Asymptotes et directions asymptotiques

(1) Asymptotes verticales

courbes "classiques" : $y = f(x)$

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm \infty$$

$x = a$ asymptote verticale

ex : $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

courbes paramétrées $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ $t \in D$

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm \infty$$

$x = a$ asymptote verticale

$(t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$

ex $\begin{cases} x(t) = t\, e^{-t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$ $D = \mathbb{R} - \{1\}$

2) Asymptotes horizontales

courbes "classiques" : $y = f(x)$, D_f

$\lim_{x \to +\infty \atop -\infty} f(x) = b$

$y = b$ asymptote horizontale

ex : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 3}$ $D_f = \mathbb{R}$

courbes paramétrées $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ $t \in D$

$\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm \infty$

$\lim_{t \to t_0} y(t) = b$

$t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$y = b$ asymptote horizontale

ex $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + t \\ y(t) = \frac{1}{t+1} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$

3) Asymptotes obliques et directions asymptotiques

Courbes classiques : $y = f(x)$ $\mathcal{C}_f$

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

Dans ce cas on étudie :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = A$$

1er cas :

$A = \pm\infty$ $x = 0$ direction asymptotique

2ème cas

$A = 0$

$y = 0$ direction asymptotique

3ème cas $A = a \in \mathbb{R}^*$

On étudie $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = B$

1) $B = \pm\infty$

$y = ax$ direction asymptotique

2) $B = b \in \mathbb{R}$

$y = ax + b$ asymptote oblique

Courbes paramétrées $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ $t \in D$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \quad t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$$

Dans ce cas on étudie

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = A$$

← IDEM

3ème cas : $A = a \in \mathbb{R}^*$

On étudie $\lim_{t \to t_0} y(t) - a\,x(t) = B$

← IDEM

ex :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asymptote oblique ?

ex :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + t \\[2mm] y(t) = \dfrac{2}{t} + 1 + t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}^*$$

Soit l'arc paramétré défini par $M(t)\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1]$.
Quelle est l'équation de la tangente en $M(1)$?
Quelle est l'équation de la tangente en $M(0)$?
Donnez une représentation du support de cet arc paramétré.

Fin de l'étude de l'exemple 1:

La tangente au support de Γ au point $M(0)$ est la droite passant par $M(0)$ et de vecteur directeur $M'(0) = V_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: c'est donc une tangente verticale.

De même la tangente en $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est une tangente horizontale.

La tangente en $M(2)$ est verticale.

4) Etude des branches infinies (asymptotes):

définition 5:

Soit un arc paramétré Γ défini par $M(t)\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in D$. Soit t_0 un réel ou $+\infty$ ou$-\infty$.
Il y a une branche infinie en t_0 dès que l'une des fonctions $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers t_0 .

On distingue plusieurs cas:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = l$ (avec l un réel fini):
Alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale.

2) $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = l$ (avec l un réel fini):
Alors la droite d'équation $x = l$ est une asymptote verticale

3) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$. On a plusieurs sous cas:

a) $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$:
$y = 0$ est direction asymptotique.

b) $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$:
$x = 0$ est direction asymptotique.

c) $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$ (avec a un réel non nul). Encore 2 sous cas:

c 1) $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$ (b réel):
alors la droite $y = ax + b$ est asymptote oblique.

c 2) $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$:
alors la droite $y = ax$ est une direction asymptotique.