

A balance scale is centered in the background, resting on a wooden surface. The entire image is covered with a semi-transparent purple overlay. The scale's pans are empty and appear to be in equilibrium.

# **עצי AVL**

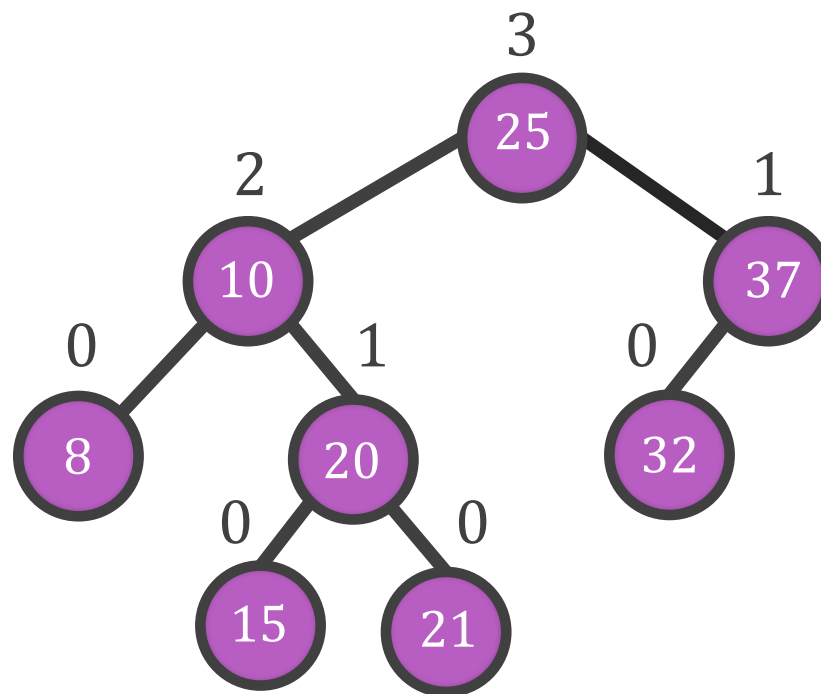
# **AVL Trees**



## עץ AVL הגדרה

עץ AVL הוא עץ חיפוש בינארי שבו לכל צומת  $v$  התכונה:  
הפרש הגבהים בין תת-עץ השמאלי לתת-עץ הימני של  $v$  הוא לכל היותר 1

דוגמא



## עץ AVL מקור השם

- הנקרא על שם ממציאיו Landis ו-Adelson-Velskii
- היו הראשונים שהציעו עצים מאוזנים בצורה דינאמית ב-1962



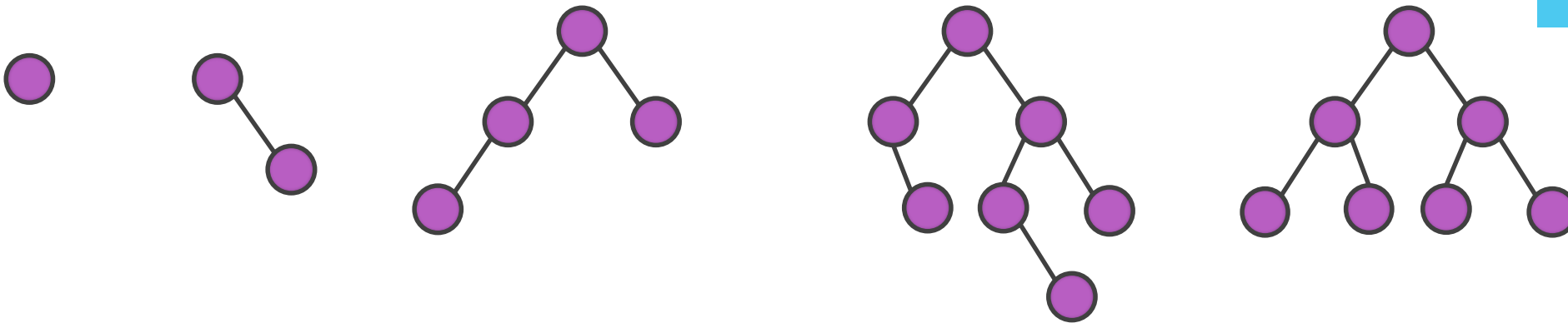
Adelson-Velskii



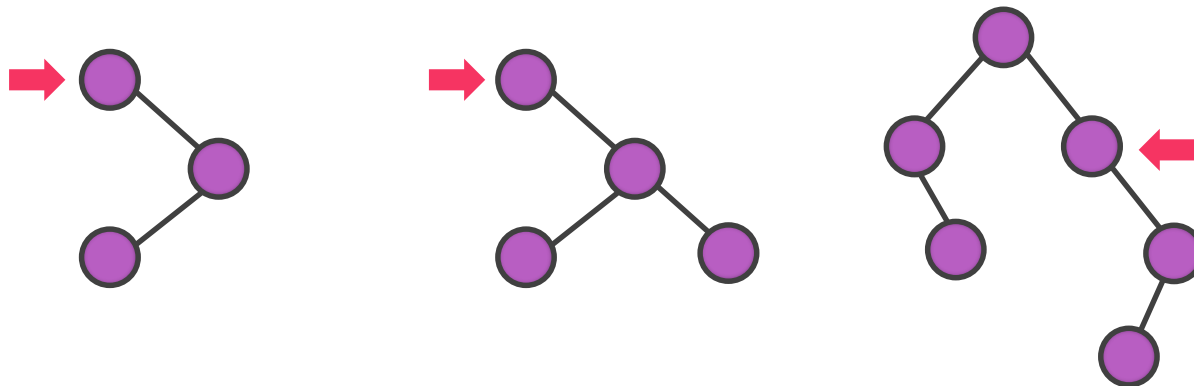
Landis

# עץ AVL דוגמאות

עצי AVL

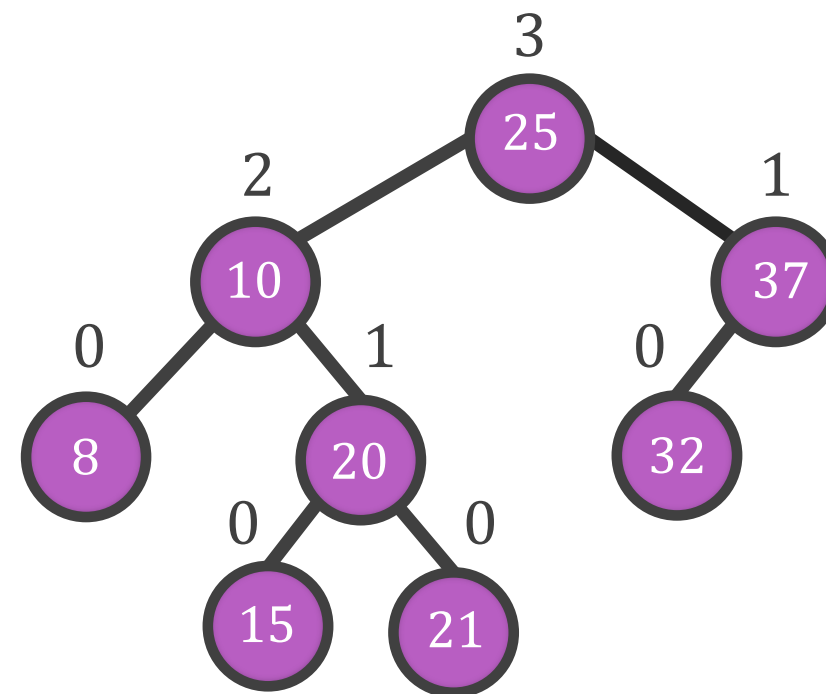
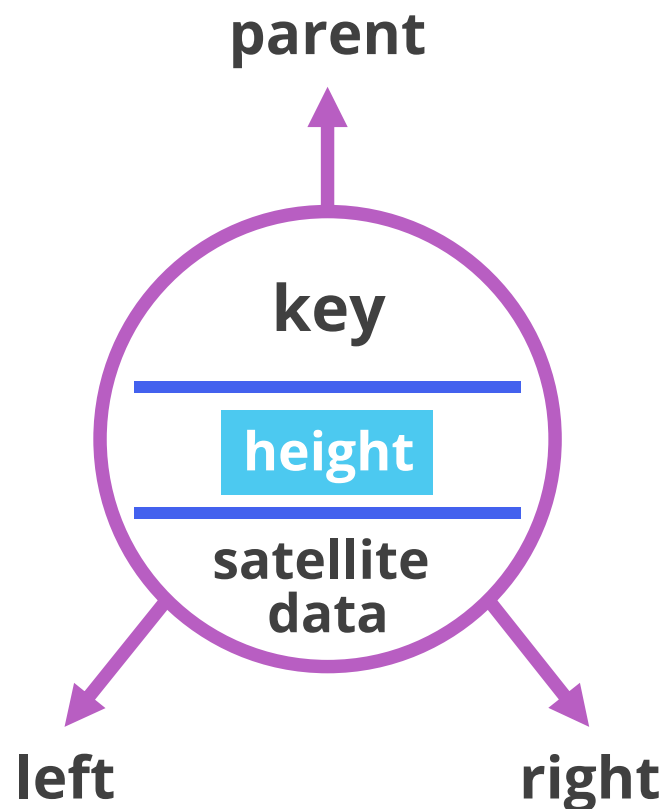


אינם עצי AVL



ייעוץ

אפשרות ראשונה

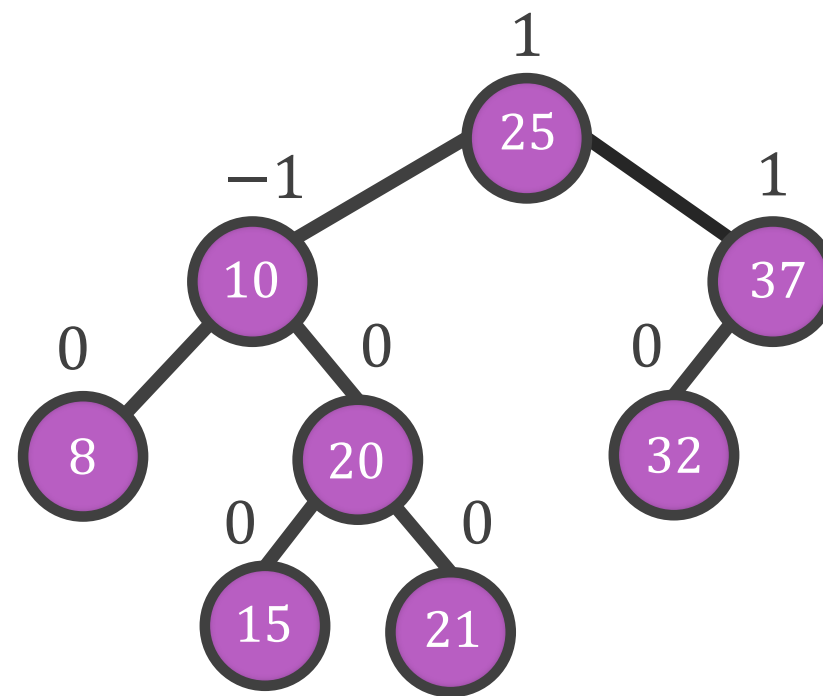
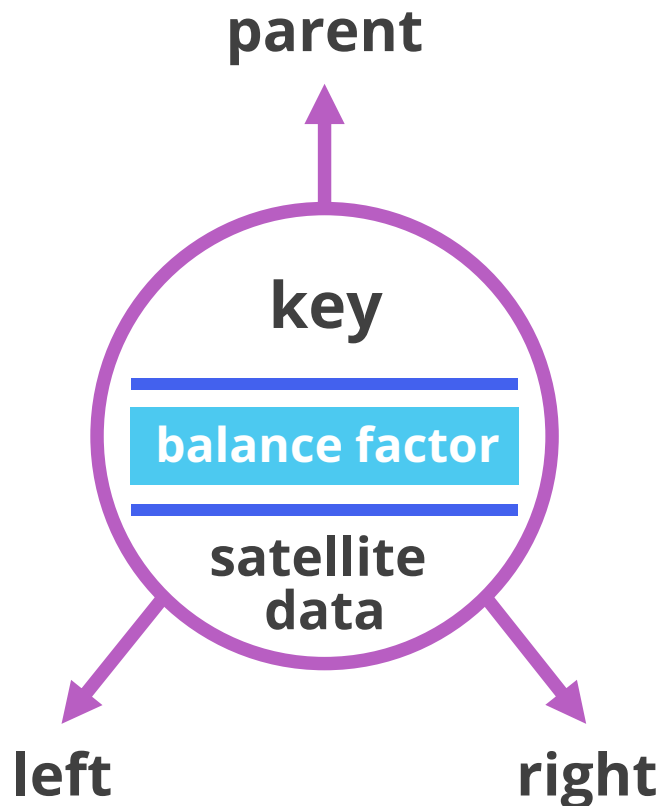


לעצג שדה גובה נדרשים  $\log \log n$  ביטים

# ייצוג

## אפשרות שניה

$\text{balance factor} = \text{height}(\text{left subtree}) - \text{height}(\text{right subtree})$   
בעץ AVL גורם האיזון (balance factor) הוא -1, 0 או 1

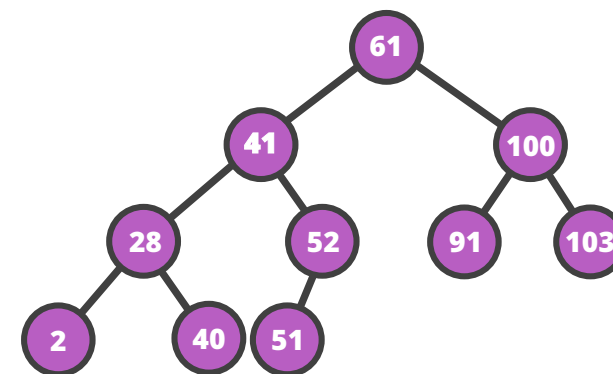


לייצג שדה balance factor נדרשים רק 2 ביטים

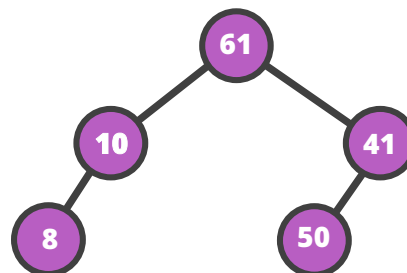
# אילו מהעצים הבאים הם עצי AVL?

?

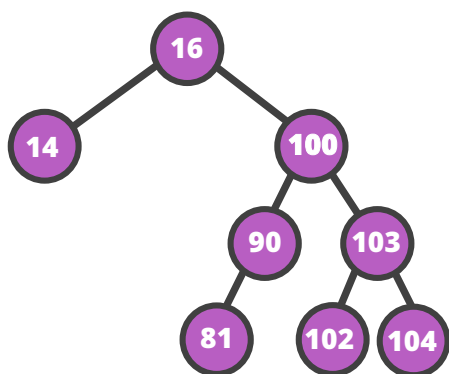
1.



