정보통계학과 **백재욱** 교수

제5강 (5장)

랜덤화블록계획과 라틴정방계획

5.1 랜덤화블록계획

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

5.3 라틴정방의 구축

제5강 랜덤화블록계획과 라틴정방계획

5.1 랜덤화블록계획

5.1 랜덤화블록계획

랜덤화블록계획 = 4.4절의 혼합모형

completely randomized design

<표 5-1> 완전랜덤화계획의 예

비료		
I	II	III
농지 8	농지 9	농지 5
농지 2	농지 1	농지 7
농지 3	농지 4	농지 6

randomized block design

<표 5-2> 랜덤화블록계획의 예

	비료		
토질	I	II	III
보통	농지 2	농지 3	농지 1
진흙	농지 4	농지 6	농지 5
모래	농지 9	농지 8	농지 7

5.1 랜덤화블록계획

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & & x_{1b} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2b} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{a1} & x_{a2} & & x_{ab} \\ \text{블록 1} & \text{블록 2} & & \text{블록 b} \end{array}$$

〈그림 5-1〉 랜덤화블록계획

5.1 랜덤화블록계획

◆ 랜덤화블록계획의 통계모형

$$x_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (5.1)$$

$$i = 1,2,\cdots,a;\ j = 1,2,\cdots,b$$

- μ는 전체평균
- τ_i는 고정요인인 관심요인의 i 번째 수준의 효과
- β_j는 블록요인의 j 번째 수준의 효과
- ϵ_{ij}는 오차항으로 서로 독립인 $N(0, \sigma_E^2)$를 따름

5.1 랜덤화블록계획

◆ 우리의 관심 가설

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$ **vs** H_1 : 적어도 한 τ_i 는 0이 아니다.

<표 5-3> 랜덤화블록계획의 분산분석표

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F_0
요인 A	SS_A	$a-1$	MS_A	MS_A/MS_E
블록요인 B	SS_B	$b-1$	MS_B	
E	SS_E	$(a-1)(b-1)$	MS_E	
T	SS_T	$ab-1$		

5.1 랜덤화블록계획

예 5.1 4일간(B1, B2, B3, B4) 가열온도(A)를 A1=70℃, A2=80℃, A3=90℃로 랜덤하게 변화시켜 실험한 후 제품강도를 측정하였다. 가열온도가 제품의 강도에 영향을 미치는가?

<표 5-4> 플라스틱 제품의 강도

온도 \ 실험일	B_1	B_2	B_3	B_4	합	평 균
A_1	98.0	99.0	98.6	97.6	393.2	98.3
A_2	97.7	98.0	98.2	97.3	391.2	97.8
A_3	96.5	97.9	96.9	96.7	388.0	97.0
합	292.2	294.9	293.7	291.6	1172.4	
평 균	97.4	98.3	97.9	97.2		97.7

5.1 랜덤화블록계획

풀이 (1) 변동의 계산

$$CT = \frac{T^2}{ab} = \frac{1172.4^2}{12} = 114543.48$$

$$SS_T = \sum_i \sum_j x^2{}_{ij} - CT = 114549.7 - 114543.48 = 6.22$$

$$SS_A = \sum_i \frac{T_{i.}{}^2}{b} - CT = \frac{1}{4}(393.2^2 + 391.2^2 + 388^2) - CT = 3.44$$

$$SS_B = \sum_j \frac{T_{.j}{}^2}{a} - CT \quad = \frac{1}{3}(292.2^2 + 294.9^2 + 293.7^2 + 291.6^2) - CT = 2.22$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B = 0.56$$

5.1 랜덤화블록계획

풀이 (2) 자유도 계산

- 총 변동 : $\phi_T = ab - 1 = 11$
- 요인 A : $\phi_A = a - 1 = 2$
- 요인 B : $\phi_B = b - 1 = 3$
- 잔차 E : $\phi_E = \phi_T - \phi_A - \phi_B = 6$

5.1 랜덤화블록계획

풀이 (3) 분산분석표의 작성

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F_0
A	3.44	2	1.72	18.5^{**}
B	2.22	3	0.74	7.96
E	0.56	6	0.093	
T	6.22	11		

