

Grundlagen der Regelungstechnik

Kapitel 6: Zeitdiskrete Regelung

Tom Huck

DHBW Karlsruhe

WS 2025

Hinweis zum Urheberrecht

Dieser Foliensatz enthält ggf. fremde Abbildungen die zum Zwecke der Lehre wiederverwendet werden. Die Verwendung dieser Inhalte geschieht mit Zustimmung der jeweiligen Rechteinhaber oder unter der Ausnahmeregelung für Unterricht und Lehre gemäß §60a UrHRG. Fremde Abbildungen sind mit einer Quellenangabe gekennzeichnet.

Warum zeitdiskrete Regelung?

Bisher: Systembeschreibung durch Differentialgleichungen (bzw. daraus abgeleitete Übertragungsfunktionen)

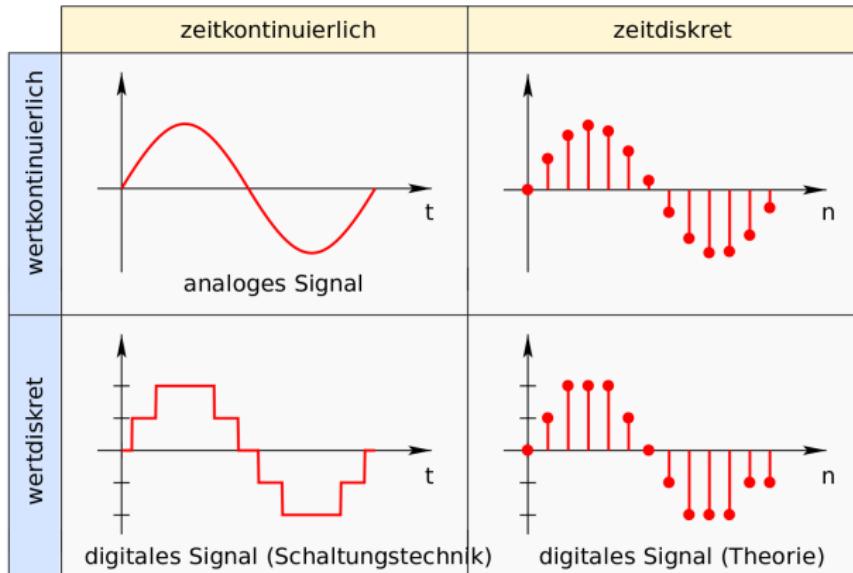
- ▶ Kontinuierlicher Zeitverlauf

In der Praxis: Implementierung der Regler erfolgt meist auf Digitalrechner (z.B. Mikrocontroller).

- ▶ Regler arbeitet getaktet
- ▶ Kein kontinuierlicher Zeitverlauf

Wie sieht der Regelkreis aus Sicht des Digitalreglers aus?

Zeit- und wertdiskrete Signale



Bildquelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Digitalsignal#/media/Datei:%C3%9Cbersicht_kontinuierliche_und_diskrete_Signale.svg

Hinweis: In der Praxis ist die Unterteilung der möglichen Werte meist so fein, dass Signale werden als quasi wertkontinuierlich angenommen werden können. Von Interesse ist hauptsächlich der zeitdiskrete Aspekt.

- Die zeitdiskrete Systemtheorie dient dazu, dynamische Systeme zu beschreiben, deren Verhalten durch zeitdiskrete Signale charakterisiert wird.
- Wie im zeitkontinuierlichen besitzt auch die zeitdiskrete Systemtheorie eigene Beschreibungsformen und Transformationen:

Zeitkontinuierlich	Zeitdiskret
Differentialgleichung	Differenzengleichung
Laplace- Transformation	z- Transformation
Laplace-Übertragungsfunktion	z-Übertragungsfunktion

- ▶ In der Praxis besitzt die zeitdiskrete Systemtheorie oft nur untergeordnete Bedeutung.
- ▶ Denn: Systemanalyse und Reglerentwurf finden meist im zeitkontinuierlichen statt. Regler werden nachträglich diskretisiert.
- ▶ Zeitdiskrete Systemtheorie ist dennoch relevant:
 - ▶ Nach der Diskretisierung kann u.U. ein unerwartetes Verhalten auftreten (insbes. wenn die Abtastzeit nicht fein genug ist). Dann ist eine Analyse direkt im zeitdiskreten Bereich hilfreich.
 - ▶ Einige Reglerarten werden direkt im zeitkontinuierlichen Bereich entworfen (z.B. Deadbeat-Regler¹)

¹ wird in dieser Vorlesung nicht näher behandelt.

