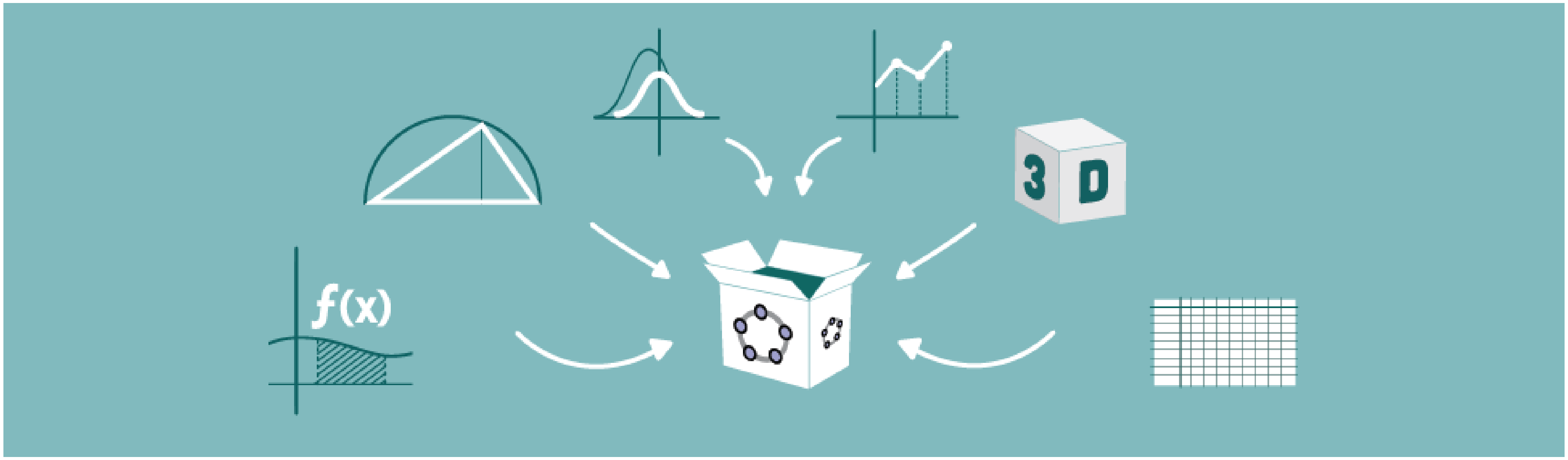
FORTBILDUNG GEOGEBRA



5.3.2015 KANTI BADEN

TORSTEN LINNEMANN
& MARTIN GUGGISBERG

Torsten Linnemann, PH FHNW,
Deutschschweizerische Mathematikkommission
Gymnasium Oberwil tolinnemann@gmail.com

Martin Guggisberg

Universität Basel martin.guggisberg@unibas.ch

UNSERE MOTIVATION

- Freude an:
  - Interaktiver Mathematik
  - Explorativen Zugängen
  - Visualisierungen

GEOGEBRA INSTITUTE

PH FHNW SCHWEIZ

http://www.geogebra.org/institutes

BEFÜRCHTUNGEN EINES KOLLEGEN

Trainieren sie (SuS) das Darstellungsvermögen nicht besser, in dem sie versuchen, im eigenen Kopf die verschiedenen Objekte sich vorzustellen? LP aus BL

WIE SOLL GEOGEBRA IN DER SCHULE EINGESETZT WERDEN?

- zur Ergebnissicherung ?
- zur Erkenntnisgewinnung ?
- zur Überprüfung einer vorher formulierten Hypothesen ?
- zur Veranschaulichung ?
- zum Auffinden von Gesetzmässigkeiten ?

unser Ziel:

MIT HILFE

KONKRETER BEISPIELE

ANTWORTEN FINDEN

1. Geometrie
    - Punkte, Dreiecke, Ortslinien, Argumentieren
    - Anwenden kleiner Apps.
2. Wo und wie ist Geogebra einsetzbar?
    - BrowserApp, Installation, Mobile Geräte
3. Funktionen
4. Vektorgeometrie
5. Dessert
    - Stochastik (Maturaufgabe)
    - Tabellenkalkulation
    - Piratenaufgabe
    - Differentialgleichungen
    - Abbildungen (Matrizen)
    - Angry Birds Mathematik
    - Zentralprojektion & Parallaxe
    - Fermat-Punkt

WEITERE WÜNSCHE

aus Rückmeldungen zur letzten Veranstaltung

- Ortslinien von ausgezeichneten Punkten einer Funktionsschar
- Eigenschaften der Kegelschnitte
- Parameteraufgaben und Kurvendiskusion

GEOMETRIE

Konstruktion von ebenen Figuren, Dreiecke, spezielle Punkte

ORTSLINIEN, SPUR: ARGUMENTIEREN

- Winkelhalbierende: http://tube.geogebra.org/student/m320791
- Symmetrie: https://tube.geogebra.org/student/m188567
- Gleicher Abstand: https://tube.geogebra.org/student/m188578
- Gleicher Abstand II https://tube.geogebra.org/student/m188545

KINEMATIK

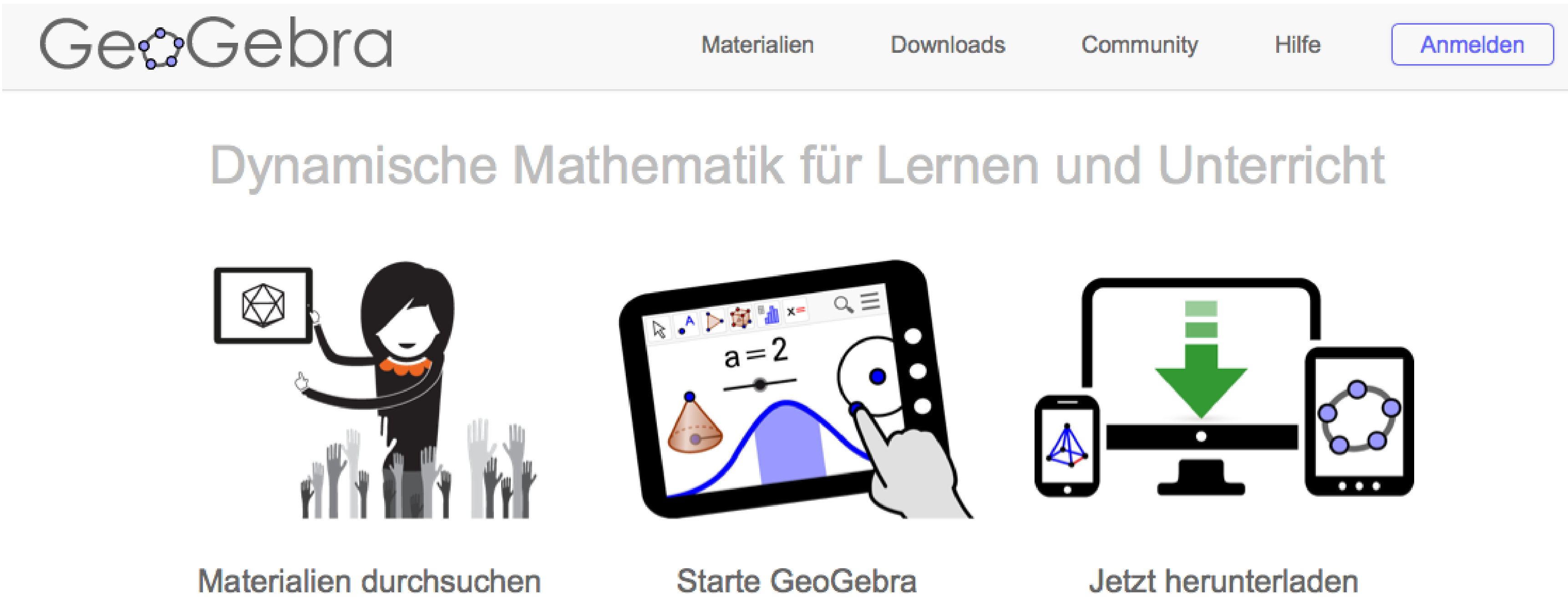
Bewegung eines Massenpunkts

SIMULATION VON EINFACHEN BEWEGUNGEN

- Freier Fall ohne Reibung Link
- Angry Bird Physik Link
- Schiefer Wurf Link
- Harmonische Schwingung Link

GEOGEBRA
IM
EINSATZ

STARTSEITE



GEOGEBRA

IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,

1. MÖGLICHKEIT GEOGEBRA INSTALLIEREN

GeoGebra für Tablets

Download from Windows Store

Download on the App Store

ANDROID APP ON Google play

GeoGebra für Desktop Computer

Windows

Mac OS X

Linux

Mehr Download-Möglichkeiten für GeoGebra

GeoGebra für Smartphones

Kommt bald!

http://www.geogebra.org/download

WICHTIG

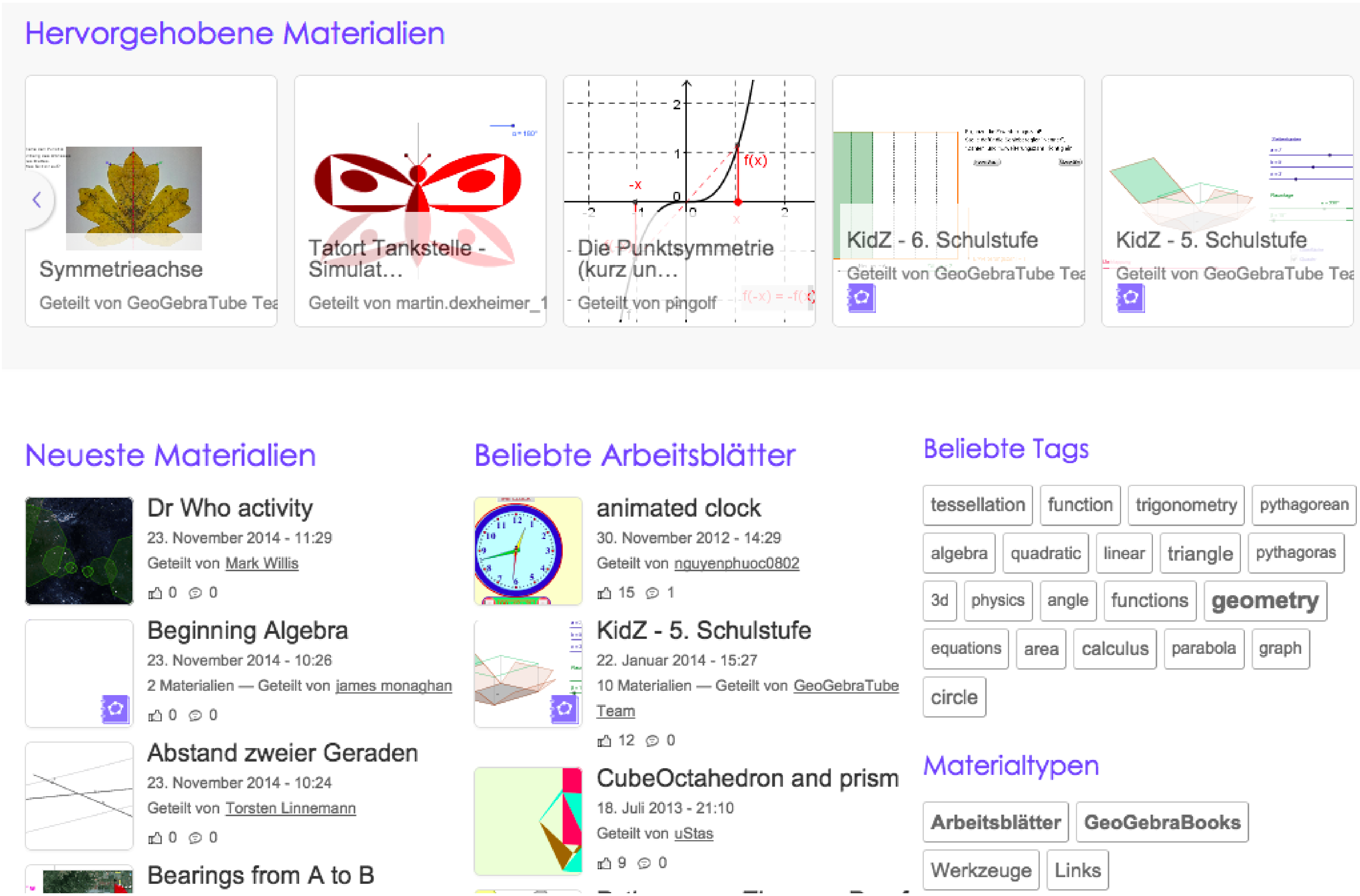
VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

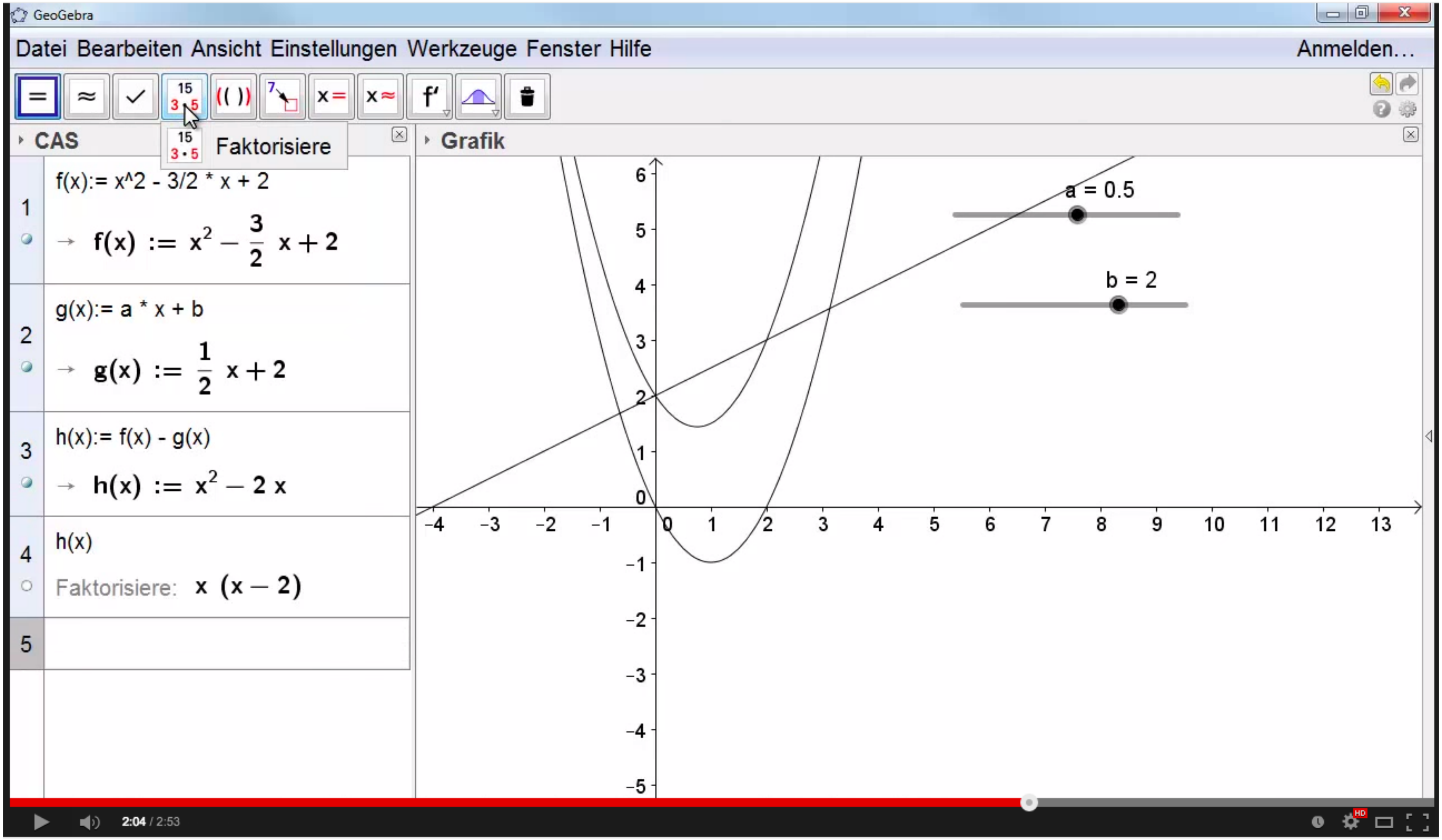
2. MÖGLICHKEIT
DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

http://web.geogebra.org/app

Schülerinnen und Schüler können bestehende Materialien direkt über http://tube.geogebra.org/ nutzen



LERNVIDEOS

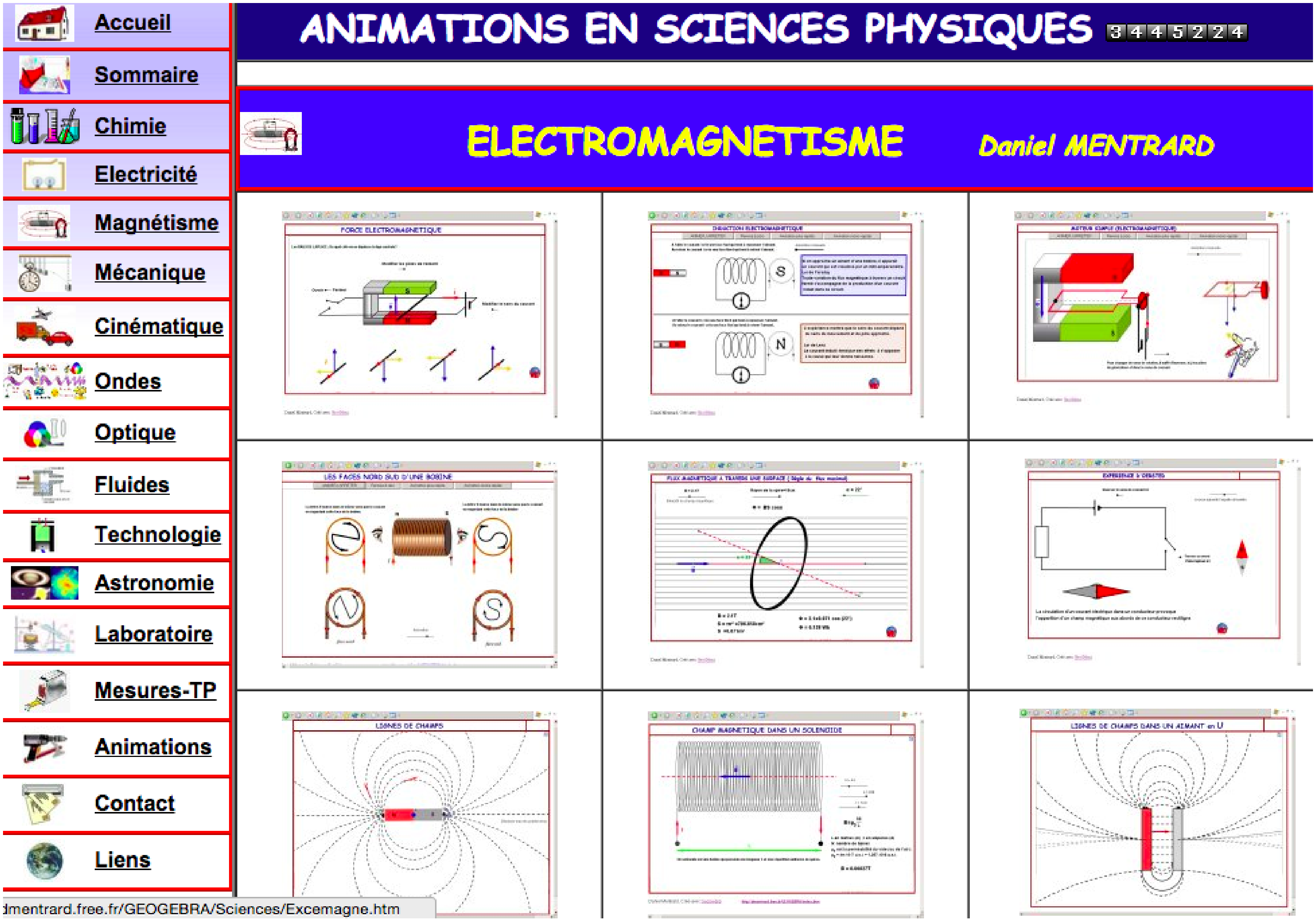


[YouTube GeoGebra channel Daniel Mentrard]

NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

Twitter: @geogebra

Daniel Mentrard



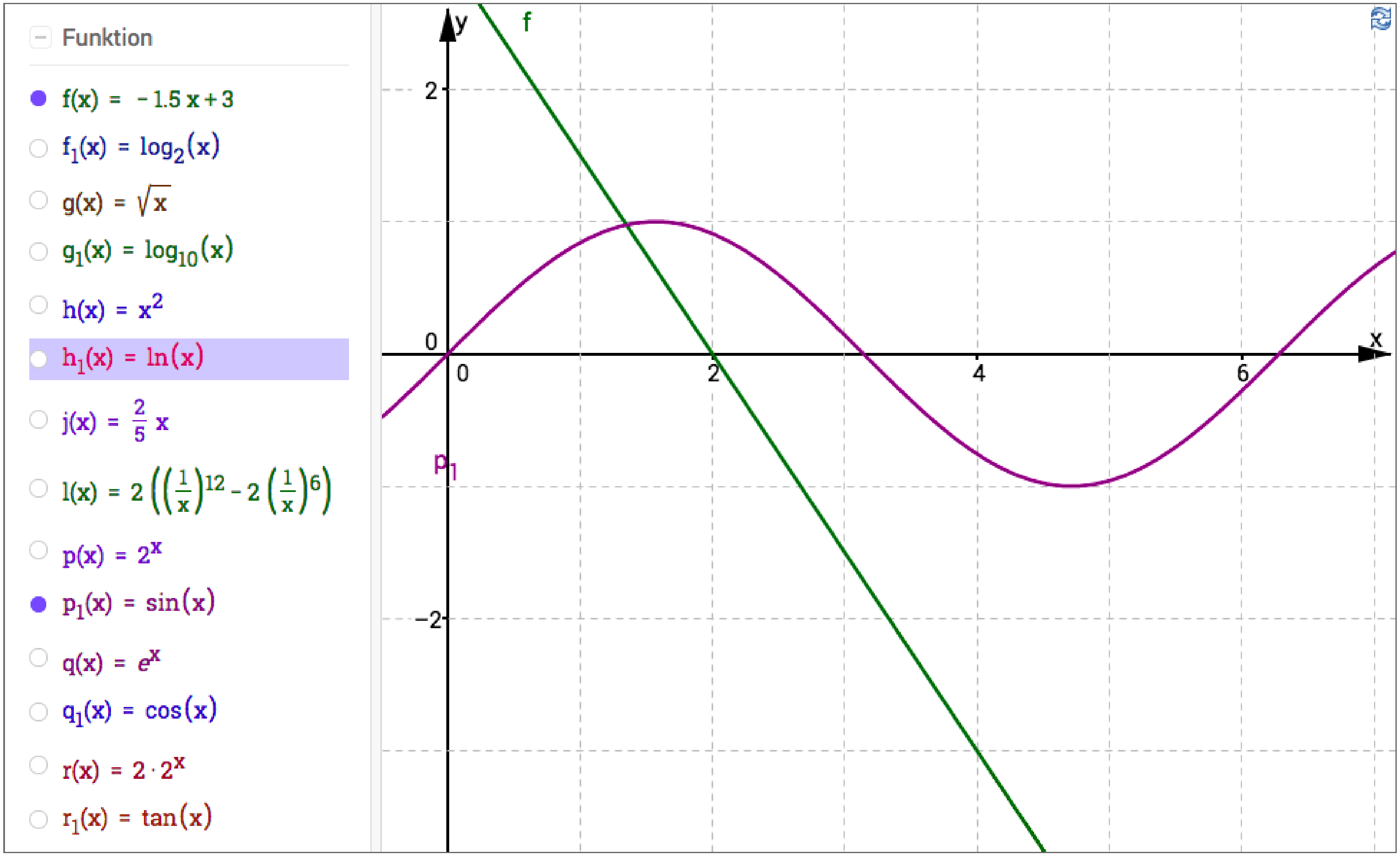
http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/index.htm

