S4 - Analyse - Révisions - compléments

I

① $f(x) = \dfrac{a(x-1)+b}{(x-1)^2} = \dfrac{ax+b-a}{(x-1)^2}$

$\left.\begin{matrix} a=4 \\ b-a=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \quad f(x) = \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$

② $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx = 4\Big[\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0} - 3\left[\frac{1}{x-1}\right]_{-1}^{0}$

$= -4\ln 2 + 3 - \dfrac{3}{2} = \underline{-4\ln 2 + \dfrac{3}{2}} \simeq -1,27$

II ① $\displaystyle\int_1^2 (2x+3)\ln x = \Big[(x^2+3x)\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 (x+3)\,dx$

$\begin{cases} u' = 2x+3 \\ v = \ln x \end{cases} \quad \begin{cases} u = x^2+3x \\ v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$= 10\ln 2 - \left[\dfrac{x^2}{2} + 3x\right]_1^2 = 10\ln 2 - \dfrac{1}{2}\left[x^2\right]_1^2 - 3\left[x\right]_1^2$

$= 10\ln 2 - \dfrac{3}{2} - 3 = \boxed{10\ln 2 - \dfrac{9}{2}}$

② $\displaystyle I = \int_0^1 (2x^3 - 3x + 1)e^x\,dx =$

3 intégrations par parties, bof !

$I = 2I_3 - 3I_1 + I_0$ avec $\displaystyle I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$

et $\displaystyle I_0 = \int_0^1 e^x dx$

Un calcul direct donne

$I_0 = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

Pour les autres intégrales, on cherche une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$$

$u = x^{n+1}$ $u' = (n+1)x^n$

$v' = e^x$ $v = e^x$

$$I_{n+1} = \left[x^{n+1} e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \, dx$$

$$I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

$I_1 = e - I_0 = e - e + 1 = 1$

$I_2 = e - 2 I_1 = e - 2$

$I_3 = e - 3 I_2 = e - 3e + 6$

$= -2e + 6$

D'où $I =$

$\cancel{2}3(-2e+6) - 3 \times 1 + e - 1$

$$I = -3e + 8$$

③ $\displaystyle\int_0^\pi x \cos(x) \, dx = \left[x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) \, dx$

$u = x$ $u' = 1$

$v' = \cos(x)$ $v = \sin(x)$

$= 0 + \left[\cos(x)\right]_0^\pi = -2$

Exercice 3

① $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+5} = \dfrac{(ax+b)(x+5) + c}{x+5}$

$= \dfrac{ax^2 + (5a+b)x + 5b + c}{x+5}$

$= \dfrac{2x^2 - x - 1}{x+5}$

$\begin{cases} a = 2 \\ 5a + b = -1 \\ 5b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -11 \\ c = 54 \end{cases}$

$$f(x) = 2x - 11 + \frac{54}{x+5}$$

$\boxed{\text{1a}}$ par division euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 - x - 1 & x+5 \\
\cline{2-2}
-(2x^2 + 10x) & 2x - 11 \\
\cline{1-1}
-11x - 1 & \\
11x + 55 & \\
\cline{1-1}
54 &
\end{array}
$$

d'où $2x^2 - x - 1 = (x+5)(2x-11) + 54$

on divise par $x+5$: $f(x) = 2x - 11 + \dfrac{54}{x+5}$, $x \neq -5$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{54}{x+5} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{54}{x+5} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - (2x-11)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{54}{x+5} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (2x-11)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{54}{x+5} = 0$

La droite d'équation $y = 2x - 11$ est une asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-5 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-5 \\ <}} \left(2x - 11 + \dfrac{54}{x+5}\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x\to-5 \\ <}} (2x-11) = -21$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-5 \\ <}} \dfrac{54}{x+5} = -\infty$

de même $\lim\limits_{\substack{x\to-5 \\ >}} f(x) = +\infty$.

D'où la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à la courbe.

Exercice 4

① $\mathcal{D}_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$(\Delta = 1-4 = -3 < 0)$

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} (f_1(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3+2-x^3-x^2-x}{x^2+x+1}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^2-x+2}{x^2+x+1}\right) = -1$

de même en $+\infty$.

D'où la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

② $\mathcal{D}_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x \geqslant 1\} = [1,2[\cup]2,+\infty[$

Limite en 2

$f_2(x) = \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{1}{2}$

En $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$ asymptote horizontale : $y=0$

③ $\mathcal{D}_{f_3} =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f_3(x) = +\infty$: Asymptote verticale : $x = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{4x^3-4x^2+x} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \left(f_3(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-\frac{1}{2}x}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}$

En $-\infty$ et en $+\infty$, asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}(x+1)$

(4) $\mathcal{D}_{f_4} = [0, +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_4(x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + x^2\left(\frac{1}{2} - x^{-3/2}\right)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + x\left(\frac{1}{2} - x^{-3/2}\right)\right) = +\infty$$

En $+\infty$, direction asymptotique $x = 0$

(5) $\mathcal{D}f_5 = [1, +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f_5(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_5(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_5(x)}{x} = \frac{1}{2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x-2)^{1/2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f_5(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x-2} = +\infty$$

En $+\infty$, direction asymptotique $y = \frac{1}{2}x$