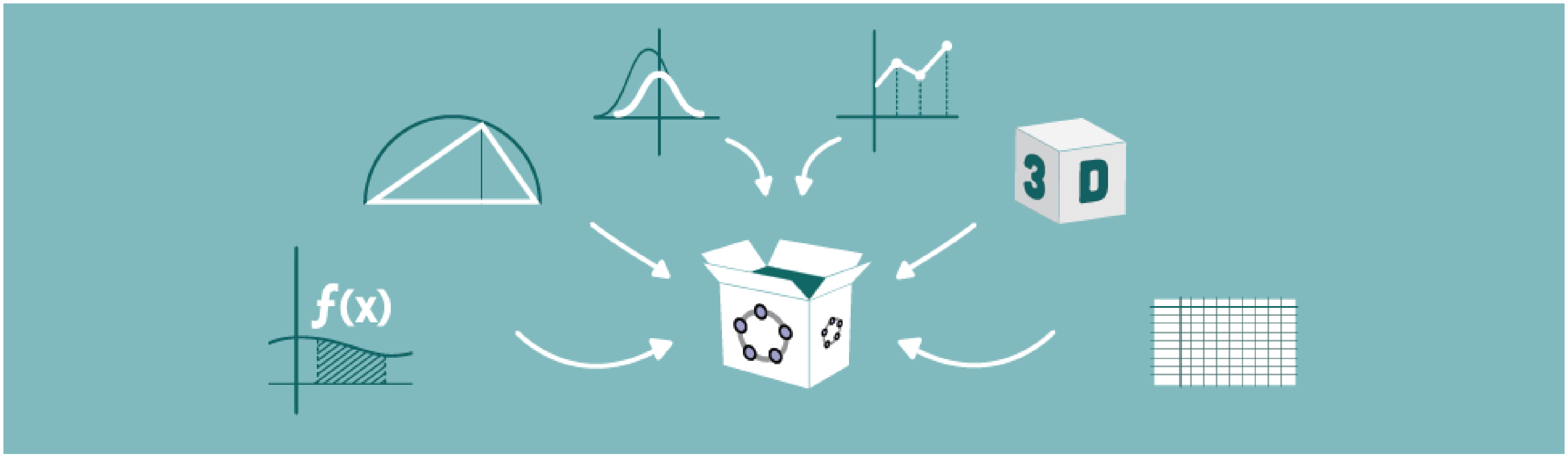
FORTBILDUNG GEOGEBRA



21.11.2014 GYMNASIUM LIESTAL

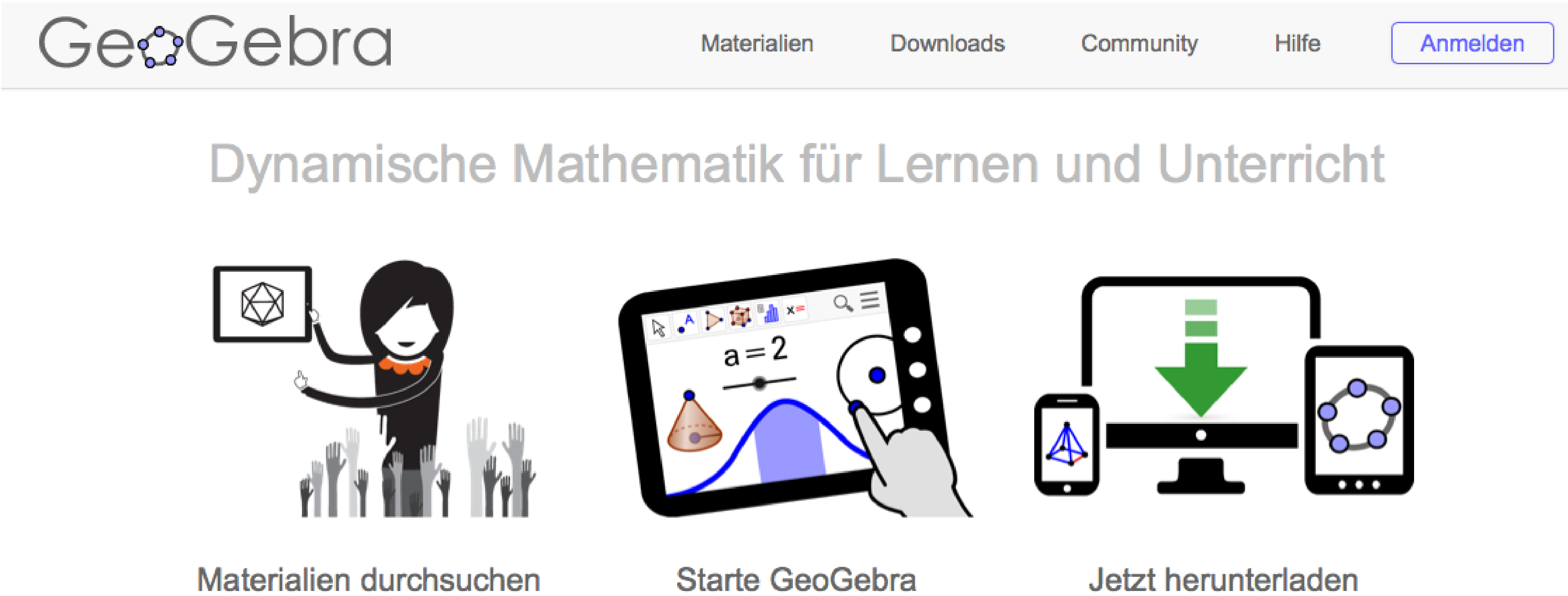
TORSTEN LINNEMANN & MARTIN GUGGISBERG

GEOGEBRA

IM

EINSATZ

STARTSEITE



GEOGEBRA

IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,

1. MÖGLICHKEIT
GEOGEBRA INSTALLIEREN

http://www.geogebra.org/download

WICHTIG

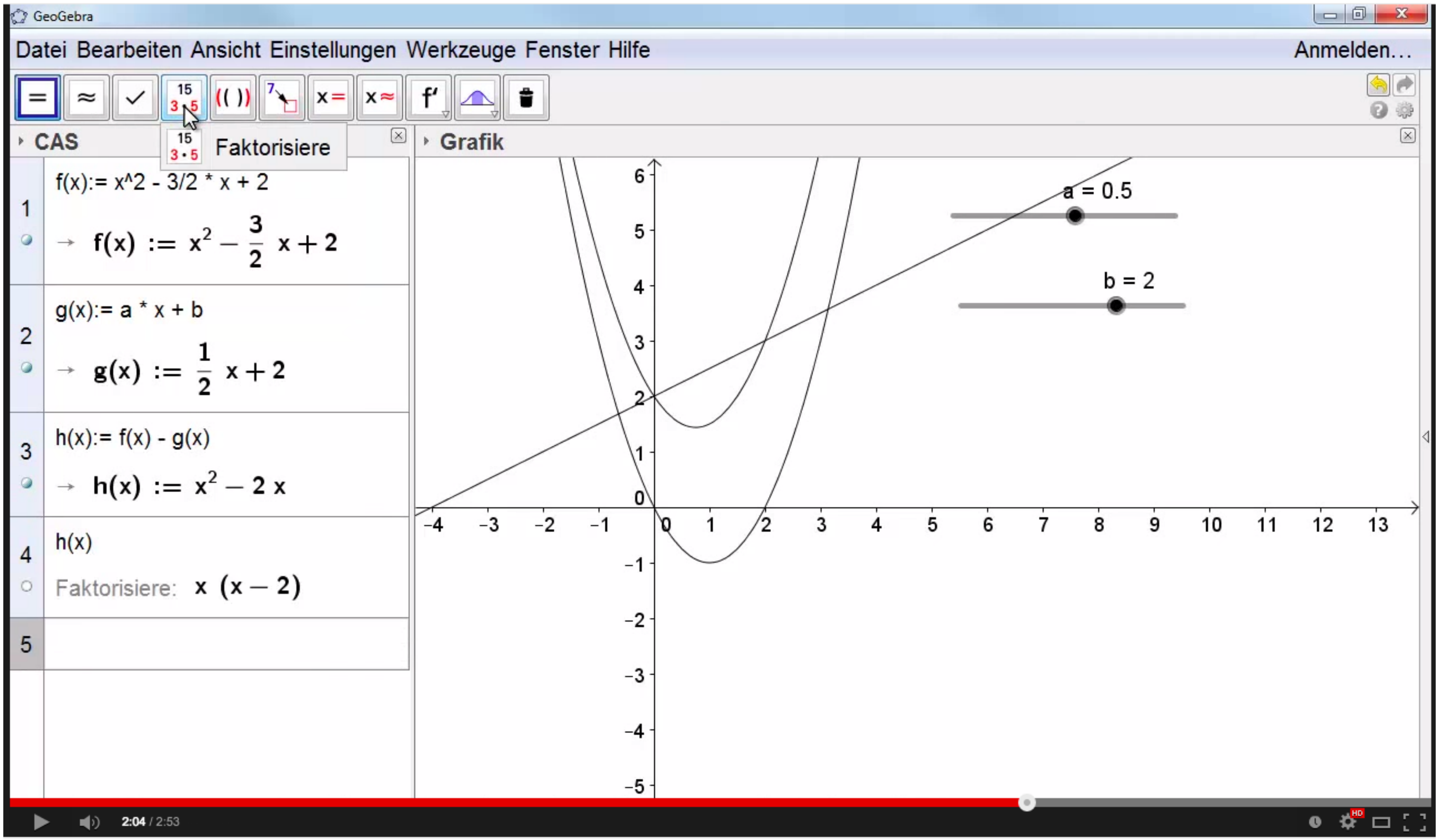
VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

2. MÖGLICHKEIT
DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

http://www.geogebra.org/app

LERNVIDEOS (GEOGEBRA CHANNEL)



[YouTube GeoGebra channel]

NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

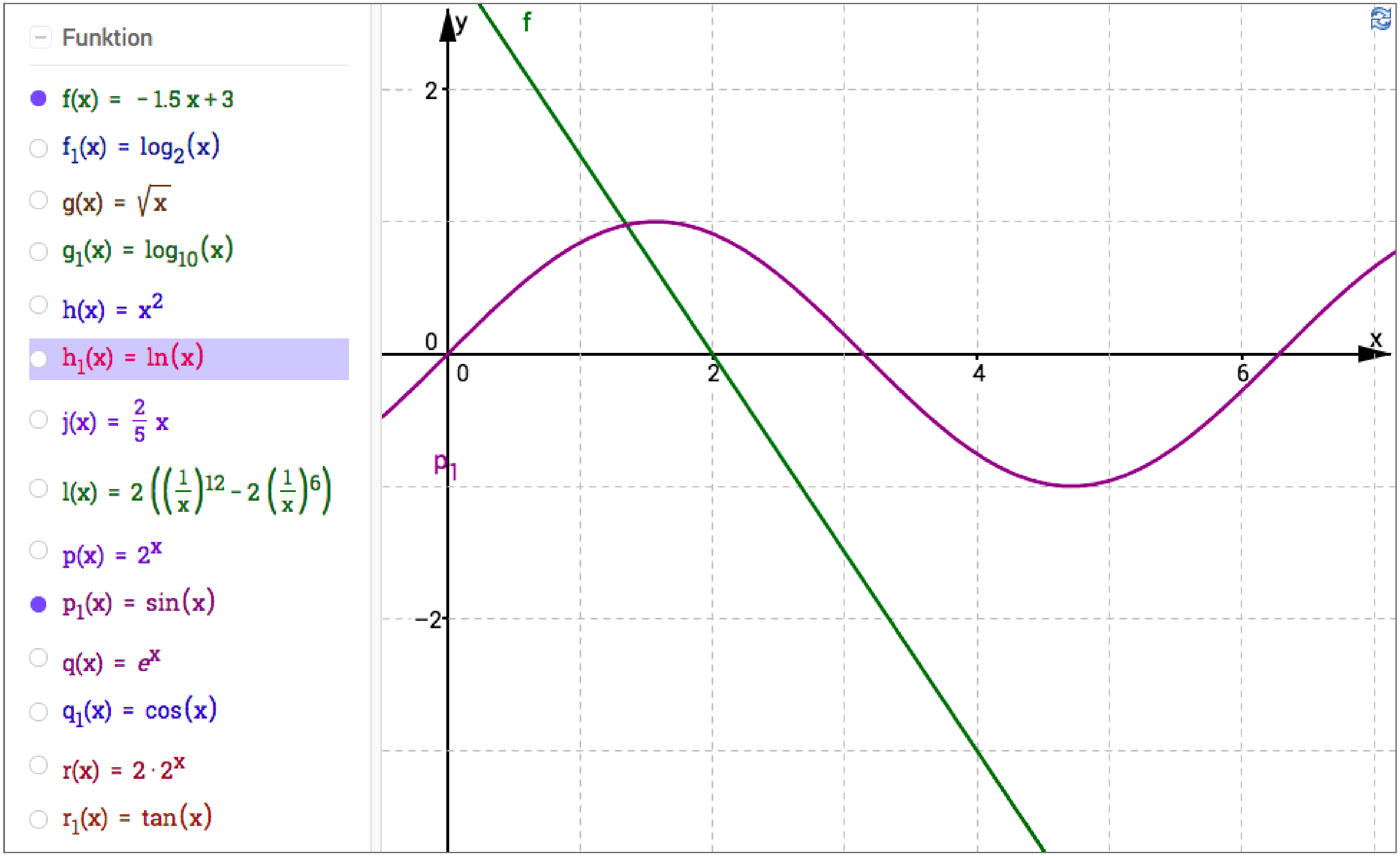
Twitter: @geogebra

HANDS-ON

- Funktionen
- Folgen
- CAS-Fenster

FUNKTIONEN

- graphisch darstellen
- verschieben
- verknüpfen
- Punkt auf einer Funktion

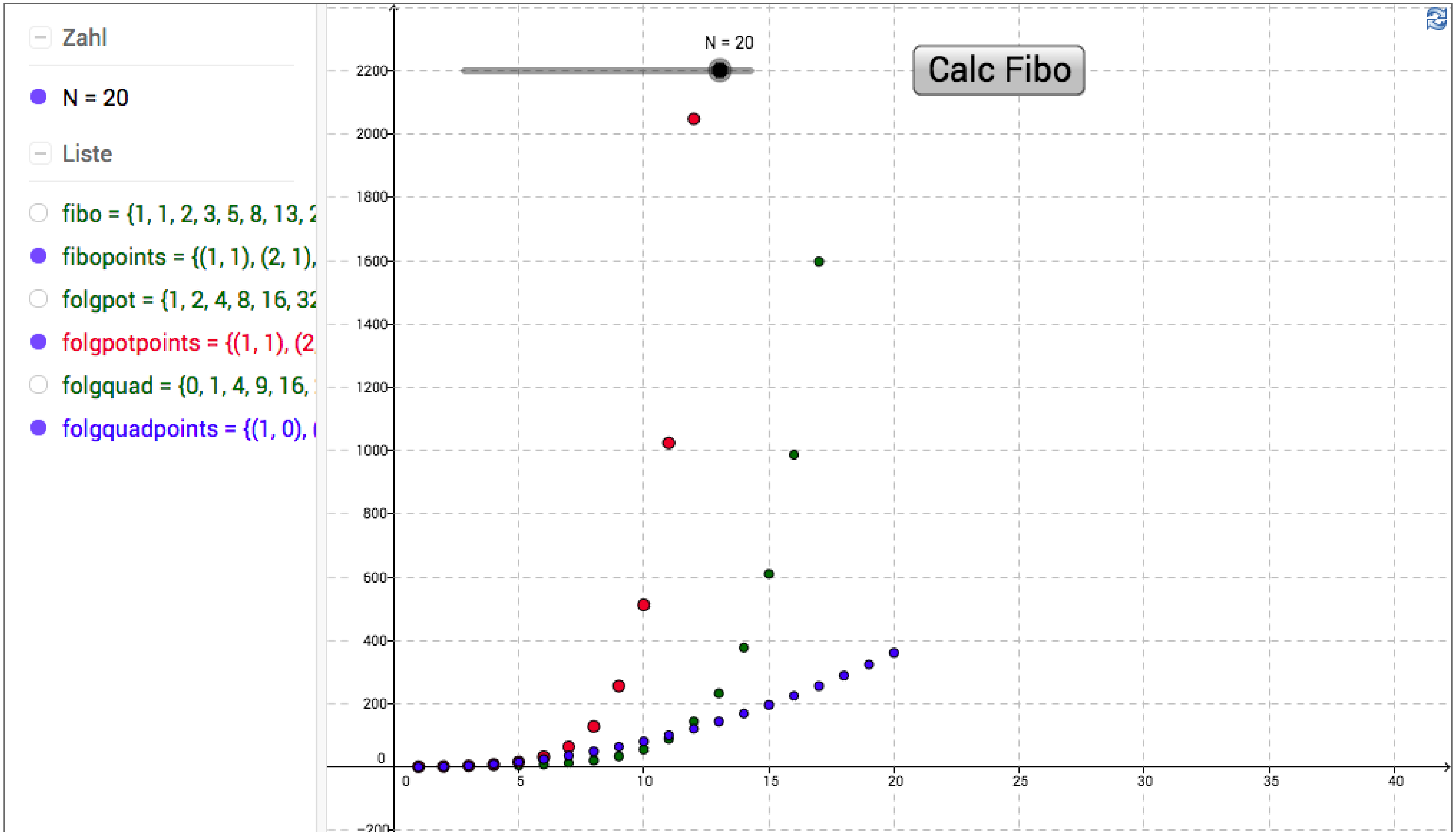


[Link auf GeoGebraTube]