GeoGebra Material zu MatheWelt 187

H.-J. Eschenbroich

FUNKTIONEN

- Funktionen graphisch darstellen
- Funktionen unter der Lupe
- Funktionen verknüpfen & diskutieren
- Funktionen mit Parameter
  - Maturaaufgabe
  - Spur von Extrema

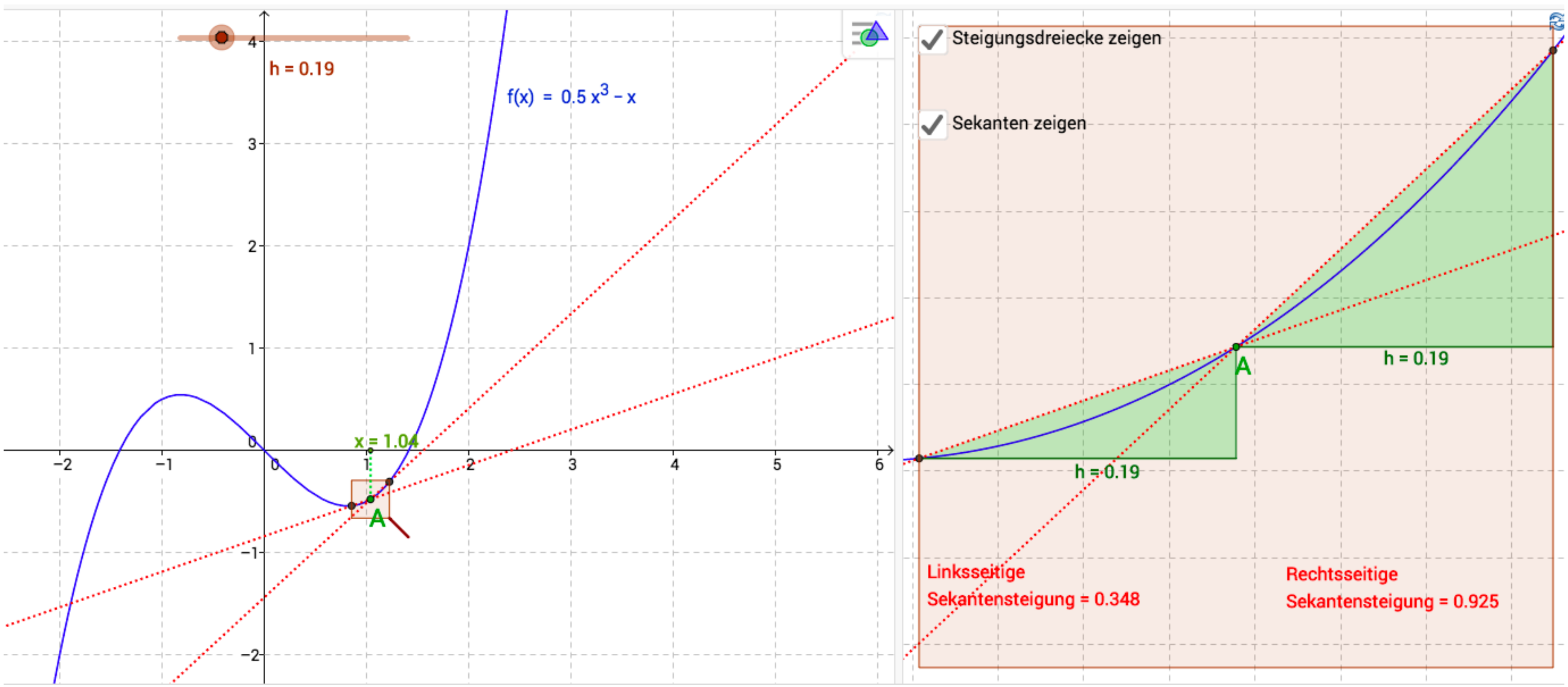


[Link auf GeoGebraTube]()

FUNKTIONEN UNTER DER LUPE

H.-J. Eschenbroich

http://tube.geogebra.org/material/show/id/410583



PUNKT AUF FUNKTION

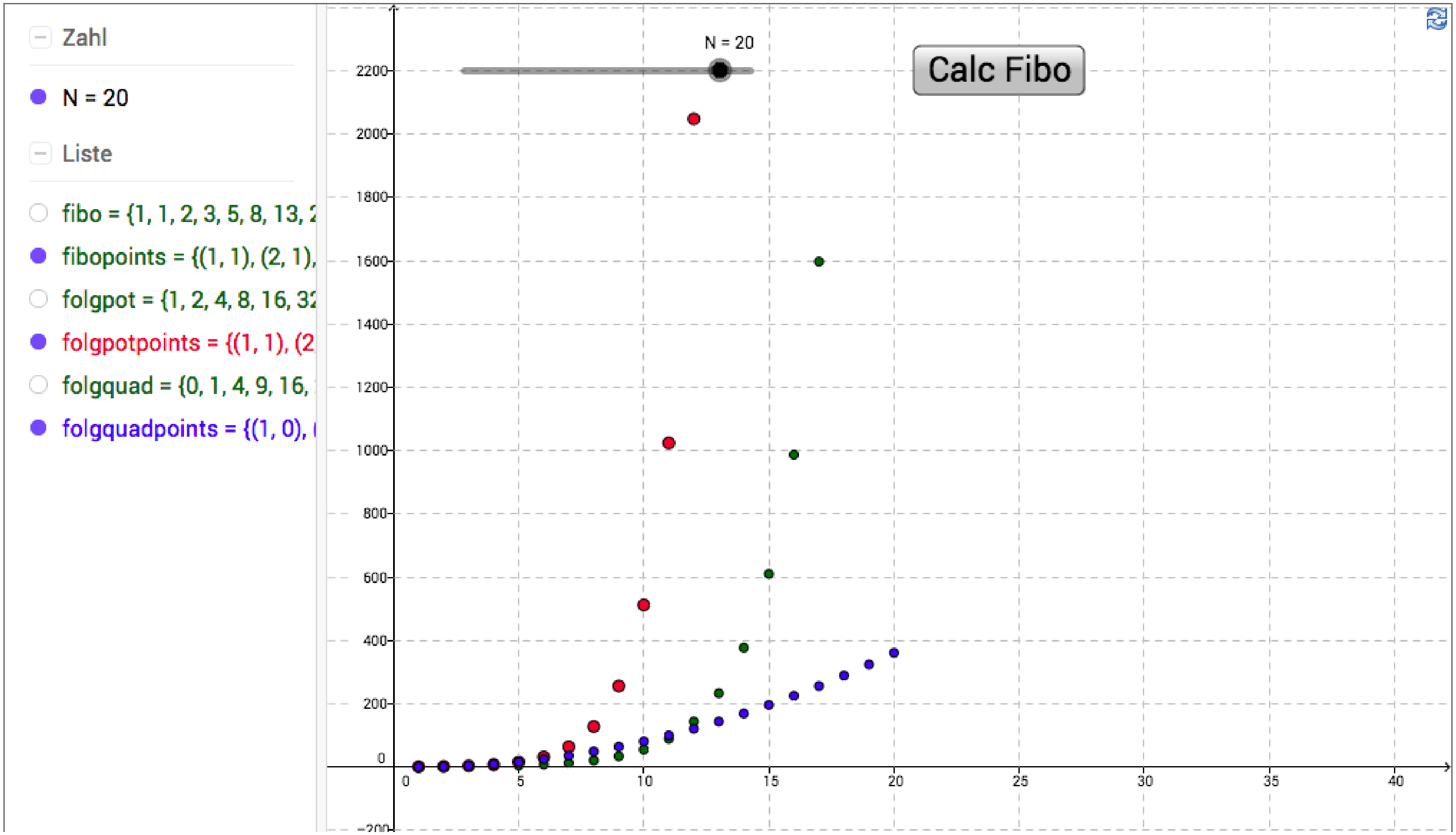
1. Beweglicher Punkt auf der x-Achse
2. entsprechender Punkt auf einer Funktion

```
f(x) =x^2*sin(x^2)
X_0 =Punkt[y=0]
P =(x(X_0),f(x(X_0)))
```

EXKURS FOLGEN

- Zahlenfolgen
- Folgen von Funktionen
- Folgen geometrischer Objekte
- Geschachtelte Folge (Punkte auf Fläche im $\mathbb{R}^3$)

ZAHLENFOLGEN



[Link auf GeoGebraTube]

FIBONACCI MIT PROGRAMM BERECHNEN (JAVASCRIPT)

```javascript
var fibo = function(n){

   var N,i,arr;
   // Eingabe überprüfen
   if (typeof(n) !== "number"){
      N = 10;
   } else{
      N =n-2;
   }

  // Fibo Start
  arr=[1,1];
  for (i=0;i<N;i++){
    arr.push(arr[i]+arr[i+1])
  }
 //Rückgabe als Liste
 return "{"+arr+"}";
};
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

zum Beispiel

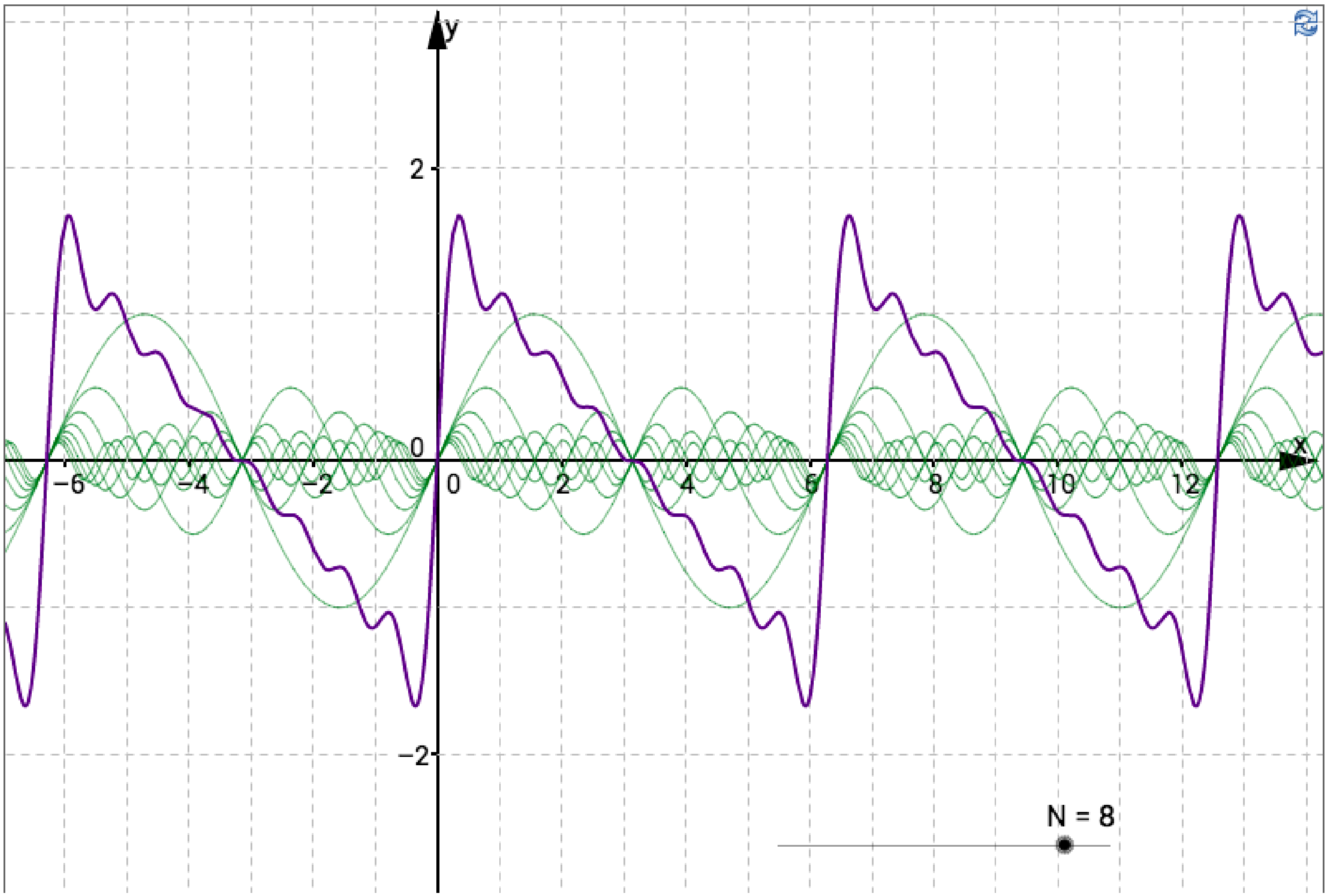
$$f_i(x) = \frac{1}{i}\sin(i \cdot x)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)$$

```
N=10
folgefunkt = Folge[1/i*sin(x*i), i, 1, N]
reihe = Summe[folgefunkt]
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

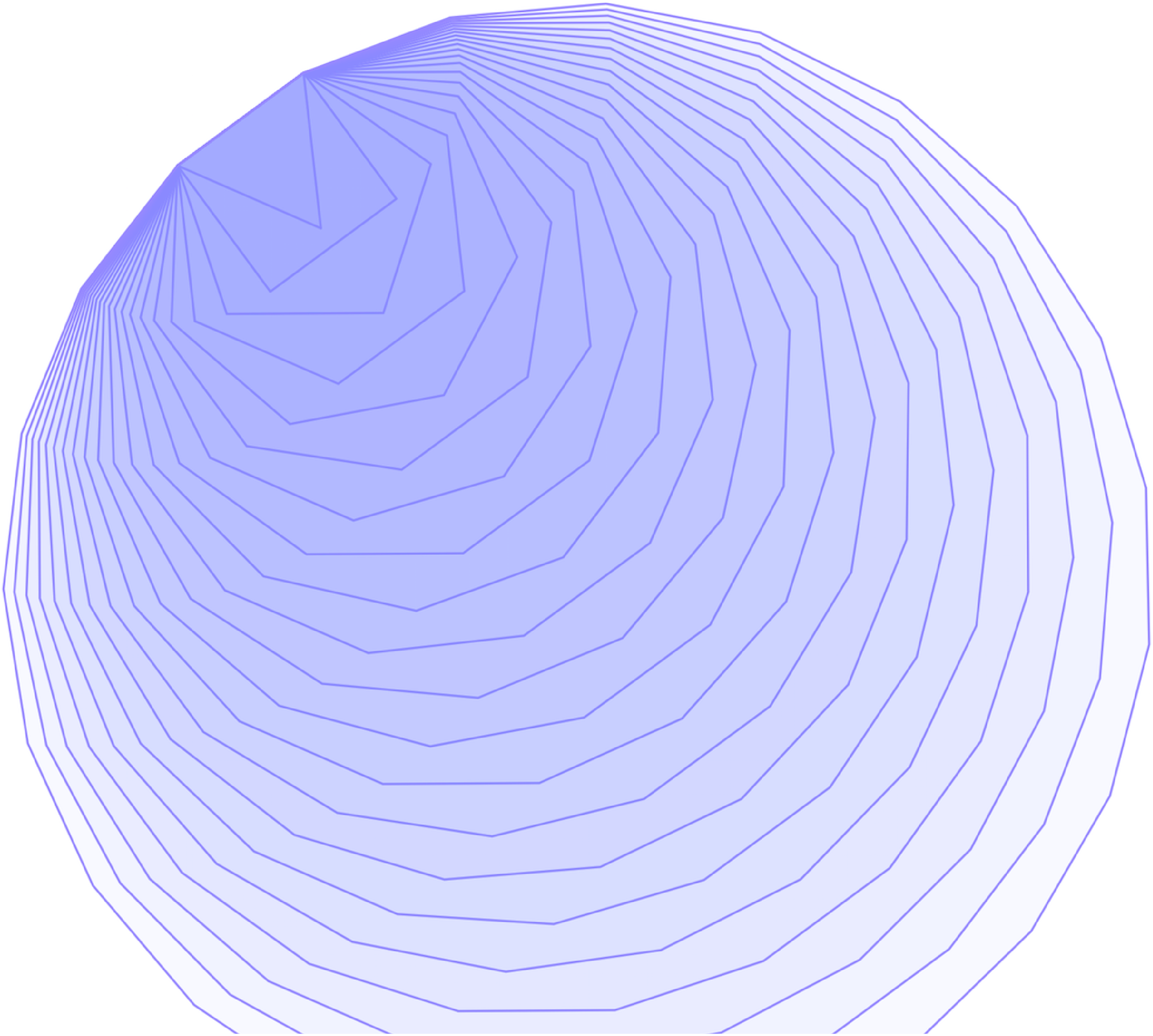
$f = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)$



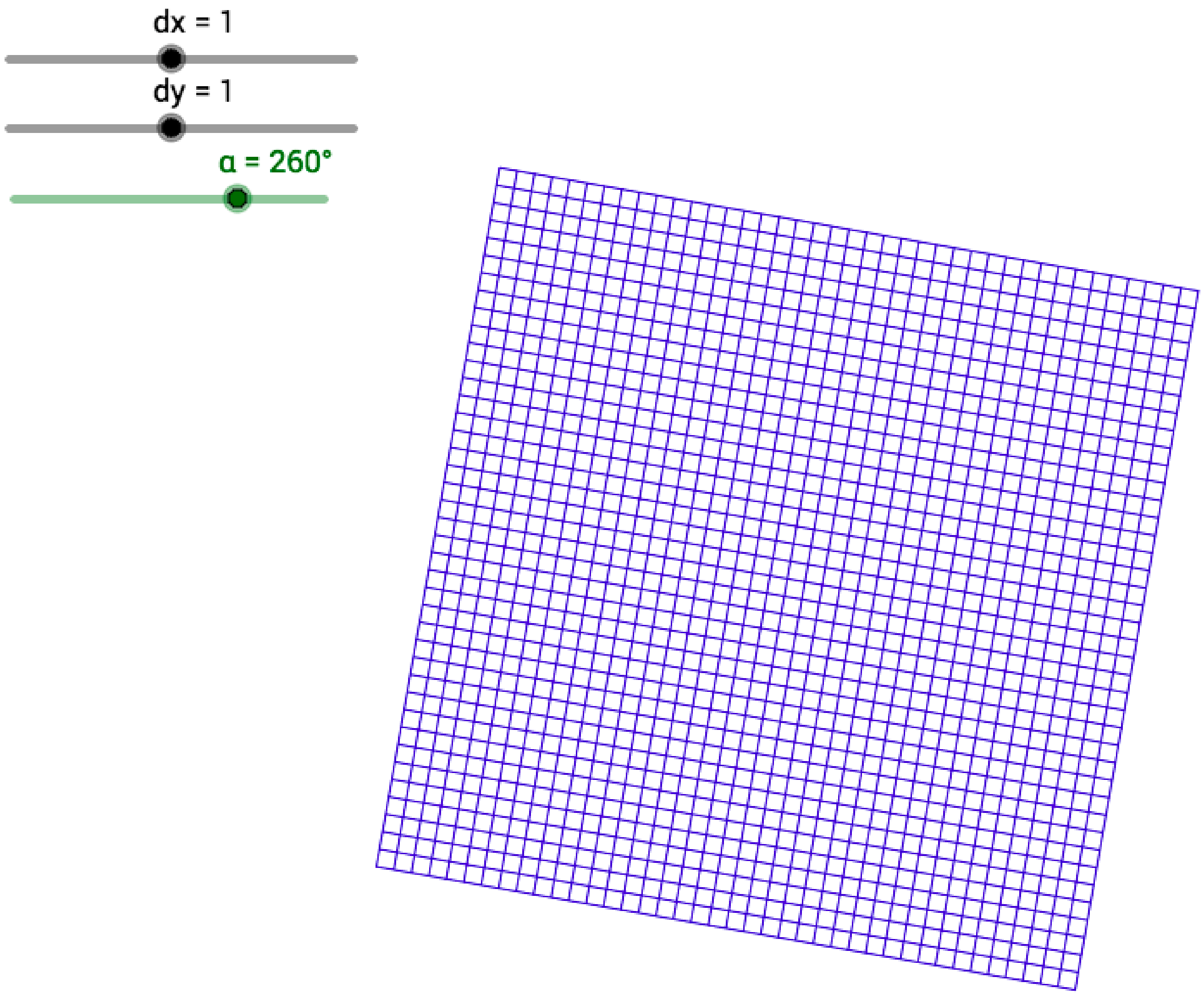
[Link auf GeoGebraTube]

FOLGEN GEOMETRISCHER OBJEKTE

```
A=(0,0)
B=(1,0)
Folge[Vieleck[A, B, i], i, 3, 23]
```



GITTER



[Link auf GeoGebraTube]

GEOGEBRA BEFEHLE FÜR EIN GITTER

```
dx = 1
dy = 1
x_{Max}=20
x_{Min}=-20
y_{Max}=20
y_{Min}=-20
Folge[Strecke[(px, y_{Min}), (px, y_{Max})], px, x_{Min}, x_{Max
Folge[Strecke[(x_{Min}, py), (x_{Max}, py)], py, y_{Min}, y_{Max
```

VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

Eingabe:

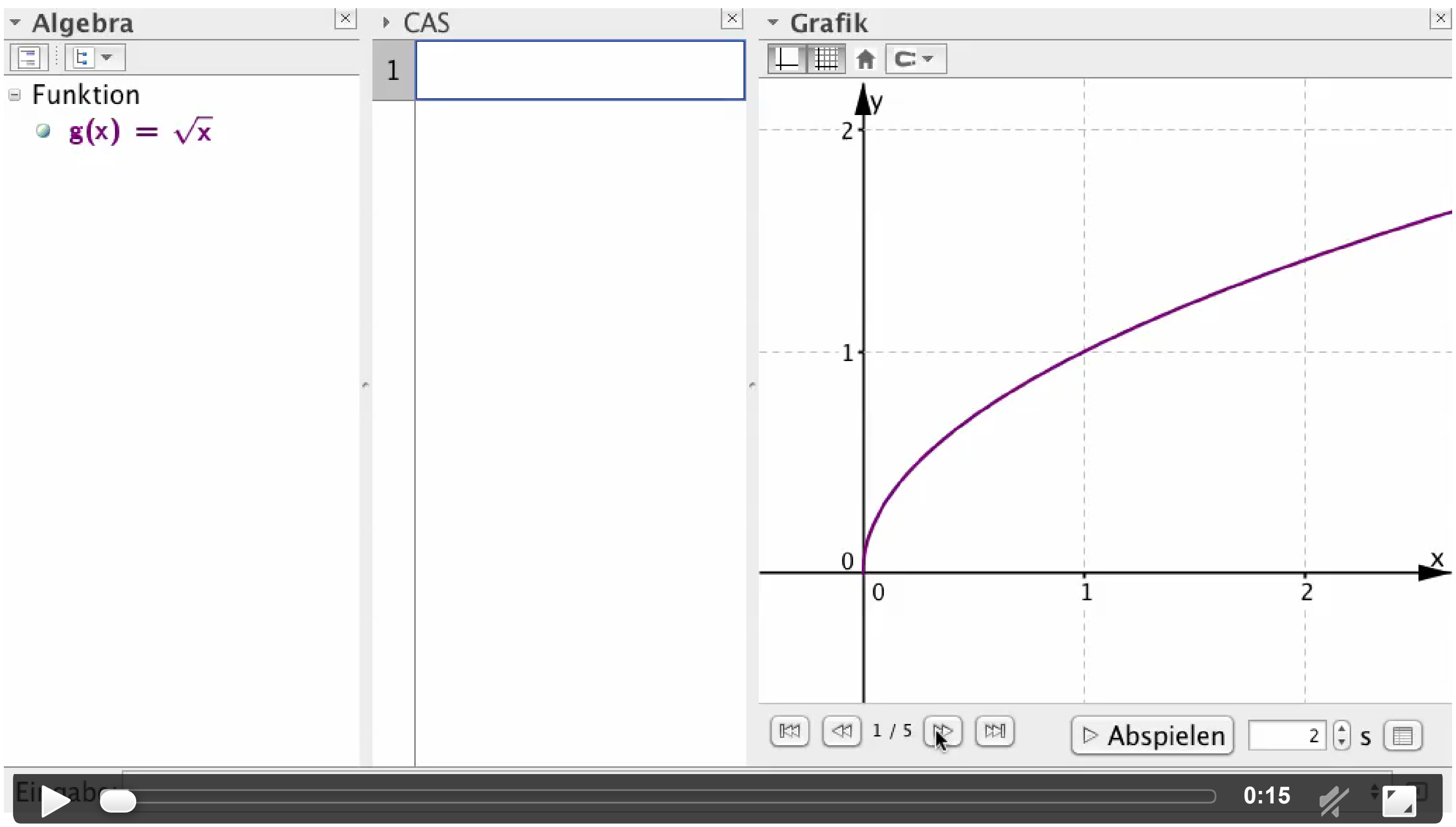
```
g(x) = sqrt(x)
f(x) = x^2 (x - 1)

h(x) = f(g(x))

Nullstelle[h, 0]
Nullstelle[h, 5]
```

Im CAS-Fenster

```
Löse[h(x)=0]

Löse[h'(x)=0]
```

VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

[Link GeoGebraTube]



FUNKTIONEN MIT PARAMETER (MATURAUFGABE)

Wir führen nun den Parameter $a \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Funktionenschar f_a, die durch die Gleichung $f_a(x) = -ax^3 + (a+1)x^2$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f_a unabhängig von a durch den Punkt $P(1 / 1)$ geht.

d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a an der Stelle $x = 4$ ein Maximum hat.

