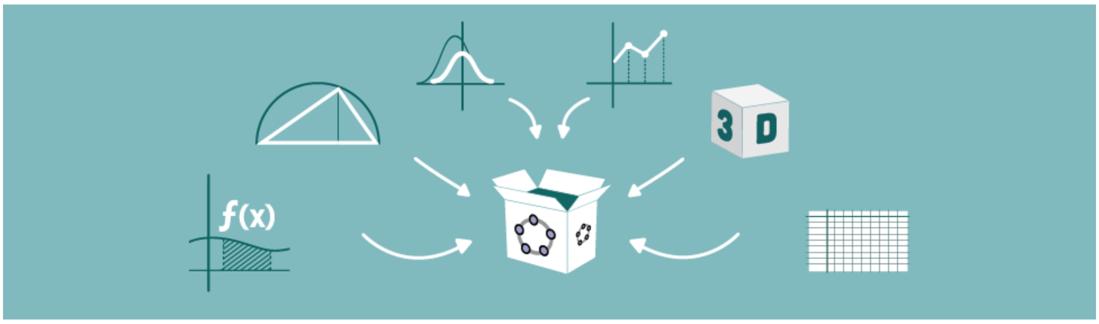
FORTBILDUNG GEOGEBRA



21.11.2014 GYMNASIUM LIESTAL

TORSTEN LINNEMANN & MARTIN GUGGISBERG

Torsten Linnemann, PH FHNW,
Deutschschweizerische Mathematikkommission
Gymnasium Oberwil tolinnemann@gmail.com

Martin Guggisberg
Universität Basel martin.guggisberg@unibas.ch

1. Geometrie
    - Punkte, Dreiecke, Ortslinien, Argumentieren
    - Anwenden kleiner Apps.
2. Wo und wie ist Geogebra einsetzbar?
    - BrowserApp, Installation, Mobile Geräte
3. Funktionen, Folgen, Maturaufgabe (CAS-Fenster)
4. Würfelschnitte, Stochastik, Tabellenkalkulation
5. Dessert
    - Piratenaufgabe
    - Abbildungen (Matrizen)
    - Angry Birds Mathematik
    - Zentralprojektion & Parallaxe
    - Fermat-Punkt

GEOMETRIE

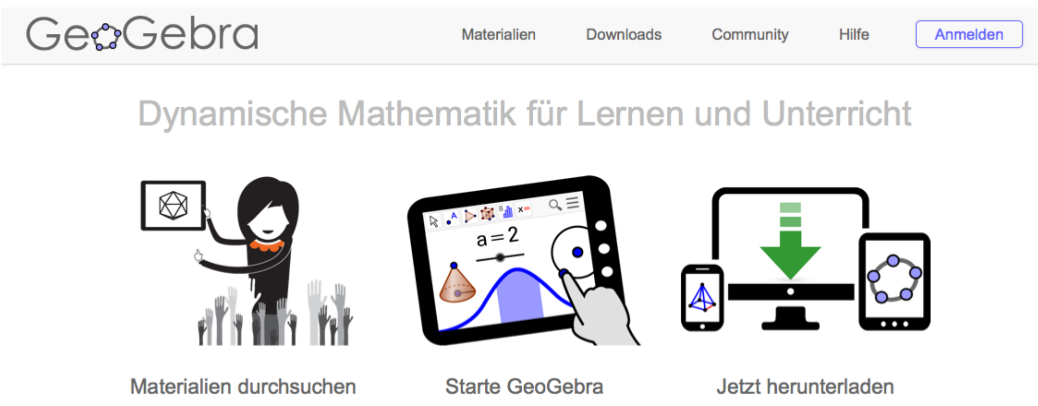
Konstruktion von ebenen Figuren, Dreiecke, spezielle Punkte

ORTSLINIEN, SPUR: ARGUMENTIEREN

- Winkelhalbierende: http://tube.geogebra.org/student/m320791
- Symmetrie: https://tube.geogebra.org/student/m188567
- Gleicher Abstand: https://tube.geogebra.org/student/m188578
- Gleicher Abstand II https://tube.geogebra.org/student/m188545

GEOGEBRA
IM
EINSATZ

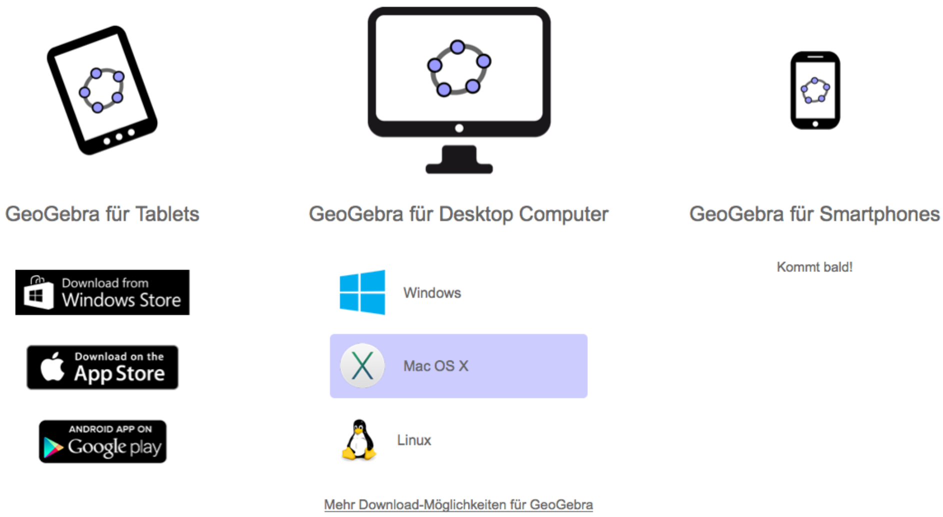
STARTSEITE



GEOGEBRA

IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,

1. MÖGLICHKEIT
GEOGEBRA INSTALLIEREN



http://www.geogebra.org/download

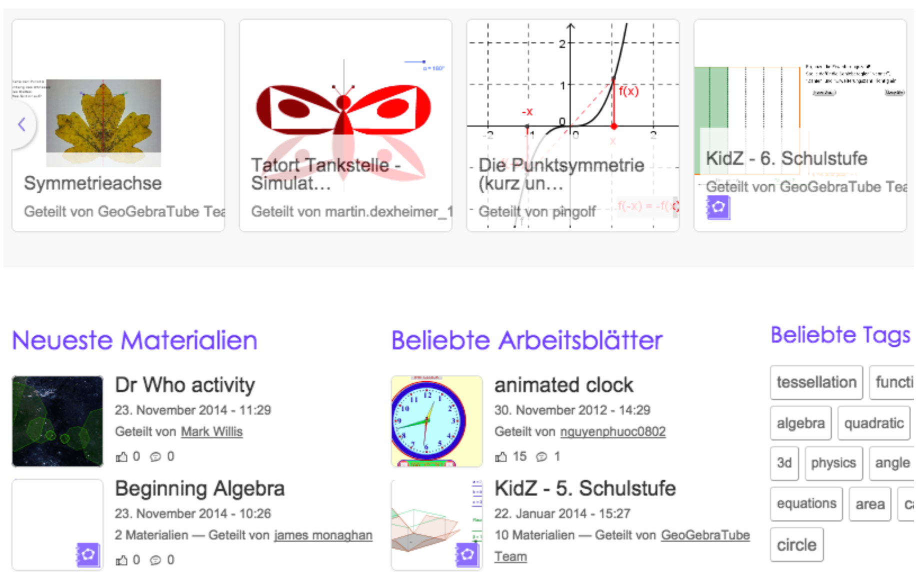
WICHTIG
VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

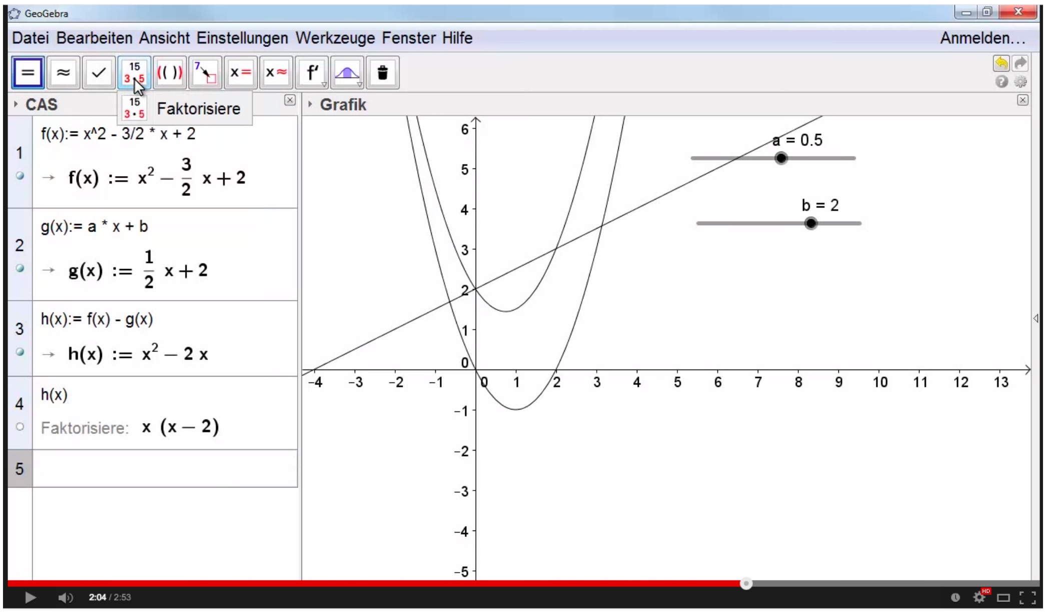
2. MÖGLICHKEIT
DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

http://web.geogebra.org/app

Schülerinnen und Schüler können bestehende Materialien direkt über http://tube.geogebra.org/ nutzen



LERNVIDEOS



[YouTube GeoGebra channel]

NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

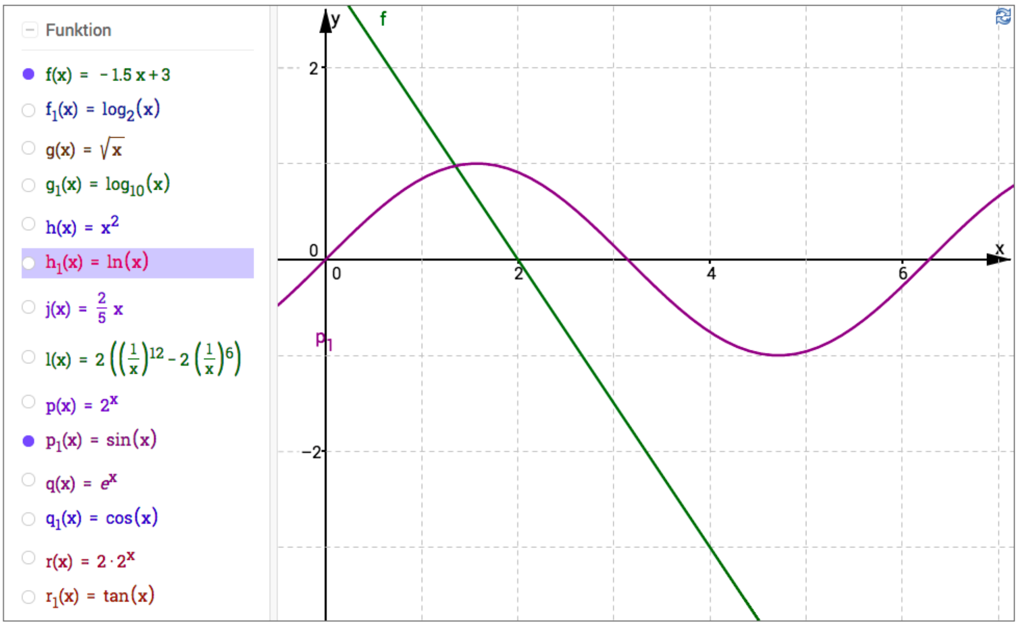
Twitter: [@geogebra]

HANDS-ON

- Funktionen
- Folgen
- CAS-Fenster

FUNKTIONEN

- graphisch darstellen
- verschieben
- verknüpfen
- Punkt auf einer Funktion



[Link auf GeoGebraTube]

PUNKT AUF FUNKTION

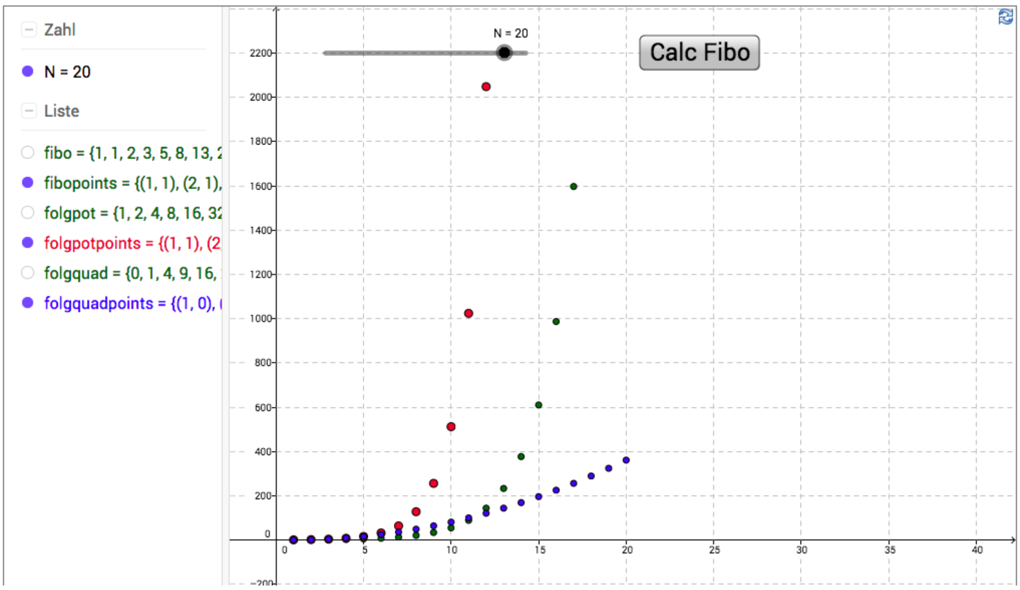
1. Beweglicher Punkt auf der x-Achse
2. entsprechender Punkt auf einer Funktion

```
f(x) =x^2*sin(x^2)
X_0 =Punkt[y=0]
P =(x(X_0),f(x(X_0)))
```

FOLGEN

- Zahlenfolgen
- Folgen von Funktionen
- Folgen geometrischer Objekte
- Geschachtelte Folge (Punkte auf Fläche im $\mathbb{R}^3$)

ZAHLENFOLGEN



[Link auf GeoGebraTube]

FIBONACCI MIT PROGRAMM BERECHNEN (JAVASCRIPT)

```
var fibo = function(n){

   var N,i,arr;
   // Eingabe überprüfen
   if (typeof(n) !== "number"){
      N = 10;
   } else{
      N =n-2;
   }

  // Fibo Start
  arr=[1,1];
  for (i=0;i<N;i++){
    arr.push(arr[i]+arr[i+1])
  }
 //Rückgabe als Liste
 return "{"+arr+"}";
};
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

zum Beispiel

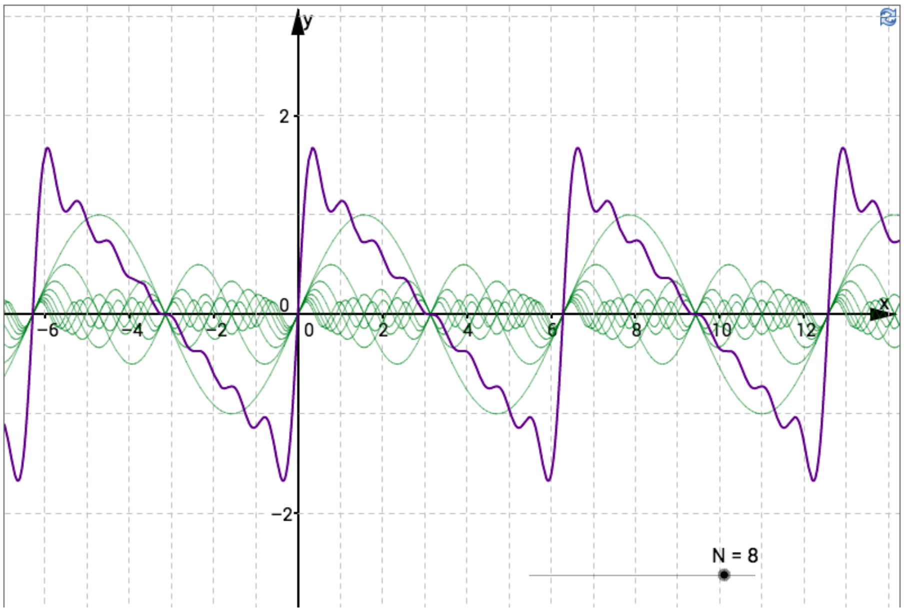
$$f_i(x) = \frac{1}{i}\sin(i \cdot x)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)$$

```
N=10
folgefunkt = Folge[1/i*sin(x*i), i, 1, N]
reihe = Summe[folgefunkt]
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

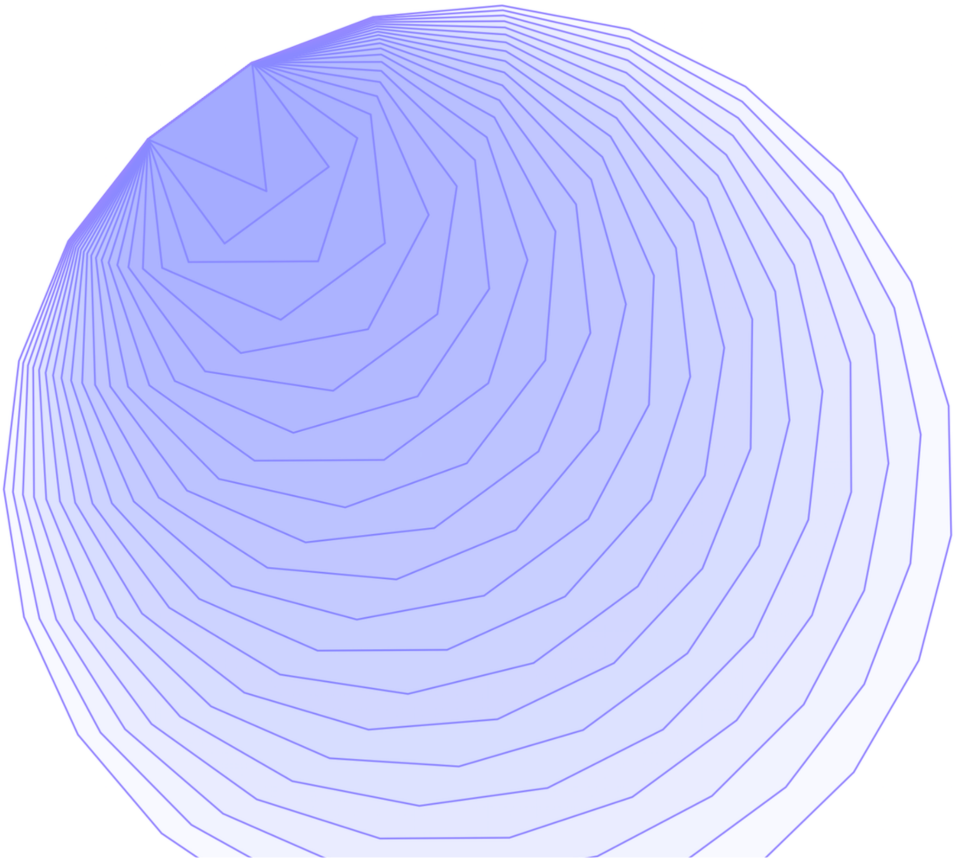
$f = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)$



