Grundlagen der Regelungstechnik
Kapitel 1: Beschreibung von Systemen im Zeitbereich

Dr. Tom Huck

DHBW Karlsruhe

2024

Aufgabe

Recherchieren Sie, welche Möglichkeiten es in der Regelungstechnik gibt, um dynamische Systeme (mathematisch oder grafisch) zu beschreiben!

(Keine detaillierte Erklärung notwendig; Namen der Beschreibungsverfahren reichen vorerst aus!)

Beschreibungsformen Dynamischer Systeme

- **Differentialgleichung/Differenzengleichung**
- **Blockdiagramm** (Signalflussbild)
- **Impulsantwort**
- **Sprungantwort**
- Übertragungsfunktion
- Bode-Diagramm
- Ortskurve

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst nur die **ersten vier**. Die anderen Verfahren werden später noch einmal aufgegriffen, nachdem bestimmte Vorkenntnisse eingeführt wurden.

Differentialgleichungen (1)

Physikalische Zusammenhänge werden oft in Differentialgleichungen (DGL) beschrieben. Daher bietet sich diese Beschreibungsform auch für dynamische Systeme in der Regelungstechnik an.

Eine DGL $n-$ten Grades schreiben wir wie folgt:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, ..., \ddot{y}, \dot{y}, y) \tag{1}$$

Dabei bezeichnet y^n die $n-$te Ableitung.

Differenzengleichungen

Liegt für eine Größe kein kontinuierlicher Wert vor, sondern lediglich **diskrete Werte** zu verschiedenen Zeitpunkten $k, k-1, k-2, ..., k-n$, dann kann man den aktuellen Wert als eine Funktion vergangener Werte ausdrücken:

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), ..., y(k-n)) \tag{2}$$

Analog zur Differetialgleichung bei kontinuierlichen Werten spricht man dann von einer **Differenzengleichung**.

Diese Form der Gleichung wird jedoch zunächst nicht näher betrachtet. Sie wird im Kapitel über zeitdiskrete Systeme noch einmal aufgegriffen.

Differentialgleichungen (2)

Wir beschränken uns auf **lineare** DGL. Hier können die Ableitungen als Linearkombination mit den Koeffizienten a_i geschrieben werden:

$$y^{(n)} = a_{(n-1)} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y \qquad (3)$$

Oft gibt es neben y auch noch andere Größen, die in die DGL eingehen. Eine DGL für eine Regelstrecke mit Regelgröße y und Stellgröße u könnte z.B. wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} y^{(n)} = {} & a_{(n-1)} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y \\ & + b_m \cdot u^m + ... + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 \cdot u \end{aligned} \qquad (4)$$

Überlegen Sie sich jeweils ein Beispiel für eine lineare und eine nichtlineare DGL!

Differentialgleichungen (3)

Neben der Beschränkung auf **Linearität** fordern wir zusätzlich noch, dass sich die Koeffizienten a_i, b_i mit der Zeit nicht ändern. Diese Eigenschaft heißt **Zeitinvarianz**.

Erfüllt eine DGL beide Eigenschaften, dann beschreibt sie ein sogenanntes **LTI-System** (LTI = linear, time invariant).

LTI-Systeme (1)

Unabhängig von der Beschreibungsform lassen sich die LTI-Eigenschaften wie folgt verallgemeinern:

1. **Linearität**
   - Skalierung der Eingangsgröße führt zu gleichermaßen skalierter Ausgangsöße (Doppelter Eingang $\rightarrow$ Doppelter Ausgang).
   - Addiert man zwei Eingangsgrößen und gibt sie in das System, erhält man das gleiche Ergebnis, wie wenn man die zwei Eingangsgrößen einzeln in das System gibt und die Ausgangsgrößen addiert (s. Bild).

LTI-Systeme (2)

2. Zeitinvarianz:
Ein- und Ausgansgrößen sowie interne Zustandsgrößen eines Systems dürfen sich zeitlich ändern, die **Parameter** des Systems (z.B. Verstärkungsfaktoren o.ä.) sowie dessen grunsätzliche **Struktur** aber nicht!

Wichtig: Von nun an betrachten wir nur noch LTI-Systeme, da die Betrachtung sonst mathematisch sehr schwierig wird. In Kapitel 7 werden kurz einige nicht-LTI-Systeme vorgestellt.

