미적분학의 기초

Introduction to Calculus

머리말

1996년의 일이다. 내가 대학교 2학년 때 1학년 후배들을 가르친 적이 있었다. 그들에게
'$y=x^2$을 미분하면 뭐지?' 라고 물으니
'$2x$ 요.'라고 대답했다. 그래서 내가 다시
'이 함수의 $x=1$에서 접선의 기울기는 얼마지?' 하고 물었더니 아무도 대답을 못했다. 고등학교에서 미적분을 배운 학생들이 이런 단순한 질문도 대답을 못하는 것에 나는 놀랐다. 지금도 가끔 미적분학을 고등학생들에게 가르치면, 그들은 도함수를 구하고 부정적분을 구하는 계산은 할 줄 안다. 그러나 미분이 의미하는 것이 무엇이고, 이 문제에서 왜 미분을 하며 왜 적분을 하는지, 그리고 미분과 적분 사이에는 어떠한 관계(미적분학의 기본정리를 뜻함)가 있는지를 제대로 알고 있는 사람이 별로 없었다.

비유적으로 말하면 $12\times18=216$ 같은 곱셈은 척척함에도 불구하고 **'철수는 연필을 18다스 가지고 있다. 철수가 가진 연필은 모두 몇 자루인가?'** 라는 질문에 대해서 대답을 못하는 꼴이 되어 버린 것이다. 곱하기만 할 줄 알지 곱하기가 무엇이고 언제(왜) 곱하기를 쓰는지 모르는 것처럼, 언제 미분을 하고 왜 적분을 하는지 알지 못한 체 열심히 미적분(calculus)의 계산(calculation)만을 연습하고 있는 것이다. 그러니 당연히 위와 같은 질문에 대답을 못 할 수밖에. 이번(2004년 9월)에 고3 학생들에게 미적분학을 가르치다가 아무래도 참고자료가 필요하다고 느껴서 한번 만들어보았다. 왜냐하면 내가 가르치는 방식이 일반 교과서나 문제집과는 조금 다르기 때문이다.

이 글은 제목 그대로 미적분학의 기초지식에 관해 적은 것이다. 복잡한 함수의 미분적분법이나, 수능핵심 기출문제 따위는 여기에 없다. 그런 것은 시중에 판매되는 문제집을 보면 될 것이다. 또한 나는 미분, 적분의 뜻을 먼저 설명하고 그것의 계산법은 나중에 보였다. 이것 역시 보통 교과서나 문제집과는 다른 순서이다. 나는 개인적으로 이게 올바른 순서라고 생각한다. 소제목 뒤의 * 표를 붙인 것은 고등학교 교과과정의 내용은 아니나 알아두면 좋은 것을 뜻한다. 또한 소제목 뒤에 있는 †(dagger)표는 대학교 과정이니 넘어가도 좋다.

끝으로 이 글은 미적분을 한번 배워본 사람에게 또 다른 느낌으로 다가올 것이다. 물론 미적분을 처음 배우는 사람에게도 나름대로 훌륭한 지침서가 되리라고 기대한다. 이 글을 통해 미적분학을 바라보는 새로운 눈을 가지길 바란다. 그리고 이글은 미적분학을 배우고 싶은 사람이라면 어느 누가 보아도 무방하다. 하지만 상업적인 목적의 사용이나 임의로 편집해서 배포하는 것은 반드시 금해주길 바란다. 이 글은 완성된 글은 아니지만, 내 마음에 90% 정도는 드는 글이다. 앞으로 조금만 더 수정, 보완하면 완성할 수 있을 것 같다.

처음 글과 순서를 조금 바꾸고 설명과 예제를 추가했다. 또한 블러디님이 말씀하신대로 치환적분을 추가했다. 그랬더니 처음보다 13쪽 정도 증가해서 43쪽이 되었다. 한글 2002와 한글 2004에서 수식의 글꼴이 약간 다르다. 그래서 수식의 모양이 다른 부분이 있지만 양해 바란다.

다시 추가로 음함수 미분법, 역함수 미분법, 함수의 넓이, 회전체 부피 구하기 등을 넣었다. 예제를 추가하고 설명과 순서를 약간 바꾸었다. 함수의 연속성과 푸리에 급수 등을 추가했다. 순서와 그에 대한 설명을 넣었다.

내 블로그 http://blog.daum.net/eigenvalue - CopyLeft by 밝히리 -

순서 (Contents)

순서에 링크를 넣어 놓았기 때문에 마우스로 제목을 클릭하면 해당 페이지로 이동하며, 또한 이동한 페이지에 있는 제목을 클릭하면 다시 이 페이지(순서)로 돌아온다. 이 책의 구성(순서)은 다른 중고등학교의 수학 교과서나 문제집과는 다르다. 대학교에서 보는 미적분학 책 중에서 이와 순서가 비슷한 책들이 있다.

미분에서는 고등학교 '수학 II' 과정에서 나오는 미분의 정의, 도함수, 함수의 극한, 함수의 연속성, 평균변화율, 도함수의 성질, 합성함수의 미분법, 음함수 미분법, 함수의 극대와 극소 등의 내용을 적었다.

정적분에서는 정적분의 정의, 정적분의 기본성질 등을 적었다.

미적분학의 기본정리에서는 부정적분에 대한 짧은 글, 미적분학의 기본정리, 거리 속도 가속도와 미분 적분, 넓이 부피와 정적분 등을 적었다. 보통 교과서에서는 짧게 설명하고 끝나지만, 미적분에서 가장 중요하고 기본이 되는 부분이기 때문에 자세하게 설명했다.

부정적분에서는 보통 교과서에서는 길게 설명하지만, 함수의 부정적분법에 대해서 짧게 적었다. 여기까지가 고등학교 '수학 II' 에 나오는 내용이고 그 아래부터는 고등학교 '미분과 적분' 과정에서 나오는 내용이다.

초월함수의 미분에서는 Euler의 수, 자연로그, 지수함수 로그함수의 미분법, 오일러의 공식, 삼각함수의 미분법, 테일러 급수, 역함수 미분법 등을 적었다.

초월함수의 부정적분에서는 삼각함수 지수함수의 적분법, 부분적분법, 로그함수 적분법, 치환적분법, 파푸스 정리 등을 적었다.

삼각함수의 기본 성질에서는 '수학 10-나' 과정에서 나오는 sine 법칙, cosine 법칙 등과 삼각함수의 덧셈정리 등을 적었다. 이런 거 몰라도 미적분에 관한 기본 개념을 이해하는데 아무런 지장이 없기 때문에 일부러 뒤로 뺐다.

초월함수의 정적분에서는 주로 대학교 과정에서 다루는 퓨리에 급수, 퓨리에 변환, 감마함수, 원주율 구하는 공식 등을 적었다. 대학교에서 미적분을 배우는 사람과 고등학교에서 정적분을 어떻게 써먹는지 궁금한 사람을 위해서 적었다.

맨 마지막 페이지에는 이 책(?)의 표지도 넣었다. 표지만 보면 대학교에서 배우는 전자기학 책처럼 보일 것이다. 그렇지만 미적분학이 매우 많이 사용되는 학문중의 하나가 전자기학이기 때문에 미분 형태의 맥스웰 방정식, 적분형태의 맥스웰 방정식, 발산정리, 스토크스 정리 등을 적어서 표지를 만들었다.

미분(differentiation)

역사적으로는 아르키메데스(Archimedes)가 정96각형의 둘레의 길이를 구해서 원주율을 구한 것이 적분법의 시초라고 할 수 있다. 그렇게 따지면 적분은 2000년도 더 된 학문이다. 하지만 미분은 역사가 그렇게 길지는 않다. 보통 미적분학의 창시자라고 하는 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)에게는 ‘적분과 미분과의 관계(미적분학의 기본정리)를 발견한 사람’ 이라는 말이 더 어울릴 것 같다. 미분, 적분, 미분방정식, 적분방정식 등은 순수수학이라기 보다 응용수학이라는 느낌이 강하다. 미적분학은 자연과학과 공학을 하는 사람들에게는 매우 중요한 학문이며, 아무런 연관성이 없어 보이는 경제학과에서도 블랙-숄즈(Black-Scholes) 미분방정식을 배운다. 그만큼 미적분학은 매우 중요한 학문이다. 만약 미적분이 없었다면 가장 먼저 뉴턴의 운동법칙을 설명할 수 없게 되므로 고전역학은 탄생하지 않았을 것이고, 라그랑주(Lagrange)와 해밀턴(Hamilton)의 변분법 역시 존재하지 않았을 것이며, 전자기학을 단 네 개의 단순한 방정식으로 표현하는 맥스웰 방정식(Maxwell’s equations) 역시 없었을 것이다. 또한 현대물리학의 핵심중의 하나이고 요즘 같이 NT를 중요시하는 세상에서 꼭 필요한 양자역학과, GPS 위성을 사용하는데 필요한 상대성이론 역시 존재하지 않았을 것이다. 간단하게 말하면 미적분학이 없었다면, 컴퓨터도 없었고, 핸드폰도 없었고, 인공위성도 없었으며 핵폭탄도 없었을 것이다. 역사적으로는 적분이 먼저 발견되었지만, 대부분의 책에는 미분이 먼저 소개되어 있다. 이렇게 하는 것이 더 논리적으로 설명할 수 있기 때문이다. 먼저 미분에 대해서 살펴보자.

● 미분 : 접선의 기울기

함수 $y=f(x)$의 $x=a$ 일때 y값은 $f(a)$라고 표기하며, 그 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$라고 표기한다. 미분계수를 표현하는 방법은 다음과 같이 여러 가지가 있다.

$$f'(a)=y'|_{x=a}=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}=f'(x)\Big|_{x=a}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$$

접선의 기울기는 다른 말로 **미분계수**(differential coefficient), 혹은 **순간변화율**이라고도 한다. 접선의 기울기를 어떻게 계산하는지 아는 것은 그리 중요하지 않다. 지금은 미분의 뜻을 아는 것이 먼저다. 계산하는 방법은 나중에 공부하면 된다.

$$\sqrt{2}=1.4142\ 1356\ 2373\ 0950\ 4880\ 1688\ 7242\ \cdots$$

라는 것을 알지 못한다 하더라도, 그 값을 계산할 줄 모른다 하더라도 $\sqrt{2}$가 의미하는 ‘제곱해서 2가 되는 수’라는 사실만으로도 충분하다. 계산하는 방법은 나중에 배우면 된다. 나는 중학교 때 $\sqrt{2}$ 계산하는 방법을 배웠지만, 지금은 잊어버렸다. 하지만 수학 공부하는데 아무런 지장 없다. 지금 단계에서는 미분이 ‘접선의 기울기’라는 사실을 아는 것만으로 충분하다.

eg 1] 함수 $y=x^2$은 $x=1$일 때 접선의 기울기가 2 이고, $x=2$일 때 접선의 기울기가 4이다. $f(1)$, $f(2)$, $f'(1)$, $f'(2)$를 구하여라.

$f(1)=1^2=1$

$f(2)=2^2=4$

$f'(1)=2$ $\quad\because$ $x=1$일 때 접선의 기울기가 2 이므로

$f'(2)=4$ $\quad\because$ $x=2$일 때 접선의 기울기가 4 이므로

eg 2] 위 함수위의 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식을 구하여라.

$x=1$일 때 접선의 기울기가 2 이므로, 구하는 접선의 방정식은 점 (1, 1)을 지나고 접선의 기울

기가 2인 직선의 방정식이다. 따라서 $y=2x-1$을 얻는다.

● 도함수

그냥 설명하면 어려우므로 보기를 들어서 설명하겠다.

함수 $f(x)=x^2+1$ 에 대하여

$x=1$일 때 접선의 기울기는 2

$x=2$일 때 접선의 기울기는 4

$x=3$일 때 접선의 기울기는 6 이다. 이를 기호를 이용하여 표현하면 아래와 같다.

$f'(1)=2,\ f'(2)=4,\ f'(3)=6$ 여기서 규칙을 찾았는가? $f'(4)$는 얼마가 되며 $f'(5)$는 얼마가 될까? $f'(4)=8,\ f'(5)=10$이 될 거라 짐작할 것이다. 그럼 마지막으로 $f'(x)$는 어떻게 될까? 위 함수에서 접선의 기울기는 언제나 x값의 2배였으므로 $f'(x)=2x$라고 짐작할 수 있을 것이다. 이렇게 함수 $y=f(x)$에서 x의 각 값에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 **도함수**(derivative)라고 하며, 이 도함수를 구하는 과정을 **미분**(differentiation)이라고 한다.

함수 $y=f(x)$의 도함수를 나타낼 때는 아래와 같은 기호들을 사용한다.

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}y=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Dy=Df(x)$$

지금까지 미분과 도함수에 관해서 설명했지만 그것을 계산하는 방법은 설명하지 않았다. 계산법은 뒤에 나오니 너무 성급하게 생각하지 말자. 지금은 이러한 단어의 뜻을 알고 이것과 친해지는 것이 중요하다. **미분계수**는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점 $x=a$에서 접선의 기울기$f'(a)$를 말하고, **도함수**는 주어진 x값에 미분계수로 대응하는 함수 $f'(x)$를 뜻하며, 도함수를 구하는 것을 **미분**이라고 한다. 보통 나를 포함한 대부분의 사람들은 이 세 가지를 별로 구별하지 않고 '미분'이라고 말하는 경향이 있다. 접선의 기울기는 정확한 표현으로 미분계수이지 미분이 아니다.

eg 3] 함수 $y=\frac{1}{3}x^3+x$ 의 도함수는 $y'=x^2+1$이다. 이때, $f(0),\ f(1),\ f(3),\ f'(0),\ f'(1),\ f'(3)$를 구하여라.

$f(0)=\frac{1}{3}0^3+0=0$ $\quad f(1)=\frac{1}{3}1^3+1=\frac{4}{3}$ $\quad f(3)=\frac{1}{3}3^3+3=12$

$f'(0)=0^2+1=1$ $\quad f'(1)=1^2+1=2$ $\quad f'(3)=3^2+1=10$

위의 예제에서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$의 도함수는 $f'(x)=x^2+1$라고 했다. 또한 $g(x)=x^2+1$의 도함수 $g'(x)=2x$라는 것도 말했다. 이 사실로부터 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$의 도함수의 도함수는 $2x$라는 것을 알 수 있을 것이다. 도함수의 도함수는 $f''(x)$라는 기호로 표시하며 **이계도함수**라고 한다. 이계도함수의 도함수는 $f^{(3)}(x)$라고 표시하며 **삼계 도함수**라고 한다. 함수 $y=f(x)$를 n번 미분한 함수를 ***n*계 도함수**라고 하며 $f^{(n)}(x)$라고 표시한다. 위의 경우에는 $f''(x)=2x$가 된다.

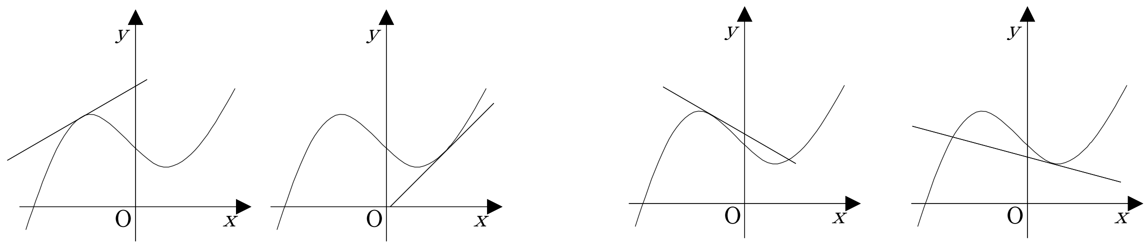
eg 4] 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$ 위의 점 (0, 0)과 (3, 12)에서의 접선의 방정식을 구하여라.

가. $f'(0)=1$ 이므로 $x=0$일 때 이 함수의 접선의 기울기는 1 이 된다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 점 (0, 0)를 지나면서 접선의 기울기가 1인 직선의 방정식이므로 $y=x$를 얻는다.

나. $f'(3)=10$ 이므로 점(3, 12)에서의 접선의 기울기는 10이 된다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=10x-18$을 얻는다.

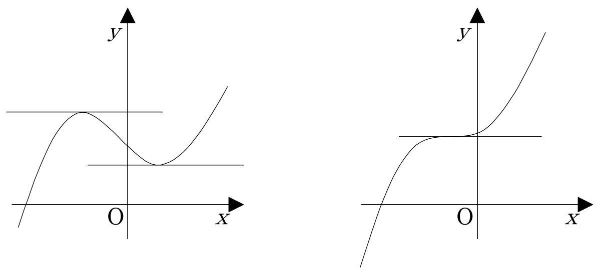
● 함수의 그래프와 미분의 수학적 의미

$f'(a)>0$**의 수학적 뜻** : 일반적으로 함수 $y=f(x)$는 $x=a$ 근방에서 증가상태에 있다.



$f'(a)<0$**의 수학적 뜻** : 일반적으로 함수 $y=f(x)$는 $x=a$ 근방에서 감소상태에 있다.

$f'(a)=0$**의 수학적 뜻** : 일반적으로 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 증가생태에서 감소상태(혹은 감소상태에서 증가상태)로 바뀐다. 즉, 극대값 또는 극소값을 갖는다. 예외도 있어서 증가상태나 감소상태를 계속 유지하는 경우도 있다. 이때는 극값을 갖지 않는다.(보기 : $y=x^3$)



$f''(a)>0$**의 수학적 뜻** : 함수 $y=f(x)$의 도함수인 $y'=f'(x)$가 $x=a$ 근방에서 증가상태이다.

⇒ $x=a$ 근방에서 x가 커질수록 함수의 접선의 기울기도 커진다.

⇒ 함수 $y=f(x)$가 $x=a$ 근방에서 아래로 볼록이다.

$f''(a)<0$**의 수학적 뜻** : $f'(x)$가 $x=a$ 근방에서 감소상태이다.

⇒ $x=a$ 근방에서 x가 커질수록 함수의 접선의 기울기는 작아진다.

⇒ 함수 $y=f(x)$가 $x=a$ 근방에서 위로 볼록이다.

$f''(a)=0$**의 수학적 뜻** : $f'(x)$가 $x=a$ 근방에서 극값을 갖는다.

⇒ 함수 $y=f(x)$가 $x=a$ 근방에서 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀐다.

(또는 반대로 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀜) 이러한 점을 **변곡점**이라 한다.

$f'(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖지 않는 경우는 변곡점이 아닐 수도 있다. (보기 : $y=x^4$)

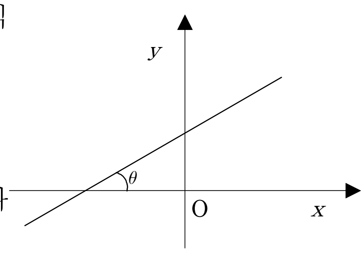
지금까지 미분과 도함수에 관해서 설명을 했다. 미분이 무엇이고 도함수가 무엇인지, 접선의 기울기는 어떻게 구하는지 머리속에 그려지는가? 이러한 그림이 그려진 후에 다른 문제집(앞으로 문제집이라고 하는 것은 고등학교에서 보는 교과서 혹은 정석, 개념원리 같은 고등학교 수준의 수학 문제집을 뜻하는 말로 사용할 것이다.)에서 나오는 복잡한(?) 미분의 정의식을 살펴보면 더욱 이해하기가 쉬울 것이다. 수학에서는 계산을 할 줄 아는 것도 중요하지만, 이렇게 전체적인 그림을 그리는 것이 더 중요하다. 계산만 할 줄 아는 사람은 머리말에 나오는 그러한 현상을 경험하게 될 것

이다. 하지만 전체적인 그림을 머리 속에 가지고 있는 사람은 도함수를 못 구해서 문제를 못 푸는 경우는 발생하더라도 미분을 이용할 줄 몰라서 문제를 못 푸는 경우는 별로 없을 것이다. 이제 본격적으로 미분의 계산법을 살펴보자. 일단, 중학교 2학년 때 배운 직선의 방정식과 수열(또는 함수)의 극한을 간단히 복습해 보자.

● 직선의 기울기

두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 아래의 식으로 구한다.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



또한 기울기가 m인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하면 기울기와 각은 아래와 같은 관계가 있다.

$m = \tan\theta$

● 수열의 극한

수열 $\{a_n\}$에서, n이 한 없이 커짐에 따라서 a_n이 α에 한 없이 가까워질 때, 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 말하고, 이를 $n \to \infty$ 일 때, $a_n \to \alpha$ 혹은 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라고 표현한다.

eg 5] $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

● $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 수열의 극한 값

분자의 발산속도보다 분모가 빠를 경우 수열은 0에 수렴하고, 반대일 경우는 $\pm\infty$로 발산한다. 분자와 분모의 차수가 같을 경우 수열의 극한은 n의 최고차항의 계수의 비와 같다.

eg 6] 다음 극한 값을 구하시오.

가. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}$

나. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{-3n^2+5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n^2}}{-3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{-3+0+0} = -\frac{2}{3}$

다. $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

● 함수의 연속성과 극한

직관적으로 말할 때, 연속의 정의는 '함수의 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있다.'이다. '끊어지지 않고 이어져있다'는 것을 수학에서는 '함수값과 극한값이 같다'라고 말하며, 수식을 이용하면

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 이면, 함수 $f(x)$는 $x = a$인 점에서 연속이다.

라고 표현한다. 먼저 함수의 극한에 관하여 설명해보자.

