

제8강 (7장)

요인배치법 2

지난 시간

7.1 대비와 직교분해

7.2 2^2 요인배치법

7.3 2^3 요인배치법

제8강 (7장)

요인배치법 2

이번 시간

7.4 2^n 요인배치법

7.5 3^2 요인배치법

7.6 회귀모형

제8강 요인배치법 2

7.4 2^n 요인배치법

7.4 2^n 요인배치법

<표 7-13> 2^n 요인배치법의 분산분석표

	요인	자유도
주효과	A B C \vdots	$\left. \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \binom{n}{1} = n$
2요인 상호작용 효과	AB AC AD \vdots	$\left. \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
3요인 상호작용 효과	ABC ABD \vdots \vdots	$\left. \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \right\} \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
\vdots	\vdots	\vdots
n요인 상호작용 효과	$ABCD \dots$	$\binom{n}{n} = 1$
오차	E	$2^n(r-1)$
총	T	$r2^n - 1$

3요인 이상의 상호작용효과??

7.4 2^n 요인배치법

예 7.4 온도(A), 습도(B), 압력(C), 진동(D) 네 요인의 요인배치 실험을 한 결과 제품의 강도(strength)가 다음 표와 같다. 각 요인의 효과와 변동을 구하고 분산분석표를 작성하라.

<표 7-14> 2^4 요인배치법의 자료

	A_0				A_1			
	B_0		B_1		B_0		B_1	
	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	-1	5	9	11	0	3	4	8
D_1	-1	-9	1	-5	-9	-13	5	-4

7.4 2ⁿ 요인배치법

풀이 < 예이츠계산법 >

처리조합	자료	(1)	(2)	(3)	(4)	요인효과	요인변동
(1)	-1	-1	12	39	4	$0.25 = M$	$1 = CT$
<i>a</i>	0	13	27	-35	-16	$-2 = A$	$16 = SS_A$
<i>b</i>	9	8	-4	-9	54	$6.75 = B$	$182.25 = SS_B$
<i>ab</i>	4	19	-31	-7	10	$1.25 = AB$	$6.25 = SS_{A \times B}$
<i>c</i>	5	-10	-4	25	-12	$-1.5 = C$	$9 = SS_C$
<i>ac</i>	3	6	-5	29	0	$0 = AC$	$0 = SS_{A \times C}$
<i>bc</i>	11	-22	-4	-7	-6	$-0.75 = BC$	$2.25 = SS_{B \times C}$
<i>abc</i>	8	-9	-3	17	-2	$-0.25 = ABC$	$0.25 = SS_{A \times B \times C}$
<i>d</i>	-1	1	14	15	-74	$-9.25 = D$	$342.25 = SS_D$
<i>ad</i>	-9	-5	11	-27	2	$0.25 = AD$	$0.25 = SS_{A \times D}$
<i>bd</i>	1	-2	16	-1	4	$0.5 = BD$	$1 = SS_{B \times D}$
<i>abd</i>	5	-3	13	1	24	$3 = ABD$	$36 = SS_{A \times B \times D}$
<i>cd</i>	-9	-8	-6	-3	-42	$-5.25 = CD$	$110.25 = SS_{C \times D}$
<i>acd</i>	-13	4	-1	-3	2	$0.25 = ACD$	$0.25 = SS_{A \times C \times D}$
<i>bcd</i>	-5	-4	12	5	0	$0 = BCD$	$0 = SS_{B \times C \times D}$
<i>abcd</i>	-4	1	5	-7	-12	$-1.5 = ABCD$	$9 = SS_{A \times B \times C \times D}$

7.4 2ⁿ 요인배치법

풀이 < 분산분석표 >

요 인	제 곱 합	자 유 도	평 균 제 곱	F_0
A	16.0	1	16.0	7.48*
B	182.25	1	182.25	85.2**
C	9.0	1	9.0	4.21
D	342.25	1	342.25	160**
$C \times D$	110.25	1	110.25	51.5**
$A \times B \times D$	36	1	36	16.8**
E'	19.25	9	2.14	
T	715	15		

7.4 2ⁿ 요인배치법

R 실습

```
strength <- c(-1, 5, 9, 11, 0, 3, 4, 8, -1, -9, 1, -5, -9, -13, 5, -4) # strength(강도)  
temp <- rep(c(rep(-1, 4), rep(1, 4)), 2) # temp==temperature(온도)  
humid <- rep(c(-1, -1, 1, 1), 4) # humid==humidity(습도)  
press <- rep(c(-1, 1), 8) # press==pressure(압력)  
vib <- c(rep(-1, 8), rep(1, 8)) # vib==vibration(진동)  
strength.data <- data.frame(strength, temp, humid, press, vib)  
temp = as.factor(strength.data[,2]) # temp를 factor 변수로  
humid = as.factor(strength.data[,3]) # humid를 factor 변수로  
press = as.factor(strength.data[,4]) # press를 factor 변수로  
vib = as.factor(strength.data[,5]) # vib를 factor 변수로  
order=sample(16) # 전체 실험의 랜덤화
```

