Práctica tres - leyes de Newton

Física Computacional

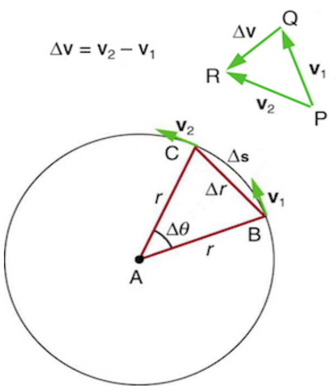
Las ecuaciones de movimiento que corresponden a las leyes de Newton
Cantidad de movimiento

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = m\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right)$$

fuerza

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = m\left(\frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}\right)$$

1 Movimiento circular



Para que una partícula haga una trayectoria circular, debemos de tomar en cuenta la aceleración centrípeta. Sabemos que la aceleración es

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

Para resolver este ejercicio, tomaremos $\vec{a}_t = 0$. Si aplicamos la segunda ley de Newton, entonces la fuerza centrípeta es

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c$$

A lo largo de la trayectoria, la aceleración centrípeta esta dirigida al centro del círculo. Si hacemos el sistema de referencia inercial en el centro del círculo. entonces, la aceleración centrípeta esta en función de

$$\vec{a}_c = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

estos vectores cuya dirección pasa por el centro de curvatura, pero $a_x = a\cos\theta$ y $a_y = a\sin\theta$, y vectorialmente

$$\vec{a}_c = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j}$$

Ademas

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{y} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

donde r es el radio de círculo. Luego

$$\vec{a}_c = -a\frac{x}{r}\vec{i} - a\frac{y}{r}\vec{j}$$

de aqui

$$a_x = -\frac{ax}{r} \qquad \text{y} \qquad a_y = -\frac{ay}{r}$$

Como ya tenemos las aceleraciones, apliquemos el método de Euler

$$a_{xi} = -\frac{ax_i}{r} \qquad , \qquad x_{i+1} = x_i + v_{xi}h \qquad \text{y} \qquad v_{x_{i+1}} = v_{x_i} + a_{xi}h$$

$$a_{yi} = -\frac{ay_i}{r} \qquad , \qquad y_{i+1} = y_i + v_{yi}h \qquad \text{y} \qquad v_{y_{i+1}} = v_{y_i} + a_{yi}h$$

Dibuje la trayectoria para $a = 2$ m/s^2, $r = 8$ m, $m = 5$ kg, $h = 0.1$, $v = 4$ m/s con las condiciones iniciales

1. $x_0 = r$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = +4$ m/s
2. $x_0 = 0$, $y_0 = r$, $v_{x0} = -4$ m/s, $v_{y0} = 0$
3. $x_0 = -r$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = -4$ m/s
4. $x_0 = 0$, $y_0 = -r$, $v_{x0} = +4$, $v_{y0} = 0$ m/s
5. cuando la partícula inicialmente forma un ángulo de $\pi/4$
6. como $a_t = 0$, entonces la velocidad es constante $v = 4$ m/s, es decir
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4 \text{ m/s}$$
demuestre que es constante por cada paso del tiempo
7. Evalúe la fuerza centrípeta F_c por cada paso del tiempo
8. Utilice análisis dimensional, para saber que a_c depende de v y r, tal como indica las condiciones iniciales, es decir
$$\frac{L}{T^2} = L^x \frac{L^y}{T^y}$$
Donde L^x representa el análisis dimensional de r y L^y/T^y representa el análisis dimensional de v. Encuentre x y y.
9. Con esta condición podria encontrar una fórmula para a_c?. Con esta relación demuestre que $a_c = 2$ m/s^2 es constante por cada paso del tiempo, utilizando la fórmula que ha deducido.

