Grundlagen der Regelungstechnik
Kapitel 2: Parameteridentifikation

Tom P. Huck

Externer Dozent DHBW Karlsruhe

03. November 2023

Einführung (1)

Sie kennen bereits die Beschreibung von Regelstrecken durch Differentialgleichungen:

$$y^{(n)} = a_{(n-1)} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y \\ + b_m \cdot u^m + ... + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 \cdot u \qquad (1)$$

Oft sind jedoch die **Parameter** der Differentialgleichung (hier: a_i, b_i) **nicht bekannt**.

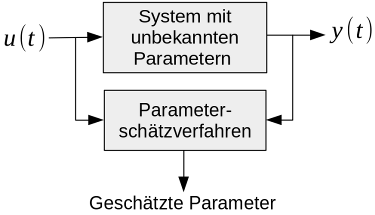
Mögliche Gründe:

- Parameter wurden theoretisch errechnet und stimmen nicht mit der Praxis überein
- Die Parameter haben sich über die Zeit langsam verändert ("Parameterdrift")
- Das System unterliegt produktionsbedingen Streuungen

Einführung (2)

Parameter sind oft nur mit großem Aufwand oder überhaupt nicht direkt messbar.

Man muss also die Parameter (zumindest näherungsweise) **aus Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnen**.



Dies bezeichnet man als **Parameteridentifikation** bzw. **Parameterschätzung**.

Verfahren zur Parameteridentifikation (1)

Verfahren zur Parameteridentifikation werden wie folgt unterschieden:

- Nach **Linearität**: Ist das System linear oder nichtlinear in den Parametern?
- Nach **Zeitpunkt** der Schätzung: Werden die Parameter während des laufenden Betriebs geschätzt ("Online-Schätzung") oder werden Messwerte aufgezeichnet und die identifikation erfolgt danach ("Offline-Schätzung")?
- Nach dem zum Einsatz kommenden **Algorithmus** bzw. **Schätzverfahren**.

Verfahren zur Parameteridentifikation (2)

Wir werden uns hier auf **lineare Verfahren** beschränken und die folgenden zwei Verfahren näher kennenlernen:

- **Least-Squares** Schätzung (Offline)
- **Rekursive Least-Squares** Schätzung (Online)

Linearität in Parametern

Sie kennen den Begriff Linearität bereits aus LTI-Systeme.

Übertragen auf Parameter bedeutet dies, dass die Parameter nur als Linearkombination auftreten dürfen, aber nicht...

- ...innerhalb nichtlinearer funktionen (z.B. Wurzel, Potenz)
- ...als Produkt/Quotient mit anderen Parametern

Wenn Systeme nichtlinear in ihren Parametern sind, lässt sich in vielen Fällen durch Substitution Abhilfe Schaffen.

Grundansatz der linearen Parameteridentifikation (1)

Wir betrachten ein System mit den zeitveränderlichen Größen u und y[1]:

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} = a_{(n-1)} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y \\
+ b_m \cdot u^m + \ldots + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 \cdot u
\end{aligned} \tag{2}
$$

Wir nehmen an, dass y, u, und deren Ableitungen mess- bzw. bestimmbar sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise fassen wir die Parameter a_i, b_i in einem Vektor $\underline{\theta}$ und die Werte für $u^{(m)}, \ldots, \dot{u}, u, y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}$ in einem Vektor $\underline{m}$ und zusammen. So vereinfacht sich (2) zu:

$$
y = \theta_1 \cdot m_1 + \theta_2 \cdot m_2 + \ldots + \theta_q \cdot m_q = \underline{\theta}^T \cdot \underline{m} \tag{3}
$$

Wir nennen diese Gleichung *Messgleichung*. Ziel ist nun, einen geschätzten Parametervektor $\hat{\underline{\theta}}$ zu finden, sodass:

$$
\underline{\theta} \approx \hat{\underline{\theta}}
$$

[1] Anmerkung: Für die folgenden Rechnungen ist nicht weiter wichtig, welche der beiden Größen Ein- und Ausgangsgröße ist - wichtig ist nur, dass sie messbar sind!