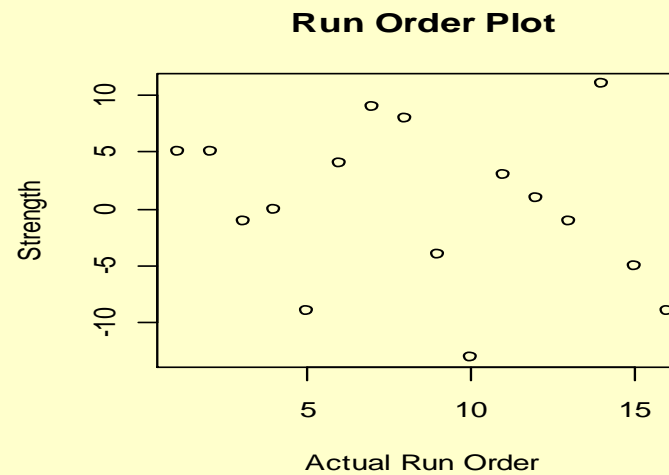
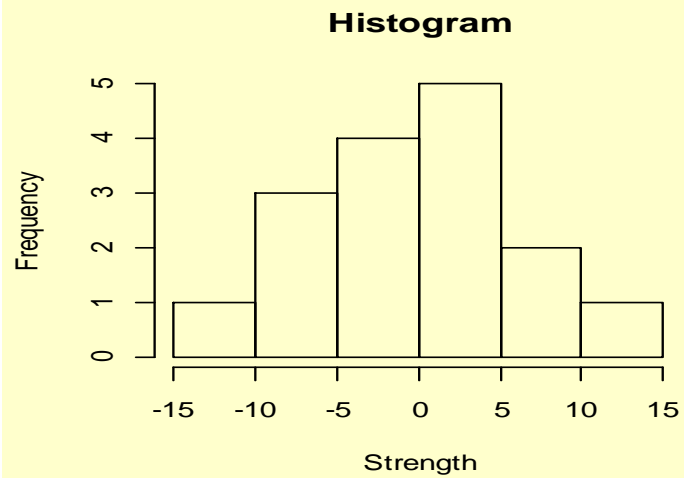
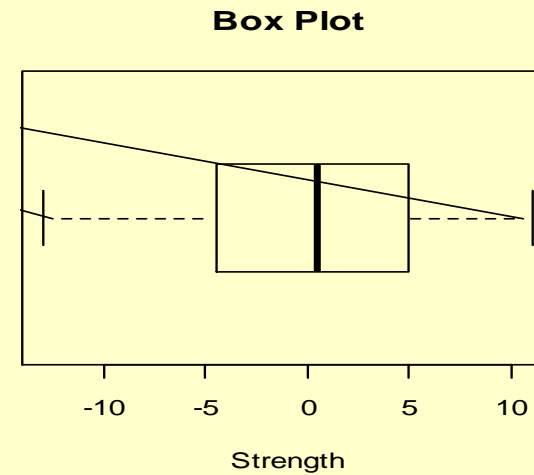
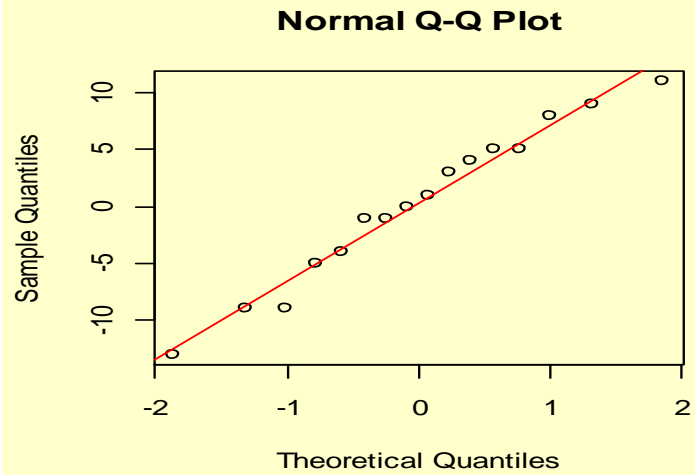