함수 $y=f(x)$에서 x가 a에 한 없이 가까워짐에 따라서, $f(x)$가 α에 한 없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$는 $x \to a$일 때 α에 **수렴**한다고 말하고, 이를

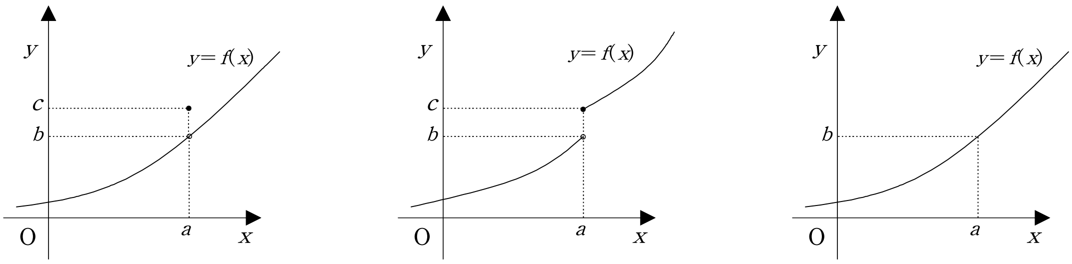
$x \to a$일 때, $f(x) \to \alpha$ 혹은

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

라고 표현한다. 뒤에서 자세히 말하겠지만 함수가 a에서 정의가 되지 않아도 극한값은 존재할 수 있으며 함수값과 극한값이 같지 않을 수도 있다. 이런 두 가지 경우 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이 아니다. 연속함수인 경우 함수의 극한값은 그 점에서의 함수값과 같다.

eg 7] $\lim_{x \to 1}(x^2+2) = 1^2+2=3$

아래 그림들을 이용하여 함수의 연속성에 대해서 설명하겠다.



왼쪽 그래프를 보자. 이 함수는 $x=a$에서 끊어져 있기 때문에 이 점에서 불연속이다. 불연속이라는 것을 수학에서는 어떻게 말하는지 아래에 설명하겠다.

$f(a)=c$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$일 때, $y=c$이다.

$\lim_{x \to a} f(x) = b$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 극한 값은 $y=b$이다.

위와 같이 함수가 어떠한 점에서 연속이지 않다면 극한값과 함수값은 다르다.

가운데 그래프를 보자. 이 함수 역시 $x=a$에서 끊어져 있기 때문에 이 점에서 불연속이다. 이 경우에는 불연속이라는 것을 수학에서는 어떻게 말하는지 아래에 설명하겠다.

$f(a)=c$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$일 때, $y=c$이다.

$\lim_{x \to a-0} f(x) = b$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 좌극한 값은 $y=b$이다.

$\lim_{x \to a+0} f(x) = c$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 우극한 값은 $y=c$이다.

함수 $y=f(x)$에서 x가 a보다 작은 값에서 a에 한 없이 가까워질 때의 극한 값을 **좌극한**이라고 하며, 우극한도 비슷하게 정의한다. 위 함수는 $x=a$에서 좌극한 값과 우극한 값이 다르기 때문에 극한값이 존재하지 않는다. 극한값이 존재하지 않으면, 극한값과 함수값이 같을 수 없으므로 고민할 필요도 없이 불연속이다.

오른쪽 그래프를 보자. 이 함수는 $x=a$에서 연결되어 있기 때문에 연속이다. 이것을 수학에서는 다음과 같이 설명한다.

$f(a)=b$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$일 때, $y=b$이다.

$\lim_{x \to a} f(x) = b$: 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 극한 값은 $y=b$이다.

극한값과 함수값이 같기 때문에 연속이 된다. 이것을 한가지 식으로 쓴다면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

보통 문제집에는 연속이 되기 위한 조건을 세 가지를 적는데, 사실은 위의 조건 하나만으로 충분하다. 어떠한 점에서 <u>극한값과 함수값이 같으면 연속이 된다</u>는 사실을 기억하자. 한 가지 더 설명하면, 연속은 함수의 속성이 아니라 함수의 어떠한 점에서의 속성이다. 그래서

"함수 $y = f(x)$는 연속이다." 와 같은 말은 하지 않는다.

"함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 연속이다."처럼 어떠한 점을 명시한다. 또는

"함수 $y = f(x)$는 모든 실수 x에 대해서 연속이다." 또는

"함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 불연속이다." 와 같이 함수와 점 두 가지를 같이 나타낸다.

● $\frac{0}{0}$ 꼴의 다항함수의 극한 값

분자 분모를 인수분해한 다음 약분한다. 로피탈의 법칙(L'Hospital Rules)을 사용해도 된다. 로피탈의 법칙을 쓰려면 분자와 분모를 미분해야 하는데, 자세히 설명하면 복잡하므로 생략하겠다. 그냥 이런게 있다는 것을 알려주기 위해서 적은 것이다. 관심 있는 사람은 정석 책 같은 곳에 나와 있으니 참고하면 도움이 될 것이다.

eg 8] 다음 극한값을 구하시오.

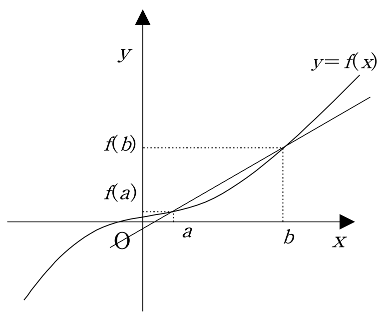
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

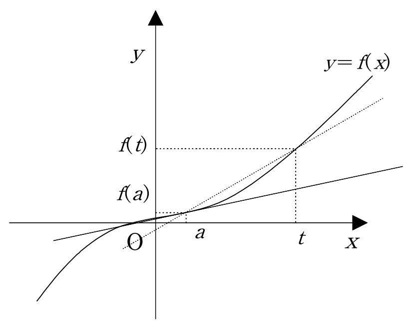
극한의 엄밀한 정의는 $\epsilon - \delta$ 를 이용한다. 하지만 이는 대학교 과정이므로 생략한다.

● 평균변화율

이제 본격적인 미분의 계산을 해 보자. 평균변화율이란 함수의 그래프 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 말한다. 구체적으로 말하면 함수 $y = f(x)$위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$을 지나는 직선의 기울기가 바로 **평균변화율**이며 이는 아래의 수식으로 표현된다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$





● 미분계수의 계산

앞에서 미분은 함수의 접선의 기울기라고 했다. 함수 $y = f(x)$위의 점 $(a, f(a))$을 지나는 접선의 기울기는 위의 식에서 b가 a에 한 없이 가까워질 때를 말하는 것이다. 이를 수식으로 쓰면

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

이 된다. 문제집에는 미분의 정의를 이렇게 하고 있다. 내가 강조하고 싶은 것은 미분을 이렇게 배우면 미분을 계산할 줄은 알아도 미분이 무슨 뜻인지는 모른다. 대학교 과정의 수학은 엄밀한 정

의와 엄밀한 증명을 바탕으로 수학을 공부하지만 고등학교 과정은 아니다. 앞에서 말한 극한의 경우도 $\epsilon-\delta$를 이용하여 극한을 말하지 않는다. 다만 '한 없이 가까워 질 때'라는 애매한 표현만을 사용할 뿐이다. 미분 역시 이렇게 정확한 수식으로 미분의 정의를 배우는 것 보다는 '접선의 기울기'라는 약간은 애매한 표현으로 미분을 배우는 것이 옳은 방법이라고 나는 생각한다.

eg 9] 함수 $f(x)=x^2$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

접선의 기울기는 미분계수를 구하라는 말이다. 위의 두 방법은 언제나 같은 결과를 준다.

i) $f'(2)=\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2-2^2}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(t+2)(t-2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}(t+2)=4$

ii) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$

어떤 방법을 사용하던지 똑 같은 결과를 얻는다는 것을 알 수 있을 것이다. 자기가 편한 방법으로 하면 된다.

● **접선의 방정식**

앞에서도 접선(tangent line)의 방정식을 구한 적이 있다. 이제 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구하는 일반적인 방법(공식이라고 부를 수도 있지만, 나는 공식이란 단어를 싫어함)을 알아보자. 이것을 공식처럼 외울 필요는 없다. 이 식에 대한 이해만 하고 있으면 공식을 몰라도 접선의 방정식을 구할 수 있기 때문이다.

기울기가 m이고 점 (x_1, y_1)을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

eg 10] 기울기가 4이고 점 $(2,4)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

$$\begin{aligned} y-4 &= 4(x-2) \\ y &= 4x-4 \end{aligned}$$

를 얻는다. 직선의 방정식을 구하는 것이 익숙한 사람은 굳이 이런 방법을 사용하지 않아도 직선의 방정식을 구하는데 어려움이 없을 것이다.

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$을 지나는 접선의 방정식을 구하는 문제는 점 $(a, f(a))$를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선의 방정식을 구하는 문제와 같다. 따라서

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 얻는다.

eg 11] 함수 $f(x)=x^2$ 위의 점 $(2,4)$를 지나는 접선의 방정식을 구하여라.

앞에서 $f'(2)=4$를 얻었다. 접선의 기울기가 4이고 점 $(2,4)$를 지나므로 $y=4x-4$를 얻는다.

eg 12] 함수 $f(x)=x^2+1$의 도함수는 $f'(x)=2x$ 이다. $x=1$ 일 때 접선의 방정식을 구하여라.

$f(1)=1^2+1=2$ 이므로 $x=1$일 때 함수의 좌표는 (1,2)가 된다. 또한 $f'(1)=2$ 이므로 점 (1,2)에서의 접선의 기울기는 2가 된다. 구하려고 하는 접선은 점(1,2)를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식이므로 구하는 접선의 방정식은 $y=2x$ 이다.

● **법선의 방정식**

법선(normal line)이란 함수 $y=f(x)$위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 접선에 수직이면서 같은 점을

지나는 직선을 말한다. 영어로 orthogonal, perpendicular, normal 세 단어가 직교, 수직이라는 뜻인데 언제 어떤 단어를 쓰는지는 나도 잘 모른다. 수학에서 normal은 '표준, 정규'라는 뜻으로도 사용한다. 내 생각에는 'normal'을 우리말로 번역하는 과정에서 '법'이라 번역한 듯싶다. 법선의 방정식은 접선의 방정식을 구하는 것과 거의 비슷하다. 공통점은 둘 다 한 함수 $y=f(x)$위의 같은 점$(a,\ f(a))$를 지난다는 것이고 차이점은 접선은 기울기는 $f'(a)$이지만 법선의 기울기는 $-\dfrac{1}{f'(a)}$라는 것이다. 직교하는 두 직선은 기울기의 곱이 -1이기 때문에 위의 결과는 당연하다.

eg 13] 함수 $f(x)=x^2$ 위의 점 $(2,4)$를 지나는 법선의 방정식을 구하여라.

$f'(2)=4$이므로 법선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이다. 또한 법선은 점 $(2,4)$를 지나므로 구하는 법선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{2}$이다.

eg 14] 함수 $f(x)=x^2+1$에서 $x=-1$ 일 때 법선의 방정식을 구하여라.

주어진 함수의 도함수는 $f'(x)=2x$ 이고 $f'(-1)=-2$ 이므로 법선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이 된다.

$f(-1)=(-1)^2+1=2$이므로 법선은 점$(-1,\ 2)$를 지난다.

따라서 구하는 법선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$이다.

● 도함수의 계산

도함수를 계산하는 방법은 미분계수를 계산하는 방법과 거의 같다. 미분계수 $f'(a)$는 $x=a$ 일 때 접선의 기울기이지만 도함수 $f'(x)$는 $x=x$ 일 때의 접선의 기울기라는 것만 이해하면 된다. 그러므로 미분계수를 계산하는 식에서 a대신 x를 대입하면 된다.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

eg 15] 함수 $f(x)=x^3$ 의 도함수를 구하여라.

i) $f'(x)=\lim_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\dfrac{t^3-x^3}{t-x}=\lim_{t\to x}\dfrac{(t^2+tx+x^2)(t-x)}{t-x}=\lim_{t\to x}(t^2+tx+x^2)=3x^2$

ii) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h}$
$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2)=3x^2$

위의 두 가지 방법이 같은 결과를 주기 때문에 편한 방법을 사용하면 된다.

● 함수의 연속성과 미분 가능성

어떤 함수가 $x=a$에서 연속이 아닐 경우 그 점에서는 당연히 미분이 불가능하지만 다른 점에서는 가능할 수도 있다. 그럼 연속함수이면 다 미분가능할까? 아니다. 다른 조건을 알고 있어야만 한다. 미분가능한 함수를 영어로 differentiable function 이라고 한다. 어려운 영어 단어를 사용한다고 낙심하지는 말자. smooth function 이라는 쉬운 단어도 사용하니까. differentiable 이란 말로는 어떤 함수가 미분가능한지 느낌이 잘 안 오지만 smooth 라는 말로는 느낌이 올 것이다. 내가 굳이 영어단어를 사용하는 이유는 바로 이것 때문이다. 말 그대로 미분 가능한 함수는 연속함수중에서 그래프가 매끈한 함수이다. 뾰족한 점이 없는 매끈한 연속함수는 미분가능하다. 반면에 연속함수가

어떤 점에서 뾰족하다면 함수는 그 뾰족한 점에서는 미분 불가능하다. 그리고 미분가능한 함수는 당연히 연속함수이다.

● 도함수의 성질

도함수를 정의에 의해서 극한을 이용하여 일일이 구한다는 것은 굉장히 복잡하고 불편하다. 그래서 도함수를 구하는 규칙을 사람들이 찾아내었으며 이러한 방법을 **미분법**이라고 한다. 미분법을 이용하면 정의를 직접 이용하는 것 보다 훨씬 편하고 빨리 도함수를 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}k=0 \qquad \text{단, } k\text{는 } x\text{와는 무관한 상수}$$

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1} \quad \text{단, } n\text{은 모든 실수}$$

이것은 다항함수의 도함수를 구하는 일반적인 방법을 적은 것이다. 아래는 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능할 때 각각의 도함수를 이용하여 더 복잡한 함수의 도함수를 구하는 방법을 보이고 있다.

$$\frac{d}{dx}kf(x)=k\frac{d}{dx}f(x) \quad \text{단, } k\text{는 } x\text{와는 무관한 상수}$$

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

여기까지는 어떤 함수의 도함수를 알았을 때, 그 함수의 상수배 및 함수끼리의 사칙연산을 해서 얻은 함수의 도함수를 구하는 방법이다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

이것은 연쇄공식(chain rule)이라고 불리며 서로 달라 보이는 두 식은 실제로는 같은 식이다.

이제 위에 적은 도함수의 성질들을 증명해 보자. 내가 부탁하고 싶은 것은 이 증명을 따라해 보라는 것이다. 어렵고 복잡해 보이지만 따라해 보면 그렇게 어렵지 않다. 이러한 증명을 따라해 봄으로써 미분의 정의식을 더 잘 알 수 있고 그것을 활용하는 방법 또한 익힐 수 있다. 위의 식들을 외우지 않고 이해하기 위해서는 아래의 증명을 꼭 따라해 보길 권한다.

$$\frac{d}{dx}k=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{k-k}{t-x}=0$$

이것은 너무나 뻔한 내용이기 때문에 쉽게 지나칠 수 있다. 상수함수를 미분하면 0 이 된다는 것을 기억해두자. 또한 '함수 $f(x)$가 x값이 변해도 함수값은 변하지 않는 상수임을 증명하여라.' 따위의 문제의 증명방법 중 하나가 $f'(x)=0$임을 보이는 것이라는 것도 기억해 두자.

$$\frac{d}{dx}kf(x)=\lim_{t\to x}\frac{kf(t)-kf(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}k\cdot\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=k\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=k\frac{d}{dx}f(x)$$

이것을 말로 설명하면, 어떤 함수에 상수배를 한 함수의 도함수는 그 함수의 도함수를 먼저 구한 후 상수배를 한 것과 결과가 같다.

$$\frac{d}{dx}x^n=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2}+\cdots\right]-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

이것은 $y=x^4$ 같은 형태의 함수를 미분할 때 유용하게 사용된다.

$$\begin{aligned}[f(x)+g(x)]' &= \lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

이것도 말로 설명하면, 두 함수가 미분가능할 때 두 함수를 합한 함수의 도함수는 각각의 도함수의 합과 같다.

eg 16] 위 과정을 참고하여 $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$를 증명하시오.(스스로 해보자)

$$\begin{aligned}[f(x)\cdot g(x)]' &= \lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)]-[f(x)\cdot g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)]-[f(x)\cdot g(x+h)]+[f(x)\cdot g(x+h)]-[f(x)\cdot g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\left\{\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x+h)}{h}+\frac{f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h}\right\}\\ &= \lim_{h\to0}\left\{\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\right\}\\ &= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\end{aligned}$$

이것은 **곱의 미분법**이다. 합의 미분법과 형태가 다르다는 것에 주의하자

$$\begin{aligned}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]\cdot\frac{1}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}[f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)]\cdot\frac{1}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}[f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)]\cdot\frac{1}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\{[f(x+h)g(x)-f(x)g(x)]-[f(x)g(x+h)-f(x)g(x)]\}\cdot\frac{1}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\left\{\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x)-f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\right\}\\ &= \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

이것은 **몫의 미분법**이다 수학II 과정에는 없는 것으로 알고 있는데 그래도 알아두면 좋을 것이다. 언제나 그렇듯이 분모가 0 인 경우는 제외한다.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta t}{\Delta x}\\ &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\end{aligned}$$

이것은 **연쇄공식**(chain rule)이라고도 하는 **합성함수의 미분법**이다. 두 함수가 미분가능하다면 두 함수의 합성함수는 언제나 미분이 가능하다.

미분법의 공식이 참 많지만 곱의 미분법, 몫의 미분법, 합성함수의 미분법만 확실히 익힌다면 거의 모든 함수의 도함수를 구할 수 있고 복잡한 공식을 따로 외울 필요가 없다. 거기에 역함수 미분법, 음함수 미분법 등을 익힌다면 고등학교 수학 교과서에 나오는 모든 함수의 도함수를 구할 수

있다고 믿어도 좋다. 중요한 것은 공식을 외우는 것이 아니라 이러한 문제를 많이 풀어보면서 미분법을 익히는 것이다. 이 사실을 명심하자.

eg 17] 다음 함수들의 도함수를 구하시오.

가. $y=4$

$y'=0$

나. $y=x^2$

$y'=2x^{(2-1)}=2x$

다. $y=x^2-4x+5$

$y'=2x-4+0=2x-4$

라. $y=(2x+3)(5x-1)$

이 경우는 곱의 미분법을 사용하여도 되고 미리 식을 전개한 후 도함수를 구해도 된다. 스스로 편한 방법으로 하자.

i) $y'=(2x+3)'(5x-1)+(2x+3)(5x-1)'=2(5x-1)+(2x+3)\cdot 5=20x+13$

ii) $y'=(10x^2+13x-3)'=20x+13$

마. $y=\dfrac{(3x+1)}{2x}$

이것 역시 몫의 미분법을 사용해도 좋고 미리 식을 정리해서 도함수를 구할 수도 있다.

i) $y'=\dfrac{(3x+1)'2x-(3x+1)(2x)'}{(2x)^2}=-\dfrac{1}{2x^2}$

ii) $y'=\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)'=0+\left(\dfrac{1}{2}x^{-1}\right)'=\dfrac{1}{2}(-1)x^{-1-1}=-\dfrac{1}{2x^2}$

바. $y=(2x+3)^4$

$t=2x+3$으로 치환하면, $y=t^4$이다. chain rule에 의해서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(t^4)'\cdot(2x+3)'=4t^3\cdot 2=8(2x+3)^3$$

굳이 이 식을 전개할 필요는 없다. 도함수를 구하는 목적이 접선의 기울기를 구하는 경우가 많기 때문에 전개하지 않고 대입하는 것이 계산이 편할 때가 많다. 또한 뒷부분에서는 방정식 $y'=8(2x+3)^3=0$ 를 풀어야 할 때가 생기기 때문에 전개하지 않는 편이 더 좋다.

chain rule은 수학II 과정은 아니어도 이 예제처럼 수학II 과정에서 필요한 경우가 있다. 또한 이것은 뒤에도 자주 나오므로 이것을 이용하는 문제를 많이 풀어서 익혀두는 것이 좋을 것이다. 이것을 이해하지 못하면 뒤에 나오는 치환적분을 이해하기 어렵다.

eg 18] 함수 $y=\sqrt{f(x)}$ 의 도함수는 $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ 임을 보이시오.

chain rule을 이용하면 된다. 복잡해 보이겠지만 실제로는 복잡하지 않다.

$$y'=\left\{[f(x)]^{\frac{1}{2}}\right\}'=\frac{1}{2}[f(x)]^{\frac{1}{2}-1}\cdot f'(x)=\frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

eg 19] $y=f(x)g(x)h(x)$의 도함수는 $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$임을 보이시오.

미분의 성질을 말할 때 이러한 것은 적지 않는다. 이것은 곱의 미분법으로부터 바로 나오는 결과이기 때문이다. 하지만 문제집 같은 데서는 이걸 공식이라고 하고 적어놓고 있다. 이것은 따로 외울 필요는 없다. 그냥 곱의 미분법만 연습 많이 하고 충실하면 이것은 그리 어렵지 않기 때문이다.

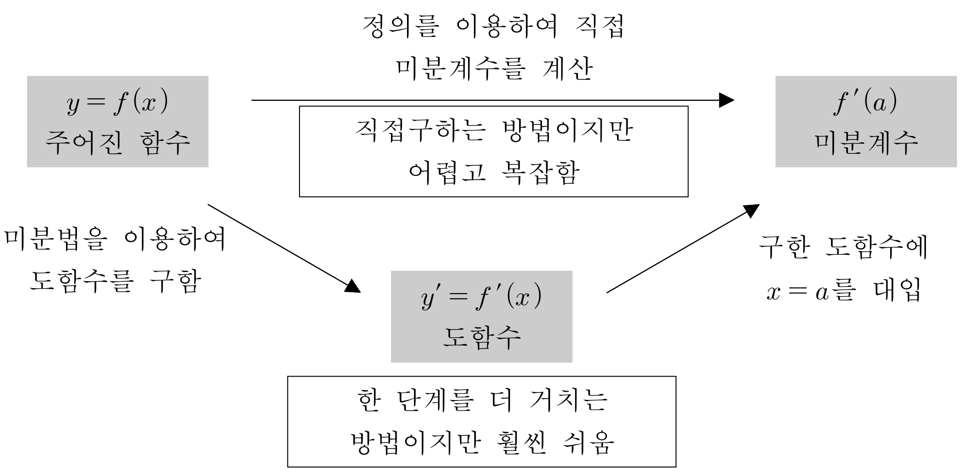
$$
\begin{aligned}
y' &= \{f(x)[g(x)h(x)]\}' \\
&= f'(x)[g(x)h(x)]+f(x)[g(x)h(x)]' \\
&= f'(x)g(x)h(x)+f(x)[g'(x)h(x)+g(x)h'(x)] \\
&= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)
\end{aligned}
$$

위의 과정이 복잡한 사람은 $t(x)=g(x)h(x)$로 치환한 후에 곱의 미분법을 적용하는 것도 좋다.

