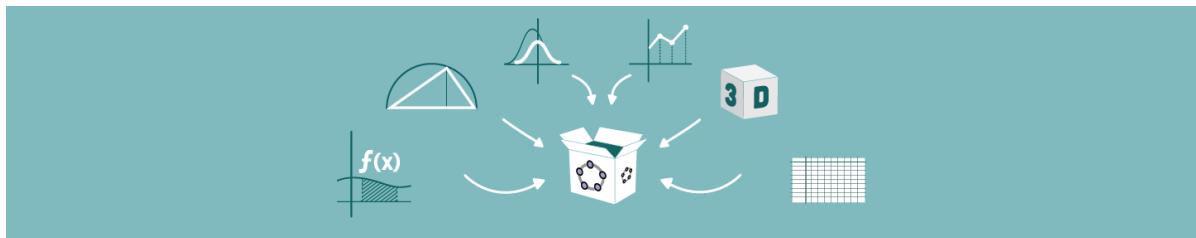


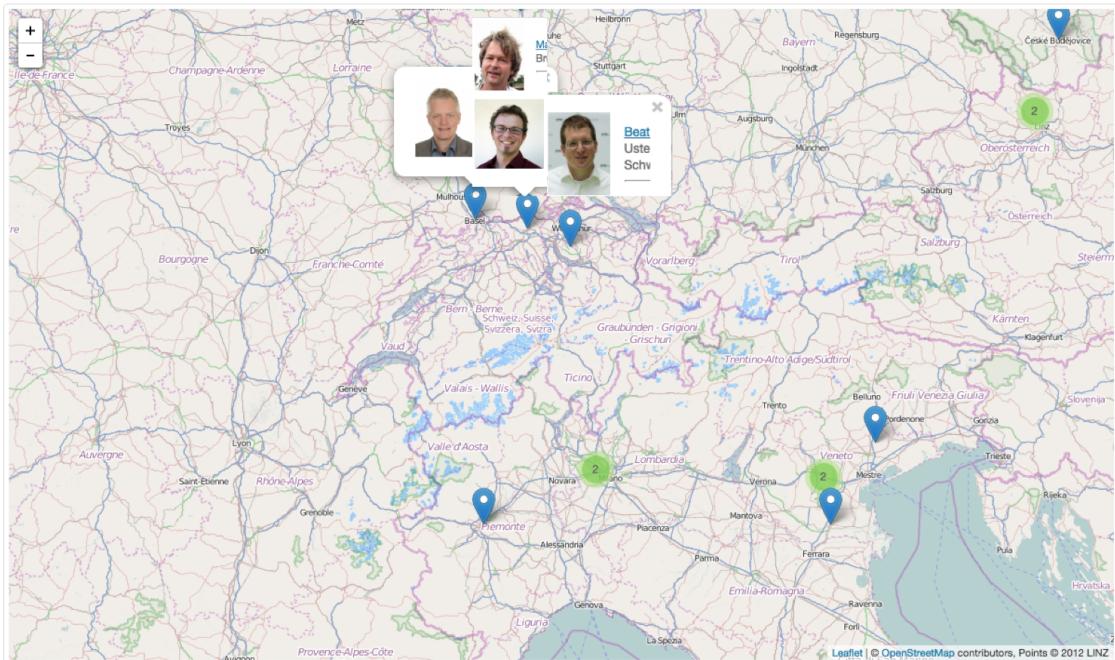
FORTBILDUNG GEOGEBRA



2015 GYMNASIUM LEONHARD

www.gymnasium-leonhard.ch

TORSTEN LINNEMANN & MARTIN GUGGISBERG



BEFÜRCHTUNGEN EINES KOLLEGEN

Trainieren sie (SuS) das Darstellungsvermögen nicht besser, in dem sie versuchen, im eigenen Kopf die verschiedenen Objekte sich vorzustellen? LP aus BL

