שם הבודק: אליאור אוריסמן
תאריך בדיקה: ____________
ציון: ___

דוח מסכם בניסוי: אופטיקה 2

שם מדריך: אליאור אוריסמן

תאריך ביצוע הניסוי: חלק א: 24/03/2025
תאריך הגשת הדוח: 24/06/2025

הדוח מוגש על ידי:

1. טום בלכר: 213886682

מסלול לימוד: פיזיקה-מתמטיקה
קבוצה: R

הערות הבודק לנושאים לקויים בדו"ח

מטרת הניסוי

א הערכת מקדם השבירה של זכוכית

ב אישוש עקרון פרמה

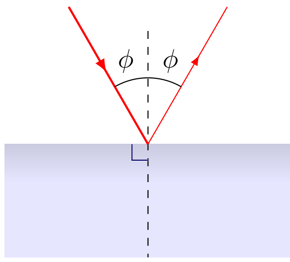
רקע תיאורטי

אופטיקה גיאומטרית היא תחום באופטיקה שבו מתארים את התפשטות האור באמצעות קווים ישרים, הנקראים קרני אור. מהירות האור בריק, שהיא קבוע יסודי של הטבע, מסומנת באות c. כאשר אור עובר בתווך המהירות של האור קטנה מ-c. נסמן מהירות זו ב-v. מקדם השבירה של התווך דרכו עובר האור מוגדר בתור:

$$n = \frac{c}{v} \tag{1}$$

חוק ההחזרה

קובע כי קרן אור הפוגעת בזווית ϕ ביחס לאנך למשטח בנקודת הפגיעה חוזרת מהמשטח בזווית זהה , ϕ.



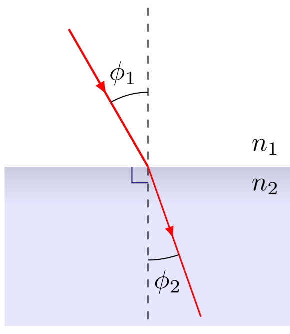
איור 1: חוק ההחזרה. קרן האור פוגעת במשטח האופקי בזווית ϕ ביחס לאנך המשטח ומוחזרת בזווית זהה.

חוק סנל

קובע כי קרן הנשברת בין שני תווכים בעלי מקדמי שבירה שונים מקיימת את הקשר

$$n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2 \tag{2}$$

כאשר ϕ_1 היא זווית הפגיעה של הקרן ביחס לקו הנורמל (האנך) לממשק, ו־ϕ_2 היא זווית השבירה ביחס לאותו נורמל בתווך השני (n_2).



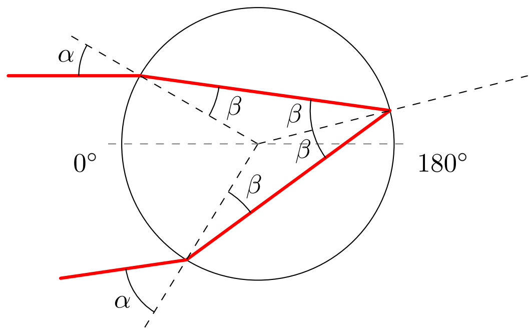
איור 2: קרן אור עוברת דרך שני תווכים שונים ונשברת בכניסה לתווך החדש. הקשר בין הזוויות ביחס לנורמל ϕ_1, ϕ_2 ניתן על ידי חוק סנל.

החזרות בדיסקה

בדיסקה בעלת מקדם שבירה n אשר מסביבה אוויר, (שמקדם השבירה שלו בקירוב של 3 ספרות הינו 1), נקבל מחוק סנל שכאשר אור קרן נכנסת בזווית α ונשברת בזווית β נקבל

$$\sin(\alpha) = n\sin(\beta) \tag{3}$$

כאן β היא זווית השבירה (הנמדדת ביחס לנורמל) בתוך הדיסקה.



איור 3: איור מערכת הניסוי ממבט מלמעלה. הקרן נכנסת מתווח אוויר (אשר ניקח בתור 1) בזווית α לתוך הדיסקה אשר עשוי זכוכית ונשברת בזווית β. בדיסקה יתקבלו החזרות של הקרן. באיור נראות שלוש החזרות כך ש-$N = 5$.

הקרן פוגעת בדפנות הדיסקית, ובכל פגיעה יוחזרו קרני האור בזווית β ויתנגשו בדופן הדסקה. נסמן כל זווית התנגשות ב-η_n כאשר $n \leq N$, מספר ההחזרות. הזווית ה-n-ית תהיה

$$\eta_N = \alpha + (N-1)\gamma \tag{4}$$

כאשר $\gamma = \pi - 2\beta$, והגדרנו את זווית האפס להיות כך שהישר $\theta = 0$ מקביל לקרן הנכנסת.

זווית מינימלית

במהלך ההחזרות של הקרן בתוך הדיסקה, קיימת זווית פגיעה מינימלית אותה נסמן ב-α_{min}. יתקבל כי

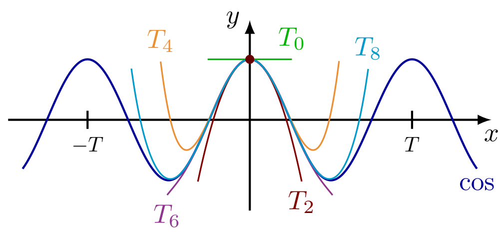
$$n = \sqrt{15\cos^2(\alpha_{\text{min}}) + 1} \tag{5}$$

טור טיילור

באמצעות טור טיילור ניתן לבצע קירוב פולינומיאלי לפונקציה $f(x)$ סביב נקודה מסויימת x_0 כך ש-

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N \tag{6}$$

כאשר $f^{(n)}(x_0)$ מייצג את ערך הנגזרת ה-n-ית בנקודה x_0 עבורה אנו מבצעים את קירוב טיילור. N נקרא דרגת הפיתוח. נוכל לקחת $\lim_{N\to\infty}$ ולקבל את טור הטיילור האינסופי שהוא הפונקצייה, $f(x)$. על כן, כדי לבצע קירוב זה, נדרוש שהפונקציה חלקה, כלומר היא גזירה אינסוף פעמים. האיור מדגים את הקירוב הפולינומיאלי של פונקציית הקוסינוס באמצעות טורי טיילור בדרגות שונות.



איור 4: טורי טיילור בעבור דרגות פיתוח שונות T_i (דרגה i-ית) סביב הנקודה $x_0 = 0$. ניתן לראות שעם גדילת דרגת הפיתוח, פולינום טיילור מייצג טוב יותר את הפונקציה בסביבה סביב נקודת הפיתוח.

