ניתוח זמן ריצה של אלגוריתמים רקורסיביים
נוסחאות נסיגה

1

מה נלמד?

- ניתוח זמן ריצה של אלגוריתמים רקורסיביים
  - אסטרטגיית הפרד ומשול
- נוסחת מסיגה – מהי?
- פתרון של נוסחאות נסיגה

2

הפרד ומשול לפי רומא העתיקה

צירוף של פסיכולוגיה מדינית, אסטרטגיה צבאית ואסטרטגיה כלכלית שלפיהן ניתן להשיג ולשמור על עוצמתו של השולט על ידי פיצול העוצמה המצויה בידי האחרים לנתחים קטנים. כל נתח שיווצר כתוצאה מהפיצול יהיה בעל עוצמה נמוכה מאשר הגוף שהיה קיים בעבר

3

גישת הפרד ומשול

- **הפרד :** חלק את הבעיה למספר תת-בעיות
- **משול :** פתור את תת-הבעיות באופן רקורסיבי;
  אם הבעיה קטנה פתור ישירות
- **צרף :** צרף את הפתרונות של תת-הבעיות לפתרון מלא לבעיה המקורית

4

מיון מיזוג

5

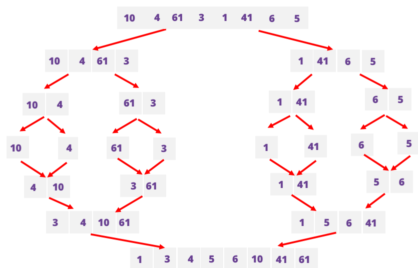
תיאור מילולי

בהינתן מערך A בגודל n

1. **אם A בגודל 0 או 1 – חזור (המערך כבר ממוין)**
2. **מיין באופן רקורסיבי את $n/2$ האיברים הראשונים**
3. **מיין באופן רקורסיבי את $n/2$ האיברים האחרונים**
4. **מזג את שני החלקים הממוינים**

6

דוגמה



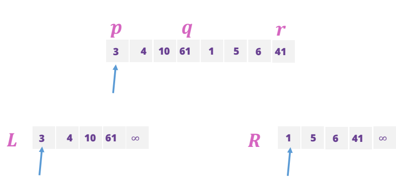
7

פסאודו - קוד

Merge-Sort(A, p, r)
1. if $p < r$
2. $\quad q \leftarrow \left\lfloor \frac{(p+r)}{2} \right\rfloor$
3. $\quad$ Merge-Sort (A, p, q)
4. $\quad$ Merge-Sort $(A, q+1, r)$
5. $\quad$ Merge(A, p, q, r)