7.4 2ⁿ 요인배치법

R 실습

```
df=data.frame(temp,humid,press,vib,strength,order)  
par(bg=rgb(1,1,0.8), mfrow=c(2,2)) # 2 by 2 그림  
qqnorm(strength) # 반응변수인 강도를 정규확률지에 plot하여 이상치 있는지 확인  
qqline(strength, col = 2) # 점들에 가장 적합한 직선 그음  
boxplot(strength, horizontal=TRUE, main="Box Plot", xlab="Strength")  
hist(strength, main="Histogram", xlab="Strength") # boxplot과 히스토그램으로 분포 파악  
plot(order, strength, xlab="Actual Run Order", ylab="Strength",  
main="Run Order Plot") # 실험순서 별 강도에 이상치 있는지 확인
```

7.4 2ⁿ 요인배치법

R 실습



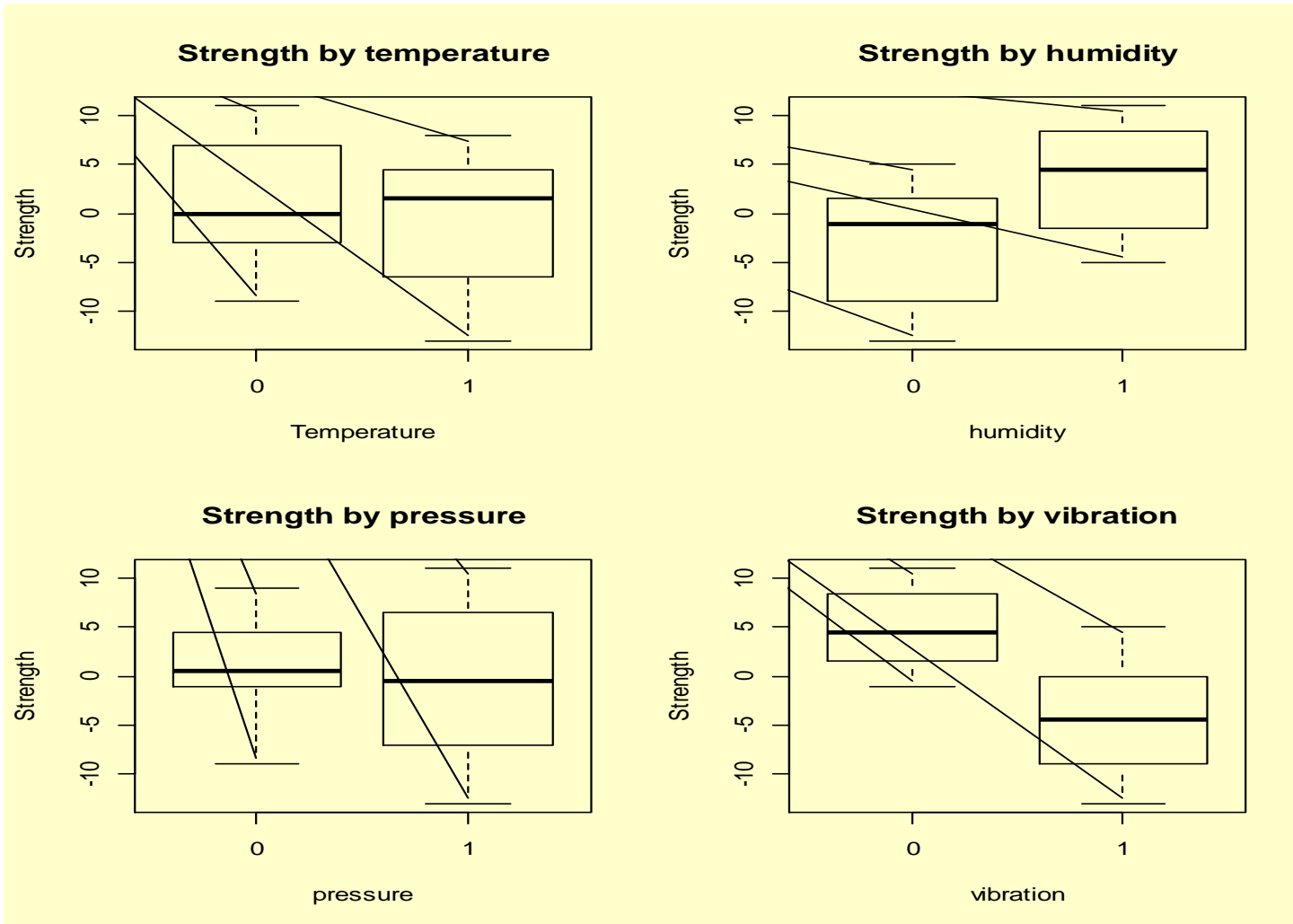
7.4 2ⁿ 요인배치법

R 실습

```
par(bg=rgb(1,1,0.8),mfrow=c(2,2))  
boxplot(strength~temp, data=df, main="Strength by temperature",  
xlabs="Temperature",ylab="Strength") # temperature의 주효과 파악  
boxplot(strength~humid, data=df, main="Strength by humidity", xlab="humidity",ylab="Strength")  
# humidity의 주효과 파악  
boxplot(strength~press, data=df, main="Strength by pressure",  
xlabs="pressure",ylab="Strength") # pressure의 주효과 파악  
boxplot(strength~vib, data=df, main="Strength by vibration", xlab="vibration",ylab="Strength")  
# vibration의 주효과 파악  
par(mfrow=c(1,1))