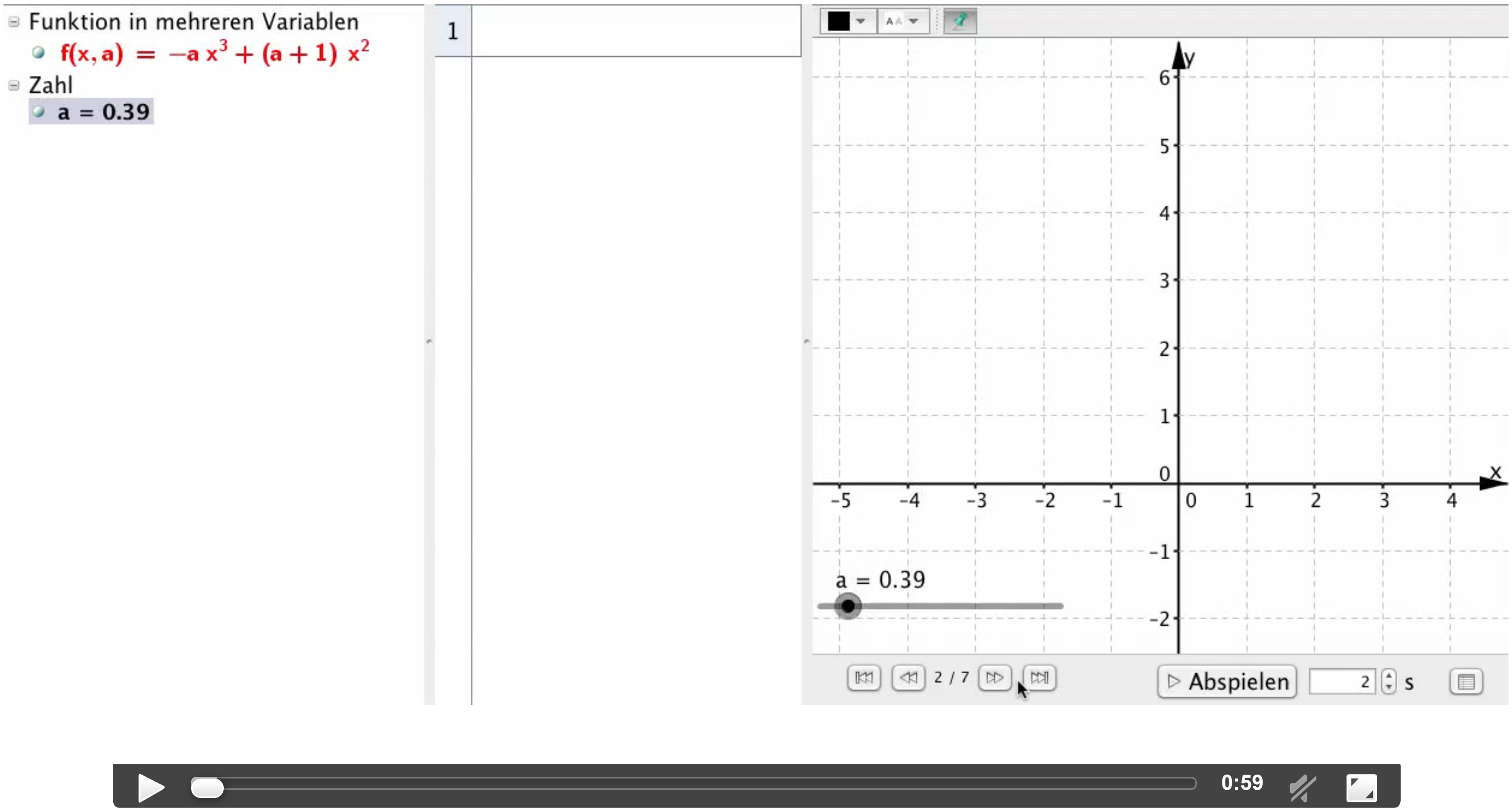
Eingabe:

```
f(x, a) = -a x^3 + (a + 1) x^2

g(x) = f(x, a)

P = (1, 1)

Mg = Element[Liste1, 2]

Q = (x(Mg), g(x(Mg)))
```

Im CAS-Fenster

```
f(1,a)

Liste1:=Löse[g'(x) = 0]

Löse[Ableitung[f(x, b),x]=0,b]
```

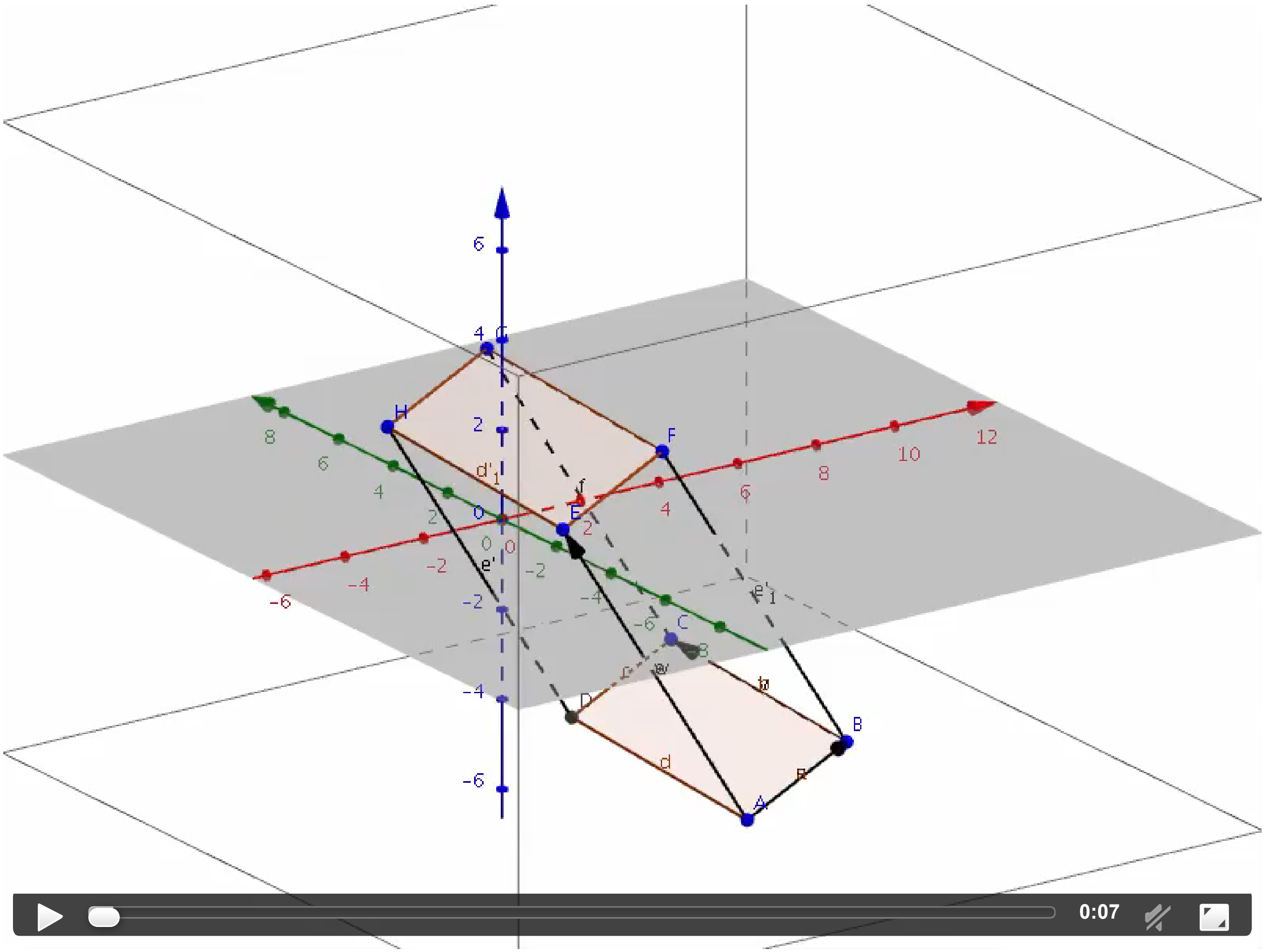
Link GeoGebraTube



VEKTORGEOMETRIE

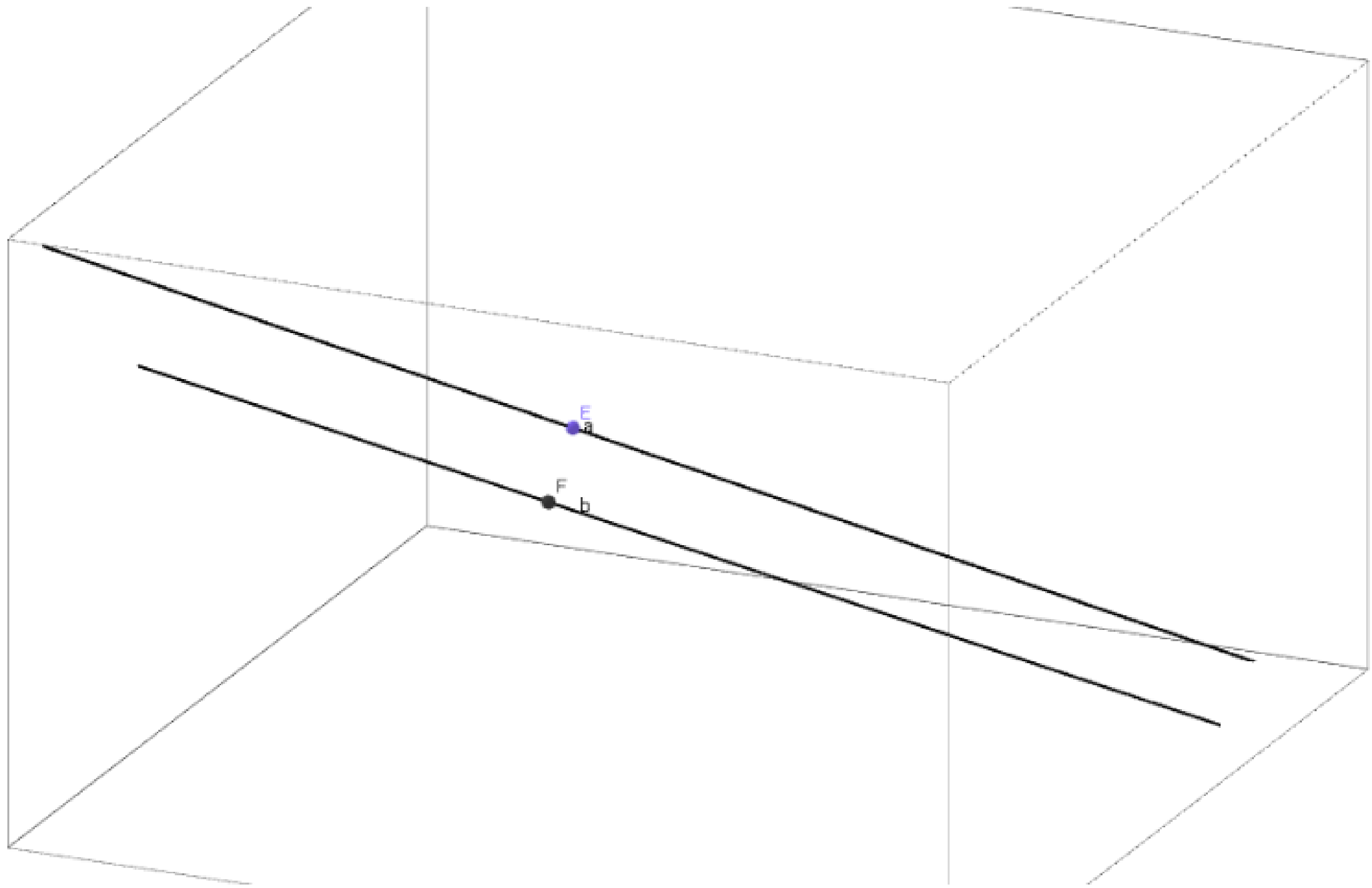
- Ein Spat
- Abstand zweier Geraden
- Würfelschnitte

EIN SPAT



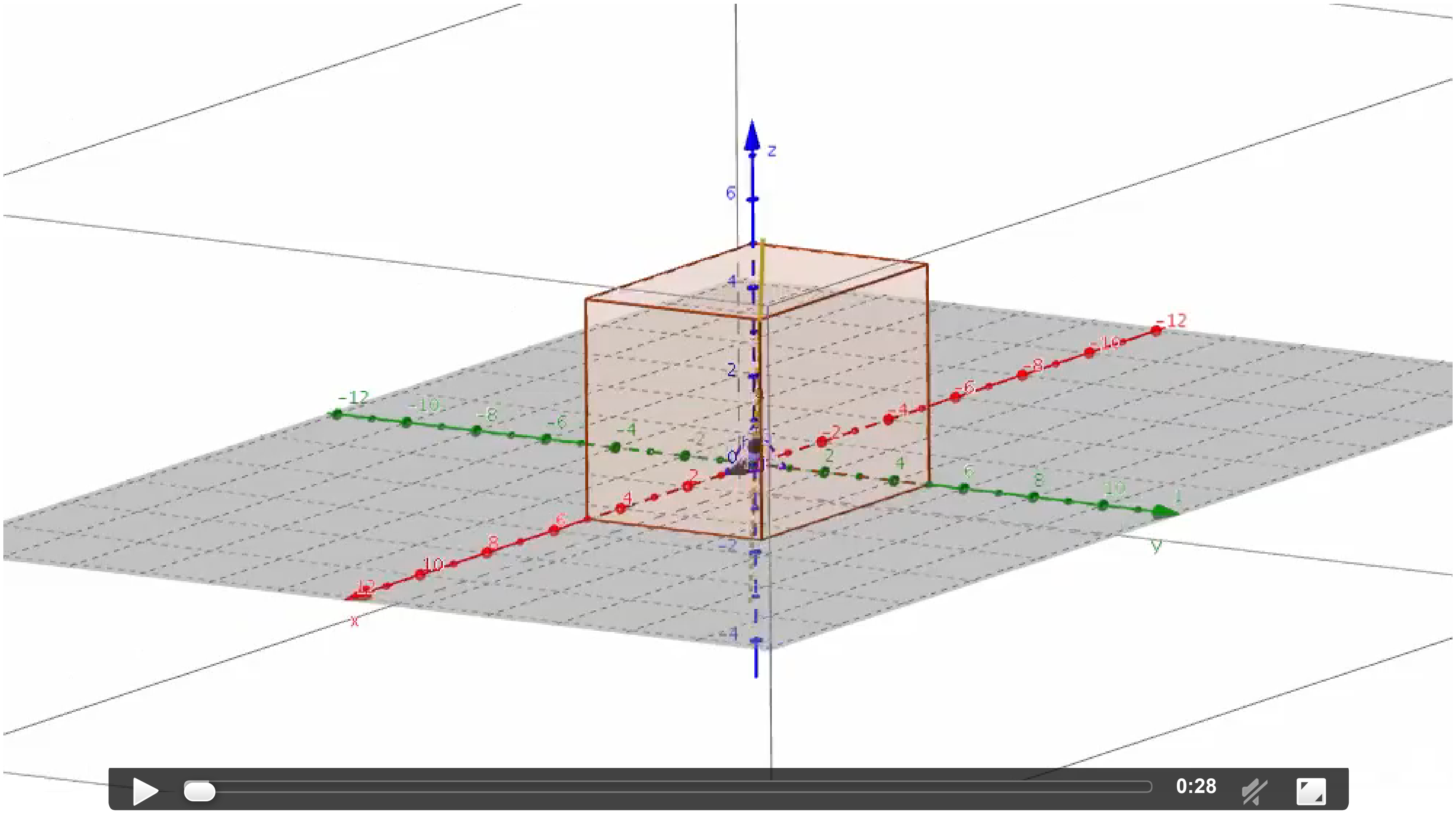
- http://tube.geogebra.org/student/m320977

ABSTAND ZWEIER GERADEN

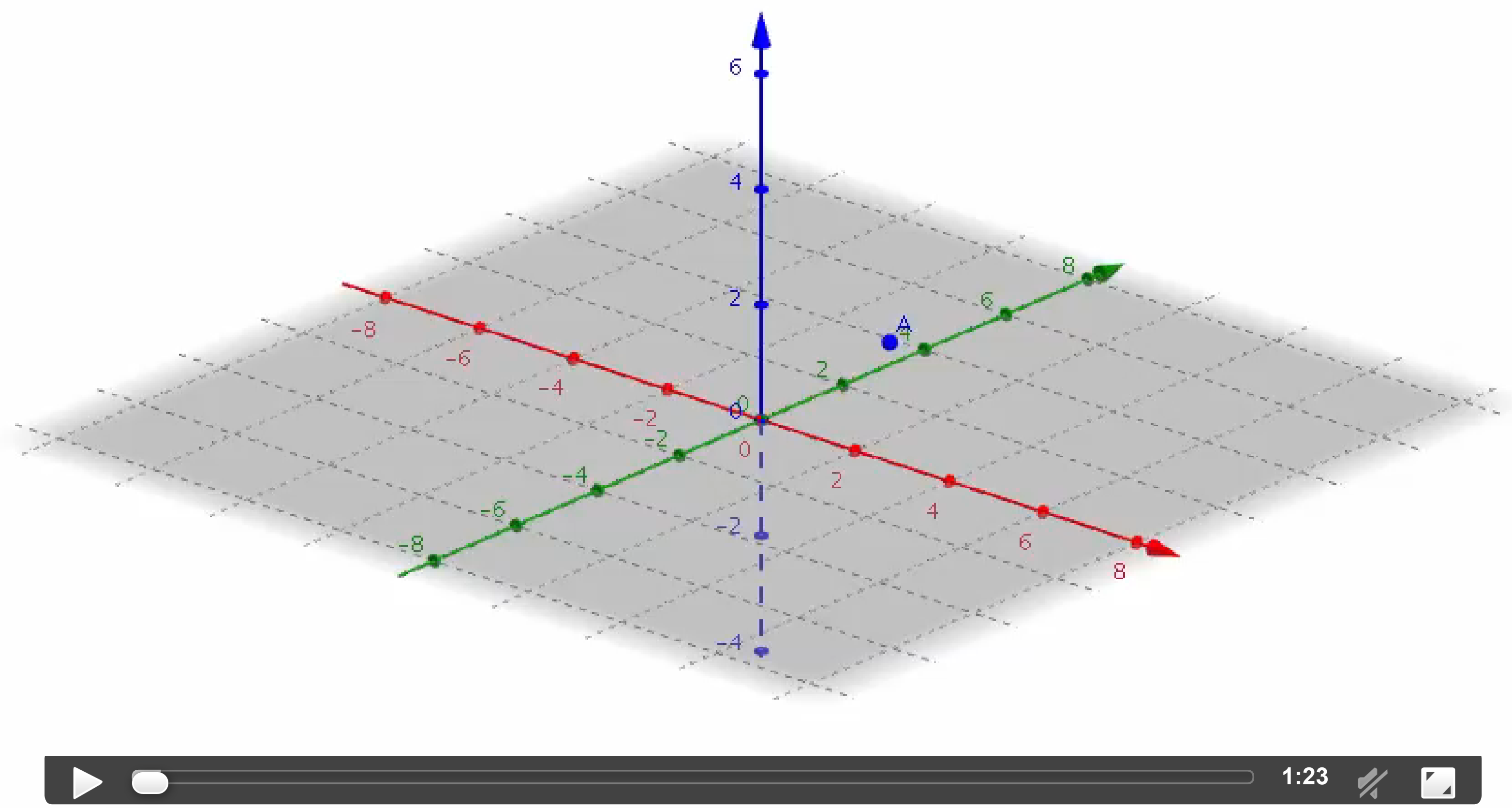


- http://tube.geogebra.org/student/m320555

WÜRFELSCHNITTE



PARAMETERFORM DER EBENENGLEICHUNG



- http://tube.geogebra.org/student/m770041

MATURAUFGABE ZUR VEKTORGEOMETRIE

GYM OBERWIL, GRUNDLAGENFACH 2014

- https://tube.geogebra.org/student/m761969

DESSERT

- Stochastik (Maturaufgabe)
- Tabellenkalkulation
- Piratenaufgabe
- Differentialgleichungen
- Abbildungen (Matrizen)
- Angry Birds Mathematik
- Zentralprojektion & Parallaxe
- Fermat-Punkt

STOCHASTIK MATURAUFGABE

https://tube.geogebra.org/student/m769673

TEILAUFGABE A - CAS-FENSTER

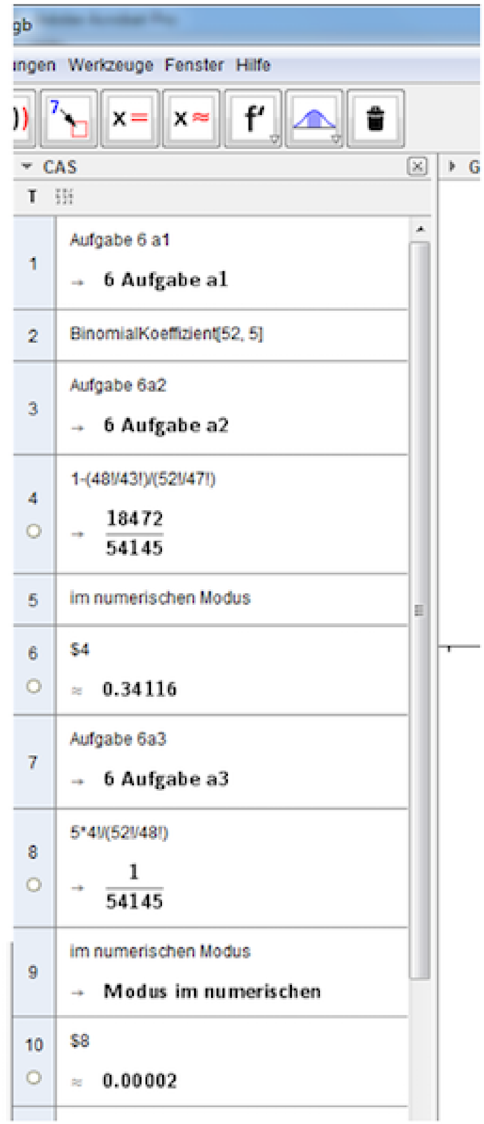
Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben" (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).