רשימת הציוד

- לייזר אדום
- מסילה
- דיסקה עגולה בעלת קוטר 20 ס"מ ומד זווית סביב הדיסקה.
- מגוון סרגלים
- נייר דבק
- חתיכת נייר עם קו ישר

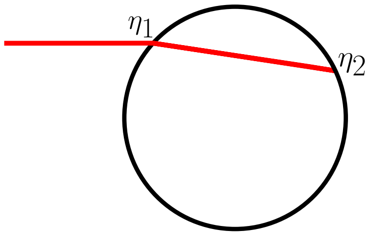
תיאור מהלך הניסוי

חלק א1

א הלייזר הורכב על הגבי מסילת הסרגל במקביל למשטח עליו יושבת הדסקה. הלייזר הופנה כך שיצא במאונך לסרגל ומוקם כך שהזווית בכניסה לדסקית תהיה שווה ל-0° ומעלות וביציאה ל-180°. נקבע את המערכת במקום באמצעות נייר דבק וזו תישאר קבועה לאורך הניסוי.

ב נמקדם תחילה את הלייזר כך שזווית הכניסה היא $\alpha = 0^\circ$ ונעלה כל פעם ב-5° עד שנמדוד זווית כניסה מקסימלית של $\alpha = 45^\circ$ לסך של 10 מדידות. בכל מדידה נמדוד את זווית היציאה η_2. שני אלו נמדדו באמצעות מד זווית סביב הדסקה.

ג נמדוד באמצעות מד הזווית את עובי האלומה ונמצא אותו להיות שווה ערך ל-$w = 0.5^\circ$.



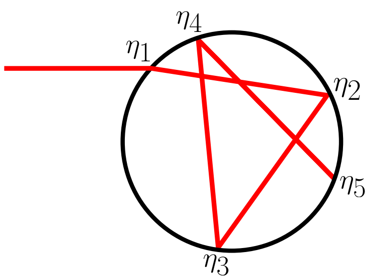
איור 5: חלק א1 של הניסוי. נסתכל על הזוויות $\alpha = \eta_0$ לעומת הזווית η_1.

המערכת מתוארת באיור.

חלק א2

א נבחר זווית α מסויימת ($\alpha = 30^\circ$ בניסוי שלנו) כך שיתקבלו הרבה החזרות בתוך הדיסקה ונזיז את הלייזר אליה.

ב נמדוד את הזוויות $\eta_1, \ldots, \eta_5$, זווית היציאה בעבור פגיעה n-ית לסך של 5 מדידות.



איור 6: חלק א2 של הניסוי. הלייזר מוקם כך שנראה ארבע החזרות.

המערכת מתוארת באיור.

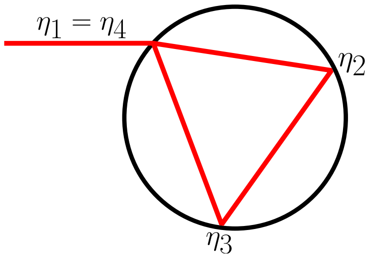
חלק א3

א נמצא את זווית הפגיעה α כך שהזווית η_3 נמצאת במינימום. זאת נסיק בכך שלאחר נקודה זו כיוון התנועה של η_3 ישתנה.

ב ניקח 4 מדידות בהפרשים של 0.5° מעלות מנקודת המינימום לכל כיוון.

חלק א4

א נזיז את הלייזר עד שיתקבל השוויון $\eta_4 = \alpha$. נמדוד את הזווית α עבורה זה מתקיים.



איור 7: חלק א4 של הניסוי. נכוון את הזווית η_3 להיות שווה לזווית η_0.

המערכת מתוארת באיור.

תכנון עיבוד נתונים

בכל חלק של הניסוי חושב בשיטה שונה מקדם השבירה של זכוכית הדיסקה - ולבסוף המקדמים n_1, n_2, n_3, n_4 הושוו לערך מקדם השבירה הידוע עבור זכוכית, $n = 1.5$ (עם הנחה לשגיאה אפסית).

חלק א

עובי האלומה של הלייזר נמדד להיות $w_\alpha = 0.5°$ ונניח שעובי אלומת הלייזר נשארת קבועה עם ההחזרות. אם כך נגדיר את חצי רוחב האלומה להיות $\theta_\xi = 0.25°$.

חלק א1

בחלק א' נמדדו הזוויות α ו-η_1, השגיאה בזוויות נובעת מרזולוציית מכשיר המדידה (מד זווית בעל רזולוציה $0.5°$). ולכן השגיאה בזוויות תהיה חיבור השגיאות בעבור עובי האלומה ושגיאת הרזולוציה של מד הזווית:

$$\Delta\xi = \sqrt{\left(\frac{0.5}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + \left(\theta_\xi \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2}. \tag{7}$$

כאשר ξ היא זווית שנמדדת בניסוי בצורה ישירה ובחלק הזה ספציפית α, η_1, והמכפלות הפנימיות הן מעבר לרדיאנים מזווית שאלו נמדדו בה. לאחר המרה לרדיאנים של הזוויות הנמדדות, לכל α, η_1, חושבה הזווית β בהתאם. השגיאה תהיה שגיאה עקיפה

$$\beta = \frac{\alpha + \pi - \eta_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\eta_1^2} \tag{8}$$

כעת בעבור $\varphi \in \{\alpha, \beta\}$, השגיאות העקיפות ב-$\sin(\xi)$ הן:

$$\Delta \sin\varphi = |\cos\varphi|\,\Delta\varphi. \tag{9}$$

התאמה לינארית

באמצעות מחברת הקולאב, נבצע את ההתאמה

$$\sin(\alpha) = a_1 \sin(\beta) + a_0 \tag{10}$$

כאשר השגיאות בסינוסי הזוויות ינתנו על ידי השגיאה עקיפה מלעיל. כעת מחוק סנל והקירוב של מקדם השבירה של אוויר, נצפה כי

- $a_1 = n_1$, מקדם השבירה של זכוכית. זה בגלל שלמעשה a_1 שווה ליחס בין מקדמי השבירה של זכוכית לאוויר והמכנה הוא אחד מקירוב מקדם שבירה של אוויר. השגיאה בפרמטר תהיה השגיאה שתוחזר על ידי תוכנת ההתאמה.
- a_0 ייצג קבוע שנצפה שיהיה קרוב לאפס.

חלק א2

בעבור α וכל אחת מההחזרות η_i, כאשר i טבעי בין 1 ל-5, השגיאה נשארת זו של משוואה.

התאמה לינארית

$$\eta_N = b_1 N + b_0 \tag{11}$$

כאשר בציר האנכי הזווית של ההחזרה ה-N-ית. לפי משוואה יתקבל

- $b_1 = \pi - 2\beta$, השגיאה בו תוחזר על ידי ההתאמה
- $b_0 = \alpha - (\pi - 2\beta)$, השגיאה בו תוחזר על ידי ההתאמה

מהשגיאות של b_i שיוחזרו מההתאמה נוכל לחלץ

$$\alpha = b_1 + b_0 \pm \sqrt{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_0)^2} \tag{12}$$

$$\beta = \frac{\pi - b_1}{2} \pm \frac{\Delta b_1}{2} \tag{13}$$

נחשב מקדם השבירה לפי חוק סנל כאשר השגיאה בו היא עקיפה

$$n_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha}{\tan\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\tan\beta}\right)^2} \tag{14}$$

חלק א3

השגיאות בזוויות חושבו לפי משוואה.