Grundansatz der linearen Parameteridentifikation (2)

Wir regen das System mit einer geeigneten Eingangsgröße an und machen $p \in \mathbb{N}$ Messungen zu verschiedenen Zeitpunkten:

$$\underline{m}_1^T \underline{\theta} = y_1$$

$$\vdots$$

$$\underline{m}_p^T \underline{\theta} = y_p$$

$\underline{m}_1^T \dots \underline{m}_q^T$ werden zu einer Matrix $\underline{M}$ und $y_1, \dots, y_q$ zu einem Vektor $\underline{y}$ zusammgengefasst:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \tag{4}$$

Oder kurz:

$$\underline{M} \cdot \underline{\theta} = \underline{y} \tag{5}$$

Aufgabe: Parameteridentifikation Motorstromkreis (1)

Rückblick: Betrachten Sie noch den einmal Motorstromkreis aus Kapitel 1:

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \tag{6}$$

Nach Anlegen einer Spannung von 12V werden zu zwei verschiedenen Zeitpunkten folgende Werte gemessen (Einheiten werden hier zur Vereinfachung weggelassen):

Zeitpunkt t_1: $u(t_1) = 12$; $i(t_1) = 1$; $\frac{di(t)}{dt}(t_1) = 20$
Zeitpunkt t_2: $u(t_1) = 12$; $i(t_1) = 6$; $\frac{di(t)}{dt}(t_1) = 0$

Stellen Sie für diese Messung eine Gleichung gemäß Gleichung (5) auf und bestimmen Sie den Parametervektor!

Aufgabe: Parameteridentifikation Motorstromkreis (2)

Lösung: Die Parameter sind offensichtlich R und L, also:

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix}$$

Somit muss auch folgendes gelten:

$$\underline{m}^T = \begin{pmatrix} i(t) & \frac{di}{dt}(t) \end{pmatrix} \text{ und } y = u(t)$$

Setzt man nun die Werte für die zwei Messungen ein, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Dieses lineare Gleichungssystem (LGS) kann man leicht lösen und kommt auf $R = 2$ und $L = 0.5$.

Probleme bei LGS-Verfahren

Warum ist das soeben durchgeführte Verfahren (LGS aufstellen und lösen) nicht gut für die Praxis geeignet?

Probleme bei LGS-Verfahren

- In der vorigen Aufgabe gab es genauso viele Messungen wie Parameter ($p = q = 2$)
- Aufgrund von Messungenauigkeiten muss i.d.R. eine große Zahl von Messungen durchgeführt werden, um die Parameter zuverlässig zu bestimmen. Es gilt also i.d.R. $p >> q$.
- Problem: Das Gleichungssystem ist dann **überbestimmt** (mehr Gleichungen als Variablen). Eine exakte Lösung ist nicht mehr möglich.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \tag{7}$$

Least-Squares Schätzung (1)

Die Least-Squares Schätzung liefert eine **Näherungslösung** $\underline{\hat{\theta}}$ für überbestimmte Gleichungssysteme.

Ansatz: Finde $\underline{\hat{\theta}}$, sodass die **Summe aller Fehlerquadrate minimiert** wird:

$$\underline{\hat{\theta}} = \text{argmin}(e_{squared}) \tag{8}$$

$$e_{squared} = \sum_{i=1}^{p} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{9}$$

Hierbei ist y_i jeweils die *tatsächliche* Größe in der jeweiligen Messung und $\hat{y}_i$ die theoretische Größe, die sich unter Verwendung der Parameter $\underline{\hat{\theta}}$ ergeben *würde*.

Least-Squares Schätzung (2)

Zur einfacheren Notation führen wir den Fehlervektor $\underline{e}$ ein:

$$\underline{e} = \underline{y} - \underline{M} \cdot \underline{\theta} = \begin{pmatrix} y_1 - \hat{y}_1 \\ \vdots \\ y_p - \hat{y}_p \end{pmatrix} \tag{10}$$

Damit lässt sich Gl. (9) wie folgt schreiben:

$$e_{squared} = \underline{e}^T \cdot \underline{e} \tag{11}$$

Frage

Warum ist es sinnvoll, die Summe der Fehler**quadrate** zu minimieren, und nicht einfach die Summe der Fehler?

Herleitung einer Lösung für die Least Squares Schätzung

Siehe Tafelanschrieb.

Moore-Penrose Pseudoinverse

Wie soeben hergeleitet ist die Least-Squares Schätzung für $\underline{\hat{\theta}}$ gegeben durch:

$$\underline{\hat{\theta}} = \left(\underline{M}^T \underline{M}\right)^{-1} \underline{M}^T \underline{y} \tag{12}$$

$\left(\underline{M}^T \underline{M}\right)^{-1} \underline{M}^T$ nennt man **Moore-Penrose-Pseudoinverse** $\underline{M}^+$.

Praxistipp: In MATLAB kann man $\underline{M}^+$ mit dem Befehl `pinv(M)` berechnen.

Probleme bei unterschiedlich großen Messwerten

Frage: Welches Problem könnte auftreten, wenn einzelne Messwerte im Vergleich zu den anderen zahlenmäßig sehr groß bzw. sehr klein sind? Was könnte man gegen dieses Problem tun?

z.B. Messung einer Spannung (24 V) vs. Messung eines Stroms (0.01 A) $\rightarrow$ Spannungsmessung ist zahlenmäßg 2400 mal größer.

