Mathématiques de la décision

Méthode du simplexe

IG3

2021/2022

la méthode du simplexe passe également par les solutions réalisables, mais d'une manière plus intelligente. Elle passe de l'une à l'autre tout en améliorant sans cesse la valeur de la fonction objectif, jusqu'à ce qu'elle atteigne une solution optimale.

Exemple. un problème de transport optimal assimilable à un problème d'optimisation linéaire en dimension 6. De ce fait, il ne sera plus possible de le résoudre au moyen de la méthode graphique du chapitre précédent.

Notre fabricant d'automobiles possède trois chaînes de montage M_1, M_2 et M_3, tandis que son stock d'acier provient de deux aciéries A_1 et A_2 : Les coûts de transport d'une unité d'acier d'une aciérie vers une usine de montage sont données par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3
A_1	8	16	20
A_2	11	23	34

Les capacités de production des chaînes de montage différent, ainsi que les capacités de production des aciéries.

A_1	256
A_2	309

M_1	154
M_2	298
M_3	341

Il s'agit donc pour le fabricant de déterminer le plan de transport des unités d'acier produites vers les chaînes de montage affin de minimiser le coût total de transport. Pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, 3$, notons x_{ij} le nombre d'unités d'acier acheminées depuis l'aciérie A_i vers la chaîne de montage M_j : Le problème de transport optimal peut alors s'écrire :

$$\text{minimiser } 8x_{11} + 16x_{12} + 20x_{13} + 11x_{21} + 23x_{22} + 34x_{23},$$

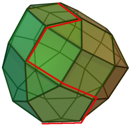
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 256, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 309, \\ x_{11} + x_{21} \leqslant 154, \\ x_{12} + x_{22} \leqslant 289, \\ x_{13} + x_{23} \leqslant 341, \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0. \end{cases}$$

Principe de l'algorithme du simplexe

fonction simplexe
  sommet $= (0, \dots, 0)$
  tant que sommet non optimal
    trouver un sommet voisin qui améliore l'objectif
  renvoyer sommet optimal

Objectif

L'ensemble réalisable d'un problème d'optimisation linéaire bien posé décrit un polyèdre dans l'espace. L'un des sommets est la solution optimale, mais il y a $\binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ sommets (n inconnues, m inéquations). La méthode du simplexe est un algorithme permettant de trouver un chemin parmi les sommets de ce polyèdre jusqu'à celui correspondant à la solution optimale.



Variables d'écart et forme standard

Considérons le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{maximiser} \;\; 2x_1 + 6x_2 + 9,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 17 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

On introduit les variables d'écart $x_3, x_4 \geqslant 0$ pour passer d'inéquations à des équations :

$$\text{maximiser} \;\; 2x_1 + 6x_2 + 9,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 \quad\;\; + x_4 = 17 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Le problème est dit maintenant sous forme standard.

Problème standard sous forme matricielle

Posons $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d = 9$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire le problème standard sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & CX + d \\ & AX = B \\ & X \geqslant 0. \end{aligned}$$

Écriture en matrice augmentée

Définition. On définit la matrice augmentée du problème

$$\begin{aligned} \text{maximiser } & CX + d \\ & AX = B \\ & X \geqslant 0 \end{aligned}$$

par la jonction de A, B, C et $-d$ suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 17 \\ \hline 2 & 6 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right).$$

Remarques.

- La condition $X \geqslant 0$ est implicite.
- Il ne faut pas oublier de changer le signe de d dans la matrice augmentée.

Définition. On peut choisir un ensemble de variables dont leur colonne dans A forment la matrice identité à permutation près, on les appellera variables de base.

Exemple.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 8 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

On peut choisir x_1, x_4 comme variables de base. Les variables hors-base sont donc x_2, x_3.

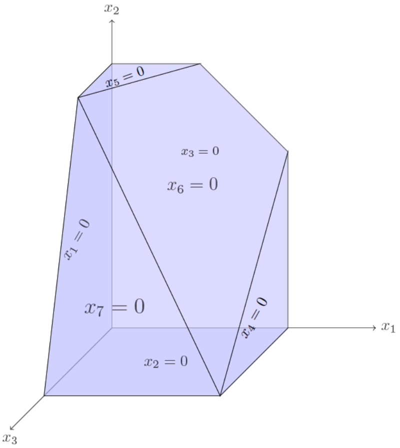
Définition. On appelle solution de base, la solution obtenue en posant les variables hors-base égales à 0.

