Mathématiques de la décision

Introduction à la programmation linéaire

IG3

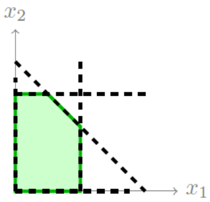
2021/2022

La programmation linéaire s'applique à la planification de toutes sortes d'activités économiques, telles que le transport de matériaux et de produits ou l'optimisation de la conception du système électrique. Elle apparaît également fréquemment dans l'informatique, par exemple - les problèmes d'emballage ou les applications des flux de réseau.

Exemple. Il vend des chocolats simples (1 euro), des pyramides (6 euros). Au maximum, il peut vendre 200 chocolats simples, 300 pyramides, pas plus de 400 chocolats en tout.

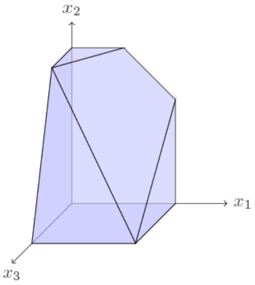
$$
\text{maximiser } x_1 + 6x_2
$$

$$
\begin{cases}
x_1 \leqslant 200 \\
x_2 \leqslant 300 \\
x_1 + x_2 \leqslant 400 \\
x_1, x_2 \geqslant 0 \\
x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$



Exemple. Il vend des chocolats simples (1 euro), des pyramides (6 euros) et des pyramides de luxe (13 euros). Au maximum, il peut vendre 200 chocolats simples, 300 pyramides, pas plus de 400 chocolats en tout et le nombre de pyramides plus trois fois le nombre de pyramides de luxe est au plus 600.

$$\text{maximiser } x_1 + 6x_2 + 13x_3$$
$$\begin{cases} x_1 \leqslant 200 \\ x_2 \leqslant 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 400 \\ x_2 + 3x_3 \leqslant 600 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Fonction objectif La fonction linéaire à maximiser, ou parfois à minimiser, est appelée fonction objectif. Elle a la forme $c^\top x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, où $c \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur donné.

Solution optimale Une solution est optimale si elle optimise la fonction objectif.

Les équations et les inégalités linéaires du programme linéaire sont appelées les contraintes. Il est d'usage de désigner le nombre de contraintes par m.

Solution réalisable C'est un point qui satisfait les contraintes.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des solutions réalisables du problème d'optimisation et on l'appelle ensemble réalisable.

Programme linéaire Un programme linéaire est la donnée

- d'une fonction objectif linéaire à optimiser (maximiser/minimiser) ;
- de contraintes (égalités/inégalités larges) linéaires sur les variables ;
- contraintes de typage (dire pour toute variable si elle est entière, réelle).

Maximiser la valeur de $c^\top x$ parmi tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $Ax \leqslant b$, où A est une matrice réelle $m \times n$ donnée et $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs donnés.

- Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ satisfait toutes les contraintes pour un programme linéaire donné est une solution réalisable.

- Chaque $x^\star \in \mathbb{R}^n$ qui donne la valeur maximale possible de $c^\top x$ parmi tous les x réalisables est appelé solution optimale (optimum).

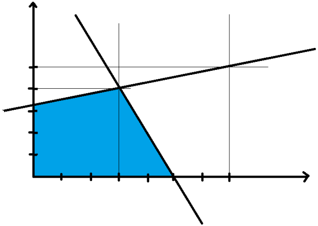
- Un programme qui n'a pas de solution réalisable, et donc pas de solution optimale non plus appelé infaisable.

- Il n'existe pas forcément de solution optimale même s'il existe des solutions réalisables. C'est le cas lorsque la fonction objectif peut atteindre des valeurs arbitraires importantes (un tel programme linéaire est dit non borné).

Exemple.

maximiser $x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 4x_2 - x_1 \leqslant 13 \\ x_2 + 2x_1 \leqslant 10 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$



La seule solution optimale est le vecteur $(3,4)$, alors que, par exemple, $(2,2)$ est une solution faisable mais non optimale. solution réalisable qui n'est pas optimale.

Cas possibles d'un problème d'optimisation :

La résolution d'un problème d'optimisation linéaire conduit vers 3 cas de figure possibles :

- Il n'y a pas de solution réalisable : $\mathcal{P} = \emptyset$.
  Exemple.
  $$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & z = 3x - 2y \\ \text{s.c.} \quad & x + y \leqslant -1 \\ & x, y \geqslant 0. \end{aligned}$$
- La fonction objectif n'est pas majorée sur $\mathcal{P}$.
  Exemple.
  $$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & z = 3x - 2y \\ \text{s.c.} \quad & y \leqslant 1 \\ & x, y \geqslant 0. \end{aligned}$$
- Il existe au moins une solution optimale.
  Exemple.
  $$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & z = 5 \\ \text{s.c.} \quad & x + y \leqslant 1 \\ & x, y \geqslant 0. \end{aligned}$$

Definition

(Programmation linéaire) La programmation linéaire est le problème suivant :

- Entrée : un programme linéaire ;
- Sortie : une solution optimale du programme linéaire, "non borné" s'il n'y a pas d'optimum, ou "impossible" si les contraintes sont inconsistantes