FORTBILDUNG GEOGEBRA

1. APRIL 2015 WIRTSCHAFTSGYMNASIUM

TORSTEN LINNEMANN & MARTIN GUGGISBERG

UNSERE MOTIVATION

- Freude an:
  - Interaktiver Mathematik
  - Explorativen Zugängen
  - Visualisierungen

BEFÜRCHTUNGEN EINES KOLLEGEN

Trainieren sie (SuS) das Darstellungsvermögen nicht besser, in dem sie versuchen, im eigenen Kopf die verschiedenen Objekte sich vorzustellen? LP aus BL

ZIELE DIESER FORTBILDUNG

- Einführung in Funktionsumfang von GeoGebra
- Auseinandersetzung mit der Frage: Wie kann GeoGebra im Unterricht verwendet werden?
- Vertiefung mit Beispielen nach Wunsch der Teilnehmerinnen und Teilnehmer

AGENDA

1. Geometrie
   - Punkte, Dreiecke, Ortslinien, Argumentieren
   - Anwenden kleiner Apps.
2. GeoGebra im Unterricht
   - didaktische Aspekte
   - technische Aspekte
3. Funktionen
4. Vektorgeometrie
5. Stochastik
6. Dessert
   - Tabellenkalkulation
   - Piratenaufgabe
   - Differentialgleichungen
   - Abbildungen (Matrizen)
   - Bestimmung von Eigenvektoren
   - Zentralprojektion & Parallaxe
   - Fermat-Punkt

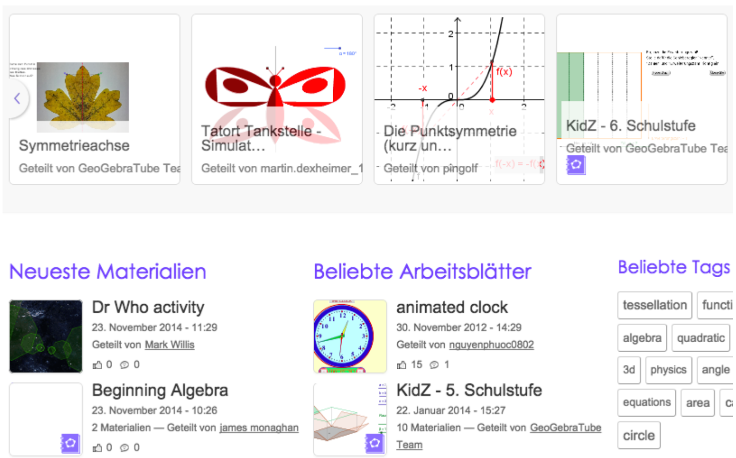
ORTSLINIEN, SPUR: ARGUMENTIEREN

- Winkelhalbierende: http://tube.geogebra.org/student/m320791
- Symmetrie: https://tube.geogebra.org/student/m188567
- Gleicher Abstand: https://tube.geogebra.org/student/m188578
- Gleicher Abstand II https://tube.geogebra.org/student/m188545

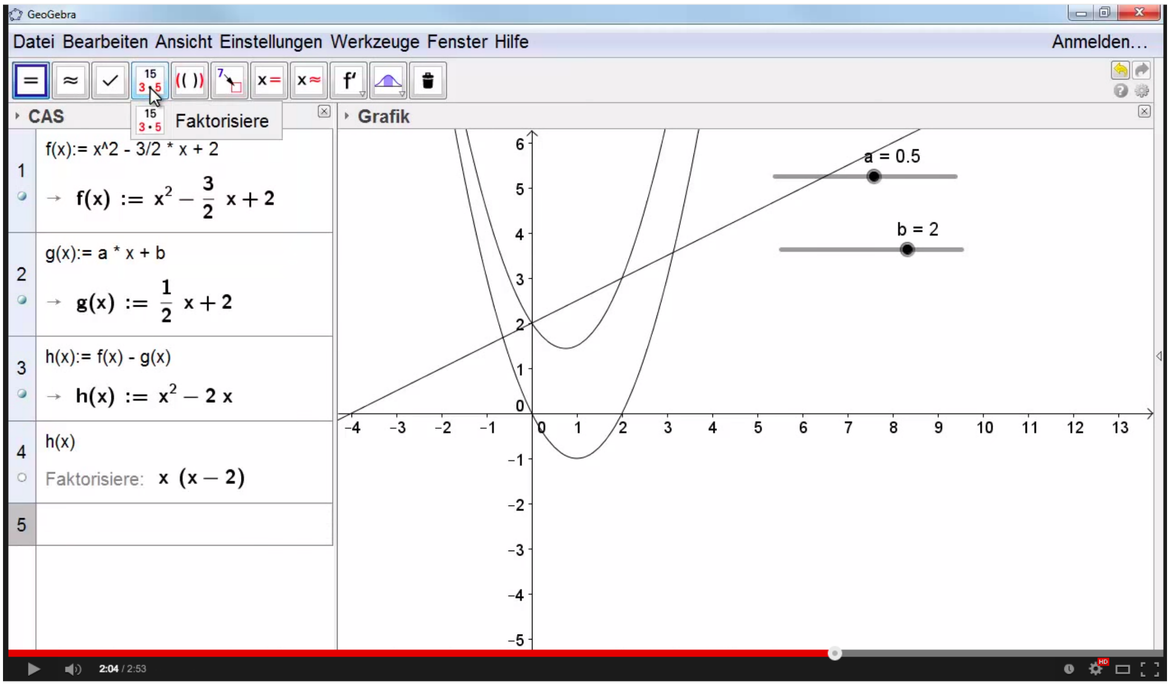
WIE SOLL GEOGEBRA IN DER SCHULE EINGESETZT WERDEN?

- zur Ergebnissicherung ?
- zur Erkenntnisgewinnung ?
- zur Überprüfung einer vorher formulierten Hypothesen ?
- zur Veranschaulichung ?
- zum Auffinden von Gesetzmässigkeiten ?

Schülerinnen und Schüler können bestehende Materialien direkt über http://tube.geogebra.org/ nutzen



LERNVIDEOS



YouTube GeoGebra channel Daniel Mentrard

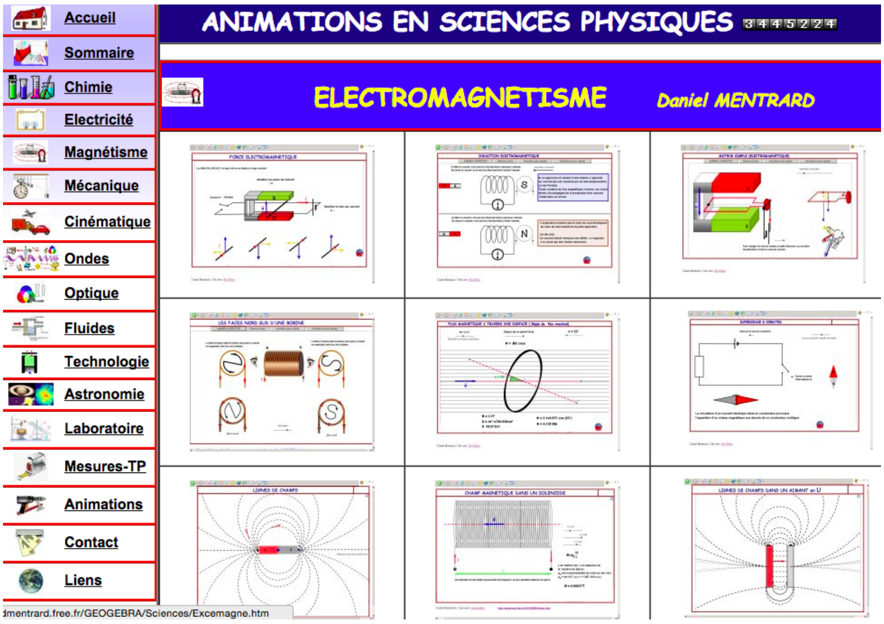
YouTube GeoGebra channel Daniel Mentrard

NEUIGKEITEN ZU GEOGEBRA

Twitter: @geogebra

WEITERE GEOGEBRA QUELLEN

Daniel Mentrard

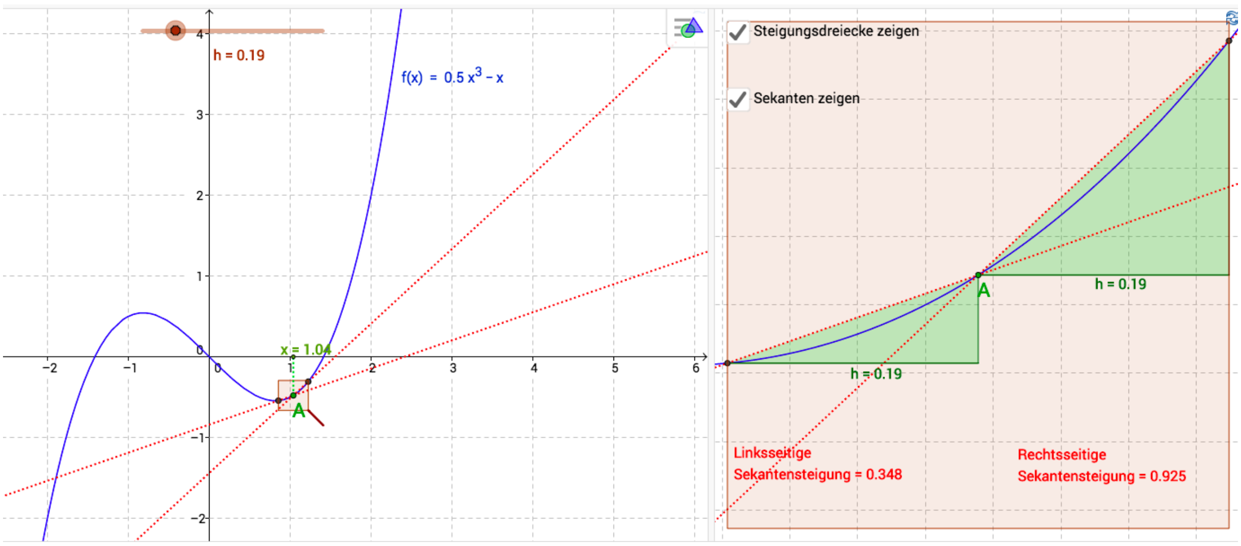


http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/index.htm

FUNKTIONEN UNTER DER LUPE

H.-J. Eschenbroich

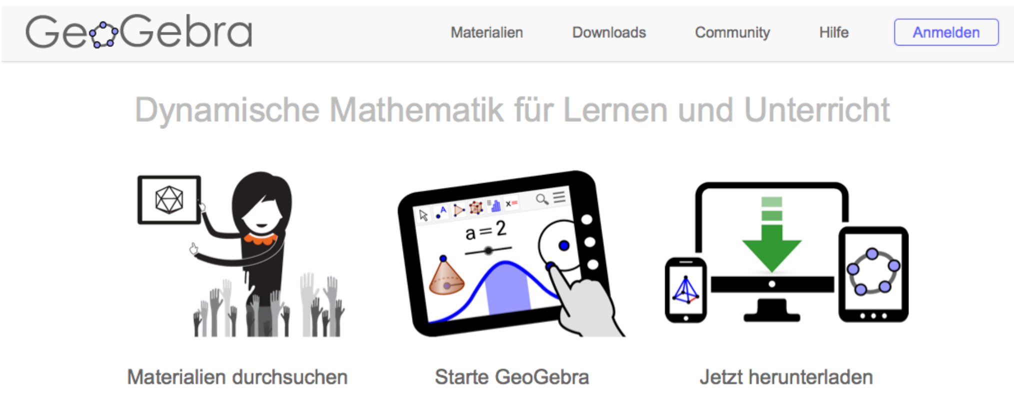
http://tube.geogebra.org/material/show/id/411519



GEOGEBRA IM UNTERRICHT

TECHNISCHE ASPEKTE

STARTSEITE



GEOGEBRA

IST EINE VIELSEITIGE MATHEMATIKSOFTWARE, MIT DEREN HILFE JEDER VON UNS ERLEBEN KANN,

http://geogebra.org/

1. MÖGLICHKEIT
GEOGEBRA INSTALLIEREN

http://www.geogebra.org/download

WICHTIG
VERSION 5.0 !

