Géométrie dans le plan

Espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

Applications linéaires

Géométrie affine

Applications affines

Modélisation mathématique

Année universitaire 2019–2020

IUT de Montpellier Département informatique

1 Introduction

Ce document contient des rappels et des éléments de cours utiles au projet. En aucune façon, il ne prétend être exhaustif sur le sujet de la géométrie dans le plan. On trouvera sans difficulté de nombreux cours plus complets, mais aussi plus volumineux et dont l'assimilation nécessite plus de temps et de travail. Le matériel minimal a donc été rassemblé dans ce document de référence. L'évaluation individuelle finale s'appuiera essentiellement sur les notions et méthodes qu'il contient.

La géométrie élémentaire euclidienne («avec la règle et le compas»), en tant qu'étude des formes des objets du plan, ne repose sur aucune structure algébrique : les notions de point, de droite, de segment, de cercle, de parallélisme, de triangle etc ..., existent indépendamment des repères et coordonnées. Cependant, l'utilisation de techniques d'algèbre linéaire (vecteurs, matrices, bases, applications linéaires) est nécessaire pour effectuer des calculs sur des ordinateurs. Nous allons donc, dans les chapitres suivants, rappeler et étendre les connaissances d'algèbre linéaire qui peuvent servir en géométrie affine, en vue de mettre en œuvre des transformations d'images numériques au moyen de l'outil informatique. Il est vivement conseillé de revoir le cours d'algèbre linéaire M1202 du premier semestre, dans lequel ont été introduites les notions d'espace vectoriel, de combinaison linéaire, de sous–espace vectoriel, de base et de calcul matriciel.

2 Espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

Dans un premier temps, on ne considère pas $\mathbb{R}^2$ comme une représentation du plan géométrique, mais on rappelle, en les particularisant au cas de $\mathbb{R}^2$, des définitions et résultats déjà vus dans le module d'algèbre linéaire.

2.1 Structure d'espace vectoriel sur $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

L'espace vectoriel $(\overrightarrow{\mathbb{R}^2}, +, \cdot)$ est défini comme l'ensemble des couples de réels muni des 2 opérations suivantes :

1. soient $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On définit *l'addition* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme l'élément de $\mathbb{R}^2$ noté $\vec{u} + \vec{v}$ tel que
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \,.$$
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. On définit *la multiplication de $\vec{u}$ par le réel λ* comme l'élément de $\mathbb{R}^2$ noté $\lambda \cdot \vec{u}$ tel que
$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda\, u_1, \lambda\, u_2) \,.$$

On appellera *vecteur* tout élément de l'espace vectoriel $(\overrightarrow{\mathbb{R}^2}, +, \cdot)$ que l'on notera désormais $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. Le *vecteur nul*, noté $\vec{0}$ est le vecteur $(0, 0) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. Enfin, pour tout $\vec{u} = (u_1, u_2)$, on notera $-\vec{u} = -1 \cdot \vec{u}$.

Ces deux opérations sont respectivement l'addition composante par composante et la multiplication par un même réel de toutes les composantes. On rappelle que les 8 propriétés suivantes sont vérifiées :

(1a) $+$ est associative
$$\forall\, (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\overrightarrow{\mathbb{R}^2})^3, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

(1b) $+$ est commutative
$$\forall\, (\vec{u}, \vec{v}) \in (\overrightarrow{\mathbb{R}^2})^2, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

(1c) $+$ admet $\vec{0}$ pour élément neutre
$$\forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

(1d) tout élément $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ possède un symétrique $-\vec{u}$ pour $+$

$$\forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}\,.$$

(2a) $\forall\,(\lambda,\mu) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{u} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{u}$

(2b) $\forall\,(\lambda,\mu) \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u}) = (\lambda\,\mu)\cdot\vec{u}$

(2c) $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \forall\,(\vec{u},\vec{v}) \in (\overrightarrow{\mathbb{R}^2})^2 \quad \lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u} + \lambda\cdot\vec{v}$

(2d) $\forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \quad 1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

Définition 1 (Combinaison linéaire)
Soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, n réels. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$ de coefficients λ_i le vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ tel que

$$\vec{u} = \lambda_1\cdot\vec{u}_1 + \lambda_2\cdot\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n\cdot\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\cdot\vec{u}_i\,.$$

Les combinaisons linéaires sont les outils fondamentaux du calcul vectoriel. Ce sont les constructions bâties avec les briques de base que sont les opérations d'addition et de multiplication par un réel. Notons qu'un combinaison linéaire de combinaisons linéaires est encore une combinaison linéaire.

2.2 Droites vectorielles

La notion de sous–espace vectoriel (sous-ensemble non–vide et stable pour les deux opérations) a été vue en M1202. Dans le cas de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, la situation est plus simple car les seuls sous–espaces vectoriels de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ en dehors de $\{\vec{0}\}$ et de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ lui–même sont les *droites vectorielles* :

Définition 2 (droite vectorielle)
Soit $\vec{u}$ un vecteur **non–nul** *de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. On appelle* droite vectorielle *de* vecteur directeur *$\vec{u}$ l'ensemble :*

$$\vec{D} = \{\lambda\,\vec{u}, \textit{où } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

On dit que les vecteurs de $\vec{D}$ sont les vecteurs colinéaires *à $\vec{u}$.*

On peut facilement montrer avec la définition que
- le vecteur nul appartient à toutes les droites vectorielles et donc que :
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Si deux vecteurs appartiennent à la même droite vectorielle, leur somme aussi appartient à cette même droite vectorielle. Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteur de $\vec{D}$ reste un vecteur de $\vec{D}$.
- Si $\vec{v} \in \vec{D}$ est non–nul, alors $\vec{D}$ est aussi la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{v}$. En d'autres termes, toute droite vectorielle possède une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires, chacun d'eux étant suffisant pour décrire tous les autres.

2.3 Bases

Même si chaque vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ est bien identifié, il sera parfois utile de changer de représentation. Il s'agit ici de la notion de base.

Définition 3 (base)
On définit séparément les bases de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ et d'une droite vectorielle :

1. *Si deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ sont non–colinéaires, la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est appelée une* base *de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$.*
2. *Si $\vec{D}$ est une droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u}$, alors tout vecteur non–nul de $\vec{D}$ forme une famille appelée* base *de $\vec{D}$.*

Ces définitions ne sont pas différentes de celle vue en M1202. En effet, on peut démontrer que dans chaque cas, les familles considérées sont libres et génératrices du sous–espace vectoriel. Remarquons que d'après les définitions,

— les bases de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ ont toutes deux vecteurs et les bases d'une droite vectorielle ont toutes un seul vecteur. On dira par la suite que les droites vectorielles sont de *dimension* 1 et que $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ est de *dimension* 2.

— Aucune base ne peut contenir le vecteur nul.

Exemple 2.1 (Base canonique)
Soient les vecteurs $\vec{\imath} = (1, 0)$ et $\vec{\jmath} = (0, 1)$. Ses deux vecteurs sont non–colinéaires et forment donc une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ appelée *base canonique*.