Differenzengleichungen (1)

Liegt für eine Größe kein kontinuierlicher Wert vor, sondern lediglich **diskrete Werte** zu verschiedenen Zeitpunkten $k, k - 1, k - 2, \dots, k - n$, dann kann man den aktuellen Wert y_k als Funktion vergangener Werte ausdrücken:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}) \quad (1)$$

Analog zur Differentialgleichung bei kontinuierlichen Werten spricht man dann von einer **Differenzengleichung**.

Wie auch bei DGLn sollen im folgenden nur LTI-Systeme betrachtet werden, d.h.: f ist eine linearkombination von mit konstanten koeffizienten

Differenzengleichungen (2)

Zusätzlich zu Gl. (1) werden noch die (ebenfalls zeitdiskreten) Eingangsgrößen $u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-m}$ betrachtet

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-m}) \quad (2)$$

Analog zur Differentialgleichung bei kontinuierlichen Werten spricht man dann von einer **Differenzengleichung**.

Wie bisher sollen im Folgenden nur LTI-Systeme betrachtet werden, d.h. die Differenzengleichung ist eine Linearkombination der Werte y_k, \dots, y_{k-n} und u_k, \dots, u_{k-m} usw. mit konst. Koeffizienten a_i und b_i :

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m}$$

z-Transformation (1)

Die Werte y_k, y_{k-1}, \dots sind jeweils um vielfache des Zeitschritts T verzögert:

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m}$$

Im Laplace-Bereich entspricht die Verzögerung um eine Zeit T der Multiplikation mit e^{-sT} . Man kann also die folgende Laplace-Transformierte aufstellen:

$$\begin{aligned} Y(s) & \left(a_0 + a_1 e^{-sT} + a_2 e^{-2sT} + \dots + a_n e^{-nsT} \right) \\ & = U(s) \left(b_0 + b_1 e^{-sT} + b_2 e^{-2sT} + \dots + b_m e^{-msT} \right) \end{aligned}$$

z-Transformation (2)

Zur kompakteren Schreibweise führt man die Substitution $z = e^{sT}$ ein:

$$\begin{aligned} Y(z) & \left(a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n} \right) \\ & = U(z) \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m} \right) \end{aligned}$$

Eine Verzögerung um einen Zeitschritt führt also zu einer Multiplikation mit z^{-1} . Dies bezeichnet man als z – Transformation.

z-Übertragungsfunktion

Analog zur Laplace-Übertragungsfunktion $G(s)$ kann auch eine z-Übertragungsfunktion $G(z)$ definiert werden:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Oft wird die Übertragungsfunktion noch mit z^n erweitert, sodass sie nur positive Exponenten enthält. Dies erleichtert die Berechnung der Pole, ändert aber nichts am Übertragungsverhalten.

Für Reihenschaltung, Parallelschaltung und Rückkopplung von z-Übertragungsfunktionen gelten die gleichen Rechenregeln wie im Laplace-Bereich.

Beispiel (1)

Gegeben sie die folgende Differenzengleichung:

$$y_k = -2y_{k-2} - y_{k-1} + 2u_k + u_{k-1}$$

Führen Sie eine z-Transformation durch und berechnen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion!

