

# FORTBILDUNG GEOGEBRA



5.3.2015 KANTI BADEN

TORSTEN LINNEMANN & MARTIN GUGGISBERG



Torsten Linnemann  
PH FHNW  
Deutschschweizerische Mathematikkommission  
Gymnasium Oberwil  
[tolinnemann@gmail.com](mailto:tolinnemann@gmail.com)



Martin Guggisberg  
SVIA Vorstand  
Ressort Projekte

Departement Mathematik  
und Informatik  
Universität Basel  
[martin.guggisberg@unibas.ch](mailto:martin.guggisberg@unibas.ch)

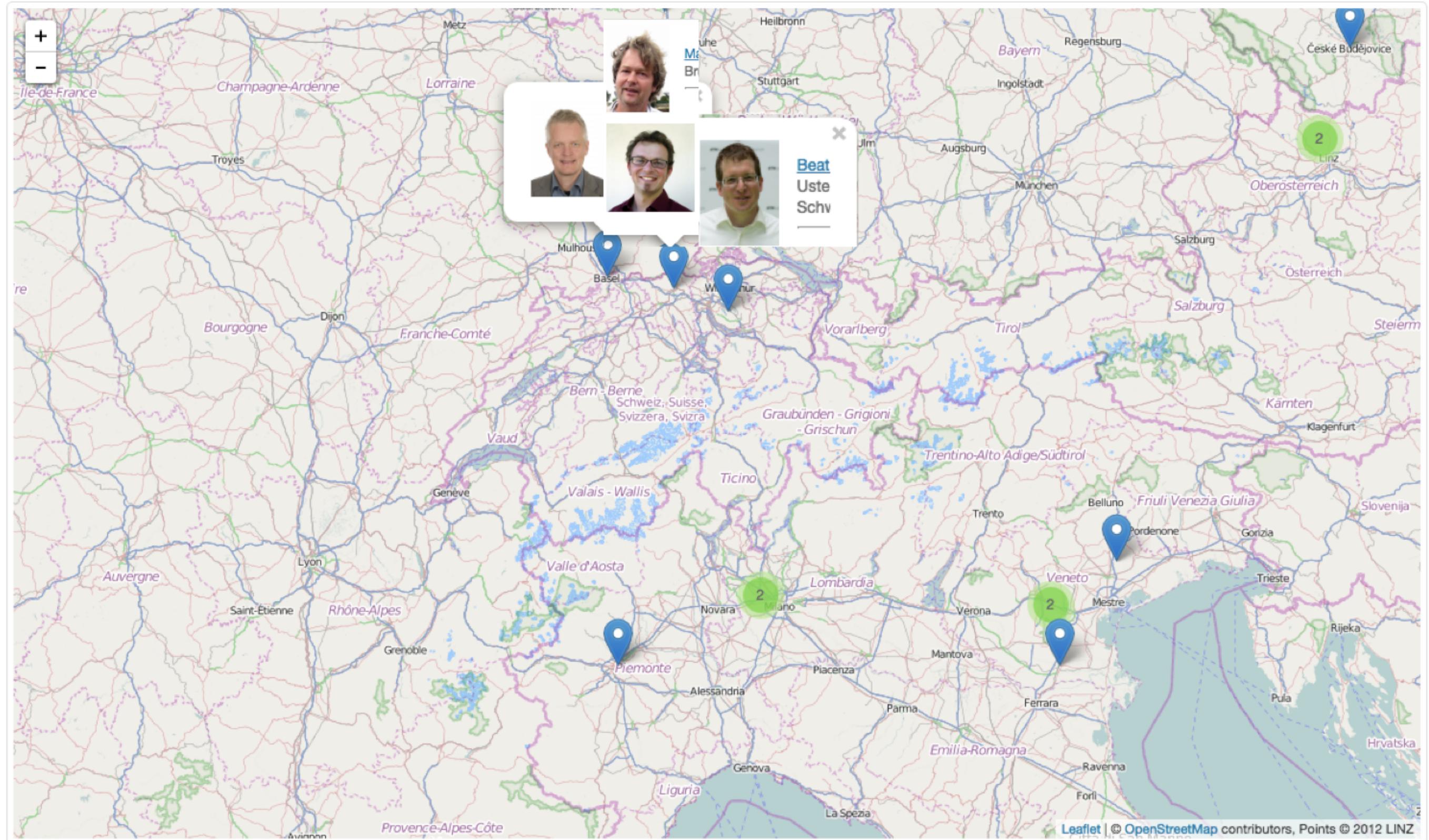
# UNSERE MOTIVATION

- Freude an:
  - Interaktiver Mathematik
  - Explorativen Zugängen
  - Visualisierungen

# GEOGEBRA INSTITUTE

## PH FHNW SCHWEIZ

<http://www.geogebra.org/institutes>



## BEFÜRCHTUNGEN EINES KOLLEGEN

Trainieren sie (SuS) das Darstellungsvermögen nicht besser, in dem sie versuchen, im eigenen Kopf die verschiedenen Objekte sich vorzustellen? LP aus BL

# WIE SOLL GEOGEBRA IN DER SCHULE EINGESETZT WERDEN?

- zur Ergebnissicherung?
- zur Erkenntnisgewinnung?
- zur Überprüfung einer vorher formulierten Hypothesen?
- zur Veranschaulichung?
- zum Auffinden von Gesetzmässigkeiten?

unser Ziel:

MIT HILFE  
KONKRETER BEISPIELE  
ANTWORTEN FINDEN

# AGENDA

1. Geometrie
  - Punkte, Dreiecke, Ortslinien, Argumentieren
  - Anwenden kleiner Apps.
2. Wo und wie ist Geogebra einsetzbar?
  - BrowserApp, Installation, Mobile Geräte
3. Funktionen
4. Vektorgeometrie
5. Dessert
  - Stochastik (Maturaufgabe)
  - Tabellenkalkulation
  - Piratenaufgabe
  - Differentialgleichungen
  - Abbildungen (Matrizen)
  - Angry Birds Mathematik
  - Zentralprojektion & Parallaxe
  - Fermat-Punkt

# WEITERE WÜNSCHE

aus Rückmeldungen zur letzten Veranstaltung

- Ortslinien von ausgezeichneten Punkten einer Funktionsschar
- Eigenschaften der Kegelschnitte
- Parameteraufgaben und Kurvendiskussion

# GEOMETRIE

Konstruktion von ebenen Figuren, Dreiecke, spezielle Punkte

# ORTSLINIEN, SPUR: ARGUMENTIEREN

- Winkelhalbierende: <http://tube.geogebra.org/student/m320791>
- Symmetrie: <https://tube.geogebra.org/student/m188567>
- Gleicher Abstand: <https://tube.geogebra.org/student/m188578>
- Gleicher Abstand II <https://tube.geogebra.org/student/m188545>

# KINEMATIK

Bewegung eines Massenpunkts

# SIMULATION VON EINFACHEN BEWEGUNGEN

- Freier Fall ohne Reibung [Link](#)
- Angry Bird Physik [Link](#)
- Schiefer Wurf [Link](#)
- Harmonische Schwingung [Link](#)

# GEOGEBRA IM EINSATZ

# STARTSEITE

GeoGebra

Materialien

Downloads

Community

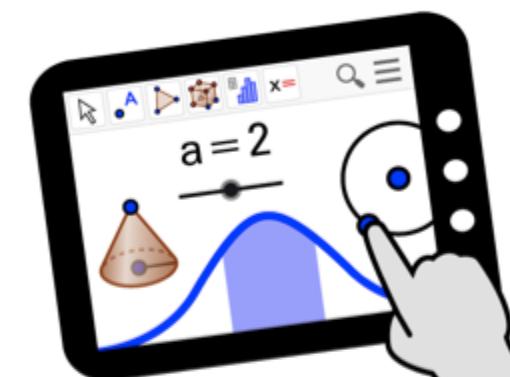
Hilfe

Anmelden

Dynamische Mathematik für Lernen und Unterricht



Materialien durchsuchen



Starte GeoGebra



Jetzt herunterladen

# GEOGEBRA

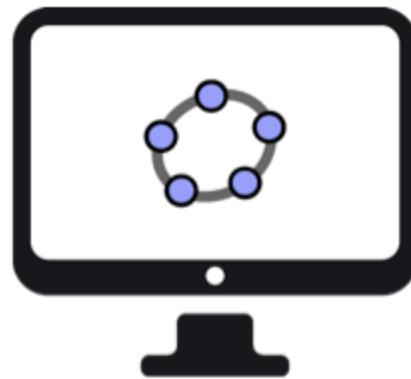
**IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT  
DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,**

<http://geogebra.org/>

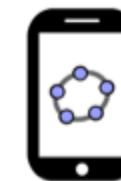
# 1. MÖGLICHKEIT GEOGEBRA INSTALLIEREN



GeoGebra für Tablets



GeoGebra für Desktop Computer



GeoGebra für Smartphones



Windows



Mac OS X



Linux

Kommt bald!

[Mehr Download-Möglichkeiten für GeoGebra](#)

<http://www.geogebra.org/download>

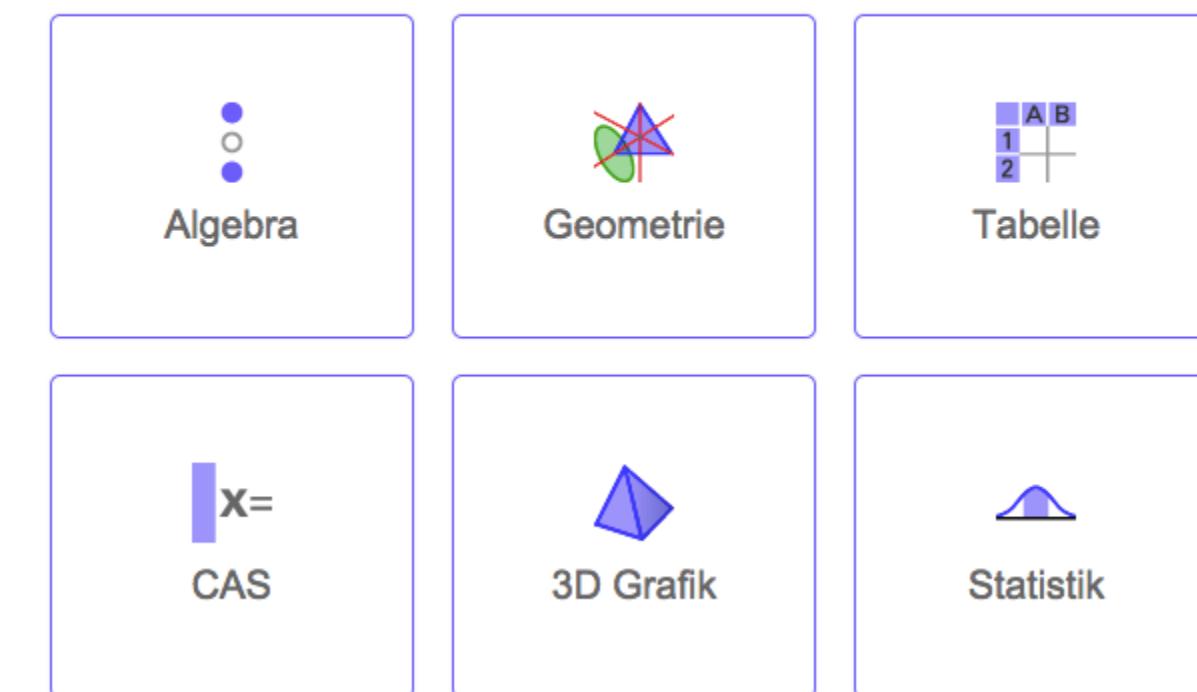
# WICHTIG VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

## 2. MÖGLICHKEIT

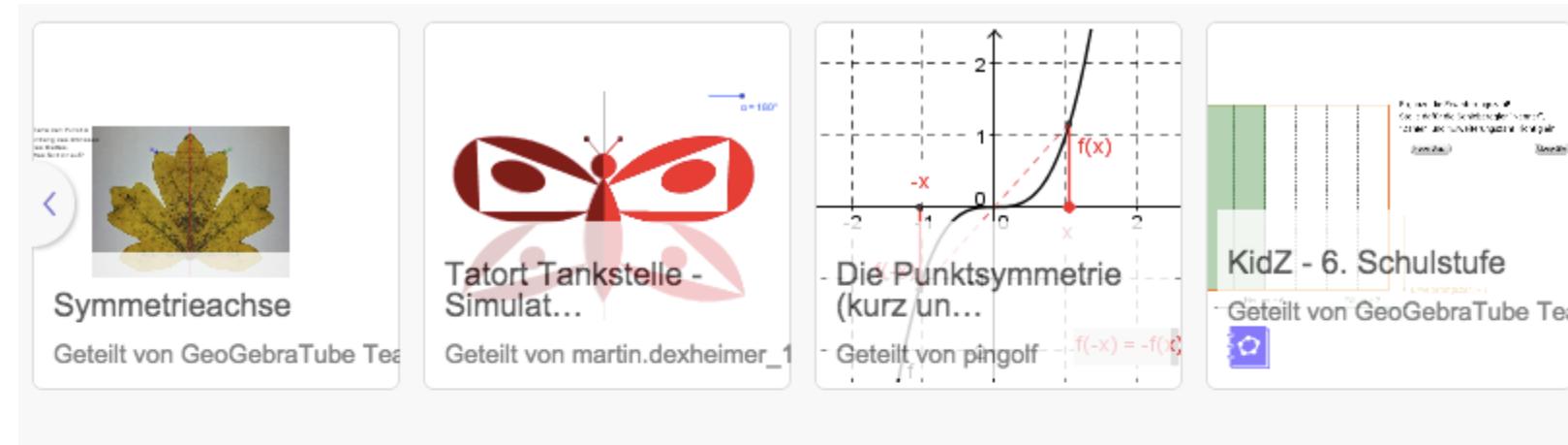
### DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

Etwas selbst erstellen

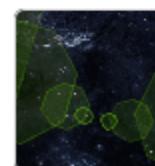


<http://web.geogebra.org/app>

Schülerinnen und Schüler können bestehende Materialien direkt über  
<http://tube.geogebra.org/> nutzen



### Neueste Materialien



#### Dr Who activity

23. November 2014 - 11:29

Geteilt von [Mark Willis](#)

0 0



#### Beginning Algebra

23. November 2014 - 10:26

2 Materialien — Geteilt von [james monaghan](#)

0 0

### Beliebte Arbeitsblätter

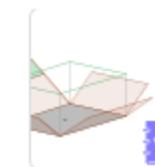


#### animated clock

30. November 2012 - 14:29

Geteilt von [nguyenphuoc0802](#)

15 1

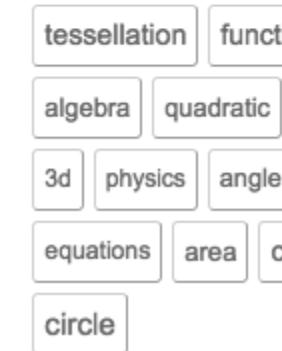


#### KidZ - 5. Schulstufe

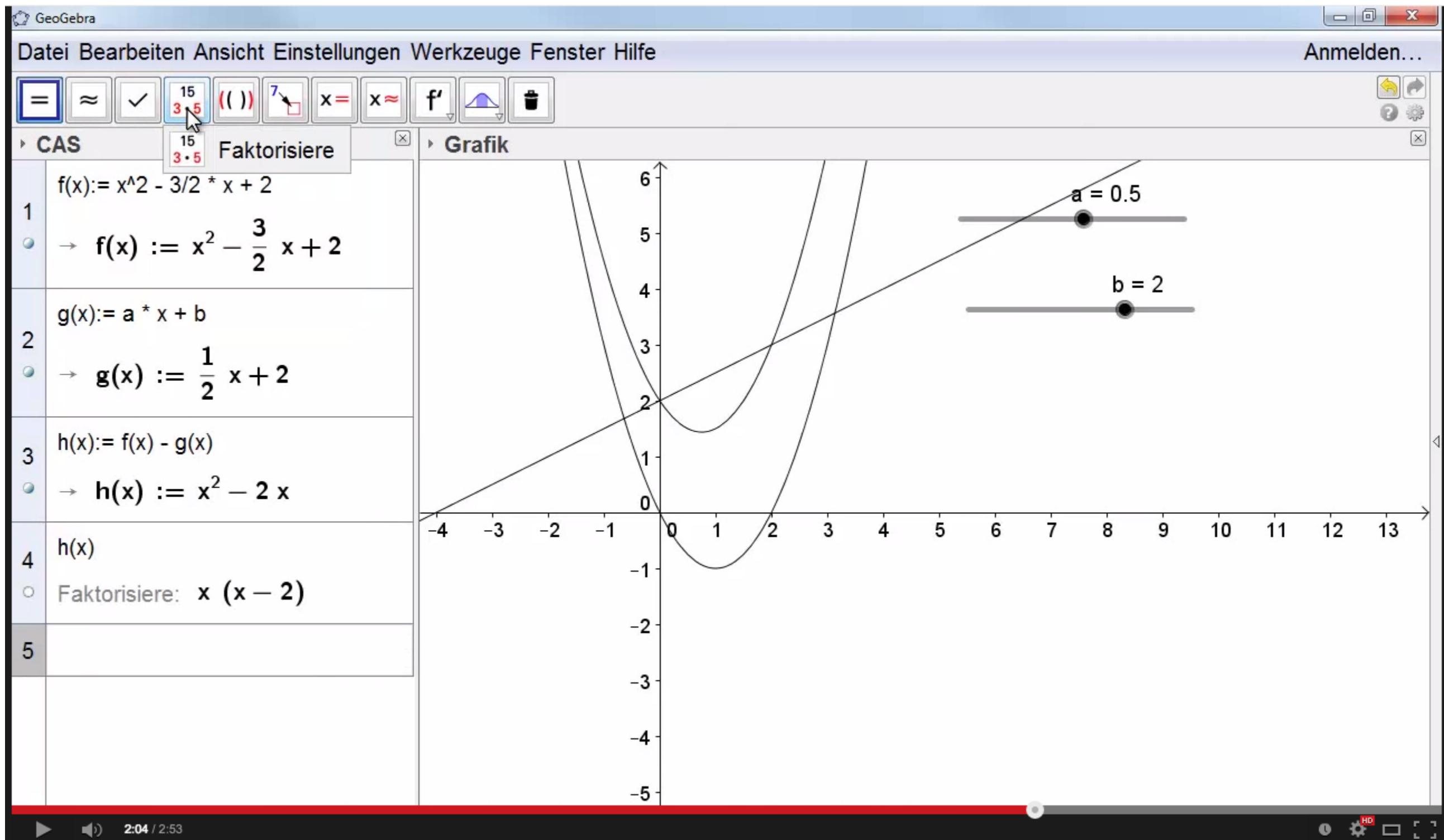
22. Januar 2014 - 15:27

10 Materialien — Geteilt von [GeoGebraTube Team](#)

### Beliebte Tags



# LERNVIDEOS



# NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

Twitter: [@geogebra](#)



A vibrant illustration depicting a diverse community of people of various ages and ethnicities. They are shown interacting with geometric concepts like circles, lines, and polygons, often using them as tools or objects of interest. The scene is set against a background of a world map.

**Tweets** 2.422   **FOLGE ICH** 611   **FOLLOWER** 9.346   **FAVORITEN** 78   [Folgen](#)

**GeoGebra** @geogebra  
Dynamic Mathematics for Everyone  
[geogebra.org](http://geogebra.org)  
Beigetreten September 2009

[Tweet an GeoGebra](#)

**Tweets**   [Tweets & Antworten](#)   [Fotos & Videos](#)

**GeoGebra** @geogebra · 22. Nov.  
Weekend meetings :) [fb.me/3VAfplguZ](http://fb.me/3VAfplguZ)

**GeoGebra** @geogebra · 21. Nov.  
Really enjoying the updates coming out of #ggbna2014 Looking forward  
to more pics and ideas from our amazing community.

# WEITERE GEOGEBRA QUELLEN

# Daniel Mentrard

**ANIMATIONS EN SCIENCES PHYSIQUES** 3 4 4 5 2 2 4

**ELECTROMAGNETISME**

*Daniel MENTRARD*

**FORCE ELECTROMAGNETIQUE**  
La loi d'AMPÈRE LABATUT nous aide à déterminer la force électromagnétique.

**INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE**  
Le principe de l'induction électrique est basé sur la loi de Faraday qui décrit le phénomène de l'induction électrique.

**ATTRACTION ET RÉPULSION ELECTROMAGNETIQUE**  
Le principe de l'attraction et de la répulsion électromagnétique est basé sur la loi de FARADAY qui décrit le phénomène de l'induction électrique.

**LES FACES NORD/SUD D'UNE BOBINE**  
Les faces Nord et Sud d'une bobine sont démontrées.

**FLUX MAGNÉTIQUE À TRAVERS UNE SURFACE (étape du flux maximal)**  
Le flux magnétique à travers une surface est démontré.

**EXPRESSION À DROITE**  
La circulation d'un courant électrique dans un conducteur provoque l'apparition d'un champ magnétique aux alentours de ce conducteur rectiligne.

**LIGNES DE CHAMPS**  
Les lignes de champs sont démontrées.

**CHAMP MAGNÉTIQUE DANS UN SOLENOÏDE**  
Le champ magnétique dans un solénoïde est démontré.

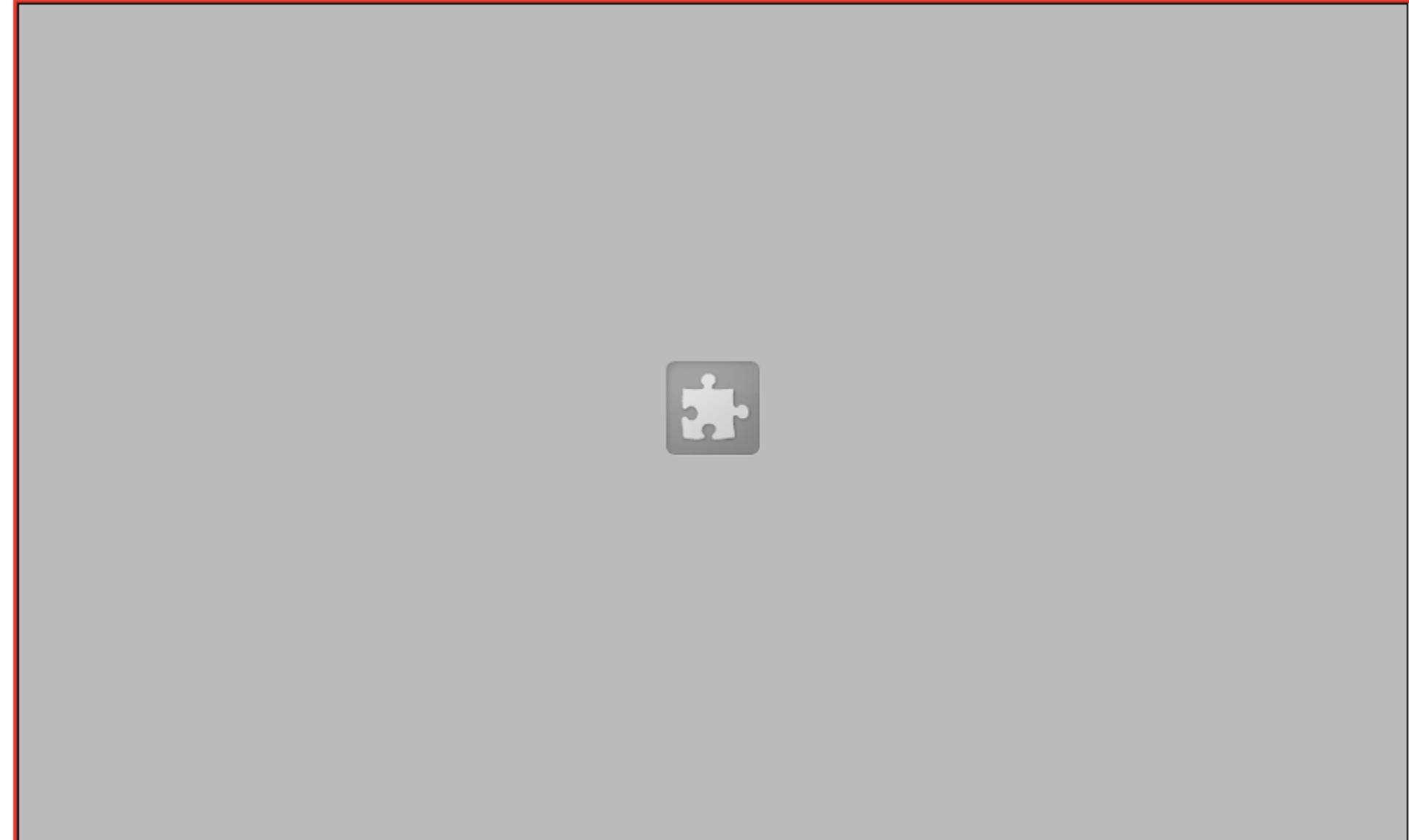
**LIGNES DE CHAMPS DANS UN AIMANT EN U**  
Les lignes de champs dans un aimant en U sont démontrées.

[dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Sciences/Excemagne.htm](http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Sciences/Excemagne.htm)

# PROBLEME ?

**COMPOSITION DE FONCTIONS**

Choisir  $f(x) = 3-x^2/2$  Valider      Choisir  $g(x) = \sin(x)$  Valider



```
<head>...</head>
<body>
  <table style="text-align: left; margin-left: auto; margin-right: auto;" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0" width="966">
    <tbody>
      <tr>...
      <tr>...
      <tr>
        <td style="border: medium ridge rgb(255,0,0) width="960" colspan="2">
          <applet code="geogebra.GeoGebraApplet" name="ggbApplet" codebase="./" archive="geogebra.jar" height="630" width="952" title="undefined">
            <param name="filename" value="COMPOFONCT.ggb">
            <param name="framePossible" value="true">
            <param name="showResetIcon" value="true">
            <param name="enableRightClick" value="false">
            <param name="showMenuBar" value="false">
            <param name="showToolBar" value="false">
            <param name="showToolBarHelp" value="true">
            <param name="showAlgebraInput" value="false">
            "Sorry, the GeoGebra Applet could not be started. Please make sure that Java 1.4.2 (or later) is installed and activated. ("<a href="http://java.sun.com/getjava">click here to install Java now</a>")
          </applet>
        </td>
      </tr>
    ...