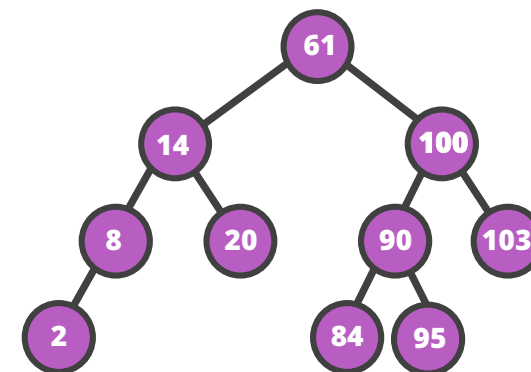
2.



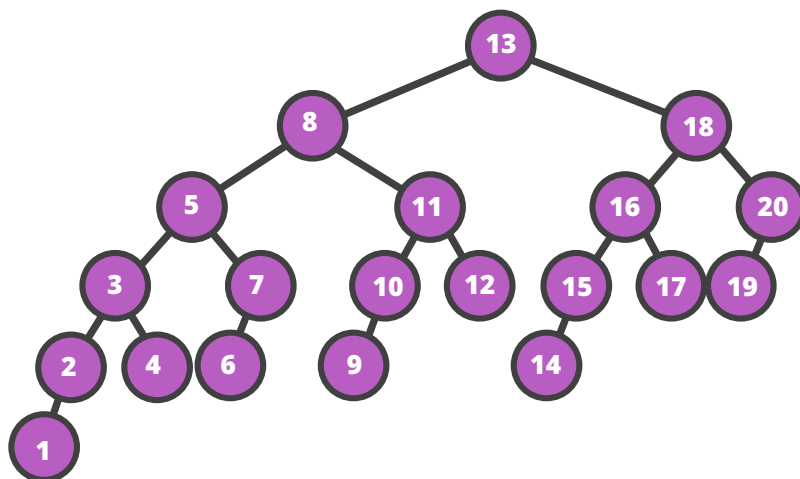
3.



4.



5.





## משפט

גובה של עץ AVL בעל  $n$  צמתים הינו  $O(\log n)$



## הוכחה:

- נעבוד על הבעיה "ההפוכה" – נמצא חסם תחתון על מספר המינימאלי של צמתים בעץ AVL בגובה  $h$
- נסמן ב-  $n_h$  את המספר המינימאלי של צמתים בעץ AVL בעל גובה  $h$
- נראה ש-  $n_h$  גדל בקצב מעריכי, כלומר נראה ש-  $n_h = \Omega(c^h)$  עבור קבוע  $c > 1$
- מכאן נסיק כי גובה של עץ AVL בעל  $n$  צמתים חסום על ידי  $O(\log n)$



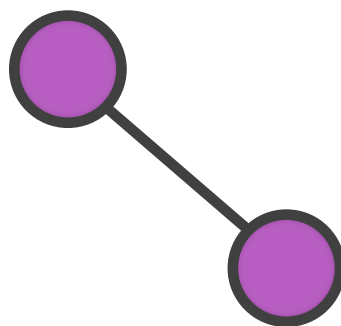


## הוכחה המשך

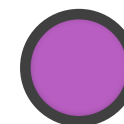
עבור  $n_2 = ?, h = 2$



עבור  $n_1 = 2, h = 1$



עבור  $n_0 = 1, h = 0$



למה שווה  $n_2$ ?



$$n_2 = 3$$

.1

$$n_2 = 4$$

.2

$$n_2 = 5$$

.3

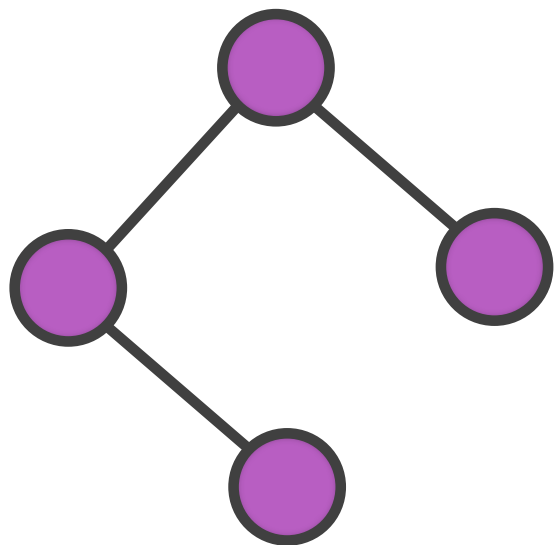
$$n_2 = 7$$

.4

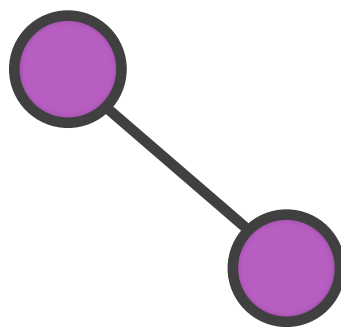


## הוכחה המשך

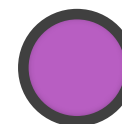
עבור  $n_2 = ?$ ,  $h = 2$



עבור  $n_1 = 2$ ,  $h = 1$



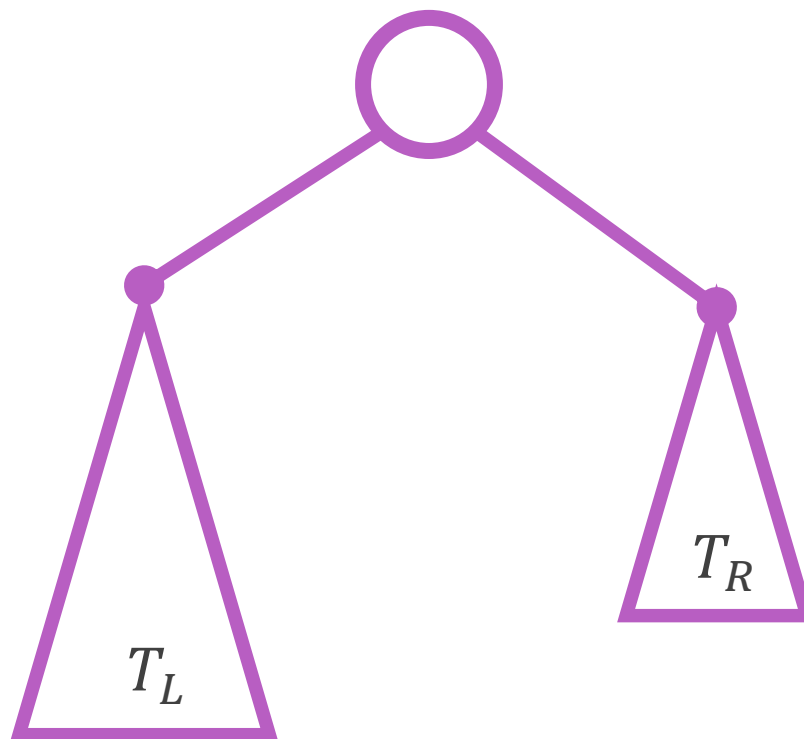
עבור  $n_0 = 1$ ,  $h = 0$





# הוכחה המשך

$$h \geq 3$$





בעץ AVL בעל גובה  $h$  ומספר מינימאלי אפשרי של צמתים,  
מה הפרש הגבהים בין תת עץ השמאלי ותת עץ הימני של השורש?

1 **.1**

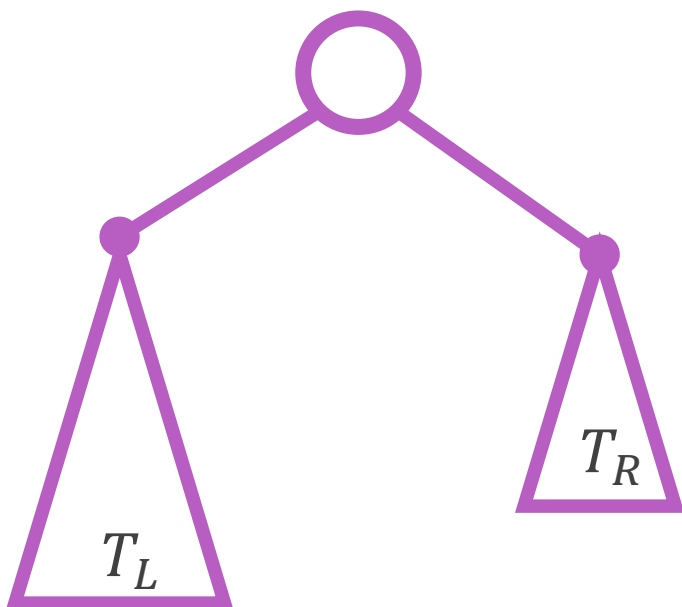
0 **.2**

**.3** יכול להיות כל מספר בין 0 ל  $h - 1$



# הוכחה המשך

$$h \geq 3$$





# הוכחה המשך



# מסקנה מהמשפט

בעץ AVL, זמן ריצה של הפעולות

• *Search*

• *Min*

• *Max*

• *Successor*

• *Predecessor*

הינו  $O(\log n)$  במקרה הגרוע (כאשר  $n$  הוא מספר הצמתים בעץ)