Aufgabe: LTI-Systeme

Welche der folgenden Differentialgleichungen beschreiben LTI-Systeme?

$$\dot{y} = 2 \cdot u - y \tag{5}$$

$$\dot{y} = u + 3 \tag{6}$$

$$\dot{y} = u - (5 + t) \cdot y \tag{7}$$

$$\dot{y} = 2 \cdot u - y + 3 \tag{8}$$

$$\dot{y} = -5 * \ddot{y} + \sqrt{42} \cdot u \tag{9}$$

Aufgabe: LTI-Systeme

Welche der folgenden Differentialgleichungen beschreiben LTI-Systeme?

$$\dot{y} = 2 \cdot u - y \tag{10}$$

$$\dot{y} = u + 3 \tag{11}$$

$$\dot{y} = u - (5 + t) \cdot y \tag{12}$$

$$\dot{y} = 2 \cdot u - y + 3 \tag{13}$$

$$\dot{y} = -5 * \ddot{y} + \sqrt{42} \cdot u \tag{14}$$

Lösung: (10) und (14) beschreiben LTI-Systeme.
(11) und (13) sind nicht LTI, weil sie über einen konstanten Offset $+3$ verfügen und somit eine Verdoppelung der Eingangsgröße nicht zu einer Verdoppelung der Ausgansggröße führt
(12) ist nicht LTI, da der Koeffizient $-(5 + t)$ zeitabhängig ist.

Fragen

Linearität und Zeitinvarianz sind bei realen Systemen nicht immer gegeben.

- Überlegen Sie sich Beispiele für nichtlineare bzw. zeitvariante Effekte in realen Systemen.
- Beschreiben Sie jeweils kurz, was in Ihrem Beispiel die Ursache für die Nichtlinearität bzw. die Zeitvarianz ist!

Fragen

Mögliche Ursachen für nichtlineare und zeitvariante Effekte:

- **Nichtlinearität**: Stellgrößenbegrenzung, Hystere, mechanisches Spiel, Sättigungseffekte, diskretes Schaltverhalten
- **Zeitvarianz**: Änderung von Systemparametern durch Verschleiß, Erwärmung, zeitlich variierende Umgebungs- bzw. Betriebsbedingungen

Aufgabe: Elektrisches Antriebssystem (1)

Ein Elektromotor erzeugt aus elektrischem Strom i ein Drehmoment M, welches eine mechanische Last mit Trägheit J antreibt:

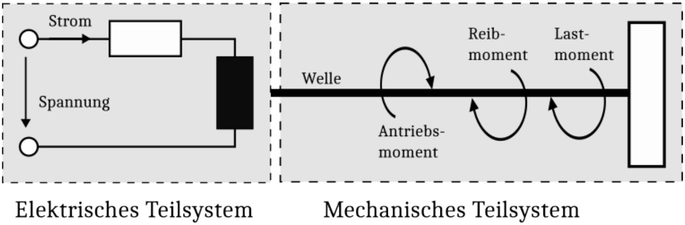


Figure: Schematische Darstellung eines einfachen elektrischen Antriebssystems

Aufgabe: Elektrisches Antriebssystem (2)

Ein Elektromotor wird mit folgenden Gleichungen beschrieben:
Spannung an den Klemmen $u(t)$ in abh. des Motorstroms $i(t)$:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) \tag{15}$$

L ist die Induktivät, R der Widerstand des Motorstromkreises.
Motor-Drehmoment in Abh. des Stroms:

$$M(t) = K \cdot i(t) \tag{16}$$

(K ist eine Motorkonstante)
Zusammenhang zwischen Drehmoment, Trägheit der Last J, Drehgeschwindigkeit ω der Motorwelle und Reibungskoeffizient r:

$$M = J \cdot \dot{\omega}(t) + r \cdot \omega(t) \tag{17}$$

(Drehmoment setzt sich zusammen aus Anteil zur Beschleunigung der Last und Anteil zur Überwindung der Reibung)

Aufgabe: Elektrisches Antriebssystem (3)

(a) Das System soll in Form von zwei Teilsystemen A und B betrachtet werden. Stellen Sie aus den Gleichungen auf der vorigen Folie zwei DGL für die zwei Teilsysteme auf. Diese sollen die folgende Form haben:

$$\text{A:} \quad di/dt = f(u, i) \tag{18}$$

$$\text{B:} \quad \dot{\omega} = f(\omega, i) \tag{19}$$

b) Sind die Teilsysteme jeweils LTI-Systeme? Welche Ordnung haben die Systeme? Begründen Sie! (Annahme: die Parameter J, K, L, M seien konstant)