```

html body table tbody tr td applet param

Styles Computed »

element.style { + ⚙ ⓘ }

Inherited from table

Style Attribute {

```
text-align: left;
margin-left: auto;
margin-right: auto;
```

}

Inherited from body

body { COMPOfonct.html:7

```
font-family:
  Helvetica, sans-serif;
margin-left: 40px;
```

}

margin -

border -

padding -

auto × auto -

-

-

Find in Styles

# WEITERE GEOGEBRA QUELLEN

GeoGebra Material zu MatheWelt 187

H.-J. Eschenbroich

# MatheWelt

Bestell-Nr. 1849018

Das Schülerarbeitsheft

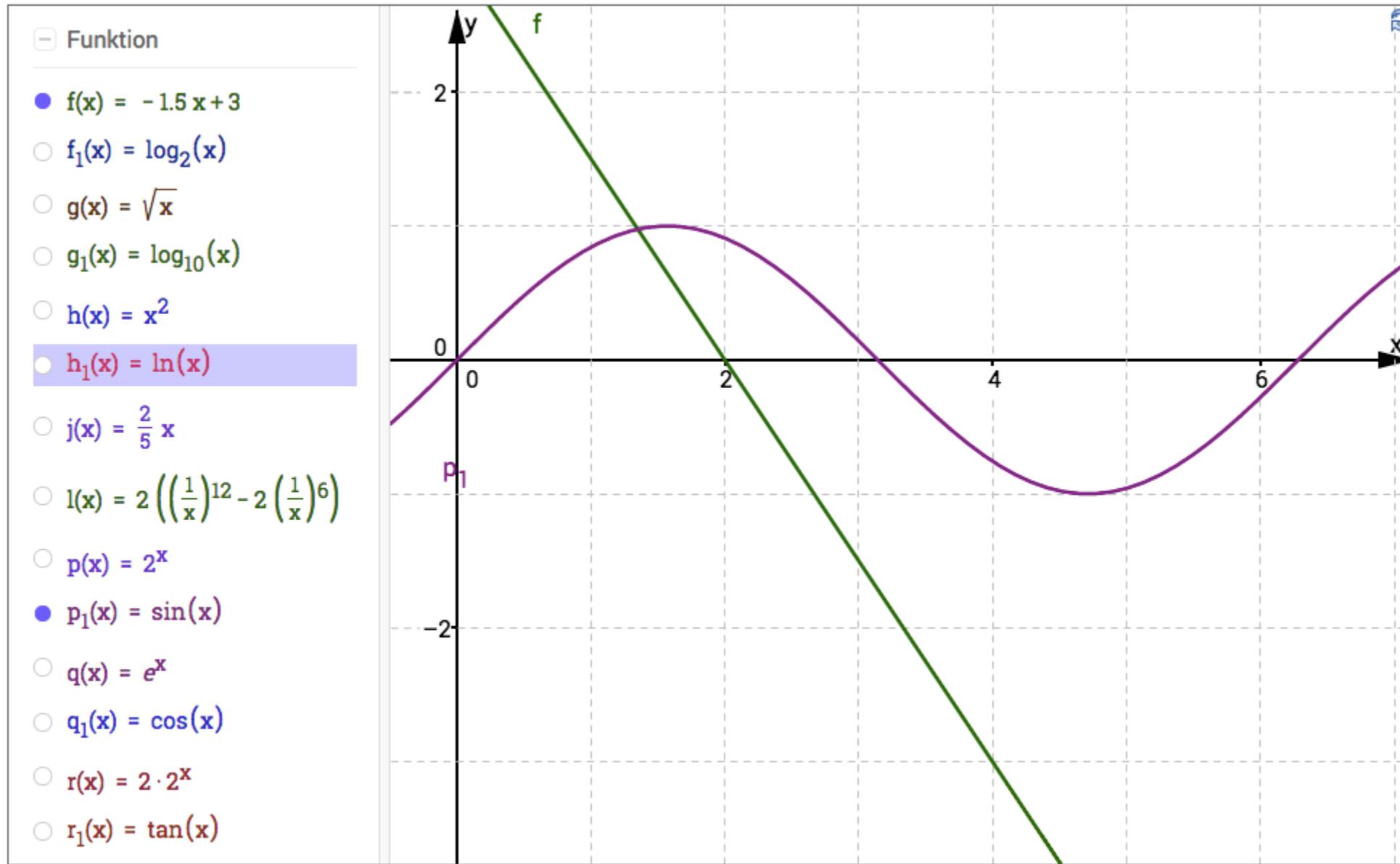
7.-11.  
Klasse

Funktionen  
unter der Lupe



# FUNKTIONEN

- Funktionen graphisch darstellen
- Funktionen unter der Lupe
- Funktionen verknüpfen & diskutieren
- Funktionen mit Parameter
  - Maturaufgabe
  - Spur von Extrema

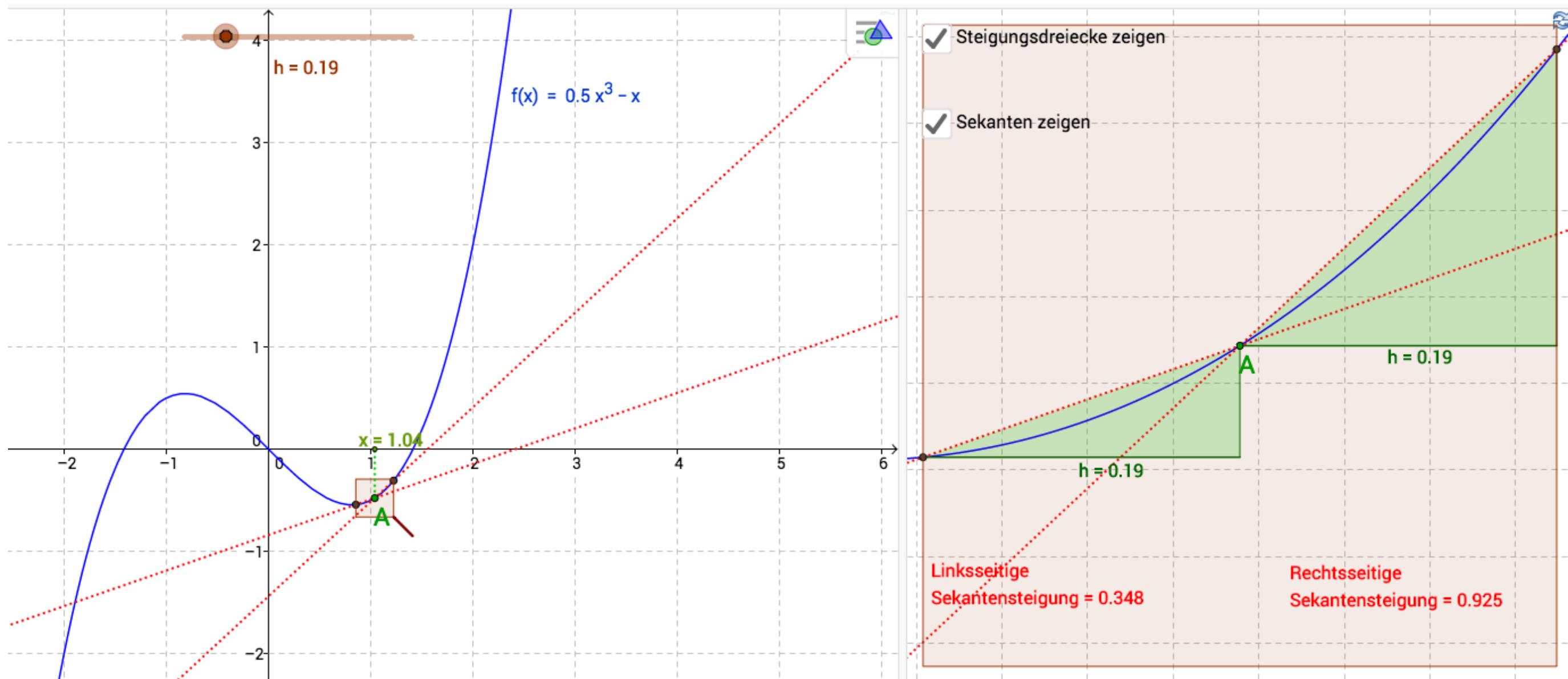


[Link auf GeoGebraTube](#)

# FUNKTIONEN UNTER DER LUPE

H.-J. Eschenbroich

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/410583>



# PUNKT AUF FUNKTION

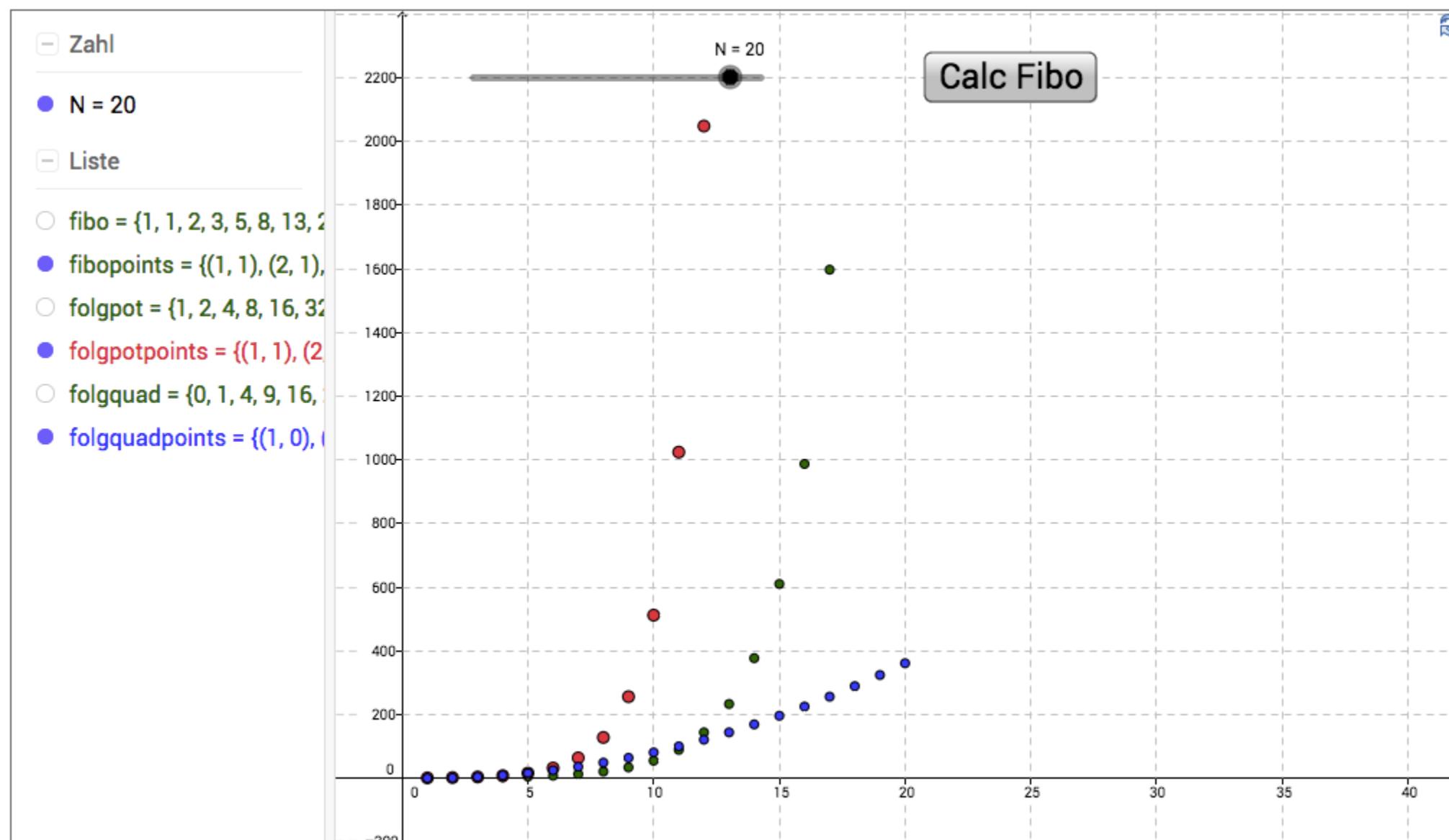
1. Beweglicher Punkt auf der x-Achse
2. entsprechender Punkt auf einer Funktion

```
f(x) =x^2*sin(x^2)
x_0 =Punkt[y=0]
P =(x(x_0),f(x(x_0)))
```

# EXKURS FOLGEN

- Zahlenfolgen
- Folgen von Funktionen
- Folgen geometrischer Objekte
- Geschachtelte Folge (Punkte auf Fläche im  $\mathbb{R}^3$ )

# ZAHLENFOLGEN



[Link auf GeoGebraTube](#)

# FIBONACCI MIT PROGRAMM BERECHNEN (JAVASCRIPT)

```
var fibo = function(n){  
  
    var N,i,arr;  
    // Eingabe überprüfen  
    if (typeof(n) !== "number"){  
        N = 10;  
    } else{  
        N =n-2;  
    }  
  
    // Fibo Start  
    arr=[1,1];  
    for (i=0;i<N;i++){  
        arr.push(arr[i]+arr[i+1])  
    }  
    //Rückgabe als Liste  
    return "{" +arr+ "}";  
};
```

# FOLGE VON FUNKTIONEN

zum Beispiel

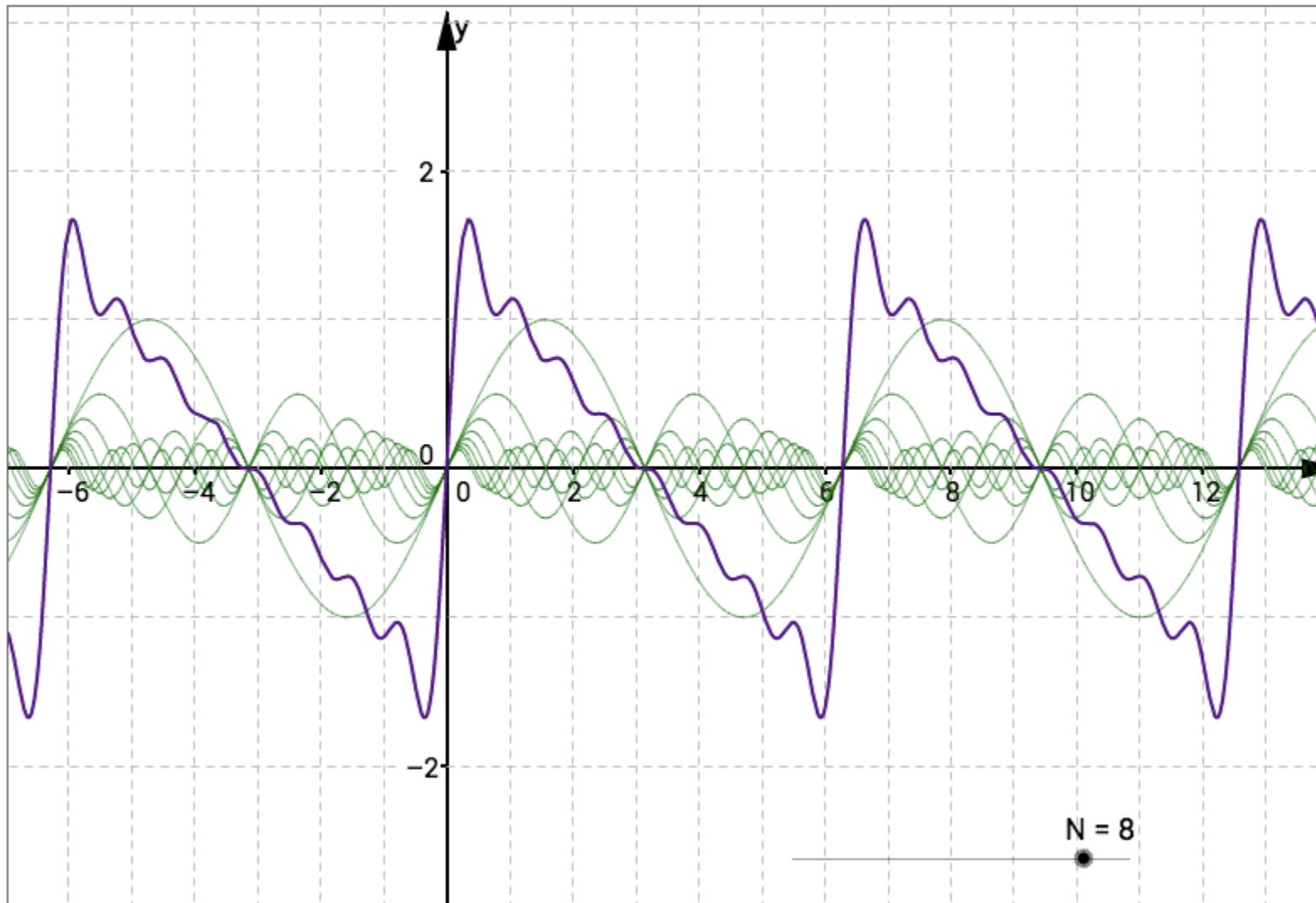
$$f_i(x) = \frac{1}{i} \sin(i \cdot x)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x)$$

```
N=10  
folgefunkt = Folge[1/i*sin(x*i), i, 1, N]  
reihe = Summe[folgefunkt]
```

# FOLGE VON FUNKTIONEN

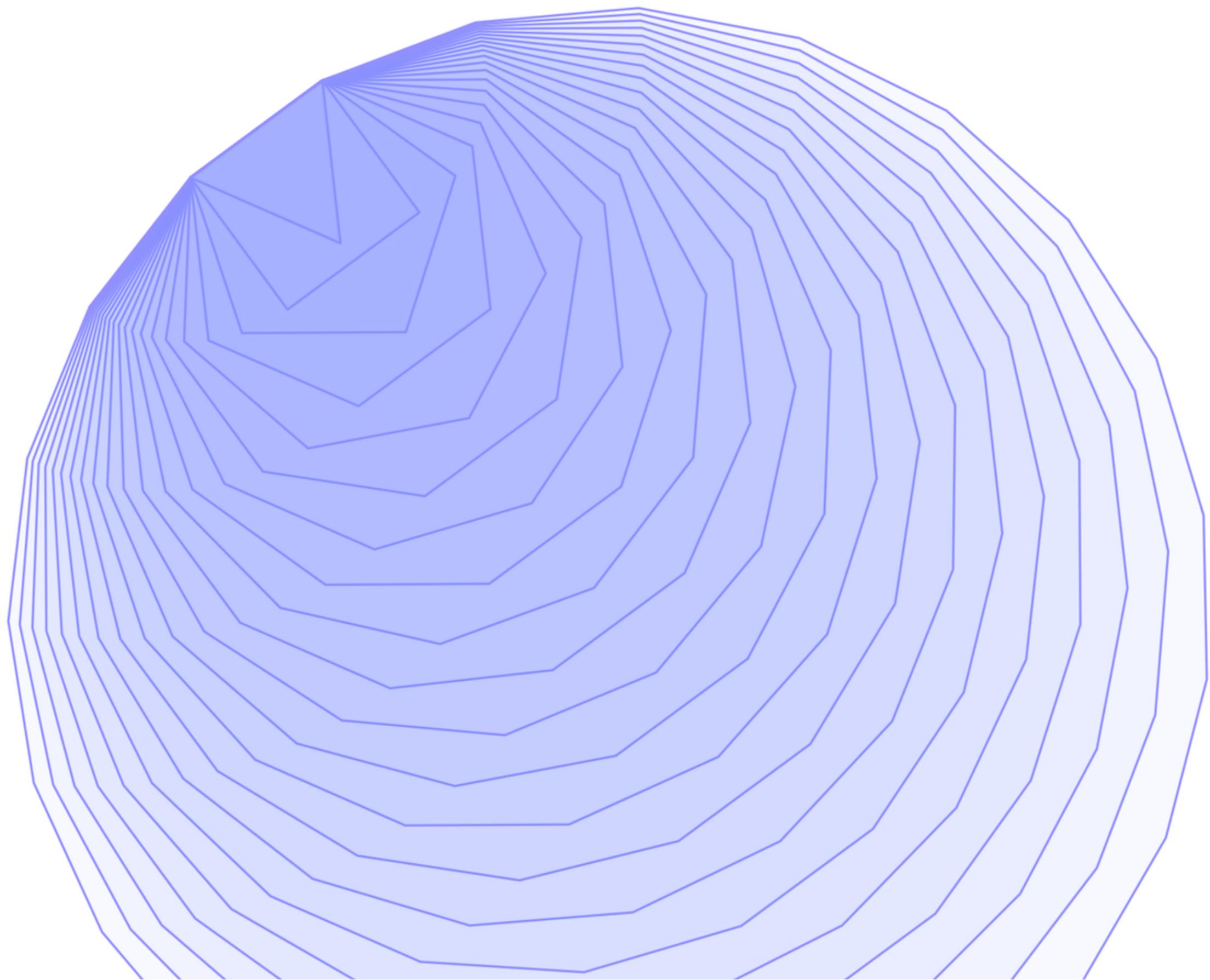
$$f = \sum_{i=1}^N f_i(x)$$



[Link auf GeoGebraTube](#)

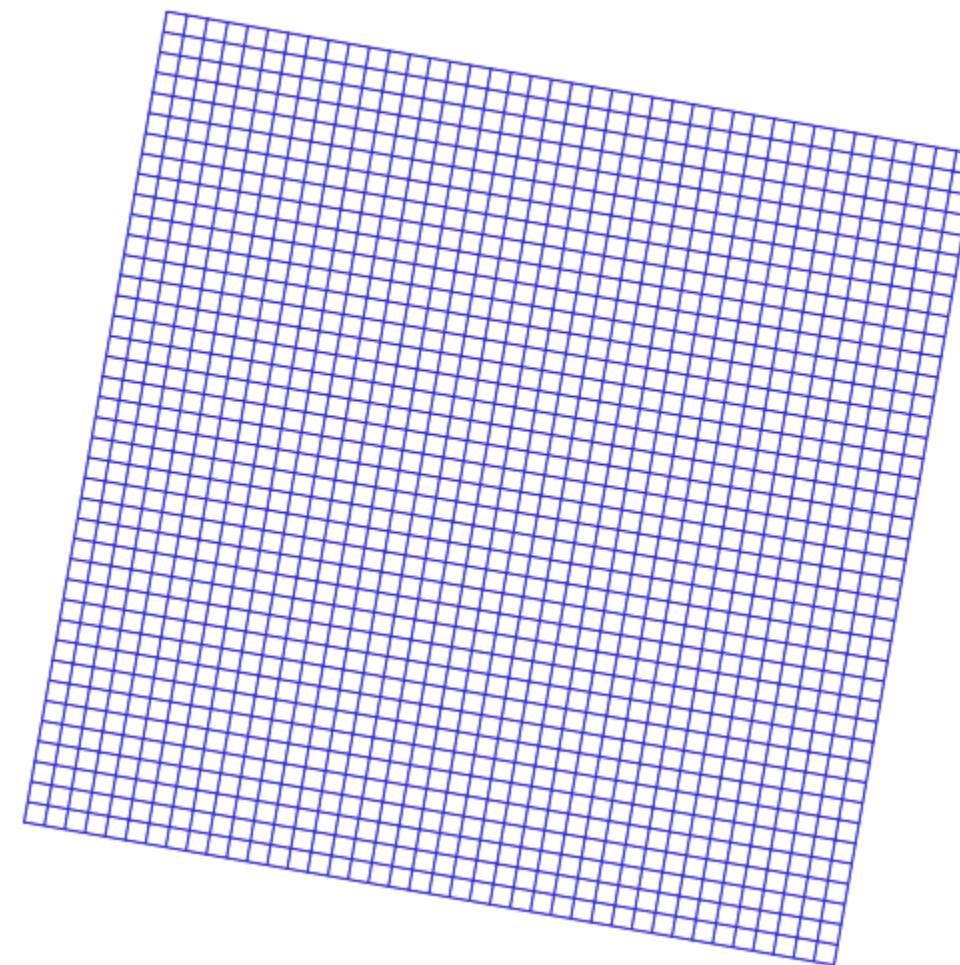
# FOLGEN GEOMETRISCHER OBJEKTE

```
A=(0,0)  
B=(1,0)  
Folge[Viieleck[A, B, i], i, 3, 23]
```



# GITTER

$dx = 1$   
  
 $dy = 1$   
  
 $\alpha = 260^\circ$   

[Link auf GeoGebraTube](#)

# GEOGEBRA BEFEHLE FÜR EIN GITTER

```
dx = 1
dy = 1
x_{Max}=20
x_{Min}=-20
y_{Max}=20
y_{Min}=-20
Folge[Strecke[(px, y_{Min}), (px, y_{Max})], px, x_{Min}, x_{Max}, dx]
Folge[Strecke[(x_{Min}, py), (x_{Max}, py)], py, y_{Min}, y_{Max}, dy]
```

# VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

Eingabe:

```
g(x) = sqrt(x)
f(x) = x^2 (x - 1)

h(x) = f(g(x))

Nullstelle[h, 0]
Nullstelle[h, 5]
```

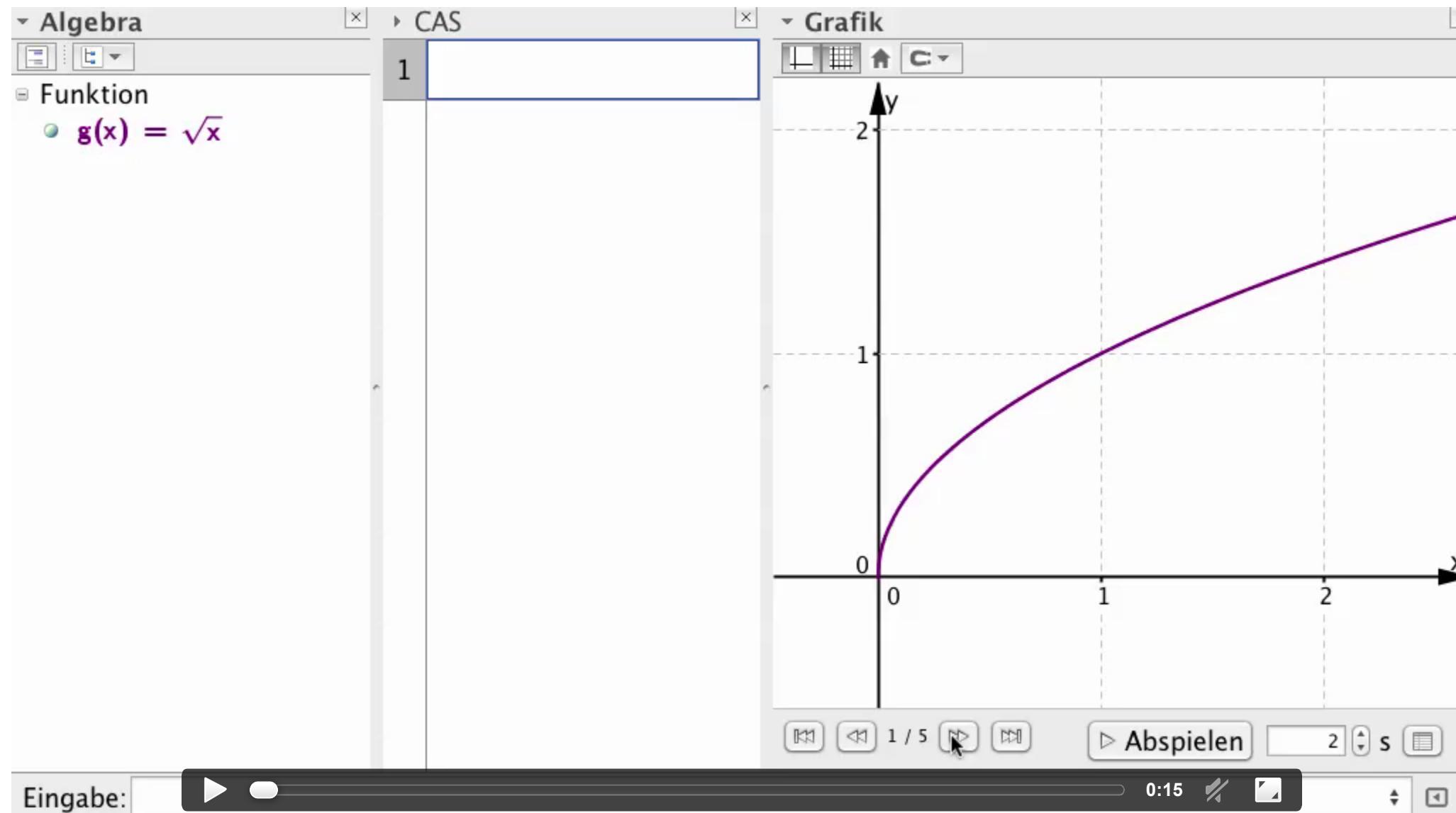
Im CAS-Fenster

```
Löse[h(x)=0]

Löse[h'(x)=0]
```

# VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

Link GeoGebraTube



# FUNKTIONEN MIT PARAMETER (MATURAUFGABE OBERWIL 2014)

Wir führen nun den Parameter  $a \in \mathbb{R}$  ein und betrachten die Funktionenschar  $f_a$ , die durch die Gleichung  $f_a(x) = -ax^3 + (a+1)x^2$  gegeben ist.

- c) Zeigen Sie, dass der Graph von  $f_a$  unabhängig von  $a$  durch den Punkt  $P(1 / 1)$  geht.
- d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters  $a$  so, dass die Funktion  $f_a$  an der Stelle  $x = 4$  ein Maximum hat.

