Représentation des données – Arithmétique flottante

Tanmoy MONDAL

tanmoy.mondal@lirmm.fr

Diapos de D. Delahaye et Chouki TIBERMACINE

Système de numération octal

- Utilise huit chiffres, 0,1,2,3,4,5,6,7.
- Aussi appelé système de base 8

Step	Octal Number	Decimal Number
Step 1	12570_8	$((1 \times 8^4) + (2 \times 8^3) + (5 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (0 \times 8^0))_{10}$
Step 2	12570_8	$(4096 + 1024 + 320 + 56 + 0)_{10}$
Step 3	12570_8	5496_{10}

Système de numération Hexadécimal

- Utilise 10 chiffres et 6 lettres, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F.
- Les lettres représentent des nombres à partir de 10. A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.
- Aussi appelé système de base 16.

Step	Hexadecimal Number	Decimal Number
Step 1	$19FDE_{16}$	$((1 \times 16^4) + (9 \times 16^3) + (F \times 16^2) + (D \times 16^1) + (E \times 16^0))_{10}$
Step 2	$19FDE_{16}$	$((1 \times 16^4) + (9 \times 16^3) + (15 \times 16^2) + (13 \times 16^1) + (14 \times 16^0))_{10}$
Step 3	$19FDE_{16}$	$(65536 + 36864 + 3840 + 208 + 14)_{10}$
Step 4	$19FDE_{16}$	106462_{10}

Conversions de base

- Suivre le tableau
- voir : https://www.tutorialspoint.com/digital_circuits/digital_circuits_base_conversions.htm

Représentation des nombres réels

- Un nombre réel dans le système décimal peut s'écrire :

$$n = d_m d_{m-1} \dots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \dots d_{-p}$$

5 * 10^{1}	50
6 * 10^{0}	6
4 * 10^{-1}	4/10
8 * 10^{-2}	8/100
2 * 10^{-3}	2/1000

- La valeur du nombre :

$$n = \sum_{i=-p}^{m} d_i \ x \ 10^i$$

- Exemple :

$$23.375 = 2x10^1 + 3x10^0 + 3x10^{-1} + 7x10^{-2} + 5x10^{-3} = 23375/1000$$

Nombres réels en binaire

- Un nombre réel dans le système binaire peut être écrit :

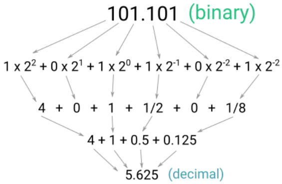
$$n = b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \dots b_{-p}$$

- La valeur du nombre :

$$n = \sum_{i=-p}^{m} b_i \ x \ 2^i$$

$1 * 2^2$	4
$0 * 2^1$	0
$1 * 2^0$	1
$1 * 2^{-1}$	1/2
$0 * 2^{-2}$	0
$1 * 2^{-3}$	1/8

- Exemple :



Du décimal au binaire

- La multiplication est utilisée
- S'il s'agit d'un nombre entier (> = 1.0), le bit est 1
- $0.375_{10} \longrightarrow ?_2$
  0.375 x 2 = 0.75 = 0 + 0.75
  0.75 x 2 = 1.5 = 1 + 0.5
  0.5 x 2 = 1.0 = 1 + 0.0
- $0.375_{10} \longrightarrow 0.011_2$

- La partie décimale est ensuite utilisée pour le calcul suivant
- Une fois que le résultat atteint 1.0, la conversion est terminée

Du décimal au binaire

- Il y a beaucoup de nombres qui n'aboutissent pas à un résultat de 1.0
- Une fois que le résultat atteint 1.0, la conversion est terminée
- Puisqu'il y a t bits possibles pour la mantisse
- La conversion se termine dès que t bits sont atteints
- $0.4_{10} \longrightarrow ?_2$

  0.4 x 2 = 0.8 = 0 + 0.8

  0.8 x 2 = 1.6 = 1 + 0.6

  0.6 x 2 = 1.2 = 1 + 0.2

  0.2 x 2 = 0.4 = 0 + 0.4

  $\Rightarrow$0.4 x 2 = 0.8 = 0 + 0.8
- $0.4_{10} \longrightarrow 0.0110\,[0110]_2$

Du binaire au décimal

342,75

= 101010110,11

$0,75 \times 2 = 1 + 0,5$

$0,5 \times 2 = 1$

342/2 = 0
171/2 = 1
85/2 = 1
42/2 = 0
21/2 = 1
10/2 = 0
5/2 = 1   2/2 = 0   1/2 = 1

Quelle est la valeur en décimal des nombres binaires suivants ?