## עץ AVL

- גובה של עץ AVL בעל  $n$  צמתים הינו  $O(\log n)$

- בעץ AVL, זמן ריצה של הפעולות

- *Search*

- *Min*

- *Max*

- *Successor*

- *Predecessor*

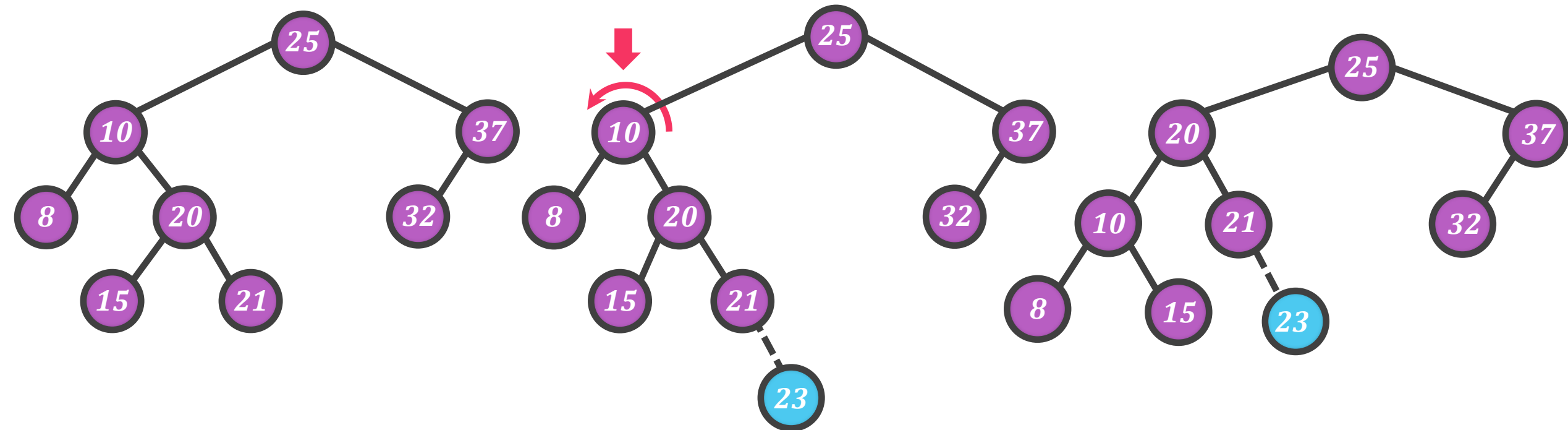
הוא  $O(\log n)$  במקרה הגרוע

# דוגמה

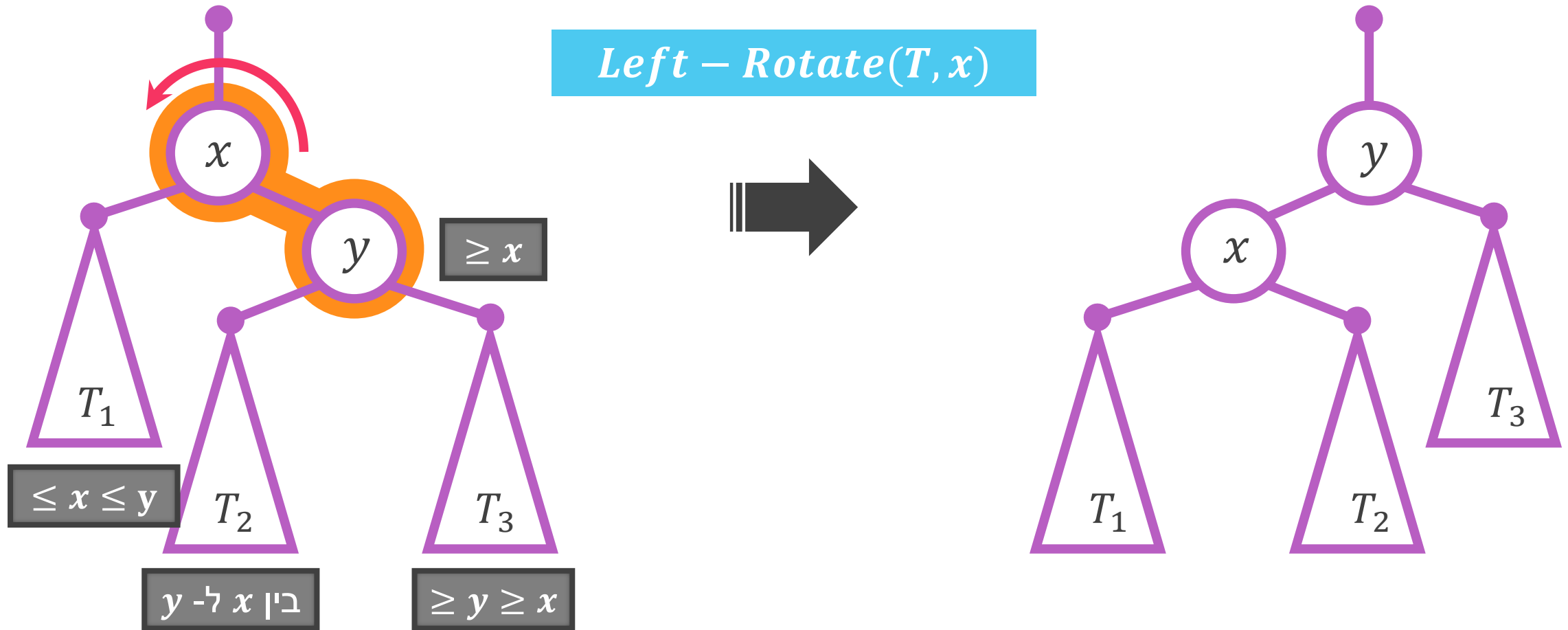
לפני הכנסה

אחרי הכנסת 23

אחרי תיקון האיזון



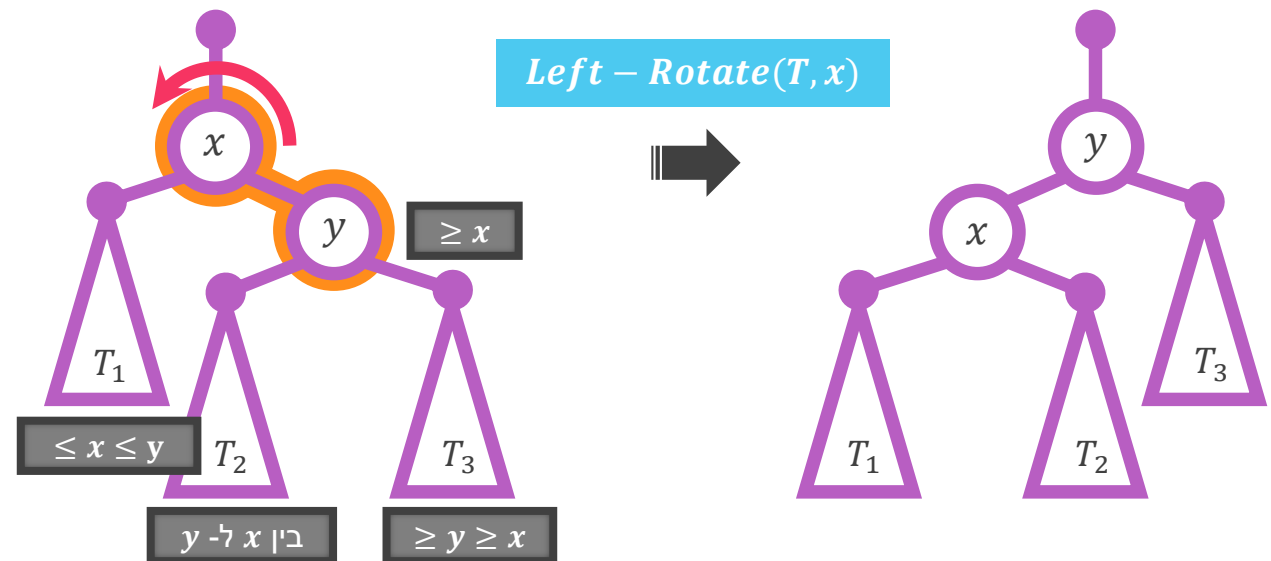
# רוטציה שמאלית



## Left – Rotate ( $T, x$ )

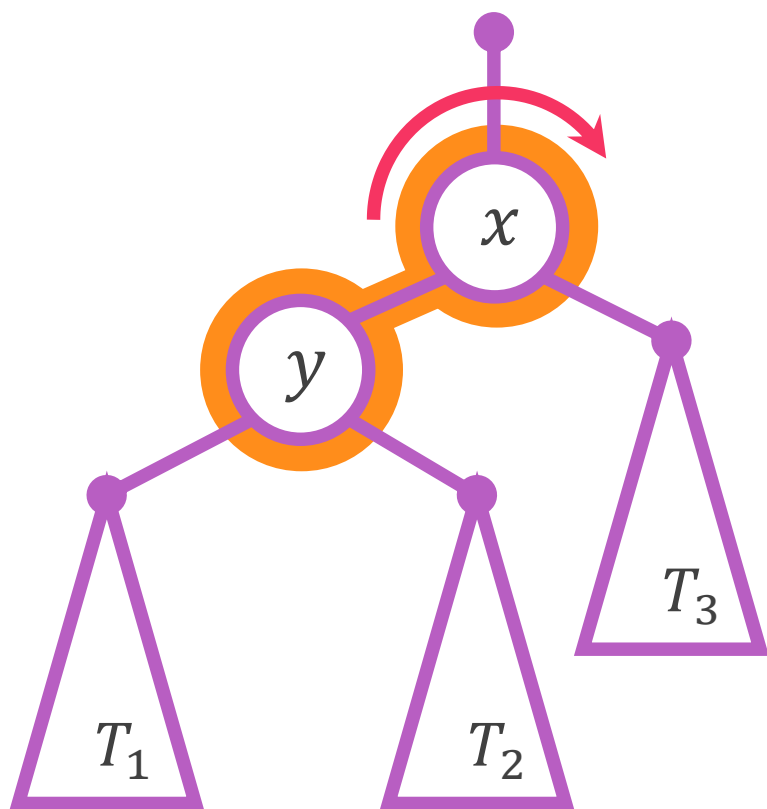
- 1  $y \leftarrow x.right$
- 2  $x.right \leftarrow y.left$
- 3 **if**  $y.left \neq NULL$
- 4      $(y.left).parent \leftarrow x$
- 5  $y.parent \leftarrow x.parent$
- 6 **if**  $x.parent = NULL$
- 7      $T.root \leftarrow y$
- 8 **else if**  $x = (x.parent).left$
- 9      $(x.parent).left \leftarrow y$
- 10 **else**
- 11      $(x.parent).right \leftarrow y$
- 12  $y.left \leftarrow x$
- 13  $x.parent \leftarrow y$

## רוטציה שמאלית פסאודו-קוד

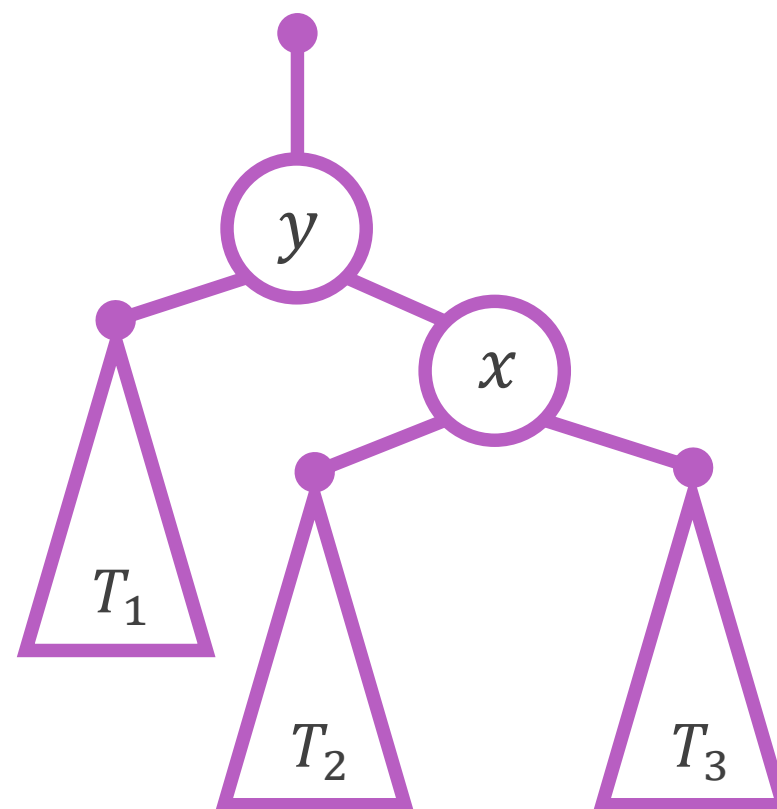
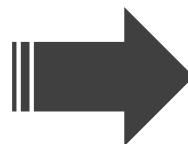


זמן ריצה  $O(1)$

## רוטציה ימנית



*Right – Rotate( $T, x$ )*



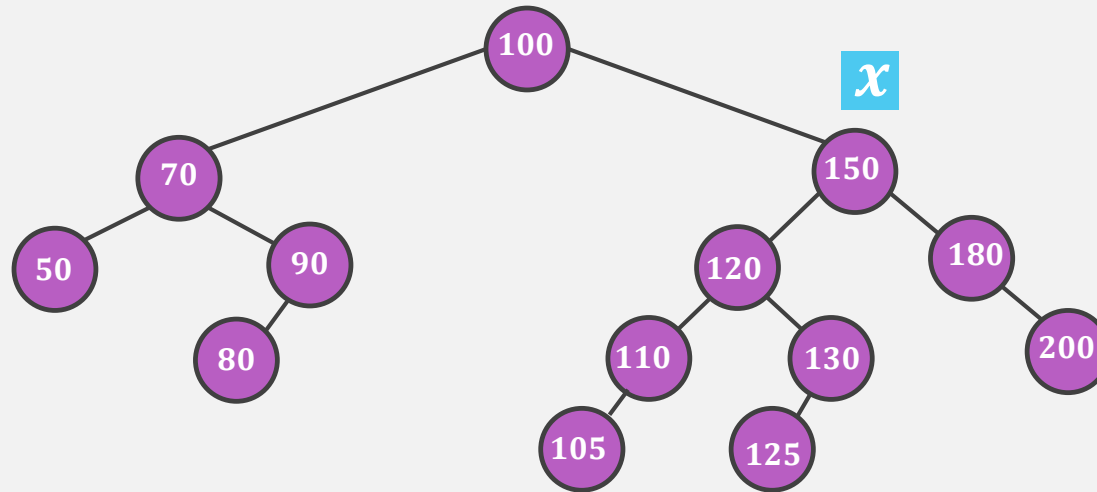
נתון עץ חיפוש בינארי  $T$  שלהלן.

איזה מבין העצים הוא עץ שמתקבל אחרי ביצוע פעולה  $Left - Rotate(T, x)$  על צומת  $x$  בעל מפתח 150?

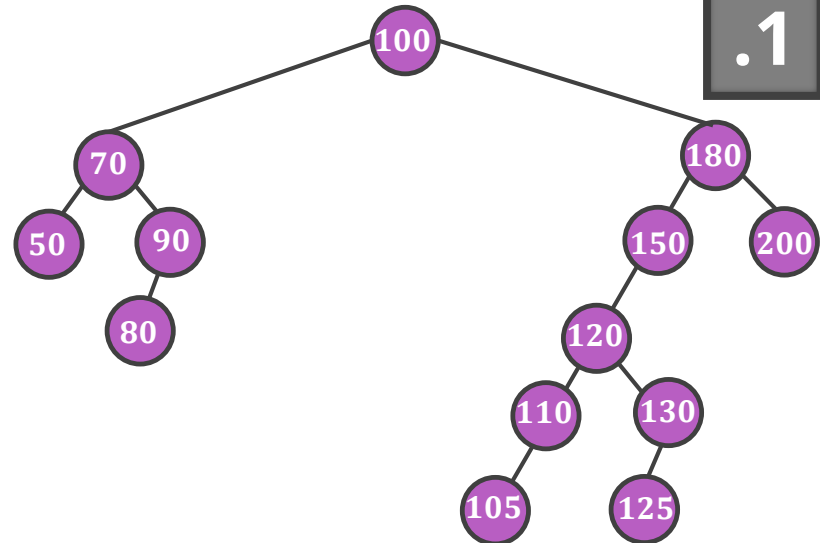
?

$T$

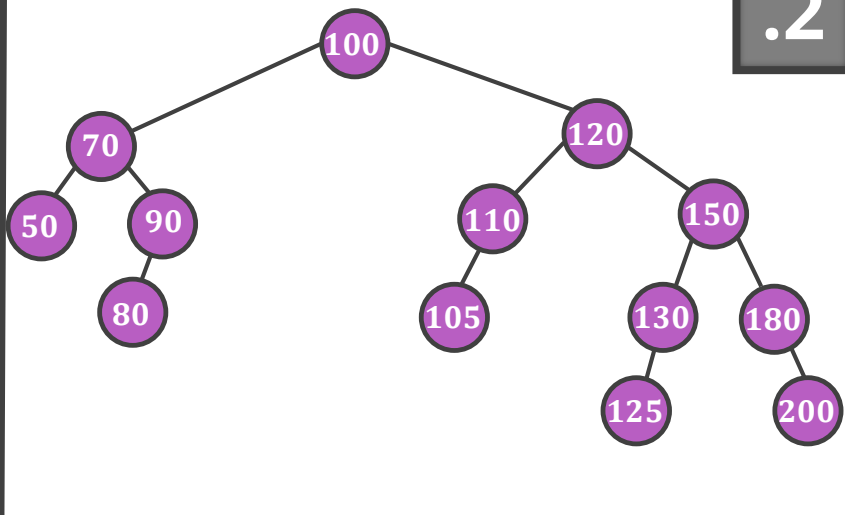
נתון:



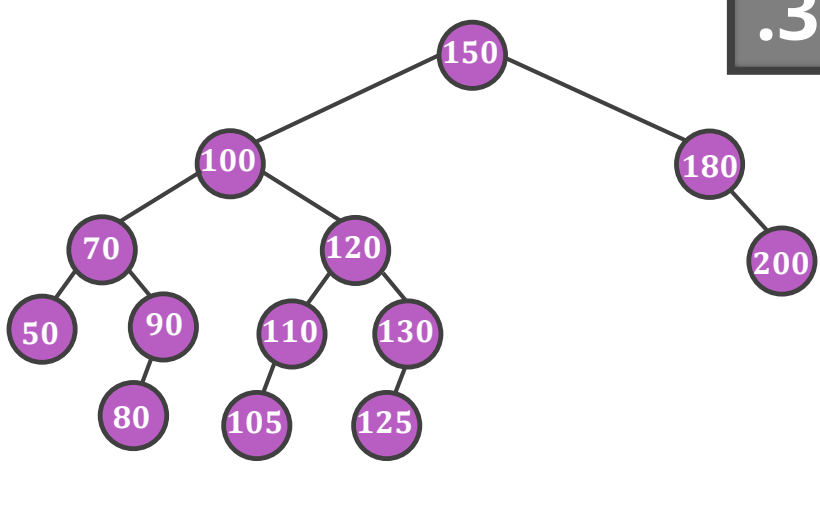
.1



.2



.3

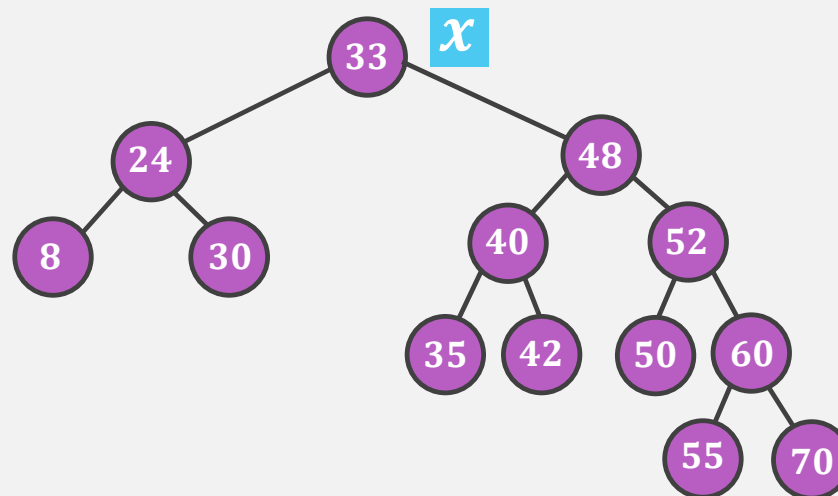


נתון עץ חיפוש בינארי  $T$  שלהלן.  
 איזה מבין העצים הוא עץ שמתקבל אחרי ביצוע פעולה  $Left - Rotate(T, x)$   
 על שורש העץ?