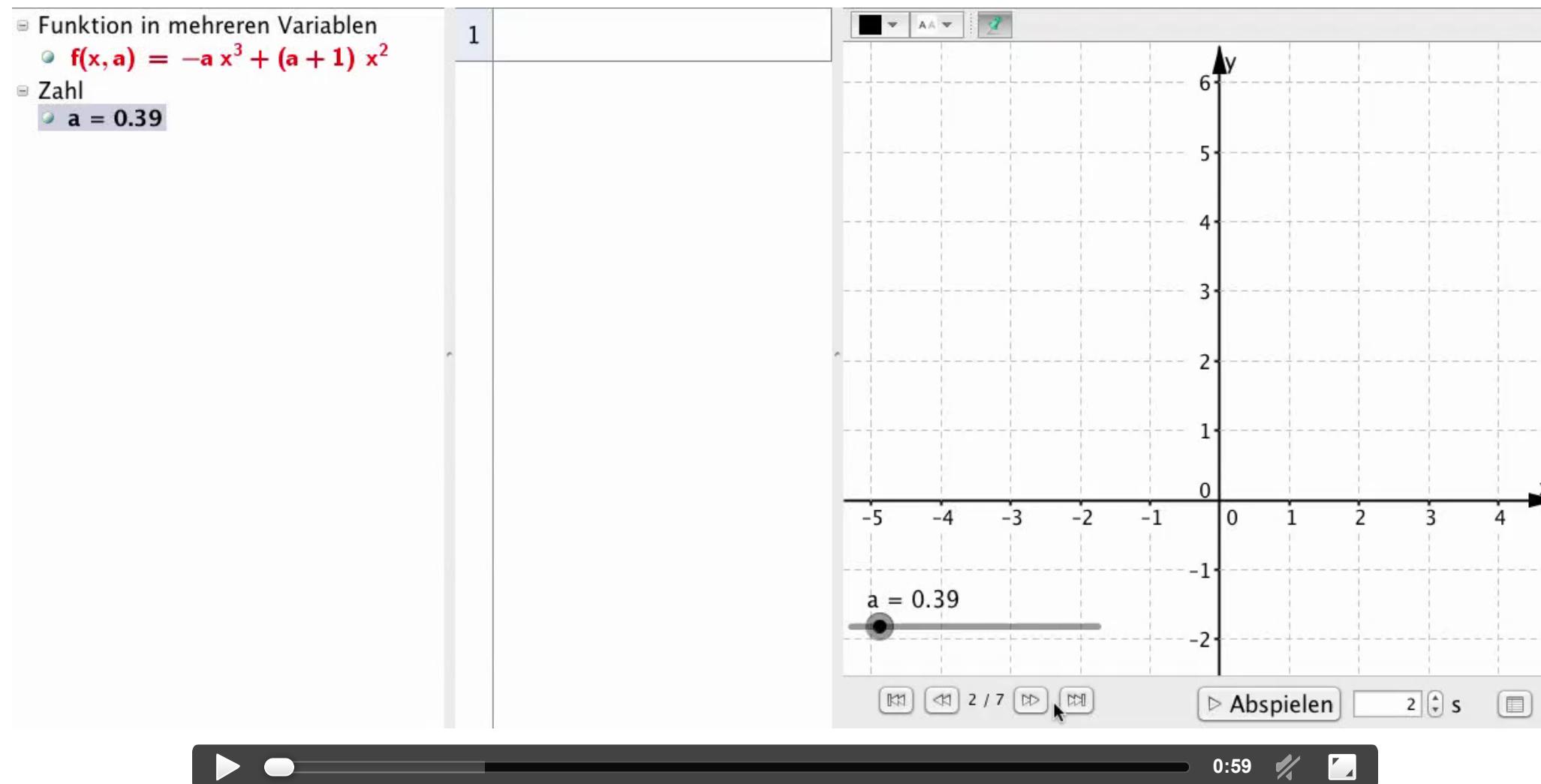
## Eingabe:

```
f(x, a) = -a x^3 + (a + 1) x^2  
g(x) = f(x, a)  
P = (1, 1)  
Mg = Element[Listel, 2]  
Q = (x(Mg), g(x(Mg)))
```

## Im CAS-Fenster

```
f(1,a)  
Listel:=Löse[g'(x) = 0]  
Löse[Ableitung[f(x, b),x]=0,b]
```

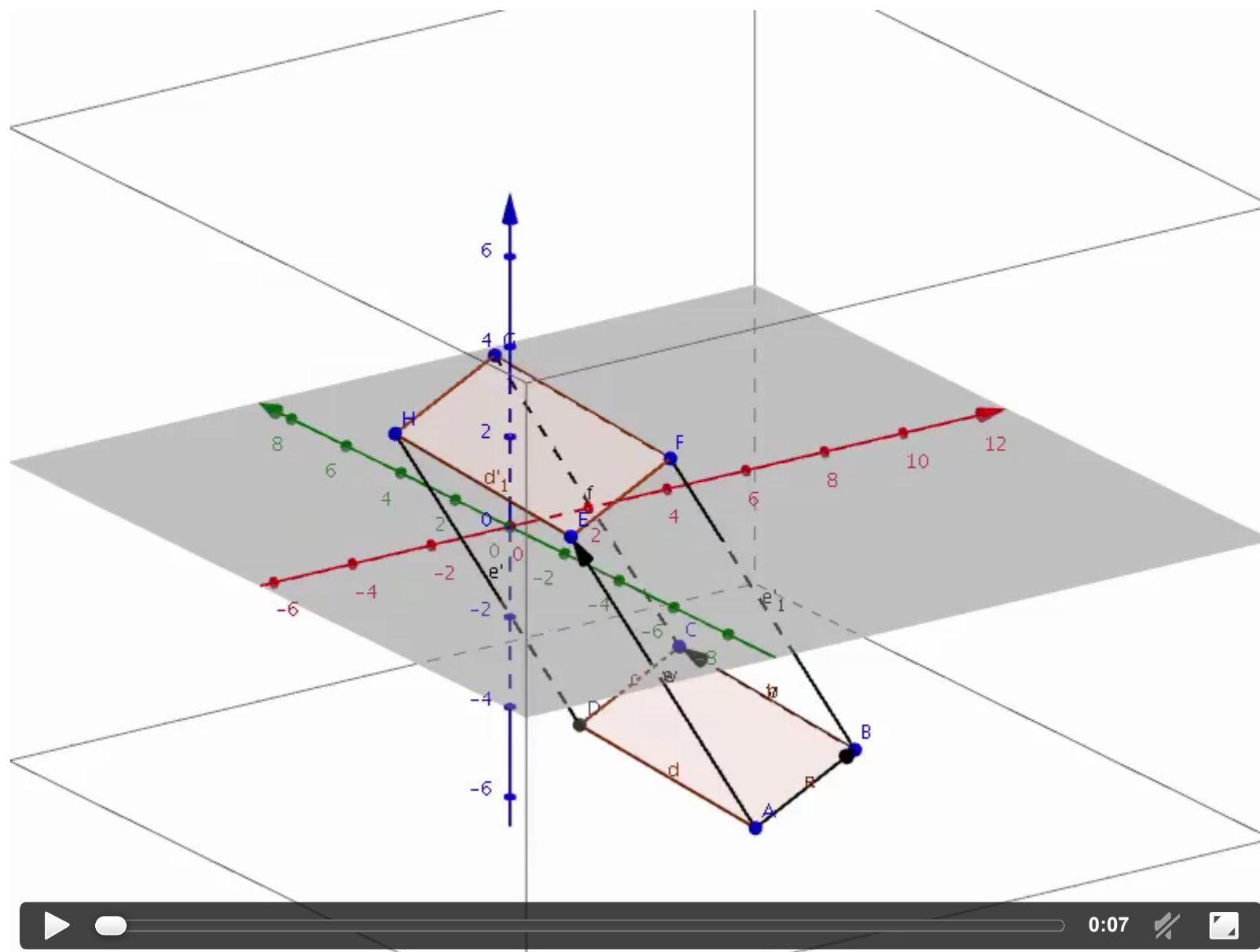
# Link GeoGebraTube



# VEKTOR-GEOMETRIE

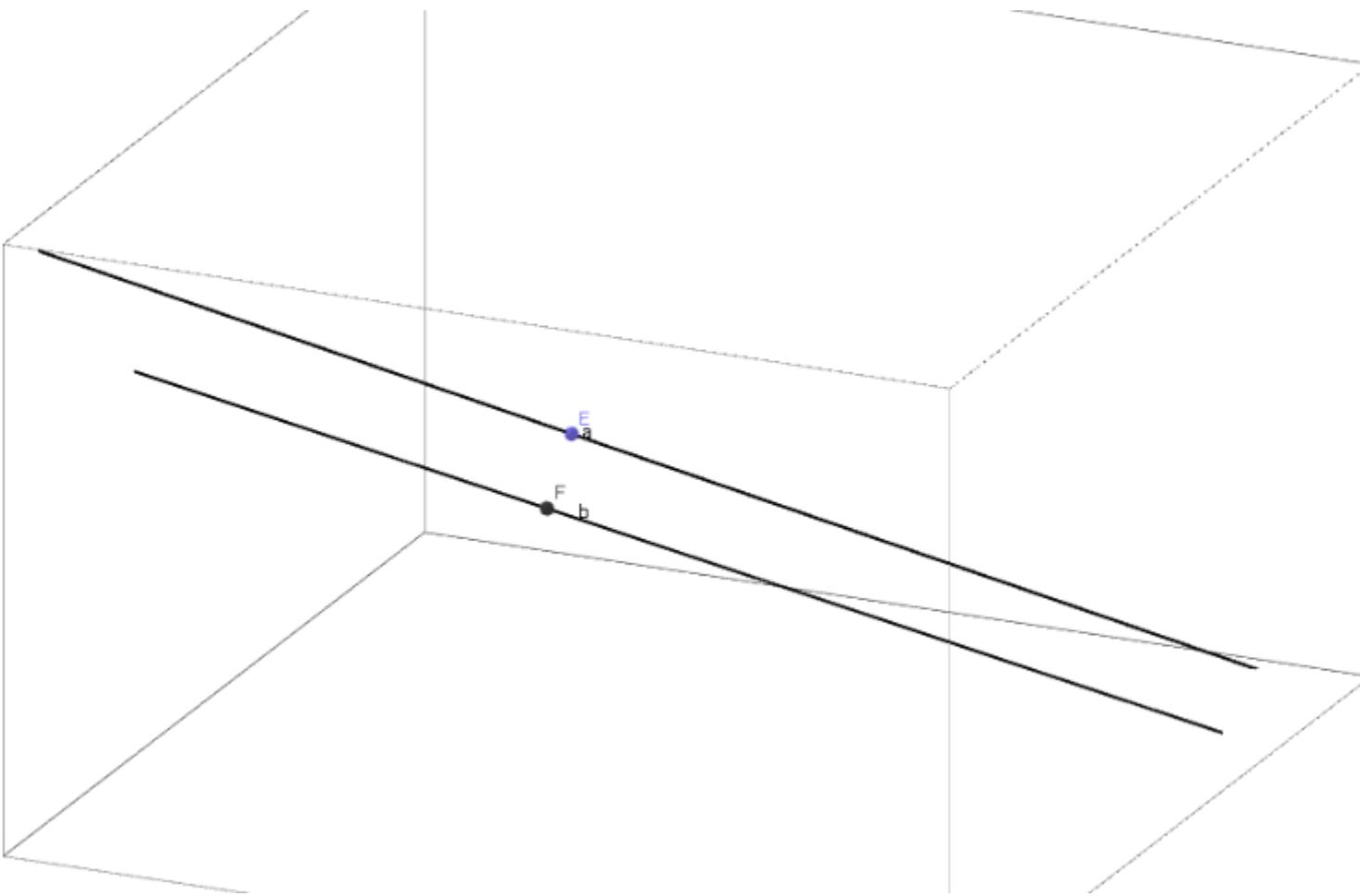
- Ein Spat
- Abstand zweier Geraden
- Würfelschnitte

# EIN SPAT



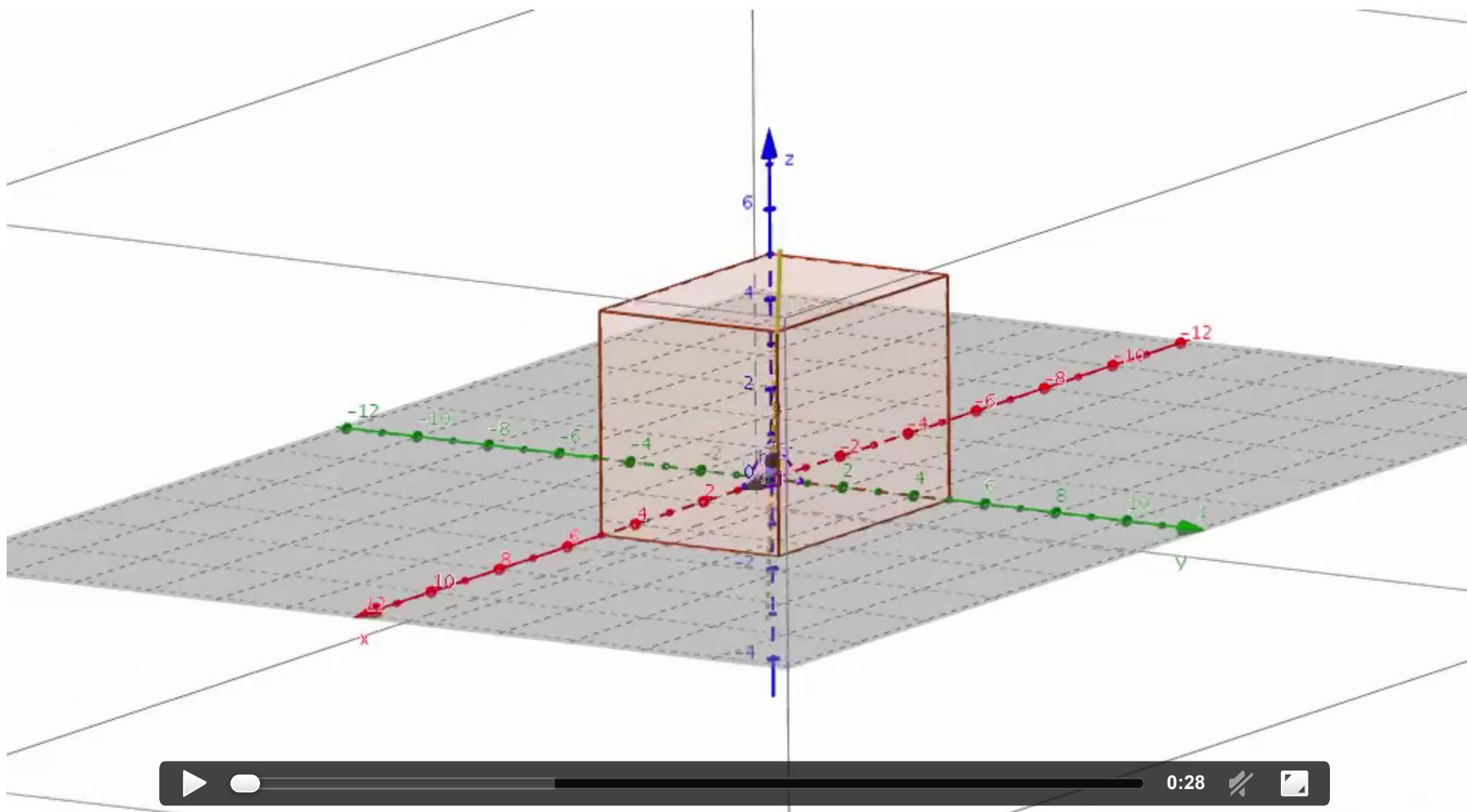
- <http://tube.geogebra.org/student/m320977>

# ABSTAND ZWEIER GERADEN



- <http://tube.geogebra.org/student/m320555>

# WÜRFELSCHNITTE



- Diagonale Ebene <http://tube.geogebra.org/student/m321009>
- Beliebige Ebene <http://tube.geogebra.org/student/m321021>

# MATURAUFGABE ZUR VEKTORGEOMETRIE GYM OBERWIL, GRUNDLAGENFACH 2014

- <https://tube.geogebra.org/student/m761969>

# DESSERT

- Stochastik (Maturaufgabe)
- Tabellen-kalkulation
- Piratenaufgabe
- Differentialgleichungen
- Abbildungen (Matrizen)
- Angry Birds Mathematik
- Zentralprojektion & Parallaxe
- Fermat-Punkt

# STOCHASTIK

# STOCHASTIK MATURAUFGABE

<https://tube.geogebra.org/student/m769673>

6. Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben“ (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).
- 4+4+3 = 11 Punkte**
- a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
- Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?  
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.

- b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
- b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?
- c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  kalkulieren?

# TEILAUFGABE A - CAS-FENSTER

Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben“ (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).

$$4+4+3 = 11 \text{ Punkte}$$

- a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
  - a1) Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
  - a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
  - a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
  - a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?  
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
  - b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
  - b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?
- c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  kalkulieren?

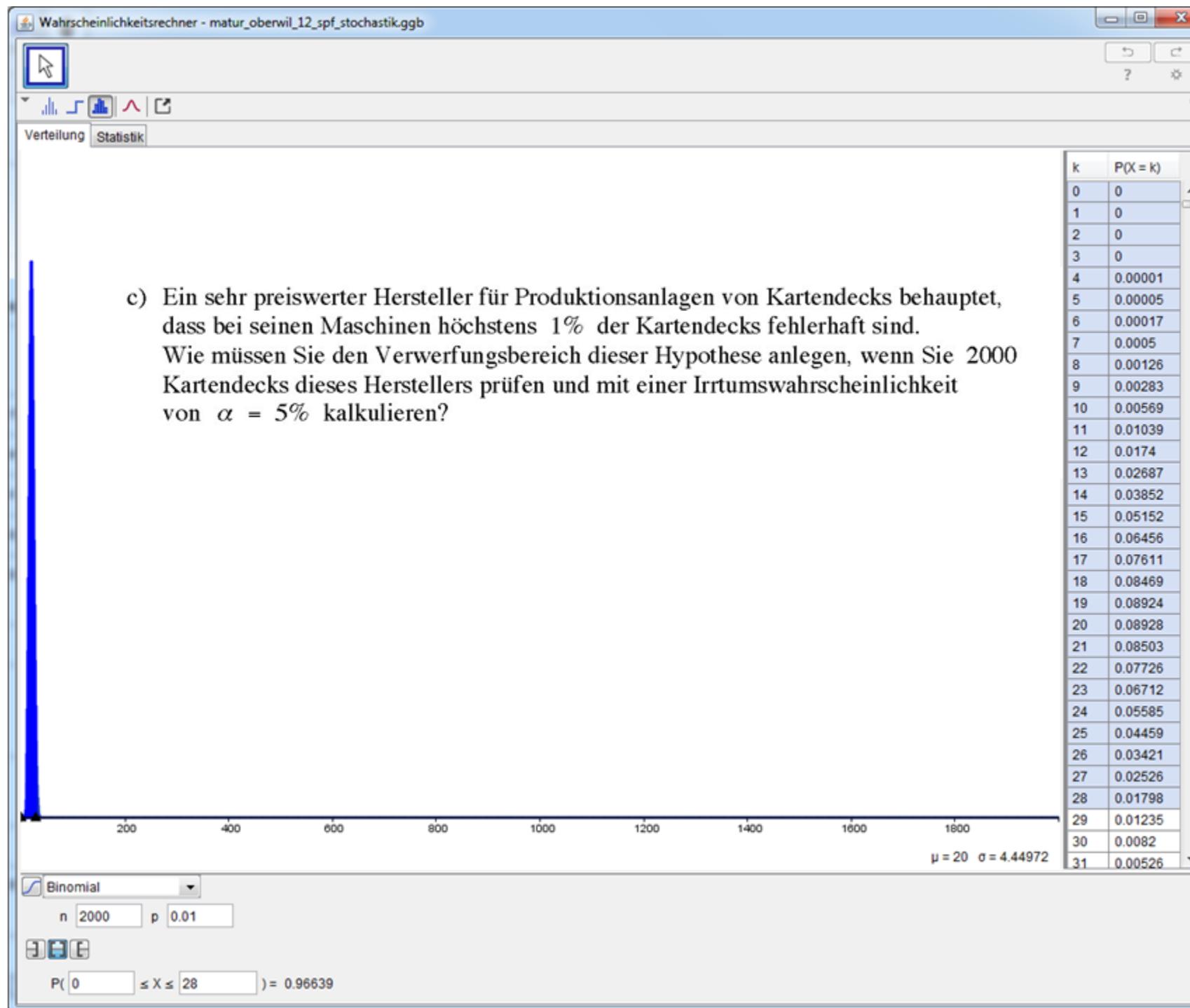
|    | Aufgabe 6 a1                              |
|----|---|
| 1  | $\rightarrow 6 \text{ Aufgabe a1}$        |
| 2  | $\text{BinomialKoeffizient}[52, 5]$       |
| 3  | Aufgabe 6a2                               |
| 4  | $\rightarrow 6 \text{ Aufgabe a2}$        |
| 5  | $1-(48!/43!)/(52!/47!)$                   |
| 6  | $\rightarrow \frac{18472}{54145}$         |
| 7  | im numerischen Modus                      |
| 8  | $\$4$                                     |
| 9  | $\approx 0.34116$                         |
| 10 | Aufgabe 6a3                               |
| 11 | $\rightarrow 6 \text{ Aufgabe a3}$        |
| 12 | $5*4!/(52!/48!)$                          |
| 13 | $\rightarrow \frac{1}{54145}$             |
| 14 | im numerischen Modus                      |
| 15 | $\rightarrow \text{Modus im numerischen}$ |
| 16 | $\$8$                                     |
| 17 | $\approx 0.00002$                         |

# TEILAUFGABE A&B - CAS-FENSTER

- a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?  
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
- b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
- b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?

|    |   |
|----|---|
| 11 | Aufgabe 6a4: 13 Möglichkeiten für Drillingswert,  |
| 12 | 12 Möglichkeiten für Zwillingswert,   |
| 13 | 4 Möglichkeiten weggelassene Karte Drilling   |
| 14 | 6 Möglichkeiten für die weggelassene Karte  |
| 15 | $13 \cdot (12) \cdot 4 \cdot (6 / \text{BinomialKoeffizient}(52, 5))$<br><input checked="" type="radio"/> ≈ 0.00144 |
| 16 | Aufgabe 6b1   |
| 17 | $0.6 \cdot 0.001 + 0.4 \cdot 0.0005$<br><input checked="" type="radio"/> → $\frac{1}{1250}$                         |
| 18 | \$17<br><input checked="" type="radio"/> ≈ 0.0008   |
| 19 | Aufgabe 6b2   |
| 20 | $(0.6 \cdot 0.999) / (0.6 \cdot 0.999 + 0.4 \cdot 0.9995)$<br><input checked="" type="radio"/> ≈ 0.59988            |
| 21 |   |

# C - WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNER IM MENÜ ZUM CAS-FENSTER



# TABELLEN-KALKULATION

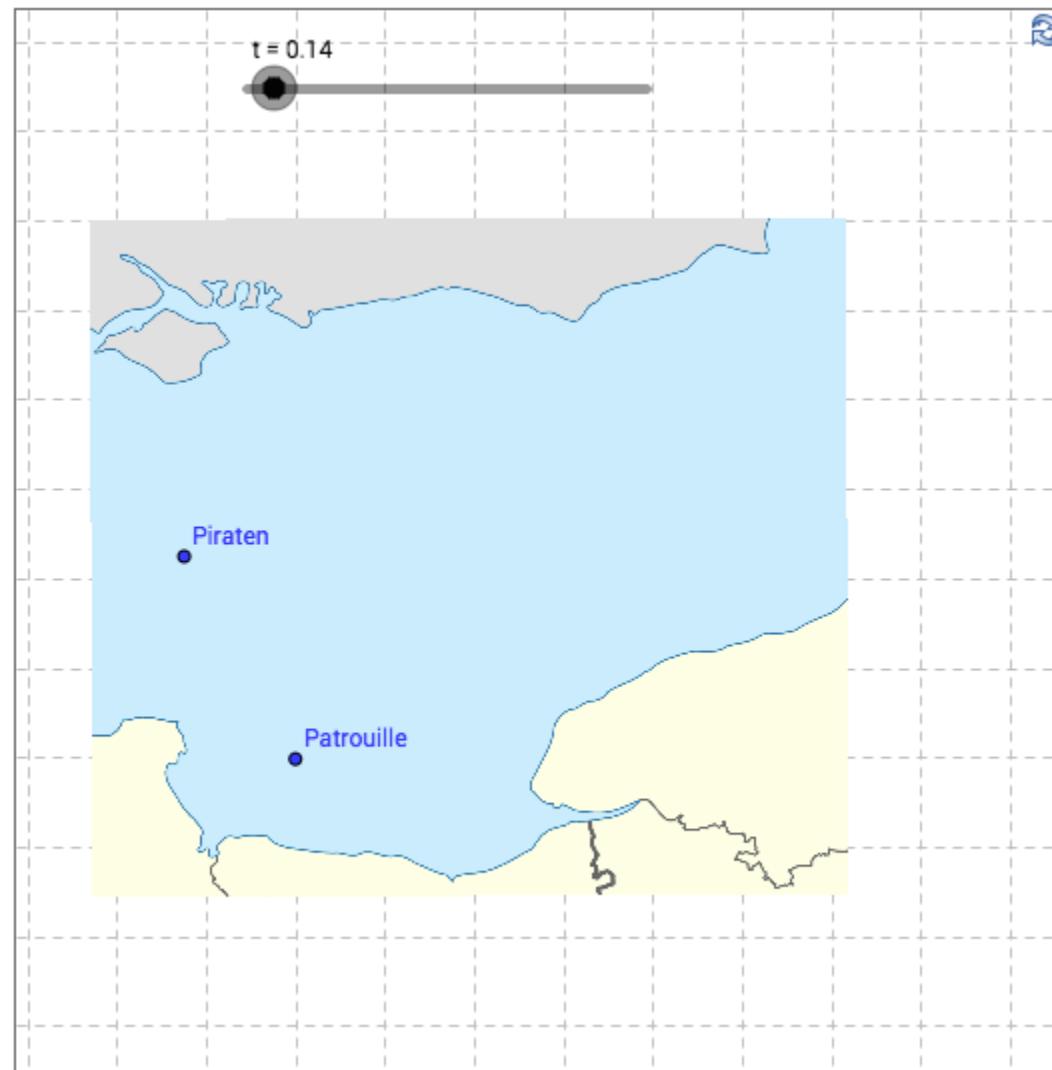
- Körperoberfläche <http://tube.geogebra.org/student/m321081>
- Digoxin <http://tube.geogebra.org/student/m321095>
- 1000 Zufallszahlen <http://tube.geogebra.org/student/m321107>

# PIRATEN- AUFGABE

## **Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab**

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.

Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.