התאמה פרבולית

$$\eta_3 = c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 \tag{15}$$

$$\alpha_{\text{min}} = -\frac{c_1}{2c_2} \pm \alpha_{\text{min}}\sqrt{\left(\frac{\Delta c_1}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c_2}{c_2}\right)^2}. \tag{16}$$

מקדם השבירה יתקבל לפי משוואה כאשר השגיאה ב-n היא שגיאה עקיפה

$$n_3 = \sqrt{15\cos^2(\alpha_{\text{min}}) + 1} \pm \frac{15\sin(2\alpha_{\text{min}})}{2n_3}\Delta\alpha_{\text{min}}. \tag{17}$$

חלק א4

השגיאה בזווית α נשארת לפי משוואה כאשר מתקיים $\alpha = \eta_4$ בהתאם למהלך הניסוי.

$$n_4 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\Delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta}\Delta\beta\right)^2} \tag{18}$$

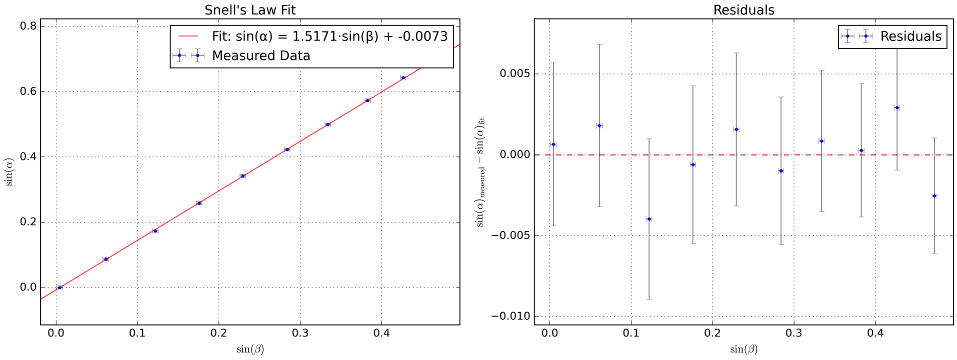
חלק ב

עיבוד תוצאות הניסוי

חלק א1

שם/פירוש	סימון	יחידות	ערך	שגיאה יחסית
חי בריבוע מצומצם	χ^2_{red}	–	0.11	–
p-value	P_p	–	9.99×10^{-1}	–
n_1	a_1	–	1.5171 ± 0.0047	0.31%
מקדם חופשי	a_0	–	$-0.0073 \pm 0.0014 \times 10^{-3}$	19.89%

טבלה 1: ערכי ההתאמה המתקבלים עבור הנתונים שנמדדו בניסוי בעבור חלק א1.



איור 8: ההתאמה בעבור חלק א1 של הניסוי.

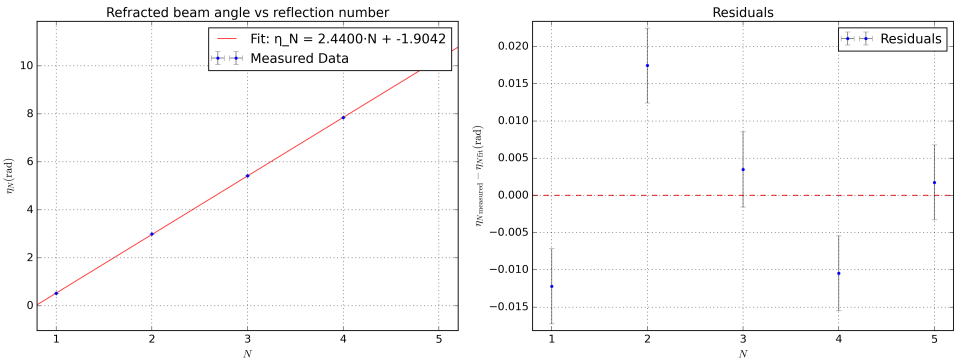
נראת התאמה טובה של המודל לנקודות שנמדדו. גרף השארים מראה שארים מפוזרים באופן אקראי סביב ציר האפס. כל השארים חותכים את ציר האפס וזה מצביע על הערכת יתר. מהטבלה נראה ערך חי בריבוע מצומצם קטן מאחד שמצביע גם, בהסכמה, להערכת יתר. ערך ה-P מחוץ לתחום התקין מלמעלה ולכן מסכים עם הערכת היתר של מדד החי בריבוע של הטבלה וגרף השארים. נבחין שערך המקדם החופשי לא מאוד קרוב לאפס כפי שציפינו. ההערכה בעבור מקדם השבירה של זכוכית היא פרמטר ההתאמה a_1. נשווה אותה לערך מקדם השבירה הידוע באמצעות מדד N_σ ויתקבל

$$N_\sigma(n, n_1) = 3.64 \tag{19}$$

חלק א2

שם/פירוש	סימון	יחידות	ערך	שגיאה יחסית
חי בריבוע מצומצם	χ^2_{red}	–	7.60	–
p-value	P_p	–	4.45×10^{-5}	–
$\alpha - (\pi - 2\beta)$	b_1	rad	2.4400 ± 0.0044	0.18%
$\pi - 2\beta$	b_0	rad	-1.904 ± 0.015	0.76%

טבלה 2: ערכי ההתאמה המתקבלים עבור הנתונים שנמדדו בניסוי בעבור חלק א2.



איור 9: ההתאמה בעבור חלק א2. בציר האנכי נראת הזווית המחוזרת ה N-ית ובציר האופקי מספר ההחזרה N.

מהגרף ניתן לראות שההתאמה הלינארית מתאימה לנקודות היטב. מגרף השארים מפוזרים אקראית סביב ציר האפס. נראה כי שתיים מתוך חמשת השארים חותכים את ציר האפס ולכן זו מעידה על הערכת חסר. מהטבלה ניתן לראות גם כי ערך החי בריבוע המצומצם גדול פי שבע מהערך הרצוי מה שמראה בהסכמה עם גרף השארים הערכת חסר. ערך P מחוץ לטווח התקין מלמטה ולכן זה מסכים עם הערכת החסר של מדד החי בריבוע המצומצם. לפי הקשר בתכנון העיבוד נמצא כי $\beta = 2.5$ rad ו- $\alpha = 0.54$ rad. כעת, לפי הקשר במשוואה נמצא כי

$$n_2 = 1.486 \pm 0.040 \quad (2.70\%) \tag{20}$$

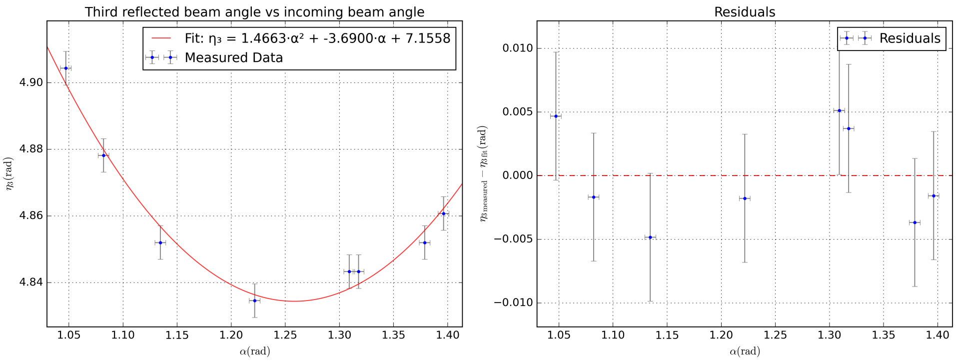
נשווה לערך הידוע בעבור מקדם זכוכית

$$N_\sigma(n, n_2) = 0.35 \tag{21}$$

חלק א3

שם/פירוש	סימון	יחידות	ערך	שגיאה יחסית
חי בריבוע מצומצם	χ^2_{red}	–	0.74973	–
p-value	P_p	–	5.86×10^{-1}	–
–	c_2	rad^{-1}	1.47 ± 0.15	10.29%
–	c_1	–	-3.69 ± 0.37	10.02%
–	c_0	rad	7.16 ± 0.22	3.13%

