Regimeidentifikation in der Volatilität des Credit Spread für italienische Staatsanleihen

Thomas Ludwig
Thomas.Ludwig95@gmail.com

08. Januar 2020

Zusammenfassung

In diesem Artikel verwenden wir kumulativen quadrierten Renditen (cumulative squared returns; CSR) um in der Zeitreihe des Renditeaufschlages auf italienische Staatspapiere verschiedene Regimes in der Volatilität ausfindig zu machen. Dabei wird eine stückweise lineare Regression verwendet um Änderungen in der Steigung der CSR zu quantifizieren. Die Ergebnisse zeigen, dass die Volatilität sich mit verschiedenen Regimes zum Teil deutlich ändert. Zeitweise gibt es kurze Perioden mit extremen Änderungen des Niveaus der Volatilität.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

"All models are wrong but some are useful."

— George Box

In diesem kurzen Artikel greifen wir die Idee von *Robert J Frey, PhD* auf, der in seinem Artikel *The Relevance of History* zu finden unter http://keplerianfinance.com/2013/06/the-relevance-of-history/ eine einfache Idee präsentiert, mit der man verschiedene Regimes in der Volatilitätsstruktur in Finanzmarktdaten modellieren kann.

Wir verwenden die präsentierte Idee und wenden diese auf neue Daten an. Dabei verwenden wir Daten die den Renditeaufschlag italienischer Staatspapiere darstellen.

Ziel ist es, mittels einer einfachen Modellierung das Vorhandensein von Regimen in der Volatilitätsstruktur zu zeigen und mögliche Implikationen auf verschiedene Bereiche aufzuzeigen.

2 Daten

In diesem Artikel verwenden wir tägliche Daten von 2013-04-29–2019-11-08, welche den jeweiligen Schlusskurs des Renditeaufschlages (Spread) auf 10-jährige italienische Staatspapiere darstellen.

Der Renditeaufschlag ist dabei wie folgt definiert:

$$\text{Spread} = \text{Gov Yield Ita}_{10\text{Y}} - \text{Gov Yield Ger}_{10\text{Y}}$$

Der Spread wire dabei in Basispunkten angegeben. Abbildung 1 zeigt die Zeitreihe der verwendeten Daten im genannten Zeitraum.

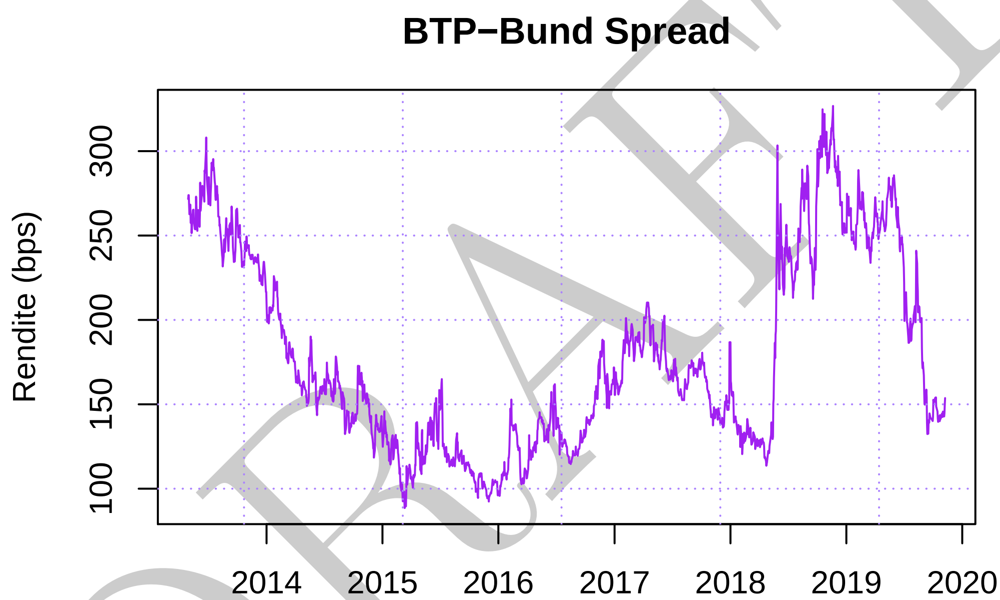

Abbildung 1: BTP-Bund Spread

Für die Analyse berechnen wir die tägliche Rendite (Änderung) dieser Zeitreihe. Dafür berechnen wir die logarithmische Rendite (log returns), die für alle Preise der Stichprobe wie folgt berechnet wird, wobei p_t der Renditeaufschlag zum Zeitpunkt t ist und log dem natürlichen logarithmus mit Basis e.

$$r_i = \log \frac{p_t}{p_{t-1}}$$

Abbildung 2 stellt den Verlau der täglichen Rendite dar.