- $0.1_2 = ?_{10}$ = 0,5
- $0.01_2 = ?_{10}$ 0,25
- $0.11_2 = ?_{10}$ 0,75 0,5 + 0,25
- $0.1001_2 = ?_{10}$ 0,5625 $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$

Du binaire au décimal

Quelle est la valeur en décimal des nombres binaires suivants ?

- $0.1_2 = 0.5_{10}$
- $0.01_2 = 0.25_{10}$
- $0.11_2 = 0.5_{10} + 0.25_{10} = 0.75_{10}$
- $0.1001_2 = 0.5_{10} + 0.0625_{10} = 0.5625_{10}$

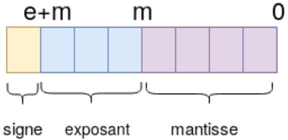
Nombres réels en notation scientifique

- Notation : $\pm m\ x\ 10^{n}$ ou $\pm m$ E^{e}
  où : $\pm$ est le **signe**, m est la **mantisse** et e est l'**exposant**
- 123 400 000 000 000 s'écrit $1.234\ x\ 10^{14}$ ou 1.234E14
- 0.000 000 000 000 123 s'écrit $1.23\ x\ 10^{-13}$ ou 1.23E-13

Nombres réels binaires en virgule flottante (équiv. notation scientifique)

- Dans le cas général, on écrit : $\pm m \; x \; B^e$
  où B est la base
- Dans le système binaire : $\pm m \; x \; 2^e$
  où m (mantisse) est exprimée sous la forme d'un nombre binaire
- En variant l'exposant, on fait “flotter” la virgule
- Avantage : Pour un même nombre de bits donné, on peut représenter un intervalle de nombres plus important que les représentations des entiers ou à virgule fixe

Codage binaire des nombres réels



- Le codage sur un nombre n (=e+m+1) de bits, fixe, implique un nombre fini de valeurs
- Ceci implique des calculs arrondis (perte de précision) et des erreurs d'arrondi
- Un même nombre peut être représenté de différentes façons : $0.110x2^5 = 110x2^2 = 0.0110x2^6$

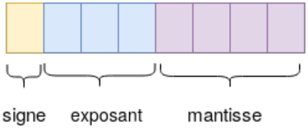
Codage binaire des nombres réels -suite-

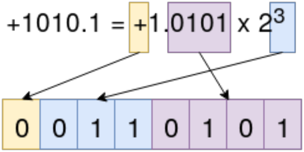
1. Convertir séparément les entiers et les décimales
2. Ajoutez $\times 2^0$ à la fin du nombre binaire (qui ne change pas sa valeur)
3. Pour éviter des représentations différentes d'un même nombre, la mantisse est normalisée
   - Couramment, un nombre (différent de zéro) avec une mantisse normalisée a la forme suivante : $\pm 1.bbb\ldots x2^e$
   - Le chiffre 1 à gauche du point décimal est retiré de la représentation pour gagner un bit (il devient implicite)
4. Avec la notation normalisée (mantisse : 1.bbb x 2^e), omettez 1 tout à gauche et remplissez avec des zéros à droite

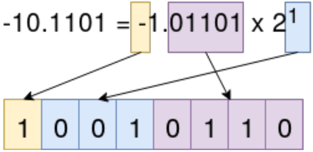
Codage binaire des nombres réels -suite-

1. Représenter l'exposant avec un décalage ("Biais")
2. Biais = $2^{|e|-1} - 1$ (|e| : taille de l'exposant)
3. Pour un exposant sur |e| bits :
   i Au lieu de représenter les nombres de 0 à $2^{|e|} - 1$ (Ex : |e|=8, [0,255])
   ii On représentera les nombres [$-2^{|e|-1}$-1 , $2^{|e|-1}$]
   iii (pour |e|=8, biais = 2^{8-1}-1 = 127 $\longrightarrow$ [-127,128])
4. Définissez le bit de signe, 1 pour négatif, 0 pour positif, en fonction du signe du nombre initial

Exemple de codage binaire







Représentation des nombres flottants

Exercice

Quelle est la valeur du nombre représenté en virgule flottante de la façon suivante, avec |e|=3 |m|=4 ? 1 110 1001

$$\underbrace{1}_{\text{signe}}\ \underbrace{110}_{\text{exp}}\ \underbrace{1001}_{\text{mantisse}} \rightarrow 1{,}1001 \times 2^{x}$$

$$\text{exp} = x + \text{biais}$$
$$6 = x + (2^{3-1} - 1)$$
$$6 = x + 3$$
$$x = 3$$

