Práctica Seis - Ecuación de Laplace

Física Computacional

1 Solución aproximada de la ecuación de Laplace

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \tag{1}$$

Esta expresión es la fórmula de diferencias con cinco puntos para la laplaciana.

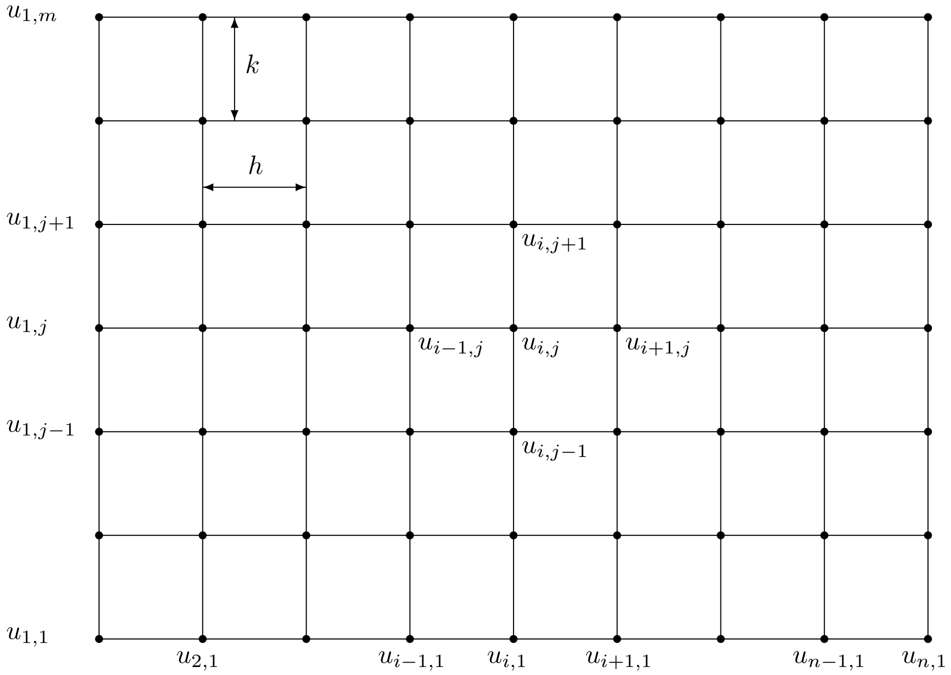

Figure 1: Ubicación de la función $u_{i,j}$

Vamos a resolver el problema planteado en clases para entender mejor la fórmula anterior que es la solución de $u_{i,j}$ aproximada de la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$. Sea un cuadrado definido por $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 4$, con las condiciones en la frontera

$$u(x,0) = 20 \quad \text{y} \quad u(x,4) = 300 \quad \text{para todo} \quad 0 < x < 4$$

$$u(0,y) = 80 \quad \text{y} \quad u(4,y) = 0 \quad \text{para todo} \quad 0 < y < 4$$

Mediante la ecuación (1) determine para $n = 6$ y $m = 7$

1. ¿Cuantas ecuaciones lineales independientes se generan?
2. Encuentre esa cantidad de ecuaciones
3. Aplique cualquier método conocido por Uds. para resolver dichas ecuaciones
4. Compare las soluciones por ambos métodos

2 Problema desafío

1. Modifique el código `laplace.m` para que aproxime la solución de la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$u(x,0) = x^2, \qquad u(x,2) = (x-2)^2, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,y) = y^2, \qquad u(1,y) = (y-1)^2, \qquad 0 \leq y \leq 2$$

Use $h = 0.2$ y compare luego los resultados con la solución real $u(x,y) = (x-y)^2$.

3 Desarrollo de la primera fila

Según lo visto en clases, tenemos que

$$u_{1,2} = u_{1,3} = u_{1,4} = u_{1,5} = u_{1,6} = 80$$

$$u_{6,2} = u_{6,3} = u_{6,4} = u_{6,5} = u_{6,6} = 0$$

$$u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = u_{5,1} = 20$$

$$u_{2,7} = u_{3,7} = u_{4,7} = u_{5,7} = 300$$

Estos valores son constantes, por tanto las variables dentro de la frontera no conocemos. La primera fila corresponde a las variables

$$u_{2,2}, u_{3,2}, u_{4,2}, u_{5,2}$$

Entonces

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}(u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1}) = \frac{1}{4}(u_{3,2} + 80 + u_{2,3} + 20)$$

$$4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{2,3} = 100 \tag{2}$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{4}(u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{4}(u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + 20)$$

$$4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{2,2} - u_{3,3} = 20 \tag{3}$$

$$u_{4,2} = \frac{1}{4}(u_{5,2} + u_{3,2} + u_{4,3} + u_{4,1}) = \frac{1}{4}(u_{5,2} + u_{3,2} + u_{4,3} + 20)$$

$$4u_{4,2} - u_{5,2} - u_{3,2} - u_{4,3} = 20 \tag{4}$$

$$u_{5,2} = \frac{1}{4}(u_{6,2} + u_{4,2} + u_{5,3} + u_{5,1}) = \frac{1}{4}(0 + u_{4,2} + u_{5,3} + 20)$$

$$4u_{5,2} - u_{4,2} - u_{5,3} = 20 \tag{5}$$