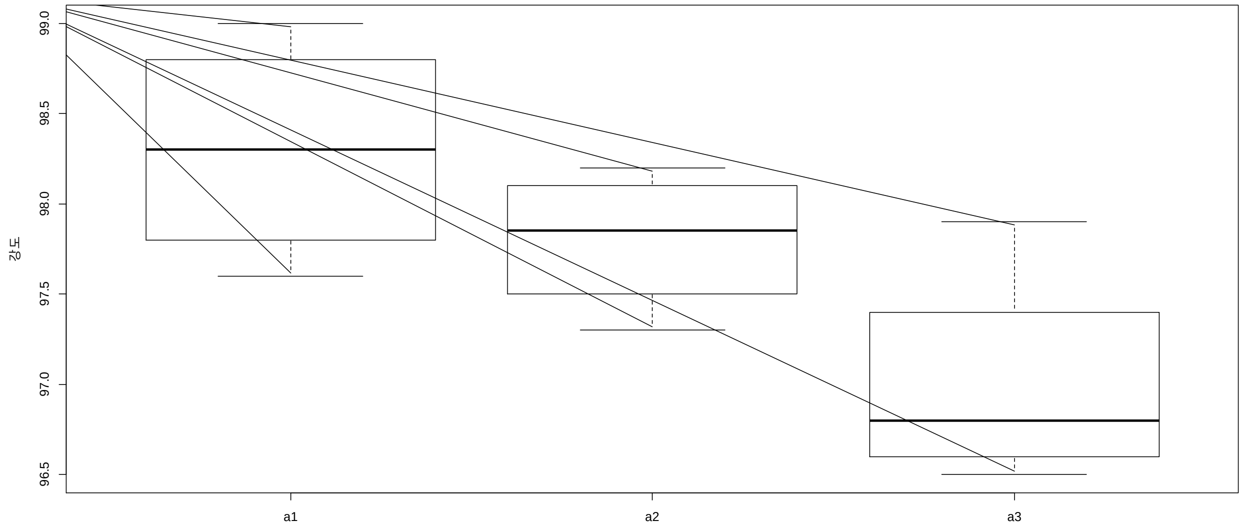
$18.5 > F(2, 6; 0.01) = 10.9$

→ 요인 A는 유의수준 $\alpha = 0.01$에서 유의하다.
(즉, 가열온도 따라 제품의 강도가 모두 같지는 않다.)

5.1 랜덤화블록계획

R 실습

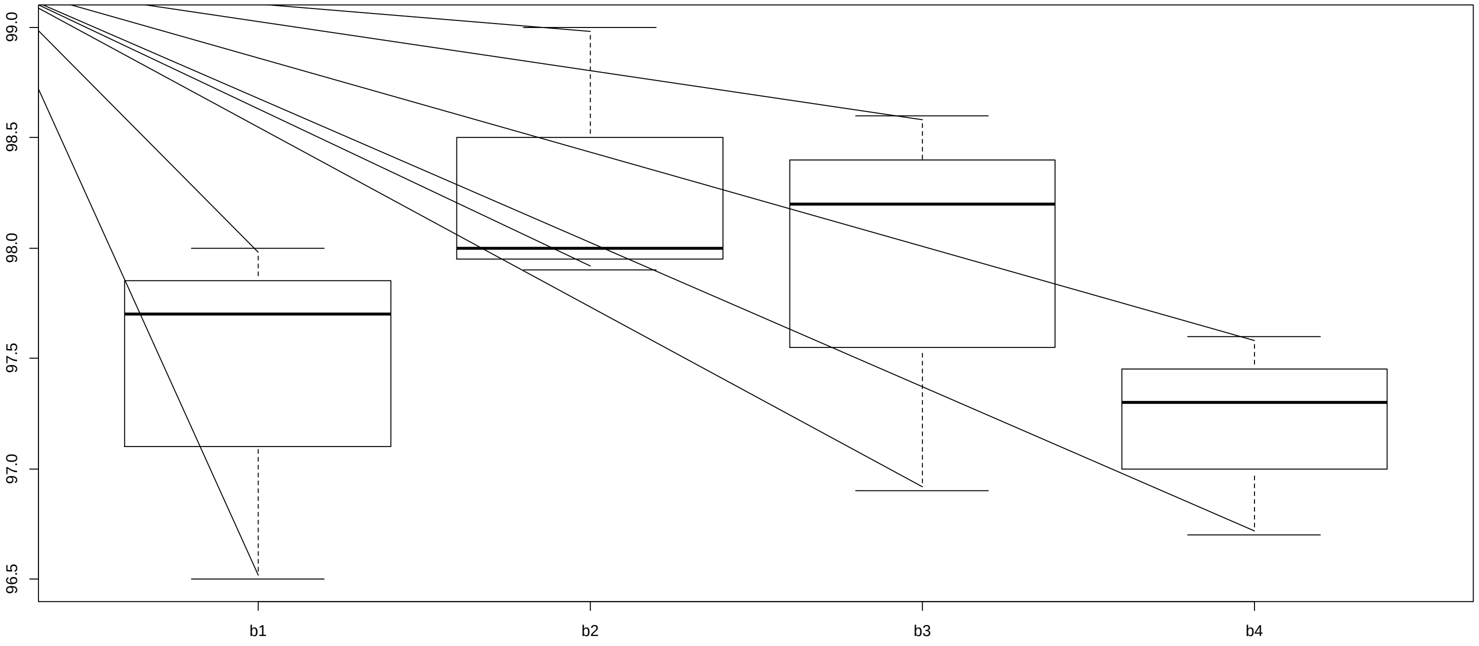
```
y <- c(98, 99, 98.6, 97.6, 97.7, 98, 98.2, 97.3, 96.5, 97.9, 96.9, 96.7)
a <- c(rep(1, 4), rep(2, 4), rep(3, 4))
b <- c(rep(c(1, 2, 3, 4), 3))
strength <- data.frame(y, a, b)
strength$a <- factor(strength$a, levels=c(1, 2, 3), labels=c("a1", "a2", "a3"))
strength$b <- factor(strength$b, levels=c(1, 2, 3, 4), labels=c("b1", "b2", "b3", "b4"))
boxplot(y ~ a, data=strength, ylab="강도", main="플라스틱 제품 강도")
```