FOLGEN

- Zahlenfolgen
- Folgen von Funktionen
- Folgen geometrischer Objekte
- geschachtelte Folgen z.B. Gitter

ZAHLENFOLGEN



[Link auf GeoGebraTube]

FIBONACCI MIT PROGRAMM BERECHNEN (JAVASCRIPT)

```
var fibo = function(n){

   var N,i,arr;
   // Eingabe überprüfen
   if (typeof(n) !== "number"){
      N = 10;
   } else{
      N =n-2;
   }

  // Fibo Start
  arr=[1,1];
  for (i=0;i<N;i++){
    arr.push(arr[i]+arr[i+1])
  }
 //Rückgabe als Liste
 return "{"+arr+"}";
};
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

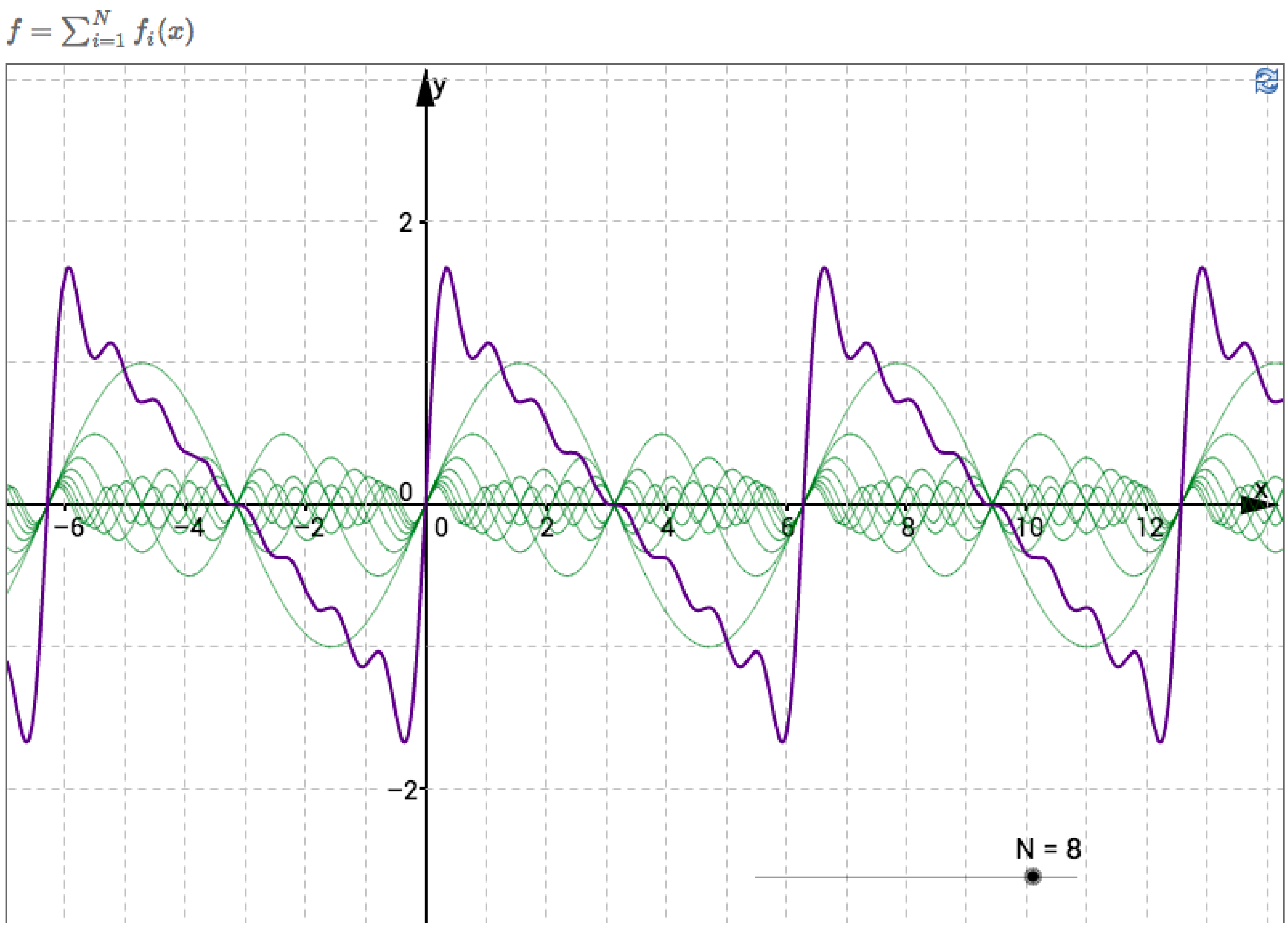
zum Beispiel

$$f_i(x) = \frac{1}{i}\sin(i \cdot x)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)$$

```
N=10
folgefunkt = Folge[1/i*sin(x*i), i, 1, N]
reihe = Summe[folgefunkt]
```

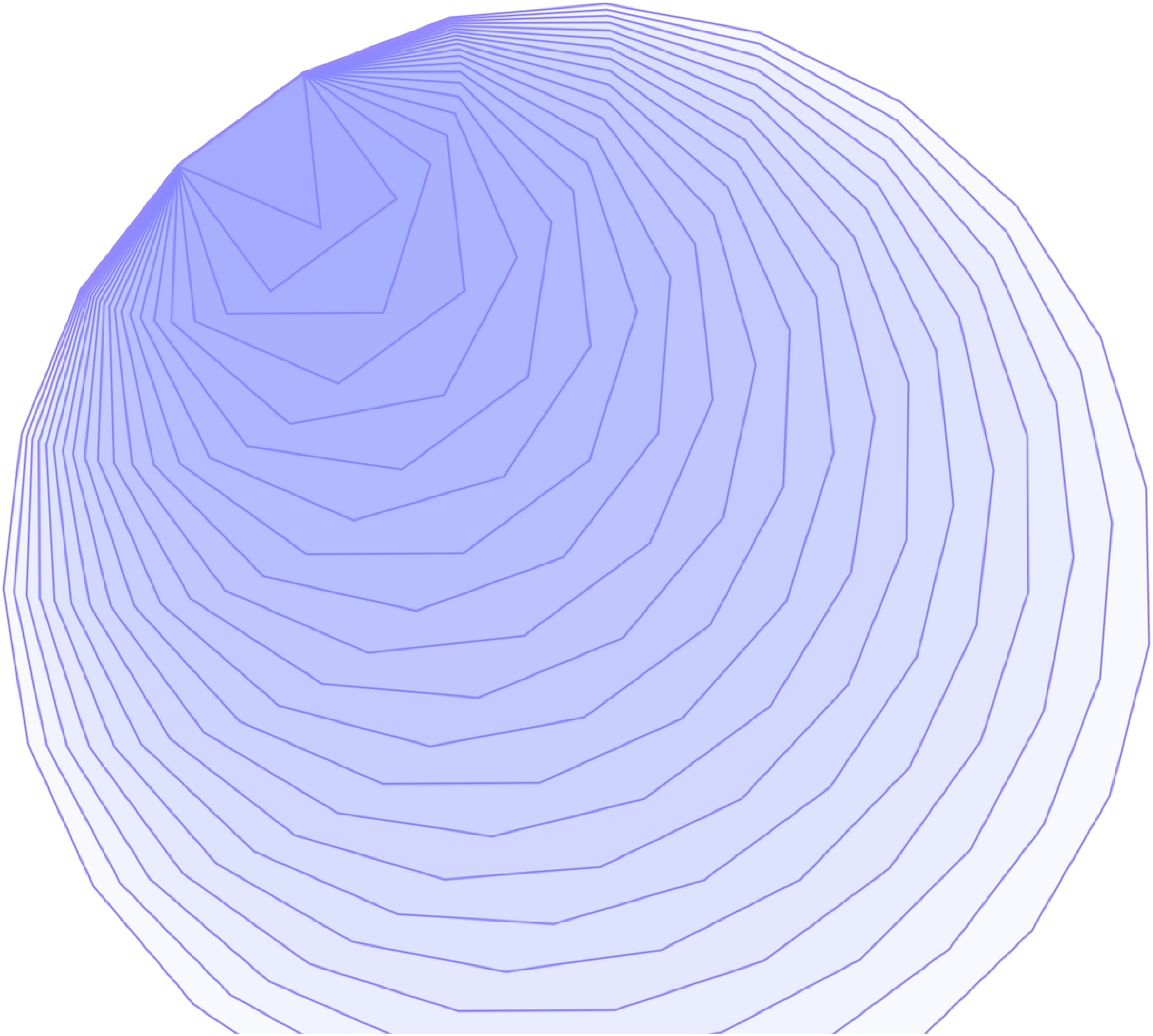
FOLGE VON FUNKTIONEN



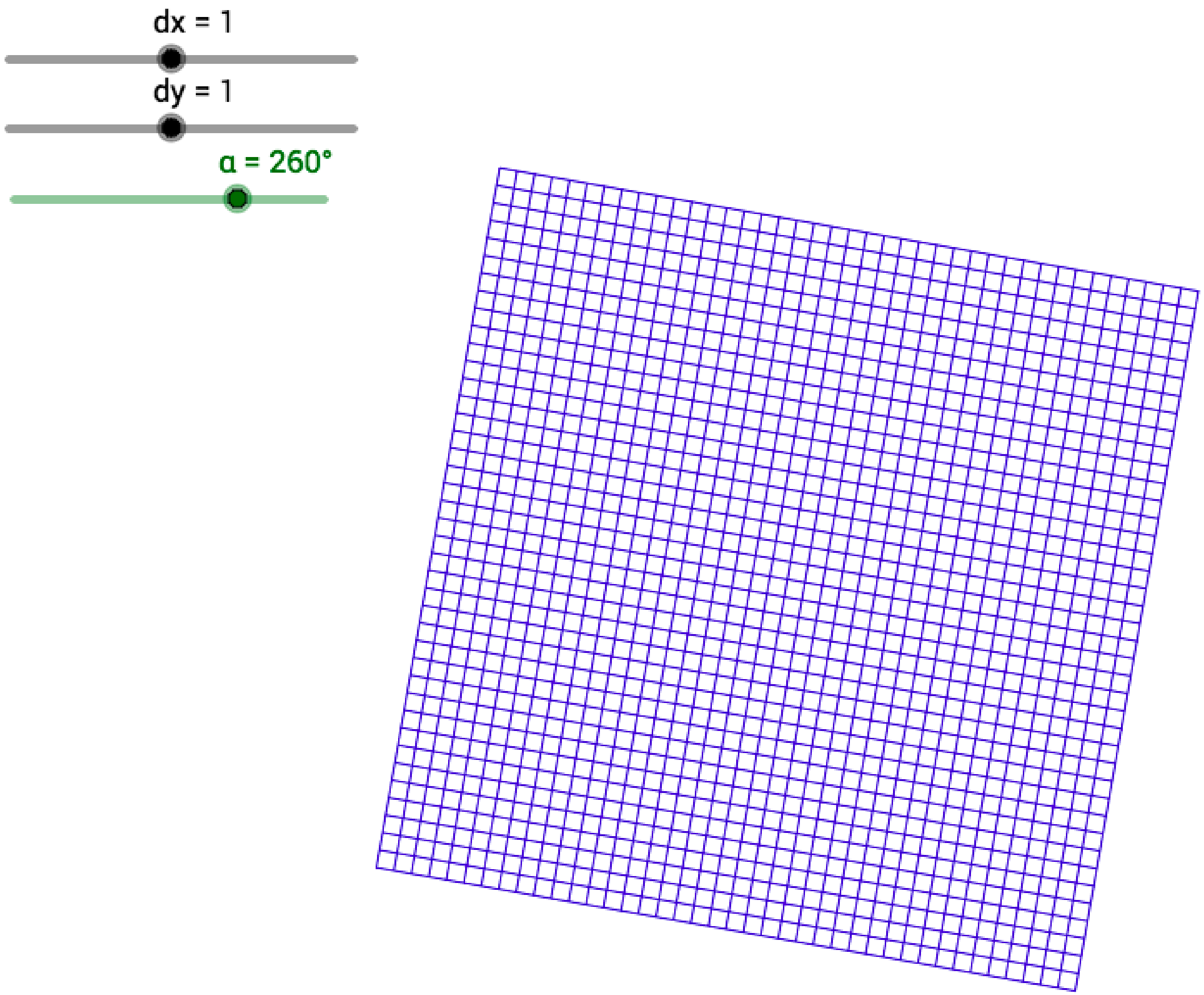
Link auf GeoGebraTube

FOLGEN GEOMETRISCHER OBJEKTE