טבלה 3: ערכי ההתאמה המתקבלים עבור הנתונים שנמדדו בניסוי בעבור חלק א3.



איור 10: ההתאמה בעבור חלק א3. בציר האנכי נראת הזווית המוחזרת השלישית ובציר האופקי נראת זווית הכניסה.

ממבט על ההתאמה ניתן לראות שהנקודות מזכירות גרף פרבולי. השארים מפוזרים באופן אקראי סביב ציר האפס ורוב רובם של השארים חותכים אותו. זה מצביע על הערכת יתר. בטבלה ניתן לראות הסכמה עם הערכת היתר מערך החי בריבוע שקטן מאחד (אבל די קרוב לו) וערך P בטווח הרצוי אך קרוב לגבול התחתון שזליגה מחוץ אליו הייתה מצביעה על הערכת חסר. השגיאות בפרמטרי ההתאמה שאינם חופשיים הינו פי שתיים מטווח השגיאה היחסית הרצוי. מהמשוואה נמצא כי

$$n_3 = 1.57 \pm 0.54 \quad (34.39\%) \tag{22}$$

כעת נשווה לערך הידוע

$$N_\sigma(n, n_3) = 0.13 \tag{23}$$

חלק א4

מהקשר במשוואה נחלץ כי

$$n_4 = 1.498 \pm 0.015 \quad (1.00\%) \tag{24}$$

נשווה לערך מקדם השבירה הידוע של זכוכית

$$N_\sigma(n, n_4) = 0.14 \tag{25}$$

דיון ומסקנות

N_σ	P_p	χ^2_{red}	$\Delta n_i/n_i$	n_i	התאמה
3.64	9.99×10^{-1}	0.11	0.31%	1.5171 ± 0.0047	א1
0.35	4.45×10^{-5}	7.60	2.70%	1.486 ± 0.040	א2
0.13	5.86×10^{-1}	0.75	34.39%	1.57 ± 0.54	א3
0.14	–	–	1.00%	1.498 ± 0.015	א4

טבלה 4: סיכום הניסוי.

הטבלה מלעיל מסכמת את ארבע השיטות (א1-א4) לחישוב מקדם השבירה של דיסקת הזכוכית.

- חלק א1 – ההתאמה הלינארית בין $\sin\alpha$ ל-$\sin\beta$ נתנה שגיאה יחסית קטנה מאוד $\Delta n/n = 0.31\%$ ו-$\chi^2_{\text{red}} \ll 1$, $P_p > 0.95$, וגרף השארים מעידים על הערכת יתר. עם זאת, המרחק מן הערך הספרותי $(n = 1.5)$ הוא $N_\sigma = 3.64$, וזה מעט מעל לטווח הרצוי אך די קרוב לו.
- חלק א2 – השיפוע של η_N כפונקציה של N החזיר שגיאה יחסית קטנה למדי (2.7%) עם קירוב תקין לערך הספרותי $(N_\sigma = 0.35)$, אך ערכי $\chi^2_{\text{red}} = 7.6$ ו-$P_p \approx 4.5 \times 10^{-5}$ וגרף השארים מצביעים על הערכת חסר.
- חלק א3 – ההתאמה הפרבולית סביב המינימום הניבה שגיאה יחסית גדולה במיוחד (34%). זאת משום שזו מדידה מאתגרת וקשה לתפוס במדויק את הנקודה הקריטית עבורה הנקודה מחליפה כיוון. בעבור השגיאה הגדולה מתקבל $N_\sigma = 0.13$ מרמז על קרבה טובה לערך הספרותי, אבל עם גודל השגיאה לא ניתן לסמוך על קרבה זו ולקבוע מסקנות אמינות ויהיה צורך לחזור על הניסוי כדי להקטין את השגיאה היחסית במקדם השבירה.
- חלק א4 – השיטה הגיאומטרית הפשוטה $\alpha = \eta_4$ סיפקה את הערך הקרוב והמדויק ביותר $n_4 = 1.498 \pm 0.015$ (שגיאה יחסית של אחוז אחד) עם קרבה רבה לערך הספרותי $(N_\sigma << 3)$.

שם הבודק: אליאור אוריסמן
תאריך בדיקה: ____________
ציון: ___

דוח מסכם בניסוי: אופטיקה 2

שם מדריך: אליאור אוריסמן

תאריך ביצוע הניסוי: חלק ב: 22/06/2025
תאריך הגשת הדוח: 24/06/2025

הדוח מוגש על ידי:

1. טום בלכר: 213886682

מסלול לימוד: פיזיקה-מתמטיקה
קבוצה: R

הערות הבודק לנושאים לקויים בדו"ח

מטרת הניסוי

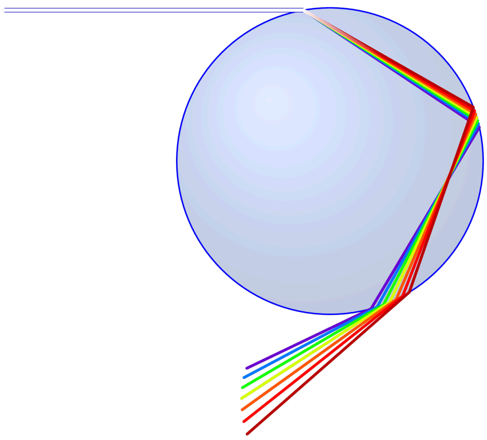
המטרה המרכזית של ניסוי זה היא לאפיין באופן כמותי את התלות הספקטרלית של מקדם השבירה $n(\lambda)$ של זכוכית N-BK7 בתחום האור הנראה (400 עד 700 ננומטר).

א לקבוע איזה מודל (קושי או סמייר) מתאר טוב יותר את הנתונים שנמדדנו.

ב לאמוד את טיב האקסטרפולציה של כל מודל אל תחומי UV ו-IR בהשוואה לערכי ספרות.