```

7.4 2ⁿ 요인배치법

R 실습



7.4 2ⁿ 요인배치법

R 실습

```
upto3 = aov(strength~(temp+ humid+ press+ vib)^3,data=df)  
summary(upto3)
```

	<i>Df</i>	<i>Sum Sq</i>	<i>Mean Sq</i>	<i>F value</i>	<i>Pr(>F)</i>	
<i>temp</i>	1	16.0	16.0	1.778	0.410	
<i>humid</i>	1	182.2	182.2	20.250	0.139	
<i>press</i>	1	9.0	9.0	1.000	0.500	
<i>vib</i>	1	342.2	342.2	38.028	0.102	
<i>temp:humid</i>	1	6.2	6.2	0.694	0.558	
<i>temp:press</i>	1	0.0	0.0	0.000	1.000	
<i>temp:vib</i>	1	0.3	0.3	0.028	0.895	
<i>humid:press</i>	1	2.3	2.3	0.250	0.705	
<i>humid:vib</i>			1 1.0	1.0	0.111	0.795
<i>press:vib</i>	1	110.2	110.2	12.250	0.177	
<i>temp:humid:press</i>	1	0.2	0.2	0.028	0.895	
<i>temp:humid:vib</i>	1	36.0	36.0	4.000	0.295	
<i>temp:press:vib</i>	1	0.3	0.3	0.028	0.895	
<i>humid:press:vib</i>	1	0.0	0.0	0.000	1.000	
<i>Residuals</i>	1	9.0	9.0			

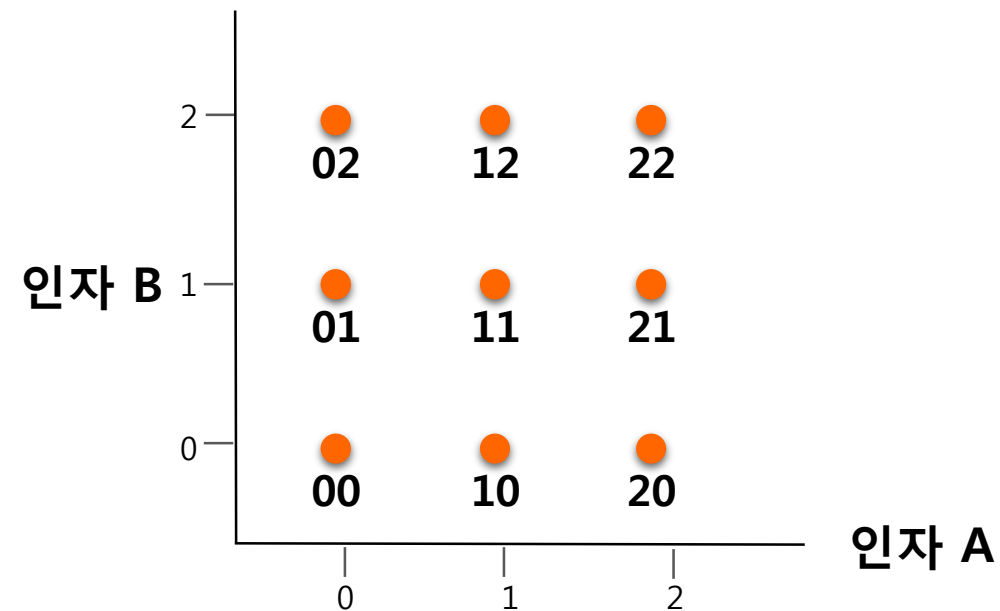
제8강 요인배치법 2

7.5 | 3^2 요인배치법

7.5 3^2 요인배치법

<표 7-15> 3^2 요인배치법의 자료 배열

	A_0	A_1	A_2	T_j
B_0	x_{00}	x_{10}	x_{20}	$T_{.0}$
B_1	x_{01}	x_{11}	x_{21}	$T_{.1}$
B_2	x_{02}	x_{12}	x_{22}	$T_{.2}$
$T_{i.}$	$T_{0.}$	$T_{1.}$	$T_{2.}$	T