- Zusammenspiel Mobile Apps und Desktop Programm
- CAS neue Version
- 3D
- Zusammenspiel mit GeoGebraTube

2. MÖGLICHKEIT
DIREKT IM BROWSER ARBEITEN

http://web.geogebra.org/app

MATHEMATISCHE INHALTE
+
GEOGEBRA

FUNKTIONEN

- Funktionen darstellen
- Funktionen verknüpfen & diskutieren
- Funktionen mit Parameter
  - Maturaaufgabe
  - Spur von Extrema

PUNKT AUF FUNKTION

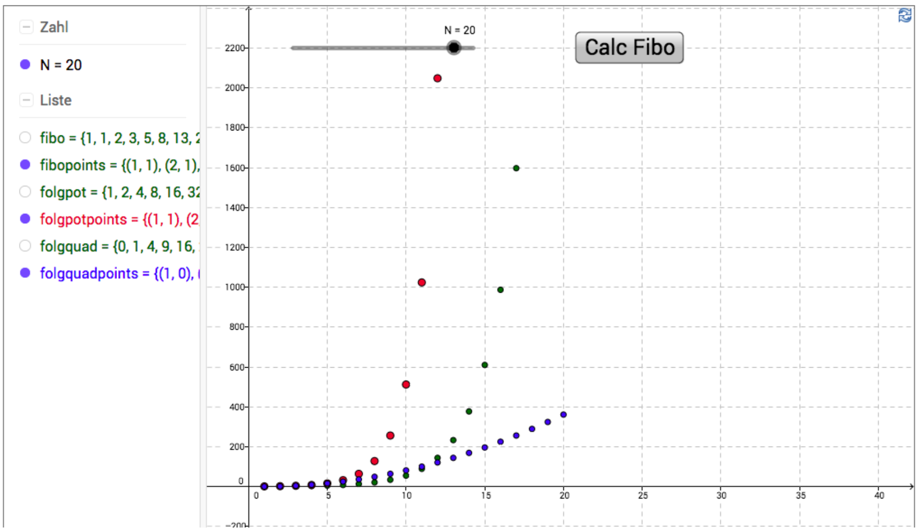
1. Beweglicher Punkt auf der x-Achse
2. entsprechender Punkt auf einer Funktion

```
f(x) =x^2*sin(x^2)
X_0 =Punkt[y=0]
P =(x(X_0),f(x(X_0)))
```

EXKURS FOLGEN

- Zahlenfolgen
- Folgen von Funktionen
- Folgen geometrischer Objekte
- Geschachtelte Folge (Punkte auf Fläche im $\mathbb{R}^3$)

ZAHLENFOLGEN



[Link auf GeoGebraTube]

FIBONACCI MIT PROGRAMM BERECHNEN (JAVASCRIPT)

```
var fibo = function(n){

   var N,i,arr;
   // Eingabe überprüfen
   if (typeof(n) !== "number"){
      N = 10;
   } else{
      N =n-2;
   }

  // Fibo Start
  arr=[1,1];
  for (i=0;i<N;i++){
    arr.push(arr[i]+arr[i+1])
  }
 //Rückgabe als Liste
 return "{"+arr+"}";
};
```

FOLGE VON FUNKTIONEN

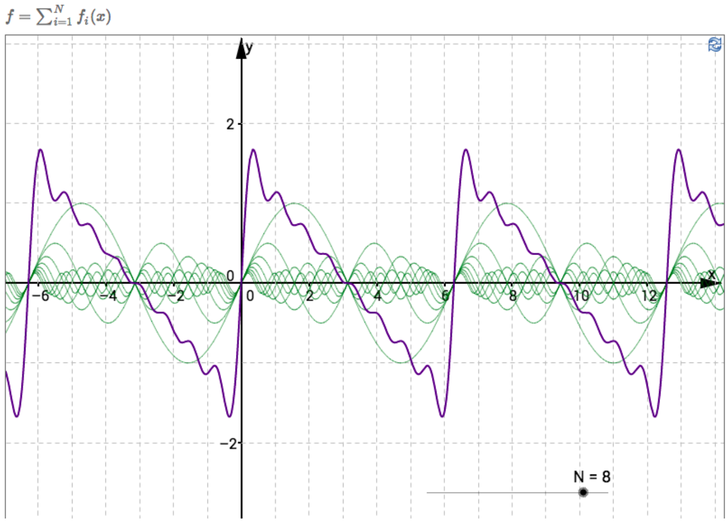
zum Beispiel

$$f_i(x) = \frac{1}{i}\sin(i \cdot x)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)$$

```
N=10
folgefunkt = Folge[1/i*sin(x*i), i, 1, N]
reihe = Summe[folgefunkt]
```

FOLGE VON FUNKTIONEN



Link auf GeoGebraTube

FUNKTIONEN MIT PARAMETER (MATURAUFGABE OBERWIL 2014)

Wir führen nun den Parameter $a \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Funktionenschar f_a, die durch die Gleichung $f_a(x) = -ax^3 + (a+1)x^2$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f_a unabhängig von a durch den Punkt $P(1 \,/\, 1)$ geht.

d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a an der Stelle $x = 4$ ein Maximum hat.

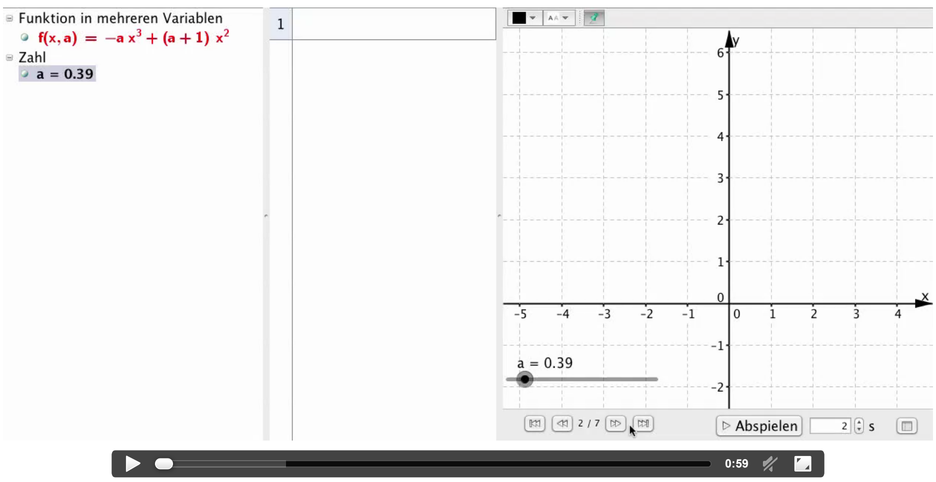
Eingabe:

```
f(x, a) = −a x^3 + (a + 1) x^2

g(x) = f(x, a)

P = (1, 1)

Mg = Element[Liste1, 2]

Q = (x(Mg), g(x(Mg)))
```

Im CAS-Fenster

```
f(1,a)

Liste1:=Löse[g'(x) = 0]

Löse[Ableitung[f(x, b),x]=0,b]
```

Link GeoGebraTube



CAS DIREKT
ALS WEBANWENDUNG NUTZEN

FINDE EINE FUNKTION F(X) DRITTEN GRADES MIT DEN EIGENSCHAFTEN:

- f(x) geht durch die Punkte $(-1, 1)$ und $(1, -1)$
- An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion f(x) die Steigung -1, also $f(1)' = -1$
- An der Stelle $x = -1$ hat f(x) die Steigung 1, also $f(1)' = -1$

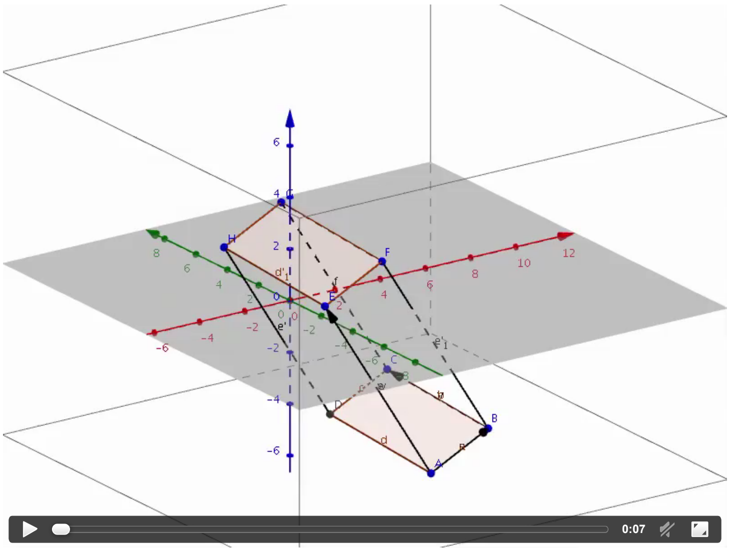
CAS Befehle

```
f(x) := a x^3 + b x^2+ c x+d

f(-1) = 1

f(1) = -1

f'(1)=-1

f'(-1) = 1

Löse[{$2, $3, $4, $5},{a, b, c, d}]

g(x):=Ersetze[$1,$6]
```

VEKTOR-GEOMETRIE

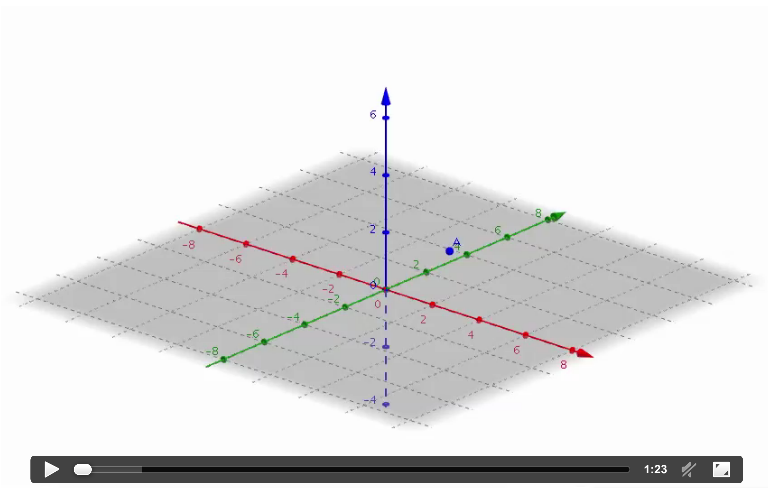
- Ein Spat
- Abstand zweier Geraden
- Würfelschnitte

EIN SPAT



- http://tube.geogebra.org/student/m320977

PARAMETERFORM DER EBENENGLEICHUNG



- http://tube.geogebra.org/student/m923395

$A(8 / 11 / 11)$ $C(-1 / -1 / -1)$

$P(5 / -1 / -13)$ $Q(13 / 7 / -9)$

Die Gerade g geht durch die Punkte A und P.

Die Gerade h geht durch die Punkte C und Q.

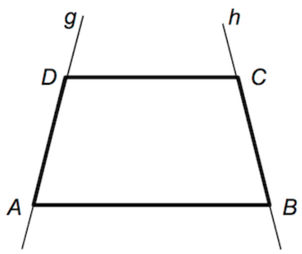
a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g und h.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden.

c) Unter welchem Winkel α schneiden sich die beiden Geraden g und h?

d) Die Geraden g und h liegen beide in der Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E.

e) Die oben gegebenen Punkte A und C sind Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Die Punkte A und D liegen auf der Geraden g. Die Punkte B und C liegen auf der Geraden h. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte B und D.



$\overline{AD} = \overline{BC}$

MATURAUFGABE ZUR VEKTORGEOMETRIE GYM OBERWIL, GRUNDLAGENFACH 2014

- https://tube.geogebra.org/student/m761969

STOCHASTIK

STOCHASTIK MATURAUFGABE

https://tube.geogebra.org/student/m769673

6. Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben" (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).

   4+4+3 = 11 Punkte

   a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
      - a1) Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
      - a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
      - a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
      - a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird? Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).

   b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.

b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?

c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind.
Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?

