

FORTBILDUNG GEOGEBRA



2015 GYMNASIUM MÜNCHENSTEIN

TORSTEN LINNEMANN & MARTIN GUGGISBERG



Torsten Linnemann
PH FHNW
Deutschschweizerische Mathematikkommission
Gymnasium Oberwil
tolinnemann@gmail.com

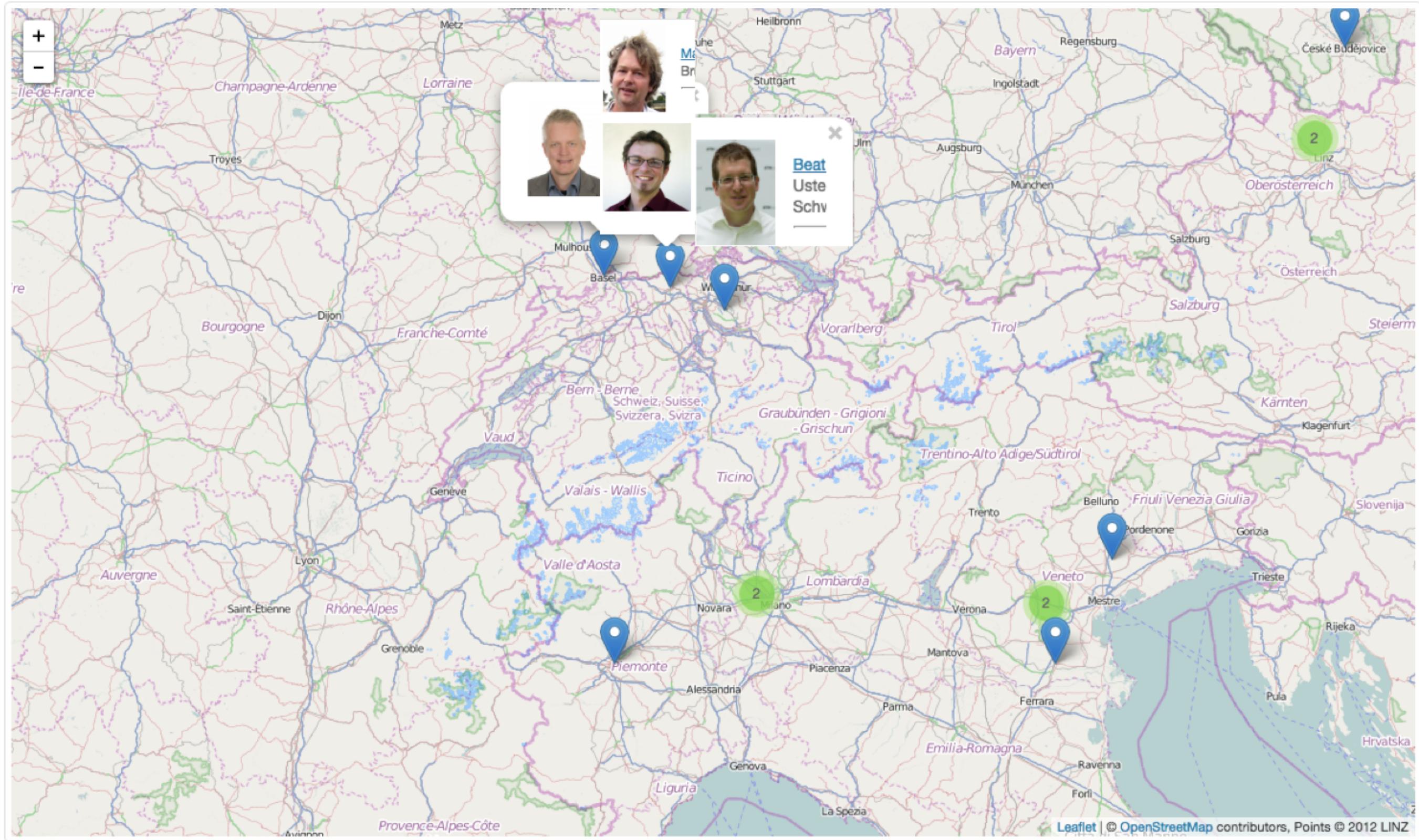


Martin Guggisberg
SVIA Vorstand
Ressort Projekte

Departement Mathematik
und Informatik
Universität Basel
martin.guggisberg@unibas.ch

UNSERE MOTIVATION

- Freude an:
 - Interaktiver Mathematik
 - Explorativen Zugängen
 - Visualisierungen



BEFÜRCHTUNGEN EINES KOLLEGEN

Trainieren sie (SuS) das Darstellungsvermögen nicht besser, in dem sie versuchen, im eigenen Kopf die verschiedenen Objekte sich vorzustellen? LP aus BL

AGENDA

1. Geometrie
 - Punkte, Dreiecke, Ortslinien, Argumentieren
 - Anwenden kleiner Apps.
2. GeoGebra im Unterricht
3. Funktionen
4. Vektorgeometrie
5. Stochastik
6. Dessert
 - Tabellenkalkulation
 - Piratenaufgabe
 - Differentialgleichungen
 - Abbildungen (Matrizen)
 - Bestimmung von Eigenvektoren
 - Zentralprojektion & Parallaxe
 - Fermat-Punkt

GEOMETRIE

Konstruktion von ebenen Figuren, Dreiecke, spezielle Punkte

ORTSLINIEN, SPUR: ARGUMENTIEREN

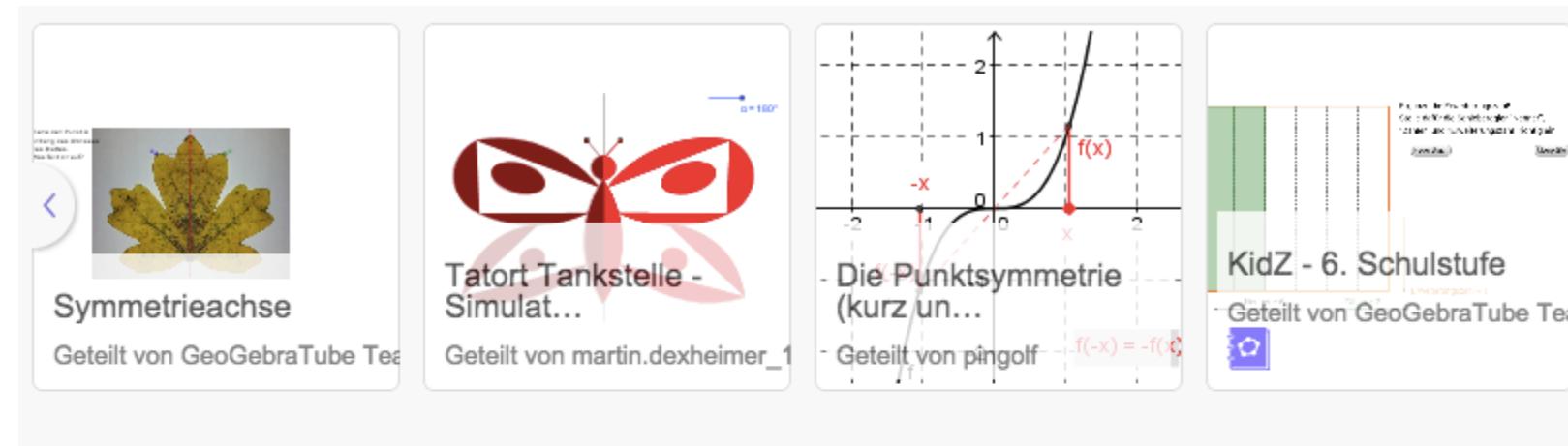
- Winkelhalbierende: <http://tube.geogebra.org/student/m320791>
- Symmetrie: <https://tube.geogebra.org/student/m188567>
- Gleicher Abstand: <https://tube.geogebra.org/student/m188578>
- Gleicher Abstand II <https://tube.geogebra.org/student/m188545>

WIE SOLL GEOGEBRA IN DER SCHULE EINGESETZT WERDEN?

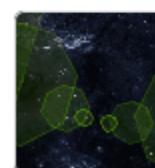
- zur Ergebnissicherung?
- zur Erkenntnisgewinnung?
- zur Überprüfung einer vorher formulierten Hypothesen?
- zur Veranschaulichung?
- zum Auffinden von Gesetzmässigkeiten?

SUS IM FOKUS

Schülerinnen und Schüler können bestehende Materialien direkt über
<http://tube.geogebra.org/> nutzen



Neueste Materialien



Dr Who activity

23. November 2014 - 11:29

Geteilt von [Mark Willis](#)

0 0



Beginning Algebra

23. November 2014 - 10:26

2 Materialien — Geteilt von [james monaghan](#)

0 0

Beliebte Arbeitsblätter

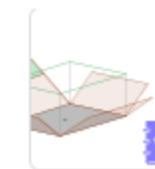


animated clock

30. November 2012 - 14:29

Geteilt von [nguyenphuoc0802](#)

15 1

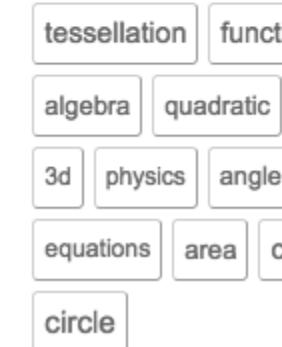


KidZ - 5. Schulstufe

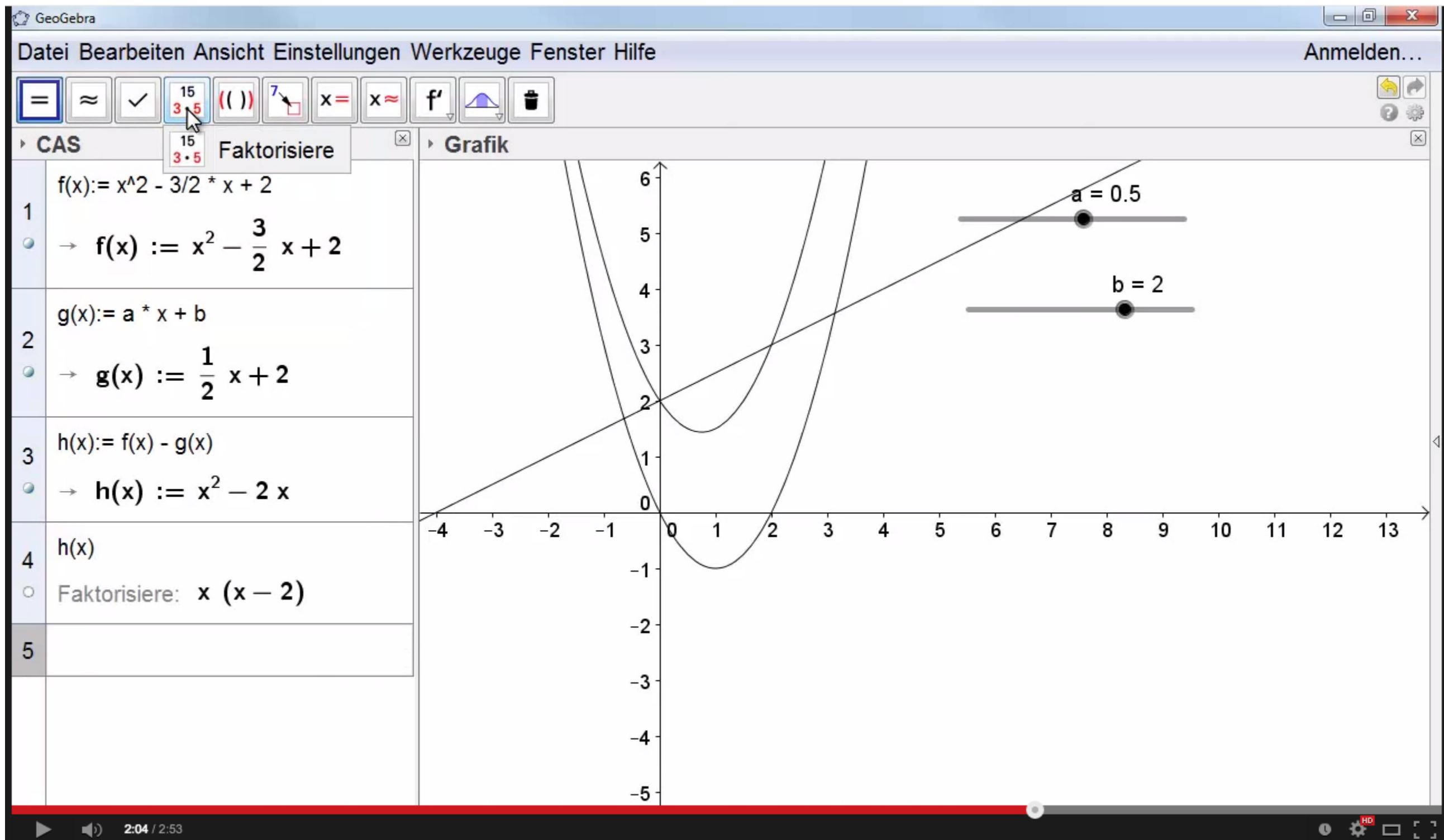
22. Januar 2014 - 15:27

10 Materialien — Geteilt von [GeoGebraTube Team](#)

Beliebte Tags



LERNVIDEOS



NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

Twitter: [@geogebra](https://twitter.com/geogebra)

GeoGebra
@geogebra
Dynamic Mathematics for Everyone
geogebra.org
Beigetreten September 2009

TWEETS 2.422 FOLGE ICH 611 FOLLOWER 9.346 FAVORITEN 78

[Folgen](#)

	Tweets	Tweets & Antworten	Fotos & Videos
	GeoGebra @geogebra · 22. Nov. Weekend meetings :) fb.me/3VAfplguZ		
	GeoGebra @geogebra · 21. Nov. Really enjoying the updates coming out of #ggbna2014 Looking forward to more pics and ideas from our amazing community.		

WEITERE GEOGEBRA QUELLEN

Daniel Mentrard

ANIMATIONS EN SCIENCES PHYSIQUES 3 4 4 5 2 2 4

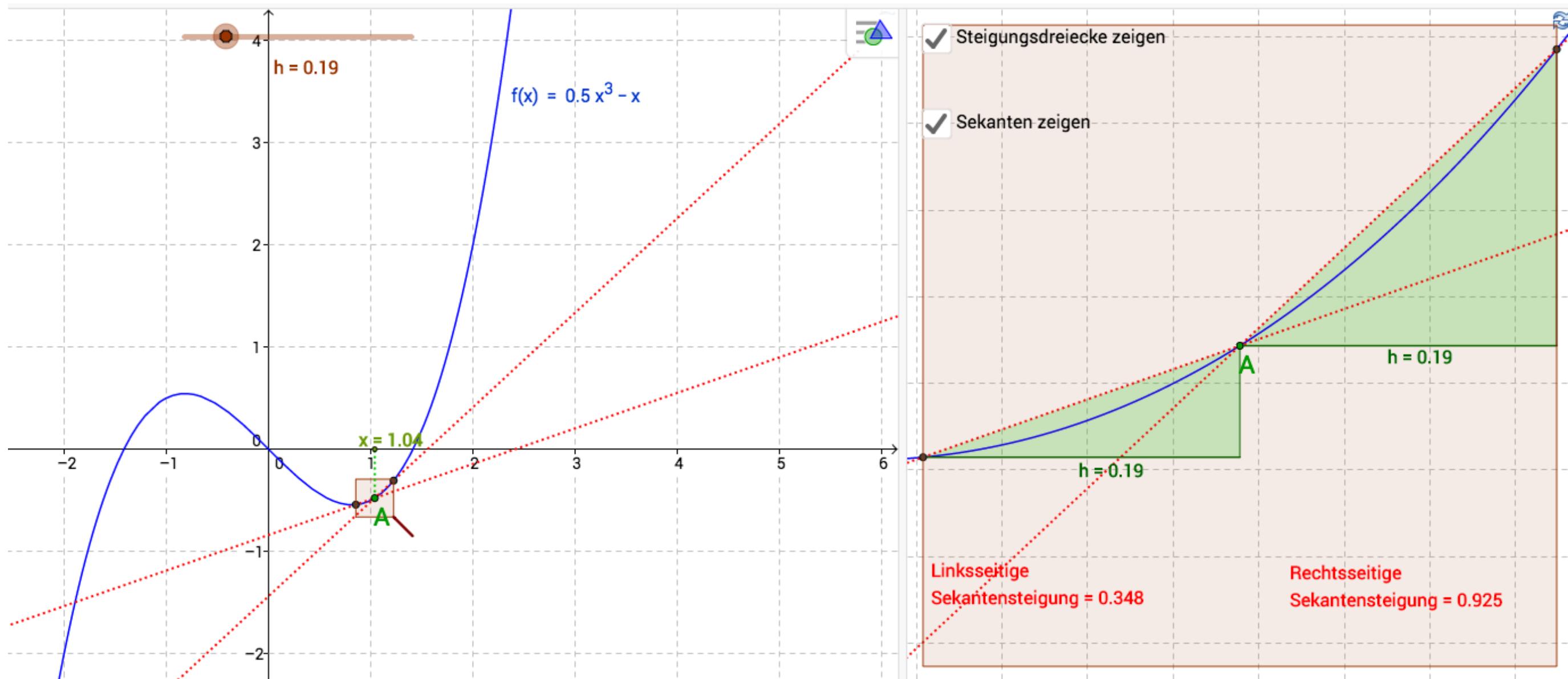
ELECTROMAGNETISME Daniel MENTRARD

dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Sciences/Excemagne.htm

FUNKTIONEN UNTER DER LUPE

H.-J. Eschenbroich

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/411519>



GEOGEBRA IM UNTERRICHT

TECHNISCHE ASPEKTE

STARTSEITE

GeoGebra

Materialien

Downloads

Community

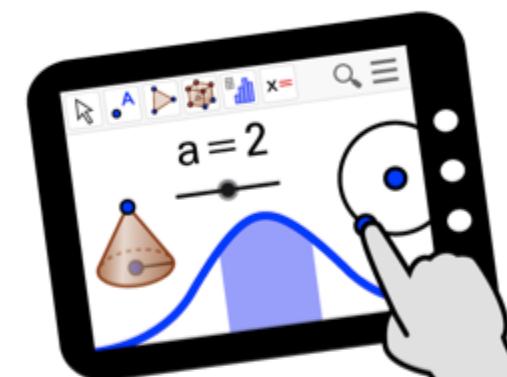
Hilfe

Anmelden

Dynamische Mathematik für Lernen und Unterricht



Materialien durchsuchen



Starte GeoGebra



Jetzt herunterladen

GEOGEBRA

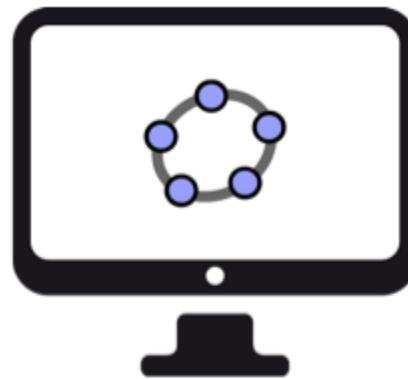
**IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT
DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,**

<http://geogebra.org/>

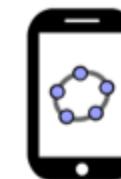
1. MÖGLICHKEIT GEOGEBRA INSTALLIEREN



GeoGebra für Tablets



GeoGebra für Desktop Computer



GeoGebra für Smartphones



Windows



Mac OS X



Linux

Kommt bald!

[Mehr Download-Möglichkeiten für GeoGebra](#)

<http://www.geogebra.org/download>

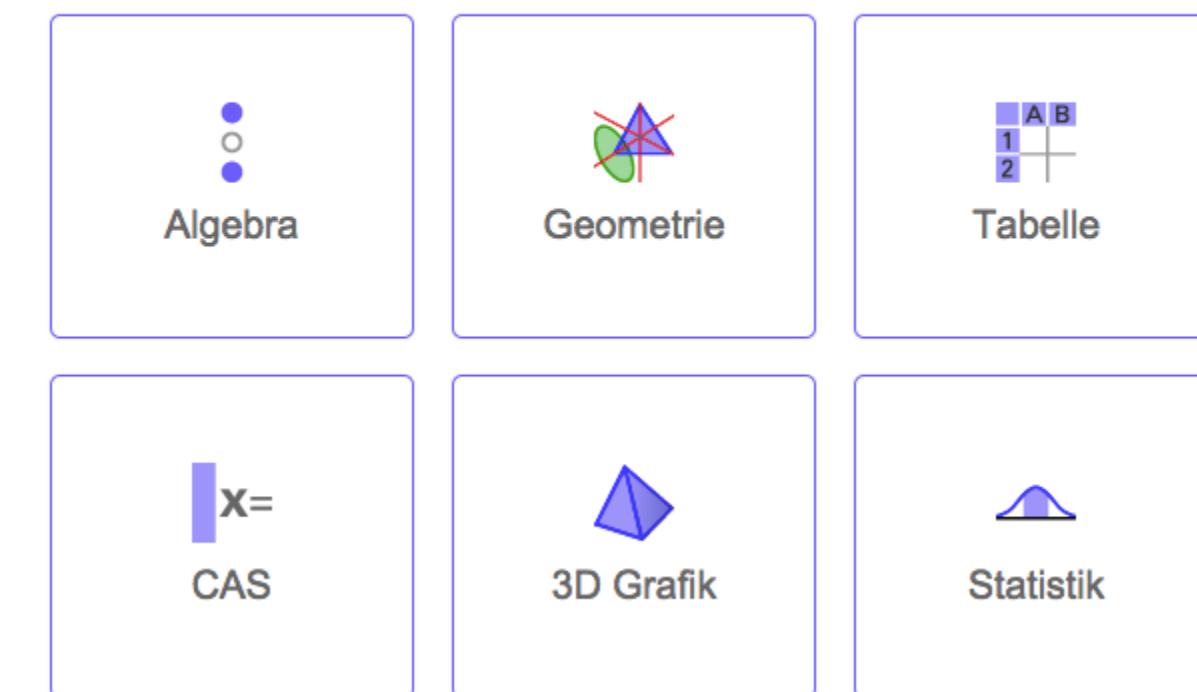
WICHTIG VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

2. MÖGLICHKEIT

DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

Etwas selbst erstellen



<http://web.geogebra.org/app>

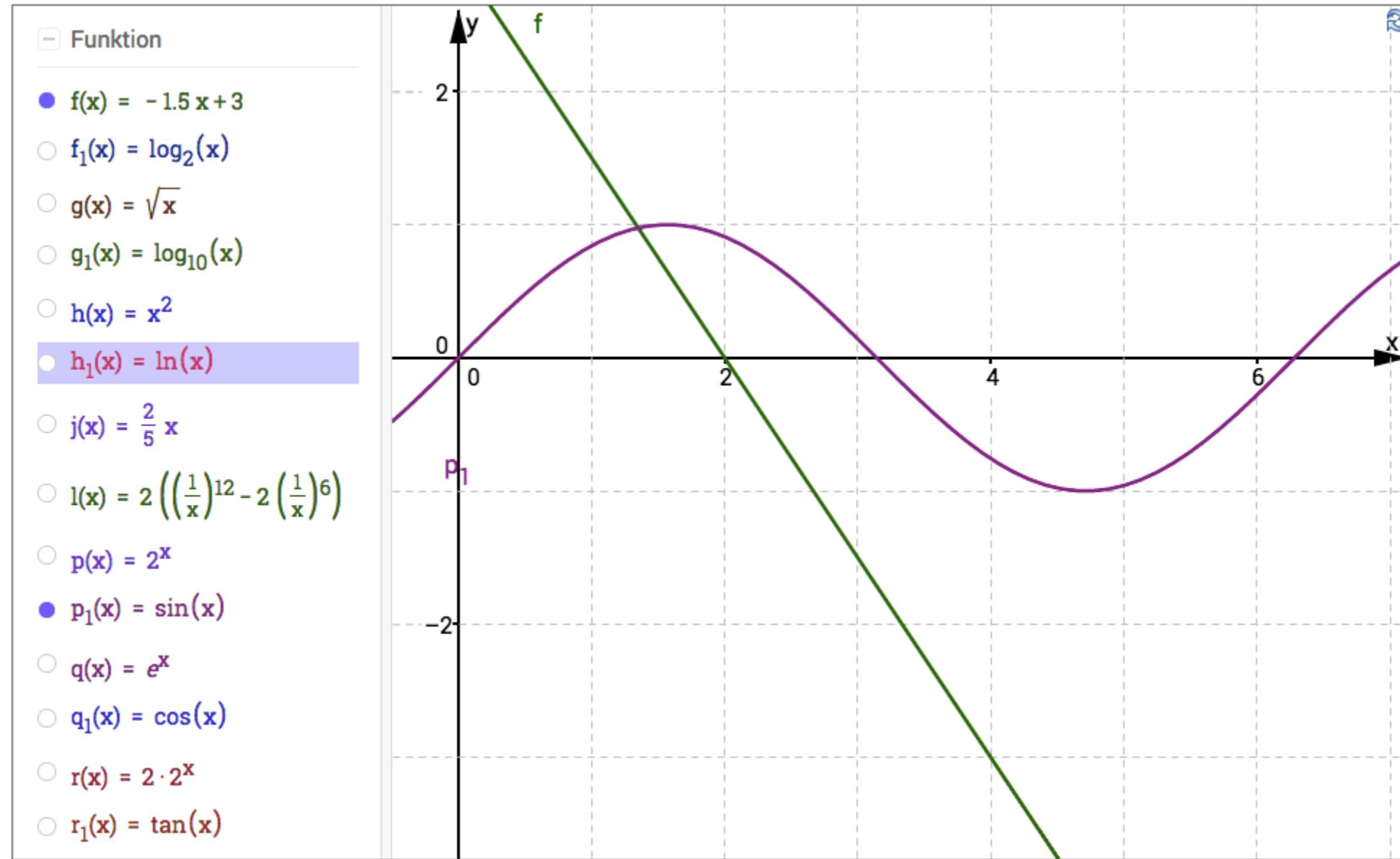
MATHEMATISCHE INHALTE

+

GEOGEBRA

FUNKTIONEN

- Funktionen darstellen
- Funktionen verknüpfen & diskutieren
- Funktionen mit Parameter
 - Maturaufgabe
 - Spur von Extrema



[Link auf GeoGebraTube](#)