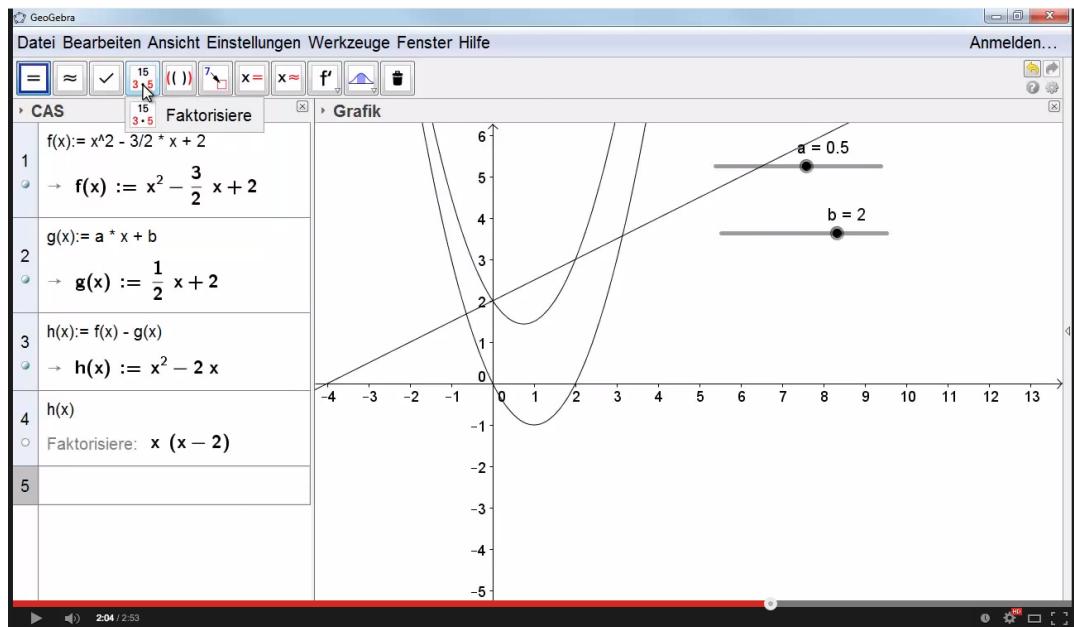
AGENDA

<http://mge.github.io/geogebra/slides/leonhard.html>

1. GeoGebra im Unterricht
2. Funktionen
3. Arbeiten mit CAS
4. Ebene Geometrie
5. Vektorgeometrie
6. Stochastik
7. Dessert
 - Tabellenkalkulation
 - Differentialgleichungen
 - Piratenaufgabe
 - Fermat-Punkt

GEOGEBRA IM UNTERRICHT

TECHNISCHE ASPEKTE



Lernvideos [YouTube GeoGebra channel](#), [Daniel Mentrard](#)

NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

Twitter: [@geogebra](#)

The Twitter profile for @geogebra features a cartoon illustration of a group of people in a social setting. Below the profile picture, the following statistics are displayed:

- TWEETS 2.422
- FOLGE ICH 611
- FOLLOWER 9.346
- FAVORITEN 78
- [Folgen](#)

The bio reads: "Dynamic Mathematics for Everyone".

The timeline shows two tweets:

- 22. Nov.** [Weekend meetings :\) fb.me/3VAfplguZ](#)
- 21. Nov.** Really enjoying the updates coming out of #ggbna2014 Looking forward to more pics and ideas from our amazing community.

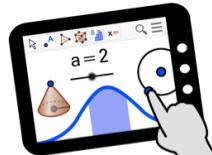
STARTSEITE



Dynamische Mathematik für Lernen und Unterricht



Materialien durchsuchen



Starte GeoGebra



Jetzt herunterladen

GEOGEBRA

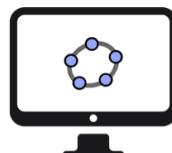
IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT
DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,

<http://geogebra.org/>

1. MÖGLICHKEIT GEOGEBRA INSTALLIEREN



GeoGebra für Tablets



GeoGebra für Desktop Computer



GeoGebra für Smartphones



Kommt bald!



[Mehr Download-Möglichkeiten für GeoGebra](#)

<http://www.geogebra.org/download>

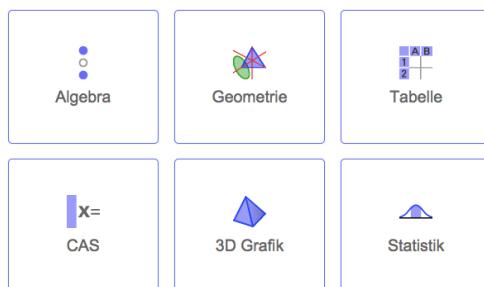
WICHTIG VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

2. MÖGLICHKEIT DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

(Firefox / Chrome ab Version > 40, Computer nicht älter als 3 Jahre)

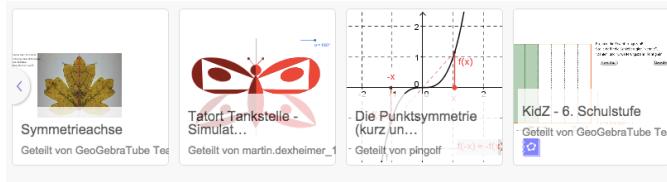
Etwas selbst erstellen



<http://web.geogebra.org/app>

GEOGEBRATUBE → MATERIALIEN FINDEN UND NUTZEN

<http://tube.geogebra.org/>



Neueste Materialien

Dr Who activity
23. November 2014 - 11:29
Geteilt von [Mark Wills](#)
0 0 0

Beginning Algebra
23. November 2014 - 10:26
2 Materialien — Geteilt von [james monaghan](#)
0 0 0

