Département informatique de l'IUT de Montpellier

Révisions d'analyses et courbes paramétrées

Année 2020 - 2021 , semestre 4

TD1 de MATH5, année 2020;

Révisions.

Exercice 1:
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1. Etudiez la fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Mêmes questions pour la fonction $g(x) = x^2 + 2$
3. Mêmes questions pour la fonction $h(x) = -3x^2 + 2x - 1$
4. Mêmes questions pour la fonction $k(x) = x^2 + x - 1$

Exercice 2:

Calculez les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+3x+1}{x^2+x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^3+x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2+x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x+1}}{x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(3x+1)}{x^2+x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{3x+2}{-x+3}}$

Exercice 3:

Etudiez et tracez les fonctions suivantes:

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
2. $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$
3. $h(x) = (x+1)\, ln(x+1)$
4. $k(x) = 3 + e^{-x}$
5. $l(x) = 2cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 4:

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{2}x + 1\right) dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$
3. $\int_0^1 e^{2x+1} dx$
4. $\int_0^\pi cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$
5. $\int_0^1 (x+1)\, e^x dx$

Exercice 5:

Ecrire sous la forme $a + ib$ les complexes suivants:

1. $(3-i)(3+2i)$
2. $(2+i)^2$
3. $\frac{1}{2+i}$
4. $\frac{1}{1-i}$
5. $\frac{3+i}{2-i}$
6. $3e^{i\frac{\pi}{3}}$
7. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 6:

La fonction $\arccos(x)$, définie sur $[-1;1]$ (parfois notée $\cos^{-1}$sur vos calculettes) , est la fonction réciproque de $\cos(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$. Cela signifie concrètement que $\forall x \in [0;\pi], \arccos(\cos(x)) = x$ et réciproquement, $\forall x \in [-1;1], \cos(\arccos(x)) = x$.

1. Donnez $\arccos(-1)$, $\arccos(0)$ et $\arccos(1)$.
2. Comment obtenez-vous la représentation graphique de la fonction arccos à partir de la représentation de cos ? Représentez sur un même graphique les deux fonctions et donnez le tableau de variation de $\arccos(x)$.
3. En utilisant la formule $\forall x \in [-1;1], \cos(\arccos(x)) = x$ et en admettant que $\arccos(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$, déterminez $\arccos'(x)$.
4. On définit de même la fonction réciproque de $\sin(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est notée $\arcsin(x)$: donnez sa représentation graphique et son tableau de variations.

Exercice 7:

Ecrire sous la forme $re^{i\theta}$ avec r un réel positif et θ un réel de l'intervalle $[0;2\pi[$. Vous pourrez utiliser les représentations des nombres complexes dans le plan et les fonctions définies dans l'exercice 6.

1. $1+i$
2. $1-i$
3. $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $3+5i$
5. $-5i$
6. $2-3i$

Interrogation d'analyse n°1

durée: 1h30

Vous pouvez utiliser le formulaire ("prérequis") du polycopié.

Exercice 1:

On considère la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

1. Vérifiez que f est bien définie sur $\mathbb{R}$:

2. Donnez l'expression de $f'(x)$:

3. Calculez les limites suivantes:

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

4. Que pouvez-vous conclure des calculs de la question 3?

5. Complétez le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de f'(x)	
variation de f(x)	

6. Donnez l'équation de la tangente au point d'abscisse -1:

7. Représentez l'allure de la courbe de la fonction f pour $x \in [-3; 1]$ sur la dernière page du sujet.

Exercice 2:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) \times \sin(x)$.

1. Pourquoi peut-on réduire l'intervalle d'étude de cette fonction à $[-\pi;\pi]$?

2. Etudiez la parité de cette fonction.

3. Montrez que le point $C\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est centre de symétrie de la courbe de g .

4. Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3:

Mettez les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec a et b deux réels.

1. $(3+i)(2-i)$

2. $\frac{4+i}{2-i}$

3. $2e^{i\frac{\pi}{4}}$

4. $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^4$

Exercice 4:

Mettez les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle $re^{i\theta}$:

1. $1+i$

2. $\frac{1-i}{1+i}$

3. $-3i$

4. $-1+i\sqrt{3}$

Exercice 5:

1. Calculez à l'aide d'une primitive $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$:

2. .

   (a) Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tous réel x on ait $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x+1)}$.

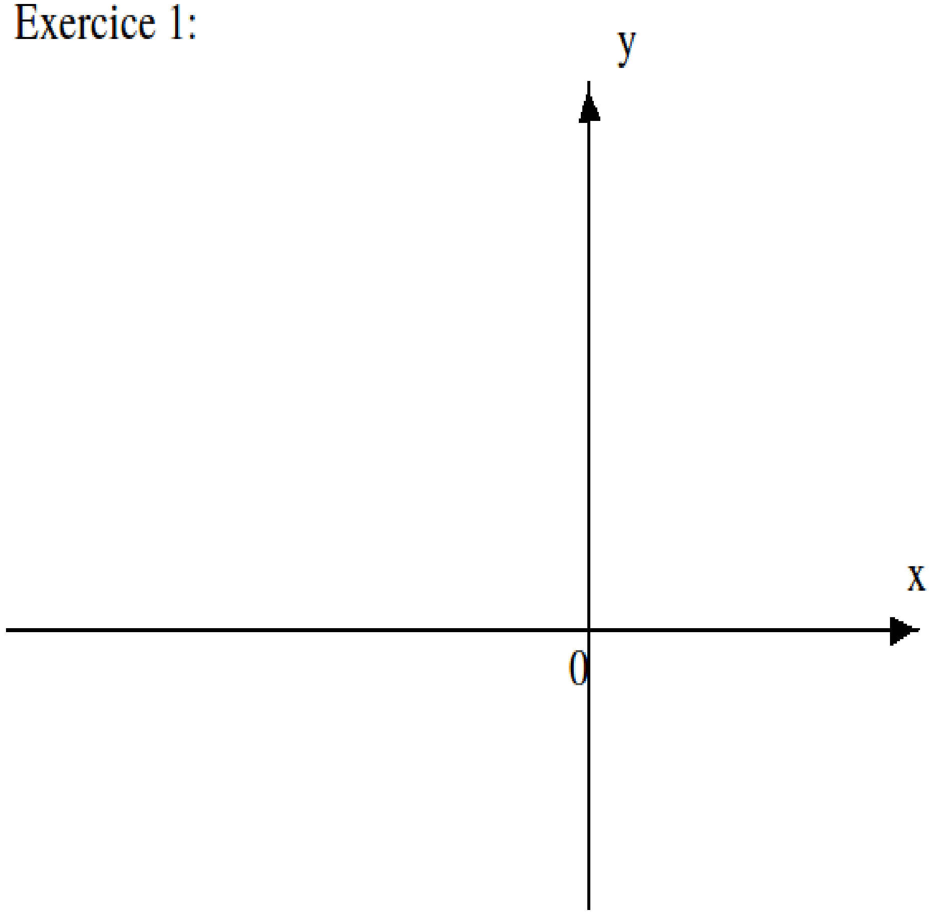
   (b) Calculez $\int_1^2 \frac{1}{x^2(1+x)}dx$.