```
A=(0,0)
B=(1,0)
Folge[Vieleck[A, B, i], i, 3, 23]
```



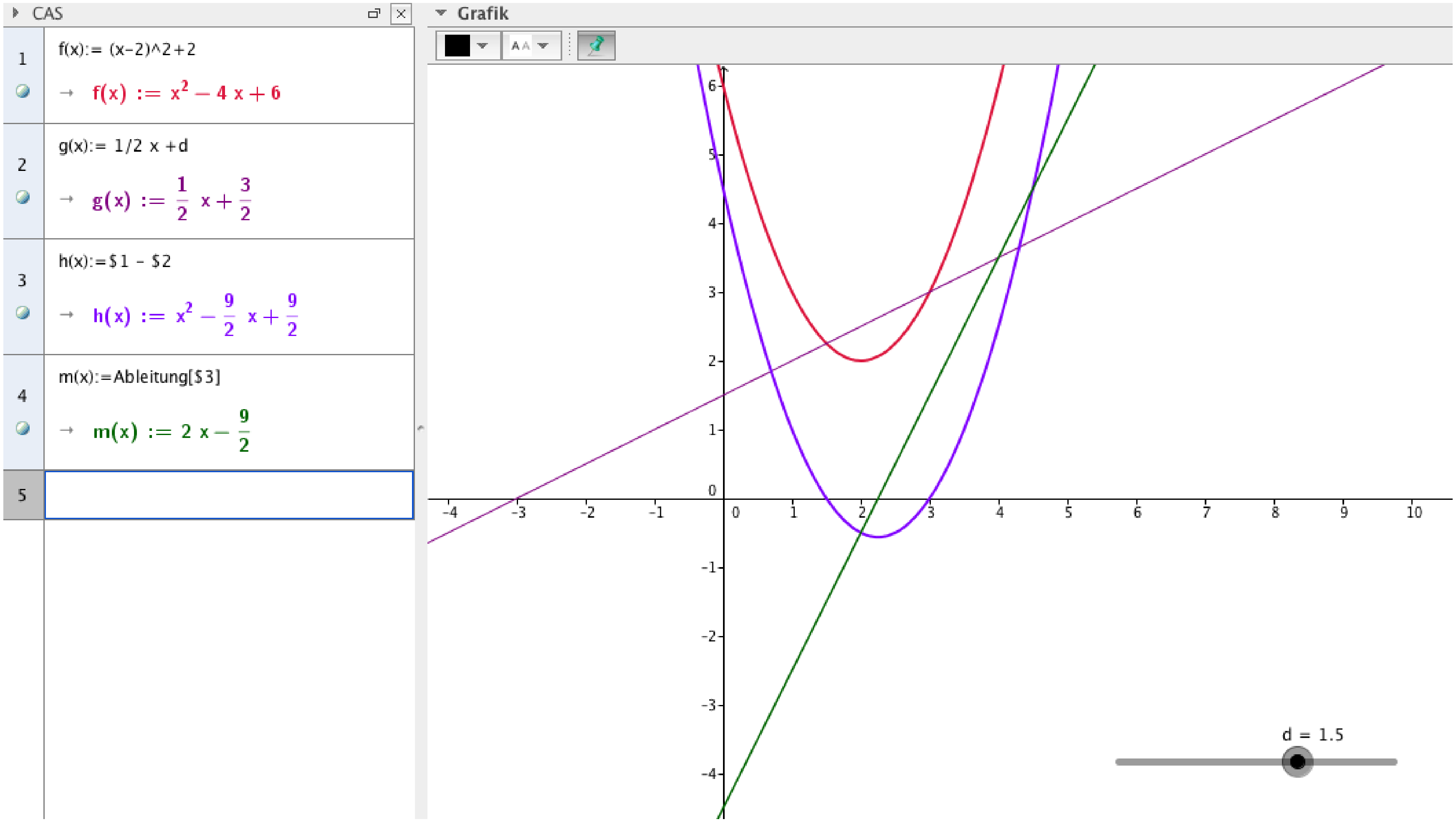
GITTER



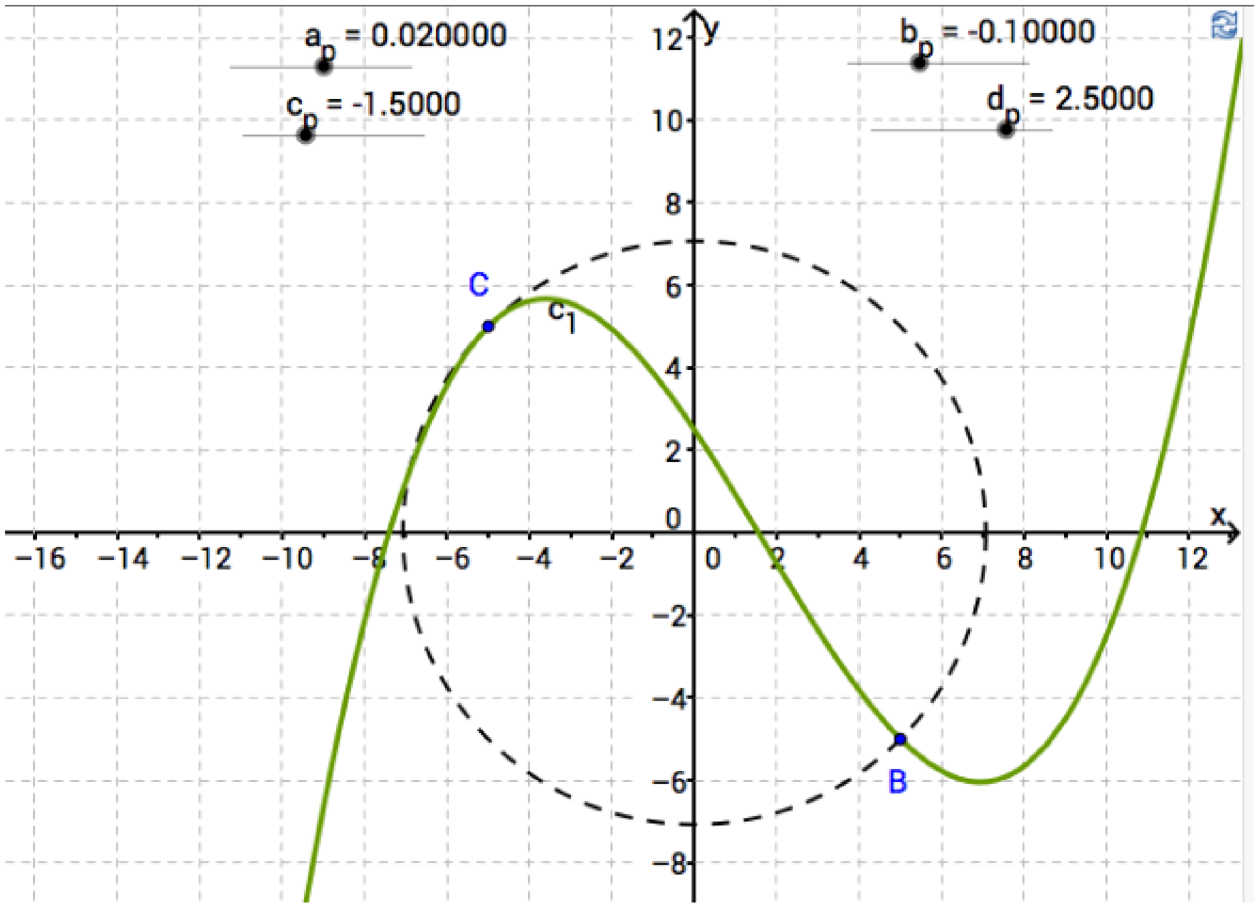
[Link auf GeoGebraTube]

CAS

- Funktionen mit CAS untersuchen
- Gleichungssysteme lösen
- Beispiel Maturaaufgabe


CAS
1 f(x):= (x-2)^2+2
→ f(x) := x² − 4 x + 6
2 g(x):= 1/2 x +d
→ g(x) := 1/2 x + 3/2
3 h(x):=$1 - $2
→ h(x) := x² − 9/2 x + 9/2
4 m(x):=Ableitung[$3]
→ m(x) := 2 x − 9/2
5
Grafik
d = 1.5

MATURAUFGABE



Link auf GeoGebraTube Lösung

DESSERT

- Piratenaufgabe
- Lineare Algebra (Abbildungen)
- Angry Birds Mathematik
- Zentralprojektion
- Fermat-Punkt

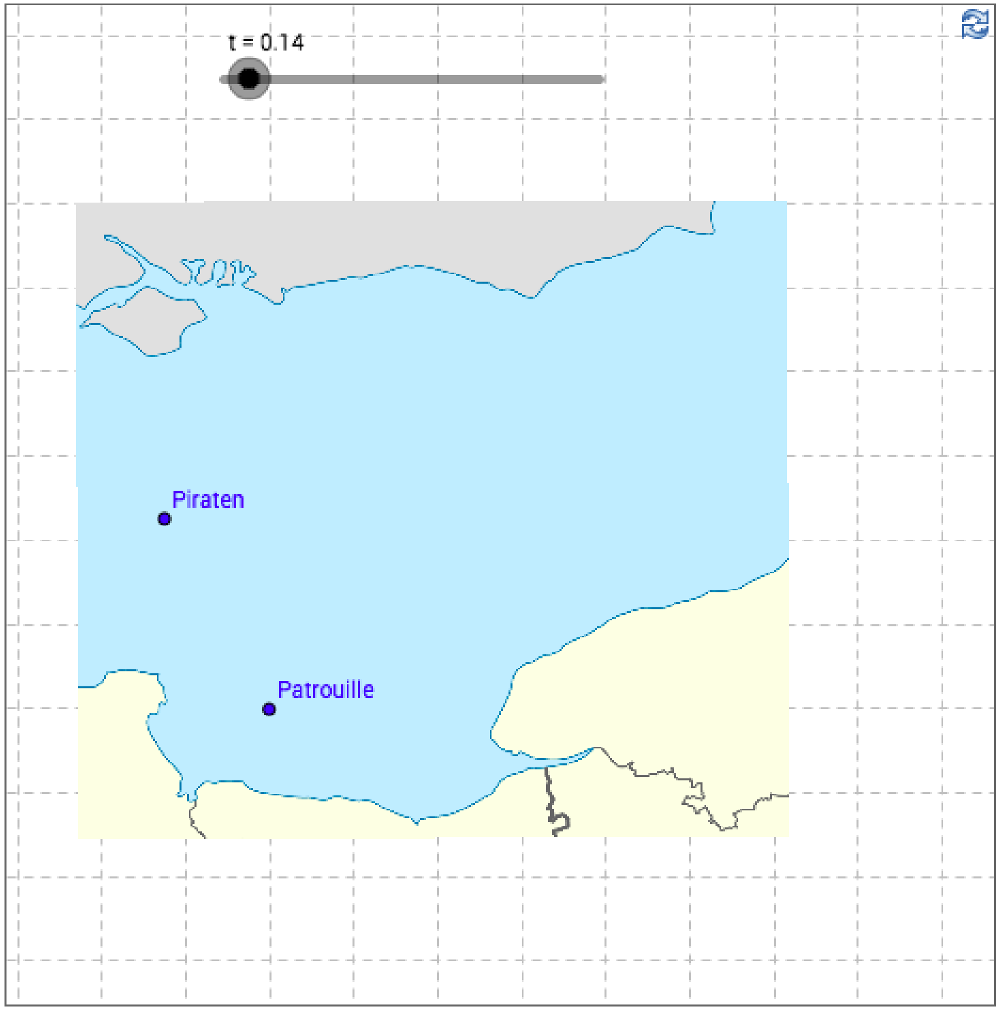
PIRATENAUFGAB
E

Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.

Kurs zweier Schiffe

Zwei Schiffe im Ärmelkanal

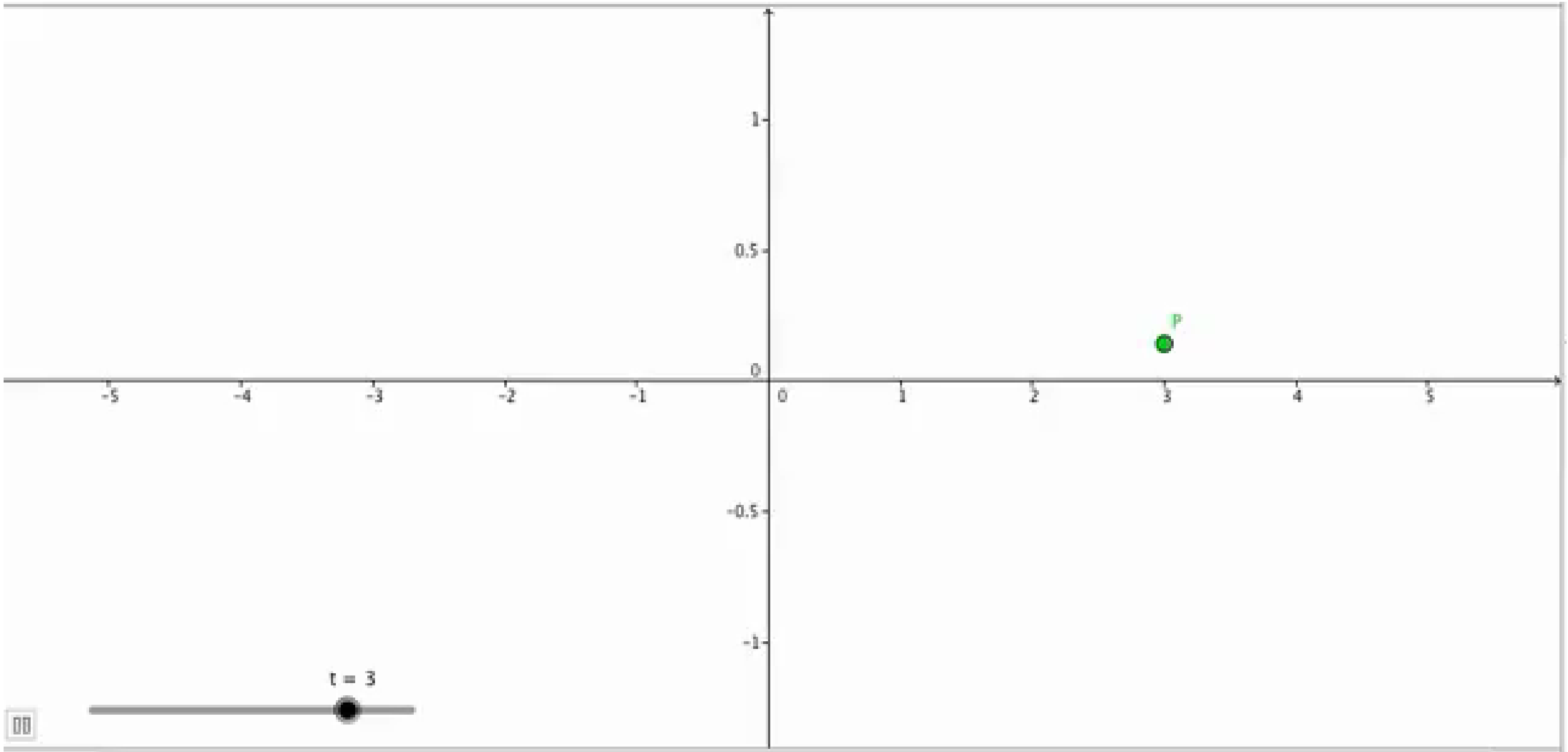


Link auf GeoGebraTube

BEWEGUNGEN SIMULIEREN

x,y-Position als Funktion von t

