y - u_y z'_x \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(u_y z'_z - u_z z'_y\right)^2 + \left(u_z z'_x - u_x z'_z\right)^2 + \left(u_x z'_y - u_y z'_x\right)^2}}$$

$$\mathbf{y}'^T = \begin{pmatrix} y'_x & y'_y & y'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_y x'_z - z'_z x'_y & z'_z x'_x - z'_x x'_z & z'_x x'_y - z'_y x'_x \end{pmatrix}$$

ビュー変換行列

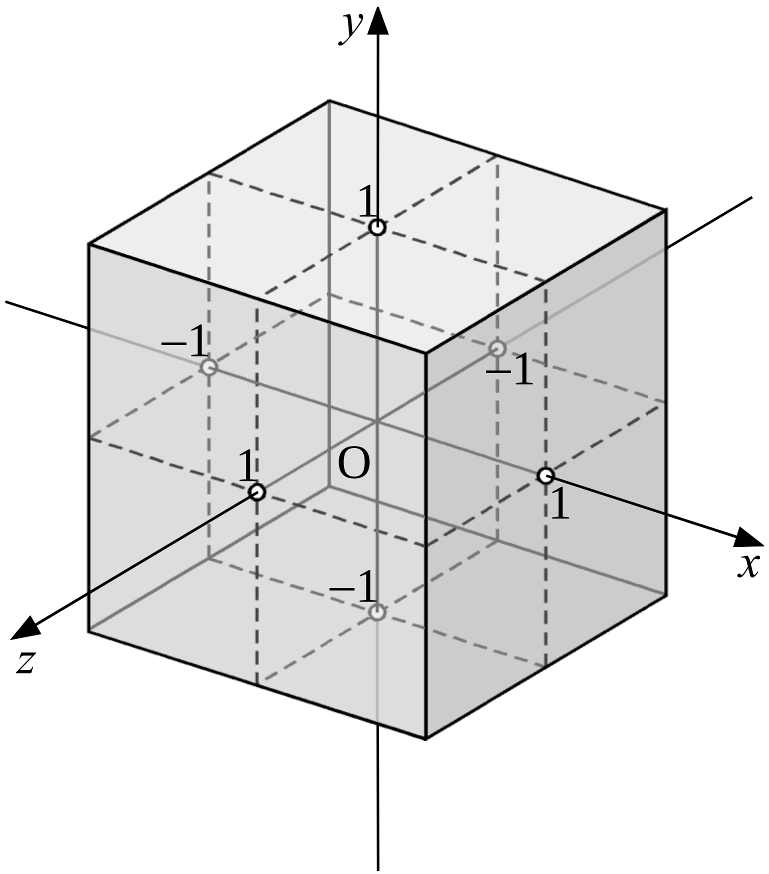
$$
\mathbf{M}_v = \mathbf{R}_v \mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & 0 \\ y'_x & y'_y & y'_z & 0 \\ z'_x & z'_y & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ex \\ 0 & 1 & 0 & -ey \\ 0 & 0 & 1 & -ez \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & -e_x x'_x - e_y x'_y - e_z x'_z \\ y'_x & y'_y & y'_z & -e_x y'_x - e_y y'_y - e_z y'_z \\ z'_x & z'_y & z'_z & -e_x z'_x - e_y z'_y - e_z z'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

