Université de Sherbrooke

IFT712 - TP1

Authors
Alexandre Theisse
Louis-Vincent Capelli
Tom Sartori

October 3, 2023

1 Partie Théorique

1.1 Question 1

Nous devons démontrer que $H[x,y] = H[y|x] + H[x]$.

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(x,y)\right)$$

En utilisant que $p(x,y) = p(x)p(y|x)$:

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(y|x)p(x)\right)$$

Par la propriété que $log(a \cdot b) = log(a) + log(b)$ et que l'addition est linéaire :

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(y|x)\right) - \sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(x)\right)$$

Or par les probabilités totales, $\sum_y P(x,y) = P(x)$.
Soit :

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(y|x)\right) - \sum_x P(x) \log\left(P(x)\right)$$

$$H[y|x] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(y|x)\right)$$

$$H[x] = -\sum_x P(x) \log\left(P(x)\right)$$

Ainsi :

$$H[x,y] = H[y|x] + H[x]$$

1.2 Question 2

Démontrons que $I[x,y] = H[x] - H[x|y]$.

$$I(X,Y) = \sum_{x,y} P(x,y) \log\left(\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}\right)$$

Utilisons $log(\frac{a}{b}) = log(a) - log(b)$:

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(P(x,y)\right) - \log\left(P(x) * P(y)\right))$$

Séparation de la somme en trois sommes, car l'addition est linéaire :

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(P(x,y)\right) - \sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(x)\right) - \sum_x \sum_y P(x,y) \log\left(P(y)\right)$$

Or, nous allons remettre la 1^{re} et la 3^{e} somme ensemble, par le fait que l'addition est linéaire et que $log(a) - log(b) = log(\frac{a}{b})$

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(\frac{P(x,y)}{P(y)}\right) - \sum_x \log\left(P(x)\right) \sum_y P(x,y) :$$

De part le fait que, $log(P(x))$ ne dépend pas de y, on peut sortir ce dernier de la somme sur y. De plus, sachant que $\sum_y P(x,y) = P(x)$ alors, par la propriété des probabilités totales :

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(\frac{P(x,y)}{P(y)}\right) - \sum_x P(x) \log\left(P(x)\right)$$

Or, $H[x] = -\sum_x P(x)\log\left(P(x)\right)$. Donc, on peut simplifier comme suit :

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(\frac{P(x,y)}{P(y)}\right) + H[x]$$

Comme $P(x,y) = P(x|y)P(y)$:

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(P(x|y)\right) + H[x]$$

Enfin, car $-H[x|y] = \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(P(x|y)\right)$, alors on a bien :

$$I[x,y] = H[x] - H[x|y]$$

1.3 Question 3

Nous allons démontrer que $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$:

Par définition :

$$Cov(X,Y) = E\big[(X - E[X])(Y - E[Y])$$

Ainsi :

$$= E\big[XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y]\big]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y]$$

Par continuité de l'espérance :

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

1.4 Question 4

Soit X, une variable aléatoire binaire représentée par la distribution suivantes :

$$0; 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 1; 0$$

A partir de cette distribution, nous pouvons déduire que :

- $P(X=0) = \frac{7}{10}$, car il y a sept "0" sur dix tirages.
- $P(X=1) = \frac{3}{10}$, car il y a trois "1" sur dix tirages.

Pour calculer l'espérance, par définition $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, alors :

$$E[X] = 0 \cdot \frac{7}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Pour calculer la variance, par définition $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, alors :

$$E[X^2] = 0^2 \cdot \frac{7}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$(E[X])^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$$

Ainsi :

$$V[X] = \frac{3}{10} + \frac{9}{100} = \frac{21}{100}$$

Pour calculer l'entropie, par définition $H[x] = -P(X) \cdot log(P(X))$, alors :

$$H[X] = -\frac{7}{10} \cdot log\left(\frac{7}{10}\right) - \frac{3}{10} \cdot log\left(\frac{3}{10}\right) = 0,88$$