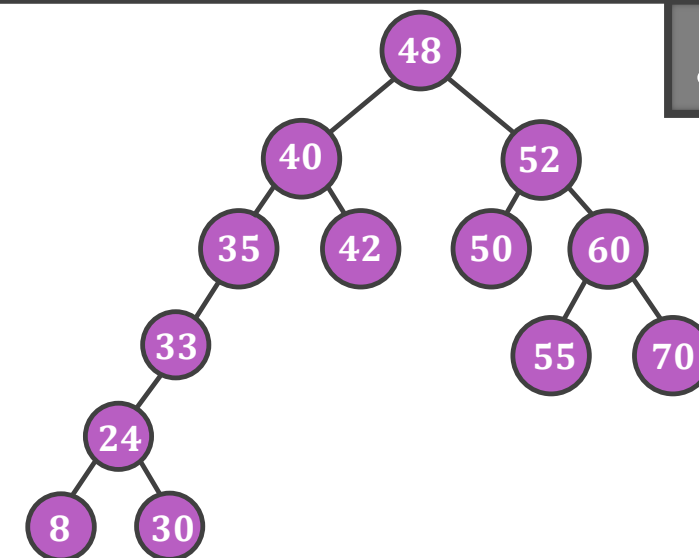
?

$T$

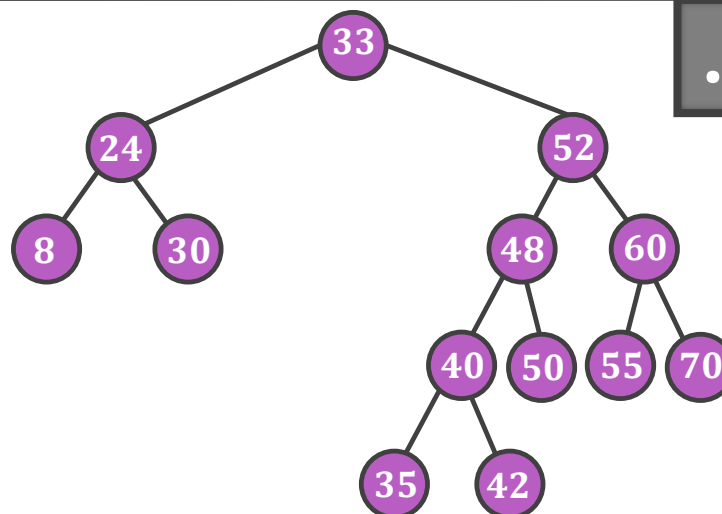
נתון:



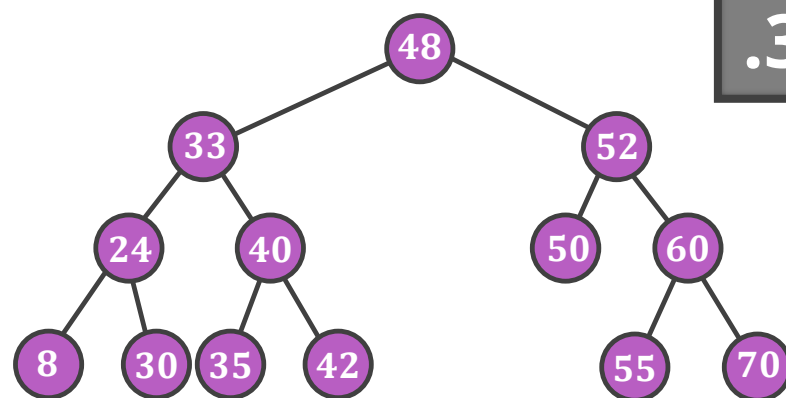
.1



.2



.3

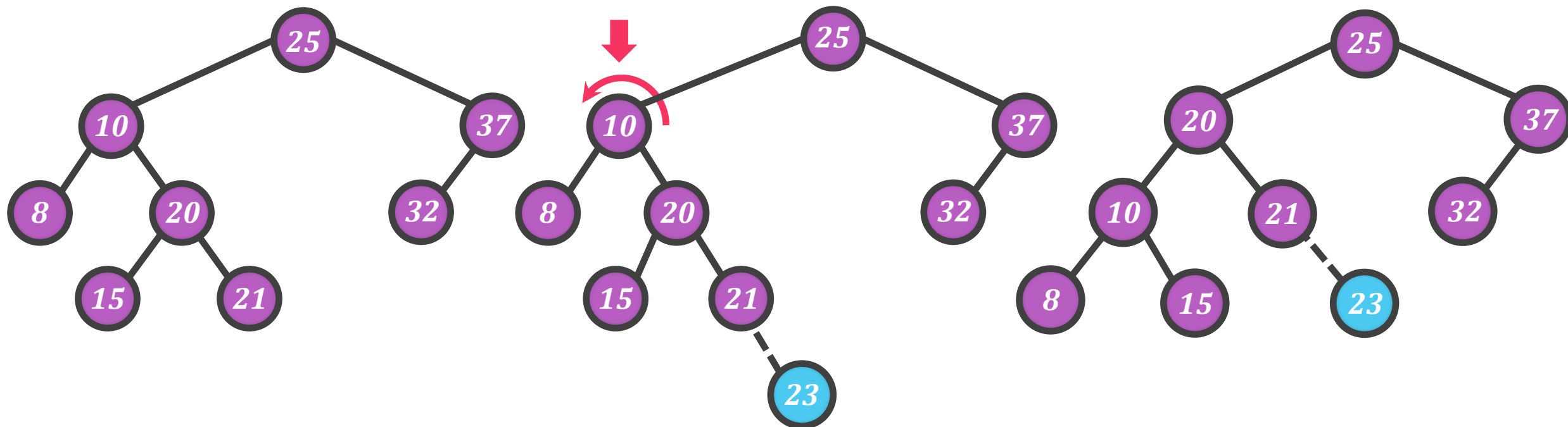


# הכנסה

לפני הכנסה

אחרי הכנסת 23

אחרי תיקון האיזון







נכון או לא נכון:



**טענה: הצמתים היחידים שאולי הופרה בהם תכונת האיזון הם צמתים לאורך מסלול הכנסה.**

הטענה נכונה

1.

הטענה לא נכונה

2.



## נכון או לא נכון



**טענה: אם עבור צומת  $v$  במסלול הכנסה, גובה של תת עץ המושרש ב-  $v$  לא השתנה, אז גורמי האיזון בצמתים שמעליו לא השתנו.**

1. הטענה נכונה

2. הטענה לא נכונה



## נכון או לא נכון



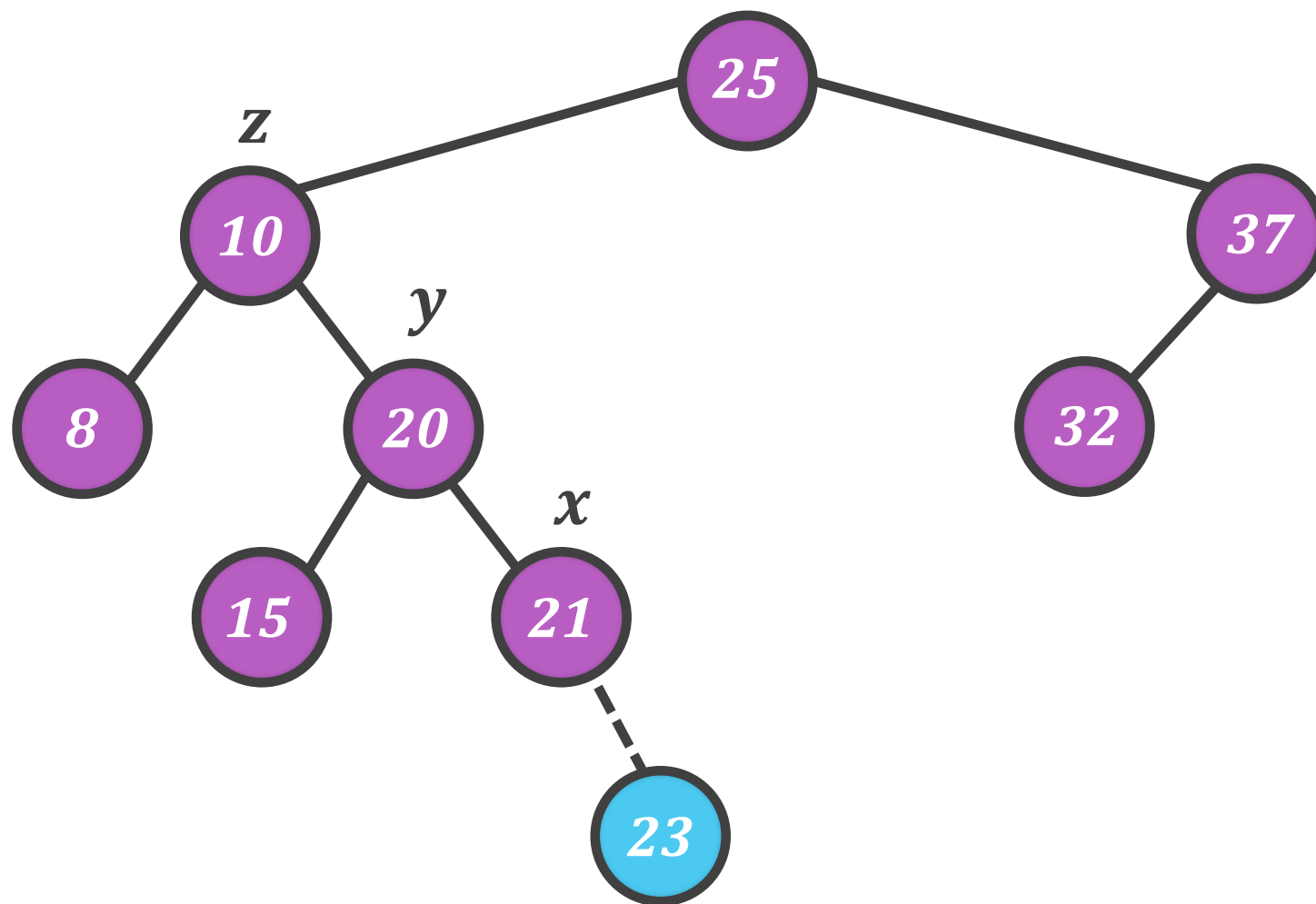
**נניח שבעקבות ההכנסה, צומת  $v$  בעץ הפך להיות לא מאוזן. טענה: גורם האיזון לא יכול להיות גדול מ-2 בערכו המוחלט, כי בהכנסה גובה של הצומת יכול לגדול ב-1 לכל היותר.**