Beispiel (2)

Gegeben sie die folgende Differenzengleichung:

$$y_k = -2y_{k-2} - y_{k-1} + 2u_k + u_{k-1}$$

Z-Transformation:

$$Y(z) = -2Y(z)z^{-2} - Y(z)z^{-1} + 2U(z) + U(z)z^{-1}$$

$$Y(z)(2z^{-2} + z^{-1} + 1) = U(z)(z^{-1} + 2)$$

Übertragungsfunktion:

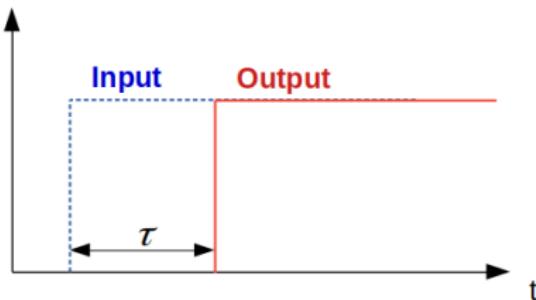
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 2}{2z^{-2} + z^{-1} + 1}$$

Erweitern mit z^n ($n = 2$):

$$G(z) = \frac{2z^2 + z}{z^2 + z + 2}$$

Totzeit (1)

- ▶ Ein Totzeitglied ist ein Verzögerungsglied, dessen Ausgang mit einem konstanten Zeitversatz τ auf den Eingang reagiert.



- ▶ In zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktionen sind Totzeiten schwierig zu berücksichtigen, da sie mit einer Multiplikation von $e^{-st\tau}$ einhergehen:

$$\tilde{G}(s) = G(s) \cdot e^{-st\tau}$$

Dadurch wird die Übertragungsfunktion nichtlinear.

Totzeit (2)

- ▶ Bei z-Übertragungsfunktionen lassen sich Totzeiten leicht abbilden, indem $G(z)$ einfach mit z^{-N} multipliziert wird:

$$\tilde{G}(z) = G(z) \cdot z^{-1}$$

Die Übertragungsfunktion bleibt damit linear.

- ▶ Voraussetzung: Die Totzeit lässt sich als ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit T approximieren:

$$\tau \approx N \cdot T, \quad N \in \mathbb{N}$$

- ▶ Reale Systeme wie z.B. ein Regler oder eine Regelstrecke müssen immer kausal sein.
- ▶ Kausalität bedeutet: Die Ausgangsgröße eines Systems kann nur von aktuellen und vergangenen, nicht aber von zukünftigen Eingangsgrößen abhängen.
- ▶ D.h.: Die Wirkung (Ausgang) muss nach der Ursache (Eingang) erfolgen.
- ▶ Beispiel: Die folgende Übertragungsfunktion ist nicht kausal (akausal), da der Ausgangswert y_k von einem der zukünftigen Eingangswerte u_{k+1} abhängt:

$$y_k = \frac{1}{3}(u_{k+1} + u_k + u_{k-1})$$

Frage: Können Sie sich einen Sonderfall vorstellen, in dem auch ein acausales System auftreten könnte?

- ▶ Reale Systeme wie z.B. ein Regler oder eine Regelstrecke müssen immer kausal sein.
- ▶ Kausalität bedeutet: Die Ausgangsgröße eines Systems kann nur von aktuellen und vergangenen, nicht aber von zukünftigen Eingangsgrößen abhängen.
- ▶ D.h.: Die Wirkung (Ausgang) muss nach der Ursache (Eingang) erfolgen.
- ▶ Beispiel: Die folgende Übertragungsfunktion ist nicht kausal (akausal), da der Ausgangswert y_k von einem der zukünftigen Eingangswerte u_{k+1} abhängt:

$$y_k = \frac{1}{3}(u_{k+1} + u_k + u_{k-1})$$

Frage: Können Sie sich einen Sonderfall vorstellen, in dem auch ein acausales System auftreten könnte?

Wahl der Abtastfrequenz/Abtastzeit (1)

Für die Implementierung eines Reglers muss zunächst eine geeignete Abtastfrequenz f bzw. Abtastzeit T gewählt werden. Hierzu dient das **Shannon-Theorem**. Es besagt:

Enthält das Frequenzspektrum eines Signals (hier: Regelgröße) Frequenzen bis zu f_{max} , so muss die Abtastfrequenz mindestens das doppelte von f_{max} betragen, d.h.

$$f \geq 2 \cdot f_{max}$$

bzw.

