Grundlagen der Regelungstechnik
Kapitel 3: Laplace-Transformation und Übertragungsfunktion

Tom P. Huck

Externer Dozent DHBW Karlsruhe

2022

Frage

Welche Methoden zur mathematischen Beschreibung von Regelstrecken haben Sie bisher kennengelernt?

Bisherige Beschreibungsformen

Sie haben bisher gelernt...

- Wie man Regelstrecken mittels Sprung- und Impulsantwort beschreibt
- Wie man Regelstrecken mittels Differentialgleichungen beschreibt und
- Wie man Regelstrecken grafisch (mittels Srukturdiagramm) beschreibt

Diese Beschreibungsformen haben aber gewisse Nachteile!

Warum eine weitere Beschreibungsform?

Nachteil: Bestimmte Operationen sind mathematisch umständlich.

Beispiel: Eine Regelstrecke besteht aus zwei hintereinandergeschalteten Systemen f und g, von denen jedes mit einer Differentialgleichung beschrieben wird.

$$f : \ddot{y} = -2\dot{y} - y + 2x$$

$$g : \dot{x} = -x + u$$

Frage: Wie kann das Gesamtsystem aus g und h beschrieben werden?

Warum eine weitere Beschreibungsform?

Nachteil: Bestimmte Operationen sind mathematisch umständlich.

Beispiel: Eine Regelstrecke besteht aus zwei hintereinandergeschalteten Systemen f und g, von denen jedes mit einer Differentialgleichung beschrieben wird.

$$f : \ddot{y} = -2\dot{y} - y + 2x$$

$$g : \dot{x} = -x + u$$

Frage: Wie kann das Gesamtsystem aus g und h beschrieben werden?
→ System gekoppelter DLGn! (mathematisch aufwändig)

Warum eine weitere Beschreibungsform?

Auch wenn f und g mittels Sprungantwort beschrieben werden, ist die Berechnung relativ umständlich (zumindest für händische Rechnungen). Hier wäre die Faltung anzuwenden (s. Kapitel 1):

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(x - \tau) d\tau \tag{1}$$

Eine handlichere Beschreibungsform wird benötigt!

Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ (1)

Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ verwandelt DGLn in algebraische (d.h. "normale") Gleichungen, mit denen sich leichter rechnen lässt.

Definition der Laplace-Transformation für ein Signal $x(t)$:

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt = X(s) \tag{2}$$

Wichtig: t wird "herausintegriert", übrig bleibt nur die sog. Laplace-Variable s, daher wird das Ergebnis als $X(s)$ notiert.

Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ (2)

Nützliche Eigenschaft: Was passiert bei Integration bzw. Differentiation des Signals?

	Ursprüngliches Signal	Laplace-Transformierte
Differentiation	$\dot{x}(t)$	$s \cdot X(s) - x(0)$
Integration	$\int x(t)dt$	$\frac{1}{s}X(s)$

Hinweise:

- Wir vernachlässigen i.d.R. den Anfangswert $x(0)$, d.h. $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = s \cdot X(s)$.
- Für $n-$fache Ableitungen gilt dann entsprechend $\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right) = s^n X(s)$.

Frage: Erkennen Sie bereits, warum diese Eigenschaft für uns so nützlich ist?

Von der DGL zur Algebraischen Gleichung (1)

Die Eigenschaften der Laplace-Transformation bzgl. Integration und Differentiation erlauben es, aus einer DGL eine algebraische (d.h. "normale") Gleichung zu machen, in der keine Ableitungen mehr vorkommen.
Hierzu werden die Funktionen in der DGL Laplace-Transformiert, in dem man für die Funktion $x(t)$ die Transformierte $X(s)$ einsetzt, für die erste Ableitung $sX(s)$, für die zweite Ableitung $s^2X(s)$, für die $n-$te Ableitung $x^nX(s)$, usw.

Frage: Führen Sie hier eine Laplace-Transformation durch:

$$\ddot{x} = -\dot{x} - 2x(t) \tag{3}$$

Von der DGL zur Algebraischen Gleichung (2)

Frage: Führen Sie hier eine Laplace-Transformation durch:

$$\ddot{x} = -\dot{x} - 2x(t) \tag{4}$$

Antwort:

$$s^2 X(s) = -sX(s) - 2x(s) \tag{5}$$

Wie Sie sehen, taucht in (5) keine Ableitung mehr auf!

