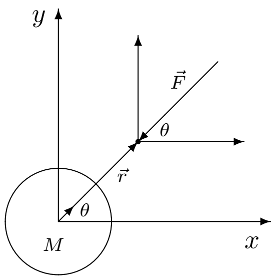
Práctica Cinco - Ley de la Gravitación

Física Computacional

1 Movimiento de un proyectil



Vamos a armar las ecuaciones de movimiento aplicando ley de la gravitación donde la posición de la partícula es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$

definimos un vector unitario $\hat{u} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$, entonces $\vec{r} = r\hat{u}$ ó $\hat{u} = \vec{r}/r$

como $\vec{F}$ es una fuerza radial, aplicamos la ley de la gravitación

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{u} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

Relacionemos la segunda ley de Newton con la fuerza gravitatoria hacia el proyectil

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{1}{m}\frac{GMm}{r^3}\vec{r} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

$$\text{si asumimos } GM = 1 \quad \text{entonces} \quad \vec{a} = -\frac{1}{r^3}\vec{r}$$

Como $\vec{r} = r(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$ entonces

$$\vec{a} = -\frac{1}{r^3}r(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = -\frac{1}{r^2}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

$$\text{pero } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{entonces}$$

$$a_x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad a_y = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Como ya tenemos las aceleraciones, apliquemos el método de Euler, con las condiciones iniciales $x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0}$

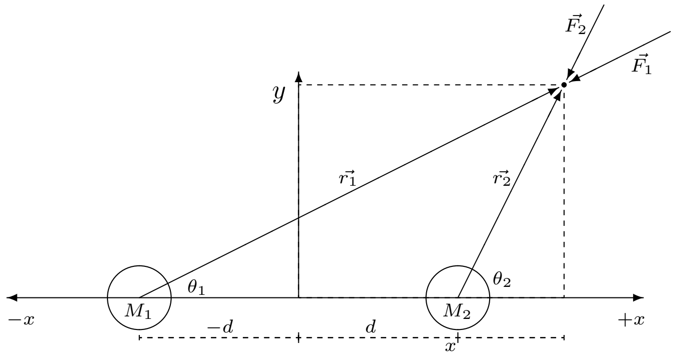
$$a_{x_i} = -\frac{x_i}{(x_i^2+y_i^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad a_{y_i} = -\frac{y_i}{(x_i^2+y_i^2)^{3/2}}$$

$$v_{x_{i+1}} = v_{x_i} + a_{x_i}h \quad \text{y} \quad x_{i+1} = x_i + v_{x_{i+1}}h$$

$$v_{y_{i+1}} = v_{y_i} + a_{y_i}h \quad \text{y} \quad y_{i+1} = y_i + v_{y_{i+1}}h$$

1. En el código presentado, dibuje la circunferencia con $R = 5$ y condicione cuando el proyectil colapse.

2. Del enunciado anterior ubique las condiciones iniciales en $(3, 4)$, y acomode una gráfica idónea.



2 Problema de 3 cuerpos

$$\vec{F_1} = -\frac{GM_1 m}{r_1^2}\hat{u}_1 = -\frac{GM_1 m}{r_1^3}\vec{r_1} \quad \text{y} \quad \vec{F_2} = -\frac{GM_2 m}{r_2^2}\hat{u}_2 = -\frac{GM_2 m}{r_2^3}\vec{r_2}$$

Luego la fuerza neta es $\quad \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Relacionemos la segunda ley de Newton con la fuerza gravitatoria con respecto a m. Además asumimos que $GM_1 = GM_2 = 1$, tenemos

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F_1}}{m} + \frac{\vec{F_2}}{m} \quad \text{ó} \quad \vec{a} = -\frac{1}{r_1^3}\vec{r_1} - \frac{1}{r_2^3}\vec{r_2}$$

Pero $\vec{r_1} = r_1(\cos\theta_1\hat{\imath} + \sin\theta_1\hat{\jmath})$ y $\vec{r_2} = r_2(\cos\theta_2\hat{\imath} + \sin\theta_2\hat{\jmath})$

$$\vec{a} = -\frac{1}{r_1^2}(\cos\theta_1\hat{\imath} + \sin\theta_1\hat{\jmath}) - \frac{1}{r_2^2}(\cos\theta_2\hat{\imath} + \sin\theta_2\hat{\jmath})$$

$$\text{pero } \cos\theta_1 = \frac{x+d}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}} \quad , \quad \sin\theta_1 = \frac{y}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}} \quad \text{y}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}} \quad , \quad \sin\theta_2 = \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}} \quad \text{entonces}$$

$$\vec{a} = -\left(\frac{1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{1}{r_2^2}\cos\theta_2\right)\hat{\imath} - \left(\frac{1}{r_1^2}\sin\theta_1 + \frac{1}{r_2^2}\sin\theta_2\right)\hat{\jmath}$$

finalmente las aceleraciones son

$$a_x = -\frac{x+d}{((x+d)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{x-d}{((x-d)^2+y^2)^{3/2}}$$

$$a_y = -\frac{y}{((x+d)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{y}{((x-d)^2+y^2)^{3/2}}$$