Exemple. Dans l'exemple précédent, la solution de base est $(3, 0, 0, 6)$.

Exemple d'exécution.

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\text{maximiser } x_1 \quad + \quad 6x_2 \quad + \quad 13x_3,$$
$$\begin{cases} x_1 \leqslant 200 \\ x_2 \leqslant 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 400 \\ x_2 + 3x_3 \leqslant 600. \end{cases}$$

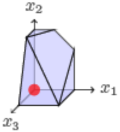


On introduit les variables d'écart x_4, x_5, x_6, x_7 pour obtenir des égalités. On trouve le problème équationnel équivalent au précédent :

$$\text{maximiser } x_1 + 6x_2 + 13x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 & = 200 \\ x_2 + x_5 & = 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 & = 400 \\ x_2 + 3x_3 + x_7 & = 600 \end{cases}$$

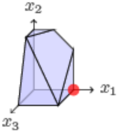
$$\text{maximiser} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc on considère **les variables x_1, x_2 et x_3 comme nuls**.

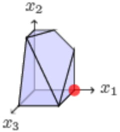


$$\text{maximiser } x_1 + 6x_2 + 13x_3 \quad \begin{cases} x_4 = 200 - x_1 \\ x_5 = 300 - x_2 \\ x_6 = 400 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_7 = 600 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_4 := 0 \qquad x_1 \nearrow}$$

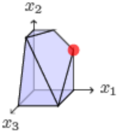


$$\text{maximiser } 200 - x_4 + 6x_2 + 13x_3 \quad \begin{cases} x_1 = 200 - x_4 \\ x_5 = 300 - x_2 \\ x_6 = 200 + x_4 - x_2 - x_3 \\ x_7 = 600 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

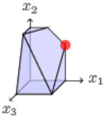


$$\text{maximiser } 200 - x_4 + 6x_2 + 13x_3 \quad \begin{cases} x_1 = 200 - x_4 \\ x_5 = 300 - x_2 \\ x_6 = 200 + x_4 - x_2 - x_3 \\ x_7 = 600 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_6 := 0 \qquad x_2 \nearrow}$$

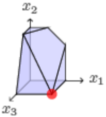


$$\text{maximiser } 1400 + 5x_4 - 6x_6 + 7x_3 \quad \begin{cases} x_1 = 200 - x_4 \\ x_5 = 100 - x_4 + x_6 + x_3 \\ x_2 = 200 + x_4 - x_6 - x_3 \\ x_7 = 400 - x_4 + x_6 - 2x_3 \end{cases}$$

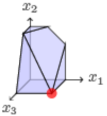


maximiser $1400 + 5x_4 - 6x_6 + 7x_3$
$$\begin{cases} x_1 &= 200 - x_4 \\ x_5 &= 100 - x_4 + x_6 + x_3 \\ x_2 &= 200 + x_4 - x_6 - x_3 \\ x_7 &= 400 - x_4 + x_6 - 2x_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_2 := 0 \qquad x_3 \nearrow}$$

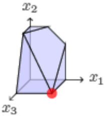


maximiser $2800 + 12x_4 - 13x_6 - 7x_2$
$$\begin{cases} x_1 &= 200 - x_4 \\ x_5 &= 300 - x_2 \\ x_3 &= 200 + x_4 - x_6 - x_2 \\ x_7 &= -3x_4 + 3x_6 + 2x_2 \end{cases}$$

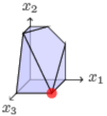


maximiser $2800 + 12x_4 - 13x_6 - 7x_2$
$$\begin{cases} x_1 &= 200 - x_4 \\ x_5 &= 300 - x_2 \\ x_3 &= 200 + x_4 - x_6 - x_2 \\ x_7 &= -3x_4 + 3x_6 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_7 := 0 \qquad x_4 \nearrow}$$