TEILAUFGABE A - CAS-FENSTER

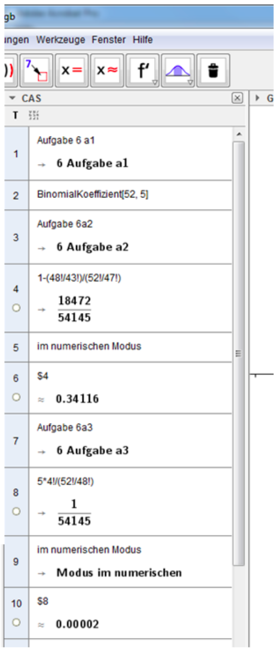
Ein Pokerkartendeck enthält 52 Karten bestehend aus vier „Farben" (Pik, Karo, Kreuz, Herz) zu je 13 Werten: neun Zahlenkarten 2 bis 10 und vier Bildkarten (Bube, Dame, König, Ass).

| 4+4+3 = 11 Punkte |

a) Es werden 5 Karten gezogen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
a1) Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich?
a2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass gezogen wird?
a3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen Vierling (vier Karten vom gleichen Wert und eine andere Karte)?
a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).

b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage A produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage B übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage A dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage B nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.
b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?
b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage A stammt?

c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind.
Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?



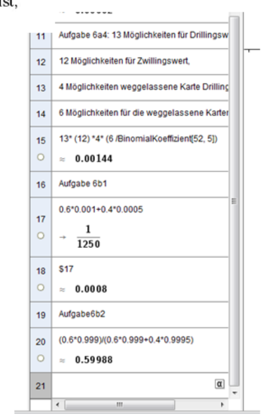
TEILAUFGABE A&B - CAS-FENSTER

a4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Full House gezogen wird?
Full House: Drilling (drei Karten vom gleichen Wert) und Paar (zwei Karten vom gleichen Wert).

b) Die Firma, welche das Pokerkartendeck hergestellt hat, unterhält zwei Produktionsanlagen. Anlage *A* produziert 60% der Kartendecks, der Rest wird von Anlage *B* übernommen. Maschinell bedingte Fehler führen bei der Anlage *A* dazu, dass bei 0.1% der Kartendecks eine Karte fehlt, während dies bei der Anlage *B* nur bei 0.05% der Kartendecks der Fall ist.

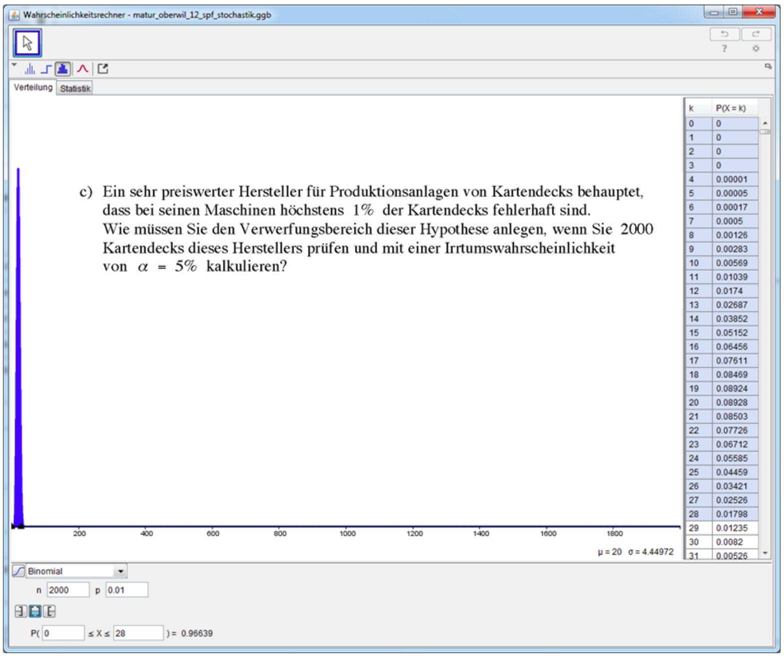
b1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck fehlerhaft ist?

b2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kartendeck, das vollständig ist, aus der Anlage *A* stammt?



C - WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNER IM MENÜ ZUM CAS-FENSTER

c) Ein sehr preiswerter Hersteller für Produktionsanlagen von Kartendecks behauptet, dass bei seinen Maschinen höchstens 1% der Kartendecks fehlerhaft sind. Wie müssen Sie den Verwerfungsbereich dieser Hypothese anlegen, wenn Sie 2000 Kartendecks dieses Herstellers prüfen und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ kalkulieren?



k	P(X = k)
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0.00001
5	0.00005
6	0.00017
7	0.0005
8	0.00126
9	0.00283
10	0.00569
11	0.01039
12	0.0174
13	0.02687
14	0.03852
15	0.05152
16	0.06456
17	0.07611
18	0.08469
19	0.08924
20	0.08928
21	0.08503
22	0.07726
23	0.06712
24	0.05585
25	0.04459
26	0.03421
27	0.02526
28	0.01798
29	0.01235
30	0.0082
31	0.00526

ANGEFRAGTE THEMENGEBIETE

GeoGebra Anwendungen selbständig erproben und weitere Beispiele in GeoGebraTube finden.

- Ober-/Untersummenberechnungen B1 B2 B3
- Geometrie und Funktionen B0 B1 B2 B3 B4 B5
- Stochastik B1 B2 B3 B4
- Regression B1 B2 B3

DESSERT

- Tabellen-kalkulation
- Piratenaufgabe
- Differentialgleichungen
- Abbildungen (Matrizen)
- Bestimmung von Eigenvektoren
- Zentralprojektion & Parallaxe
- Fermat-Punkt

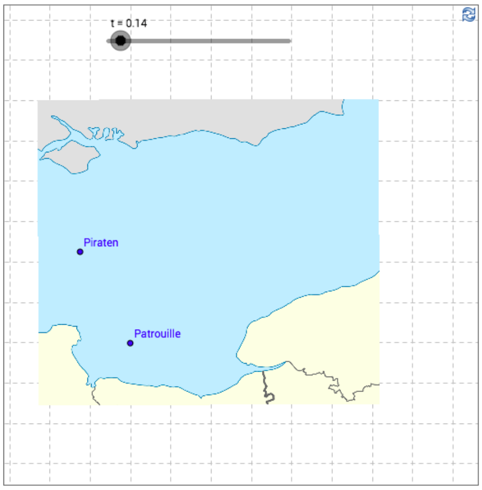
TABELLEN-KALKULATION

- Körperoberfläche http://tube.geogebra.org/student/m321081
- Digoxin http://tube.geogebra.org/student/m321095
- 1000 Zufallszahlen http://tube.geogebra.org/student/m321107

PIRATEN-
AUFGABE

Eine Piratengeschichte aus einer Zeit, als es noch kein Radargerät gab

Aus dem sicheren Hafen sticht an einem nebligen Novembertag ein Patrouillenboot in See, um Piraten aufzustöbern. Die Voraussetzungen hierfür sind denkbar schlecht, denn die Sichtweite beträgt nur 0,5 km. Dennoch befiehlt der Kommandant die Ausfahrt und das Boot geht mit 20 km/h auf Kurs Nordost.
Zur gleichen Zeit fährt ein Piratenschiff mit 15 km/h in Richtung Südost. Als das Patrouillenboot den Hafen verlässt, befindet sich das Piratenschiff 8 km in nördlicher und 2 km in östlicher Richtung vom Hafen entfernt.

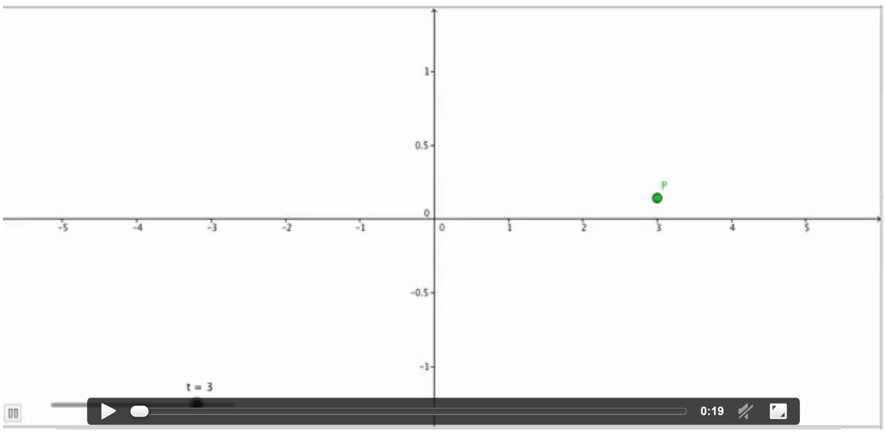


Link auf GeoGebraTube

BEWEGUNGEN SIMULIEREN

x,y-Position als Funktion von t

```
t = 0.0
P = (t,sin(t))
```

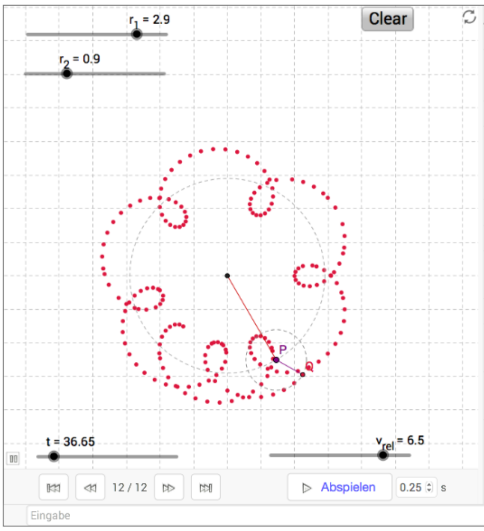


GEKOPPELTE KREISBEWEGUNGEN

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} r_1 \cdot \cos(t) \\ r_1 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} x(P) \cdot r_2 \cdot \cos(v_{rel} \cdot t) \\ y(P) \cdot r_2 \cdot \sin(v_{rel} \cdot t) \end{pmatrix}$$

GEKOPPELTE KREISBEWEGUNGEN



Nr.	Name	Definition	Wert
1	Zahl v_{rel}		v_{rel} = 6.5
2	Zahl t		t = 9.22
3	Zahl r_2		r_2 = 0.9
4	Zahl r_1		r_1 = 2.9
5	Punkt P	(r_1 cos(t), r_1 sin(t))	P = (-2.84, 0.6)
6	Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt (0, 0) und Radius r_1	c: x² + y² = 8.41
7	Punkt O		O = (0, 0)
8	Strecke a	Strecke [O, P]	a = 2.9
9	Punkt Q	(x(P) + r_2 cos(t v_{rel}), y(P) + r_2 sin(t v_{rel}))	Q = (-3.72, 0.41)
10	Strecke b	Strecke [P, Q]	b = 0.9
11	Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt P und Radius r_2	d: (x + 2.84)² + (y - 0.6)² = 0.81
12	Schaltfläche Schaltfläche1		Schaltfläche1

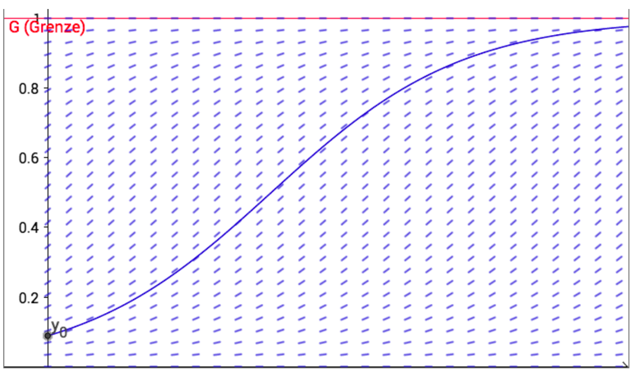
http://tube.geogebra.org/student/m921873