Toute base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ permet de construire n'importe quel vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ de manière unique. C'est la conclusion du résultat suivant :

Proposition 1 (Coordonnées dans une base)
Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. Alors, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, il existe un unique couple de réels (λ_1, λ_2) tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \ .$$

Ces deux réels seront désormais appelés coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *et on les notera alors sous forme de matrice–colonne :*

$$\vec{u} : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \ .$$

Remarque 2.1
La notion de coordonnées dans une base dépend évidemment de la base choisie. Il conviendra donc de préciser la base lorsqu'on parlera des coordonnées d'un vecteur.

Exemple 2.2
En utilisant la définition des deux opérations de base, il est possible de déterminer les coordonnées de tout vecteur $\vec{u}$ dans la base canonique. En effet,

$$\vec{u} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \ .$$

Les coordonnées du vecteur (x, y) dans la base canonique sont donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, d'où le nom de base canonique. Ce sera différent pour tout autre base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$.

2.4 Utilisation du calcul matriciel

2.4.1 Calcul de coordonnées

Dans le cas général, on peut déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base en utilisant le calcul matriciel. Soit $\vec{u} = (x_u, y_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v)$ deux vecteurs non–colinéaires. On a donc une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ avec $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Soit $\vec{w} = (a, b)$ un vecteur quelconque dont on veut déterminer les coordonnées dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. On cherche donc λ et μ tels que

$$\begin{aligned}
& \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} = \vec{w} \\
\iff \quad & \lambda\,(x_u, y_u) + \mu\,(x_v, y_v) \quad = (a, b) \\
\iff \quad & (\lambda\,x_u + \mu\,x_v, \lambda\,y_u + \mu\,y_v,) = (a, b) \\
\iff \quad & \begin{cases} \lambda\,x_u + \mu\,x_v, = a \\ \lambda\,y_u + \mu\,y_v, = b \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
\iff & A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en notant

$$A = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} .$$

Il s'agit de la forme matricielle d'un système d'équations à deux inconnues que l'on sait résoudre par l'algorithme de Gauss. On sait que ce système admet forcément une unique solution car $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. De plus, on observe que la matrice du système est obtenue simplement en mettant en colonne les composantes des vecteurs de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. De même, le second membre est la colonne formée par les composantes de $\vec{w}$. Si l'on a plusieurs vecteurs dont on veut calculer les coordonnées dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, il est donc plus judicieux de déterminer l'inverse de cette matrice et d'en faire le produit successivement par tous les seconds membres. On aura ainsi

$$A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Cette formule nous donne donc un moyen simple pour calculer les coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ d'un vecteur connaissant ses coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base$\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. En particulier, nous pouvons calculer les coordonnées dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ du vecteur $\vec{\imath}$ (resp. $\vec{\jmath}$) lui–même en appliquant la formule avec $(a, b) = (1, 0)$ (resp. $(a, b) = (0, 1)$). Mais dans ce cas, le résultat est tout simplement la première colonne (resp. la deuxième colonne) de A^{-1}. On peut maintenant étbalir le bilan suivant :

— les colonnes de la matrice A sont les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

— Les colonnes de la matrice A^{-1} sont les coordonnées des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

— Si on multiplie A par les coordonnées d'un vecteur dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, on obtient ses coordonnées dans la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

— Si on multiplie A^{-1} par les coordonnées d'un vecteur dans la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, on obtient ses coordonnées dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

2.4.2 Parallélisme

Les coordonnées de deux vecteurs suffisent à conclure sur la colinéarité de ces vecteurs, grâce à la proposition suivante :

Proposition 2

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *données par leurs coordonnées dans la base canonique.*

Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff x_u\, y_v - x_v\, y_u = 0\ .$$

L'implication de gauche à droite est immédiate. En effet, si les vecteurs sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\, \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$. Dans ce cas,

$$x_u\, y_v - x_v\, y_u = x_u\,(k\, y_u) - (k\, x_u)\, y_u = k\, x_u\, y_u - k\, x_u\, y_u = 0\ .$$

Réciproquement, supposons $x_u\, y_v - x_v\, y_u = 0$. Si l'un des deux vecteur est nul, alors la proposition est démontrée car le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs. Sans perte de généralité, supposons maintenant que $\vec{u} \neq \vec{0}$. L'une, au moins, de ses coordonnées est donc non–nulle. Supposons (toujours sans perte de généralité), que ce soit $x_u \neq 0$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} x_u\, y_v = x_v\, y_u &\iff y_v = \frac{1}{x_u}\, x_v\, y_u \\ &\iff \vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ \frac{1}{x_u}\, x_v\, y_u \end{pmatrix} \\ &\iff \vec{v} = \frac{x_v}{x_u}\, \begin{pmatrix} x_u, \\ y_u \end{pmatrix} \\ &\iff \vec{v} = \frac{x_v}{x_u}\, \vec{u}\ . \end{aligned}$$

Cela signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3 Applications linéaires de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

Dans cette section, comme dans la précédente, on ne couvre qu'un mince partie du sujet, l'étude des applications linéaires en général demandant beaucoup plus d'investissement. L'idée de départ est que, dans un espace vectoriel, les deux opérations de bases sont essentielles. Par suite, il est naturel de penser que les applications qui préservent ses deux opérations seront cohérentes avec la structure d'espace vectoriel. Il s'avère qu'effectivement, les applications de ce type possèdent des propriétés particulièrement intéressantes.

Définition 4 (Application linéaire)
Soit $\vec{f}$ une application de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{aligned} \vec{f} : \overrightarrow{\mathbb{R}^2} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^2} \\ \vec{u} &\longmapsto \vec{f}(\vec{u}) \end{aligned}$$

On dit que $\vec{f}$ est linéaire *si*

1. *l'image d'une somme est la somme des images, i.e.*

$$\forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \forall\, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \quad \vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})\ ;$$

2. *l'image d'un produit par un réel est le produit par ce réel de l'image, i.e.*

$$\forall\, \vec{u} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{f}(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot \vec{f}(\vec{u})\ .$$

Une conséquence immédiate de la définition est que, pour une application linéaire, l'image d'une combinaison linéaire est la même combinaison linéaire des images, c'est–à–dire

$$\forall\, k \geq 1, \forall (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k) \in (\overrightarrow{\mathbb{R}^2})^k, \forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad \vec{f}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{f}(\vec{u}_i)\ .$$

Une autre conséquence est que l'image du vecteur nul est toujours le vecteur nul. En effet, si $\vec{f}$ est linéaire

$$\vec{f}(\vec{0}) = \vec{f}(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot \vec{f}(\vec{u}) = \vec{0}\,,$$

où $\vec{u}$ est un vecteur quelconque de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$.

Comme une combinaison linéaire de combinaisons linéaires est toujours une combinaison linéaire, on a la proposition suivante :

Proposition 3 (Composition d'applications linéaires)

Soit $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux applications linéaires de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. Alors, l'application composée $\vec{g} \circ \vec{f}$ est linéaire.