4+4+3 = 11 Punkte

a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
   - a1) Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
   - a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
   - a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
   - a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird? Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).

b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
   - b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
   - b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?

c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?



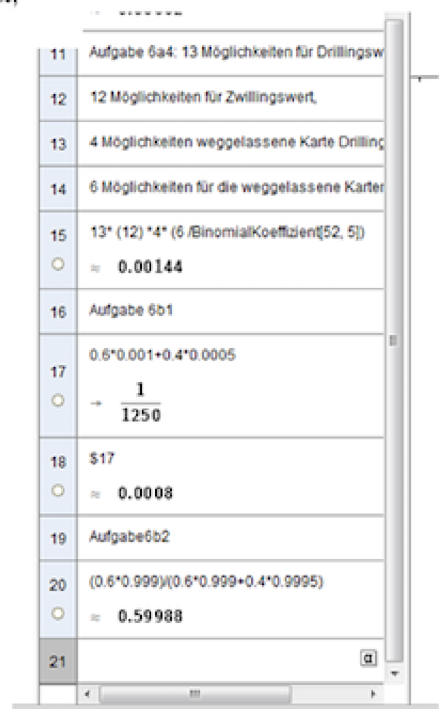
TEILAUFGABE A&B - CAS-FENSTER

a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).

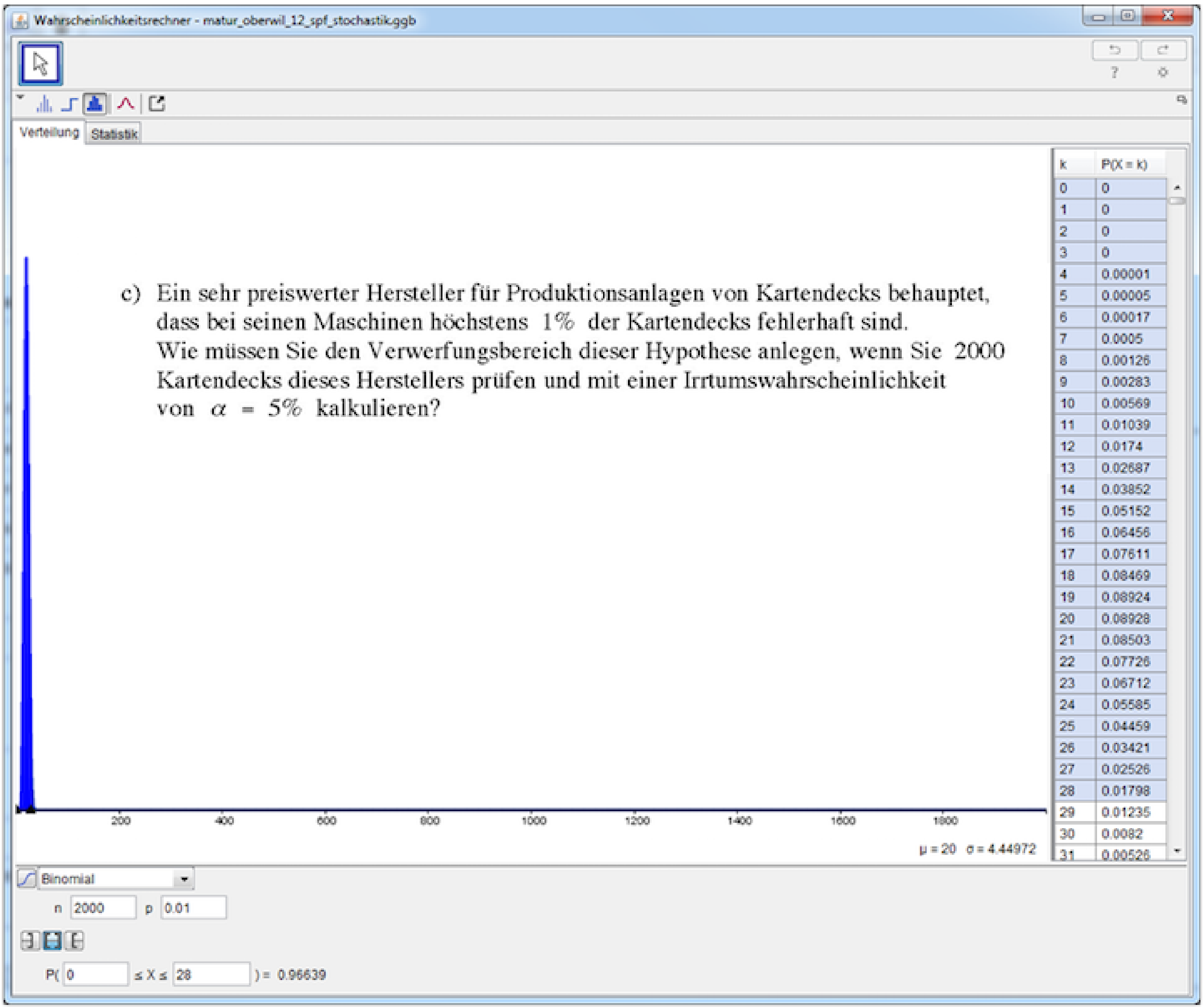
b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.

b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?

b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?



C - WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNER IM MENÜ ZUM CAS-FENSTER



TABELLEN -KALKULATION

- Körperoberfläche http://tube.geogebra.org/student/m321081
- Digoxin http://tube.geogebra.org/student/m321095
- 1000 Zufallszahlen http://tube.geogebra.org/student/m321107

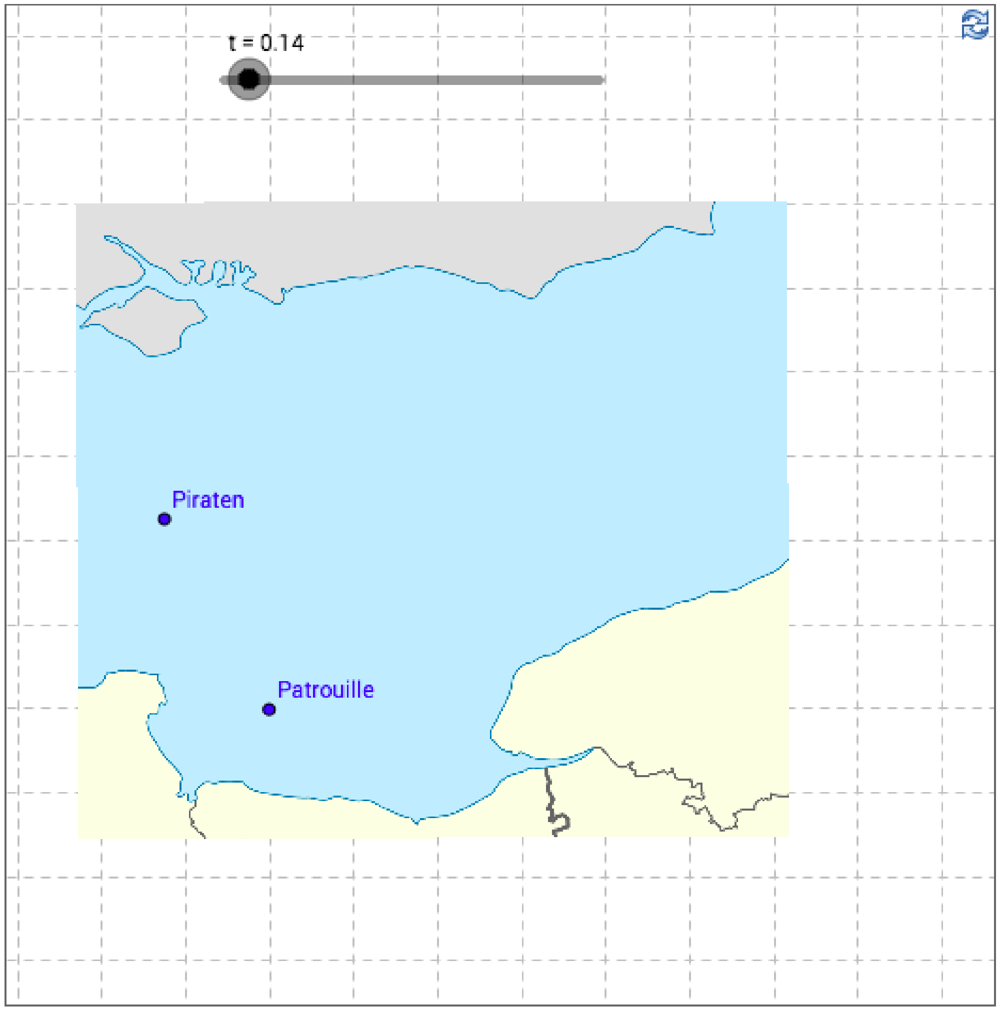
PIRATEN-AUFGABE

Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.

Kurs zweier Schiffe

Zwei Schiffe im Ärmelkanal

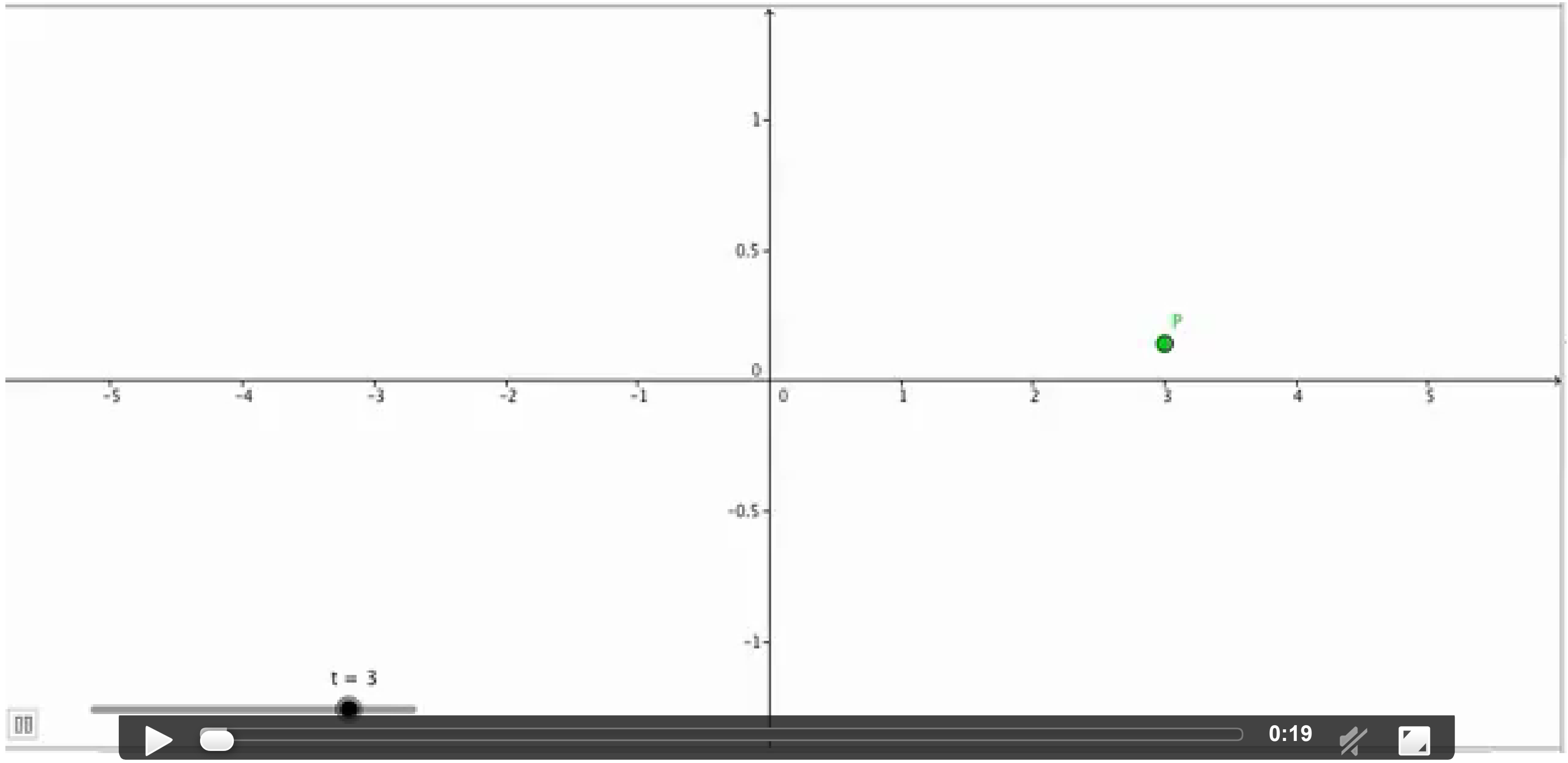


Link auf GeoGebraTube

BEWEGUNGEN SIMULIEREN

x,y-Position als Funktion von t

```
t = 0.0
P = (t,sin(t))
```



1
0.5
P
0
-0.5
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
t = 3
0:19

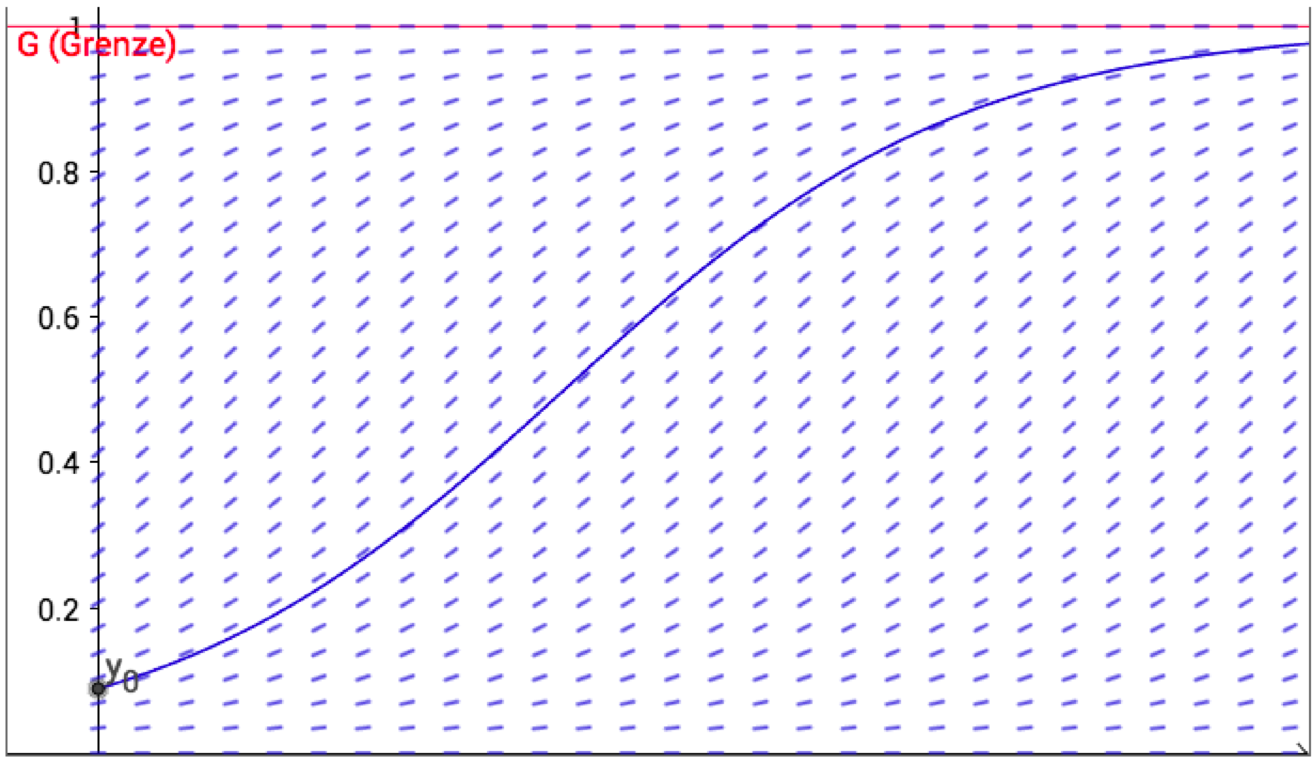
DIFF GL.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- http://wiki.geogebra.org/de/L%C3%B6seDgl_%28Befe
- http://wiki.geogebra.org/de/Richtungsfeld_(Befehl))

WACHTUMSMODELLE

http://tube.geogebra.org/material/show/id/31166



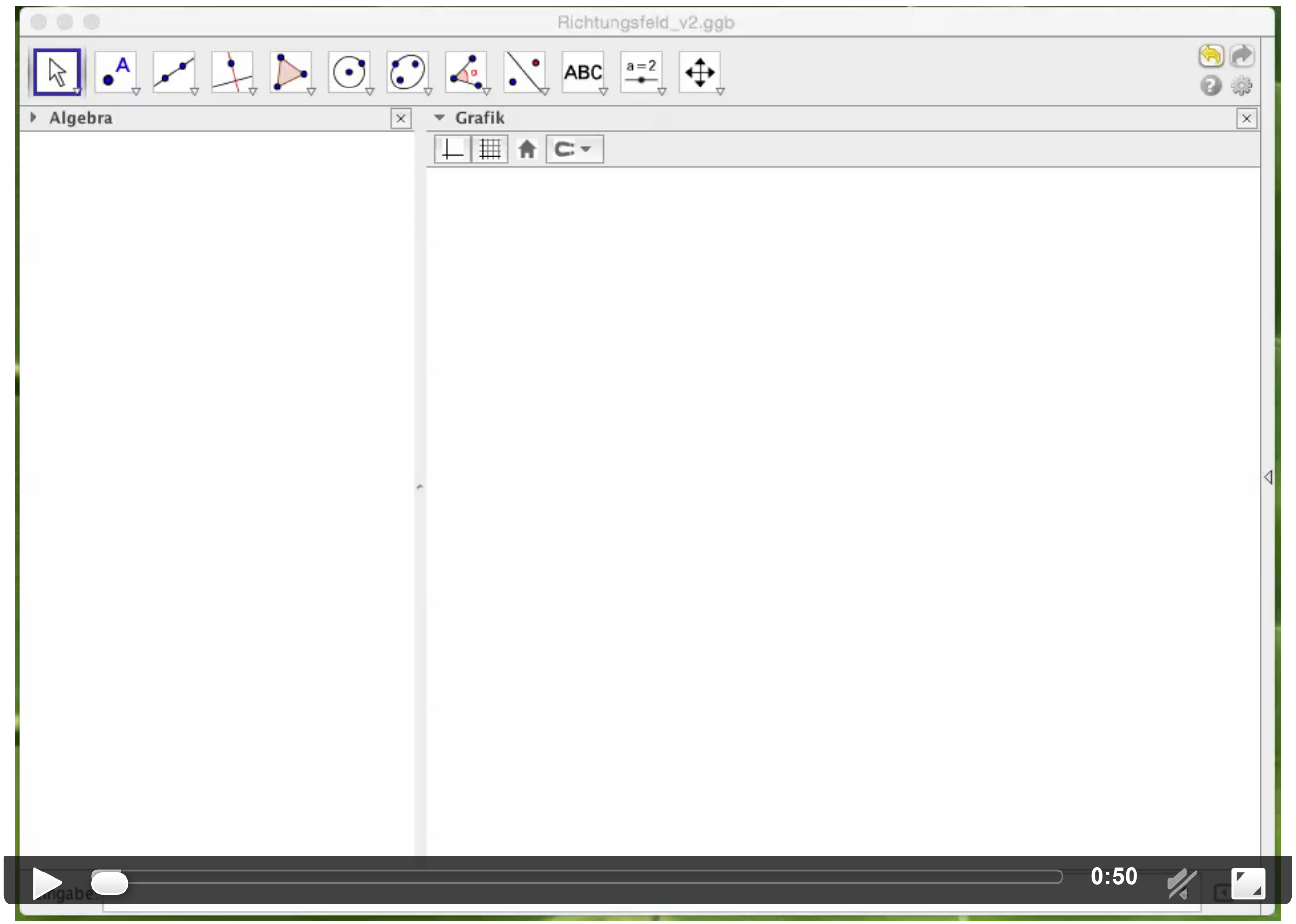
RICHTUNGSFELD & LÖSUNGEN

einfacher Differentialgleichungen

```
A = (1, 1)

f(x, y) = sin(x) cos(y)

Richtungsfeld[f]

LöseDgl[f, x(A), y(A), 20, 0.1]
```

