Grundlagen der Regelungstechnik
Kapitel 6: Zeitdiskrete Regelung

Tom P. Huck

Externer Dozent DHBW Karlsruhe

December 1, 2022

Warum zeitdiskrete Regelung?

Bisher: Systembeschreibung durch Differentialgleichungen (bzw. daraus abgeleitete Übertragungsfunktionen)

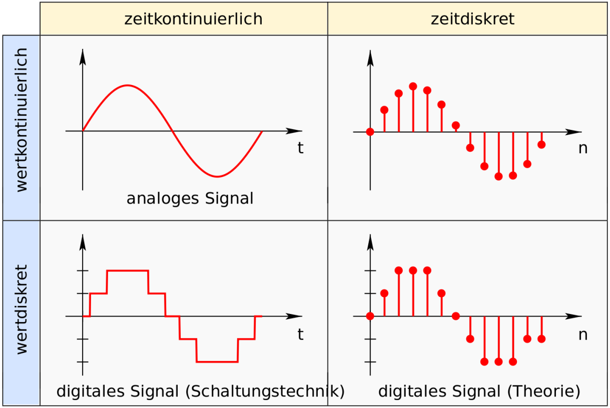
- Kontinuierlicher Zeitverlauf

In der Praxis: Implementierung der Regler erfolgt meist auf Digitalrechner (z.B. Microcontroller).

- Regler arbeitet getaktet
- Kein kontinuierlicher Zeitverlauf

Wie sieht der Regelkreis aus Sicht des Digitalreglers aus?

Zeit- und wertdiskrete Signale



Bildquelle:
https://de.wikipedia.org/wiki/Digitalsignal#/media/Datei:%C3%9Cbersicht_kontinuierliche_und_diskrete_Signale.svg

Hinweis: In der Praxis ist die Unterteilung der möglichen Werte meist so fein, dass Signale werden als quasi wertkontinuierlich angenommen werden können. Von Interesse ist hauptsächlich der zeitdiskrete Aspekt.

Zeitdiskrete Systemtheorie

- Die zeitdiskrete Systemtheorie dient dazu, dynamische Systeme zu beschreiben, deren Verhalten durch zeitdiskrete Signale charakterisiert wird.
- Wie im zeitkontinuierlichen besitzt auch die zeitdiskrete Systemtheorie eigene Beschreibungsformen und Transformationen:

Zeitkontinuierlich	**Zeitdiskret**
Differentialgleichung	Differenzengleichung
Laplace-Transformation	z-Transformation
Laplace-Übertragungsfunktion	z-Übertragungsfunktion

Motivation für Betrachtung d. zeitdiskreten Systemtheorie

- In der Praxis besitzt die zeitdiskrete Systemtheorie oft nur untergeordnete Bedeutung.
- Denn: Systemanalyse und Reglerentwurf finden meist im zeitkontinuierlichen statt. Regler werden nachträglich diskretisiert.
- Zeitdiskrete Systemtheorie ist dennoch relevant:
  - Nach der Diskretisierung kann u.U. ein unerwartetes Verhalten auftreten (insbes. wenn die Abtastzeit nicht fein genug ist). Dann ist eine Analyse direkt im zeitdiskreten Bereich hilfreich.
  - Einige Reglerarten werden direkt im zeitkontinuierlichen Bereich entworfen (z.B. Deadbeat-Regler[1])

[1] wird in dieser Vorlesung nicht näher behandelt. Für Weitere Informationen siehe z.B. https://www.mb.uni-siegen.de/mrt/lehre/dr/skript_dr.pdf

Differenzengleichungen (1)

Liegt für eine Größe kein kontinuierlicher Wert vor, sondern lediglich **diskrete Werte** zu verschiedenen Zeitpunkten $k, k-1, k-2, ..., k-n$, dann kann man den aktuellen Wert y_k als Funktion vergangener Werte ausdrücken:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-n}) \tag{1}$$

Analog zur Differetialgleichung bei kontinuierlichen Werten spricht man dann von einer **Differenzengleichung**.
Wie auch bei DGLn sollen im folgenden nur LTI-Systeme betrachtet werden, d.h.: f ist eine linearkombination von mit konstanten koeffizienten

Differenzengleichungen (2)

Zusätzlich zu Gl. (1) werden noch die (ebenfalls zeitdiskreten) Eingangsgrößen $u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-m}$ betrachtet

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, ..., y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-m}) \tag{2}$$

Analog zur Differetialgleichung bei kontinuierlichen Werten spricht man dann von einer **Differenzengleichung**.

