Grundlagen der Regelungstechnik
Kapitel 4: Stabilität und weitere Systemeigenschaften

Dr. Tom Huck

DHBW Karlsruhe

WS 2024

Hinweis zum Urheberrecht

Was Sie bisher gelernt haben:

- Systeme mittels verschiedener Beschreibungsformen beschreiben:
  - DGL
  - Sprungantwort
  - Übertragungsfunktion
  - Bode-Diagramm
  - Ortskurve
- Parameter von Systemen bestimmen.

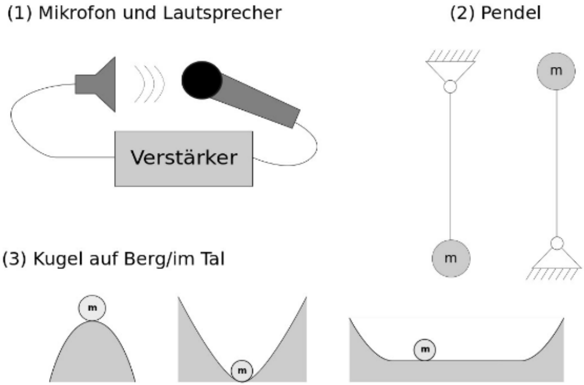
In diesem Kapitel lernen Sie, wie man grundlegende **Systemeigenschaften** (insbesondere die Stabilität eines Sytems) analysiert.

Stabilität: Definition

Ein System ist stabil, wenn es nach einer Anregung wieder in seinen Ausgangszustand (oder zumindest in ein gewisses Gebiet um den Ausgangszustsand) zurückkehrt. Man unterscheidet dabei verschiedene Arten von Stabilität:

- Das System verbleibt nach einer Anregung in einer gewissen Umgebung um den Ausgangszustand herum (sog "Lyapunov-Stabilität").
- Das System kehrt wieder vollständig in den Ausgangszustand zurück (asymptotische Stabilität)
- Das System kehrt wieder vollständig in die Ausgangslage zurück und folgt dabei einem exponentiellen Verlauf (exponentielle Stabilität).

Beispiele



Quelle: T. Huck, Übung zur Vorlesung "Echtzeitsysteme". Karlsruher Institut für Technologie, 2021.

Stabilität: Definition

Für dies Vorlesung, in der nur LTI-Systeme betrachtet werden, ist die sog. **BIBO-Stabilität** als vereinfachter Stabilitätsbegriff ausreichend:

Ein LTI-System ist **stabil**, wenn es auf eine **beschränkte Eingangsgröße** immer mit einer **beschränkten Ausgangsgröße** antwortet.

Diese Art der Stabilität wird auch als BIBO-Stabilität bezeichnet (BIBO=**B**ounded **I**nput, **B**ounded **O**utput)

Instabile Systeme

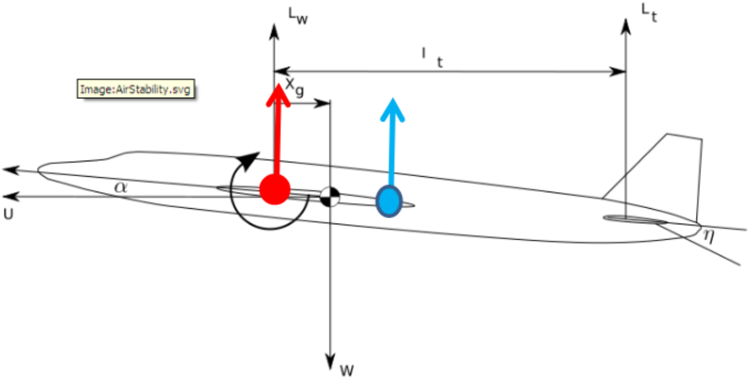
Ein instabiles System ist i.d.R. dadurch gekennzeichnet, dass sich die Ausgangsgröße selbst verstärkt ("Mitkopplung"). Instabile Systeme können dadurch eine unkontrollierbare Eigendynamik entwickeln, die teils zu schweren Schäden führen kann.