投影変換

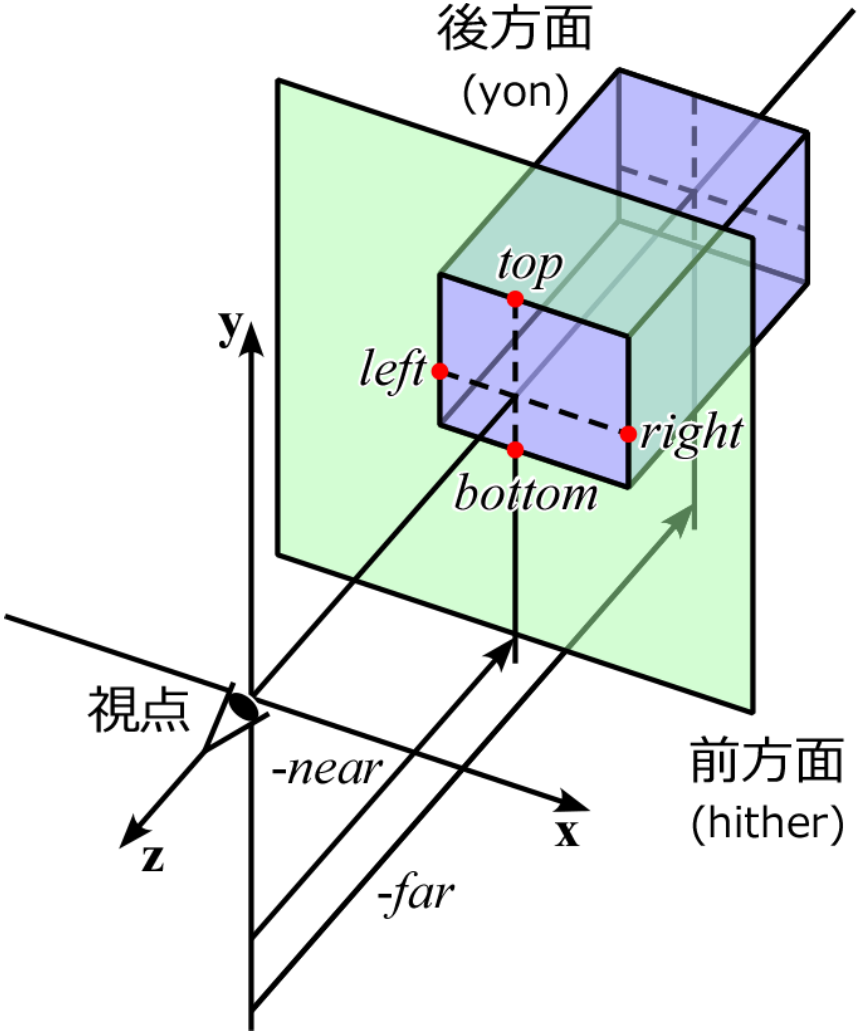
直交投影と透視投影

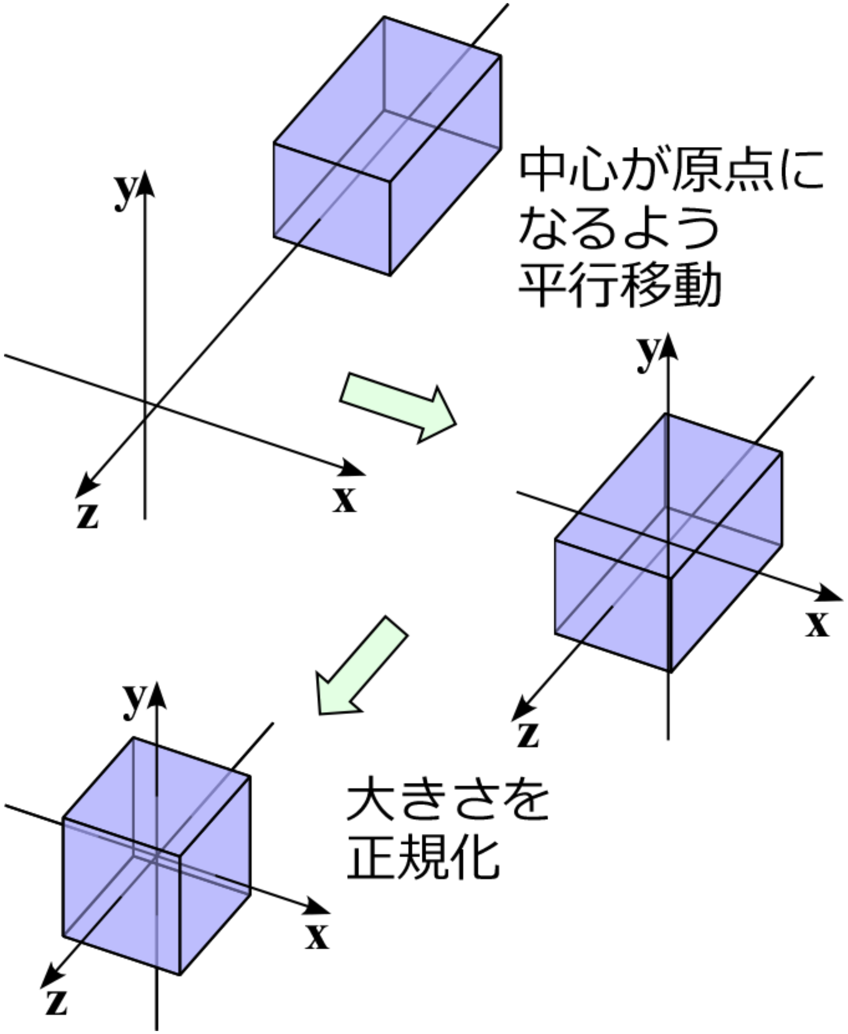
標準ビューボリューム



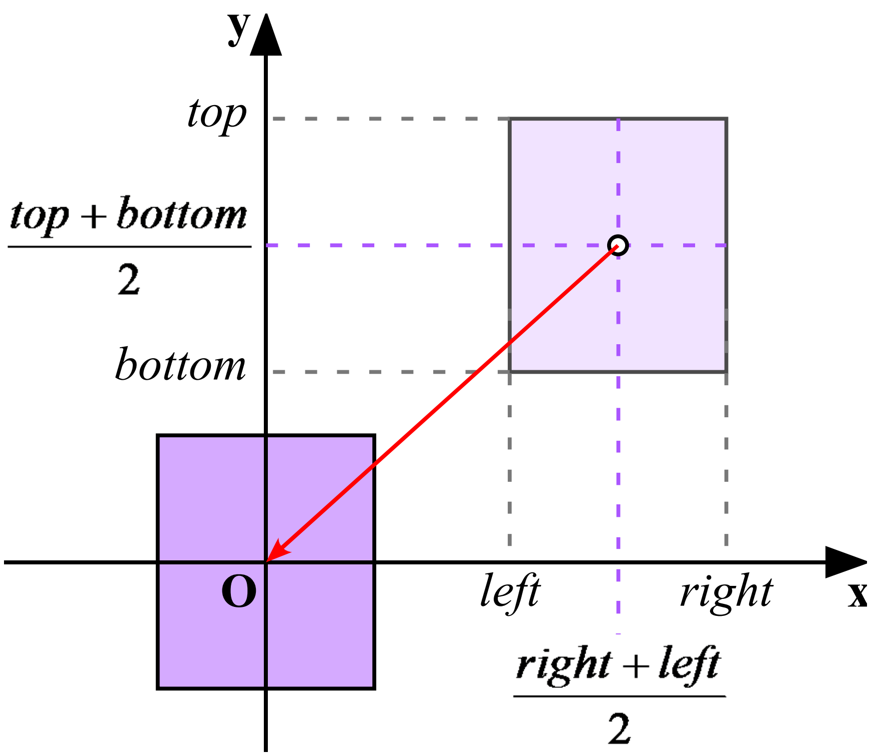
- $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ の立方体の空間
- この空間からはみ出たものは**クリッピング**される
- この空間のxy平面への直交投影像が**ビューポート**に表示される
- この空間の座標系はクリッピング座標系

直交投影


後方面
(yon)
y
top
left
right
bottom
視点
-near
-far
x
z
前方面
(hither)