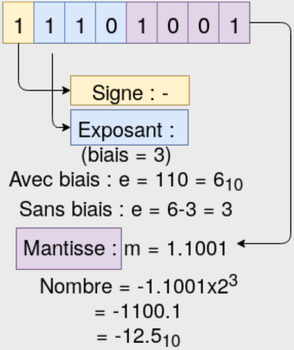
$$\rightarrow 1{,}1001 \times 10^{3}$$
$$= - 1100{,}1 \times 10^{0}$$
$$= -(1 \times 2^{3} + 1 \times 2^{2} + 1 \times \tfrac{1}{2})$$
$$= -(8 + 4 + \tfrac{1}{2})$$
$$= -12{,}5$$

Représentation des nombres flottants

Exercice

Quelle est la valeur du nombre représenté en virgule flottante de la façon suivante, avec |e|=3 |m|=4 ? 1 110 1001

Solution



Normalisation du codage des flottants

Norme IEEE 754 (standard)

- Format simple précision : 32 bits
  - Bit du signe (1 bit) ;
  - Exposant (8 bits) ;
  - Mantisse (23 bits).
- Format double précision : 64 bits
  - Bit du signe (1 bit) ;
  - Exposant (11 bits) ;
  - Mantisse (52 bits).
- Autres formats :
  - Simple précision étendue ($\geq$ 43 bits, obsolète) ;
  - Double précision étendue ($\geq$ 79 bits, long double de C).

Normalisation du codage des flottants

Precisions

- Single precision: 32 bits

s	exp	frac
1	8-bits	23-bits

- Double precision: 64 bits

s	exp	frac
1	11-bits	52-bits

- Extended precision: 80 bits (Intel only)

s	exp	frac
1	15-bits	63 or 64-bits

D'une représentation à l'autre

Exemples en simple précision

- Valeur décimale de :

$$0\ 10000010\ 11000000000000000000000$$

  - 0 = positif $\Rightarrow$ s=+1 ;
  - $e_d = 10000010_2 = 130_{10}$, e = 130_{10} - $\underbrace{127_{10}}_{}$ = 3_{10} ; $(2^{8-1}-1)$
  - m = $1.11_2 = 1.75_{10}$;
  - n = $+1 \times 1.75 \times 2^3 = 14$;
  - ou bien n = $+1 \times 1.11_2 \times 2^3 = 1110_2 = 14$.

D'une représentation à l'autre

Exemples en simple précision

- Valeur binaire de : -118.625_{10}
  - bit de signe = 1 (négatif) ;
  - 118_{10} = 1110110_2 ;
  - $0.625 \times 2 = 1.25 = \underline{1} + 0.25$;
  - $0.25 \times 2 = 0.5 = \underline{0} + 0.5$;
  - $0.5 \times 2 = 1.0 = \underline{1} + 0$;
  - 0.625 = 101_2 ;
  - 118.625_{10} = 1110110.101_2 = 1.110110101×2^6 ;
  - e_d = 6 + 127 = 133 = 10000101_2 ;
  - représentation : 1 10000101 11011010100000000000000.

Problèmes de représentation de certains nombres

Comment représenter les exposants négatifs ?

- Encodage : on ajoute le biais
  Ex sur 3 bits (biais = 3) : exposant = $2_{10} \longrightarrow 2+3 = 5 = 101_2$
- décodage : on retire le biais
  Ex sur 3 bits : $010_2 \longrightarrow 2\text{-}3 = \text{-}1$

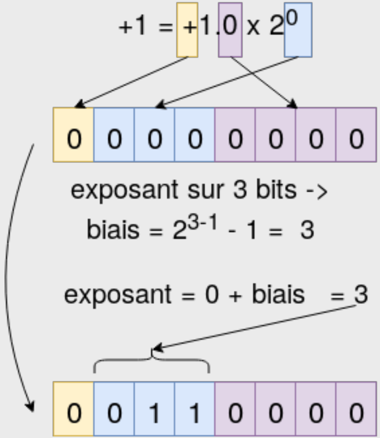
Problèmes de représentation de certains nombres

Exercice

Écrire le nombre +1 avec un exposant de 3 bits et une mantisse de 4 bits

Problèmes de représentation de certains nombres

Solution



D'une représentation à l'autre

128

E = x + biais

130 = x + $2^7 - 1$ = 127

1,1111011 × 2^3

1111,1011

x = 3 − 15,6875

0,5 0,625

0,0625

Exercice en simple précision

- Donner la valeur décimale de :
  - 1 10000010 11110110000000000000000.
- Donner la représentation de :
  - 3.1416015625_{10}.
- Que se passe-t-il si l'on souhaite représenter 3.14_{10} ?
- Comment obtient-on le plus petit nombre normalisé positif ?
- Comment obtient-on le plus petit nombre dénormalisé positif ?