● 접선의 기울기와 도함수

함수 $y=f(x)$에서 $x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기 $f'(a)$를 알기 위해서는 미분계수를 계산해야 한다. 하지만 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 계산한다는 것은 여간 번거로운 일이 아니다. 또한 같은 함수에서 $f'(a)$뿐만 아니라 $f'(b)$, $f'(c)$ 따위의 여러 점에서의 접선의 기울기를 구하기 위해서는 비슷한 극한값을 여러번 계산해야만 한다. 이러한 번거로움을 해결해 주는 것이 바로 도함수이다. 미분법에 의해서 도함수를 먼저 구한 후(미분의 정의에 의해 도함수를 구하는 것도 매우 복잡함) 접선의 기울기를 구하면 되는 것이다. 이것을 도식으로 표현하면 아래와 같다. 아래의 다이어그램은 미분, 도함수, 미분계수와의 관계를 설명하기 위하여 내가 직접 고안한 것이다. 내 스스로 생각해도 잘 만든 것 같다.

실제로 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x$ 에 대하여 $f'(1)$을 정의에 의해 직접구하는 것과 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 대입하는 것을 비교해 보자. 어떤 것이 더욱 빠르고 정확하고 편한지 알 수 있을 것이다. 이러한 것을 조금 철학적인 말로 '돌아가는 지름길' 이라고 말하고 싶다.



● 미분과 근사 *

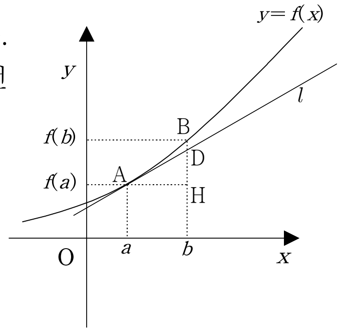
이것과 다음에 나오는 음함수 미분법에는 알아두면 쓸모가 있어서 좋지만 고등학교 과정에서 꼭 필요한 것은 아닌 내용이 들어있다. 미분에 대해서 더 알고 싶은 사람은 읽어도 좋다. 이 내용이 너무 복잡하고 어렵다고 느끼는 사람은 몰라도 고등학교 과정에서는 그렇게 문제될 것은 없다.

도함수는 근사값을 구할 때 유용하게 쓰일 수 있다. 아래 그림을 이용하여 설명하겠다. 직선 l

은 함수 $y=f(x)$와 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서 접한다. 이 접선의 기울기는 당연히 $f'(a)$이다. x가 a에서 b로 변할 때 y는 $f(a)$에서 $f(b)$로 변한다. 이것을 다른 말로 하면

$$\Delta x = b-a = \overline{\mathrm{AH}}$$
$$\Delta y = f(b)-f(a) = \overline{\mathrm{BH}}$$

가 된다. Δx가 주어졌을 때 Δy를 구하는 것은 그리 어렵지는 않다. 하지만 함수 $f(x)$가 복잡할 경우에는 그리 쉬운 것만은 아니다. 이런 때는 $\overline{\mathrm{BH}}$를 구하는 대신 차선책으로 $\overline{\mathrm{DH}}$를 구한다.



$\angle \mathrm{DAH}=\theta$라 할 때

$f'(a)=\tan\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$이다. 이 식을 정리하면

$\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{AH}}\cdot\tan\theta = \overline{\mathrm{AH}}\cdot f'(a) = f'(a)\cdot\Delta x$ 가 되고

$\Delta y = \overline{\mathrm{BH}} \approx \overline{\mathrm{DH}} = f'(a)\cdot\Delta x$ 를 얻게 된다. b가 a에 가까울수록(Δx가 0 에 가까울수록) $\overline{\mathrm{BH}}$와 $\overline{\mathrm{DH}}$의 길이가 점점 같아진다는 것을 느낄 수 있을 것이다. 이것을 다시 식으로 표현하면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = f'(a)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

이 식을 미분기호를 이용하면 아래 식으로 표현된다.

$$dy = f'(a)\cdot dx$$

지금까지 설명은 복잡하게 했지만 $f'(a)=f'(x)|_{x=a} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=a}$라는 것을 이해한다면 그렇게 어렵게 느껴지지는 않을 것이다. 실제로 예제를 통해서 감을 익혀보자.

eg 20] 함수 $f(x)=x^2$에서 x가 1에서 1.1 까지 $\Delta x=0.1$ 만큼 변했을 때 y값의 변화량 Δy를 구하여라.

i) 일단은 직접 계산해 보자. $f(1.1)=1.1^2=1.21$이고 $f(1)=1^2=1$이므로
$\Delta y = 1.21-1=0.21$ 이 된다.

ii) 위에서 설명한 방법으로 근사값을 구해보자. $f'(x)=2x$이므로 $f'(1)=2$이다. 따라서
$\Delta y = f'(1)\Delta x = 2\cdot 0.1 = 0.2$ 를 얻는다. 둘째 방법은 처음과 비슷한 값을 준다.

eg 21] 함수 $f(x)=x^2$에서 x가 1에서 1.01 까지 $\Delta x=0.01$ 만큼 변했을 때 y값의 변화량 Δy를 구하여라.

앞의 예제보다 x의 변화량이 훨씬 작아졌다.

i) 먼저 직접 구해보면 $f(1.1)=1.01^2=1.0201$이고 $f(1)=1^2=1$이므로
$\Delta y = 1.0201-1=0.0201$이 된다.

ii) 근사값을 구하면 같은 방법으로 $\Delta y = f'(1)\Delta x = 2\cdot 0.01 = 0.02$를 얻는다.

Δx가 작을 수록 미분을 이용한 근사는 Δy에 가까워진다는 것을 주목하자.

eg 22] 함수 $f(x)=x^3$에서 x가 10에서 10.1 까지 $\Delta x=0.1$만큼 변했을 때 Δy를 구하여라.

i) 직접 구해보면 $\Delta y = f(10.1)-f(10)=1030.301-1000=30.301$을 얻는다.

ii) $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(10)=300$이다.

미분을 이용해서 근사하면 $\Delta y = f'(10)\Delta x = 300\cdot 0.1 = 30$을 얻는다.

미분을 이용한 근사가 어쩌면 더 복잡해 보인다. 이 근사가 빛을 발하는 경우는 y값이 무척 클 때, Δx 값이 무척 작을 때, 그리고 함수나 수가 복잡할 때이다. 위에 나오지 않은 삼각함수나 지

수함수 로그함수 또는 그것들의 합성함수일 경우는 함수를 직접 구하는 것 보다는 미분을 이용한 근사가 훨씬 빛을 발한다는 것을 기억해두자.

아래 두 식을 생각해 보자.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\ dy = f'(x)dx = \left(\frac{dy}{dx}\right)dx$$

dy, dx같은 것은 수가 아니라 미분하라는 기호이므로 일반적인 분수처럼 계산하면 안 된다. 하지만 위와 같은 감을 익혀두는 것도 좋을 것이다. 이것은 고등학교 과정은 아니다. 앞에 적은 합성함수의 미분법 그리고 뒤에서 나오는 음함수 미분법이나 역함수 미분법의 경우 이렇게 분수가 아닌 것을 분수처럼 다루는 기술이 도움이 된다.

● 음함수 미분법 *

$y = x^2 + 3$처럼 $y = f(x)$ 형태의 함수를 양함수라고 하고 $y - x^2 - 3 = 0$ 처럼 $f(x,\ y) = 0$ 형태의 함수를 음함수라고 한다. 음함수 미분법은 수학II 과정은 아니지만 이미 배운 원, 뒤에 배우게 될 포물선, 타원, 쌍곡선의 접선을 구할 때 알아두면 쓸만한 기술이다.

먼저 $y = f(x)$라 할 때 $\frac{d}{dx}y^n$을 구해보자.

$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}$이라고 생각하면 안 된다. 왜냐하면 이것은 x로 미분한 것이지 $\frac{d}{dy}y^n = ny^{n-1}$ 처럼 y로 미분한 것이 아니기 때문이다. 이것은 합성함수의 미분법(chain rule)을 이용한다.

$$\frac{d}{dx}y^n = \frac{dy^n}{dx} = \frac{dy^n}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}y'$$

eg 23] $y^2 = x$의 도함수를 구하시오.

i) 두 가지 방법으로 구해보자. 일단 $y = \pm\sqrt{x}$ 이므로 $y' = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 를 얻는다.

ii) 음함수 미분법을 적용하면

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}x$$

$$2y \cdot y' = 1$$

$y' = \frac{1}{2y}$를 얻는다.

두 결과가 다르다고 실망하지 말자. $y = \pm\sqrt{x}$ 이므로 두 식은 같은 식이다.

eg 24] 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 3^2$의 도함수를 구하시오.

i) $y = \pm\sqrt{3^2 - x^2}$ 이므로 $y' = \pm\frac{-2x}{2\sqrt{3^2 - x^2}} = \pm\frac{-x}{\sqrt{3^2 - x^2}}$ 을 얻는다.

ii) 음함수 미분법을 이용하면

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}3^2$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$y' = -\frac{x}{y}$를 얻는다. 역시 $y = \pm\sqrt{3^2 - x^2}$이므로 두 식은 같은 식이다.

$$\frac{dy^n}{dx} = \frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dx^n}{dx} = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

위의 두 식의 양변에 dx를 곱했다고 생각하면 아래 두 식을 얻는다.

$dy^n = ny^{n-1}dy, \qquad dx^n = nx^{n-1}dx$

이것은 앞에 말한 $dy = f'(x)dx$와 같은 형태이다. 이러한 계산은 고등학교 과정에서 나오지는 않지만 이러한 기술을 익힌다면 음함수의 미분법이나 치환적분을 할 때 유용하게 쓸 수 있다.

eg 25] 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 5^2$위의 점 (3, 4)에서의 접선의 방정식을 구하시오.

접선을 구하는 공식을 이용해도 좋지만 미분을 해서 구할 수도 있다.

음함수 미분법을 적용하여 도함수를 구하면

$dx^2 + dy^2 = d5^2$

$2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 이다.

점 (3, 4)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$이다. 접선의 방정식을 구하는 공식은 함수(원, 타원, 포물선, 쌍곡선 등)마다 다르다. 도함수를 구해서 접선의 방정식을 구하는 방법은 어떤 함수에나 똑같이 적용할 수 있는 방법이다. 공식대로 한다면 별 문제가 없지만 만에 하나 시험 볼 때 공식을 잊어버렸을 경우에 대비해서라도 도함수를 이용하는 방법을 알아두자. 나중에 3차 함수 같은 경우는 공식이 없기 때문에 도함수를 이용해야만 한다.

eg 26] 함수 $x^2 + xy + y^2 = 1$의 도함수를 구하시오.

음함수 미분법이 빛을 발하는 경우는 바로 위 문제와 같이 교차항(xy, x^2y, x^2y^3 따위)이 있거나 3차 이상의 식으로 나타나는 경우이다.

i) 이것은 음함수의 미분법을 사용하지 않는다면 위 식을

$y^2 + xy + x^2 - 1 = 0$ 으로 변형한 후 y에 관한 2차 방정식을 풀어서

$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2-1)}}{2}$ 을 구한 후 도함수를 구해야 한다. 만약 y에 대한 3차방정식의 형태라면?? 나는 구하기 싫다.

ii) 음함수 미분법을 사용한다면

$2x + y + xy' + 2yy' = 0$ 이므로

$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$ 를 얻는다. 이게 훨씬 편하다.

● 함수의 극대, 극소

일반적으로 함수 $y = f(x)$ 가 극대 또는 극소 값을 가질 때, 그 점에서 접선의 기울기는 0 이 되므로 함수의 극값의 x좌표를 알기 위해서는 $f'(x) = 0$을 만족하는 x 값을 구하면 된다. 극값을 구하는 과정은 아래 예제를 풀어보면서 확인해 보자. 주의할 점은 접선의 기울기가 0 이 아니면서도 극값을 갖는 경우가 있고, 접선의 기울기가 0 이면서도 극값을 갖지 않는 경우가 있다. 하지만 확실한 것은 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 극값을 갖고 또한 미분 가능하다면 $f'(a) = 0$이라는 것이다. 대부분의 함수는 모든 정의역에서 미분가능하므로 $f'(x) = 0$을 만족하는 x값에 대해서만 조사해 보면 모든 극값을 구할 수 있다.

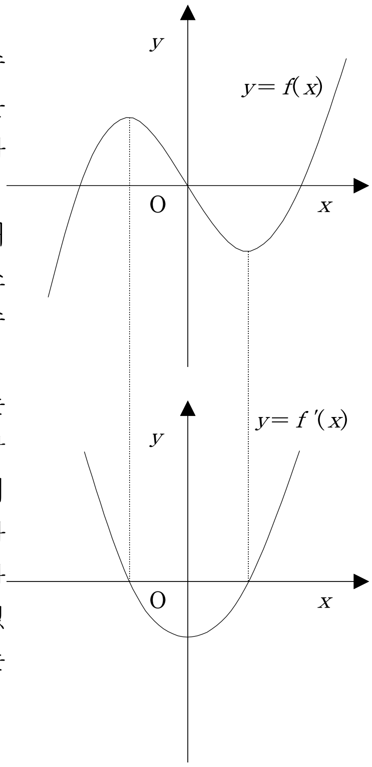
eg 27] 함수 $y = x^3 - 3x$의 극대값과 극소값을 구하여라.

먼저 $f'(x) = 0$을 만족하는 x를 구하자.

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=0$

이므로 위의 방정식을 풀면 $x=1$, -1을 얻게 되며

극대값은 $f(-1)=2$ 극소값은 $f(1)=-2$를 얻게 된다.



오른쪽 그림의 위는 주어진 함수이고 아래는 그것의 도함수이다.

두 그림을 비교해 보면 극대 또는 극소일 때 $f'(x)=0$ 임을 알 수 있으며 도함수가 양수에서 음수로 바뀔 때 주어진 함수는 **극대값**을 갖고, 도함수가 음수에서 양수로 바뀔 때 주어진 함수는 **극소값**을 가짐을 알 수 있다.

함수가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 **극대**가 된다. 그래서 극대일 경우 도함수는 양수에서 음수로 바뀌게 된다. 반대로 함수가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 **극소**가 된다. 그래서 극소일 경우 도함수는 음수에서 양수로 바뀌게 된다.

함수의 극대 극소 문제는 매우 자주 나오는 형태의 문제이다. 나는 '왜 함수의 극값을 구할 때 미분을 사용할까?'라는 질문에 대한 대답을 적은 것이다. 극대 극소를 구하는 자세한 기술들은 다른 문제집에 많이 나와 있으므로 그것을 참고하기 바란다. 한 가지 더 이야기 하자면, 도함수의 정의를 이용하여 극한값을 구하라는 문제가 자주 등장하는데, 그러한 문제를 못 풀어도 미분을 익히는 데는 아무런 지장이 없기 때문에 과감하게 생략했다. 이것 역시 다른 문제집을 보면 원하는 것을 얻을 수 있을 것이다.

정적분(definite integral)

미분에 대해서 배웠으니 이제는 적분을 배울 차례이다. 보통 문제집에서는 부정적분을 먼저 다루고 정적분을 뒤에 다루지만 나는 순서를 바꾸겠다. 나는 개인적으로 이것이 올바른 순서라고 생각한다.

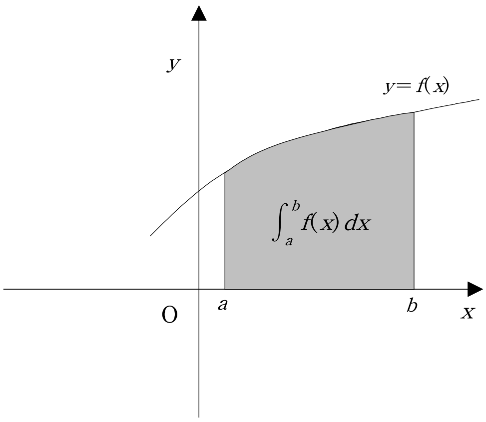
● 정적분 : 함수의 밑넓이

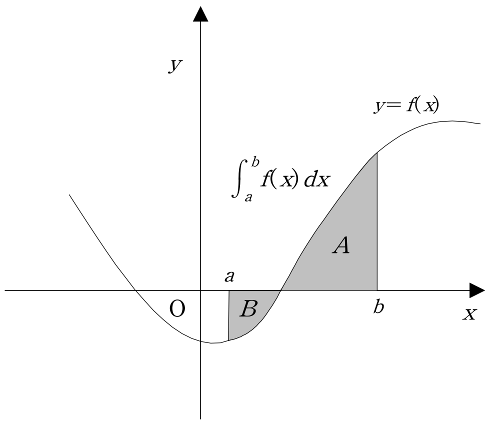
보통 도형의 넓이는 항상 양수이지만 정적분은 음수가 될 수도 있다. 이 둘을 구별하기 위해 일부러 '밑넓이'라고 따로 구별해서 적었다. 넓이를 구할 때는 당연히 곱한다. 정적분은 곱하기의 고급연산이고, 미분은 나누기의 고급연산이라고 생각할 수도 있다. 여기에서도 미분과 마찬가지로 정적분 값을 계산하는 방법은 몰라도 된다.

$$\pi = 3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ \cdots$$

라는 사실을 몰라도 '원주율은 원주를 지름으로 나눈 값'이라고 아는 것만으로 충분하다. 원주율 계산하는 방법(원주율 구하는 공식)을 몰라도 지금까지 아무 불편 없이 수학을 배워왔다. 지금 수준에서는 정적분의 의미를 아는 것만으로 충분하다.

함수 $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=a$, 직선 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $\int_a^b f(x)\,dx$ 로 표시하며 여기서 a를 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 한다. 계산하는 방법은 나중에 익히자. 지금은 정적분의 의미가 무엇인지 아는 것이 더욱 중요하다.





함수가 x축 위에 있을 경우 정적분 값은 함수의 밑넓이와 같고, x축 아래에 있을 경우 정적분 값은 함수의 밑넓이(윗넓이가 더 적당한 표현일 것이다.)에 (−) 부호를 붙인 것과 같다.

위의 오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이를 각각 A, B라 하면 $\int_a^b f(x)\,dx = A - B$ 이다.

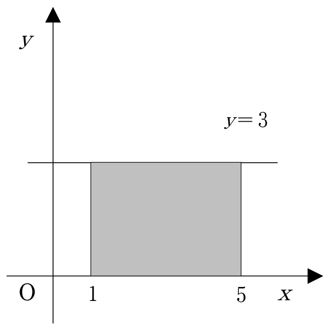
eg 28] $\int_1^5 3\,dx$ 를 구하시오.

이 정적분 값은 오른 쪽 그림과 같은 직사각형의 넓이와 같다.

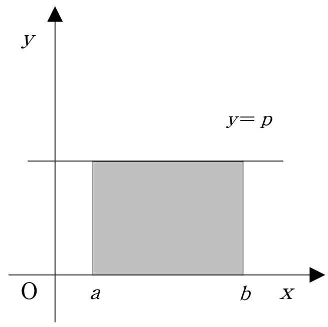
가로의 길이 $=5-1$

세로의 길이 $=3$이므로

$$\int_1^5 3\,dx = (5-1)\cdot 3 = 12$$



eg 29] $a<b$일 때, $\int_a^b p\,dx$ 를 구하시오.



i) $p>0$일 경우 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 넓이와 같다.

$$\int_a^b p\,dx=(b-a)\cdot p$$

ii) $p<0$일 경우 가로 $=b-a$, 세로 $=-p$인 직사각형의 넓이에 (−) 부호를 붙인 것과 같다.

$$\int_a^b p\,dx=-(b-a)\cdot(-p)=(b-a)\cdot p$$

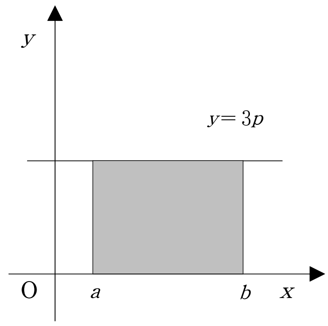
위의 두 경우 모두다 $\int_a^b p\,dx=(b-a)\cdot p$ 를 얻는다.

eg 30] $a<b$일 때, $\int_a^b (p+q)\,dx$ 를 구하시오.

$\int_a^b (p+q)\,dx=(b-a)(p+q)$ 를 얻는다. 이 결과는

$\int_a^b p\,dx+\int_a^b q\,dx$ 와 같다는 것을 기억해 두자.

eg 31] $\int_a^b 3p\,dx$를 구하시오.



이 값은 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이와 같으므로

$\int_a^b 3p\,dx=(b-a)\cdot 3p=3(b-a)p$이고

$\int_a^b 3p\,dx=3\int_a^b p\,dx$ 를 얻는다.

eg 32] $\int_5^1 p\,dx$ 를 구하시오.

이런 경우에는 직사각형의 가로의 길이를 $1-5=-4$로 계산한다.

$\int_5^1 p\,dx=(1-5)\cdot p=-(5-1)\cdot p$ 이고,

$\int_5^1 p\,dx=-\int_1^5 p\,dx$ 를 얻는다.