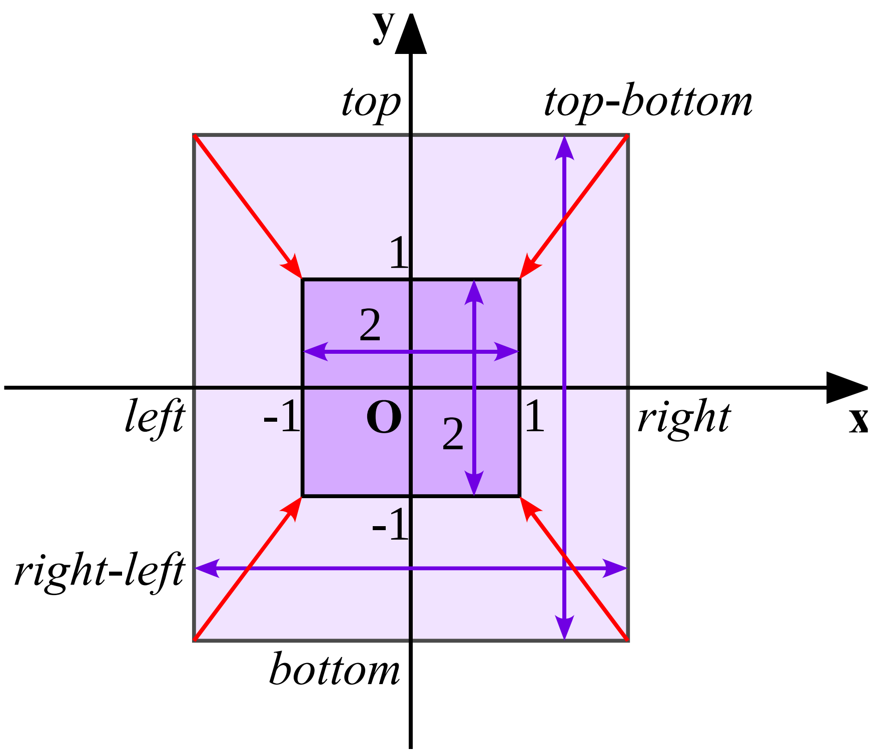

中心が原点に
なるよう
平行移動
大きさを
正規化
y
x
z

中心に平行移動



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{right+left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{top+bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{far+near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

スケーリングして大きさを正規化



$$
\begin{pmatrix}
\frac{2}{right-left} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