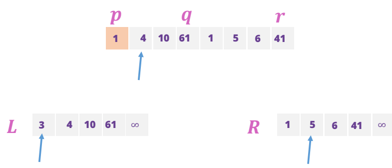
8

מיזוג



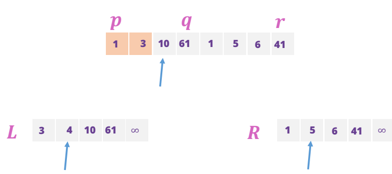
9

מיזוג



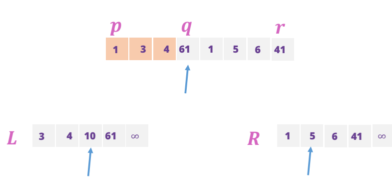
10

מיזוג



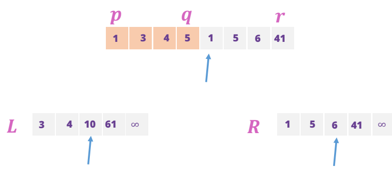
11

מיזוג



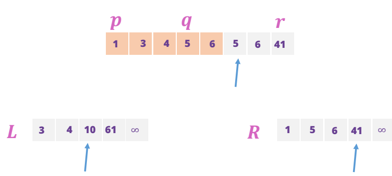
12

מיזוג



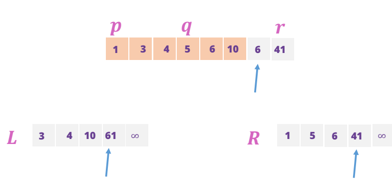
13

מיזוג



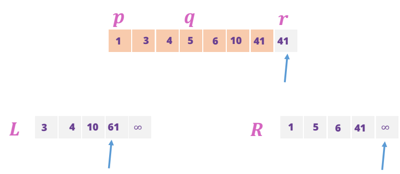
14

מיזוג



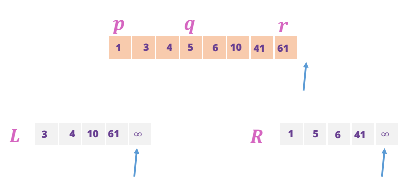
15

מיזוג



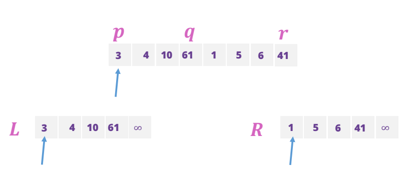
16

מיזוג



17

מיזוג - זמן ריצה



$T(n) = an$

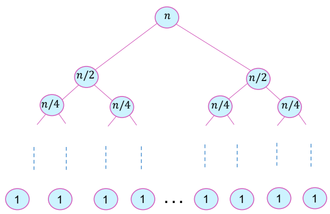
n - מספר האיברים שממזגים

a - קבוע

18

מיון מיזוג – זמן ריצה

רמה	מספר תת בעיות
0	1
1	2
2	4

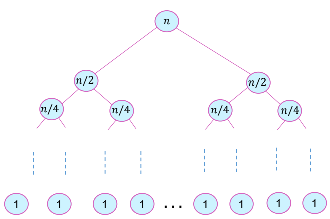


19

שאלה:

- כמה רמות יש בעץ הרקורסיה (כפונקציה של n, גודל המערך)?

1. $n/2$
2. מספר קבוע
3. n
4. $\log n$

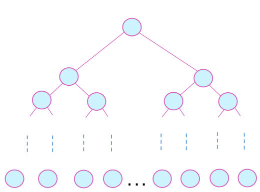


20

שאלה

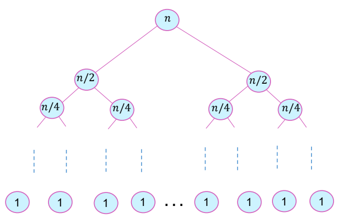
- השלימו במקומות הריקים. ברמה i יש _____ תת בעיות, כל אחת בגודל _____ .

1. 2^i תת בעיות , כל אחת בגודל i
2. $\frac{n}{2^i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל 2^i
3. 2^i תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{2^i}$
4. $\frac{n}{i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{2^i}$



21

מיון מיזוג – זמן ריצה



רמה	עלות
0	an
1	$2\cdot\left(a\frac{n}{2}\right)$
2	$4\cdot\left(a\frac{n}{4}\right)$
i	$2^i\cdot\left(a\frac{n}{2^i}\right)$

22

מיון מיזוג – זמן ריצה

- **עלות העבודה בכל רמה היא** an
- **יש** $\log n$ **רמות בעץ**
- **זמן ריצה הכולל של מיון מיזוג הוא** $T(n) = an \cdot \log n = O(n \log n)$

23

נוסחת נסיגה

- זמן ריצה של אלגוריתם רקורסיבי ניתן לתאר באמצעות **נוסחה נסיגה (recurrence equation)**
- **נוסחת נסיגה** היא נוסחה שמגדירה פונקציה באופן רקורסיבי, דהיינו באמצעות הערכים שפונקציה מקבלת על קלטים קטנים יותר.
- דוגמה: סדרת מספרי פיבונצ'י

$$\mathbf{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots}$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2),\ n \geq 2$$

24

נוסחת נסיגה

כל נוסחת נסיגה כוללת שני חלקים:

1. תנאי/יי ההתחלה הקובעים את הערכים של פונקציה על קלטים התחלתיים
2. נוסחה המגדירה את הפונקציה באופן רקורסיבי

תנאיי ההתחלה

$$\boldsymbol{F(0) = 0}$$
$$\boldsymbol{F(1) = 1}$$

נוסחה

$$\boldsymbol{F(n) \ = \ F(n-1) \ + \ F(n-2)\,, n \geq 2}$$

25

מהו הקשר בין מספרי פיבונצ'י לארנבים?

- זוג ארנבים ממליט כל חודש זוג ארנבים חדש. כל זוג ארנבים חדש מחכה חודש עד לתחילת ההמלטות. אם מכניסים לגן סגור זוג חדש של ארנבים, כמה זוגות של ארנבים יהיו בסוף השנה?

חודש
1
2
3
4
5

...