DGL

1. ORDNUNG

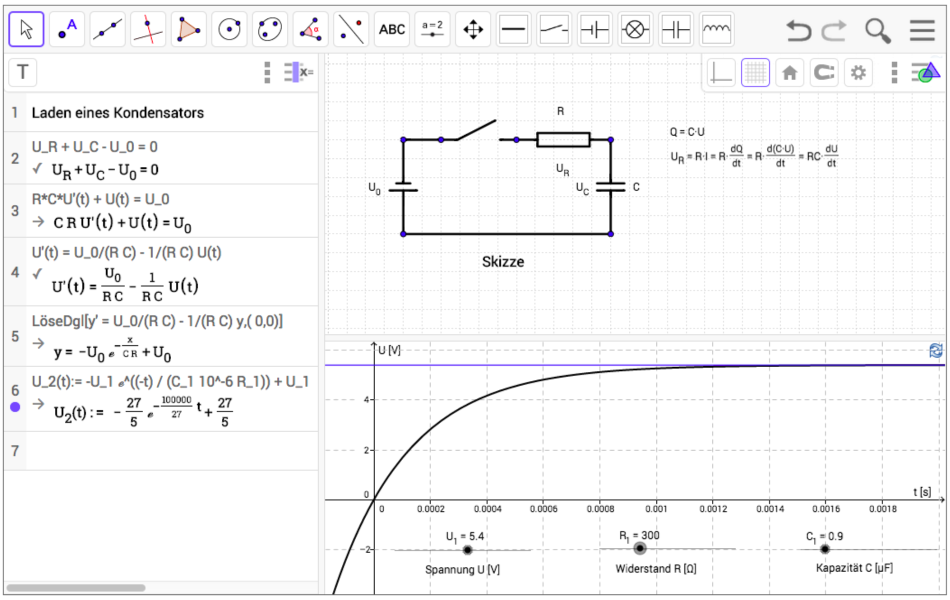
WACHTUMSMODELLE

http://tube.geogebra.org/material/show/id/31166



LADEN EINES KONDESATORS

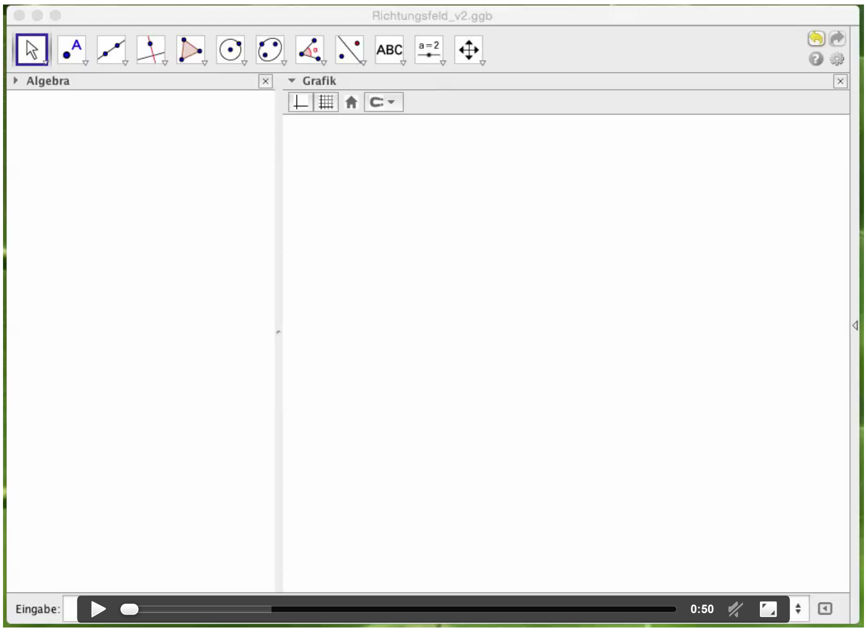
http://tube.geogebra.org/material/show/id/446087



NUMERISCHES LÖSEN VON DG ERSTER ORDNUNG IN EINEM 2D-RICHTUNGSFELD

```
A = (1, 1)

f(x, y) = sin(x) cos(y)

Richtungsfeld[f]

LöseDgl[f, x(A), y(A), 20, 0.1]
```

NUMERISCHES LÖSEN VON DG ERSTER ORDNUNG IN EINEM 2D-RICHTUNGSFELD



DGL 2. ORDNUNG

SCHWINGUNG

NEWTON II

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$$

FEDERPENDEL

$$-k\vec{x}(t) = m \cdot \ddot{\vec{x}}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\frac{k}{m} \cdot \vec{x}(t)$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{x}(t)$$

Annahme einer Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

einsetzen in DGl

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} = -\omega^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$(\lambda^2 + \omega^2) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

folglich

$$(\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

$$\lambda = i\omega \text{ oder } \lambda = -i\omega$$

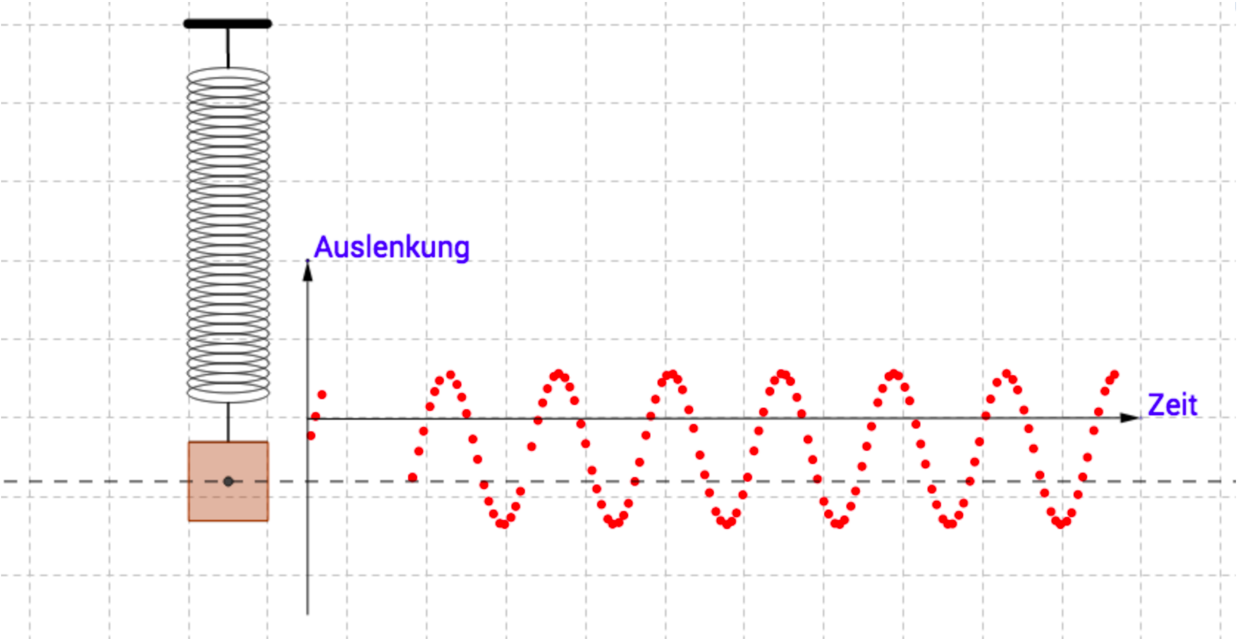
allg. Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t) = \frac{c_1}{e^{i\omega t}} + c_2 \cdot e^{i\omega t}$$

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$$

FEDERPENDEL

http://tube.geogebra.org/material/show/id/126500



GEDÄMPFTES FEDERPENDEL

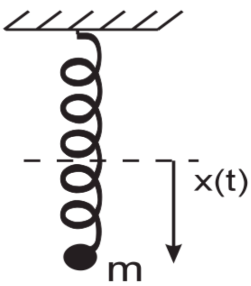


Abb. 7.4.
Federpendel

(2) Ein durch Luftreibung **gedämpftes Federpendel** schwingt mit

$$\boxed{x(t) = x_0\, e^{-\gamma\, t} \cos(\omega t)\,,}$$

wenn x_0 die Anfangsauslenkung, γ der Reibungskoeffizient und ω die Schwingungsfrequenz. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung sind

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\gamma\, x_0\, e^{-\gamma\, t} \cos(\omega t) - \omega\, x_0\, e^{-\gamma\, t} \sin(\omega t)\,,$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \gamma^2\, x_0\, e^{-\gamma\, t} \cos(\omega t) + \gamma\,\omega\, x_0\, e^{-\gamma\, t} \sin(\omega t)$$

$$+\gamma\,\omega\, x_0\, e^{-\gamma\, t} \sin(\omega t) - \omega^2\, x_0\, e^{-\gamma\, t} \cos(\omega t)$$

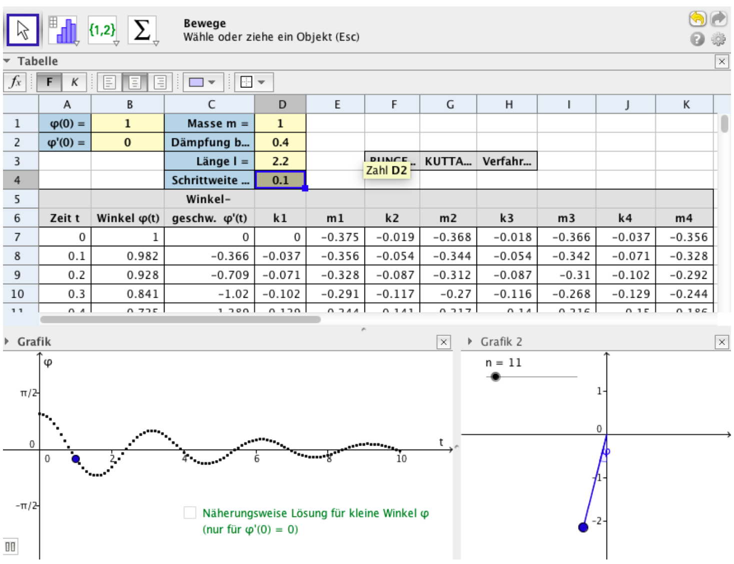
LAGRANGE FORMALISMUS FÜR DAS FADENPENDEL

$$ml^2\ddot{\phi}(t) + mgl\sin(\phi) = 0$$

nur numerisch lösbar !!!

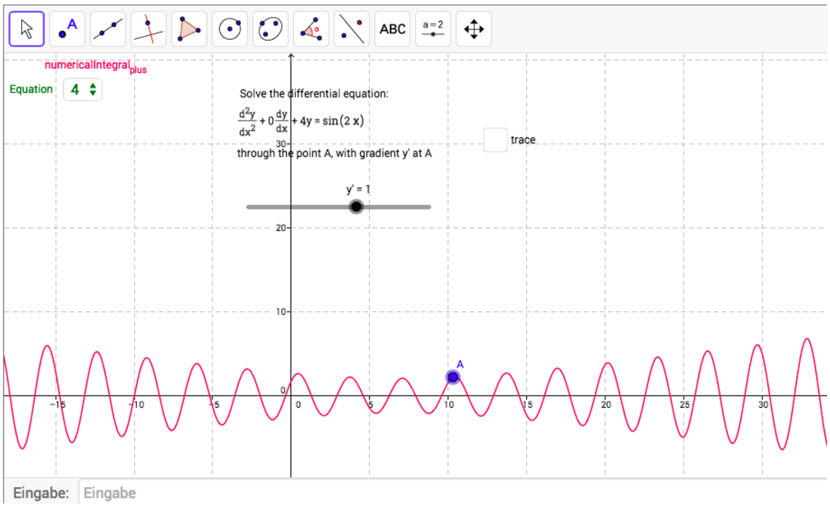
FADENPENDEL SIMULATION

http://tube.geogebra.org/material/show/id/702



NUMERISCHE LÖSUNG EINER DGL 2. ORDNUNG

http://tube.geogebra.org/material/show/id/79803



GEOGEBRA
ANLEITUNG
ZU DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND RICHTUNGSFELDER

- http://wiki.geogebra.org/de/L%C3%B6seDgl_%28Befehl%29
- http://wiki.geogebra.org/de/Richtungsfeld_%28Befehl%29
- Schwingungen und Wellen