רקע תיאורטי

בהמשך לחלק הקודם עולה השאלה, האם הלייזר בו השתמשנו מיוחד? האם יכולנו להשתמש בלייזר אחר בעל אורך גל אחר והיינו מקבלים את אותו מקדם השבירה? אם היינו מאירים קרן לבנה (אשר עצמו מורכב מכמה צבעים) לתוך דיסק הזכוכית בניסוי הקודם היינו מצפים לראות את התמונה הבאה



איור 1: תצפית ניסוי חלק א עם אור לבן

נראה שהקרן הלבנה אשר עצמה מורכבת מגלים בצבעים (אורכי גל) שונים מתפצלת לצבעים אשר מרכיבים את הקרן הלבנה. התפלגות של האור הלבן לצבעיו השונים מוסברת על ידי תהליך הנפיצה של הזכוכית, כאשר מקדם השבירה n תלוי באורך הגל λ. לפי חוק סנל (כאשר שוב נשתמש בקירוב שמקדם השבירה של אוויר הוא אחד):

$$n(\lambda)\,\sin\theta'(\lambda) = \sin\theta \tag{1}$$

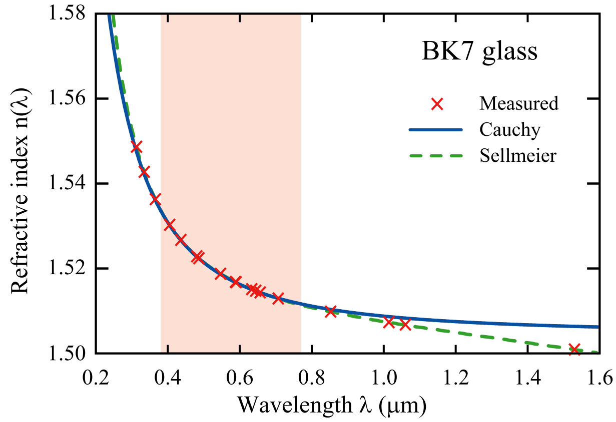
ומכיוון ש-$n(\lambda)$ יורד עם עליית אורך הגל, כל צבע נכנס ויוצא בזווית שונה והמרחק בין הצבעים השונים יגדל עם כל החזרה.

על מנת לחקור את הקשר בין הערכת מקדם השבירה של תווך הזכוכית, נשתמש בשני המשוואות של קושי וסלמייר:

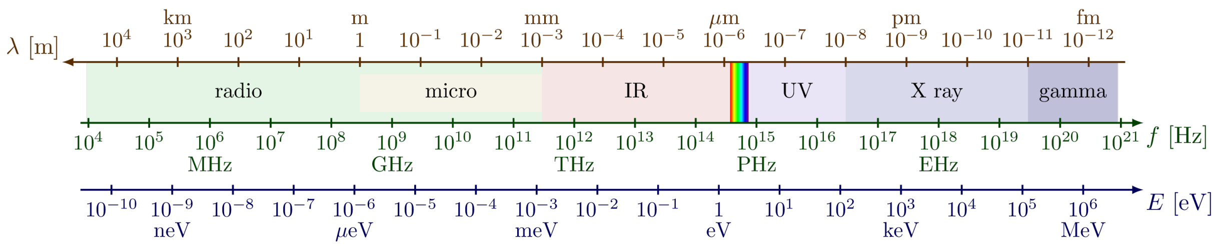
$$\text{קושי:}\quad \boldsymbol{n_c(\lambda) = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2}} + \frac{A_2}{\lambda^4} + \cdots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda^{2k}} \tag{2}$$

$$\text{סלמייר:}\quad \boldsymbol{n_s^2(\lambda) = 1 + \frac{B_0\lambda^2}{\lambda^2 - C_1}} + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \cdots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i\lambda^2}{\lambda^2 - C_i} \tag{3}$$

משוואות קושי וסלמייר נותנות הערכות דומות בתחום הגלים הנראים לעין אבל בתחומי אורכי הגל הרחוקים יותר מהטווח הנראה לעין משוואות קושי וסלמייר מאבדות התאמה ומשוואת סלמייר מתארת באופן מדוייק יותר בטווח הרחוקים את הערכת מקדם השבירה.



איור 2: משוואת קושי וסלמייר בתיאור מקדם השבירה כתלות באורך הגל בעבור זכוכית N-BK7.



איור 3: הספקטרום האלקטרומגנטי

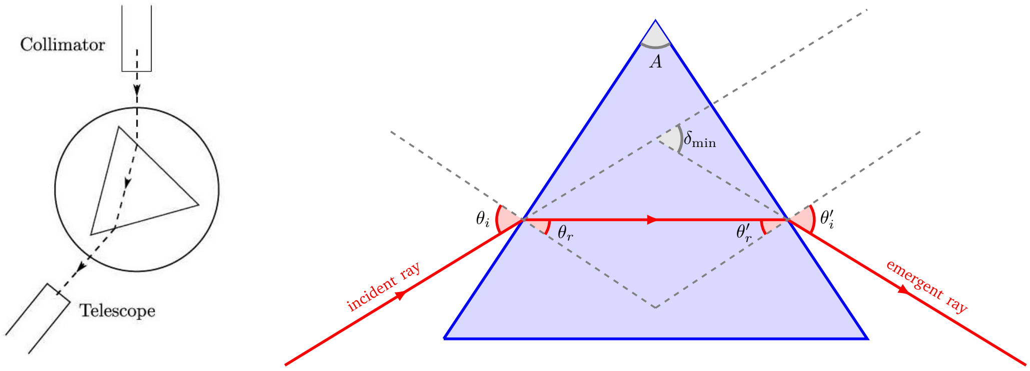
בעבור ההתאמות נשתמש בקירובים של הטורים בעבור משוואות קושי וסלמייר כך שמהטור ניקח את האיברים הראשונים אשר מודגשים במשוואות מלעיל.

רשימת ציוד

- משטח אופטי עם מד זווית
- מוטות ומחזיקים אופטים
- קולימטור
- טלסקופ
- מנסרה מזכוכית מסוג N-BK7 עם זווית ראש ידועה
- מקורות אור מונוכרומטיים
- ספקי מתח גבוה למקורות האור
- מכשיר ותוכנת עיבוד נתונים

כאשר מערך הניסוי דומה לזה ב-[1].

תיאור מהלך הניסוי



(א) דיאגרמת הניסוי

(ב) מבט על של מערכת הניסוי

איור 4: (a) דיאגרמת הניסוי ו־(b) מבט על של מערכת הניסוי

המערכת מורכבת ממד-זווית עליו מותקנים שלושה רכיבים עיקריים:

- קולימטור מספק אלומה צרה ומקבילה של אור מונוכרומטי. מקור האור הוא מנורות ספקטרליות (כמו למשל כספית, נתרן, הליום וכדומה) המחוברות לספקי מתח גבוה ומאפשרות בחירת פליטה באורכי-גל שונים.
- מנסרה עשויה N-BK7 בעלת זווית ראש נתונה $A = 60° \pm 0.1°$ הממוקמת במרכז מד זווית על במה מסתובבת.
- טלסקופ המשמש לגילוי הקרן היוצאת מן המנסרה ולמדידת זווית הסטייה שלה ביחס לכיוון האלומה הנכנסת.