Daher ist es unverzichtbar, bei geregelten Systemen die Stabilität zu prüfen!

Frage: Fallen Ihnen Beispiele für instabile Systeme ein?

Beispiele für Instabilität

- Aerodynamische Instabilität bei Flugzeugen



Quelle: `http://mae-nas.eng.usu.edu/MAE_6530_Web/New_Course/launch_design/Section3.4.pdf`

Beispiele für Instabilität

- Mikrofon zu nah an Lautsprecher: Tonsignal verstärkt sich selbst.
- "Resonanzkatastrophe": Schwingfähiges System (z.B. Brücke) schwingt sich aufgrund von Resonanzen auf (u.U. sogar bis zur Zerstörung).
- Pandemie: Jede Person steckt mehr als eine weitere an (höhere Infektionszahl $\rightarrow$ mehr Neuinfektionen)

Image source: https://images.seattletimes.com/wp-content/uploads/2015/11/eedc84cc-84e0-11e5-b53b-a576789c5b7f.jpg?d=780x605

Stabilitätskriterien

Liegt ein mathematisches Modell eines Systems vor, lässt sich die Stabilität aufgrund bestimmter **Stabilitätskriterien** bestimmen. In dieser Vorlesung lernen Sie folgende Kriterien kennen:

- Stabilitätsprüfung anhand der Systempole
- Hurwitz-Kriterium
- Phasenrandkriterium
- Nyquist-Kriterium

Stabilitätsprüfung anhand der Systempole

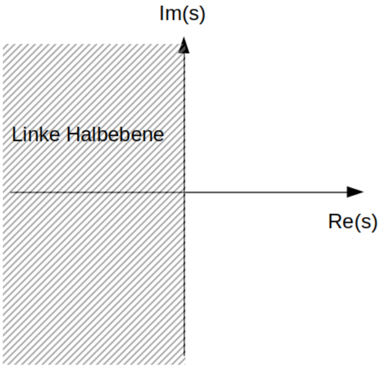
Für einfache Übertragungsfunktionen lässt sich die Stabilität bestimmen, indem man die Pole s_i der Übertragungsfunktion berechnet. Das System ist **stabil**, wenn alle Pole einen **negativen Realteil** haben:

$$\forall i : Re\{s_i\} < 0$$

Im Pol-Nullstellen Diagramm bedeutet dies, dass die Pole in der linken Halbene liegen müssen (s. Abb.).

Liegt mindestens ein Pol in der rechten Halbebene, ist das System **instabil**.

Enthält das System Pole mit $Re\{s_i\} = 0$, jedoch keine in der rechten Halbebene, so ist das System **grenzstabil**.



Hurwitz-Kriterium (1)

Bei Übertragungsfunktionen hören Grades ist es u.U. schwierig, die Pole exakt zu bestimmen. In diesem Fall kann das Hurwitz-Kriterium angewendet werden. Es erlaubt eine Stabilitätsprüfung anhand der Koeffizienten der Übertragungsfunktion, ohne die Pole des Systems explizit bestimmen zu müssen.

Beim Hurwitz-Kriterium wird das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion betrachtet:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

$$\text{mit:} \quad N(s) = a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Hurwitz-Kriterium (2)

Zunächst wird das Polynom so normiert, dass der erste Koeffizient eins wird:

$$s^n + ... + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0$$

mit:

$$\tilde{a}_i = \frac{a_i}{a_n}$$

Damit das System stabil sein kann, müssen nach der Normierung alle Koeffizienten positiv sein (notwendige Bedingung). Ist dies nicht der Fall, dann ist das System **instabil**.

Sind alle Koeffizienten positiv und das System hat eine Ordnung von höchstens zwei ($n \leq 2$), so ist das System stabil (notwendige und hinreichende Bedingung.)