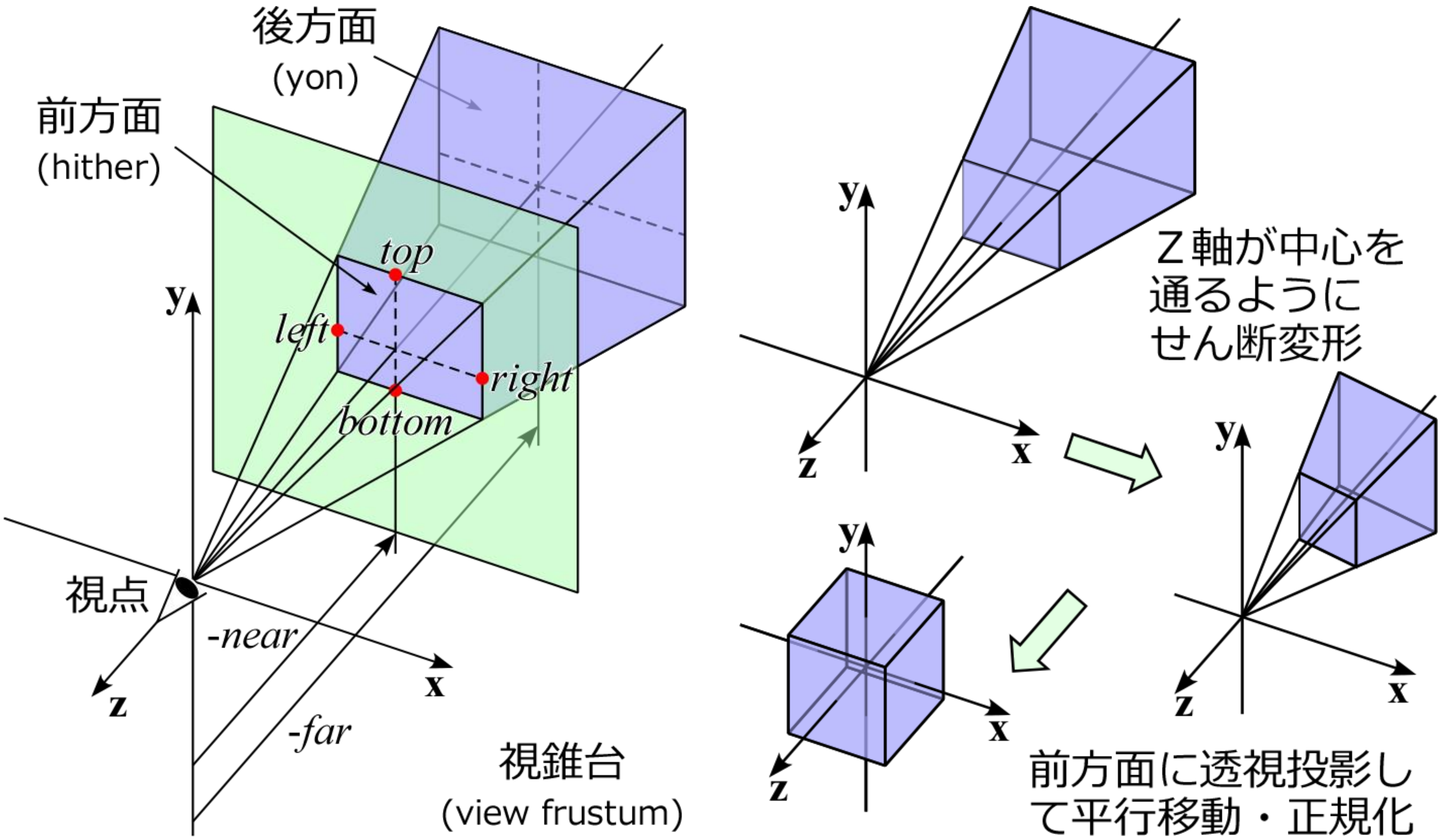
直交投影変換行列

スケーリング（正規化）　　　　平行移動

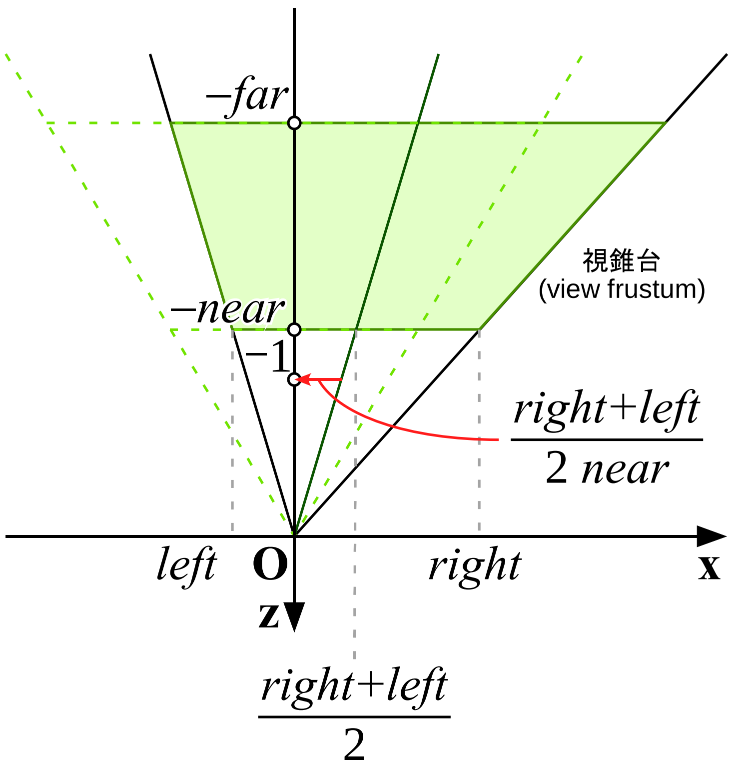
$$
\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{right + left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{top + bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{far + near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & -\frac{right + left}{right - left} \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & -\frac{top + bottom}{top - bottom} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & -\frac{far + near}{far - near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