[그림 7-3] 3^2 요인배치법

7.5 3^2 요인배치법

- 등 간격 계량요인의 경우 1차 효과와 2차 효과

$$L_I = -T_{0..} + T_{2..} \quad \dots\dots\dots (7.69)$$

$$L_Q = T_{0..} - 2T_{1..} + T_{2..} \quad \dots\dots\dots (7.70)$$

각각은 대비(contrast)이며, 그 변동은 다음과 같음

$$SS_I = \frac{1}{6r} (T_{2..} - T_{0..})^2 \quad \dots\dots\dots (7.71)$$

$$SS_Q = \frac{1}{18r} (T_{0..} - 2T_{1..} + T_{2..})^2 \quad \dots\dots\dots (7.72)$$

서로 직교(orthogonal)하므로 다음과 같이 전체변동을 쪼갤 수 있음

$$SS_A = SS_I + SS_Q$$

7.5 3² 요인배치법

예 7.4 온도 ($A_0 : 90^{\circ}\text{C}$, $A_1 : 100^{\circ}\text{C}$, $A_2 : 110^{\circ}\text{C}$)와
촉매량 ($B_0 : 1.2\%$, $B_1 : 1.4\%$, $B_2 : 1.6\%$)이
어떤 화학물질의 합성수율에 미치는 영향

<표 7-16> 합성수율

	A_0	A_1	A_2	$T_{.j}$
B_0	1.0 0.2 (1.2)	4.1 3.2 (7.3)	5.2 6.1 (11.3)	19.8
B_1	3.3 2.7 (6.0)	6.2 5.4 (11.6)	6.7 7.2 (13.9)	31.5
B_2	1.3 1.9 (3.2)	3.2 4.2 (7.4)	6.0 6.4 (12.4)	23.0
$T_{i..}$	10.4	26.3	37.6	$T = 74.3$

7.5 3^2 요인배치법

풀이 < 분산분석표 >

요 인	제곱합	자유도	평균제곱	F_0
A	62.241	2	31.121	111.545**
B	12.188	2	6.094	21.842**
$A \times B$	1.352	4	0.338	1.21
E	2.515	9	0.279	
T	78.296	17		

7.5 3^2 요인배치법

풀이 < 대비를 포함한 분산분석표 >

요 인	제 곱 합	자 유 도	평 균 제 곱	F_0
A	62.241	2	31.121	111.545**
L_1	61.653	1	61.653	220.978**
L_2	0.588	1	0.588	2.108
B	12.188	2	6.094	21.842**
L_1	0.853	1	0.853	3.057
L_2	11.334	1	11.334	40.624**
$A \times B$	1.352	4	0.338	1.211
E	2.515	9	0.279	
T	78.296	17		

제8강 요인배치법 2

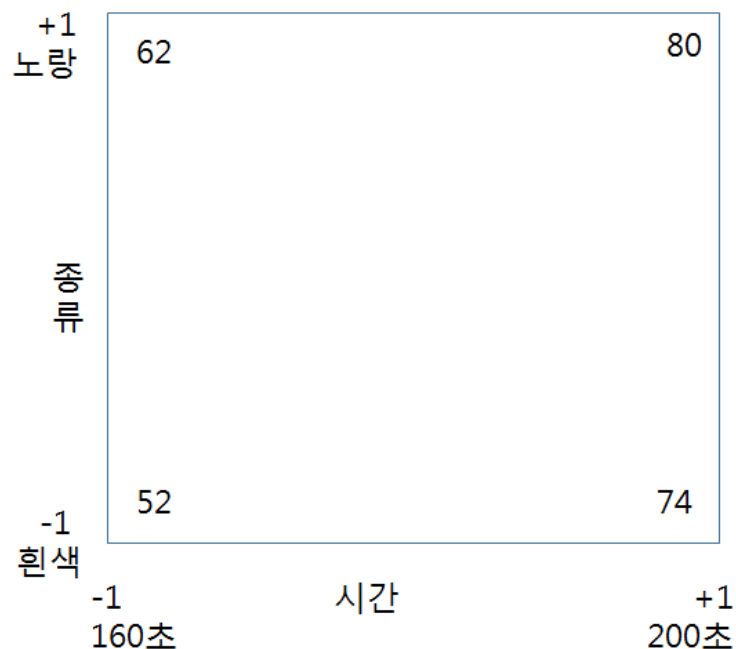
7.6 회귀모형

7.6 회귀모형

■ 2^3 요인배치의 경우

<표 7-17> 두 종류의 팝콘을 일정 시간 가열했을 때 튀겨진 팝콘의 수

일련번호	랜덤한 순서	A=시간(x_1)	B=알맹이 종류(x_2)	터진 수(y)
1	2	-1	-1	52
2	4	+1	-1	74
3	1	-1	+1	62
4	3	+1	+1	80