```
t = 0.0
P = (t,sin(t))
```



P
t = 3

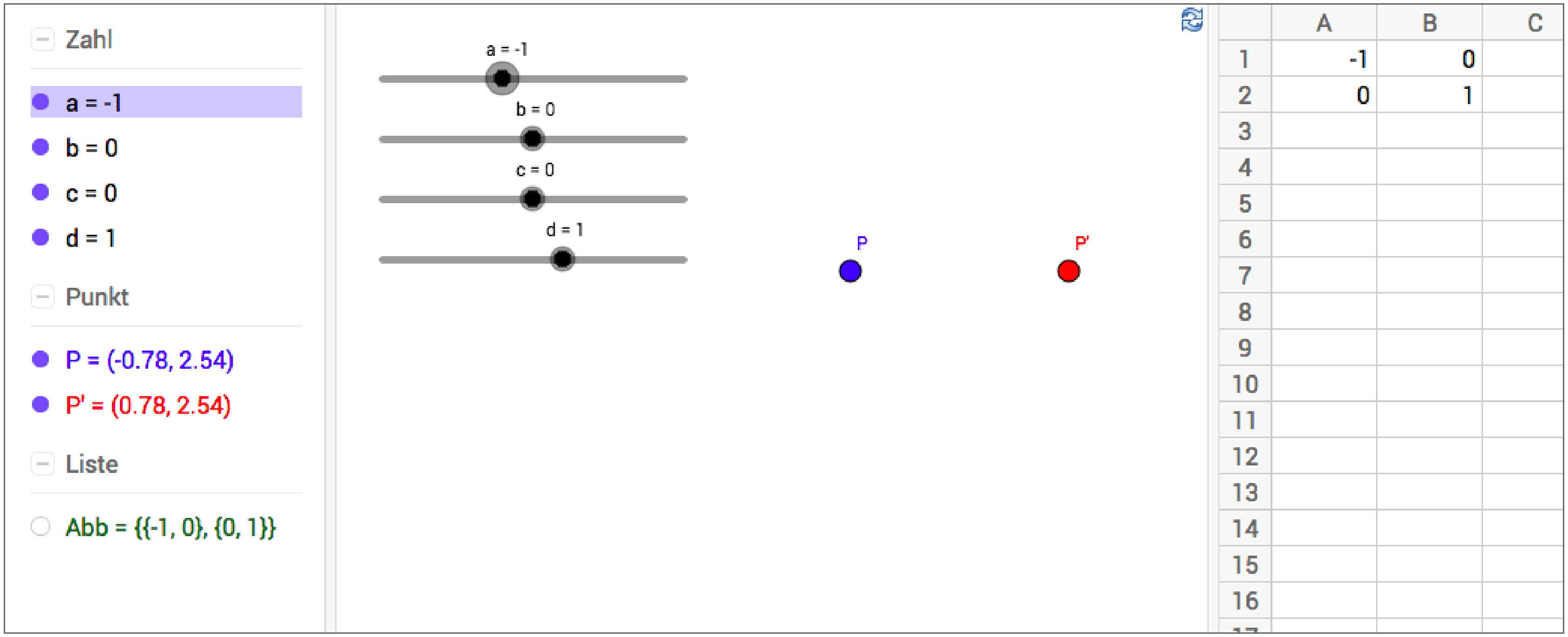
LINEARE ALGEBRA (ABBILDUNGEN)

SPIEGELUNG

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

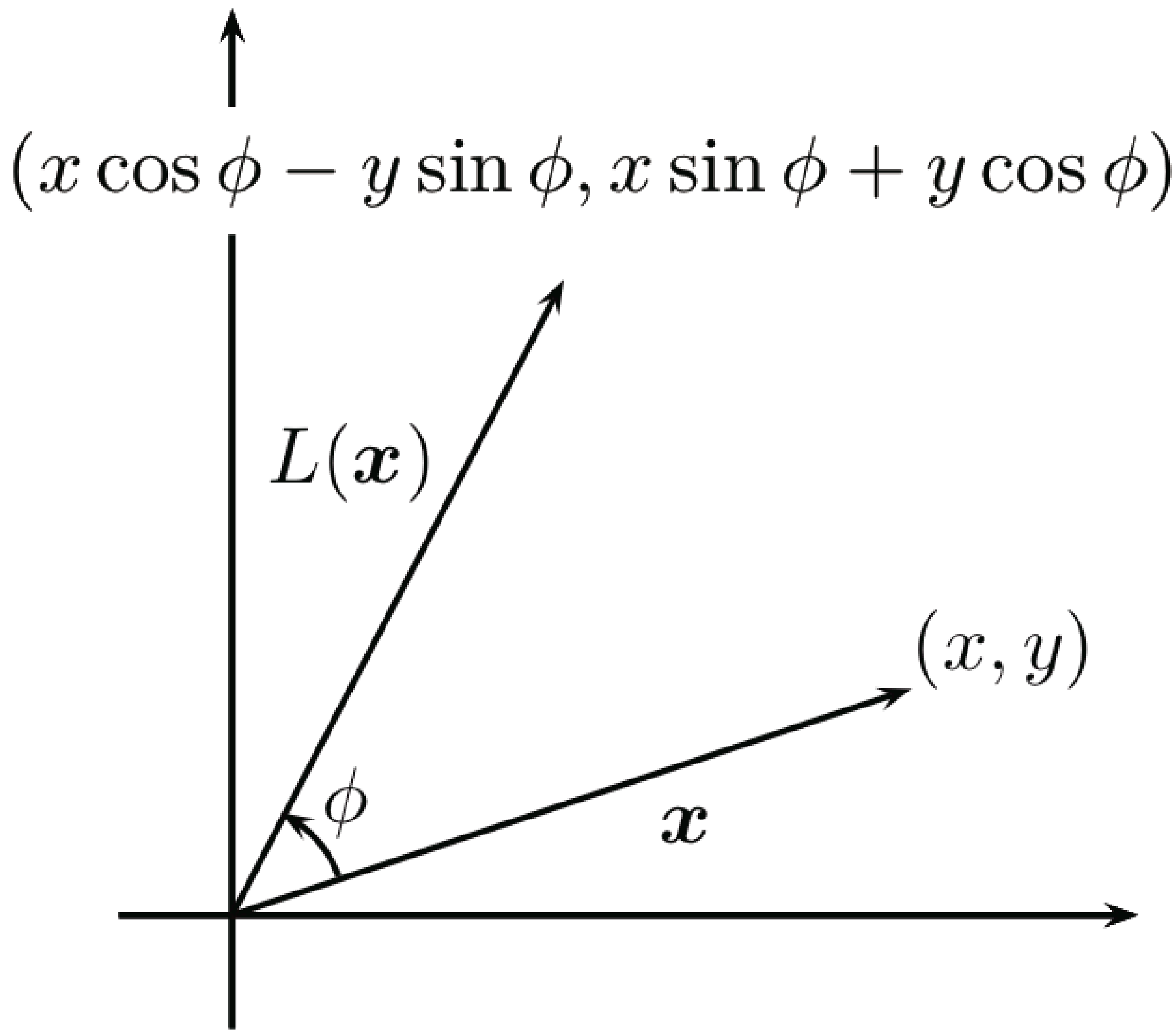
ABBILDUNG EINES PUNKTES



Lässt sich der Ursprung aus der Beobachtung des Verhaltens zwischen dem Punkt P und seiner Abbildung P' ermitteln?

[Link auf GeoGebraTube]

DREHUNG


$(x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi)$
$L(\boldsymbol{x})$
(x, y)
ϕ
$\boldsymbol{x}$

DARSTELLUNG EINER DREHUNG UM DEN PUNKT (0,0) GEGEN DEN UHRZEIGERSINN UM $90°$

Diese lin. Abbildung bildet

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch Drehungen sind lineare Abbildungen. Eine Drehung um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) kann wie folgt beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
L: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) & \mapsto (x\cos(\phi) - y\sin(\phi), x\sin(\phi) + y\cos(\phi
\end{aligned}
$$

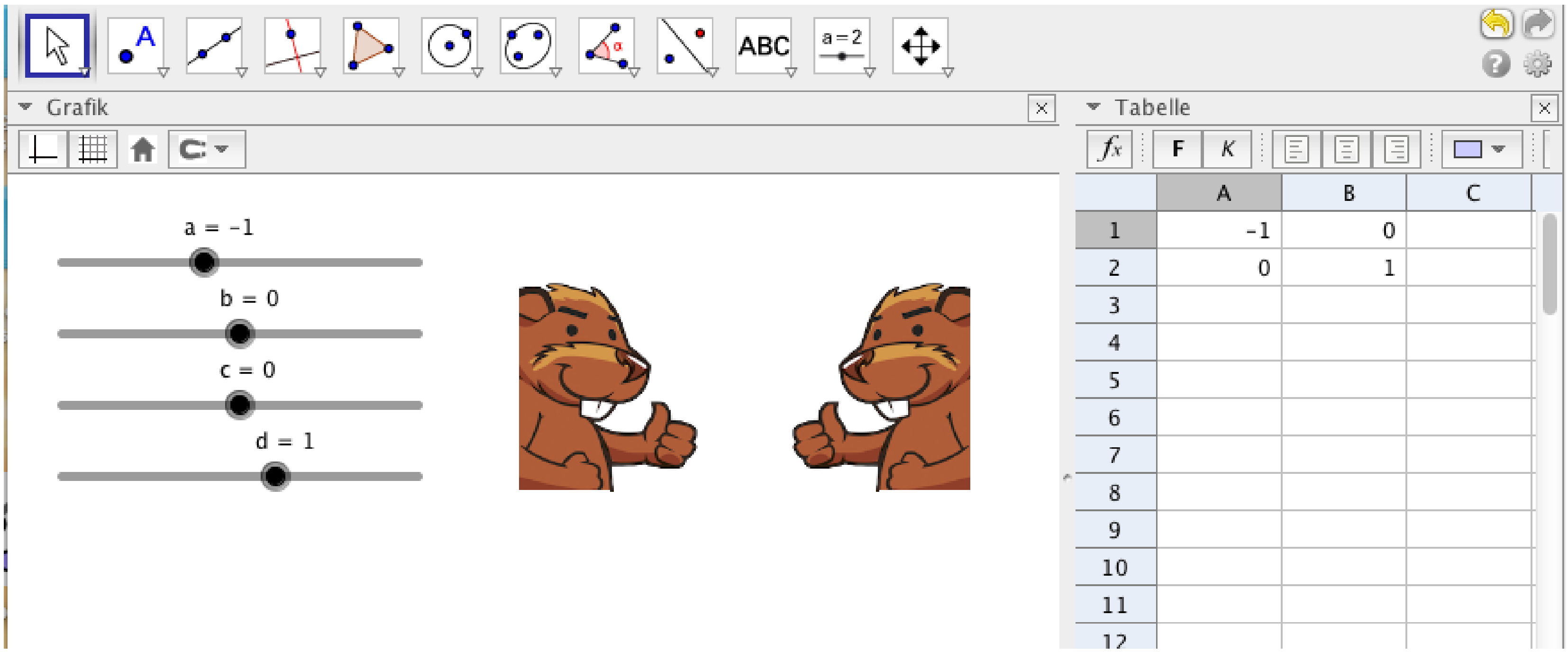
DREHUNG GEGENUHRZEIGERSINN UM EINEN WINKEL ϕ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

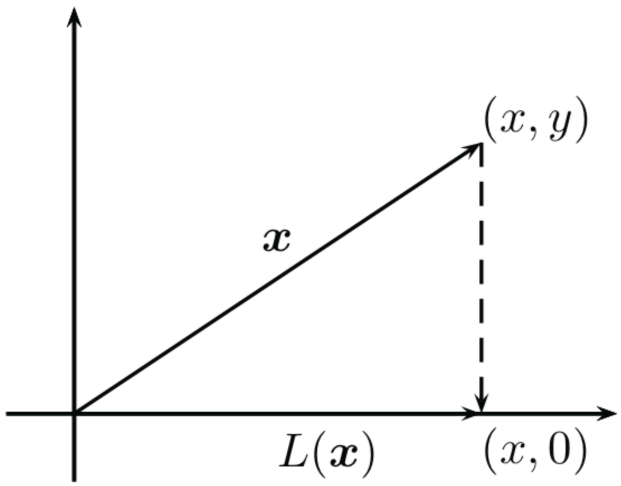
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

RASTERGRAFIK MIT LINEAREN ABBILDUNGEN TRANSFORMIEREN

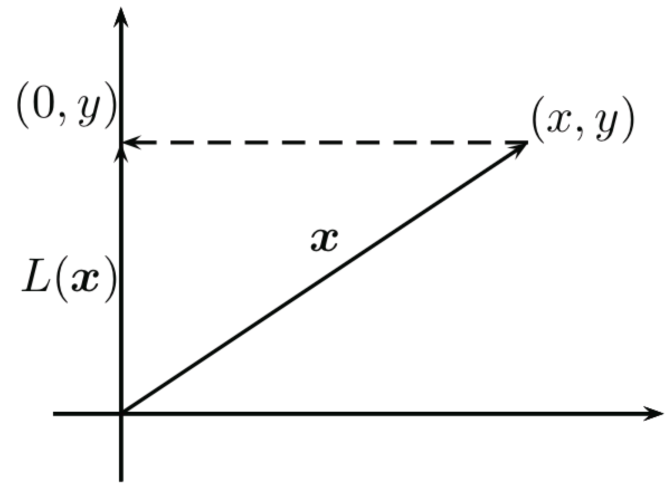


[Link auf GeoGebraTube]

PROJEKTION



auf x-Achse



auf y-Achse

Die orthogonale Projektion auf die x-Achse ist auch eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf die y-Achse ist eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

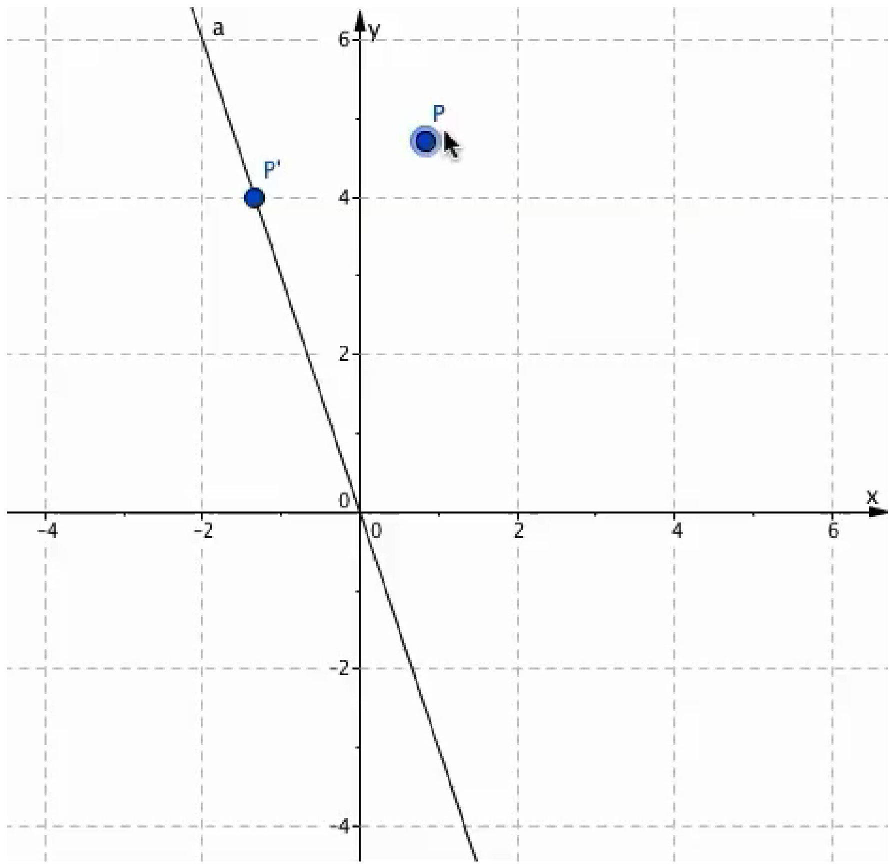
$$
\begin{aligned}