EXKURS
SKALARPOTENTIAL
&
ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN

SKALARPOTENTIAL

$$\Phi : \vec{r} \mapsto \Phi(\vec{r})$$

mit

1. Φ ist zweimal stetig differenzierbar
2. Es existiert ein Vektorfeld mit

$$\vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$$

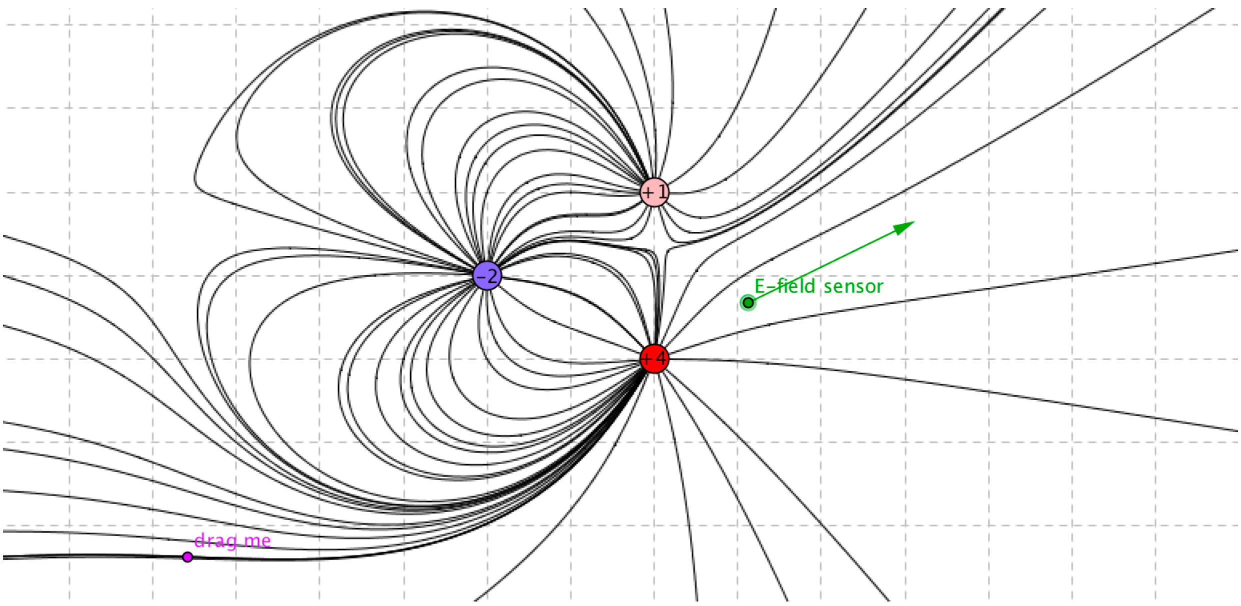
$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad(\Phi(\vec{r}))$$

FELDLINIEN STEHEN SENKRECHT POTENTIALLINIEN

BEISPIEL DIPOL

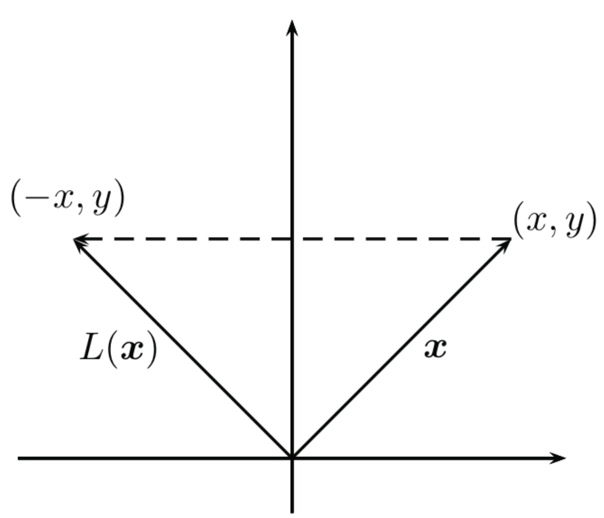
BEISPIEL 3 PUNKTLADUNGEN (MULTIPOL)

http://tube.geogebra.org/material/show/id/27247



ABBILDUNGEN

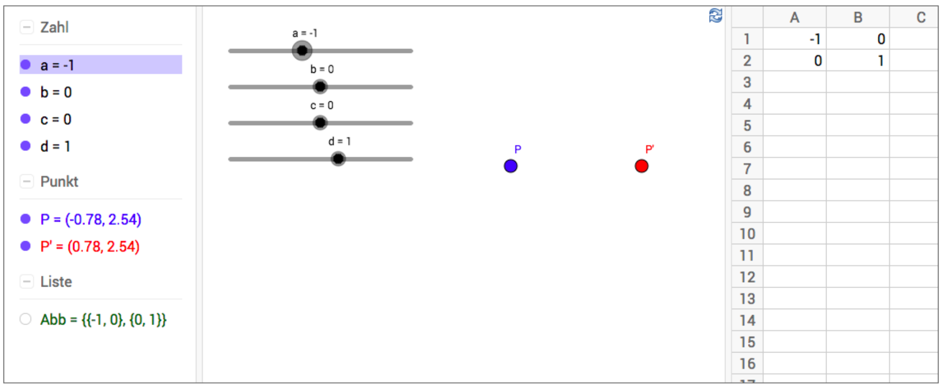
SPIEGELUNG



Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

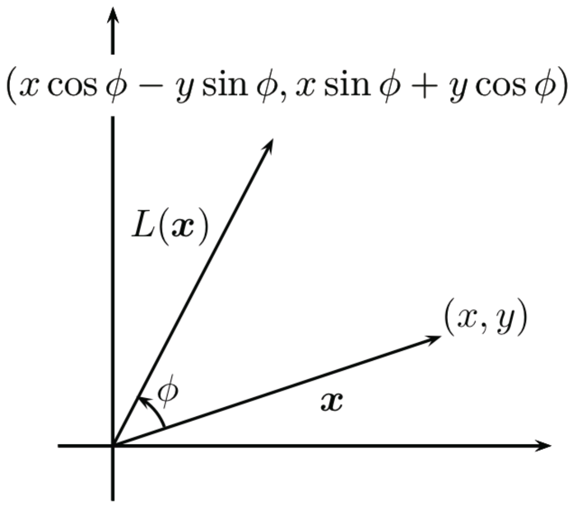
ABBILDUNG EINES PUNKTES



Lässt sich der Ursprung aus der Beobachtung des Verhaltens zwischen dem Punkt P und seiner Abbildung P' ermitteln?

[Link auf GeoGebraTube]

DREHUNG



DARSTELLUNG EINER DREHUNG UM DEN PUNKT (0,0) GEGEN DEN UHRZEIGERSINN UM $90°$

Diese lin. Abbildung bildet

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch Drehungen sind lineare Abbildungen. Eine Drehung um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) kann wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} L: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto & (x\cos(\phi) - y\sin(\phi), x\sin(\phi) + y\cos(\phi)) \end{aligned}$$

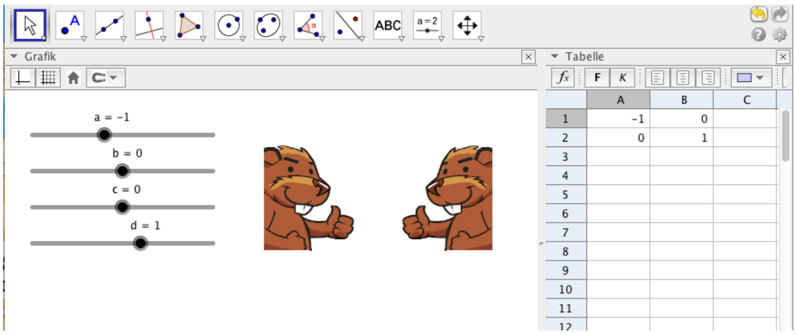
DREHUNG GEGENUHRZEIGERSINN UM EINEN WINKEL ϕ

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_1' = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auf } \quad e_2' = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

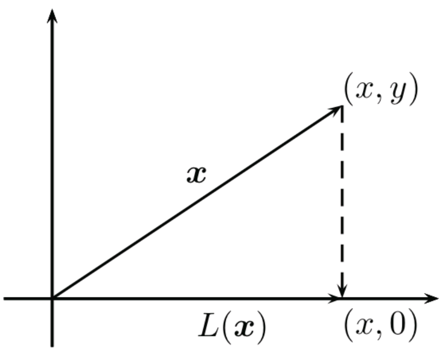
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

RASTERGRAFIK MIT LINEAREN ABBILDUNGEN TRANSFORMIEREN

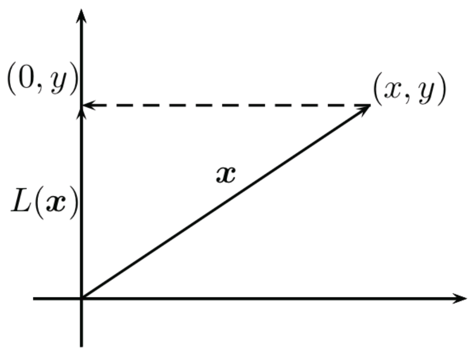


[Link auf GeoGebraTube]

PROJEKTION



auf x-Achse



auf y-Achse

Die orthogonale Projektion auf die x-Achse ist auch eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Projektion auf die y-Achse ist eine lineare Abbildung. Die Zuordnungsvorschrift ist

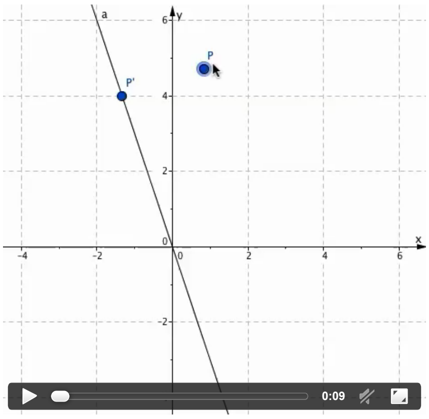
$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y) \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PUNKT AUF EINE GERADE A PROJIZIEREN

$$a : y = -3x$$



VORGEHEN

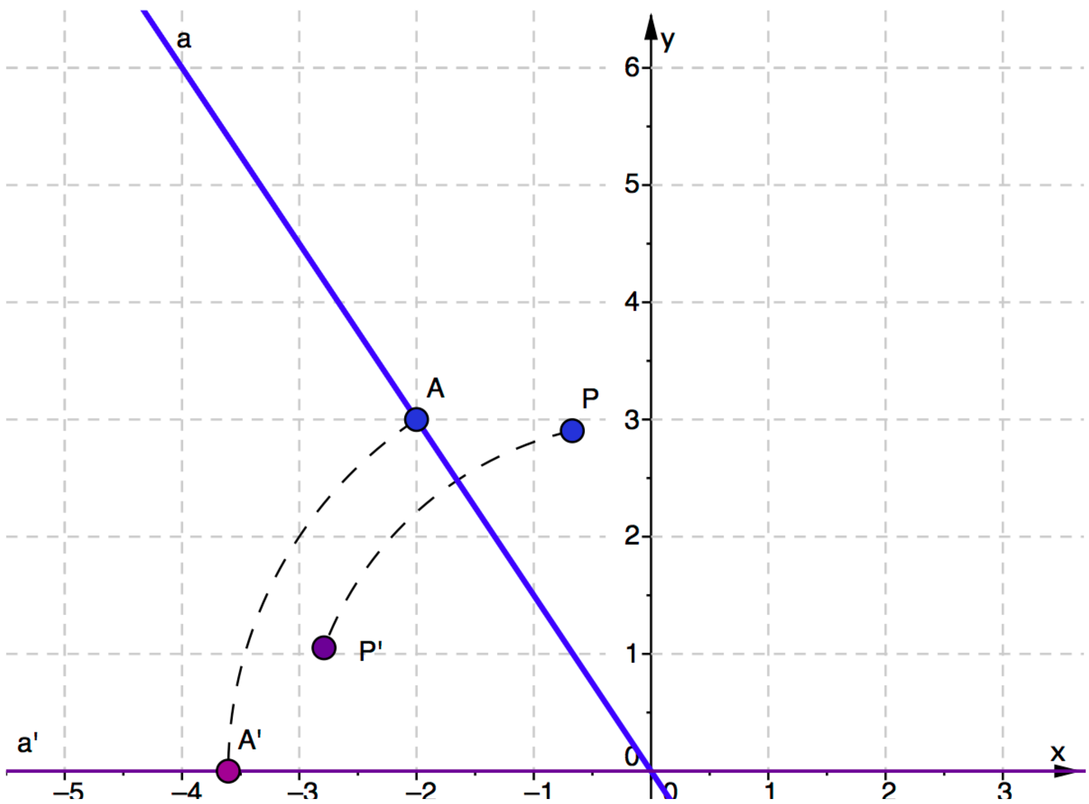
- Gesamte Figur drehen bis die Gerade a auf der x-Achse liegt
- Den Punkt auf die x-Achse projizieren
- den projezierten Punkt wieder zurück drehen.