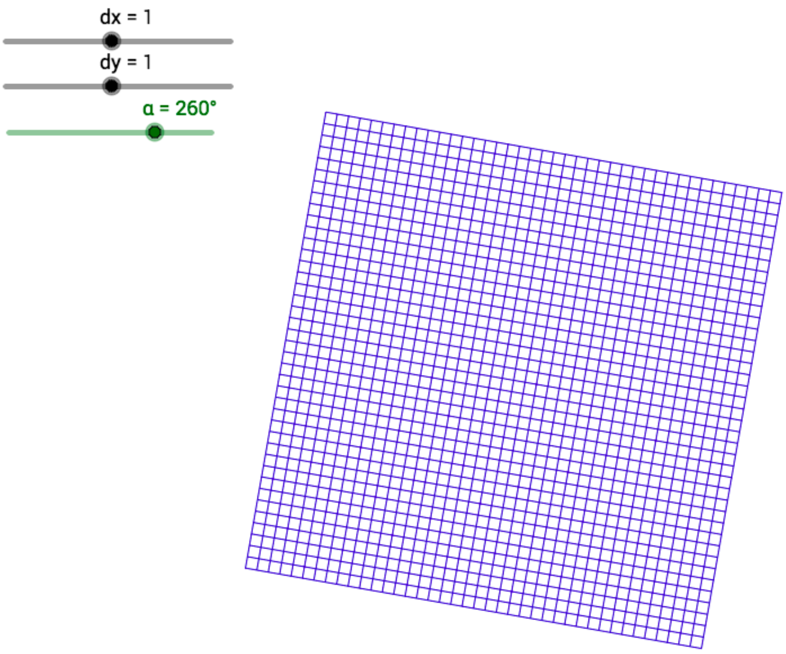
[Link auf GeoGebraTube]

FOLGEN GEOMETRISCHER OBJEKTE

```
A=(0,0)
B=(1,0)
Folge[Vieleck[A, B, i], i, 3, 23]
```



GITTER



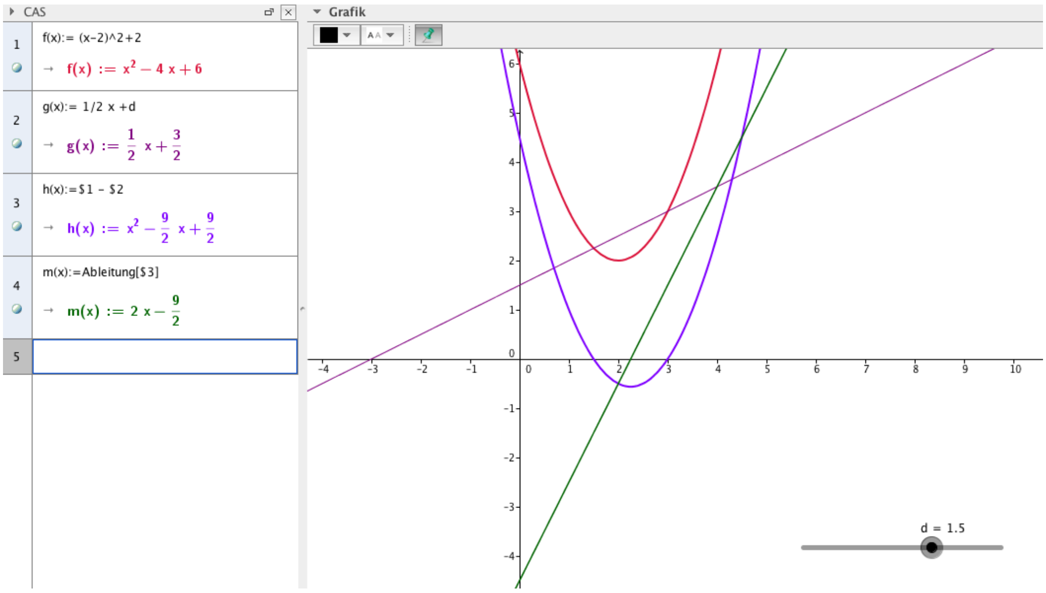
Link auf GeoGebraTube

GEOGEBRA BEFEHLE FÜR EIN GITTER

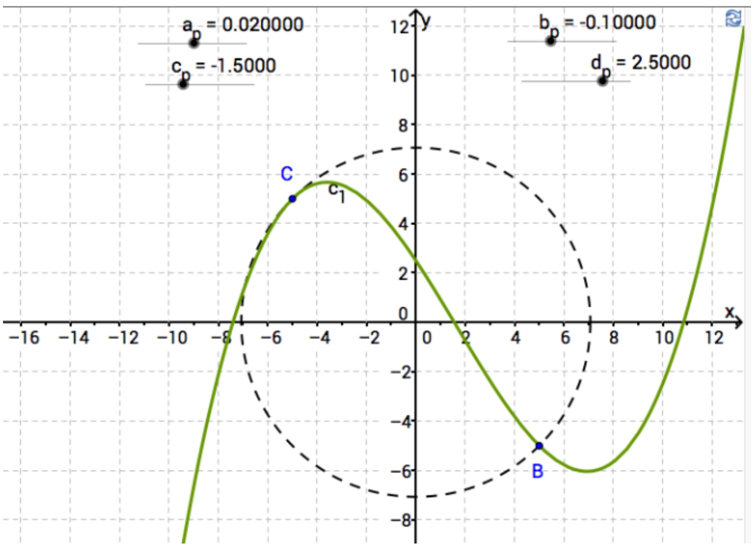
```
dx = 1
dy = 1
x_{Max}=20
x_{Min}=-20
y_{Max}=20
y_{Min}=-20
Folge[Strecke[(px, y_{Min}), (px, y_{Max})], px, x_{Min}, x_{Max
Folge[Strecke[(x_{Min}, py), (x_{Max}, py)], py, y_{Min}, y_{Max
```

CAS

- Funktionen mit CAS untersuchen
- Gleichungssysteme lösen
- Beispiel Maturaaufgabe



MATURAUFGABE



[Link auf GeoGebraTube Lösung]

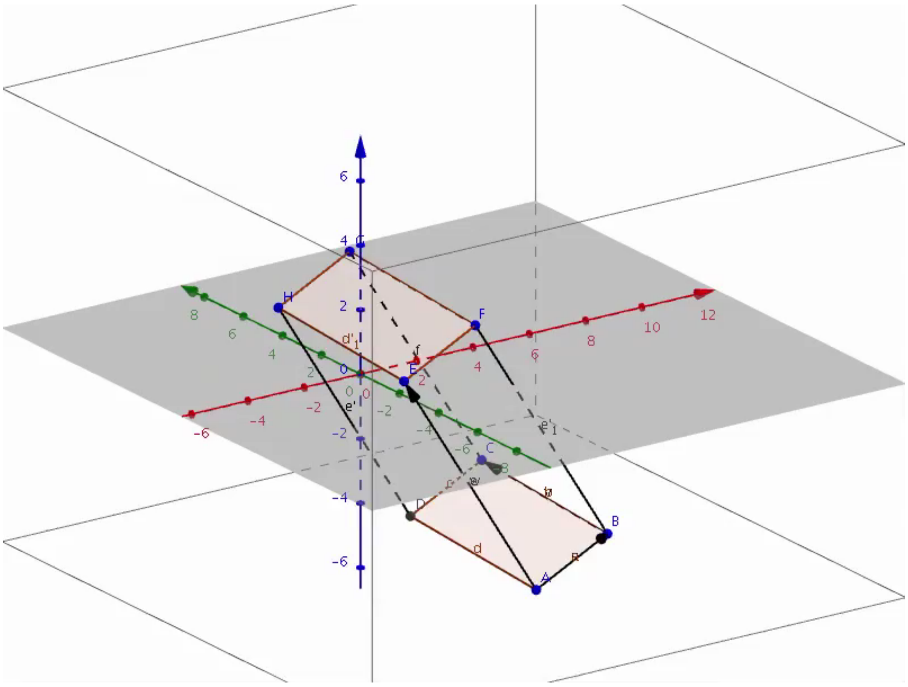
DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

- http://wiki.geogebra.org/de/L%C3%B6seDgl_(Befehl))
- http://wiki.geogebra.org/de/Richtungsfeld_(Befehl))

VEKTOR-GEOMETRIE

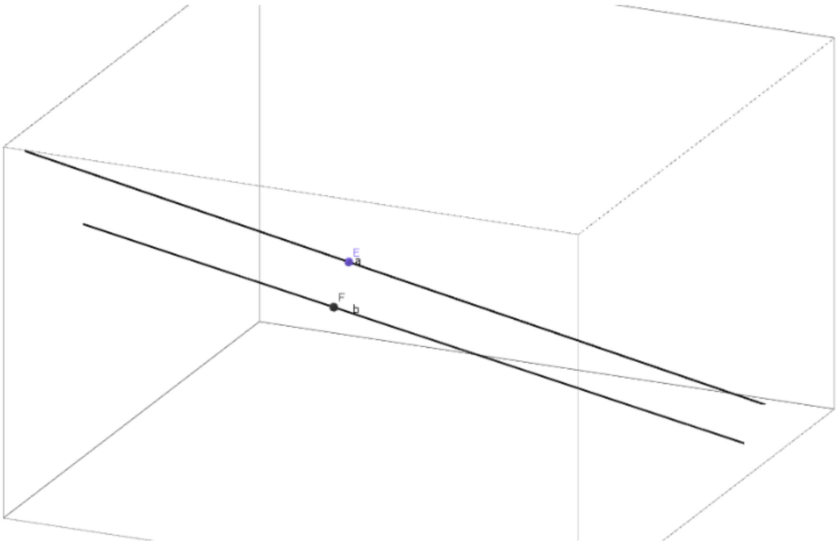
- Ein Spat
- Abstand zweier Geraden
- Würfelschnitte