Wie bisher sollen im Folgenden nur LTI-Systeme betrachtet werden, d.h. die Differenzengleichung ist eine Linearkombination der Werte $y_k, \ldots, y_{k-n}$ und $u_k, \ldots, u_{k-m}$ usw. mit konst. Koeffizienten a_i und b_i:

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + ... + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + ... + b_m u_{k-m}$$

z-Transformation (1)

Die Werte y_k, $y_{k-1}, \ldots$ sind jeweils um vielfache des Zeitschritts T verzögert:

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \ldots + b_m u_{k-m}$$

Im Laplace-Bereich entspricht die Verzögerung um eine Zeit T der Multiplikation mit e^{-sT}. Man kann also die folgende Laplace-Transformierte aufstellen:

$$\begin{aligned} Y(s)\left(a_0 + a_1 e^{-sT} + a_2 e^{-2sT} + \cdots + a_n e^{-nsT}\right) \\ = U(s)\left(b_0 + b_1 e^{-sT} + b_2 e^{-2sT} + \cdots + b_m e^{-msT}\right) \end{aligned}$$

z-Transformation (2)

Zur kompakteren Schreibweise führt man die Substitution $z = e^{sT}$ ein:

$$Y(z)\left(a_0 z^{+} a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}\right)$$
$$= U(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}\right)$$

Eine Verzögerung um einen Zeitschritt führt also zu einer Multiplikation mit z^{-1}. Dies bezeichnet man als $z - Transformation$.

z-Übertragungsfunktion

Analog zur Laplace-Übertragungsfunktion $G(s)$ kann auch eine z-Übertragungsfunktion $G(z)$ definiert werden:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Oft wird die Übertragungsfunktion noch mit z^n erweitert, sodass sie nur positive exponenten enthält. Dies erleichtert die Berechnung der Pole, ändert aber nichts am Übertragungsverhalten.
Für Reihenschaltung, Parallelschaltung und Rückkopplung von z-Übertragungsfunktionen gelten die gleichen Rechenregeln wie im Laplace-Bereich.

Beispiel (1)

Gegeben sie die folgende Differenzengleichung:

$$y_k = -2y_{k-2} - y_{k-1} + 2u_k + u_{k-1}$$

Führen Sie eine z-Transformation durch und berechnen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion!

Beispiel (2)

Gegeben sie die folgende Differenzengleichung:

$$y_k = -2y_{k-2} - y_{k-1} + 2u_k + u_{k-1}$$

Z-Transformation:

$$Y(z) = -2Y(z)z^{-2} - Y(z)z^{-1} + 2U(z) + U(z)z^{-1}$$

$$Y(z)(2z^{-2} + z^{-1} + 1) = U(z)(z^{-1} + 2)$$

Übertragungsfunktion:

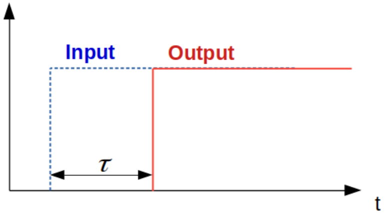
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 2}{2z^{-2} + z^{-1} + 1}$$

Erweitern mit z^n $(n = 2)$:

$$G(z) = \frac{2z^2 + z}{z^2 + z + 2}$$

Totzeit (1)

- Ein Totzeitglied ist eine Verzögerungsglied, dessen Ausgang mit einem konstanten Zeitversatz τ auf den Eingang reagiert.



- In zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktionen sind Totzeiten schwierig zu berücksichtigen, da sie mit einer Multiplikation von $e^{-s\tau}$ einhergehen:

$$\tilde{G}(s) = G(s) \cdot e^{-s\tau}$$

Dadurch wird die Übertragungsfunktion nichtlinear.

Totzeit (2)

- Bei z-Übertragungsfunktionen lassen sich Totzeiten leicht abbilden, indem $G(z)$ einfach mit z^{-N} multipliziert wird:

  $$\tilde{G}(z) = G(z) \cdot z^{-1}$$

  Die Übertragungsfunktion bleibt damit linear.
- Voraussetzung: Die Totzeit lässt sich als ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit T approximieren:

  $$\tau \approx N \cdot T, \quad N \in \mathbb{N}$$

Kausalität

- Reale Systeme wie z.B. ein Regler oder eine Regelstrecke müssen immer kausal sein.
- Kausalität bedeutet: Die Ausgangsgröße eines Systems kann nur von aktuellen und vergangenen, nicht aber von zukünftigen Eingangsgrößen abhängen.
- D.h.: Die Wirkung (Ausgang) muss nach der Ursache (Eingang) erfolgen.
- Beispiel: Die folgende Übertragungsfunktion is nicht kausal (akausal), da der Ausgangswert y_k von einem der zukünftigen Eingangswerte u_{k+1} abhängt:

$$y_k = \frac{1}{3}(u_{k+1} + u_k + u_{k-1})$$

Frage: Können Sie sich einen Sonderfall vorstellen, in dem auch ein akausales System auftreten könnte?