1. הטענה נכונה

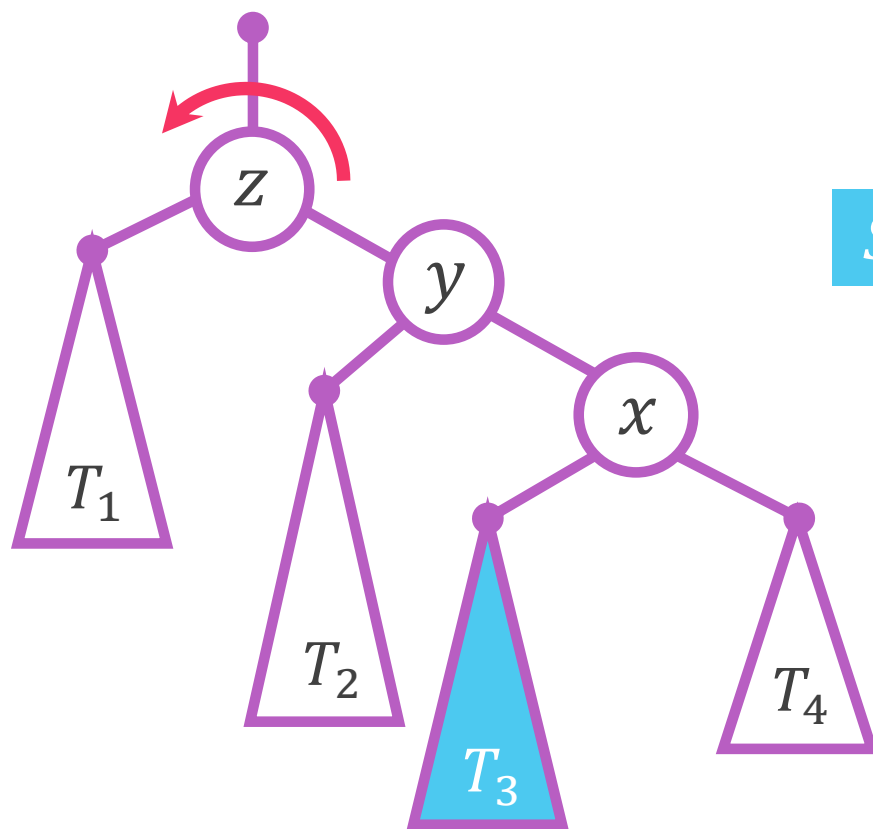
2. הטענה לא נכונה

# הכנסה

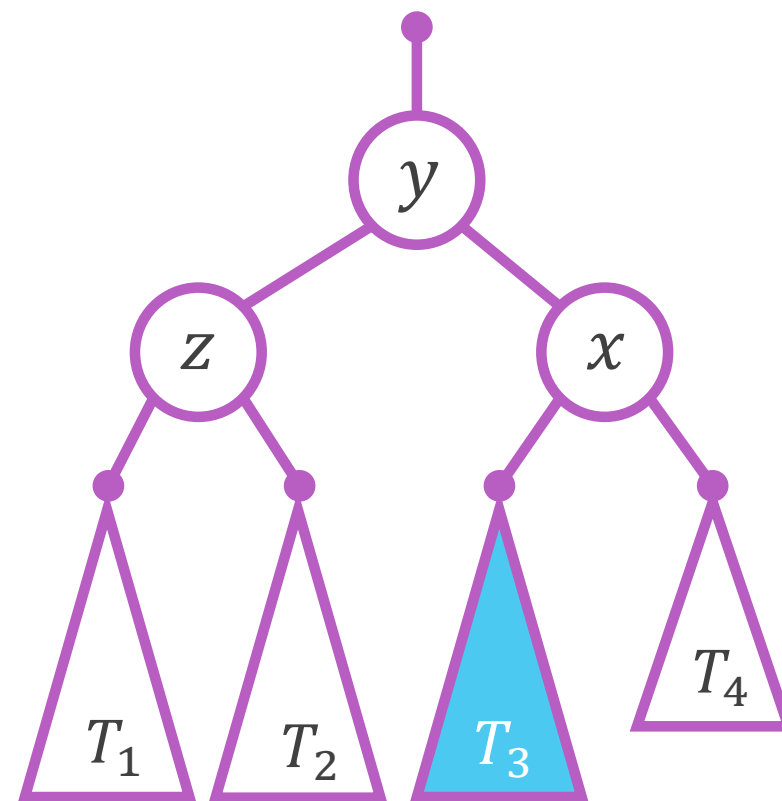
אחרי הכנסת 23



## תיקון - רוטציה RR



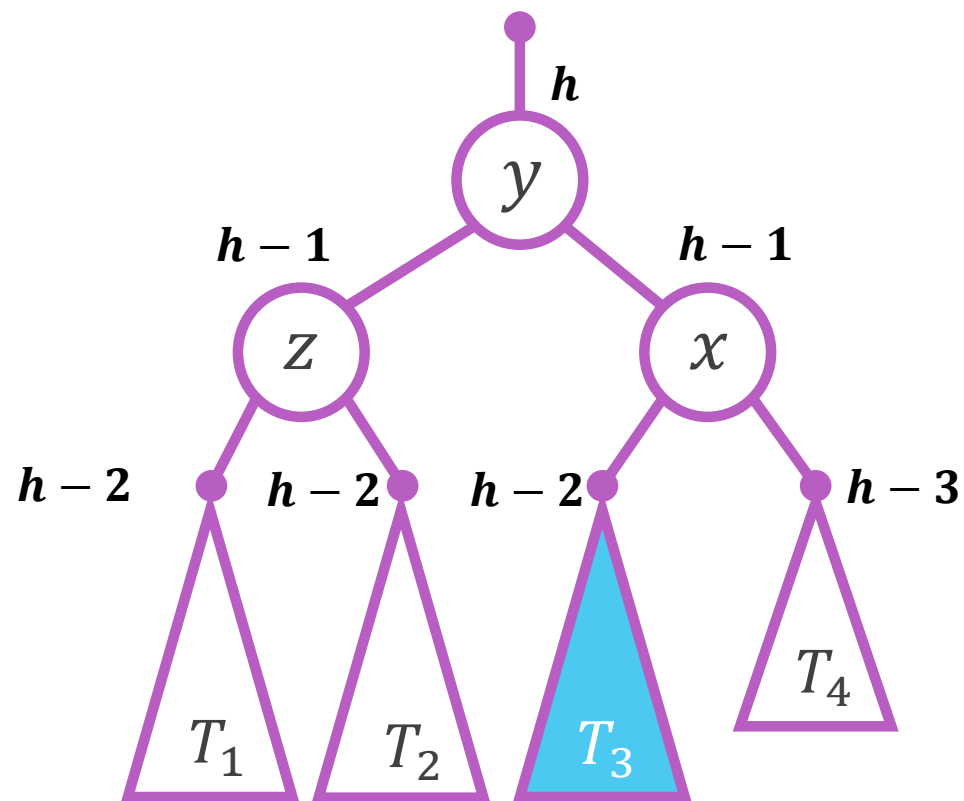
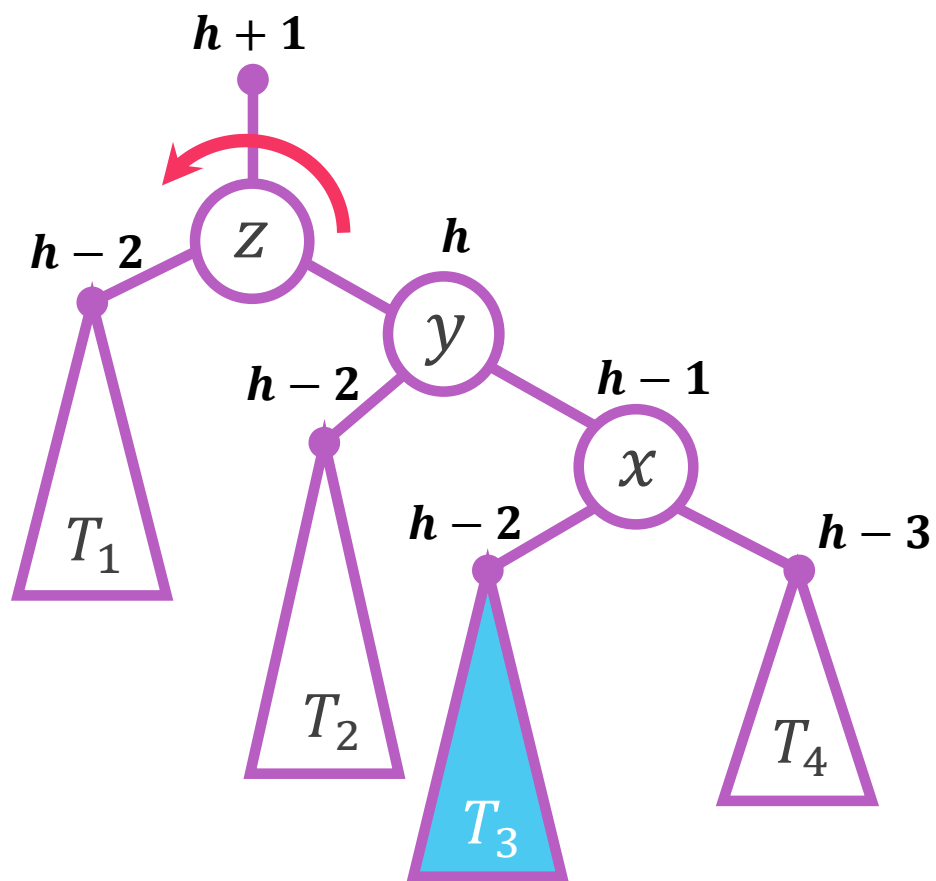
Single Rotation



$y$  בן ימני של  $z$

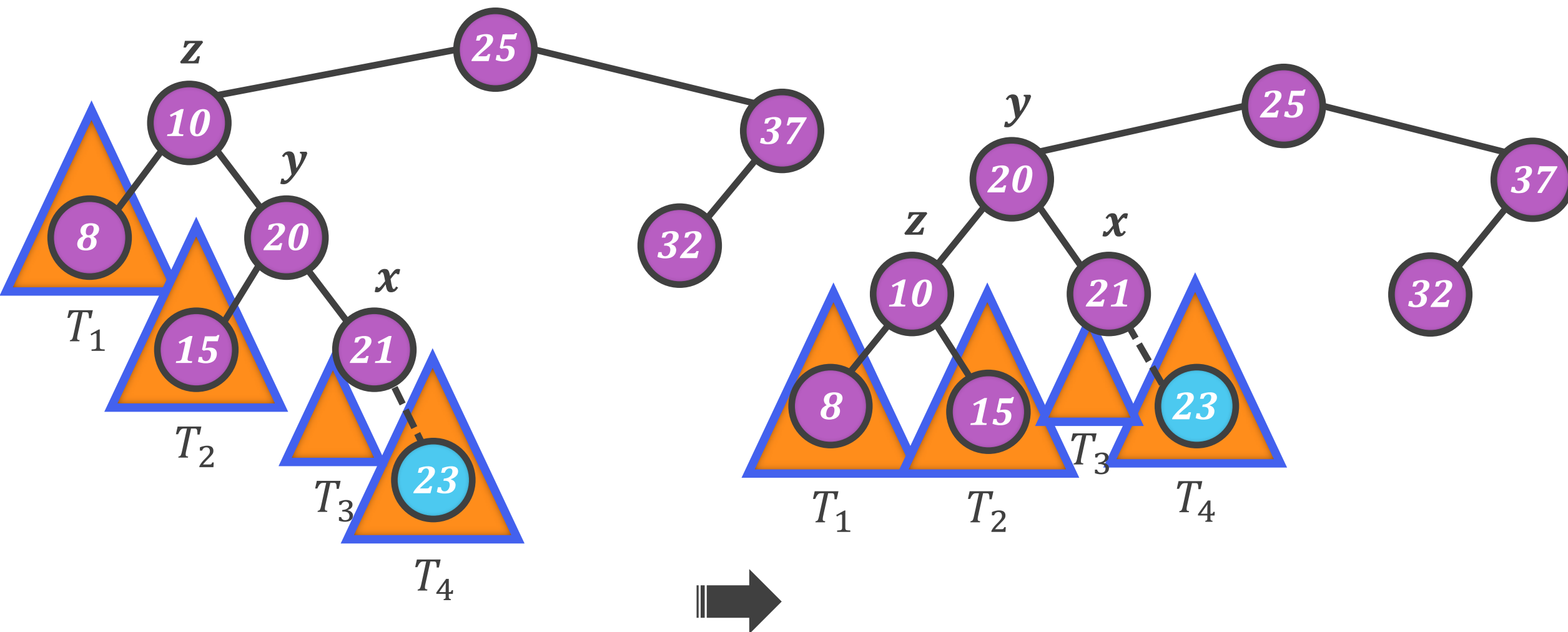
$x$  בן ימני של  $y$

## תיקון - רוטציה RR

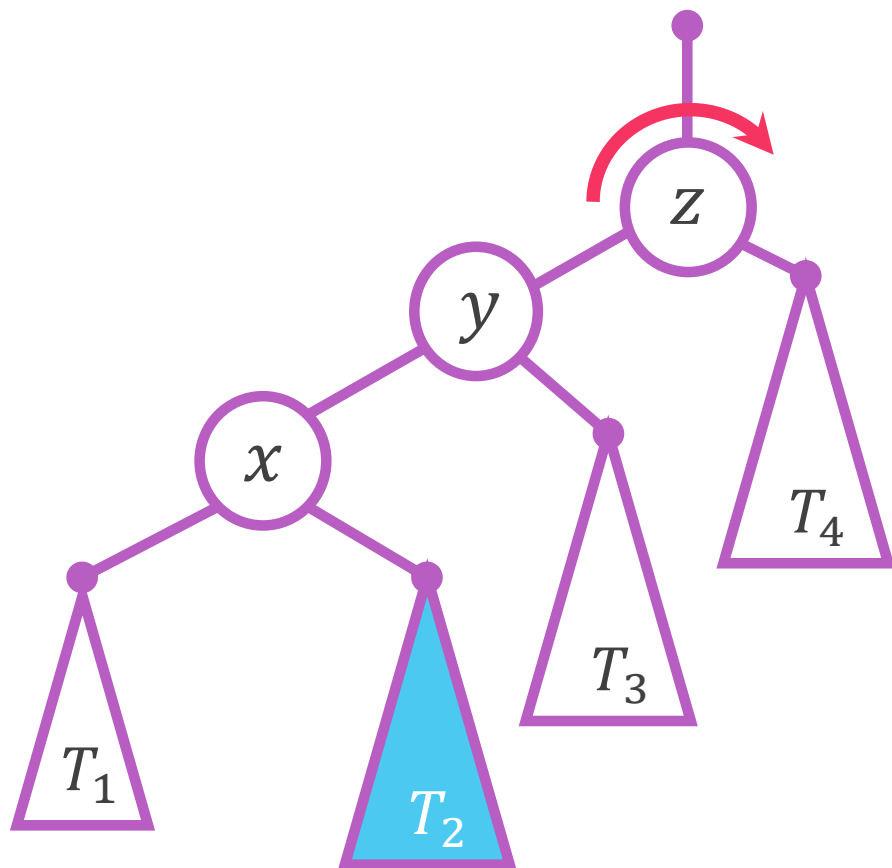


$h$  - גובה של  $z$  לפני ההכנסה

רוטציה RR  
דוגמא



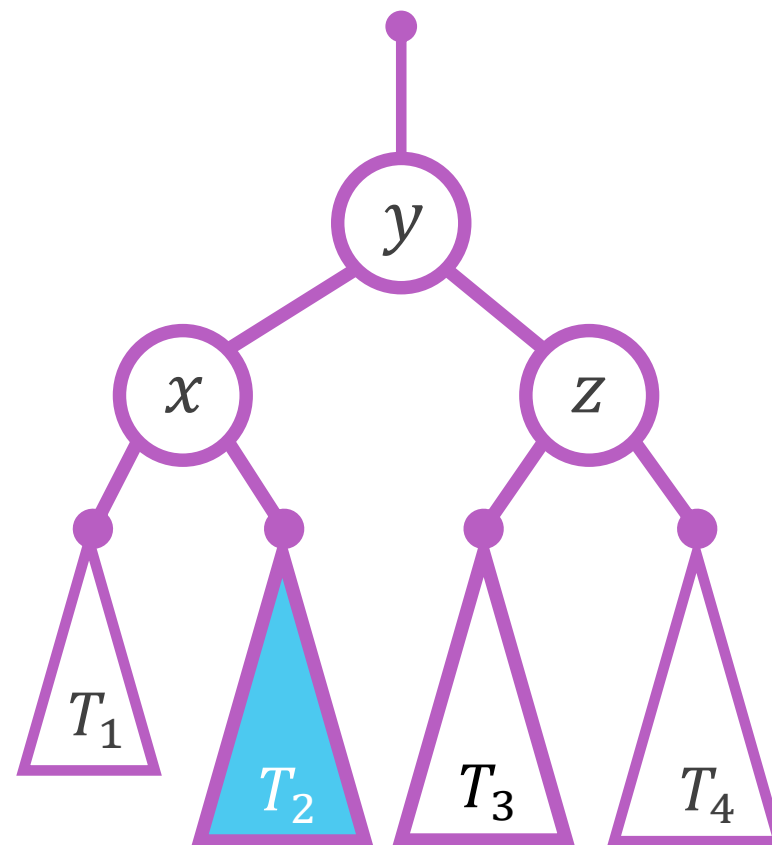
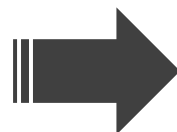
## תיקון - רוטציה LL