2 Movimiento de proyectiles cuando se presenta la resistencia del aire

Como bien indicamos en las anteriores clases, la resistencia del aire influye en el movimiento de un proyectil. Se define la fuerza de arrastre que se aplica al proyectil en la dirección horizontal, como una magnitud dada por

$$F_a = \frac{1}{2} C A \rho v^2$$

donde
$v^2 = v_x^2 + v_y^2$
C : es el coeficiente de arrastre
A : la sección transversal del proyectil
ρ : densidad del aire
La aceleración que corresponde a la fuerza de arrastre $\vec{F}_a = m\vec{a}$ es

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_a}{m} = -\frac{F_a}{m}\cos\phi \vec{i} - \frac{F_a}{m}\sin\phi \vec{j}$$

como corresponde solo a la fuerza de arrastre debemos de incluir la aceleración de la gravedad tendremos que

$$a_x = -\frac{F_a}{m}\cos\phi \qquad \text{y} \qquad a_y = -g - \frac{F_a}{m}\sin\phi$$

además del gráfico tenemos que

$$\cos\phi = \frac{v_x}{v} \qquad , \qquad \sin\phi = \frac{v_y}{v} \qquad \text{y} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

para simplificar las ecuaciones definamos

$$k = \frac{1}{2}\frac{CA\rho}{m}$$

Las ecuaciones de movimiento del proyectil será

$$a_x = -kvv_x \qquad \text{y} \qquad a_y = -g - kvv_y$$

apliquemos el método de Euler

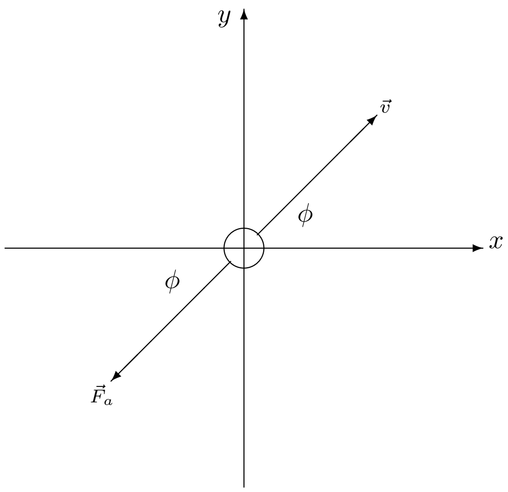
$$v_i = \sqrt{v_{xi}^2 + v_{yi}^2}$$

$$a_{xi} = -kv_iv_{xi} \qquad , \qquad x_{i+1} = x_i + v_{xi}h \qquad \text{y} \qquad v_{x_{i+1}} = v_{x_i} + a_{xi}h$$

$$a_y = -10 - kv_iv_{yi} \qquad , \qquad y_{i+1} = y_i + v_{yi}h \qquad \text{y} \qquad v_{y_{i+1}} = v_{y_i} + a_yh$$

Sea un pelota de beisboll con velocidad inicial $v_i = 50$ m/s que se lanza con un ángulo de 60° con la horizontal. Dicha pelota tiene su coeficiente de arrastre $C = 0.5$, una masa $m = 0.145$ kg, un radio $r = 0.0367$ m y densidad del aire $\rho = 1.2$ kg/m^3.

1. Haga dos trayectorias simultáneas de la pelota, una sin fuerza de arrastre y la otra con la fuerza de arrastre hasta que la pelota llegue al suelo.



3 Problema desafio

1. Busque en internet la masa y radio del virus COVID-19 y haga la misma simulación que en la sección anterior. También averigue la velocidad horizontal con que sale el virus de la boca. Además considere una altura de 1.60 m

4 Cálculo de los errores para el ejercicio de movimiento circular

Recordando lo que han hecho en su curso de métodos numéricos, el cálculo del error es el siguiente:

Sabemos que la trayectoria de una partícula es un círculo, entonces la solución verdadera es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que en nuestro caso es $r_{verd} = 8$ m. Entonces, en la simulación encontramos x y y en forma aproximada, donde $r_{sim} = \sqrt{x^2 + y^2}$ Luego el error es

$$\xi_t = \frac{|r_{verd} - r_{sim}|}{r_{verd}} 100\%$$

Este error es global,