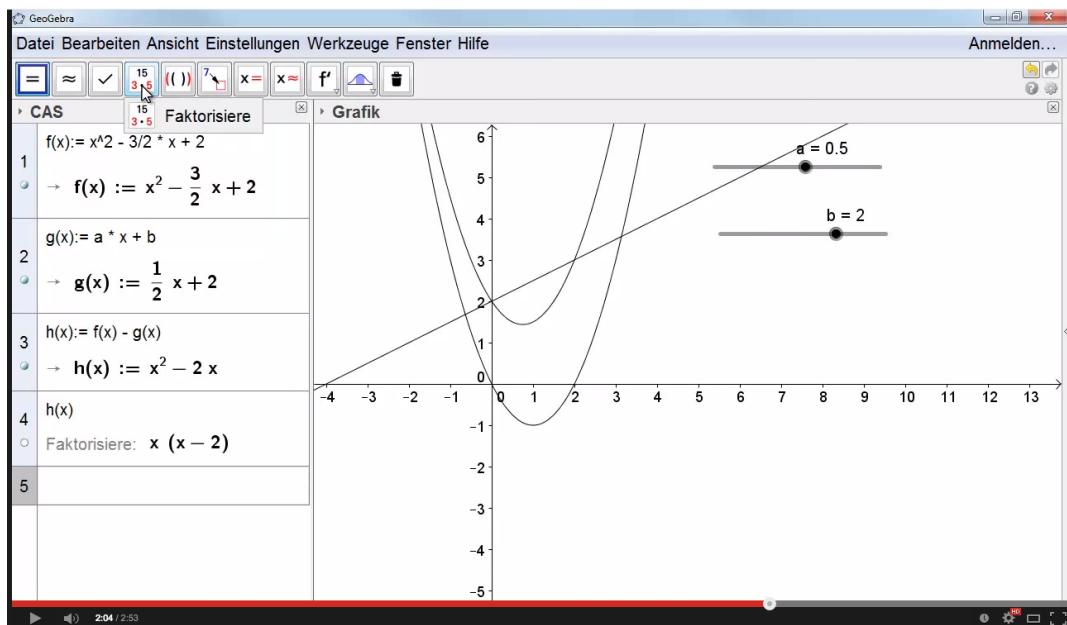
Beliebte Arbeitsblätter

animated clock
30. November 2012 - 14:29
Geteilt von [nguyengnhus0802](#)
15 0 1

KidZ - 5. Schulstufe
22. Januar 2014 - 15:27
10 Materialien — Geteilt von [GeoGebraTube Team](#)
0 0 0

Beliebte Tags

tessellation funct
algebra quadratic
3d physics angle
equations area
circle



Lernvideos: [YouTube GeoGebra channel](#)

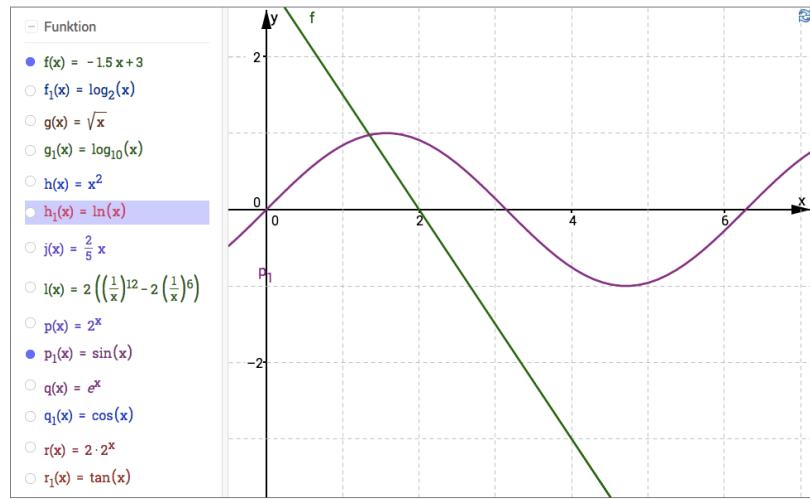
GEOGEBRA MATERIALIEN

GeoGebra Anwendungen selbstständig erproben und weitere Beispiele in
GeoGebraTube finden.

- Ober-/Untersummenberechnungen [B1](#) [B2](#)
- Geometrie und Funktionen [B0](#) [B1](#) [B2](#) [B3](#) [B4](#) [B5](#)
- Stochastik [B1](#) [B2](#) [B3](#) [B4](#)
- Regression [B1](#) [B2](#) [B3](#)

FUNKTIONEN

- Funktionen darstellen
- Funktionen mit Parameter
 - Maturaufgabe
 - Spur von Extrema



[Link auf GeoGebraTube](#)

LINEARE FUNKTIONEN

- [Graph einer linearen Funktion](#)
- [Handy Tarife](#)
- [Finde den Schnittpunkt zweier Geraden](#)
- [Zusammenhang Seitenlänge zum Umfang eines Quadrats](#)

QUADRATISCHE FUNKTIONEN

- Graph einer quadratischen Funktion
- Scheitelpunkt Parametrisierung
- Nullstellen Parametrisierung
- Verschiedene Arten der Parametrisierung
- Parabel auf Fontäne verschieben
- Aufgaben zu Scheitelpunktsform

FUNKTIONEN MIT EINEM PARAMETER

Gegeben: eine Funktion

$$f : x \mapsto -a \cdot x^2 + a \text{ für } a > 0$$

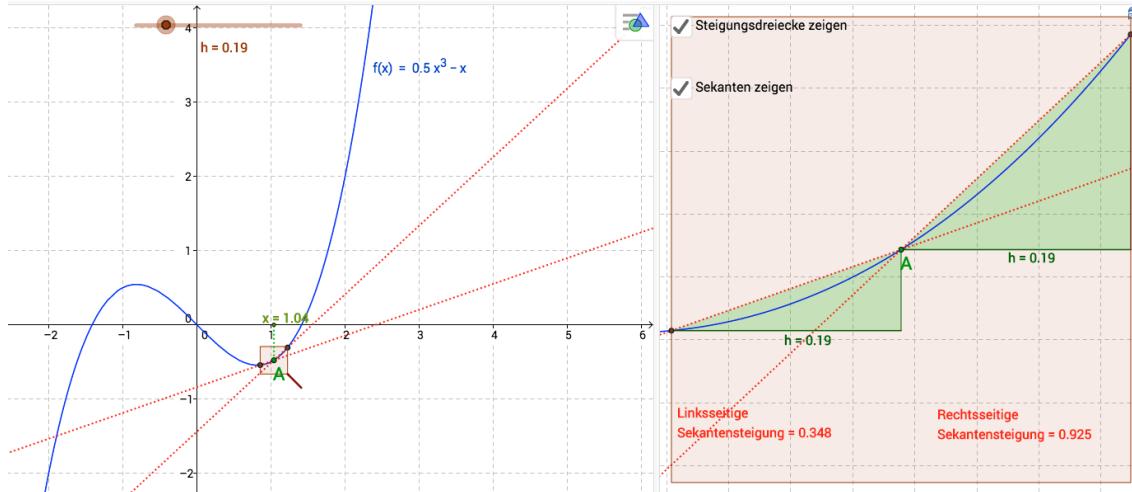
Gesucht: Ein Parameter a damit die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse den Wert 1 annimmt.