$y$  בן שמאלי של  $z$

$x$  בן שמאלי של  $y$

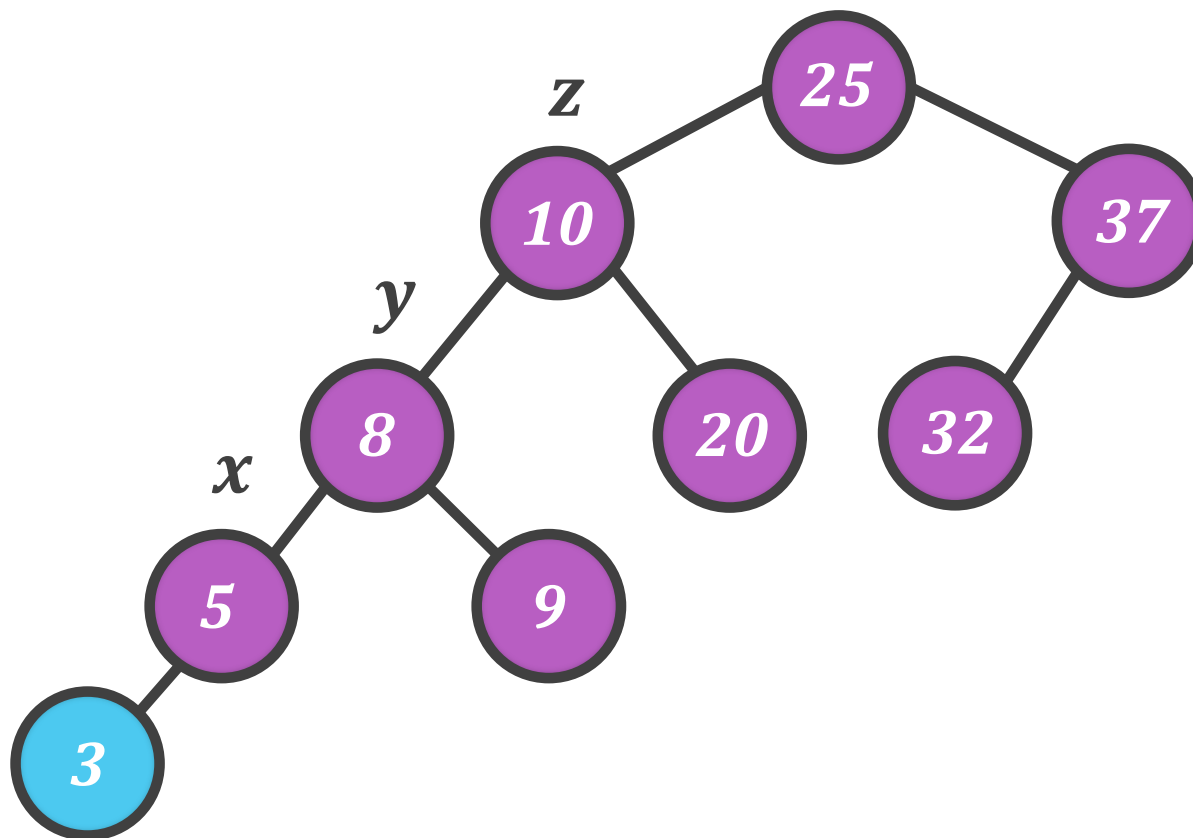
Single Rotation



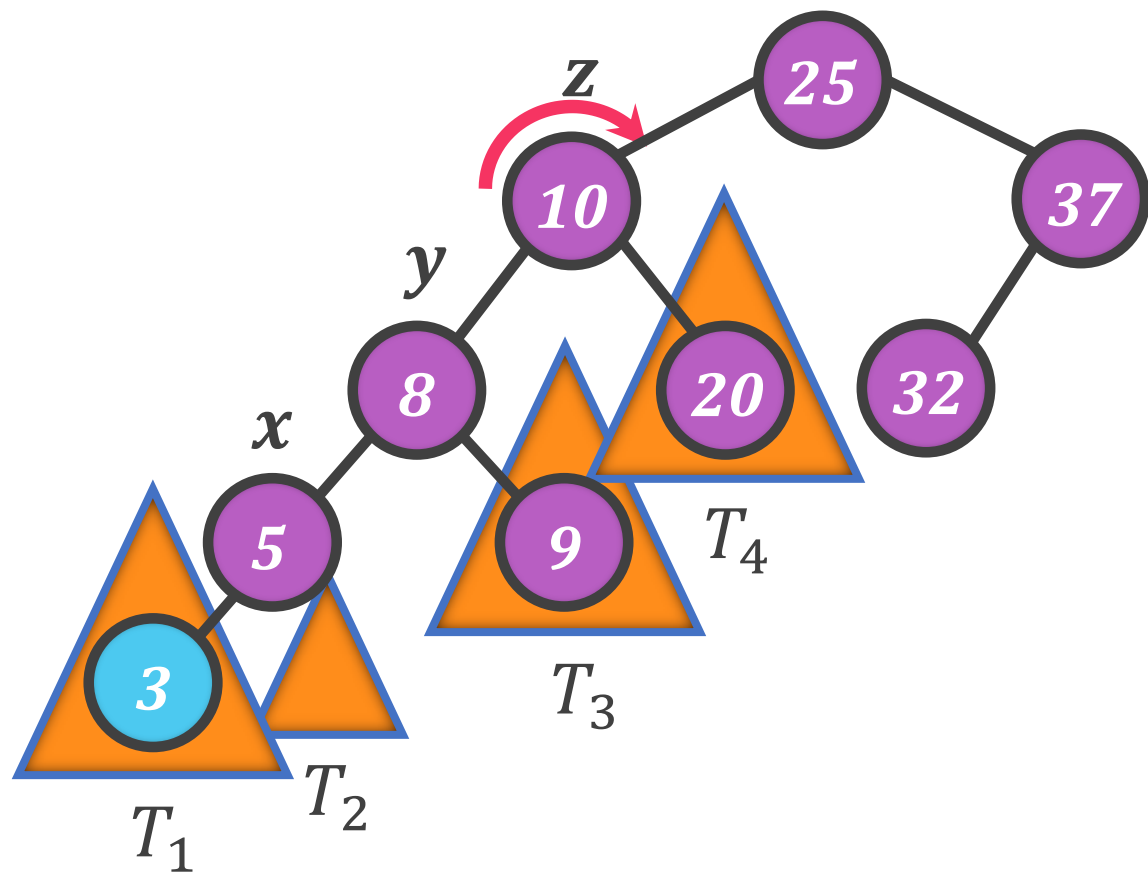


# הכנסה

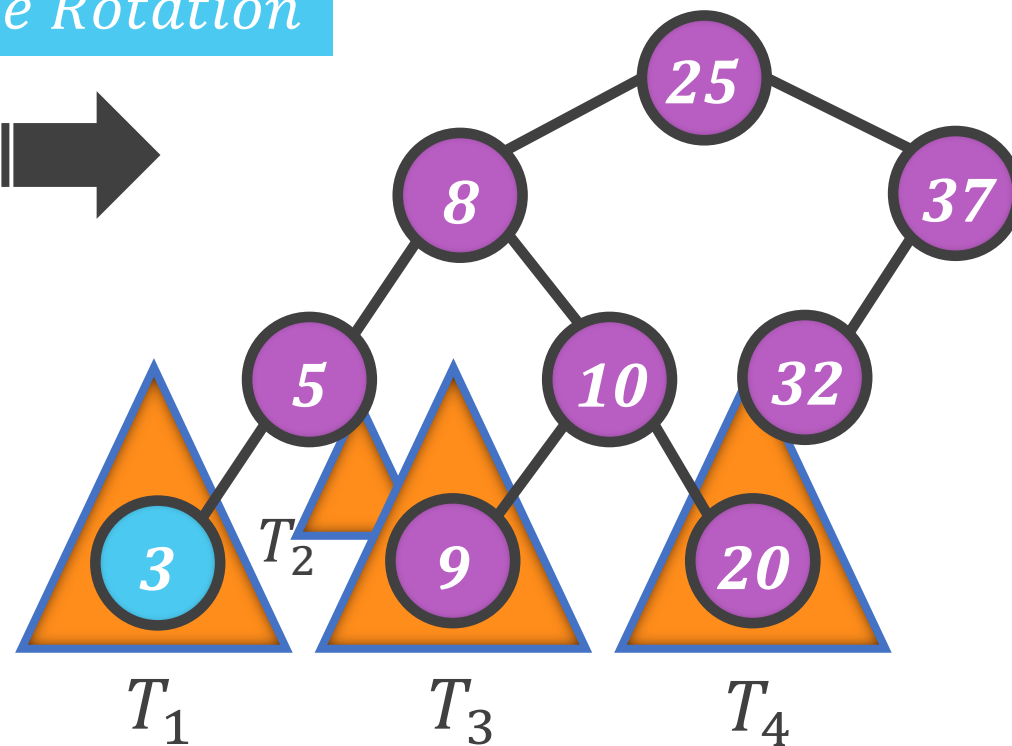
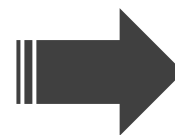
הכנסת 3



