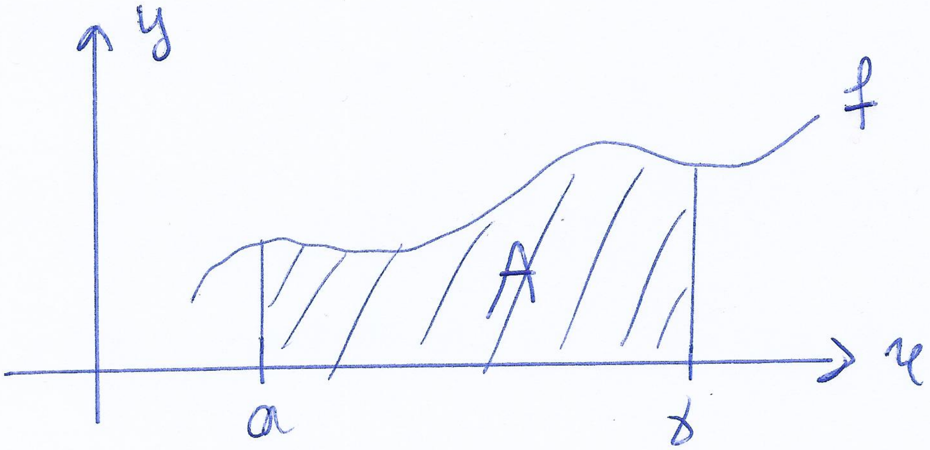
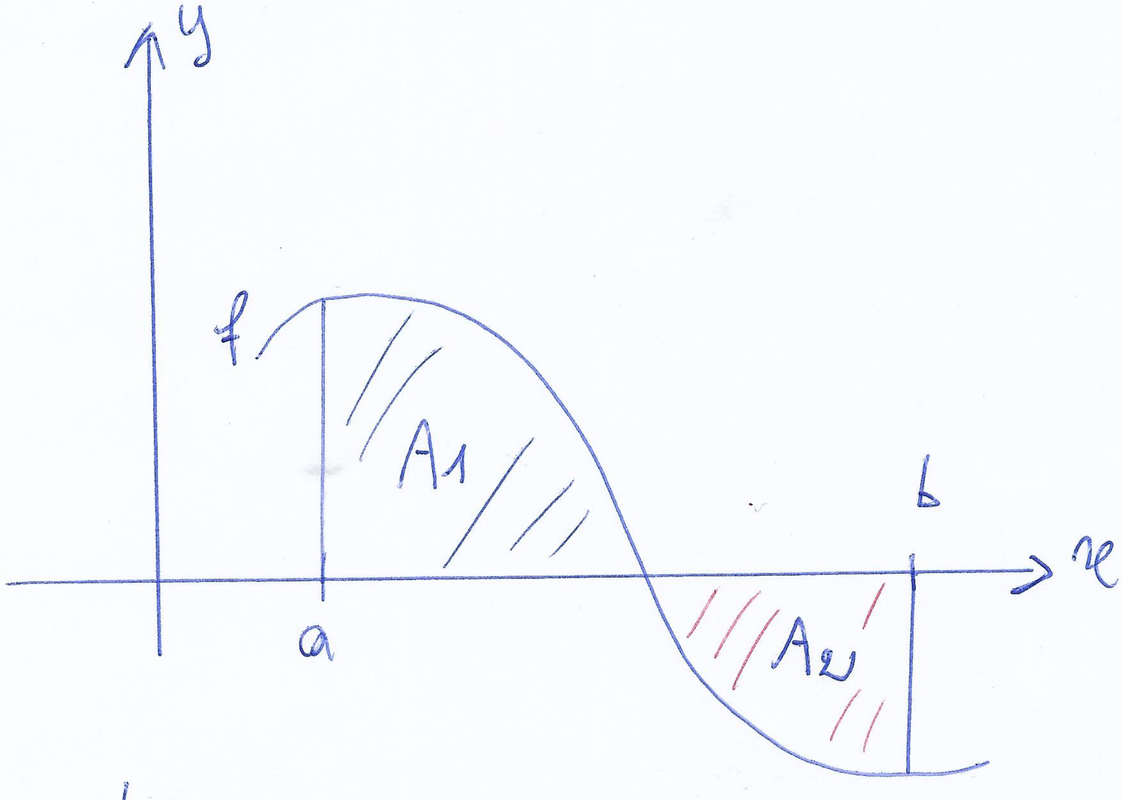
Intégration des fonctions numériques (rappels)

- Toute fonction numérique f sur $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ (a, b deux reels $a<b$) est intégrable sur $[a,b]$ et admet une primitive F sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$
- Dans ce cas toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + K$ avec K une constante réelle.
- $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Interprétation graphique de l'intégrale



$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

Quelques primitives usuelles (cf. formulaire)

	$f(x)$	$F(x)$	Intervalle de validité
	k	kx	$\mathbb{R}$
	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$ $n \in \mathbb{R}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
	x^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a \neq 0$	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
	$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
	$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$a \neq 0$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\mathbb{R}$

Operations et primitives

$u' u^n$ sur $[a,b]$: $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ (primitive)

$n \in \mathbb{Q}^*$

$\frac{u'}{u}$ sur I : $\to \ln u$ si $u(x) > 0$ sur I

$\to \ln(-u)$ si $u(x) < 0$ sur I

$u' e^u$ sur I : e^u

---

ex: 1) $\int_1^2 e^{3x}\,dx$

2) $\int_0^1 x^3+3x^2-x+1\,dx$

3) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin 2x)\,dx$

5) $\int_1^2 \frac{2}{x}\,dx$

6) $\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

7) $\int_1^2 (2x+1)\, e^{x^2+x+3}\,dx$

Propriétés de l'intégrale

f, g 2 fonctions continues sur $[a, b]$:

a, b, c 3 réels. λ, μ 2 réels.

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx$$
$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

3) $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3') $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

Intégration par partie

$$\boxed{\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)\, v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx}$$

ex : $I = \int_0^1 (2x+1)\, e^{-2x}\, dx$

$u(x) = 2x+1$	$u'(x) = 2$
$v'(x) = e^{-2x}$	$v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

donc

$$I = -\frac{1}{2}\left[(2x+1)\, e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(3\, e^{-2} - 1\right) + \left[-\frac{1}{2}\, e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{3}{2} e^{-2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2 - \frac{2}{e^2} = 2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Changement de variable $t = \varphi(x)$

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(\underline{\varphi(x)})\, \underbrace{\varphi'(x)\, dx} = \int_{\underline{\varphi(x_1)}}^{\underline{\varphi(x_2)}} f(t)\, dt}$$

hypothèses :

- φ de classe C_1 sur $[x_1, x_2]$
(continue, dérivable et de dérivée continue sur $[x_1, x_2]$)

- f continue sur $\varphi([x_1, x_2])$

(en pratique on écrit que $dt = \varphi'(x)\, dx$

exemple : $I = \int_1^2 e^{3x+2}\, dx \qquad t = 3x+2$

$dt = 3\, dx$

$$= \frac{1}{3}\int_5^8 e^t\, dt = \frac{1}{3}\left[e^t\right]_5^8 = \frac{1}{3}(e^8 - e^5)$$

Exercices

1) $\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx$ avec $t = x^2+1$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ $t = 2x+\frac{\pi}{2}$

3) $\int_2^3 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ avec $t = \ln x$

4) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$