Hurwitz-Kriterium (3)

Sind alle Koeffizienten positiv und das System hat eine Ordnung größer als zwei ($n > 2$), muss die Stabilität anhand er Hurwitzmatrix geprüft werden. Dazu werden die Koeffizienten des Nennerpolynoms in folgende Matrix eingetragen:

$$H_N = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & a_{N-7} & \cdots & 0 \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & a_{N-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Quelle: https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-a-zeitkontinuierliche-signale-und-systeme/systeme-im-laplace-bereich/stabilitaetsbewertung-linearer-zeitinvarianter-systeme-im-laplace-bereich/hurwitz-kriterium-zum-nachweis-der-stabilitaet-linearer-zeitinvarianter-systeme.html

Hurwitz-Kriterium (4)

Für die Matrix werden die sog. "nordwestlichen Unterdeterminanten" $H_1, \ldots H_n$ bis zur Ordnung n berechnet, d.h. alle Determinanten, welche das linke obere Element mit einschließen.

$$H_N = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & a_{N-7} & \cdots & 0 \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & a_{N-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Sind alle dieser Determinanten positiv $(H_i > 0)$, so ist das System stabil.

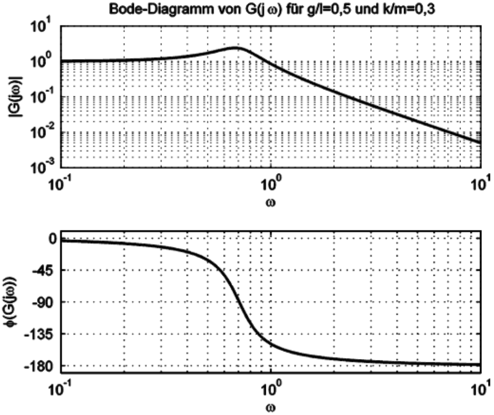
Phasenrandkriterium (1)

Das Phasenrandkriterium wird anhand des **Bode-Diagramms des offenen Regelkreises** $F_O(s)$ ausgewertet:

- Finde die Frequenz, an der der Amplitudengang die 0dB-Linie durchläuft (sog. "Durchtrittsfrequenz" ω_D).
- Betrachte den Phasenverlauf an der Stelle ω_D. Liegt die Phase an dieser Stelle oberhalb der -180°-Linie, so ist das Phasenrandkriterium erfüllt.
- Erfüllt der offene Regelkreis das Phasenrandkriterium, so ist der **geschlossenee Regelkreis** $F_G(s)$ **stabil** (hierbei wird eine neg. Rückkopplung mit Verstärkungsfaktor eins angenommen).

Phasenrandkriterium (2)

Beispiel:



Quelle: T. Huck, Übung zur Vorlesung "Echtzeitsysteme". Karlsruher Institut für Technologie, 2021.

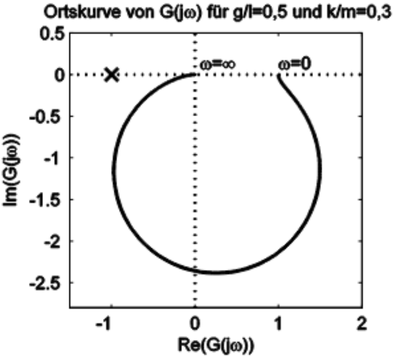
Nyquist-Kriterium (1)

Wie das Phasenrandkriterium wird auch das Nyquist-Krtierum wird anahnd der **Ortskurve des offenen Kreises** $F_O(s)$ **ausgewertet**.

Das Nyquist-Kriterium ist erfüllt, wenn die Ortskurve von $F_O(s)$ den sog. **"kritischen Punkt" -1** auf der komplexen Zahlenebene **nicht umschließt**.
Wird das Nyquist-Kriterium erfüllt, so ist der geschlossenene Regelkreis stabil (unter Annahme einer negativen Rückkopplung mit Verstärkungsfaktor eins).

Nyquist-Kriterium (2)

Beispiel:



Quelle: T. Huck, Übung zur Vorlesung "Echtzeitsysteme". Karlsruher Institut für Technologie, 2021.