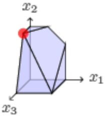


maximiser $2800 - x_6 - 4x_7 + x_2$
$$\begin{cases} x_1 &= 200 - x_6 + \frac{x_7}{3} - \frac{2x_2}{3} \\ x_5 &= 300 - x_2 \\ x_3 &= 200 - \frac{x_7}{3} - \frac{x_2}{3} \\ x_4 &= x_6 - \frac{x_7}{3} + \frac{2x_2}{3} \end{cases}$$



maximiser $2800 - x_6 - 4x_7 + x_2$
$$\begin{cases} x_1 &= 200 - x_6 + \frac{x_7}{3} - \frac{2x_2}{3} \\ x_5 &= 300 - x_2 \\ x_3 &= 200 - \frac{x_7}{3} - \frac{x_2}{3} \\ x_4 &= x_6 - \frac{x_7}{3} + \frac{2x_2}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x_5 := 0 \qquad x_2 \nearrow}$$



maximiser $3100 - 4x_7 - x_6 - x_5$
$$\begin{cases} x_1 &= 0 + \ldots \\ x_2 &= 300 - \epsilon_2 \\ x_3 &= 100 + \ldots \\ \epsilon_1 &= \ldots \end{cases}$$

Un programme n'admet pas (0,0) comme solution :

$$\text{maximiser } 2x_1 - x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 5x_2 \leqslant -4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1. On construit un programme auxiliaire, en introduisant une variable auxiliaire x_0,

$$\text{maximiser } -x_0,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_0 \leqslant 2 \\ x_1 - 5x_2 - x_0 \leqslant -4 \\ x_1, x_2, x_0 \geqslant 0 \end{cases}$$

2. On met ce programme sous forme équationnelle.

$$\text{maximiser } -x_0,$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0 \\ x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 - x_0 \\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

1. On cherche le pivot : la variable de valeur la plus petite (-4) est x_4.

$$\begin{array}{l}\text{maximiser } -x_0\\ \begin{cases} x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0\\ x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0\\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geq 0\end{cases}\end{array} \xrightarrow{x_4 := 0 \quad x_0 \nearrow} \begin{array}{l}\text{maximiser } -4 - x_1 + 5x_2 + x_4\\ \begin{cases} x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4\\ x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 - x_4\\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geq 0\end{cases}\end{array}$$

2. On fait l'exécution de l'algorithme du simplexe. Du coup, on décide d'augmenter x_2,

$$\begin{array}{l}\text{maximiser } -4 - x_1 + 5x_2 + x_4\\ \begin{cases} x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4\\ x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 - x_4\\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geq 0\end{cases}\end{array} \xrightarrow{x_0 := 0 \quad x_3 \nearrow} \begin{array}{l}\text{maximiser } -x_0\\ \begin{cases} x_3 = \frac{14}{5} + \frac{4x_0}{5} - \frac{9x_1}{5} + \frac{x_4}{5}\\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{x_0}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_4}{5}\\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geq 0\end{cases}\end{array}$$

L'algorithme du simplexe termine et le maximum vaut bien 0.

1. Réécriture de la fonction objectif. On remet l'objectif initial, que l'on réécrit avec les variables "nulles" x_1 et x_2, puis on enlève x_0 qui est nul :

$$\text{maximiser } 2x_1 - x_2 \quad \begin{cases} x_3 = \frac{14}{5} + \frac{4x_0}{5} - \frac{9x_1}{5} + \frac{x_4}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{x_0}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_4}{5} \\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{maximiser } -\frac{4}{5} + \frac{x_0}{5} + \frac{9x_1}{5} - \frac{x_4}{5} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{14}{5} + \frac{4x_0}{5} - \frac{9x_1}{5} + \frac{x_4}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5} - \frac{x_0}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_4}{5} \\ x_1, x_2, x_0, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{maximiser } -\frac{4}{5} + \frac{9x_1}{5} - \frac{x_4}{5} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{14}{5} - \frac{9x_1}{5} + \frac{x_4}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5} + \frac{x_1}{5} + \frac{x_4}{5} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$