EIN SPAT



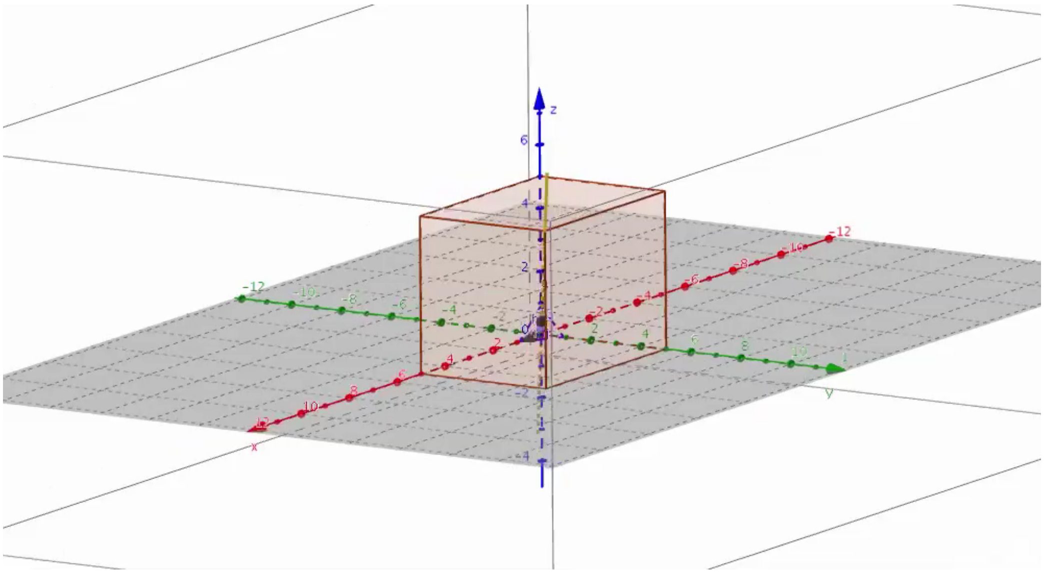
- http://tube.geogebra.org/student/m320977

ABSTAND ZWEIER GERADEN



- http://tube.geogebra.org/student/m320555

WÜRFELSCHNITTE



STOCHASTIK

- Ansicht: CAS
- Icon: Wahrscheinlichkeitsrechner

TABELLEN-KALKULATION

- Körperoberfläche
  http://tube.geogebra.org/student/m321081
- Digoxin
  http://tube.geogebra.org/student/m321095
- 1000 Zufallszahlen
  http://tube.geogebra.org/student/m321107

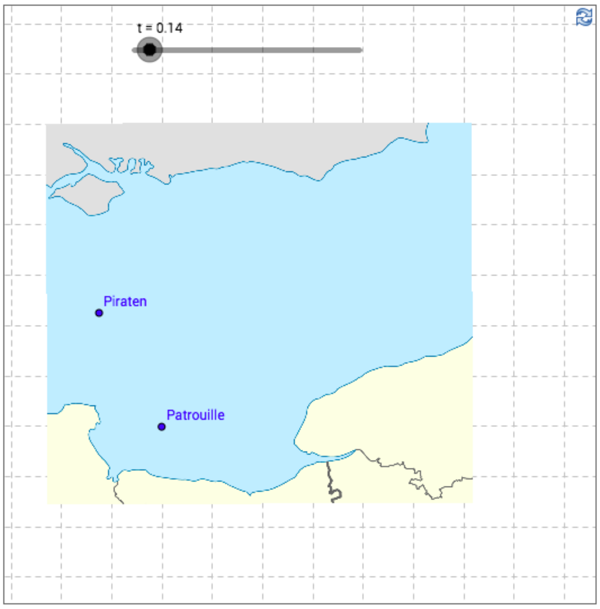
DESSERT

- Piratenaufgabe
- Abbildungen (Matrizen)
- Angry Birds Mathematik
- Zentralprojektion & Parallaxe
- Fermat-Punkt

PIRATEN-AUFGABE

Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.

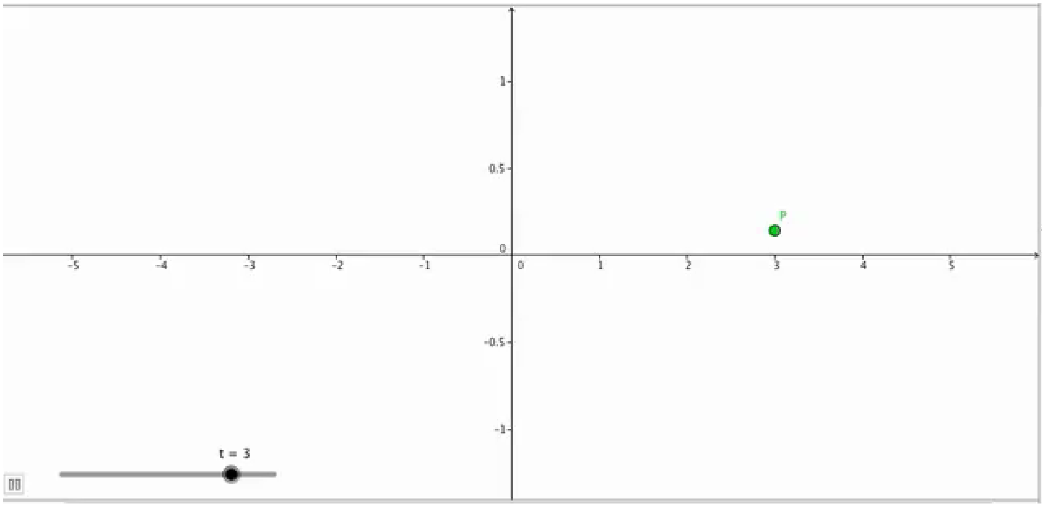


[Link auf GeoGebraTube]

BEWEGUNGEN SIMULIEREN

x,y-Position als Funktion von t

```
t = 0.0
P = (t,sin(t))
```



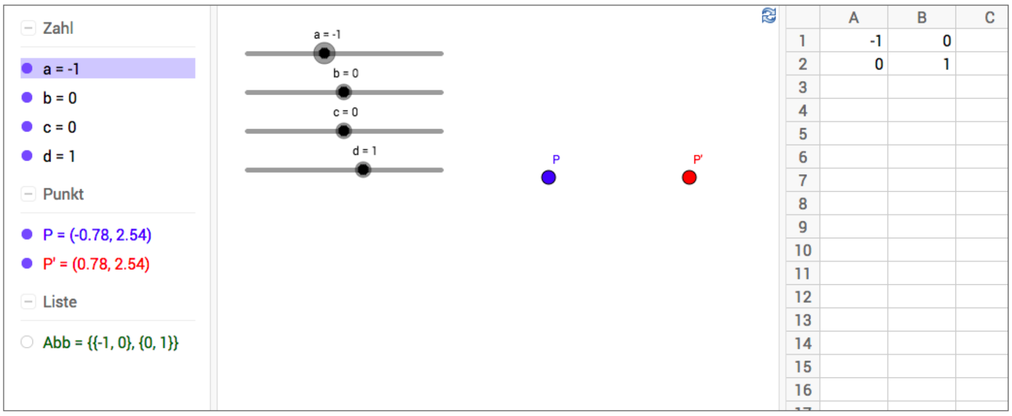
ABBILDUNGEN

SPIEGELUNG

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

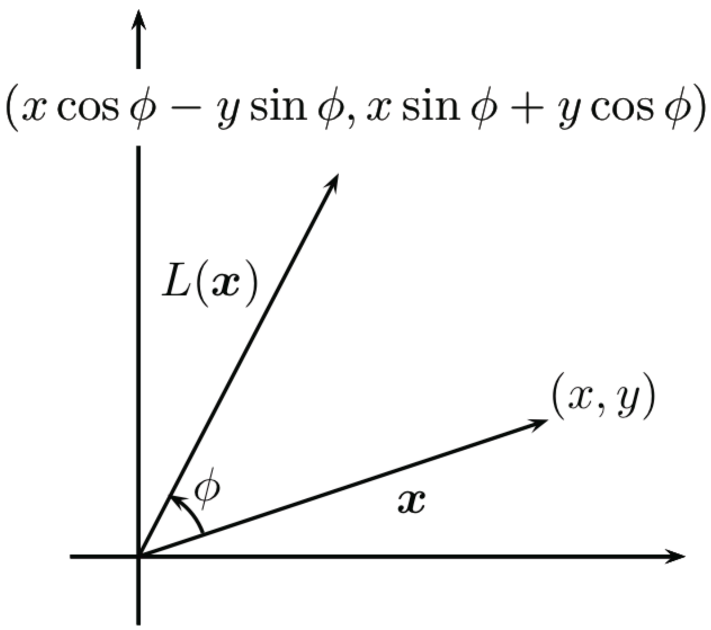
ABBILDUNG EINES PUNKTES



Lässt sich der Ursprung aus der Beobachtung des Verhaltens zwischen dem Punkt P und seiner Abbildung P' ermitteln?

Link auf GeoGebraTube

DREHUNG



DARSTELLUNG EINER DREHUNG UM DEN PUNKT (0,0) GEGEN DEN UHRZEIGERSINN UM $90°$

Diese lin. Abbildung bildet

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch Drehungen sind lineare Abbildungen. Eine Drehung um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) kann wie folgt beschrieben werden:

$$L: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x\cos(\phi) - y\sin(\phi), x\sin(\phi) + y\cos(\phi$$

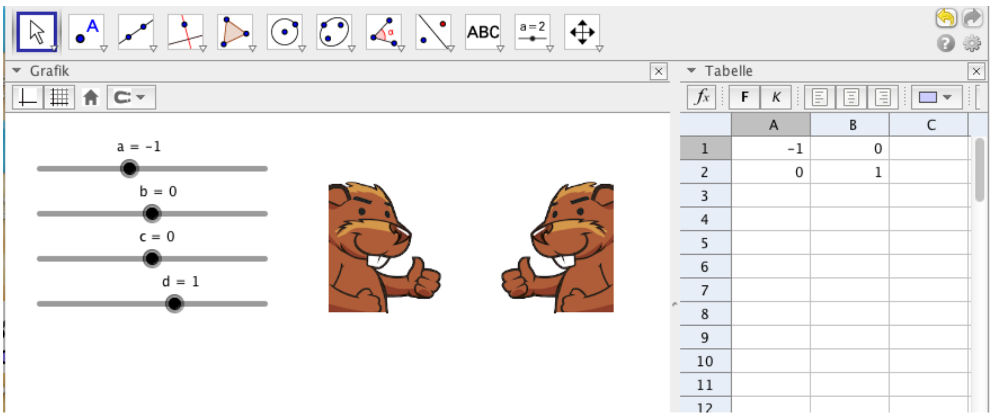
DREHUNG GEGENUHRZEIGERSINN UM EINEN WINKEL ϕ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

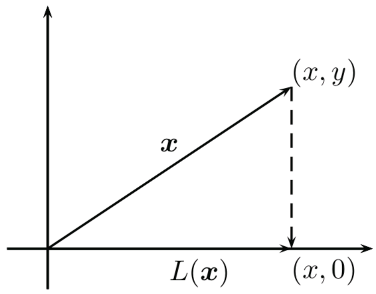
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