● 정적분의 기본 성질

위의 여러개의 예제를 통하여 정적분에는 다음과 같은 성질이 있음을 쉽게 짐작할 수 있을 것이다. 교과서에 나오는 복잡한 정적분의 정의를 이용하지 않고 ‘함수의 밑넓이’라는 사실만으로 구했다는 것에 주목하자.

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

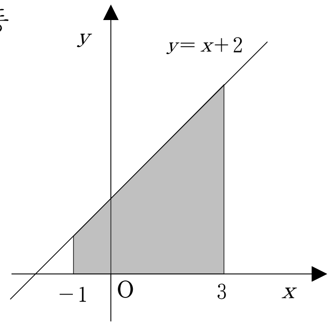
$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

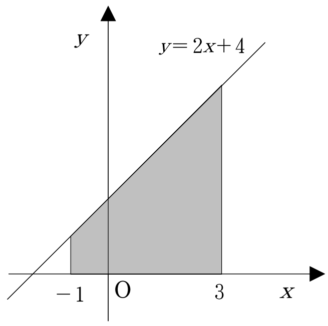
여기서 k, c는 상수이며, 굳이 $a < c < b$의 관계가 되지 않아도 위의 등식은 성립한다. 그림을 그려가며 스스로 생각해 보자.



eg 33] $\int_{-1}^{3}(x+2)\,dx$를 구하여라.

오른쪽 사다리꼴의 넓이와 같다.

$$\int_{-1}^{3}(x+2)\,dx = \frac{1}{2}(1+5)\cdot 4 = 12$$



eg 34] $\int_{-1}^{3}2(x+2)\,dx$를 구하여라.

i) 오른쪽 사다리꼴의 넓이와 같다.

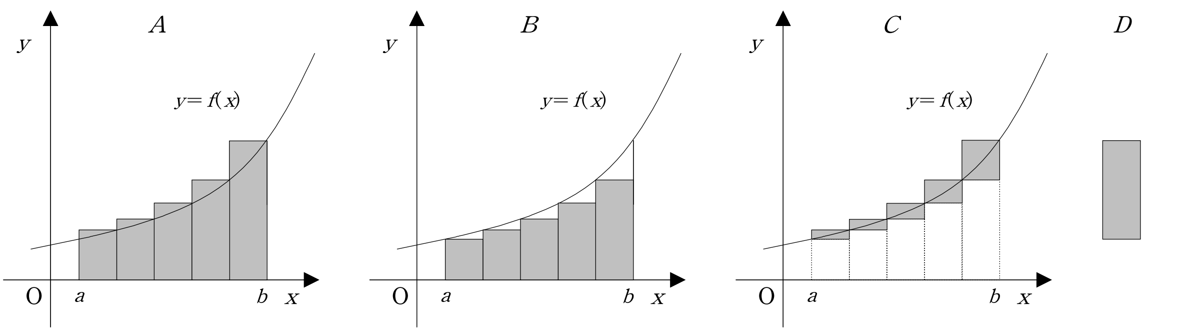
$$\int_{-1}^{3}2(x+2)\,dx = \frac{1}{2}(2+10)\cdot 4 = 24$$

ii) $\int_{-1}^{3}2(x+2)\,dx = 2\int_{-1}^{3}(x+2)\,dx = 2\cdot 12 = 24$

● 곡선의 정적분

일차함수와 같이 함수의 그래프가 직선인 경우는 정적분을 비교적 쉽게 구할 수 있다. 하지만 곡선일 경우는 그 값을 구하기가 쉽지 않다. 고등학교 과정에서 배우는 정적분은 **리만적분**(Riemann Integral)이다. 대학교과정에서는 르벡(Lebesgue - 내가 고등학교 때 독일어를 배운 것이 이유이겠지만 프랑스 사람 이름은 읽기도 힘들고 철자도 엄청 헷갈린다.) 적분을 배운다. 그것은 나도 잘 모른다.

이제 본격적으로 적분을 해보자. $y = f(x)$가 구간 (a, b)에서 연속이며 증가함수라고 가정하자. 감소함수일 경우도 증가일 때와 비슷하며, 증가와 감소가 같이 있을 경우에는 증가하는 구간과 감소하는 구간으로 나누면 된다. 곡선의 정적분은 아래 그림과 같이 직사각형으로 나누어서 그 넓이를 구한다. 당연히 직사각형의 넓이와 정적분 값은 다르다. 하지만 직사각형을 아주 잘게 쪼개어서 그 극한 값을 취하면 같다는 것을 보일 것이다. 직사각형을 만들 때 굳이 일정한 간격으로 등분할 필요는 없으나, 계산과 생각의 편의를 위해서 등분하자.



위 그림은 5등분한 경우이다. 위의 네 그림을 참고하면 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$A > \int_a^b f(x)\,dx > B$$

$$A-B=C=D$$

그림 D에서 직사각형의 가로의 길이는

$$p=\frac{b-a}{5}$$

가 되고 세로의 길이는

$$q=f(b)-f(a)$$

가 되므로 직사각형의 넓이 $D=pq=\dfrac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{5}$ 가 된다.

만약 5등분 하지 않고 n등분 한다면 $D=pq=\dfrac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n}$ 을 얻게 되고

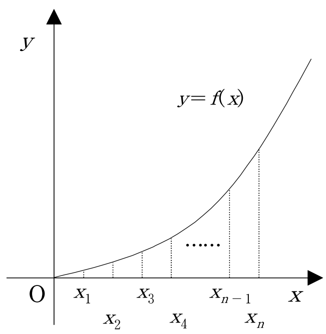
$$\lim_{n\to\infty}(A-B)=\lim_{n\to\infty}D=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{n}=0$$

이 되므로 $n\to\infty$ 일 경우 아래 등식이 성립한다.

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=B$$

곡선의 정적분은 위와 같은 방법으로 계산할 수 있으며 이를 **구분구적법**이라고 한다.

eg 35] 구분구적법으로 정적분 $\int_0^1 x^2\,dx$ 을 계산하여라.



오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,1]$을 n등분 하고 각 점을 $0=x_0$, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=1$ 라 하자. 위 그림의 A나 B의 극한값이 같기 때문에 어느 방법을 사용해도 무관하다. 여기에서는 A방법을 사용하자. n등분했기 때문에 직사각형의 가로의 길이 $p=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$ 이므로 $x_k=kp=k\dfrac{1}{n}=\dfrac{k}{n}$을 얻고, $x=x_k$일 때 직사각형의 높이 $y_k=f(x_k)=x_k^2=\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$을 얻는다. 우리가 구하려는 넓이는 다음의 식으로 표현된다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}py_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

구분구적법을 이용한 정적분의 정의 식은

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

인데, 이것을 말로 설명하면 다음과 같다.
함수를 n등분하여 작은 직사각형의 합으로 만들 때, i번째 직사각형의 높이는 $f(x_i)$이이고 밑변의 길이는 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}(=\Delta x)$이므로 i번째 직사각형의 넓이는

$S_i = f(x_i)\Delta x_i = f(x_i)\Delta x$ 이다. 이 직사각형을 모두 합하면

$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ 이고 한 없이 잘게 잘라서 합하면 (즉, $n \to \infty$ 라면)

$\lim_{n-\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$ 이 되고 이는 정적분의 값과 같다.

나 처럼 물리를 전공한 사람은 다음과 같이 말하는 것을 더 좋아한다.

한 없이 잘 개 잘랐을 i번째 직사각형의 높이 $f(x_i)$는 $f(x)$가 되고, 밑변의 길이는 Δx인데 dx로 표현한다. ($dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ 정도로 생각하자.) 이때 한없이 작은 직사각형의 넓이는 $dS = f(x)dx$인데 이것을 모두 합하면 $S = \int_a^b dS = \int_a^b f(x)dx$ 이 된다.

eg 36] $\int_0^t x^2\,dx = \frac{1}{3}t^3$ 임을 이용하여 $\int_a^b x^2\,dx$를 구하여라.

정적분의 기본 성질에 의해서

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_a^0 x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx = -\int_0^a x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx = -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

이 식은 a, b의 대소관계나 음수, 양수에 관계없이 항상 옳은 값을 준다는 것을 기억하자.

구분구적법으로 정적분을 구해보니 느낌이 어떤가? '으악~~ 내가 뭐 하러 이렇게 머리 아프고 복잡할 걸 배우지?' 하는 생각이 들지 않는가? 보통 정적분은 부정적분을 이용하여 구한다. 위와 같은 구분구적법을 이용하는 '단순 무식한' 계산 방법은 수학적인 우아함과 아름다움이 전혀 없는 방법이다. 표준 정규 분포표를 만들기 위한 정적분인

$$P(0 \le Z \le z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

은 부정적분으로 구할 수 없기 때문에 어쩔 수 없이 단순 무식한 '한 없이 쪼개서 더하는 방법'을 이용해야 하지만 이 경우에도 심슨의 공식, 포물선 공식, 또는 그 밖의 다른 방법으로 구하지 구분구적법으로 구하지는 않는다. 구분구적법을 먼저 소개한 이유는 부정적분을 이용하여 정적분을 구하는 것이 정말 편하고 우아하고 아름다운 방법이라는 것을 강조하기 위해서이다. 이제는 미분, 정적분, 부정적분을 아주 자연스럽게 연결해 주는 미적분학의 기본정리(Fundamental Theorems of Calculus)를 배워보도록 하자.

미적분학의 기본정리(Fundamental Theorems of Calculus)

미적분학의 기본정리는 미분과 정적분과 부정적분의 관계를 말해주는 정리이다. 어떤 문제집에는 **정적분의 기본정리**라고 적혀 있다. 이 정리로 인해서 이들 사이의 긴밀한 관계(?)가 밝혀졌을 뿐만 아니라 정적분이 말도 할 수 없을 정도로 쉬워졌다. 이제 미적분학의 기본 틀을 잡고 있는 이 정리를 배워보자.

● 부정적분

미적분학의 기본정리를 본격적으로 하기 전에 먼저 부정적분에 대해서 간략하게 설명하겠다. 자세한 설명은 뒤에 한다. 어떤 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$가 될 때 즉,

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

일 때, 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 **원시함수**라고 한다. 또한,

$$\frac{d}{dx}[F(x)+C]=f(x)$$

이므로 $F(x)+C$ 역시 $f(x)$의 원시함수가 된다. 이 원시함수를 구하는 과정을 **부정적분**이라고 하며, 여기에서 상수 C 를 **적분상수**라고 한다. 보통 사람들이 미분계수, 미분, 도함수를 구별하지 않고 사용하듯이 부정적분과 원시함수를 구별하지 않고 사용하는 경향이 있다. 함수 $f(x)$의 원시함수 $F(x)$는 다음과 같은 기호를 사용한다.

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

eg 37] $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$임을 이용하여, 함수 $F(x)$의 도함수가 $F'(x)=f(x)=3x^2$이고 점 $(1,0)$를 지날 때 이 함수를 구하시오.

$F(x)=\int 3x^2\,dx=x^3+C$ 이다.

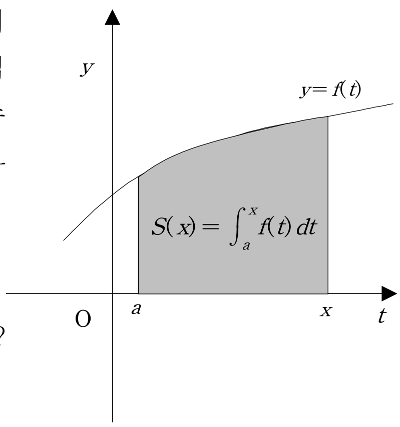
여기서 적분상수 C는 점 $(1,0)$을 대입하여 구한다.

$F(1)=1^3+C=0$ 이어야 하므로 $C=-1$ 을 얻는다.

$$F(x)=x^3-1$$

● 미적분학의 기본정리(1st Form)

연속함수이면서 증가함수인 $y=f(t)$를 생각하자. 구분구적법으로 정적분을 구할 때와 마찬가지로 감소함수이거나 감소함수와 증가와 감소가 섞인 함수에도 이 결과를 적용할 수 있다. 함수 $y=f(t)$를 구간 $[a,x]$에서 정적분 한 함수 $S(x)$를 생각하자. 이 함수는 x에 따라 변하는 함수이므로 $S(x)$라고 했다. 또한 이것은 정적분을 이용하여 표현하면 다음과 같다.



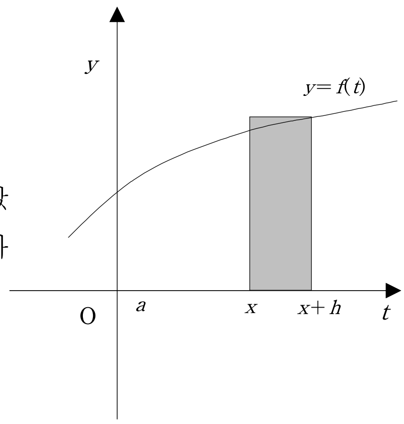
$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

이제, 이 함수를 x에 관해서 미분하면 어떤 일이 생겨날까? 미분하기 전에 먼저 다음 값을 계산해 보자.

$$\begin{aligned} S(x+h)-S(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \\ &= \int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

이제, 본격적으로 미분해보자.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}S(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \end{aligned}$$



이 극한 값을 구하기 위해 다음과 같은 과정을 거치자.

함수 $y=f(t)$가 증가함수라고 했으므로 이 함수의 최소값 $m=f(x)$ 이고, 최대값 $M=f(x+h)$ 이다. 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이를 참고하면

$$mh=f(x)\cdot h \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le f(x+h)\cdot h = Mh$$

임을 알 수 있고, 양변을 h로 나누면

$f(x) \le \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le f(x+h)$ 다시 이 식의 양변에 극한을 취하면

$\lim\limits_{h\to 0} f(x) \le \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le \lim\limits_{h\to 0} f(x+h)$ 을 얻고 $S(x)$의 미분식에 의해서

$\lim\limits_{h\to 0} f(x) \le \dfrac{d}{dx}S(x) \le \lim\limits_{h\to 0} f(x+h)$ 를 얻는다.

$\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$이다. 그럼 $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)$의 극한값은 얼마일까? 연속함수라고 했으므로 당연히 $f(x)$와 같다. 결국

$\dfrac{d}{dx}S(x)=f(x)$ 를 얻는다. 이 식을 다시 쓰면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

이 되며 이 식을 미적분학의 기본정리(1st form)라고 한다. 이것을 말로 설명하면 '주어진 함수의 구간 $[a,x]$를 정적분한 함수는 그 함수의 부정적분 중 하나이다.'라는 뜻이다.

● 미적분학의 기본정리(2nd Form)

$S(x)$를 미분해서 $f(x)$를 얻었으므로 $S(x)$는 $f(x)$의 부정적분인 $F(x)+C$ 중 하나이다. 이를 식으로 표현하면

$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt = F(x)+C$ 이 된다.

이제 여기서 C를 결정하는 방법을 알아보자. 어떻게 할까? 간단하다. 앞의 example 처럼 한다.

$S(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ 이므로 $x=a$를 대입하면 된다.

$$0=\int_a^a f(t)\,dt=F(a)+C$$

위 식에서 $C=-F(a)$를 얻으며 아래 식으로 표현한다.

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C=F(x)-F(a)$$

위 식에서 $x=b$를 대입하면

$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$ 를 얻으며 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$\int_a^b f(t)\,dt=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

이것 역시 미적분학의 기본정리(2nd form)라고 하며 1st form 의 직접적인 결과이다. 이제 미적분학의 기본정리에 의해서 정적분은 훨씬 쉬워졌다. 원시함수를 구한 후 그 함수에 위끝을 대입한 값에서 아래끝을 대입한 값을 빼주면 된다. 참고로 미적분학의 기본정리 2nd form 으로 1st form 을 증명할 수도 있다.

eg 38] $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=x^2$임을 이용하여 $\int_0^1 x^2\,dx$ 를 구하여라.

$f(x)=x^2$의 원시함수를 $F(x)$라 한다면 $\frac{1}{3}x^3$ 은 $f(x)$의 원시함수 중에 하나이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ 라고 쓸 수 있으며, 이 함수 역시 x^2의 원시함수가 된다.

$$F(1)=\frac{1}{3}1^3+C=\frac{1}{3}+C$$

$F(0)=\frac{1}{3}0^3+C=C$ 이므로 미적분학의 기본정리에 의해서

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left(\frac{1}{3}+C\right)-C=\frac{1}{3}$$

위의 계산 결과에서 보듯이 정적분의 계산 과정에서 적분상수 C는 사라진다. 그러므로 정적분을 계산할 때 정분상수는 생각하지 않고 쓰는 것이 보통이다.

어떤가? 구분구적법을 이용하여 정적분을 구하는 것과 미적분학의 기본성질을 이용하여 정적분을 구할 때 어느 것이 더 편하고 우아하고 아름다운가!! 이제 정적분을 구하는 문제는 부정적분만 찾으면 금방 계산이 끝난다. 앞에서 나오는 $\int_1^5 3\,dx$ 따위의 정적분 문제를 이렇게 미적분학의 기본정리를 이용하여 다시 한 번 구해보자. 결과가 같다는 것을 알 수 있다.

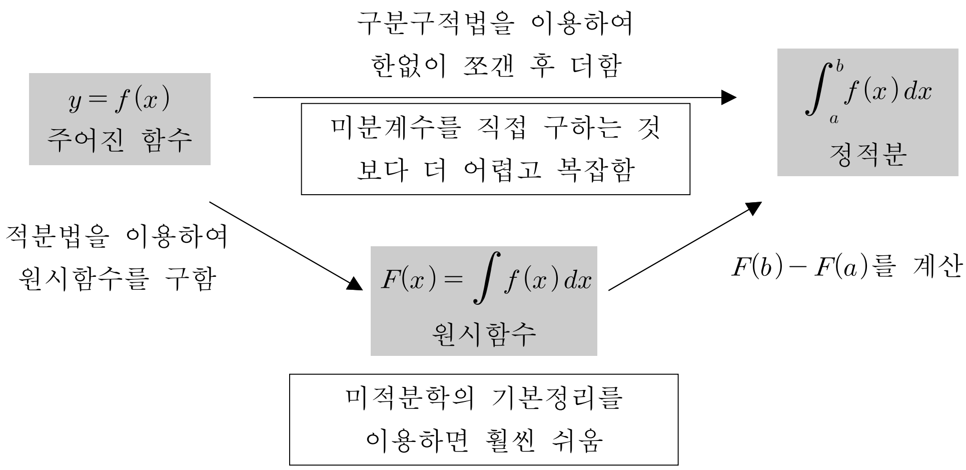
eg 39] $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ 임을 이용하여 $\int_0^\pi \sin x dx$를 구하여라.

위 미분 식을 부정적분의 형태로 표시하면

$\int \sin x dx=-\cos x+C$ 를 얻는다.

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

위 정적분을 미적분학의 기본정리를 사용하지 않고 구분구적법으로 구하면 어떨까? 생각만 해도 끔찍하다. 이러한 편리함 때문에 부정적분을 배우게 되는 것이다. 위와 같이 정적분 문제는 결국 부정적분을 구하는 문제로 바뀐다. 이것도 도식으로 표현하면 아래와 같다. 이제 부정적분을 배워야 할 이유가 분명해진다! 부정적분은 미분의 역연산이므로 미분의 성질을 그대로 적용할 수 있다. '돌아가는 지름길'을 다시 한 번 생각해 보자.



● 거리, 속도, 가속도와 미분

먼저 부정적분을 배우는 것이 올바른 순서이겠지만, 여기서 잠깐 쉬는 의미로 이것을 적는다. 보통 '면적의 변화율을 구하라, 그림자의 길이의 변화율을 구하라' 따위의 문제가 나오면 왜 미분을 하는지 정확히 알지 모르는 상태에서 미분을 하여 구한다. 그러한 궁금증을 가진 사람에게 도움이 되리라 기대하고 이 부분을 적는다.

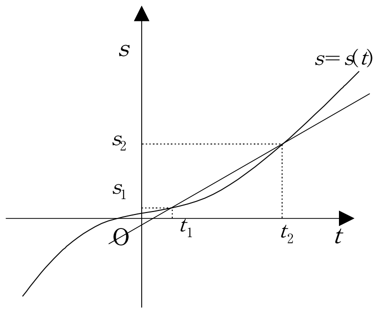
어떤 물체(혹은 점)가 시간에 따라 움직일 때 그 물체의 위치 s 는 시간 t 에 대한 함수가 된다. 이를 수식으로 표현하면 $s=f(t)$로 표현할 수 있으며 나처럼 물리를 전공한 사람들은 $s=s(t)$라고 표현하는 것을 더 좋아한다. 물체의 속도 v 역시 시간에 대한 함수이므로 $v=g(t)$ 혹은 $v=v(t)$로 쓸 수 있다. 그럼 속도의 정의는 어떻게 될까? 중학교 수준으로 대답한다면 $v=\frac{s}{t}$라고 답할 수 있다. 이것은 반절은 맞다. 왜냐하면 등속직선운동일 경우에만 맞고 그 외의 경우에는 틀리기 때문이다. 혹은 고등학교 과정으로는 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$라고 답할 것이다. 이것 역시 반절은 맞다. 이것은 평균속도이지 순간속도는 아니기 때문이다.

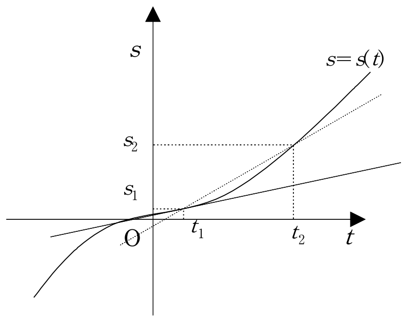
물체가 일정한 속도로 운동하는데 처음의 위치($t=0$일 때의 위치)가 5이고 1초에 3만큼 이동한다고 하자. (물리에서는 단위가 중요하다. 3m와 3ft, 3km, 3cm 등은 모두 다르기 때문이다. 하지만 수학에서는 단위는 그리 중요하지 않다. 단위가 바뀌어도 풀이는 변하지 않으니까.) 그럼 이 물체에 대해 위치의 시간에 대한 함수를 구하자. 다른 말로 $s=s(t)$를 구해보자.

$$s=s(t)=3t+5$$

복잡한 설명 없이 위의 함수가 됨을 알 수 있다. 이것은 일차함수이고 직선의 방정식인데 속도는 이 직선의 기울기(다시 말하면 접선의 기울기)와 같음을 알 수 있다.