<http://tube.geogebra.org/student/m1263553>

FUNKTIONEN UNTER DER LUPE

H.-J. Eschenbroich

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/411519>



PUNKT AUF FUNKTION

1. Beweglicher Punkt auf der x-Achse
2. entsprechender Punkt auf einer Funktion

```
f(x) = x^2 * sin(x^2)
X_0 = Punkt[y=0]
P = (x(X_0), f(x(X_0)))
```

Punkt auf dem Graphen einer Funktion

VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

Eingabe:

```
g(x) = sqrt(x)
f(x) = x^2 (x - 1)

h(x) = f(g(x))

Nullstelle[h, 0]
Nullstelle[h, 5]
```

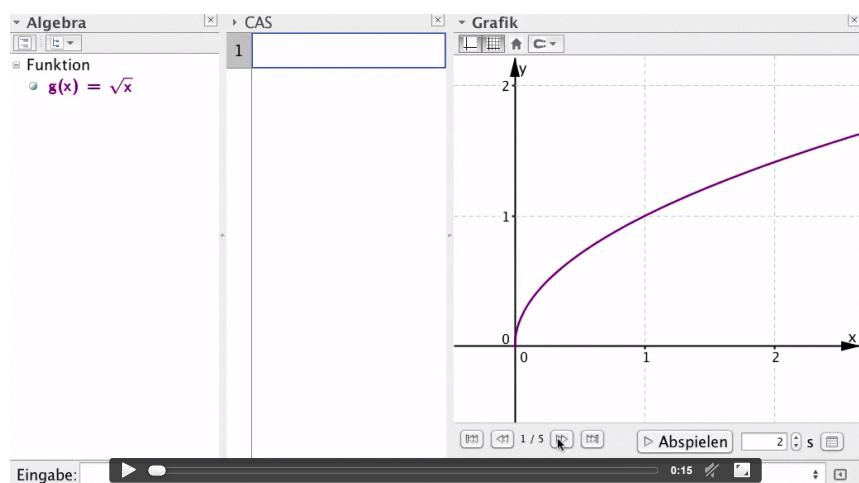
Im CAS-Fenster

```
Löse[h(x)=0]

Löse[h'(x)=0]
```

VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

[Link GeoGebraTube](#)



CAS DIREKT ALS WEBANWENDUNG NUTZEN

FINDE EINE FUNKTION $f(x)$ DRITTEN GRADES MIT DEN EIGENSCHAFTEN:

- $f(x)$ geht durch die Punkte $(-1, 1)$ und $(1, -1)$
- An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion $f(x)$ die Steigung -1 , also $f(1)' = -1$
- An der Stelle $x = -1$ hat $f(x)$ die Steigung 1 , also $f(-1)' = 1$

CAS Befehle

```
f(x) := a x^3 + b x^2+ c x+d  
f(-1) = 1  
f(1) = -1  
f'(1)=-1  
f'(-1) = 1  
Löse[{$2, $3, $4, $5},{a, b, c, d}]  
g(x):=Ersetze[$1,$6]
```

AUFTAG: TESTEN SIE ES GLEICH AUS!

[CAS im Browser](#)

FUNKTIONEN MIT PARAMETER (MATURAUFGABE OBERWIL 2014)

Wir führen nun den Parameter $a \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Funktionenschar f_a , die durch die Gleichung $f_a(x) = -ax^3 + (a+1)x^2$ gegeben ist.

- c) Zeigen Sie, dass der Graph von f_a unabhängig von a durch den Punkt $P(1 / 1)$ geht.
- d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a an der Stelle $x = 4$ ein Maximum hat.

Im Eingabe-Fenster

```
f(x, a) = -a x^3 + (a + 1) x^2
g(x) = f(x, a)
P = (1, 1)
```

Im CAS-Fenster

```
f(1,a)
Liste1:=Löse[g'(x) = 0]
Löse[Ableitung[f(x, b),x]=0,b]
```

Im Eingabe-Fenster

```
Mg = Element[Liste1, 2]
Q = (x(Mg), g(x(Mg)))
```

EBENE GEOMETRIE

Konstruktion von ebenen Figuren, Dreiecke, spezielle Punkte

ORTSLINIEN, SPUR: ARGUMENTIEREN

- Winkelhalbierende: <http://tube.geogebra.org/student/m320791>
- Symmetrie: <https://tube.geogebra.org/student/m188567>
- Gleicher Abstand: <https://tube.geogebra.org/student/m188578>
- Gleicher Abstand II <https://tube.geogebra.org/student/m188545>

TRIGONOMETRIE

- Cosinussatz beweisen: <https://tube.geogebra.org/student/m8932>
- Sinussatz beweisen: <https://tube.geogebra.org/student/m169620>
- unendlich viele Aufgaben zum Cosinus:
<https://tube.geogebra.org/student/m465263>
- unendlich viele Aufgaben zum Sinussatz
<https://tube.geogebra.org/material/show/id/491103>