Wahl der Abtastfrequenz/Abtastzeit (1)

Für die Implementierung eines Reglers muss zubächst eine geeignete Abtastfrequenz f bzw. Abtastzeit T gewählt werden. Hierzu dient das **Shannon-Theorem**. Es besagt:

Enthält das Frequnzspektrum eines Signals (hier: Regelgröße) Frequenzen bis zu f_{max}, so muss die Abtastfrequenz mindestens das doppelte von f_{max} betragen, d.h.

$$f \geq 2 \cdot f_{max}$$

bzw.

$$T \leq \frac{1}{2 \cdot f_{max}}$$

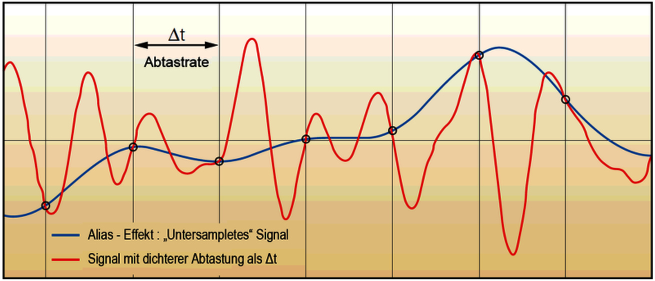
Wahl der Abtastfrequenz/Abtastzeit (2)

Hinweise für die Praxis:

- Da man oft nicht ganz sicher sein kann, welche Frequenzanteile ein Signal enthält, wählt man in der in der Praxis meist noch einmal deutlich höhere Frequenzen als $2 \cdot f_{max}$.
- In manchen Fällen ist das Shannon-Theorem nicht anwendbar, z.B. weil kein Frequnzspektrum vorliegt. In diesen Fällen gilt als Faustregel, dass die Abtastzeit deutlich kleiner sein sollte als die kleinste Zeitkonstante der Übertragungsfunktion der Strecke.
- Außerdem sind in der Praxis weitere Restriktionen zu beachten, z.B:
  - Rechenzeit, die benötigt wird, um Sensorwert einzulesen sowie die Stellgröße zu berechnen und auszugeben.
  - Evtl. Rechenzeiten für sonstige Vorverarbeitungsschritte (z.B. Filterung)
  - Dynamik des Stellglieds (kann die Stellgröße überhaupt im geforderten Takt eingestellt werden?)

Aliasing

- Wird die Abtastfrequenz zu klein gewäht, kommt es u.U. zum sogenannten *Alias-Effekt* oder *Aliasing*.
- Hierbei wird ein Signal verfälscht. Das verfälschte Signal erscheint niederfrequenter, als es in der Realität ist. Somit wird die Dynamik der Regelung verfälscht.



Bildquelle: https://www.geothermie.de/fileadmin/_processed_/9/b/csm_Aliasing_45ef062831.png

Diskretisierung

- Reglerentwurf findet meist im zeitkontinuierlichen Bereich statt.
- D.h. Regler wird im zeitkont. DGL bzw. Übertragungsfunktion entworfen (s. Kap. 5).
- Für die Implementierung muss der Regler jedoch in eine zeitdiskrete Form (z-Übertragungsfunktion) überführt werden.
- Dies bezeichnet man als **Diskretisierung**.

Von der DGL zur Differenzengleichung

- Ausgangssituation: Regler liegt im kont. Zeitbereich vor (also als DGL)
- Umwandlung in Differenzengleichung durch Approximation der Ableitung mit Differenzenquotient:

$$\dot{y}_k \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{y}_k = \frac{\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}}{T} = \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$$

usw...

- Achtung: Dies ist immer nur eine **Annäherung** an das verhalten des zeitkont. Systems. Es verbleibt immer eine Gewisse Abweichung. Diese wird jedoch geringer, je kleiner die Abtastzeit T gewählt wird.