1. SCHRITT DREHEN UM α

$$\tan(\alpha) = -3 \rightarrow \alpha \approx -71.57°$$

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

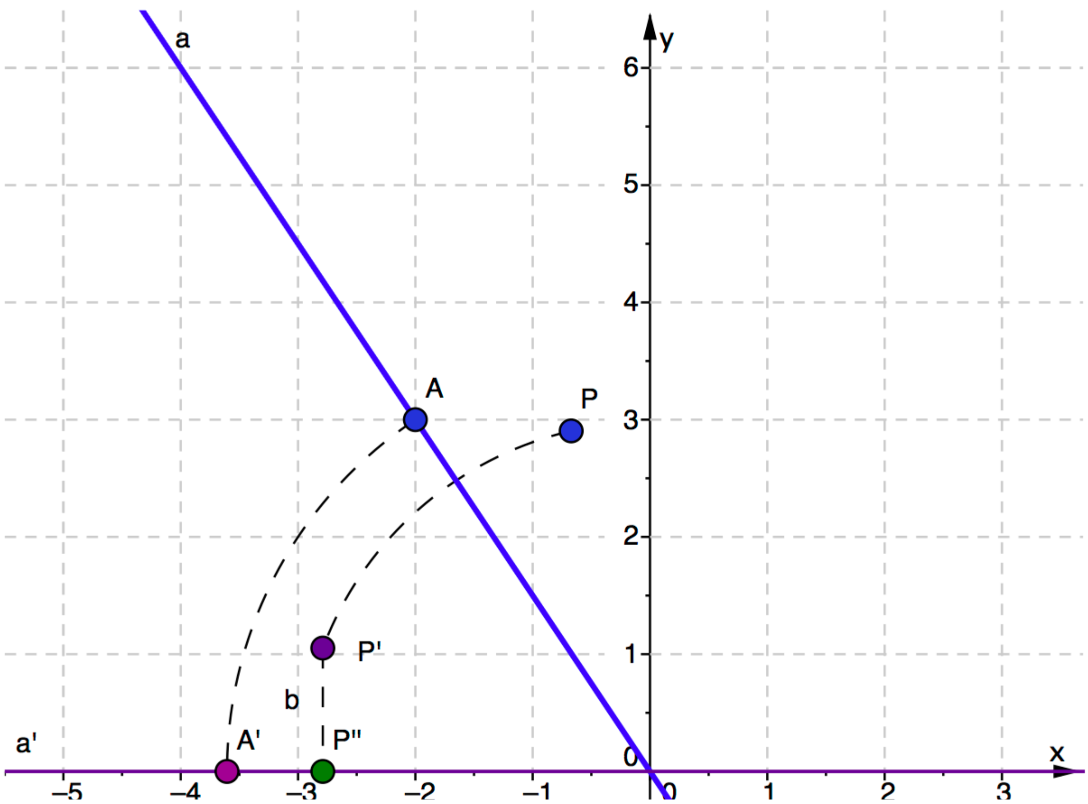
GeoGebraTube



2. SCHRITT PROJEKTION AUF X-ACHSE

$$P_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube

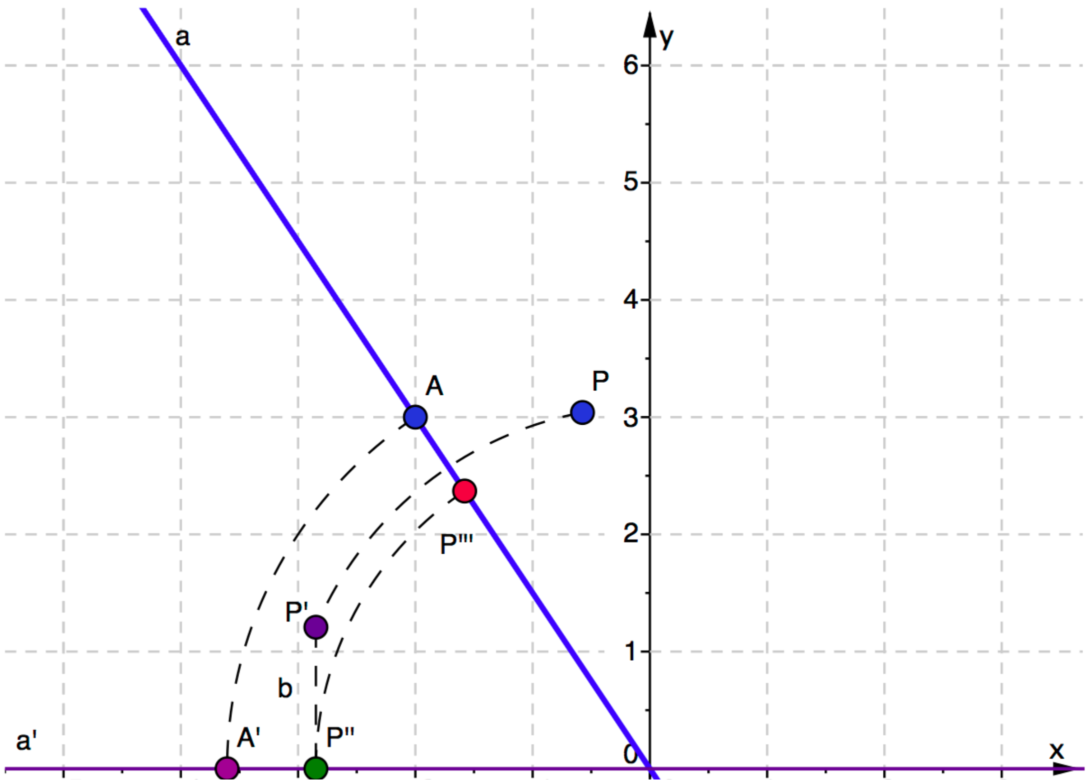


3. SCHRITT RÜCKDREHEN UM α

$$\alpha \approx -71.57°$$

$$R_{-\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

GeoGebraTube



IN EINEM SCHRITT

$$R_{-a} \cdot P_X \cdot R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

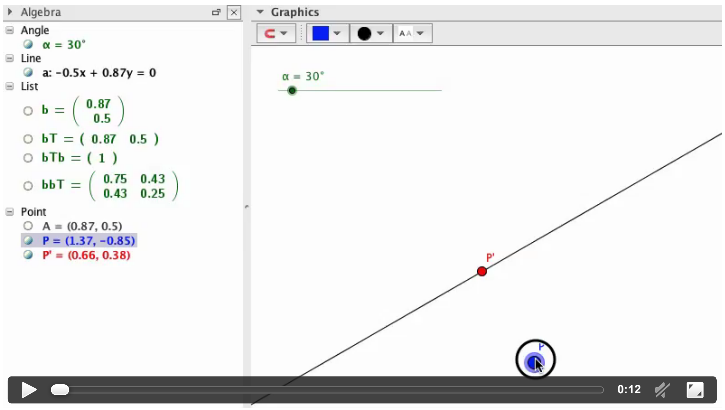
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF UNTERRAUM VERWENDEN

Wähle eine Matrix A so, dass die Spaltenvektoren eine Basis eines Unterraums bilden. (z.B. eine Gerade in $\mathbb{R}^2$), dann ist die Projektionsmatrix

$$proj_w P = A(AA^T)^{-1}A^T P$$



Link to GeoGebraTube

EIGENVEKTOREN

AUFGABE

Es sei $A = A^T$

gesucht λ und $\vec{x}$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

KLASSISCHE LÖSUNG MIT DETERMINANTE

Aus

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = 0$$

folgt

$$|A - \lambda I| = 0$$

BEISPIEL FÜR

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 1$$

http://tube.geogebra.org/student/m935811

EIGENWERTE

$$\lambda^2 - 5 \cdot \lambda + 5$$

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{5}+5}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

1. EIGENVEKTOR

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{5}+5}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{\sqrt{5}+5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot b; b = b$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. EIGENVEKTOR

$$\begin{pmatrix} 2-(\frac{-\sqrt{5}+5}{2}) & 1 \\ 1 & 3-(\frac{-\sqrt{5}+5}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cdot b; b = b$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

EIGENVEKTOREN FÜR GROSSE MATRIZEN

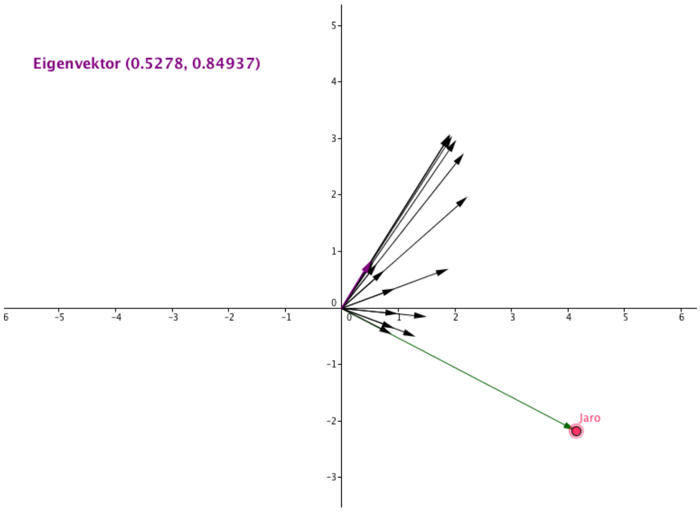
- Bei quadratischen Matrizen der Grösse $N = dim(M)$ müssen die Nullstellen eines Polynoms mit dem Grad N bestimmt werden.
- Daraus erhält man die Eigenwerte
- Für die Eigenvektoren muss jeweils ein lineares Gleichungssystem mit N Gleichungen und N Unbekannten gelöst werden.

ITERATIVES VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DES EIGENVEKTORS ZUM DEM GRÖSSTEN EIGENWERT.

POTENZ-METHODE (RICHARD VON MISES)

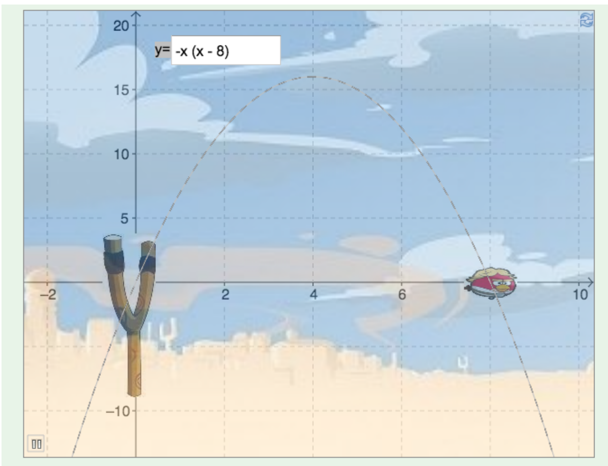
1. Wähle $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|v_0| = 1$
2. Setze $k = 0$
3. $w_{k+1} := Av_k$
4. $v_{k+1} := \frac{w_{k+1}}{|w_{k+1}|}$
5. $\lambda_{k+1} := (v_{k+1})^T A v_{k+1}$
6. $k \leftarrow k + 1$
7. weiter zu 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

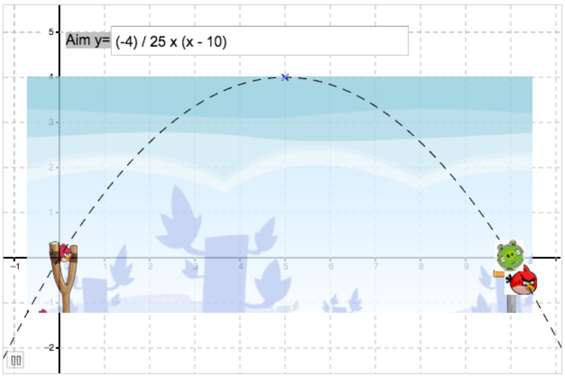


http://tube.geogebra.org/material/show/id/936691

ANGRY BIRDS MATHE

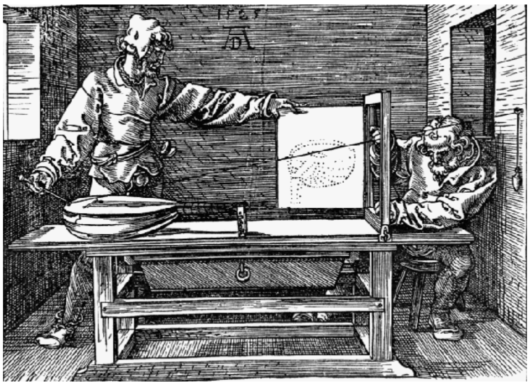


Link auf Webseite



Link auf Webseite

ZENTRALPROJEKTION
&
PARALLAX EFFEKTE



Link Mechanical creation of a perspective image by Albrecht Dürer

KONVENTIONEN

- Annahme das Zentrum der Abbildung ist im Ursprung
- Blickrichtung entlang der Z-Achse
- Verwenden homogene Koordinaten

