TD2 - IG3 - 2021/2022

Mathématiques de la décision

---

1. Introduction à la méthode du simplexe

Exercice 1. Écrire le problème d'optimisation linéaire suivant sous forme standard puis sous forme de matrice augmentée :

$$
(P)\quad
\begin{array}{ll}
\max & f = 5 + x_1 - 4x_3 + 6x_2 \\
\text{s.c.} &
\begin{array}{rrrcl}
x_1 & +x_3 & & \leqslant & x_2 - x_3 \\
 & x_3 & -4x_2 & \geqslant & 0 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & \leqslant & 3 \\
3x_3 & -5x_2 & & \geqslant & -7 + x_1
\end{array} \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{array}
$$

Exercice 2. Résoudre les problèmes d'optimisation linéaire suivants :

$$
(P_1)\quad
\begin{array}{ll}
\max & f = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.c.} &
\begin{array}{rrcl}
x_1 & -x_2 & \leqslant & 2 \\
-2x_1 & +x_2 & \leqslant & 2
\end{array} \\
& x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{array}
\qquad
(P_2)\quad
\begin{array}{ll}
\max & f = -x_1 + x_2 \\
\text{s.c.} &
\begin{array}{rrcl}
x_1 & -2x_2 & \leqslant & 1 \\
-3x_1 & -x_2 & \leqslant & 3
\end{array} \\
& x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{array}
\qquad
(P_3)\quad
\begin{array}{ll}
\max & f = x_1 + 3x_2 - x_3 \\
\text{s.c.} &
\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leqslant & 10 \\
3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \leqslant & 10 \\
x_1 & -3x_2 & +x_3 & \leqslant & 10
\end{array} \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{array}
$$

2. Problèmes d'optimisation linéaire

Exercice 3. Une entreprise de production d'arbres fruitiers vient d'acheter un nouveau terrain de $1000m^2$ pour accroître sa production. Un arbre a besoin d'un $1m^2$ pour pousser pendant 2 ans. Il sera ensuite vendu, 25€ le pommier et 20€ le prunier. Pendant ce temps, l'arbre aura besoin d'eau : un pommier aura besoin de 150L/an et un prunier aura besoin de 100L/an. L'eau étant une ressource limitée, l'entreprise aura le droit d'utiliser $120m^3$/an d'eau maximum pour ce terrain. Il s'agit alors de trouver la stratégie offrant la meilleure rentabilité.

(1) Décrire le problème de cette entreprise sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire.

(2) Représenter graphiquement le problème.

(3) Résoudre le problème par la méthode du simplexe et en déduire le nombre de pommier et de pruniers que l'entreprise doit investir.

(4) L'entreprise devra refaire ce calcul tous les 2 ans car la limite d'eau autorisée peut varier. Modifier et résoudre le problème pour anticiper les prochaines plantations en fonction de la limite d'eau autorisée.

Exercice 4. La Fédération des Planètes Unies vient d'apprendre qu'un ennemi redoutable, le collectif Borg, est en route pour prendre sa revanche sur la planète Terre et arrivera dans un peu plus de 18 jours : 440 heures. La seule planète alliée ayant pu les aider s'est déjà faite assimilée, la Terre a donc décidée de construire de nouveaux vaisseaux et de se concentrer sur trois types : les croiseurs, les frégates et les navettes. Faute de temps, on utilisera des pièces de coques, de canons laser et de boucliers déjà produites qu'il restera à assembler pour construire un vaisseau. Chaque vaisseau a besoin d'un certain nombre de ces pièces, d'un certain temps pour être assemblées, et possède une puissance différente résumés dans ce tableau :

Vaisseau	Coque (pièces)	Laser (pièces)	Bouclier (pièces)	Temps (heures)	Puissance
Croiseur	13	4	1	20	150
Frégate	4	2	1	10	80
Navette	2	1	1	3	60

La Terre possède 250 pièces de coques, 120 pièces de lasers et 100 pièces de boucliers. Le but est donc de produire l'ensemble de vaisseaux offrant la plus grande puissance de frappe.

(1) Décrire l'énoncé du problème sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire.

(2) Écrire le problème sous forme de matrice augmentée.

(3) Résoudre le problème par la méthode du simplexe et en déduire quels vaisseaux la Terre doit construire.

3. Méthode du simplexe avec paramètres

Exercice 5. Résoudre le problème d'optimisation linéaire suivant selon $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(P)\begin{array}{ll} \max & f = x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & ax_1 + bx_2 \leqslant 1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

3. Méthode du simplexe en deux phases

Exercice 6. Résoudre les problèmes d'optimisation linéaire suivants :

$$(P_1)\begin{array}{lrrrr} \max & \multicolumn{4}{l}{f = 2x_1 + 3x_2} \\ \text{s.c.} & x_1 & +x_2 & \leqslant & 10 \\ & -5x_1 & -4x_2 & \leqslant & -20 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \geqslant 0.} \end{array}$$

$$(P_2)\begin{array}{lrrrrr} \max & \multicolumn{5}{l}{f = -x_1 - 3x_2 - x_3} \\ \text{s.c.} & 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & \leqslant & -5 \\ & 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leqslant & 4 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.} \end{array}$$

$$(P_3)\begin{array}{lrrrr} \max & \multicolumn{4}{l}{f = 3x_1 + x_2} \\ \text{s.c.} & x_1 & -x_2 & \leqslant & -1 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leqslant & 4 \\ & -x_1 & -x_2 & \leqslant & -3 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2 \geqslant 0.} \end{array}$$