Von der Laplace-Übertragungsfunktion zur z-Übertragungsfunktion

- Ausgangssituation: Regler liegt im Laplace-Bereich vor (d.h. als Übertragugnsfunktion $R(s)$).
- Diskretisierung erfolgt durch Ersetzung der Laplace-Variable gem. versch. Approximationsregeln:
  - Euler vorwärts
  - Euler rückwärts
  - Bilinear (Tustin-Approximation)

Approximation: Ersetzung der Laplace-Variable

Approximationsregel	**Ersetzungsregel für s**
Euler vorwärts	$s = \frac{1}{T}\frac{z-1}{z}$
Euler rückwärts	$s = \frac{1}{T}(z-1)$
Bilinear (Tustin)	$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

In Matlab lässt sich eine Übertragungsfunktion `G` mit dem Befehl `c2d()` unter Angabe der Abtastzeit und der Approximationsregel diskretisieren, z.B.:

```
c2d(G,0.01,'tustin')
```

Von der z-Übertraungsfunktion kann man durch Rücktransformation leicht zur Differenzengleichung gelangen.

Implementierung PID-Regler

Grundsätzliche Vorgehensweise bei Implementierung auf Microcontroller: Zyklische Auswertung des Regelalgorithmus.

In jedem Zyklus:

1. Einlesen y_k, $y_{soll,k}$
2. Berechnung Regelfehler: $e_k = y_{soll,k} - y_k$
3. Berechnung P, I, und D-Anteil
4. Summation P, I und D-Anteil Gewichtungsfaktoren K_P, T_N, T_V und Ausgabe an Stellglied.
5. Ausgabe an Stellglied

Beispiel: Berechnung P-, I-, und D-Anteil

```
double compute_pid(double e_now, double e_last, double T)
{
  double K_p=1.2;
  double T_n=0.2;
  double T_v=0.1;
  static double sum = 0;
  sum += T*e_now;
  double diff = (e_now-e_last)/T;
  return K_p*(e_now + T_n*diff + sum/T_v);
}
```

Hinweis: In diesem Beispiel steht `e_now` für den aktuellen Regelfehler und `e_last` für den Regelfehler aus dem vorigen Zeitschritt.
Das Integral wird durch eine Summe approximiert. Im Beispiel wurde hier eine static-Variable verwendet, damit die Summe persistent ist und bei einem erneuten Funktionsaufruf nicht wieder zu null initialisiert wird.

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (1)

- Wie bereits erwähnt, findet der Reglerentwurf meist im zeitkontinuierlichen Bereich statt.
- Ist die Abtastzeit hinreichend klein in Relation zur Systemdynamik, kann i.d.R. davon ausgegangen werden, dass eine Regelung, die im zeitkontinuierlichen Bereich stabil ist, auch nach der Diskretisierung stabil ist.
- In manchen Fällen ist es jedoch erforderlich, nach der Diskretisierung erneut die Stabilität zu prüfen.

$\rightarrow$ **Hierzu wird ein Stabilitätskriterium für zeitdiskrete Systeme benötigt.**

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (2)

Erinnerung: Stabilität im zeitkontinuierlichen Fall anhand Systempolen s_i:

$$Re\{s\} < 1 \tag{3}$$

Hierbei ist s_i eine komplexe Zahl:

$$s = \sigma_i + j\omega_i \tag{4}$$

. Zusammenhang zwischen s und z (vgl. Folie 9):

$$z_i = e^{sT} \tag{5}$$

Einsetzen von Gl. (4) in (5):

$$z = esT = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} \cdot e^{j\omega}$$

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (3)

Anwendung der Euler-Identität $e^{j\omega} = cos(\omega) + j \cdot sin(\omega)$:

$$z = e^{\sigma} \cdot e^{j\omega} = e^{\sigma} \cdot (cos(\omega) + j \cdot sin(\omega))$$

Bei der Betrachtung des Betrags von z fällt auf, dass $|cos(\omega) + j \cdot sin(\omega)| = 1$ gilt (da $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$):

$$|z| = |e^{\sigma}| \cdot |cos(\omega) + j \cdot sin(\omega)| = |e^{\sigma}|$$

Somit bleibt noch $|e^{\sigma}|$. Dies ist immer kleiner als eins, da $\sigma = Re(s) < 1$ (vgl. Gl. (3)):

$$|z| = |e^{\sigma}| < 1$$

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (4)

Somit gilt: Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ ist stabil, wenn der Betrag aller Pole z_i kleiner als eins ist, d.h.

$$\forall i : |z_i| < 1$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Pole in der komplexen Zahlenebene im sog. **Einheitskreis** liegen müssen, d.h. ein Kreis um den Ursprung mit Radius 1.