[Link auf GeoGebraTube](#)

# BEWEGUNGEN SIMULIEREN

x,y-Position als Funktion von t

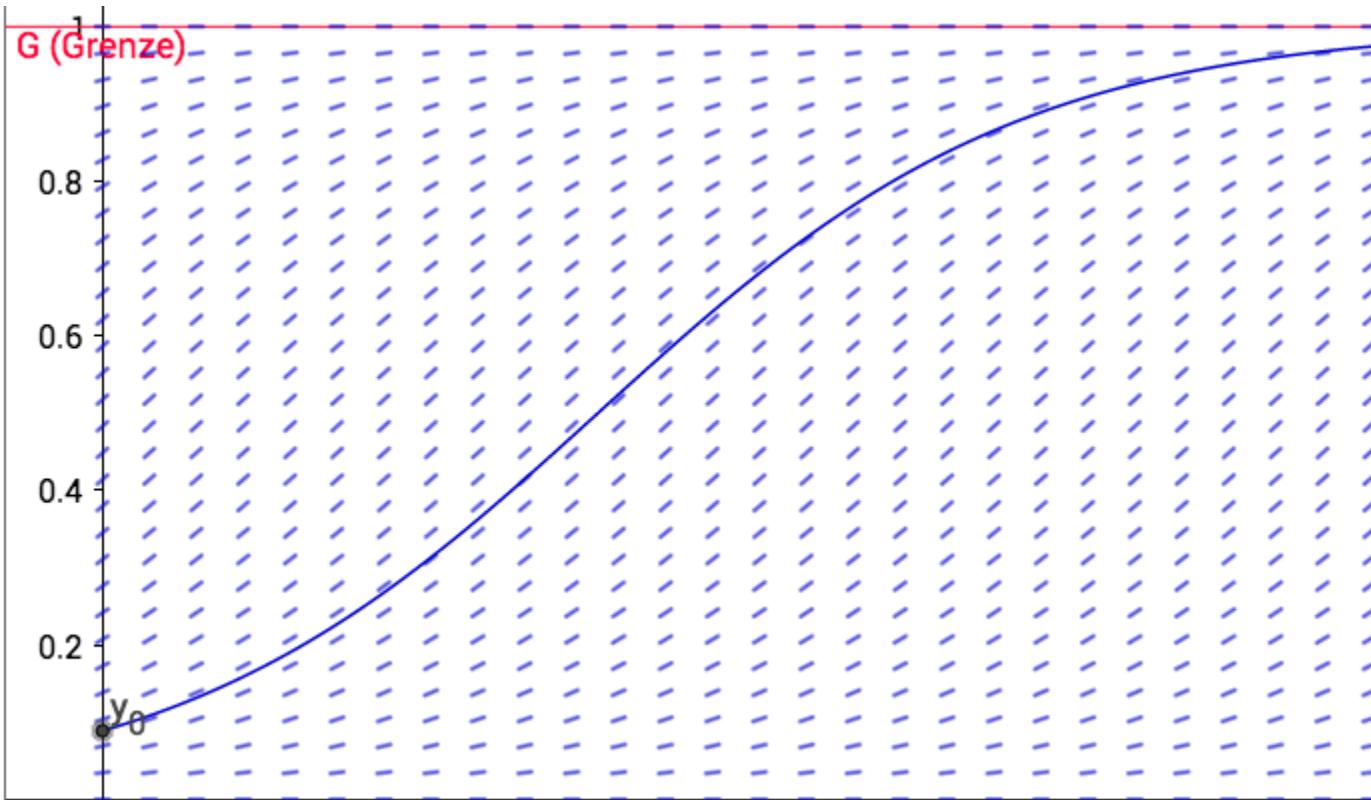
```
t = 0.0  
P = (t,sin(t))
```

# DGL

## 1. ORDNUNG

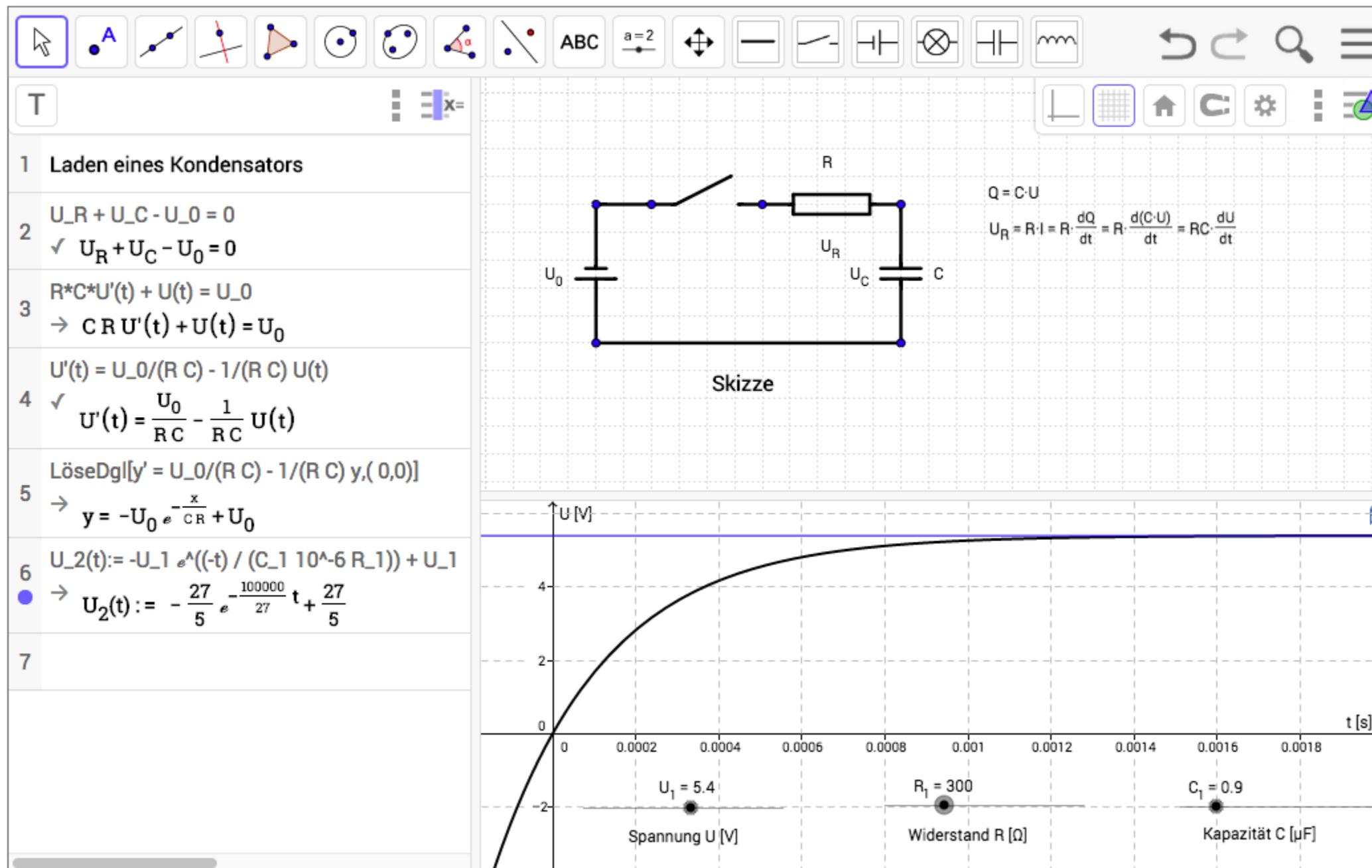
# WACHTUMSMODELLE

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/31166>



# LADEN EINES KONDENSATORS

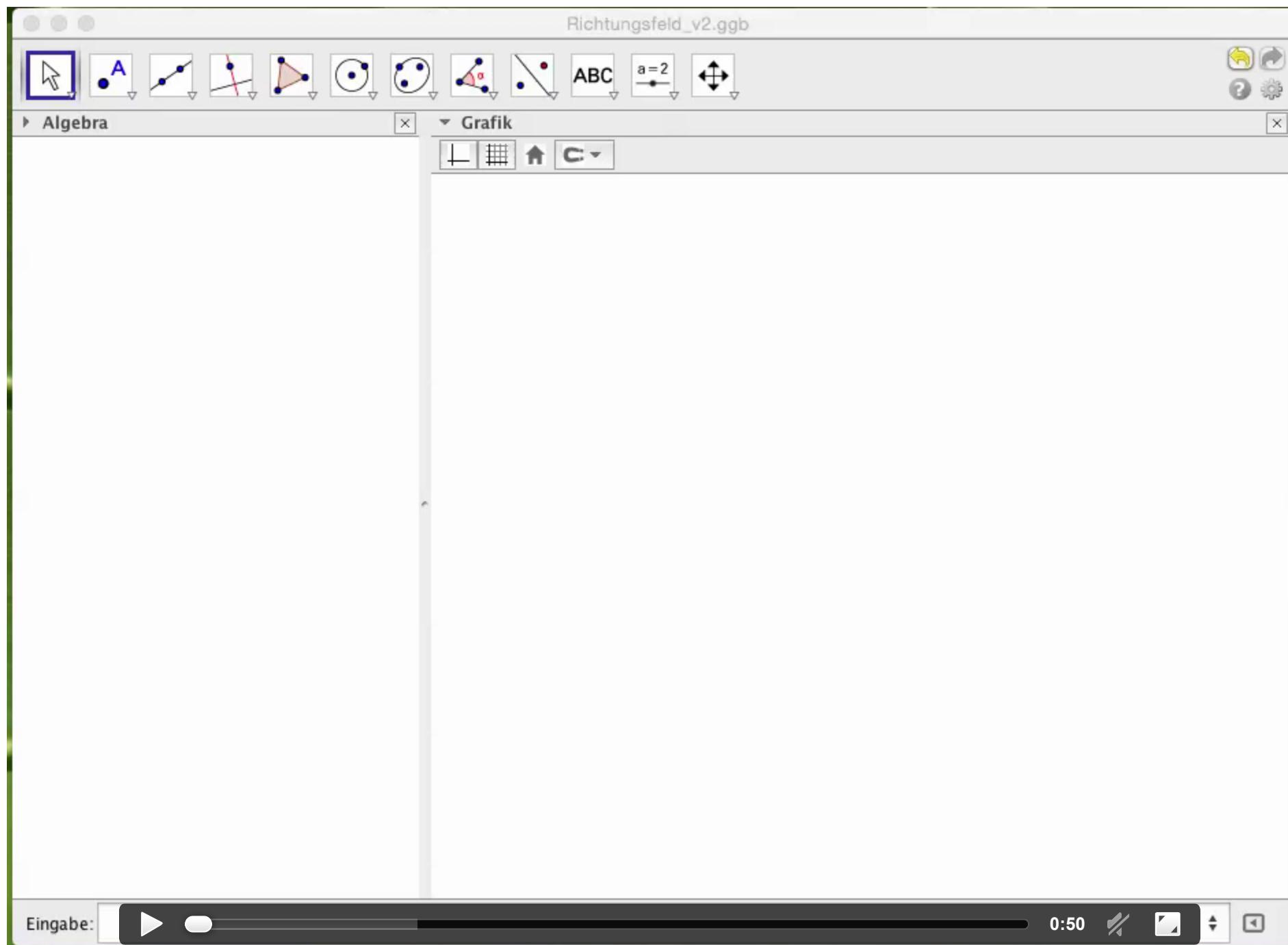
<http://tube.geogebra.org/material/show/id/446087>



# NUMERISCHES LÖSEN VON DG ERSTER ORDNUNG IN EINEM 2D-RICHTUNGSFELD

```
A = (1, 1)  
  
f(x, y) = sin(x) cos(y)  
  
Richtungsfeld[f]  
  
LöseDgl[f, x(A), y(A), 20, 0.1]
```

# NUMERISCHES LÖSEN VON DG ERSTER ORDNUNG IN EINEM 2D-RICHTUNGSFELD



DGL 2. ORDNUNG

SCHWINGUNG

## NEWTON II

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$$

## FEDERPENDEL

$$-k\vec{x}(t) = m \cdot \ddot{\vec{x}}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\frac{k}{m} \cdot \vec{x}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{x}(t)$$

Annahme einer Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

einsetzen in DGL

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} = -\omega^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$(\lambda^2 + \omega^2) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

folglich

$$(\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

$$\lambda = i\omega \text{ oder } \lambda = -i\omega$$

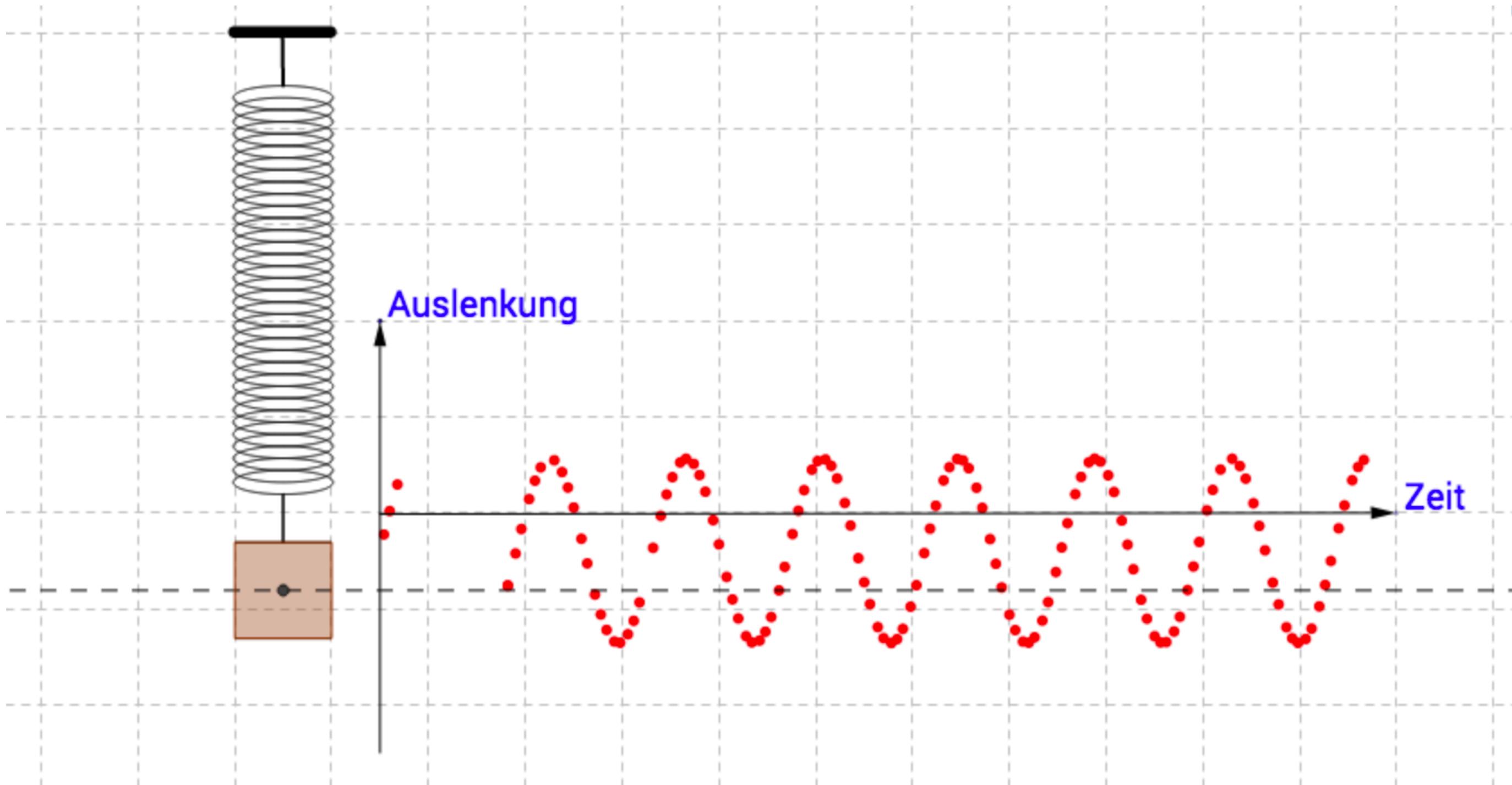
allg. Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t) = \frac{c_1}{e^{i\omega t}} + c_2 \cdot e^{i\omega t}$$

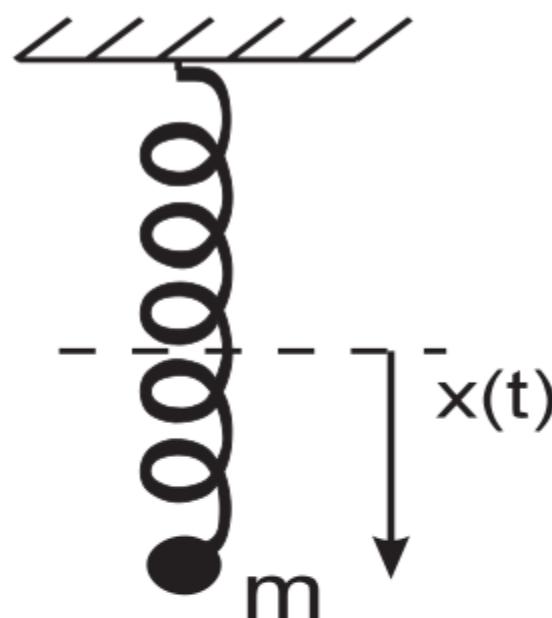
$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$$

# FEDERPENDEL

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/126500>



# GEDÄMPFTES FEDERPENDEL



(2) Ein durch Luftreibung **gedämpftes Federpendel** schwingt mit

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t),$$

wenn  $x_0$  die Anfangsauslenkung,  $\gamma$  der Reibungskoeffizient und  $\omega$  die Schwingungsfrequenz. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung sind

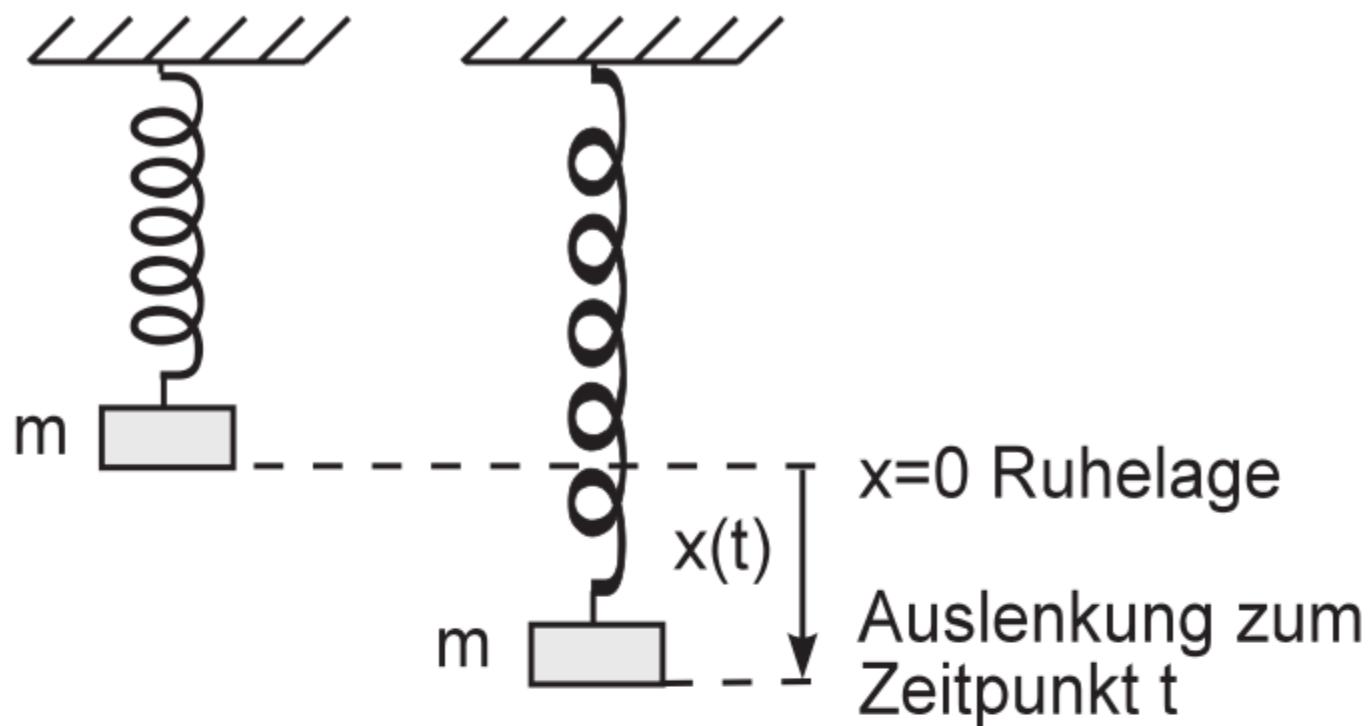
**Abb. 7.4.**

$$\text{Federpendel } v(t) = \dot{x}(t) = -\gamma x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) - \omega x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t),$$

$$a(t) = \ddot{v}(t) = \gamma^2 x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + \gamma \omega x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

$$+ \gamma \omega x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t) - \omega^2 x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$$

# DGL FÜR EIN GEDÄMPFTE FEDERPENDEL



**Abb. 12.27.** Federpendel

Die Kräfte, die auf die Masse  $m$  wirken, sind die Federrückstellkraft  $F_D = -D x(t)$  und die Reibungskraft  $F_R = -\beta \dot{x}(t)$ . Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz ist die Beschleunigungskraft  $F_B = m \ddot{x}(t)$  gleich der Summe aller angreifenden Kräfte:

$$m \ddot{x}(t) = -\beta \dot{x}(t) - D x(t) \quad \text{mit } x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$$

(homogene, lineare DG 2. Ordnung).  $\square$

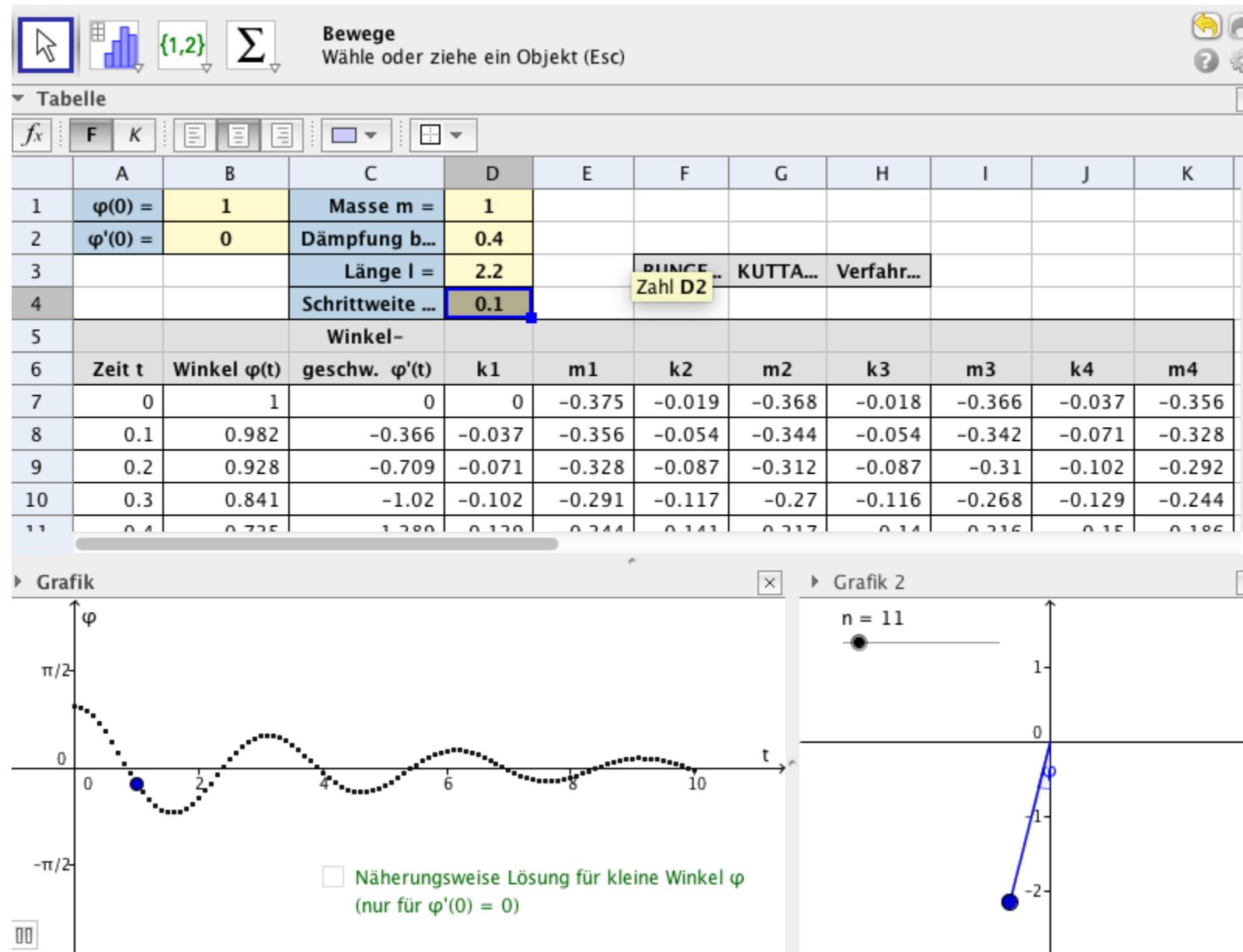
# LAGRANGE FORMALISMUS FÜR DAS FADENPENDEL

$$ml^2 \ddot{\phi}(t) + mgl \sin(\phi) = 0$$

nur numerisch lösbar !!!

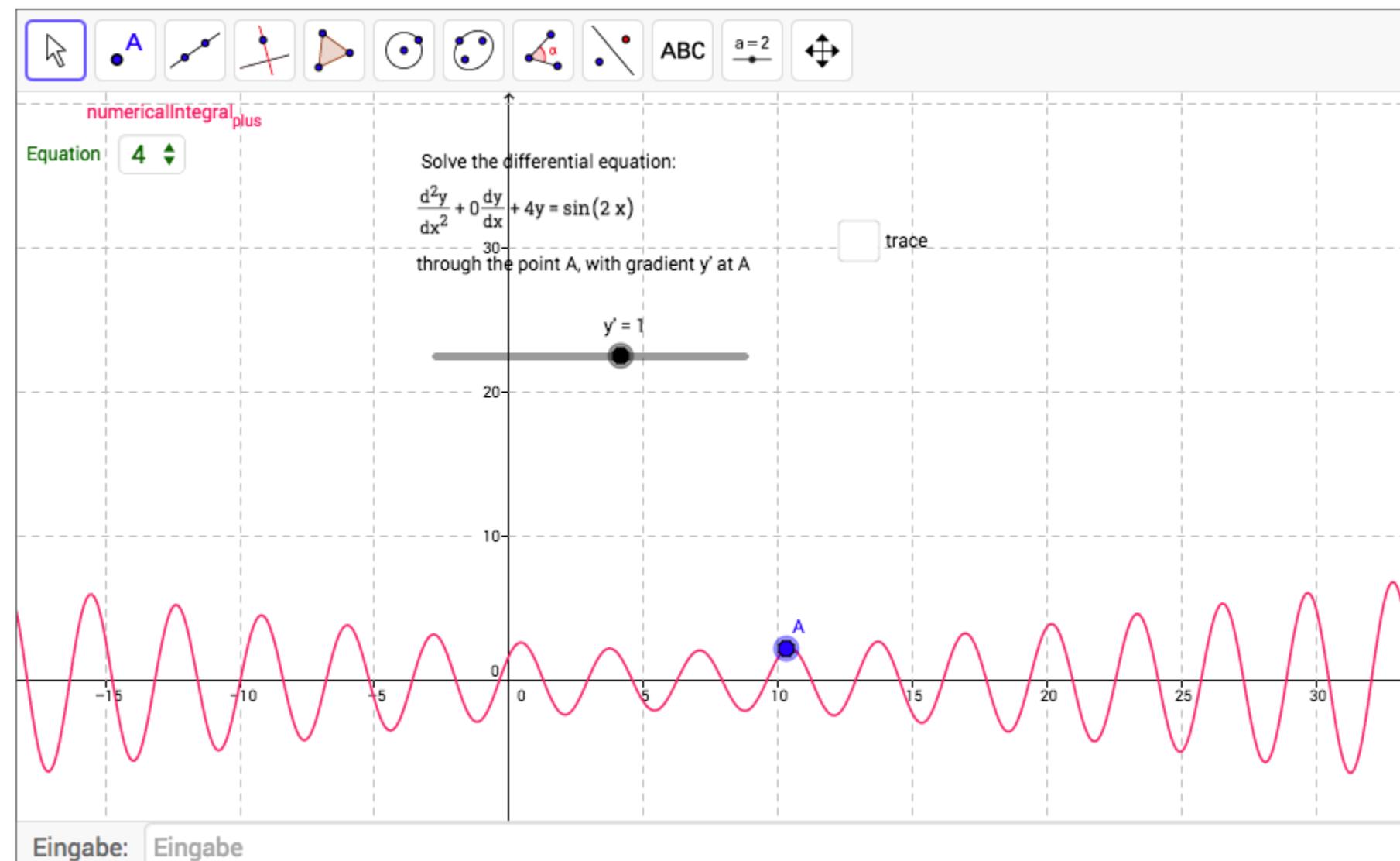
# FADENPENDEL SIMULATION

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/702>



# NUMERISCHE LÖSUNG EINER DGL 2. ORDNUNG

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/79803>



# GEOGEBRA ANLEITUNG

## ZU DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND RICHTUNGSFELDER

- <http://wiki.geogebra.org/de/L%C3%B6seDgl %28Befehl%29>
- <http://wiki.geogebra.org/de/Richtungsfeld %28Befehl%29>
- Schwingungen und Wellen

EXKURS  
SKALARPOTENTIAL  
&  
ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN

# SKALAR POTENTIAL

$$\Phi : \vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$$

mit

1.  $\Phi$  ist zweimal stetig differenzierbar
2. Es existiert ein Vektorfeld mit

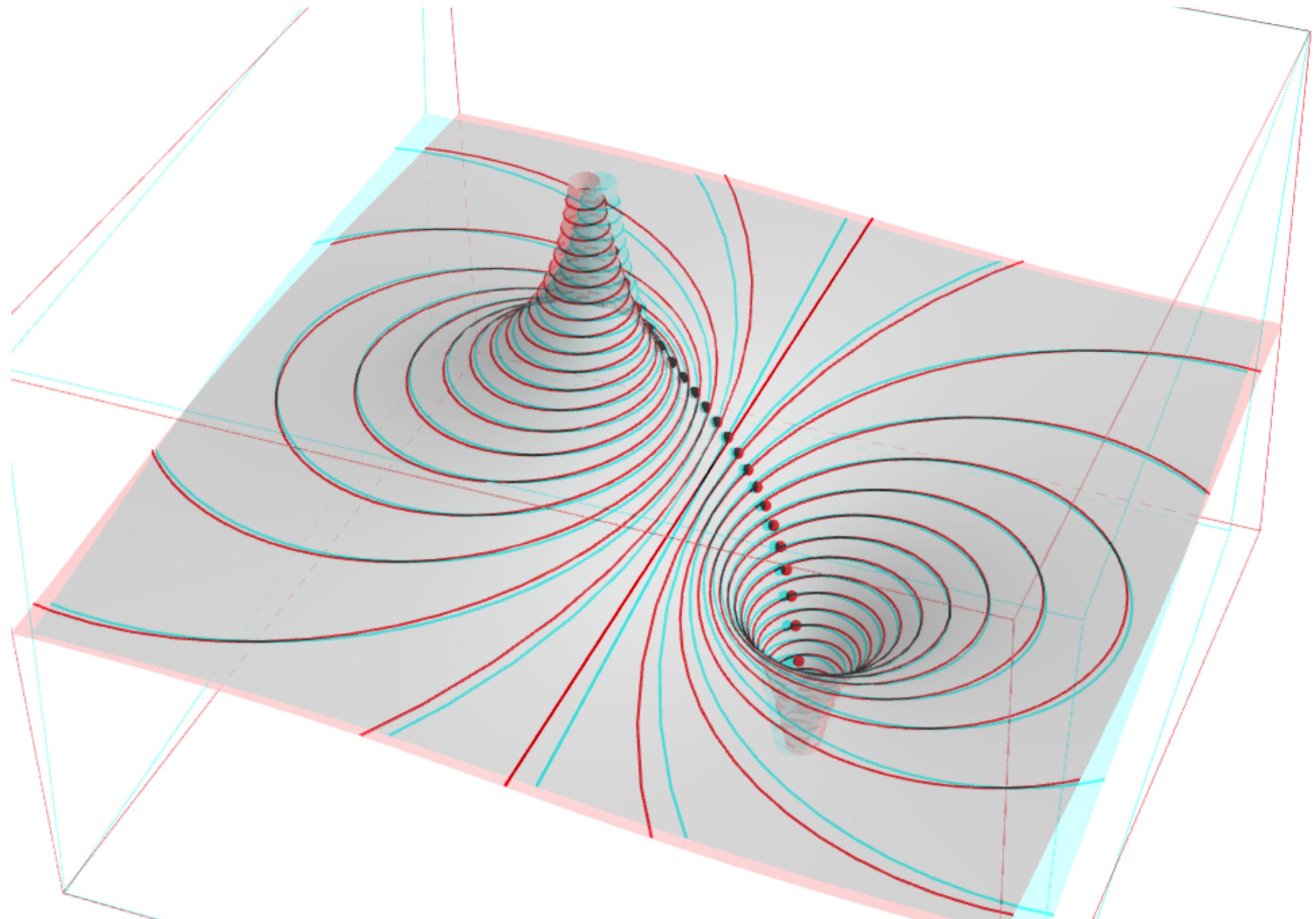
$$\vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}(\Phi(\vec{r}))$$