Preuve

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{aligned}
(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{g}[\vec{f}(\vec{u} + \vec{v})] && \text{par définition} \\
&= \vec{g}[\vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})] && \text{car } \vec{f} \text{ est linéaire} \\
&= \vec{g}[\vec{f}(\vec{u})] + \vec{g}[\vec{f}(\vec{v})] && \text{car } \vec{g} \text{ est linéaire} \\
&= (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{u}) + (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{v})\ .
\end{aligned}$$

La démonstration pour le produit en adoptant le même schéma est laissée au lecteur.

3.1 Calcul matriciel associé

On a vu que l'utilisation du calcul matriciel pouvait permettre de calculer des coordonnées dans une base. On va voir ici qu'il permet également d'effectuer les calculs relatifs à des applications linéaires.

3.1.1 Calcul des coordonnées de l'image

En notant

$$\vec{f}(\vec{\imath}) = (a_1, a_2), \qquad \text{et} \qquad \vec{f}(\vec{\jmath}) = (b_1, b_2)$$

on a pour tout vecteur $\vec{u} = (x_1, x_2)$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}(x_1 \cdot \vec{\imath} + x_2 \cdot \vec{\jmath}) &= x_1 \cdot \vec{f}(\vec{\imath}) + x_2 \cdot \vec{f}(\vec{\jmath}) \\
&= x_1 \cdot (a_1, a_2) + x_2 \cdot (b_1\, b_2) && \text{car } \vec{f} \text{ est linéaire} \\
&= (x_1\, a_1 + x_2\, b_1, x_1\, b_1 + x_2\, b_2)\ .
\end{aligned}$$

Or, on observe maintenant que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\, a_1 + x_2\, b_1 \\ x_1\, b_1 + x_2\, b_2 \end{pmatrix}\ .$$

Rappelons que dans la base canonique, les images de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont

$$\vec{f}(\vec{\imath}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{f}(\vec{\jmath}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} .$$

On en déduit que les coordonnées de l'image d'un vecteur s'obtiennent en faisant le produit à droite par la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. La technique pour construire les images de tout vecteur est donc

1. calculer les images de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$;
2. mettre les coordonnées de ces images en colonne pour former une matrice $\overrightarrow{F}$;
3. mettre les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ en colonne U ;
4. former le produit $\overrightarrow{F}\,U = V$;
5. récupérer les coordonnées de l'image de $\vec{v} = \vec{f}(\vec{u})$ dans la colonne V.

La matrice $\overrightarrow{F}$ est appelée *représentation matricielle de l'application linéaire $\vec{f}$ dans la base canonique*, ou plus simplement pour nous : matrice de $\vec{f}$. La donnée de cette matrice $\overrightarrow{F}$ est équivalent à la donnée de $\vec{f}$ elle–même, au point qu'on puisse parfois les confondre.

On peut aussi faire le chemin dans l'autre sens : comme tout vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ s'écrit comme combinaison linéaire unique de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, il suffit de fixer les images de ces vecteurs pour définir complètement et sans ambiguïté une application linéaire. C'est–à–dire que pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, il existe une et une seule application linéaire qui donne $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme image à $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ respectivement. En conséquence, toute matrice $\overrightarrow{F}$ carrée 2×2 est la matrice d'une unique application linéaire $\vec{f}$.

3.1.2 Composition d'applications linéaires

Enfin, il est remarquable que l'associativité du produit matriciel fournit la matrice d'une composition. En effet, considérons $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux applications linéaires de matrices respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$. Soit U la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$. Comme $\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{u}) = \vec{g}[\vec{f}(\vec{u})]$, l'image par $\vec{g} \circ \vec{f}$ se calcule par

$$\overrightarrow{G}\,(\overrightarrow{F}\,U) = (\overrightarrow{G}\,\overrightarrow{F})\,U$$

par associativité du produit matriciel. On en déduit que la matrice de $\vec{g} \circ \vec{f}$ n'est autre que le produit matriciel $\overrightarrow{G}\,\overrightarrow{F}$ **dans cet ordre**.

3.1.3 Applications linéaires bijectives

Définition 5 (Bijections)
On dit qu'une application linéaire $\vec{f}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ est une bijection *(ou que $\vec{f}$ est* bijective*) si tout vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ admet un* **unique** *antécédent par $\vec{f}$, i.e.*

$$(\forall\, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}), \quad (\exists\, \vec{u} \textit{ unique } \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}), \quad \textit{tel que } \vec{f}(\vec{u}) = \vec{v} \, .$$

On peut alors définir la bijection réciproque *de $\vec{f}$, notée $\vec{f}^{-1}$, comme l'application qui à tout $\vec{v}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ associe cet unique antécédent par $\vec{f}$.*

On remarque en particulier que $\mathbf{I}_{\mathrm{d}}$, l'identité de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ est une application linéaire bijective qui est sa propre réciproque.

Proposition 4
Soit $\vec{f}$ une application linéaire bijective de réciproque $\vec{f}^{-1}$. Alors

— $\vec{f}^{-1}$ *est une application linéaire bijective de réciproque* $\vec{f}$ *;*
— $\vec{f} \circ \vec{f}^{-1} = \vec{f}^{-1} \circ \vec{f} = \mathbf{I}_{\mathrm{d}}$.

Une conséquence immédiate de cette proposition est qu'on peut déterminer si une application linéaire est bijective (ou pas) en fonction de l'inversibilité de sa matrice (ou pas). En effet, en notant $\vec{F}$ et $\overrightarrow{F'}$ les matrices respectives de $\vec{f}$ et $\vec{f}^{-1}$, et en remarquant que la matrice de $\mathbf{I}_{\mathrm{d}}$ est la matrice identité, on obtient :

$$\vec{F}\,\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{F'}\,\vec{F} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a donc, par définition de l'inverse d'une matrice que $\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{F^{-1}}$. Réciproquement, si la matrice $\vec{F}$ d'une application linéaire $\vec{f}$ est inversible, d'inverse $\overrightarrow{F^{-1}}$, alors $\vec{f}$ est une bijection, dont la bijection réciproque $\vec{f}^{-1}$ a pour matrice $\overrightarrow{F^{-1}}$.

3.2 Applications linéaires usuelles

On peut démontrer que les applications suivantes du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans lui–même sont des applications linéaires.

3.2.1 Identité

La matrice de Id l'application identité est la matrice identité $\mathbf{1}$.

3.2.2 Les homothéties vectorielles

Si λ est un réel non–nul. L'homothétie vectorielle de rapport λ associe à tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ le vecteur $\vec{h}(\vec{u}) = \lambda\,\vec{u}$.