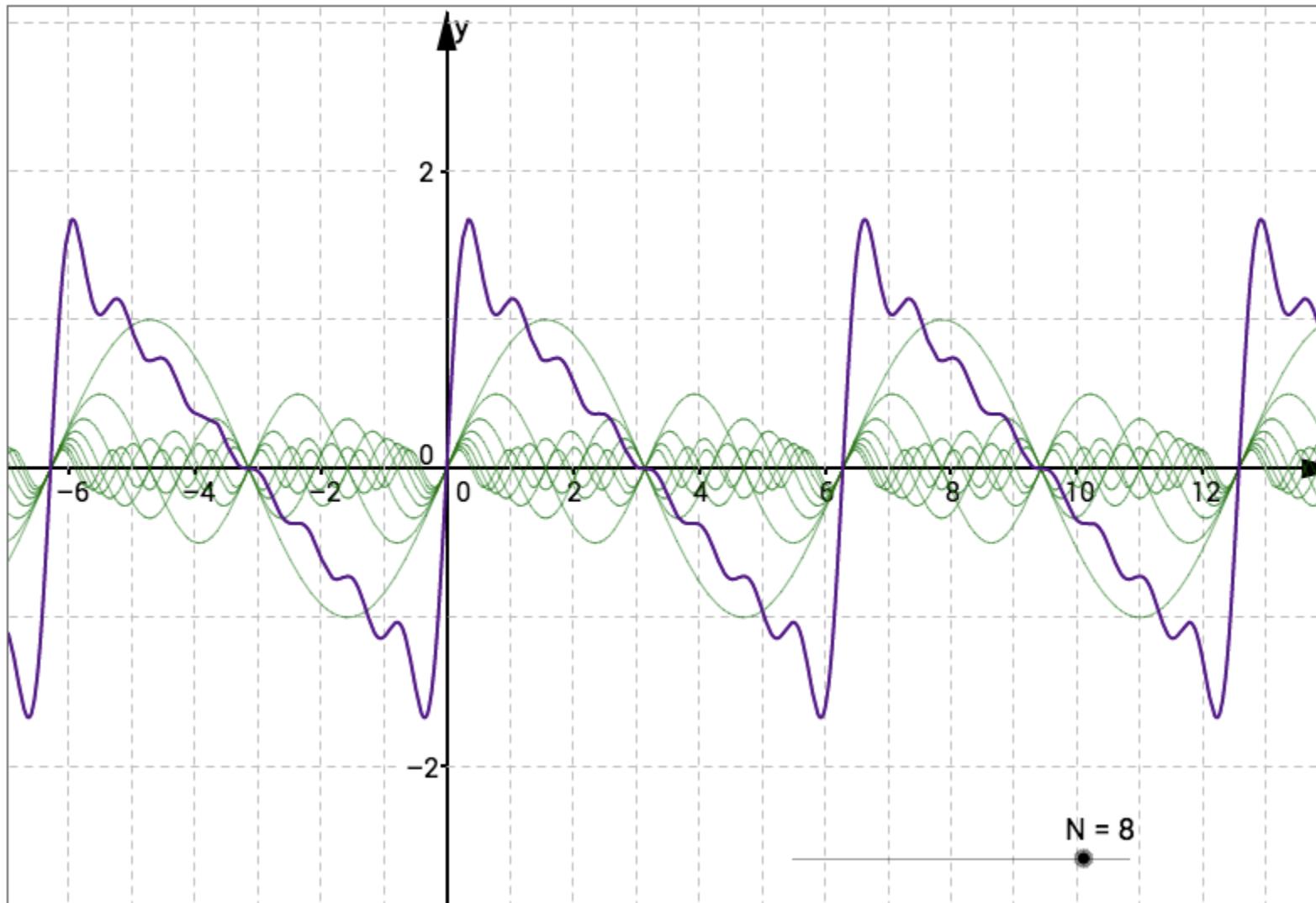
PUNKT AUF FUNKTION

1. Beweglicher Punkt auf der x-Achse
2. entsprechender Punkt auf einer Funktion

```
f(x) =x^2*sin(x^2)
x_0 =Punkt[y=0]
P =(x(x_0),f(x(x_0)))
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

$$f = \sum_{i=1}^N f_i(x)$$



[Link auf GeoGebraTube](#)

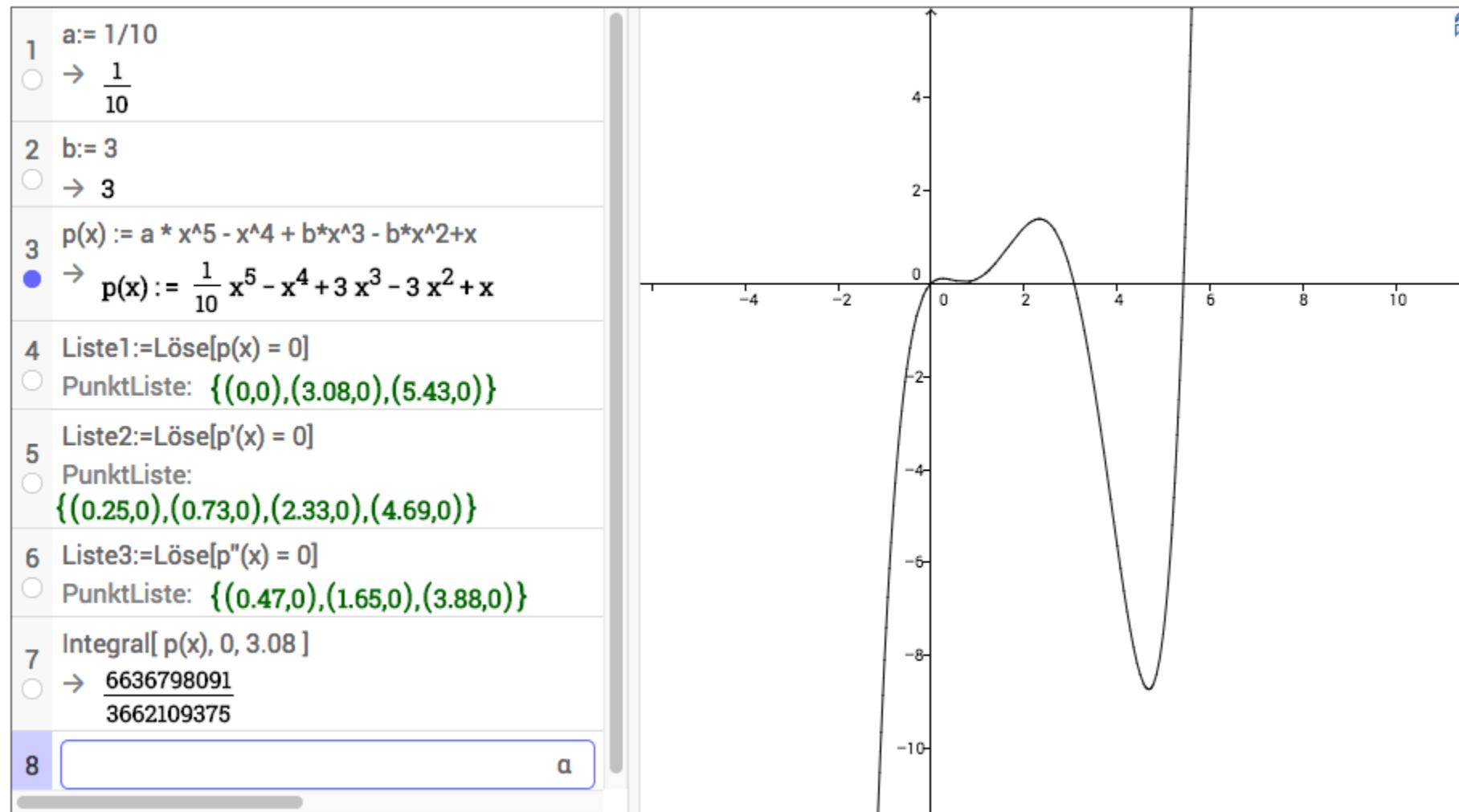
CAS DIREKT
ALS WEBANWENDUNG NUTZEN

FINDE AUSGEZEICHNETE PUNKTE EINER FUNKTIONSSCHAR

$$p(x) = a \cdot x^5 - x^4 + b \cdot x^3 - b \cdot x^2 + x$$

Für den Fall: $a = \frac{1}{10}$ und $b = 3$

1. Finden Sie die Nullstellen der Funktion $p(x)$
2. Finden Sie die Extremalstellen und Extremalwerte
3. Finden Sie die Wendepunkte
4. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und der Funktion $p(x)$



<http://tube.geogebra.org/student/m833905>

CAS Befehle

```
f(x) := a x^3 + b x^2+ c x+d
```

```
f(-1) = 1
```

```
f(1) = -1
```

```
f'(1)=-1
```

```
f'(-1) = 1
```

```
Löse[ {$2, $3, $4, $5}, {a, b, c, d} ]
```

```
g(x):=Ersetze[$1,$6]
```

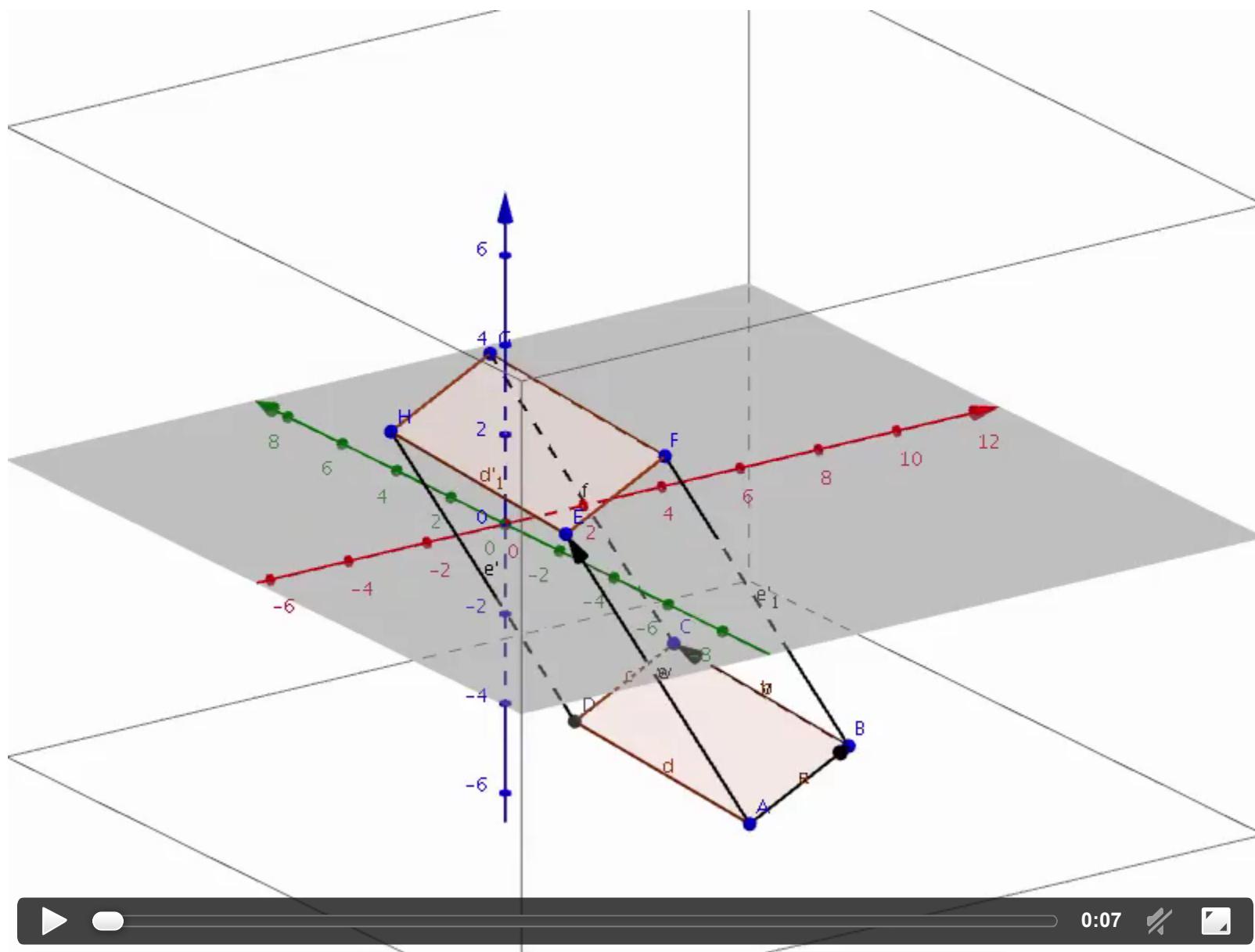
AUFTAG: TESTEN SIE ES GLEICH AUS!

CAS im Browser

VEKTOR-GEOMETRIE

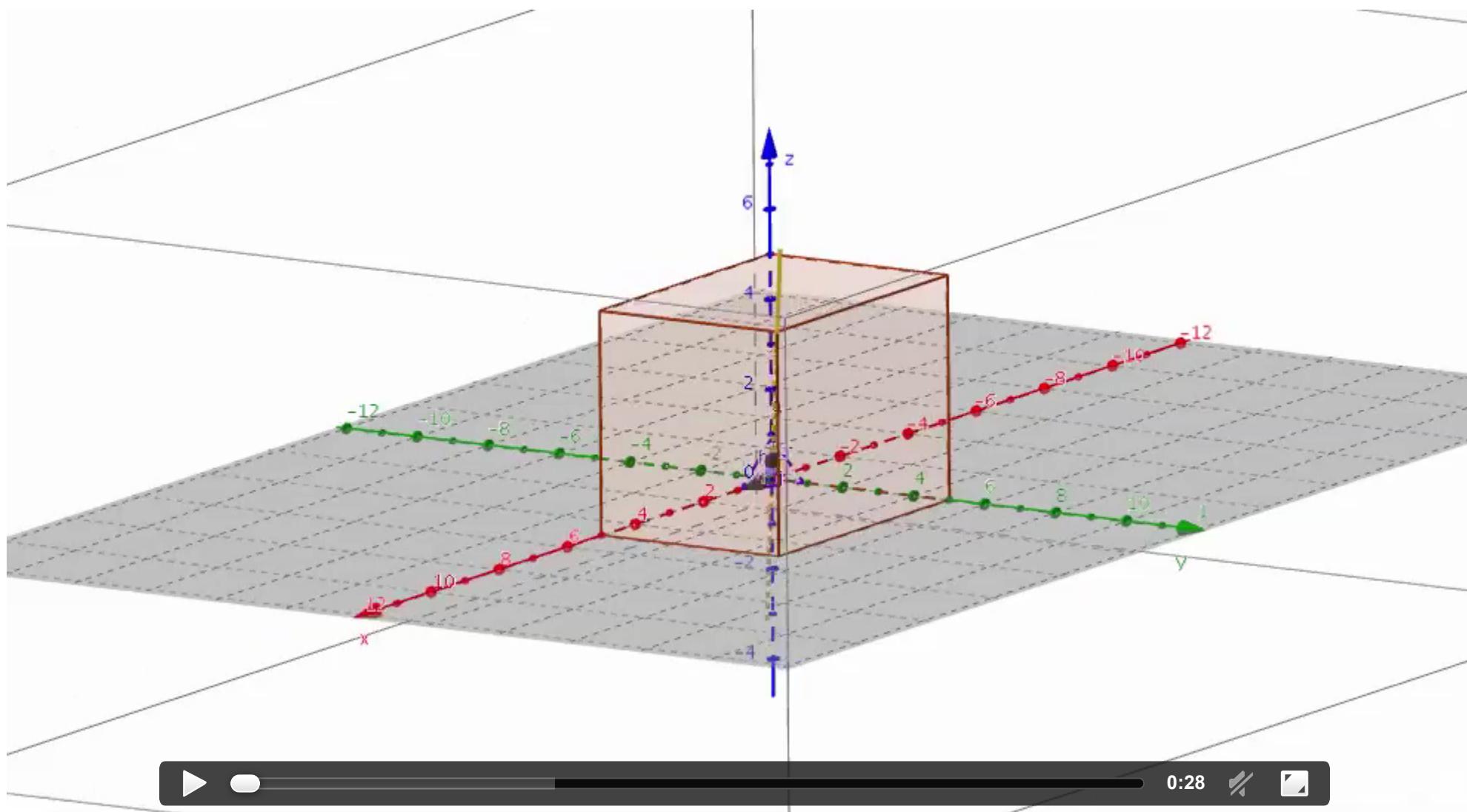
- Ein Spat
- Abstand zweier Geraden
- Würfelschnitte

EIN SPAT



- <http://tube.geogebra.org/student/m320977>

WÜRFELSCHNITTE



- Diagonale Ebene <http://tube.geogebra.org/student/m321009>
- Beliebige Ebene <http://tube.geogebra.org/student/m321021>

$$A(8 / 11 / 11)$$

$$P(5 / -1 / -13)$$

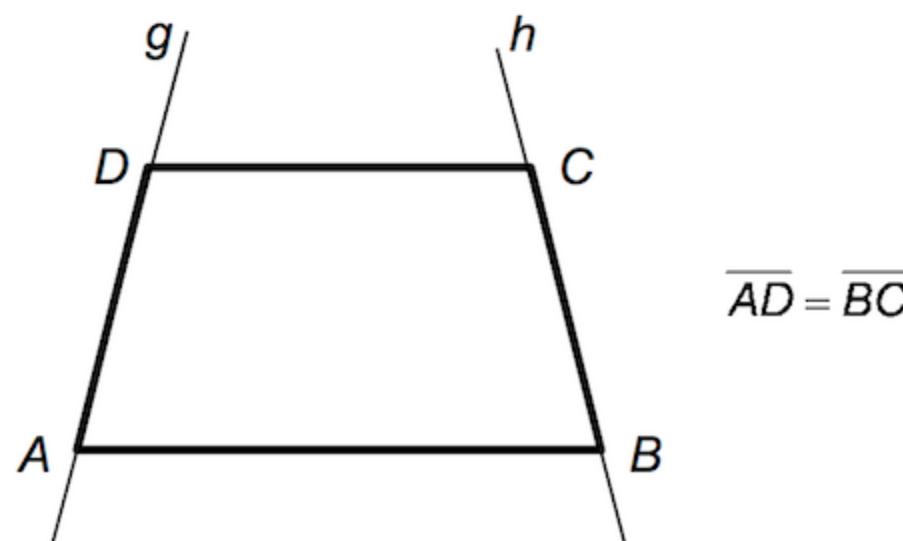
$$C(-1 / -1 / -1)$$

$$Q(13 / 7 / -9)$$

Die Gerade g geht durch die Punkte A und P .

Die Gerade h geht durch die Punkte C und Q .

- a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g und h .
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden.
- c) Unter welchem Winkel α schneiden sich die beiden Geraden g und h ?
- d) Die Geraden g und h liegen beide in der Ebene E . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E .
- e) Die oben gegebenen Punkte A und C sind Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Die Punkte A und D liegen auf der Geraden g . Die Punkte B und C liegen auf der Geraden h . Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte B und D .



MATURAUFGABE ZUR VEKTORGEOMETRIE GYM OBERWIL, GRUNDLAGENFACH 2014

- <https://tube.geogebra.org/student/m761969>

STOCHASTIK

STOCHASTIK MATURAUFGABE

<https://tube.geogebra.org/student/m769673>

6. Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben“ (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).
- $4+4+3 = 11$ Punkte
- a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
- Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.

- b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
- b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?
- c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?

TEILAUFGABE A - CAS-FENSTER

Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben“ (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).

$$4+4+3 = 11 \text{ Punkte}$$

- a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
 - a1) Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
 - a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
 - a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
 - a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
 - b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
 - b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?
- c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?

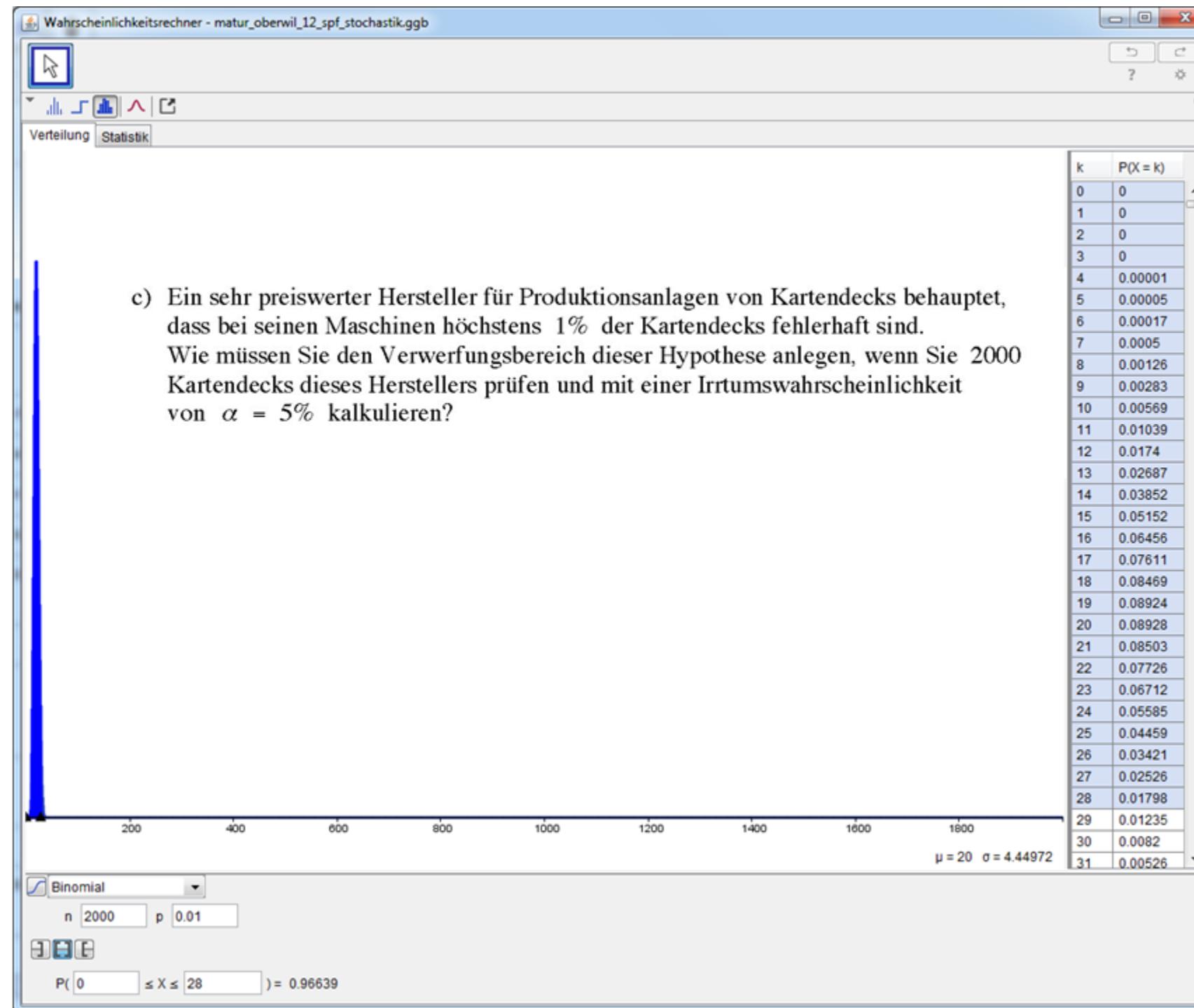
	Aufgabe 6 a1
1	$\rightarrow 6 \text{ Aufgabe a1}$
2	$\text{BinomialKoeffizient}[52, 5]$
3	Aufgabe 6a2
4	$\rightarrow 6 \text{ Aufgabe a2}$
5	$1-(48!/43!)/(52!/47!)$
6	$\rightarrow \frac{18472}{54145}$
7	im numerischen Modus
8	$\$4$
9	≈ 0.34116
10	Aufgabe 6a3
11	$\rightarrow 6 \text{ Aufgabe a3}$
12	$5*4!/(52!/48!)$
13	$\rightarrow \frac{1}{54145}$
14	im numerischen Modus
15	$\rightarrow \text{Modus im numerischen}$
16	$\$8$
17	≈ 0.00002

TEILAUFGABE A&B - CAS-FENSTER

- a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).
- b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
- b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
- b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?

11	Aufgabe 6a4: 13 Möglichkeiten für Drillingswert,
12	12 Möglichkeiten für Zwillingswert,
13	4 Möglichkeiten weggelassene Karte Drilling
14	6 Möglichkeiten für die weggelassene Karte
15	$13 \cdot (12) \cdot 4 \cdot (6 / \text{BinomialKoeffizient}(52, 5))$ <input checked="" type="radio"/> ≈ 0.00144
16	Aufgabe 6b1
17	$0.6 \cdot 0.001 + 0.4 \cdot 0.0005$ <input checked="" type="radio"/> → $\frac{1}{1250}$
18	\$17 <input checked="" type="radio"/> ≈ 0.0008
19	Aufgabe 6b2
20	$(0.6 \cdot 0.999) / (0.6 \cdot 0.999 + 0.4 \cdot 0.9995)$ <input checked="" type="radio"/> ≈ 0.59988
21	

C - WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNER IM MENÜ ZUM CAS-FENSTER



ANGEFRAGTE THEMENGEBIETE

GeoGebra Anwendungen selbstständig erproben und weitere Beispiele in GeoGebraTube finden.

- Ober-/Untersummenberechnungen [B1](#) [B2](#) [B3](#)
- Geometrie und Funktionen [B0](#) [B1](#) [B2](#) [B3](#) [B4](#) [B5](#)
- Stochastik [B1](#) [B2](#) [B3](#) [B4](#)
- Regression [B1](#) [B2](#) [B3](#)

DESSERT

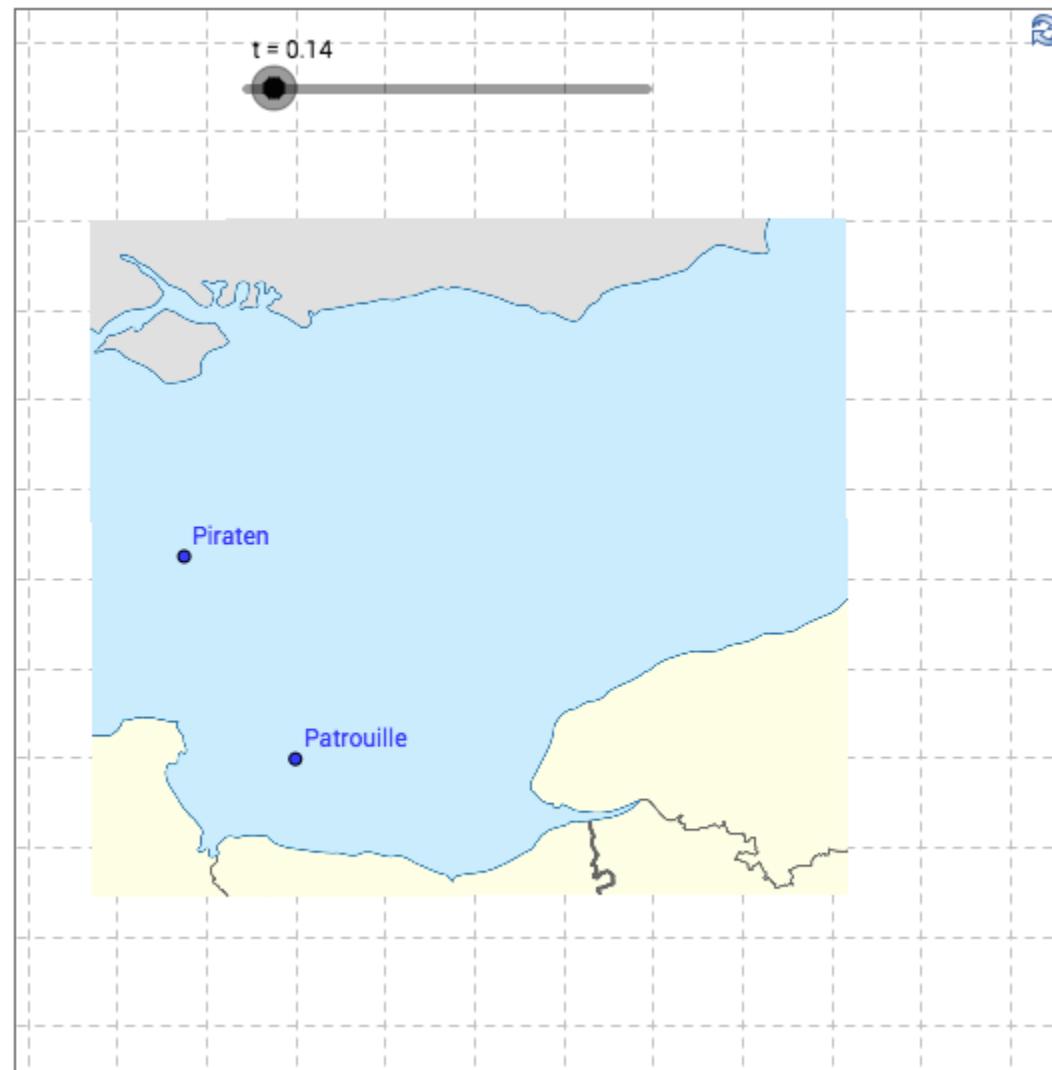
- Tabellen-kalkulation
- Piratenaufgabe
- Differentialgleichungen
- Abbildungen (Matrizen)
- Bestimmung von Eigenvektoren
- Zentralprojektion & Parallaxe
- Fermat-Punkt

PIRATEN- AUFGABE

Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.

Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.

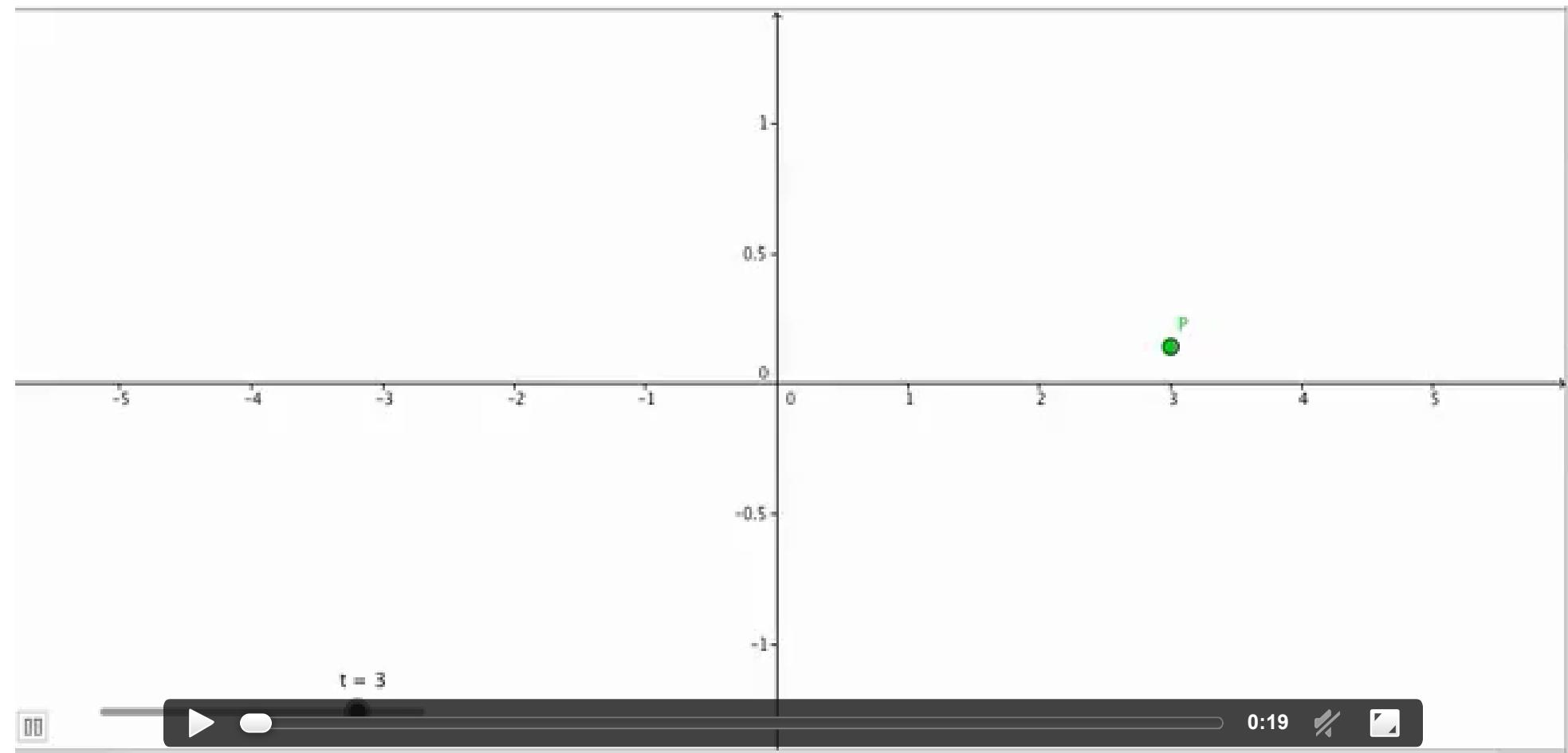


[Link auf GeoGebraTube](#)

BEWEGUNGEN SIMULIEREN

x,y-Position als Funktion von t