Exercice 6:

1. Rappelez la définition de la dérivabilité d'une fonction f en $x = 0$:

2. Déduisez-en $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x}$

Exercice 1:



Les courbes paramétrées

I) **Définitions:**

définition 1:

Une courbe paramétrée plane (ou arc paramétré) est une application

$$D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \to M(t)$$

où $M(t)$ est un point du plan $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées dans le repère canonique $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ avec $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions définies sur D .

Exemple:

La courbe paramétrée Γ définie par:

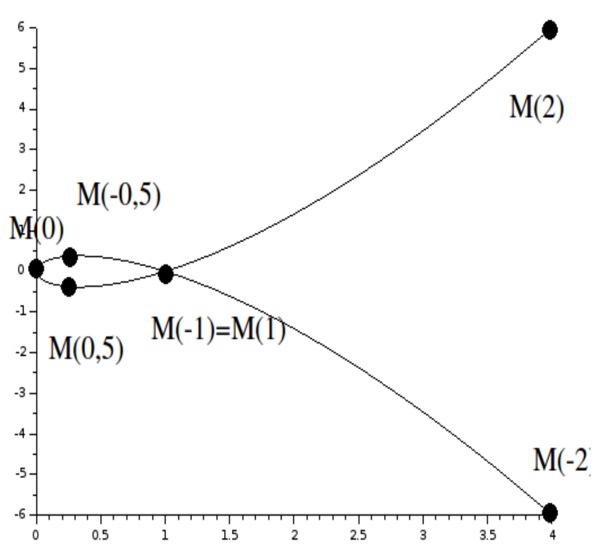
$$M(t) \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases} \qquad D = [-2; 2]$$

définition 2:

Le support de la courbe paramétrée Γ définie par $M(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in D$ est l'ensemble des points $M(t)$ quand t décrit D (i.e. “représentation géométrique” de la courbe).

suite de l'exemple précédent:

t	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$M(t)$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,375 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$



Dans ce chapitre nous allons apprendre à étudier les courbes paramétrées:

- les axes de symétries,
- les variations,
- les tangentes,
- les asymptotes,
- les points multiples.

Remarque:

Des courbes paramétrées distinctes peuvent avoir le même support.
Par exemple les courbes

$$\Gamma_1 \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\Gamma_2 \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = -t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\Gamma_3 \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ont même support.

définition 3:

Un point A d'un arc paramétré Γ (défini par $M(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in D$) est dit **multiple** s'il existe plusieurs valeurs du paramètre t $(t_1, t_2, \dots)$ telles que

$$A = M(t_1) = M(t_2), \dots$$

Un point A est dit **simple** s'il n'y a qu'une valeur t du paramètre telle que $A = M(t)$.
L'arc est dit simple si tous les points de son support sont simples.

II) Etude des courbes paramétrées:

1) Réduction de l'intervalle d'étude:

périodicité, symétries, ...:

Exemple 1:

A partir du premier exemple, la courbe paramétrée Γ définie par $M(t) \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases} \quad D = [-2; 2]$ on peut remarquer que $M(-t) \begin{cases} x(-t) = (-t)^2 = t^2 = x(t) \\ y(-t) = (-t)^3 - (-t) = -t^3 + t = -y(t) \end{cases}$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des x.

On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, 2]$. On obtiendra le support complet en effectuant la symétrie d'axe x .

Exemple 2:

Soit la courbe paramétrée C définie par $M(t)\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$:

- puisque 2π est une période commune à $x(t)$ et $y(t)$ on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$.
- On observe que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des x: on restreint l'étude à $[0, \pi]$.
- De plus $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des y : on restreint l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtiendra le support complet en effectuant une symétrie orthogonale d'axe y suivie d'une symétrie orthogonale d'axe x.

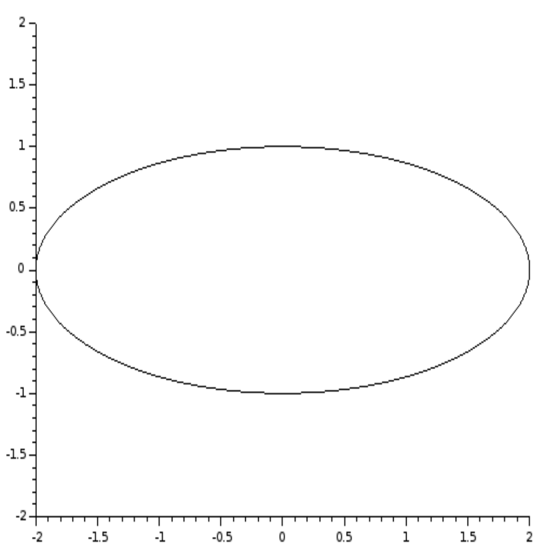
Notons $V_1(t)$ le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique sont les dérivées des fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

$$V_1(t)\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) \\ y'(t) = \cos(t) \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations conjointes ci-dessous:

t	0		pi/2
x'	0	-	-2
x	2	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1
y'	1	+	0

Ce tableau nous permet d'obtenir la représentation graphique ci-dessous du support de la courbe paramétrée:



(on explique dans les deux parties qui suivent l'intérêt du tableau des variations conjointes et la méthode pour tracer la courbe à partir du tableau)

2) Décomposition en arcs simples:

"Le tableau des variations conjointes"

Exemple:

On reprend notre exemple du début: la courbe paramétrée Γ définie par $M(t)\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=t^3-t \end{cases}$ $D=[-2;2]$. Nous avons vu que l'intervalle d'étude est $[0,2]$.

On calcule $x'(t)$ et $y'(t)$ puis on édudie leur signe. On met dans un même tableau les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

$V_1(t)\begin{cases} x'(t)=2t \\ y'(t)=3t^2-1 \end{cases}$:

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		2
signe de x'	0	$+$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+$	4
variations de x	**0**	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	**4**
variations de y	**0**	$\searrow$	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	**6**
signe de y'	-1	-	0	$+$	

Ce tableau nous permet de distinguer trois points particuliers:

$$M(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\approx 0,33 \\ \frac{-2}{3\sqrt{3}}\approx -0,38 \end{pmatrix};\ M(2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

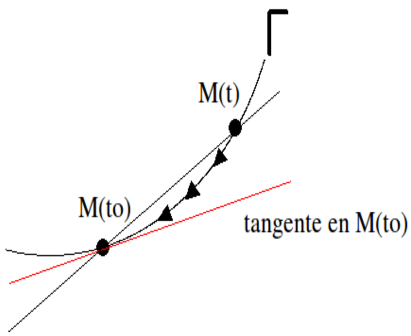
Entre $M(0)$et $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ la courbe paramétrée décrit un arc simple. Il en est de même entre $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $M(2)$.

Pour obtenir un tracé plus précis de la courbe il faut pouvoir tracer les tangentes en ces points particuliers. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

3) Etude des tangentes:

définition 4:

"tangente en un point d'un arc paramétré"
Soit un arc paramétré $\mathit{\Gamma}$ défini par $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right.$ $t \in D$ et $t_0 \in D$ une valeur fixée du paramètre. On suppose que Γ est localement simple en t_0 .
On dit que l'arc admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)\,M(t))$ admet une position limite quand t tend vers t_0 . La droite limite est la tangente.