3.2.3 Les projections vectorielles

Soient $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ deux droites vectorielles admettant pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{e}$ et $\vec{f}$ **non colinéaires**. Dans ce cas, la famille $(\vec{e}, \vec{f})$ forme un base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ et tout vecteur $\vec{u}$ admet une écriture dans cette base $\vec{u} = a\,\vec{e} + b\,\vec{f}$. La projection vectorielle sur $\vec{D}$ parallèlement à $\vec{\Delta}$ de $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{p}(\vec{u})$ défini par

$$\vec{p}(\vec{u}) = a\,\vec{e} .$$

3.2.4 Les symétries vectorielles

Avec les mêmes notations que pour les projections vectorielles, la symétrie vectorielle par rapport à $\vec{D}$ dans la direction $\vec{\Delta}$ de $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{s}(\vec{u})$ défini par

$$\vec{s}(\vec{u}) = a\,\vec{e} - b\,\vec{f} .$$

3.2.5 Les dilatations vectorielles

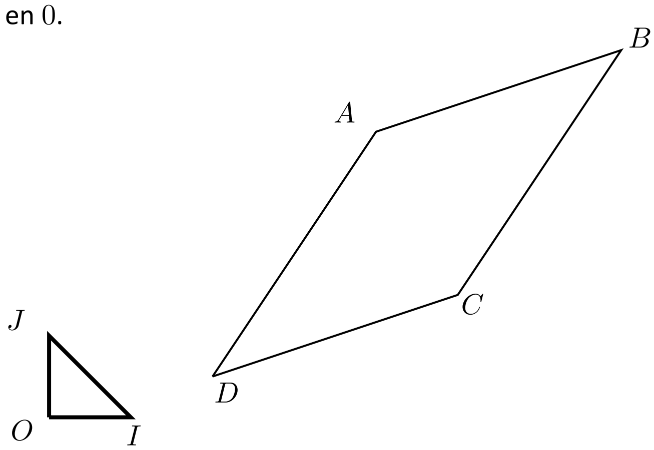
Soit λ un réel non–nul. Avec les mêmes notations que pour les projections vectorielles, la dilatation vectorielle de base $\vec{D}$ dans la direction $\vec{\Delta}$ et de rapport λ de $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{d}(\vec{u})$ défini par

$$\vec{d}(\vec{u}) = a\,\vec{e} + \lambda\,(b\,\vec{f}) .$$

On peut remarquer qu'on a exclu le rapport $\lambda = 0$ qui correspondrait à une projection vectorielle. Le cas $\lambda = 1$ est l'identité et le cas $\lambda = -1$ est une symétrie vectorielle.

4 Plan affine $\mathbb{R}^2$

La géométrie élémentaire dans le plan construit ses figures «à la règle et au compas», ce qui signifie que les notions de droites et de distances sont les seules bien définies. À partir de ces notions, on peut définir, par exemple, les notions de parallélisme, de milieu, d'orthogonalité, de cercle, …. Ainsi, on peut décrire clairement la figure ci–dessous qui comprend un parallélogramme $ABCD$ et un triangle isocèle OIJ, rectangle en 0.



Notre but n'étant pas de construire des figures sur un support physique, il est nécessaire de se doter d'un modèle mathématique, c'est–à–dire d'une représentation abstraite des objets tracés sur le support physique. Ce modèle est le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine [1].

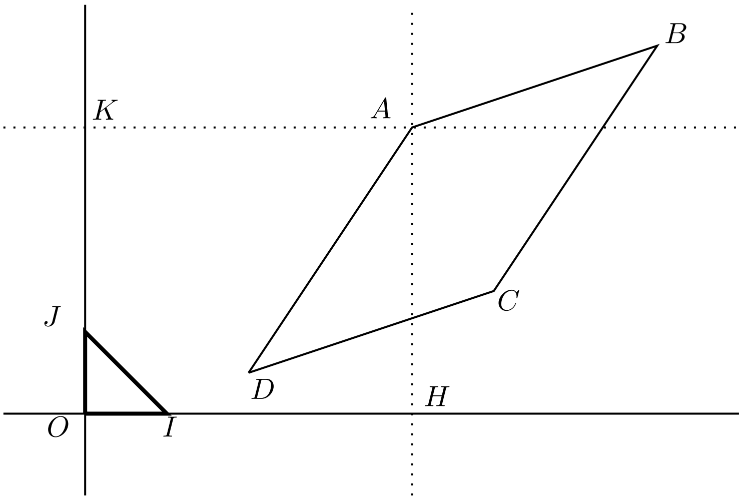
4.1 Repère

La remarque essentielle est que la donnée d'un triangle sur le support peut servir de figure de référence pour représenter de manière unique tout autre point de ce support par un couple de réels. Dans notre exemple, nous pouvons par exemple identifier le point A en utilisant la procédure suivante :

1. Tracer la parallèle à (OJ) passant par A. Elle coupe (OI) en H.
2. Tracer la parallèle à (OI) passant par A. Elle coupe (OJ) en K.
3. Poser
$$x_A = \frac{OH}{OI} \qquad \text{et} \qquad y_A = \frac{OK}{OJ} \ .$$
Ces rapports peuvent être négatifs si O se trouve entre les deux autres points figurants dans le rapport.
4. Identifier le point A au couple (x_A, y_A), que l'on notera désormais en colonne
$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

La construction est faite sur la figure suivante :

1. Ou plus exactement euclidienne en rajoutant le produit scalaire qui permet de mesurer les distances et les angles



Cette procédure peut être appliquée à tout point du support et lui associe donc un unique couple de réels. Réciproquement, tout couple de réels (x, y) permet de construire un point unique du support. En conclusion, la donnée du triangle de référence OIJ dans le plan physique permet d'identifier ce plan à l'ensemble $\mathbb{R}^2$. On a par exemple :

$$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad J\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad H\begin{pmatrix}x_A\\0\end{pmatrix}, \quad K\begin{pmatrix}0\\y_A\end{pmatrix}.$$

Dans notre exemple, nous avons choisi un triangle isocèle rectangle en 0, mais ce n'est pas du tout nécessaire. Il suffit de se donner trois points non–alignés.

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ comme modèle du plan physique n'est pas l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ introduit dans la première partie. En effet, les opérations d'addition et de multiplication n'ont pas de sens sur les points du plan. En revanche, la notion de vecteur peut être associée aux déplacement des points, ce qui a un sens en géométrie. Le lien est fait au moyen de la définition suivante :

Définition 6 (Vecteur du plan)
Soient

$$M\begin{pmatrix}x_M\\y_M\end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad N\begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}$$

deux points du plan. On appelle vecteur $\overrightarrow{MN}$, le vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ défini par :

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M)\,.$$

D'après cette définition, il est clair que deux couples de points (M, N) et (M', N') de $\mathbb{R}^2$ peuvent définir le même vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, de sorte que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$. Ceci est parfaitement normal et signifie géométriquement que le déplacement de M à N est le même que le déplacement de M' à N'. Lorsqu'ils sont considérés comme des modèles de déplacement, la somme de deux vecteurs a un sens. On a en effet :

Proposition 5 (Relation de Chasles)
soient M, N et P trois points du plan. Alors

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$$

Cette proposition se vérifie immédiatement avec la définition et nous permet de définir la notion de repère.