Voraussetzungen für die Anwendung von Nyquist- und Phasenrandkriterium

- Voraussetzung für die Anwendungs des Nyquist- und Phasenrandriteriums ist, dass die betrachtete Übertragungsfunktion G(s) nur Pole in der linken Halbebene hat (Ausnahme: Es dürfen auch Sie. zwei Pole im Ursprung liegen).
- In anderen Worten: Damit Sie mit diesen Kriterien auf die Stabilität des geschlossenen Kreises schließen dürfen, muss der offene Kreis bereits stabil (oder allenfalls grenzstabil) sein, ansonsten ist mit diesen Kriterien keine Aussage möglich.
- Weiterhin existiert noch das sog. "Allgemeine Nyquistkriterium" - dieses erlaubt Aussagen auch für Fälle, in denen o.g. Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Es wird aber aufgrund seiner komplexität hier nicht behandelt.

Weitere Systemeigenschaften

Neben der Stabilität sind beim Reglerentwurf i.d.R. noch weitere Systemeigenschaften von Interesse. Dazu zählen u.a.:

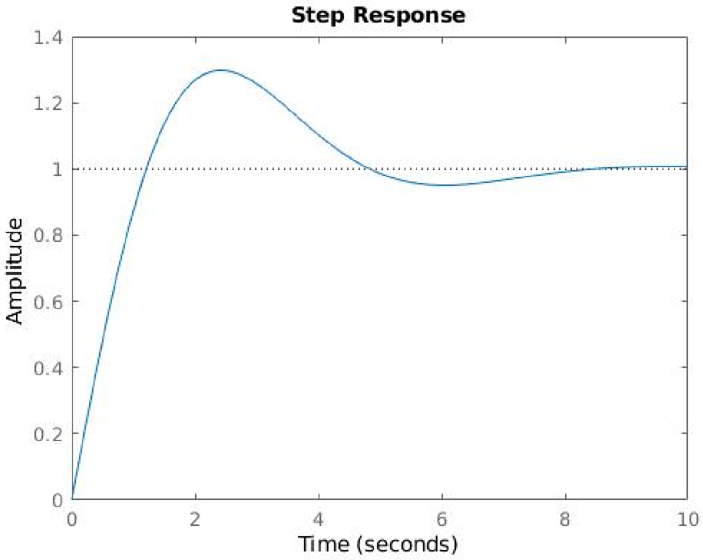
- **Schnelligkeit**: Wie schnell wird der gewünschte Sollwert eingeregelt?
- **Stationäre Genauigkeit**: Wird der gewünschte Endwert erreicht (und dauerhaft gehalten)?
- **Schwingfähigkeit**: Neigt das System zu Schwingungen?
- **Überschwingweite**: Wie stark schwingt das System über (in Relation zum Sollwert)?
- **Stellaufwand**: Wie viel Energie muss das Stellglied aufwenden, um den gewünschten Sollwert einzuregeln?

Schnelligkeit (1)

Je nach Anwendungsfall gibt es verschiedene Kriterien, umd die Schnelligkeit zu beschreiben:

- Die Zeit, bis zu der ein bestimmter Prozentwert des Sollwerts erreicht wird (typisch: 63.2% $\rightarrow$ sog. Zeitkonstante)
- Die Zeit, bis zu der ein bestimmter Sollwert *erstmalig* erreicht wird.
- Die Zeit, bis zu der sich die Regelgröße in einem gewissen Bereich um den Sollwert eingependelt hat (bei schwingfähigen Systemen).

Schnelligkeit (2)



Stationäre Genauigkeit

Die stationäre Genauigkeit gibt an, ob ein geregeltes System im stationären (d.h., eingeschwungenen) Zustand seinen Sollwert erreicht.

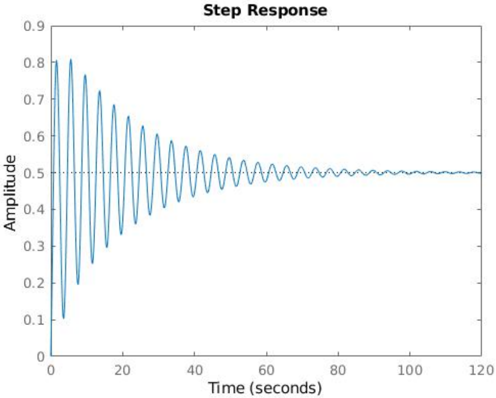
Der stationäre Wert y_∞ für die Sprungantwort eines Systems lässt sich anhand einer Übertragungsfunktion berechnen, indem man den Grenzwert der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $F_G(s)$ für $s \to 0$ bildet:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} F_G(s)$$

Da die Sprungantwort den Sollwert 1 erreichen soll, muss der Grenzwert also 1 betragen, ansonsten ist das System nicht stationär genau.