Théorème:
On suppose que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont continues au voisinage de t_0 et plusieurs fois dérivables (on admet qu'on peut les dériver jusqu'à obtenir un vecteur V_k non nul).
On note $V_1\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}, V_2\begin{pmatrix} x''(t_0) \\ y''(t_0) \end{pmatrix}, \ldots V_n\begin{pmatrix} x^{(n)}(t_0) \\ y^{(n)}(t_0) \end{pmatrix}, \ldots$ la famille de vecteurs dont les coordonnées sont les images de t_0 par les dérivées successives de $x(t)$ et $y(t)$.
Notons V_k le premier vecteur non nul de cette famille.
Alors la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur V_k est la tangente à Γ en $M(t_0)$.

Si $V_k = V_1$ le point $M(t_0)$ est dit **régulier**.
Si $V_k \neq V_1$ le point $M(t_0)$ est dit **singulier**.

"démonstration" dans le cas particulier où $x'(t_0) \neq 0$:

On suppose donc que les fonctions x et y sont continues et dérivables en t_0 et $x'(t_0) \neq 0$.
La droite $(M(t_0)\,M(t))$ passe par $M(t_0)$ et a pour pente $\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$.
Calculons la limite de cette pente lorsque $t \to t_0$:
$\underset{t\to t_0}{lim}\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} = \underset{t\to t_0}{lim}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \times \frac{t-t_0}{x(t)-x(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

La dernière égalité est une conséquence de la définition de la dérivée en t_0 .
Donc, lorque $t \to t_0$ la droite $(M(t_0)\,M(t))$ tend vers une droite qui passe par $M(t_0)$et a pour pente $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$. Cette tangente a donc pour vecteur directeur le vecteur V_1 .

Exercice:

Soit l'arc paramétré défini par $M(t) \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$.
Quelle est l'équation de la tangente en $M(1)$?
Quelle est l'équation de la tangente en $M(0)$?
Donnez une représentation du support de cet arc paramétré.

Fin de l'étude de l'exemple 1:

La tangente au support de Γ au point $M(0)$ est la droite passant par $M(0)$ et de vecteur directeur $M'(0) = V_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: c'est donc une tangente verticale.
De même la tangente en $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est une tangente horizontale.
La tangente en $M(2)$ est verticale.

4) Etude des branches infinies (asymptotes):

définition 5:

Soit un arc paramétré Γ défini par $M(t) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in D$. Soit t_0 un réel ou $+\infty$ ou$-\infty$.
Il y a une branche infinie en t_0 dès que l'une des fonctions $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers t_0 .

On distingue plusieurs cas:

1) $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = l$ (avec l un réel fini):
Alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale.

2) $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = l$ (avec l un réel fini):
Alors la droite d'équation $x = l$ est une asymptote verticale

3) $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$. On a plusieurs sous-cas:

a) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$:
$y = 0$ est direction asymptotique.

b) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$:
$x = 0$ est direction asymptotique.

c) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ (avec a un réel non nul). Encore 2 sous-cas:

c-1) $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$ (b réel):
alors la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique.

c-2) $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$:
alors la droite $y = ax$ est une direction asymptotique.

TD2 courbes paramétrées :

Exercice 1 :

Nous allons étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$ pour $t \in [-2; 2]$.

1. Calculez les coordonnées des points $M(-2), M(-1), M(0), M(1)$ et $M(2)$ et placez ces points sur le plan.
2. Calculez en fonction de t les coordonnées de $M(-t)$ et montrez que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à un axe que vous préciserez. Déduisez-en un intervalle d'étude minimal.
3. Dressez le tableau des variations conjointes sur l'intervalle d'étude défini à la question précédente puis tracez la totalité de la courbe paramétrée. Vous préciserez les tangentes aux points particuliers et les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des y.

Exercice 2 :

Nous allons étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases}$ pour $t \in [-2; 2]$.

1. Calculez les coordonnées des points $M(-2), M(-1), M(0), M(1)$ et $M(2)$ et placez ces points sur le plan. Cette courbe admet-elle un point multiple ?
2. Calculez en fonction de t les coordonnées de $M(-t)$ et montrez que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à un axe que vous préciserez. Déduisez-en un intervalle d'étude minimal.
3. Dressez le tableau des variations conjointes sur l'intervalle d'étude défini à la question précédente puis tracez la totalité de la courbe paramétrée. Vous préciserez les tangentes aux points particuliers.

Exercice 3 :

Nous allons étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = cos(t) \\ y(t) = 2 \times sin(t) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculez les coordonnées des points $M(0), M\left(\frac{\pi}{4}\right), M\left(\frac{\pi}{2}\right), M\left(3\frac{\pi}{4}\right)$ et placez ces points sur le plan.
2. Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t + 2\pi) = M(t)$.
3. Montrez que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des x.
4. Déduisez, à partir des questions 2 et 3, un intervalle d'étude minimal.
5. Dressez le tableau des variations conjointes et représentez la courbe paramétrée . Vous préciserez les tangentes aux points particuliers.

Exercice 4 :

L'objectif est d'étudier la courbe C_1 dont une représentation paramétrique est donnée par $\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
On notera $M(t)$ un point du plan (le plan est muni d'un repère orthonormé) de coordonnées $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Dans le plan, placez les points $M(-1), M\left(-\frac{1}{2}\right), M(0)$ et $M(1)$.
2. La courbe C_1 admet-elle un point d'intersection avec l'axe des abscisses ?
3. Etudiez les asymptotes éventuelles de la courbe C_1 .
4. Faîtes le tableau de variation "conjoint" des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ puis représentez C_1 . Vous préciserez les tangentes aux points de la question 1.

5. Démontrez par le calcul que C_1 n'admet pas de points doubles.

Exercice 5 :

Soit la courbe C_2 dont une représentation paramétrique est donnée par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t+\frac{1}{t} \\ y(t)=2t+1 \end{array}\right.$ pour $t\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
.

1. Calculez les limites des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ aux bornes de l'ensemble de définition et déduisez-en les éventuelles asymptotes verticales et horizontales de C_2 .
2. Montrez que C_2 admet une asymptote oblique et étudiez la position de C_2 par rapport à cette asymptote.
3. Quels sont les coordonnées des éventuels points d'intersection de C_2 avec l'axe des abscisses ? avec l'axe des ordonnées ?
4. Dressez le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ puis tracez la courbe C_2 .

Exercice 6 :

Soit C la courbe dont une représentation paramétrique est donnée par $\left\{\begin{array}{c} x(t)=t^3-3t^2+3t+1 \\ y(t)=t^2-2t \end{array}\right.$ $t\in\mathbb{R}$

1. Déterminez et tracez la tangente au point $M(0)$.
2. Déterminez et tracez la tangente au point $M(1)$.
3. Etudiez et tracez la courbe C .

Exercice 7 :

On considère la courbe C dont une représentation paramétrique est donnée par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=cos(t) \\ y(t)=cos(2t) \end{array}\right.$ pour $t\in[0,\pi]$.

1. Déterminez et tracez la tangente au point $M(0)$.
2. Déterminez et tracez la tangente au point $M(\pi)$.
3. Etudiez et tracez la courbe C .