FELDLINIEN STEHEN SENKRECHT POTENTIALLINIEN  
BEISPIEL DIPOL

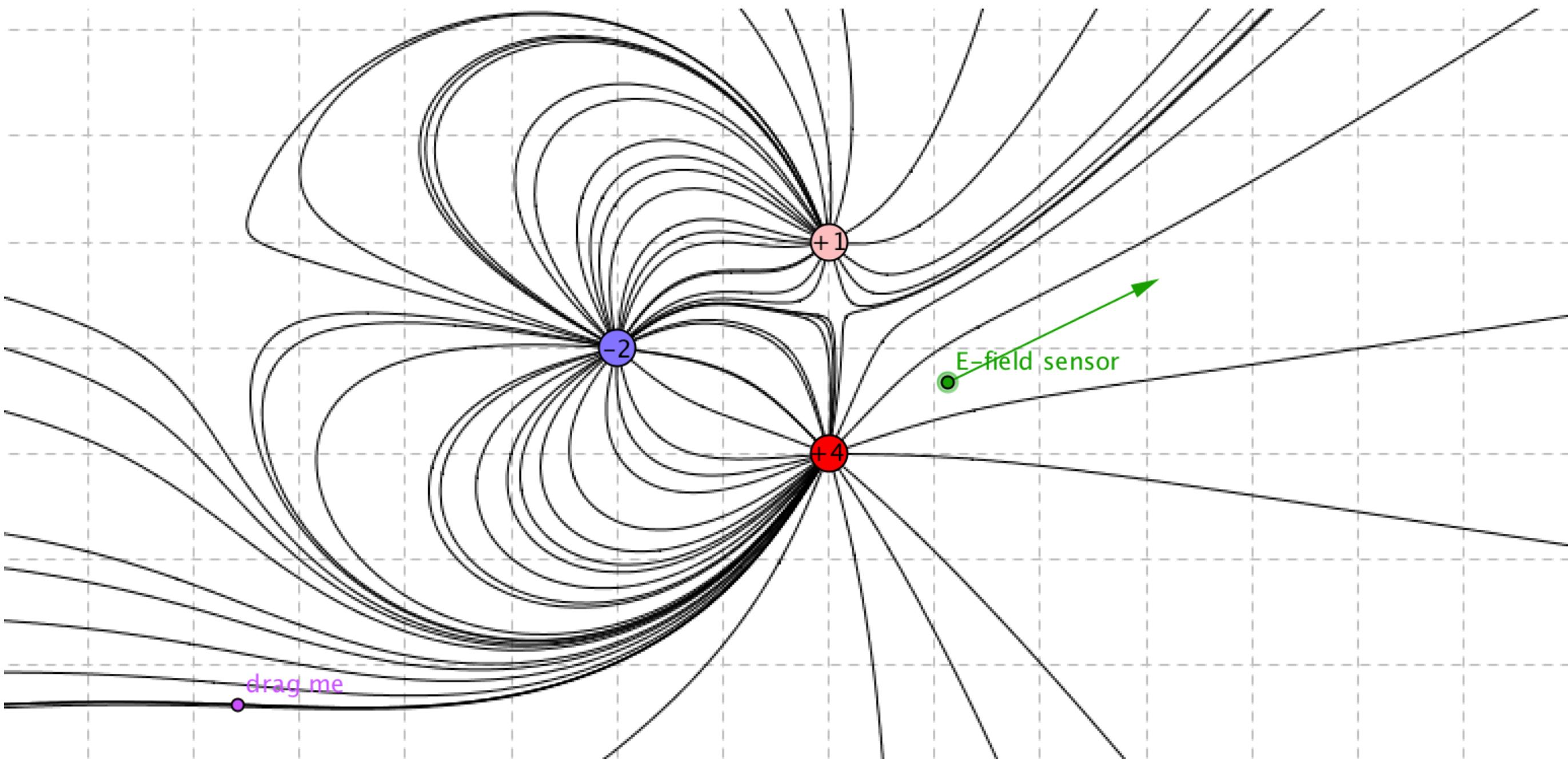
# 3D POTENTIALLINIEN

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/438619>



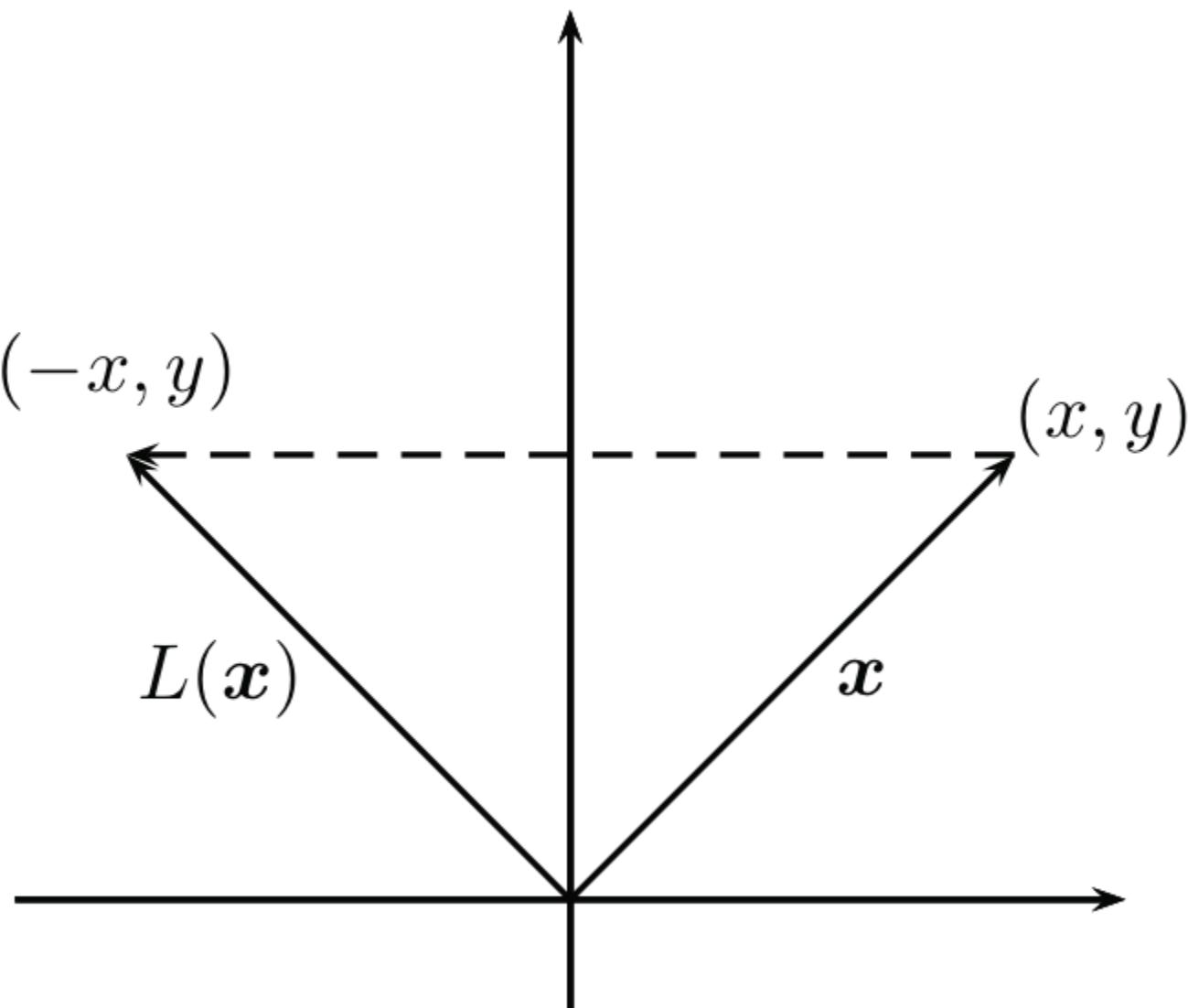
# BEISPIEL 3 PUNKTLADUNGEN (MULTIPOLE)

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/27247>



# ABBILDUNGEN

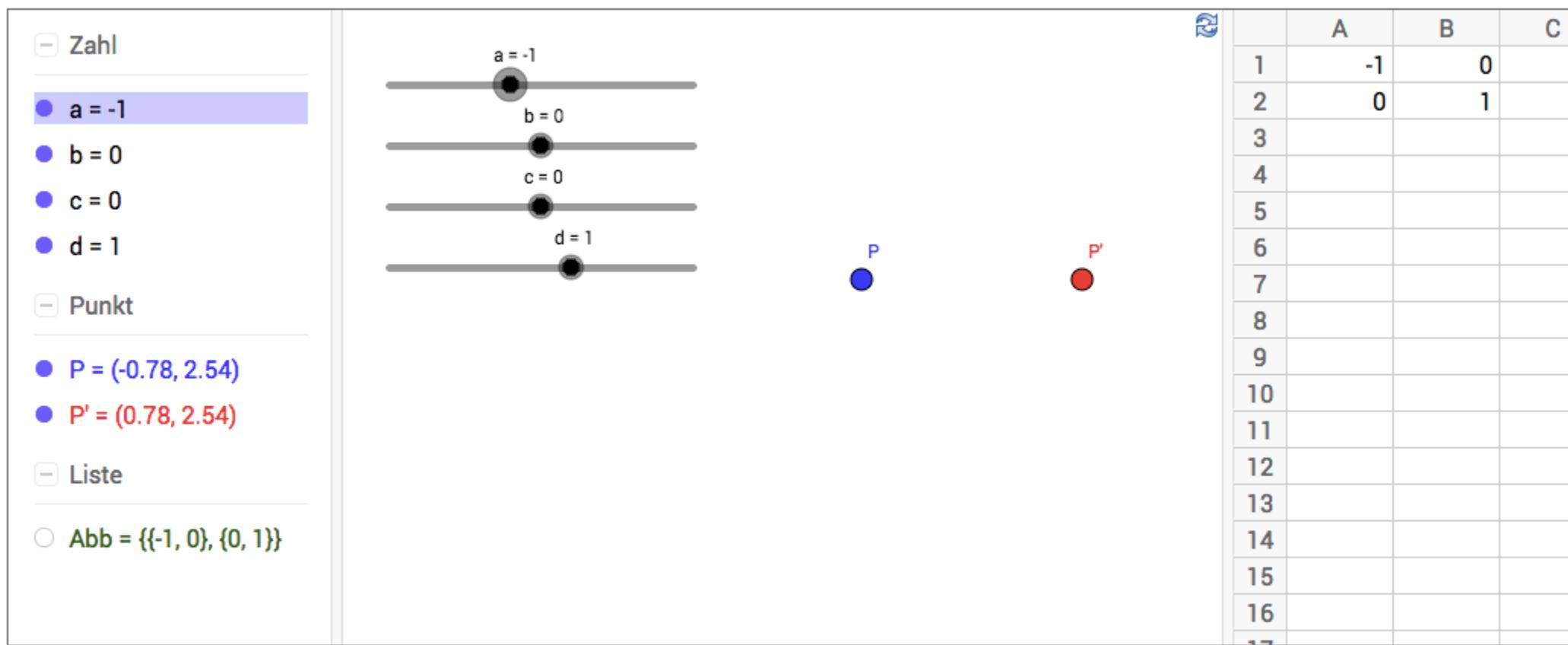
# SPIEGELUNG



Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

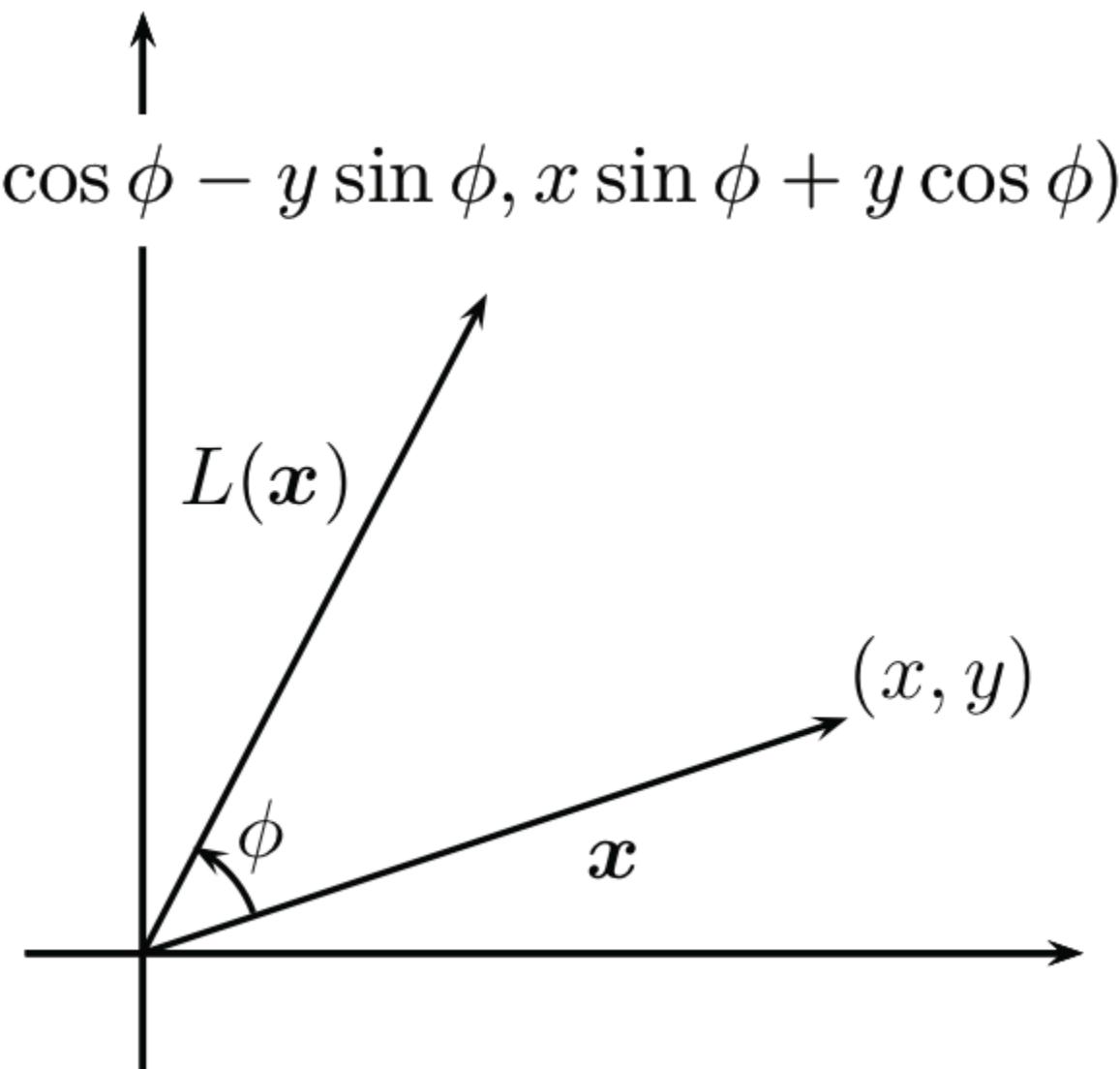
# ABBILDUNG EINES PUNKTES



Lässt sich der Ursprung aus der Beobachtung des Verhaltens zwischen dem Punkt  $P$  und seiner Abbildung  $P'$  ermitteln?

[Link auf GeoGebraTube](#)

# DREHUNG



# DARSTELLUNG EINER DREHUNG UM DEN PUNKT (0,0) GEGEN DEN UHRZEIGERSINN UM $90^\circ$

Diese lin. Abbildung bildet

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch Drehungen sind lineare Abbildungen. Eine Drehung um den Winkel  $\phi$  im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) kann wie folgt beschrieben werden:

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x \cos(\phi) - y \sin(\phi), x \sin(\phi) + y \cos(\phi))$$

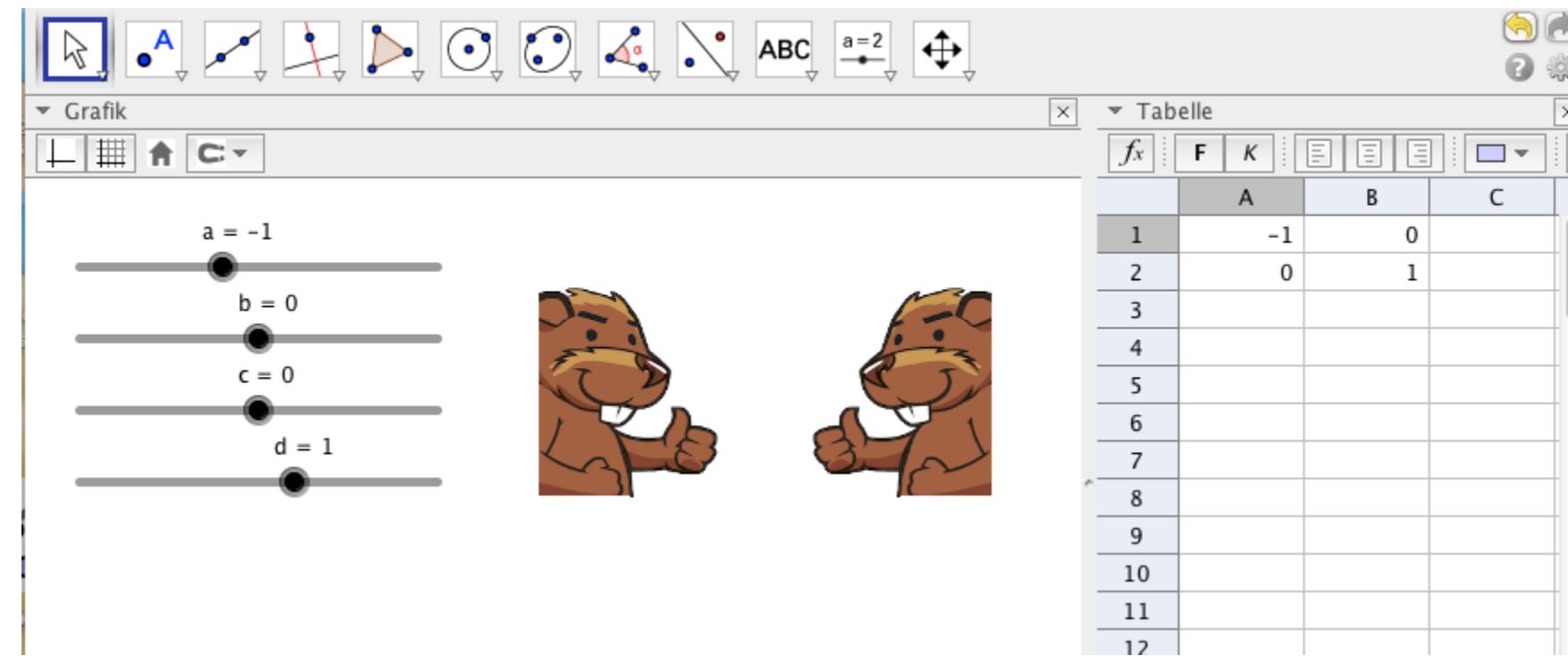
DREHUNG GEGENUHRZEIGERSINN UM EINEN WINKEL  $\phi$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

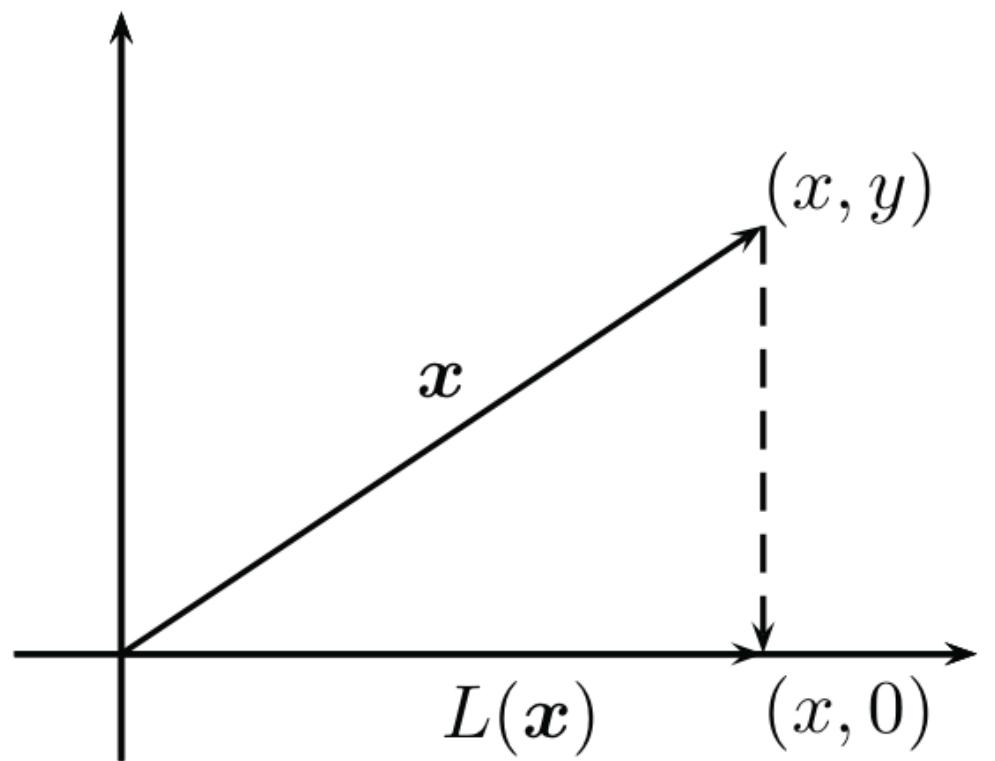
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

# RASTERGRAFIK MIT LINEAREN ABBILDUNGEN TRANSFORMIEREN

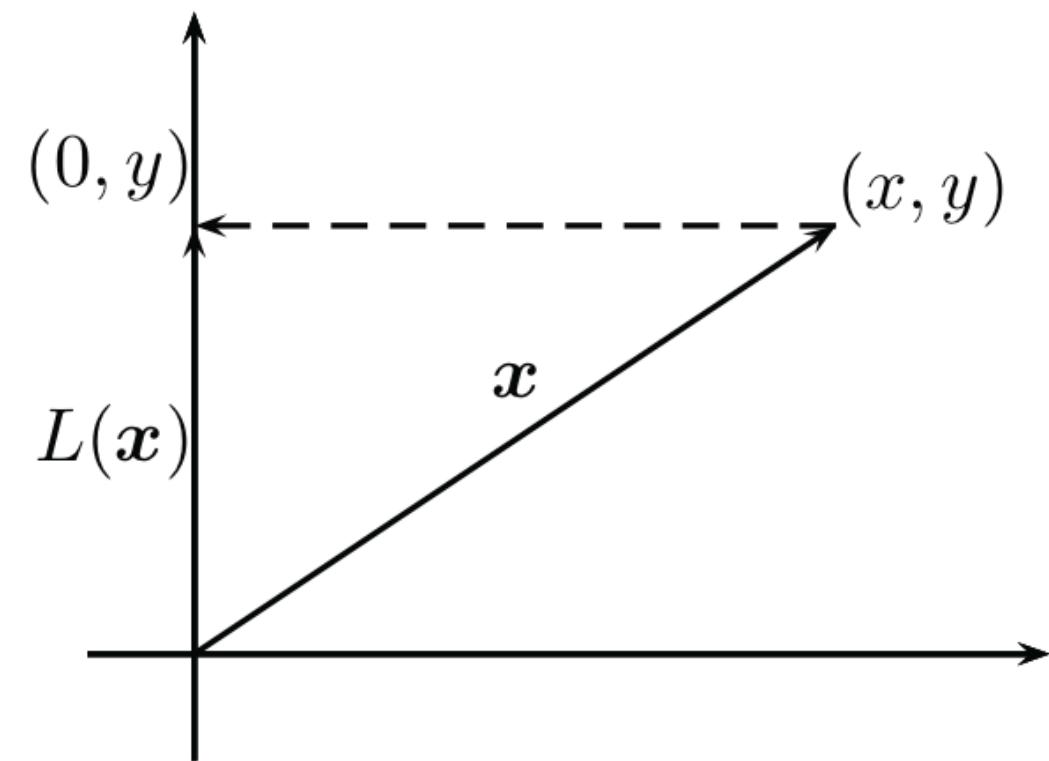


[Link auf GeoGebraTube](#)

# PROJEKTION



auf x-Achse



auf y-Achse

Die orthogonale Projektion auf die x-Achse ist auch eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf die y-Achse ist eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

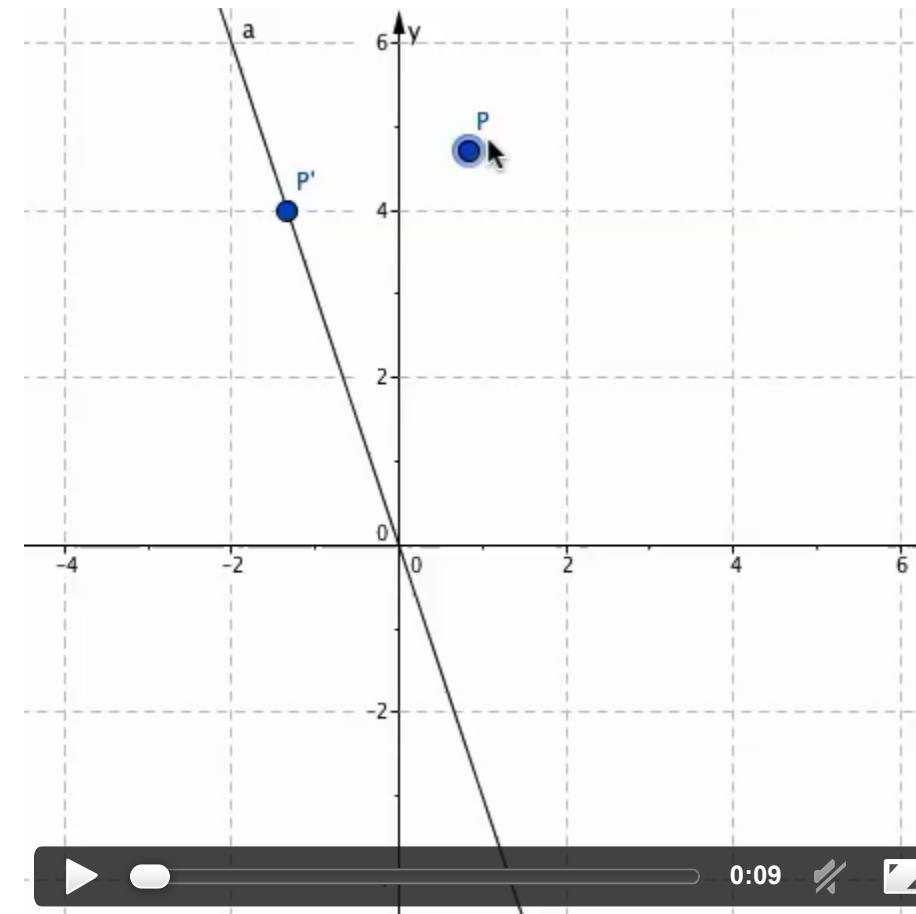
$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# PUNKT AUF EINE GERADE A PROJIZIEREN

$$a : y = -3x$$



## VORGEHEN

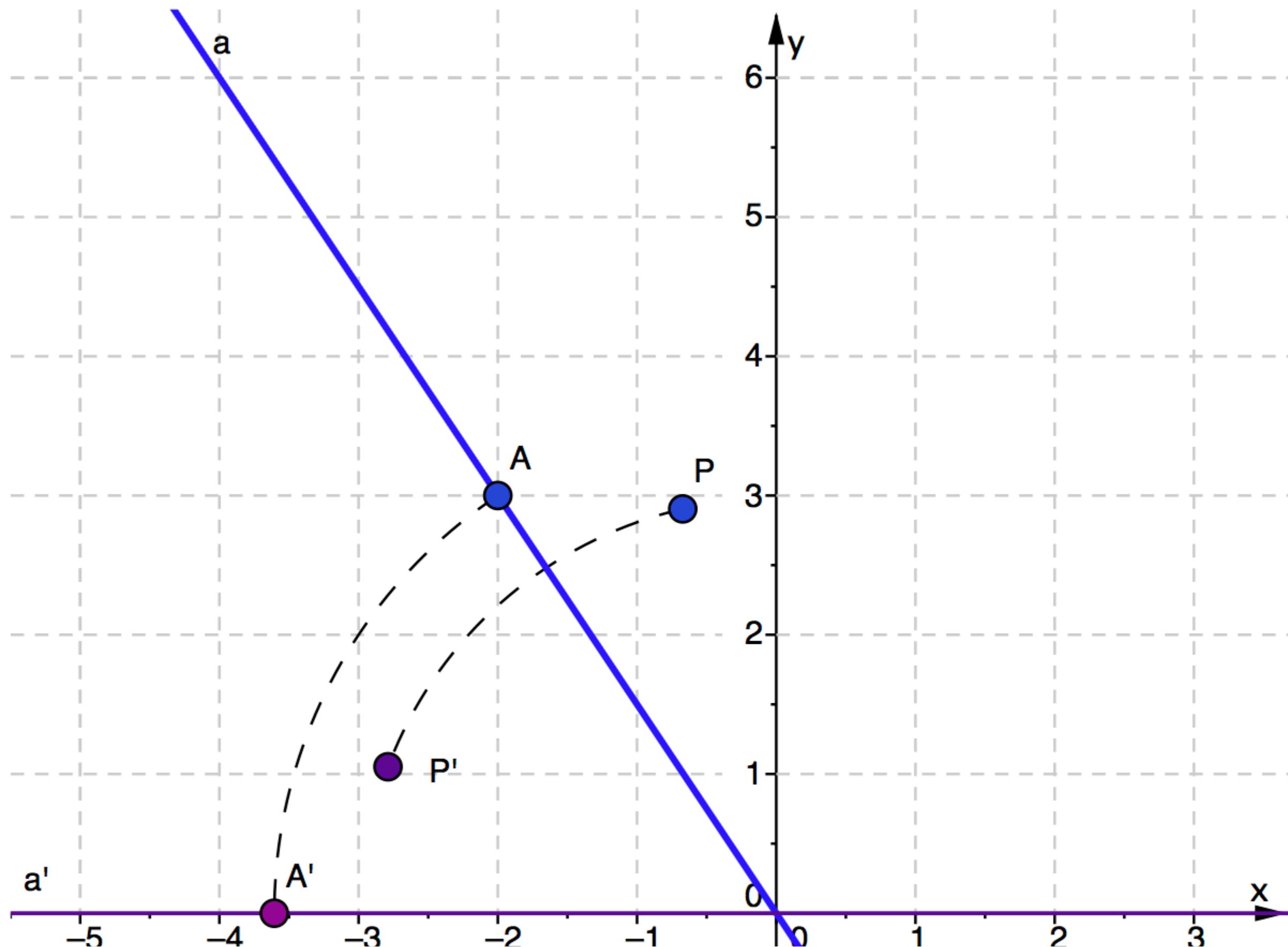
- Gesamte Figur drehen bis die Gerade a auf der x-Achse liegt
- Den Punkt auf die x-Achse projizieren
- den projizierten Punkt wieder zurück drehen.