TRIGONOMETRIE - GEOGEBRA-BOOKS

- Geogebra-Book: historischer Zugang von Hipparchos
<http://tube.geogebra.org/student/b775727>
- Winkelfunktionen, Einheitskreis, Bogenmass:
<http://tube.geogebra.org/student/b85550>

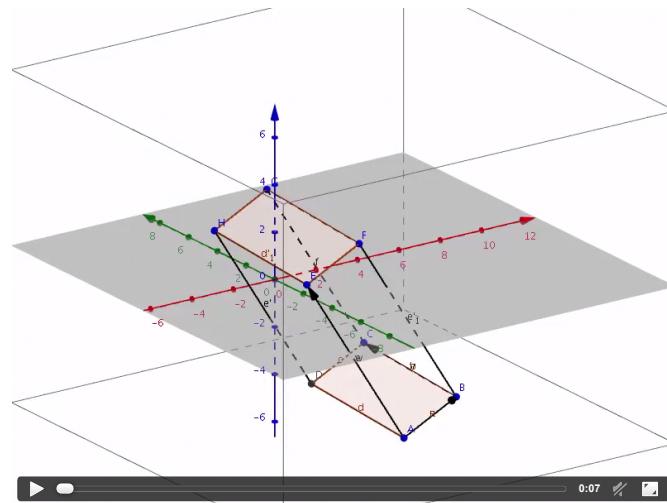
BINOMISCHE FORMELN

- Binomische Formeln: <https://tube.geogebra.org/student/b328019>
- Zweite binomische Formel ohne doppelt abgezogene Fläche:
<https://tube.geogebra.org/student/m55929>
- Zweite binomische Formel, Betonung negativer Fläche
<http://tube.geogebra.org/material/show/id/188588>
- Dritte binomische Formel: <https://tube.geogebra.org/student/m4718>

VEKTOR-GEOMETRIE

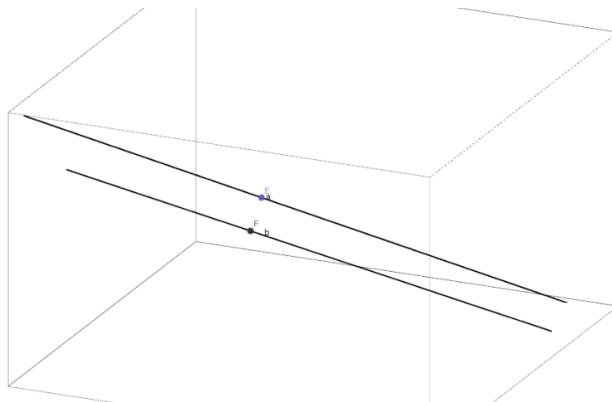
- Ein Spat
- Abstand zweier Geraden
- Würfelschnitte

EIN SPAT



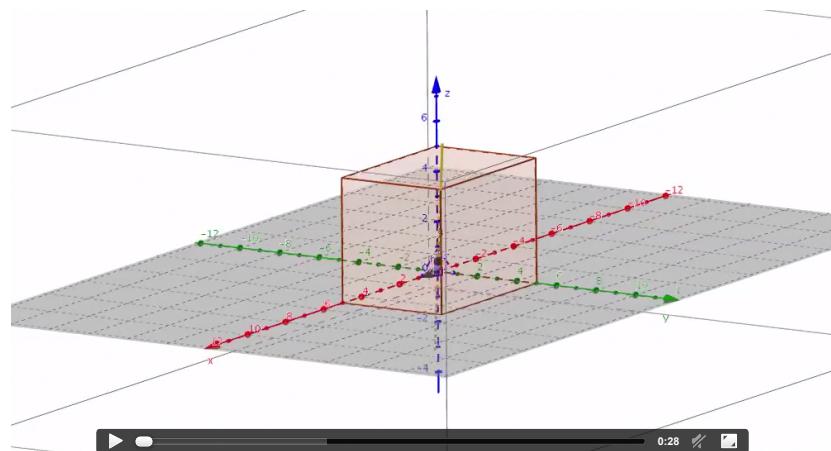
- <http://tube.geogebra.org/student/m320977>

ABSTAND ZWEIER GERADEN



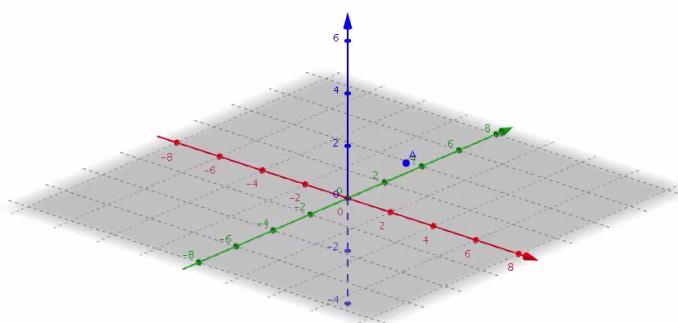
- <http://tube.geogebra.org/student/m320555>

WÜRFELSCHNITTE



- Diagonale Ebene <http://tube.geogebra.org/student/m321009>
- Beliebige Ebene <http://tube.geogebra.org/student/m321021>

PARAMETERFORM DER EBENENGLEICHUNG



- <http://tube.geogebra.org/student/m923395>

$$A(8 / 11 / 11)$$

$$P(5 / -1 / -13)$$

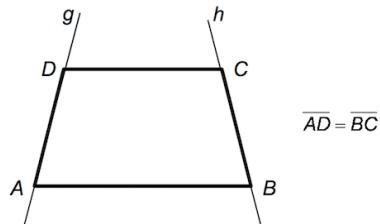
$$C(-1 / -1 / -1)$$

$$Q(13 / 7 / -9)$$

Die Gerade g geht durch die Punkte A und P .