Exercice 8 :

On considère la courbe C_3 dont une représentation paramétrique est donnée par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=sin(t) \\ y(t)=sin(2t) \end{array}\right.$ pour $t\in\mathbb{R}$.

1. Pourquoi peut-on restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi,\pi]$?
2. Démontrez que pour tout $t\in[0,\pi]$ on a $x(-t)=-x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$. Comment obtient-on la représentation de C_3 à partir de la représentation de la courbe C_3' dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l} x(t)=sin(t) \\ y(t)=sin(2t) \end{array}\right.$ pour $t\in[0,\pi]$?
3. Dressez le tableau de variation pour $t\in[0,\pi]$ puis donnez une représentation de C_3.

Exercice 9 :

On considère la courbe C_4 dont une représentation paramétrique est donnée par $\left\{\begin{array}{c} x(t)=cos(3t) \\ y(t)=cos(t)+sin(t) \end{array}\right.$ pour $t\in\mathbb{R}$.

1. Pourquoi peut-on restreindre l'étude à l'intervalle $[0,2\pi]$?

2. Démontrez que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = -y(t)$. Déduisez-en que l'on peut encore restreindre l'intervalle d'étude.

3. Dressez le tableau de variation et tracez C_4 .

Exercice 10 :

On considère la courbe C_6 dont une représentation paramétrique est donnée par $\begin{cases} x(t) = cos^3(t) \\ y(t) = sin^3(t) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifiez, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les égalités suivantes :

   (a) $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t) = y(t+2\pi)$

   (b) $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$

   (c) $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$

   (d) $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$

2. Comment passe-t-on de la représentation de la courbe C'_6 obtenue pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ à la représentation de C_6 ?

3. Dressez le tableau de variation pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et représentez C_6 .

Les courbes de Bézier

Une courbe de Bézier est une courbe paramétrée particulière.

I) Définition :

Soient $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $n+1$ points du plan. On notera $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ les coordonnées du point A_i dans le repère $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La courbe de Bézier d'ordre n **notée** $B(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) = B_{0,n}(t) A_0 + B_{1,n}(t) A_1 + \ldots + B_{n,n}(t) A_n$$

pour $t \in [0,1]$.

Avec :

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

(ces polynomes sont appelés **les polynomes de Bernstein).**

On obtient donc les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = B_{0,n}(t) x_0 + B_{1,n}(t) x_1 + \ldots + B_{n,n}(t) x_n \\ y(t) = B_{0,n}(t) y_0 + B_{1,n}(t) y_1 + \ldots + B_{n,n}(t) y_n \end{cases} \quad t \in [0,1] \ .$$

Exemple :

Soient $A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 points du plan.
Déterminons les équations paramétriques de la courbe de Bézier $B(A_0, A_1, A_3)$:

Pour cela calculons les formes polynomiales développées des polynomes de Bernstein $B_{0,2}, B_{1,2}, B_{2,2}$:

$$B_{0,2}(t) = C_2^0 t^0 (1-t)^2 = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$$

$$B_{1,2}(t) = C_2^1 t (1-t) = 2t(1-t) = 2t - 2t^2$$

$$B_{2,2}(t) = C_2^2 t^2 (1-t)^0 = t^2$$

donc

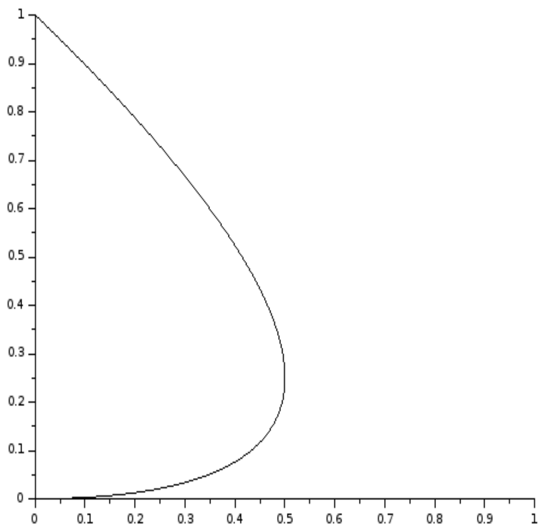
$$M(t) \begin{cases} x(t) = 0 \times B_{0,2}(t) + 1 \times B_{1,2}(t) + 0 \times B_{2,2}(t) = 2t - 2t^2 \\ y(t) = 0 \times B_{0,2}(t) + 0 \times B_{1,2}(t) + 1 \times B_{2,2}(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

Etude de $B(A_0, A_1, A_3)$:

$$M'(t) \begin{cases} x'(t) = 2 - 4t \\ y'(t) = 2t \end{cases}$$

On en déduit le tableau des variations conjointes ci-dessous :

t	0		$\frac{1}{2}$		1
x'	2	$+$	0	-	-2
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
y	0		$\frac{1}{4}$		1
y'	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2



II) **Propriétés des polynomes de Bernstein et des courbes de Béziers:**

Rappels sur les coefficients C_n^i du triangle de Pascal:

Pour tout entier n et pour tout entier $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le coefficient C_n^i représente le nombre de combinaisons de cardinal i dans un ensemble de cardinal n .
(une combinaison de cardinal i d'un ensemble E est un sous-ensemble de i éléments distincts non ordonnés).

On en déduit les égalités suivantes:
$C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$.
On a les formules plus générales suivantes:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}$$

On peut démontrer le résultat suivant

$$\forall n \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}\,,\ C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$$

Démonstration:
Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ un ensemble de cardinal n . Les combinaisons de cardinal i de l'ensemble E (qui sont au nombre de C_n^i) peuvent se décomposer en deux familles:

- celles qui ne contiennent pas l'élément n et qui peuvent donc être considérées comme des combinaisons de cardinal i de l'ensemble $E' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$: il y en a C_{n-1}^i .
- celles qui contiennent l'élément n et $i-1$ éléments de l'ensemble $E' = \{1, 2, \ldots, n-1\}$: il y en a donc C_{n-1}^{i-1} .

En faisant la somme de ces deux familles on obtient le résultat voulu.

Cette dernière égalité permet de construire pas à pas le triangle de Pascal:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Quelques propriétés des polynomes de Bernstein:

1. $\sum\limits_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$ (partition de l'unité).
2. positivité: $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}\,, \forall t \in [0,1]\,, B_{i,n}(t) \geq 0$.
3. symétrie:$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}\,, \forall t \in [0,1]\,, B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$.
4. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,, B_{i,n}(0) = 0$ et $B_{0,n}(0) = 1$.
5. $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\,, B(1) = 0$ et $B_{n,n}(1) = 1$.
6. La fonction $B_{i,n}(t)$ admet un maximum en $t = \frac{i}{n}$.
7. Récurrence: $B_{i,n}(t) = (1-t)\,B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$.
8. Lien avec la loi binomiale: $B_{i,n}(t)$ est la probabilité $P(X = i)$ avec X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, t)$.

Démonstrations:

Certaines de ces démonstrations seront faites en TD.

Nous allons démontrer le point 1 et le point 7:

démonstration de la propriété 1:

$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (t+(1-t))^n$

La dernière égalité vient de la formule du binôme de Newton avec $a = t$ et $b = (1-t)$

(La formule du binôme de Newton permet de développer les expressions de la forme $(a+b)^n$:$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$).