透視投影

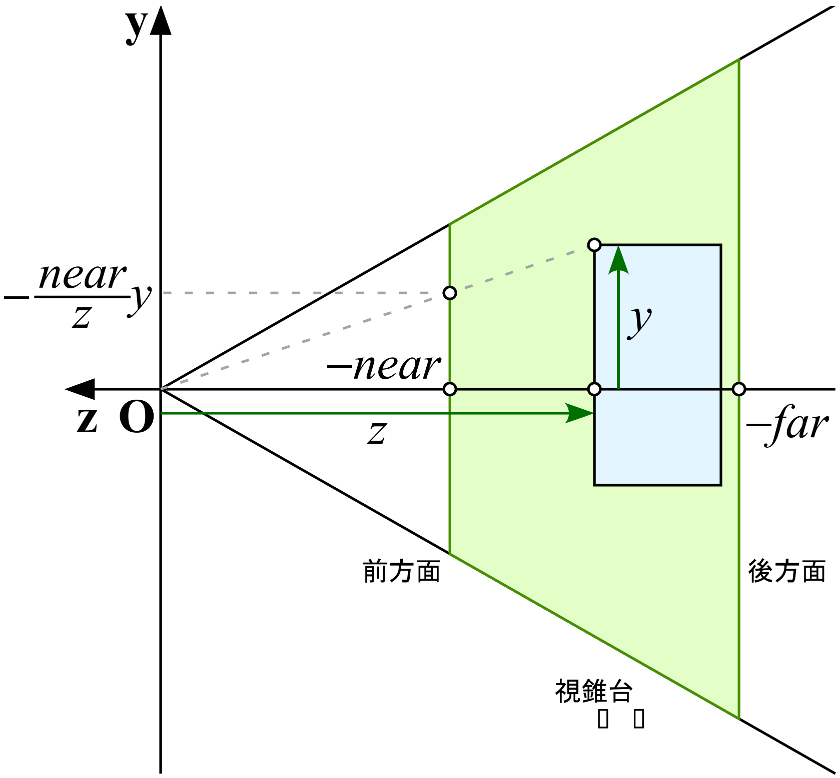

後方面
(yon)
前方面
(hither)
top
left
right
bottom
y
x
z
視点
-near
-far
視錐台
(view frustum)
Z軸が中心を
通るように
せん断変形
前方面に透視投影し
て平行移動・正規化

せん断



$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dfrac{right+left}{2near} & 0 \\
0 & 1 & \dfrac{top+bottom}{2near} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

透視変換



$$x^* = -\frac{near}{z}x$$

$$y^* = -\frac{naer}{z}y$$

$$z^* = -\frac{far + near}{2} - \frac{far\, near}{z}$$

透視深度

透視変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{far + near}{2} & far\,near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = near\,x$$