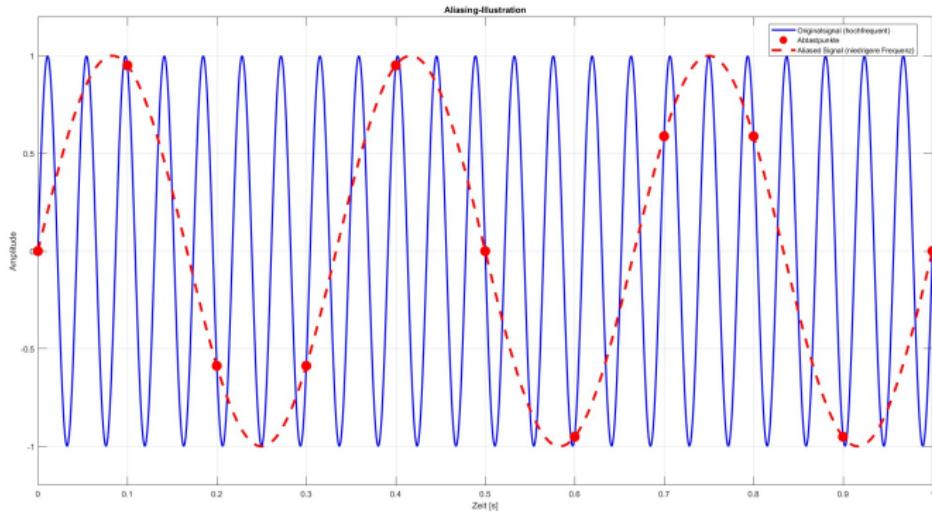
$$T \leq \frac{1}{2 \cdot f_{max}}$$

Hinweise für die Praxis:

- ▶ Da man oft nicht ganz sicher sein kann, welche Frequenzanteile ein Signal enthält, wählt man in der Praxis meist noch einmal deutlich höhere Frequenzen als $2 \cdot f_{max}$.
- ▶ In manchen Fällen ist das Shannon-Theorem nicht anwendbar, z.B. weil kein Frequenzspektrum vorliegt. In diesen Fällen gilt als Faustregel, dass die Abtastzeit deutlich kleiner sein sollte als die kleinste Zeitkonstante der Übertragungsfunktion der Strecke.
- ▶ Außerdem sind in der Praxis weitere Restriktionen zu beachten, z.B:
 - ▶ Rechenzeit, die benötigt wird, um Sensorwert einzulesen sowie die Stellgröße zu berechnen und auszugeben.
 - ▶ Evtl. Rechenzeiten für sonstige Vorverarbeitungsschritte (z.B. Filterung)
 - ▶ Dynamik des Stellglieds (kann die Stellgröße überhaupt im geforderten Takt eingestellt werden?)

Aliasing

- ▶ Wird die Abtastfrequenz zu klein gewählt, kommt es u.U. zum sogenannten *Alias-Effekt* oder *Aliasing*.
- ▶ Hierbei wird ein Signal verfälscht. Das verfälschte Signal erscheint niederfrequenter, als es in der Realität ist. Somit wird die Dynamik der Regelung verfälscht.



- ▶ Reglerentwurf findet meist im zeitkontinuierlichen Bereich statt.
- ▶ D.h. Regler wird im zeitkont. DGL bzw. Übertragungsfunktion entworfen (s. Kap. 5).
- ▶ Für die Implementierung muss der Regler jedoch in eine zeitdiskrete Form (z-Übertragungsfunktion) überführt werden.
- ▶ Dies bezeichnet man als **Diskretisierung**.

Von der DGL zur Differenzengleichung

- ▶ Ausgangssituation: Regler liegt im kont. Zeitbereich vor (also als DGL)
- ▶ Umwandlung in Differenzengleichung durch Approximation der Ableitung mit Differenzenquotient:

$$\dot{y}_k \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{y}_k = \frac{\dot{y}_k - \dot{y}_{k-1}}{T} = \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$$

usw...

- ▶ Achtung: Dies ist immer nur eine **Annäherung** an das Verhalten des zeitkont. Systems. Es verbleibt immer eine gewisse Abweichung. Diese wird jedoch geringer, je kleiner die Abtastzeit T gewählt wird.