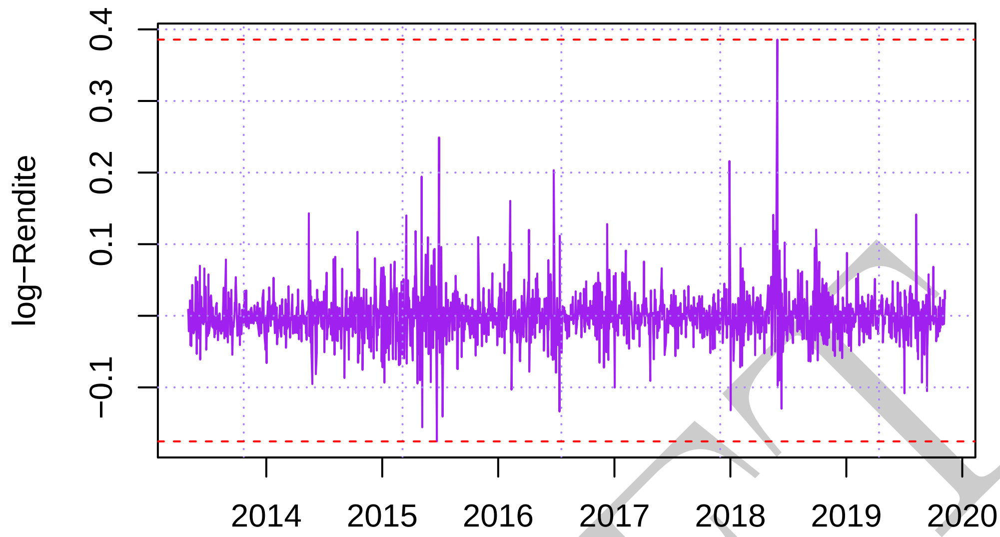

Abbildung 2: Tägliche Rendite BTP-Bund Spread

Tabelle 1: Zusammenfassung Renditeverteilung

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
-0.18	-0.018	-0.00037	-0.00034	0.015	0.39

Die empirische Verteilung der empirischen Rendite wird dabei mit dem folgenden Histogramm dargestellt.

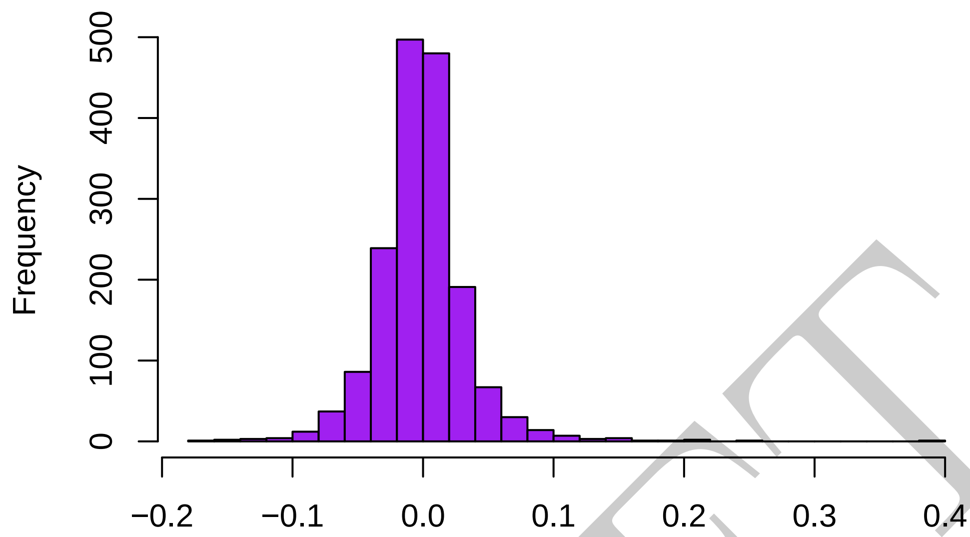

Abbildung 3: Verteilung Tägliche Rendite BTP-Bund Spread

Abbildung 4 zeigt die empirische Verteilungsfunktion der Renditeverteilung und bietet daher eine andere Betrachtungsweise als das Histogramm.