Définition 7 (Repère dans le plan)
Pour le triangle de référence OIJ, on note $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$. Le triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé repère *du plan. Pour tout point M du plan*

$$M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$$

la matrice colonne est appelée matrice des coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Proposition 6
Pour tout point M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\,.$$

De plus $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la base canonique de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, et x et y sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

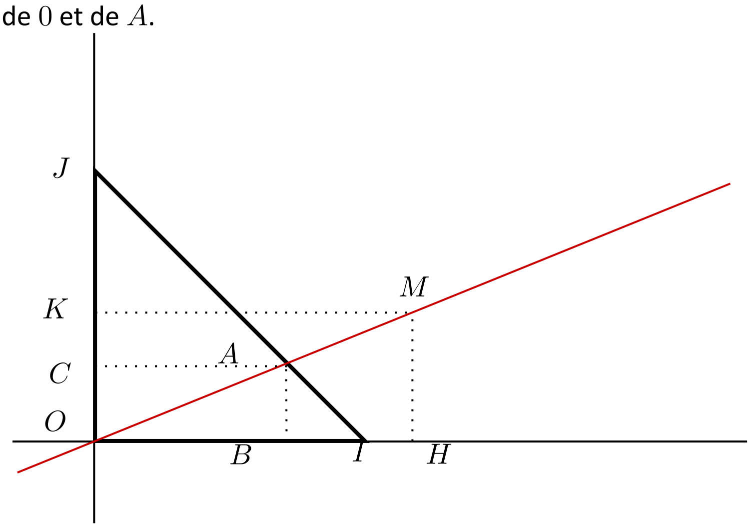
Cette proposition se démontre immédiatement avec la relation de Chasles et la définition.

Remarque 4.1
Les notions de repères et de vecteurs ont déjà été utilisées au lycées en géométrie mais sans introduire formellement la définition d'espace vectoriel. Ce chapitre vient de faire le lien. Il conviendra cependant de distinguer les couples de réels qui interviennent en géométrie. Il peut s'agir

- soit de coordonnées d'un point M dans un repère. Dans ce cas, les opérations d'espace vectoriel n'auront pas de sens et on notera $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$;
- soit de coordonnées de vecteurs dans une base. On notera alors $\overrightarrow{OM} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$;

4.2 Droites affines

La notion géométrique de droite dans le plan est naturelle dans la conception d'Euclide «à la règle et au compas». Étant donné un triangle isocèle OIJ rectangle en O, on construit la droite la droite passant par O et qui coupe (IJ) en A avec A distinct de I et de J. Comme précédemment, on en déduit les point B et C en projetant A sur : (OI) et (OJ) respectivement. On procède de même pour tout point M générique, distinct de 0 et de A.



Le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ associé à OIJ nous donne les coordonnées :

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} x_A \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C \begin{pmatrix} 0 \\ y_A \end{pmatrix}$$
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad H \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad K \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

Grâce au théorème de Thalès, on a

$$\frac{OK}{OH} = \frac{OC}{OB} = \frac{y_A}{x_A}.$$

On obtient

$$\frac{y}{x} = \frac{y_A}{x_A} \Longrightarrow y = \frac{y_A}{x_A}\, x \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y_A}{x_A}\, x \end{pmatrix} = x\, = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y_A}{x_A} \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{x}{x_A} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

En notant $k = \dfrac{x}{x_A}$ cette dernière égalité peut se lire comme une égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = k\, \overrightarrow{OA}.$$

On retrouve bien le rôle des vecteurs du plan comme modèle de déplacement : la droite (OA) est l'ensemble des points tels que le déplacement de O à M soit **proportionnel** au déplacement de O à A. Dés lors qu'on dispose d'un repère (une structure affine), on peut donc définir une droite par un point et un vecteur qui donnera la direction du déplacement :

Définition 8 (Droite affine)
Soit A un point du plan $\mathbb{R}^2$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. La droite affine *$D$ passant par A et de* vecteur directeur *$\vec{u}$ est l'ensemble des points du plan vérifiant l'égalité vectorielle :*

$$\overrightarrow{AM} = k\, \vec{u}, \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

On notera $\vec{D}$ la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u}$ et on dira que D est de direction $\vec{D}$.

Remarque 4.2
Plusieurs notions purement géométriques peuvent être traduites en termes vectoriels. Par exemple, cette définition nous permet de dire que trois points A, B et C sont *alignés* si

$$\overrightarrow{AB} = k\, \overrightarrow{AC}, \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

On peut en déduire aussi que I est le *millieu* du segment $[AB]$ si

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{AB}, \qquad \text{ou aussi} \qquad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Définition 9 (Parallélisme et direction)
Deux droites affines D et D' sont dites parallèles si et seulement si elles ont une même direction vectorielle, i.e. $\vec{D} = \vec{D'}$. De manière équivalente, elles seront parallèles si elles possèdent des vecteurs directeurs colinéaires.

Cette nouvelle définition du parallélisme désigne bien le parallélisme que l'on utilisait déjà à l'école primaire. En effet, si D est une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et D' est une droite passant par B de vecteur directeur $\vec{v} = \alpha\, \vec{u}$, il est possible de montrer en utilisant la définition que $M \in$

$D \cap D'$ si et seulement si A, B et M sont alignés. C'est–à–dire que D et D' sont, soit d'intersection vide, soit confondues.

Une autre conséquence du calcul en coordonnées est que l'on pourra montrer que trois points $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ sont alignés en vérifiant que

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = 0 \,.$$

5 Applications affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Dans tout ce qui suit, le plan géométrique sera toujours supposé pourvu d'un triangle OIJ, isocèle rectangle en O de telle sorte qu'on utilisera le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ comme modèle. Les points du plan seront toujours identifiés avec leur coordonnées dans ce repère, et les vecteurs avec leur coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 10 (Applications affines)
Soit f, une application de $\mathbb{R}^2$ dans lui–même. On dit que f est une application affine *si il existe une application linéaire notée $\vec{f}$ de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans lui–même vérifiant*

$$(\forall\, M \in \mathbb{R}^2), (\forall\, N \in \mathbb{R}^2), \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}) \,.$$

L'importance des applications affines vient de la proposition suivante.

Proposition 7 (Applications affines et parallèlisme)
Une application affine transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Preuve : soient A, B, C et D des points du plan tels que $(AB)//(CD)$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}, \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R} \,.$$

Comme f est affine d'application linéaire associée $\vec{f}$, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(B)} &= \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{f}(k\,\overrightarrow{CD}), \quad \text{car les droites sont parallèles} \\ &= k\,\vec{f}(\overrightarrow{CD}), \quad \text{car } \vec{f} \text{ est linéaire} \\ &= k\,\overrightarrow{f(C)f(D)}, \quad \text{car } f \text{ est affine .} \end{aligned}$$

Avec la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ et $\overrightarrow{f(C)f(D)}$, on déduit que

$$(f(A)f(B))//(f(C)f(D)) \,.$$

□

On verra que, bien que les applications préservent le parallélisme, elles ne préservent pas forcément les distances ni les angles.

