1. לכל קבוע שלם $x \geq 0$, ולכל קבוע ממשי $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^x}{n^{x+\varepsilon}}\right) = 0$

מסקנה: $\boldsymbol{n^x = O(n^{x+\varepsilon})}$

כלומר, ברגע שמשנים חזקה, משנים סדר גודל של פונקציה.

2. לכל קבועים ממשיים $a > 1$, $b > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^b}{a^n}\right) = 0$

מסקנה: $\boldsymbol{n^b = O(a^n)}$

קצב הגידול של פונקציה מעריכית הוא הרבה יותר מהיר מקצב הגידול של פונקציה פולינומיאלית.

3. לכל קבועים ממשיים $a \geq 1$, $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{(a+\varepsilon)^n}\right) = 0$

מסקנה: $a^n = \boldsymbol{O}((a+\varepsilon)^n)$.

שינוי בסיס בפונקציה מעריכית משנה את מקצב הגידול

4. לכל פונקציה פולינומיאלית $f(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n + a_0$ עם $a_k > 0$

מתקיים $f(n) = \Theta(n^k)$

הוכחה:

תהיי $f(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n + a_0$ פונקציה פולינומיאלית.

א) נגדיר את סדרת מקדמים $b_i = |a_i|$ לכל $i = 0,..,k$

אזי

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \leq$$
$$\leq b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0 \leq$$
$$\leq b_k n^k + b_{k-1}n^k + \cdots + b_1 n^k + b_0 n^k =$$
$$= (b_k + b_{k-1} + \cdots + b_1 + b_0)n^k = cn^k = O(n^k)$$

כאשר $c = b_k + b_{k-1} + \cdots + b_1 + b_0 > 0$ הוא קבוע

הוכחנו $f(n) = O(n^k)$

ב) כמו בסעיף **(א)** נגדיר את סדרת מקדמים $b_i = |a_i|$ לכל $i = 0,..,k$

אזי

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \geq$$
$$\geq b_k n^k - b_{k-1}n^{k-1} - \cdots - b_1 n - b_0 \geq$$

$$\geq b_k n^k - b_{k-1} n^{k-1} - \cdots - b_1 n^{k-1} - b_0 n^{k-1} =$$

$$= b_k n^k - (\ \ b_{k-1} + \cdots + b_1 + b_0) n^{k-1} \geq \frac{1}{2} b_k n^k$$

כאשר עבור ערכים גדולים של n ניתן להוכיח ש- $b_{k-1} + \cdots + b_1 + b_0 < \frac{1}{2} b_k n$

הוכחנו $f(n) = \Omega(n^k)$

מ-**(א)** ו-**(ב)** נובע ש- $f(n) = \Theta\left(n^k\right)$

מש"ל