그러면 등속 직선운동이 아닌 경우에 속도는 어떻게 결정할까?





위 그림을 보자. 시간 t_1, t_2일 때의 위치가 각각 s_1, s_2라 하자.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$$

은 평균속력으로 함수 위의 두 점을 이은 직선의 기울기와 같다. 그럼 시간 t_1 인 순간의 속도는 어떻게 정의하는 것이 가장 좋을까? 그것은 바로 접선의 기울기로 정하는 것이다. 접선의 기울기는 미분이다. 따라서 속도는 위치를 시간으로 미분한 값이 된다.

$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

앞으로는 속도의 정의가 위의 식이라고 생각하자.

가속도 역시 마찬가지이다. 가속도는 속도의 미분값으로 정의한다.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

eg 40] 점 P가 x축 위를 움직이고 있고 시간이 t 일 때 점 P의 x좌표는

$x=x(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-6t+\frac{7}{6}$ 으로 주어진다. 다음 물음에 답하여라.

가. $t=1$일 때의 좌표를 구하여라.

$x(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6+\frac{7}{6}=-5$

나. $t=1$일 때의 속도를 구하여라.

$v(t)=x'(t)=t^2-t-6$ 이므로

$t=1$일 때의 속도 $v(1)=1-1-6=-6$ 이다.

다. $t=1$일 때의 가속도를 구하여라.

$a(t)=v'(t)=x''(t)=2t-1$ 이므로

$t=1$일 때의 가속도는 $a(1)=2-1=1$ 이다.

라. 점 P가 정지해 있는 순간은 언제인가?

정지해 있다는 말은 속도가 0이라는 뜻이므로 방정식

$v(t)=t^2-t-6=(t+2)(t-3)=0$

을 만족하는 t를 구하면 된다. 따라서 $t=-2$, 3 일 때 정지해 있다.

마. 점 P가 왼쪽으로 운동하고 있는 구간을 구하여라.

왼쪽으로 운동한다는 것은 속도가 음수라는 뜻이다.

$v(t)=t^2-t-6=(t+2)(t-3)<0$

을 만족하는 구간은 $-2<t<3$ 이므로 이 때 왼쪽으로 운동한다.

바. 점 P가 진행방향을 바꾸는 순간은 언제인가?

직선운동 중에 진행방향을 바꾸기 위해서는 반드시 정지해야 한다. 일반적으로 정지하지 않고 방향을 바꾸는 것은 불가능하며, 물리적으로 질량이 있는 물체는 반드시 그러하다. 이 문제는 위치의 극대 극소를 구하는 문제와 같은 문제이며(왜 그럴까?) $t=-2,\ 3$일 때 방향을 바꾼다. 구체적으로 설명하면 $t=-2$일 경우 오른쪽으로 운동하다가 왼쪽으로 방향을 바꾸며, $t=3$일 경우 왼쪽으로 운동하다가 오른쪽으로 방향을 바꾼다.

사. 속도가 커지는 구간을 구하여라.

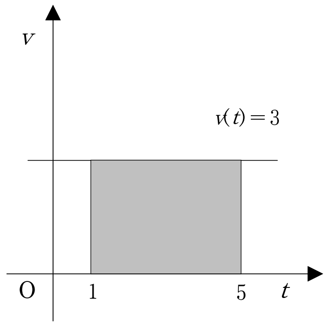
속도가 커진다는 것은 가속도가 양수라는 뜻이다. 속도가 양수라는 말과 커진다는 말은 서로 다르다. $a(t)=v'(t)=x''(t)=2t-1>0$을 만족하는 구간이며 $t>\frac{1}{2}$ 일 때 속도가 커진다.

● 거리, 속도, 가속도와 적분

위치가 시간에 대한 함수로 주어졌을 때 속도는 위치를 시간으로 미분하여 구하고, 가속도는 속도를 시간으로 미분하여 구한다. 그럼 가속도가 시간에 대한 함수로 주어졌을 때 속도와 위치는 어떻게 구할까? 속도는 가속도를 적분(정적분)하고 위치는 속도를 적분(정적분)하여 구한다고 바로 느낄 수 있다. 이번에도 예를 들어서 그것의 타당함을 생각해 보자.

가장 쉬운 경우로 등속직선운동일 때를 보자. 시간 $t=1$일 때부터 $t=5$일 때 까지 위치의 차이(이동거리와 비슷하지만 의미가 약간 다르다) $\Delta s=3\cdot(5-1)=12$가 된다. 이 계산 결과는 무엇과 같을까? 오른쪽 그림과 같이 직사각형의 넓이가 된다. 등속직선운동이 아닐 때도 이와 같은 관계는 성립하며 일반적으로 속도가 주어질 때 이동거리는 그 함수의 밑넓이 즉, 정적분으로 주어진다. 시간이 t_1일 때의 위치와 t_2일 때의 위치의 차이는 다음과 같은 식으로 구한다.

$$\Delta s(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,dt$$



이 식은 위치의 차이를 말해줄 뿐 정확한 위치는 알 수 없다. 그러기 위해서는 어떤 특정한 시간의 위치를 알고 있어야 한다. 만약 시간이 t_1일 때의 위치가 s_1이라는 것을 안다면 시간 t일 때의 위치 $s(t)$는 아래와 같다.

$$s(t)=s_1+\Delta s(t_1,t)=\int_{t_1}^{t}v(t)\,dt+s_1$$

마찬가지로 가속도가 주어졌을 때 속도의 차이 역시 다음과 같은 식으로 구한다.

$$\Delta v(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}a(t)\,dt$$

속도는 넓은 의미로 '시간에 따라 어떠한 값이 변하는 정도'라고 생각할 수 있다. 특별히 위치가 변하는 정도가 속도지만 넓이가 변하는 정도, 질량이 변하는 정도, 부피가 정하는 정도 등도 속도라고 할 수 있다.

eg 41] 잔잔한 연못 위에 식용유를 부었더니 원 모양으로 수면 위에 얇게 펴졌다. 원의 반지름이 1초에 2만큼의 일정한 비율로 커질 때 4초인 순간에 넓이의 증가율을 구하여라.

시간이 t일 때의 원의 반지름을 $r=r(t)$라고 하면, $r=2t$이고,

그 순간의 원의 넓이 $S(t)=\pi r^2=\pi(2t)^2=4\pi t^2$이다. 원의 넓이의 증가율은 곧 시간에 대한 원

의 넓이 증가속도이므로

$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d}{dt}4\pi t^2 = 8\pi t$ 이다.

결국 4초일 때의 넓이의 증가율은 $S'(4) = 32\pi$이다.

여기서 생각해 볼만한 것은 원의 반지름이 r일 때 넓이의 증가율은 $2\pi r$이며, 이것은 원의 둘레의 길이와 같다. 즉, 원의 넓이의 증가율은 원의 둘레의 길이 $l(r) = 2\pi r$와 같고

$\frac{d}{dr}S(r) = \frac{d}{dr}\pi r^2 = 2\pi r = l(r)$의 관계를 만족한다.

구일 때도 마찬가지로, 반지름 r일 때 구의 부피 $V(r)$과 겉넓이 $S(r)$사이에는 다음의 관계를 만족한다.

$$\frac{d}{dr}V(r) = \frac{d}{dr}\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 = S(r)$$

일반적으로 어떤 A라는 값의 증가율 또는 변화율을 구할 때 그 값의 시간에 대한 함수인 $A = f(t)$를 구한 후에 시간으로 미분을 하면 A의 증가율을 구할 수 있다. 다른 말로 A의 증가율은 함수 $A = f(t)$ 의 주어진 시각에 대한 접선의 기울기이다.

- **넓이, 부피와 정적분**

여기서 말하는 부분은 수학II 과정과 미분과 적분과정이 같다. 단지 차이점이라면 수학II에서는 다항함수만을 다루지만 미분과 적분에서는 삼각함수, 지수함수, 로그함수 같은 초월함수를 다룬다는 것이다.

정적분은 함수의 밑넓이다. 넓이를 구하라는 말은 정적분을 구하라는 말과 거의 같은 뜻이다. 하지만 주의해야 할 점이 있다. 함수의 그래프가 x축 아래에 있을 때 정적분은 음수이다. 그러니 함수의 넓이를 구할 때는 함수 $y = f(x)$가 $f(x) \geq 0$ 인 구간과 $f(x) < 0$이 구간을 나누어서 넓이를 구해야 한다는 것이다. 또한 $y = f(x)$와 $y = g(x)$ 두 함수로 둘러싸인 부분의 넓이를 구해야 할 때도 $f(x) \geq g(x)$ 인 구간과 $f(x) < g(x)$인 구간으로 나누어 생각해야 한다. 이렇게 간단하게만 설명하고 몇 가지 문제를 풀어보자.

eg 42] 함수 $y = x^3 - x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

i) 먼저 방정식 $x^3 - x = 0$을 풀면 $x = -1,\ 0,\ 1$을 얻는다. 이 함수는 구간 $[-1,\ 0]$에서는 $f(x) \geq 0$ 이며 구간 $[0,\ 1]$에서는 $f(x) \leq 0$이다. 아래의 정적분이 구하려는 넓이가 된다.

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx - \int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ii) 이 함수는 기함수(odd function)이므로 $\int_{-1}^{1}(x^3 - x)dx = 0$이다. 따라서 구간 $[-1,\ 0]$에서의 넓이(정적분 아님)와 구간 $[0,\ 1]$에서의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는

$2\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$를 얻는다.

넓이를 구하기 쉬운 도형중의 하나가 직사각형이다. 그래서 정적분을 구할 때 직사각형으로 쪼갠 후 직사각형의 넓이를 구해서 그것의 합의 극한 값으로 구했다. 부피를 구하기 쉬운 입체도형은 각기둥(특히 회전체일 경우는 원기둥)이므로 입체의 부피를 구하기 위해서는 각기둥으로 쪼갠 후 그것의 합의 극한으로 구한다.

eg 43] 정사각뿔 O－ABCD는 밑면의 변의 길이가 a이고 높이가 h이다. 이것의 부피를 구하여라.

꼭지점 O를 원점으로 잡고 꼭지점에서 밑변에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$를 x축으로 잡고 $\overline{\mathrm{AB}}$와 평행하게 y축을 잡자. $\overline{\mathrm{OH}}$ 위에 점 P를 잡고 $x=\overline{\mathrm{OP}}$라 하자. 또한 점 P에서 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면인 정사각형의 한 변의 길이를 y라 하자. 이때 정사각형의 넓이 $S(x)=y^2$이 된다. 이제 x와 y사이의 관계식만 찾으면 된다. 밑면을 이루는 정사각형과 점 P를 품은 정사각형은 닮았고 $x:y=h:a$가 된다. 따라서 $y=\frac{a}{h}x$를 얻으며

$S(x)=y^2=\left(\frac{a}{h}x\right)^2=\left(\frac{a}{h}\right)^2x^2$이 된다.

그러므로 구하려는 부피 V는 아래 적분식으로 구할 수 있다.

$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h\left(\frac{a}{h}\right)^2x^2dx=\left(\frac{a}{h}\right)^2\int_0^h x^2dx=\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}a^2h$ 를 얻는다. 그림을 안 그리고 말로만 설명하려니 정말 복잡하다.

eg 44] 함수 $y=\sqrt{x}$와 x축 그리고 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전시켰을 때의 부피를 구하여라.

원점에서 x만큼 떨어진 곳에서 회전축(x축)에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면은 반지름이 y인 원이 된다. 단면의 넓이 $S(x)=\pi y^2=\pi x$를 얻고 구하는 부피 V는 아래 적분식으로 표현된다.

$$V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\pi x\,dx=\left[\pi\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

eg 45] 함수 $y=x^2$와 y축과 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형을 y축 둘레로 회전시켰을 때의 부피를 구하여라.

i) 이것을 직선 $y=x$로 대칭시키면 위의 문제와 같은 문제가 된다. 그러므로 $\frac{\pi}{2}$를 얻는다.

ii) 원점에서 y만큼 떨어진 곳에서 회전축(y축)에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면은 반지름이 x인 원이 된다. 따라서 단면의 넓이 $S(y)=\pi x^2=\pi y$를 얻고 구하는 부피 V는 아래와 같다.

$$V=\int_0^1 S(y)dy=\int_0^1\pi y\,dy=\left[\pi\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

eg 46] 장축 반지름이 a, 단축 반지름이 b이고 원점이 중심인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이다. 이 타원을 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하여라.

회전축(x축)에 수직인 평면으로 잘랐을 때 단면은 반지름이 y인 원이 되므로 단면의 넓이 $S(x)=\pi y^2=\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$를 얻고 구하는 부피 V는 아래 적분식이다.

$$V=\int_{-a}^a S(x)dx=\int_{-a}^a\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

부정적분(indefinite integral)

부정적분에 대한 기본 개념은 앞에서 설명했다. 부정적분은 미분의 역연산이지만 그것을 이용하여 직접 구하지는 않는다. 부정적분을 구하는 방법을 **적분법**이라고 한다. 여기서는 다항함수의 부정적분을 구하는 법을 간단하게 적으려 한다.

$\int k\,dx = kx + C$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$)

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ 이 증명은 '미분과 적분' 과정에서 초월함수의 미적분을 배우면서 다룬다.

$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ (단, $\int f(x)dx = F(x)+C$ 이며, $a \neq 0$)

곱의 미분법이나 연쇄공식에 해당하는 부정적분법은 없다. 이것 때문에 부정적분이 미분에 비해 어렵고 많은 기술을 필요로 하며, 또한 적분표는 있는데 미분표는 없는 이유이다.

eg 47] $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$)를 보여라.

부정적분의 증명은 우변을 미분해서 좌변의 적분기호 안의 함수가 나옴을 보이면 된다.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n$

적분상수 C는 미분하면 언제나 0이 되므로 이 과정에서 굳이 적을 필요는 없다.

eg 48] $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$를 보여라.

역시 우변을 미분하자.

$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) + \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right) = f(x) + g(x)$

eg 49] $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ (단, $\int f(x)dx = F(x)+C$ 이며, $a \neq 0$)를 보여라.

chain rule을 이용하자. $t = ax+b$ 라 하면,

$\frac{d}{dx}F(ax+b) = \frac{d}{dt}F(t) \cdot \frac{dt}{dx} = f(t) \cdot a = af(ax+b)$

위 식의 양변을 a로 나누어 주면 원하는 증명이 끝난다.

eg 50] 다음 함수의 부정적분을 구하여라.

가. $\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = 5\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + C = \frac{5}{4}x^4 + C$

혹시, '적분상수에도 5배를 해서 $5C$라고 하지 않을까?'라고 생각하는 사람도 있겠지만, 그렇게

하지는 않는다. 상수의 값은 달라지나, 상수나 상수의 5배나 '상수'라는 사실은 변하지 않는다. 그래도 납득이 안 간다면 우변을 미분해 보자. C라 하던, $5C$라 하던 결과는 같다.

나. $\int -\frac{1}{4}x^5dx = -\frac{1}{4}\int x^5dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5+1}x^{5+1}\right) + C = -\frac{1}{24}x^6 + C$

다. $\int -\frac{2}{x^2}dx = -2\int x^{-2}dx = -2\left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right) + C = 2x^{-1} + C = \frac{2}{x} + C$

라. $\int (3x^2 - x + 1)dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

마. $\int (5x-2)^3dx = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}(5x-2)^4\right] + C = \frac{1}{20}(5x-2)^4 + C$

eg 51] 다음 정적분을 구하여라.

가. $\int_0^2 5x^3\,dx = \left[\frac{5}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{5}{4}\left[x^4\right]_0^2 = \frac{5}{4}\left[2^4 - 0^4\right] = 20$

구분구적법으로도 구할 수 있지만, 미적분학의 기본정리를 이용해서 구한다. 앞에서도 정적분 구하는 연습을 했지만, 정적분을 구하는데 왜 부정적분을 하는지 이해를 해야 한다. 부정적분은 이미 앞에서 한 것을 그대로 이용했다.

나. $\int_{-2}^2 -\frac{1}{4}x^5dx = -\frac{1}{24}x^6 \Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{24}\left[2^6 - (-2)^6\right] = 0$

주어진 함수 $-\frac{1}{4}x^5$은 기함수(odd function)이기 때문에 계산하지 않아도 위의 결과는 0 이 됨을 알 수 있다.

다. $\int_1^2 -\frac{2}{x^2}dx = \frac{2}{x}\Big|_1^2 = \frac{2}{2} - \frac{2}{1} = -1$

라. $\int_{-2}^2 (3x^2 - x + 1)dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^2 = \left[2^3 - \frac{1}{2}2^2 + 2\right] - \left[(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + (-2)\right] = 20$

위 경우는 기함수(odd function) 부분과 우함수(even function) 부분으로 나누어서 적분하면 조금은 더 쉽게 계산 된다.

마. $\int_0^1 (5x-2)^3dx = \frac{1}{20}(5x-2)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{20}\left[3^4 - (-2)^4\right] = \frac{65}{20}$

부정적분을 이용하는 문제나 정적분을 구하는 문제는 실제로 이보다 더 복잡한 문제들이 많다. 그러나 이것에 관한 기본적인 이해만 있다면 못 푸는 문제는 거의 없다. 다항함수의 부정적분은 여기서 끝이다. 너무 간단하지 않은가! 실제로는 초월함수의 부정적분이 훨씬 복잡한데 이것은 수학II 과정이 아니므로 뒤에서 다루겠다.

초월함수의 미분

수학II 과정에서는 다항함수의 미적분만을 다룬다. 초월함수의 미적분은 미분과 적분에서 다룬다. 그것의 첫 과정으로 오일러의 수를 먼저 배우도록 하자.

● Euler의 수(자연로그의 밑, 자연상수)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$
$$= 2.7182\ 8182\ 8459\ 0452\ 3536\ 0287\ 4713\ \cdots$$

● 자연로그(Natural Logarithm)

오일러의 수 e를 밑으로 하는 log

$\ln x = \log_e x$

일반적으로 수학, 자연과학, 공학 등을 전공한 사람은 $\log x$를 자연로그라고 생각한다.

eg 52] 다음 값을 구하시오.

가. $\ln e$

$\ln e = \log_e e = 1$

나. $\ln e^2$

$\ln e^2 = 2\ln e = 2$

다. $\ln\frac{1}{e}$

$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \cdot \ln e = -1$

라. $\ln\sqrt{e}$

$\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$

eg 53] 다음 값을 구하시오.

가. $\log e = \log_{10} e = 0.4342\ 9448\ 1903\ 2518\ 2765\ 1128\ 9189\cdots$

상용로그표를 이용하여 $\log 2.718 = 0.4343$ 의 값을 구할 수 있지만,

Windows에 있는 계산기를 이용해서 더 정확한 값을 구했다.

나. $\ln 10 = \log_e 10 = 2.3025\ 8509\ 2994\ 0456\ 8401\ 7991\ 4546\cdots$

밑 변환 공식을 이용하면 $\log_e 10 = \frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{0.4343}$ 와 같이 상용로그표를 이용해서 구할 수도 있지만, 역시 계산기를 이용해서 더 정확한 값을 구했다.

다. $\ln 2 = \frac{\log 2}{\log e} = \ln 10 \cdot \log 2 = 0.6931\ 4718\ \cdots$

상용로그표를 이용하여 위와 같이 손으로 계산할 수도 있지만, 계산기를 이용하는게 편하다.

eg 54] $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 임을 보여라.

$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 의 양 변에 자연로그를 잡으면

$$\ln e=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

eg 55] $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 임을 보여라.

$t=e^x-1$로 치환하면 $x=\ln(1+t)$이고, $x\to 0$ 일 때, $t\to 0$이다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

* 로피탈의 법칙(L'Hospital Rules)을 이용해서 구할 수도 있다.

● 지수함수 및 로그함수의 미분

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax} \qquad \frac{d}{dx}\ln ax=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a \qquad \frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}$$

우선 맨 위의 두 식만 증명을 해보자.

$$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=e^x\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=e^x\cdot 1=e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}$$

참고로 함수 $y=ae^x$ 는 도함수가 자신과 같은 유일한 함수라는 것도 알아두자.

eg 56] $\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax}$ 임을 보여라.

$t=ax$ 로 치환하면, chain rule 에 의해서

$$\frac{d}{dx}e^{ax}=\frac{d}{dt}e^t\cdot\frac{dt}{dx}=e^t\cdot a=ae^{ax}$$

eg 57] $\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$ 를 증명하여라.

log 의 성질 $a=c^{\log_c a}$에 의해서, $a=e^{\log_e a}=e^{\ln a}$ 를 얻는다.

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}(e^{\ln a})^x=\frac{d}{dx}e^{\ln a\cdot x}=(\ln a)(e^{\ln a\cdot x})=a^x\ln a$$

eg 58] $\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$를 증명하여라.

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{d}{dx}(\ln x + \ln a) = \frac{1}{x}$$

eg 59] $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$를 보여라.

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x\ln a}$$

eg 60] $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$를 보여라.

i) $x > 0$ 일 때, $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

ii) $x < 0$ 일 때, $t = -x$ 로 치환하면, chain rule 에 의해서

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

eg 61] $\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$를 보여라.