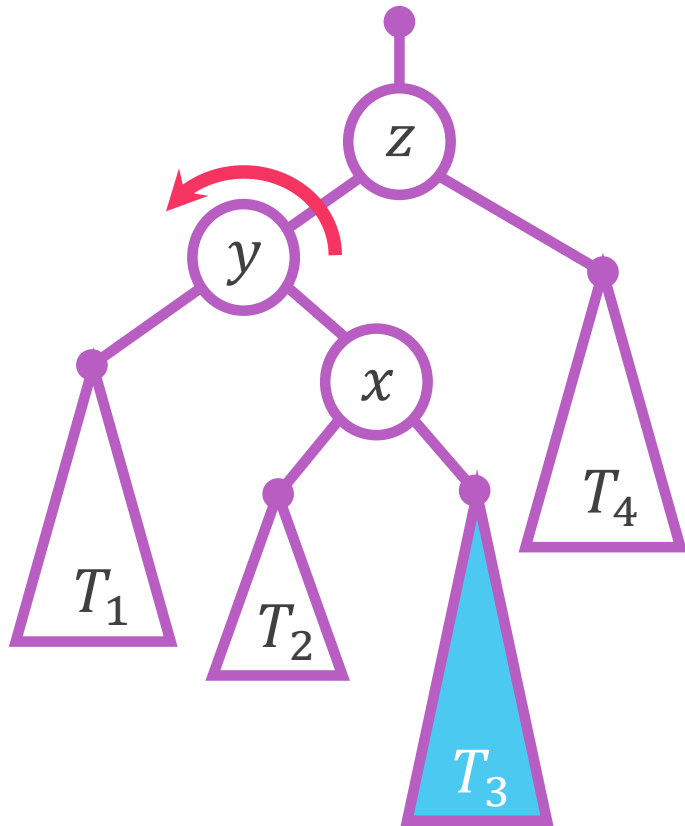
רוטציה LL  
דוגמה



Single Rotation

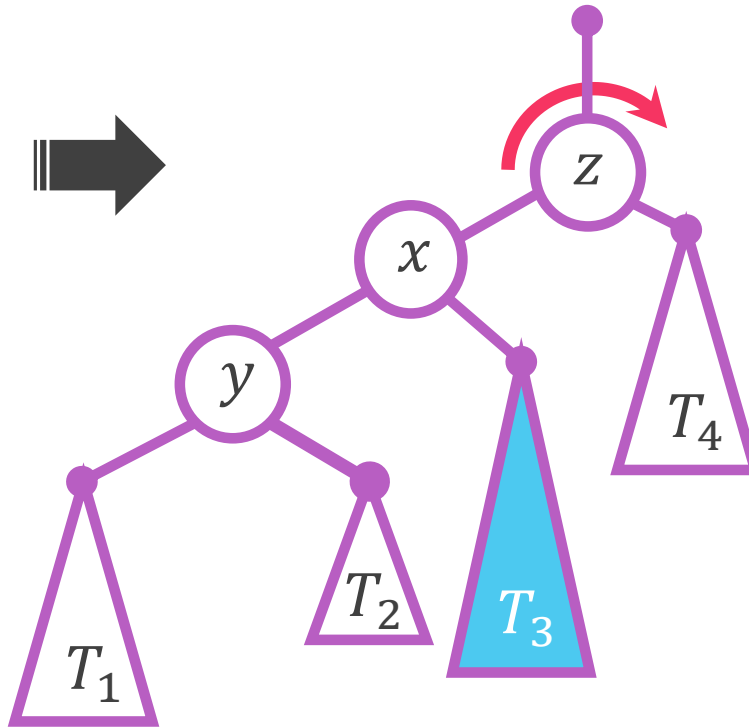


## תיקון - רוטציה LR

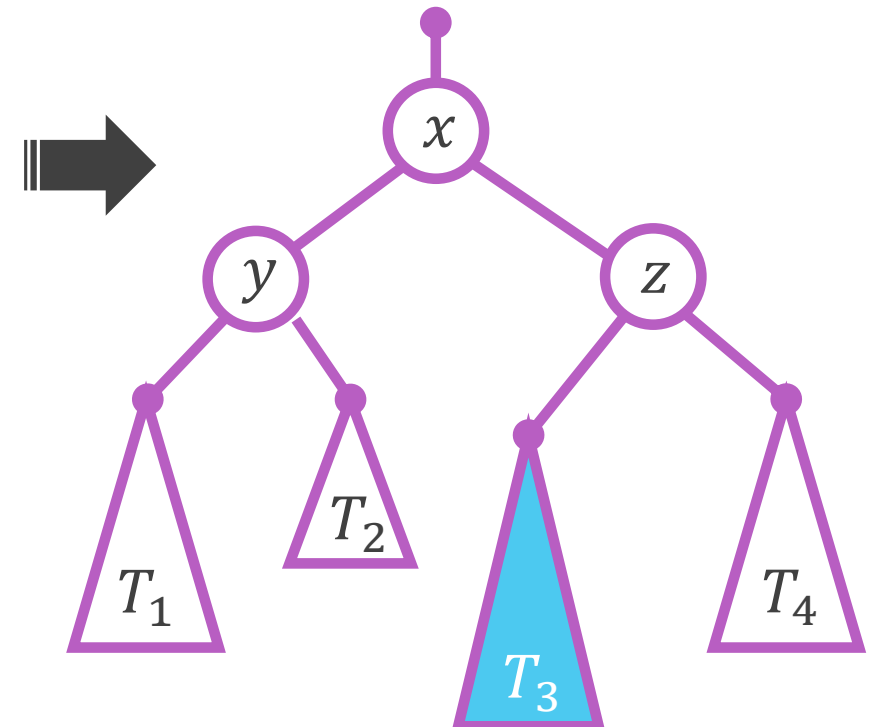


$y$  בן שמאלי של  $z$

$x$  בן ימני של  $y$

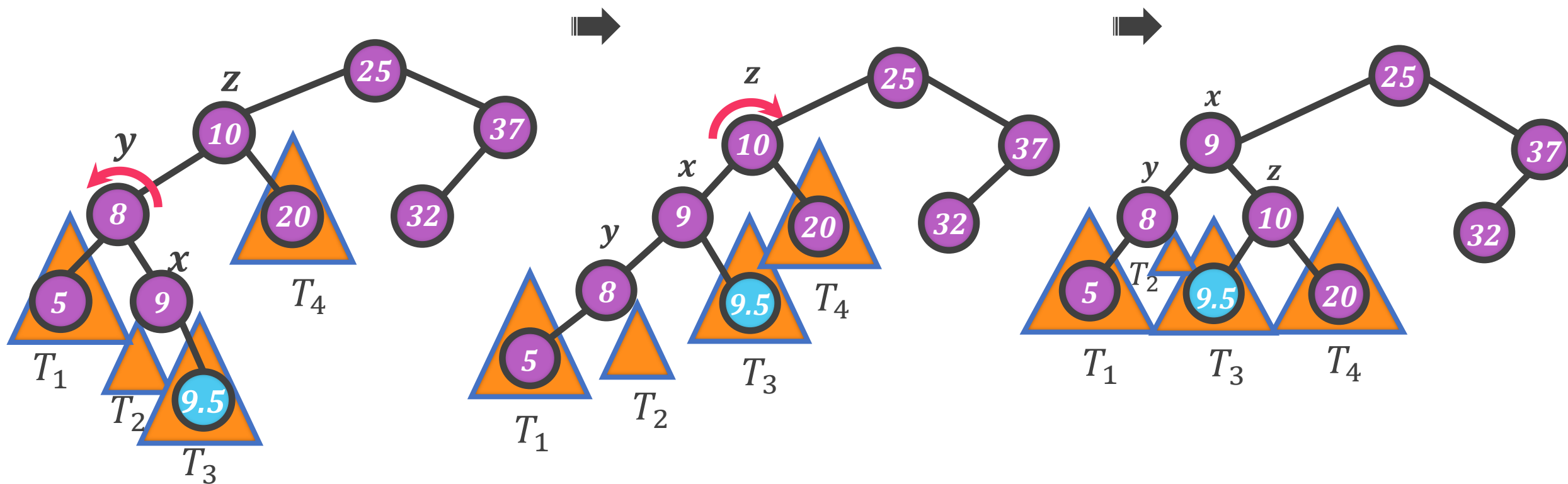


*Double Rotation*

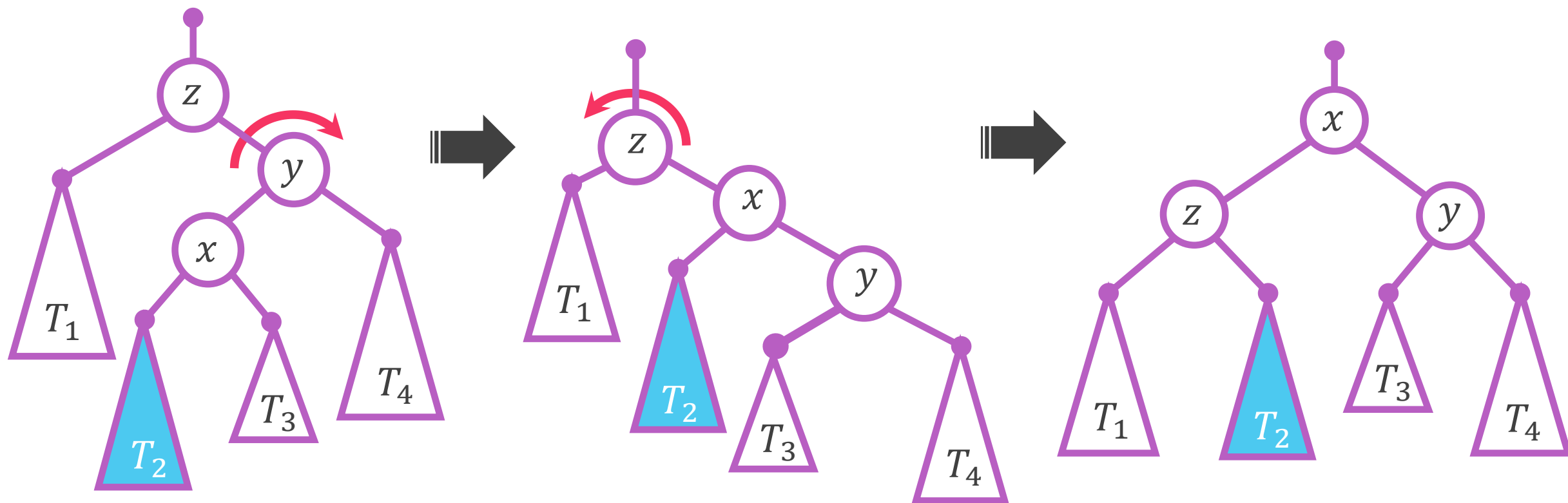


# רוטציה LR

## דוגמה



## תיקון - רוטציה RL



$y$  בן ימני של  $z$

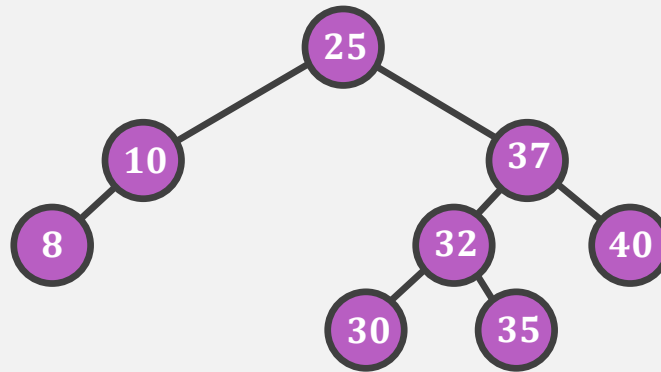
$x$  בן שמאלי של  $y$

Double Rotation

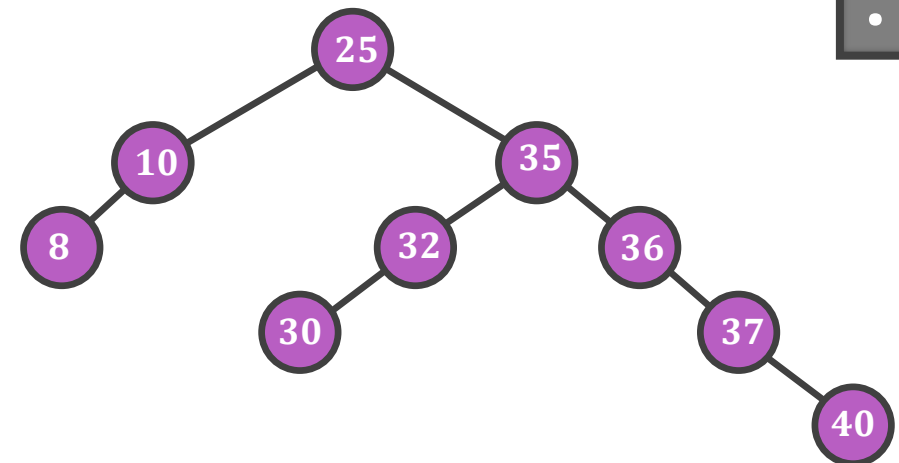
# מהו העץ שמתקבל לאחר הכנסת צומת בעל מפתח 36 לעץ AVL שבציור?



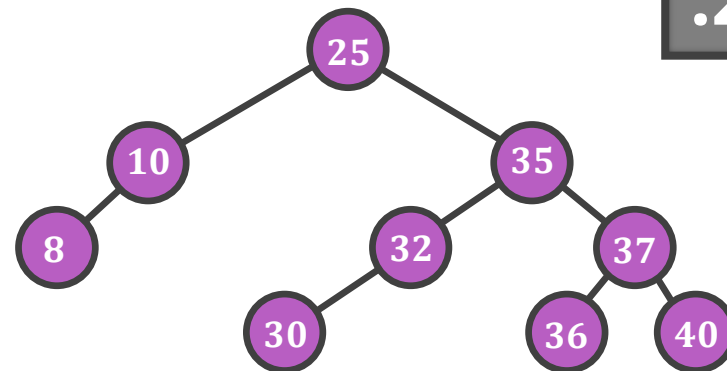
נתון:  $T$



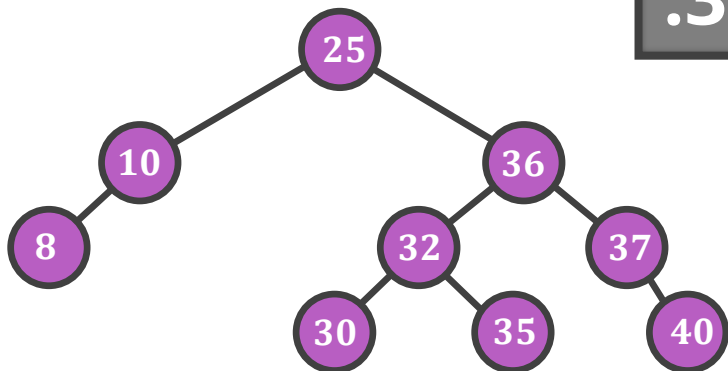
1.



2.



3.



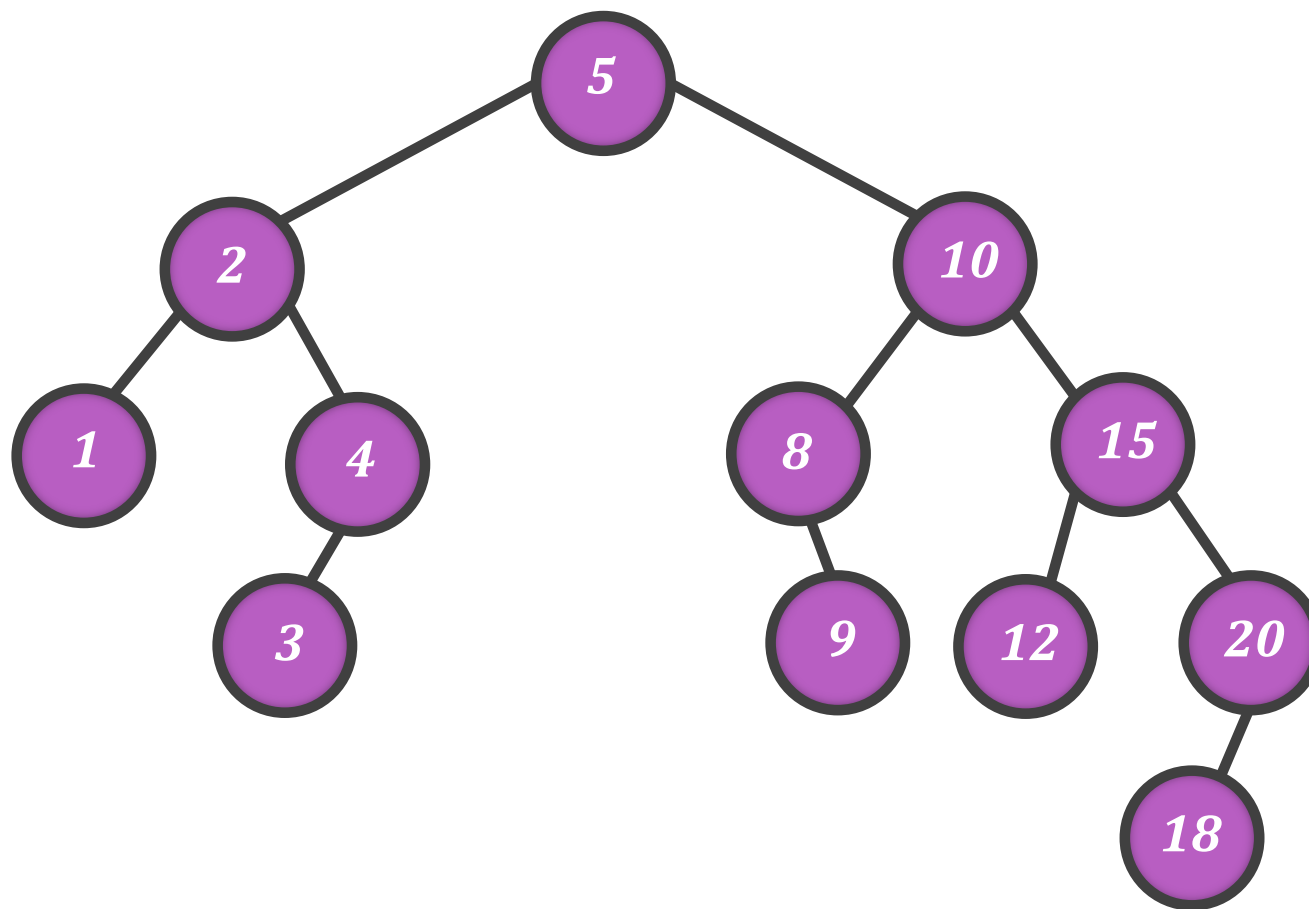
# הכנסה בעץ AVL

- הכנסת צומת לפי אלגוריתם ההכנסה של BST  $O(\log n)$
- נטפס מהעלה שהוכנס במסלול לשורש, לכל צומת בדרך נעדכן את שדה הגובה (או balance factor) ונבדוק האם יש הפרה של תכונת ה-AVL  $O(\log n)$
- הפרה של תכונת ה-AVL תתרחש אם גורם האיזון של הצומת הפך להיות 2 או -2
- במידה וצומת  $v$  במסלול הכנסה אינו מקיים את תכונת האיזון, יש לבצע רוטציה מתאימה
- פעולת הרוטציה מחזירה את הגובה של תת-העץ שעל שורשו היא פועלת לגובה שהיה לפני ההכנסה, ולכן העץ הופך להיות מאוזן לאחר הרוטציה  $O(1)$

זמן ריצה הכולל:  $T(n) = O(\log n)$

# מחיקה

## מחיקת 1





**טענה: הצמתים היחידים שאולי הופרה בהם תכונת האיזון הם צמתים לאורך מסלול מאבא של הצומת שנמחק בעלייה לשורש.**



הטענה נכונה

1.

הטענה לא נכונה

2.