Donc finalement $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$.

Remarque:

Cette démonstration pouvait aussi se faire en utilisant l'interprétation probabiliste du point 8:
$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i) = P(X(\Omega)) = 1$ (avec $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ l'image de l'univers Ω par la variable aléatoire X).

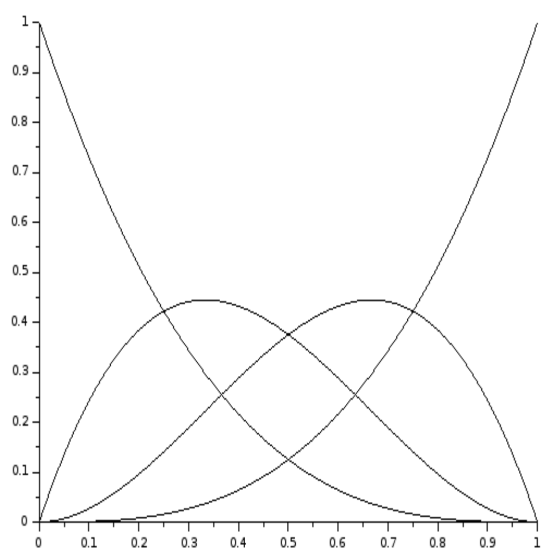
démonstration de la propriété 7:

On part du second membre pour arriver par égalités successives au premier membre:

$(1-t) B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) = (1-t) C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-1-i} + tC_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-1-(i-1)}$
$= C_{n-1}^i t^i (1-t)^{n-i} + C_{n-1}^{i-1} t^i (1-t)^{n-i} = \left(C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}\right) t^i (1-t)^{n-i}$
or $C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$
donc finalement $\ldots = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(t)$.

(ici encore l'interprétation probabiliste donne une démonstration élégante)

La figure ci-dessous représente les 4 polynomes de Bernstein d'ordre 3:



Propriété des courbes de Bézier:
Notons $C = B(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ une courbe de Bézier d'ordre n . Alors C possède les propriétés suivantes:

1. $M(0) = A_0$ et $M(1) = A_n$. Ces deux points sont appelés points d'ancrage de la courbe C . Les autres points sont appelés les “poigneées” (en général la courbe C ne passe pas par ces points.
2. La droite (A_0A_1) est tangente à C au point A_0 .
3. La droite $(A_{n-1}A_n)$ est tangente à C au point A_n .
4. Le support de C est entièrement contenu dans l'enveloppe convexe des A_i .

(ces propriétés seront démontrées en TD).

III) Algorithme de Casteljau pour le tracé des courbes de Bézier d'ordre 3:

Définition:

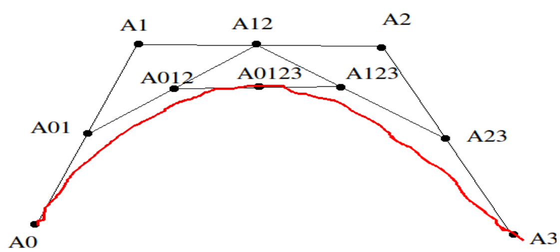
Soient β et γ deux courbes paramétrées pour $t \in [0,1]$ (on note $\beta(t)$ (resp.$\gamma(t)$) les coordonnées du point correspondant de la courbe paramétrée).
On appelle courbe obtenue par concaténation (ou mise "bout à bout") des courbes β et γ , la courbe α (notée aussi $\beta \vee \gamma$) définie pour $t \in [0,1]$ par:

- pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:$\alpha(t) = \beta(2t)$
- pour $t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$: $\alpha(t) = \gamma(2t-1)$

Le support de $\alpha = \beta \vee \gamma$ est l'union des supports de β et γ . Lorsque t parcourt l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ le point $M(t)$ de la courbe α décrit entièrement le support de β tandis que pour $t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ le point $M(t)$ décrit le support de γ

Algorithme de Casteljau:

C'est un algorithme récursif permettant d'obtenir des approximations de plus en plus précises du support des courbes de Bézier en calculant uniquement des milieux de segments et en traçant des lignes brisées.



La ligne brisée $A_0A_{01}A_{012}A_{0123}A_{123}A_{23}A_3$ est une meilleure approximation de $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$ que la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3$.

Le théorème ci-dessous précise ce résultat et donne le principe de la construction:

Théorème:
$B(A_0, A_1, A_2, A_3) = B(A_0, A_{01}, A_{012}, A_{0123}) \vee B(A_{0123}, A_{123}, A_{23}, A_3)$
avec les notations suivantes:

- A_{ij} le milieu du segment $[A_i, A_j]$ (pour tous les i, j tels que $0 \leq i < j \leq 3$)
- A_{ijk} le milieu du segment $[A_{ij}, A_{jk}]$ (pour tous les i, j, k tels que $0 \leq i < j < k \leq 3$)
- A_{0123} le milieu du segment $[A_{012}, A_{123}]$

IV) Courbes de Bézier et transformations affines du plan:

Une application affine du plan est une transformation géométrique qui conserve le parallèlisme. Par exemple les translations, les homothéties, les symétries centrales et axiales, les rotations,... sont des applications affines du plan.

Si le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ alors l'image d'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par une application affine peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

(ici $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ représente la matrice colonne des coordonnées de l'image de M).

$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnéers de $f(0)$ (image de l'origine du repère).

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des coordonnées de l'image du vecteur $\overrightarrow{i}$ par l'application linéaire associée.

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$est la matrice colonne des coordonnées de l'image du vecteur $\overrightarrow{j}$ par l'application linéaire assciée.

Exemple:

Soit la rotation r de centre $I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelle est la représentation matricielle de cette transformation affine ?

$O' = r(0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'image du vecteur $\overrightarrow{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'image de $\overrightarrow{OI}$ est $\overrightarrow{O'I} = \overrightarrow{j}$).

De même l'image du vecteur $\overrightarrow{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient donc l'écriture suivante: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Avec les coordonnées homogènes on obtient l'écriture suivante:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Théorème:

Soient $n+1$ points du plan $A_0, A_1, \ldots, A_n$ et une application affine f .

L'image de la courbe de Bézier $B(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ par l'application affine f est la courbe de Bézier $B(f(A_0), f(A_1), \ldots, f(A_n))$.

Les courbes de Bézier (TD3)

Les courbes de Bézier sont des courbes paramétrées particulières très utilisées en infographie. Elles ont été inventées dans les années 60 par un ingénieur de chez Renault nommé **Pierre Bézier**. L'objectif alors était de faire tracer par l'ordinateur des courbes pour tracer des profils de carrosserie.

L'écriture paramétrique de ces courbes nécessite l'utilisation d'une famille de polynômes appelée "les polynômes de Bernstein".