5.1 랜덤화블록계획

R 실습

boxplot(y ~ b, data=strength, ylab="강도", main="플라스틱 제품 강도")



anova <- aov(y ~ a+b, data=strength)

summary(anova)

Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)

*a 2 3.44 1.7200 18.429 0.00274 ***

*b 3 2.22 0.7400 7.929 0.01647 **

Residuals 6 0.56 0.0933

Signif. codes:

*0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.*

제5강 랜덤화블록계획과 라틴정방계획

5.2 라틴정방계획(Latin Square Design)

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

예 다음과 같을 때 4×4×4=64번 실험을 해야 하나? 너무 많지 않은가?
4×4=16(=4^{3-1})번의 실험으로도 효과를 파악할 수 있을까?

- 블록요인 2개 : 수준이 4인 블록요인 1 (사람: 4명),
  수준이 4인 블록요인 2 (오븐 내 위치: 4군데)
- 관심요인 1개 : 수준이 4인 관심요인 (케이크 종류: 4개)

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

◆ 라틴정방

- 라틴(Latin)은 A, B, C, D, ...를 말한다.
- 정방(Square)은 정사각형을 말한다.
- 다음 16번 실험으로 관심요인의 효과를 파악할 수 있다.

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

- 행에 블록요인1 배치, 열에 블록요인2 배치, 라틴글자(A, B, C, D)에 관심요인 배치

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

◆ 실험순서

사람을 우선 랜덤하게 행에 배치하고,
오분 내 위치를 랜덤하게 열에 배치하며,
케이크 종류를 라틴글자에 랜덤하게 배치하여 실험한다.

◆ 모형

- $x_{ijk} = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \epsilon_{ijk}, \ (i, j, k = 1, \cdots, p)$
- ρ_i : i 번째 행의 효과, γ_j: j 번째 열의 효과, τ_k: k 번째 처리의 효과
- 귀무가설 $H_0 : \tau_k = 0 \ (k = 1, \ldots, p)$
- 검정통계량 $F = \frac{MS_{Trt}}{MS_E}$

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

〈표 5-5〉 p × p 라틴정방계획에 대한 분산분석표

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F_0
R (행블록)	SS_R	$p-1$	MS_R	
C (열블록)	SS_C	$p-1$	MS_C	
Trt	SS_{Trt}	$p-1$	MS_{Trt}	MS_{Trt}/MS_E
E	SS_E	$(p-2)(p-1)$	MS_E	
T	SS_T	p^2-1		

$F_0 > F(p-1,(p-2)(p-1);\ \alpha)$이면 귀무가설 기각
(처리 수준 간 효과에 차이가 없다고는 할 수 없음)

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

예 5.2 관심사: 5가지 로켓 추진제(Trt)의 성능 비교

블록요인1 : 5가지 원료

블록요인2 : 5명의 기사

관심요인 : 5가지 로켓 추진제

〈표 5-6〉 로켓 추진제 데이터

원료 뭉치	기사				
	1	2	3	4	5
I	A = -1	B = -5	C = -6	D = -1	E = -1
II	B = -8	C = -1	D = 5	E = 2	A = 11
III	C = -7	D = 13	E = 1	A = 2	B = -4
IV	D = 1	E = 6	A = 1	B = -2	C = -3
V	E = -3	A = 5	B = -5	C = 4	D = 6