Proposition 8
Une application affine f est complètement déterminée par son application linéaire associée $\vec{f}$ et par l'image d'un point quelconque, par exemple l'image de O.

C'est immédiat d'après la définition. En effet, si l'on se donne

$$\vec{f} \text{ de matrice } \vec{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f(O) = O' \begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \end{pmatrix}$$

alors pour tout point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'image $M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'après la définition

$$\overrightarrow{O'M'} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' - x'_O = a\,x + b\,y \\ y' - y'_O = c\,x + d\,y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x'_O + a\,x + b\,y \\ y' = y'_O + c\,x + d\,y \end{cases} .$$

Ceci montre que les coordonnées de M' se calculent de manière unique au moyen de la matrice $\vec{F}$ et des coordonnées de l'image de l'origine. On peut vérifier, à titre d'exercice, que la donnée d'un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de son image $A' \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix}$ donnerait

$$\begin{cases} x' = x'_A + a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) \\ y' = y'_A + c\,(x - x_A) + d\,(y - y_A) \end{cases} .$$

Définition 11 (Invariants)
Un point A du plan $\mathbb{R}^2$ est dit invariant *s'il est sa propre image, i.e. $f(A) = A$. Un sous–ensemble S de $\mathbb{R}^2$ est dit* stable *s'il est sa propre image, i.e. $f(S) = S$.*

Bien que ces deux définitions s'expriment de la même manière, elles ont un sens bien différent. Pour la deuxième, il s'agit d'une égalité d'ensemble, c'est–à–dire d'une double inclusion. Cela ne signifie pas du tout que tous les points d'un sous–ensemble invariant sont invariants. Au contraire, il arrivera fréquemment qu'un sous–ensemble stable ne contienne **aucun** point invariant.

5.1 Calcul matriciel

En reprenant la démonstration précédente, on peut voir que nous venons de démontrer la proposition plus générale suivante :

Proposition 9
Soit f une application affine de partie linéaire $\vec{f}$ de matrice $\vec{F}$. On note $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ les coordonnées de l'image de l'origine. Alors, pour tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'image $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a

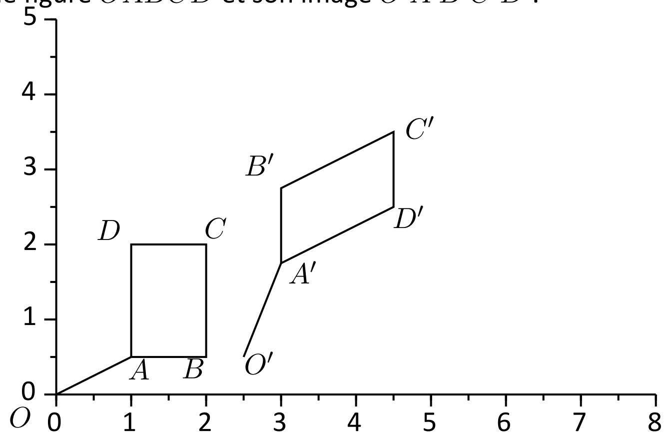
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} .$$

Réciproquement, si une application f admet la représentation ci–dessus, alors c'est une application affine de partie linéaire ayant $\vec{F}$ pour matrice et d'image de l'origine $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

Exemple 5.1
On considère l'application qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe son image $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ par la formule

$$\begin{cases} x' = y + \frac{5}{2} \\ y' = x + \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2} \end{cases} .$$

On trace ci–dessous une figure $OABCD$ et son image $O'A'B'C'D'$.



En appliquant la formule de calcul, on obtient les coordonnées :

$$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$O'\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \quad A'\begin{pmatrix}3\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}, \quad B'\begin{pmatrix}3\\\frac{11}{4}\end{pmatrix}, \quad C'\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}, \quad D'\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que cette application a préservé le parallélisme, mais pas les angles ni les distances. D'après la proposition, c'est une application affine car on a l'écriture :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Sa partie linéaire $\vec{f}$ a pour matrice $\vec{F} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et l'origine O a pour image $O' = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Cependant, la connaissance de la partie linéaire et de l'image de l'origine ne nous renseigne pas forcément sur la manière de construire géométriquement l'image d'un point. Pour cela, on cherchera parfois à identifier des points particuliers et leurs images (*cf* points invariants).

5.2 Composition d'applications affines

Une conséquence immédiate de la proposition précédente est :

Proposition 10 (Composition d'applications affines)
Si f et g sont deux applications affines de $\mathbb{R}^2$ dans lui–même, de parties linéaires respectives $\vec{f}$ et $\vec{g}$ de matrices $\vec{F}$ et $\vec{G}$, alors la composition $g \circ f$ est affine de partie linéaire $\vec{g} \circ \vec{f}$ de matrice $\vec{G}\,\vec{F}$.

Cette proposition peut être très utile lorsqu'on effectue plusieurs transformations élémentaires successives d'une figure. Si toutes les transformations sont affines, alors la transformation résultante sera elle aussi affine. Il suffira de faire un produit matriciel pour retrouver la partie linéaire.

5.3 Applications linéaires affines bijectives

Définition 12 (Bijection)
Une application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans lui–même est bijective *si* **pour tout point** $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *du plan, il existe un antécédent* **unique** *par f noté $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, i.e. tel que $f(M) = M'$.*

On peut donc retrouver l'image de départ si on a transformé cette image par une application affine bijective. On a aussi une caractérisation en terme de matrice :

Proposition 11
Une application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans lui–même, de partie linéaire $\vec{f}$ de matrice $\vec{F}$ est bijective si et seulement si $\vec{F}$ est une matrice inversible. Dans ce cas, $\vec{f}$ est une application linéaire bijective de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dans lui–même de matrice $\vec{F}^{-1}$.

5.4 Applications affines usuelles

Nous avons vu plus haut que la transformation d'une figure par plusieurs applications affines successives (composition) équivalait à transformer cette figure par une seule application affine globale. On pourrait démontrer réciproquement que toute application affine peut être décomposée comme une succession d'applications affines «élémentaires». Nous étudions maintenant plusieurs de ces applications qui sont associées à des transformations géométriques déjà rencontrées au lycée.

Dans toute la suite, on suppose le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine, c'est–à–dire d'une repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de sorte que $\mathbb{R}^2$ est un modèle mathématique du plan géométrique.

5.4.1 Translations affines

Définition 13 (Translation affine)
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ *un vecteur de* $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. *On appelle* translation de vecteur $\vec{u}$ *notée* $t_{\vec{u}}$ *l'application du plan affine* $\mathbb{R}^2$ *dans lui–même définie par*

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}} \,:\, & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow t_{\vec{u}}(M) = M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \textit{tel que} \qquad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}\,. \end{aligned}$$

Proposition 12
La translation de vecteur $\vec{u}$ est une application affine admettant l'écriture matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette écriture est immédiate d'après la définition, car on a

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}\,.$$

En particulier, cette écriture montre que l'application linéaire $\vec{t}$ associée à t n'est autre que l'identité de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$, et que l'image de l'origine $O' = f(O)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$.