Lösung: Elektrisches Antriebssystem (1)

Lösung: (a) Teilsystem A: Motorstromgleichung nach i auflösen:

$$di/dt = \frac{1}{L}(u - R \cdot i) = \frac{1}{L} \cdot u - \frac{R}{L} \cdot i \tag{20}$$

Teilsystem B: Drehmomentgleichung nach $\dot{\omega}$ auflösen

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(M - r \cdot \omega) \tag{21}$$

$K \cdot i$ für M einsetzen:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(K \cdot i - r \cdot \omega) = \frac{K}{J} \cdot i - \frac{r}{J} \cdot \omega \tag{22}$$

(b) Ja, beides sind LTI-Systeme, da es sich um lineare DGL mit konstanten Koeffizienten handelt. Beides sind Systeme 1. Ordnung, da jeweils nur eine erste Ableitung in der DGL vorkommt.

Aufgabe: Elektrisches Antriebssystem (4)

(c) Um das Gesamtsystem zu beschreiben, sollen nun die beiden Teilsysteme miteinander verkoppelt werden, sodass die Ausgangsgröße des ersten Teilsystems zur Eingangsgröße des zweiten wird.

- Welches Teilsystem is dabei sinnvollerweise das erste, welches das zweite?
- Geben Sie für beide Teilsysteme sinnvolle Ein- und Ausgangsgrößen an!
- Ist das entstehende Gesamtsystem immernoch ein System erster Ordnung?

Lösung zu (c)

- A ist das erste Teilsystem, B das zweite.
- A erhält als Eingangsgröße die Spannung, die am Motor angelegt wird, und gibt als Ausgangsgröße den Motorstrom aus. B erhält den Motorstrom als Eingang und gibt die Drehgeschwindigkeit der Welle aus.
- Das Gesamtsystem ist nun ein System zweiter Ordnung. Grund: u geht in die Ableitung von i ein, und i seinerseits in die Ableitung von ω. Würde man das Gesamtsystem als eine einzelne DGL schreiben, müsste man somit zwei Ableitungen berücksichtigen. Es würde sich damit um ein System zweiter Ordnung handeln.

Blockdiagramm (Signalflussbild)

Das Blockdiagramm, auch Signalflussbild oder Signalflussplan genannt, ist eine Möglichkeit, Zusammenhänge aus DGLn **grafisch darzustellen**. Programme wie *Simulink* ermöglichen es, Systeme zu modellieren, indem man per Drag-and-Drop Signalflussbilder aufbaut.

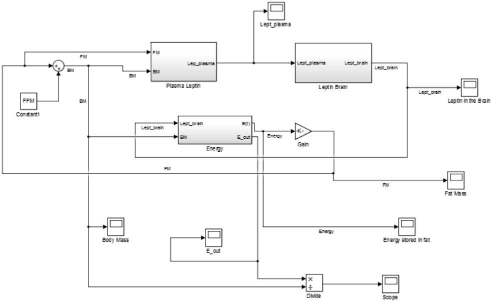
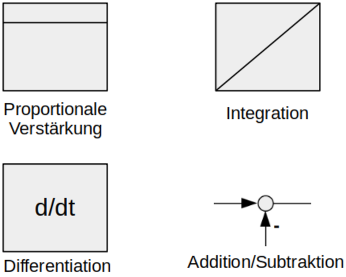


Figure: Beispiel eines Blockdiagramms aus Simulink (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simulink_lept.png)

Zur Darstellung **grundlegender Rechenoperationen** werden **Blöcke** verwendet, die dann zu komplexeren Strukturen **verschaltet** werden können. Im Folgenden die vier wichtigsten Blöcke (weitere werden im Laufe der Vorlesung eingeführt):



Hinweis: Es existieren z.T. unterschiedliche Darstellungen. Der Grundgedanke bei der Modellierung bleibt aber gleich.

Zeichnen von Blockdiagrammen (1)

Um von einer DGL zum Blockdiagramm zu kommen, können Sie nach folgenden Schema vorgehen:

1. Zerlegen Sie Ihr System in **Teilsysteme**. Zeichnen Sie für diese einen Signalflussplan.
2. Betrachten Sie für jedes Teilsystem die Differentialgleichung welche die Dynamik des Teilsystems bestimmt. Lösen Sie diese jeweils **nach der höchsten vorkommenden Ableitung** auf.
3. Zeichnen Sie zunächst den **Integrator** (bei mehrfachen Ableitungen kann dies auch eine Kette von Integratoren sein).