26

מיון מיזוג

Merge-Sort$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$

```
1. if p < r
2.     q ← ⌊(p+r)/2⌋
3.     Merge-Sort (A, p, q)          T(n/2)
4.     Merge-Sort (A, q + 1, r)      T(n/2)
5.     Merge(A, p, q, r)             an
```

$T(n)$ זמן ריצה של מיון מיזוג על מערך הקלט בגודל n

27

מיון מיזוג

Merge-Sort(A, p, r)

1. if $p < r$
2. $q \leftarrow \left\lfloor \frac{(p+r)}{2} \right\rfloor$
3. Merge-Sort (A, p, q)
4. Merge-Sort $(A, q+1, r)$
5. Merge(A, p, q, r)

$$T(n) = \Theta(1), n = 0 \text{ or } n = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an, n \geq 2$$

28

פתרון נוסחאות נסיגה

$$T(n) = \Theta(1), n = 0 \text{ or } n = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an, n \geq 2$$

מהו סדר גודל של הפונקציה $T(n)$?

כיצד נמצא את הנוסחה המפורשת ?

29

שיטות לפתרון נסוחאות נסיגה

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

- שיטת האיטרציה (Iteration method)
- שיטת האב/מאסטר (Master Method)
- שיטת ההצבה (Substitution method)

30

שיטת האיטרציה
Iteration Method

הרעיון:
- להציב שוב ושוב את הנוסחה בעצמה עד אשר מגיעים אל תנאי ההתחלה.
- לחסום את הסכום שהתקבל באמצעות שיטות למציאות חסמים של סכומים.

31

דוגמה 1

$T(1) = 1$
$T(n) = T(n-1) + n, \quad n > 1$

פתרון:

$T(n) = T(n-1) + n =$

$= T(n-2) + (n-1) + n$

$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$

$=$ [אחרי i צעדים] $=$

32

שאלה

- איך תיראה הנוסחה אחרי i צעדים של הצבה חוזרת?

1. $T(i) + \sum_{k=1}^{i} k$
2. $T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k$
3. $T(n-i) + \sum_{k=1}^{i} k$
4. $T(i) + \sum_{k=1}^{n-(i-1)} k$

$T(n) = T(n-1) + n =$

$= T(n-2) + (n-1) + n$

$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$

$=$ [אחרי i צעדים] $=$

33

דוגמה 1

$\boldsymbol{T(1) = 1}$
$\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n, \quad n > 1}$

פתרון:

$\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n =}$

$\boldsymbol{= T(n-2) + (n-1) + n}$

$\boldsymbol{= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =}$

= [אחרי $\boldsymbol{i}$ צעדים] = $\boldsymbol{T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k}$

אחרי כמה צעדים נעצור?

34

שאלה:

אחרי כמה צעדים התהליך יעצור?

1. התהליך הינו אינסופי. לא יעצור לעולם.
2. התהליך יעצור אחרי מספר קבוע של צעדים (לא תלוי ב-n)
3. התהליך יעצור אחרי $n-1$ צעדים
4. התהליך יעצור אחרי $\log n$ צעדים.

$\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n =}$

$\boldsymbol{= T(n-2) + (n-1) + n}$

$\boldsymbol{= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =}$

= [אחרי $\boldsymbol{i}$ צעדים] = $\boldsymbol{T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k}$

35

דוגמה 1

$\boldsymbol{T(1) = 1}$
$\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n, \quad n > 1}$

פתרון:

$\boldsymbol{T(n) = T(n-1) + n =}$

$\boldsymbol{= T(n-2) + (n-1) + n}$

$\boldsymbol{= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =}$

= [אחרי $\boldsymbol{i}$ צעדים] = $\boldsymbol{T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k =}$

$\boldsymbol{= T(1) + \sum_{k=2}^{n} k =}$

$\boldsymbol{= 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \Theta(n^2)}$

נעצור כאשר נגיע ל-$T(1)$, כלומר $\boldsymbol{i = n-1}$

36

דוגמה 2 - מיון מיזוג

$T(1) = b$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an, \quad n > 1$

פתרון:

37

דוגמה 2 - מיון מיזוג

38

שיטת המאסטר

- **מתכון כללי לפתרון נוסחאות נסיגה מהצורה**
  $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$
  $a \geq 1, b > 1$ קבועים
  $f(n)$ **חיובית אסימפטוטית**
- **תנאי התחלה**
  $T(n) = const$ **עבור** $n = const$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ ✓

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ ✓

$T(n) = T(n-1) + n$ ✗

$T(n) = nT(\frac{n}{2}) + n^2$ ✗

39

משפט האב

- **יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שלילים על-יד נוסחת הנסיגה:**

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. **אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$**
2. **אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$**
3. **אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$**

40

משפט האב

$$f(n) \quad ? \quad n^{\log_b a}$$

מקרה	משמעות
.1 $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$	$f(n) < n^{\log_b a}$
.2 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$	$f(n) \approx n^{\log_b a}$
.3 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$	$f(n) > n^{\log_b a}$

41

משפט האב

- יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שלילים על-יד נוסחת הנסיגה:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$
3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$

42

דוגמה 1

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

43

שאלה

מהם הערכים של a, b ו- $f(n)$ בנוסחה הנתונה: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$?