Como ya tenemos las aceleraciones, apliquemos el método de Euler, con las condiciones iniciales $x_0, y_0, v_{x_0}, v_{y_0}$

$$a_{x_i} = -\frac{x_i+d}{((x_i+d)^2+y_i^2)^{3/2}} - \frac{x_i-d}{((x_i-d)^2+y_i^2)^{3/2}}$$

$$a_{y_i} = -\frac{y_i}{((x_i+d)^2+y_i^2)^{3/2}} - \frac{y_i}{((x_i-d)^2+y_i^2)^{3/2}}$$

$$v_{x_{i+1}} = v_{x_i} + a_{x_i}h \quad \text{y} \quad x_{i+1} = x_i + v_{x_{i+1}}h$$

$$v_{y_{i+1}} = v_{y_i} + a_{y_i}h \quad \text{y} \quad y_{i+1} = y_i + v_{y_{i+1}}h$$

1. Modifique el código de la sección anterior, adicionando las aceleraciones y dibujando los círculos correspondientes a cada uno de los planetas. Además a su criterio acomode las condiciones iniciales para que se vean trayectorias que no colapsen.

3 Problema desafio

Escoger cualquiera de los tres problemas para que presenten la tarea

1. Problema de cuatro cuerpos.- Ubique tres masas M iguales, cuyas ubicaciones son M_1 en $(-20, 0)$, M_2 en $(20, 0)$ y M_3 en $(0, 20)$. El radio de cada masa es $R = 5$.

2. Problema de tres cuerpos.- Ubique dos proyectiles que estén bien juntos. Por ejemplo para el primer proyectil $x_1 = 0$ y $y_1 = 5.0000$, para el segundo proyectil $x_2 = 0$ y $y_2 = 5.0001$. Que los dos proyectiles simultáneamente hagan trayectoria y verifique para tiempo largos el comportamiento de dichos proyectiles.

3. Problema de dos cuerpos.- Modifique la tarea 1.1 con el método de punto medio hecho en clase y simular trayectorias simultáneas con el método de Euler. Solo efectúe unas cuatro trayectorias tipo.

4 Método de punto medio

Vamos a aplicar dicho método en un movimiento oscilatorio cuya ecuación diferencial es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = d\cos(\omega t)$$

Para aplicar el método de punto medio en esta ecuación diferencial que es de segundo orden, debemos de bajar el orden de dicha ecuación. Porque todo método numérico resuelve la ecuación diferencial de primer orden, es decir

$$\text{si} \qquad v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{entonces} \qquad m\frac{dv}{dt} + cv + kx = d\cos(\omega t)$$

Como vemos se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Entonces, debemos de aplicar el método de punto medio de estas dos ecuaciones diferenciales.

1. para k_{1x} tenemos

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{tenemos} \qquad k_{1x} = f_1(t_i, x_i) \qquad \text{donde} \qquad v_i = f_1(t_i, x_i)$$

2. para k_{1v} tenemos

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \text{tenemos} \qquad k_{1v} = f_2(t_i, x_i, v_i) \qquad \text{donde} \qquad a_i = f_2(t_i, x_i, v_i) = -\frac{k}{m}x_i - \frac{c}{m}v_i + \frac{d}{m}\cos(\omega t_i)$$

3. para k_{2x} tenemos

$$k_{2x} = f_1(t_i + h/2, x_i + k_{1v}h/2) \qquad \text{donde} \qquad k_{2x} = v_i + k_{1v}h/2$$

4. para k_{2v} tenemos

$$k_{2v} = f_2(t_i + h/2, x_i + k_{1x}h/2, v_i + k_{1v}h/2)$$

5. entonces $x_{i+1} = x_i + k_{2x}h$ y $v_{i+1} = v_i + k_{2v}h$

A continuación se implementó el código para el movimiento oscilatorio

```
clear; clf; hold off; n=0; h=0.1;
% Constantes del Sistema
k=0.1; m=0.2; c=0.05; d=0.01; w=0.3;
% Condiciones Iniciales
t=0; x=1; vx=0; tfin=80; ax=-k*x/m-c*vx/m+d*cos(w*t); s=x; vs=vx;
% Inicio de la Simulacion
pt(1)=t; pv(1)=vx; px(1)=x; pa(1)=ax; ps(1)=x; pvs(1) = vx;
for t=0:h:tfin
    n = n+1;
    % Punto medio
    k1x = vx;
    k1v = acl(t,x,vx,k,m,c,d,w);
```

```
    k2x = vx+k1v*h/2;
    k2v = acl(t+h/2,x+k1x*h/2,vx+k1v*h/2,k,m,c,d,w);
    x = x + k2x*h;
    vx = vx + k2v*h;
    %-------------------------------
    % Euler
    as = acl(t,s,vs,k,m,c,d,w);
    vs = vs + as*h;
    s = s + vs*h;
    %--------------------------------
    pt(n+1)=t+h;
    px(n+1)=x;
    pv(n+1)=vx;
    pa(n+1)=k1v;
    ps(n+1)=s;
    pvs(n+1)=vs;
end
% Solución real
w =sqrt(k/m-(c/(2*m))2̂);
ph =atan(-c/(2*m*w));
pr =1/cos(ph)*exp(-c.*pt/(2*m)).*cos(w*pt+ph);
%------------------------------------------------
plot(pt,px,’b’,pt,pr,’r’,pt,ps,’g’); grid on;
legend(’punto medio’,’real’,’Euler’)
xlabel(’tiempo (s)’);
ylabel(’Espacio (m)’)
```