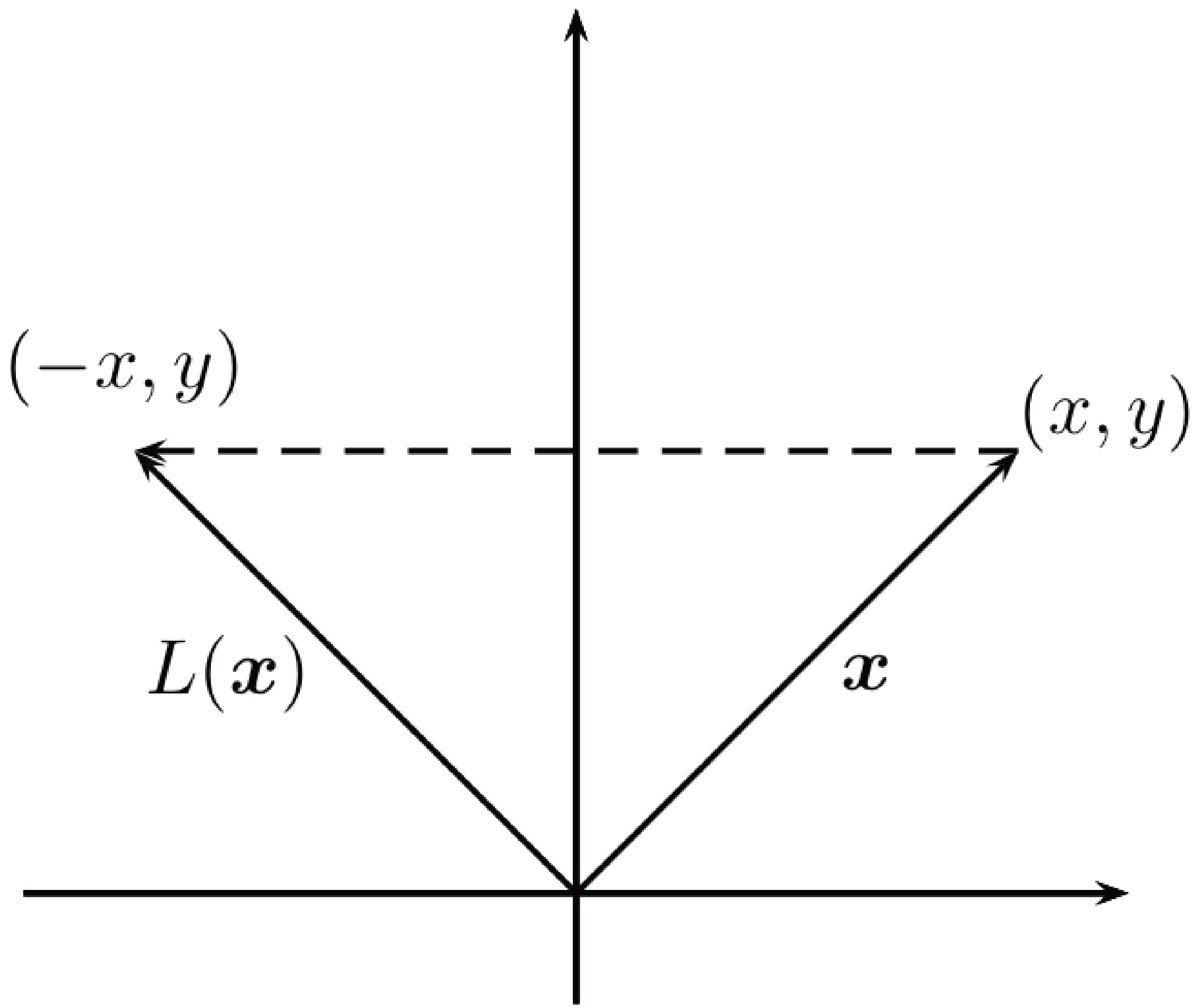
RICHTUNGSFELD & LÖSUNGEN

einfacher Differentialgleichungen



ABBILDUNGEN

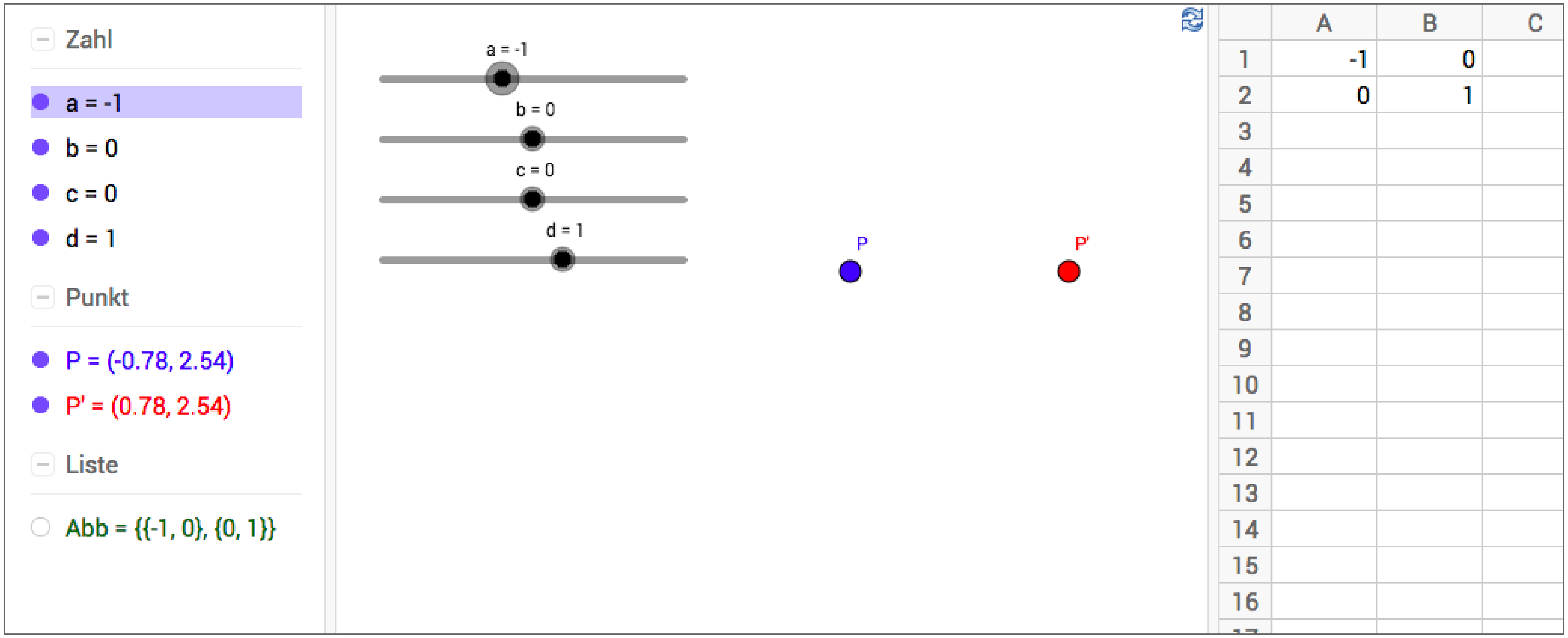
SPIEGELUNG



Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

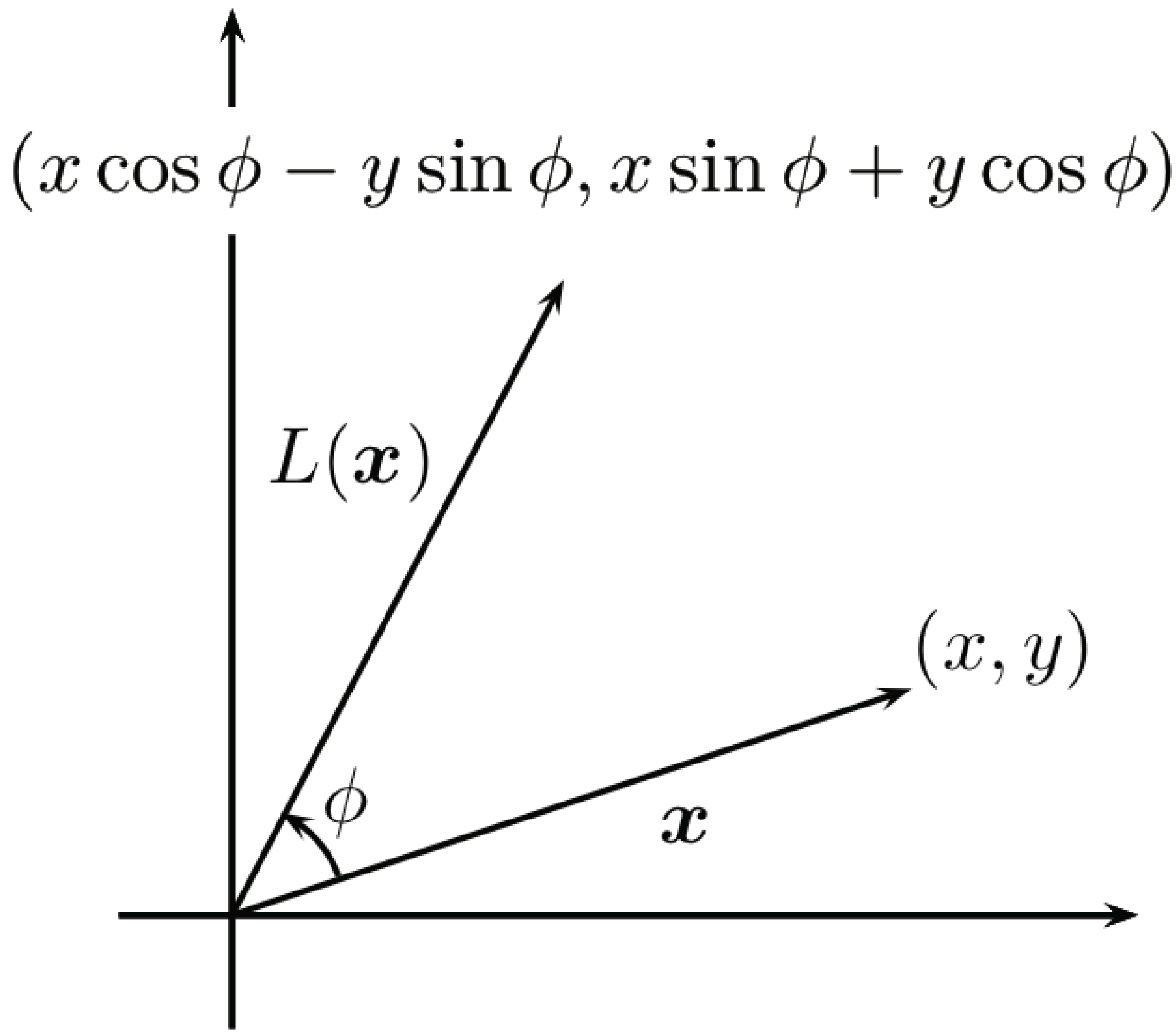
ABBILDUNG EINES PUNKTES



Lässt sich der Ursprung aus der Beobachtung des Verhaltens zwischen dem Punkt P und seiner Abbildung P' ermitteln?

[Link auf GeoGebraTube]

DREHUNG


$(x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi)$
$L(\boldsymbol{x})$
(x, y)
ϕ
$\boldsymbol{x}$

DARSTELLUNG EINER DREHUNG UM DEN PUNKT (0,0) GEGEN DEN UHRZEIGERSINN UM 90°

Diese lin. Abbildung bildet

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch Drehungen sind lineare Abbildungen. Eine Drehung um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) kann wie folgt beschrieben werden:

$$L: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto$$
$$(x\cos(\phi) - y\sin(\phi), x\sin(\phi) + y\cos(\phi))$$

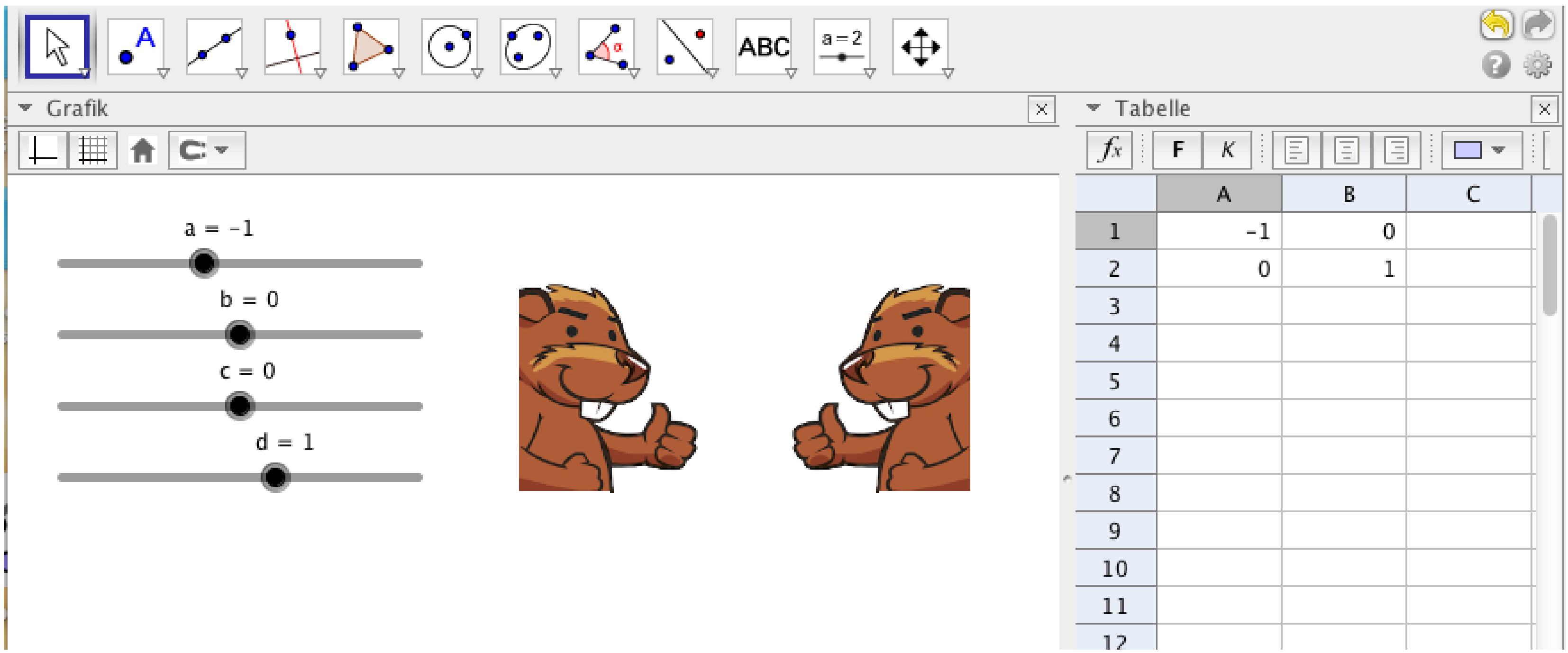
DREHUNG GEGENUHRZEIGERSINN UM EINEN WINKEL ϕ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

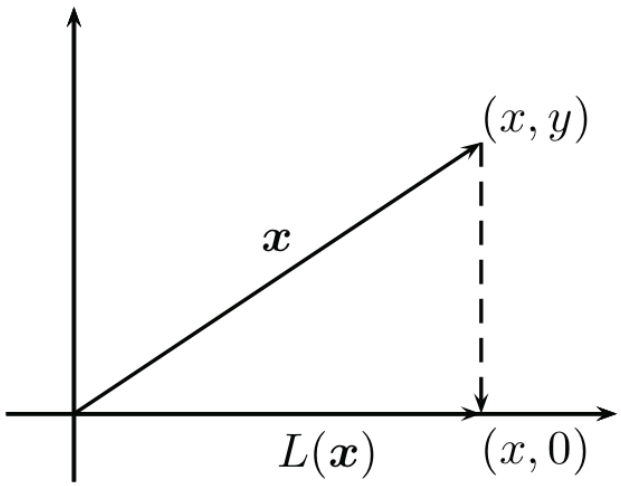
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

RASTERGRAFIK MIT LINEAREN ABBILDUNGEN TRANSFORMIEREN

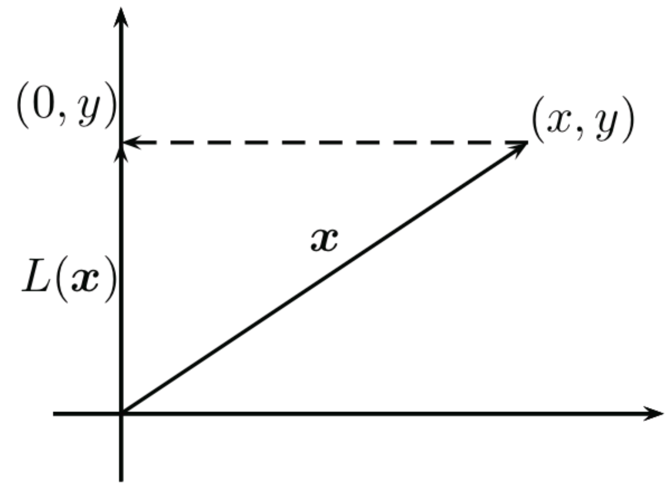


[Link auf GeoGebraTube]

PROJEKTION



auf x-Achse



auf y-Achse

Die orthogonale Projektion auf die x-Achse ist auch eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

$$\begin{aligned} L: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf die y-Achse ist eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

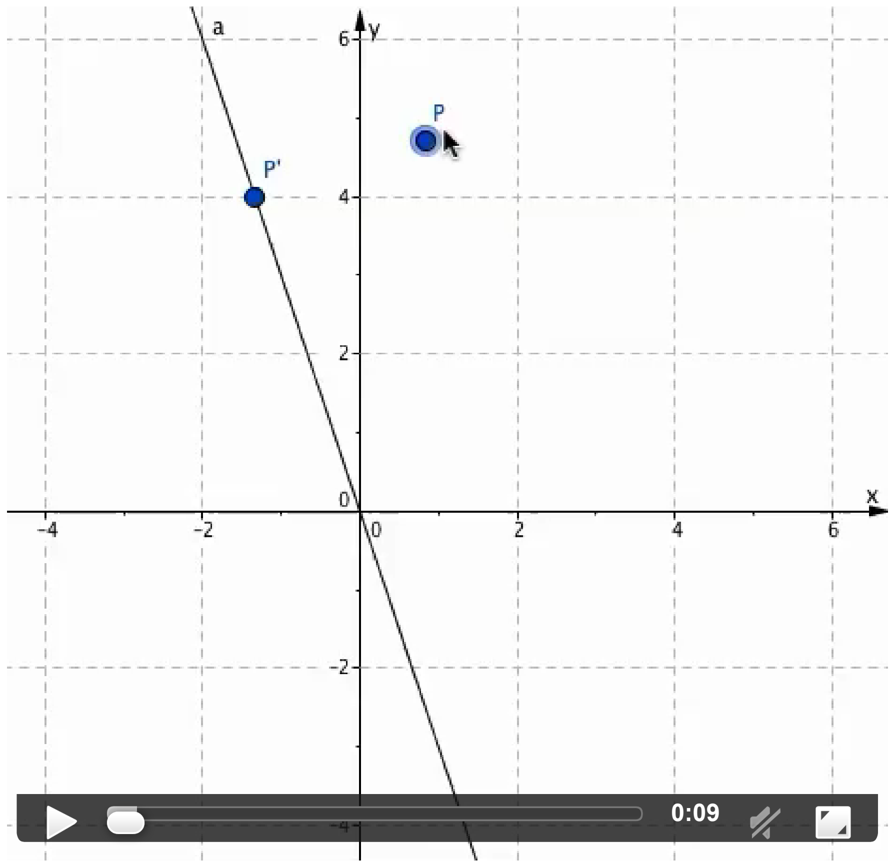
$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PUNKT AUF EINE GERADE A PROJIZIEREN

$$a : y = -3x$$



VORGEHEN

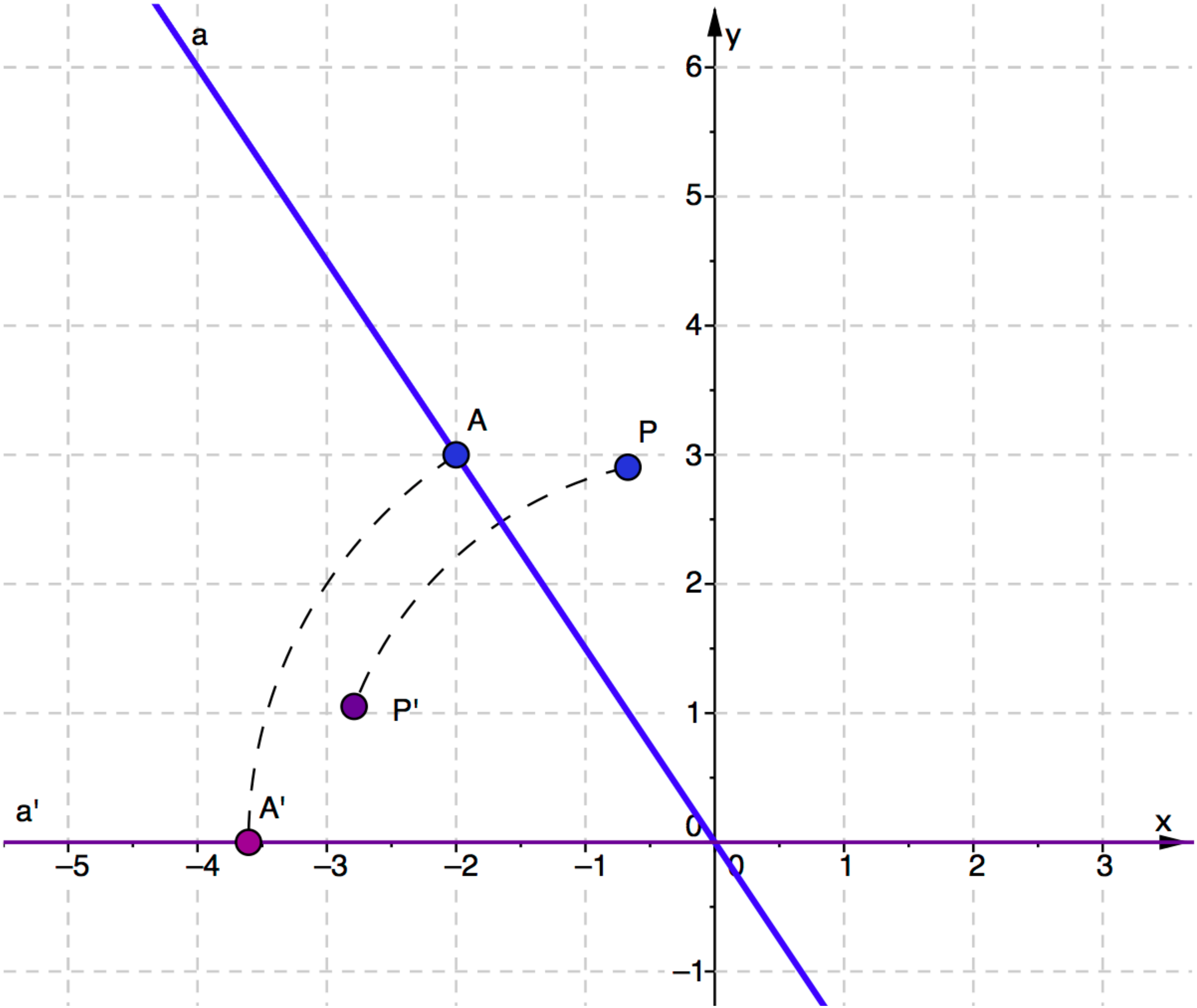
- Gesamte Figur drehen bis die Gerade a auf der x-Achse liegt
- Den Punkt auf die x-Achse projizieren
- den projezierten Punkt wieder zurück drehen.