```
t = 0.0  
P = (t,sin(t))
```

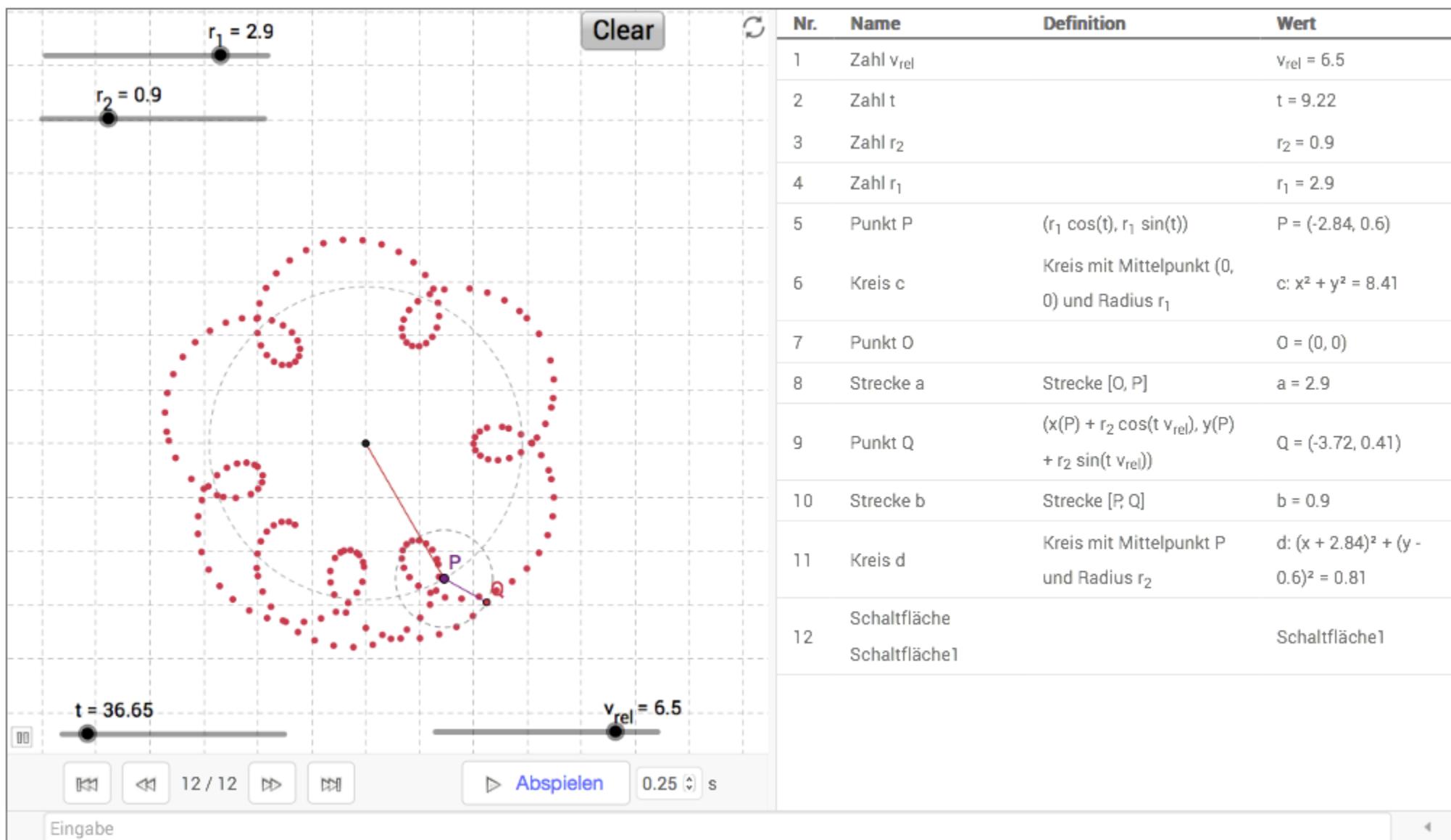


GEKOPPELTE KREISBEWEGUNGEN

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos(t) \\ r_1 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} x(P) \cdot r_2 \cdot \cos(\nu_{rel} \cdot t) \\ y(P) \cdot r_2 \cdot \sin(\nu_{rel} \cdot t) \end{pmatrix}$$

GEKOPPELTE KREISBEWEGUNGEN



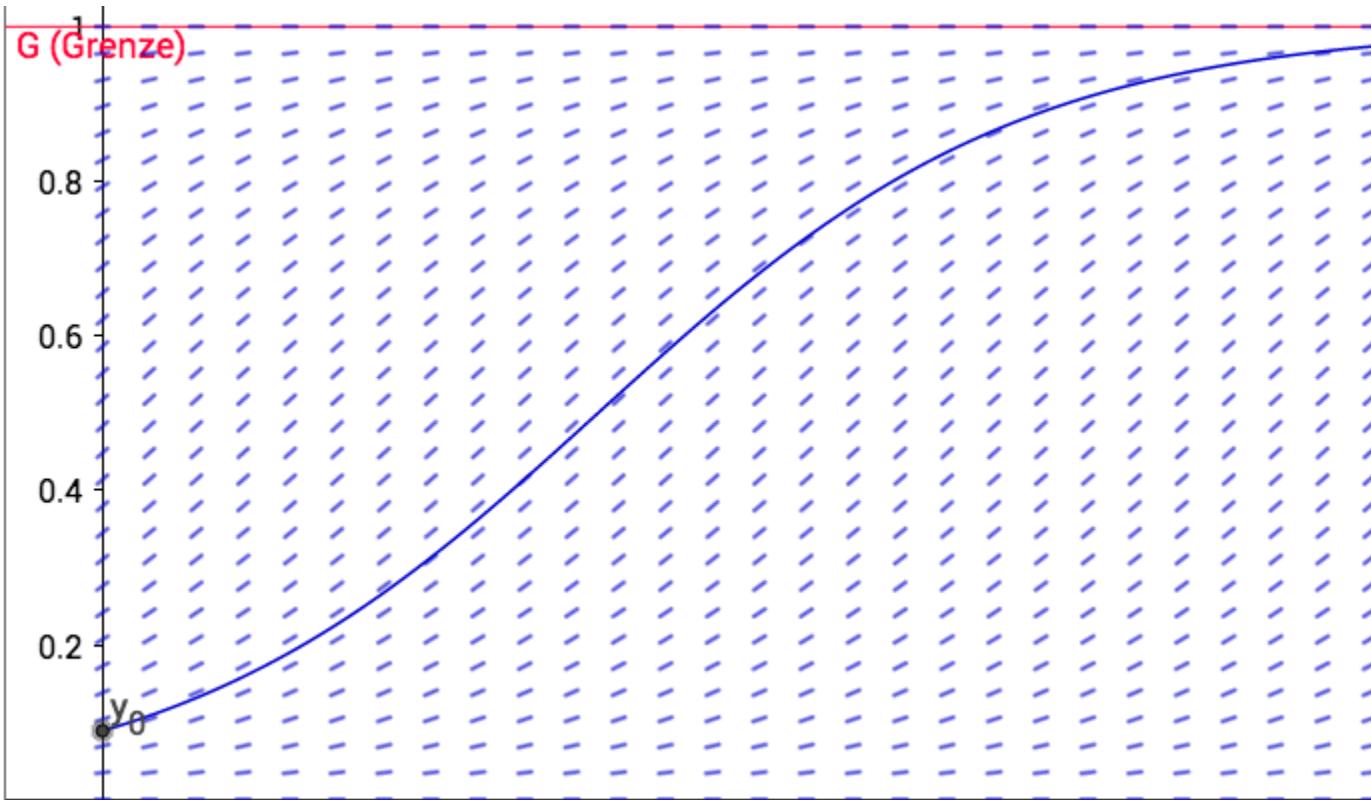
<http://tube.geogebra.org/student/m921873>

DGL

1. ORDNUNG

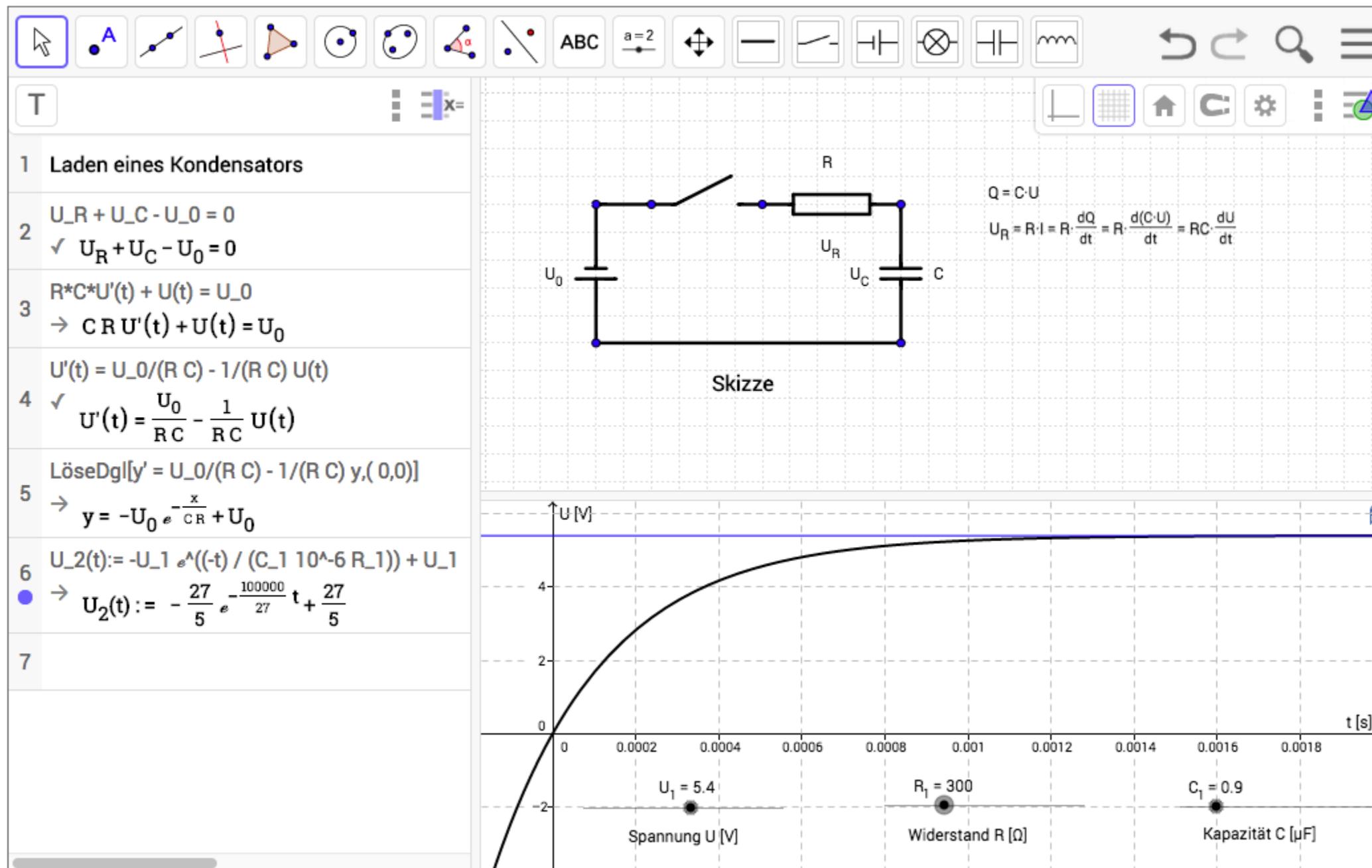
WACHTUMSMODELLE

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/31166>



LADEN EINES KONDENSATORS

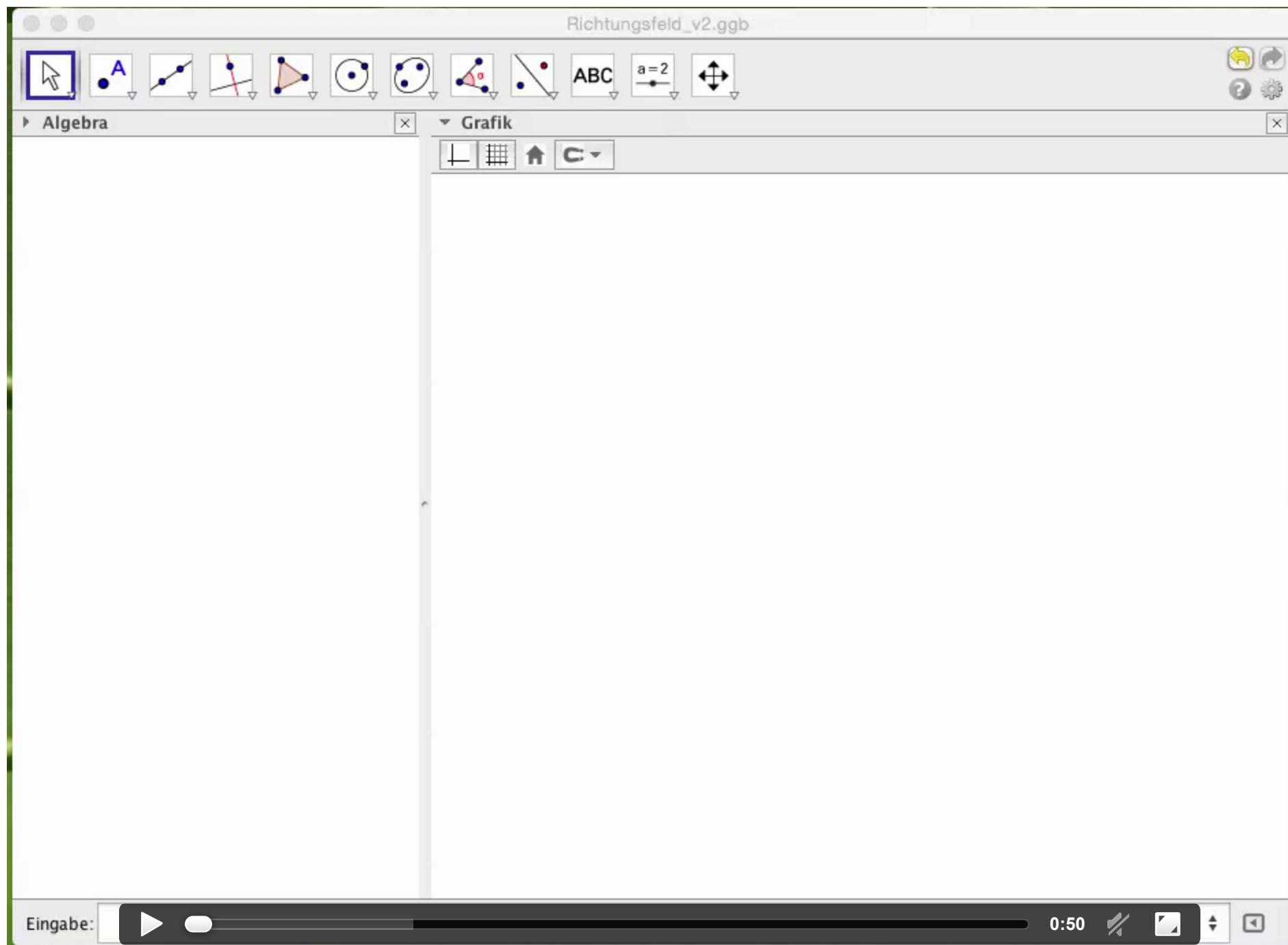
<http://tube.geogebra.org/material/show/id/446087>



NUMERISCHES LÖSEN VON DG ERSTER ORDNUNG IN EINEM 2D-RICHTUNGSFELD

```
A = (1, 1)  
  
f(x, y) = sin(x) cos(y)  
  
Richtungsfeld[f]  
  