Die Gerade h geht durch die Punkte C und Q .

- a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g und h .
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden.
- c) Unter welchem Winkel α schneiden sich die beiden Geraden g und h ?
- d) Die Geraden g und h liegen beide in der Ebene E . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E .
- e) Die oben gegebenen Punkte A und C sind Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Die Punkte A und D liegen auf der Geraden g . Die Punkte B und C liegen auf der Geraden h . Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte B und D .



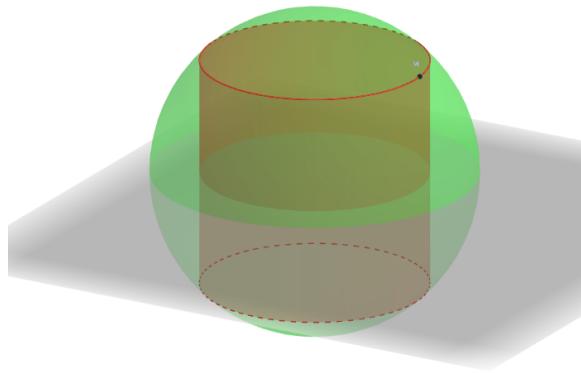
MATURAUFGABE ZUR VEKTORGEOMETRIE

GYM OBERWIL, GRUNDLAGENFACH 2014

- <https://tube.geogebra.org/student/m761969>

OPTIMIERUNGS AUFGABE 3D

Finde einen maximalen Zylinder in einer Kugel



Extremwertaufgabe

WÜRFELNETZE

<http://tube.geogebra.org/student/m713395>

How many nets of a cube ?

Try to find the eleven possible forms

Select the edges to cut:

AB BC CD AD
 AE BF CG DH
 EF FG GH EH



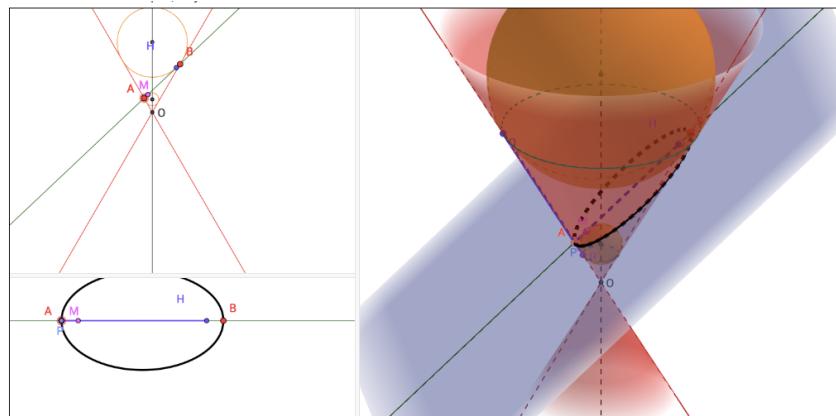
Cut the net

ouverture = 0.9

Close **Animate** **Open**

DANDELINSCHE KUGEL

<http://tube.geogebra.org/student/b151034#material/122750>



STOCHASTIK

STOCHASTIK MATURAUFGABE

<https://tube.geogebra.org/student/m769673>

6. Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben“ (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).
- 4+4+3 = 11 Punkte**
- Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
 - Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
 - Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?
 - Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?

TEILAUFGABE A - CAS-FENSTER

Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben“ (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).

- Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
 - Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?
- Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?

Aufgabe	Inhalt
1	Aufgabe a1 → 6 Aufgabe a1
2	BinomialKoeffizient(52, 5)
3	Aufgabe a2 → 6 Aufgabe a2
4	$1-(48/143)(52/47)$
5	im numerischen Modus
6	\$4 ≈ 0.34116
7	Aufgabe 6a3 → 6 Aufgabe a3
8	$5^4/(52!48!)$ ≈ $\frac{1}{54145}$
9	im numerischen Modus → Modus im numerischen
10	\$8 ≈ 0.00002

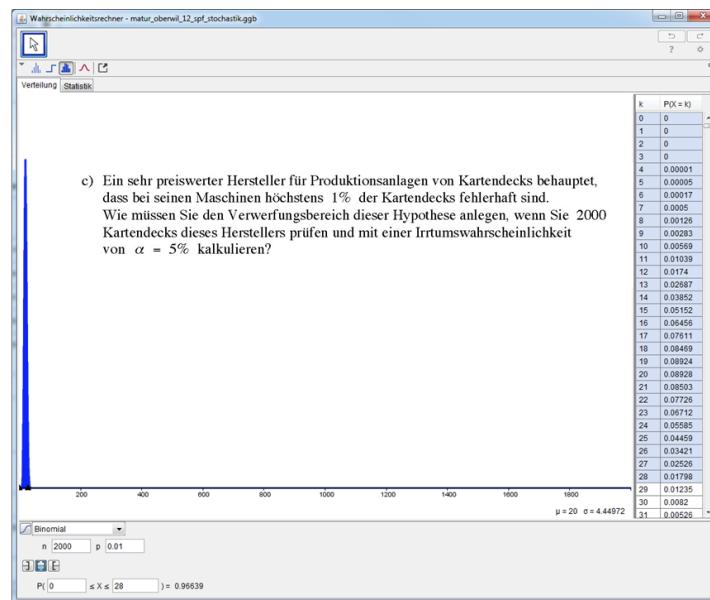
TEILAUFGABE A&B - CAS-FENSTER

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).

- Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?

Aufgabe	Inhalt
11	Aufgabe 6a4: 13 Möglichkeiten für Drillingswert
12	12 Möglichkeiten für Zwillingswert;
13	4 Möglichkeiten weggelassene Karte Drilling
14	6 Möglichkeiten für die weggelassene Karte
15	$13 \cdot (12) \cdot 4 \cdot (6) \text{BinomialKoeffizient}(52, 5)$ ≈ 0.00144
16	Aufgabe 6b1
17	$0.6 \cdot 0.001 + 0.4 \cdot 0.0005$ ≈ $\frac{1}{1250}$
18	\$17 ≈ 0.0008
19	Aufgabe b2
20	$(0.6 \cdot 0.999) \cdot (0.6 \cdot 0.999 - 0.4 \cdot 0.9995)$ ≈ 0.59988
21	

C - WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNER IM MENÜ ZUM CAS-FENSTER



STATISTIK

Beispiel Daten

DESSERT

- Tabellenkalkulation
- Differentialgleichungen
- Fermat-Punkt
- Piratenaufgabe

TABELLEN-KALKULATION

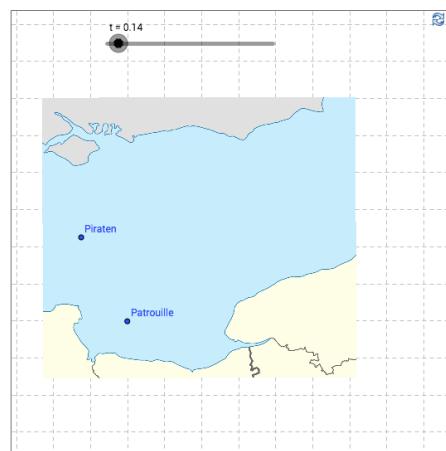
- Körperoberfläche <http://tube.geogebra.org/student/m321081>
- Digoxin <http://tube.geogebra.org/student/m321095>
- 1000 Zufallszahlen <http://tube.geogebra.org/student/m321107>

PIRATEN-AUFGABE

Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.

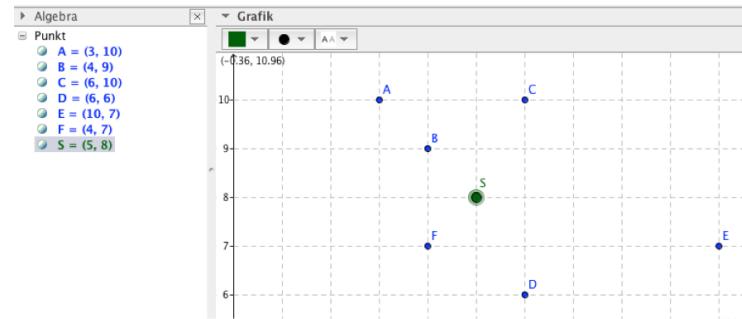
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.



[Link auf GeoGebraTube](#)

FERMAT-PUNKT

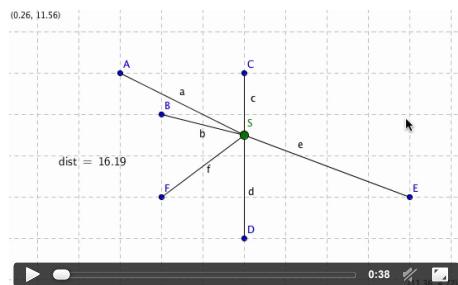
WO IST DER BESTE ORT FÜR EINEN SPIELPLATZ?



Roth-Sonnen Nicole, Leuders, T., Barzel, B., & Hußmann, (2005). Computer, Internet und co im Mathematikunterricht. (S. 190) Berlin: Cornelsen.

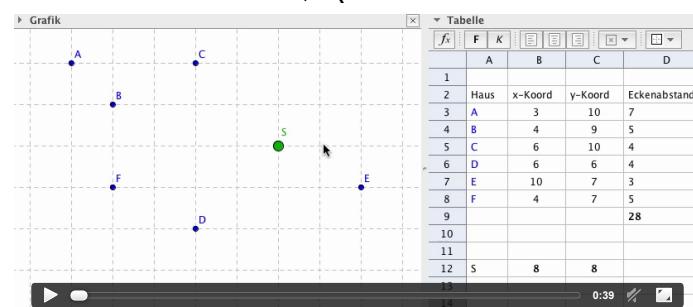
SCHÜLERINNEN UND SCHÜLER
SCHLÜPFEN IN DIE ROLLE EINES GUTACHTERS

LÖSUNG 1: DIREKTER WEG



[Link zu GeoGebraTube: Spielplatz Entfernung](#) von [Torsten Linnemann](#)

LÖSUNG 2: ECKENHAUSEN, QUADRATISCHES STRASSENNETZ



[Link zu GeoGebraTube: spielplatz Eckenhausen](#) von [Torsten Linnemann](#)

SCHÜLERINNEN UND SCHÜLER SCHLÜPFEN IN DIE ROLLE EINES GUTACHTERS

- Möglichst kurzer Weg ?
- Direkt (durch das Gelände) oder einer Strasse nach ?
- Sollen Häuser mit mehr Kindern äquivalent gewichtet werden ?
- Sollen grössere Entfernungen stärker gewichtet werden?