RASTERGRAFIK MIT LINEAREN ABBILDUNGEN TRANSFORMIEREN

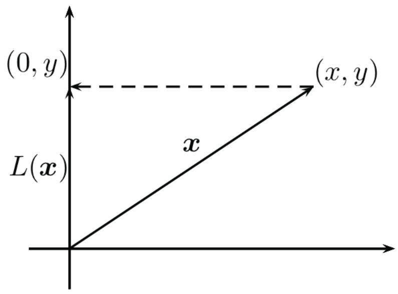


[Link auf GeoGebraTube]

PROJEKTION



auf x-Achse



auf y-Achse

Die orthogonale Projektion auf die x-Achse ist auch eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

$$L: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x, 0)$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf die y-Achse ist eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

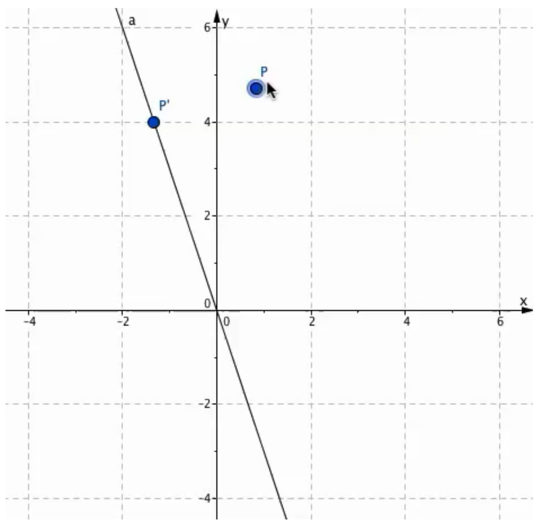
$$\begin{aligned} L: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto (0, y) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PUNKT AUF EINE GERADE A PROJIZIEREN

$$a: y = -3x$$



VORGEHEN

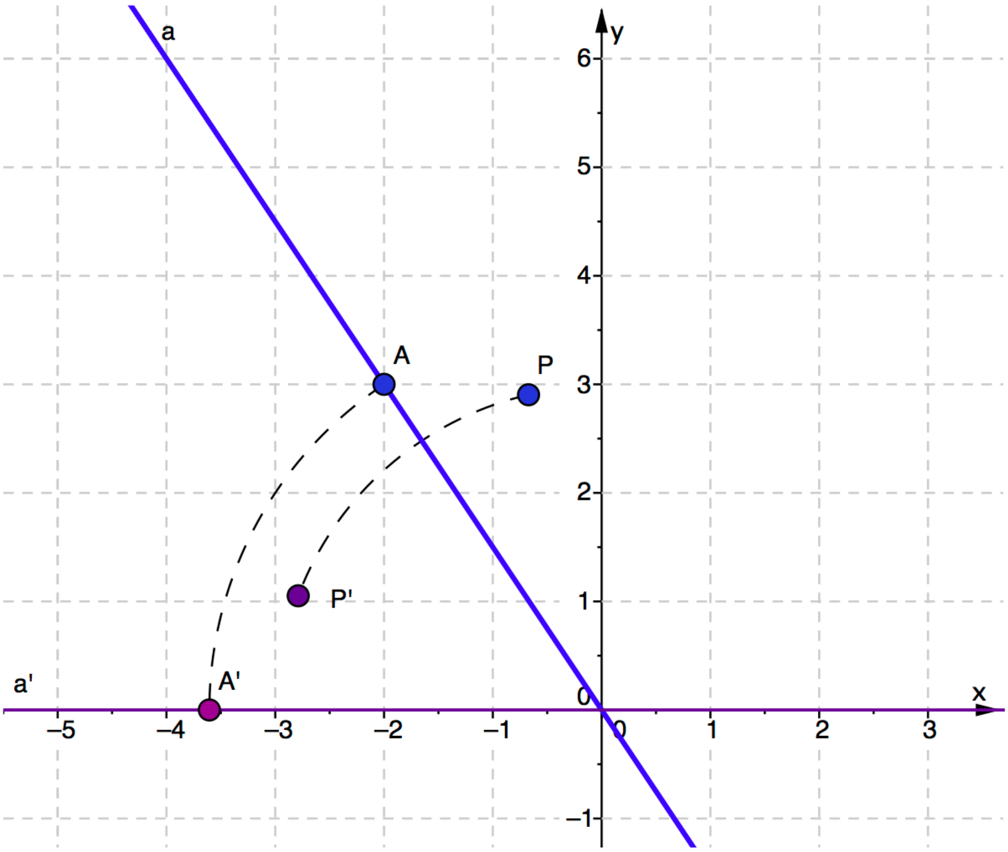
- Gesamte Figur drehen bis die Gerade a auf der x-Achse liegt
- Den Punkt auf die x-Achse projizieren
- den projezierten Punkt wieder zurück drehen.

1. SCHRITT DREHEN UM α

$$\tan(\alpha) = -3 \rightarrow \alpha \approx -71.57°$$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