כיול המערכת תחילה נכייל את הקולימטור והטלסקופ כך שהאלומה הישירה (ללא המנסרה) תראה במרכז שדה הראייה של הטלסקופ. לאחר הצבת המנסרה נכוון את מיקומה כך שמרכז הכניסה יהיה מאונך לאלומה. **מדידת זווית מינימלית** לכל אורך-גל שנוכל לייצר באמצעות מקורות האור המונוכרומטיים נבצע את השלבים הבאים:

א נסובב את המנסרה עד לקבלת קרן יוצאת הנראית בטלסקופ.

ב נמשיך לסובב באותו כיוון עד שנצפה כי הקרן מתחילה לחזור לאחור – נקודה קריטית זו מתאימה לזווית δ_{min}.

ג נקרא את מידת מד הזווית ונרשום את δ_{min} (אי-ודאות נתונה של $0.1°$ אמנם יכולנו גם לקחת שגיאה רזולוציה של חצי מעלה כפי שנעשה בחלק א של הניסוי).

נחזור על התהליך ונמדוד את אורכי-הגל $\{404.7, 435.8, 486.1, 546.1, 589.3, 656.3, 700\}\,\mathrm{nm}$. נעלה את הנתונים לקובץ אקסל עבור המשך עיבוד הנתונים.

תכנון עיבוד נתונים

להלן תמצית חישובי אי-הוודאות הנדרשים לעיבוד הנתונים. תחילה נגדיר את אי–הוודאויות הבסיסיות במדידה:
נתונה אי–הוודאות באורך הגל

$$\Delta\lambda = 1\,\mathrm{nm} \tag{4}$$

וכן אי–הוודאות במדידת זווית הסטייה המינימלית δ_{min}

$$\Delta\delta_{\mathrm{min}} = \frac{0.1\pi}{180}\ \mathrm{rad} \tag{5}$$

בנוסף, זווית הראש של המנסרה נמדדה כ-$A = 60°$ עם אי–וודאות

$$\Delta A = 0.1° = \frac{0.1\pi}{180}\ \mathrm{rad} \tag{6}$$

משיקולי גיאומטריה, נגדיר את הזוויות θ_i, θ_r כאשר השגיאה בהן היא שגיאה עקיפה

$$\theta_i = \frac{1}{2}\left[(\delta_{min} + A) \pm \sqrt{(\Delta\delta_{\mathrm{min}})^2 + (\Delta A)^2}\right] \tag{7}$$

$$\theta_r = \frac{1}{2}(A \pm \Delta A) \tag{8}$$

כאשר הנוסחאות הן כפי שנראות באיור. מנוסחה לשגיאה עקיפה נוכל לחשב את מקדם השבירה בתור יחס סינוסי הזוויות

$$n = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_r}\cdot\Delta\delta_{\min}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_r} - \frac{\sin\theta_i\cdot\cos\theta_r}{\sin^2\theta_r}\right]\cdot\Delta A\right)^2} \tag{9}$$

התאמה פולינומיאלית קושי

מתוך הטור האינסופי נבצע קירוב לשני האיברים הראשונים

$$n(x) = A_0 + \frac{A_1}{x^2} \tag{10}$$

- בציר האנכי n והשגיאה בו מחושבת
- בציר האופקי אורך הגל והשגיאה בו נתונים

התאמה פולינומיאלית סלמייר

מתוך הטור האינסופי נבצע קירוב לשני האיברים הראשונים

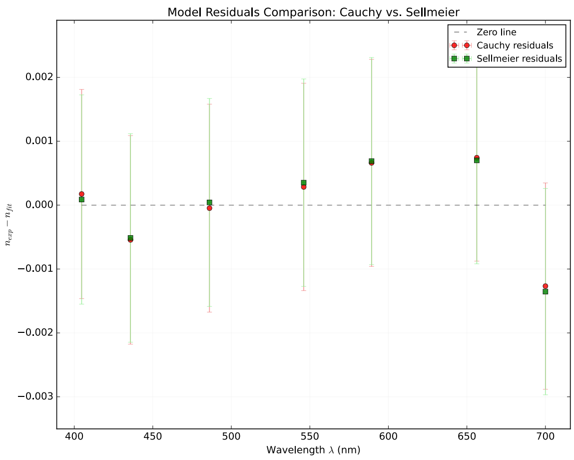
$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{B_0\,\lambda^2}{\lambda^2 - B_1}} \tag{11}$$

כאשר הנתונים והשגיאות בהן נשארות זהות למודל קושי.

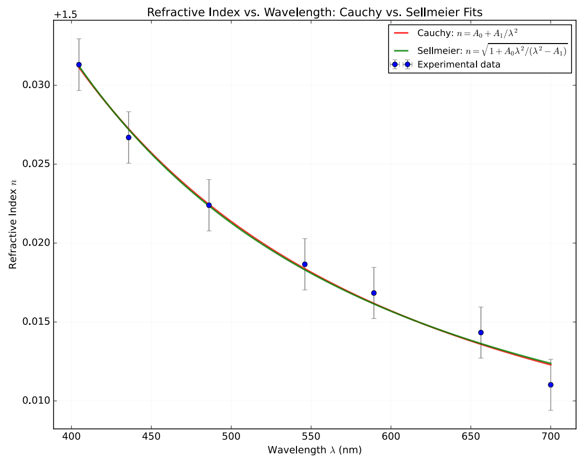
עיבוד תוצאות הניסוי

התאמות

מאחר ובתחום הגלים הנראים משוואת קושי וסלמייר דומות, נצייר את שני המודלים בגרף יחיד.



(א) גרף השארים



(ב) גרף ההתאמה

איור 5: גרף ההתאמה בעבור שני המודלים כאשר נסרטט אותם באותה מערכת צירים

שם/פירוש	סימון	יחידות	ערך	שגיאה יחסית
$\lim_{\lambda\to\infty} n(\lambda)$	A_0	–	1.50283 ± 0.00083	0.055%
–	A_1	nm^2	4634.98777 ± 209.00010	4.51%
חי בריבוע מצומצם	χ^2_{red}	–	0.23	–
p-value	P_p	–	9.50×10^{-1}	–

טבלה 1: תוצאות ההתאמה עבור קושי: $n_c(\lambda) = A_0 + \dfrac{A_1}{\lambda^2}$

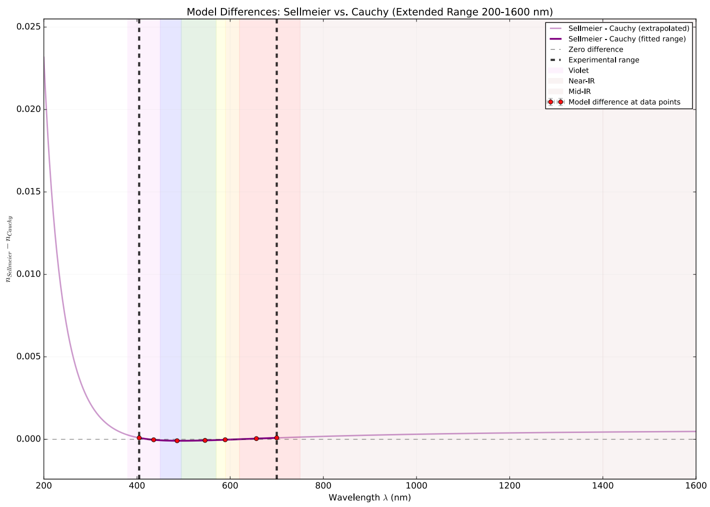
שם/פירוש	סימון	יחידות	ערך	שגיאה יחסית
–	A_0	–	1.2603 ± 0.0024	0.19%
–	A_1	nm^2	10271.57 ± 457.11	4.45%
חי בריבוע מצומצם	χ^2_{red}	–	0.24	–
p-value	P_p	–	9.4×10^{-1}	–