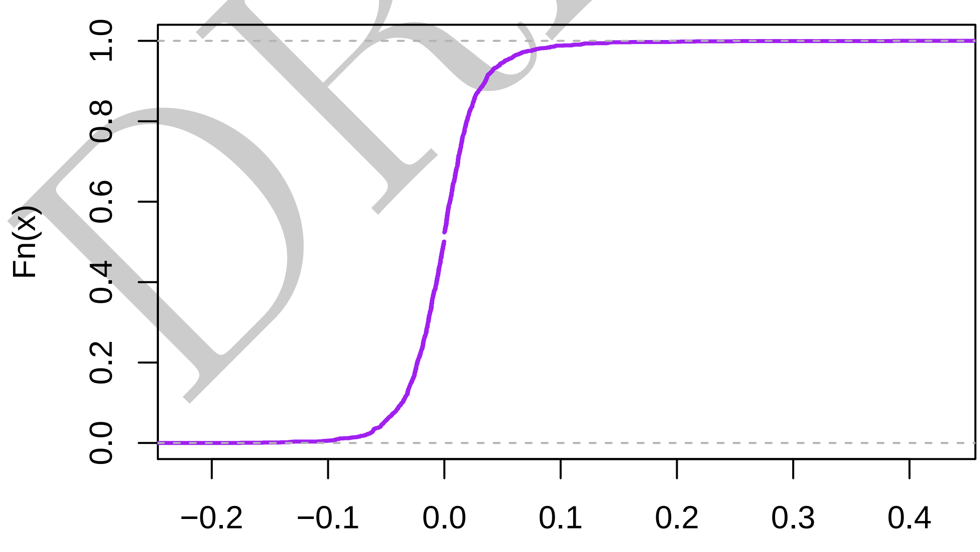

Abbildung 4: Empirische Verteilungsfunktion

3 Volatilität am Finanzmarkt

Ziel dieses Artikels ist eine detailliertere und trotzdem leicht nachzuvollziehende Analyse der Volatilität innerhalb der Zeitreihen. Dafür werden zunächst einige Grundbegriffe definiert.

3.1 Formale Definition Varianz σ^2

Wir definieren die Volatilität als Varianz einer Zufallsvariable X. $\mathrm{Var}(X)$ ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right]$$

$\mathrm{Var}(X)$ beschreibt also die erwartete quadrierte Abweichung der Zufallsvariablen vom Mittelwert μ. Wir können folgenden Satz verwenden um die Varianz umzuschreiben.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\,\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X]^2 \\
&= \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2
\end{aligned}$$

Im folgenden verwenden wir $\mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2$ im Kontext von Finanzmarktdaten.

Wir definieren R als Zufallsvariable, welche die Rendite eines Finanzinstrumentes beschreibt. Die Varianz dieser Variable ist σ_r^2 ist deshalb:

$$\sigma_r^2 = \mathrm{E}\left[R^2\right] - \mathrm{E}[R]^2$$

Um die $\hat{s}_r^2$, also Varianz einer Stichprobe zu ermitteln verwenden wir den Maximum Likelihood Estimator (MLE). Wenn wir das Ergbenis mit der Stichprobengröße n multiplizieren, erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$n\hat{s}_r^2 = \sum_{t=1}^{n} r(t)^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} r(t)\right)^2}{n}$$

Mit steigender Größe der Stichprobe n gilt, dass $\frac{\left(\sum_{t=1}^{n} r(t)\right)^2}{n} \to 0$. Wir können diesen Teil also vernachlässigen und die Stichprobenvarian wie folge approximieren:

$$n\hat{s}_r^2 \simeq \sum_{t=1}^{n} r(t)^2$$

Für Daten mit einem großen n wie es in täglichen Daten der Fall ist, könne wir also die quadrierten Renditen als Approximation der Varianz verwenden, somit gilt:

$$\hat{s}_r^2 \simeq r(t)^2$$

3.2 Quadrierte und absolute Rendite als Volatilitätsproxy

Wie im vorhergenden Abschnitt definiert, können wir die quadrierten Renditen zur Approximation der empirischen Varianz verwenden.