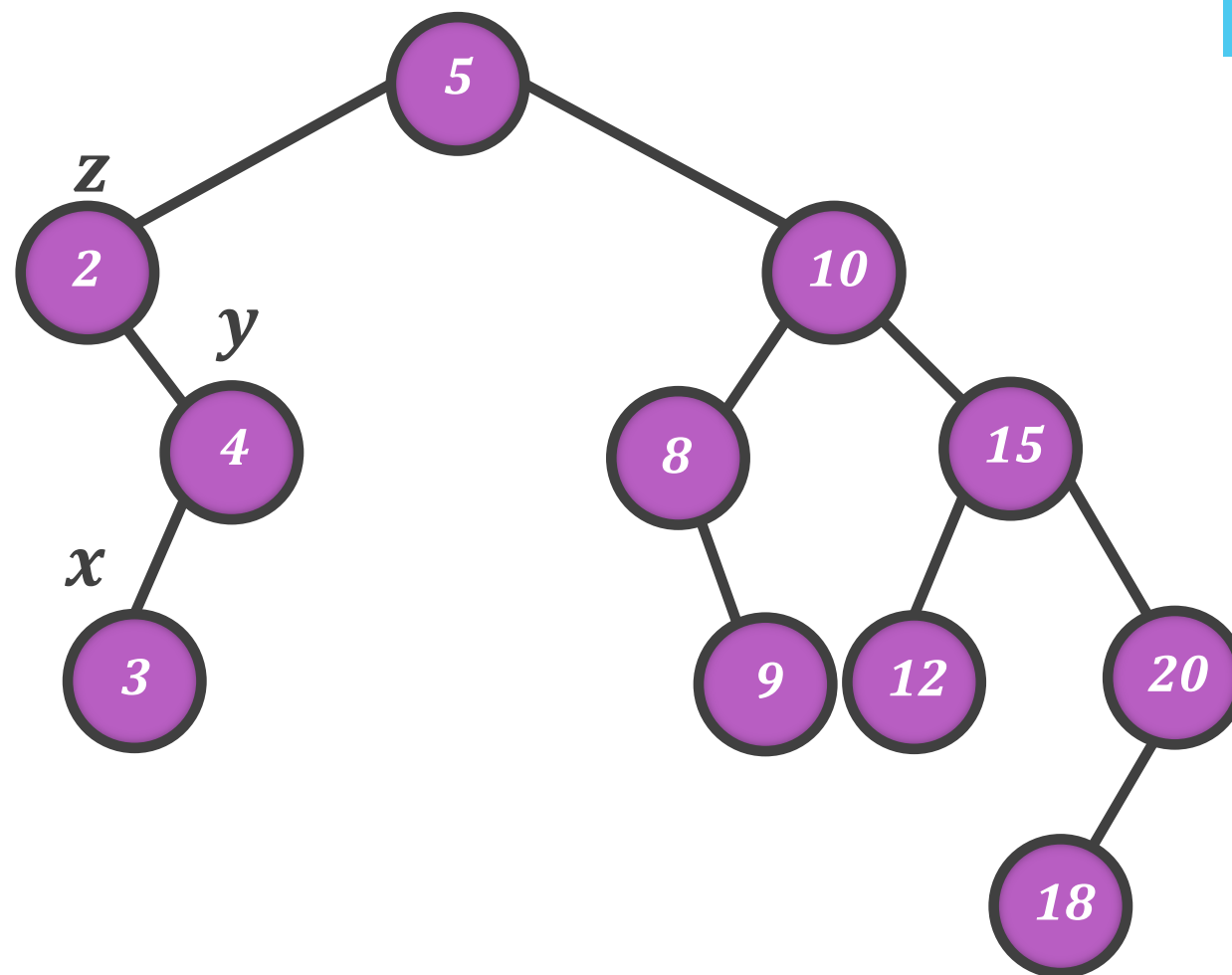
נניח שבעקבות המחיקה, צומת  $v$  בעץ הפך להיות לא מאוזן.  
טענה: גורם האיזון לא יכול להיות גדול מ-2 בערכו המוחלט,  
כי במחיקה גובה של הצומת יכול לקטון ב-1 לכל היותר.

1. הטענה נכונה

2. הטענה לא נכונה

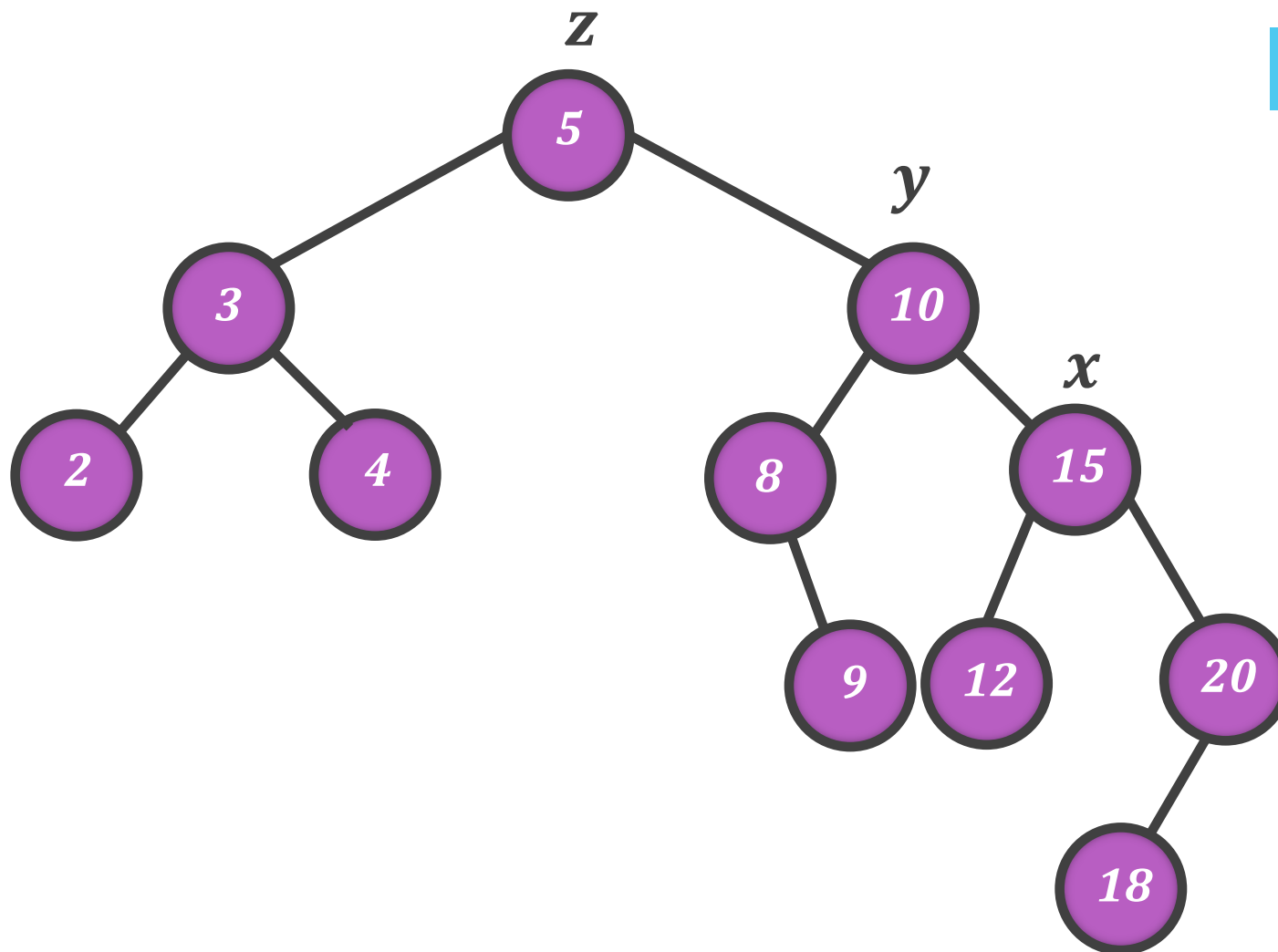
# מחיקה

רוטציה RL

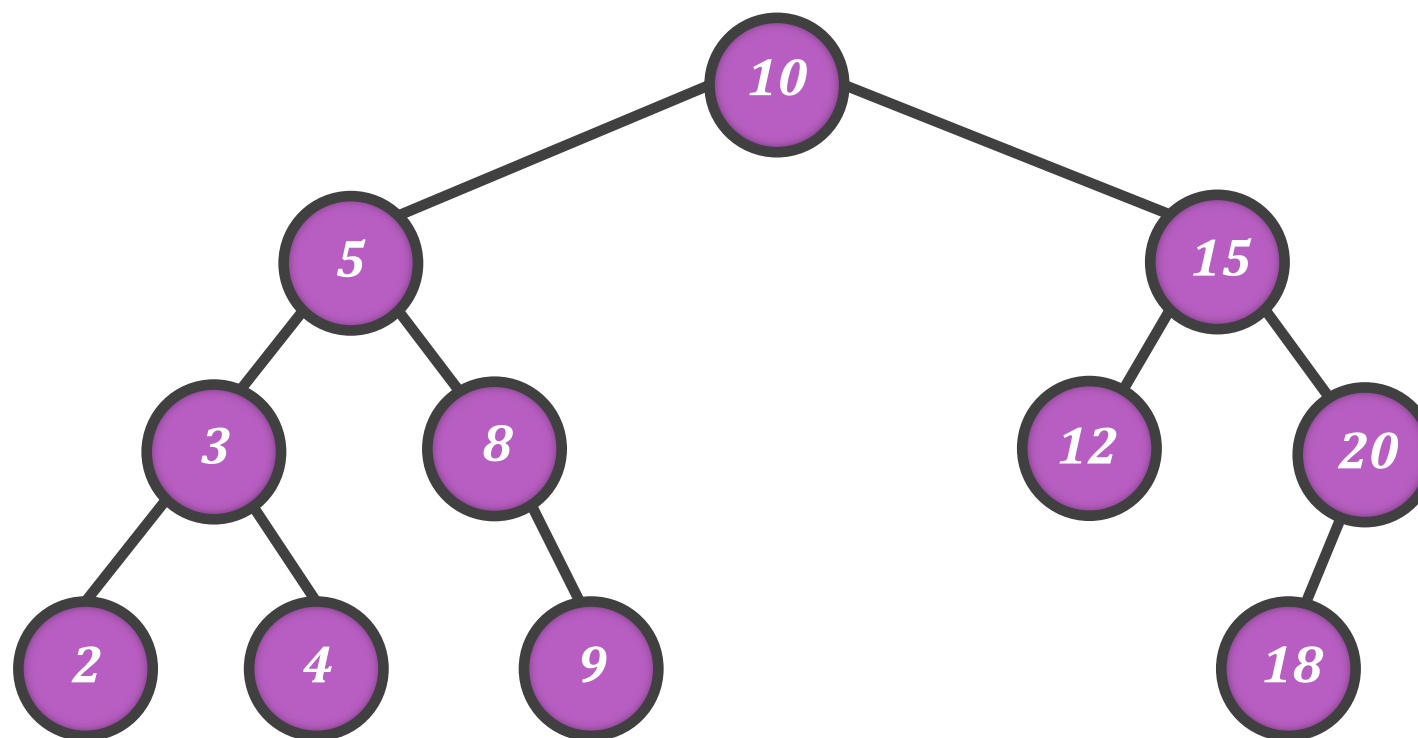


# מחיקה

רוטציה RR



# מחיקה



מחיקת 1

# מחיקה בעץ AVL

$O(\log n)$

1. מחיקת צומת לפי אלגוריתם המחיקה של BST

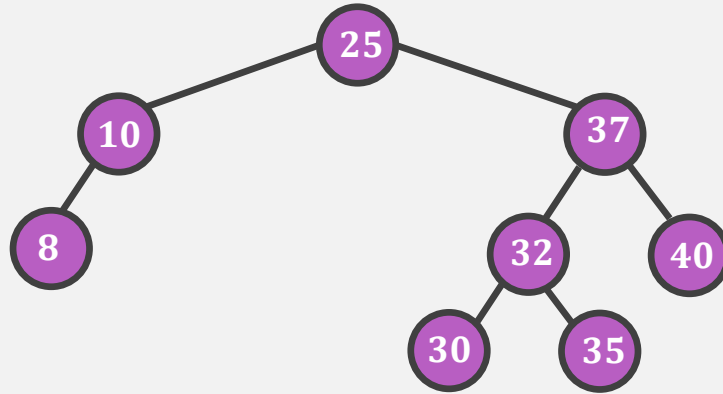
$O(\log n)$

2. נטפס במסלול מהאבא של הצומת שנמחק עד לשורש

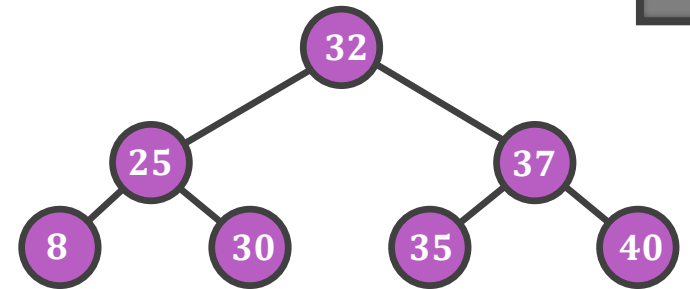
- לכל צומת בדרך נעדכן את שדה הגובה (או balance factor) ונבדוק האם יש הפרה של תכונת ה-AVL
- הפרה של תכונת ה-AVL תתרחש אם גורם האיזון של הצומת הפך להיות 2 או -2
- במידה וצומת  $v$  במסלול העלייה אינו מקיים את תכונת האיזון, יש לבצע רוטציה מתאימה
- פעולת הרוטציה יכולה להקטין את הגובה של תת-העץ שעל שורשו היא פועלת, ולכן אם גובה של תת עץ השתנה, יש להמשיך לעלות במסלול לשורש

זמן ריצה הכולל  $T(n) = O(\log n)$

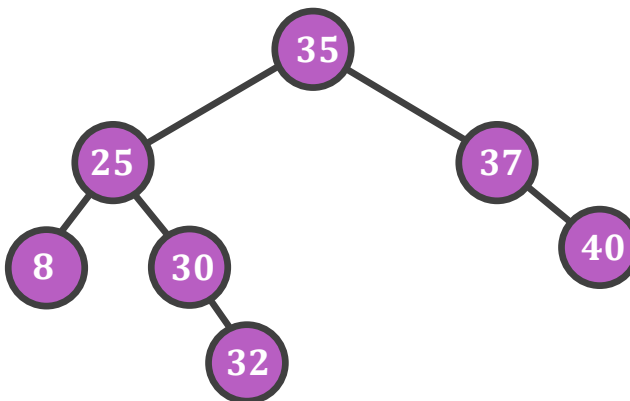
# מהו העץ שמתקבל לאחר מחיקת צומת בעל מפתח 10 מהעץ שבציור?



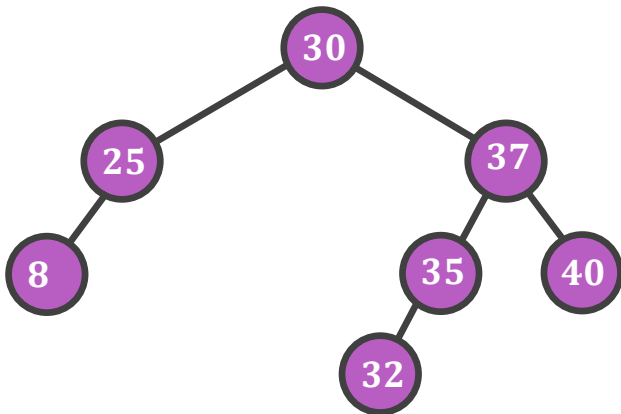
1.



2.



3.





סיכום