L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto (0, y)
\end{aligned}
$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

PUNKT AUF EINE GERADE A PROJIZIEREN

$$a: y = -3x$$



VORGEHEN

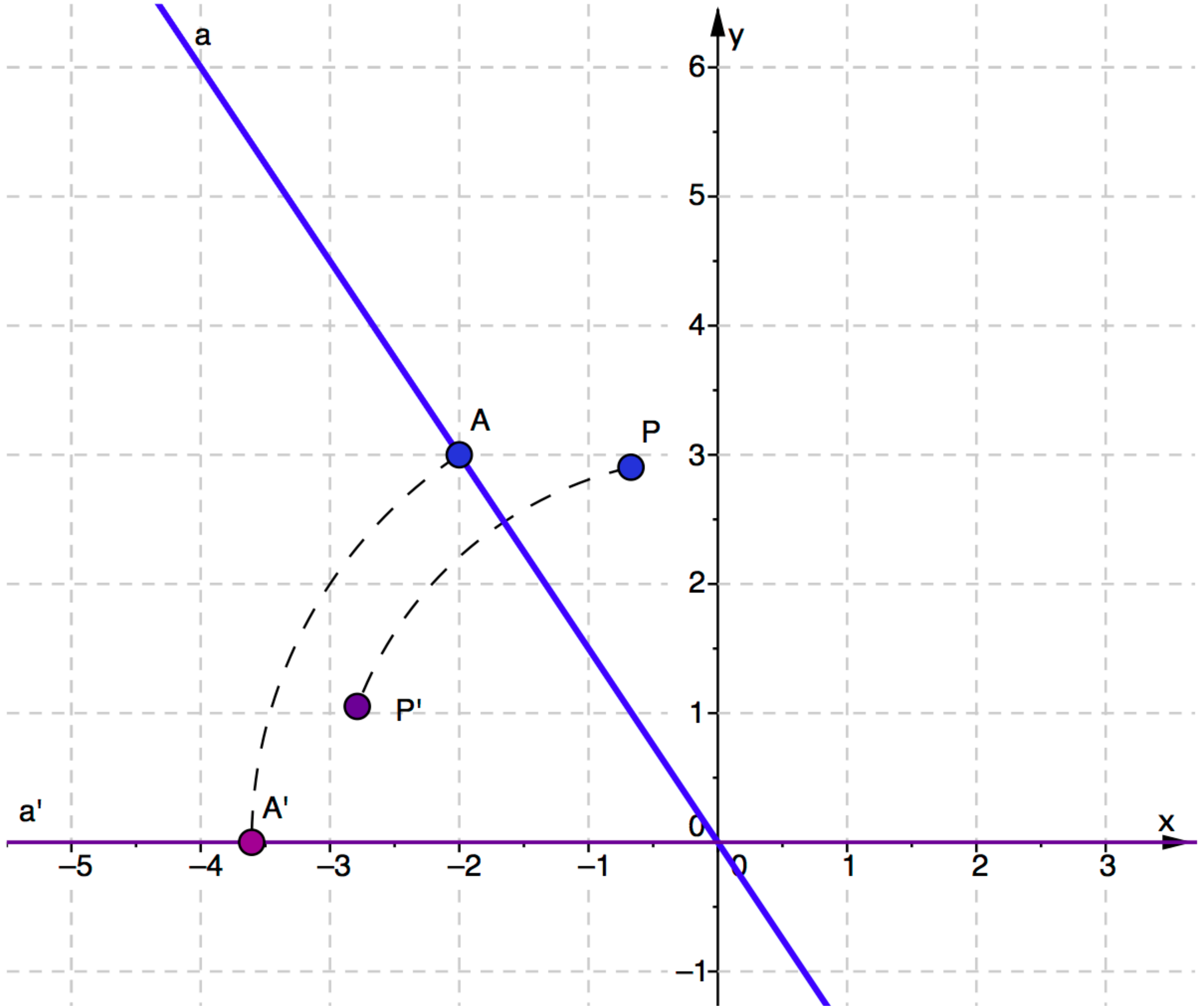
- Gesamte Figur drehen bis die Gerade a auf der x-Achse liegt
- Den Punkt auf die x-Achse projizieren
- den projezierten Punkt wieder zurück drehen.

1. SCHRITT DREHEN UM α

$$\tan(\alpha) = -3 \rightarrow \alpha \approx -71.57°$$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube

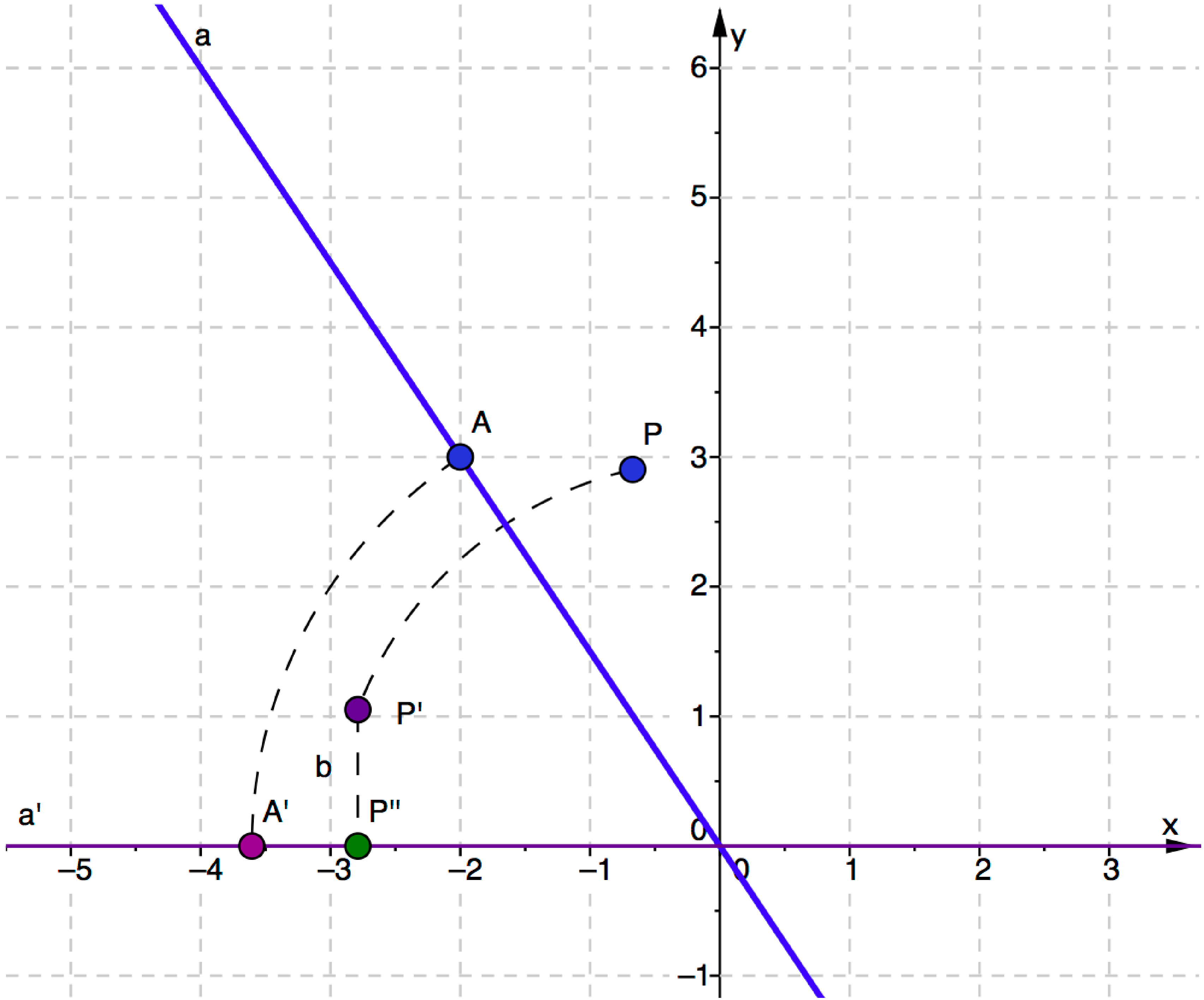


a
y
A
P
P'
a'
A'
x
0
6
5
4
3
2
1
–1
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3

2. SCHRITT PROJEKTION AUF X-ACHSE

$$P_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube



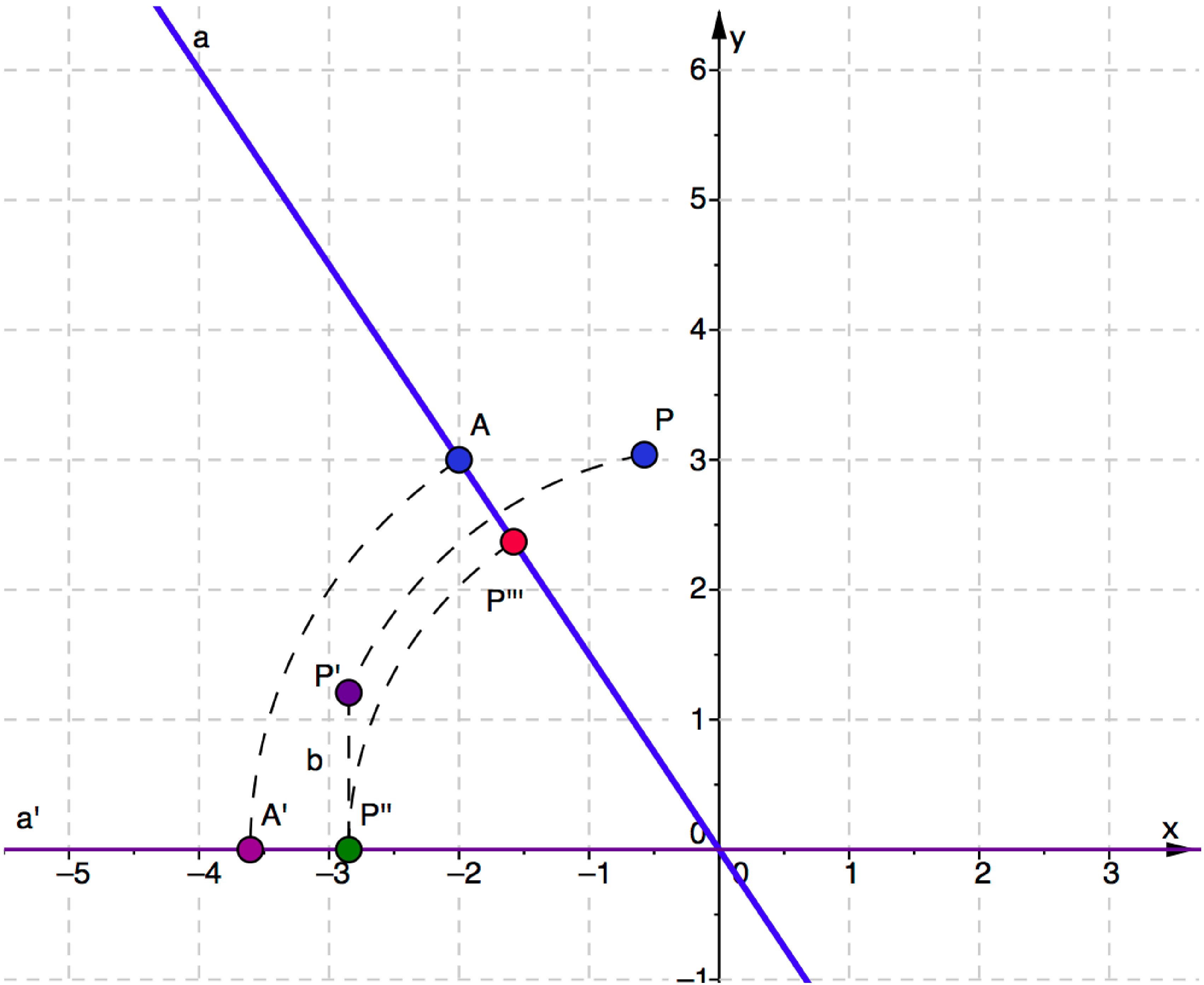
a
y
6
5
4
3
2
1
0
−1
A
P
P'
b
a'
A'
P''
x
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

3. SCHRITT RÜCKDREHEN UM α

$$\alpha \approx -71.57°$$

$$R_{-\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube



a
y
6
5
4
A
P
3
P'''
2
P'
1
b
a'
A'
P''
0
x
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1

IN EINEM SCHRITT

$$R_{-a} \cdot P_X \cdot R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

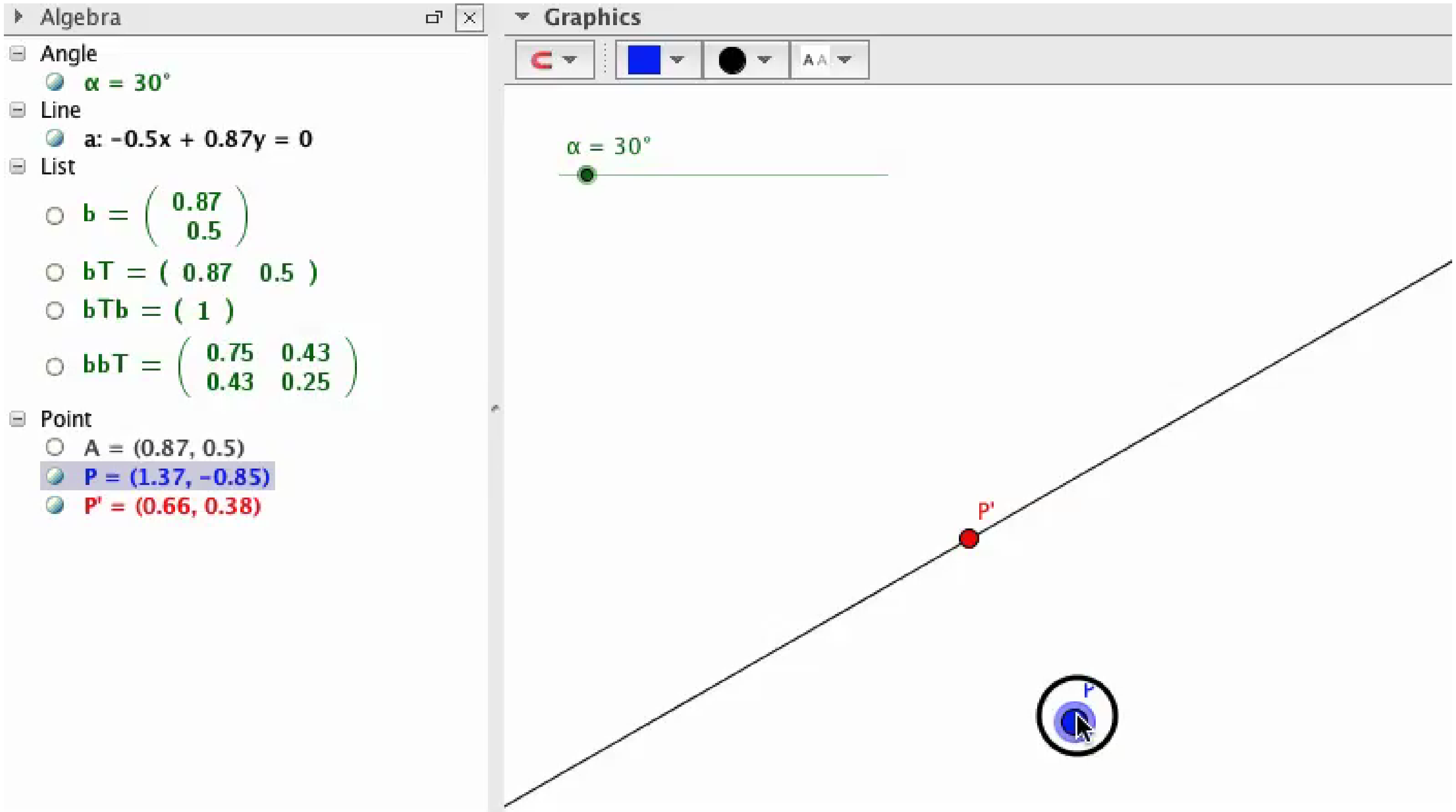
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF UNTERRAUM VERWENDEN

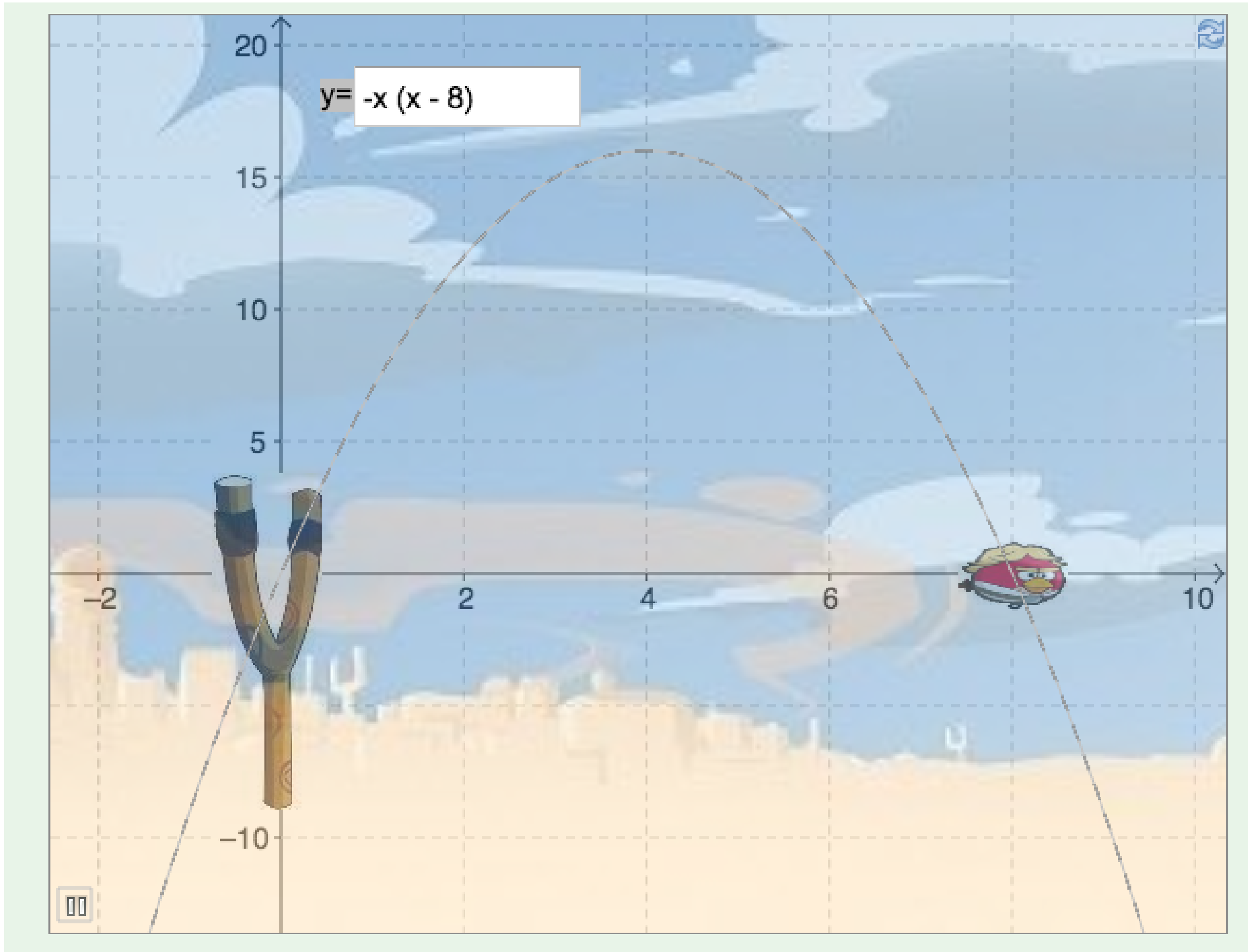
Wähle eine Matrix A so, dass die Spaltenvektoren eine Basis eines Unterraums bilden. (z.B. eine Gerade in $\mathbb{R}^2$), dann ist die Projektionsmatrix

$$proj_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$

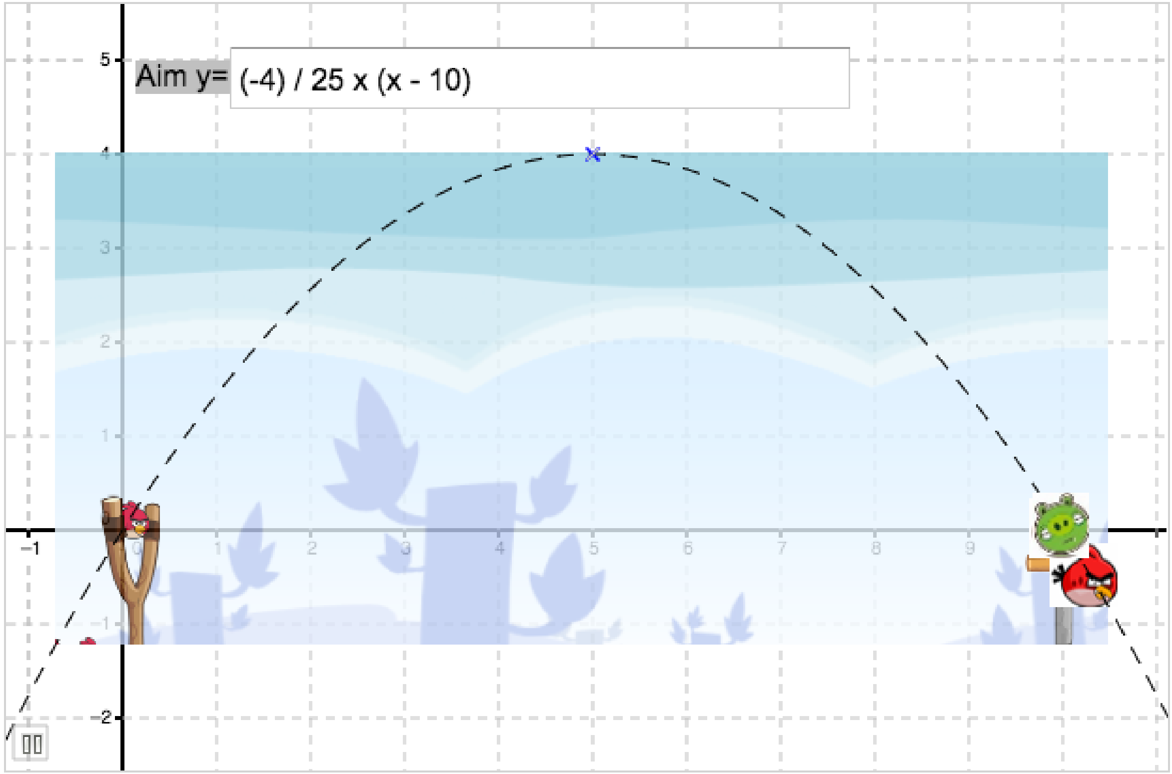