PREMIERE PARTIE : **Les polynomes de Bernstein :**

Les polynômes de Bernstein d'ordre n (avec $n \in \mathbb{N}$) sont les polynômes $B_{i,n}(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

1. Calculez les termes suivants : $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$. En théorie du dénombrement, que représente le coefficient $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$?
2. En théorie des probabilités que représente l'expression $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{n-i}$ pour $t \in [0, 1]$?
3. Donnez tous les polynômes de Bernstein pour n=2. Vous présenterez les résultats sous forme développée.
4. Même question pour les polynômes de Bernstein pour n=3.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$et $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Dressez le tableau de variation de $B_{i,n}(t)$ pour $t \in [0, 1]$,puis démontrez que le polynôme $B_{i,n}(t)$ admet un maximum pour $t = \frac{i}{n}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donnez, en fonction de i , la valeur de $B_{i,n}(0)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donnez en fonction de i , la valeur de $B_{i,n}(1)$.
8. Donnez, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, la somme $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)$.

DEUXIEME PARTIE : **Définition des courbes de Bézier et exemples :**

On considère n+1 points du plan (le plus souvent n=3) $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

La courbe de Bézier notée $B(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est la courbe paramétrée $M(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ définie par la formule :

$$M(t) = B_{0,n}(t) A_0 + B_{1,n}(t) A_1 + \ldots + B_{n,n}(t) A_n$$

pour $t \in [0, 1]$.

Si A_i admet pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ dans un repère du plan alors l'écriture précédente signifie que

$$\begin{cases} x(t) = B_{0,n}(t) x_0 + B_{1,n}(t) x_1 + \ldots + B_{n,n}(t) x_n \\ y(t) = B_{0,n}(t) y_0 + B_{1,n}(t) y_1 + \ldots + B_{n,n}(t) y_n \end{cases}$$

Les points A_0 et A_n sont les points d'ancrage de la courbe de Bézier $B(A_0, A_1, \ldots, A_n)$.

Les points $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont **les points de contrôle** (ou poignées) de la courbe de Bézier. Le plus souvent la courbe ne passe pas par ces points

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans cette partie on considère $n = 2$ et les trois points $A_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (a) On considère la courbe de Bézier $B(A_0, A_1, A_2)$. Écrivez $M(t)$ sous la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Quel est le point $M(0)$?$M(1)$?

    (b) Démontrez que la courbe $B(A_0, A_1, A_2)$ ne passe pas par A_1

    (c) Etudiez et tracez $B(A_0, A_1, A_2)$. Vous préciserez les tangentes aux points $M(0)$ et $M(1)$.

    (d) Etudiez et tracez la courbe $B(A_1, A_0, A_2)$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans cette partie on considère $n = 3$ et les quatres points $A_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (a) On considère la courbe de Bézier $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$. Écrivez $M(t)$ sous la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Quel est le point $M(0)$?$M(1)$?

    (b) Etudiez et tracez $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$. Vous préciserez les tangentes aux points $M(0)$ et $M(1)$.

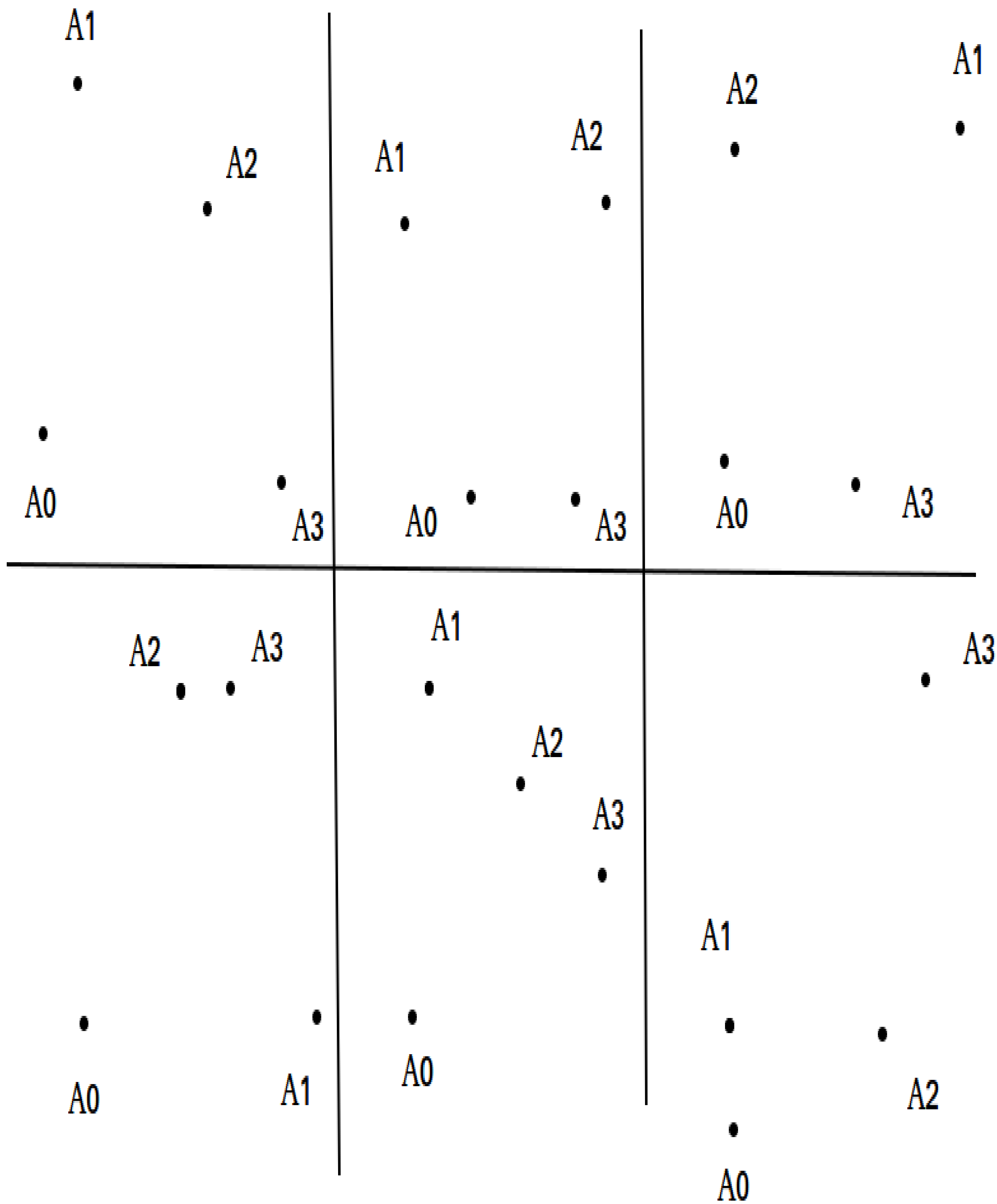
    (c) Etudiez et tracez les courbes $B(A_0, A_1, A_3, A_2)$ et $B(A_0, A_2, A_1, A_3)$.

Troisième partie : Allure des courbes de Bézier

I) Dans cette partie nous allons vous décrire un procédé graphique simple permettant d'obtenir l'allure d'une courbe de Bézier définie par 4 points de contrôle $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$. Cette méthode est basée sur les propriétés suivantes que nous démontrerons dans la question II :

- Le point A_0 est une extrémité de la courbe de Bézier et en ce point la tangente est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{A_0A_1}$.
- Le point A_3 est une extrémité de la courbe de Bézier et en ce point la tangente est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{A_3A_2}$.
- Si on note A_{ij}le milieu du segment $[A_i, A_j]$ pour $0 \leq i < j \leq 3$, puis A_{ijk}le milieu du segment $[A_{ij}, A_{jk}]$ pour $0 \leq i < j < k \leq 3$ et enfin A_{0123} le milieu du segment $[A_{012}, A_{123}]$, alors la courbe de Bézier passe par le point A_{0123} et sa tangente en ce point est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{A_{012}A_{123}}$.