LöseDgl[f, x(A), y(A), 20, 0.1]
```

NUMERISCHES LÖSEN VON DG ERSTER ORDNUNG IN EINEM 2D-RICHTUNGSFELD



DGL 2. ORDNUNG

SCHWINGUNG

NEWTON II

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$$

FEDERPENDEL

$$-k\vec{x}(t) = m \cdot \ddot{\vec{x}}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\frac{k}{m} \cdot \vec{x}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{x}(t)$$

Annahme einer Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

einsetzen in DGL

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} = -\omega^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$(\lambda^2 + \omega^2) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

folglich

$$(\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

$$\lambda = i\omega \text{ oder } \lambda = -i\omega$$

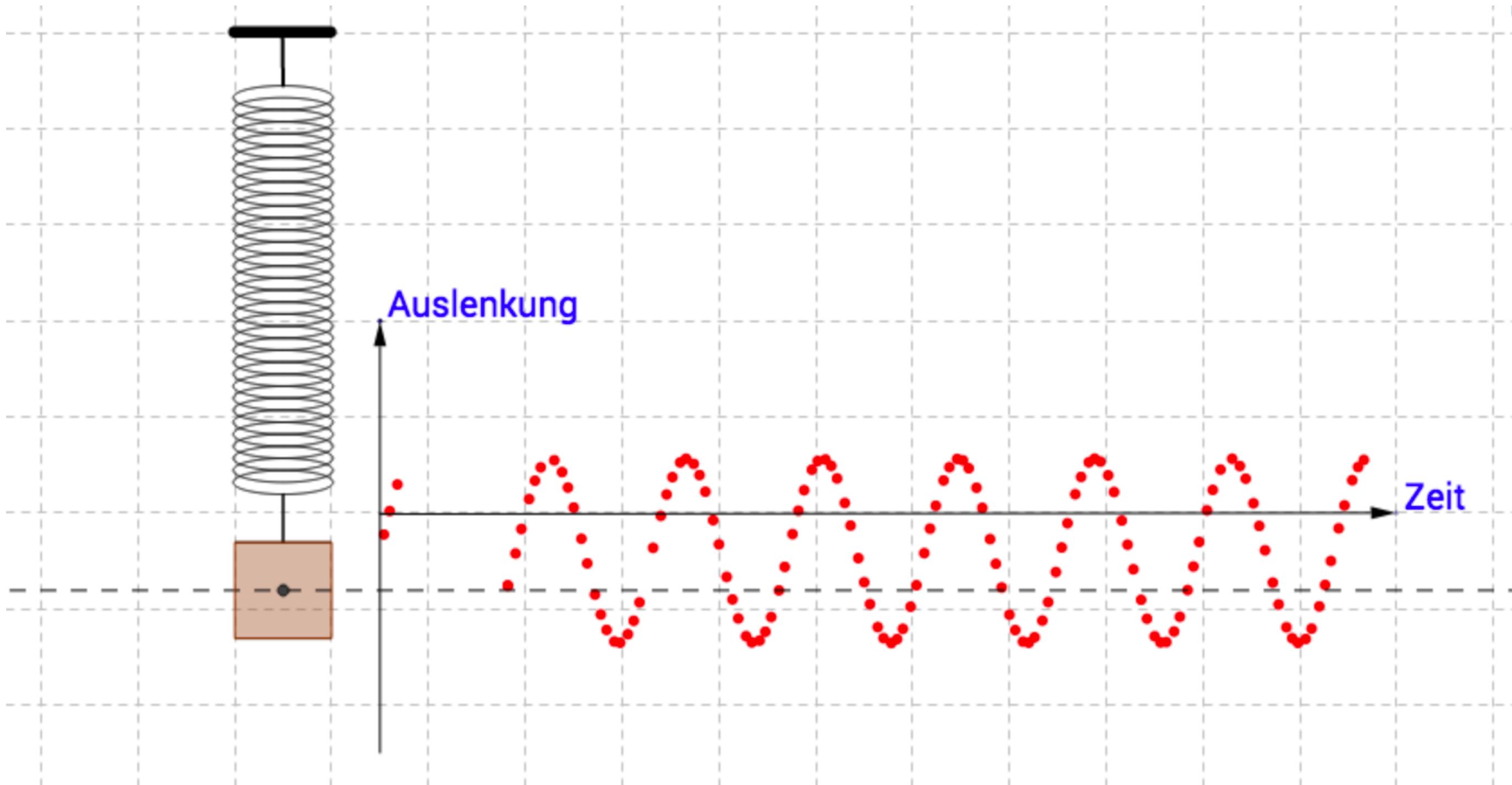
allg. Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t) = \frac{c_1}{e^{i\omega t}} + c_2 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$$

FEDERPENDEL

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/126500>



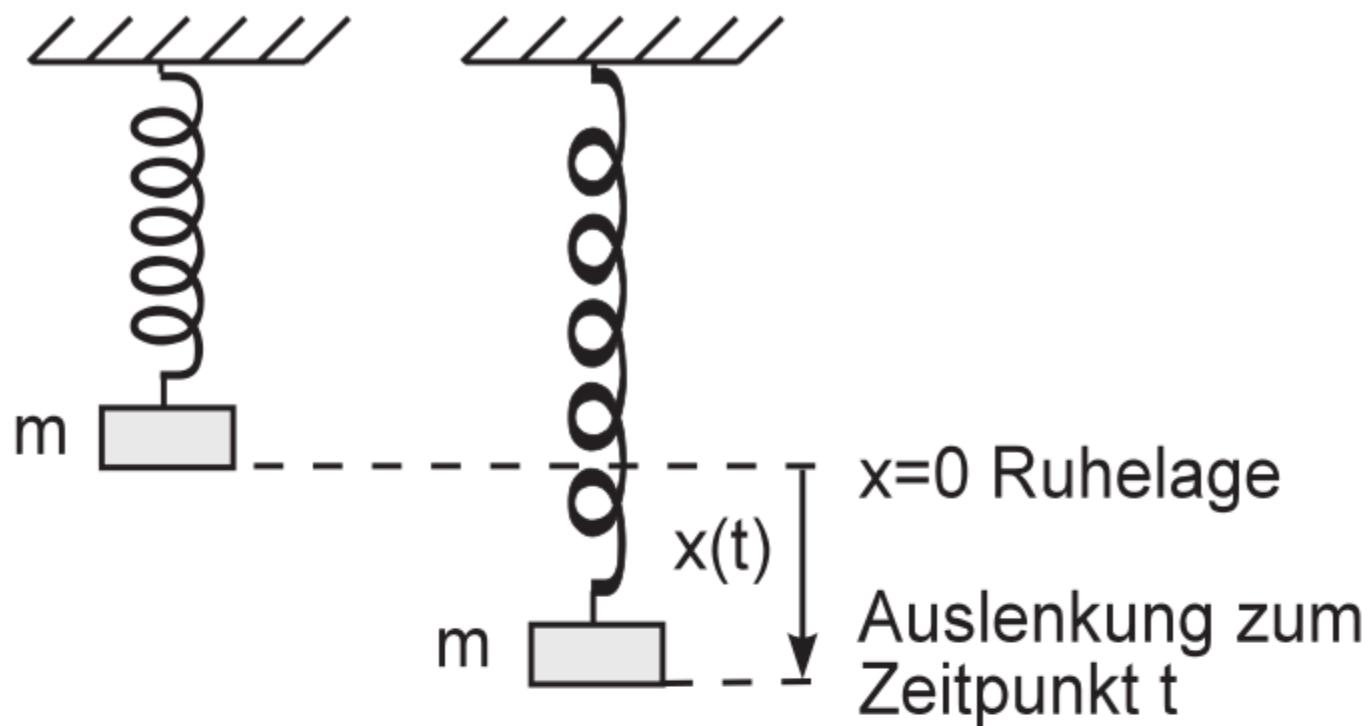


Abb. 12.27. Federpendel

Die Kräfte, die auf die Masse m wirken, sind die Federrückstellkraft $F_D = -D x(t)$ und die Reibungskraft $F_R = -\beta \dot{x}(t)$. Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz ist die Beschleunigungskraft $F_B = m \ddot{x}(t)$ gleich der Summe aller angreifenden Kräfte:

$$m \ddot{x}(t) = -\beta \dot{x}(t) - D x(t) \quad \text{mit } x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$$

(homogene, lineare DG 2. Ordnung). \square

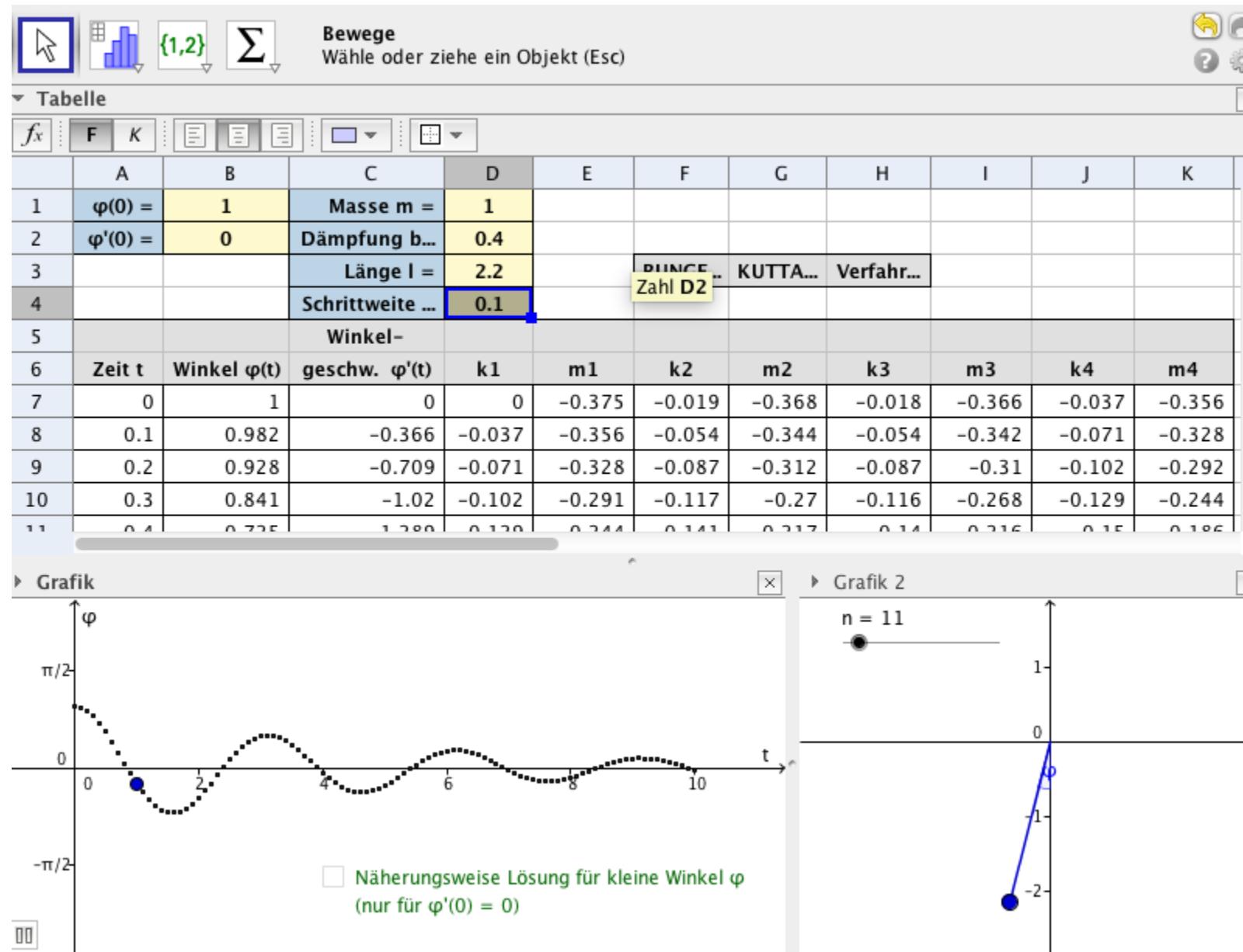
LAGRANGE FORMALISMUS FÜR DAS FADENPENDEL

$$ml^2 \ddot{\phi}(t) + mgl \sin(\phi) = 0$$

nur numerisch lösbar !!!

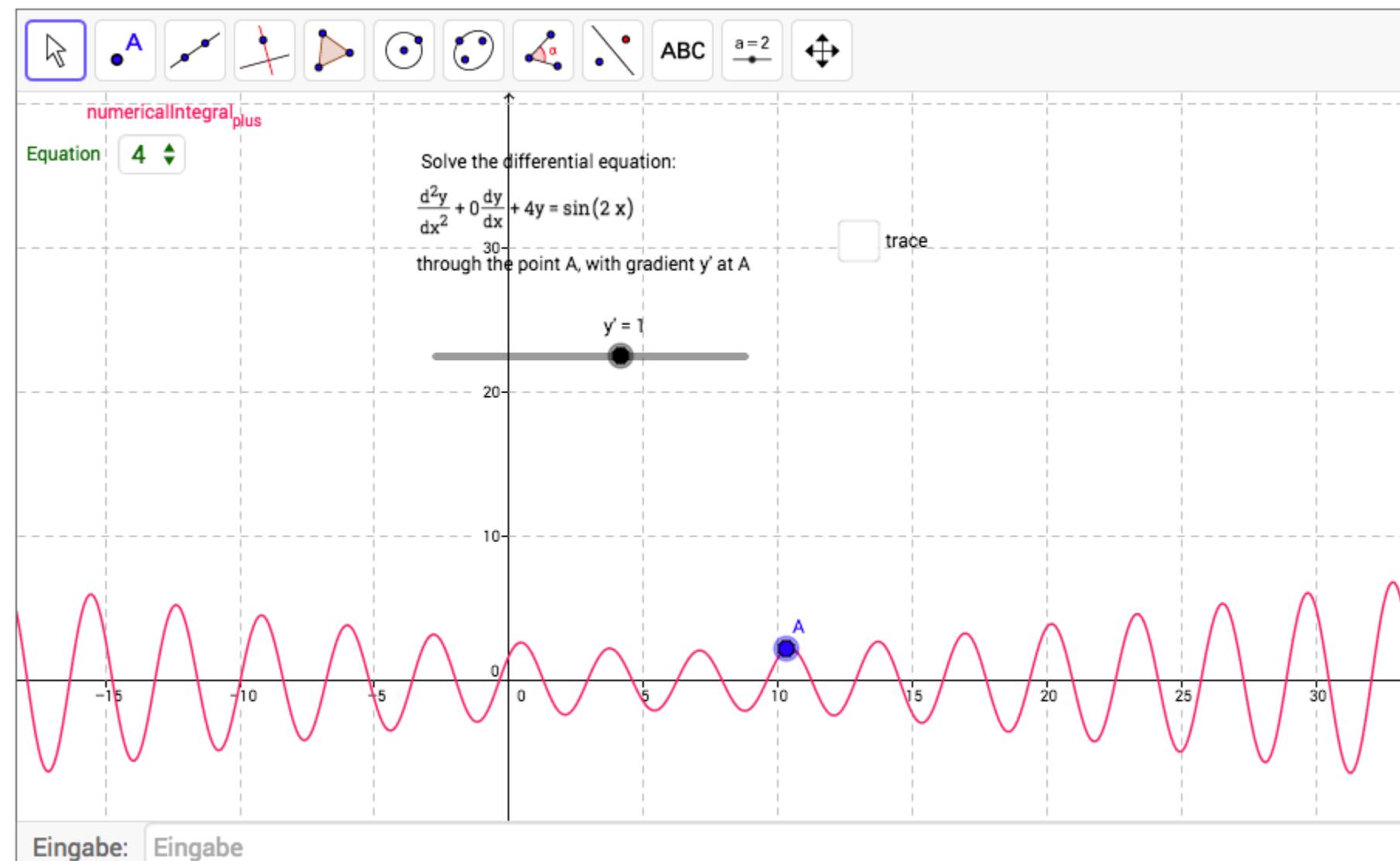
FADENPENDEL SIMULATION

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/702>



NUMERISCHE LÖSUNG EINER DGL 2. ORDNUNG

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/79803>

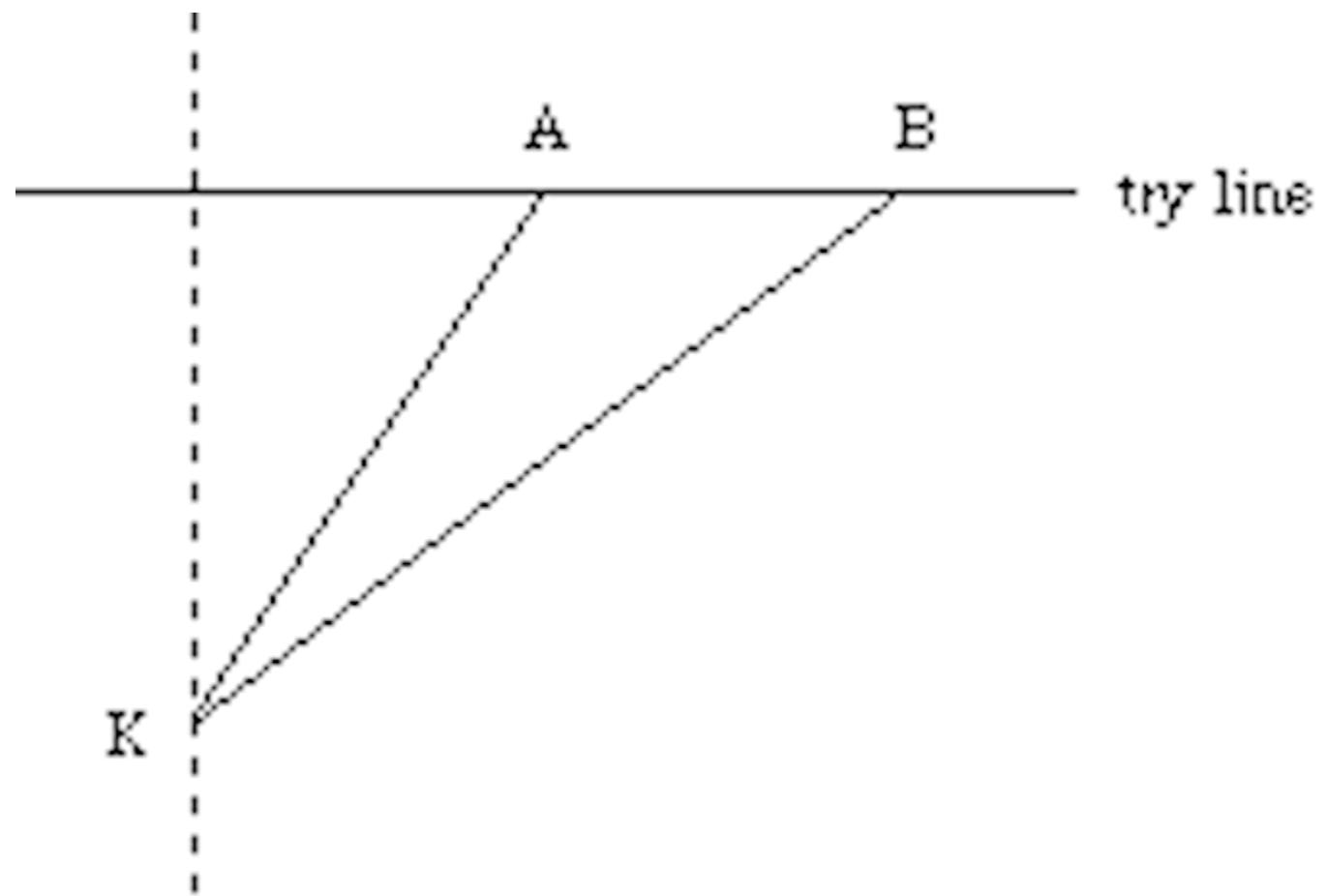


GEOGEBRA ANLEITUNG

ZU DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND RICHTUNGSFELDER

- <http://wiki.geogebra.org/de/L%C3%B6seDgl %28Befehl%29>
- <http://wiki.geogebra.org/de/Richtungsfeld %28Befehl%29>
- Schwingungen und Wellen

RUGBY AUFGABE



Rugby Session by Seymour Papert

EXKURS
SKALARPOTENTIAL
&
ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN

SKALAR POTENTIAL

$$\Phi : \vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$$

mit

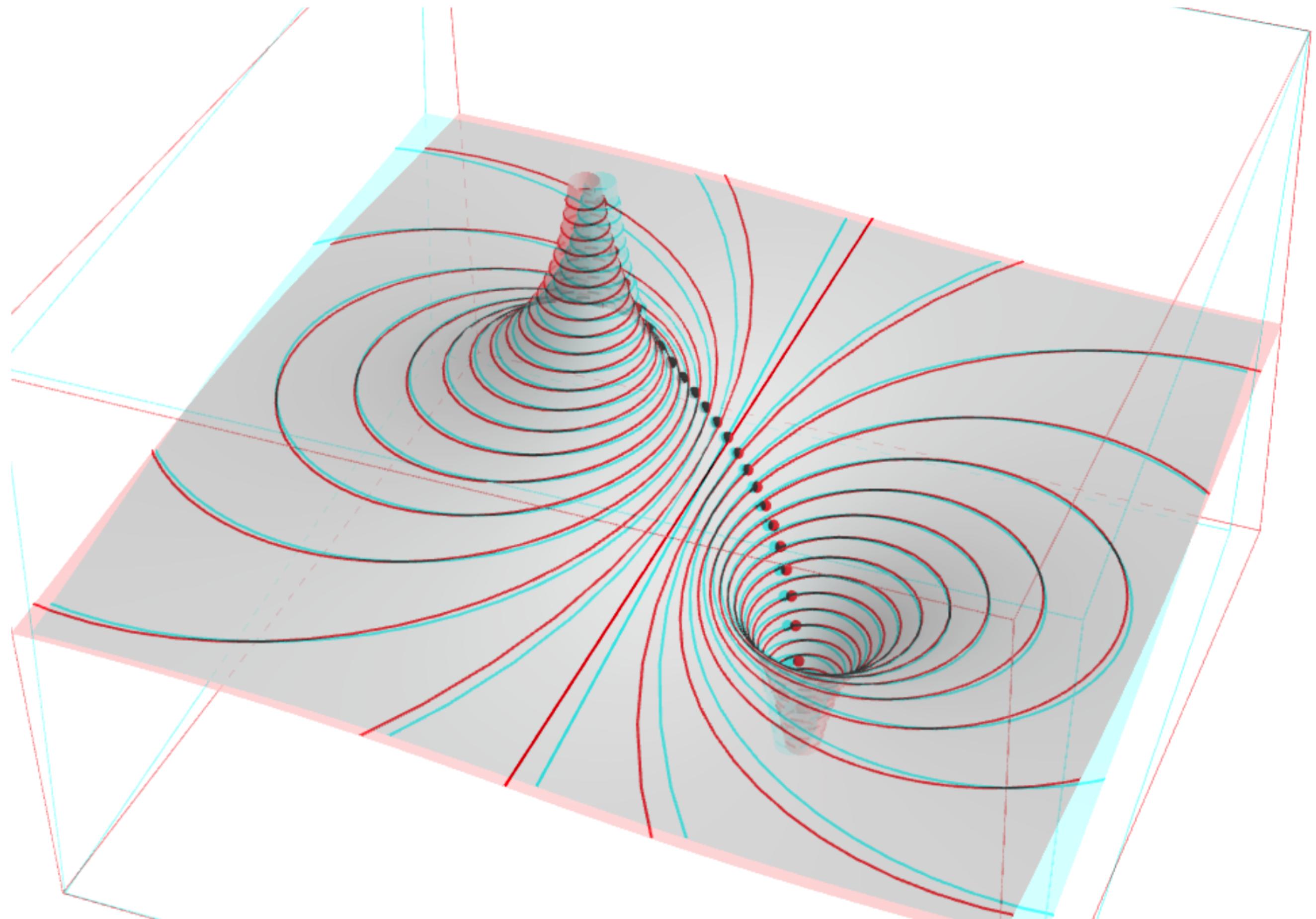
1. Φ ist zweimal stetig differenzierbar
2. Es existiert ein Vektorfeld mit

$$\vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}(\Phi(\vec{r}))$$

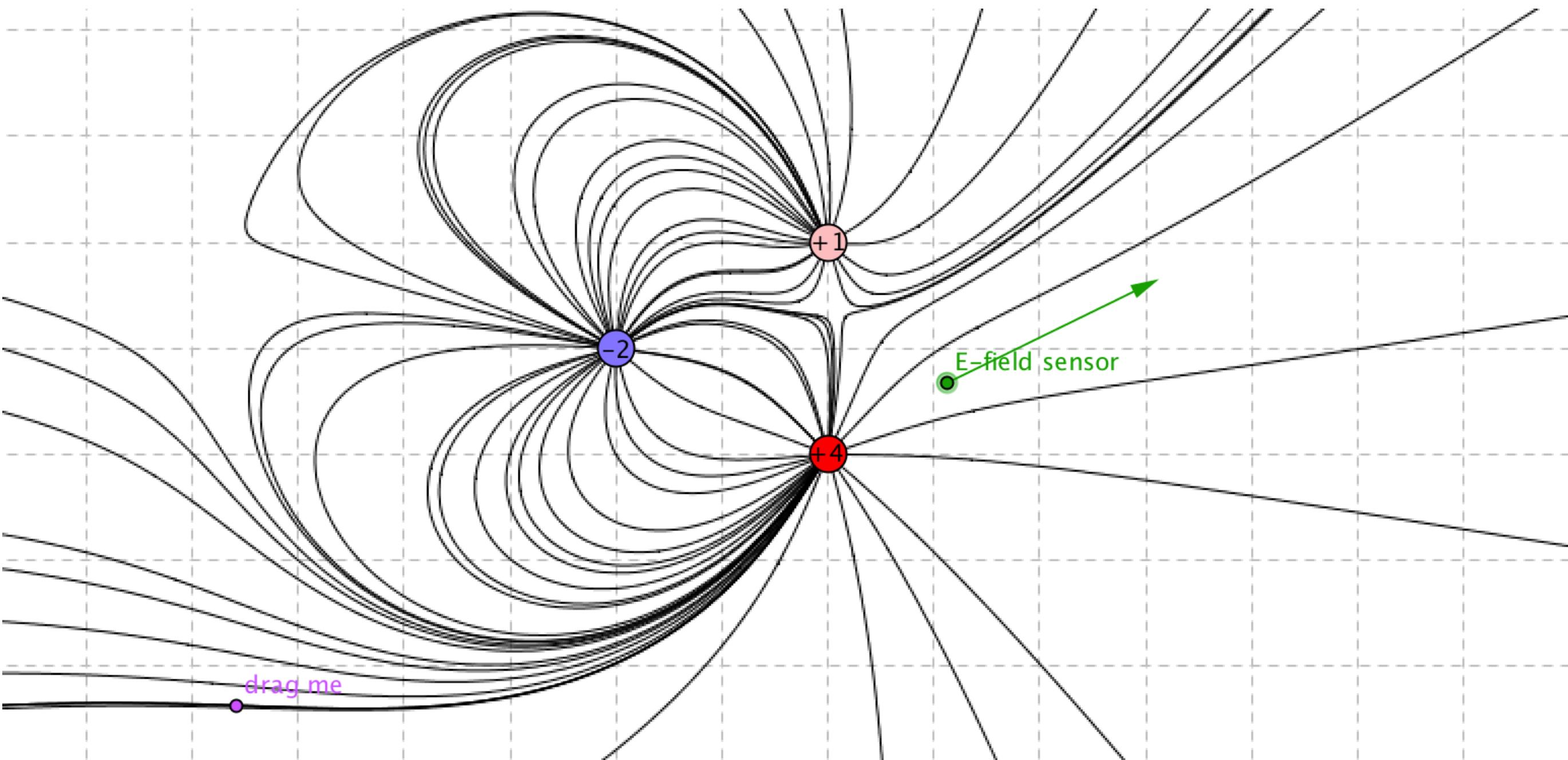
3D POTENTIALLINIEN

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/438619>



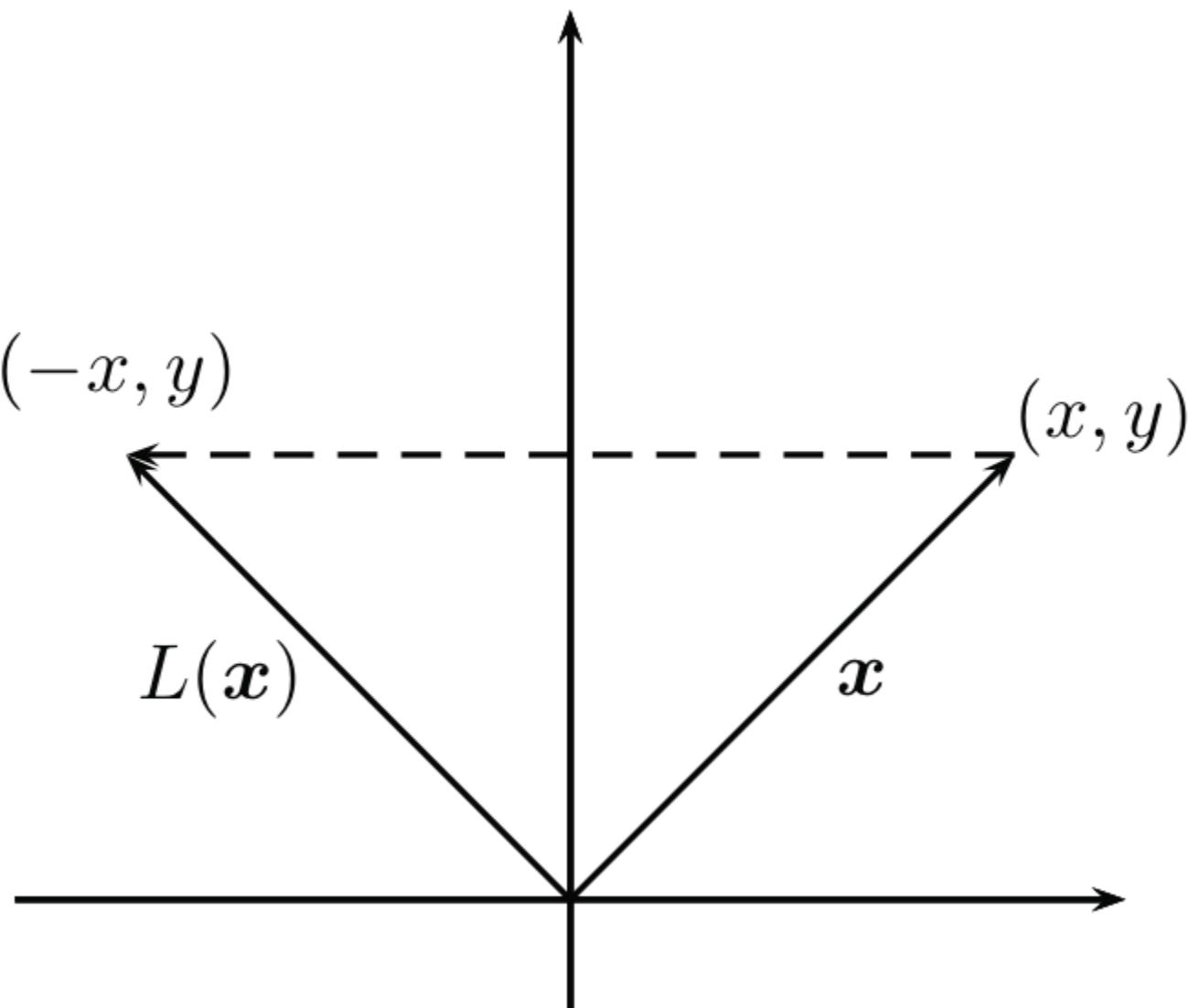
BEISPIEL 3 PUNKTLADUNGEN (MULTIPOLE)

<http://tube.geogebra.org/material/show/id/27247>



ABBILDUNGEN

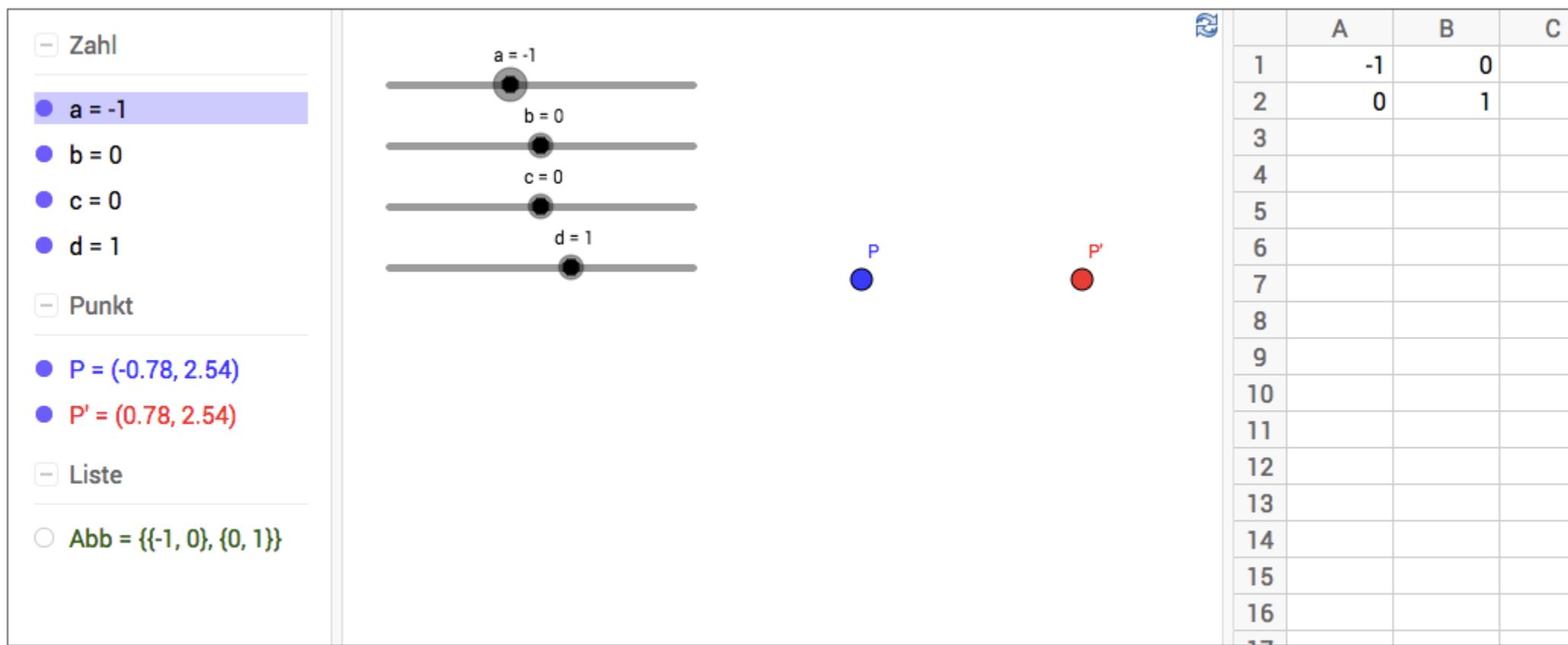
SPIEGELUNG



Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

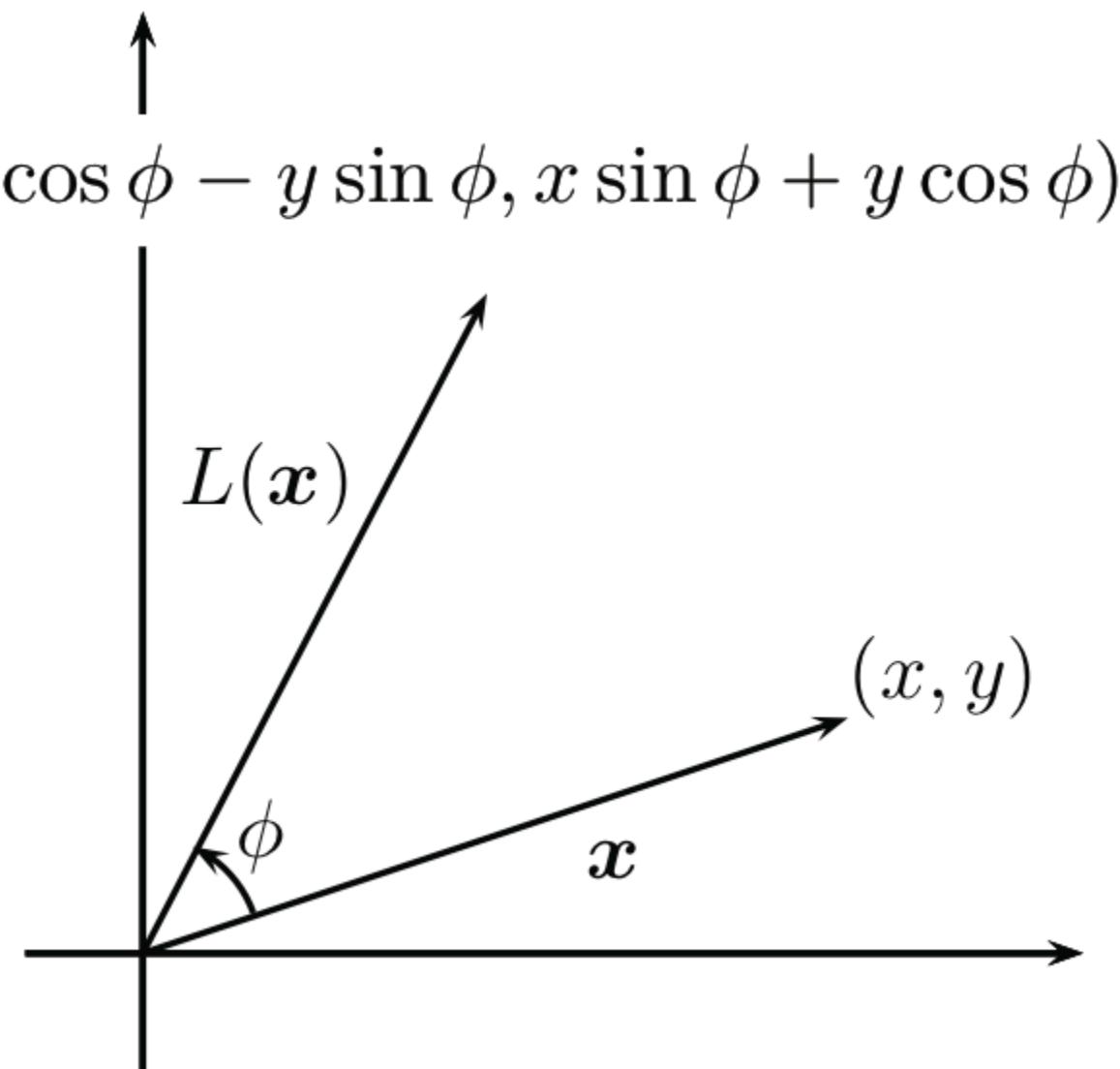
ABBILDUNG EINES PUNKTES



Lässt sich der Ursprung aus der Beobachtung des Verhaltens zwischen dem Punkt P und seiner Abbildung P' ermitteln?

[Link auf GeoGebraTube](#)

DREHUNG



DARSTELLUNG EINER DREHUNG UM DEN PUNKT (0,0) GEGEN DEN UHRZEIGERSINN UM 90°

Diese lin. Abbildung bildet

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch Drehungen sind lineare Abbildungen. Eine Drehung um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) kann wie folgt beschrieben werden:

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x \cos(\phi) - y \sin(\phi), x \sin(\phi) + y \cos(\phi))$$

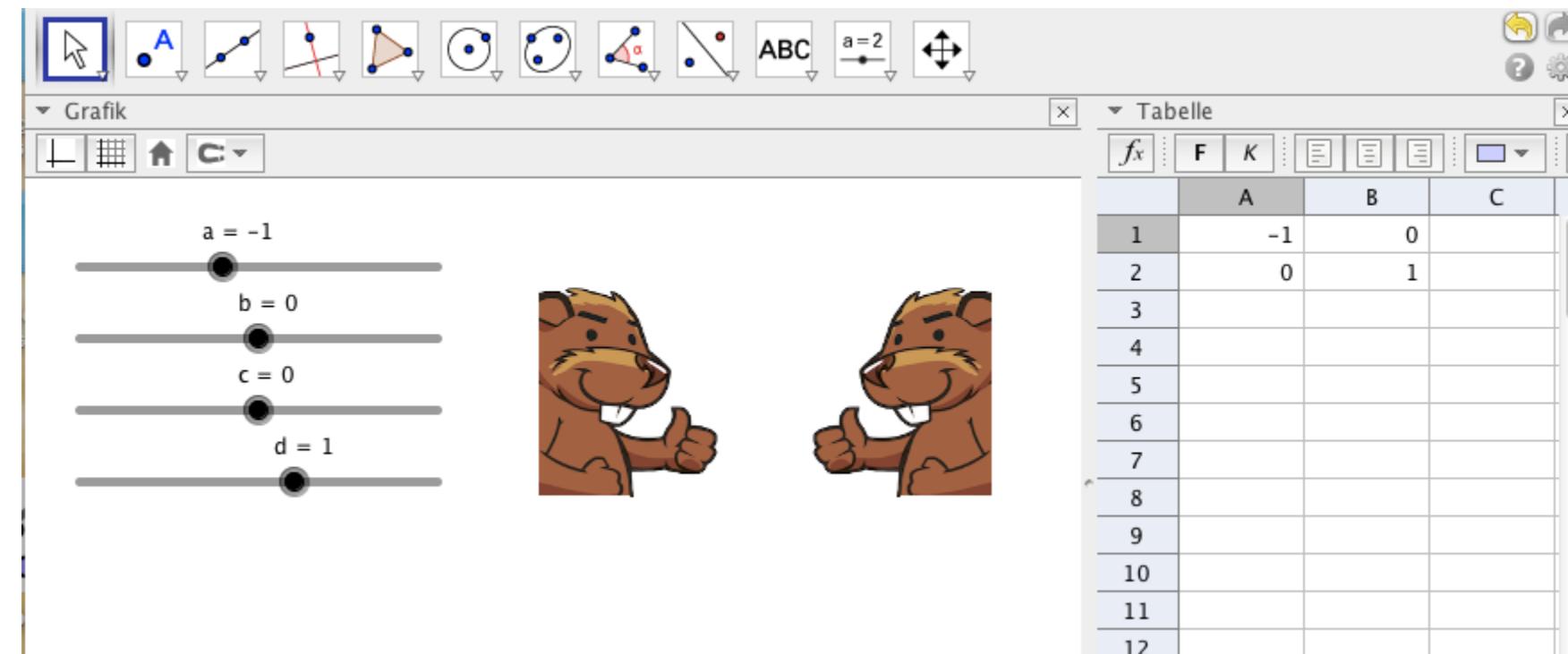
DREHUNG GEGENUHRZEIGERSINN UM EINEN WINKEL ϕ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } e'_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