1. $a = 2, b = n, f(n) = 4$
2. $a = 2, b = 4, f(n) = n$
3. $a = 4, b = 2, f(n) = n$

44

דוגמה 1

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

45

דוגמה 2

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + dn,$ Merge Sort

קבוע d

46

דוגמה 3

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + n\log n$

47

דוגמה 4

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$

48

משפט האב

- יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שליליים על-ידי נוסחת הנסיגה:

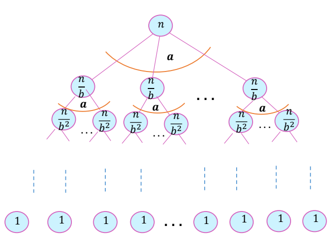
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$
3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$

49

עץ הרקורסיה

הנחה: $n = b^p$ עבור p שלם

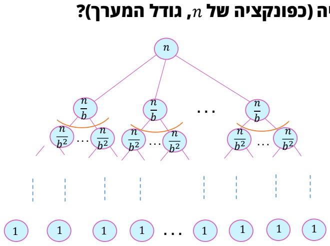


רמה	מספר תת בעיות	עלות
0	1	$f(n)$
1	a	$af\left(\frac{n}{b}\right)$
2	a^2	$a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$

50

שאלה

- כמה רמות יש בעץ הרקורסיה (כפונקציה של n, גודל המערך)?

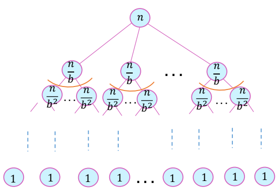


1. $\frac{n}{b}$
2. מספר קבוע
3. $\log_a n$
4. $\log_b n$
5. $\log_b a$

51

שאלה

- **השלמו במקומות הריקים. ברמה i יש _____ תת בעיות, כל אחת בגודל _____.**

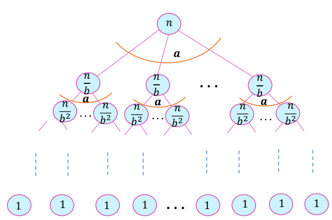


1. **2^i תת בעיות , כל אחת בגודל i**
2. **$\frac{n}{b^i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל b^i**
3. **a^i תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{b^i}$**
4. **b^i תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{a^i}$**
5. **$\frac{n}{i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{b^i}$**

52

עץ הרקורסיה

$x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$



רמה	מספר תת בעיות	עלות
0	1	$f(n)$
1	a	$af\left(\frac{n}{b}\right)$
2	a^2	$a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right)$
	...	
i	a^i	$a^if\left(\frac{n}{b^i}\right)$
	...	
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$a^{\log_b n} \cdot const$

53

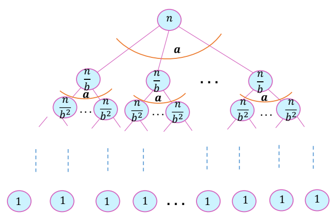
שאלה

סמנו את כל הטענות הנכונות

1. **אם $f(n) > n^{\log_b a}$, עלות העבודה יורדת בירידה ברמה הרקורסיה**
2. **אם $f(n) < n^{\log_b a}$, עלות העבודה עולה בירידה ברמה הרקורסיה**
3. **אם $f(n)$ ו- $n^{\log_b a}$ שווים, עלות העבודה בכל אחת מהרמות זהה**
4. **לא ניתן להסיק מסקנה איך משתנה עלות העבודה בירידה מרמה לרמה**

54

עץ הרקורסיה



עלות	מספר תת בעיות	רמה
$f(n)$	1	0
$af\left(\frac{n}{b}\right)$	a	1
$a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$	a^2	2
	$\cdots$	
$a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$	a^i	i
	$\cdots$	
$a^{\log_b n} \cdot const$	$a^{\log_b n} = \boxed{n^{\log_b a}}$	$\log_b n$

55

שיטת ההצבה
Substitution method

- בשיטה זו מנחשים את הפתרון של המשוואה הרקורסיבית, ומוכיחים אותה (לרוב באינדוקציה)
- בהוכחה באינדוקציה, מוצאים את הקבועים של זמן הריצה

56

דוגמה 1: מיון מיזוג

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$T(1) = 1$$

Guess: **T(n) = Θ (n logn).**
Show the upper (big O) and lower (big Ω) bounds separately
Show by Induction: T(n) ≤ c n log n, for some positive constant c.
Show by Induction: T(n) ≥ d n log n, for some positive constant d.