טבלה 2: תוצאות ההתאמה עבור מודל סלמייר: $n_s^2(\lambda) = 1 + \dfrac{A_0\,\lambda^2}{\lambda^2 - A_1}$

מההתאמות ניתן לראות כי שני המודלים דומים מאוד. ומגרף השארים קשה לקבוע איזה טוב יותר כי שניהם גם מחזירים שארים דומים מאוד בטווח הנמדד. בנספח ימצאו האיורים עבור המודלים בנפרד. מבחינת **ההתאמה** ניתן לראות כי נקודות המדידה מזכירות את המודלים בטווח שגיאה ניסיוני אמנם זה פיזור רב למדי. מבחינת **גרף השארים**, בעבור שני המודלים נראה כי קיימת צורת שארים סינוסידיאלית אבל זו תוצאה של תוכנת ההתאמה מנסה למצוא נקודת שיווי משקל ולא מגמה. השארים מראים פיזור כך שרוב השארים נמצאים מעל ציר האפס. כל השארים חותכים את ציר האפס מה שמצביע על הערכת יתר בעבור שני המודלים. מבחינת **ערכי ההתאמה** ניתן לראות כי בעבור שני המודלים P_p נמצא בטווח התקין אמנם במודל קושי הוא ערך הגבול העליון של הטווח ובמודל סלמייר הוא קרוב מאוד לערך הגבול התחתון כך שאלו מרמזים על הערכת יתר. ערך $\chi^2_{\text{red}} < 1$ מצביע בהסכמה עם גרף השארים ומדד P_p על הערכת יתר. שני ערכי החי בריבוע המצומצים וערכי P_p דומים בערכם אחד לשני מה שמחזק את דמות המודלים בתחום הנמדד (הנראה). בנוסף, כל הפרמטרים בטבלאות (עבור שני המודלים) כולם בעלי שגיאות בטווח התקין ומעידות על דיוק במדידות.

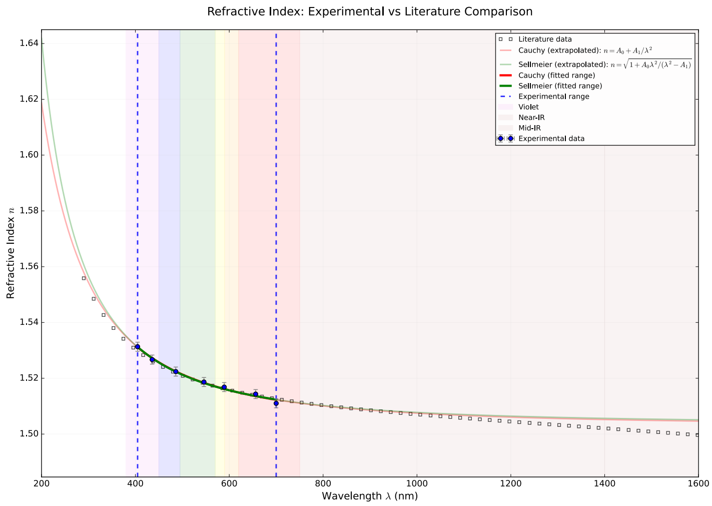
אקסטרפולציה

באמצעות המשוואות שקיבלנו בעבור ההתאמה בטווח הנראה, נבצע אקסטרפולציה ונבחן את משוואות קושי וסלמייר בעבור אורכי גל רחוקים מהטווח הנראה. נסרטט גרף מרחק כך שנחסיר את מודל סלמייר ממודל קושי בטווח אורכי הגל של הטווח הנמדד (נראה) וגם טווח של האקסטרפולציה



איור 6: גרף מרחק בעבור שני המודלים בטווח הנראה ובטווח האקסטרפולציה

מהאיור ניתן לראות כי בטווח הנראה הגרף קרוב לאפס כך ששני המודלים מסכימים זה עם זה אבל כאשר ממשיכים רחוק יותר הם הולכים וגדלים בשוני. מהרקע התיאורטי, סביר להניח שערכי האקסטרפולציה של מודל סלמייר טובים יותר לערכים האמיתיים שהיו נמדדים במעבדה. כדי לבחון השערה זאת, ניעזר בנקודות מדידה מהמקור [2], שבו נתונים עם זכוכית (N-BK7) וגם באותה טמפרטורת החדר (כ-$25\,^\circ\mathrm{C}$) בהתאמה למדידות שלנו כך שנוכל להשתמש בו להעריך את טיב האקסטרפולציה. נסרטט את הנקודות מהמקור לצד האקסטרפולציה בעבור שני המודלים.



איור 7: שני המודלים בטווח הנראה ובטווח האקסטרפולציה לצד נקודות מהספרות

מהאיור ניתן לראות כי בעוד בטווח בו מדדנו (אורכי גל אור נראים) ההסכמה עם המקור מהספרות טובה בטווח הנמדד, כאשר נסתכל על האקסטרפולציה של המודלים לעומת הערכים מהספרות ניתן לראות כי הערכים מהספרות מתחילים לחרוג במידה רבה מאלו של האקסטרפולציה. זה מעיד על כך שבעוד בטווח הנמדד הקירוב מראה הסכמה עם המקור מהספרות, מחוץ לטווח הנראה יהיה צורך באיברים נוספים מהטור והאקסטרפולציה לא תיתן הערכה אמינה למקדם השבירה בעבור אורכי גל מחוץ לתחום הנראה. במפתיע, האקסטרפולציה של המודלים מראה דווקא שמודל קושי מביא הערכה קרובה יותר לנקודות מהספרות (אמנם לא בצורה משמעותית) וסביר להניח שזה נגרם בגלל צורך ביותר איברים בקירוב טור סלמייר.

דיון ומסקנות

מודל	A_0	A_1 $[\mathrm{nm}^2]$	χ^2_{red}	P_p
קושי	1.50283 ± 0.00083	4635 ± 209	0.23	9.5×10^{-1}
סלמייר	1.2603 ± 0.0024	10272 ± 457	0.24	9.4×10^{-1}

טבלה 3: מדדי התאמה עיקריים לשני המודלים

בחלק ב רצינו לאפיין את התלות הספקטרלית של מקדם השבירה של זכוכית N-BK7 בתחום האור הנראה על–ידי התאמה לשני המודלים: משוואת קושי (n_c) ומשוואת סלמייר (n_s).