Utilisez les propriétés précédentes pour donner l'allure des courbes $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$ suivantes. Vous placerez les points A_{012}, A_{123} et A_{0123} sur la figure



II) Soit la courbe de Bézier $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$. On notera $M(t) = B_{0,3}(t)\, A_0 + B_{1,3}(t)\, A_1 + B_{2,3}(t)\, A_2 + B_{3,3}(t)\, A_3$. On notera $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ les coordonnées du point A_i .

1. Ecrivez explicitement $M(t)$ en fonction de t et des points A_0, A_1, A_2 et A_3 .
2. Déterminez les points $M(0)$ et $M(1)$.
3. Démontrez que la courbe de bézier est tangente en A_0 à la droite (A_0A_1) (on pourra montrer par exemple que la pente de la tangente à $B(A_0, A_1, A_2, A_3)$ en A_0 est la même que la pente de la droite (A_0A_1)).

Partiel d'analyse A2 année 2019

durée: 1h30

Exercice 1:

On considère la courbe paramétrée C définie par

$$M\left(t\right)\begin{cases} x\left(t\right)=t^{2}-2t+1 \\ y\left(t\right)=t^{2}-t \end{cases} \qquad t\in\left[-\infty,+\infty\right[$$

1. Dressez le tableau des variations conjointes de cette courbe paramétrée.
2. Etudiez les asymptotes (ou les directions asymptotiques) éventuelles.
3. Déterminez les points d'intersection du support de C avec l'axe des abscisses (Ox).
4. Déterminez les points d'intersection du support de C avec l'axe des ordonnées (Oy).
5. Placez sur un graphique les points $M\left(0\right), M\left(1\right)$ et $M\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour chacun de ces points vous donnerez un vecteur directeur de la tangente et vous tracerez sur le graphique les tangentes correspondantes (echelle: 4cm sur chaque axe).
6. Tracez sur le même graphique le support de C .

Exercice 2:

On considère la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x\left(t\right)=cos\left(t\right) \\ y\left(t\right)=sin(2t) \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$.

On note C le suport de cette courbe paramétrée.

1. Pourquoi peut-on réduire l'intervalle d'étude de cette courbe paramétrée à l'intervalle $\left[-\pi,\pi\right]$?
2. Démontrez que C est symétrique par rapport à la droite d'équation $y=0$ et que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0,\pi\right]$
3. Dressez le tableau des variations conjointes pour $t\in\left[0;\pi\right]$ puis tracez la courbe C (echelle: 4cm pour 1 unité sur l'axe des x et 4cm pour 1 unité sur l'axe des y). Vous préciserez les vecteurs directeurs des tangentes aux points $M\left(0\right), M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$,$M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $M\left(\pi\right)$.

Exercice 3:

Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ on considère les points
$0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

1. On considère dans cette question la courbe de Bézier $\mathbf{B}\left(C,E,D\right)$.

(a) Donnez l'expression paramétrique de cette courbe (i.e. une écriture de la forme $M(t)\left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right. \quad t \in [0,1]$).

(b) Dressez le tableau des variations conjointes de cette courbe et tracez son support sur le quadrillage de la page 2.

2. Construisez sur le quadrillage de la page 2 la courbe de Bézier $\mathbf{B}(0, \mathrm{B}, \mathrm{A}, \mathrm{C})$. Vous n'utiliserez pas pour construire cette courbe l'expression paramétrique. Placez sur cette courbe le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ ainsi que la tangente en ce point en expliquant votre construction.

3. Construisez sur le quadrillage de la page 2 la courbe de Bézier $\mathbf{B}(B, E, F, G)$.

4. On considère la symétrie centrale de centre I .

   (a) Donnez la matrice de cette transformation affine en coordonnées homogènes.

   (b) Calculez les images des points B, E, F et G par cette application.

   (c) Construisez sur le quadrillage de la page 2 l'image de la courbe $\mathbf{B}(B, E, F, G)$ par cette symétrie centrale.

5. On considère la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   (a) Donnez la matrice de cette transformation affine en coordonnées homogènes.

   (b) Calculez les images des points B, E, F et G par cette transformation.

   (c) Construisez sur le quadrillage de la page 2 l'image de la courbe $\mathbf{B}(B, E, F, G)$ par cette rotation.

LES NOMBRES COMPLEXES:

Un nombre complexe z est un nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

Le réel a est **la partie réelle** de z, notée $Re(z)$.
Le réel b est **la partie imaginaire** de z, notée $Im(z)$.

Le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.
Le module de z , notée $|z|$, est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Propriétés:

1. $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

L'EXPONENTIELLE COMPLEXE:

par définition, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ peut s'écrire sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec :

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ un réel tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} \end{cases}$

Ce nombre θ est défini à 2π près et s'appelle **l'argument** de z , noté $arg(z)$.

Si on impose à θ d'être dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ (on dira dans ce cas que θ est l'argument principal), on peut calculer θ de la manière suivante:

Si $b \geq 0$: $\theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

Si $b < 0$:$\theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

Propriétés:

1. $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
   (a) $e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}} \left(= \overline{e^{ix}}\right)$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
   (b) $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
   (c) $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
   (d) $Re\left(e^{i\theta}\right) = \cos\theta$; $Im\left(e^{i\theta}\right) = \sin\theta$

EQUATIONS DU SECOND DEGRE A COEFFICIENTS REELS ET D'INCONNUE COMPLEXE:

Soit l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec a, b et c trois réels ($a \neq 0$) et z une inconnue complexe.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (le discriminant de l'équation).

- 1er cas: $\Delta > 0$
  L'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
  $$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
  $$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- 2ème cas: $\Delta = 0$
  L'équation admet une racine double :
  $$r = \frac{-b}{2a}$$
- 3ème cas: $\Delta < 0$
  L'équation admet 2 racines complexes conjuguées:
  $$z_1 = \frac{-b - i\delta}{2a}$$
  $$\overline{z_1} = \frac{-b + i\delta}{2a}$$
  en posant $\delta = \sqrt{-\Delta}$

LES FONCTIONS REELLES: Généralités

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

(a) **Continuité:**

i. f est continue en $x_0 \in I$ ssi $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

ii. f est continue sur I ssi elle est continue en tout point de I .

iii. On admettra que les polynômes, les fractions rationnelles (i.e. les quotients de polynômes) ainsi que les fonctions logarithme, exponentielle, cosinus, sinus , racine carrée sont toutes continues sur leur ensemble de définition.

iv. La somme, le produit, le quotient et la composée de telles fonctions sont aussi continues sur leur ensemble de définition.