[Link to GeoGebraTube]

ANGRY BIRDS MATHEMATIK



Link auf Webseite



Link auf Webseite

ZENTRALPROJEKTION

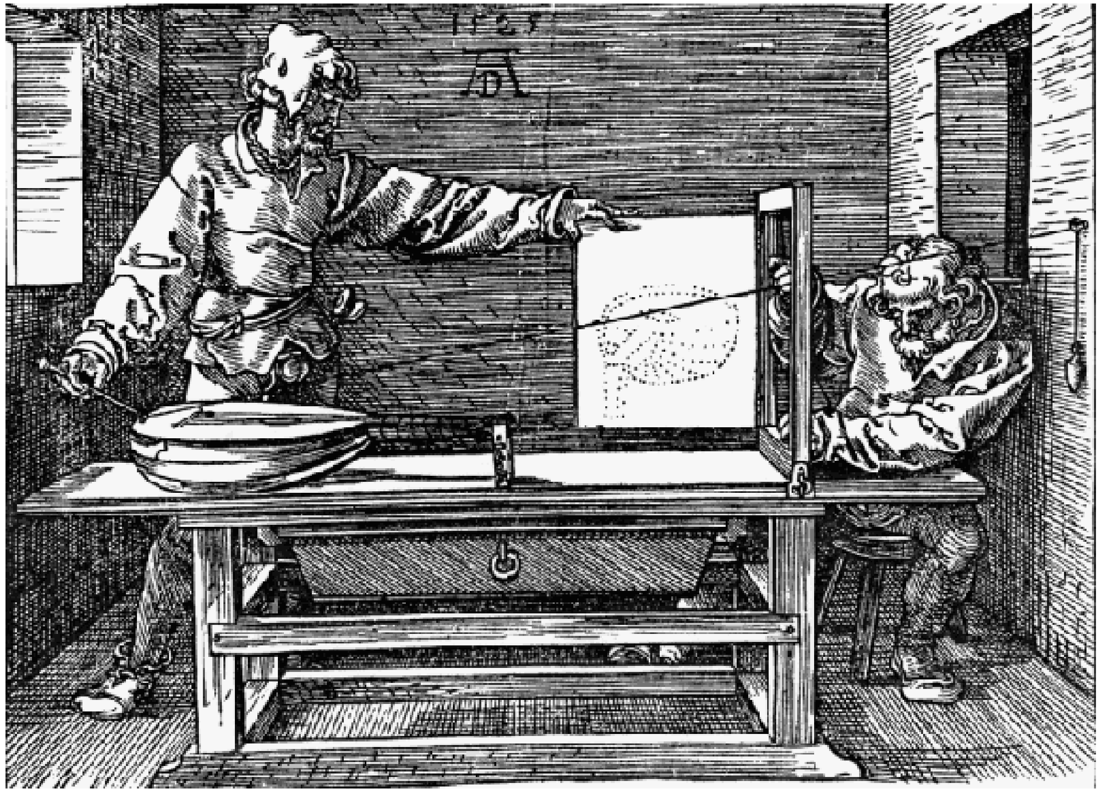
&

PARALLAX EFFEKTE

PARALLAX EFFEKTE (WERBUNG)

Modellierung eines perspektivischen Abbildungssystems mit

- Homogene Koordinaten
- Matrizen



Link Mechanical creation of a perspective image by Albrecht Dürer

KONVENTIONEN

- Annahme das Zentrum der Abbildung ist im Ursprung
- Blickrichtung entlang der Z-Achse
- Verwenden homogene Koordinaten

ZENTRALPROJEKTION AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE

mit Brennweite f

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF HOMOGENEN VEKTOR ANWENDEN

$$P \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

ÜBERGANG HOMOGENEN KOORDINATEN ZU KARTESISCHEN KOORDINATEN

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f/z \cdot x \\ f/z \cdot y \\ f/z \cdot z \end{pmatrix}$$

ZAHLENBEISPIEL

- Sei f = 10
- Ein Punkt (8,4,20) soll auf die Normalebene zur Z-Achse im Abstand von 10 abgebildet werden.

List

$CH = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$

$CH' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$

$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$

Number

f = 10

Plane3D

Point3D

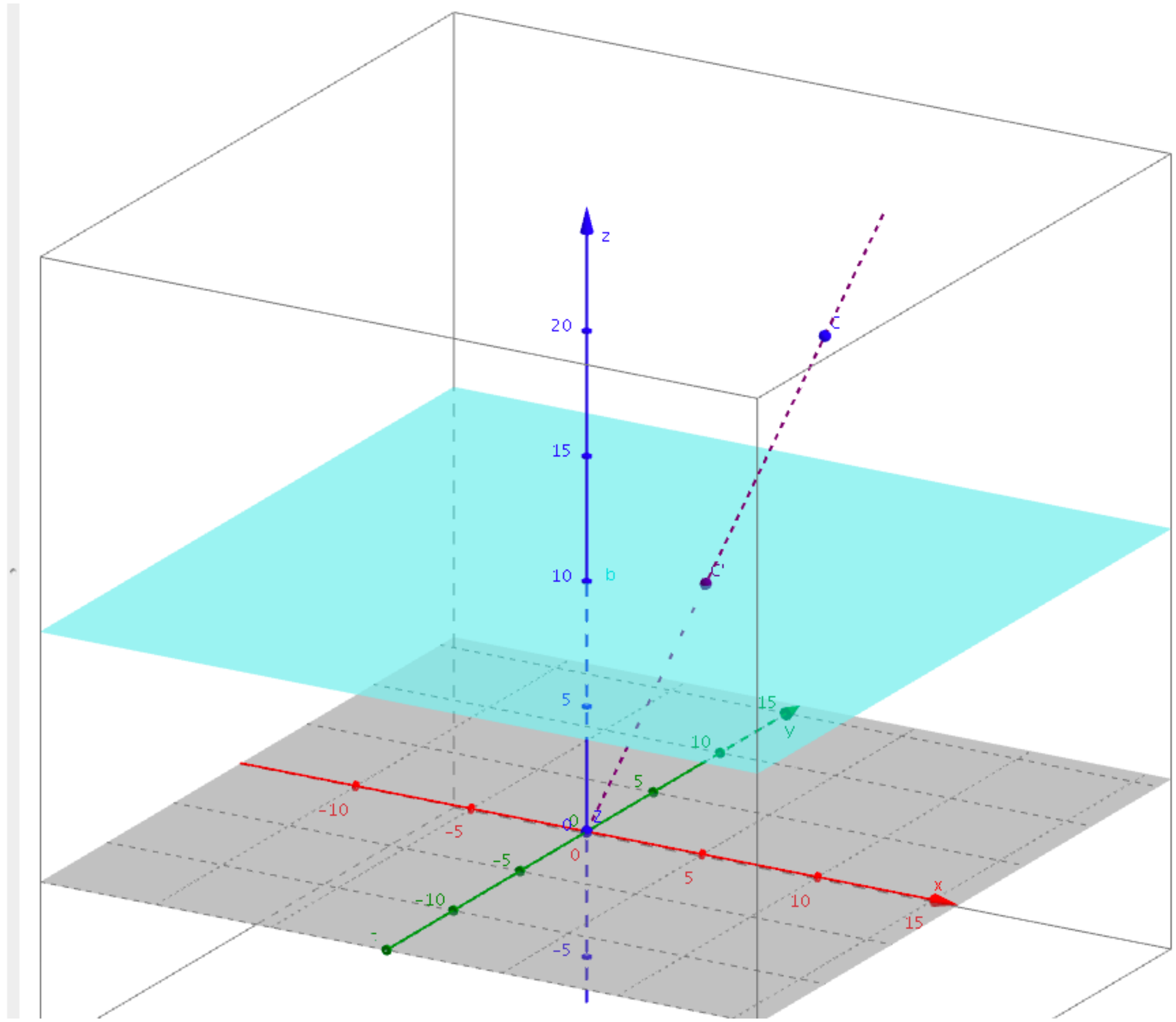
C = (8, 4, 20)

C' = (4, 2, 10)

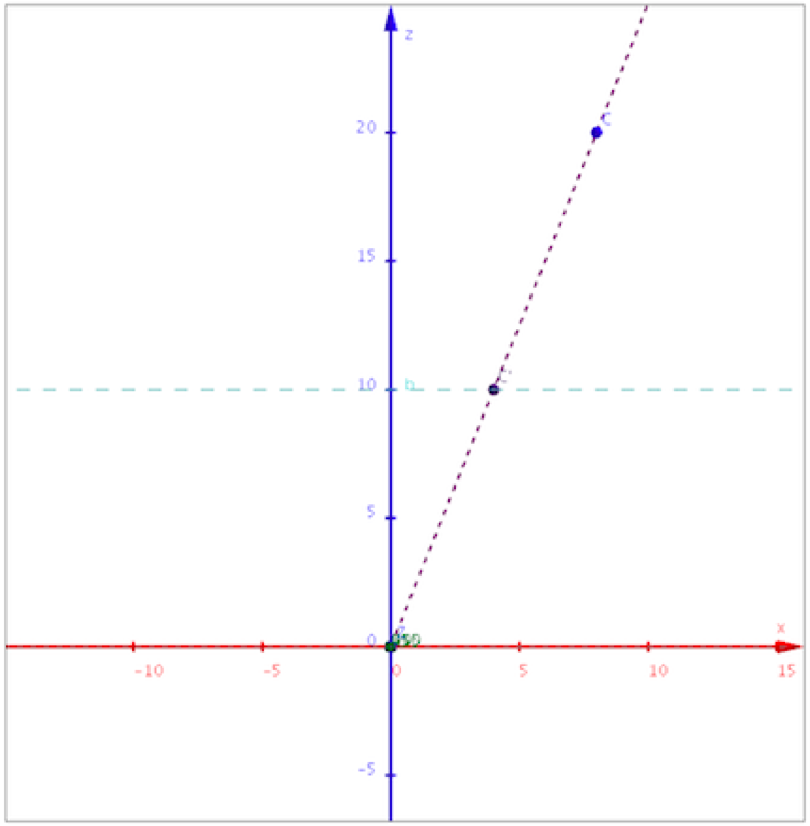
Z = (0, 0, 0)

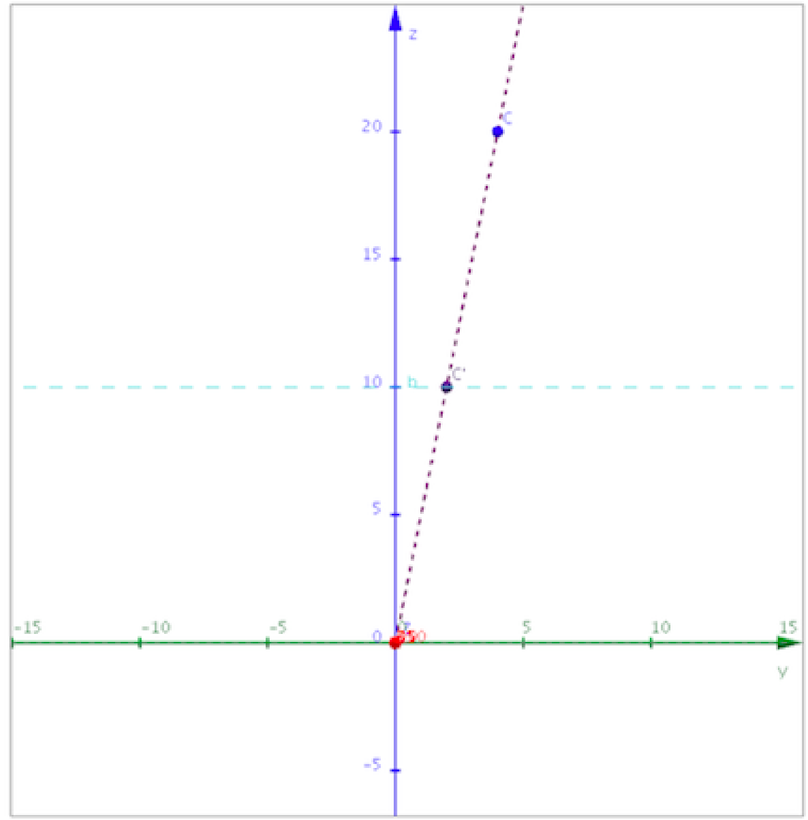
Ray3D

s1: X = (0, 0, 0) + λ (8, 4, 20)



$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$


z
20
15
10
5
0
-5
C
C'
b
x
-10
-5
0
5
10
15


z
20
15
10
5
0
-5
C
C'
b
y
-15
-10
-5
5
10
15

ZENTRALPROJEKTION

AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE MIT BRENNWEITE F

HOMOGENE KOORDINATEN

FÜR $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Transformation

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x/(Q_z) \\ Q_y/(Q_z) \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

HOMOGENE KOORDINATEN

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

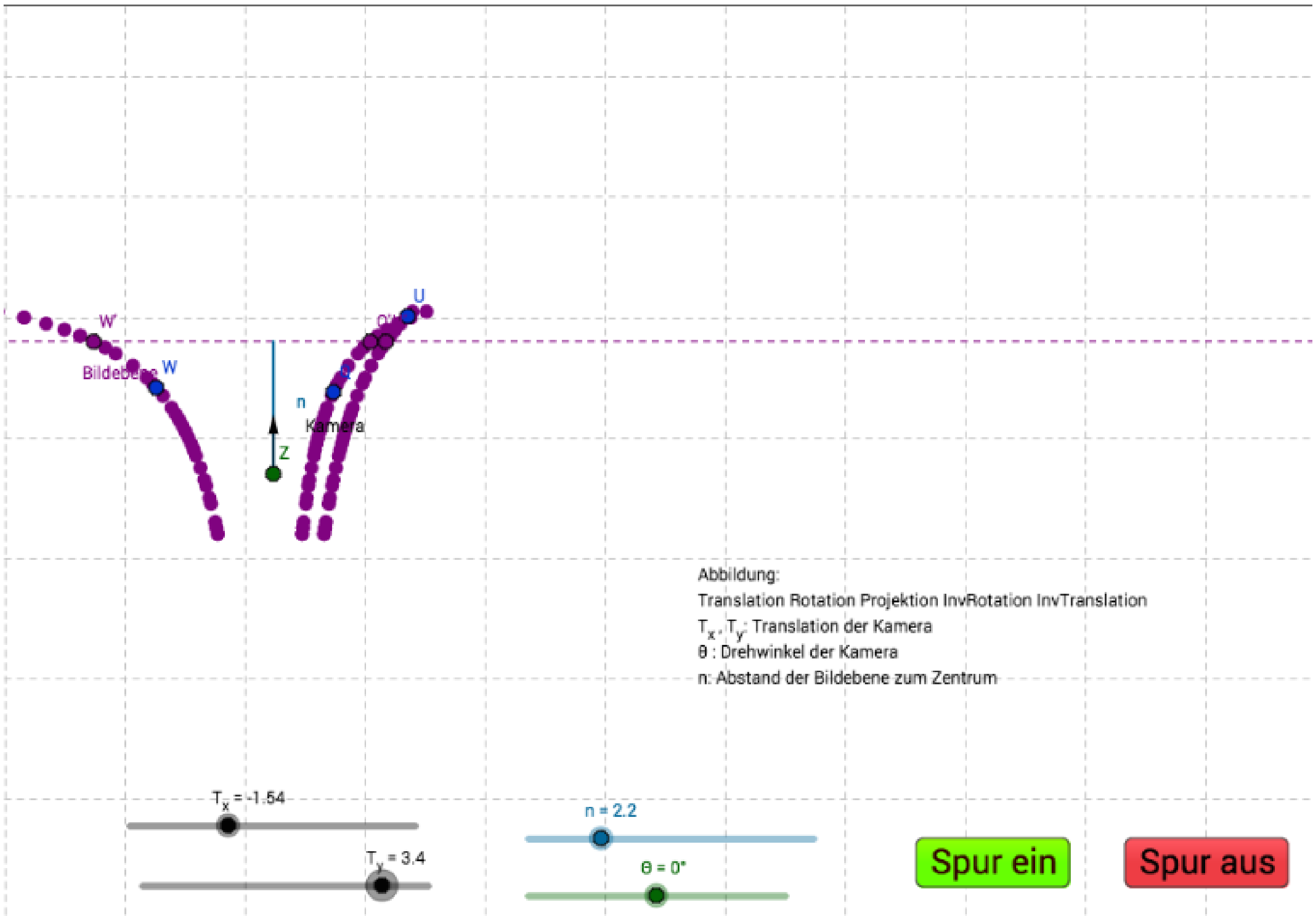
ROTATION

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSLATION

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION



[Link auf GeoGebraTube]

ZENTRALPROJEKTION IM KINO

IM KINO

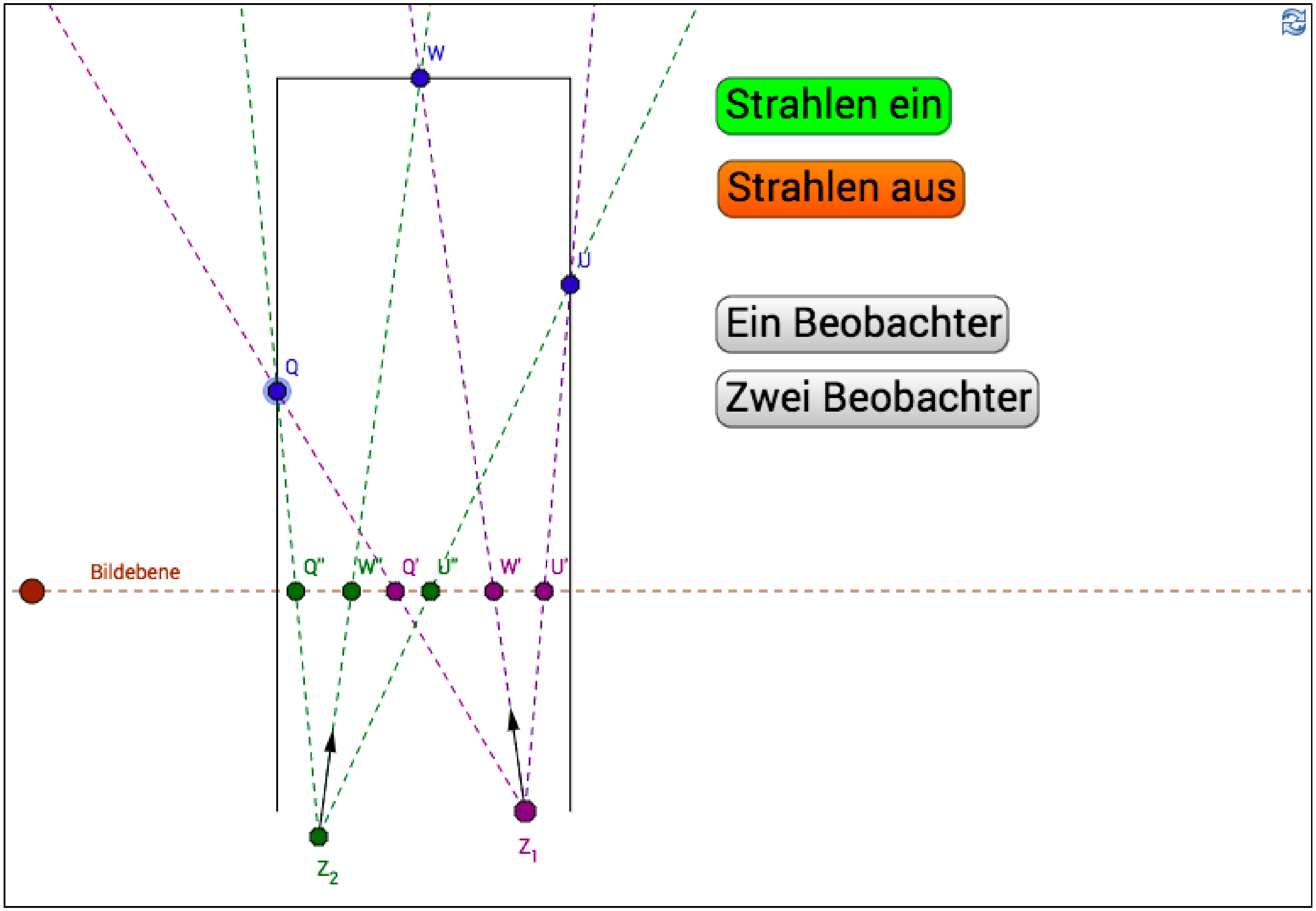
versuchen Agenten in einen Tresorraum einzudringen, ohne dass Sie von einem Wächter entdeckt werden.

Sie projizieren dafür den hinteren Teil eines schmalen Gangs perspektivisch auf eine Leinwand (Bildebene).

Anschliessend bewegen sie die Leinwand langsam nach vorne.

Die Sache fliegt in dem Moment auf, in welchem ein zweiter Betrachter hinzu kommt.

AUSSCHNITT MISSION IMPOSSIBLE 4



Link GeoGebraTube

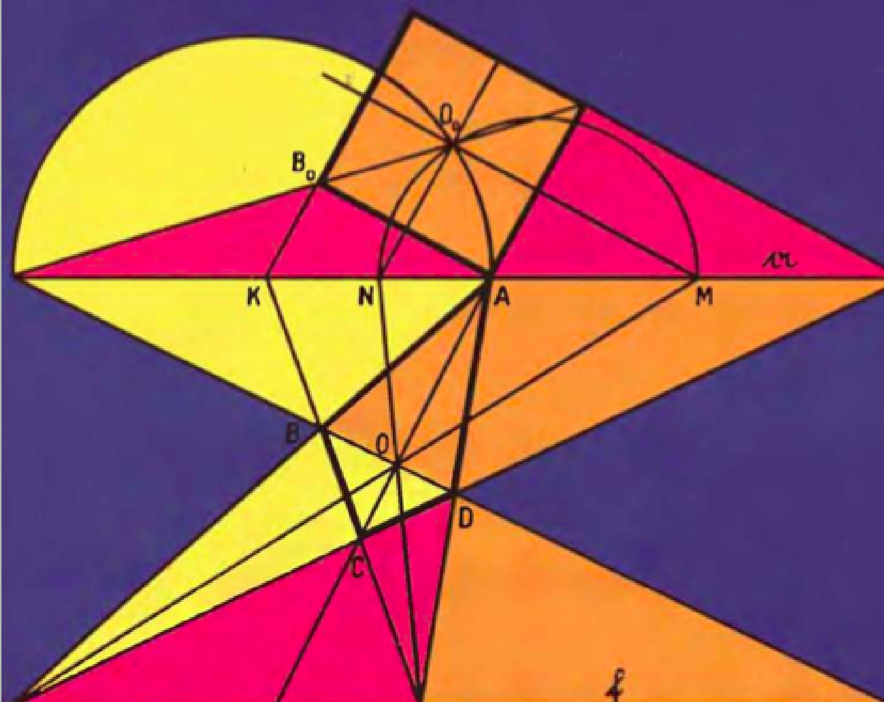
FERMAT-PUNKT

100
Great Problems of Elementary Mathematics

THEIR HISTORY AND SOLUTION

Heinrich Dörrie

Translated by David Antin



91 Fermat's Problem for Torricelli

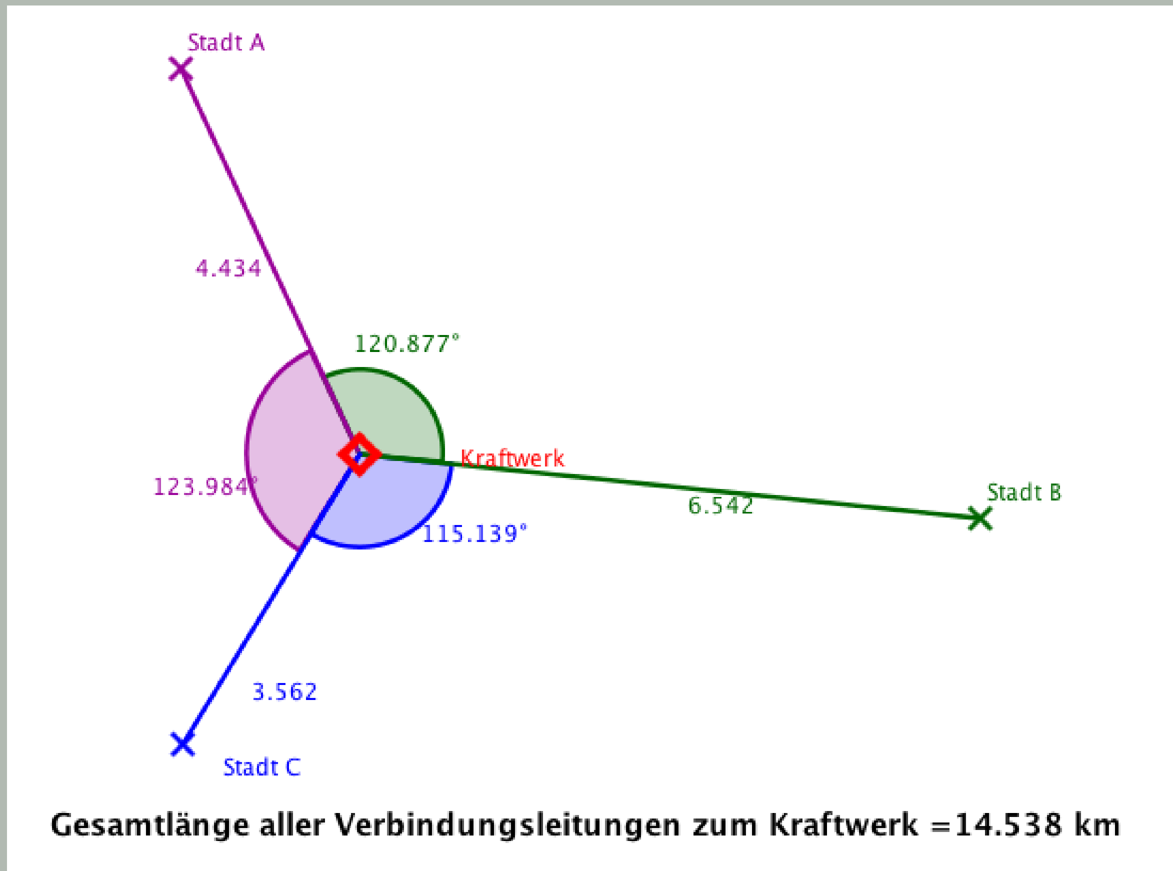
To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

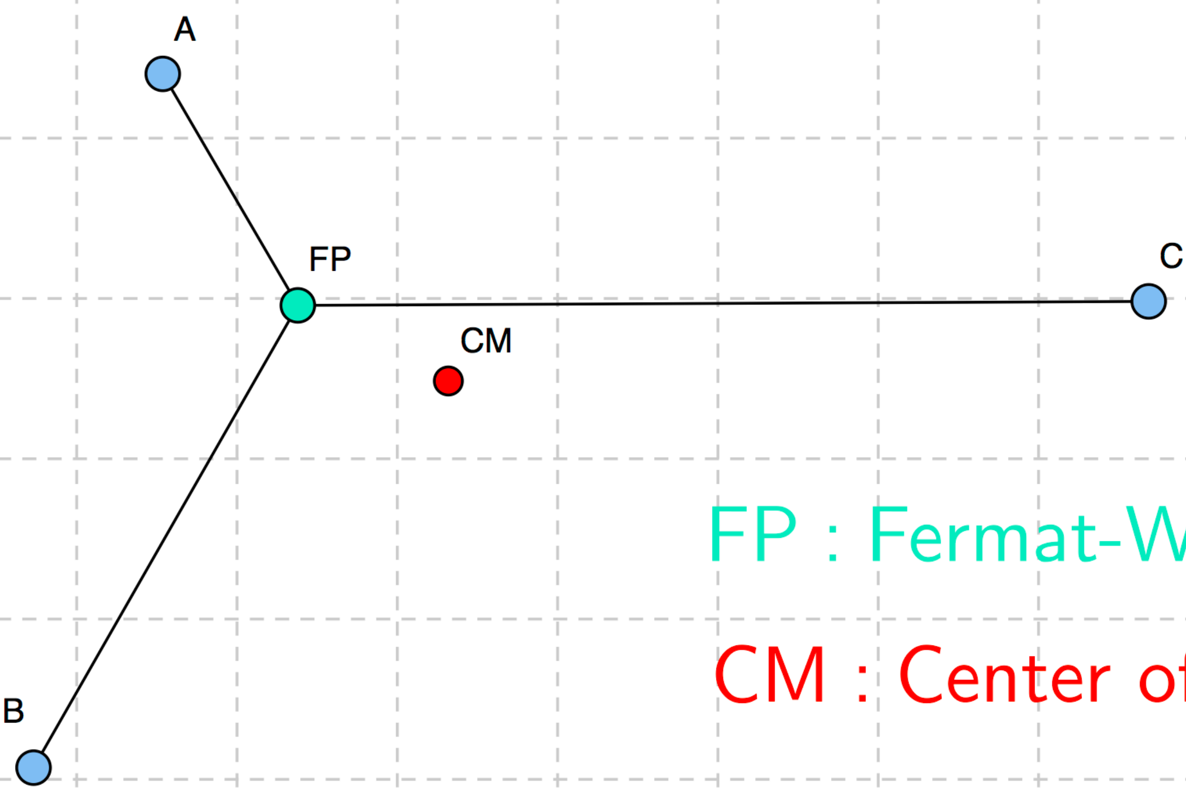
Dorrie, H. (1965). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.

OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS



[Link GeoGebraTube]

$$\text{minimize}_{x,y} \quad f(x,y) = \sum_{i=1..n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