Probleme bei unterschiedlich großen Messwerten

Antwort: Zahlenmäßig sehr kleine Messwerte gehen im Verhältnis deutlich weniger stark in den Fehlervektor $\underline{e}$ ein. Es besteht daher die Gefahr, dass Fehler in denjenigen Parametern, die mit diesen Messwerten verknüpft sind, kaum berücksichtigt werden.

Möglichkeiten zur Abhilfe:

- Geeignete **Normierung** der Werte **vor** Parameteridentifikation (Achtung: Normierung muss danach wieder rückgängig gemacht werden, um Originalparameter zu erhalten)
- Einführung einer **Gewichtungsmatrix** in den Fehlerterm

Gewichtungsmatrix

Neuer Fehlerterm mit Gewichtungsmatrix:

$$e_{squared} = \underline{e}^T \cdot \underline{W} \cdot \underline{e} \tag{13}$$

$\underline{W}$ enthält auf der Diagonale die Gewichte $w_1, ..., w_q$ und ist ansonsten null:

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_q \end{pmatrix} \tag{14}$$

Die Schätzung $\underline{\theta}$ ergibt sich jetzt zu:

$$\hat{\underline{\theta}} = (\underline{M}^T \underline{W} \cdot \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{W} \cdot \underline{y} \tag{15}$$

Rekursive Least-Squares Schätzung (RLS) (1)

Bisher: Aufzeichnen von Messwerten im Voraus und Berechnung von $\underline{\theta}$ "en bloc".

Jetzt: Rekursive Berechnung von $\underline{\theta}$, d.h. Messungen werden nach und nach betrachtet. Bei jedem neuen Messwert erfolgt ein rekursives Update.

Frage: Was sind mögliche Vorteile dieses Verfahrens?

Rekursive Least-Squares Schätzung (RLS) (2)

Wähle initiale Schätzparameter $\underline{\hat{\theta}}$ (zufällig oder auf Basis von Vorwissen) und wiederhole dann folgende Schritte (i.d.R. in einem festen Takt oder jedes mal, wenn eine neue Messung möglich ist):

1. Messe $\underline{m}$ und y
2. Berechne $\hat{y} = \underline{m} \cdot \underline{\hat{\theta}}$ mit den aktuellen Schätzparametern (*"Was sollte herauskommen, wenn die Parameter korrekt wären?"*)
3. Vergleiche mit tatsächlich gemessenem $\underline{y}$, berechne die Abweichung $\underline{y} - \underline{\hat{y}}$ und passe $\underline{\hat{\theta}}$ entsprechend der festgestellten Abweichung an.

Schritt 2 heißt auch *Prädiktionsschritt* und Schritt 3 *Update-Schritt*.

Rekursive Least-Squares Schätzung (RLS) (3)

Berechnungsvorschrift[2]:

Prädiktionsschritt:

$$\hat{y}_k = \underline{m}_k^T \cdot \underline{\theta}_{k-1}$$

Update-Schritt:

$$\underline{\hat{\theta}}_k = \underline{\hat{\theta}}_{k-1} + \frac{\gamma \cdot \underline{m}_k}{\alpha + \underline{m}_k^T \cdot \underline{m}_k} \cdot (y_k - \hat{y}_k)$$

mit $\alpha \geq 0$ und $0 < \gamma \leq 2$.

[2] s. Astrom, Wittenmark: Adaptive Control (2nd Edition), Eq. (2.24)

Aufgabe: Temperaturmodell (1)

Sie arbeiten in einem Entwicklungsteam, welches ein Kühlsystem entwickeln soll. Während des Betriebs muss die **Temperatur an fünf kritischen Stellen überwacht** werden, da andernfalls eine Überhitzung wichtiger Bauteile droht. Im Protoyp des Systems werden dazu fünf Sensoren platziert, die die kritischen Temperaturen $T_1, T_2, ..., T_5$ messen.

Später fällt auf, dass der Sensor T_5 im Serienmodell aus Bauraumgründen gar nicht eingebaut werden kann, d.h. die Temperatur T_5 kann nicht gemessen werden. Ein Mitglied Ihres Teams schlägt daher vor, die Temperatur T_5 mittels einer **Linearkombination** der Temperaturen $T_1, ..., T_4$ zu berechnen.

Aufgabe: Temperaturmodell (2)

Fragen:

- Stellen Sie eine Gleichung der Form $T_5 = f(T_1, ..., T_4)$ für das vorgeschlagene Modell auf.
- Würden Sie zur Bestimmung der Modellparameter hier eher das klassische Least Squares Verfahren oder das rekursive Verfahren wählen? Begründen Sie Ihre Wahl.
- Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches die Modellparameter bestimmt können Sie an dieser Stelle auch Pseudocode angeben.