איכות ההתאמה. ערכי $\chi^2_{\text{red}} \approx 0.24$ ו-$P_p \approx 0.95$ בשני המודלים מצביעים על התאמות טובות והערכת יתר קלה כלומר, סביר להניח ששגיאות המדידה הוערכו יתר על המידה.

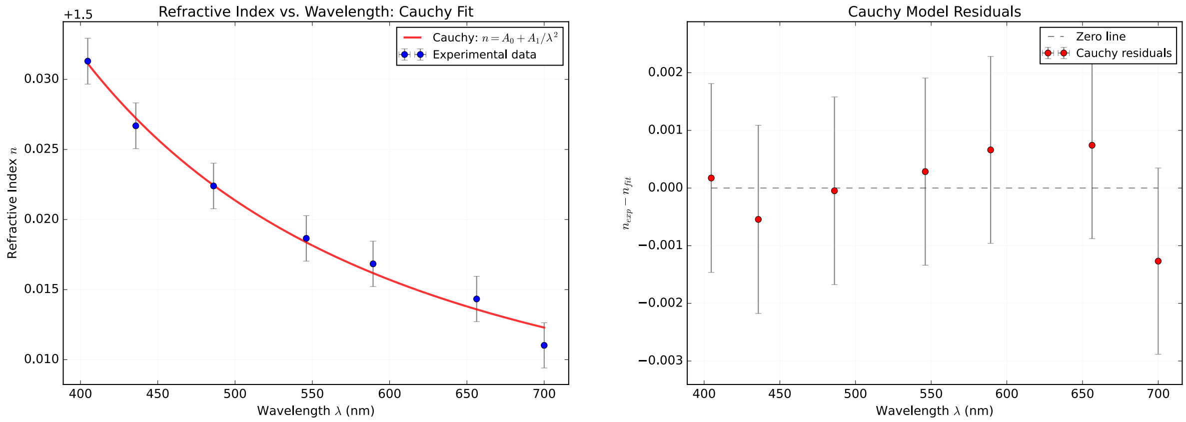
השוואה בין המודלים.

- בתחום הנראה (400 עד 700 ננומטר) שני המודלים כמעט חופפים
- הפרמטר A_0 בקושי ($n_c(\lambda \to \infty)$) התקבל 1.50283 ± 0.00083 – ערך הקרוב באופן מצוין לערכים טיפוסיים לזכוכיות (בפרט לזכוכית מסוג N-BK7) ~ 1.50 מה שמראה על עקביות בתוצאות. במודל סלמייר A_0 אינו ניתן לפירוש באופן ישיר. עדיין, כל השגיאות היחסיות של פרמטרי ההתאמה בעבור שני המודלים נמצאות בטווח התקין ומראות על דיוק במדידות.
- בגרף השארים מתקבלת צורה בעלת אופי סינוסואידלי קל ורוב השארים חותכים את ציר האפס. אין עדות למגנה מובהקת, ועל כן המודלים מתארים היטב את הנתונים.

אקסטרפולציה. בהרחבת התחום לאורכי גל בתחומי UV ו-IR הרחוקים, המודלים מתפצלים ובמפתיע קושי מראה דיוק טוב יותר עם הנקודות שנמדדו בספרות [2]. את זה נסביר ככל הנראה בעובדה שהאקסטרפולציה מוטה מדי לנקודות שנמדדו בטווח הנראה וכנראה שאם היינו מודדים מחוץ לטווח הנראה ומבצעים אקסטרפולציה אז סלמייר היה מראה התאמה טובה יותר. אם לא, או בנוסף, כנראה נצטרך יותר איברים מהטור כדי לראות את ההתאמה של סלמייר מחוץ לטווח הנראה.

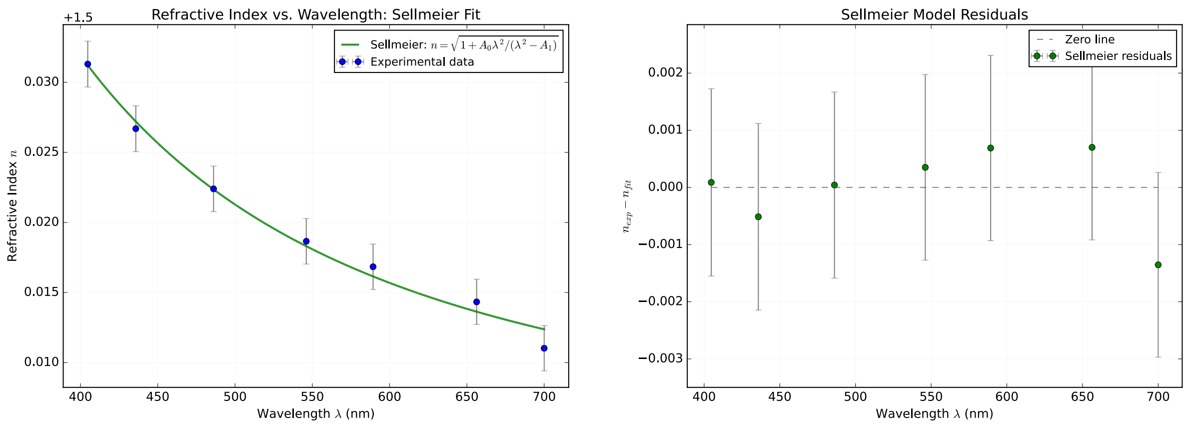
- בטווח שנמדד (הנראה) שני המודלים שקולים מבחינה סטטיסטית; ניתן לבחור בכל אחד מהם לייצוג הנתונים.
- כיוון שבפועל נדרשת תחזית מעבר לטווח הנראה (למשל בתכנון מערכות אופטיות IR), מומלץ להשתמש במודל סלמייר עם יותר ממינימום הפרמטרים – או לחלופין במודל קושי מדרגה גבוהה – כדי להבטיח קירוב תקף.
- המדידה שלנו הדגימה את עקרון התלות הספקטרלית של n והראתה כי אפילו מודלים אמפיריים פשוטים מצליחים לשחזר את הספרות בטווח שגיאה של $< 0.05\%$ בתחום הנראה.
- לשיפור בעתיד נרצה להרחיב את המדידות לאורכי גל מחוץ לטווח הגלים האלקטרומגנטיים הנראים.

נספחים



(א) גרף השארים (ב) גרף ההתאמה

איור 8: ההתאמה בעבור משוואת קושי



(א) גרף השארים (ב) גרף ההתאמה

איור 9: ההתאמה בעבור משוואת סלמייר

מקורות

[1] Aashish Raj Gupta et al. Refractive index of glass with prism. Online. Undergraduate physics lab page, LNMIIT Jaipur. .2018 URL: https://aashish157.github.io/lnmiit-physics-lab/refractive.html.

[2] Mikhail N. Polyanskiy. ``Refractiveindex.info database of optical constants.” In: Scientific Data 11.1 (Jan. ,(2024 p. .94 ISSN: .2052-4463 DOI: 10.1038/s41597-023-02898-2. URL: https://doi.org/10.1038/s41597-023-02898-2.