57

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$T(1) = 1$$

דוגמה 1: מיון מיזוג

חסם עליון: $T(n) \le c\ n \log n$

58

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$T(1) = 1$$

דוגמה 1: מיון מיזוג

חסם תחתון $T(n) \ge d\ n \log n$

Base: $T(2) = 2T(1) + 2 = 4 \ge d * 2 * \log(2) = 2d$,

For each $d \le 2$

Assumption: Assume that for any k, such that $2 \le k < n$ the guess is right, i.e. $T(k) \ge dk \log k$

Prof: Check that for n, $T(n) \ge d\ n \log(n)$

$$T(n) = 2T(n/2) + n \ge 2(d * n/2 * \log(n/2)) + n = d\,n \log(n/2) + n$$
$$= d\,n \log(n) - d\,n \log(2) + n = d\,n \log(n) + (1 - d)\,n \ge d\,n \log(n)\ for\ d \le 1$$

Therefore, $T(n) = \Omega(n \log n)$.

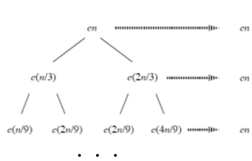
Conclusion: $T(n) = O(n \log n)\ and\ T(n) = \Omega(n \log n), hence, T(n) = \Theta(n \log n)$.

59

דוגמה 2:

- $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$
- $T(1) = T(2) = T(3) = 1$

- ניעזר בעץ הרקורסיה כדי לקבל ניחוש



- There are $\log_3 n$ full levels, and after $\log_{3/2} n$ levels, the problem size is down to 1.
- Each level contributes $\le cn$.
- Good guess: $T(n) = \Theta(n \lg n)$

60

$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$
$T(1) = T(2) = T(3) = 1$

- **Upper bound:**
  - Guess: T (n) ≤ dn lg n.

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le T(n/3) + T(2n/3) + cn \\
&\le d(n/3)\lg(n/3) + d(2n/3)\lg(2n/3) + cn \\
&= (d(n/3)\lg n - d(n/3)\lg 3) \\
&\qquad + (d(2n/3)\lg n - d(2n/3)\lg(3/2)) + cn \\
&= dn\lg n - d((n/3)\lg 3 + (2n/3)\lg(3/2)) + cn \\
&= dn\lg n - d((n/3)\lg 3 + (2n/3)\lg 3 - (2n/3)\lg 2) + cn \\
&= dn\lg n - dn(\lg 3 - 2/3) + cn \\
&\le dn\lg n \qquad \text{if } -dn(\lg 3 - 2/3) + cn \le 0\,, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad d \ge \frac{c}{\lg 3 - 2/3}\,.
\end{aligned}
$$

  - Therefore, T (n) = O(n lg n).

61

61

$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$
$T(1) = T(2) = T(3) = 1$

- **Lower bound:**
  - Guess: T(n) ≥ dn lg n.
  - Substitution is the same as for the upper bound, but replacing ≤ by ≥.
  - End up with
  - Therefore, T(n) = Ω(n lg n). $0 < d \le \frac{c}{\lg 3 - 2/3}\,.$
- Conclusion
  - T(n) = O(n lg n) and
  - T(n) = Ω(n lg n),
  - Hence, T(n) = Θ(n lg n).

62

62

ניתוח זמני ריצה של אלגוריתמים

סיכום

63

השוואה בין מיון הכנסה ומיון מיזוג

מיון מערך בגודל n=1,000,000

אלגוריתם	זמן ריצה	סוג המחשב	מספר פעולות לשנייה	זמן ריצה בשניות
מיון הכנסה	$2n^2$	מחשב-על	100,000,000	$\frac{2\cdot(10^6)^2}{10^8} \approx 6\ hours$
מיון מיזוג	$50n\log n$	מחשב אישי	1,000,000	$\frac{50\cdot 10^6\cdot\log 10^6}{10^6}$ $\approx 17\ minutes$

64