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

풀이

〈표 5-7〉 추진제 데이터에 대한 분산분석표

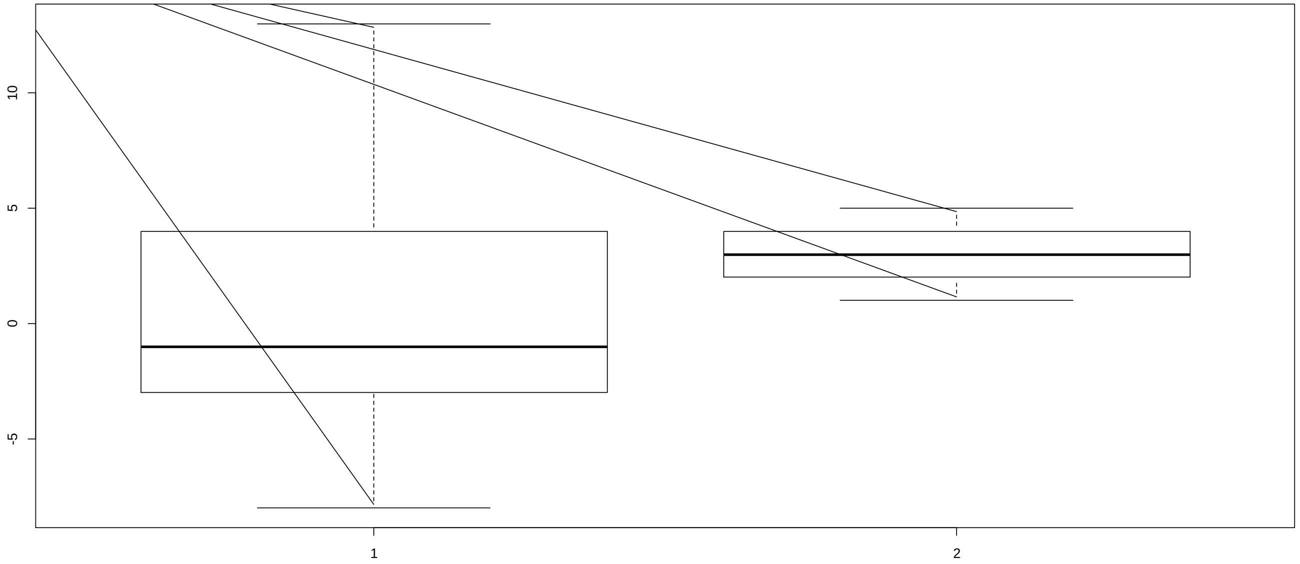
요인	제곱합	자유도	평균제곱	*F*
원료(행블록)	68.00	4	17.00	
기사(열블록)	150.00	4	37.50	
추진제	330.00	4	82.50	7.73**
오차	128.00	12	10.67	

➢ 추진제 제조공식에 따라 성능이 모두 똑같은 것은 아니다.
그러면 어느 것이 가장 좋은가? **추후분석**이 필요하다!

5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

R 실습

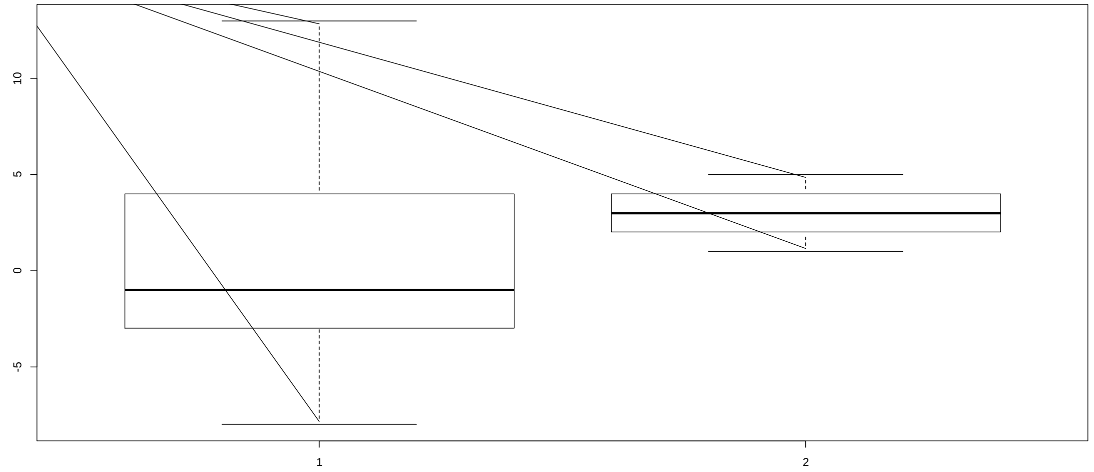
```
y <- c(-1,-5,-6,-1,-1,-8,-1,5,2,11,-7,13,1,2,-4,1,6,1,-2,-3,-3,5,-5,4,6)

row <- factor(c(rep(1, 5), rep(2, 5), rep(3, 5), rep(4, 5), rep(5, 5)))

col <- factor(c(rep(c(1, 2, 3, 4, 5), 5)))

trt <- c("a","b","c","d","e", "b","c","d","e","a", "c","d","e","a","b", "d","e","a","b","c", "e","a","b","c","d")

rocket.data <- data.frame(y, row, col, trt)

boxplot(rocket.data$y, rocket.data$row)
```