<그림 7-4> 2차원상에 나타낸 팝콘데이터

7.6 회귀모형

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + \epsilon_i \quad \text{----- (7.73)}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} = \frac{52+74+62+80}{4} \quad \text{----- (7.74)}$$

$$\hat{y} = 67 + 10x_{1i} + 4x_{2i} - x_{1i}x_{2i} \quad \text{----- (7.75)}$$

가열시간(A)의 효과 β_1

노란 팝콘의 경우 $80 - 62 = 18$

하얀 팝콘의 경우 $74 - 52 = 22$

$$\text{평균} = \frac{18+22}{2} = 20 \quad (-1 \text{에서 } +1 \text{까지의 효과})$$

$$10 (= 20/2) \quad (0 \text{에서 } +1 \text{까지의 효과}) \rightarrow \hat{\beta}_1 = 10$$

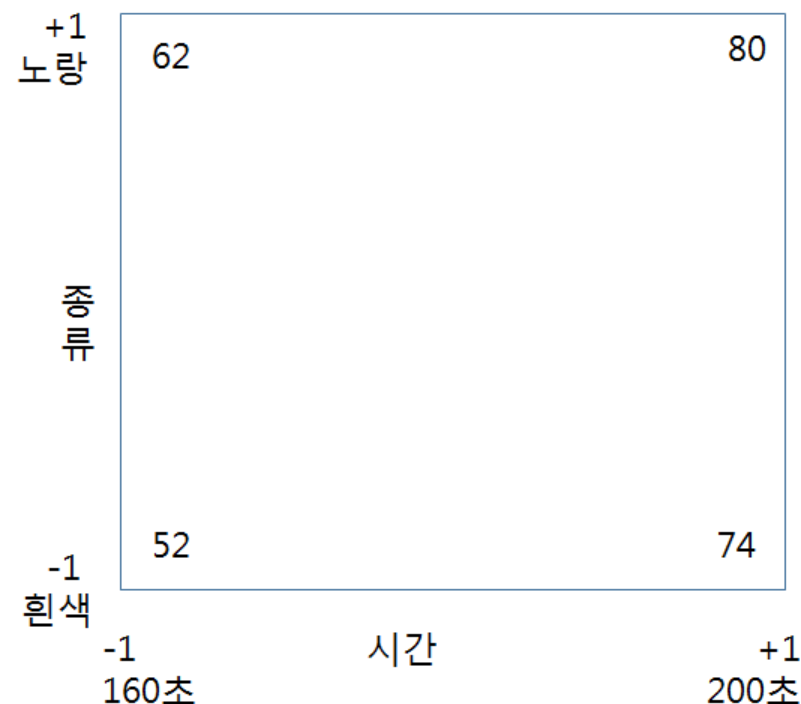
알맹이 종류(B)의 효과 β_2

긴(200초) 시간의 경우 $80 - 74 = 6$

짧은(160초) 시간의 경우 $62 - 52 = 10$

$$\text{평균} = \frac{6+10}{2} = 8 \quad (-1 \text{에서 } +1 \text{까지의 효과})$$

$$4 (= 8/2) \quad (0 \text{에서 } +1 \text{까지의 효과}) \rightarrow \hat{\beta}_2 = 4$$



7.6 회귀모형

가열시간(A)과 알맹이종류(B)의 상호작용효과(AB) β_{12} .

노란알맹이(B의 +1 수준)의 경우 시간의 효과 $80 - 62 = 18$

흰알맹이(B의 -1 수준)의 경우 시간의 효과 $74 - 52 = 22$

$$\text{차이} = \frac{18 - 22}{2} = -2 \quad (-1 \text{에서 } +1 \text{까지의 효과})$$

$$-1 (= -2/2) \quad (0 \text{에서 } +1 \text{까지의 효과}) \rightarrow \hat{\beta}_{12} = -1$$

$$\hat{y} = 67 + 10x_{1i} + 4x_{2i} - x_{1i}x_{2i} \quad \text{-----} \quad (7.75)$$

7.6 회귀모형

R 실습

```
A <- B <- c(-1, 1)
```

```
design <- expand.grid(A=A, B=B)
```

```
A <- design$A
```

```
B <- design$B
```

```
y <- c(52, 74, 62, 80)
```

```
popped_cornM1 <- lm(y~A+ B+ A:B)
```

```
summary(popped_cornM1)
```

Call:

lm(formula = y ~ A + B + A:B)

Residuals:

ALL 4 residuals are 0: no residual degrees of freedom!