Zeichnen von Blockdiagrammen (2)

4. Verwenden Sie die in Schritt zwei berechnete Gleichung, um das **Eingangssignal des ersten Integrators** in der Kette zusammenzusetzen.
5. **Verbinden** Sie dann die Signalflusspläne der **Teilsysteme**. Falls das chaotisch aussieht, weil Sie zu Beginn noch nicht wussten, wo sie die einzelnen Teilsysteme sinnvoll anordnen sollen, zeichnen Sie den Plan noch einmal **strukturiert** auf, dies wird Ihnen später die Analyse erleichtern!

Hiweis: DGLn kann man sowohl unter Verwendung von Integrations- als auch Differentiationsblöcken darstellen. Die hier beschrieben Variante mit Integrationsblöcken ist aber gebräuchlicher.

Aufgabe: Blockdiagramm (1)

(a) Zeichnen Sie, gemäß dem soeben vorgestellten Schema, ein Blockdiagramm für den Elektromotor aus der vorigen Aufgabe! Hiweis: Beginnen Sie zuerst einzeln mit den Teilsystemen A und B, und Verbinden Sie die Teilsysteme dann!

(b) In einem realen Elektromotor entsteht durch Induktionsspannungen eine Rückwirkung auf die Klemmenspannung. Diese ist der Drehgeschwindigkeit der Welle proportional (Proportionalitätsfaktor Φ) Diese wird nun in der Gleichung für Teilsystem A wie folgt berücksichtigt:

$$di/dt = \frac{1}{L} \cdot u - \frac{R}{L} \cdot i - \Phi \cdot \omega \tag{23}$$

Ergänzen Sie Ihr Blockschaltbild, sodass es diese zusätzliche Rückwirkung korrekt wiedergibt!

Lösung: Blockdiagramm (1)

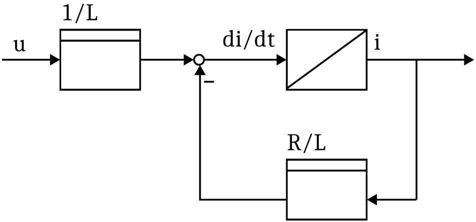


Figure: Signalflussbild Elektrischer Teil

Lösung: Blockdiagramm (2)

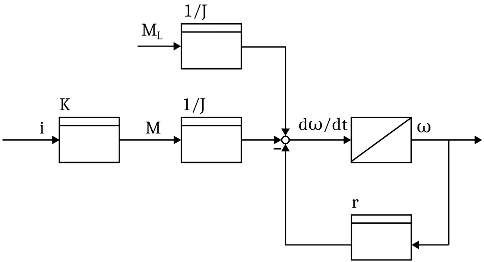


Figure: Signalflussbild Mechanischer Teil

Lösung: Blockdiagramm (3)

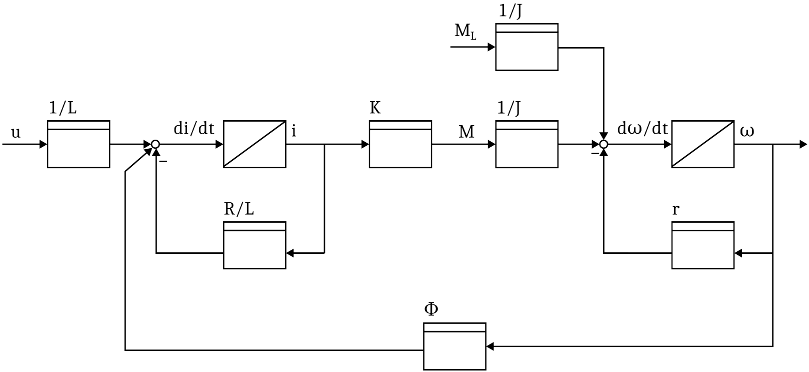


Figure: Signalflussbild Gesamtsystem

Aufgabe: Blockdiagramm (2)

(c) Aus der vorigen Aufgabe wissen Sie bereits, dass das Gesamtsysteme eine Ordnung von zwei hat.

Wie äußert sich dieser Umstand grafisch im Blockdiagramm?

Lösung: Blockdiagramm (4)

Die Systemordnung von zwei lässt sich daran erkennen, dass das Blockdiagramm zwei Integratoren besitzt (denn jeder Integrator bedeutet umgekehrt auch eine Ableitung, die in den DGLn vorkommt).