Correction

$- \leftarrow 1\ \underbrace{10000010}_{}\ 1111011000000\ldots$

$e = 130$
$e = x + \text{biais}$
$130 = x + 2^{8-1} - 1$
$x =$

- Donner la valeur décimale de :
  - 1 10000010 11110110000000000000000 ;
  - Solution : -15.6875.
- Donner la représentation de :
  - 3.1416015625_{10} ;
  - Solution : 0 10000000 10010010001000000000000.
- Pour 3.14_{10}, il n'est pas exactement représentable. Il est donc approximé (on s'arrête à la fin de la mantisse, troncature).
- Plus petit nombre normalisé positif :
  - Plus petit e_d non nul (00000001) et mantisse nulle ;
  - Résultat : 2^{-126}.
- Plus petit nombre dénormalisé positif :
  - Exposant décalé : 0 (par définition) ;
  - Mantisse : 00000000000000000000001 ;
  - Résultat : $2^{-23} \times 2^{-126} = 2^{-149}$.

Calculs sur les flottants

Addition

- Addition de :
  - X = 0 10000001 11000000000000000000000 ;
  - Y = 0 01111111 00000000000000000000000 ;
  - X = 1.11 × 2^2, Y = 1.0 × 2^0 ;
  - On aligne les exposants (sur le plus grand) ;
  - Y = 0.01 × 2^2 ;
  - On additionne les mantisses :
    1.11000000000000000000000 +
    0.01000000000000000000000 =
    10.00000000000000000000000
  - Résultat = 10.0 × 2^2 = 1.0 × 2^3 ;
  - Codage : 0 10000010 00000000000000000000000.

Calculs sur les flottants

Exercice

- Additionner les deux flottants suivants :
  - X = 0 10000001 11000000000000000000000 ;
  - Y = 0 01111110 11000000000000000000011.
- Additionner les deux flottants suivants :
  - X = 0 11111110 11000000000000000000000 ;
  - Y = 0 01111111 11000000000000000000000.

Calculs sur les flottants

Solution : Additionner les deux flottants

- X = 0 10000001 11000000000000000000000 ;
- Valeur de X :
  - $e_d = 10000001_2 = 129_{10}$, e = 129-127 = 2
  - Valeur de X = 1.11 x 2^2
- Y = 0 01111110 11000000000000000000011.
- Valeur de Y :
  - $e_d = 01111110_2 = 126_{10}$, e = 126-127 = -1
  - Valeur de Y = 1.11000000000000000000011 x 2^{-1}
- Aligner les exposants :
  Valeur de Y = 0.00111 x 2^2 **(perte de précision)**
- Somme = 1.11111 x 2^2
- Codage : 0 10000001 11111000...0

Calculs sur les flottants

Solution : Additionner les deux flottants

- X = 0 11111110 11000000000000000000000
- Valeur de X :
  - e_d = 11111110_2 = 254_{10}, e = 254-127 = 127
  - Valeur de X = 1.11 x 2^{127} (Très grand nombre)
- Y = 0 01111111 11000000000000000000000
- Valeur de Y :
  - e_d = 01111111_2 = 127_{10}, e = 127-127 = 0
  - Valeur de Y = 1.11 x 2^0
- Aligner les exposants :
  Valeur de Y = 0.00....0 x 2^{127} **(perte de précision)**
- Somme = 1.11 x 2^{127} = Valeur de Y (absorption)
- Codage = X

Calculs sur les flottants

Exercice

- Multiplier les deux flottants suivants :
  - X = 0 10000001 01000000000000000000000 ;
  - Y = 0 01111111 11000000000000000000000.

Calculs sur les flottants

Correction

- Multiplier les deux flottants suivants :
  - X = 0 10000001 01000000000000000000000 ;
  - Y = 0 01111111 11000000000000000000000 ;
  - $X = 1.01 \times 2^2$, $Y = 1.11 \times 2^0$;
  - Addition des exposants : $2 + 0 = 2$;
  - Multiplication des mantisses : $1.01 \times 1.11 = 10.0011$;
  - Résultat = 1.00011×2^3 (exposant incrémenté) ;
  - Codage : 0 10000010 00011000000000000000000.

Diapos et références

Diapos constuites sur la base du cours de :

David Delahaye, professeur à la FDS (mon prédécesseur)
Chouki TIBERMACINE, MCF à PolyTech-Montpellier (mon prédécesseur)

Références bibliographiques

- Paolo Zanella, Yves Ligier et Emmanuel Lazard. Architecture et technologie des ordinateurs - 6e éd. - Cours et exercices corrigés. Septembre 2018
- Utilisation des nombres à virgule flottante (risques) : `https://www.ekito.fr/people/les-nombres-virgule-flottante/`