ZENTRALPROJEKTION AUF EBENE NORMAL ZUR Z-ACHSE

mit Brennweite f

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix}$$

PROJEKTION AUF HOMOGENEN VEKTOR ANWENDEN

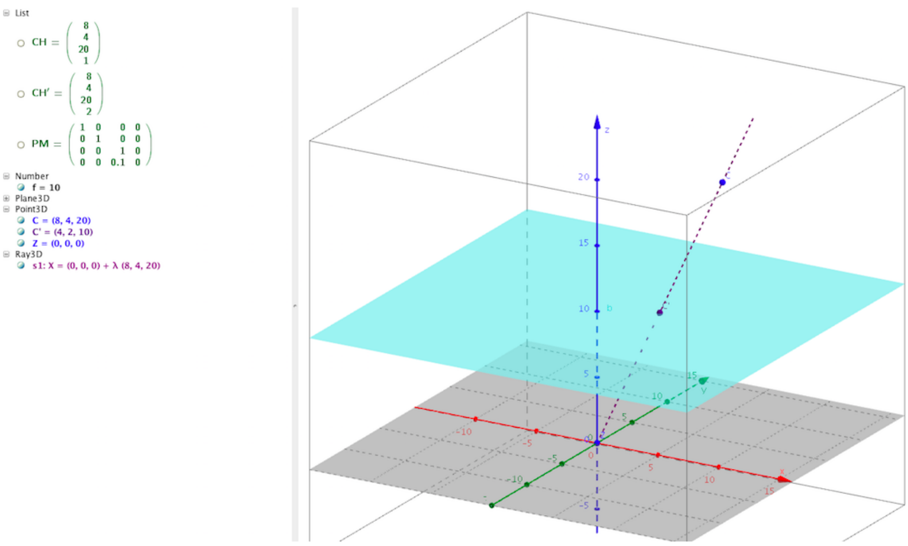
$$P \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

ÜBERGANG HOMOGENEN KOORDINATEN ZU KARTESISCHEN KOORDINATEN

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f/z \cdot x \\ f/z \cdot y \\ f/z \cdot z \end{pmatrix}$$

ZAHLENBEISPIEL

- Sei f = 10
- Ein Punkt (8,4,20) soll auf die Normalebene zur Z-Achse im Abstand von 10 abgebildet werden.



HOMOGENE KOORDINATEN

FÜR $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

Transformation

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x/(Q_z) \\ Q_y/(Q_z) \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

HOMOGENE KOORDINATEN

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

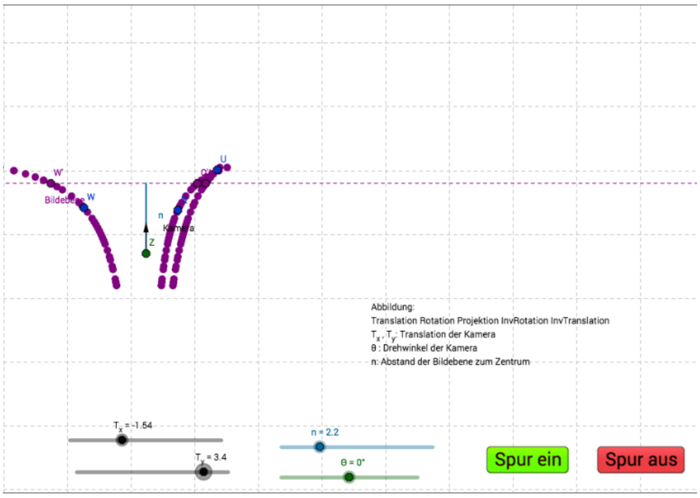
ROTATION

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRANSLATION

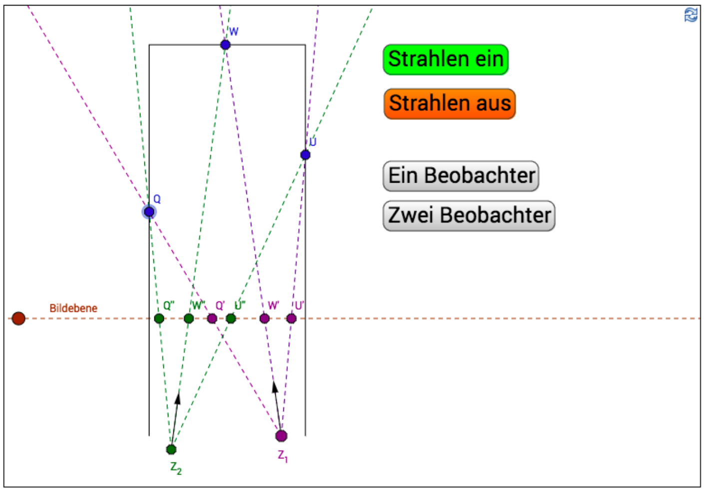
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ZENTRALPROJEKTION



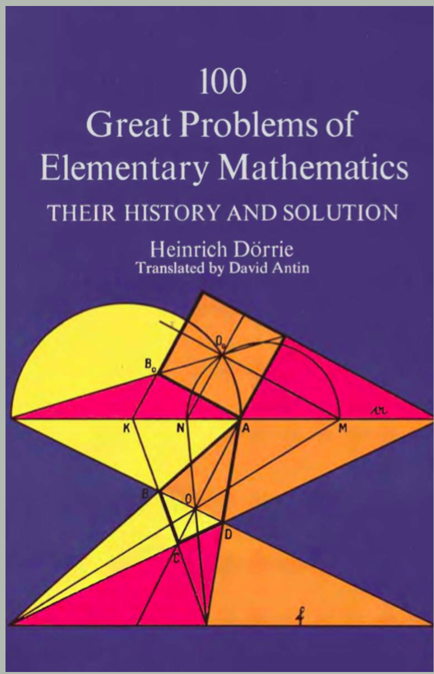
Link auf GeoGebraTube

ZENTRALPROJEKTION IM KINO



Link GeoGebraTube

FERMAT-PUNKT



91 **Fermat's Problem for Torricelli**

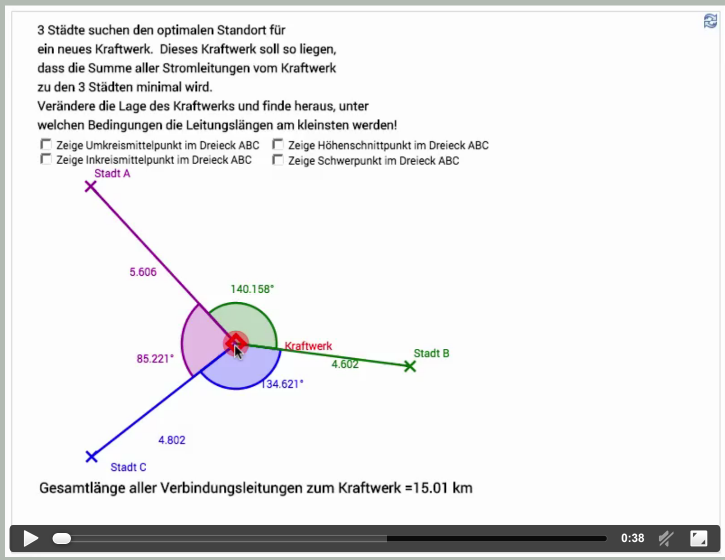
To find the point the sum of whose distances from the vertexes of a given triangle is the smallest possible.

This celebrated problem was put by the French mathematician Fermat (1601–1665) to the Italian physicist Torricelli (1608–1647), the famous student of Galileo, and was solved by the latter in several ways.

"Wo befindet sich ein Punkt P in einem Dreieck, wenn die Summe aller Abstände von diesem Punkt P zu den drei Ecken minimal sein soll."

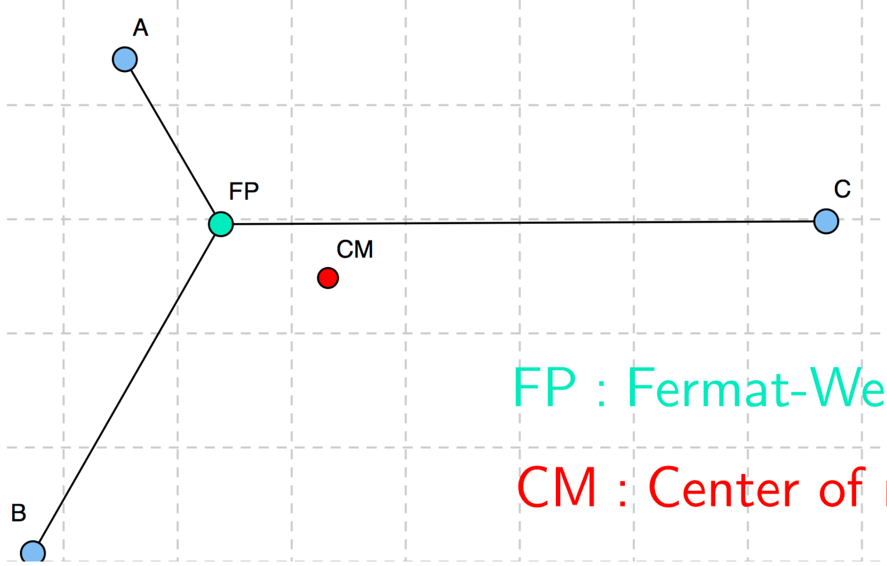
Dorrie, H. (1965). 100 Great problems of elementary mathematics. Dover Publications.

OPTIMALE POSITION EINES KRAFTWERKS



Link zu GeoGebraTube: Der Neubau des Kraftwerks von Ulrich Steinmetz

$$\text{minimize}_{x,y} \quad f(x,y) = \sum_{i=1..n} \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