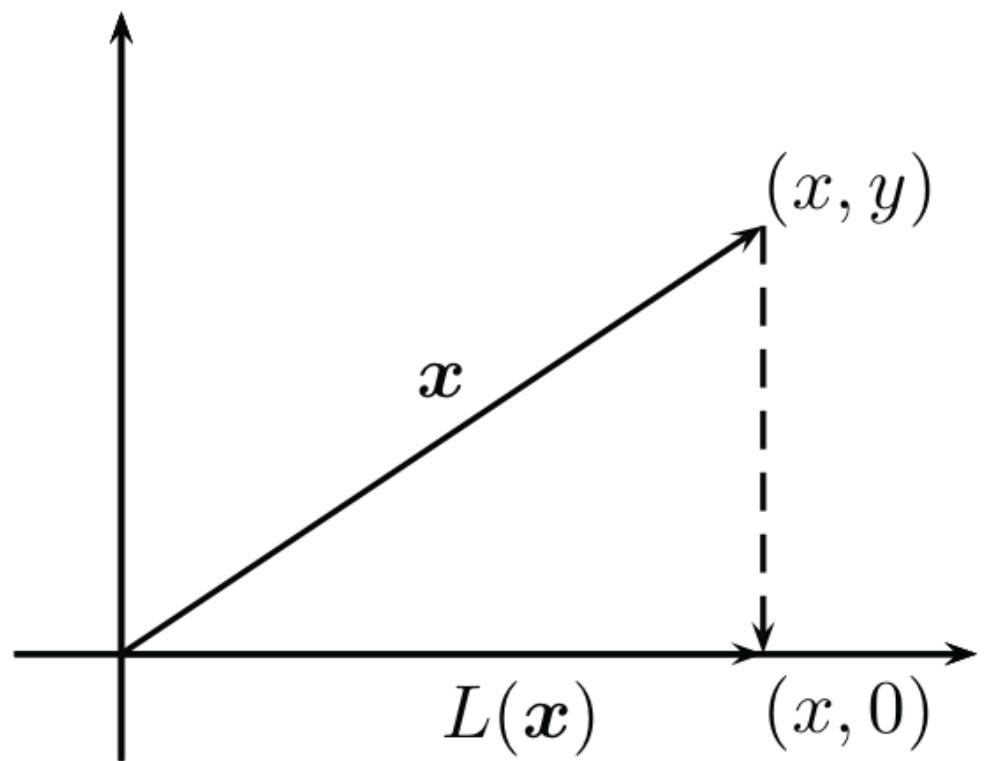
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

RASTERGRAFIK MIT LINEAREN ABBILDUNGEN TRANSFORMIEREN

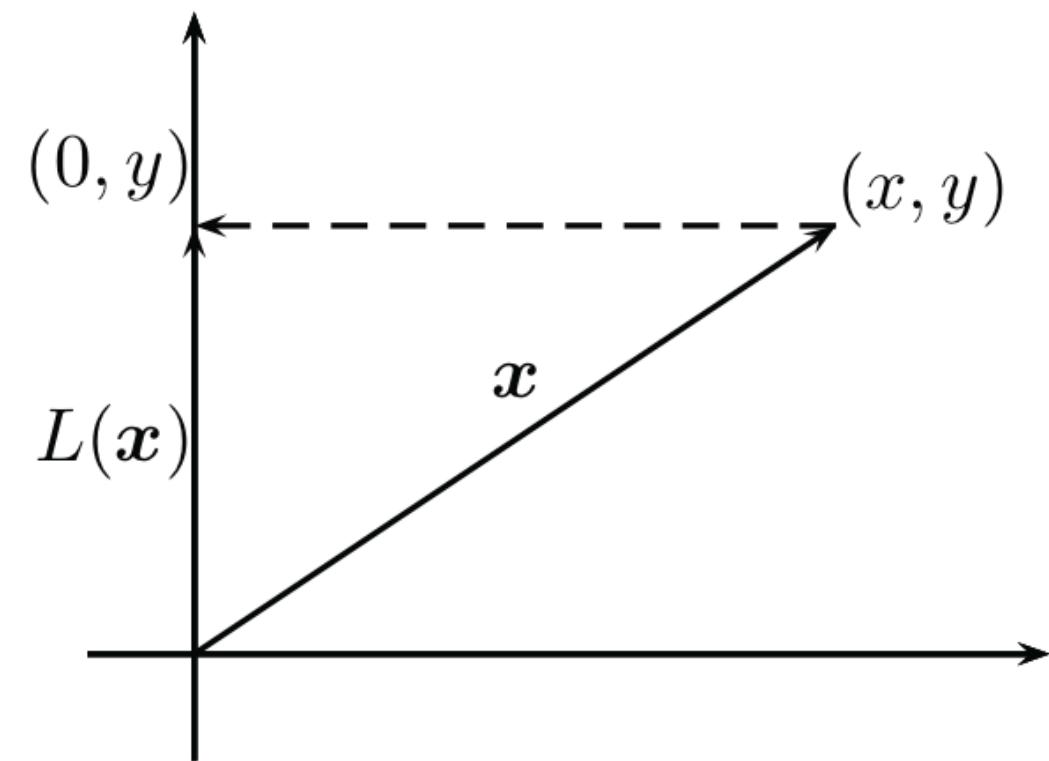


[Link auf GeoGebraTube](#)

PROJEKTION



auf x-Achse



auf y-Achse

Die orthogonale Projektion auf die x-Achse ist auch eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf die y-Achse ist eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

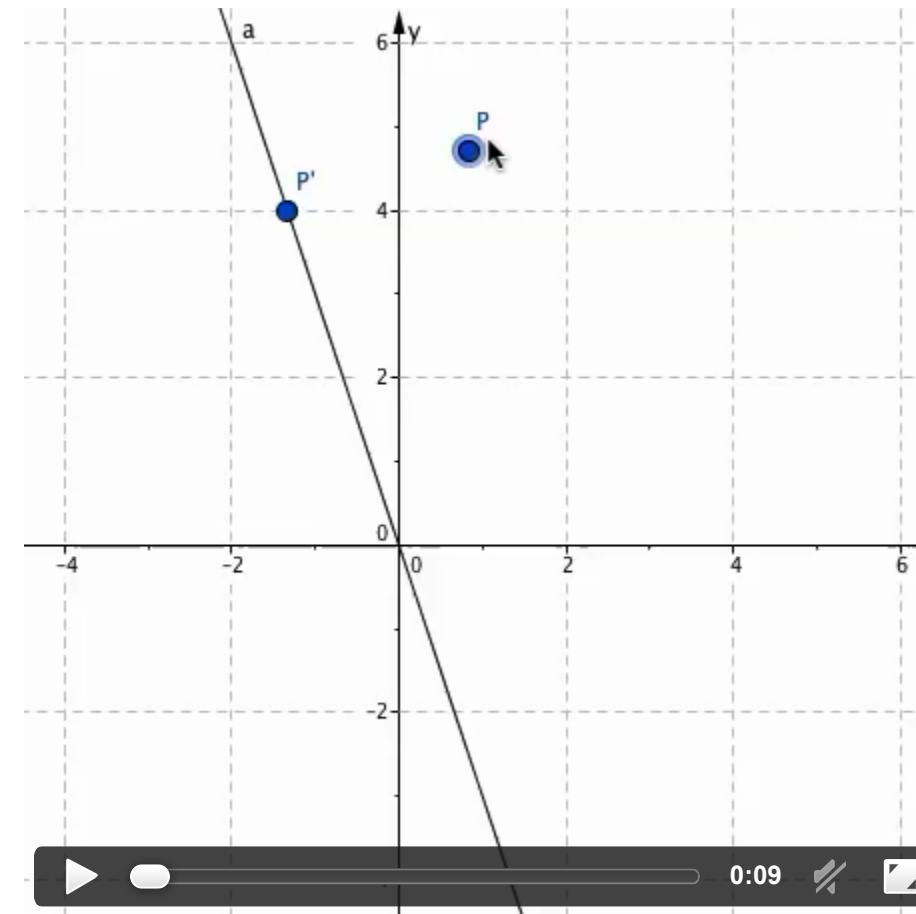
$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PUNKT AUF EINE GERADE A PROJIZIEREN

$$a : y = -3x$$



VORGEHEN

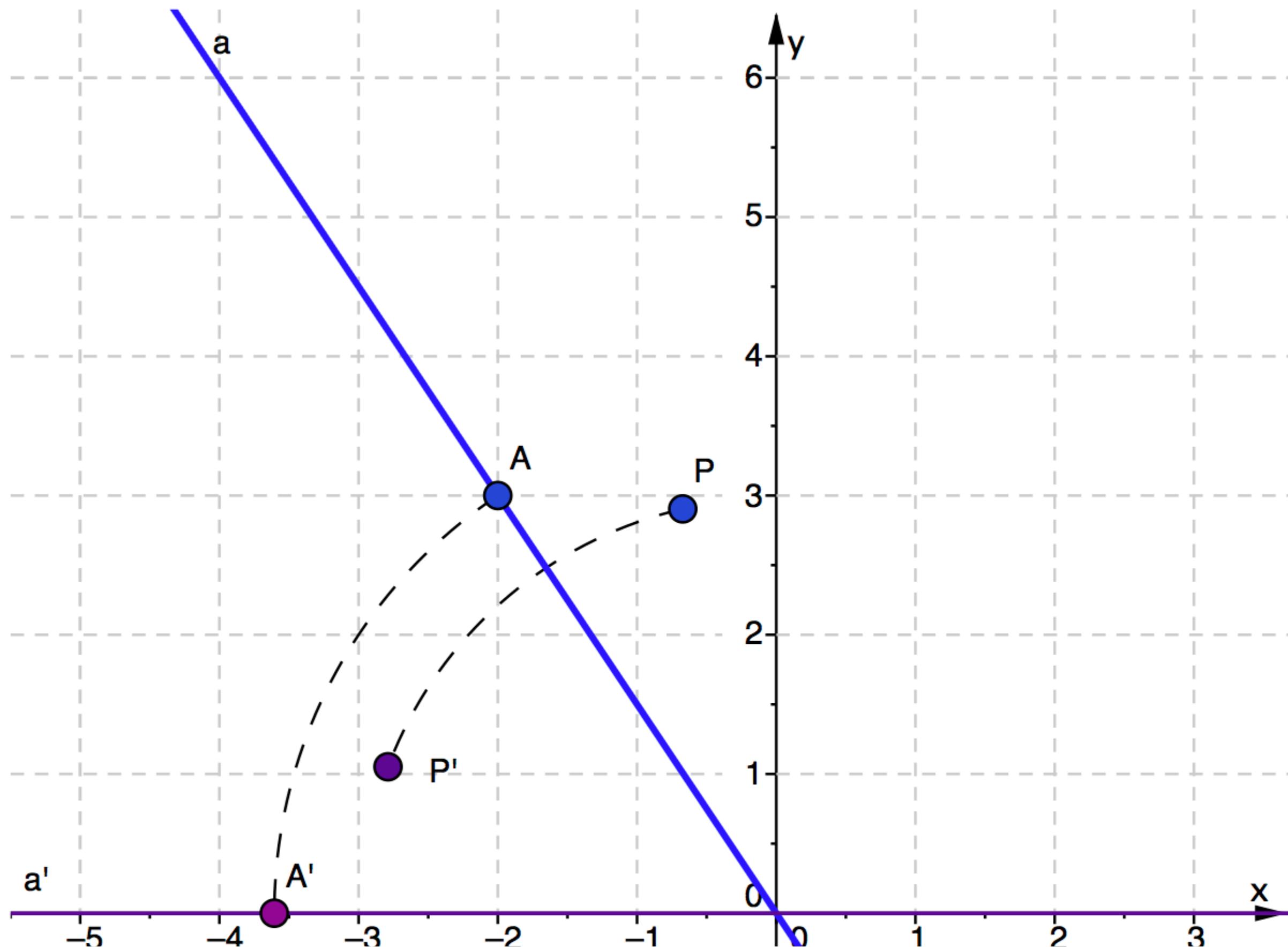
- Gesamte Figur drehen bis die Gerade a auf der x-Achse liegt
- Den Punkt auf die x-Achse projizieren
- den projizierten Punkt wieder zurück drehen.

1. SCHRITT DREHEN UM α

$$\tan(\alpha) = -3 \rightarrow \alpha \approx -71.57^\circ$$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

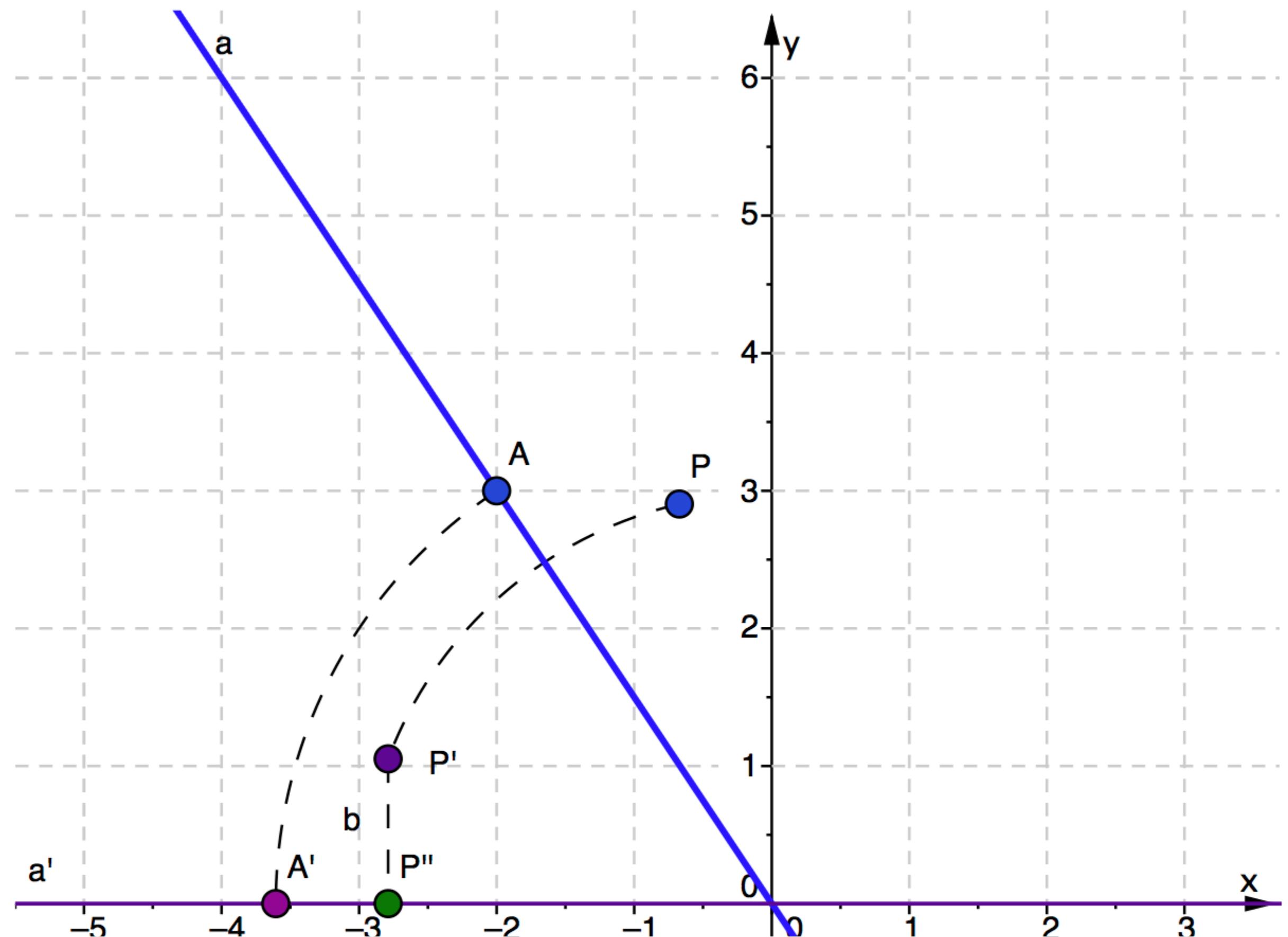
[GeoGebraTube](#)



2. SCHRITT PROJEKTION AUF X-ACHSE

$$P_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[GeoGebraTube](#)

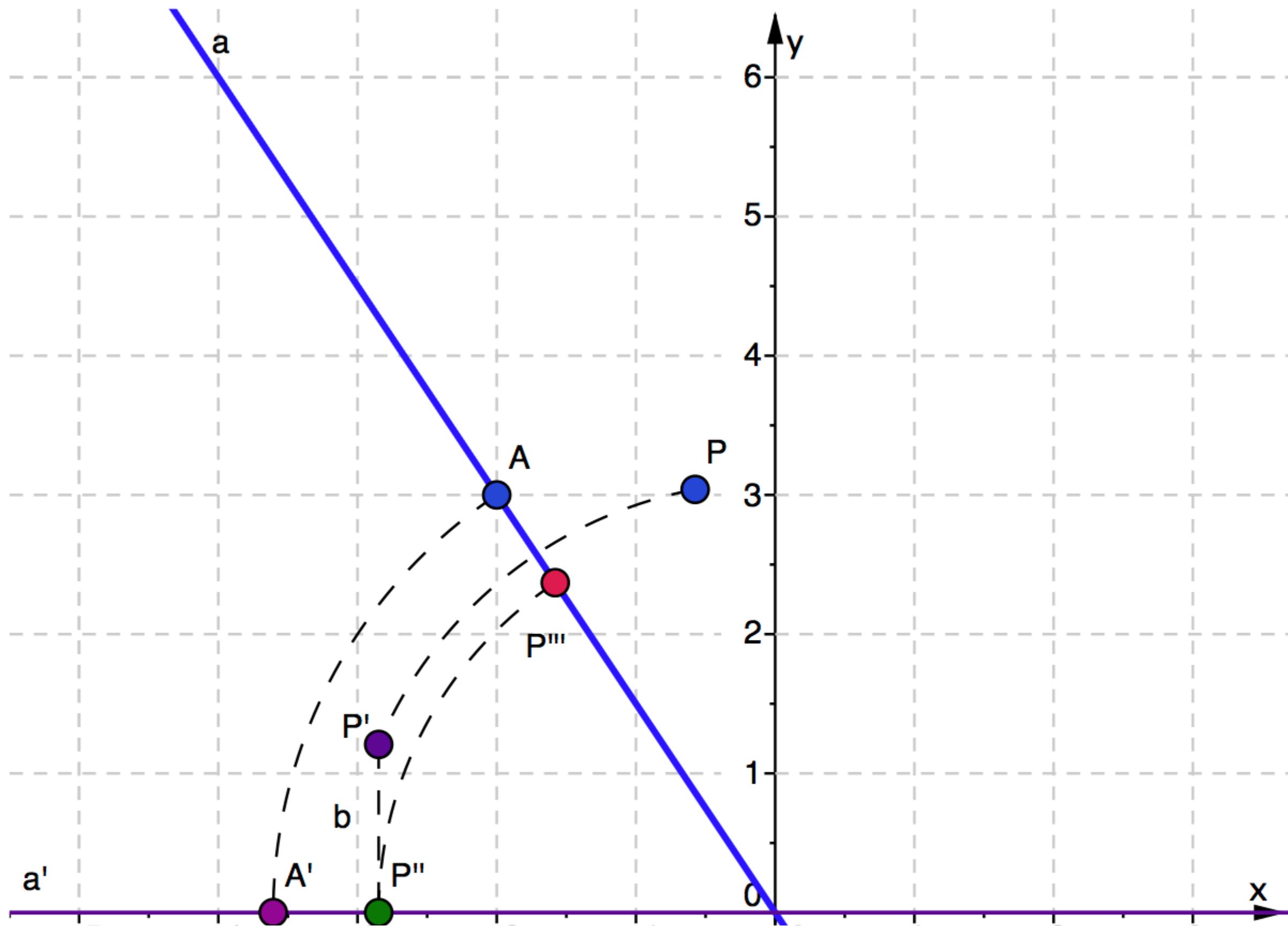


3. SCHRITT RÜCKDREHEN UM α

$$\alpha \approx -71.57^\circ$$

$$R_{-\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[GeoGebraTube](#)



IN EINEM SCHRITT

$$R_{-a} \cdot P_X \cdot R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

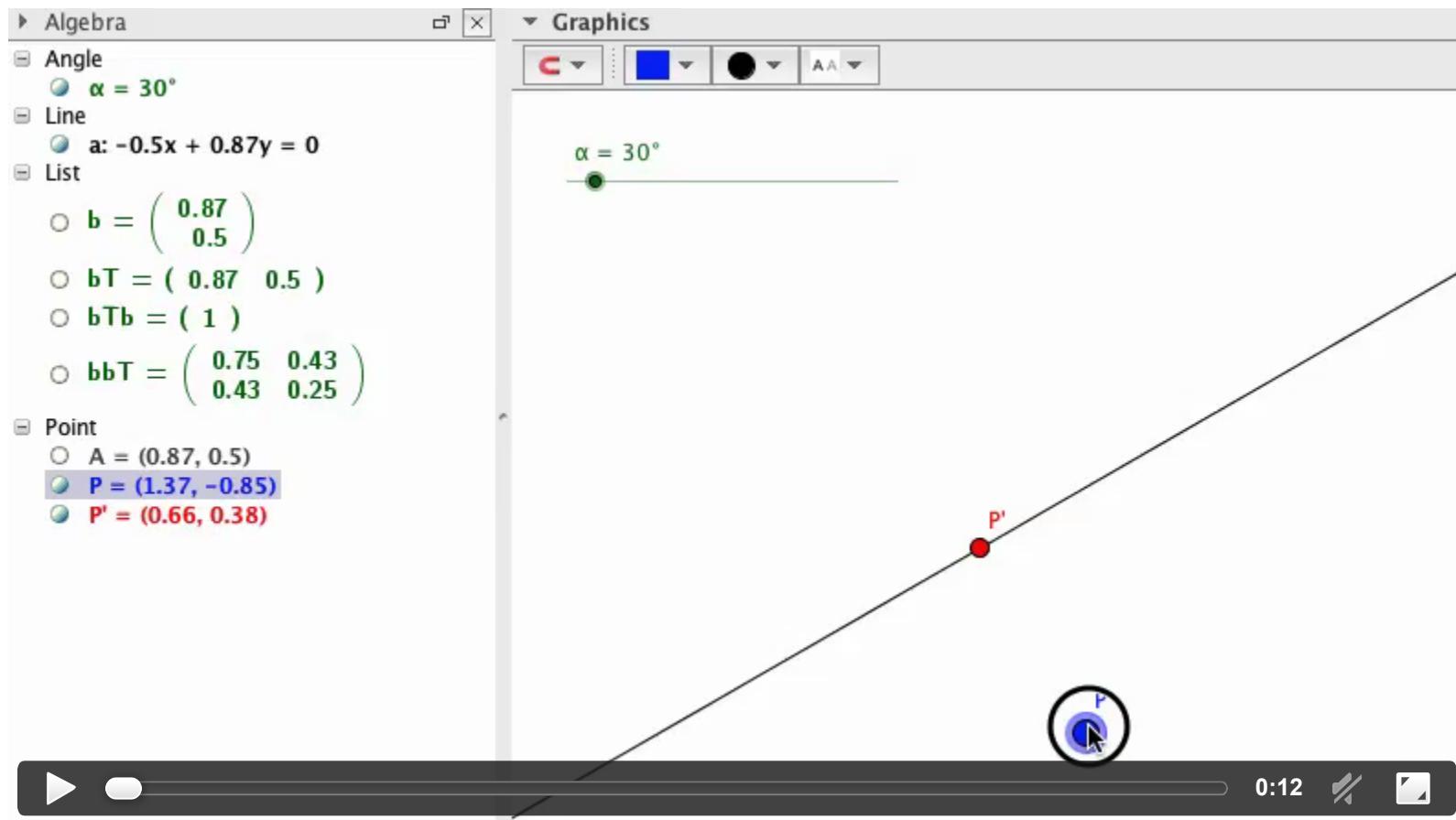
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF UNTERRAUM VERWENDEN

Wähle eine Matrix A so, dass die Spaltenvektoren eine Basis eines Unterraums bilden. (z.B. eine Gerade in \mathbb{R}^2), dann ist die Projektionsmatrix

$$\text{proj}_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$



[Link to GeoGebraTube](#)

EIGENVEKTOREN

AUFGABE

Es sei $A = A^T$

gesucht λ und \vec{x}

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

KLASSISCHE LÖSUNG MIT DETERMINANTE

Aus

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = 0$$

folgt

$$|A - \lambda I| = 0$$

BEISPIEL FÜR

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1$$

<http://tube.geogebra.org/student/m935811>

EIGENWERTE

$$\lambda^2 - 5 \cdot \lambda + 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{5}+5}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

1. EIGENVEKTOR

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{5}+5}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{\sqrt{5}+5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot b; b = b$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. EIGENVEKTOR

$$\begin{pmatrix} 2 - \left(\frac{-\sqrt{5}+5}{2}\right) & 1 \\ 1 & 3 - \left(\frac{-\sqrt{5}+5}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cdot b; b = b$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

EIGENVEKTOREN FÜR GROSSE MATRIZEN

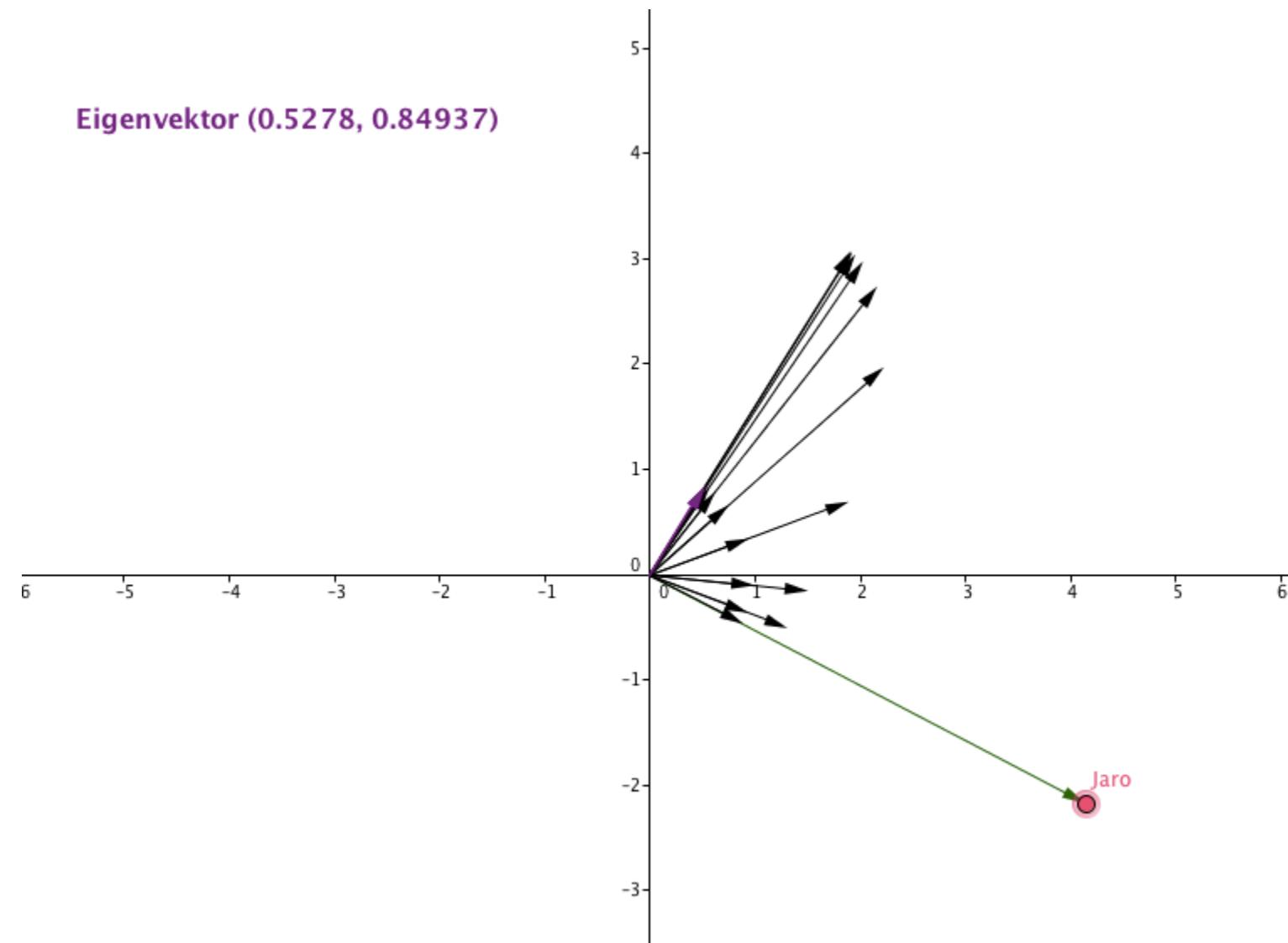
- Bei quadratischen Matrizen der Grösse $N = \dim(M)$ müssen die Nullstellen eines Polynoms mit dem Grad N bestimmt werden.
- Daraus erhält man die Eigenwerte
- Für die Eigenvektoren muss jeweils ein lineares Gleichungssystem mit N Gleichungen und N Unbekannten gelöst werden.

ITERATIVES VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DES EIGENVEKTORS ZUM DEM GRÖSSTEN EIGENWERT.

POTENZ-METHODE (RICHARD VON MISES)

1. Wähle $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|v_0| = 1$
2. Setze $k = 0$
3. $w_{k+1} := Av_k$
4. $v_{k+1} := \frac{w_{k+1}}{|w_{k+1}|}$
5. $\lambda_{k+1} := (v_{k+1})^T A v_{k+1}$
6. $k \leftarrow k + 1$
7. weiter zu 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

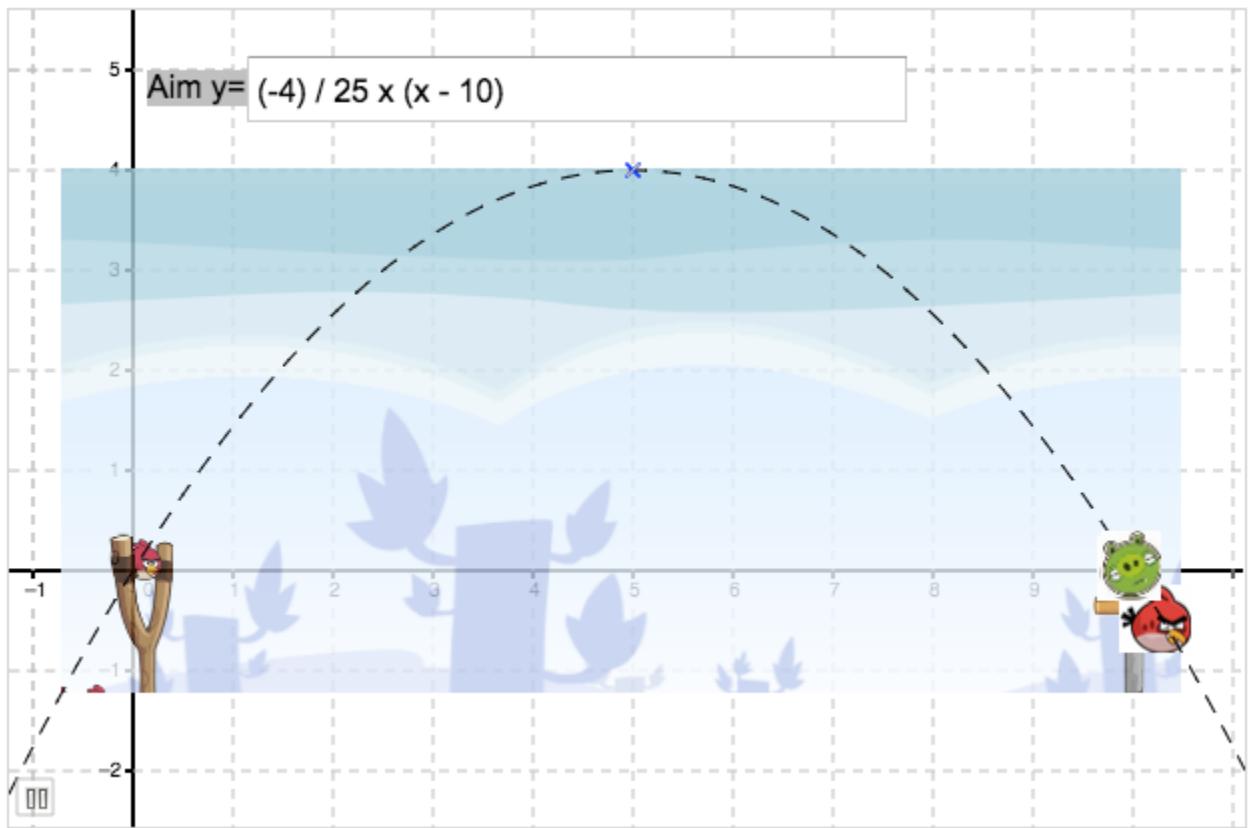


<http://tube.geogebra.org/material/show/id/936691>

ANGRY BIRDS MATHE

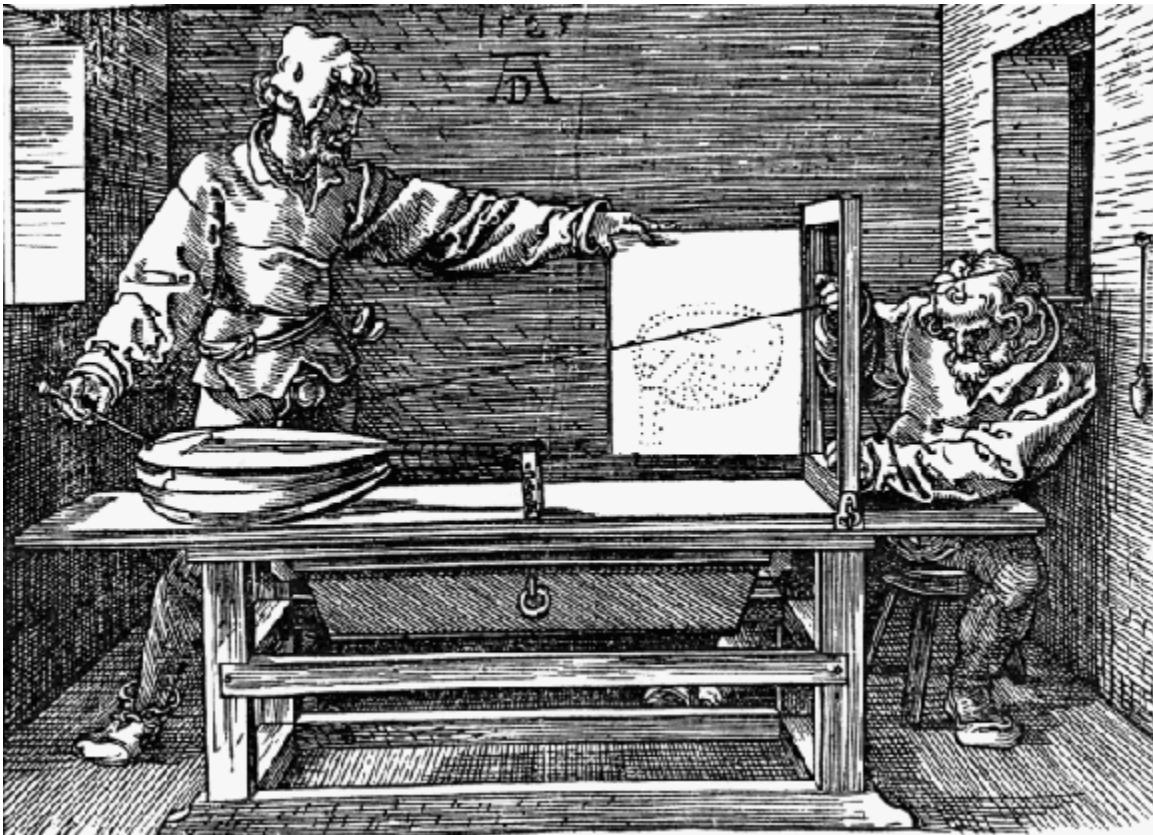


[Link auf Webseite](#)



[Link auf Webseite](#)

ZENTRALPROJEKTION
&
PARALLAXEFFEKTE



Link Mechanical creation of a perspective image by Albrecht Dürer

KONVENTIONEN