Hinweis: Die gemessenen Temperaturen finden Sie im MATLAB-File `temperaturmessung.mat`

Aufgabe: Temperaturmodell (3)

Ein anderer Kollege meint, dass zwischen den Temperaturen T_1, T_2 und T_5 eine starke Kopplung herrscht und schlägt daher vor, einen zusätzlichen Term in das Modell einzubringen:

$$\theta_1 \cdot T_1 + \theta_2 \cdot T_2 + \theta_3 \cdot T_3 + \theta_4 \cdot T_4 + \theta_5 \cdot T_1 \cdot T_2 = T_5$$

Aufgaben:

- Ist dieses Modell immernoch linear und kann es mit den ihnen bekannten Schätzverfahren behandelt werden? Begründen Sie!
- Bestimmen Sie die Parameter für dieses neue Modell. Welches der zwei Modelle führt insgesamt auf einen geringeren Fehler?

Diskussion

Diskutieren Sie: Ist ein detaillierteres Modell (d.h. ein Modell mit mehr Parametern) grundsätzlich besser, um einen gegebenen Datensatz zu modellieren?

Integratoren als Vorfilter für die Parameterschätzung

In die Parameterschätzung gehen mitunter *differenzierte* Signale ein, also Ableitungen der gemessenen Ein- bzw. Ausgangsgrößen.

Überlegen Sie: Wieso könnte dies in der Praxis zu Problemen führen?

Integratoren als Vorfilter für die Parameterschätzung

Problem bei Differenzierung von Signalen: Signalstörungen (sog. "Rauschen") wird durch die Differentiation verstärkt.

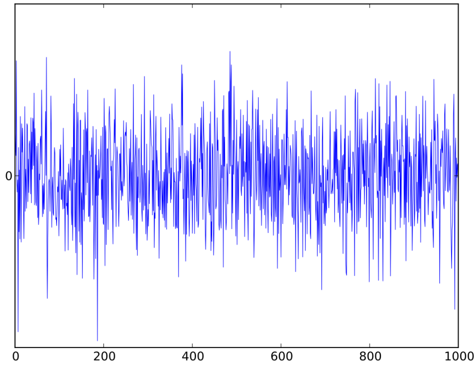


Figure: Signalrauschen Bildquelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Wei%C3%9Fes_Rauschen`

Integratoren als Vorfilter für die Parameterschätzung

In die Parameterschätzung gehen mitunter *differenzierte* Signale ein, also Ableitungen der gemessenen Ein- bzw. Ausgangsgrößen.

Überlegen Sie: Wieso könnte dies in der Praxis zu Problemen führen?

- Problem bei Differenzierung von Signalen: Signalstörungen (sog. "Rauschen") wird durch die Differentiation verstärkt.
- Abhilfe kann durch *Integation* der Signale geschaffen werden.
- Die integrierten Signale sind deutlich Robuster ggü. Rauschen, da sich durch integration das Rauschen teilweise "ausmittelt" (Integrator hat eine Glättungswirkung für die Signale).

Integratoren als Vorfilter für die Parameterschätzung

Beispiel:

$$\ddot{y} = \theta_1 \dot{y} + \theta_2 y + \theta_3 u \tag{16}$$

$$\rightarrow y = \theta_1 \int y \; dt + \theta_2 \int \int y \; dt + \theta_3 \int \int u \; dt \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Hier werden durch zweifache Integration der DGL alle Ableitungsterme entfernt.

Wichtig: Die komplette DGL muss integriert werden, es ist nicht zulässig, nur einzelne Terme zu integrieren, da sonst das Systemverhalten verfälscht wird!

Aufgabe: Stellen Sie für die integrierte DGL die Messgleichung in Form von $\underline{m}^T \cdot \underline{\theta} = y$ auf! Nehmen Sie an, dass die Messung in einem Zeitraum von t_0 bis t_1 erfolgt.

Anschließende Hinweise für die Praxis (1)

- **Zeitaufwand** für Parameteridentifikation darf **nicht unterschätzt** werden (ein Modell ist auf Papier oder in MATLAB schnell aufgestellt - Messungen am realen System sind viel aufwändiger!)
- Bei Problemen immer auch an die Möglichkeit von **Messfehlern** denken:

  "Wer misst, misst Mist."

- Ist die **Messgenauigkeit**, die mit Ihren Sensoren prinzipiell möglich ist, überhaupt gut genug für die geforderte Genauigkeit des Modells/der Parameter?´

Anschließende Hinweise für die Praxis (2)

- Anzahl der **Messpunkte** sollte deutlich größer sein als Anzahl der zu bestimmenden Parameter ($p >> q$).
- Parameter können je nach Betriebsbedingungen, Alterung, etc. **variieren**! Wenn dieser Effekt zu stark ist, ggf. **Adaptive Regelung/Online Parameterschätzung** in Betracht ziehen (mehr dazu in späteren Kapiteln).