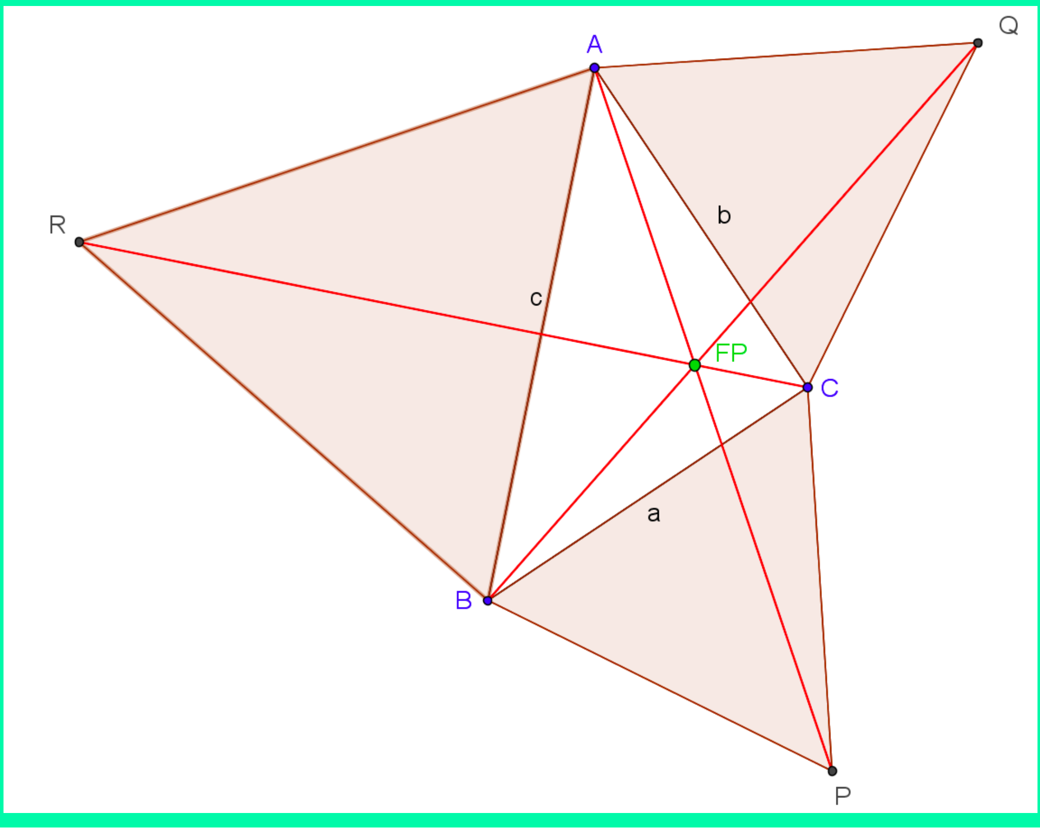


FP : Fermat-Weber Point

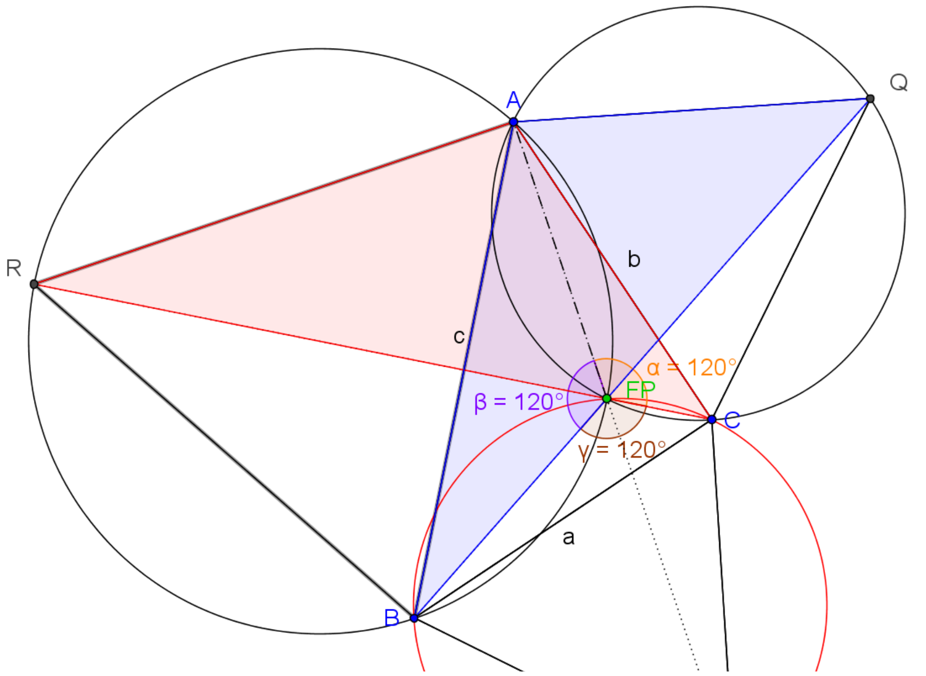
CM : Center of mass

EXAKTE LÖSUNG

FÜR N = 3



GEOMETRISCHER BEWEIS



WER HAT ALS ERSTES EIN NUMERISCHES LÖSUNGSVERFAHREN FÜR **N>3** GEFUNDEN?

FACILITY LOCATION PROBLEMS
EIN TEILGEBIET DER KOMBINATORISCHEN OPTIMIERUNG

1966 findet **M. L. Balinksi** eine approximative Lösung des Fermat-Weber Problems für n-Ecken.

M. L. Balinksi. On finding integer solutions to linear programs. In Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, pages 225–248. IBM, 1966.

`I was sixteen when I became intrigued with the N point problem`

Andrew Vázsonyi, 1932

Cosider N points and one more point, X. Measure the distances between X and the given points, then add the distances. Find point X so that this sum is the smallest possible.

Andrew Vázsonyi

The paper "Sur le point pour lequel les sommes des distances de n points donnés et minimum", published in **Japan** in **1937** under the name **Endre Weiszfeld** became a classic in the mathematics of location analysis.

WEISZFELD

ALGORITHMUS

by Endre Weiszfeld, alias Andrew Vázsonyi (1916–2003), born in Budapest

WEISZFELD ALGORITHMUS

k Iterationsschritte

Ortsvektoren: $\vec{x_1} \cdots \vec{x_N}$

Startpunkt $\vec{y_0}$ im Schwerpunkt

$$\vec{y_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{x_i}}{\|\vec{x_i} - \vec{y_k}\|}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\|\vec{x_i} - \vec{y_k}\|}}$$

H. Üster, R.F. Love, The convergence of the Weiszfeld algorithm, Computers & Mathematics with Applications, Volume 40, Issues 4–5, August–September 2000, Pages 443-451, ISSN 0898-1221

WEISZFELD ALGORITHMUS

Algorithm 3.2 Fermatpunkt(Punkte,epsilon)

```
P = schwerpunkt(Punkte)
while True do
    Q = Iterationsschritt(P, Punkte)
    if distanz(P,Q)⩽epsilon then
        return Q
    end if
    P = Q
end while
```

ITERATIONSSCHRITT

Algorithm 3.1 Iterationsschritt(P, Punkte)

```
W = x= y = 0.0
for Q in Punkte do
    d = distanz(P,Q)
    tmp = 1.0 / d
    W = W + tmp
    x = x + Q[0] * tmp
    y = y + Q[1] * tmp
end for
return x/W , y/W
```

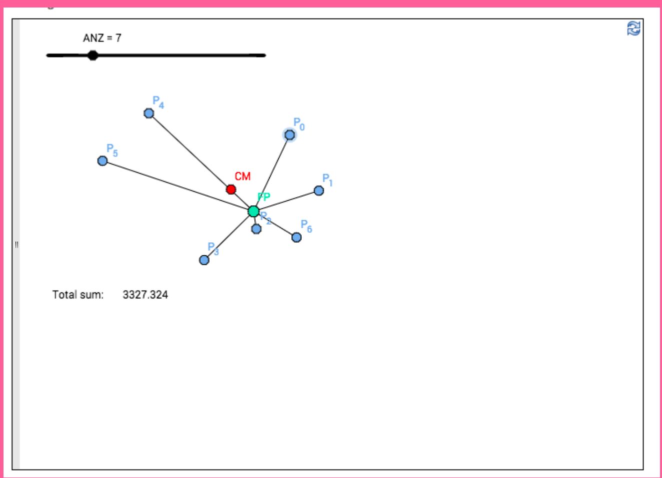
WEISZFELD ALGORITHMUS MIT JAVASCRIPT (I)

```
geometric_median = function(epsilon) {
    var P,Q;
    P={};
    P.x=gb.getXcoord("CM");
    P.y=gb.getYcoord("CM");

    while (true){
      Q = median_approx(P);
      if (eukl_distance(P, Q) < epsilon){
        return Q;
      }
      P = Q;
    }
};
```

WEISZFELD ALGORITHMUS
MIT JAVASCRIPT (II)

```
median_approx = function(P) {
    var W,x,y,d,w,_len,_i,Q;
    W=x=y=0.0;
    Q={};
    _len=xl.length
    for (_i = 0; _i < _len; _i++) {
      Q.x = xl[_i];
      Q.y = yl[_i];
      d=eukl_distance(Q,P);
      if (d != 0){
        w =1.0/d;
        W+= w;
        x+=Q.x*w;
        y+=Q.y*w;
      }
    }
    Q.x = x/W;
    Q.y = y/W;
    return Q;
  };
```

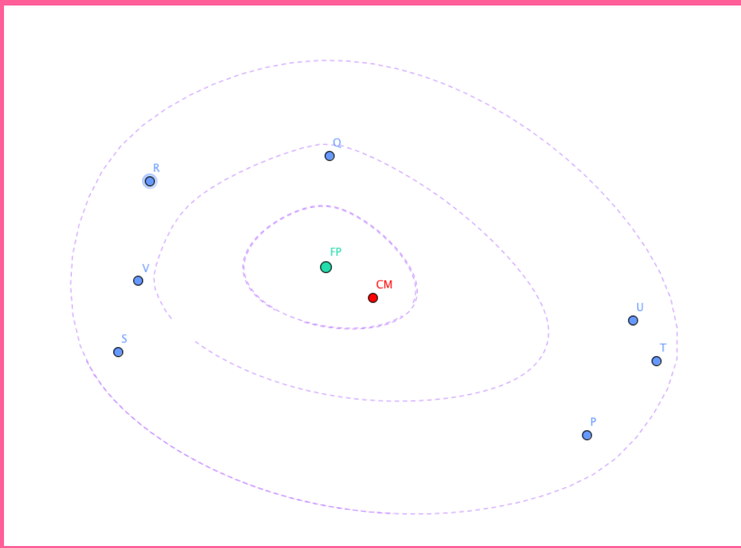
Fermat-Punkt für n>3



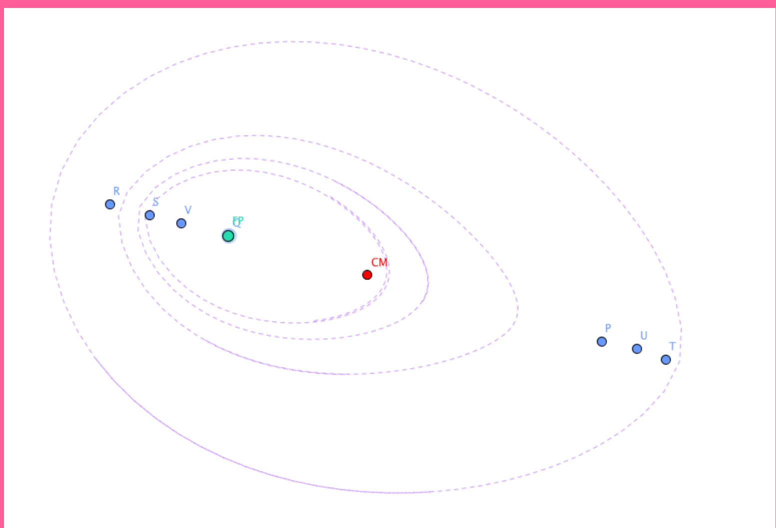
[Link GeoGebraTube]

POTENZIALE UND ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN

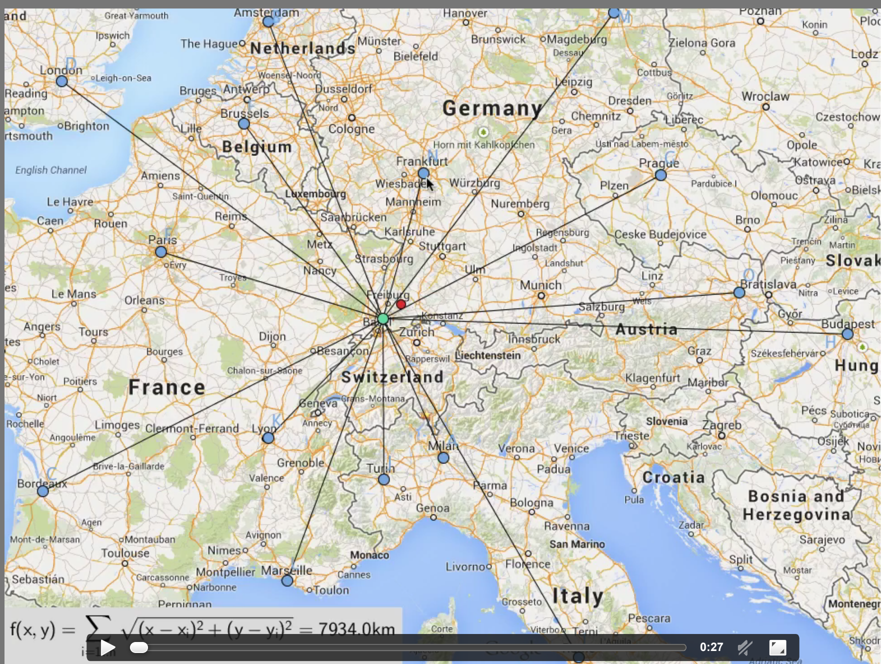
Link GeoGebraTube



IM EIN DIMENSIONALEN FALL
SPRINGT DER FERMAT-PUNKT AUF DEN MEDIAN



WO BEFINDET SICH DER MITTELPUNKT VON EUROPA ?



Link GeoGebraTube