# 1. SCHRITT DREHEN UM $\alpha$

$$\tan(\alpha) = -3 \rightarrow \alpha \approx -71.57^\circ$$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

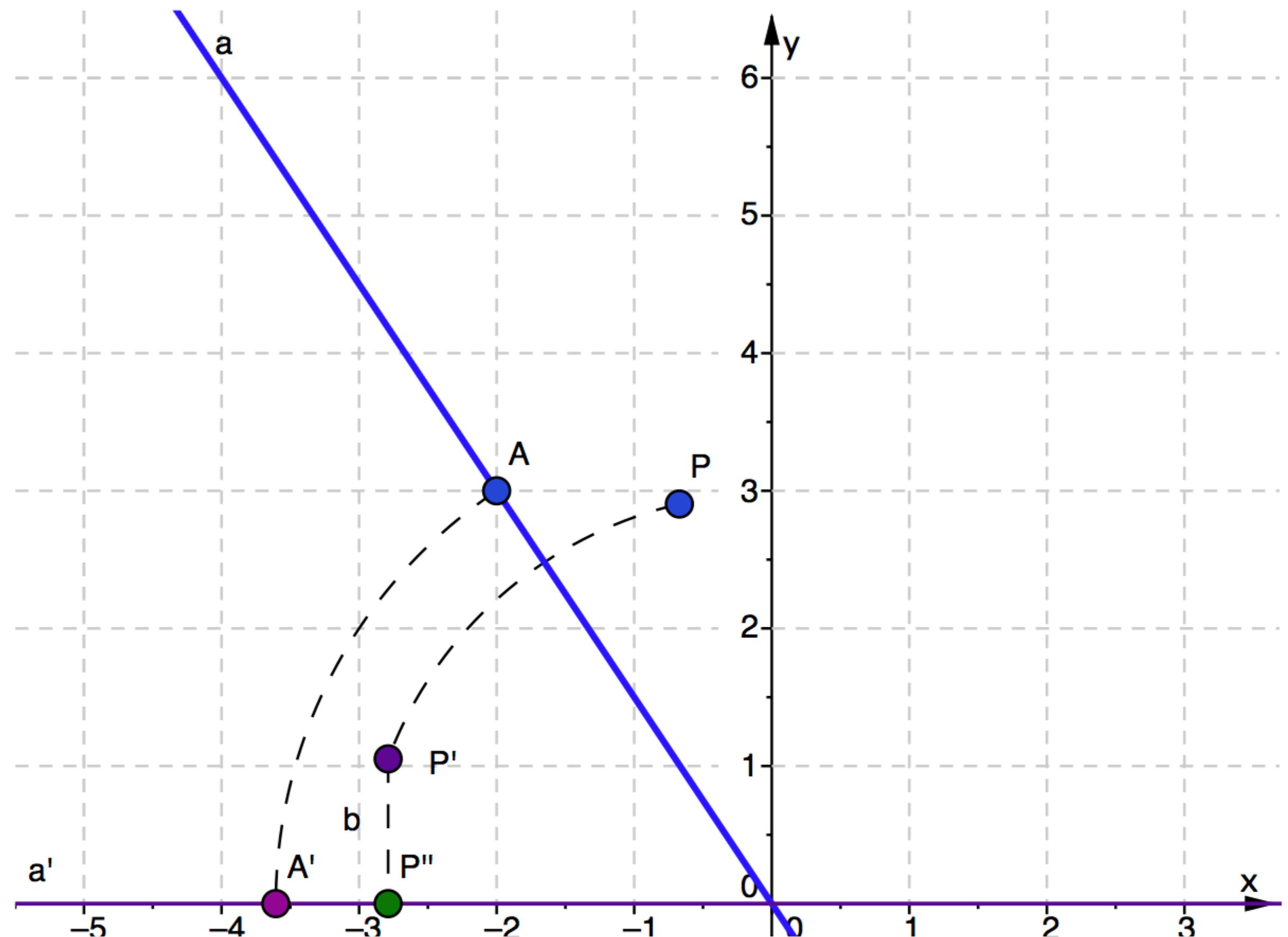
[GeoGebraTube](#)



## 2. SCHRITT PROJEKTION AUF X-ACHSE

$$P_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[GeoGebraTube](#)

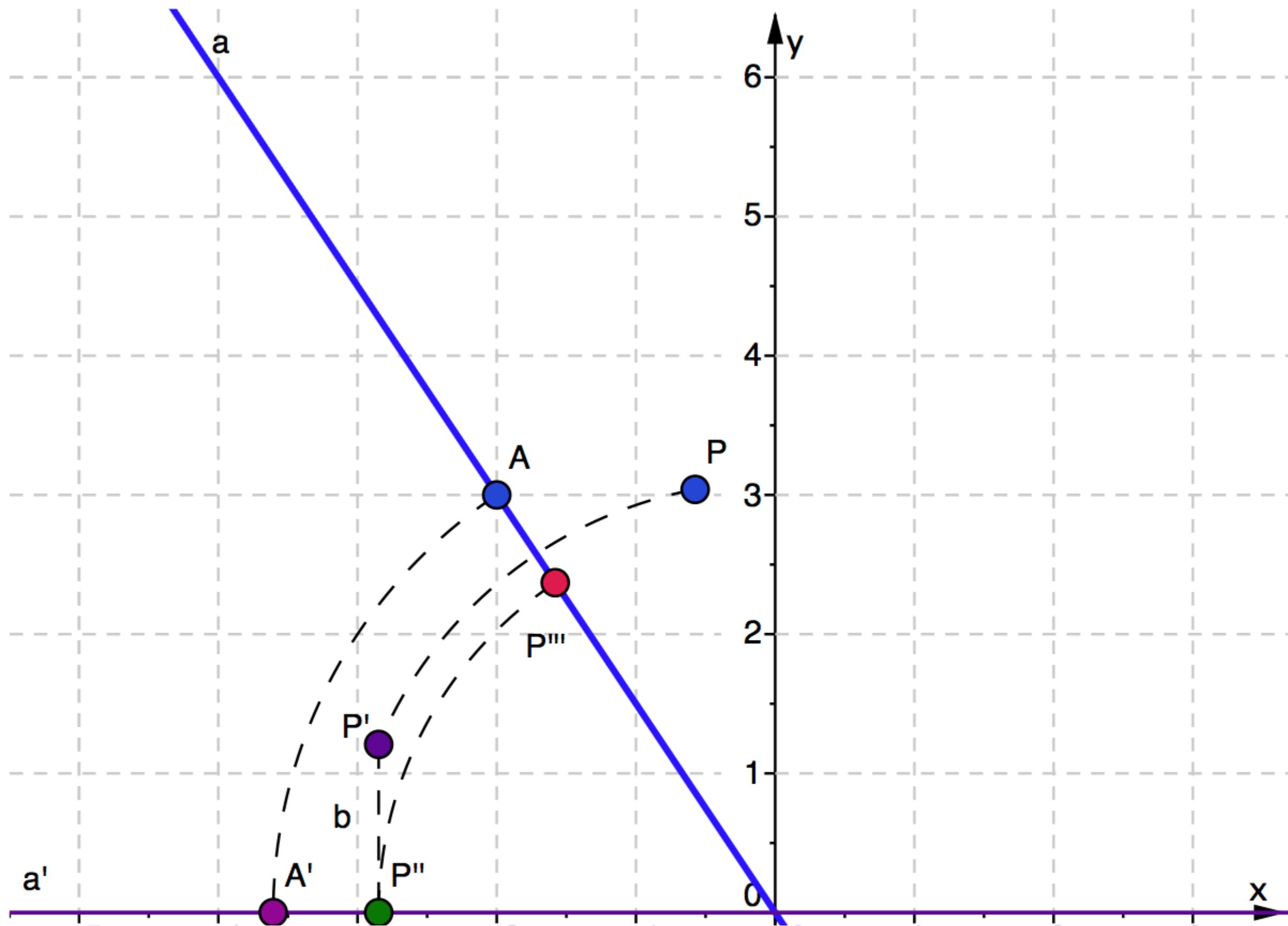


### 3. SCHRITT RÜCKDREHEN UM $\alpha$

$$\alpha \approx -71.57^\circ$$

$$R_{-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[GeoGebraTube](#)



IN EINEM SCHRITT

$$R_{-a} \cdot P_X \cdot R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF UNTERRAUM VERWENDEN

Wähle eine Matrix  $A$  so, dass die Spaltenvektoren eine Basis eines Unterraums bilden. (z.B. eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$ ), dann ist die Projektionsmatrix

$$\text{proj}_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b^T b &= (\cos(\alpha), \quad \sin(\alpha)) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \end{aligned}$$

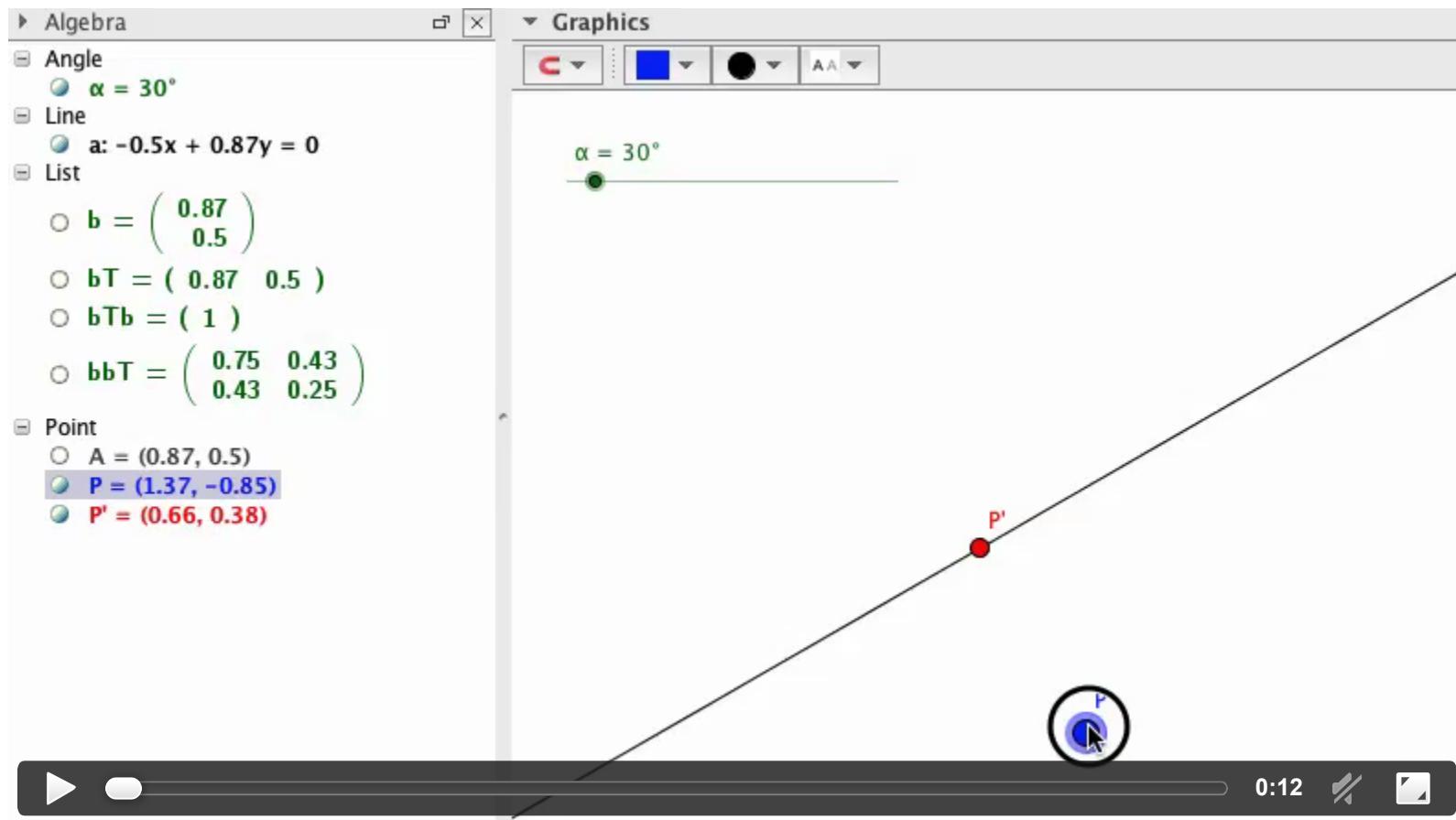
$$(b^T b)^{-1} = 1$$

$$proj_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$

$$proj_w P = AA^T P$$

mit  $AA^T$

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha), & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \sin(\alpha)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



[Link to GeoGebraTube](#)

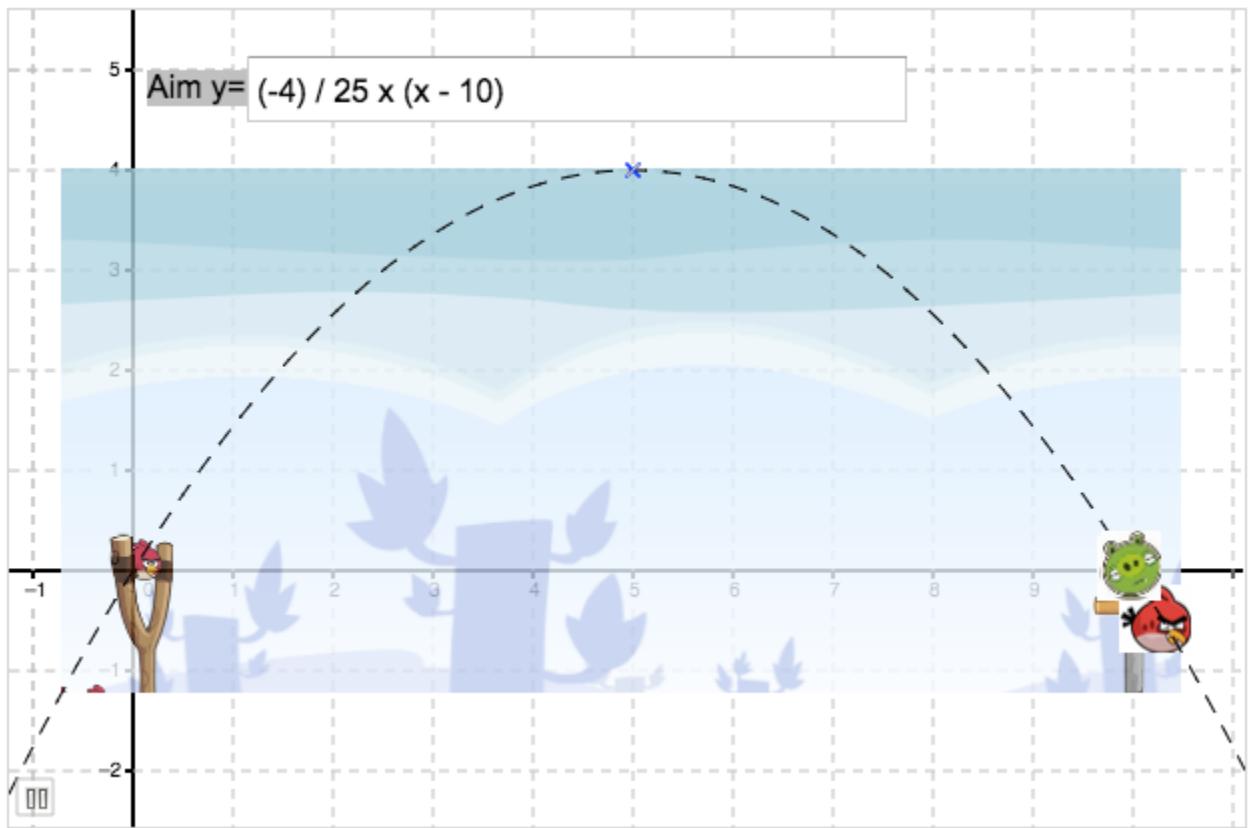
# GEOGEBRA MATERIAL ZUR ZENTRALPROJEKTION

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/232769>

ANGRY BIRDS MATHE



[Link auf Webseite](#)



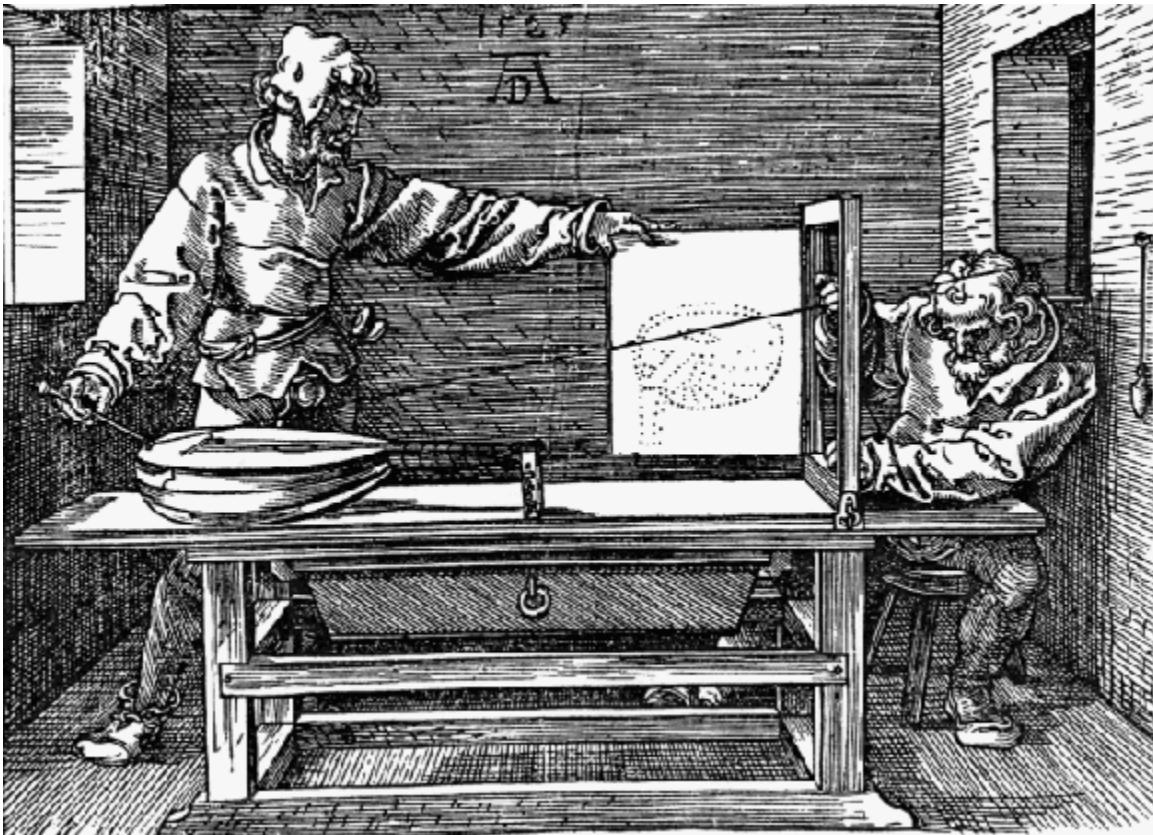
[Link auf Webseite](#)

ZENTRALPROJEKTION  
&  
PARALLAXEFFEKTE

# PARALLAX-EFFEKT (WERBUNG)



Modellierung eines perspektivischen  
Abbildungssystems mit



Link Mechanical creation of a perspective image by Albrecht Dürer

# KONVENTIONEN

- Annahme das Zentrum der Abbildung ist im Ursprung
- Blickrichtung entlang der Z-Achse
- Verwenden homogene Koordinaten

# ZENTRALPROJEKTION AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE

mit Brennweite f

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix}$$

# PROJEKTION AUF HOMOGENEN VEKTOR ANWENDEN

$$P \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

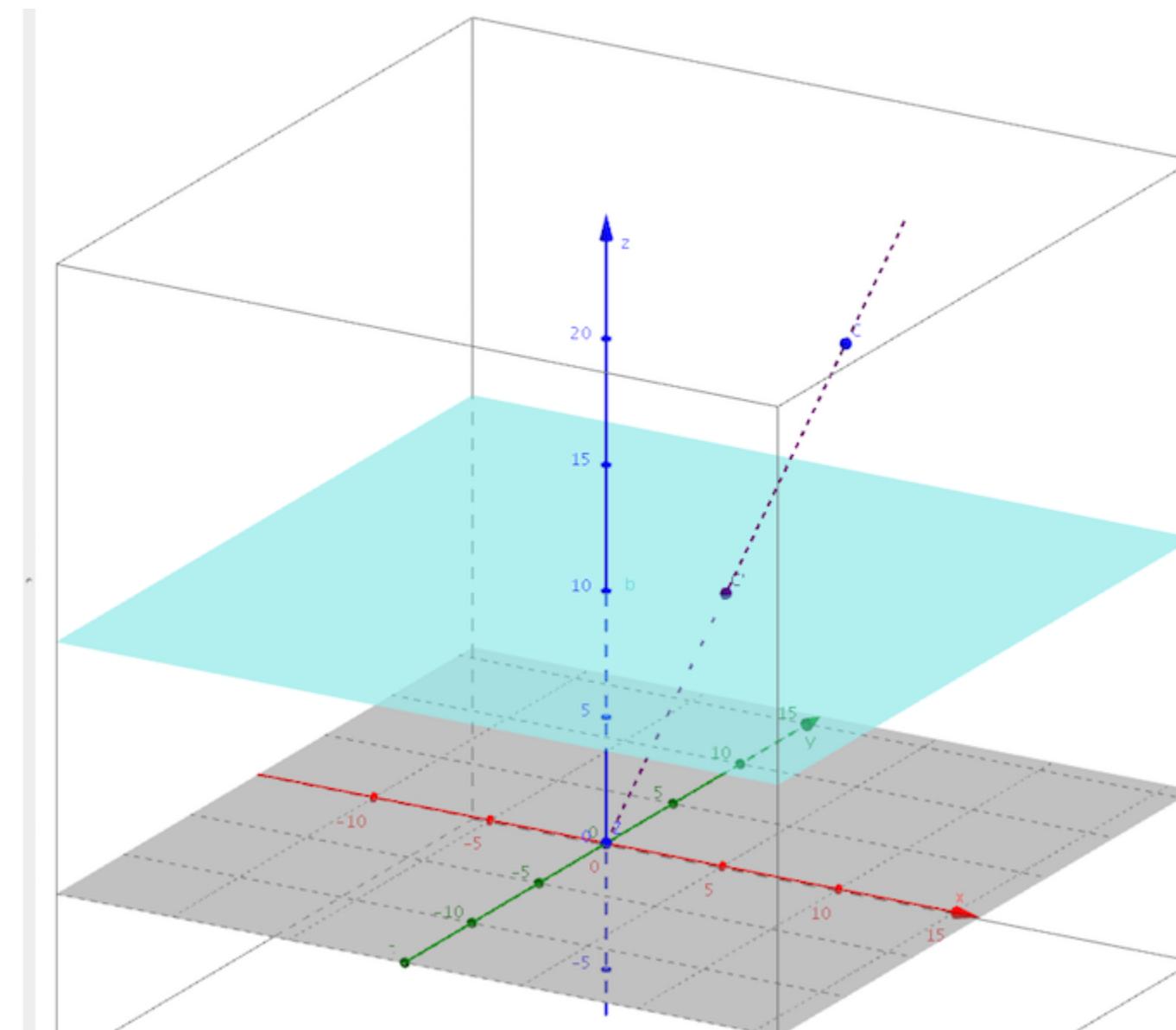
# ÜBERGANG HOMOGENEN KOORDINATEN ZU KARTESISCHEN KOORDINATEN

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\z/f\end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix}f/z\cdot x\\f/z\cdot y\\f/z\cdot z\end{pmatrix}$$

## ZAHLENBEISPIEL

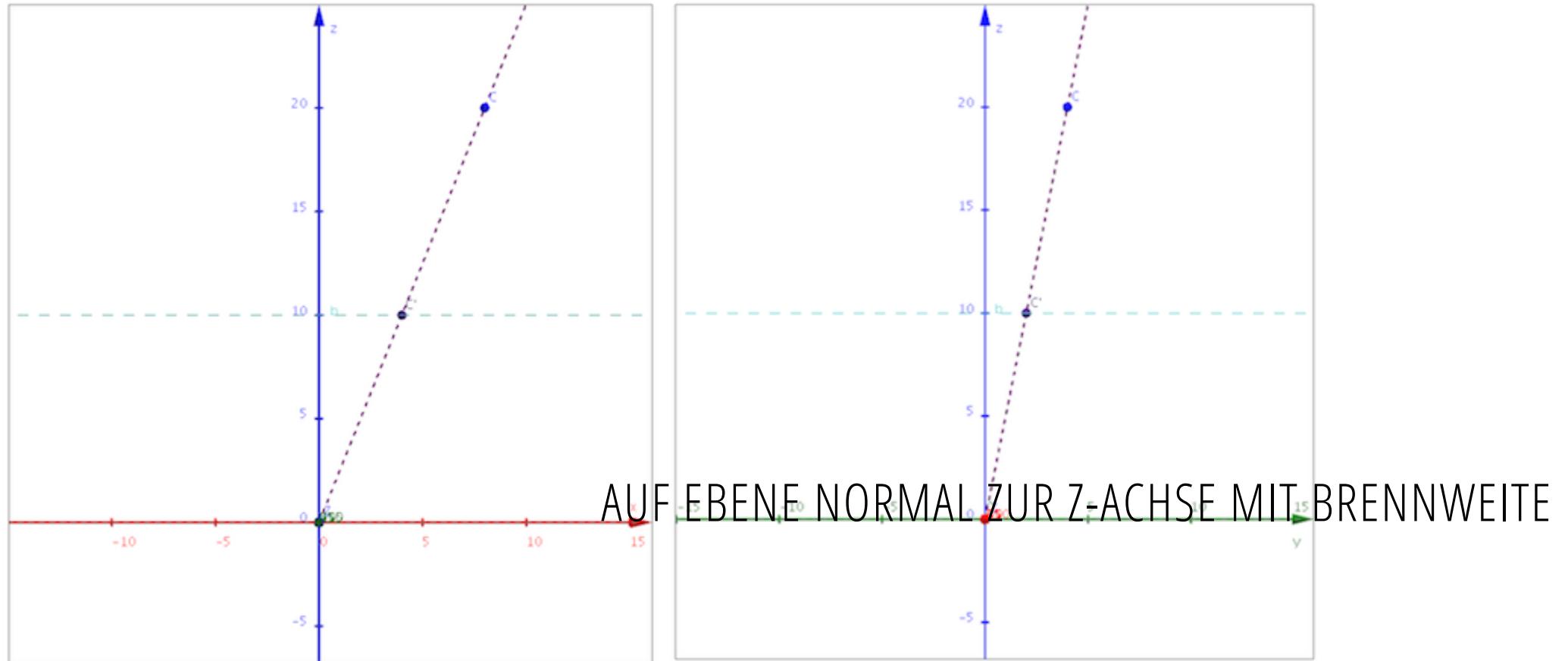
- Sei  $f = 10$
- Ein Punkt  $(8,4,20)$  soll auf die Normalebene zur Z-Achse im Abstand von 10 abgebildet werden.