Achtung: Die Regel *"Anzahl Integratoren = Systemordnung"* ist nur dann zuverlässig anwendbar, wenn (1) zur Darstellung der DGLn keine Mischung aus Interator- und Differentiationsblöcken verwendet wurde, und (2) nur die minimal notwendige Zahl an Integratoren verwendet wird (durch Änderungen wie z.B. das Aufspalten von Signalpfaden können redundante Integratorblöcke entstehen).

Oft ist eine Beschreibung durch DGLn nicht möglich (z.B. weil innere Zusammenhänge nicht bekannt sind oder die DGLn zu kompliziert wären).

In diesen Fällen kann man ein System beschreiben, indem man es mit einer bestimmten Eingangsgröße anregt und die Ausgangsgröße ("Antwort") des Systems aufzeichnet.

Je nach Art der Anregung spricht man von **Impuls**- oder **Sprungantwort**

Impulsantwort

Das System wird mit einem sog. Dirac-Impuls $\delta(t)$ angeregt[1]. Der am Ausgang gemessene Signalverlauf $g(t)$ ist die Impulsantwort.

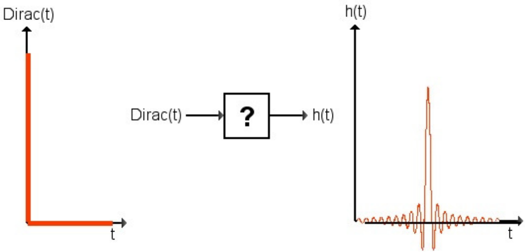


Figure: Impulsantwort Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Impulsantwort.jpg`

[1] Vereinfacht gesagt handelt es sich dabei um einen sehr kurzen, starken Impuls. Die genaue mathematische Definition ist komplizierter und soll hier nicht näher betrachtet werden

Impulsantwort

Kennt man die Impulsantwort $g(t)$, so kann man für ein gegenebes Eingangssignal $u(t)$ die Ausgangsgröße $y(t)$ wie folgt bestimmen:

$$y(t) = g(t) * u(t) \tag{24}$$

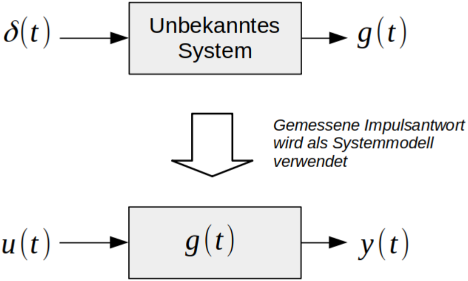


Figure: Impulsantwort

Wiederholung: Faltung

Hinweis: Die Operation $*$ auf der vorigen Folie steht nicht für Multiplikation, sondern für die mathematische Operation der **Faltung**. Diese sollte aus den Mathematik-Vorlesungen bekannt sein.

Zur Erinnerung die Definition:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(x - \tau) d\tau \tag{25}$$

Selbstverständlich wird dieses Integral in der Praxis selten händisch ausgerechnet, sondern numerisch (am Computer).

Sprungantwort

In der Praxis wird oft als Eingangsgröße ein Einheitssprung (Sprung von 0 auf 1) gewählt, da ein idealer Dirac-Impuls in der Praxis nicht erzeugt werden kann. Man spricht dann von einer *Sprungantwort*.

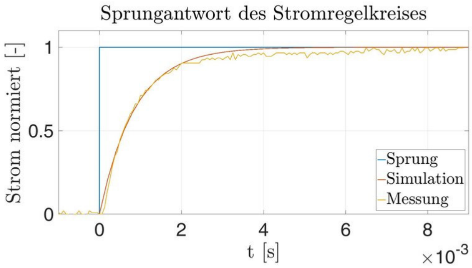


Figure: Sprungantwort[2]

Da die Sprungantwort das Integral der Impulantwort ist, können Sprung- bzw. Impulsantwort mittels Integration und Differentiation ineinander umgewandelt werden.

[2] Quelle: Brosch, A., Henneberger, R., & Sentpali, S. (2017). Blocked Force Prüfstand für mobile Anbindungen, regelungstechnische Betrachtung. DAGA.

Hausaufgabe:

Für Praxisübungen in Simulation: Bitte MATLAB und Simulink installieren!

siehe hier: `https://www.karlsruhe.dhbw.de/it-service/software-angebote.html` (Abschnitt "Mathworks - MATLAB, Simulink und Toolboxen")