$$y' = near\,y$$

$$z' = \frac{far + near}{2} z + far\,near$$

$$w' = -z$$

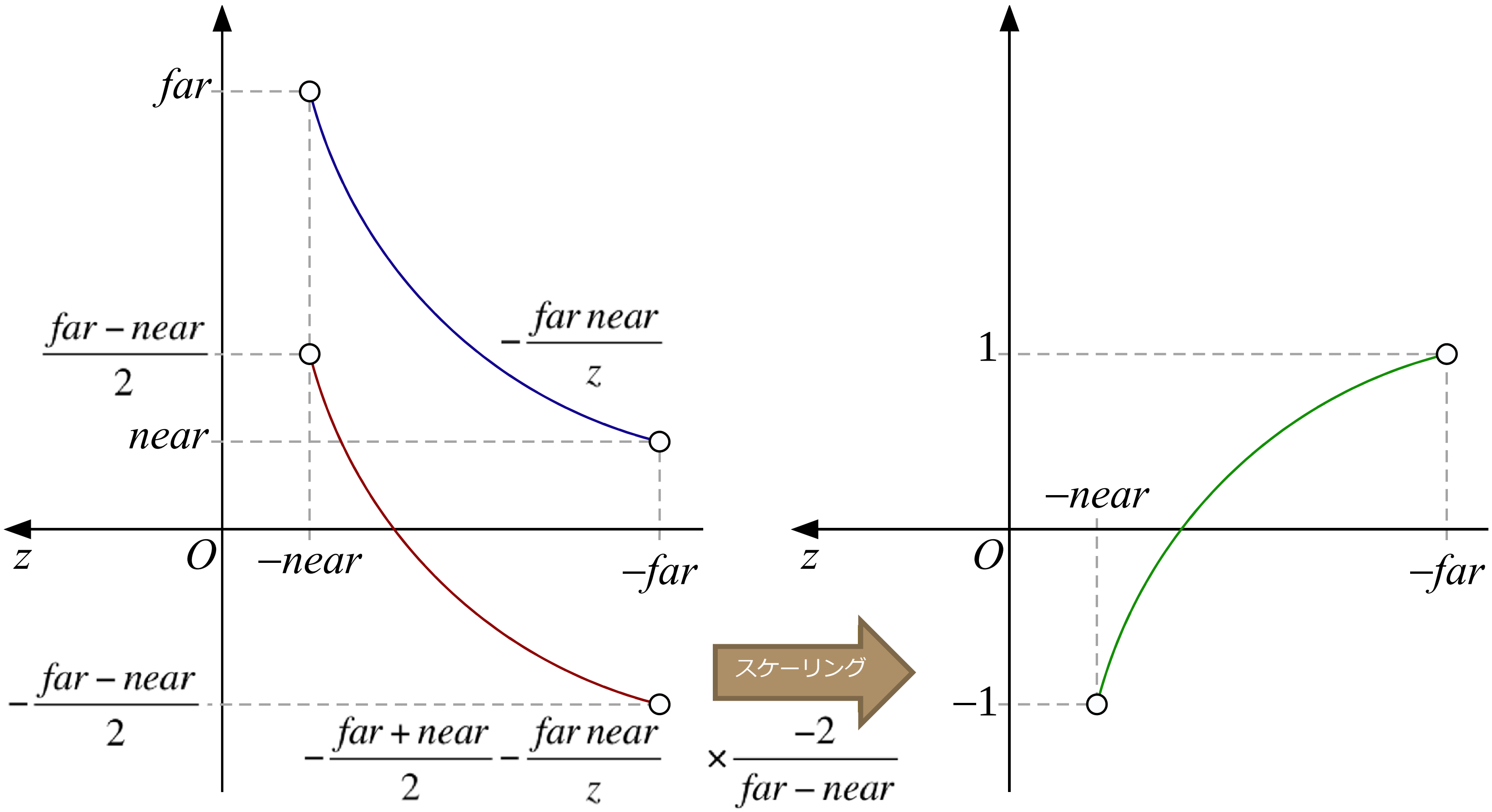
$$x^* = -\frac{near}{z} x$$

$$y^* = -\frac{naer}{z} y$$

$$z^* = -\frac{far + near}{2} - \frac{far\,near}{z}$$

求め方は後述

透視深度


far
far − near / 2
near
− far − near / 2
z
O
−near
−far
− far near / z
− far + near / 2 − far near / z
スケーリング
× −2 / far − near
1
−1
z
O
−near
−far