Schwingfähigkeit

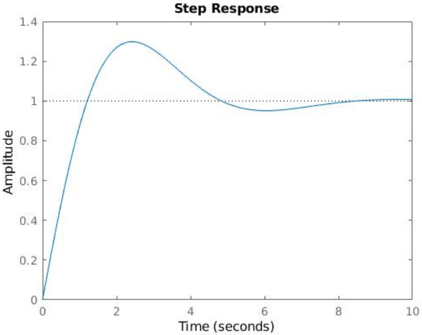
Die Schwingfähigkeit eines Systems gibt an, ob das System zu Schwingungen neigt bzw. in einen Schwingungszustand gebracht werden kann. Ein System ist schwingfähig, wenn seine Übertragungsfunktion ein komplex-konjugiertes Polpaar enthält.



Überschwingweite

Die Überschwingweite gibt an, wie stark das System beim einregeln eines Sollwerts "überschwingt", d.h. wie weit der Sollwert maximal überschritten wird, bevor das System den eingeschwungenen Zustand einnimmt:

$$\text{Überschwingweite} = \frac{y_{max}}{y_{soll}}$$



Stellaufwand

Ja nach Anwendung kann auch interessant sein, welche Arbeit W (d.h. Energie) das Stellglied aufwenden muss, um den Sollwert einzuregeln. Allgemein gilt:

$$W = \int P dt$$

Da die Leistung P i.d.R. quadratisch von der Stellgröße abhängt, formuliert man das Kriterium für den Stellaufwand J wie folgt:

$$J = \int u^2(t) dt$$

Wobei $u(t)$ der Verlauf der Stellgröße ist.

Kombinierte Integralkriterien

Neben dem Stellaufwand kann man z.B. auch die Abweichung vom Sollwert in das Integral mit einbeziehen:

$$J = k_1 \int u^2(t)dt + k_2 \int (x(t) - x_{soll})^2 dt$$

wobei k_1 und k_2 Gewichtungsfaktoren sind, die angeben, wie stark der Stellaufwand bzw. die Regelabweichung gewichtet werden sollen. Ein solches kombiniertes Kriterium kann z.B. als Optimierungskriterium für eine automatische Optimierung von Reglerparametern dienen.

Aufgabe 1

Gegeben sein Regelkreis aus Regler $R(s)$ und Strecke $G(s)$:

$$R(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Teilaufgabe a)

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $F_O(s)$ (händisch)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $F_G(s)$ (ebenfalls händisch)
- Prüfen Sie die Berechnung von $F_O(s)$ und $F_G(s)$ mithilfe von MATLAB nach. Geben Sie dabei an, welche Befehle Sie dafür verwendet haben!

Teilaufgabe b) Nun soll die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $F_G(s)$ betrachtet werden:

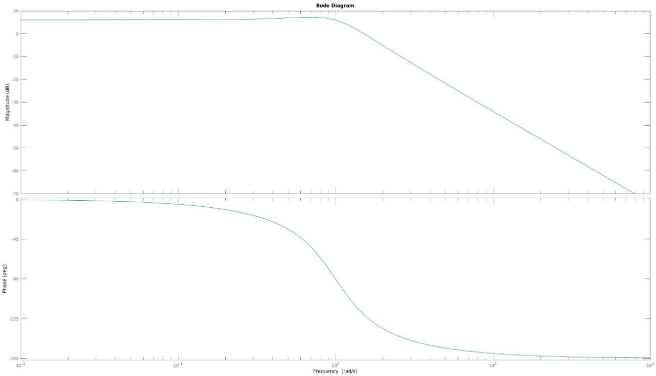
- Verwenden Sie das Hurwitz-Kriterium, um zu bestimmen, ob der geschlossene Regelkreis stabil ist (stellen Sie die Matrix händisch auf. Für die Berechnung der Determinanten können Sie MATLAB verwenden).
- Verwenden Sie nun MATLAB, um die Pole der Übertragungsfunktion zu berechnen. Tragen Sie die Pole in ein Pol-Nullstellen-Diagramm ein.
- Bestätigt die Berechnung der Pole Ihre zuvor getroffene Stabilitätsaussage? Begründen Sie!