- Annahme das Zentrum der Abbildung ist im Ursprung
- Blickrichtung entlang der Z-Achse
- Verwenden homogene Koordinaten

ZENTRALPROJEKTION AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE

mit Brennweite f

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF HOMOGENEN VEKTOR ANWENDEN

$$P \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

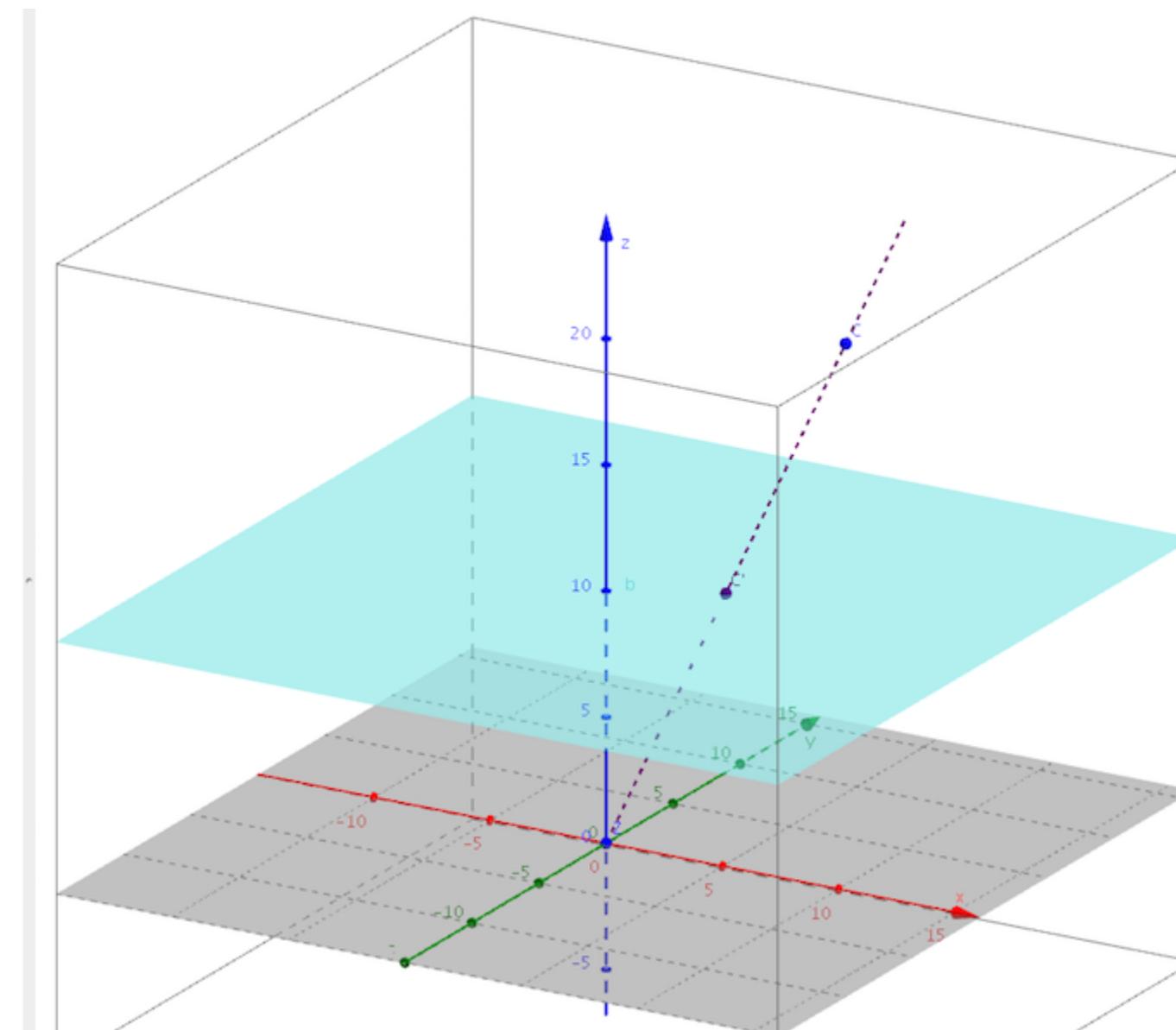
ÜBERGANG HOMOGENEN KOORDINATEN ZU KARTESISCHEN KOORDINATEN

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\z/f\end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix}f/z\cdot x\\f/z\cdot y\\f/z\cdot z\end{pmatrix}$$

ZAHLENBEISPIEL

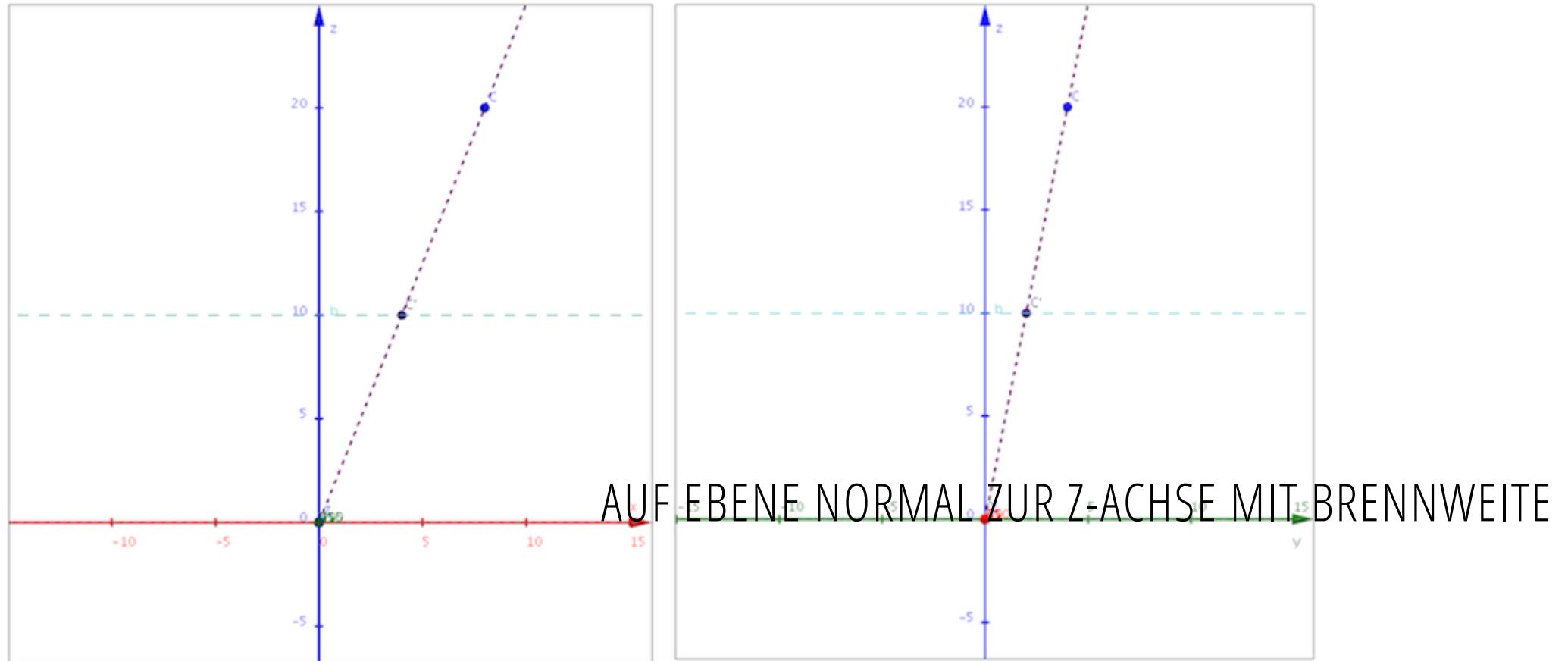
- Sei $f = 10$
- Ein Punkt $(8,4,20)$ soll auf die Normalebene zur Z-Achse im Abstand von 10 abgebildet werden.

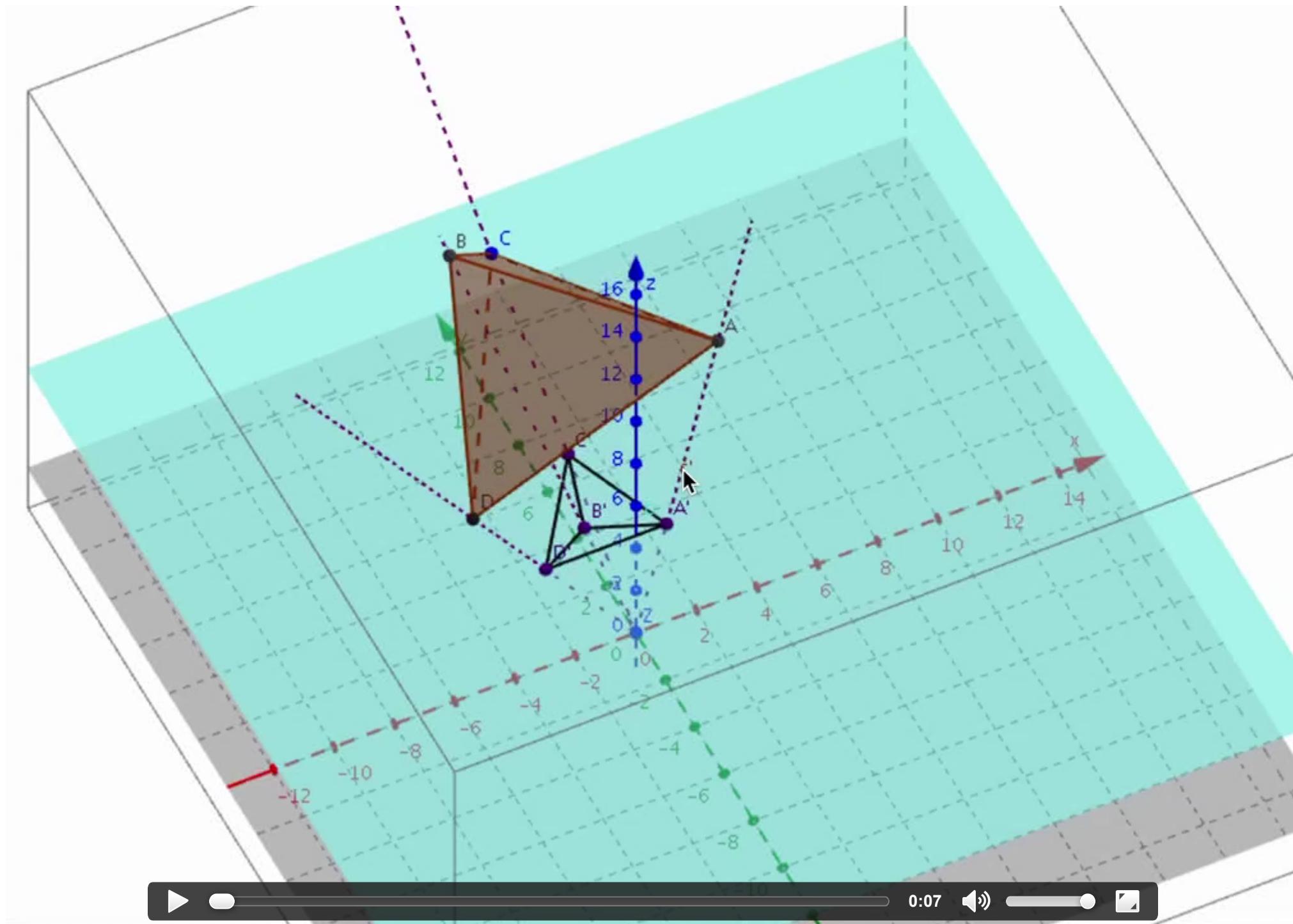
- ⊖ List
 - $\text{CH} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - $\text{CH}' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - $\text{PM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$
- ⊖ Number
 - $f = 10$
- ⊕ Plane3D
- ⊖ Point3D
 - $C = (8, 4, 20)$
 - $C' = (4, 2, 10)$
 - $Z = (0, 0, 0)$
- ⊖ Ray3D
 - $s1: X = (0, 0, 0) + \lambda (8, 4, 20)$



$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION





HOMOGENE KOORDINATEN FÜR $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Transformation

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x / (Q_z) \\ Q_y / (Q_z) \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

HOMOGENE KOORDINATEN

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

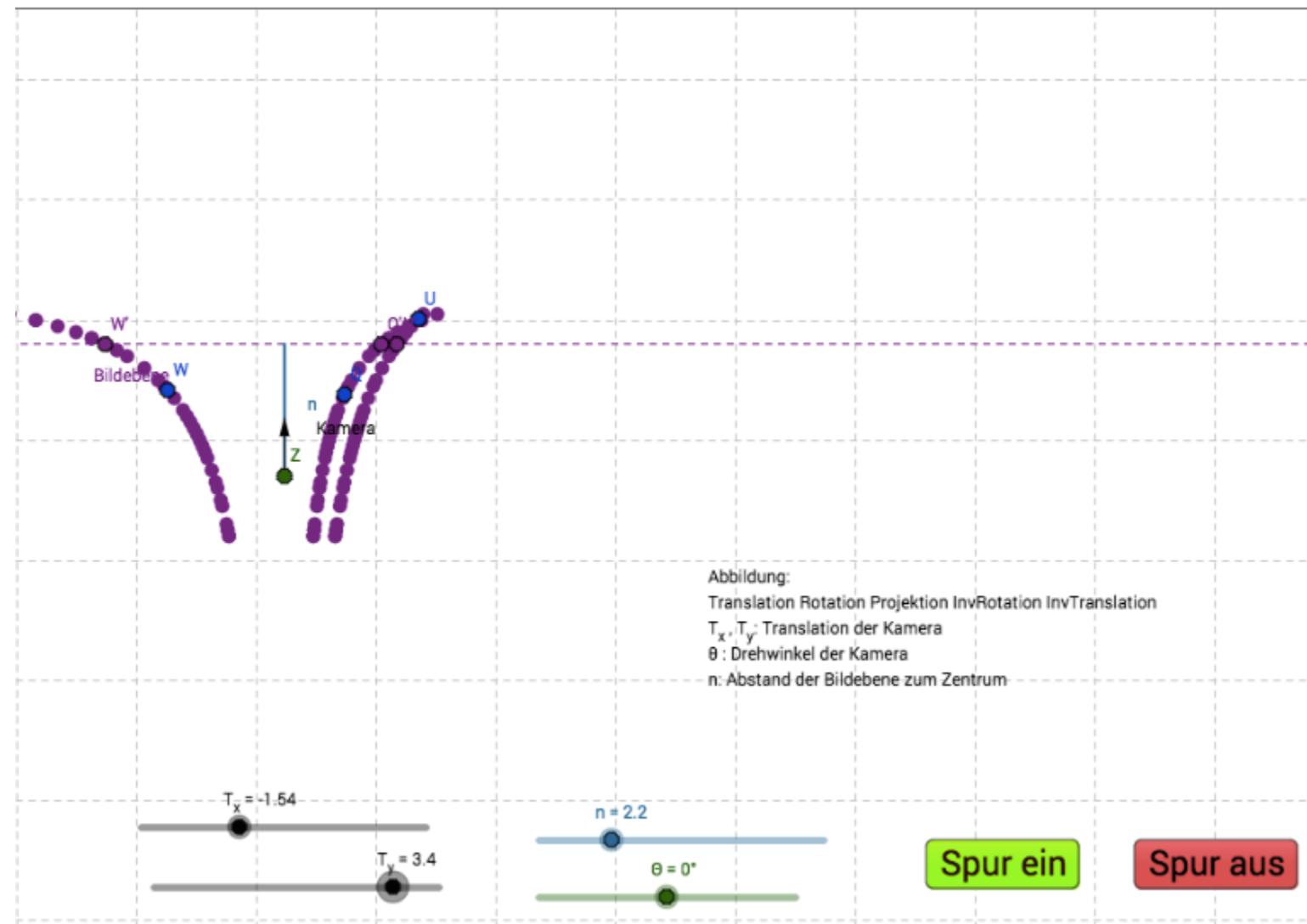
ROTATION

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSLATION

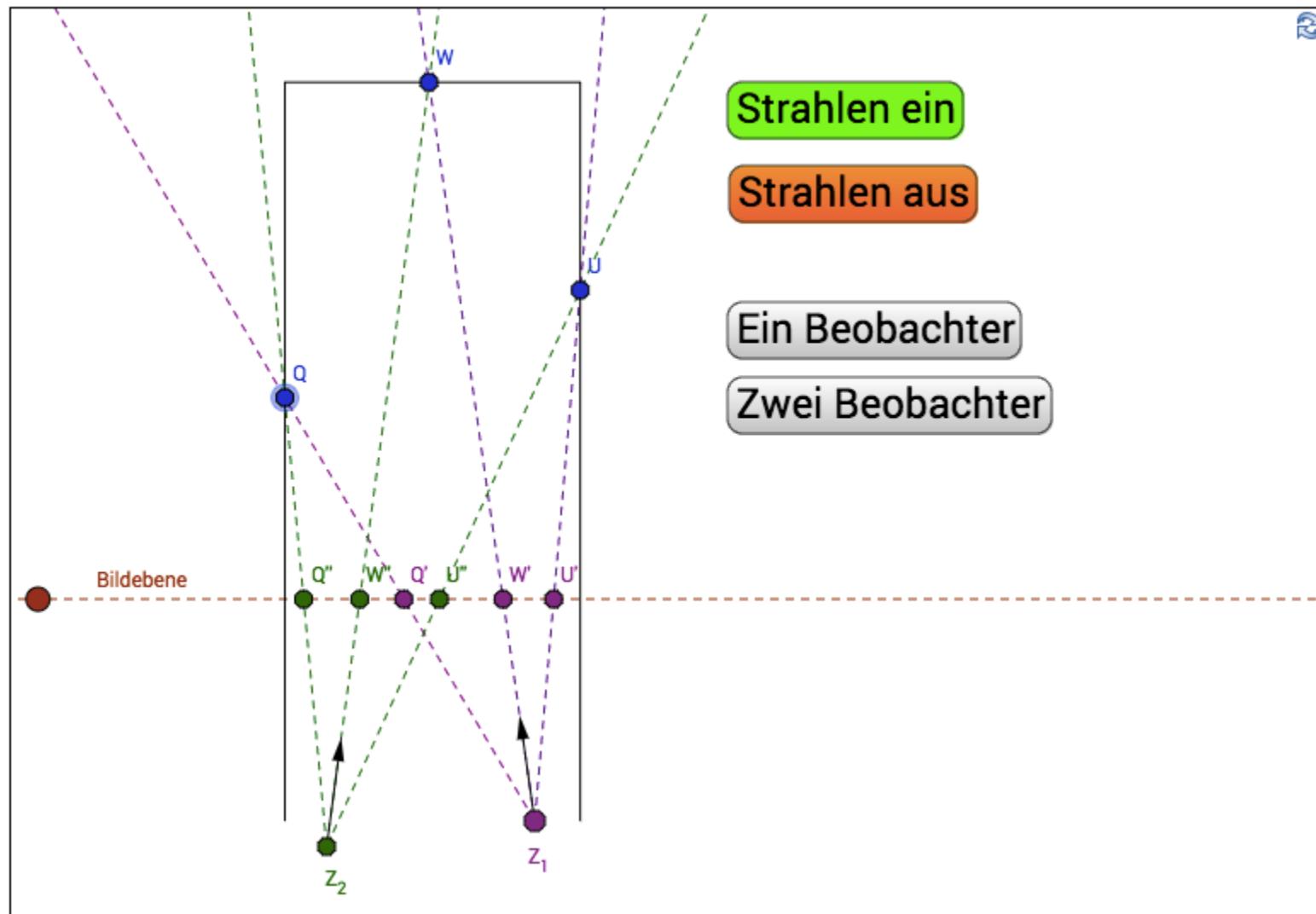
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION



[Link auf GeoGebraTube](#)

ZENTRALPROJEKTION IM KINO

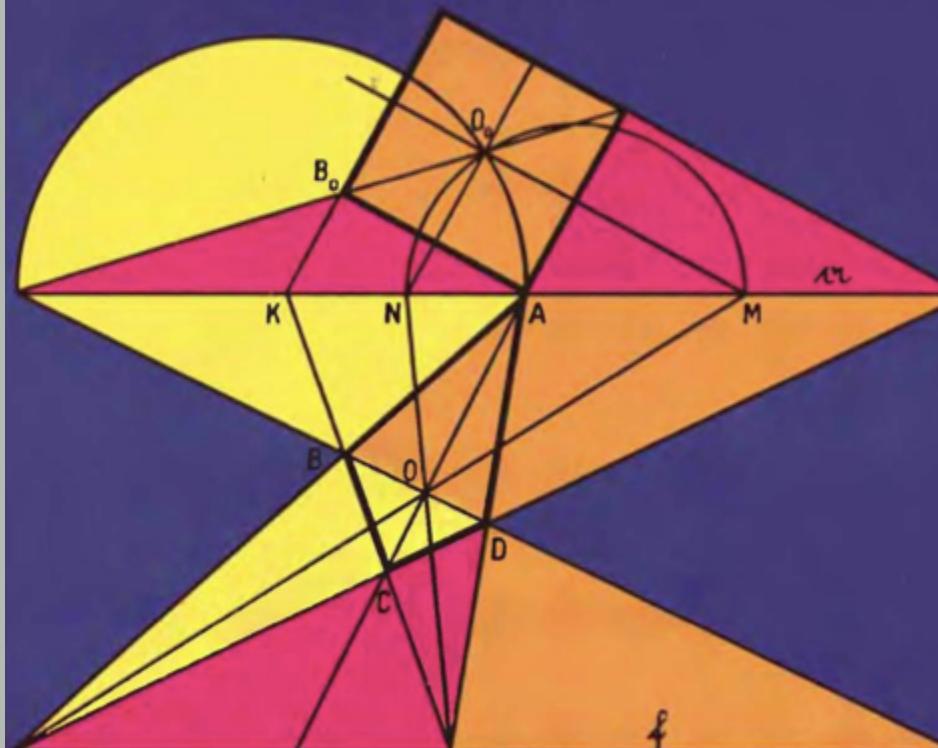


[Link GeoGebraTube](#)

FERMAT-PUNKT

100
Great Problems of
Elementary Mathematics
THEIR HISTORY AND SOLUTION

Heinrich Dörrie
Translated by David Antin



91

Fermat's Problem for Torricelli

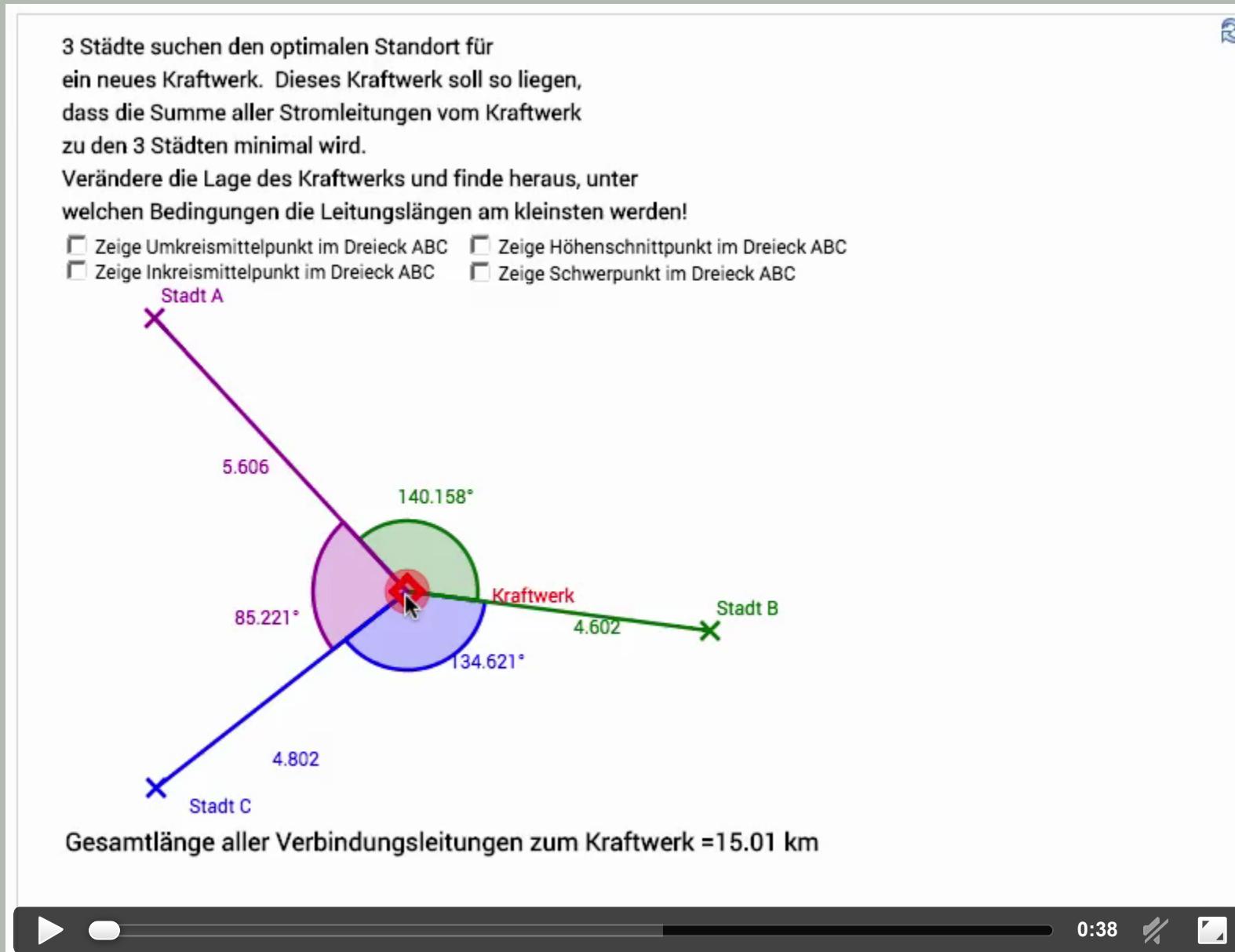
To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

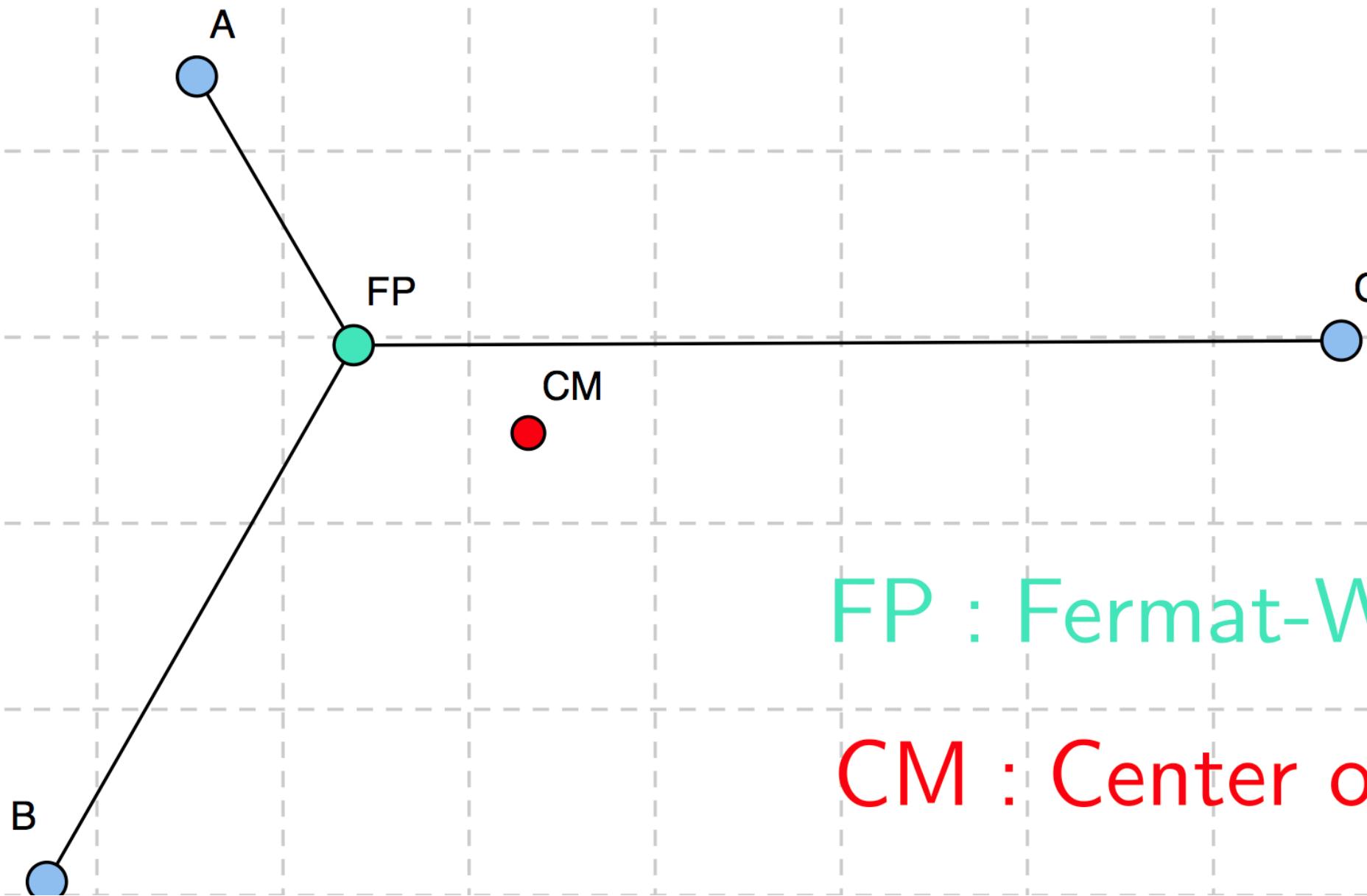
[Dorrie, H. \(1965\). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.](#)

OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS



Link zu GeoGebraTube: [Der Neubau des Kraftwerks](#) von [Ulrich Steinmetz](#)

$$\text{minimize}_{x,y} \quad f(x, y) = \sum_{i=1..n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

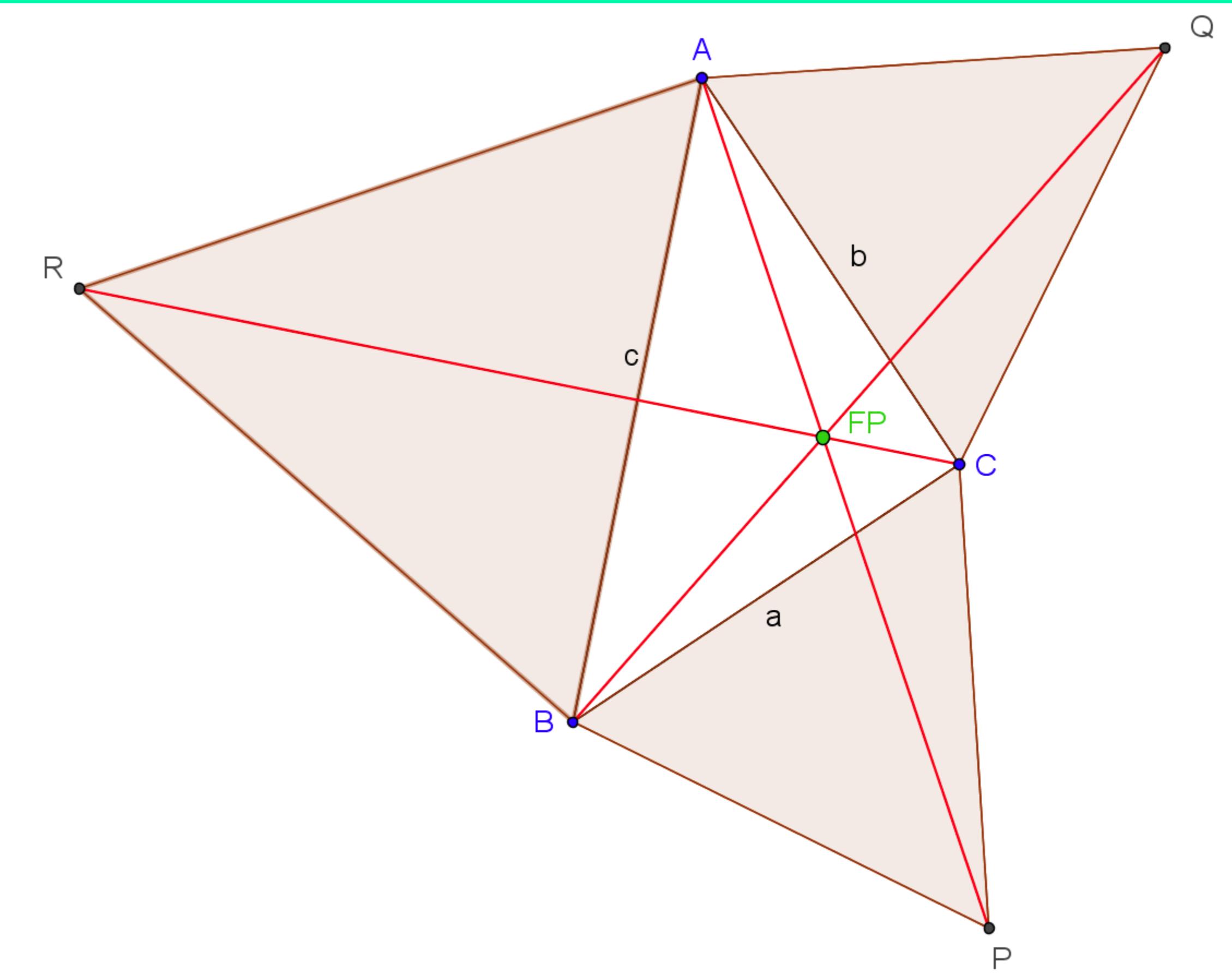


FP : Fermat-Weber Point

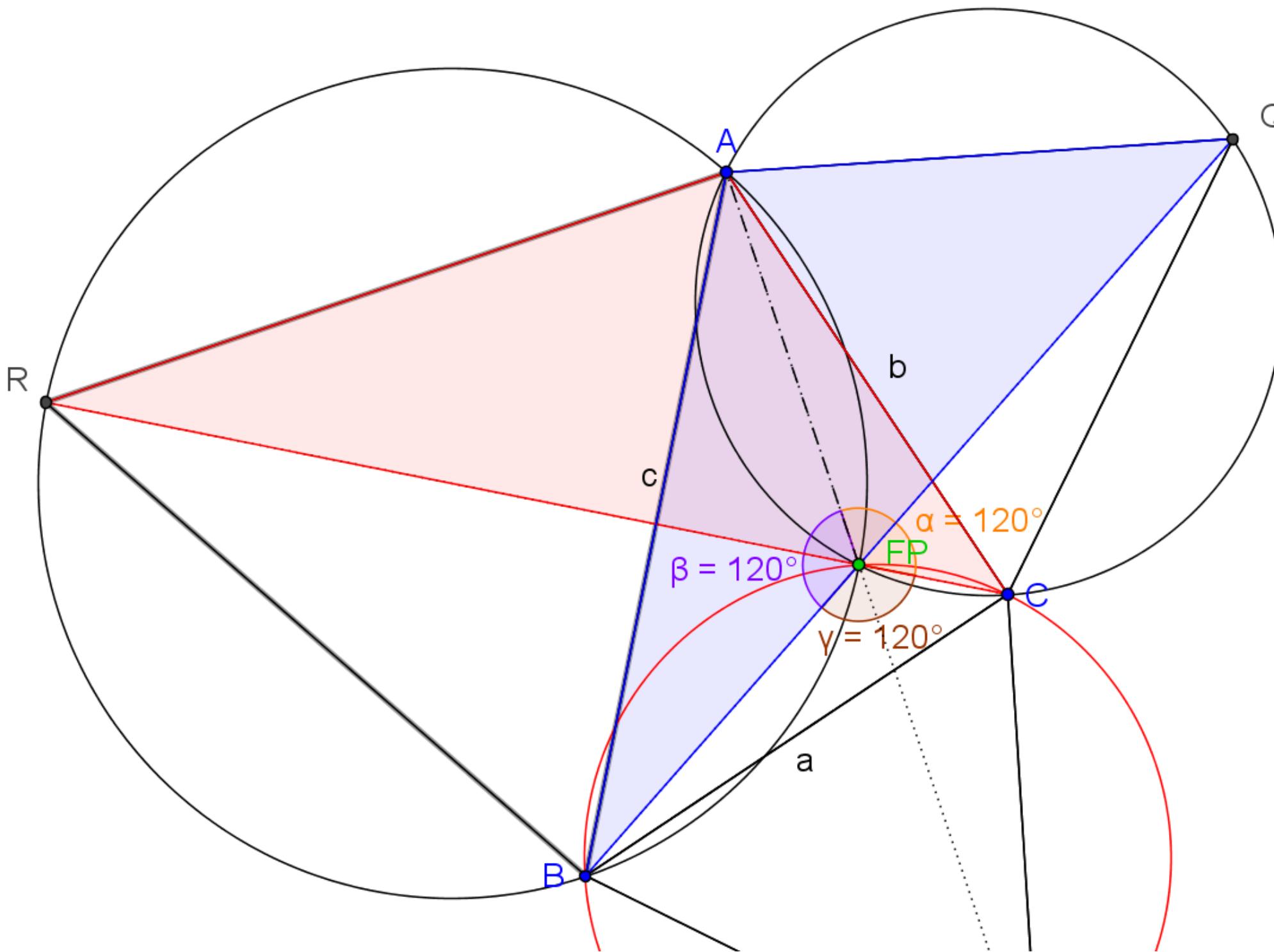
CM : Center of mass

EXAKTE LÖSUNG

FÜR N = 3



GEOMETRISCHER BEWEIS



WER HAT ALS ERSTES EIN NUMERISCHES
LÖSUNGSVERFAHREN FÜR **N>3** GEFUNDEN?

FACILITY LOCATION PROBLEMS EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinski** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

M. L. Balinski. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.



I was sixteen when I became intrigued with the N point problem

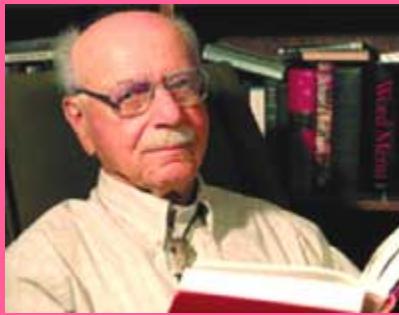
Andrew Vázsonyi, 1932

Consider N points and one more point, X . Measure the distances between X and the given points, then add the distances. Find point X so that this sum is the smallest possible.

Andrew Vázsonyi

WEISZFELD

ALGORITHMUS



by Endre Weiszfeld, alias Andrew Vázsonyi (1916–2003), born in Budapest

WEISZFELD ALGORITHMUS

k Iterationsschritte

Ortsvektoren: $\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_N$

Startpunkt \vec{y}_0 im Schwerpunkt

$$\vec{y}_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\vec{x}_i}{\|\vec{x}_i - \vec{y}_k\|}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\vec{x}_i - \vec{y}_k\|}}$$

H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443–451, ISSN 0898-1221

WEISZFELD ALGORITHMUS

Algorithm 3.2 Fermatpunkt(Punkte,epsilon)