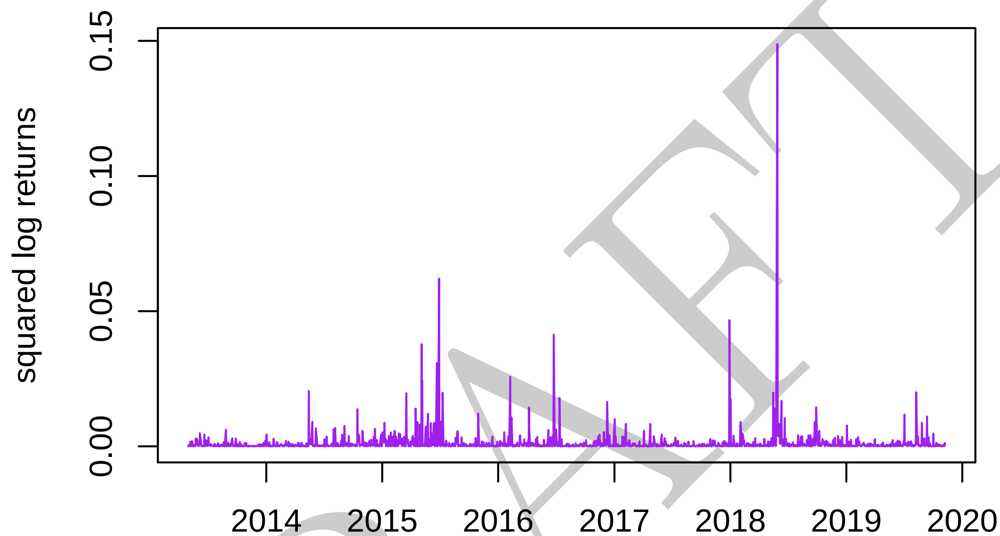

Abbildung 5: Squared Returns

Nach einer ähnlichen Logik können auch absolute Renditen als Approximation der Varianz verwendet werden.

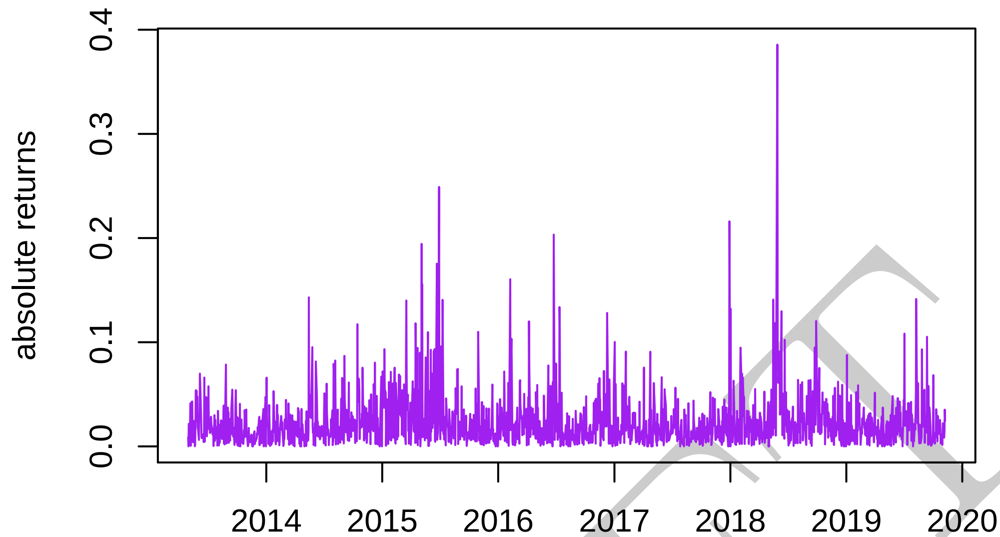

Abbildung 6: Absolute Returns

In beiden Abbildungen sehen wir, dass die Varianz nicht konstant zu sein scheint, aber dafür sich in mehr oder weniger langen Clustern oder Regimen bewegt, welche sich im Zeitablauf ändernt.