1. SCHRITT DREHEN UM α

$$\tan(\alpha) = -3 \rightarrow \alpha \approx -71.57°$$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

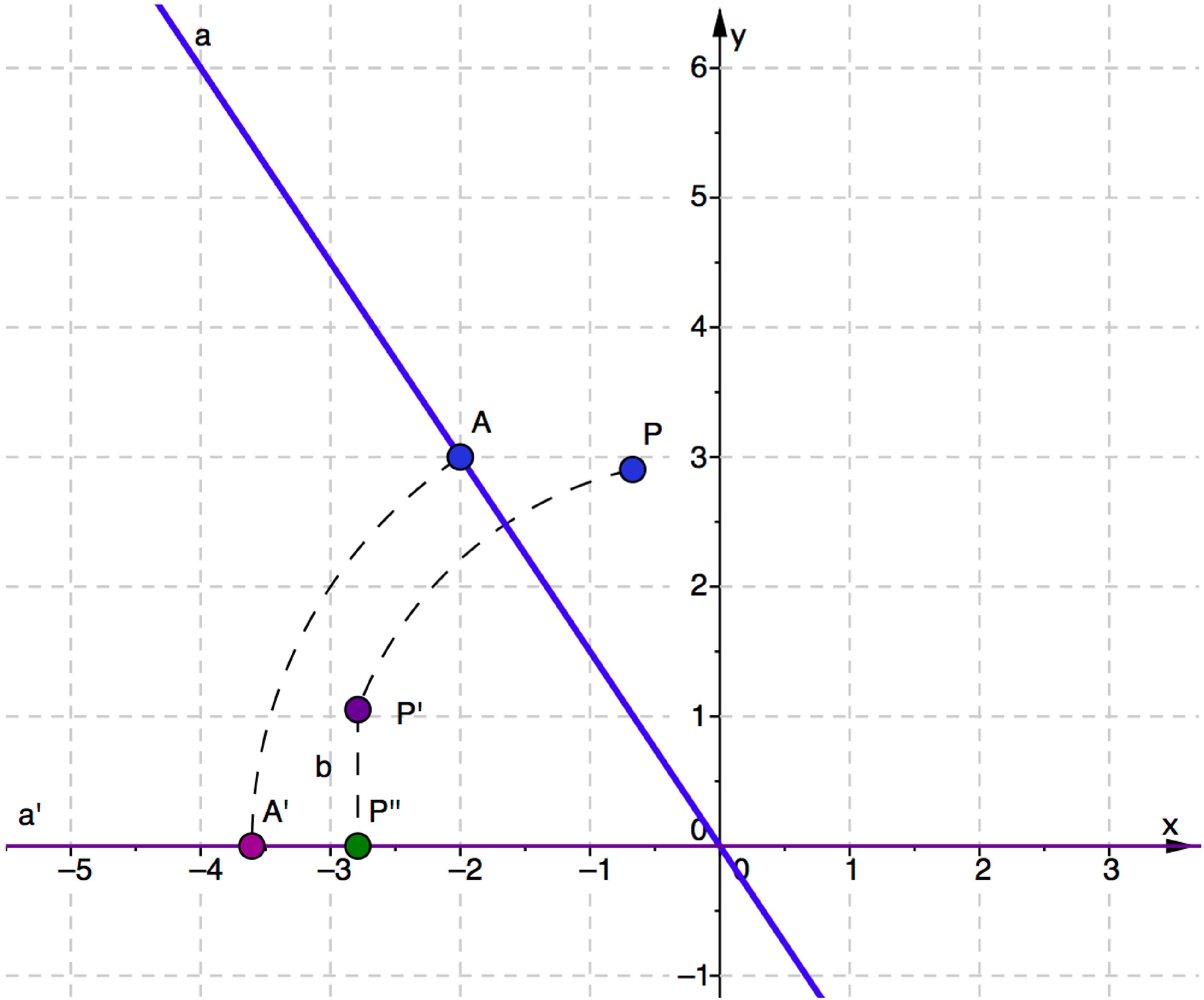
GeoGebraTube


a
y
6
5
4
A
P
3
2
P'
1
a'
A'
0
x
–5
–4
–3
–2
–1
0
1
2
3
–1

2. SCHRITT PROJEKTION AUF X-ACHSE

$$P_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube



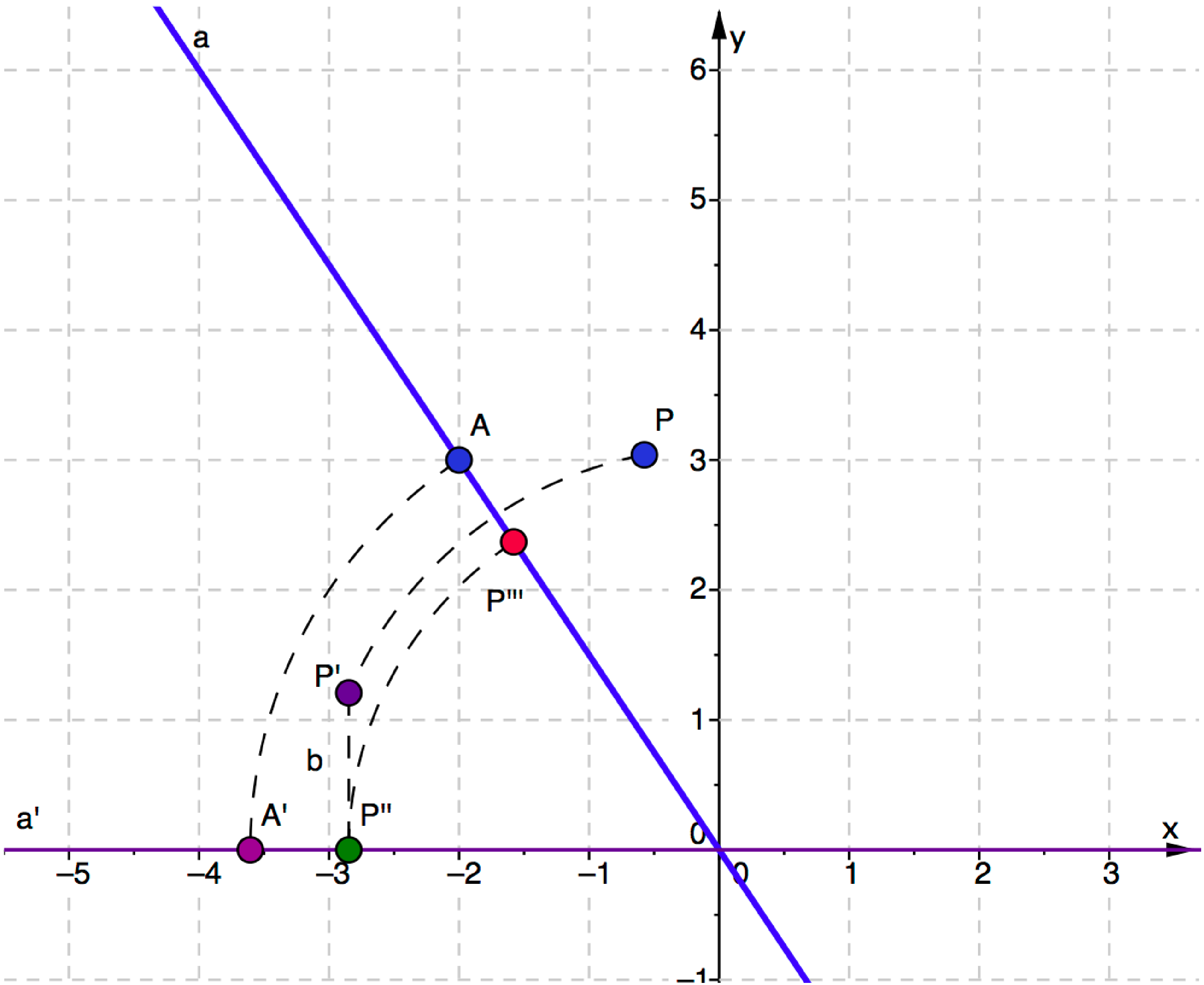
a
y
A
P
P'
b
a'
A'
P''
x

3. SCHRITT RÜCKDREHEN UM α

$$\alpha \approx -71.57°$$

$$R_{-\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[GeoGebraTube]



a
y
6
5
4
3
2
1
0
−1
A
P
P'''
P'
b
a'
A'
P''
x
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

IN EINEM SCHRITT

$$R_{-a} \cdot P_X \cdot R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF UNTERRAUM VERWENDEN

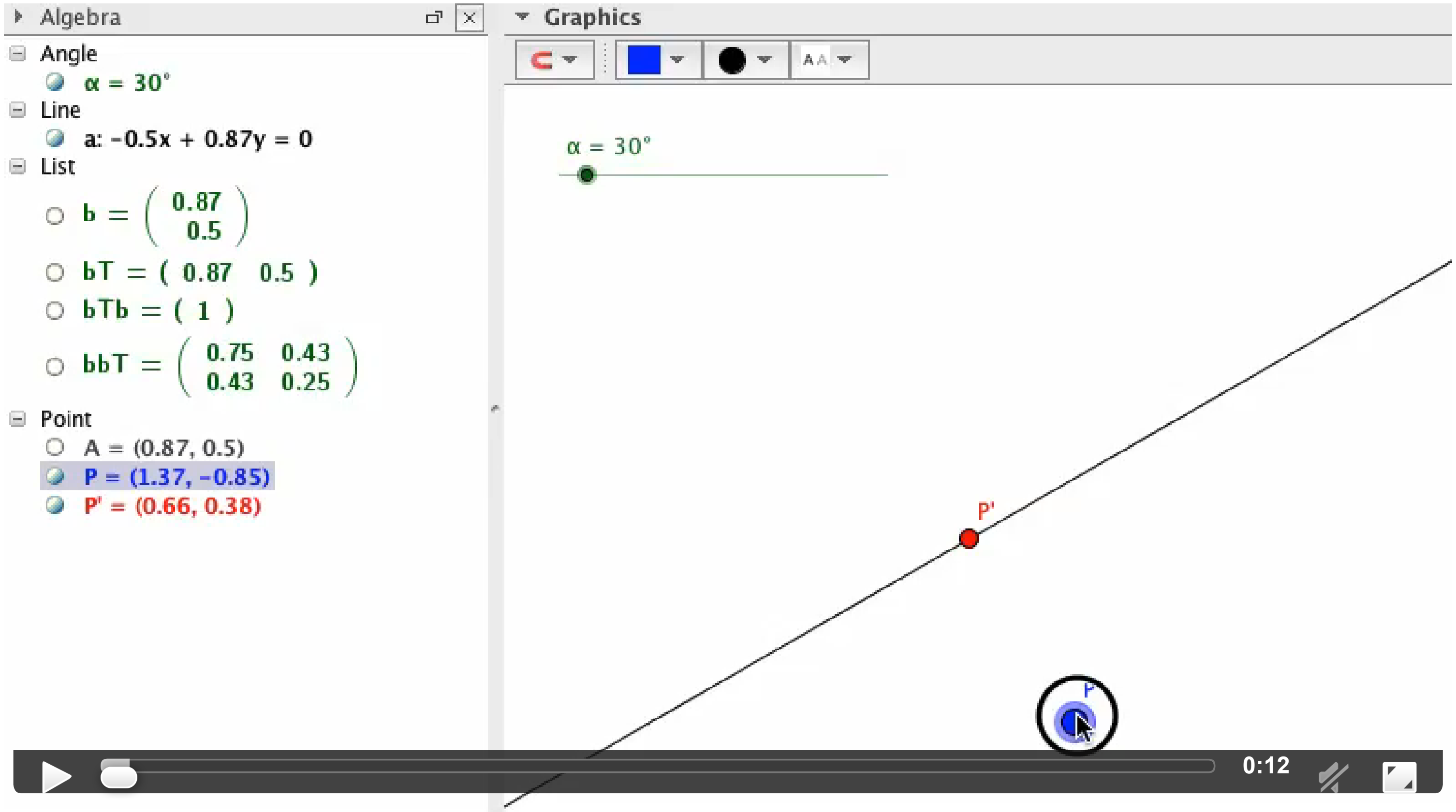
Wähle eine Matrix A so, dass die Spaltenvektoren eine Basis eines Unterraums bilden. (z.B. eine Gerade in $\mathbb{R}^2$), dann ist die Projektionsmatrix

$$proj_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$

$$proj_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$
$$proj_w P = AA^T P$$

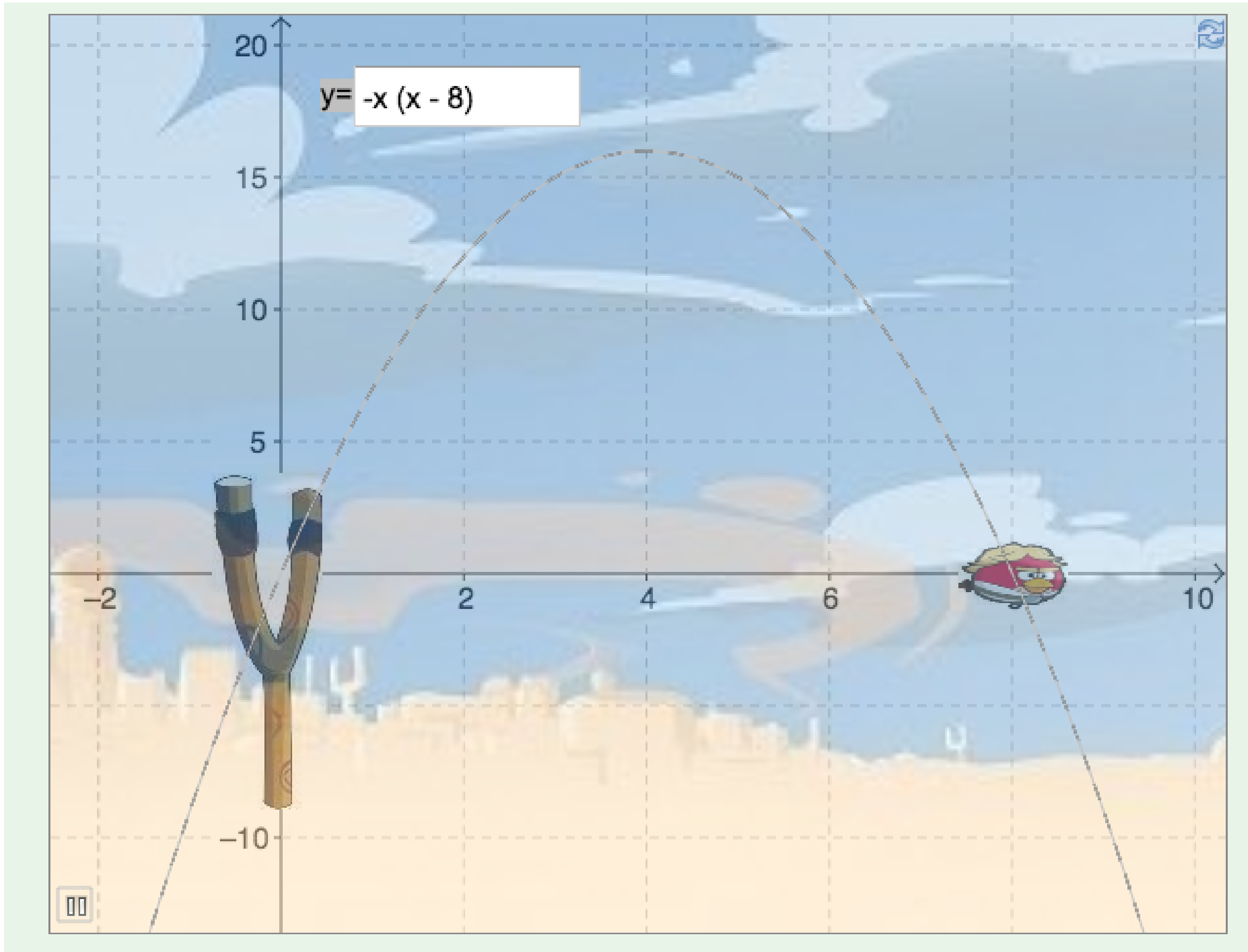
mit AA^T

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha), & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin(\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

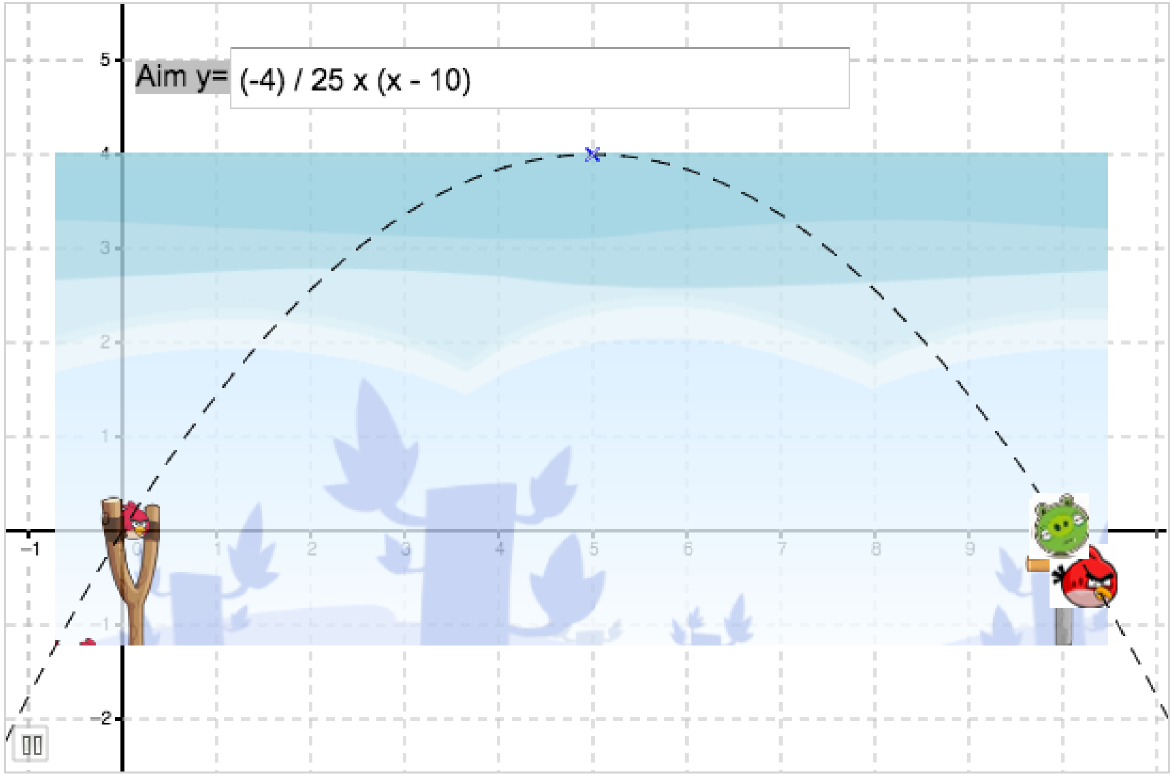


Link to GeoGebraTube

ANGRY BIRDS MATHE



Link auf Webseite

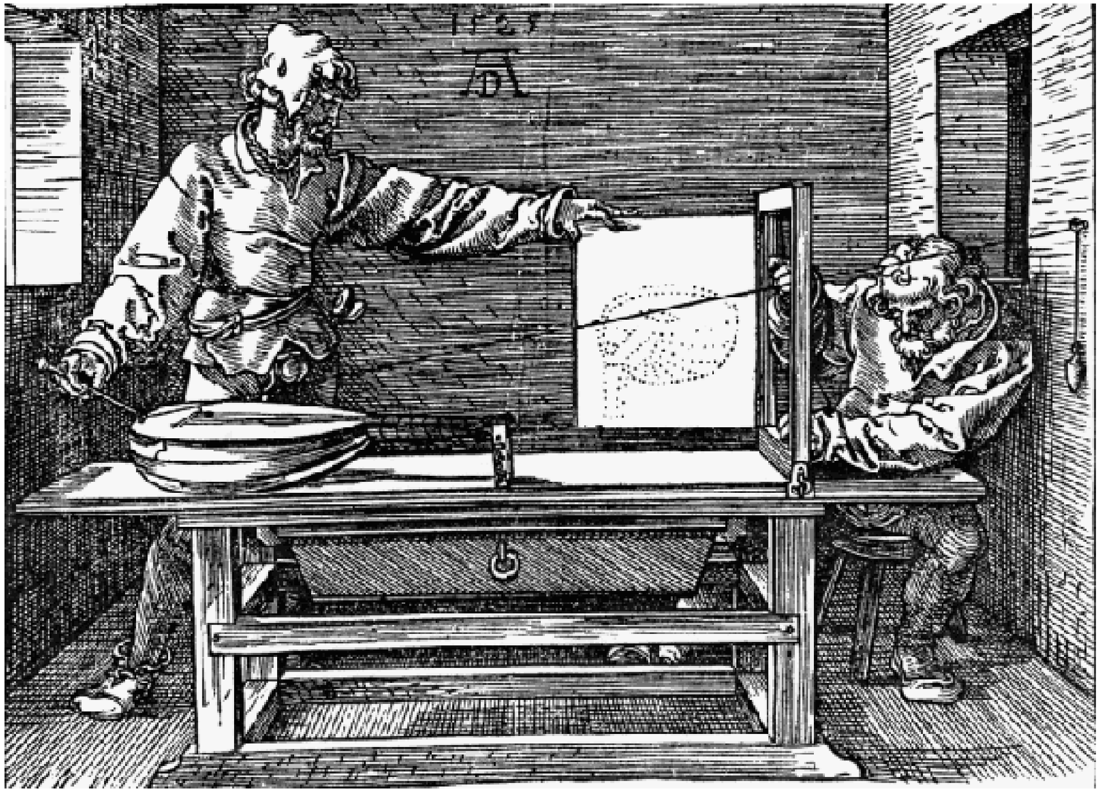


[Link auf Webseite]

ZENTRALPROJEKTION
&
PARALLAX EFFEKTE

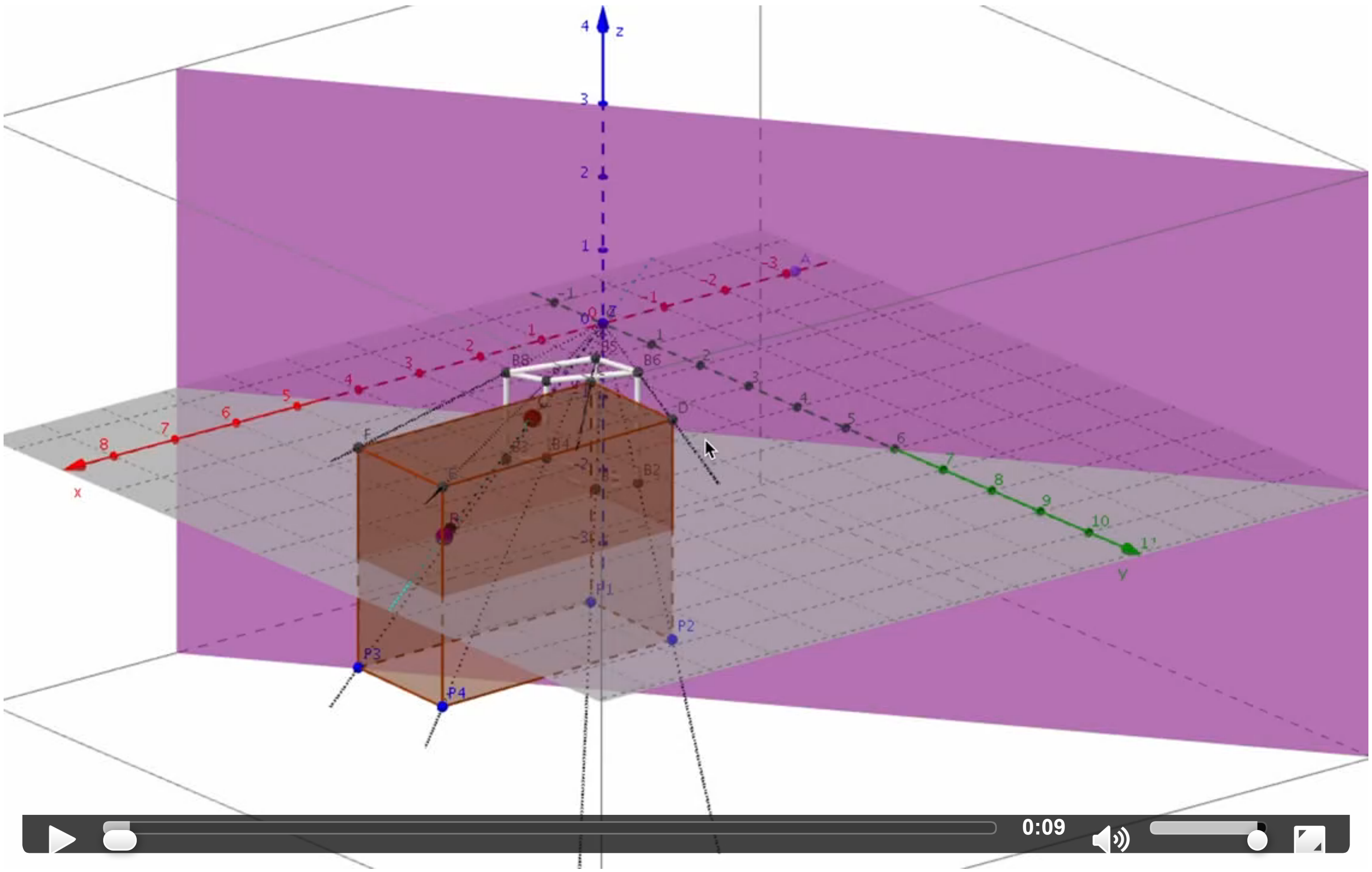
PARALLAX EFFEKTE (WERBUNG)

Modellierung eines perspektivischen Abbildungssystems mit



Link Mechanical creation of a perspective image by Albrecht Dürer

PERSPEKTIVISCHE ABBILDUNG QUADER AUF EBENE



KONVENTIONEN

- Annahme das Zentrum der Abbildung ist im Ursprung
- Blickrichtung entlang der Z-Achse
- Verwenden homogene Koordinaten

ZENTRALPROJEKTION AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE

mit Brennweite f

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF HOMOGENEN VEKTOR ANWENDEN

$$P \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

ÜBERGANG HOMOGENEN KOORDINATEN ZU KARTESISCHEN KOORDINATEN

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f/z \cdot x \\ f/z \cdot y \\ f/z \cdot z \end{pmatrix}$$

ZAHLENBEISPIEL

- Sei $f = 10$
- Ein Punkt (8,4,20) soll auf die Normalebene zur Z-Achse im Abstand von 10 abgebildet werden.