$t = f(x)$라 하면, chain rule 에 의해서

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{d}{dt}\ln|t| \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

● 오일러의 공식(Euler's Formula)

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

이 항등식은 아무 관계가 없어 보이는 지수함수와 삼각함수를 연결해 주는 식이다. 증명은 고등학교 과정을 넘어서니 지금은 단순히 결과만을 기억하자. 만약 로그의 성질 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$을 배울 때 아무 생각 없이 외우는 사람은 위의 식을 그냥 외우면 된다. 복잡한 식도 아니니 그렇게 어렵지는 않을 것이다. 하지만 증명을 꼭 보아야만 답답한게 풀리는 사람은 뒤에서 증명을 보여줄 테니 지금은 그냥 이렇다고만 알고 넘어가자. 오일러의 공식으로 삼각함수의 덧셈정리, 삼각함수의 미분 등을 모두 유도할 수 있다. 삼각함수를 다룰 때 오일러의 공식을 알면 여러 가지 유리한 점이 있다. 갑자기 미적분과 아무런 관련도 없어 보이는 오일러의 공식을 먼저 적는 이유가 그것이다. 나는 수학에서는 오일러의 공식을, 물리에서는 맥스웰 방정식을 가장 멋진 식이라고 생각한다.

eg 62] $e^{i\pi} + 1 = 0$을 보이시오.

$$e^{i\pi} + 1 = (\cos\pi + i\sin\pi) + 1 = (-1 + i\cdot 0) + 1 = 0$$

eg 63] $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ 를 보이시오.

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$$

eg 64] $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$을 보이시오.

증명은 간단하다. 위의 e^{ix} 와 e^{-ix} 에 관한 두 등식을 놓고 고민해 보자.

참고로 쌍곡선함수라고 불리는 함수를 다음과 같이 정의하는데

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

이 식은 삼각함수와 형태가 매우 비슷하고 미분, 적분, 덧셈정리 등도 형태가 비슷하다.

● 삼각함수의 미분

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

위 식들의 왼쪽과 오른쪽을 비교해 보자. co 가 있는 놈을 미분 하면, - 가 붙는다. co 가 없는 놈을 미분하면 - 가 붙지 않는다. 그리고 왼쪽 식과 오른쪽 식은 co를 바꾼 관계이다. 즉, 왼쪽 식의 co가 없는 놈에서 co를 붙이고, co가 있는 놈에서 co를 떼어내면 오른쪽 식이 나온다. 이것을 기억해 두면, 왼쪽 식 세 개만 알고 있어도 여섯 개를 모두 익힌 효과를 얻는다.

이제 증명을 해 보겠다. 앞에서도 이야기 했지만 증명은 따라해 보자. 증명을 외우지 못해도 하루가 지나면 잊어버려도 상관없다. 따라하는 것 자체가 바로 재산이 된다는 것을 잊지 말자. 보통 책에는 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 이라는 사실과 삼각함수의 성질로부터 삼각함수의 도함수를 구한다. 하지만 여기서는 오일러의 공식을 이용하여 약간 색다르게, 하지만 훨씬 편하게 구해보자.

$$\frac{d}{dx}e^{ix} = \frac{d}{dx}(\cos x + i\sin x)$$
$$= \frac{d}{dx}\cos x + i\frac{d}{dx}\sin x$$

한편,

$$\frac{d}{dx}e^{ix} = ie^{ix} = i(\cos x + i\sin x)$$
$$= -\sin x + i\cos x$$

실수부는 실수부끼리 허수부는 허수부끼리 같아야 하므로 sine과 cosine에 관한 도함수는 동시에 구해졌다. 여기에서는 지수함수의 정의역이 실수가 아닌 복소수일 때도 지수함수 미분법이 그대로 적용된다는 믿음이 필요하다. 또한 복소함수의 실수부를 취한 후 미분한 것과, 복소함수를 미분한 후 실수부를 취한 것이 같은 결과를 얻는다는 사실 또한 믿고 있어야 한다.

eg 65] $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ 을 증명하시오.

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

eg 66] 삼각함수 미분의 나머지 세 가지를 증명하라.(스스로 해보자 - 스스로 학습법!)

● 테일러 급수(Taylor's Series) †

이것은 오일러의 공식을 증명하기 위해 필요한 부분이다. 대학교 과정이므로 몰라도 상관없다.

또한 수학적으로 엄밀한 과정을 통해 급수의 수렴여부와 수렴구간 등의 내용을 전개해 나가야 하지만, 나는 간단하게 설명하고 넘어가겠다.

x에 대한 함수가

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ 으로 주어졌을 때,

$f(0) = a_0$임을 쉽게 알 수 있다.

그럼 $f'(0)$과 다른 계수는 어떠한 관계가 있을까? 이것은 미분해 보면 알게 된다.

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$이므로 $f'(0) = a_1$임을 알 수 있다. 다시 한번 미분하면

$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3 x$이므로 $f''(0) = 2 \cdot 1a_2$임을 알 수 있고, 세번째 미분하면

$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3$이므로 $f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3$임을 알 수 있다.

일반적으로 다음 식들이 성립함을 짐작할 수 있을 것이다.

$$a_0 = f(0),\ \ a_1 = f'(0),\ \ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \ a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!},\ \ldots,\ \ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

이 처럼 n번 미분한 함수를 구할 수 있다면 초월함수는 x에 대한 무한급수로 나타낼 수 있고 이를 **테일러급수**라고 한다. 아래는 여러 함수의 테일러급수 전개 결과이다. 테일러급수는 수렴하는 급수가 의미가 있다. 수렴하지 않으면 의미가 없다. 급수 옆에 수렴 구간을 적어두었다.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x \leqq 1$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$\sin 30^\circ$를 구한다고 위 식에다 $x = 30^\circ$를 대입하여 계산하면 낭패다. 미적분에서 사용하는 삼각함수는 특별한 말이 없는 한 각의 단위는 radian 을 사용하므로 radian 으로 고쳐서 구해야 한다. $30^\circ = \frac{\pi}{6}\text{rad}$ 이므로 위 식에 $x = \frac{\pi}{6}$를 대입해야 한다. 집에 계산기가 있다면 한번 구해보는 것도 좋을 것이다. 이것은 수렴이 빠른 급수이므로 셋째 항정도만 계산해도 삼각함수표와 거의 같은 훌륭한 근사값을 얻을 수 있다. 과학용계산기(공학용계산기)로 삼각함수 값을 구할 때 각의 단위가 degree 인지 radian 인지 확인하는 센스가 필요하다.

eg 67] $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ 을 증명하여라.

$f^{(n)}(x) = e^x$ 이므로

$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ 이다. 따라서

$a_0 = 1,\ \ a_1 = 1,\ \ a_2 = \frac{1}{2!},\ \ a_3 = \frac{1}{3!},\ \ldots,\ \ a_n = \frac{1}{n!}$ 을 얻으며 주어진 식을 얻을 수 있다.

eg 68] $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ 을 증명하여라.

위의 테일러급수에서 $x=1$을 대입하면 된다.

마찬가지 방법으로 $\frac{1}{e}=e^{-1}$ 의 급수표현도 한번 구해보자.

eg 69] $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 임을 보여라

위의 $\ln(1+x)$ 테일러 급수에 $x=1$을 대입하면 된다.

eg 70] $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots,\quad -1\leq x<1$ 를 보여라.

위의 $\ln(1+x)$ 테일러 급수에 $x=-x$를 대입하면 된다.

eg 71] $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ \cdots\right),\quad -1<x<1$ 를 보여라.

log의 성질을 이용하여 $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 를 계산한다. 이 식은 2보다 큰 수의 ln 값을 구할 때 쓴다. 예를 들어, $\ln 5$의 값을 구하려면 위의 식에 $x=\frac{4}{6}$를 대입하여 구한다.

sine과 cosine 역시 비슷한 방법으로 증명할 수 있으나 증명은 생략한다. 스스로 해보자. 나머지 두개는 약간 다른 방법으로 보인다. 이것은 생각 외로 어려우니 시도하지 않는 것이 정신건강에 도움이 될 것이다.

eg 72] $f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3$로 주어졌을 대 $\{a_n\}$을 구하여라.

이것 역시 테일러급수 전개하면 미분한 것으로부터 구할 수 있다. 자세히 적지는 않겠지만 이 경우에는 $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ 를 얻는다. 수학 10과정에서 나오는 나머지 정리의 발전된 형태로 수학II 과정에서 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 필요충분조건을 배운다. 그것은 아래 두 식

$f(a)=0,\ f'(a)=0$ 을 모두 만족하는 것인데 위의 테일러급수 식과 비교해 보면 무슨 뜻인지 느낌이 올 것이다.

● 오일러 공식의 증명 *

오일러의 공식은 e^x과 sine, cosine 에 관한 테일러급수를 이용하여 증명한다.

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\cdots\\
&=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots\\
&=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)\\
&=\cos x+i\sin x
\end{aligned}
$$

복소함수의 테일러급수도 위와 같은 형태로 표현될까? 물론 맞는 이야기이다. 자세한 것은 대학교 과정이므로 생략하자. 지금 당신에게 필요한 것은 믿음이다.

● 역함수의 미분법

역함수의 그래프가 원래 함수를 직선 $y=x$에 대칭시킨 그래프임을 기억한다면 역함수의 도함수

는 쉽게 구할 수 있다. 예를 들어서 $y=\frac{1}{3}x$는 원점과 점(1, 3)을 지나는데 이것을 직선 $y=x$에 대칭시킨 함수(역함수)는 $y=3x$가 되고 원점과 점(3, 1)을 지난다는 것을 알 수 있다. 주어진 점에서의 직선의 기울기는 역수가 됨을 쉽게 알 수 있을 것이다. 이것을 일반화하면 다음과 같다.

함수 $y=f(x)$의 역함수를 $x=g(y)=f^{-1}(y)$라 할 때, $\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$ 이고

$$g'(y)=\frac{d}{dy}g(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{1}{f'(x)}$$

이 성립한다. 이것도 분수가 아닌 것을 분수처럼 다루고 있다. 증명은 쉽다.

$$\frac{d}{dy}g(y)=\frac{d}{dy}x=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{1}{f'(x)}$$

eg 73] 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

i) 이것은 앞에서도 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$라는 것을 배웠다. 역함수 미분법으로 구해보자.

ii) 위 식의 양변을 제곱하면 $x=y^2$을 얻고 이 식을 y로 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}x=\frac{d}{dy}y^2=2y \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eg 74] 함수 $y^2+y=x$의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

이것 역시 y에 관하여 식을 정리한 후 도함수를 직접 구한다는 것은 어려운 일이다. 이런 경우는 음함수 미분법을 사용할 수도 있지만 역함수 미분법을 이용해서 $\frac{dx}{dy}$를 구한 후 역수를 취하는 것도 한 방법이다. 스스로 구해보자.

초월함수의 부정적분

수학II에서 배우는 다항함수의 부정적분은 별로 어렵지 않다. 하지만 초월함수의 부정적분은 약간 어렵다. 이것을 잘 할 수 있는 방법은 꾸준히 연습하는 것이다.

● 분모를 미분하면 분자가 나오는 형태의 부정적분

$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 은 로그함수의 미분 example 에 보면 나온다. 이를 이용하면 바로 아래의 부정적분을 얻는다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

eg 75] 다음 부정적분을 계산하시오.

가. $\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2)+C$

$(1+x^2)' = 2x$이므로 분모를 미분하면 분자가 나온다. 위의 적분법에 의하여 구했다.

$1+x^2$은 언제나 양수이므로 절대값 기호를 붙이지 않았다.

나. $\int \frac{1+\cos 2x}{2x+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(1+\cos 2x)}{2x+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+\sin 2x)'}{2x+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+\sin 2x| + C$

$(2x+\sin 2x)' = 2+2\cos 2x$ 를 얻지만 이것은 분자와 2배 차이가 나서 위의 방법을 그대로 적용할 수 없다. 하지만 상수배의 차이는 위와 같은 방법으로 쉽게 극복이 가능하다.

● 삼각함수의 부정적분

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

위의 세 줄에 있는 여섯 개의 식은 삼각함수의 미분법을 이용하면 바로 나온다. 미분에서는 co가 있는 놈을 미분하면 - 가 붙었지만, 적분에서는 적분해서 co 가 나오면(우변에 co 가 있으면) - 가 붙는다. 미분과 마찬가지로 왼쪽 식과 오른쪽 식은 co를 바꾼 관계이다. 이것을 기억해 두면, 왼쪽 식 다섯 개만 알고 있어도 열 개를 모두 익힌 효과를 얻는다.

eg 76] $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$ 를 보이시오.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ 이므로 위 결과가 나온다.

한편, $-\ln|\cos x| = \ln|\cos x|^{-1} = \ln|\sec x|$ 이다.

eg 77] $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$ 를 보이시오.

위와 비슷하게 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x}$ 이므로 위 결과가 나온다.

한편, $\ln|\sin x| = -\ln|\sin x|^{-1} = -\ln|\csc x|$ 이다.

eg 78] $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C = -\ln|\sec x - \tan x| + C$ 를 보이시오.

이것도 위와 비슷하게 구한다. 하지만 약간의 꼼수가 필요하다. 나는 대학교에서 이렇게 적분하는 법을 배웠는데 '멋지다! 누가 이런 생각을 했지?' 라고 생각했다.

$$\sec x = \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{(\tan x + \sec x)'}{\sec x + \tan x}$$

이므로 위의 결과가 나온다.

한편, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 로부터

$1 = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$ 이므로

$\ln|\sec x + \tan x| = -\ln|\sec x + \tan x|^{-1} = -\ln|\sec x - \tan x|$ 이다.

eg 79] $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C$ 를 보이시오.

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C = -\ln\left|\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

위와 비슷하게 아래의 방법을 이용한다.

$$\csc x = \csc x \cdot \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} = \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} = -\frac{(\cot x + \csc x)'}{\csc x + \cot x}$$

한편, $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ 로부터

$1 = (\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)$ 이므로

$-\ln|\csc x + \cot x| = \ln|\csc x + \cot x|^{-1} = \ln|\csc x - \cot x|$ 이다.

또한, 반각의 공식에 의해서

$$\csc x - \cot x = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$ 이다.

● 지수함수의 부정적분

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

이것의 증명 역시 쉽다. 우변을 미분해서 좌변의 적분기호 안의 함수가 됨을 보이면 된다.

eg 80] 다음 부정적분을 구하시오.

가. $\int e^{-x}\,dx = \dfrac{1}{-1}e^{-x} + C = -e^{-x} + C$

나. $\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$

다. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)}dx = \ln(1+e^x) + C$

분모를 미분하면 분자가 나오는 형태이다. $1+e^x > 0$ 이므로 절대값 기호를 붙이지 않았다.

● 부분적분법

미분에는 곱의 미분법이 있으나 적분에는 없다. 하지만 이와 비슷한 부분적분법이 존재한다.

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

위 식의 양변을 적분해 보면

$$f(x)\cdot g(x) = \int[f'(x)\cdot g(x)]dx + \int[f(x)\cdot g'(x)]dx$$

를 얻고, 이 식을 다시 정리하면

$$\int[f'(x)\cdot g(x)]dx = f(x)\cdot g(x) - \int[f(x)\cdot g'(x)]dx$$

을 얻으며, 혹은 다음과 같이 써도 무방하다.

$$\int[f(x)\cdot g'(x)]dx = f(x)\cdot g(x) - \int[f'(x)\cdot g(x)]dx$$

보통 책에는 위와 같이 나와 있는데, 나는 다음과 같이 머리속에 그리길 권한다.

$\int f(x)dx = F(x) + C$ 라 할 때,

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx = F(x)\cdot g(x) - \int[F(x)\cdot g'(x)]dx$$

이것을 말로 설명하면 두 함수의 곱으로 되어 있는 함수를 적분하기 위해서 먼저 둘 중 하나를 적분하여 곱한 후, 다시 '다른 하나를 미분한 함수를 곱한 함수'의 부정적분을 빼 주면 된다. 말로만 설명하면 복잡해서 무슨 뜻인지 잘 모를 것이다. 직접 예제를 풀어보면서 이해하자.

eg 81] $\int xe^x dx$를 구하시오.

i) x를 적분하고, e^x를 미분해 보자.

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x dx$$

우변의 부정적분은 좌변의 적분보다 더 복잡하다. 그래서 적분할 수 없다. 반대로 해보자.

ii) e^x를 적분하고, x를 미분해 보자.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

이 식에서 우변의 적분은 할 수 있다. 그래서

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x + C$$

을 얻는다. 우변을 미분해서 좌변이 나옴을 확인해보자. 부분적분은 이런 식으로 한다. 첫 번째 적분에서의 적분상수는 보통 적지 않고 맨 마지막의 결과에만 적는다. '상수 + 상수 = 상수'가 되기 때문이다.

eg 82] $\int xe^{ax}dx$를 구하시오.

e^{ax}를 적분하고, x를 미분해 보자.

$$\int xe^{ax}dx = x\cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}dx$$

이 식에서 우변의 부정적분을 구하면 $\frac{1}{a^2}e^{ax}$ 이므로

$$\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C$$

$f(x)$, $g(x)$ 두 함수가 모두 미분이 가능하다면 두 함수의 곱인 $f(x)g(x)$는 언제나 미분이 가능하며 $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$를 얻게 된다. 하지만 부분적분법은 약간 다르다. $f(x)$, $g(x)$ 두 함수가 모두 적분이 가능하다 하더라도 두 함수의 곱인 $f(x)g(x)$는 그렇지 않다는 것이다.

$$\int f(x)g(x) = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

에서 우변의 부정적분이 가능한 경우에만 부분적분이 가능하다. 이것이 곱의 미분법에는 없지만 부분적분에서는 있는 제약이다.

eg 83] $\int e^x \cos x\, dx$ 를 구하시오.

e^x을 적분하고 $\cos x$를 미분하자.

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx$$

우변의 적분을 보면 알겠지만, 이대로는 적분이 불가능함이 느껴진다. 그렇다고 이대로 포기할 수는 없지 않은가? 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$ 이것을 위 식에 대입하면

$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$ 를 얻고 이 식을 정리하면

$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + C$ 를 얻는다. 우변을 미분해서 한번 확인해 보자.

eg 84] $\int \sin x \cos 2x\, dx$ 를 구하시오.

이것은 아무리 노력해도 부분적분으로는 안 될 것이다. 이것은 별 수 없이 삼각함수의 곱을 합으로 고치는 공식을 이용해야 한다. 해당 하는 부분에서 다시 다루겠다.

● 로그함수의 부정적분

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \ln ax dx = x\ln ax - x + C$$

$$\int \log_a x dx = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$$

로그함수의 부정적분은 부분적분법을 이용한다.

eg 85] $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$ 를 증명하시오.

$$\int \ln x dx = \int 1\cdot \ln x dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

eg 86] $\int \ln ax dx = x\ln ax - x + C$ 를 증명하시오.

$$\int \ln ax dx = \int (\ln x + \ln a) dx = x\ln x - x + x\ln a + C = x\ln ax - x + C$$

eg 87] $\int \log_a x dx = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$ 를 증명하시오.

$$\int \log_a x dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{x\ln x - x}{\ln a} + C = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$$

● **치환적분법**

미분법에서 합성함수의 미분법(chain rule)이 있다면 적분에서는 치환적분법이 있다. 먼저 chain rule 을 이용하여 다음 함수의 도함수를 구해보자.

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^3 = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

이것을 적분식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int 3(x^2+1)^2 \cdot 2x\, dx = (x^2+1)^3 + C$$

$t = g(x) = x^2+1$ 라 하면, $g'(x) = 2x$ 를 얻고

$f(t) = 3t^2$ 이라고 하면 위 적분 식은 아래 식으로 바뀐다.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(t) dt$$

이러한 적분방법을 **치환적분법**이라고 한다. 치환적분법은 합성함수의 적분법이라고 생각할 수 있다. 하지만 합성함수의 미분법과는 달리 제약이 있다. 그것은 뒤에 이야기 하겠다. 이런 것은 직접 문제를 풀어보면서 이해하는 것이 가장 좋다.

eg 88] $\int (2x^2+3x-1)^3 \cdot (4x+3)dx$ 를 구하시오.

$(2x^2+3x-1)' = 4x+3$ 이므로 치환적분법을 적용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\int (2x^2+3x-1)^3 \cdot (4x+3)dx &= \int (2x^2+3x-1)^3 \cdot (2x^2+3x-1)'dx \\ &= \frac{1}{4}(2x^2+3x-1)^4 + C\end{aligned}$$

내가 꼭 권하고 싶은 것은 우변을 직접 미분해 보라는 것이다. 그러면 좌변이 나온다는 것을 알 수 있으며 더불어 치환적분이 어떤 건지 느낄 수 있을 것이다. 부정적분은 우변을 미분해서 확인하는 과정을 통해 느낌을 얻으며 특히 치환적분은 이러한 과정이 꼭 필요하다.

eg 89] $\int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx$ 를 구하시오.

$(\sin x)' = \cos x$ 이므로

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^4 x \cdot (\sin x)'\, dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$ 를 얻는다.

우변을 꼭! 미분해 보자.

eg 90] $\int \cos(2x+1)dx$ 를 구하시오.

이것 역시 $(2x+1)' = 2$ 이므로 치환적분법을 바로 적용할 수는 없다. 하지만 앞에 말한 것처럼

상수배의 차이는 극복이 가능하다.

$$\int \cos(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x+1)\cdot 2dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$$

치환적분을 보면 분모를 미분하여 분자가 되는 꼴의 적분법과 비슷함을 알 수 있다. 그것은 치환적분의 특수한 경우이기 때문에 당연한 일이다.

eg 91] $\int xe^{-x^2}dx$ 를 구하시오.

$(-x^2)' = -2x$ 이므로

$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ 계속 강조하지만 우변을 미분해보자.

치환적분은 도함수가 눈에 쉽게 보일 때는 이렇게 하면 되지만 쉽게 눈에 띄지 않을 때 조직적으로 하는 방법이 있다.

$y = f(x)$일 때, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 임을 알고 있다. 이것의 양변에 dx를 곱하면

$dy = f'(x)dx$ 를 얻는다. 이런 계산이 가능할지 의문이 가겠지만 일단은 해 보자.

