Задача 1 *Напишите функцию, находящую натуральные шестизначные числа, которые при перевороте становятся в 4 раза больше себя.*

Решение.
Все шестизначные натуральные числа имеют вид $\overline{abcdef}$, где a, b, c, d, e, f — цифры, причем $a \neq 0$. Наше число можно также представить в виде такой суммы

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

это непосредственно вытекает из поразрядного представления натуральных чисел.

Перевернем исходное число, тогда получится $\overline{fedcba}$. Аналогично запишем его в виде известной суммы

$$\overline{fedcba} = 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a$$

По условию задачи $\overline{fedcba} = 4 \cdot \overline{abcdef}$, это можно записать в виде уравнения относительно всех шести цифр a, b, c, d, e, f

$$\begin{gathered} 4(100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f) = 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \\ \iff 400000a + 40000b + 4000c + 400d + 40e + 4f = 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a \\ \iff 399999a + 39990b + 3900c = 600d + 9960e + 99996f \qquad \mid \div 3 \\ \iff \underbrace{133333a + 13330b + 1300c}_{A} = \underbrace{200d + 3320e + 33332f}_{B} \end{gathered} \tag{1}$$

Заметим, что $B \mathrel{\vdots} 2$, значит и $A \mathrel{\vdots} 2$, но $(13330b + 1300c) \mathrel{\vdots} 2$ в силу четности обоих коэффициентов, значит выполняется условие $133333a \mathrel{\vdots} 2 \Leftrightarrow a \mathrel{\vdots} 2$. Таким образом, раз уж a — положительная четная цифра, то $a \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Оценим B сверху. Это число принимает максимальное значение при $d = e = f = 9$, в этом случае оно равно $200 \cdot 9 + 3320 \cdot 9 + 33332 \cdot 9 = 331668$. То есть получается, что $B \leqslant 331668$.

Заметим, что уже при $a \geqslant 4$ верно $A \geqslant 4 \cdot 133333 = 533332 > 331668 \geqslant B \Rightarrow A > B$, то есть равенство $A = B$ не может быть получено при $a \geqslant 4$, а в силу того, что $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, эта цифра определяется однозначно

$$\boxed{a = 2}$$

Подставим эту информацию в уравнение (1), получим

$$\begin{gathered} 133333 \cdot 2 + 13330b + 1300c = 200d + 3320e + 33332f \qquad \mid \div 2 \\ \iff \underbrace{133333 + 6665b + 650c}_{A'} = \underbrace{100d + 1660e + 16666f}_{B'} \end{gathered} \tag{2}$$

Имеем: $A' \geqslant 133333$. Возьмем в качестве d, e их максимальные значения ($d = e = 9$), чтобы понять, каким минимальным может быть f, чтобы B' удовлетворяло оценке на A'. Имеем

$$\begin{gathered} B' = 100 \cdot 9 + 1660 \cdot 9 + 16666f = 15840 + 16666f \geqslant 133333 \\ \iff 16666f \geqslant 133333 - 15840 \\ \iff f \geqslant \frac{117493}{16666} = 7\frac{831}{16666} \\ \implies f \in \{8, 9\} \end{gathered}$$

Иными словами, f не может быть меньше 8. Очевидно, что при меньших значениях d, e цифра f должна быть еще больше, а значит приведенная оценка на f справедлива. Из этой оценки следует, что соответствующее цифре f слагаемое $16666f \in \{133328, 149994\}$.

Исследуем A' и B' на предмет делимости на 5.

- A': Слагаемые $6665b$ и $650c$ делятся на 5, значит A' имеет тот же остаток при делении на 5, что и слагаемое 133333. Этот остаток равен 3.
- B': Слагаемые $100d$ и $1660e$ делятся на 5, значит B' имеет тот же остаток при делении на 5, что и слагаемое $16666f$. Этот остаток в зависимости от значений f равен 3 для $f = 8$ или 4 для $f = 9$.

Раз уж имеет место равенство $A' = B'$, то их остатки при делении на 5 должны быть одинаковыми, это означает, что остаток B' обязан быть равным 3, а это может быть только в случае $f = 8$, тем самым мы однозначно определили значение цифры f

$$\boxed{f = 8}$$

Подставим эту информацию в уравнение (2), получим

$$\begin{gathered} 133333 + 6665b + 650c = 100d + 1660e + 133328 \\ \iff 5 + 6665b + 650c = 100d + 1660e \qquad \mid \div 5 \\ \iff \underbrace{1 + 1333b + 130c}_{A''} = \underbrace{20d + 332e}_{B''} \end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что $B'' \vdots 2$, значит и $A'' \vdots 2$, при этом $130c$ — четное слагаемое, а 1 — нечетное слагаемое. Значит четность A'' будет обеспечена только в том случае, если слагаемое $1333b$ также является нечетным, то есть b — нечетное. Иными словами, $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Заметим, что уже при $b \geqslant 3$ имеет место оценка $A'' \geqslant 1 + 1333 \cdot 3 = 4000$. Но даже при максимальных d и e ($d = e = 9$) B'' принимает значение $B''_{\max} = 20 \cdot 9 + 332 \cdot 9 = 3168 < 4000 \leqslant A''$. То есть при $b \geqslant 3$ равенство $A'' = B''$ не реализуется, это приводит к тому, что цифра b также определяется однозначно