91 Fermat's Problem for Torricelli

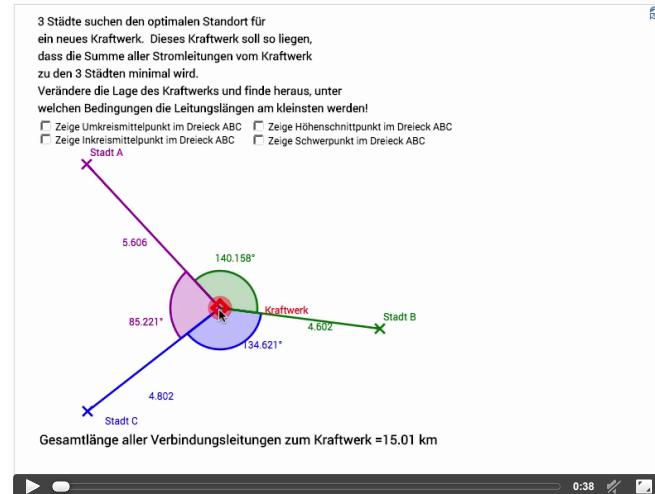
To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

Dorrie, H. (1965). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.

OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS



[Link zu GeoGebraTube: Der Neubau des Kraftwerks von Ulrich Steinmetz](#)

FACILITY LOCATION PROBLEMS EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinski** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

M. L. Balinski. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.

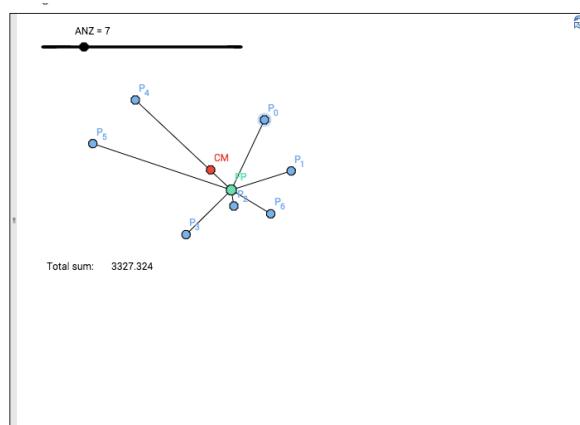


I was sixteen when I became intrigued with the N point problem

Andrew Vázsonyi, 1932

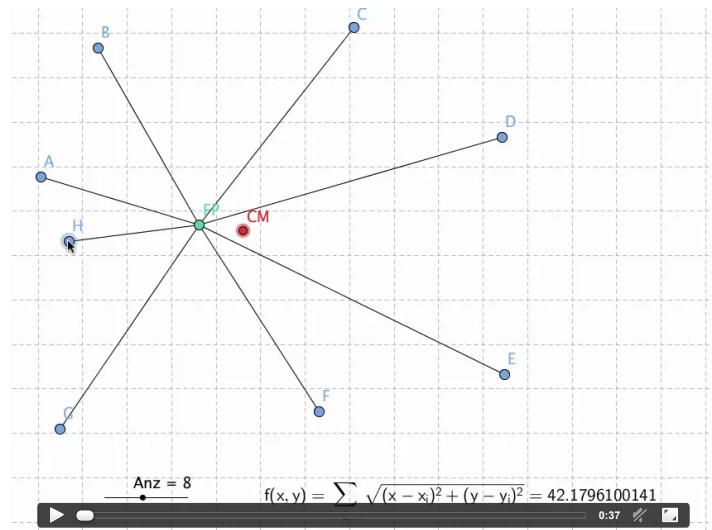
Veröffentlicht 1937 in Japan unter dem Namen "Endre Weiszfeld".

Fermat-Punkt für $n > 3$ - Ziehe am grünen Punkt

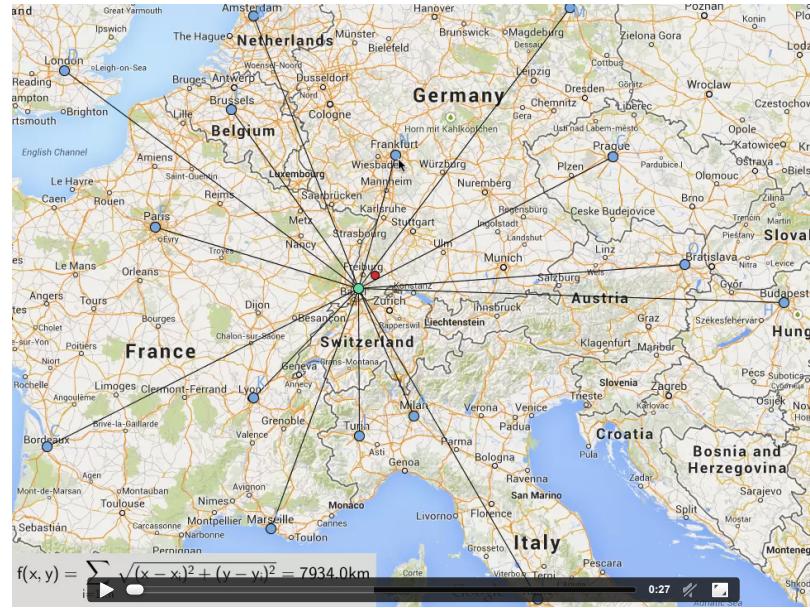


<http://tube.geogebra.org/material/show/id/52934>

FP SPRINGT AUF INNERE PUNKTE



WO BEFINDET SICH DER MITTELPUNKT VON EUROPA ?



<http://tube.geogebra.org/material/show/id/66049>