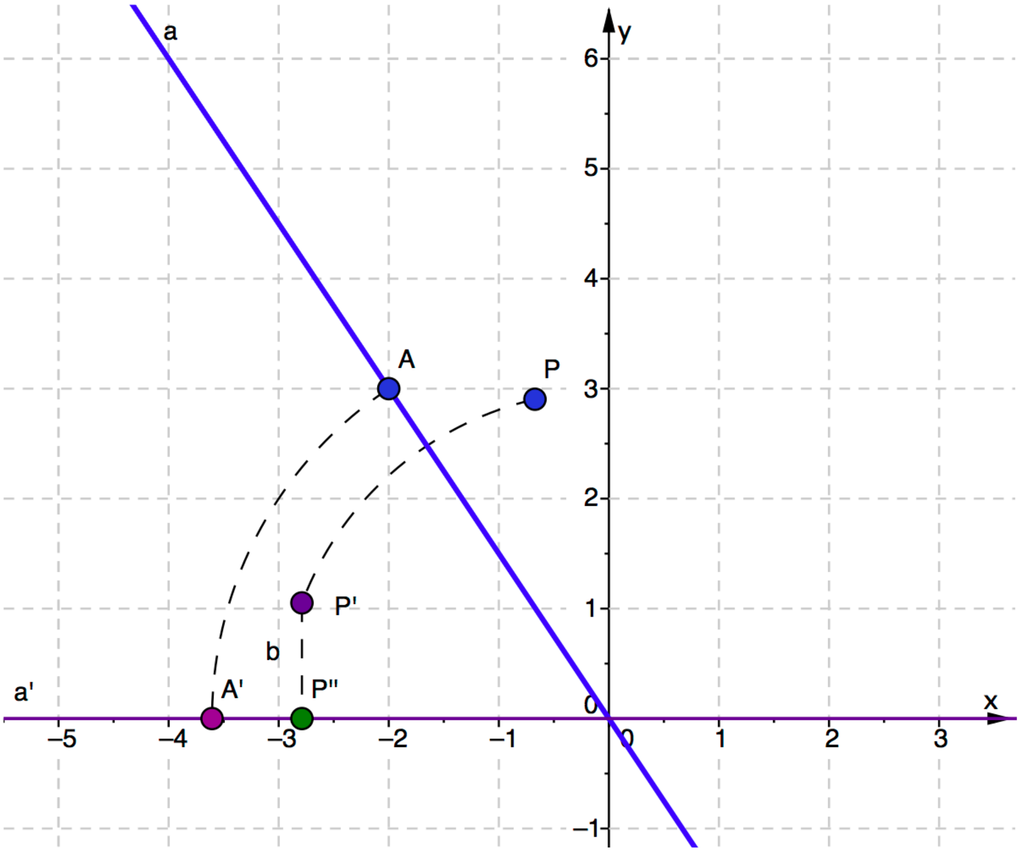
GeoGebraTube



2. SCHRITT PROJEKTION AUF X-ACHSE

$$P_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube

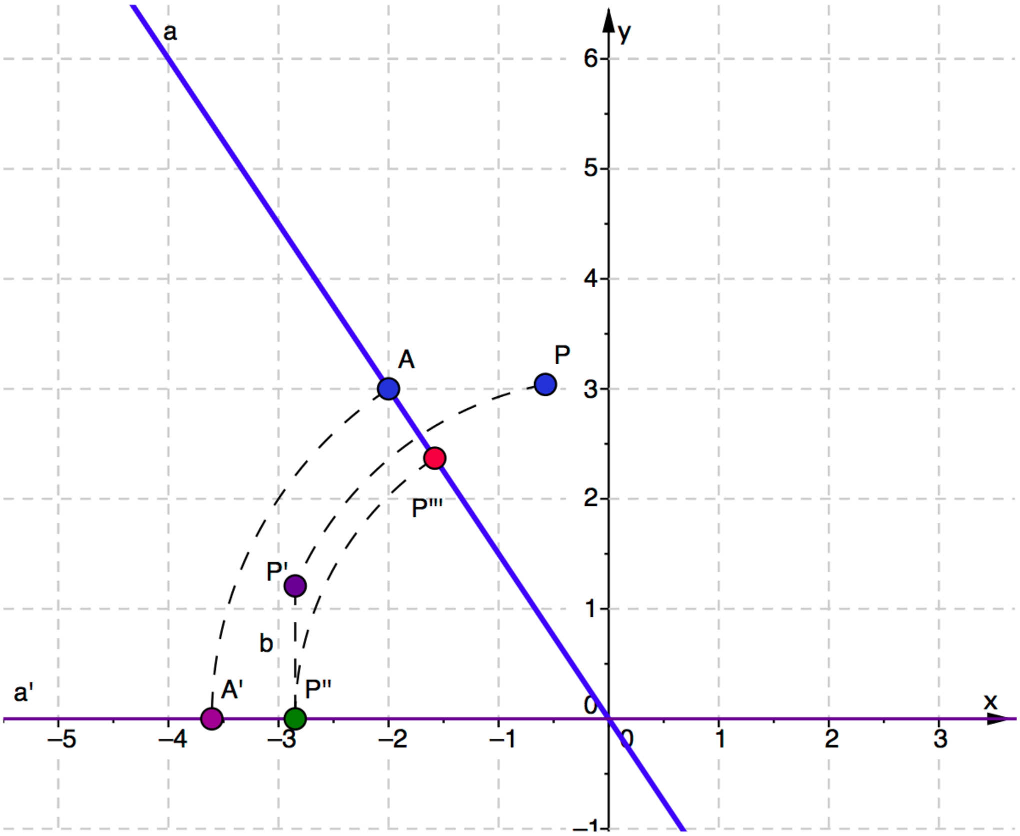


3. SCHRITT RÜCKDREHEN UM α

$$\alpha \approx -71.57°$$

$$R_{-\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube



IN EINEM SCHRITT

$$R_{-a} \cdot P_X \cdot R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

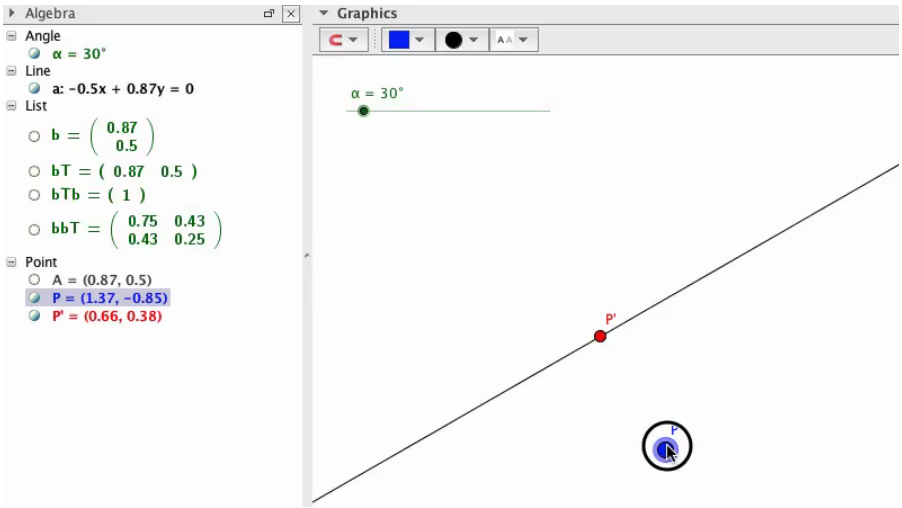
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF UNTERRAUM VERWENDEN

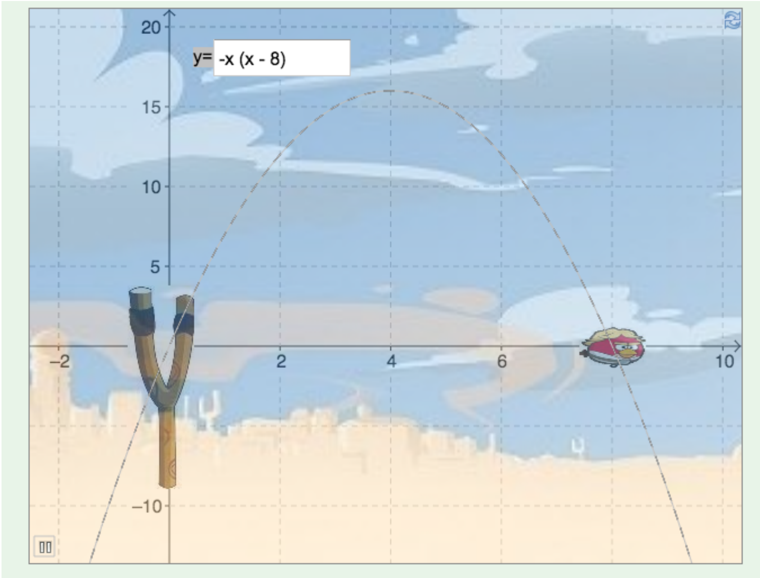
Wähle eine Matrix A so, dass die Spaltenvektoren eine Basis eines Unterraums bilden. (z.B. eine Gerade in $\mathbb{R}^2$), dann ist die Projektionsmatrix

$$proj_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$

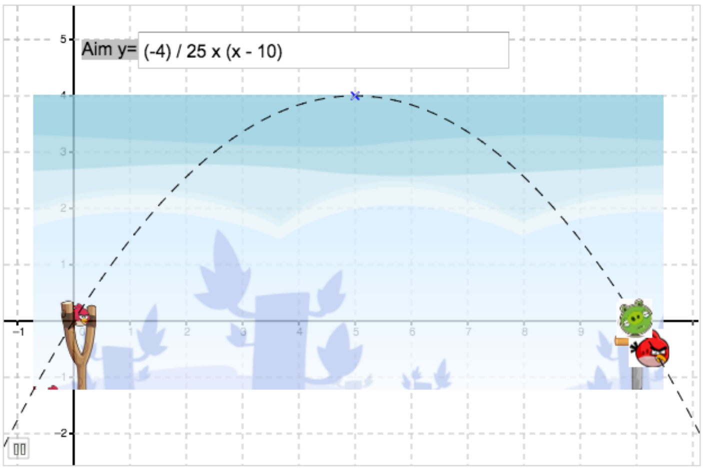


[Link to GeoGebraTube]

ANGRY BIRDS MATHE



Link auf Webseite

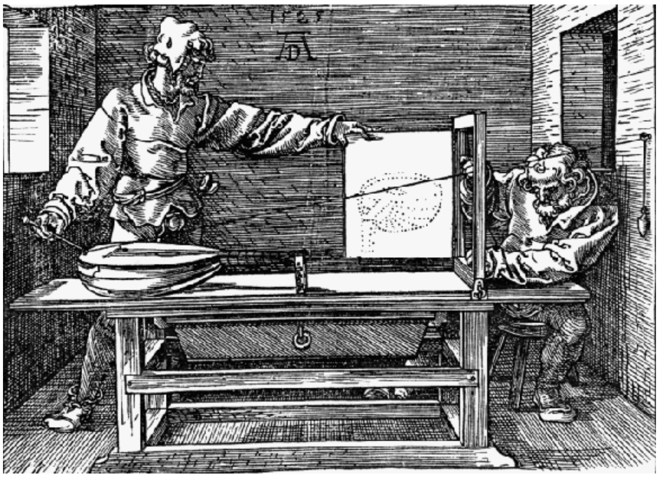


Link auf Webseite

ZENTRALPROJEKTION
&
PARALLAX EFFEKTE

Modellierung eines perspektivischen Abbildungssystems mit

- Homogene Koordinaten
- Matrizen



Link Mechanical creation of a perspective image by Albrecht Dürer

PERSPEKTIVISCHE ABBILDUNG

QUADER AUF EBENE

KONVENTIONEN

- Annahme das Zentrum der Abbildung ist im Ursprung
- Blickrichtung entlang der Z-Achse
- Verwenden homogene Koordinaten

ZENTRALPROJEKTION AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE

mit Brennweite f

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF HOMOGENEN VEKTOR ANWENDEN

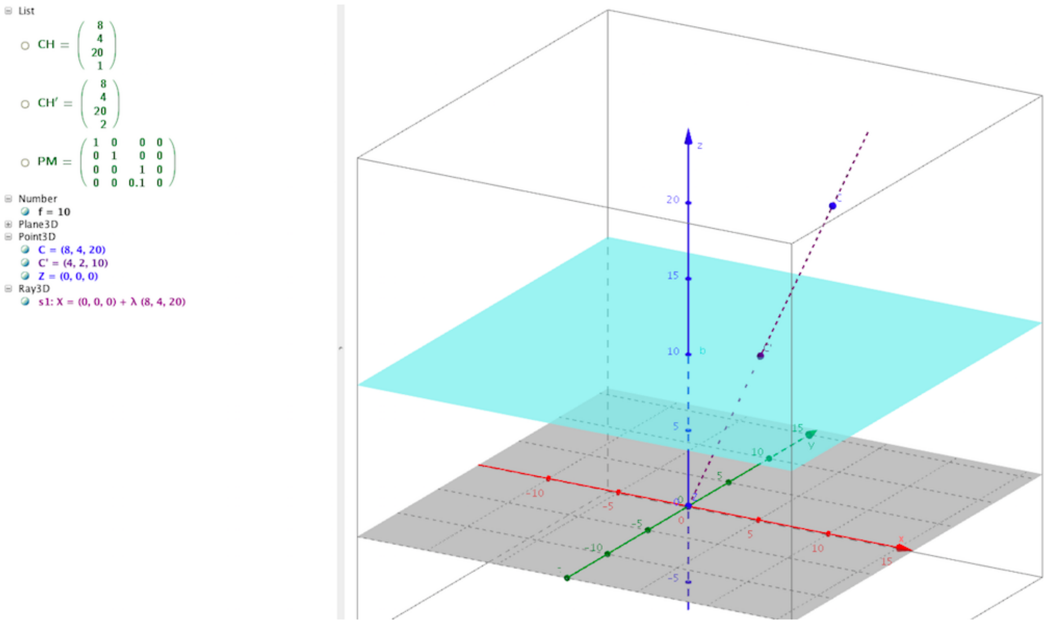
$$P \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

ÜBERGANG HOMOGENEN KOORDINATEN ZU KARTESISCHEN KOORDINATEN

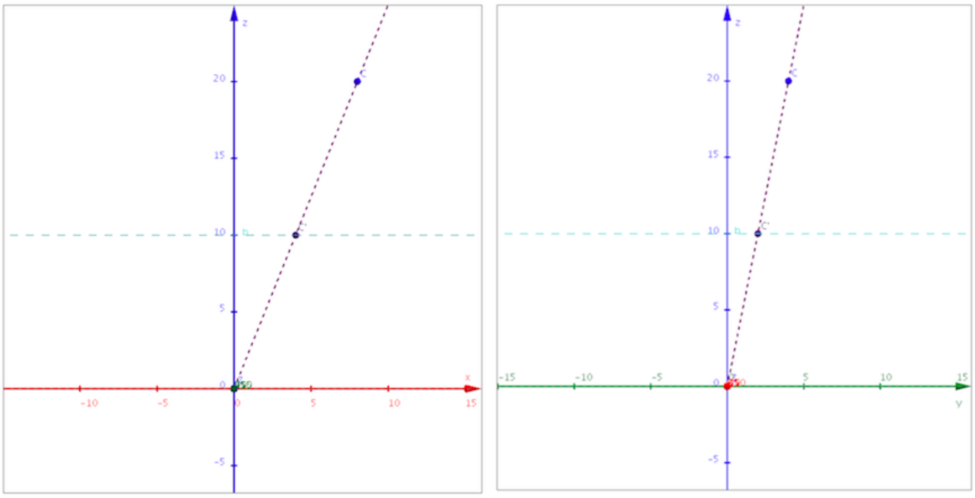
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f/z \cdot x \\ f/z \cdot y \\ f/z \cdot z \end{pmatrix}$$

ZAHLENBEISPIEL

- Sei f = 10
- Ein Punkt (8,4,20) soll auf die Normalebene zur Z-Achse im Abstand von 10 abgebildet werden.