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	67	NA	NA	NA
A	10	NA	NA	NA
B	4	NA	NA	NA
A:B	-1	NA	NA	NA

Residual standard error: NaN on 0 degrees of freedom

Multiple R-squared: 1, Adjusted R-squared: NaN

F-statistic: NaN on 3 and 0 DF, p-value: NA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + \epsilon_i \quad \text{----- (7.73)}$$

7.6 회귀모형

R 실습

```
popped_cornM2 <- lm(y~A+ B)
```

```
summary(popped_cornM2)
```

Call:

lm(formula = y ~ A + B)

Residuals:

1 2 3 4

-1 1 1 -1

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	67	1	67	0.0095 **
A	10	1	10	0.0635 .
B	4	1	4	0.1560

Signif. codes:

0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2 on 1 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9915, Adjusted R-squared: 0.9744

F-statistic: 58 on 2 and 1 DF, p-value: 0.09245

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_i \quad \text{-----} \quad (7.76)$$

7.6 회귀모형

예 7.4 온도(A), 습도(B), 압력(C), 진동(D) 네 요인의 요인배치 실험을 한 결과 제품의 강도(strength)가 다음 표와 같다. 각 요인의 효과와 변동을 구하고 분산분석표를 작성하라.

<표 7-14> 2^4 요인배치법의 자료

	A_0				A_1			
	B_0		B_1		B_0		B_1	
	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1	C_0	C_1
D_0	-1	5	9	11	0	3	4	8
D_1	-1	-9	1	-5	-9	-13	5	-4

7.6 회귀모형

R 실습

```
strength <- c(-1, 5, 9, 11, 0, 3, 4, 8, -1, -9, 1, -5, -9, -13, 5, -4)
temp <- rep(c(rep(-1, 4), rep(1, 4)), 2)
humid <- rep(c(-1, -1, 1, 1), 4)
press <- rep(c(-1, 1), 8)
vib <- c(rep(-1, 8), rep(1, 8))
linear.model1 <- lm(strength~(temp+humid+press+vib)^4)
summary(linear.model1)
```

회귀계수의 절대치가 1보다 큰 것을
중요 요인의 기준으로 삼는다면...

$x_1, x_2, x_4, x_3x_4, x_1x_2x_4$

lm(formula = strength ~ (temp + humid + press + vib)^4)

Residuals:

ALL 16 residuals are 0: no residual degrees of freedom!

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	2.500e-01	NA	NA	NA
temp	-1.000e+00	NA	NA	NA
humid	3.375e+00	NA	NA	NA
press	-7.500e-01	NA	NA	NA
vib	-4.625e+00	NA	NA	NA
temp:humid	6.250e-01	NA	NA	NA
temp:press	2.938e-16	NA	NA	NA
temp:vib	1.250e-01	NA	NA	NA
humid:press	-3.750e-01	NA	NA	NA
humid:vib	2.500e-01	NA	NA	NA
press:vib	-2.625e+00	NA	NA	NA
temp:humid:press	-1.250e-01	NA	NA	NA

$$\hat{y} = 0.25 - x_1 + 3.375x_2 - 0.75x_3 - 4.625x_4 + 0.625x_1x_2 + 10^{-16} \times 2.938x_1x_3 + 0.125x_1x_4 - 0.375x_2x_3 + 0.25x_2x_4 - 2.625x_3x_4 \\ - 0.125x_1x_2x_3 + 1.5x_1x_2x_4 + 0.125x_1x_3x_4 - 10^{-17} \times 9.922x_2x_3x_4 - 0.75x_1x_2x_3x_4 \quad \text{---- (7.80)}$$