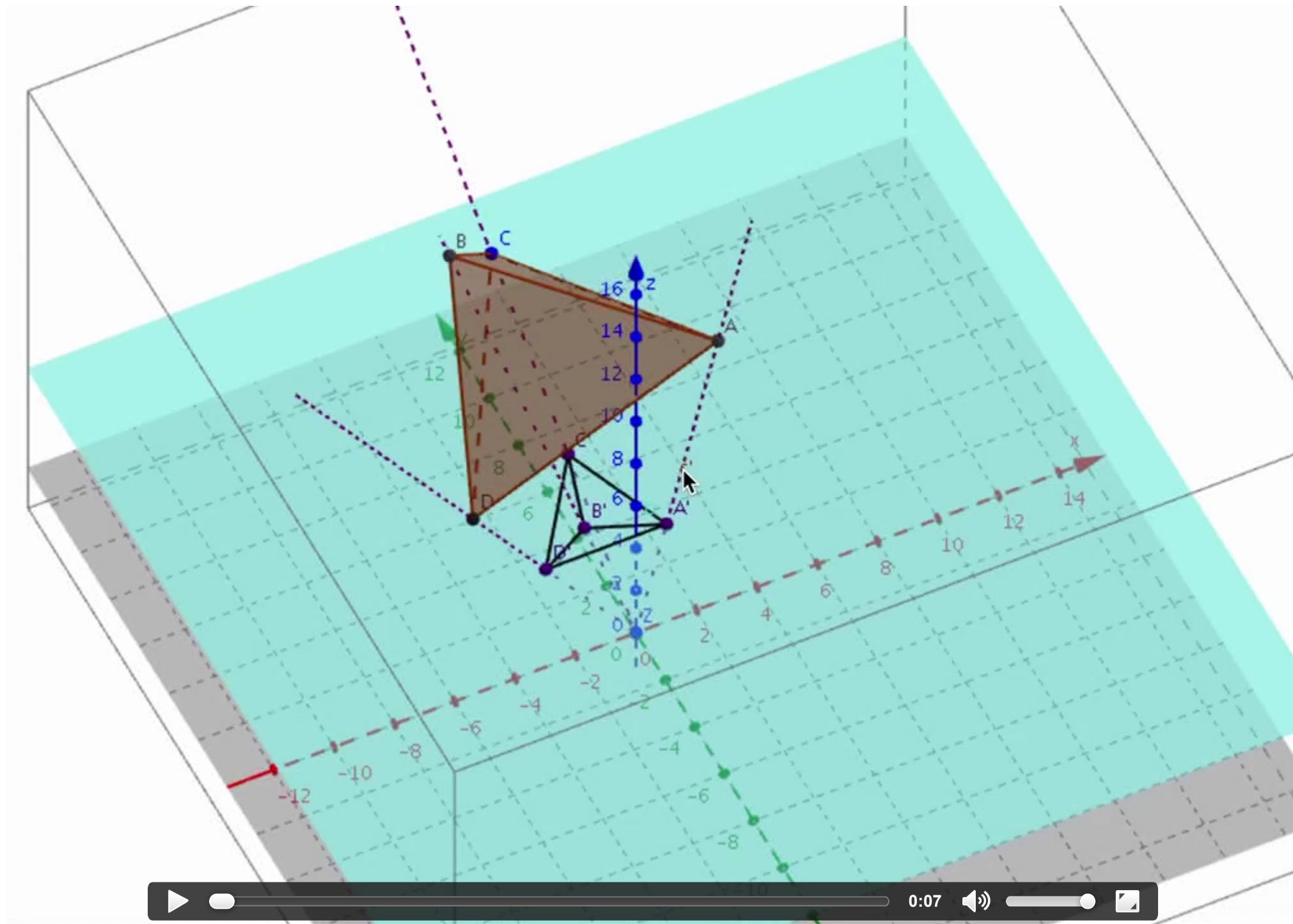
- ⊖ List
  - $\text{CH} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\text{CH}' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - $\text{PM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$
- ⊖ Number
  - $f = 10$
- ⊕ Plane3D
- ⊖ Point3D
  - $C = (8, 4, 20)$
  - $C' = (4, 2, 10)$
  - $Z = (0, 0, 0)$
- ⊖ Ray3D
  - $s1: X = (0, 0, 0) + \lambda (8, 4, 20)$



$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

# ZENTRALPROJEKTION





# HOMOGENE KOORDINATEN FÜR $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Transformation

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x/(Q_z) \\ Q_y/(Q_z) \end{pmatrix}$$

# ZENTRALPROJEKTION

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

HOMOGENE KOORDINATEN

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

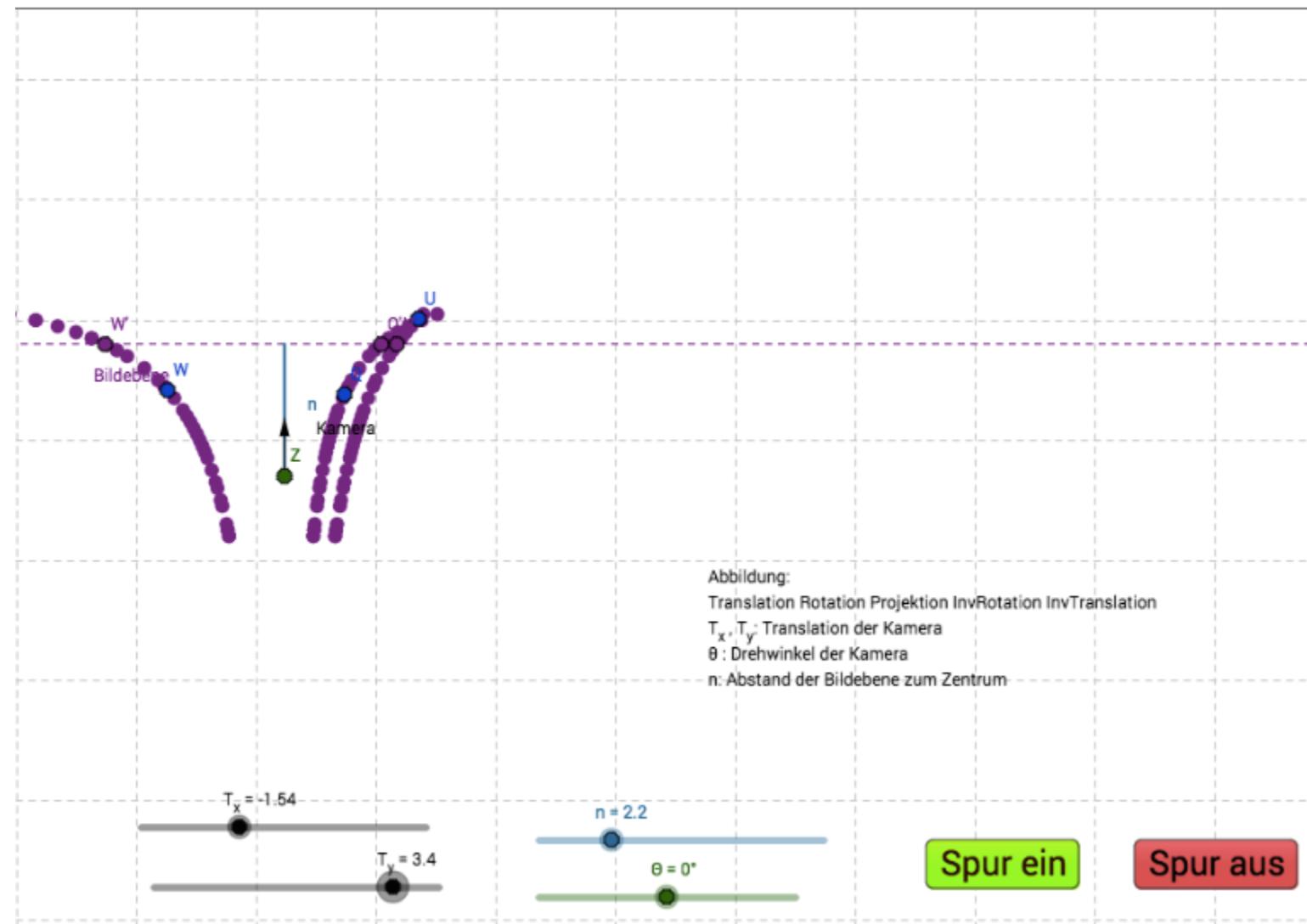
# ROTATION

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# TRANSLATION

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# ZENTRALPROJEKTION



[Link auf GeoGebraTube](#)

# ZENTRALPROJEKTION IM KINO

## IM KINO

versuchen Agenten in einen Tresorraum einzudringen, ohne dass Sie von einem Wächter entdeckt werden.

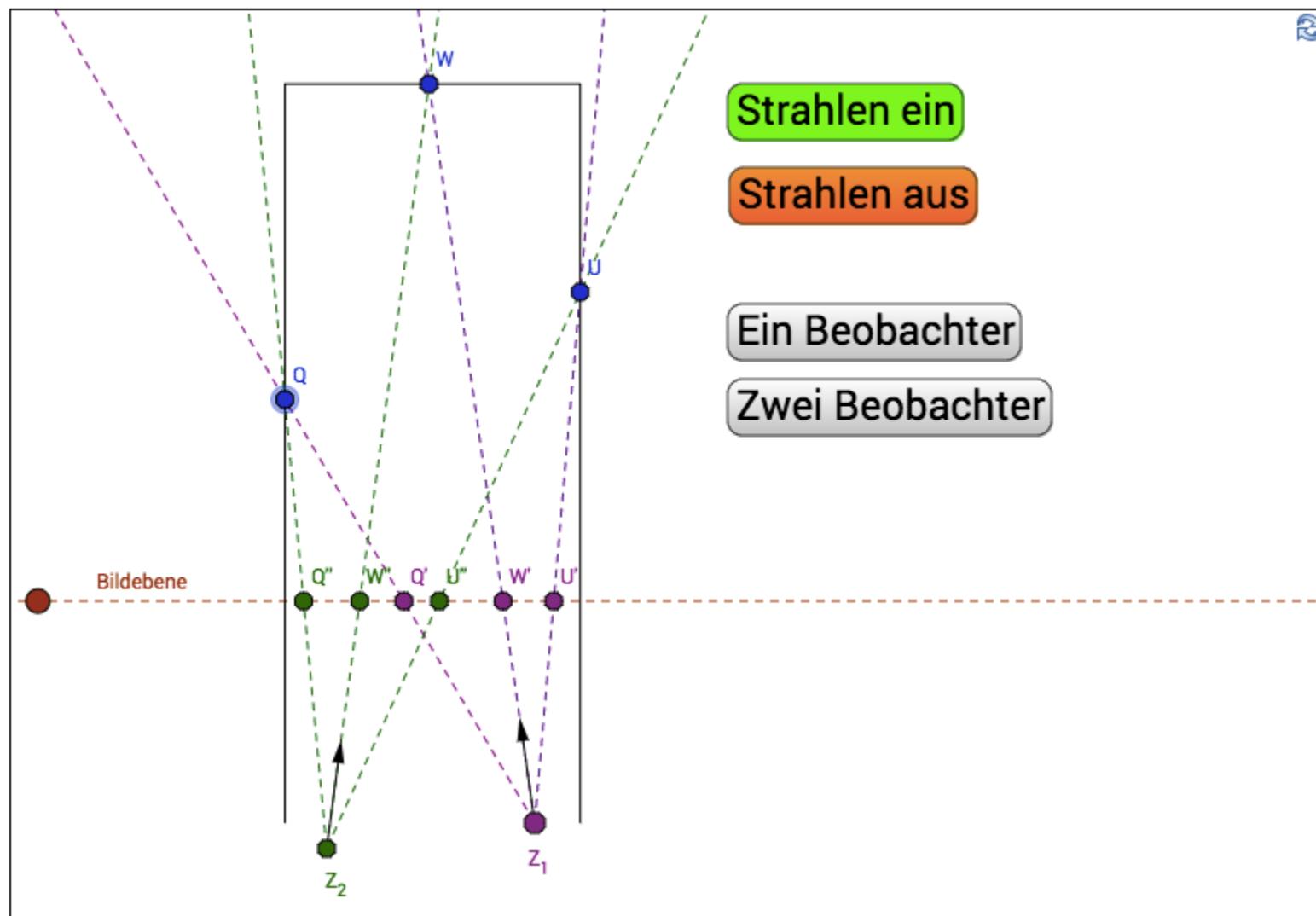
Sie projizieren dafür den hinteren Teil eines schmalen Gangs perspektivisch auf eine Leinwand (Bildebene).

Anschliessend bewegen sie die Leinwand langsam nach vorne.

Die Sache fliegt in dem Moment auf, in welchem ein zweiter Betrachter hinzu kommt.

# AUSSCHNITT MISSION IMPOSSIBLE 4



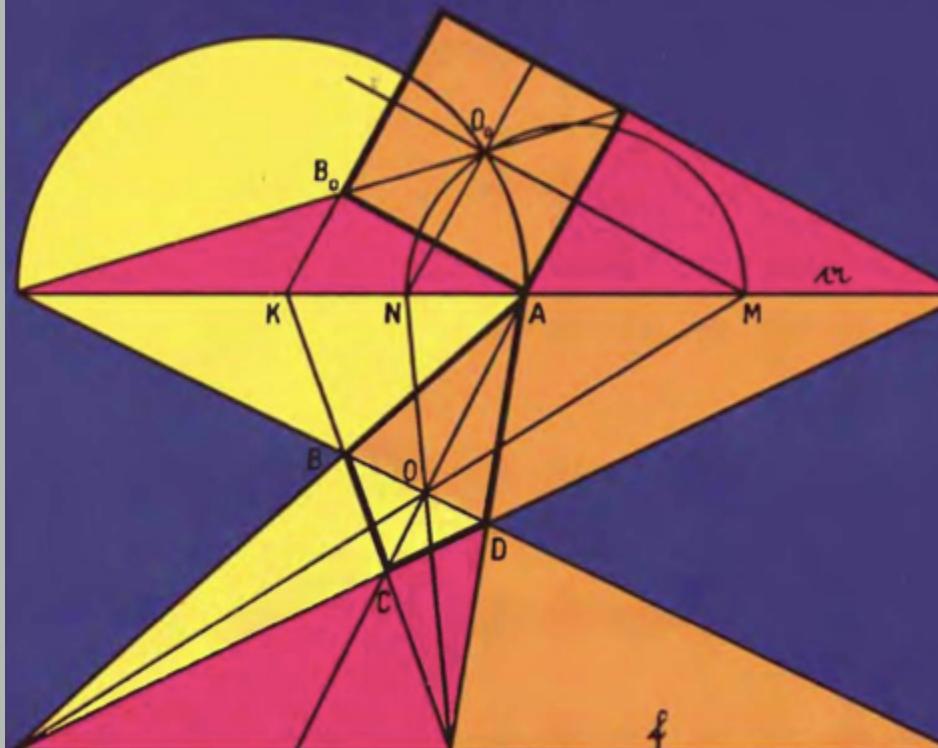


[Link GeoGebraTube](#)

# FERMAT-PUNKT

100  
Great Problems of  
Elementary Mathematics  
THEIR HISTORY AND SOLUTION

Heinrich Dörrie  
Translated by David Antin



91

## Fermat's Problem for Torricelli

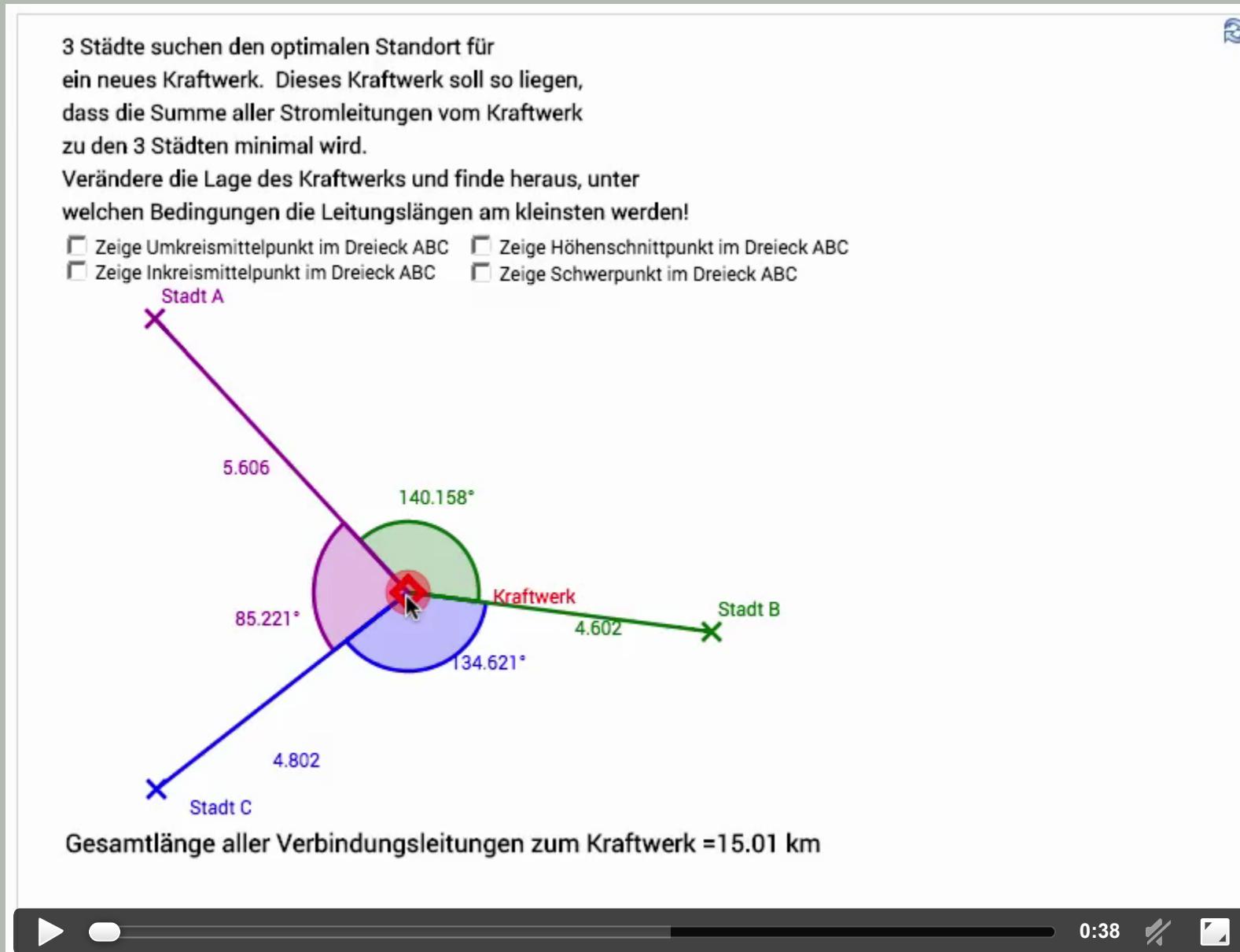
*To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.*

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

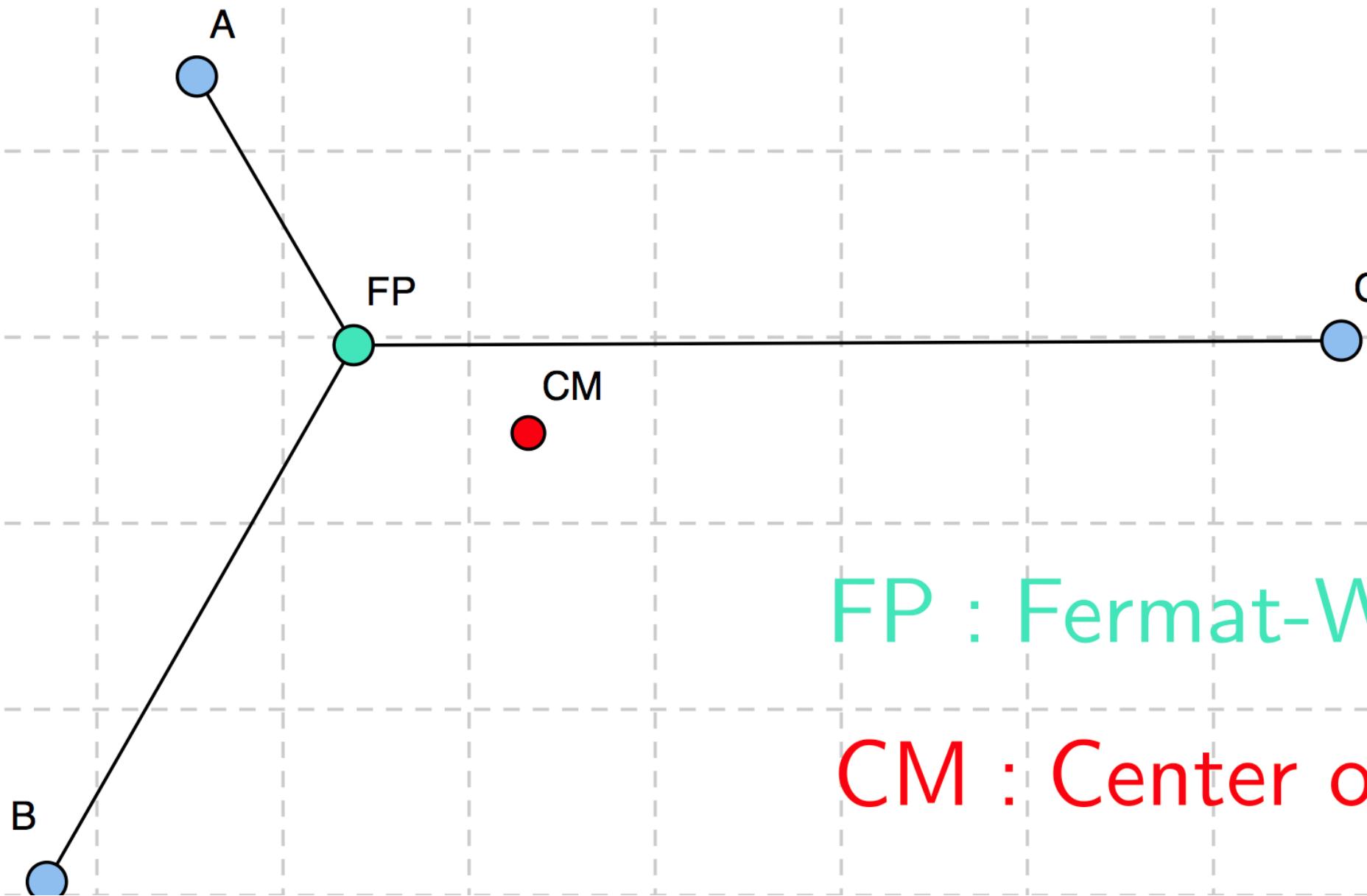
[Dorrie, H. \(1965\). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.](#)

# OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS



Link zu GeoGebraTube: [Der Neubau des Kraftwerks](#) von [Ulrich Steinmetz](#)

$$\text{minimize}_{x,y} \quad f(x, y) = \sum_{i=1..n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

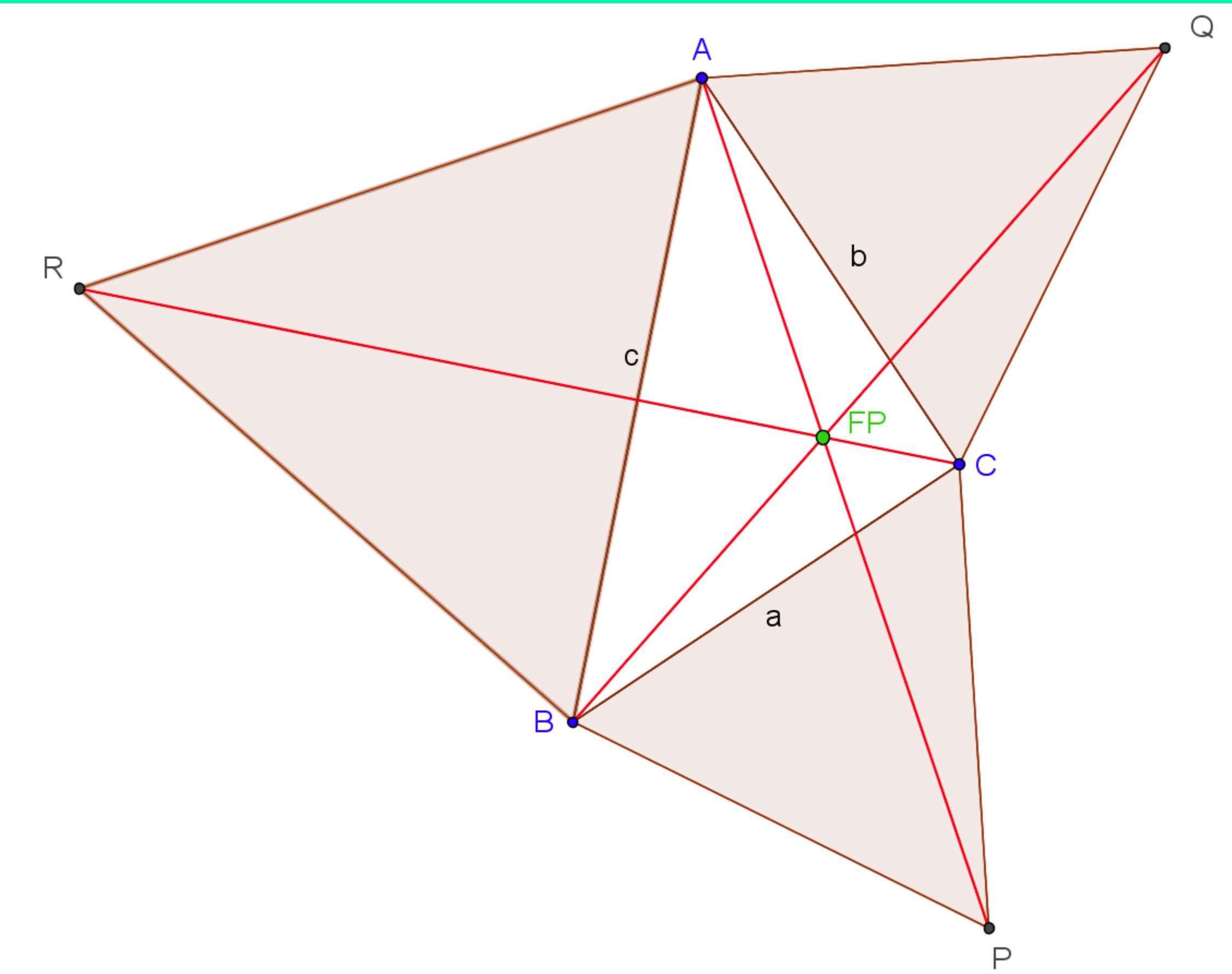


FP : Fermat-Weber Point

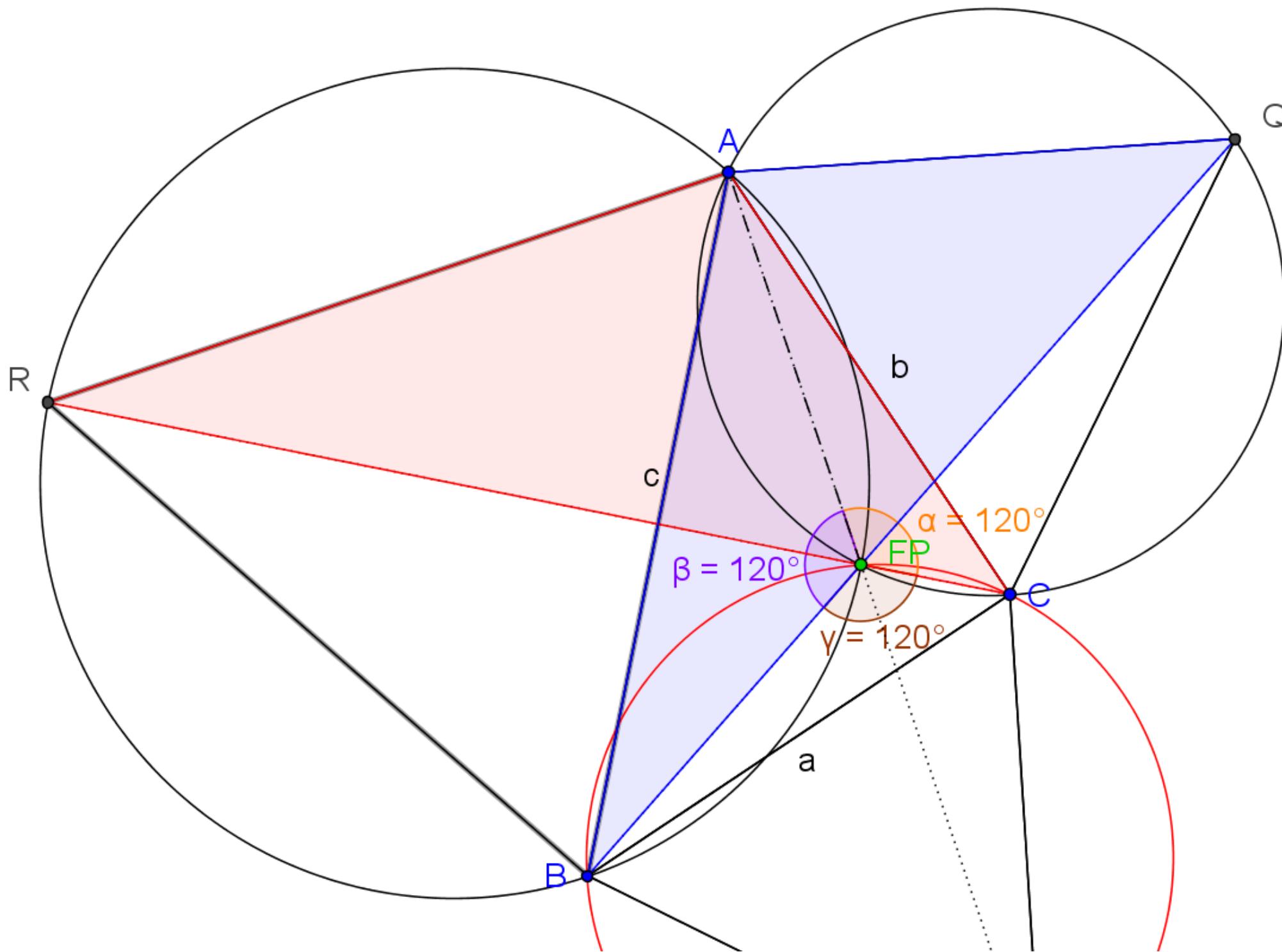
CM : Center of mass

# EXAKTE LÖSUNG

FÜR N = 3



# GEOMETRISCHER BEWEIS



**WER** HAT ALS ERSTES EIN NUMERISCHES  
LÖSUNGSVERFAHREN FÜR **N>3** GEFUNDEN?

# FACILITY LOCATION PROBLEMS EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinski** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

---

M. L. Balinski. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.



I was sixteen when I became intrigued with the N point problem

***Andrew Vázsonyi, 1932***

Consider  $N$  points and one more point,  $X$ . Measure the distances between  $X$  and the given points, then add the distances. Find point  $X$  so that this sum is the smallest possible.