```
1: P = schwerpunkt(Punkte)
2: while True do
3:   Q = Iterationsschritt(P, Punkte)
4:   if distanz(P,Q)≤epsilon then
5:     return Q
6:   end if
7:   P = Q
8: end while
```

ITERATIONSSCHRITT

Algorithm 3.1 Iterationsschritt(P , Punkte)

```
1:  $W = x = y = 0.0$ 
2: for  $Q$  in Punkte do
3:    $d = \text{distanz}(P, Q)$ 
4:    $\text{tmp} = 1.0 / d$ 
5:    $W = W + \text{tmp}$ 
6:    $x = x + Q[0] * \text{tmp}$ 
7:    $y = y + Q[1] * \text{tmp}$ 
8: end for
9: return  $x/W, y/W$ 
```

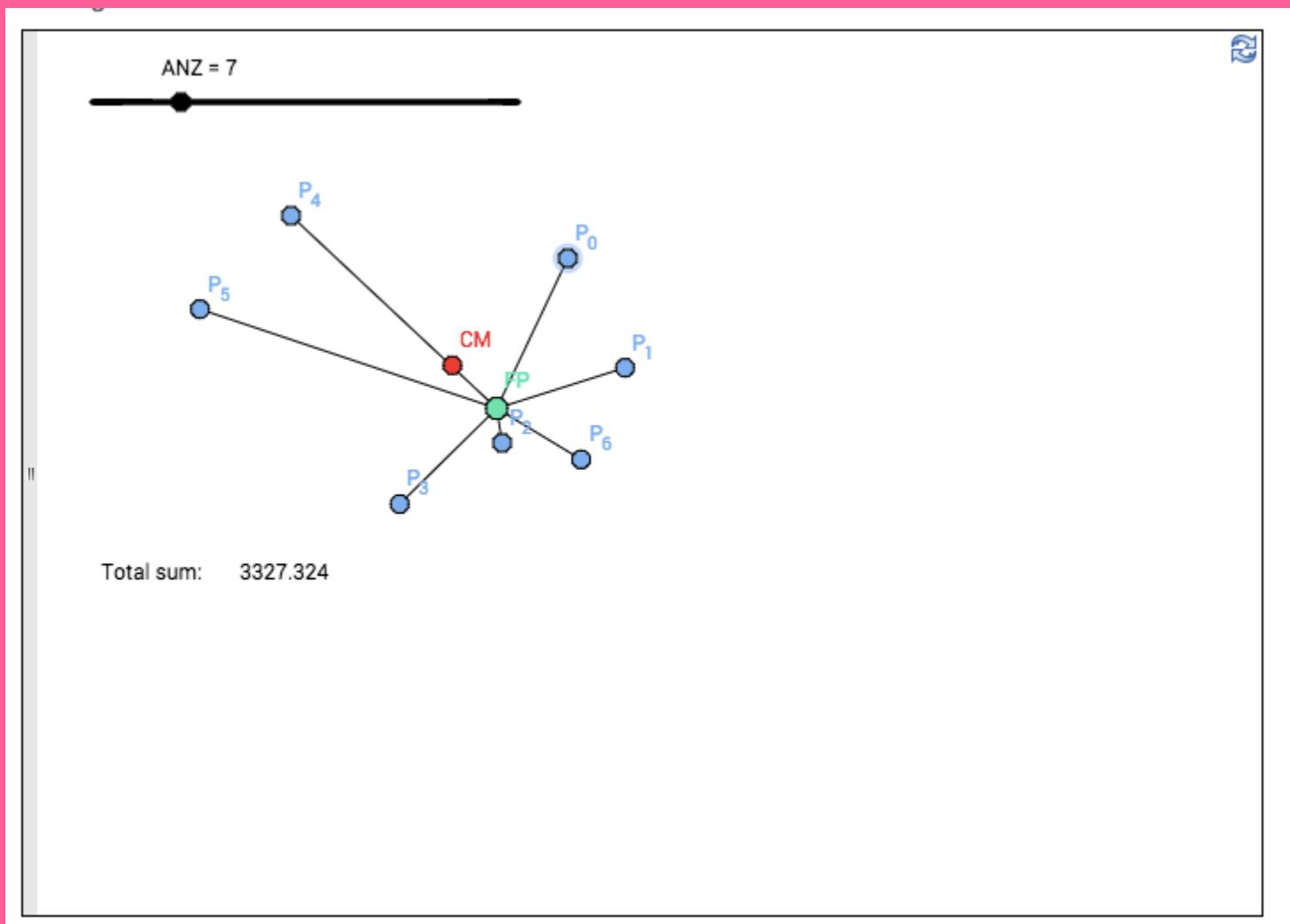
WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (I)