Von der Laplace-Übertragungsfunktion zur z-Übertragungsfunktion

- ▶ Ausgangssituation: Regler liegt im Laplace-Bereich vor (d.h. als Übertragungsfunktion $R(s)$).
- ▶ Diskretisierung erfolgt durch Ersetzung der Laplace-Variable gem. versch. Approximationsregeln:
 - ▶ Euler vorwärts
 - ▶ Euler rückwärts
 - ▶ Bilinear (Tustin-Approximation)

Approximation: Ersetzung der Laplace-Variable

Approximationsregel	Ersetzungsregel für s
Euler vorwärts	$s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$
Euler rückwärts	$s = \frac{1}{T} (z - 1)$
Bilinear (Tustin)	$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

s In Matlab lässt sich eine Übertragungsfunktion G mit dem Befehl `c2d()` unter Angabe der Abtastzeit und der Approximationsregel diskretisieren, z.B.:

```
c2d(G,0.01,'tustin')
```

Von der z -Übertragungsfunktion kann man durch Rücktransformation leicht zur Differenzengleichung gelangen.

Überlegen Sie: Lässt sich eine gegebene z-Übertragungsfunktion (oder Differenzengleichung) eindeutig wieder in den zeitkontinuierlichen Fall zurücktransformieren?

Begründen Sie! Falls Ihre Antwort "Nein" lautet: Welche Informationen wären dazu erforderlich, damit die Rücktransformation eindeutig ist?

- ▶ **Nein**, eindeutige Rücktransformation ist i.A. nicht möglich.
- ▶ Grund: Die z-Transformation hängt von **Abtastzeit T** ab.
- ▶ Ohne Kenntnis von T existieren **unendlich viele mögliche $G(s)$** .
- ▶ Außerdem: Verschiedene **Diskretisierungsverfahren** (Euler, Tustin, exakte Diskretisierung, ...) möglich
- ▶ Für eindeutige Rücktransformation benötigt man:
 - ▶ Abtastzeit T
 - ▶ verwendetes Diskretisierungsverfahren

Grundsätzliche Vorgehensweise bei Implementierung auf Mikrocontroller: Zyklische Auswertung des Regelalgorithmus.

In jedem Zyklus:

1. Einlesen $y_k, y_{soll,k}$
2. Berechnung Regelfehler: $e_k = y_{soll,k} - y_k$
3. Berechnung P, I, und D-Anteil
4. Summation P, I und D-Anteil Gewichtungsfaktoren K_P , T_N , T_V und Ausgabe an Stellglied.
5. Ausgabe an Stellglied

Beispiel: Berechnung P-, I-, und D-Anteil

```
sum = 0;

compute_pid(e_now, e_last, T)
{
    K_p = 1.2;
    T_n = 0.2;
    T_v = 0.1;
    sum += T * e_now;
    diff = (e_now - e_last)/T;
    return K_p * (e_now + T_n * diff + sum/ T_v);
}
```

Hinweis: In diesem Beispiel steht `e_now` für den aktuellen Regelfehler und `e_last` für den Regelfehler aus dem vorigen Zeitschritt.
Das Integral wird durch eine Summe approximiert. Für die Summe wird in diesem Beispiel eine globale Variable verwendet, damit sie nach dem Funktionsaufruf ihren alten Wert behält.

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (1)

- ▶ Wie bereits erwähnt, findet der Reglerentwurf meist im zeitkontinuierlichen Bereich statt.
- ▶ Ist die Abtastzeit hinreichend klein in Relation zur Systemdynamik, kann i.d.R. davon ausgegangen werden, dass eine Regelung, die im zeitkontinuierlichen Bereich stabil ist, auch nach der Diskretisierung stabil ist.
- ▶ In manchen Fällen ist es jedoch erforderlich, nach der Diskretisierung erneut die Stabilität zu prüfen.

→ Hierzu wird ein Stabilitätskriterium für zeitdiskrete Systeme benötigt.

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (2)

Erinnerung: Stabilität im zeitkontinuierlichen Fall anhand Systempolen s_i :

$$\operatorname{Re}\{s\} < 0 \quad (3)$$

Hierbei ist s_i eine komplexe Zahl:

$$s = \sigma_i + j\omega_i \quad (4)$$

. Zusammenhang zwischen s und z (vgl. Folie 9):

$$z_i = e^{sT} \quad (5)$$

Einsetzen von Gl. (4) in (5):

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$$

Hinweis: Die Abtastzeit T ist ein positiver konstanter Zeitwert. Da die Skalierung der Zeiteinheiten beliebig ist, wird im Folgenden zur Vereinfachung $T = 1$ gesetzt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit).