List

$CH = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$

$CH' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$

$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$

Number

f = 10

Plane3D

Point3D

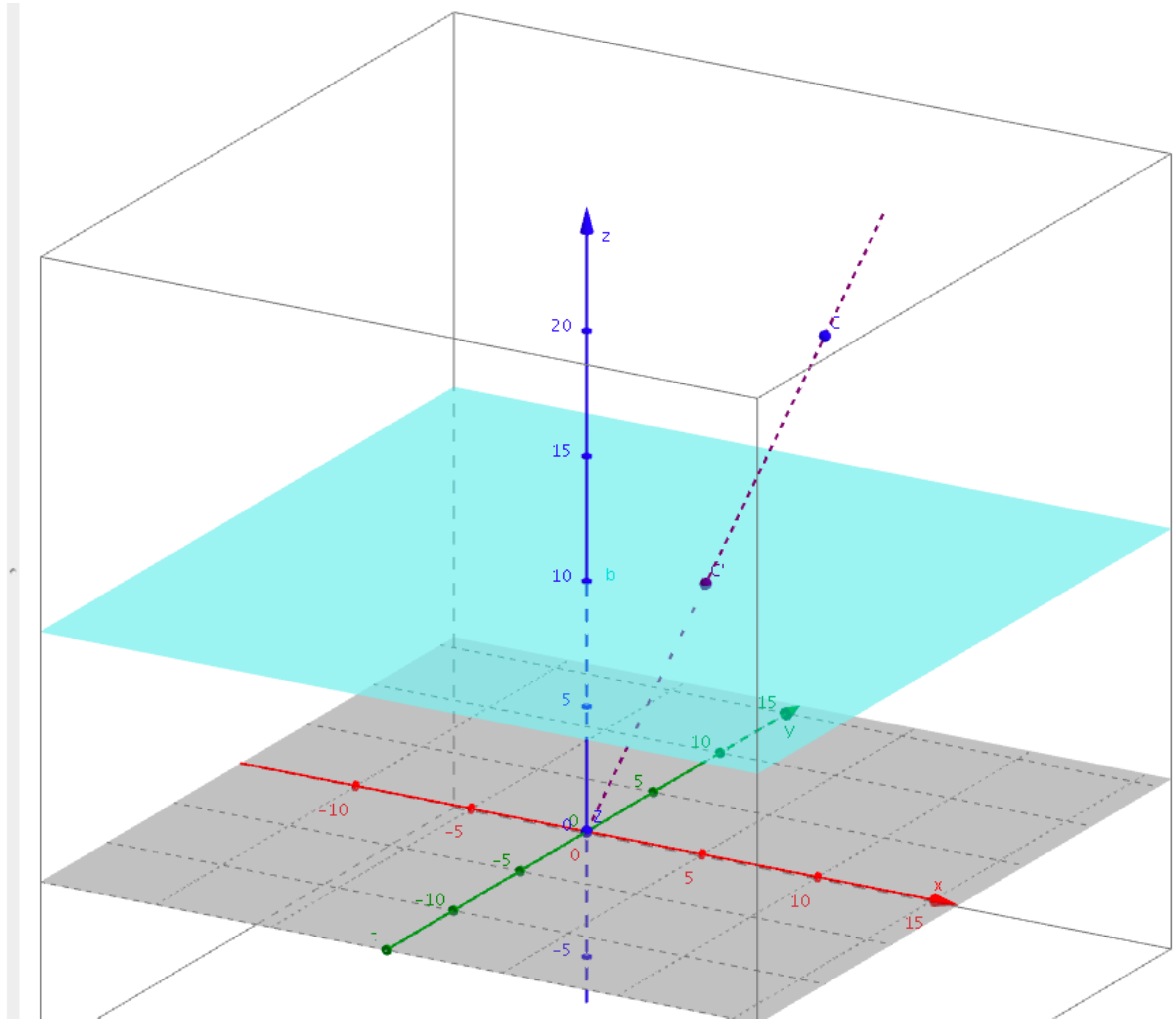
C = (8, 4, 20)

C' = (4, 2, 10)

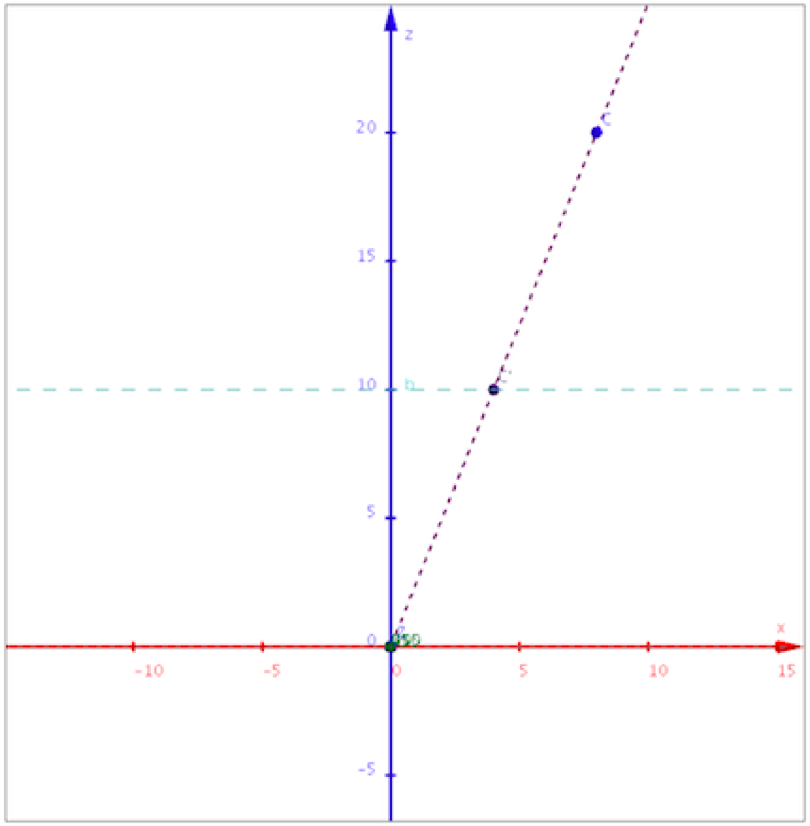
Z = (0, 0, 0)

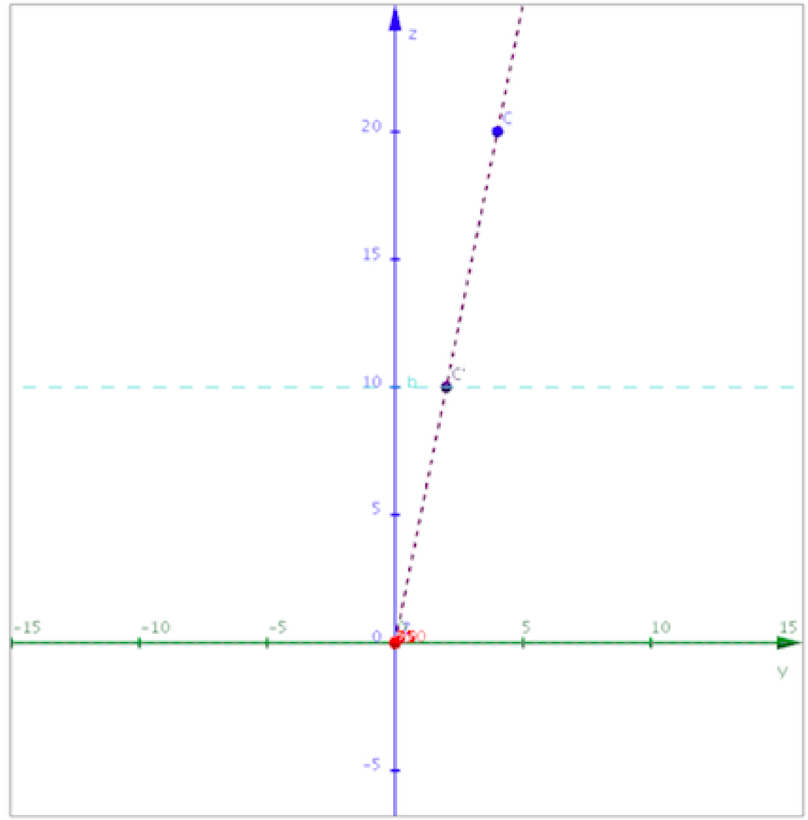
Ray3D

s1: X = (0, 0, 0) + λ (8, 4, 20)



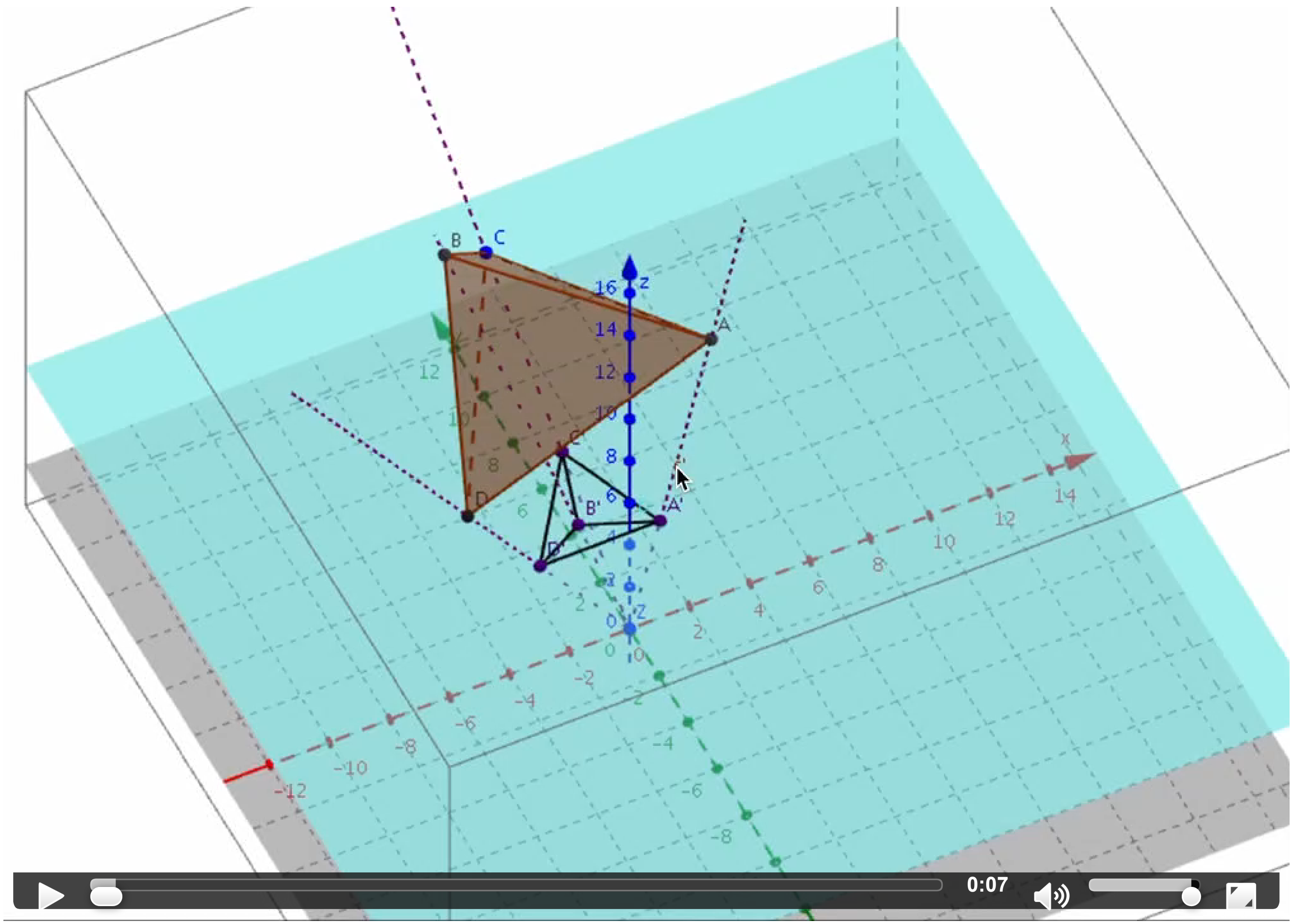
$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$


z
20
15
10
5
0
-5
h
C
x
-10
-5
0
5
10
15


z
20
15
10
5
0
-5
h
C
C'
-15
-10
-5
5
10
15
y

ZENTRALPROJEKTION

AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE MIT BRENNWEITE F



HOMOGENE KOORDINATEN

FÜR $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Transformation

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

ZENTRALPROJEKTION

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

HOMOGENE KOORDINATEN

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

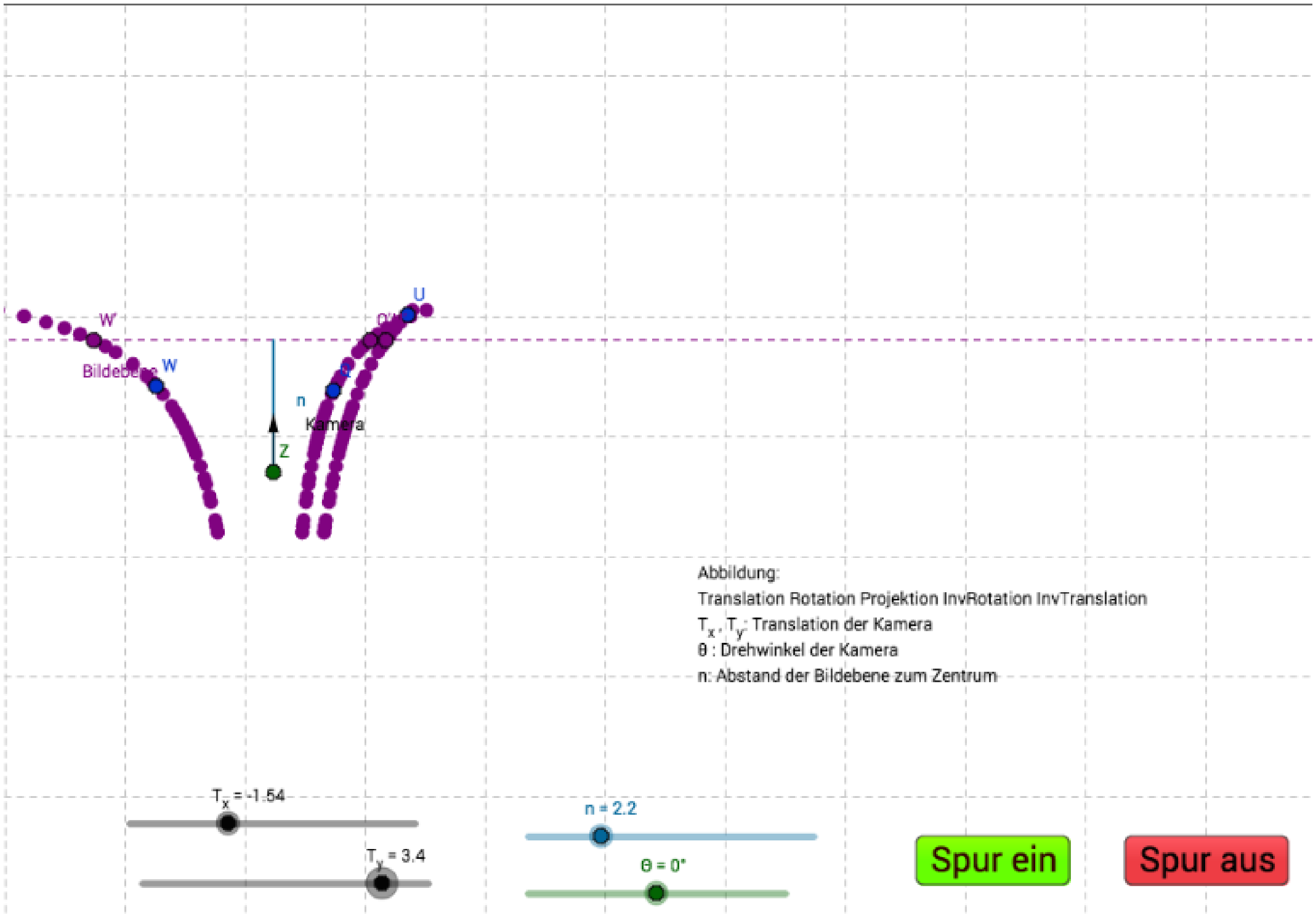
ROTATION

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSLATION

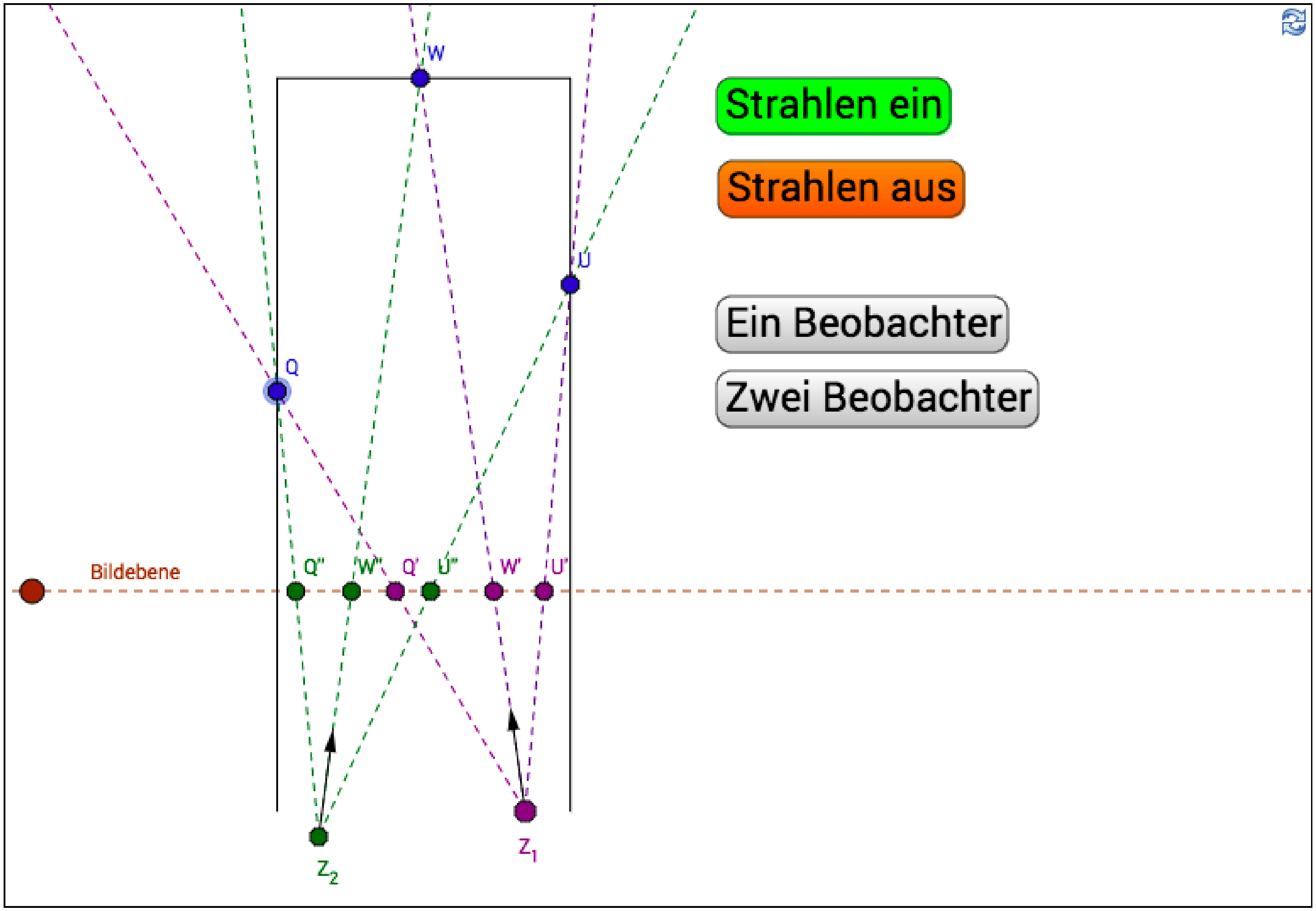
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION



[Link auf GeoGebraTube]