```
geometric_median = function(epsilon) {  
    var P,Q;  
    P={};  
    P.x=gb.getXcoord("CM");  
    P.y=gb.getYcoord("CM");  
  
    while (true){  
        Q = median_approx(P);  
        if (eukl_distance(P, Q) < epsilon){  
            return Q;  
        }  
        P = Q;  
    }  
};
```

WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (II)

```
median_approx = function(P) {  
    var W,x,y,d,w,_len,_i,Q;  
    W=x=y=0.0;  
    Q={};  
    _len=xl.length  
    for (_i = 0; _i < _len; _i++) {  
        Q.x = xl[_i];  
        Q.y = yl[_i];  
        d=eukl_distance(Q,P);  
        if (d != 0){  
            w =1.0/d;  
            W+= w;  
            x+=Q.x*w;  
            y+=Q.y*w;  
        }  
    }  
    Q.x = x/W;  
    Q.y = y/W;  
    return Q;  
};
```

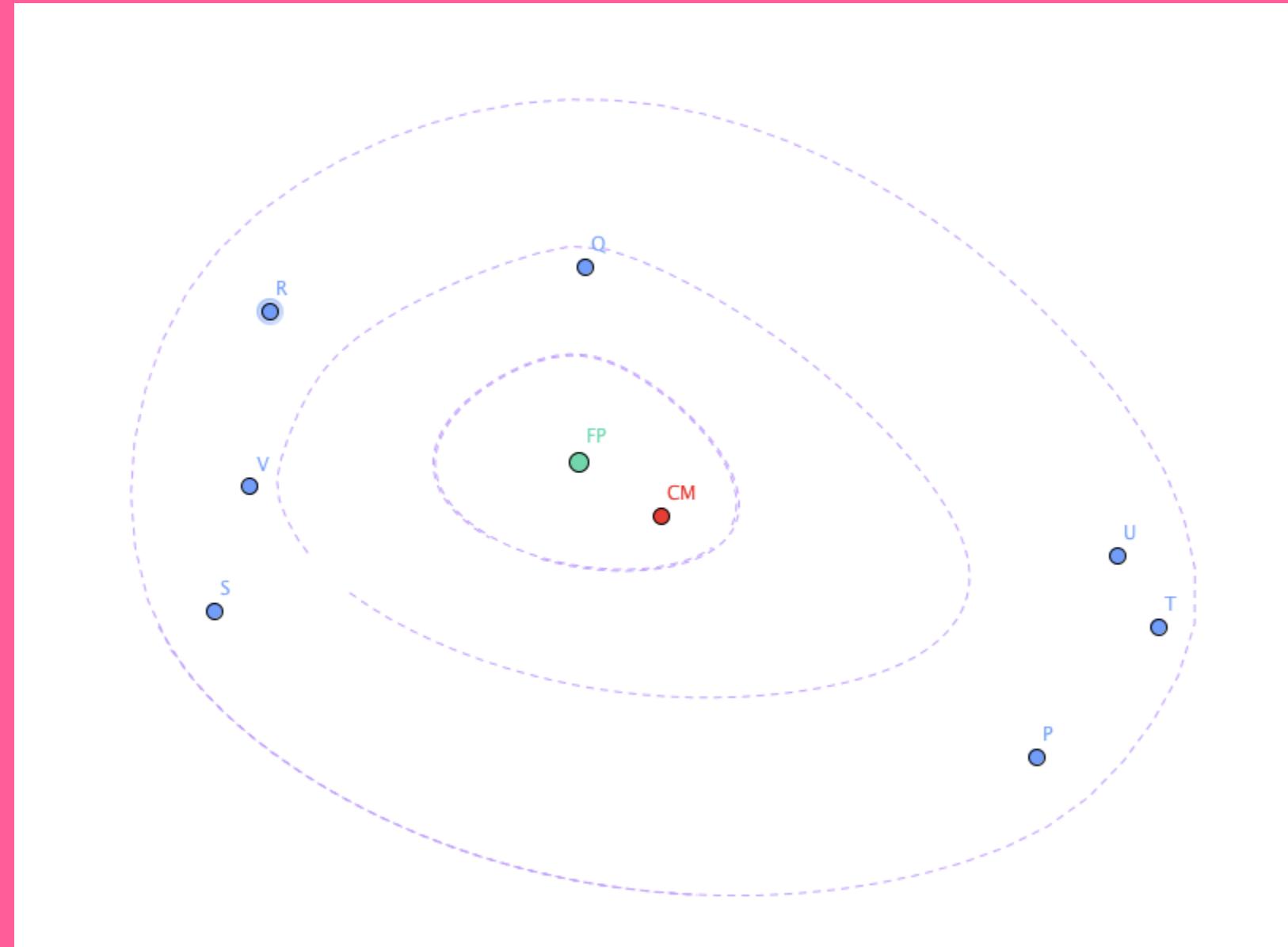
Fermat-Punkt für n>3



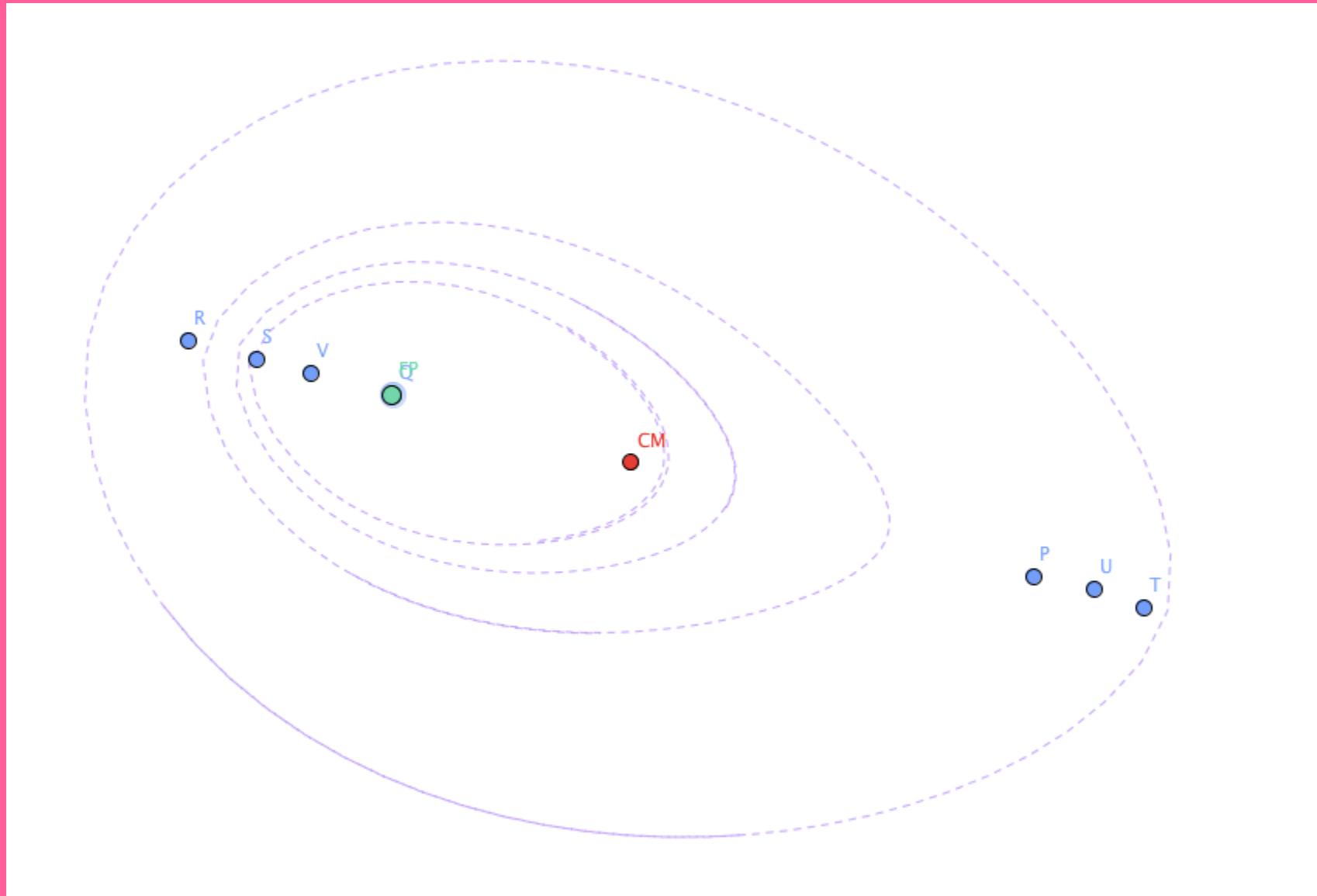
[Link GeoGebraTube](#)

POTENZIALE UND ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN

[Link GeoGebraTube](#)

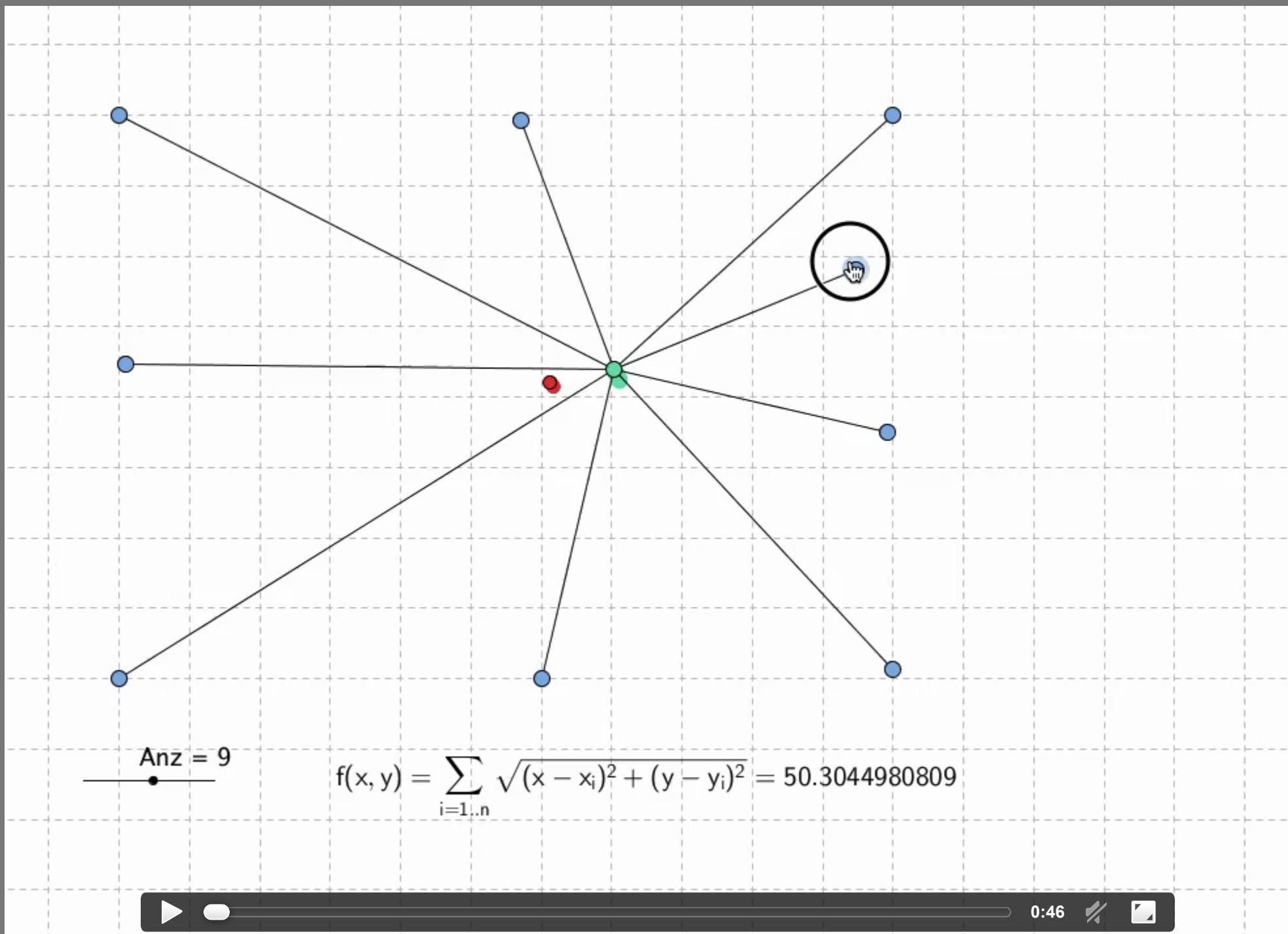


IM EIN DIMENSIONALEN FALL SPRINGT DER FERMAT-PUNKT AUF DEN MEDIAN

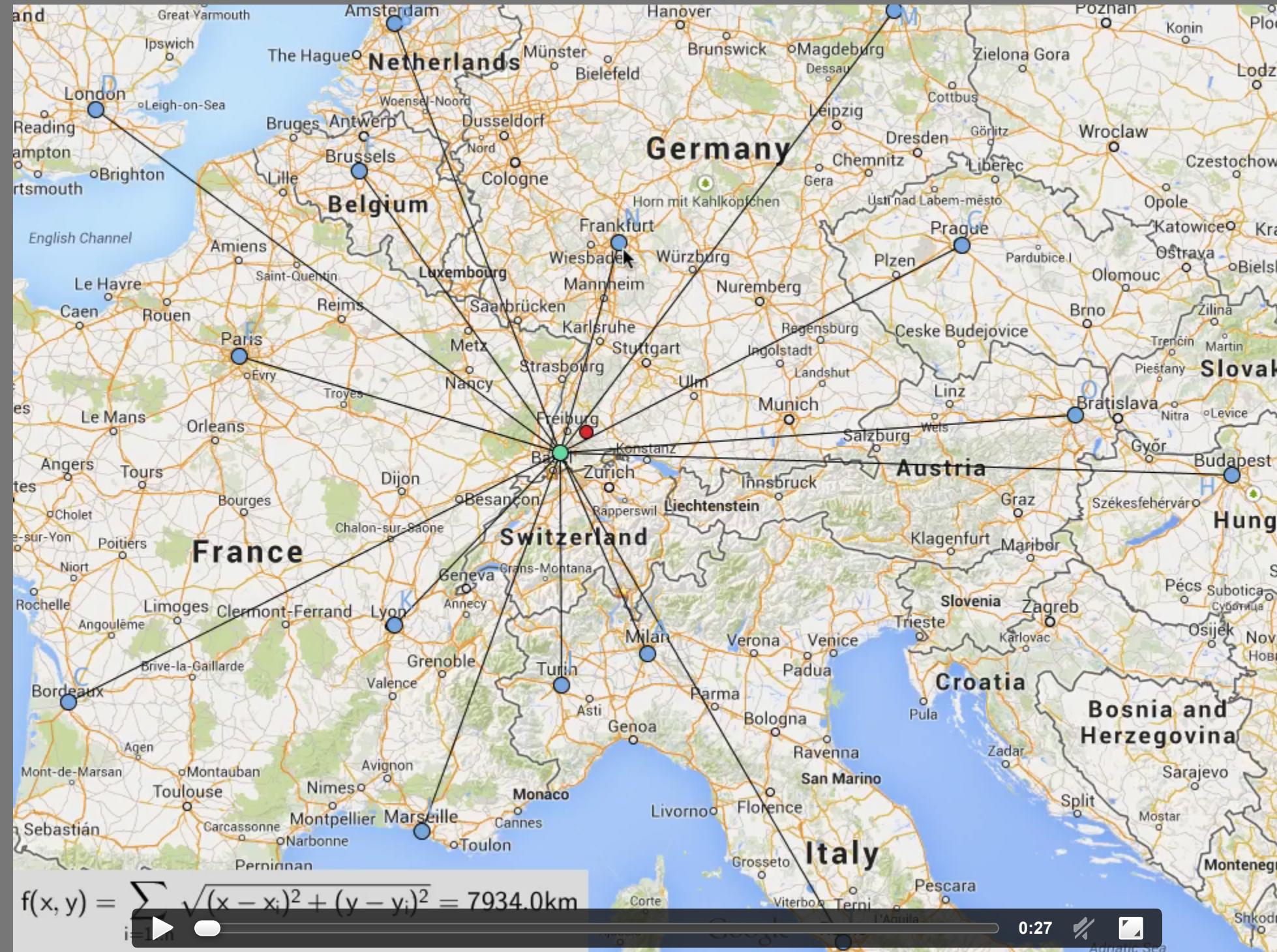


NUMERISCHE EXPERIMENTE

FP BEWEGT SICH AUF EINEM ORBIT



WO BEFINDET SICH DER MITTELPUNKT VON EUROPA ?



Link GeoGebraTube