4 Identifikation Volatilitätsregime

In diesem Abschnitt wollen wir aus der Zeitreihe eine Reihe an Regimen τ_i identifizieren.

4.1 Kumulative quadrierte Renditen (CSR)

Wir schauen uns wieder folgende Bezeihung an:

$$n\hat{s}_r^2 \simeq \sum_{t=1}^{n} r(t)^2$$

Wenn wir also die quadrierten Renditen kumulieren entspriche die Steigung der CSR Funktion der approximierten Varianz dieser Rendite.

Wenn sich das Regime ändert, wird sich die Steigung der CSR Funktion signifikant ändern

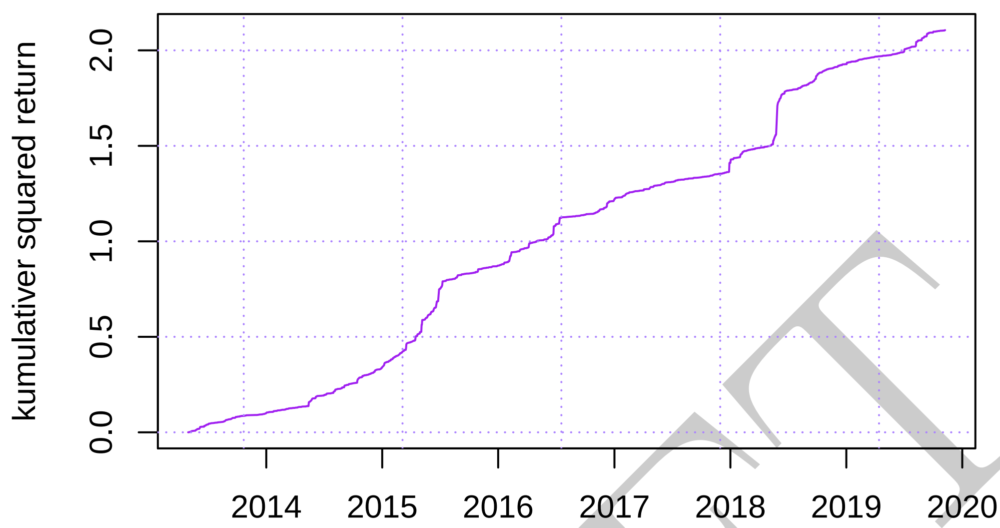

Abbildung 7: kumulative returns

Abbildung **??** zeigt die quadrierte Rendite, welche im Zeitablauf kumuliert wird. Die Grafik legt eine stückweise lineare Beziehung nahe, mit der man die verschiedenen Regimes modellieren und zu Clustern zusammenfassen kann.

4.2 Stückweise lineare Regression (segmented regression)

Die Präsentation der stückweise linearen Regression (segmented regression) basiert auf der Darstellung in https://en.wikipedia.org/wiki/Segmented_regression.

Bei dieser Form der Regressionsanalyse wird der OLS Schätzer seperat für jedes vorhandene Segment angewendet, wobei für jedes Segment somit eine seperate Regressiosngerade geschätzt wird. Die Segmente werden durch *breakpoints* unterschieden.

Formell lässt sich das wie folgt beschreiben:

- $Yr = A_1 x + K_1 \quad x <$ BP (breakpoint)
- $Yr = A_2 x + K_2 \quad x >$ BP (breakpoint)

Für diese Analyse wurde das R Paket *segmented*[1] verwendet.

4.3 Breakpoint Identifikation

Wir greifen die Idee einer stückweise linearen Regression auf und identifizieren manuell breakpoints, welche den Wechsel in ein neues Volatilitätsregime darstellen. Ein breakpoint ist dann, wenn sich die Steigung der Funktion signifikant ändert.

[1] https://cran.r-project.org/web/packages/segmented/segmented.pdf

Eine geänderte Steigung bedeutet, dass die quadrierte Rendite im neuen Abschnitt höher (die Steigung erhöht sich, der Zuwachs ist also schneller) oder tiefer (die Steigung sinkt, der Zuwachs in der kumulativen Funktion geschieht also längsamer).