視錐台による透視投影変換行列

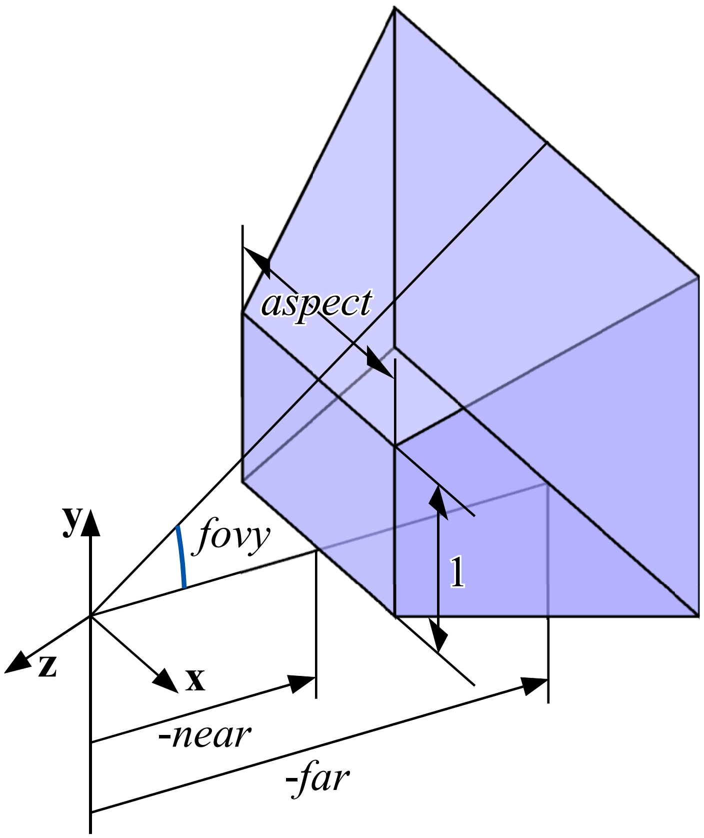
スケーリング（正規化）　　透視変換　　せん断

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far+near}{2} & far\,near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{right+left}{2near} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{top+bottom}{2near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2near}{right - left} & 0 & \frac{right+left}{right - left} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{top - bottom} & \frac{top+bottom}{top - bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far - near} & -\frac{2\,far\,near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

画角をもとにした透視投影変換行列

画角: field of view – fov
（y 方向の画角: fov-y → fovy）



$$f = \frac{1}{\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)} = \cot\left(\frac{fovy}{2}\right)$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{f}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & -\frac{2\,far\,near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

各変換行列の使い方

$\mathbf{M}_m$：モデリング変換行列（パーツごとの拡大・縮小，回転，平行移動等）

$\mathbf{M}_v$：ビュー変換行列　$\mathbf{M}_p$：投影変換行列

$\mathbf{P}_l$：ローカル座標系の座標値　$\mathbf{N}_l$：ローカル座標系の法線ベクトル

$$\mathbf{P}_w = \mathbf{M}_m \mathbf{P}_l$$

ワールド座標系の座標値
陰影付けなどに用いる

$$\mathbf{G} = \left(\mathrm{adj}\left(\mathbf{M}_m\right)\right)^T \Rightarrow \mathbf{N}_w = \mathbf{G}\mathbf{N}_l$$

(要正規化)

ワールド座標系の法線ベクトル
陰影付けなどに用いる

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_p \mathbf{M}_v \mathbf{M}_m \Rightarrow \mathbf{P}_c = \mathbf{M}_c \mathbf{P}_l$$

クリッピング座標系の座標値
gl_Position に代入する

宿題

- 第２回の宿題の図形に対してビュー変換と透視投影変換を行ったものを描いてください
  - 次のプログラムの ggsample03.cpp で定義している関数 lookat() および perspective() には中身が実装されていません
    - https://github.com/tokoik/ggsample03
  - これらの関数の中身を実装してください
    - 透視投影変換行列を求めて引数の配列変数 m に格納する関数 perspective()
    - ビュー変換行列を求めて引数の配列変数 m に格納する関数 lookat()
  - また GgApplication::run() で透視投影変換行列とビュー変換行列の積を求め，シェーダプログラムの uniform 変数 mc に格納してください
  - バーテックスシェーダにおいて入力された頂点座標に uniform 変数 mc をかけてください
- ggsample03.cpp と ggsample03.vert を**アップロード**してください

結果

このような画像が表示されれば，多分，正解です．