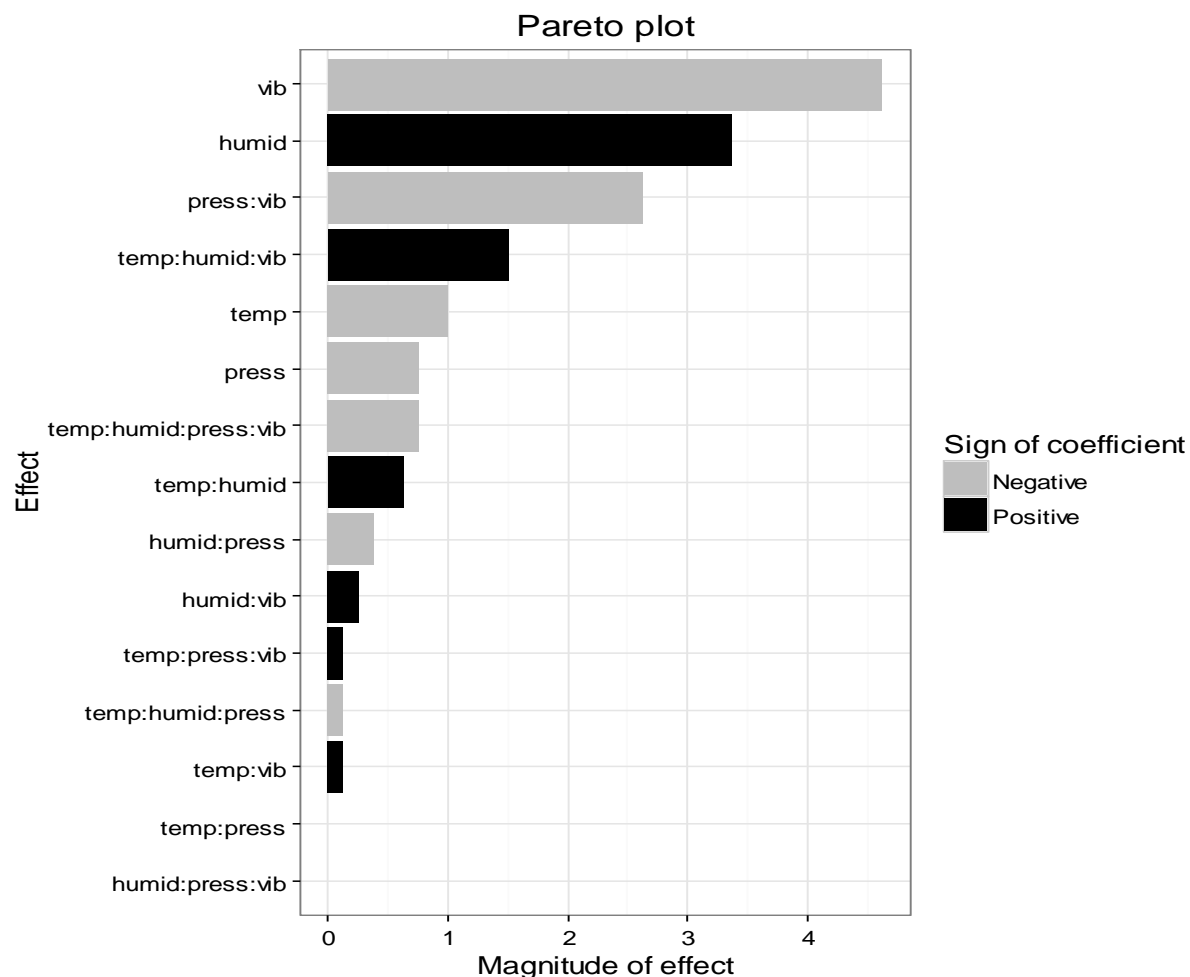
temp:humid:press:vib -7.500e-01 NA NA NA

7.6 회귀모형

R 실습

```
linear.model2 <- lm(strength~(temp+ humid+ press+ vib)^3)
```

```
summary(linear.model2)
```



Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	2.500e-01	7.500e-01	0.333	0.795
temp	-1.000e+00	7.500e-01	-1.333	0.410
humid	3.375e+00	7.500e-01	4.500	0.139
press	-7.500e-01	7.500e-01	-1.000	0.500
vib	-4.625e+00	7.500e-01	-6.167	0.102
temp:humid	6.250e-01	7.500e-01	0.833	0.558
temp:press	2.834e-16	7.500e-01	0.000	1.000
temp:vib	1.250e-01	7.500e-01	0.167	0.895
humid:press	-3.750e-01	7.500e-01	-0.500	0.705
humid:vib	2.500e-01	7.500e-01	0.333	0.795
press:vib	-2.625e+00	7.500e-01	-3.500	0.177
temp:humid:press	-1.250e-01	7.500e-01	-0.167	0.895
temp:humid:vib	1.500e+00	7.500e-01	2.000	0.295
temp:press:vib	1.250e-01	7.500e-01	0.167	0.895
humid:press:vib	-6.901e-17	7.500e-01	0.000	1.000

Residual standard error: 3 on 1 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9874, Adjusted R-squared: 0.8112

F-statistic: 5.603 on 14 and 1 DF, p-value: 0.3209

다음 시간 안내

제9강 (8장)

교락법과 일부실시법