Géométriquement, une translation déplace chaque point dans la même direction et de la même distance.

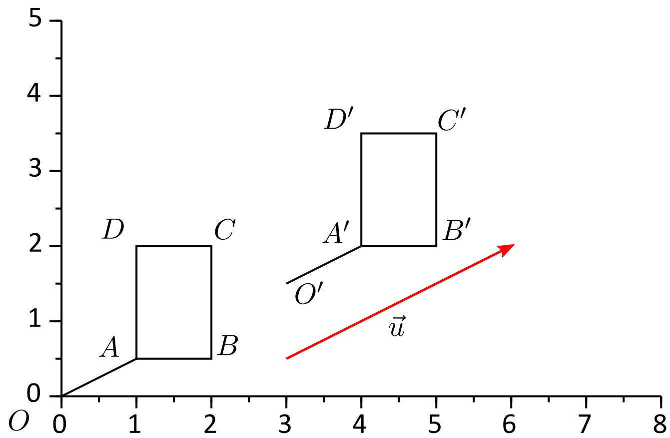
Proposition 13 (invariants)

1. *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ n'admet aucun point invariant. Sinon, la translation de vecteur nul est l'identité (tous les points sont donc invariants).*

2. *Toute droite affine de vecteur directeur $\vec{u}$ est stable par $t_{\vec{u}}$.*

Exemple 5.2
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. Avec la formule, on calcule les images de la figure $OABCD$ ci–dessous :

$$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$O'\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{pmatrix},\quad A'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\quad B'\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},\quad C'\begin{pmatrix}5\\\frac{7}{2}\end{pmatrix},\quad D'\begin{pmatrix}4\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}.$$



On observe que $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Grâce à la proposition précédente, la droite (OA), qui a pour vecteur directeur $\vec{u}$ est stable par $t_{\vec{u}}$. Sur la figure, les points O, A, O' et A' sont alignés.

5.4.2 Homothéties affines

Définition 14 (Homothéties affines)
Soit A un point du plan affine $\mathbb{R}^2$ et λ un réel **non–nul**. *On appelle* homothétie de centre A et de rapport λ *l'application du plan affine $\mathbb{R}^2$ dans lui–même notée $h_{A,\lambda}$, définie par*

$$\begin{aligned} h_{A,\lambda}\ :\ &\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow t_{\vec{u}}(M) = M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \qquad \textit{tel que } \overrightarrow{AM'} = \lambda\,\overrightarrow{AM}\,. \end{aligned}$$

Proposition 14
L'homothétie de centre $A = \begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et de rapport λ est une application affine admettant l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(1-\lambda)\,x_A\\(1-\lambda)\,y_A\end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée est une homothétie vectorielle de rapport λ et a pour matrice

$$\overrightarrow{H_{A,\lambda}} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Cette écriture se vérifie immédiatement d'après la définition. Cependant, ce n'est pas forcément la plus facile d'utilisation. On peut lui préférer l'écriture matricielle directement issue de la définition :

$$\begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} .$$

Géométriquement, une homothétie agrandit (si $\lambda > 1$) ou diminue (si $\lambda < 1$) une figure, en prenant A comme point de référence.

Proposition 15 (invariants)

1. *Si $\lambda \neq 1$, alors $h_{A,\lambda}$ admet A comme* **unique** *point invariant. Sinon, une homothétie de rapport 1 est l'identité (tous les points sont donc invariants).*
2. *Toute droite affine passant par A est stable par $h_{A,\lambda}$.*

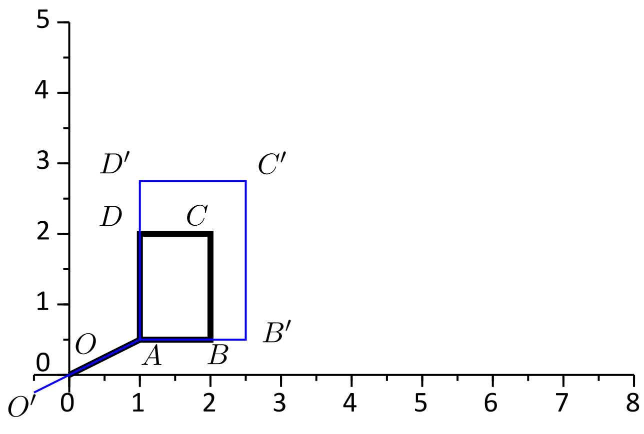
La deuxième affirmation est naturelle : d'après la définition, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont toujours colinéaires. Les points A, M et M' sont donc toujours alignés. Par conséquent, si M est un point d'une droite passant par A, sont image M' sera également un point de cette droite.

Exemple 5.3
L'image par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ se calcule par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

L'image de $OABCD$ donne :

$$O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$O' \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad A' \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B' \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C' \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \quad D' \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} .$$



On observe que le centre de l'homothétie A est invariant et que les droites (OA), (AB) et (AD) qui passent par A sont stables.

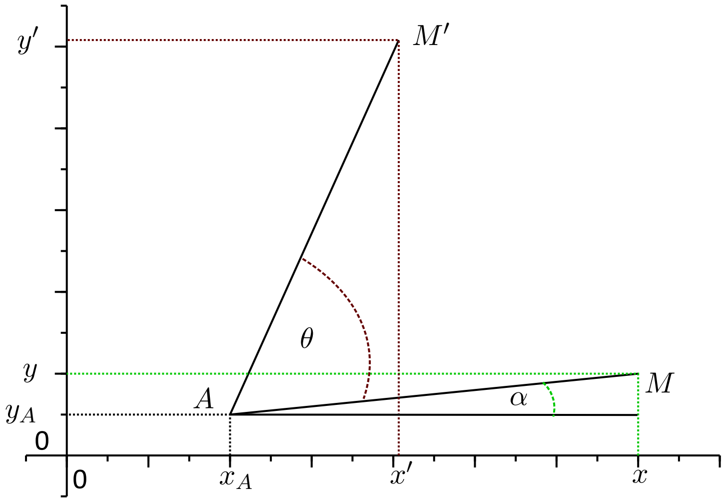
5.4.3 Rotations affines

Définition 15 (Rotations affines)
Soit A un point du plan affine $\mathbb{R}^2$ et θ un réel. On appelle rotation de centre A et d'angle θ *l'application*

du plan affine $\mathbb{R}^2$ dans lui–même notée $r_{A,\theta}$, définie par

$$\begin{aligned} r_{A,\theta}\ &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longrightarrow r_{A,\theta}(M) = M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \textit{tel que } (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}) = \theta\ . \end{aligned}$$

On a désigné ici par $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})$ la mesure de **l'angle orienté** de sommet A du triangle MAM', ce qui suppose connues les notions élémentaires de trigonométrie. Pour être complet, la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$ qui permet de définir les angles orientés devrait être présentée. Cette question ne sera pas abordée dans ce ce document. Géométriquement, une rotation déplace les points sur un cercle de centre A, en les faisant «tourner» d'un angle θ. Les points M et M' sont tous les deux sur le cercle de centre A et de rayon $r = AM$.