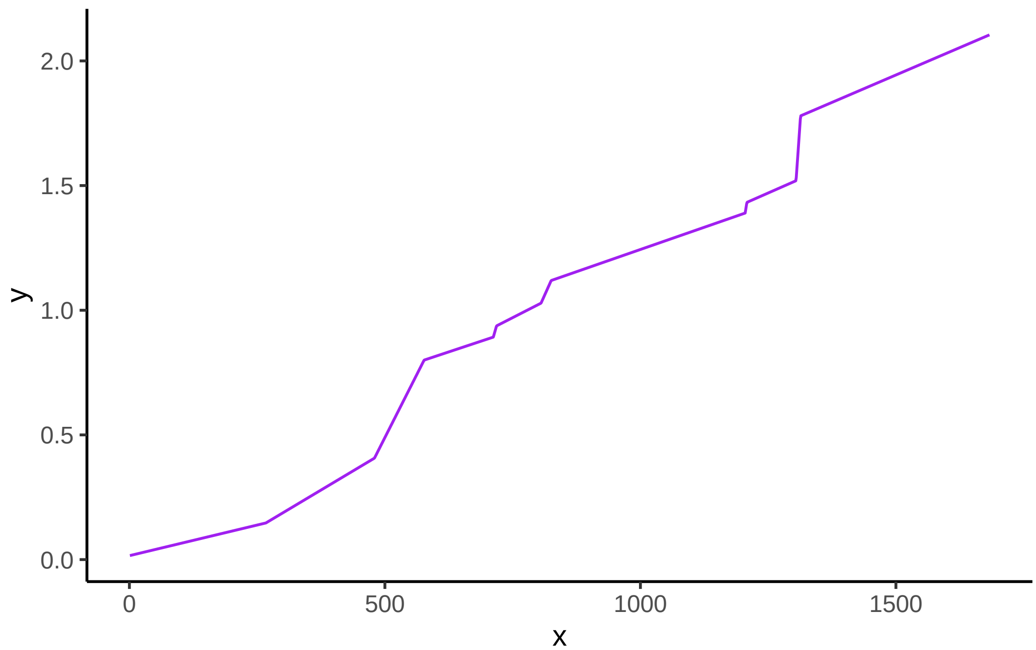

Abbildung 8: Regression

4.4 Evaluierung der Güte der Regression

Abbildung 9 zeigt, wie die ermittelten Regressionen die CSR Funktion in einer stückweise linearen Funktion darstellen. Dabei hat jede der Regressionsgeraden eine andere Steigung. Diese Steigung dient als Appoximation der Volatilität für das ausgemachte Volatilitätsregime.

Wir erinnern uns, dass ein Regime dadurch gekennzeichnet ist, dass dessen Steigung gleich ist. Der Wechsel in ein neues Regime ist durch eine neue Steigung gekennzeichnet.