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (3)

Anwendung der Euler-Identität $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \cdot \sin(\omega)$:

$$z = e^\sigma \cdot e^{j\omega} = e^\sigma \cdot (\cos(\omega) + j \cdot \sin(\omega))$$

Bei der Betrachtung des Betrags von z fällt auf, dass $|\cos(\omega) + j \cdot \sin(\omega)| = 1$ gilt (da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$):

$$|z| = |e^\sigma| \cdot |\cos(\omega) + j \cdot \sin(\omega)| = |e^\sigma|$$

Somit bleibt noch $|e^\sigma|$. Dies ist immer kleiner als eins, da $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$ (vgl. Gl. (3)):

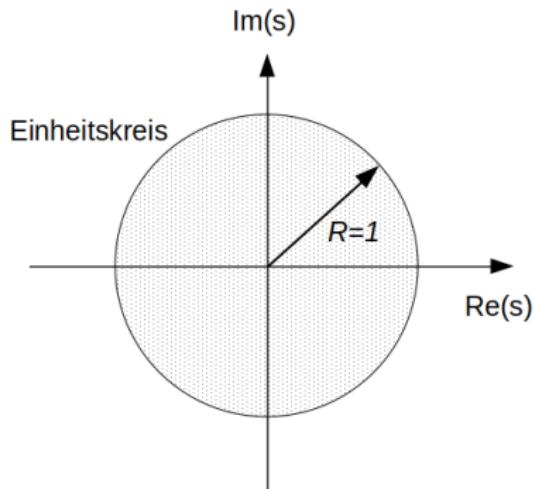
$$|z| = |e^\sigma| < 1$$

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen (4)

Somit gilt: Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ ist stabil, wenn der Betrag aller Pole z_i kleiner als eins ist, d.h.

$$\forall i : |z_i| < 1$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Pole in der komplexen Zahlenebene im sog. **Einheitskreis** liegen müssen, d.h. ein Kreis um den Ursprung mit Radius 1.



Übungen (1)

Gegeben sei ein System mit folgender z-Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}{z^{-1} + 2}$$

- ▶ Berechnen Sie die zugehörige Differenzengleichung!
- ▶ Ist das System kausal?

Übungen (2)

Gegeben sei folgende Differenzengleichung:

$$y_k = -y_{k-2} + 2y_{k-1} + u_k$$

- ▶ Berechnen Sie die zugehörige z-Übertragungsfunktion!
- ▶ Ist das System stabil?

Übungen (3)

Berechnen Sie die Differenzengleichung für eine zeitdiskrete Approximation eines Integrationsglieds. (Erinnerung: Das Integrationsglied hat die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$)

Verwenden Sie dabei die folgenden Approximationsverfahren:

- ▶ Euler vorwärts
- ▶ Euler rückwärts
- ▶ Tustin

Veranschaulichen Sie das zustandekommende Integral anhand einer Skizze!

Folgendes zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ soll digital abgetastet werden:

$$x(t) = 2 \cdot \sin(50s^{-1}t) + 5 \cdot \sin(314.16s^{-1}t) + \sin(95.25s^{-1}t)$$

- ▶ Welche Abtastfrequenz muss gemäß Shannon-Theorem mindestens gewählt werden?
- ▶ Wie würden Sie die Abtastfrequenz in der Praxis wählen?
- ▶ Was kann passieren, wenn eine zu geringe Abtastfrequenz gewählt wird? Wie nennt man dieses Phänomen?

Was Sie aus diesem Kapitel mitnehmen sollten

- ▶ Unterschied zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten kennen
- ▶ Differenzengleichungen und z-Übertragungsfunktionen verstehen und ineinander umwandeln können
- ▶ Zeitkont. Systeme diskretisieren können (Differenzenquotient, Euler, Tustin)
- ▶ Stabilitätskriterium im z-Bereich kennen und anwenden können
- ▶ Bedeutung der Abtastzeit und typische Fehlerquellen (Aliasing) verstanden