En utilisant les relations trigonométriques dans les triangles rectangles, on a les identités :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\alpha) \\ r\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\alpha+\theta) \\ r\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}\ .$$

Rappelons alors les formules de cosinus et sinus d'une somme :

$$\begin{aligned} \cos(p+q) &= \cos(p)\ \cos(q) - \sin(p)\ \sin(q) \\ \sin(p+q) &= \sin(p)\ \cos(q) + \cos(p)\ \sin(q)\ . \end{aligned}$$

En appliquant ces formules à la somme $(\alpha + \theta)$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\alpha)\ \cos(\theta) - r\ \sin(\alpha)\ \sin(\theta) \\ r\ \sin(\alpha)\ \cos(\theta) + r\ \cos(\alpha)\ \sin(\theta) \end{pmatrix}\ ,$$

que l'on peut écrire comme produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\ \cos(\alpha) \\ r\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}\ ,$$

c'est–à–dire :

$$\begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}\ .$$

Cette dernière expression prouve que la rotation de centre A et d'angle θ est une application affine dont les caractéristique sont données par la proposition suivante :

Proposition 16
La rotation de centre $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et d'angle θ est une application affine admettant l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\cos(\theta))\, x_A + \sin(\theta)\, y_A \\ -\sin(\theta)\, x_A + (1-\cos(\theta))\, y_A \end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée a pour matrice

$$\overrightarrow{R_{A,\theta}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} .$$

Cette écriture se vérifie immédiatement d'après la définition. Cependant, ce n'est pas forcément la plus facile d'utilisation. On peut lui préférer l'écriture matricielle directement issue de la définition :

$$\begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} .$$

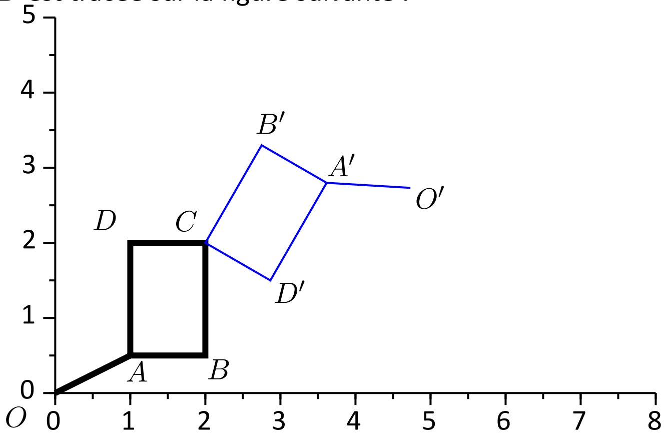
Proposition 17 (invariants)

1. *Si θ n'est pas un multiple de $2\,\pi$, alors $r_{A,\theta}$ admet A comme* **unique** *point invariant. Sinon, une rotation d'angle multiple de $2\,\pi$ est l'identité (tous les points sont donc invariants).*
2. *Si θ est un multiple de π, alors toute droite affine passant par A est stable et même invariante si θ est un multiple de $2\,\pi$.*

Exemple 5.4
L'image par la rotation de centre C et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ se calcule par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

L'image de $OABCD$ est tracée sur la figure suivante :



On pourrait démontrer que le centre de la rotation C est le seul point invariant.

Remarque 5.1 (Vecteur normal)
Comme sous–produit du développement ci–dessus, nous obtenons un moyen de trouver les coordonnées d'un vecteur **normal** à une droite, c'est–à–dire un vecteur directeur d'une droite orthogonale. En effet, si A et M sont deux points d'une droite D, alors $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de D, de coordonnées $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$. Mais alors, $\vec{v} = \overrightarrow{AM'}$ est un vecteur directeur de la droite orthogonale à D passant

par A. Les coordonnées de $\vec{v}$ s'obtiennent à partir de celle $\vec{u}$ en utilisant la formule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, et on a

$$\vec{v}\begin{pmatrix} -y_u \\ x_u \end{pmatrix} .$$

5.4.4 Symétries centrales affines

Définition 16 (Symétries centrales affines)
Soit A un point du plan affine $\mathbb{R}^2$. On appelle symétrie de centre A *l'application du plan affine $\mathbb{R}^2$ dans lui–même notée s_A, définie par*

$$\begin{aligned} s_A\ :\ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow s_A(M) = M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \textit{tel que } \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{MM'} . \end{aligned}$$

Cette définition signifie géométriquement que A est le milieu du segment $[MM']$. Il faut remarquer que cette application est un cas particulier des deux précédentes. En effet, une symétrie de centre A est à la fois une homothétie de centre A et de rapport -1, et une rotation de centre A et d'angle π. En conséquence, elle hérite des propriétés de ces deux applications affines.

Pour les applications affines qui suivent, on considère
— une droite D de vecteur directeur $\vec{e}$;
— une droite Δ **non parallèle à** D de vecteur directeur $\vec{f}$;
— un réel non–nul λ.

Les droites D et Δ n'étant pas parallèles, elles se coupent donc en un point A unique. De même, la parallèlle Δ' à Δ passant par M coupe D en un point unique H. On définit les applpications suivantes par leur construction géométrique.

5.4.5 Les projections affines

La projection affine sur D parallèlement à Δ d'un point M est le point $p(M)$ défini par

$$p(M) = H \text{ tel que } \begin{cases} H \in D \\ \overrightarrow{HM} \text{ colinéaire à } \vec{f} . \end{cases}$$

5.4.6 Les symétries (obliques) affines

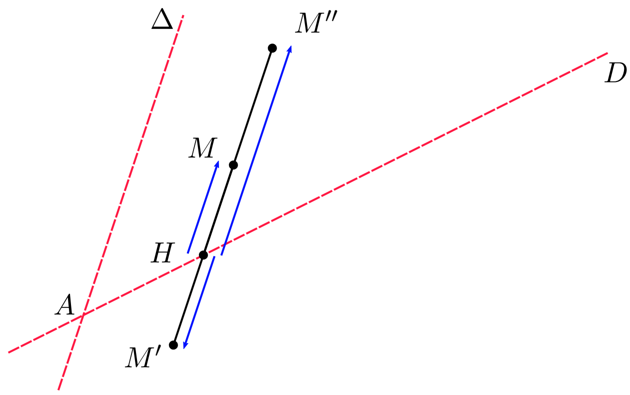
La symétrie affine par rapport à D parallèlement à Δ d'un point M est le point $s(M) = M'$ défini par

$$\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM} .$$

5.4.7 Les dilatations affines

La dilatation affine de base D dans la direction de Δ d'un point M est le point $d(M) = M''$ défini par

$$\overrightarrow{HM''} = \lambda\,\overrightarrow{HM} .$$



Δ
M''
D
M
H
A
M'