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 임을 생각한다면 위의 식은 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = f'(x)\lim_{\Delta x \to 0}\Delta x$ 정도로 이해해도 좋을 듯하다. 이것을 위의 example 에 적용해 보자.

$t = -x^2$ 이라 한다면, $dt = (-x^2)'dx = -2xdx$ 이므로 $xdx = -\frac{1}{2}dt$ 를 얻는다. 따라서

$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ 를 얻는다.

이 방법을 앞의 문제들에도 적용하여 다시 한 번 풀어보자.

eg 92] $\int f(x)dx = F(x) + C$ 일 때,

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ 임을 보여라. (단, $a \neq 0$)

$(ax+b)' = a$ 이므로

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int af(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ 를 얻는다.

eg 93] $\int(3x-7)^5dx$ 를 구하시오.

일반적인 치환적분법을 이용해도 되고, 위 예제의 결과를 이용해도 된다.

$$\int(3x-7)^5dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}(3x-7)^6 + C = \frac{1}{18}(3x-7)^6 + C$$

eg 94] $\int e^{-3x+1}dx$를 구하시오.

$$\int e^{-3x+1}dx = -\frac{1}{3}\cdot e^{-3x+1} + C = -\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C$$

합성함수의 미분법은 두 함수가 모두 미분 가능하다면 언제나 적용할 수 있다. 하지만 치환적분은 아니다. 표준정규분포표를 만들기 위해서는 $\int e^{-ax^2}dx$ 꼴의 부정적분을 계산해야 한다. 이것은

Taylor 급수로 전개해서 부정적분을 구할 수는 있지만, 삼각함수나 지수함수의 적당한 조합으로는 이 부정적분을 얻을 수 없다. 하지만 chain rule 을 적용하면 $\frac{d}{dx}e^{-ax^2}$ 을 구하는 것은 쉬운 일이다. 부분적분과 치환적분은 곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 기반을 두고 있지만 미분처럼 언제든지 가능한 것이 아니라 상당한 제약이 따른다는 것을 기억하길 바란다. 앞에서도 이야기 했지만 적분표는 있는데 미분표는 없는 이유와 미분에 비해 부정적분이 훨씬 어려운 이유가 이것이다.

eg 95] 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 넓이를 구하여라.

위 식을 정리하면 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$이 된다. 타원 중 일사분면에 있는 부분의 넓이를 구하여 4배를 하자. 그러면 구하는 넓이는 아래 적분으로 표현된다.

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x=a\sin t$로 치환하면 $dx=a\cos t\,dt$와 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$를 얻는다.

$t=0$일 때 $x=0$이고, $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $x=a$ 이므로

$$V=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos t\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=4ab\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4ab\cdot\frac{\pi}{4}=\pi ab$$

이렇게 타원의 넓이를 구하기 위해서는 치환적분과 삼각함수의 적분이라는 고급 수학이 필요하다. 하지만 고급 수학을 이용하지 않고 정사영(projection)만을 이용하여 넓이를 구할 수도 있다.

eg 96] 원 $x^2+(y-q)^2=r^2$을 x축 둘레로 회전시켰을 때 만들어지는 torus(도넛 모양)의 부피를 구하여라.(단, $q>r$ 즉, 주어진 원은 x축과 만나지 않는다.)

위 식을 정리하면 $y=q\pm\sqrt{r^2-x^2}$을 얻는데, 위 반원 $y_1=q+\sqrt{r^2-x^2}$을 회전시킨 회전체의 부피에서 아래 반원 $y_2=q-\sqrt{r^2-x^2}$을 회전시킨 회전체의 부피를 빼면 된다. 회전축(x축)에 수직인 평면으로 잘랐을 때의 단면은 반지름이 각각 $y=q\pm\sqrt{r^2-x^2}$인 원이 되므로

$$S(x)=\pi y_1^2-\pi y_2^2=\pi\left[\left(q+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(q-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right]$$
$$=\pi\left\{\left[q^2+2q\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)\right]-\left[q^2-2q\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)\right]\right\}$$
$$=\pi\left(4q\sqrt{r^2-x^2}\right)=4\pi q\sqrt{r^2-x^2}$$

를 얻으며 구하는 부피는 아래 적분으로 표현된다.

$$V=\int_{-r}^{r}S(x)dx=4\pi q\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=8\pi q\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$ 위의 예제와 같은 적분이다.

$x=r\sin t$로 치환하면 $dx=r\cos t\,dt$와 $\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2-(r\sin t)^2}=\sqrt{r^2\cos^2 t}=r\cos t$를 얻는다.

$t=0$일 때 $x=0$이고, $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $x=r$ 이므로

$$V=8\pi q\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=8\pi q\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\cos t\cdot r\cos t\,dt=8\pi qr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=8\pi qr^2\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi^2qr^2$$

이 결과는 $V=2\pi q\cdot\pi r^2$과 같다는 것에 주목하자. 이것을 말로 설명하면 주어진 torus의 부피는 원의 중심이 지나간 자취의 길이(반지름이 q인 원의 둘레)에 원의 넓이를 곱한 것과 같다. 이것은

Pappus 정리인 '회전체의 부피는 회전면의 넓이에 중심의 자취의 길이를 곱한 것과 같다.'의 특수한 경우인데 중심을 찾기 쉬운 회전체는 이러한 방법으로 구하는 것이 편하다. 중심을 찾기 어려운 경우는 적분하는 것이 훨씬 낫다. 또 다른 Pappus 정리(중선정리)에 나오는 Pappus와 동일 인물인지는 나도 잘 모르겠다. torus의 겉넓이 S를 구할 때에도 Pappus 정리를 이용할 수 있는데

$S = 2\pi q \cdot 2\pi r = 4\pi^2 qr$ 이라는 것도 알아두면 좋다.

eg 97] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$를 x축 둘레로 회전시켰을 때 회전체의 부피를 구하여라.

(단, $q > b$ 즉, 주어진 타원은 x축과 만나지 않는다.)

i) 위 부피는 torus의 부피를 구할 때 처럼 $y = q \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ 로 놓고 적분하여 구하는 방법이 있다. 적분을 연습해 보는 차원으로 직접 해보는 것도 좋다. 하지만 나는 복잡해서 그 방법을 사용하고 싶지는 않다. 타원의 중심을 찾기는 쉬운 일이므로 Pappus 정리를 이용하는게 훨씬 편하다.

ii) 타원의 넓이 $S = \pi ab$ 이고 중심이 지나간 자취의 길이 $l = 2\pi q$ 이므로

$V = S \cdot l = \pi ab \cdot 2\pi q = 2\pi^2 abq$

Pappus 정리를 이용하면 편한 문제를 세 개 더 적어보겠다. 계산은 스스로 해보자.

eg 98] 반지름이 r인 반원이 있다. 이것의 지름을 회전축으로 하여 회전시켰을 때 만들어지는 구의 부피가 $\frac{4}{3}\pi r^3$임을 이용하여 반원의 중심을 구하시오.

eg 99] 네 점 (1, 0), (3, 0), (3, 2), (1, 2)을 꼭지점으로 갖는 직사각형을 y축 둘레로 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피와 겉넓이를 구하시오.

eg 100] 네 점 (1, 0), (3, 1), (3, 3), (1, 2)을 꼭지점으로 갖는 평행사변형을 y축 둘레로 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 부피와 겉넓이를 구하시오.

삼각함수의 기본 성질

미적분학 문제집에서는 이것이 맨 처음에 나와 있지만 나는 이것을 맨 마지막으로 했다. 이것은 삼각함수의 기본 성질이지 기본공식이 아니다. 암기하지 말고 알아두자.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \qquad \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

eg 101] $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 을 증명하여라.

등식 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 의 양변을 $\cos^2 x$로 나누면

$\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 이므로 위의 식을 얻는다.

eg 102] $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ 을 보여라.

등식 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 의 양변을 이번에는 $\sin^2 x$로 나누자.

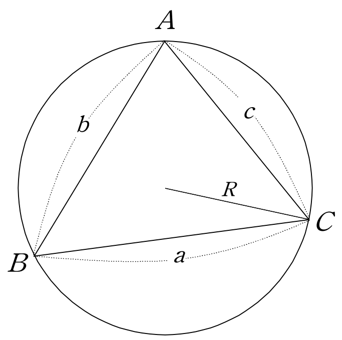
$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ 이므로 위의 식을 얻는다.

이 두 가지 성질은 외우지 않아도 이렇게 필요할 때마다 금방 유도해서 쓸 수 있다.

● 삼각형의 넓이

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$
$$= \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= rs$$

위 식에서 R은 외접원의 반지름, $2s = a + b + c$,
r은 내접원의 반지름이다.



● sine 법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

여기까지의 증명은 생략한다. 수학 10-나 책을 보면 나올 것이다.

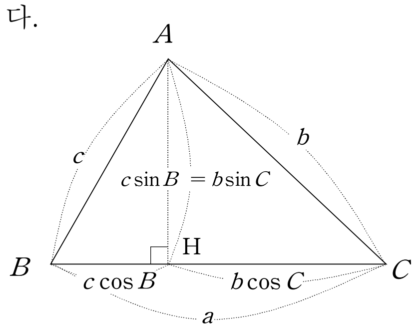
● cosine 제1법칙

$a = b\cos C + c\cos B$

$b = c\cos A + a\cos C$

$c = a\cos B + b\cos A$

오른쪽 그림을 보면 위의 등식은 바로 증명할 수 있을 것이다.



● cosine 제2법칙

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

cosine 제1법칙을 이용하여 증명할 수 있다. 혹은 벡터의 내적을 이용해서도 증명한다.

● 삼각함수의 덧셈정리

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ .... (1)

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$ .... (2)

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ .... (3)

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ .... (4)

이제 증명해보자. 삼각함수의 덧셈정리 증명은 회전변환 행렬, 벡터의 내적 등 여러 가지 방법이 있다. 나는 여기서 오일러의 공식을 이용하여 증명할 것이다.

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ &= e^{ix+iy} \\ &= e^{ix}e^{iy} \\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y) \end{aligned}$$

실수부는 실수부끼리 허수부는 허수부끼리 같아야 하므로 sine 과 cosine 에 관한 덧셈정리는 증명이 끝났다. 나머지 두개는 스스로 해보자. tangent에 관한 덧셈정리를 적지 않았다.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$를 이용하면 쉽게 구할 수 있을 것이다.

이 증명은 '지수가 복소수 일 경우에도 지수법칙이 성립한다.'라는 것이 전제되어야 한다. 그리고 실제로는 이것을 증명하기 위해 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다. 하지만 나는 오일러의 공식과 지수법칙을 먼저 받아들이고 그로부터 삼각함수의 덧셈정리를 증명하는 쪽을 택했다. 그게 더 쉬우니까. 단지 필요한 것은 믿음뿐이니까.

eg 103] 다음 삼각함수의 값을 구하시오.

가. $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

삼각함수의 덧셈정리를 그대로 사용하여 구했다. 정답이 적혀있는 아래도 한번 스스로 구해보자. 중요한 것은 식을 외우는 것이 아니라 익숙해 질 때까지 이러한 문제를 여러 번 풀어 보아야 한다. 공식만 외워서는 절대로 이러한 계산을 할 수 없다.

나. $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

다. $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

라. $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

수학 10-나 과정에서 배우는 여각의 정리나 보각의 정리 등은 따로 기억할 필요 없이 아래와 같이 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 내가 어떤 고등학생에게 알려주니 그 학생

은 이 방법을 복음이라고 했다. 이렇게 쉬운 방법을 놔두고 그동안 헷갈려서 고생했다고...

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x+\cos\frac{\pi}{2}\sin x=\cos x$$

$$\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi-\sin x\sin\pi=-\cos x$$

$$\sin(-x)=\sin(0-x)=\sin 0\cos x-\cos 0\sin x=-\sin x$$

삼각함수의 덧셈정리는 삼각함수를 다루는 고급 과정에서 꼭 필요한 식이다. 이 식으로부터 배각의 공식, 반각의 공식, 삼배각의 공식, 곱을 합·차로 나타내는 공식, 합·차를 곱으로 나타내는 공식 등이 유도된다. 나는 삼각함수의 덧셈정리를 외우지 않았다. 다만 이것에 관련된 문제를 많이 풀어보고 또한 아래에 나오는 공식들을 삼각함수의 덧셈정리로 증명하는 연습을 많이 했더니 아직까지도 머리에 남아 있다. 나머지 공식들은 복잡해서 자주 잊어버리기 때문에 필요할 때 유도해서 사용한다.

● 배각의 공식

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x\cos x\\ \cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x\\ &=1-2\sin^2 x\\ &=2\cos^2 x-1\end{aligned}$$

배각의 공식은 삼각함수의 덧셈정리에서 $y=x$ 를 대입하여 정리하면 바로 얻어진다. 증명은 스스로 해보기 바란다.

한편, 다음과 같은 삼각함수 사이의 관계를 아는 것도 좋을 것이다.

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x\cos x\\ &=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\\ &=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x\\ &=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\\ &=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\\ &=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

위 식은 tangent 값을 알고 그 각의 두 배가 되는 다른 삼각함수를 알아야 할 때 유용하다.

또한 위 식에서 $t=\tan x$로 치환하면

$\sin^2 2x+\cos^2 2x=\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=1$ 을 얻는다. 이 식을 정리하면

$(2t)^2+(t^2-1)^2=(t^2+1)^2$ 을 얻을 수 있으며

$t=2$을 대입하면 $4^2+3^2=5^2$

$t=4$를 대입하면 $8^2+15^2=17^2$ 등의 피타고라스 수를 얻을 수 있다. 하지만 $5^2+12^2=13^2$은 이 방법으로는 얻을 수 없다.

eg 104] $\tan\theta=t$일 때 다음 값을 구하시오.

가. $\sin 2\theta=\frac{2t}{1+t^2}$

나. $\cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

다. $\tan 2\theta=\frac{2t}{1-t^2}$

● 반각의 공식

$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos x}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

cosine의 배각의 공식을 변형하면 쉽게 얻을 수 있다. 부호가 헷갈리는 사람은 $x=0$이라는 특수한 경우를 대입해 보면 부호를 쉽게 결정할 수 있을 것이다.

eg 105] 다음 삼각함수 값을 구하시오.

가. $\cos^2 15^\circ=\frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

나. $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

● 3배각의 공식

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

[증명]

$$\begin{aligned}\cos 3x+i\sin 3x &= e^{i(3x)}\\ &=(e^{ix})^3\\ &=(\cos x+i\sin x)^3\\ &=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x+i(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x)\\ &=4\cos^3 x-3\cos x+i(3\sin x-4\sin^3 x)\end{aligned}$$

위의 과정을 직접 계산해 보자. 수학은 눈으로 익히는 것이 아니라 손과 머리로 익히는 학문이다. 몇 번 계산해 보면 외우지 않아도 필요할 때 금방 유도해서 쓸 수 있다.

● 곱을 합·차로 나타내는 공식

$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

한 가지만 증명하겠다. 삼각함수의 덧셈정리에서 (1)과 (2)를 변변 더하면

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

를 얻고 이 식의 양변을 2로 나누면 위의 첫째 결과가 나온다. 이 식들은 삼각함수의 곱을 적분할 때 유용하게 사용된다.

eg 106] 위의 나머지 세 식도 직접 계산하여 증명하라.(스스로 해보자.)

eg 107] 다음 부정적분을 계산하라.

$$\int\sin x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int[\sin(x+2x)+\sin(x-2x)]\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)$$

● 합·차를 곱으로 나타내는 공식

$$\sin A+\sin B=\ 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin A-\sin B=\ 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A+\cos B=\ 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A-\cos B=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

이것도 하나만 증명하겠다.

$\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$ 라고 하자. 이 식을 변변 더하거나 빼면

$\begin{cases} x=\dfrac{A+B}{2} \\ y=\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$ 를 얻는다.

이것을 곱을 합·차로 나타내는 공식의 첫째 식에 대입하면 위 공식의 첫째 식을 얻는다.

eg 108] 위 식의 나머지 세 식도 증명하라.(역시 스스로 해보자.)

여기까지 읽느라고 고생 많이 했다. 나 또한 여기까지 쓰느라고 고생 많이 했다. 서로 자축하는 의미로 박수를 치자 짝짝짝... 미적분학을 배우는 사람은 이과학생이다. 당연히 공대나 자연대로 가는 사람이 많을 것이다. 미적분학은 학교시험 또는 수능을 위해서 공부해야 하기도 하지만 자기가 공대나 자연대로 갈 사람은 대학교 가서 헤매지 않기 위해서라도 잘 익히기 바란다. 내가 바라는 것은 시험 잘 보기 위한 수학 공부가 아닌 자신의 실력을 키우기 위한 수학공부가 되었으면 좋겠다. 시험을 잘 보는 것도 중요하지만 실력이 뛰어난 사람이 되도록 스스로 노력하자.

이 글은 앞에서 말한 것처럼 다른 문제집과는 내용의 전개 방식이 다르기 때문에 그것도 꼭 보기 바란다. 이글은 말 그대로 미적분학의 기초에 관해서 적은 것이다. 여기에 적지 않은 내용은 자잘하고 사소한 것들이다. 이것을 읽고 그 개념만 정확히 이해했다면 나머지는 별 무리 없이 쉽게 익힐 수 있을 것이다. 그리고 시간이 지난 후 이 글을 다시 한 번 더 읽는다면 또 다른 느낌으로 다가올 것이다. 처음 읽을 때 몰랐던 부분도 두 번째 읽을 때는 많이 알게 될 것이다.

참고서적 : Mathematical Methods for Physicists 4th Ed. / George B. Arfken
수학이란 무엇인가? 2nd Ed. / Richard Courant / 박평우
그 밖에 고등학교 교과서와 정석 같은 문제집 등도 참고하였음.
우연히 문제집등과 같은 문제가 있을 수도 있음.

초월함수의 정적분

초월함수의 정적분을 구하는 문제는 그 함수의 부정적분만 구할 수 있다면 '미적분학의 기본정리'라는 엄청난(Windforce, The Grandfather, Starfall, Psionic Storm, Yamato Cannon 보다 더 강력한) 무기를 이용하여 전혀 어렵지 않게 구할 수 있다. 그리고 정적분을 이용하여 재미있는 결과들을 얻을 수 있다. 지금까지는 고등학교 과정에 대해서 적었지만, 이것은 절대 고등학교 과정이 아니다. 미적분에 관심이 많아서 더 배우고 싶은 고등학생이나 대학교에서 미적분을 배우는 사람을 위한 글이니 머리 아픈 것을 알고 싶지 않은 사람은 읽지 않아도 좋다.

● 푸리에 급수(Fourier Series) †

나는 대학교 다닐 때 Fourier 를 '퓨리에'라고 읽었는데, 사전을 찾아보니 '푸리에'가 올바른 표현 같다. 고등학교 물리시간에 '주기를 가진 모든 파동은 sine과 cosine들의 합으로 나타낼 수 있다.'는 사실을 배웠을 것이다. 푸리에 급수를 통해서 그것이 가능하다는 것과 sine과 cosine들의 합으로 나타내는 구체적인 방법을 보이겠다. 구체적인 설명에 앞서 아래 예제를 먼저 풀어보자.

eg 109] $\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$ 를 보이시오.(단, n은 0 아닌 정수)

반각의 공식 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 을 이용하여 증명해보자.

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

위의 적분 값은 밑변이 2π(적분구간의 길이로 삼각함수의 주기의 정수배와 같음)이고 높이가 1(sine, cosine의 최대값)인 직사각형의 넓이의 반과 같다는 것도 기억해두자.

고등학교에서 배우지 않는 크로네커 델타(Kronecker delta)에 관해서 소개하겠다. 이것은 다음과 같이 정의한다.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

위 내용을 말로 설명하면, 크로네커 델타는 두 아래첨자가 같으면 1, 다르면 0이 되는 함수이다. 예를 들어서

$\delta_{11} = 1,\ \delta_{22} = 1,\ \delta_{33} = 1,\ \delta_{ii} = 1,\ \delta_{nn} = 1$

$\delta_{12} = 0,\ \delta_{13} = 0,\ \delta_{31} = 0,\ \delta_{43} = 0,\ \delta_{45} = 0$ 등을 말할 수 있다.

이제 본격적으로 푸리에 급수의 기본이 되는 적분을 설명하겠다.

정수 m, n에 대하여 다음 세 식이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi\,\delta_{mn}, & m \neq 0 \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi\,\delta_{mn}, & m \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

위 결과를 설명할 때 크로네커 델타를 이용하지 않으면 복잡해지므로 별 수 없이 델타를 먼저 소개한 것이다. 이제 삼각함수의 곱을 합·차로 고치는 공식을 이용해서 이것들을 증명해 보자.

eg 110] 다음 정적분을 증명하시오.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi\, \delta_{mn}, & m \neq 0 \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$

i) $m = 0$ 일 때,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} 0 \cdot \sin nx\, dx = 0$$

ii) $m = n \neq 0$ 일 때, 앞의 결과에 의해서

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = 2\pi$$

iii) $m \neq n$ 일 때,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

나머지 두 가지도 위와 비슷하게 증명할 수 있다. 증명을 다 적으려 하니 힘들기 때문에 관심있는 사람은 직접 적분해 보기 바란다. 연습해 두면 고등학교 과정의 삼각함수 적분에 많이 익숙해질 것이다.

내적해서 0이 되는 두 벡터를 직교(orthogonal)한다고 말 하는 것처럼, 곱을 정적분한 결과가 0이 되는 두 함수 역시 직교한다고 한다. 이 두 가지를 수식을 이용하여 표현하면 아래와 같다.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이면, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 직교한다.

$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$ 이면, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 직교한다.