$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$



ZENTRALPROJEKTION

AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE MIT BRENNWEITE F

HOMOGENE KOORDINATEN

FÜR $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Transformation

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x/(Q_z) \\ Q_y/(Q_z) \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

HOMOGENE KOORDINATEN

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

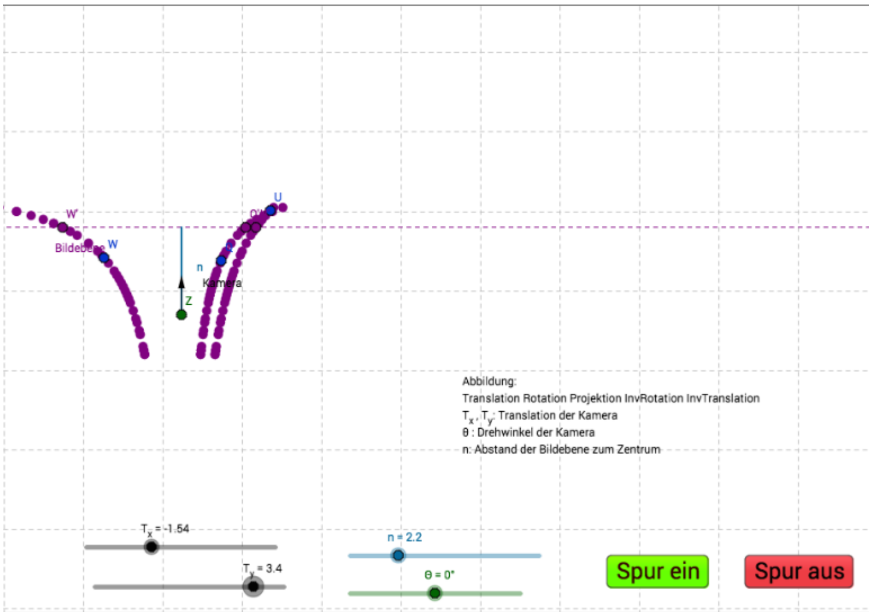
ROTATION

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSLATION

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION



[Link auf GeoGebraTube]

IM KINO

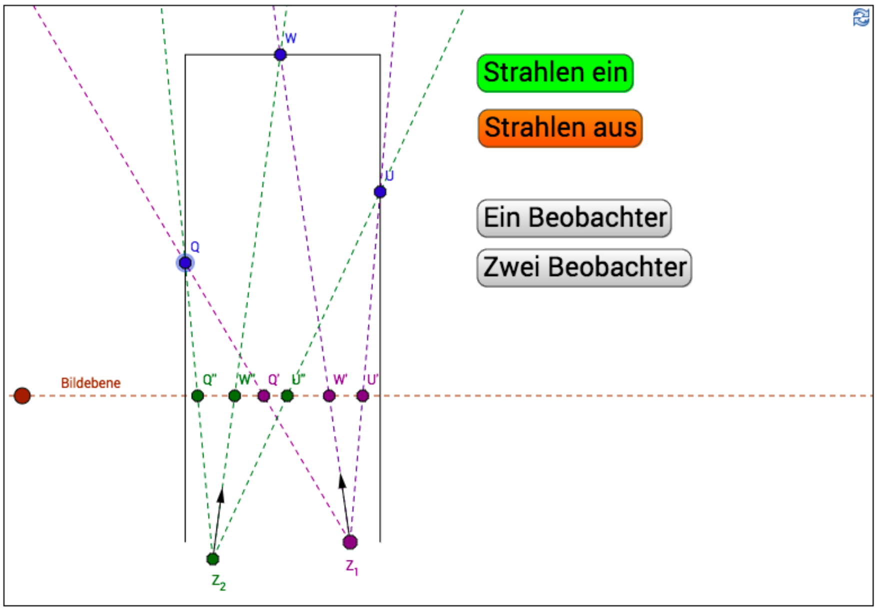
versuchen Agenten in einen Tresorraum einzudringen, ohne dass Sie von einem Wächter entdeckt werden.

Sie projizieren dafür den hinteren Teil eines schmalen Gangs perspektivisch auf eine Leinwand (Bildebene).

Anschliessend bewegen sie die Leinwand langsam nach vorne.

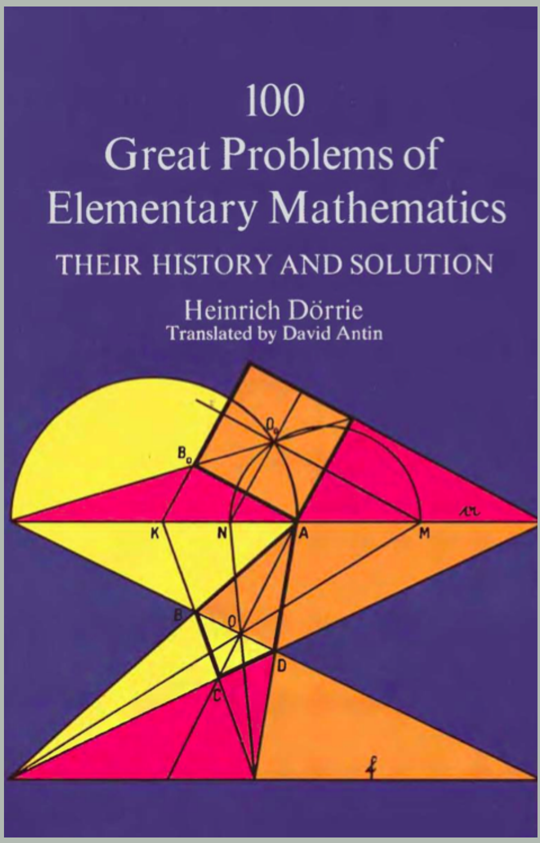
Die Sache fliegt in dem Moment auf, in welchem ein zweiter Betrachter hinzu kommt.

AUSSCHNITT MISSION IMPOSSIBLE 4



[Link GeoGebraTube]

FERMAT-PUNKT



91 **Fermat's Problem for Torricelli**

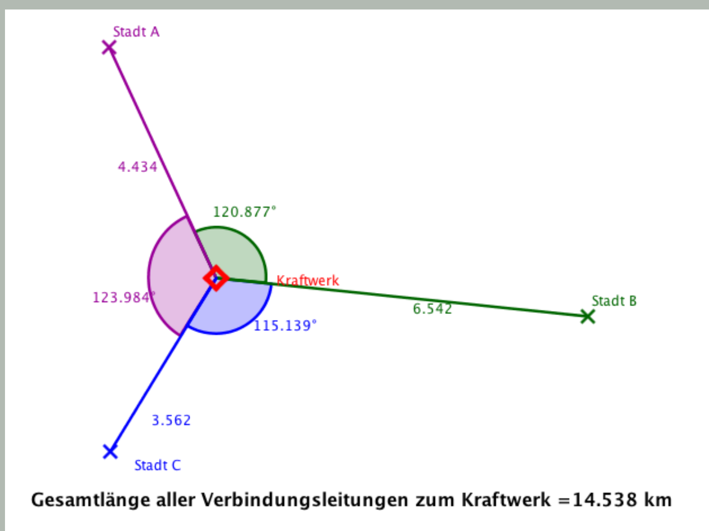
To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

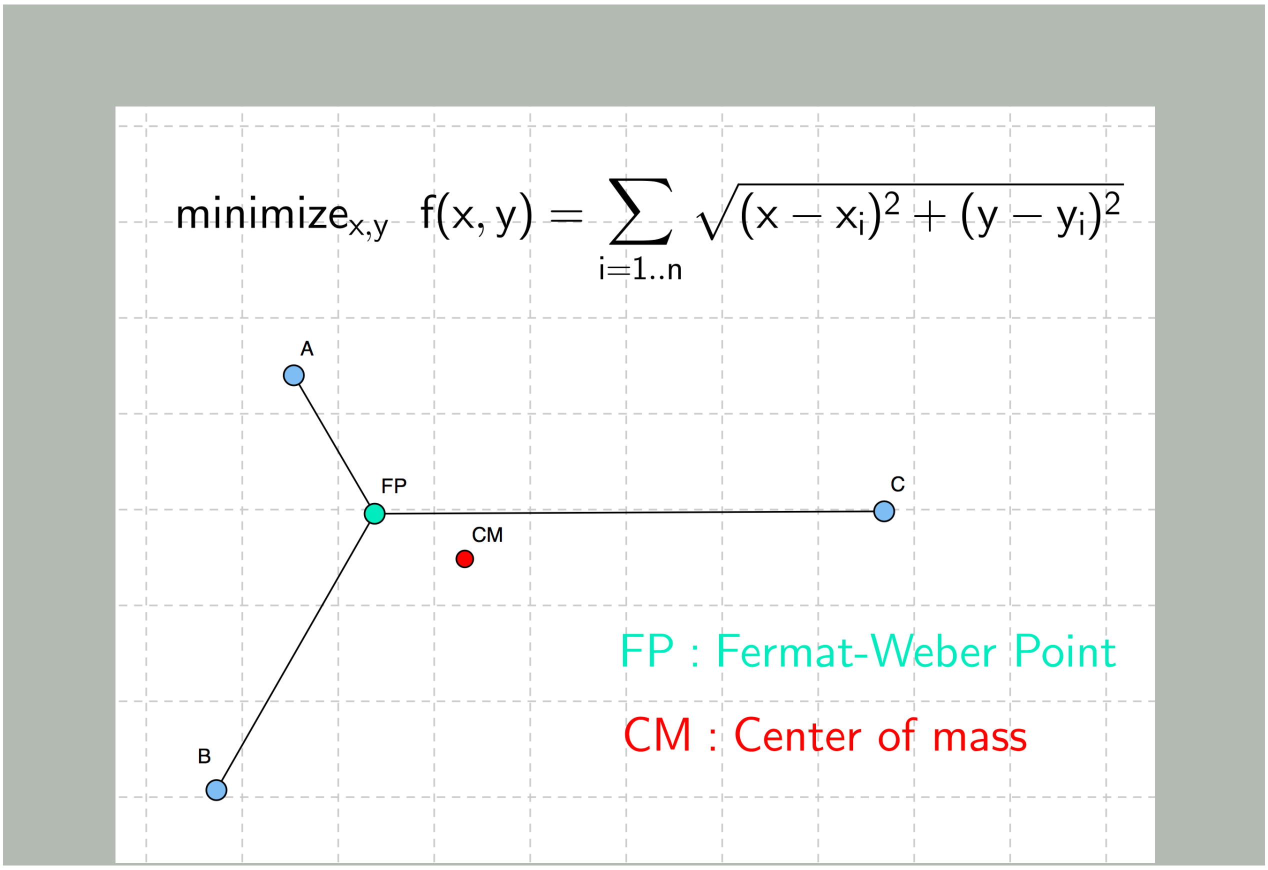
"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

Dorrie, H. (1965). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.

OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS

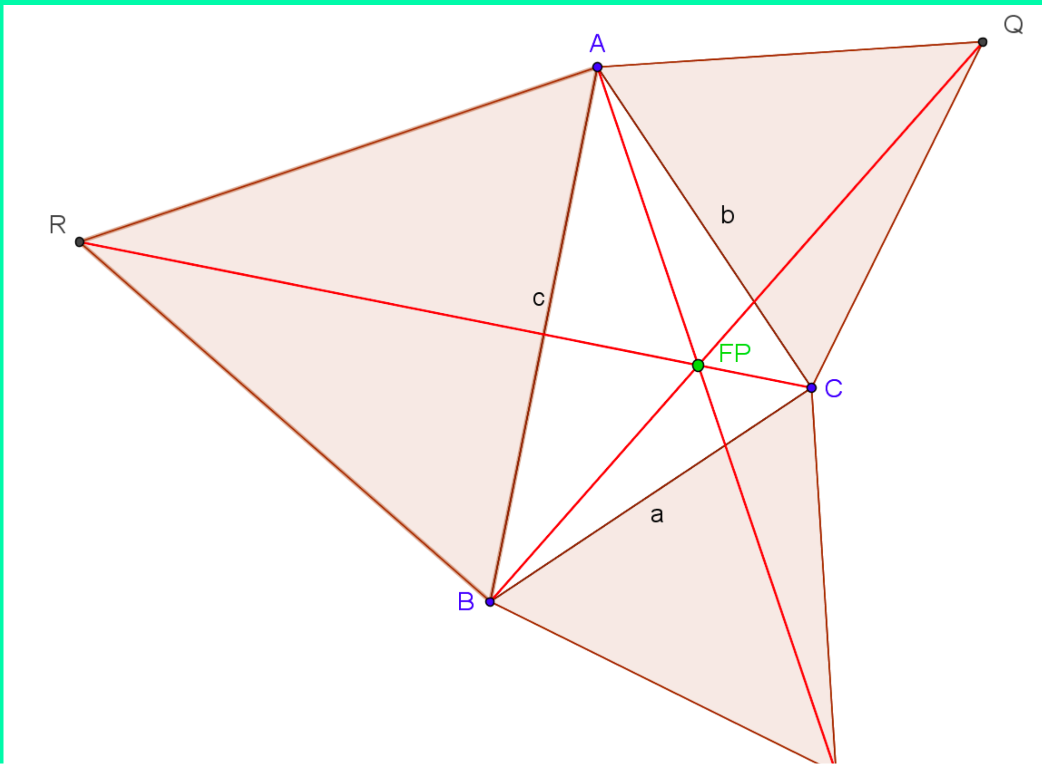


Link GeoGebraTube



EXAKTE LÖSUNG

FÜR N = 3



WER HAT ALS ERSTES EIN NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN FÜR **N>3** GEFUNDEN?

FACILITY LOCATION PROBLEMS
EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinksi** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

M. L. Balinksi. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.

`I was sixteen when I became intrigued with the N point problem`

Andrew Vázsonyi, 1932

Cosider N points and one more point, X. Measure the distances between X and the given points, then add the distances. Find point X so that this sum is the smallest possible.

Andrew Vázsonyi

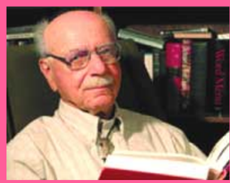
I found the point X by using an infinite, recursive algorithm, a most unusual solution for a problem in geometry. You start with a point X0, anywhere, and search for a better solution.

Andrew Vázsonyi, 1937

The paper "Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum", published in **Japan** in **1937** under the name **Endre Weiszfeld** became a classic in the mathematics of location analysis.

WEISZFELD

ALGORITHMUS



by Endre Weiszfeld, alias Andrew Vázsonyi (1916–2003), born in Budapest

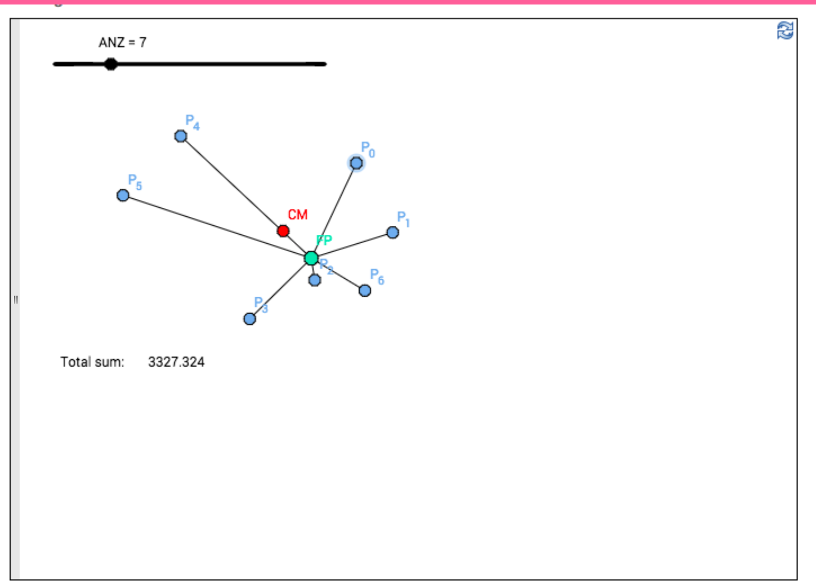
WEISZFELD ALGORITHMUS

Iterative Gewichtung von quadratischen Abweichungen

$$y_{k+1} = \frac{\sum_i^N \frac{x_i}{\|x_i - y_k\|}}{\sum_i^N \frac{1}{\|x_i - y_k\|}}$$

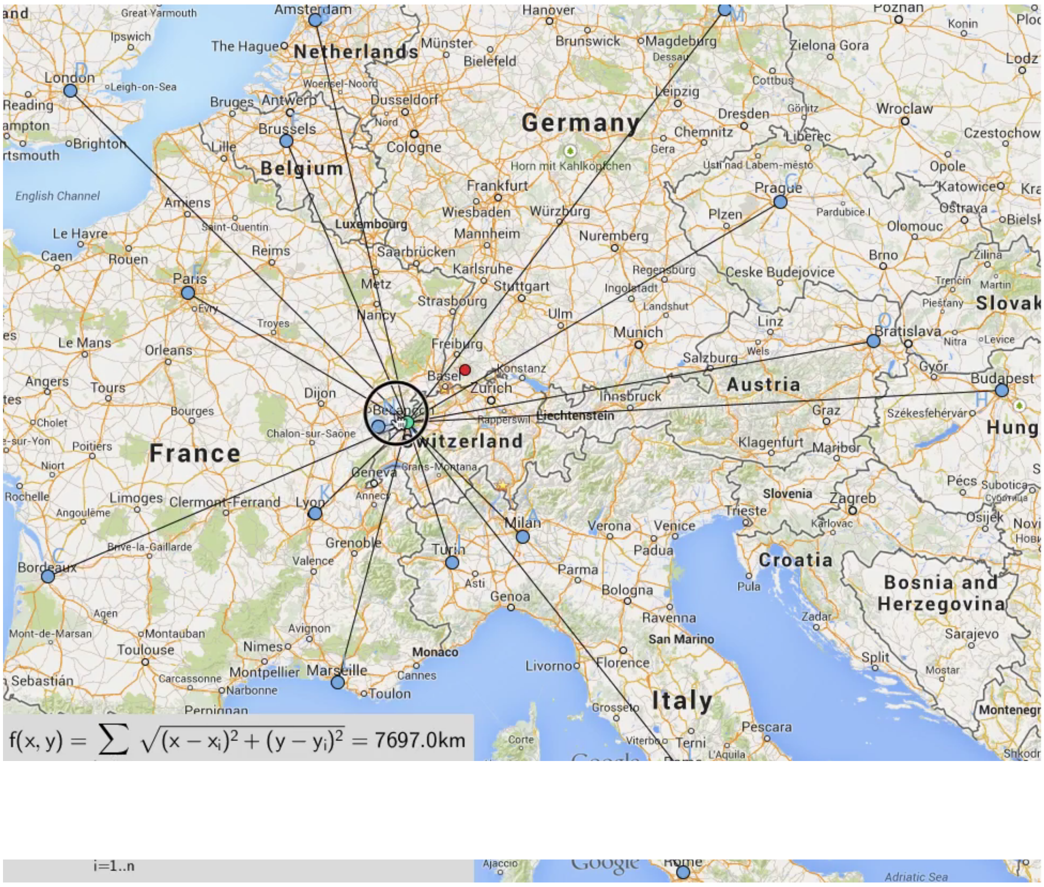
[H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443-451, ISSN 0898-1221]

Fermat-Punkt für n>3



Link GeoGebraTube

NUMERISCHE EXPERIMENTE



[Link GeoGebraTube]