Andrew Vázsonyi

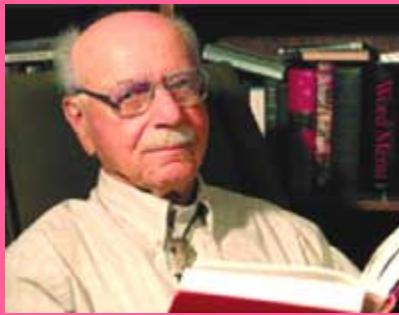
I found the point  $x$  by using an infinite, recursive algorithm, a most unusual solution for a problem in geometry. You start with a point  $x_0$ , anywhere, and search for a better solution.

Andrew Vázsonyi, 1937

The paper "Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum", published in **Japan** in **1937** under the name **Endre Weiszfeld** became a classic in the mathematics of location analysis.

# WEISZFELD

## ALGORITHMUS



by Endre Weiszfeld, alias Andrew Vázsonyi (1916–2003), born in Budapest

# WEISZFELD ALGORITHMUS

$k$  Iterationsschritte

Ortsvektoren:  $\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_N$

Startpunkt  $\vec{y}_0$  im Schwerpunkt

$$\vec{y}_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\vec{x}_i}{\|\vec{x}_i - \vec{y}_k\|}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\vec{x}_i - \vec{y}_k\|}}$$

H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443–451, ISSN 0898-1221

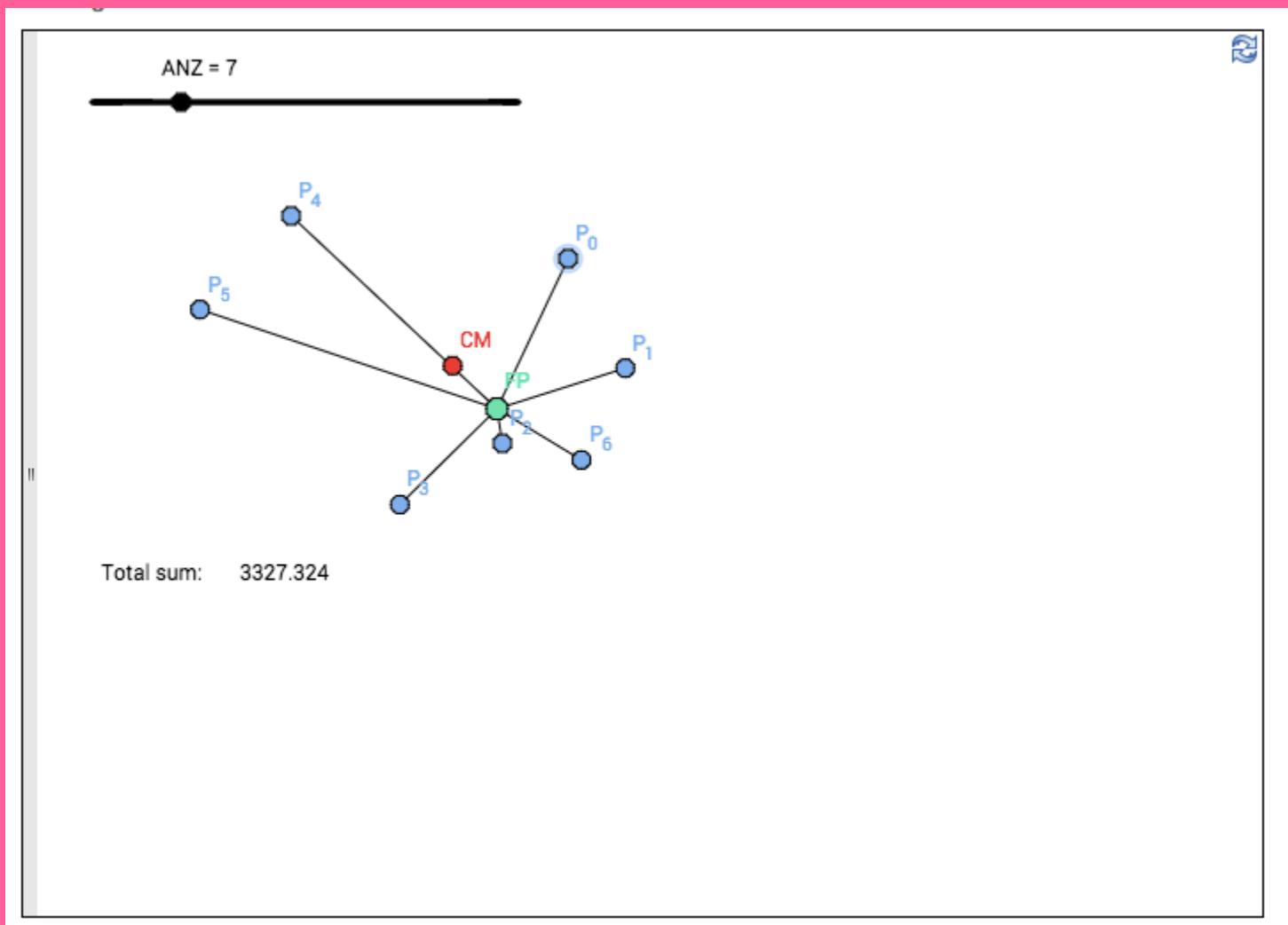
# WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (I)

```
geometric_median = function(epsilon) {  
    var P,Q;  
    P={};  
    P.x=gb.getXcoord("CM");  
    P.y=gb.getYcoord("CM");  
  
    while (true){  
        Q = median_approx(P);  
        if (eukl_distance(P, Q) < epsilon){  
            return Q;  
        }  
        P = Q;  
    }  
};
```

# WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (II)

```
median_approx = function(P) {  
    var W,x,y,d,w,_len,_i,Q;  
    W=x=y=0.0;  
    Q={};  
    _len=xl.length  
    for (_i = 0; _i < _len; _i++) {  
        Q.x = xl[_i];  
        Q.y = yl[_i];  
        d=eukl_distance(Q,P);  
        if (d != 0){  
            w =1.0/d;  
            W+= w;  
            x+=Q.x*w;  
            y+=Q.y*w;  
        }  
    }  
    Q.x = x/W;  
    Q.y = y/W;  
    return Q;  
};
```

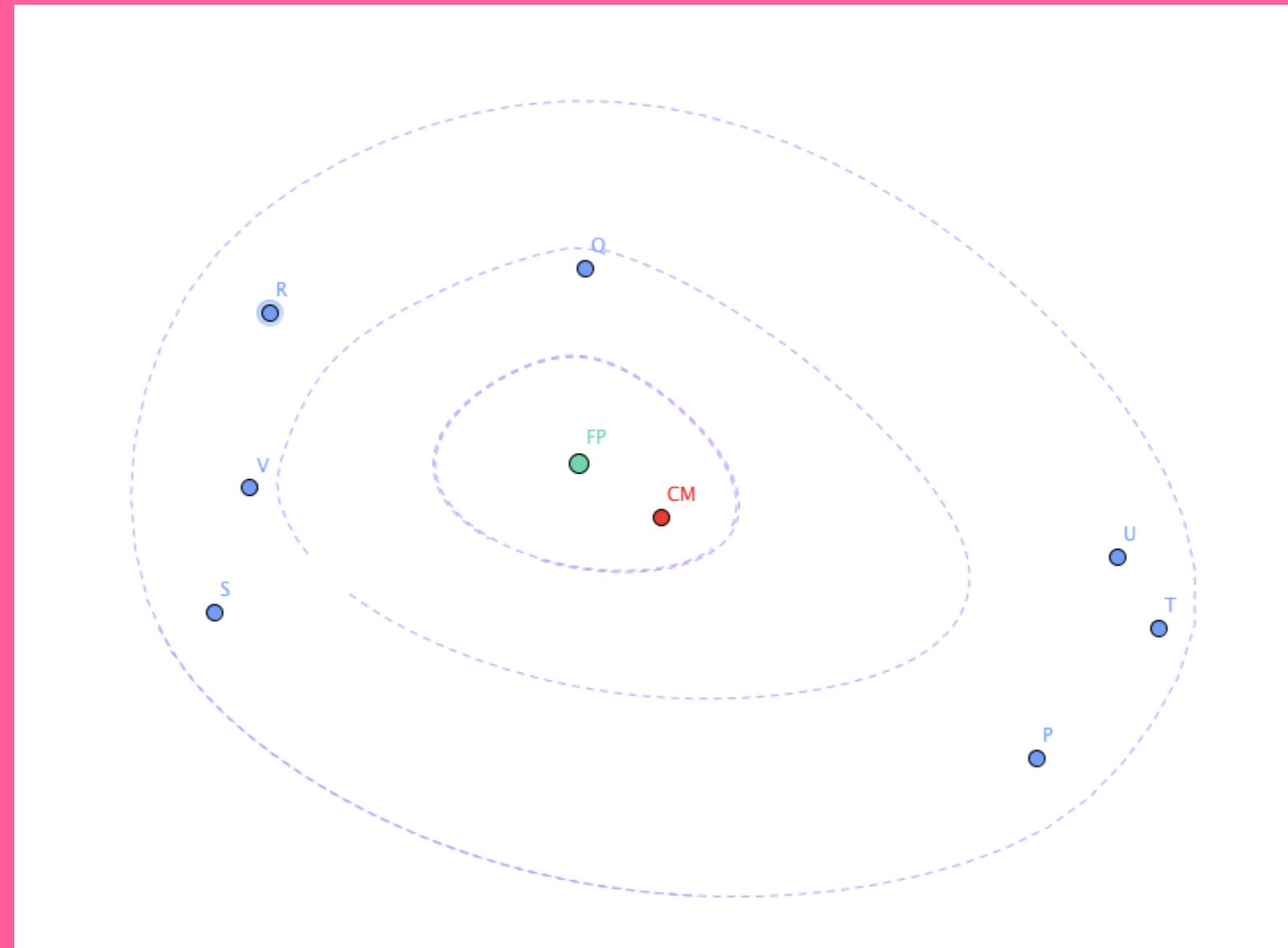
# Fermat-Punkt für n>3



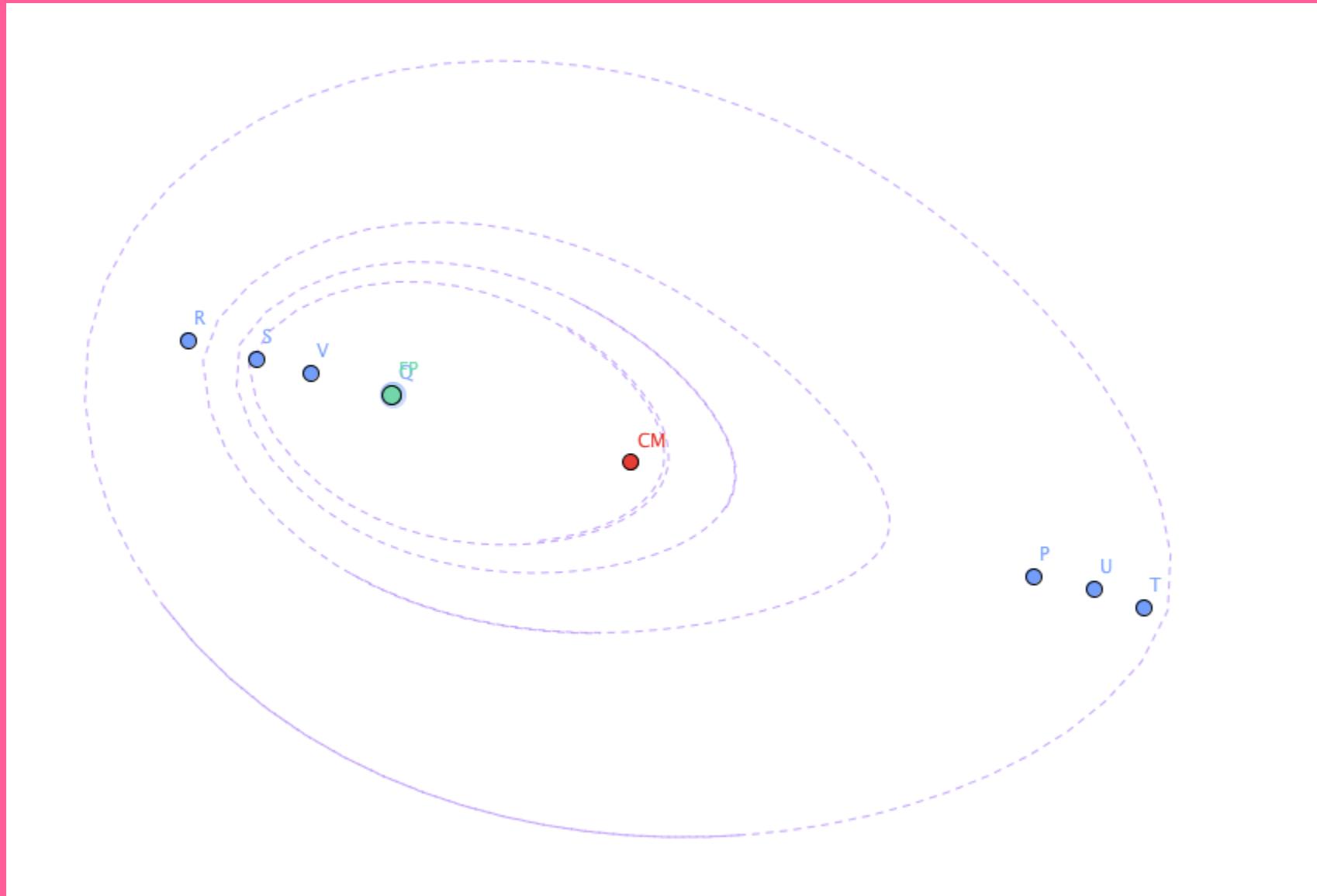
[Link GeoGebraTube](#)

# POTENZIALE UND ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN

[Link GeoGebraTube](#)

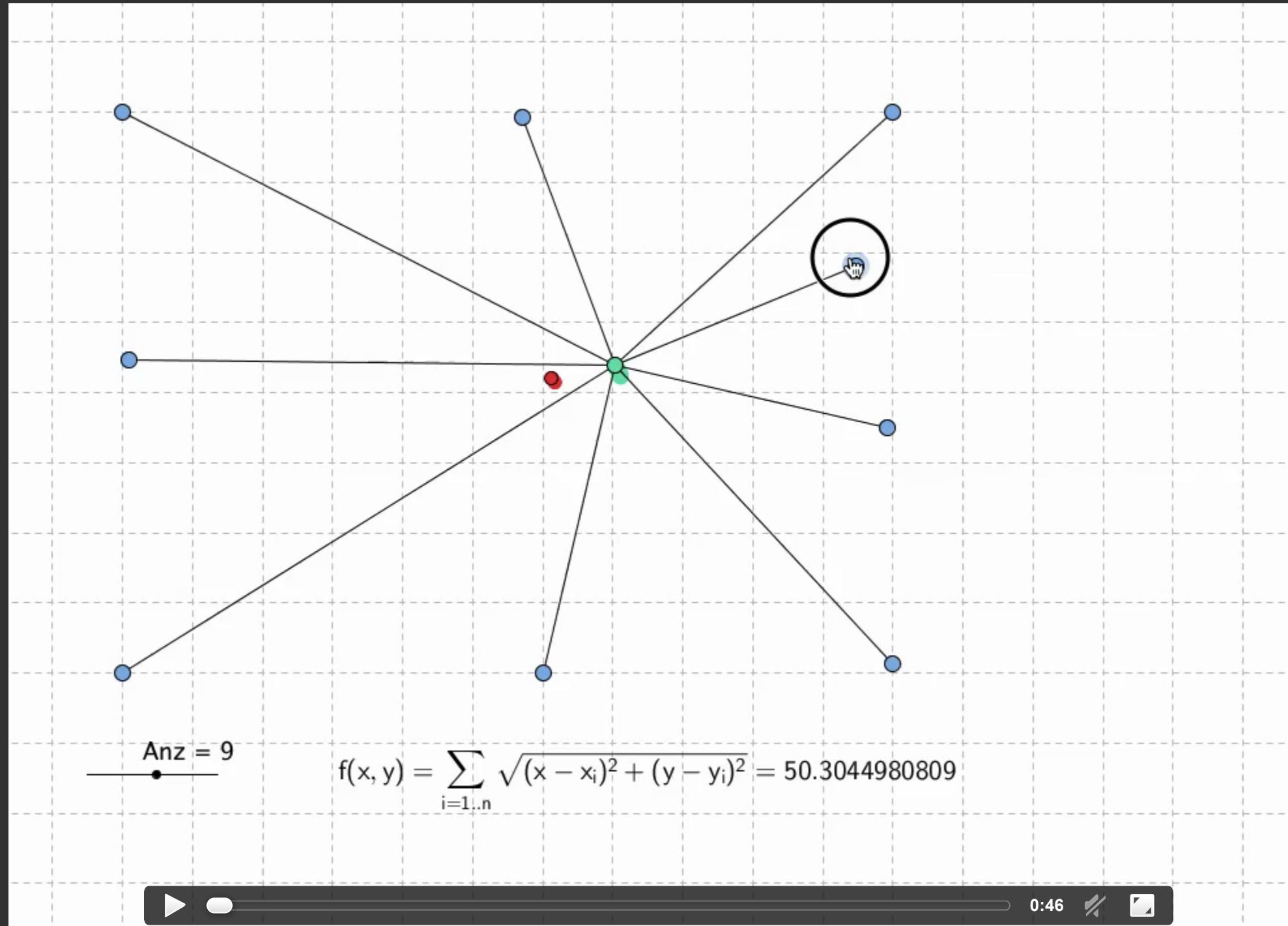


# IM EIN DIMENSIONALEN FALL SPRINGT DER FERMAT-PUNKT AUF DEN MEDIAN

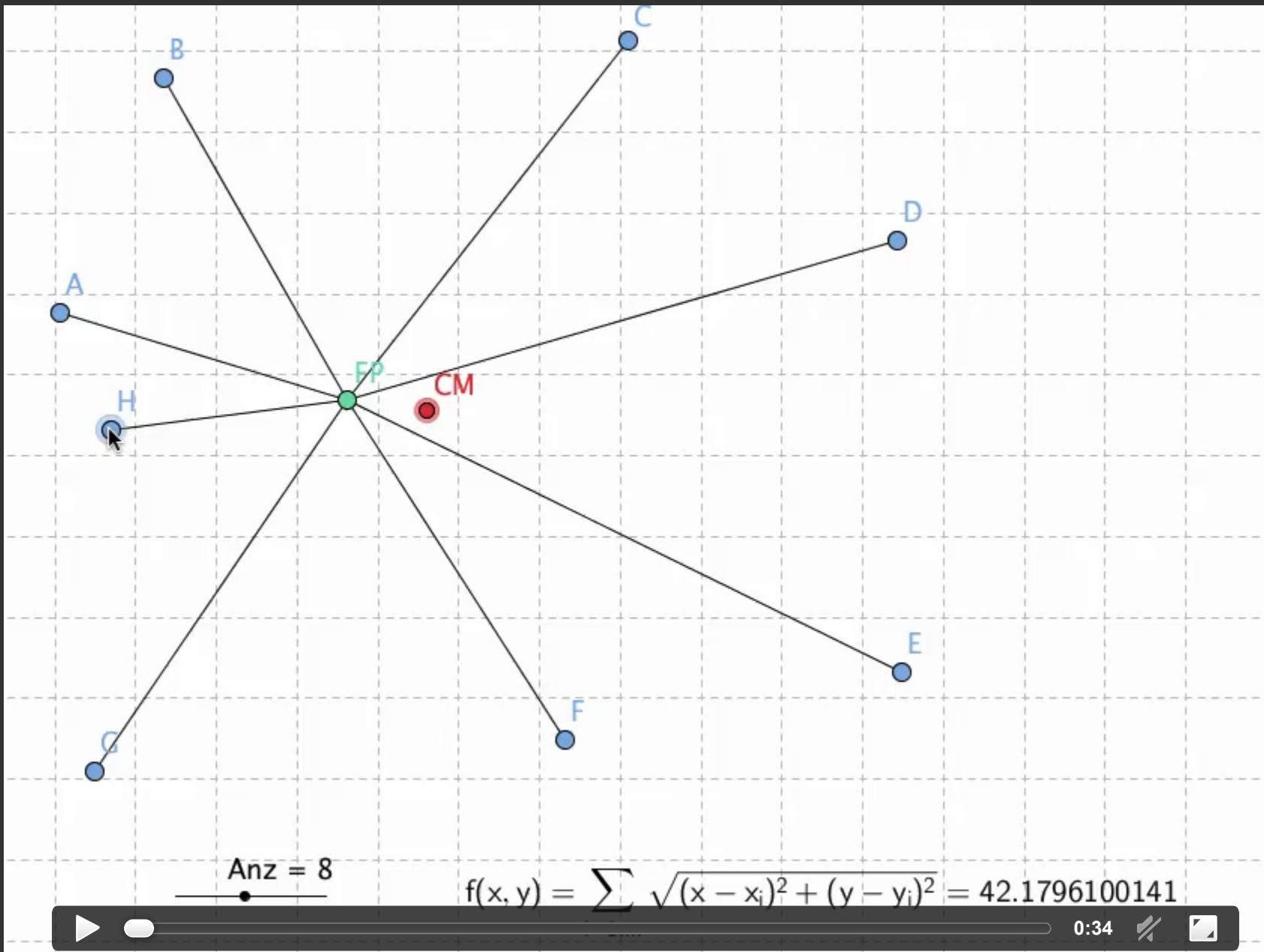


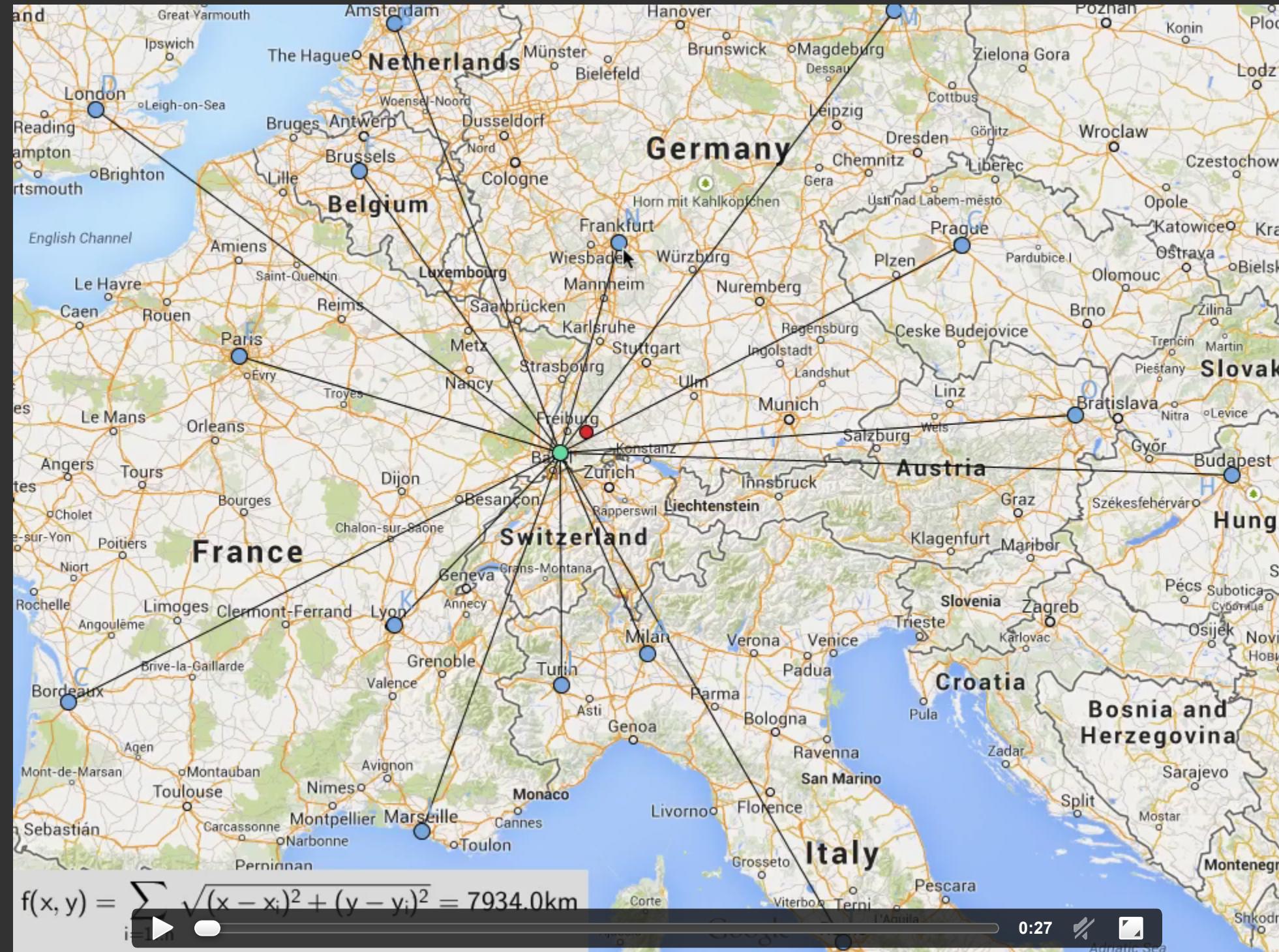
# NUMERISCHE EXPERIMENTE

# FP BEWEGT SICH AUF EINEM ORBIT



# FP SPRINGT AUF INNERE PUNKTE





Link GeoGebraTube