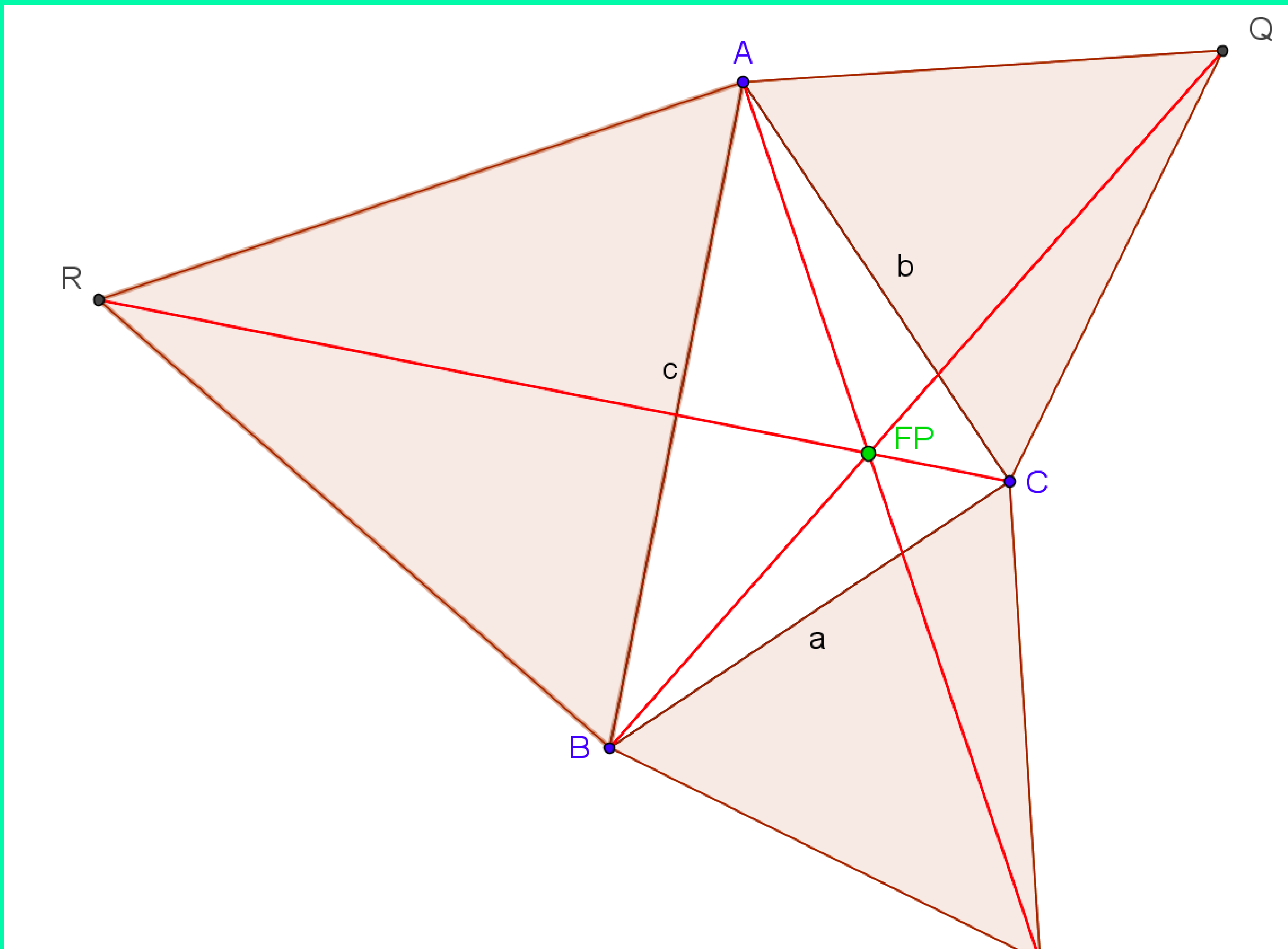


FP : Fermat-Weber Point

CM : Center of mass

EXAKTE LÖSUNG

FÜR N = 3



A
Q
R
b
c
FP
C
a
B

WER HAT ALS ERSTES EIN NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN FÜR **N>3** GEFUNDEN?

FACILITY LOCATION PROBLEMS

EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinksi** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

M. L. Balinksi. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.

I was sixteen when I became intrigued with the N point problem

Andrew Vázsonyi, 1932

Cosider N points and one more point, X. Measure the distances between X and the given points, then add the distances. Find point X so that this sum is the smallest possible.

Andrew Vázsonyi

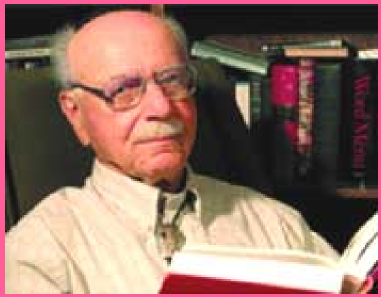
I found the point X by using an infinite, recursive algorithm, a most unusual solution for a problem in geometry. You start with a point X0, anywhere, and search for a better solution.

Andrew Vázsonyi, 1937

The paper "Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum", published in **Japan** in **1937** under the name **Endre Weiszfeld** became a classic in the mathematics of location analysis.

WEISZFELD

ALGORITHMUS



by Endre Weiszfeld, alias Andrew Vázsonyi (1916–2003), born in Budapest

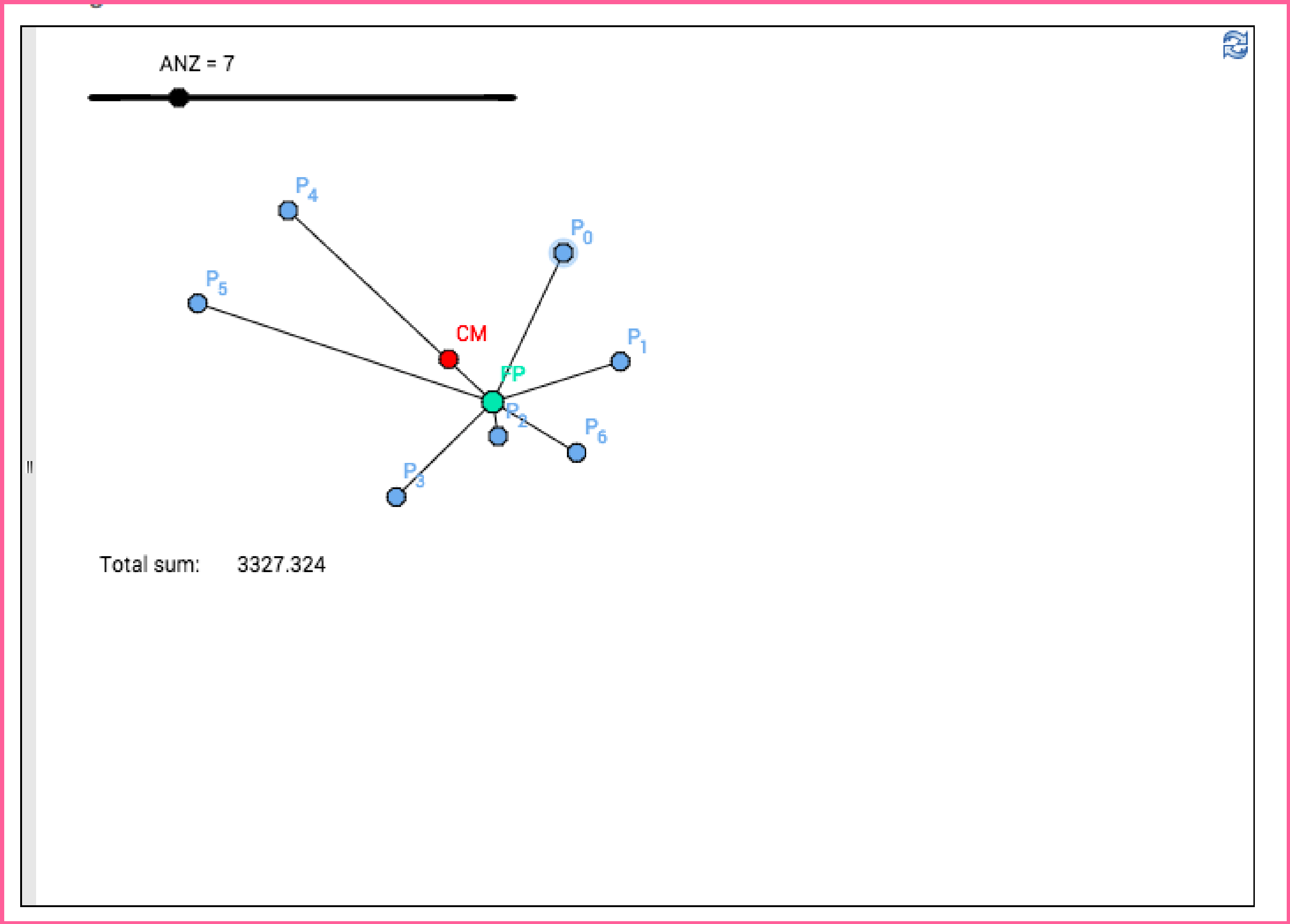
WEISZFELD ALGORITHMUS

Iterative Gewichtung von quadratischen Abweichungen

$$y_{k+1} = \frac{\sum_i^N \frac{x_i}{\|x_i - y_k\|}}{\sum_i^N \frac{1}{\|x_i - y_k\|}}$$

H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443-451, ISSN 0898-1221

Fermat-Punkt für n>3



Link GeoGebraTube