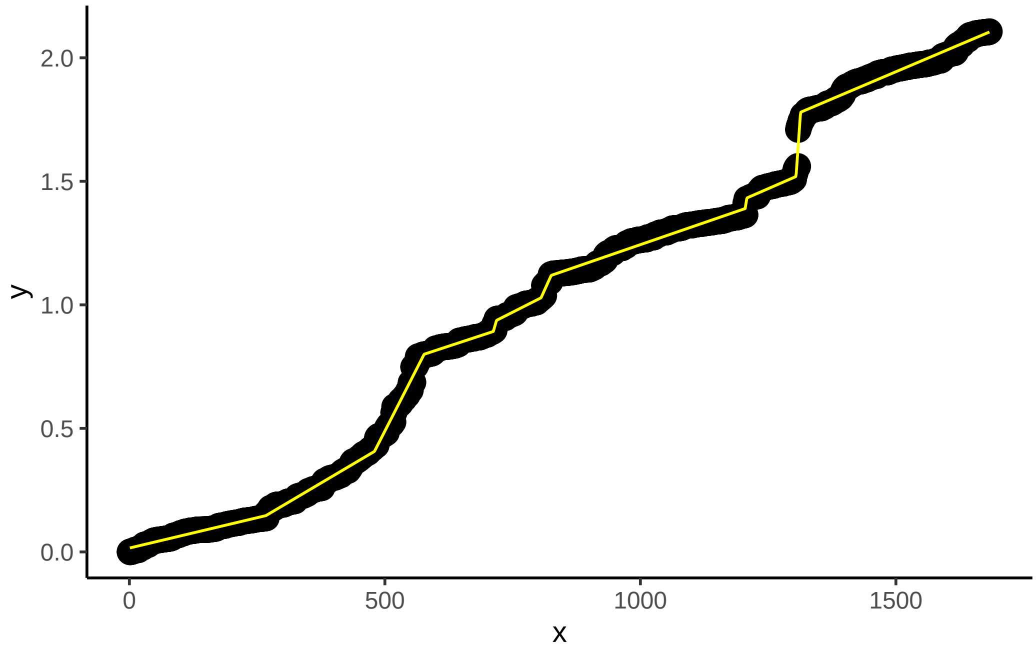

Abbildung 9: Regression Fit

5 Ergebnisse und Interpretation

Tabelle 2: Steigungskoeffizient der Regime

	Est.	St.Err.	t value	CI(95%).l	CI(95%).u
slope1	0.0004915	0.0000108	45.5770	0.0004704	0.0005126
slope2	0.0012237	0.0000152	80.2830	0.0011938	0.0012536
slope3	0.0040468	0.0000493	82.1670	0.0039502	0.0041434
slope4	0.0006809	0.0000297	22.9520	0.0006227	0.0007390
slope5	0.0072133	0.0032467	2.2217	0.0008453	0.0135810
slope6	0.0010484	0.0000580	18.0810	0.0009346	0.0011621
slope7	0.0045728	0.0005267	8.6823	0.0035397	0.0056058
slope8	0.0007126	0.0000064	112.2000	0.0007002	0.0007251
slope9	0.0126850	0.0096038	1.3208	-0.0061523	0.0315210
slope10	0.0009027	0.0000500	18.0450	0.0008045	0.0010008
slope11	0.0293760	0.0017534	16.7540	0.0259370	0.0328150
slope12	0.0008788	0.0000066	132.9300	0.0008658	0.0008917

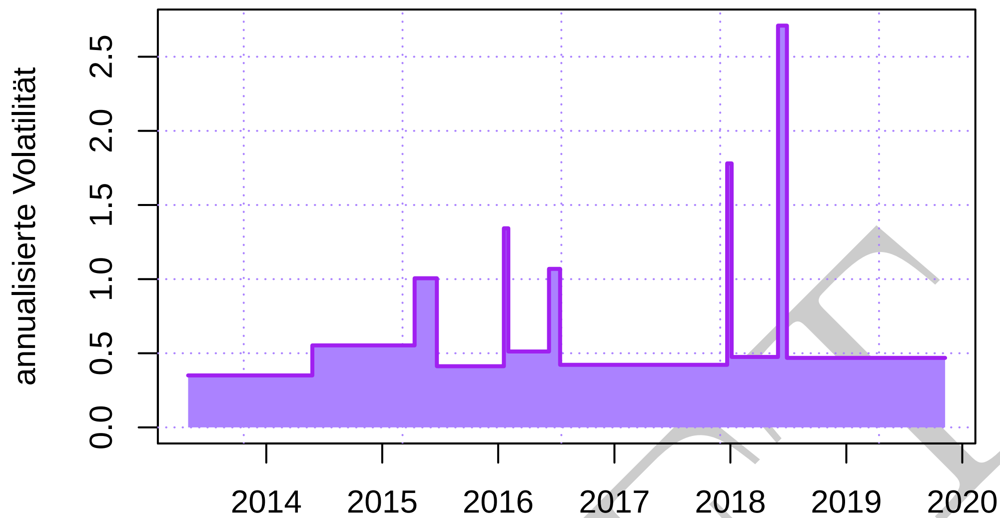

Abbildung 10: Regime Volatilität

In der folgenden Tabelle werden die annualisierten Volatilitäten für die identifizierten Regime gezeigt.

Tabelle 3: annualisierte Volatilität der Regime

	Koeffizient
slope1	0.3505353
slope2	0.5531049
slope3	1.0058330
slope4	0.4125742
slope5	1.3428794
slope6	0.5119570
slope7	1.0692053
slope8	0.4220871
slope9	1.7808004
slope10	0.4750421
slope11	2.7099815
slope12	0.4687083

6 Conclusio

to be filled.