Teilaufgabe c) Im folgenden ist die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises gegeben:

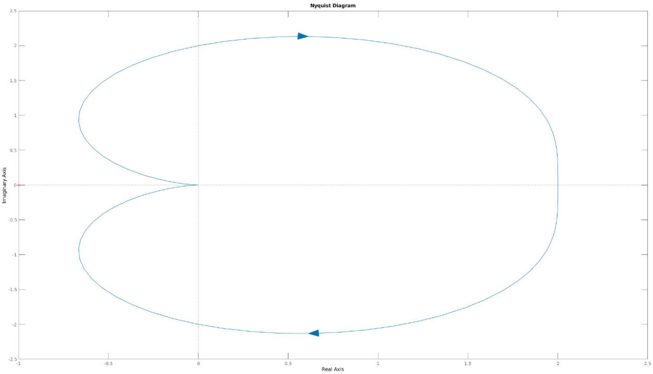
$$F_O(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}$$

- Welche Diagramme werden benötigt, um das Nyquist- bzw. Phasenrandkriterium anzuwenden?
- Zeichnen Sie die erforderlichen Diagramme mithilfe von MATLAB. Geben Sie an, welche Befehle Sie dafür verwenden.
- Sind das Nyqist- bzw. Phasenrandkriterium hier anwendbar? Falls ja, prüfen Sie die Stabilität anhand des Nyquist- bzw. Phasenrandkriteriums.

Aufgaben



Aufgaben


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Aufgabe 2

Nun wird ein geregeltes System mit folgender Regelstrecke und Regler betrachtet:

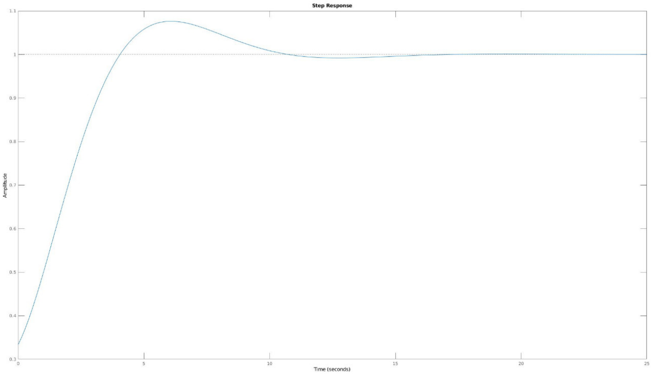
$$R(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s}$$

$$G(s) = \frac{s + 1}{2s^2 + 3s + 1}$$

Treffen Sie für dieses System folgende Aussagen (MATLAB kann verwendet werden):

- Wie lange dauert es, bis das System bei einer Sprungantwort erstmalig den Sollwert erreicht?
- Ist das System stabil?
- Ist das geregelte System schwingfähig?
- Ist das geregelte System stationär genau? Wenn nein, wie groß ist die stationäre Regelabweichung?
- Weist die Sprungantwort einen Überschwinger auf? Wenn ja, geben Sie die (ungefähre) Überschwingweite an!

Aufgaben



Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0
5
10
15
20
25

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

Das Nyquist-Kriterium fordert, dass die Ortskurve des offenen Regelkreises den sog. "kritischen Punkt" -1 auf der komplexen Ebene *nicht* umläuft. Überlegen Sie, warum das Kriterium gerade den Punkt -1 als kritischen Punkt betrachtet!

Teilaufgabe b)

"Phasenrandkriterium und Nyquistkriterium sind im Grunde dasselbe Kriterium, es werden nur unterschiedliche Darstellungen verwendet" - Beurteilen Sie diese Aussage! Würden Sie zustimmen?