Laplace-Korrespondenztabellen

Um sich bei komplizierteren Ausdrücken die händische Transformation zu sparen, gibt es in der Literatur sogenannte *Korrespondenztabellen*, in denen man die Transformationen direkt Nachschlagen kann.
Auszug aus einer Korrespondenztabelle (Beispiel, nicht vollst.):

$f(t) = f(kT)$	$L\{f(t)\}$	$Z\{f(kT)\}$	
Impuls $\delta(t)$	1	1	(1)
Sprungfunktion $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	(2)
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	(3)
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$	(4)
t^3	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T^3 z \cdot (z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	(5)
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim\limits_{a \to 0} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left\{ \frac{z}{z - e^{aT}} \right\}$	(6)

Laplace-Übertragungsfunktion (1)

Betrachtet man nun ein System mit Eingangsgröße $u(t)$ und Ausgangsgröße $y(t)$, so kann mittels der Laplace-Transformation die sogenannte *Laplace-Übertragungsfunktion* aufgestellt werden. Diese ist definiert wie folgt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{6}$$

Wobei $Y(s)$ die Laplace-Transformierte der Ausgangsgröße und $U(s)$ die Laplace-Transformierte der Eingangsgröße ist[1].

Frage: Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems, welches durch die folgende DGL beschrieben wird?

$$\ddot{y} = -\dot{y} - 2y(t) + u \tag{7}$$

[1] Es ist üblich, U für den Eingang und Y für den Ausgang zu verwenden. Je nach Kontext können die Namen aber auch andere sein! Schauen Sie daher immer genau hin, was Eingangs- und was Ausgangsgröße ist!

Laplace-Übertragungsfunktion (2)

Frage: Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems, welches durch die folgende DGL beschrieben wird?

$$\ddot{y} = -\dot{y} - 2y(t) + u \tag{8}$$

Schritt 1: Laplace-Transformierte für x, u, und deren Ableitungen einsetzen:

$$s^2 Y(s) = -sY(s) - 2Y(s) + U(s) \tag{9}$$

Schritt 2: Auf die Form $Y(s)/U(s)$ bringen:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 2} \tag{10}$$

Laplace-Übertragungsfunktion (3)

Die *allgemeine Form* der Übertragungsfunktion lautet:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (11)$$

Hierbei heißt $Z(s)$ *Zählerpolynom* und $N(s)$ *Nennerpolynom* der Übertragungsfunktion. b_i und a_i sind die *Koeffizienten* des Zähler- bzw. Nennerpolynoms. Der jeweils größte Exponent m bzw. n ist der *Grad* des Zähler- bzw. Nennerpolynoms.

Im Allgemeinen gilt: $n \geq m$. n ist somit der Grad des Gesamtsystems.

Bedeutung der Laplace-Übertragungsfunktion

Warum ist die Übertragungsfunktion für uns wichtig?

Anhand der Übertragungsfunktion lassen sich:

- Frequenz- und Amplitudengang des Systems bestimmen (nachfolgend).
- Wichtige Systemeigenschaften, wie z.B. Stabilität des Systems, bestimmen.
- Regler auslegen.

Pole und Nullstellen

Nullstellen des Zählerpolynoms nennt man **Nullstellen**. Die Nullstellen des Zählerpolynoms nennt man hingegen **Pole** des Systems.

Für die Analyse des Systemverhaltens sind insbesondere die Pole wichtig, da sie etwas über die Stabilität des Systems aussagen (hierzu später mehr).

Achtung: Bei der Pol- bzw. Nullstellenberechnung erhalten Sie u.U. komplexe Zahlen als Ergebnis!

Pole und Nullstellen

Aufgabe: Berechen Sie die Pole und Nullstellen der folgenden Systeme:

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+1} \tag{12}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s} \tag{13}$$

$$G_3(s) = \frac{s^2-s-2}{s^4+2s^2+1} \tag{14}$$

Pol- und Nullstellendiagramm

- Zur grafischen Darstellung trägt man Pole und Nullstellen in ein **Diagramm der komplexen Zahlenebene** ein (x-Achse: Realteil, y-Achse: Imaginärteil).
- Dabei ist es üblich, Nullstellen durch Kreise und Pole durch Kreuze zu kennzeichnen.
- Man nennt dieses Diagramm Pol-Nullstellen Diagramm.