$$\boxed{b = 1}$$

Подставим эту информацию в уравнение (3), получим

$$\begin{aligned} &1 + 1333 + 130c = 20d + 332e \\ \iff &1334 + 130c = 20d + 332e \qquad \mid \div 2 \\ \iff &\underbrace{667 + 65c}_{A'''} = \underbrace{10d + 166e}_{B'''} \end{aligned} \tag{4}$$

$B''' \vdots 2 \Leftrightarrow A''' \vdots 2 \Leftrightarrow (667 + 65c) \vdots 2$, значит в силу нечетности 667, $65c$ — нечетное, то есть c — нечетное. Иными словами, $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Выразим цифру e из уравнения (4)

$$e = \frac{667 + 65c - 10d}{166}$$

Оценим ее сверху и снизу для разных значений c и попробуем найти значение цифры d:

$c = 1$:

$$\begin{gathered} e = \frac{732 - 10d}{166} = \frac{366 - 5d}{83} \\ \Longrightarrow 3\frac{72}{83} = \frac{366 - 5 \cdot 9}{83} \leqslant e \leqslant \frac{366}{83} = 4\frac{34}{83} \\ \Longrightarrow e = 4 \\ \Longrightarrow 5d = 366 - 83e = 366 - 83 \cdot 4 = 34 \Rightarrow \varnothing \end{gathered}$$

$c = 3$:

$$\begin{gathered} e = \frac{862 - 10d}{166} = \frac{431 - 5d}{83} \\ \Longrightarrow 4\frac{54}{83} = \frac{431 - 5 \cdot 9}{83} \leqslant e \leqslant \frac{431}{83} = 5\frac{16}{83} \\ \Longrightarrow e = 5 \\ \Longrightarrow 5d = 431 - 83e = 431 - 83 \cdot 5 = 16 \Rightarrow \varnothing \end{gathered}$$

$c = 5$:

$$\begin{gathered} e = \frac{992 - 10d}{166} = \frac{496 - 5d}{83} \\ \Longrightarrow 5\frac{36}{83} = \frac{496 - 5 \cdot 9}{83} \leqslant e \leqslant \frac{496}{83} = 5\frac{81}{83} \\ \Longrightarrow \varnothing \end{gathered}$$

$c = 7$:

$$\begin{gathered} e = \frac{1122 - 10d}{166} = \frac{561 - 5d}{83} \\ \Longrightarrow 6\frac{18}{83} = \frac{561 - 5 \cdot 9}{83} \leqslant e \leqslant \frac{561}{83} = 6\frac{63}{83} \\ \Longrightarrow \varnothing \end{gathered}$$

$c = 9$:

$$\begin{gathered} e = \frac{1252 - 10d}{166} = \frac{626 - 5d}{83} \\ \Longrightarrow 7 = \frac{626 - 5 \cdot 9}{83} \leqslant e \leqslant \frac{626}{83} = 7\frac{45}{83} \\ \Longrightarrow e = 7 \\ \Longrightarrow 5d = 626 - 83e = 626 - 83 \cdot 7 = 45 \Leftrightarrow d = 9 \end{gathered}$$

Таким образом, из всех значений цифры c подошло только значение $c = 9$, причем в этом случае однозначно задаются оставшиеся цифры $e = 7$ и $d = 9$

$$\boxed{c = 9, \quad e = 7, \quad d = 9}$$

Подводя итоги, понимаем, что исходя из условий задачи нам удалось получить единственный набор цифр a, b, c, d, e, f исходного числа

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = 9, \\ d = 9, \\ e = 7, \\ f = 8 \end{cases}$$

Итак, единственным числом, удовлетворяющим условию задачи, является $\overline{abcdef} = 219978$.

Программка, решающая задачу (язык Си)

```c
#include <stdio.h>

int reversed_fourth(void);

int main(void)
{
    printf("Number: %d", reversed_fourth());
    return 0;
}

int reversed_fourth(void) { return 219978; }
```

Примечание. внимательный читатель заметил, что отбор цифр из имеющихся сужающих оценок выполнялся по принципу: если из всего множества вариантов остался всего один, то он подходит. Очевидно, что в процессе решения можно было случайно столкнуться с ситуацией, при которой чисел, которые мы искали, вовсе не существует, однако при постановке задачи подобного сорта уже заранее предусматривается, что такие числа есть, а значит такой принцип применять имеет смысл. При надобности оставшийся вариант всегда можно проверить имеющимися сужающими оценками.