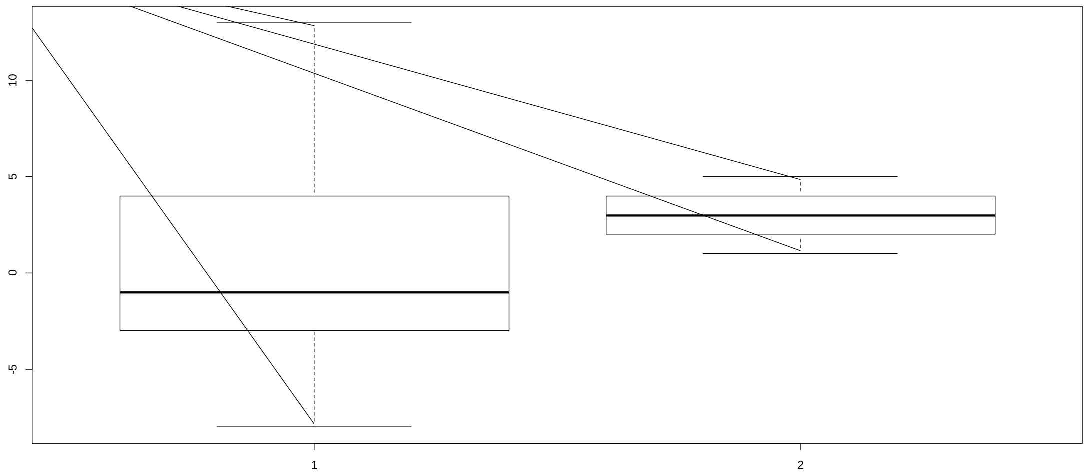
5.2 라틴정방계획 (Latin Square Design)

R 실습

boxplot(rocket.data$y, rocket.data$col)



boxplot(rocket.data$y, rocket.data$trt)



anova <- aov(y ~ row+col+trt, data=rocket.data)

summary(anova)

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
row	4	68	17.00	1.594	0.23906	
col	4	150	37. 50	3.516	0.04037	*
trt	4	330	82.50	7.734	0.00254	**
Residuals	12	128	10.67			

Signif. codes:

0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0

제5강 랜덤화블록계획과 라틴정방계획

5.3 라틴정방의 구축

5.3 라틴정방의 구축

예 3×3 라틴정방

A	B	C
B	C	A
C	A	B

표준형

B	C	A
A	B	C
C	A	B

행의 랜덤화

A	B	C
C	A	B
B	C	A

열의 랜덤화

표준형: 1개

A	B	C
B	C	A
C	A	B

5.3 라틴정방의 구축

예 4×4 라틴정방 표준형: 4개

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

A	B	C	D
B	D	A	C
C	A	D	B
D	C	B	A

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

예 5×5 라틴정방 표준형: 56개

5.3 라틴정방의 구축

<삼원배치법과의 관계>

	Column		
	A	B	C
Row	B	C	A
	C	A	B

		Column 1	Column 2	Column 3
Row 1	A	○		
	B		○	
	C			○
Row 2	A			○
	B	○		
	C		○	
Row 3	A		○	
	B			○
	C	○		

< 4 × 4 그레코라틴정방계획>

행	열			
	1	**2**	**3**	**4**
1	$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
2	$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
3	$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
4	$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

실험순서: 라틴정방계획의 실험순서와 유사

다음 시간 안내

제6강 (6장)

회귀분석과 공분산분석