AUSSCHNITT MISSION IMPOSSIBLE 4



Link GeoGebraTube

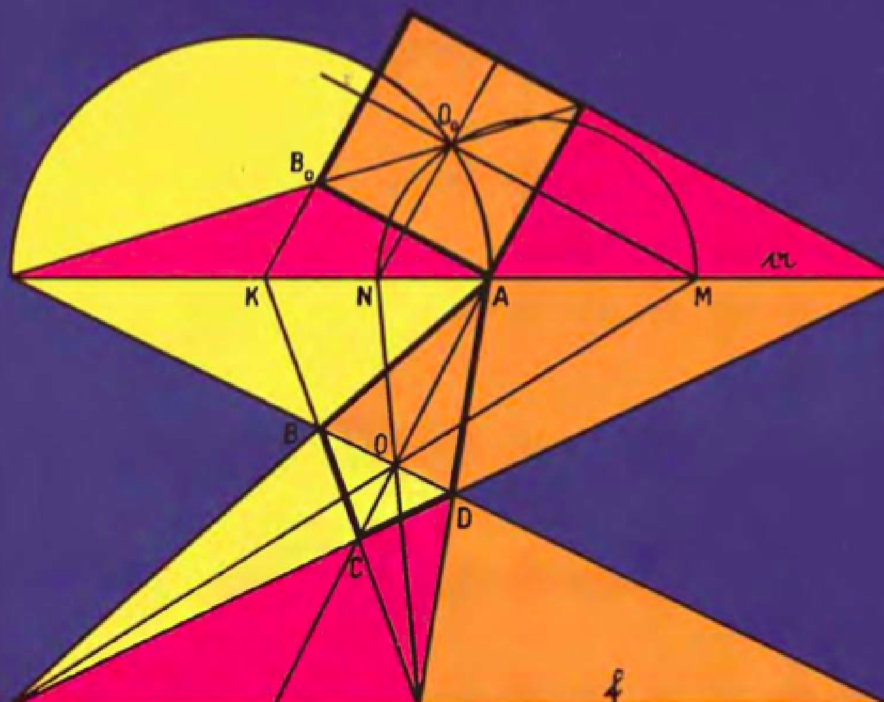
FERMAT-PUNKT

100 Great Problems of Elementary Mathematics

THEIR HISTORY AND SOLUTION

Heinrich Dörrie

Translated by David Antin



91 Fermat's Problem for Torricelli

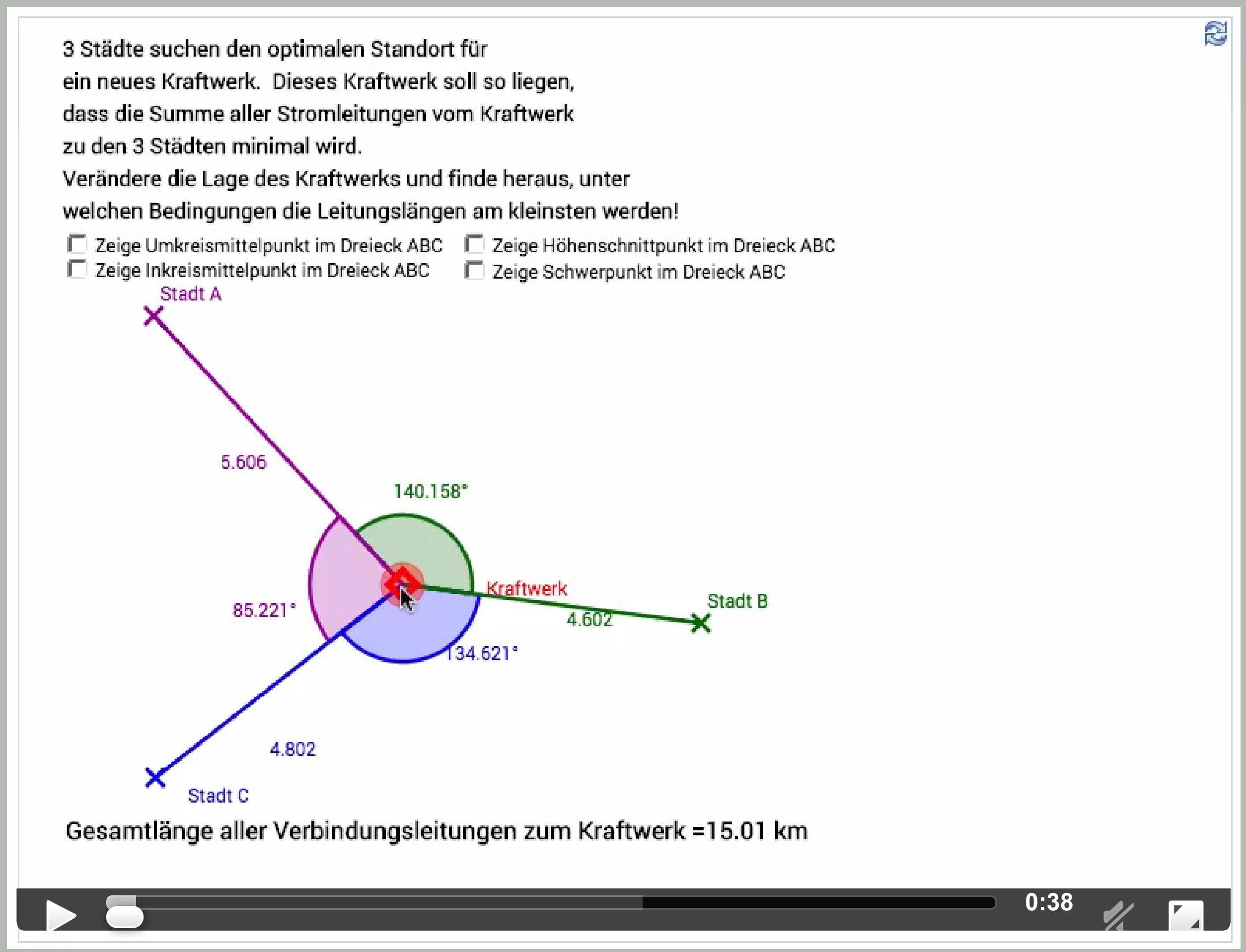
To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

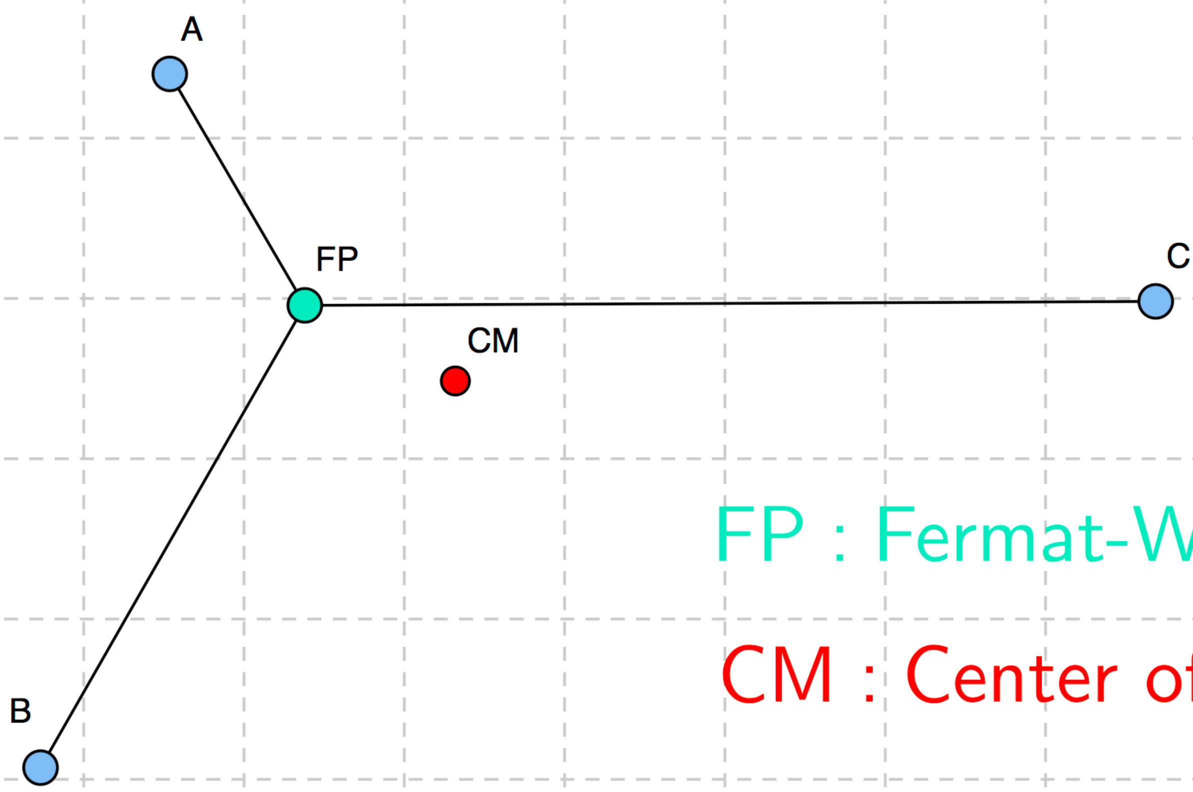
Dorrie, H. (1965). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.

OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS



Link zu GeoGebraTube: Der Neubau des Kraftwerks von Ulrich Steinmetz

$$\text{minimize}_{x,y} \;\; f(x,y) = \sum_{i=1..n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

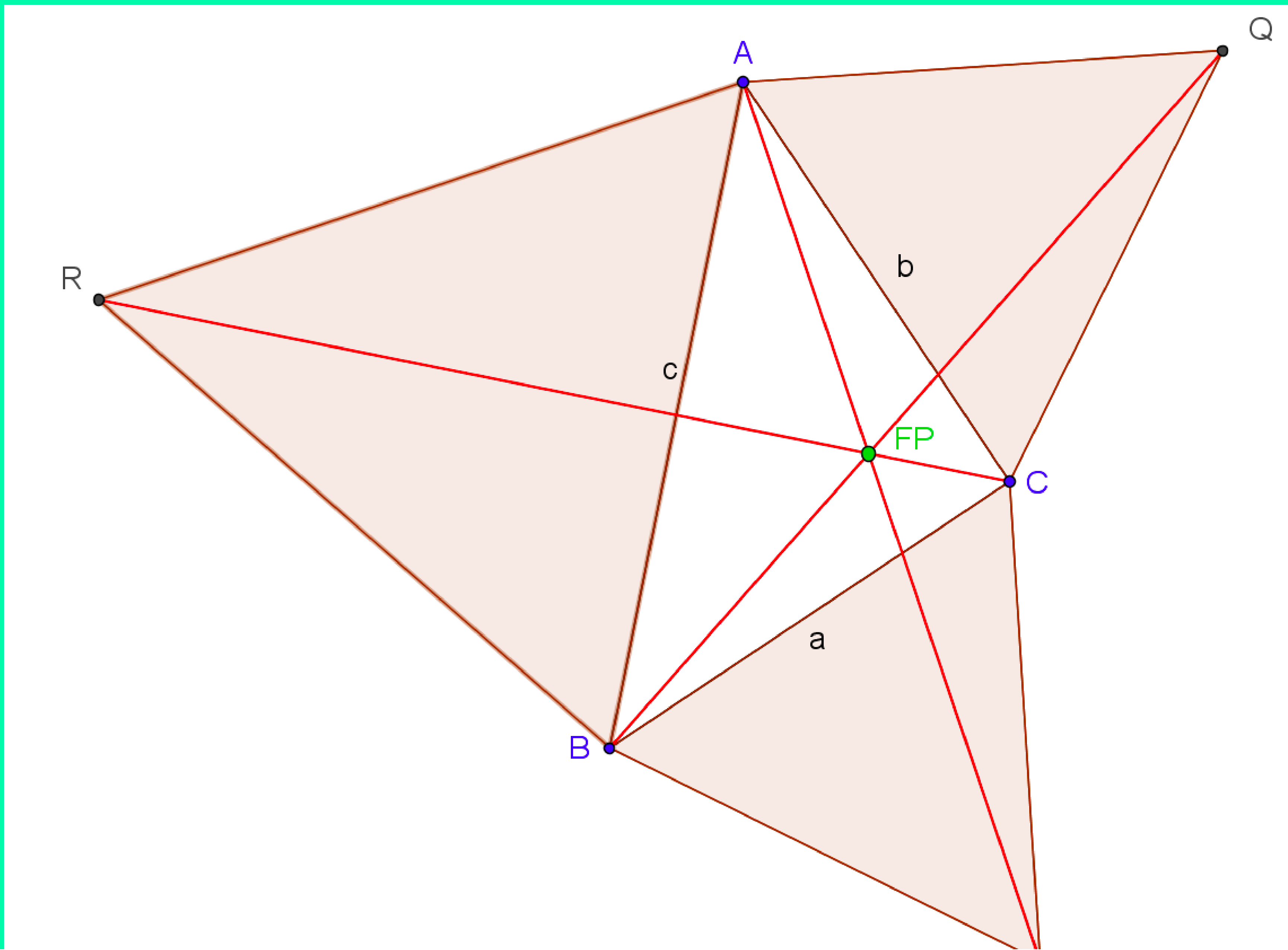


FP : Fermat-Weber Point

CM : Center of mass

EXAKTE LÖSUNG

FÜR N = 3



Q
A
R
b
c
FP
C
a
B

WER HAT ALS ERSTES EIN NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN FÜR **N>3** GEFUNDEN?

FACILITY LOCATION PROBLEMS

EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinksi** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

M. L. Balinksi. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.

I was sixteen when I became intrigued with the N point problem

Andrew Vázsonyi, 1932

Cosider N points and one more point, X. Measure the distances between X and the given points, then add the distances. Find point X so that this sum is the smallest possible.

Andrew Vázsonyi

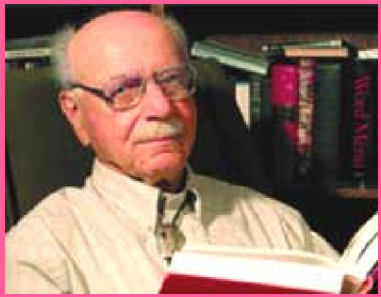
I found the point X by using an infinite, recursive algorithm, a most unusual solution for a problem in geometry. You start with a point X0, anywhere, and search for a better solution.

Andrew Vázsonyi, 1937

The paper "Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum", published in **Japan** in **1937** under the name **Endre Weiszfeld** became a classic in the mathematics of location analysis.

WEISZFELD

ALGORITHMUS



by Endre Weiszfeld, alias Andrew Vázsonyi (1916–2003), born in Budapest

WEISZFELD ALGORITHMUS

k Iterationsschritte

Ortsvektoren: $\overrightarrow{x_1} \cdots \overrightarrow{x_N}$

Startpunkt $\overrightarrow{y_0}$ im Schwerpunkt

$$\overrightarrow{y_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\overrightarrow{x_i}}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{y_k}\|}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{y_k}\|}}$$

H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443-451, ISSN 0898-1221

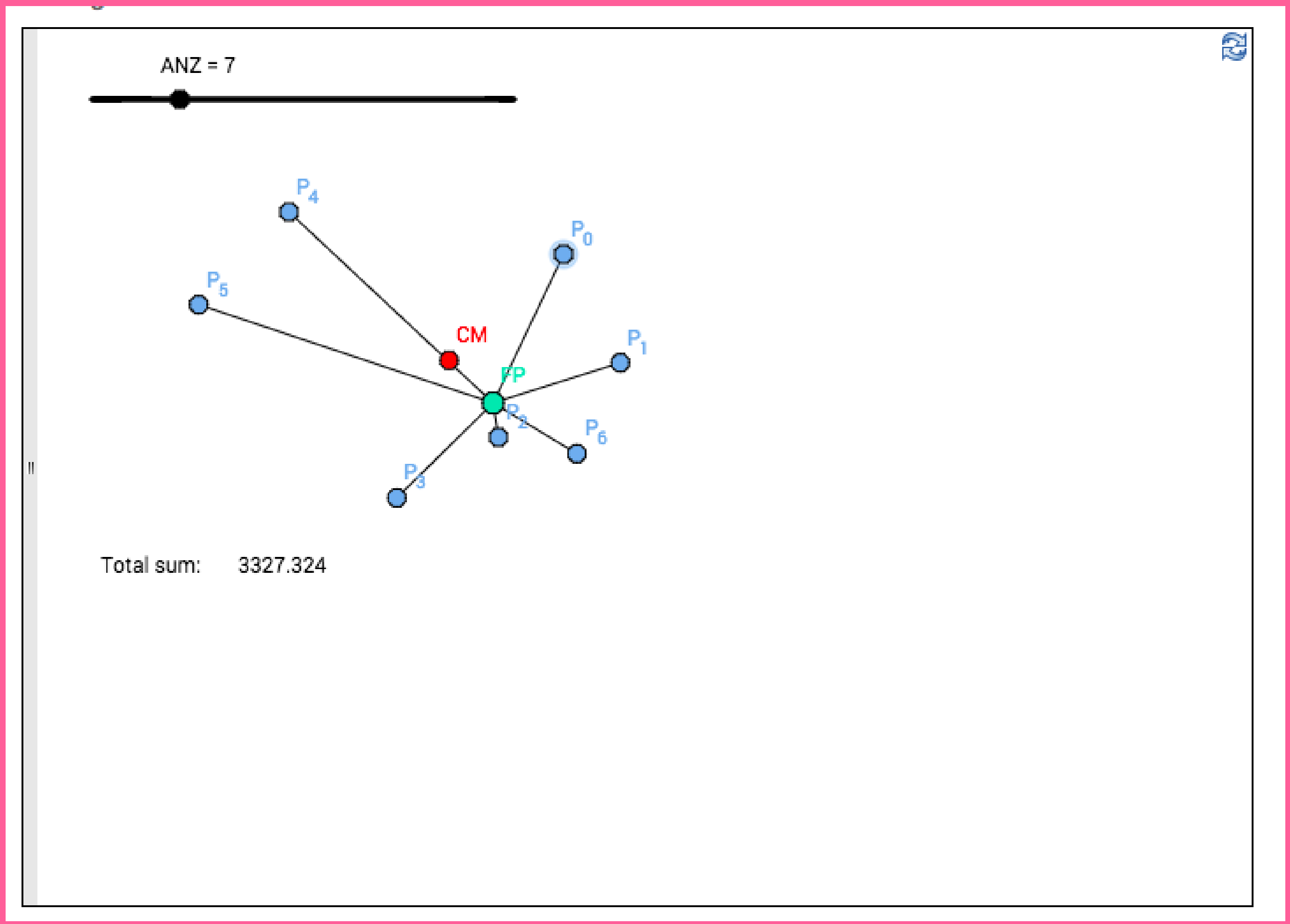
WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (I)

```
geometric_median = function(epsilon) {
    var P,Q;
    P={};
    P.x=gb.getXcoord("CM");
    P.y=gb.getYcoord("CM");

    while (true){
      Q = median_approx(P);
      if (eukl_distance(P, Q) < epsilon){
        return Q;
      }
      P = Q;
    }
};
```

WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (II)

```
median_approx = function(P) {
    var W,x,y,d,w,_len,_i,Q;
    W=x=y=0.0;
    Q={};
    _len=xl.length
    for (_i = 0; _i < _len; _i++) {
      Q.x = xl[_i];
      Q.y = yl[_i];
      d=eukl_distance(Q,P);
      if (d != 0){
        w =1.0/d;
        W+= w;
        x+=Q.x*w;
        y+=Q.y*w;
      }
    }
    Q.x = x/W;
    Q.y = y/W;
    return Q;
  };
```

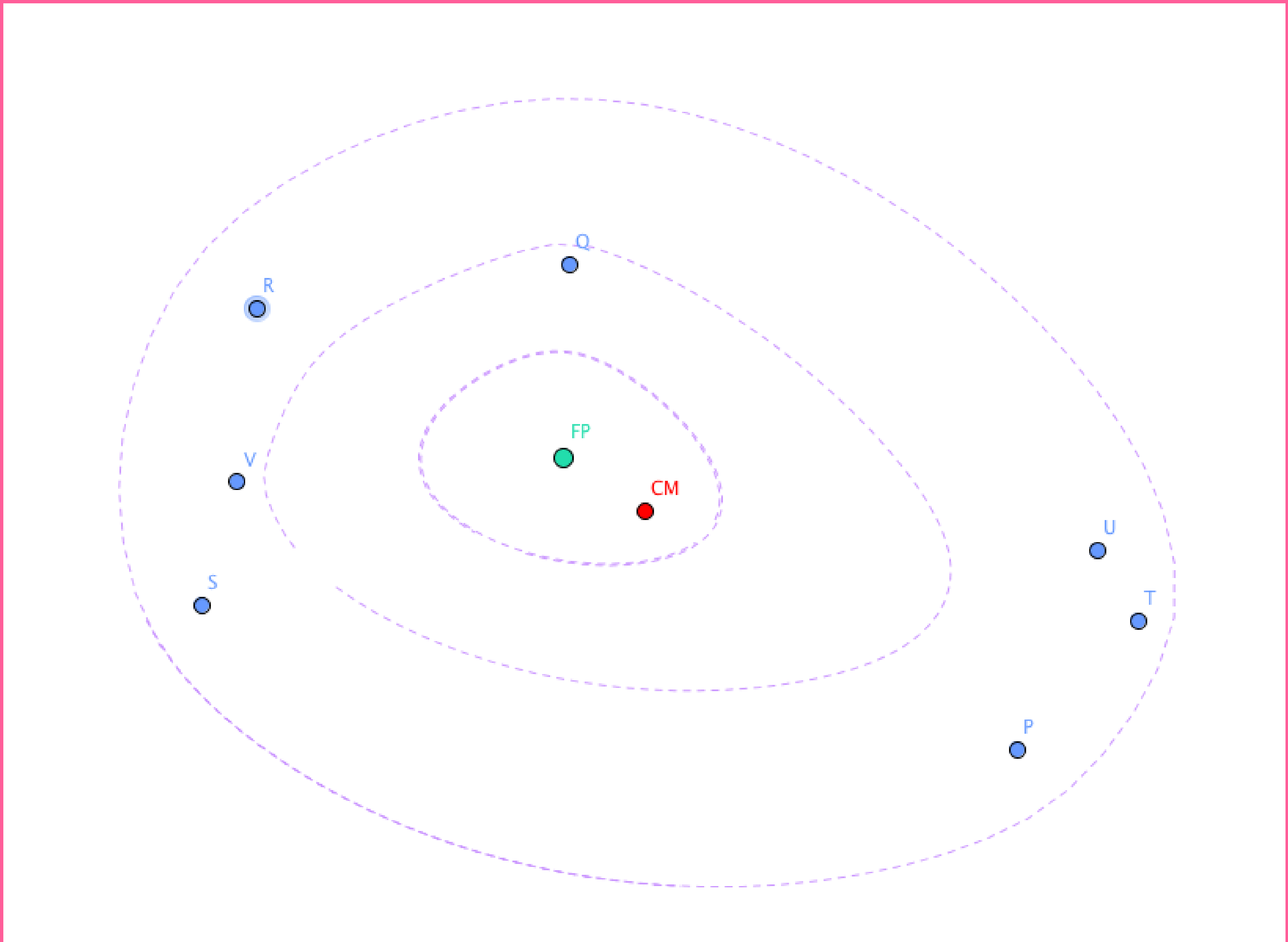
Fermat-Punkt für n>3



[Link GeoGebraTube]

Potenziale und Äquipotentialflächen

Link GeoGebraTube



Im ein dimensionalen Fall

springt der Fermat-Punkt auf den Median