(b) **Dérivabilité:**

i. f est dérivable en $x_0 \in I$ ssi $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$

ii. f est dérivable sur I ssi elle est dérivable en tout point de I .

iii. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

iv. On admettra que les polynômes, les fractions rationnelles (i.e. les quotients de polynômes) ainsi que les fonctions logarithme, exponentielle, cosinus, sinus sont toutes dérivables sur leur ensemble de définition. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$.

v. La somme, le produit, le quotient et la composée de telles fonctions sont aussi dérivables sur leur ensemble de définition (à l'exception de la fonction racine qui n'est pas dérivable en 0).

(c) **Variations:**

i. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante sur I .
ii. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \geq 0$ alors la fonction f est croissante sur I .
iii. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I .

(d) **Primitives et intégrale**:

i. Toute fonction f continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ admet une primitive F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Dans ce cas toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) + K$ où K est une constante réelle.

ii. Toute fonction f continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est intégrable sur cet intervalle. Dans ce cas, une primitive F de f sur I peut s'écrire $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + K$ où $a \in I$ et K est une constante réelle. Inversement on a $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f sur I .

iii. **Propriétés de l'intégrale**:

A. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;
B. **Linérarité:** $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ (avec α et β deux constantes réelles).
C. **Relation de Chasles:** $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
D. **Positivité:** Si $\forall x \in [a, b]\,, f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$;
E. **Ordre:** Si $\forall x \in [a, b]\,, f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

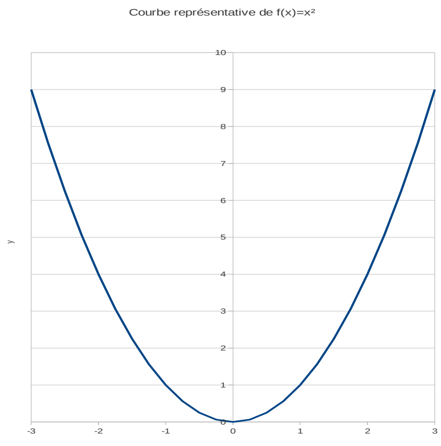
iv. **Intégration par partie:**

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$$

(e) **Les fonctions usuelles:**

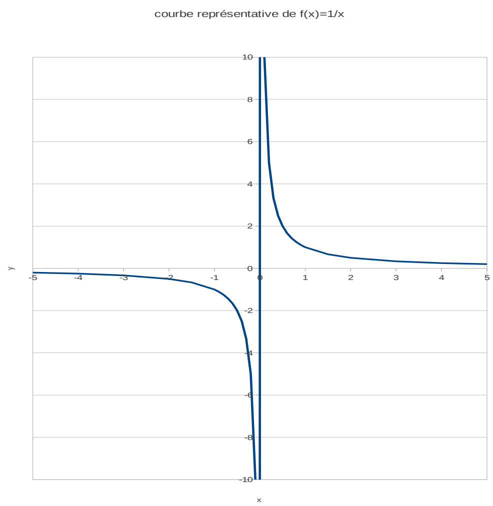
i. les fonctions affines: $f(x) = ax + b$
Les représentations graphiques des fonctions affines sont des droites d'ordonnée à l'origine égale à b et de pente a . Pour $a > 0$ la fonction f est strictement croissante et pour $a < 0$ elle est strictement décroissante.

ii. $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$:



La courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ est une parabole. Plus généralement, la courbe représentative d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole (orientée vers le "haut" si $a > 0$, vers le "bas" si $a < 0$)

iii. $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$:



La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est une hyperbole.

iv. $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ définies sur $\mathbb{R}$:

La courbe représentative de la fonction $f(x) = \cos(x)$ est une sinusoïde tout comme celle de la fonction $g(x) = \sin(x)$ (cf ci-dessous). Vous constaterez que l'on passe de la courbe du cosinus vers celle du sinus par une translation de vecteur $\frac{\Pi}{2}\overrightarrow{i}$. On retrouve cette propriété géométrique dans la formule $\cos\left(x - \frac{\Pi}{2}\right) = \sin(x)$ valable pour tout x réel:

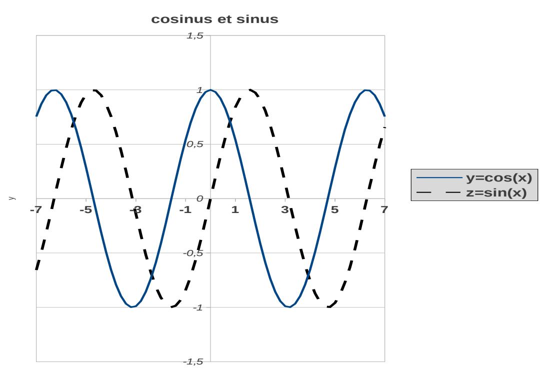
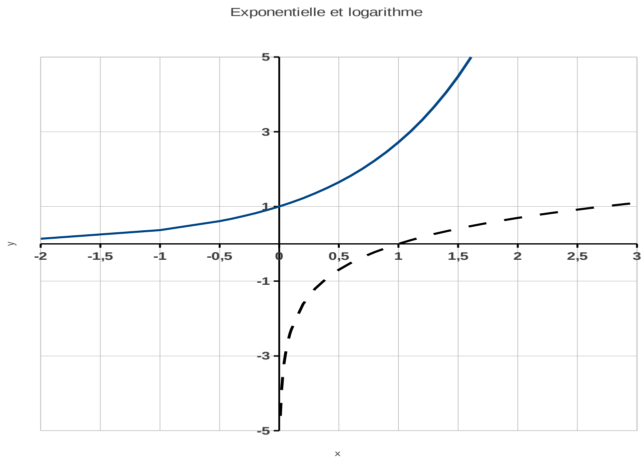


Tableau des valeurs usuelles:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

v. $f(x) = \exp(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$:



Quelques propriétés: $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$; $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ pour a et b strictement positifs; $e^0 = 1$; $e^a \times e^b = e^{a+b}$;$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;$\ln(e^a) = a$; Si $x > 0$ alors $e^{\ln x} = x$.

ANALYSE: Formules pratiques

(a) **Opérations sur les dérivées:**

u, v et φ sont des fonctions, k une constante:

$(u+v)' = u' + v'$	$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$[\varphi(u)]' = \varphi'(u) \times u'$
$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$(e^u)' = u'e^u$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	

(b) **Dérivées des fonctions usuelles:**

$f(x)$	$f'(x)$	intervalle de validité
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n\,(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^n\,(n \in \mathbb{Z}, n \leq -1)$	nx^{n-1}	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

(c) **Opérations et primitives:**
u est une fonction dérivable sur I .

i. Une primitive de $u^n u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur I: $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

ii. Une primitive de $u^n u'$ $(n \in \mathbb{Z}, n \leq -2)$ sur I: $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ (avec $u(x) \neq 0$ sur I)

iii. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I :

  A. $\ln u$ si $u(x) > 0$ sur I .

  B. $\ln(-u)$ si $u(x) < 0$ sur I

iv. Une primitive de $u'e^u$ sur I :e^u

(d) **Primitives des fonctions usuelles:**

$f(x)$	$F(x)$	intervalle de validité
k	kx	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^n,$n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

(e) **Limites usuelles**:

i. Comportement à l'infini:

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

ii. Comportement à l'origine:

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,(x) = -\infty$
si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$
si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$

iii. Croissances comparées à l'infini:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^\alpha} = 0$

Brouillon 1

Brouillon 2