조금 이상하게 들리겠지만, 위의 정적분을 두 함수의 내적이라고 하며 벡터의 내적과 본질적으로 같은 연산이다. 만약 양자역학을 배운다면 내적을 $\langle f|g \rangle$와 같이 디락(Dirac) 표기법으로 표현하는 것도 배우게 될 것이다. 고등학교 과정에서는 실수 벡터와 실수 함수만을 다루는데, 만약 복소수를 다룬다면 내적의 정의는 약간 달라진다. 앞에 소개한 세 가지 정적분의 결과는 서로 다른 삼각함수는 직교함을 보이고 있는 것이다. 또한, 이 결과가 푸리에 급수를 구하는 핵심 기술(?)이 된다.

함수 $f(x)$가 주기가 2π인 함수일 때 이 함수를 다음과 같이 나타내고 싶다.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \quad (*) \end{aligned}$$

위와 같이 어떤 주기함수 $f(x)$를 $\sin nx$, $\cos nx$ 들의 합으로 나타낸 것을 **푸리에 급수**(Fourier series)라 하고, 푸리에 급수로 나타내는 과정을 **푸리에 전개**(Fourier expansion)라고 한다. 또한 a_n, b_n등을 **푸리에 계수**(Fourier coefficient)라 하며, 푸리에 계수를 구하는 과정을 **푸리에 해석**(Fourier analysis)이라고 한다. 이 용어들을 다시 정리하자면 '푸리에 급수를 구하라.'는 말과 '푸리에 전개하라.'는 말은 같은 뜻이고 '푸리에 계수를 구하라.'는 말과 '푸리에 해석하라.'는 말도 같

은 뜻이다. 첫째로 해야 하는 질문은 '푸리에 전개가 가능한가?' 인데, 이것은 그냥 믿고 넘어가자. 뒤에 가면 구체적인 방법을 보여주며 가능하다고 설명할 것이다. 둘째 질문은 '푸리에 계수는 어떻게 구하는가?' 인데, 이 질문에 대한 대답은 '삼각함수의 직교성을 이용하여 정적분해서 직접 구한다.' 이다. 함수 $f(x)$의 주기가 2π 이므로 적분구간은 $[0,\ 2\pi]$로 잡으나, 대부분은 $[-\pi,\ \pi]$로 잡아서 적분하며 두 방법의 결과는 같다.

위의 (*) 식을 적분하여 좌변과 우변을 비교해 보자.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dx + a_1\int_0^{2\pi}\cos x\,dx + a_2\int_0^{2\pi}\cos 2x\,dx + \cdots$$
$$+ b_1\int_0^{2\pi}\sin x\,dx + b_2\int_0^{2\pi}\sin 2x\,dx + \cdots \quad (*)$$

적분이 많다고 해서 쫄(?) 필요 없다. 우변의 적분은 $\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ 를 제외한 모든 적분이 0이 되기 때문에

$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = a_0\pi$ 를 얻고 이 식을 정리하면 아래 결과를 얻는다.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

이번에는 위 (*) 식의 양변의 오른쪽에 $\cos x$를 곱한 후 적분해 보자. 적분구간을 일일이 적기 번거로워서 이제부터 적지 않을 것이지만, 적분구간은 $[0,\ 2\pi]$임을 기억해 두자. 아래 적분은 정적분이지 부정적분이 아니다.

$$\int f(x)\cdot\cos x\,dx = \frac{a_0}{2}\int\cos x\,dx + a_1\int\cos x\cos x\,dx + a_2\int\cos 2x\cos x\,dx + \cdots$$
$$+ b_1\int\sin x\cos x\,dx + b_2\int\sin 2x\cos x\,dx + b_3\int\sin 3x\cos x\,dx +$$

이것 역시 적분이 많다고 위축될 필요 없다. 삼각함수의 직교성에 의해서, $\int\cos x\cos x\,dx = \pi$ 를 제외한 모든 적분이 0이 되기 때문이다. 따라서 아래 결과를 얻는다.

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot f(x)\,dx$$

같은 방법으로 양변의 오른쪽에 $\cos nx$ 를 곱한 후 적분하면,

$$\int f(x)\cdot\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int\cos nx\,dx + a_1\int\cos x\cos nx\,dx + a_2\int\cos 2x\cos nx\,dx + \cdots$$
$$+ b_1\int\sin x\cos nx\,dx + b_2\int\sin 2x\cos nx\,dx + b_3\int\sin 3x\cos nx\,dx +$$

을 얻는데, $\int\cos nx\cos nx\,dx = \pi$ 를 제외한 모든 적분이 0이 되기 때문에 아래 결과를 얻을 수 있다.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

역시 같은 방법으로 $\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \cdots$ 를 곱한 후 적분하면 아래 결과를 얻을 수 있다.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

위와 같은 과정을 통해서 푸리에 계수 a_n, b_n를 구할 수 있다. 지금까지의 과정을 통해서 두 질문에 대한 대답을 모두 했다. 또한 상수항을 $\frac{a_0}{2}$ 라고 적은 이유도 알 수 있을 것이다. 그렇게 하면 a_n에 관한 식을 따로 적지 않고 한 번에 적을 수 있기 때문이다.

eg 111] 다음 Square Wave 가 무한히 반복되는 함수 대한 푸리에 시리즈를 구하시오.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

적분구간이 $[0,\ 2\pi]$인데, 구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서는 $f(x)=0$이 되므로, 이 구간에서는 정적분 값이 0이 된다. 따라서 적분구간을 $[0,\ \pi]$로만 잡아도 된다.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi), \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even} \end{cases}$$

위 결과를 종합하면

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$를 얻는다.

지금까지는 주기가 2π인 주기함수에 대해서 알아보았다. 보다 일반적으로 주기가 $2L$인 주기함수의 푸리에 급수는 어떻게 구할까? 삼각함수의 주기를 $2L$로 맞추어주고, 적분 구간을 $[0,\ 2L]$ 혹은 $[-L,\ L]$로 바꾸면 된다. 자세한 설명은 생략하겠지만 아래와 같은 적분으로 푸리에 계수들을 구할 수 있다.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

● 푸리에 변환(Fourier Transform) †

앞에서 주기함수는 삼각함수들의 합으로 표현할 수 있다는 것을 배웠다. 그러면 '주기가 없는 함수도 삼각함수들의 합으로 표현할 수 있을까?'라는 의문을 가질 수 있을 것이고, 그 질문에 대한 대답은 '그렇다'이다. 주기가 없다는 것은 주기가 무한대가 된다는 것과 같다. 그러니 적분구간을 $(-\infty,\ \infty)$로 잡아서 적분하면 된다. 기본적인 발상을 아래에 적어보겠다.

푸리에 급수에서 a_n, b_n 등은 n값에 따라 변하므로 n에 대한 함수가 된다. 오일러의 공식

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

를 이용하여 위의 a_n, b_n에 관한 적분식은 아래와 같이 한 개의 적분식으로 표현할 수가 있다.

$$\begin{aligned} a_n - ib_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx - i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left(f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x - i\,f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{L}x - i\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \end{aligned}$$

고등학교과정에서는 복소함수와 그 적분을 배우지는 않지만, 기본적인 방법은 거의 같다. 위 식에서 $a_n - ib_n$은 n에 대한 함수이므로 $g(n)$이라고 할 수 있다. 그러면 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$g(n) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx$$

이제, 처음에 이야기 했던 것처럼 적분구간을 $(-\infty, \infty)$로 잡아서 적분 할 때, 몇 가지 생각해야 할 것이 있지만 그것들을 모두 적으려면 복잡하므로 그 결과만을 적으면 아래와 같다.

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx$$

엄격하게 말하면 위와 같은 과정으로 푸리에 변환을 설명하는 것은 잘못된 것이다. 하지만 대충 감을 익히는 데는 위의 방법이 도움이 될 것이다. 한 가지 이야기를 더 하면 푸리에 계수는 주기함수에 관하여 각각의 띄엄 띄엄 떨어진(discrete) 주파수들의 분포를 나타내는 것인데, 푸리에 계수가 클수록 해당 주파수의 기여도가 큰 것이다. 푸리에 변환으로 얻은 함수 $g(\alpha)$는 비주기 함수에 관하여 연속적인(continuous) 주파수들의 분포는 나타내는 것이다.

푸리에 급수에서 처음 사용한 식

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

은 오일러의 공식을 이용하여 다음과 같이 복소수를 사용한 형태로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\in x}$$

여기에서 c_n은 푸리에 계수 a_n, b_n에 의해서 결정되는데, 자세한 설명은 안하겠다. 이 식에서 $\sum_{-\infty}^{\infty}$를 $\int_{-\infty}^{\infty}$로 변신(?) 시키면 다음과 같은 결과를 얻는데, 이 과정을 푸리에 역변환이라 한다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x}\, dx$$

위 식에서 $g(\alpha)$는 앞의 푸리에 변환에서 나오는 그 함수를 말하는 것이다.

푸리에 변환과 역변환은 통신을 하는 사람은 보통 아래의 두 식을 사용하며

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

또한 양자역학에서는 아래와 같은 두 식을 사용한다.

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar}\, dx$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx/\hbar}\, dp$$

푸리에 변환과 역변환을 말로 설명하면 다음과 같다. 어떠한 함수(신호) $f(x)$가 주어졌을 때, 각각의 주파수에 대한 분포 $g(\omega)$를 알고 싶은 경우에는 푸리에 변환을 사용한다. 그리고 각각의 주파수에 관한 분포 $g(\omega)$가 주어졌을 때, 원래의 함수(신호) $f(x)$를 알고 싶은 경우에는 푸리에 역변환을 사용한다. 내가 참고하는 책에 따라서 푸리에 변환과 역변환 공식을 반대로 적은 책이 있는데, 이 부분에 대해서는 내가 내공(?)이 부족한 관계로 자세히 적지 못하겠다. 푸리에 변환에 대해서 더 자세히 설명하면 읽는 사람도 머리 아프고 나도 복잡해지므로 '이런 것도 있구나.' 정도만 알고 넘어가길 바란다. 더 자세히 알고 싶다면 다른 책을 참고하면 될 것이다.

혹시 이 글을 읽는 사람 중에서 '이렇게 복잡한 푸리에 급수나 변환을 우리가 왜 배워야 하나?' 라는 고민을 하는 사람도 있을 것이다. 푸리에 급수는 신시사이저(synthesizer)라는 악기가 작동하는 기본 원리이다. 이것을 설명하기 전에 음악에 관한 이야기를 잠깐 하겠다. 바이올린과 피아노로 똑 같은 440Hz의 진동수를 갖는 A4(라, la) 음(音)을 연주해도 우리 귀로는 그 둘을 구별할 수 있는데, 그 이유는 두 악기의 주기와 진동수는 같지만 악기의 파형이 다르기 때문이다. 다른 말로 하면 음높이는 같지만 음색이 다르기 때문이다. 어떠한 악기의 고유의 소리를 결정하는 것은 음색 때문이다. 신시사이저는 각각의 악기에 해당하는 푸리에 계수에 대한 정보를 미리 악기에 저장 한 후에, 특정한 악기 소리를 얻고 싶은 경우 이미 저장되어 있는 푸리에 계수로부터 원래 악기의 음색을 갖는 파형을 만들어내는 악기이다. 음악하는 사람마다 관점은 다르겠지만 어떤 사람은 신시사이저가 인간이 만들어낸 가장 훌륭한 악기라고 말하는 사람도 있었다. 다른 악기는 온도, 습도 등에 따라서 음색이 약간씩 변하지만 신시사이저만은 이러한 것들의 영향을 받지 않기 때문이다. 그런데 굳이 따지자면 스피커의 영향은 받는다.

내가 대학교 다닐 때 어떤 세미나에서 사람의 귀는 푸리에 해석을 할 수 있다 말을 들은 적이 있다. 사람의 귀는 정말로 잘 만들어져서 주파수 영역별로 나누어서 소리를 들을 수 있다고 한다. 우리의 경험으로도 많은 악기가 합주하는 오케스트라 음악을 들으면서 바이올린, 트럼펫, 첼로 등 각각의 악기의 소리를 따로 구분하여 들을 수가 있다. 가요를 들으면서도 드럼, 베이스 기타, 피아노 등 악기 소리를 따로 구분하여 들을 수 있을 뿐만 아니라 가사도 구분하여 듣고 가사의 뜻도 이해한다. 악기로 '도와 솔' 음을 동시에 소리 낼 경우 사람은 화음을 느끼지 '미' 같은 중간음으로 듣지는 않는다. '도, 미, 솔'을 동시에 소리 내어도 각각의 음을 따로 구분할 수 있을 뿐만 아니라 이들의 화음까지 느끼는데 이것은 사람의 귀가 푸리에 해석을 할 수 있기 때문이다.

귀의 이렇게 뛰어난 기능은 눈으로 색을 구별하는 능력과 비교하면 더욱 분명해진다. 사람의 눈 속의 원추세포(cone cell)는 세 종류가 있는데 이들은 각각 Red, Green, Blue 세 가지 색을 담당한다. 보다 자세히 설명하면 파장이 약 680nm인 빨간색의 빛이 눈에 들어올 경우 빨강을 담당하는 원추세포만 자극을 받아서 그 신호가 뇌로 전달되어 빨간색으로 인식하고, 약 540nm의 초록색의 빛이 눈에 들어올 경우 초록을 담당하는 원추세포만 자극을 받아서 초록색으로 인식한다는 뜻이다. 다시 말하지만 눈은 기본적으로 세 가지 색만을 구별할 수 있다. 나머지 색들은 세 가지 원추세포 신호의 합성으로 인식하게 되는 것이다. 예를 들어 파장이 약 580nm인 노란색 빛이 눈에 들어올 경우 빨강과 초록을 담당하는 원추세포에 같은 크기의 자극을 받아서 눈은 그 빛을 노란색으로 인식한다. 만약 빨강과 초록색의 두 빛이 같은 세기로 동시에 눈에 들어오면 눈은 이들의 중간색인 노란색으로 인식하지, 빨강과 초록을 구별하여 인식하지는 못한다. 눈은 이러한 이유로 빨강과 초록을 합성하여 만든 노란색과, 파장이 580nm인 순수한 노란색을 구별할 수 없다. 우리가 사용하는 컬러 모니터가 RGB 세색만으로 모든 색을 표현할 수 있는 이유가 이것이다. 반면에 귀는 20Hz ~ 20,000Hz 사이의 모든 소리를 구별할 수 있을 뿐 아니라 각각의 악기소리를 구별하고 화음도 느끼는 등의 푸리에 해석까지 가능하다.

● 감마 함수(Gamma Function) †

고등학생은 감마함수를 처음 들어보았을 것이다. 뒤에 보면 알겠지만 이것은 우리에게 매우 친숙한 함수이다. 감마 함수는 다음과 같은 정적분으로 정의한다. 부분적분법 연습하기에 좋다.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

이 함수의 적분은 t로 하지만 분명히 x에 관한 함수이다. 그러면 이 함수가 과연 어떤 함수인지 알아보자.

eg 112] $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt$ 를 구하시오.

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=0-(-1)=1$$

eg 113] $\Gamma(2)=\int_0^{\infty} e^{-t}tdt$ 를 구하시오.

이것은 부분적분법으로 구해야 한다. e^{-t}를 적분하고 t를 미분하자.

$$\Gamma(2)=\int_0^{\infty} e^{-t}t\,dt=(-e^{-t})t\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-e^{-t})\,dt=\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt=\Gamma(1)=1$$

eg 114] $\Gamma(3)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^2dt$ 를 구하시오.

$$\Gamma(3)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^2\,dt=(-e^{-t})t^2\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-e^{-t})\cdot 2t\,dt=2\int_0^{\infty} e^{-t}t\,dt=2\Gamma(2)=2\cdot 1$$

eg 115] $\Gamma(4)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^3dt$ 를 구하시오.

$$\Gamma(4)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^4\,dt=(-e^{-t})t^3\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-e^{-t})\cdot 3t^2\,dt=3\int_0^{\infty} e^{-t}t^2\,dt=3\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1$$

이제 $\Gamma(5)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^4dt=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$ 이라고 짐작할 수 있을 것이다. 그러면 실제 그런지 확인해 보자.

eg 116] $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 임을 보이시오.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^{\infty} e^{-t}t^x\,dt=(-e^{-t})t^x\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-e^{-t})\cdot xt^{x-1}\,dt=x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt\\&=x\Gamma(x)\end{aligned}$$

eg 117] n이 자연수일 때, $\Gamma(n+1)=n!$임을 보이시오.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(x-2)=\cdots\\&=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot\Gamma(2)\\&=n!\end{aligned}$$

Gamma function은 factorial의 정의역을 자연수에서 실수 전체(음의 정수는 제외)로 늘린 함수이다. 맨 처음에 $\Gamma(1)=1$ 임을 알았으므로 $0!=\Gamma(1)=1$ 임을 알 수 있을 것이다. 친구들이 '왜 $0!=1$ 이고, $0!\neq 0$ 이야?'하고 물어본다면 '엉, $0!=\Gamma(1)=1$ 이라서 그래.' 라고 대답하며 씨익~ 하고 웃어주자. 실제로 Gamma function은 정의역을 실수에서 복소수까지 확장할 수 있으며 다음과 같이 정의하기도 한다.

eg 118] $2\int_0^{\infty} e^{-t^2}t^{2x-1}dt=\Gamma(x)$ 를 보이시오.

$t^2=s$라 하면 $2t\,dt=ds$ 이므로

$$2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2x-1}dt=\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2(x-1)}\cdot 2t\,dt=\int_0^\infty e^{-s}s^{(x-1)}ds=\Gamma(x)$$

이것은 정적분이므로 t로 적분하던, s로 적분하던 같은 결과라는 것을 기억해 두자. Gamma function에 관한 몇 가지 성질을 증명 없이 적어보면 다음과 같다. 일일이 증명하려니 종이도 많이 차지하는 것 같고 나도 머리가 아프다.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

윈도우에 있는 계산기를 공학용으로 해 놓고 실제로 다음을 확인해 보자.

$$\Gamma(0.5)=-0.5!=(-1)!!\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(1.5)=0.5!=\frac{1!!}{2}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(2.5)=1.5!=\frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(3.5)=2.5!=\frac{5!!}{2^3}\sqrt{\pi}=\frac{5\cdot 3\cdot 1}{8}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4.5)=3.5!=\frac{7!!}{2^4}\sqrt{\pi}=\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{16}\sqrt{\pi}=\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

● π값 구하기 †

원주율 π를 구하는 공식은 여러 가지이다. 그 중에 몇 가지를 적으면 아래와 같다.

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\zeta(4)=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots$$

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)$$

위 식 중에서 맨 마지막 식은 16진수로 그 결과가 나오기 때문에 컴퓨터를 이용하여 π를 구하는데 좋다고 한다. 나는 여기서 미적분을 이용한 급수 표현을 몇 가지 적어보겠다.

eg 119] $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ 를 구하시오.

일단은 부정적분을 먼저 구하자. 이것은 치환적분을 이용해서 계산한다.

$x=\tan z$ 라 하면, $dx=\left(\dfrac{d}{dz}\tan z\right)dz=\sec^2 z\,dz$ 를 얻고

$1+x^2=1+\tan^2 z=\sec^2 z$, $z=\tan^{-1}x$ 을 이용하면

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{1}{\sec^2 z}\cdot\sec^2 z\,dz=\int 1dz=z+C=\tan^{-1}x+C \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}$$

위 결과는 $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$, $\tan 0=0$임을 이용했다.

eg 120] $\dfrac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+t^8-t^{10}+\cdots \quad (-1<t<1)$ 임을 보이시오.

$\dfrac{1}{1+t^2}=(1+t^2)^{-1}$ 이므로 앞에서 적은 테일러 급수

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

에 $n=-1,\ x=t^2$을 대입하면 된다.

eg 121] $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots$ 임을 보이시오.

앞의 예제의 결과를 0에서 x까지 정적분하면 된다.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+\cdots)dt$$

$$\tan^{-1}t\Big|_0^x=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots\Big|_0^x$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

이 급수는 $-1<x\leqq 1$ 의 범위에서만 수렴한다. 이것으로부터 바로

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

를 얻는다. 이것을 라이프니츠(Leibniz)의 공식이라 한다. ln2의 급수 전개와 형태가 비슷함을 알 수 있을 것이다. 이 식은 보기에는 편하지만 수렴이 늦다는 단점이 있다. 100항 정도까지 계산을 해도 겨우 3.14 정도를 얻을 수 있을 뿐이다. 이제 빨리 수렴하는 급수를 구해 보자.

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2},\ \tan\beta=\dfrac{1}{3}$ 이라고 하면 삼각함수의 덧셈정리에 의해서

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1=\tan\frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\alpha+\beta\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\\&=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots\right]\end{aligned}$$

이것은 아까보다 수렴이 빨라서 20항 정도까지 계산을 하면 π의 소수점 아래 6자리까지 얻을 수 있다. 수렴이 더욱 빨라지려면 더욱 작은 수의 arctangent 값을 구하면 된다.

등식 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$을 이용하면

$\dfrac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$를 얻는다. 10항 정도까지 계산을 하면 소수점 아래 6자리를 얻는다.

등식 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{8}\right)$을 이용하면

$\dfrac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)+2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{8}\right)$를 얻는다.

이러한 방법으로 점점 개선을 해 나가면

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 6\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\left(\frac{1}{18}\right) + 8\tan^{-1}\left(\frac{1}{57}\right) - 5\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$ 등을 얻는다.

고등학교에서 다루지는 않지만 몇 가지 유명한 정적분을 적어보겠다. 고등학교 과정으로 결과를 얻을 수 있는 것도 있고, Residue Theorem이나 중적분이라는 고급 과정을 이용하는 것도 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

미적분학의 기초
Introduction to Calculus

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathrm{B} = \mu_0 \mathrm{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}$$

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\int_V (\nabla \cdot \overrightarrow{A}) dV = \oint_{\partial V} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{da}$$

$$\int_A (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{da} = \oint_{\partial A} \overrightarrow{A} \cdot d\vec{l}$$

이름 : 밝히리

소속 : 밝히리