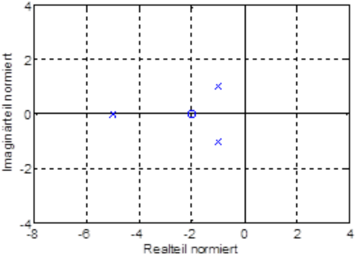

Figure: Pol-Nullstellen Diagramm[a]

[a] Bildquelle: Hochschule Karlsruhe - Systemtheorie Online (https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/)

Pol- und Nullstellendiagramm

Aufgabe: Erstellen Sie jeweils ein Pol-Nullstellen-Diagramm der Systeme G_1, G_2 und G_3 (Gl. (12)-(14))

Amplituden- und Phasengang (1)

Schickt man ein Signal durch eine Regelstrecke, so erfährt es eine Verstärkung und einen Phasenversatz. Verstärkung und Phasenversatz variieren mit der Frequenz des Signals.

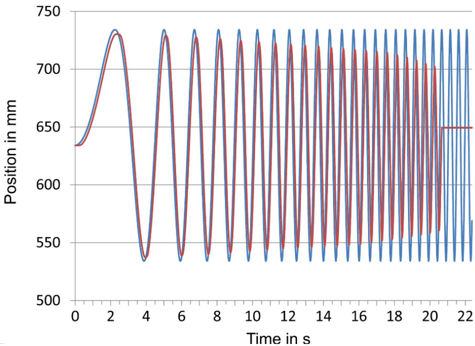

Figure: Blau: Eingangssignal, Rot: Ausgangssignal mit Amplituden- und Phasenänderung.

Bildquelle: Prof. Thomas Längle, Vorlesung Echtzeitsysteme, KIT, Sommersemester 2022

Amplituden- und Phasengang (2)

Den frequenzabhängigen Verlauf der Verstärkung bezeichnet man als Amplitudengang, den des Phasenversatzes als Phasengang. Berechnen kann man Amplituden- und Phasengang, indem man in der Übertragungsfunktion für die Laplace Variable $s = j\omega$ einsetzt (j: imaginäre Zahl).

- Amplitudengang entspricht Betrag der komplexen Übertragungsfunktion: $|G(j\omega)|$
- Phasengang entspricht Phase der komplexen Übertragungsfunktion: $\angle G(j\omega)$

Bode-Diagramm

Trägt man Amplituden- und Phasengang untereinander auf einer logarithmischen Skala auf, spricht man von einem Bode-Diagramm.

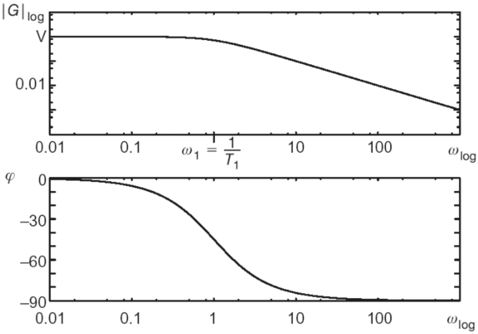

Figure: Bode-Diagramm
Bildquelle: Prof. Thomas Längle, Vorlesung Echtzeitsysteme, KIT, Sommersemester 2022

Ortskurve

Trägt man für jede Frequenz Amplitude und Phase als Zeiger in die komplexe Zahlenebene ein und verbindet jeweils die Endpunkte der Zeiger, so nennt man das entstehende Diagramm Ortskurve.

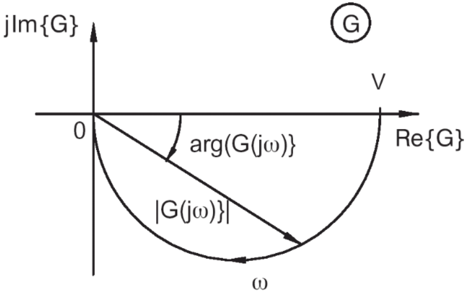

Figure: Ortskurve
Bildquelle: Prof. Thomas Längle, Vorlesung Echtzeitsysteme, KIT, Sommersemester 2022