1 Partie Théorique

1.1 Question 1

Nous devons démontrer que H[x,y] = H[y—x] + H[x]

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(x,y))$$

En utilisant que p(x,y) = p(x)p(y—x)

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(y|x)p(x))$$

Par la propriété que log(a*b) = log(a) + log(b) et que l'addition est linéaire

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(y|x)) - \sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(x))$$

Or par les probabilité totale

$$\sum_y P(x,y) = P(x)$$

Soit

$$H[x,y] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(y|x)) - \sum_x P(x) \log (P(x))$$

$$H[y|x] = -\sum_x \sum_y P(x,y) \log (P(y|x))$$

$$H[x] = -\sum_x P(x) \log (P(x))$$

Soit

$$H[x,y] = H[y|x] + H[x]$$

1.2 Question 2

Démontrons que I[X,Y]= H[X]- H[X—Y]

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} P(x,y) \log \left(\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)} \right)$$

Utilisation que log(a/b)= log(a) -log(b)

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log (P(x,y)) - \log (P(x) * P(y))$$

Séparation de la somme en trois sommes car l'addition est linéaire

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log(P(x,y)) - \sum_x \sum_y P(x,y)\log(P(x)) - \sum_x \sum_y P(x,y)\log(P(y))$$

Or nous allons remettre la 1ère et la 3ème somme ensemble par le fait que l'addition est linéaire et que log(a) -log(b)= log(a/b)

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(\frac{P(x,y)}{P(y)}\right) - \sum_x \log(P(x)) \sum_y P(x,y)$$

Par le fait, que log(P(x)) ne dépends pas de y, on a pu le sortir de la somme sur y et sachant que

$$\sum_y P(x,y) = P(x)$$

par la propriété des probabilité totale

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(\frac{P(x,y)}{P(y)}\right) - \sum_x P(x)\log(P(x))$$

$$H[x] = -\sum_x P(x)\log(P(x))$$

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log\left(\frac{P(x,y)}{P(y)}\right) + H[x]$$

Par le fait que P(x,y)=P(x—y)P(y)

$$= \sum_x \sum_y P(x,y)(\log(P(x|y)) + H[x]$$

Soit finalement car

$$-H[x|y] = \sum_x \sum_y P(x,y)(\log(P(x|y))$$

$$I[x,y] = H[x] - H[x|y]$$

1.3 Question 3

Nous allons démontrer que Cov(X,Y) = E[XY] -E[X]E[Y] :
Soit Cov(X,Y) = E[(X-E[X]])([Y-E[Y])] par définition du cours
Cov(X,Y) = E[XY -XE[Y] -E[X]Y +E[X]E[Y]]
= E[XY] -E[X]E[Y] - E[X]E[Y] +E[X]E[Y] par la continuité de l'espérance
= E[XY] -E[X]E[Y]

1.4 Question 4

Soit X une variable aléatoire binaire réprésentait par la distribution suivantes :
0 ; 0 ; 0; 1; 0; 0 ; 1; 0; 1; 0

A partir de cette distribution , nous pouvons déduire que :

P(X=0) = 7/10 il y a 7 zéros sur 10 tirage
P(X=1) = 3/10 il y a 3 uns sur 10 tirages

Pour calculer l'Espérance et la Variance, il faut faire :
E[X] = 0*7/10 + 1*3/10 = 3/10
V[X] = E[X^2] - $(E[X])^2$ par définition
E[X^2]= 0^2 *7/10 + 1^2 *3/10=3/10
$(E[X])^2$ = $(3/10)^2$ = 9/100
Soit V[X] = 21/100

Enfin, pour calculer l'Entropie : H[x]= -P(X)*log(P(X))
H[x] = -7/10*log(7/10) -3/10*log(3/10) = 0,88