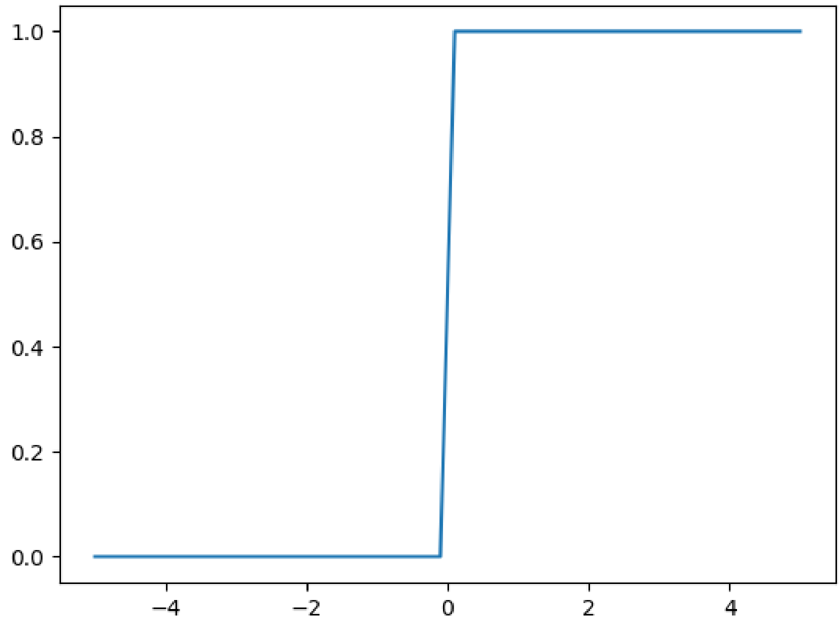
4.5 活性化関数

- 活性化関数がないと，ニューロンの演算は単なる積の総和になってしまうため，ニューラルネットワークから複雑な表現をする力が失われてしまう.

4.5.1 ステップ関数

- ステップ関数は，次のようなグラフで表されるステップ状の関数：



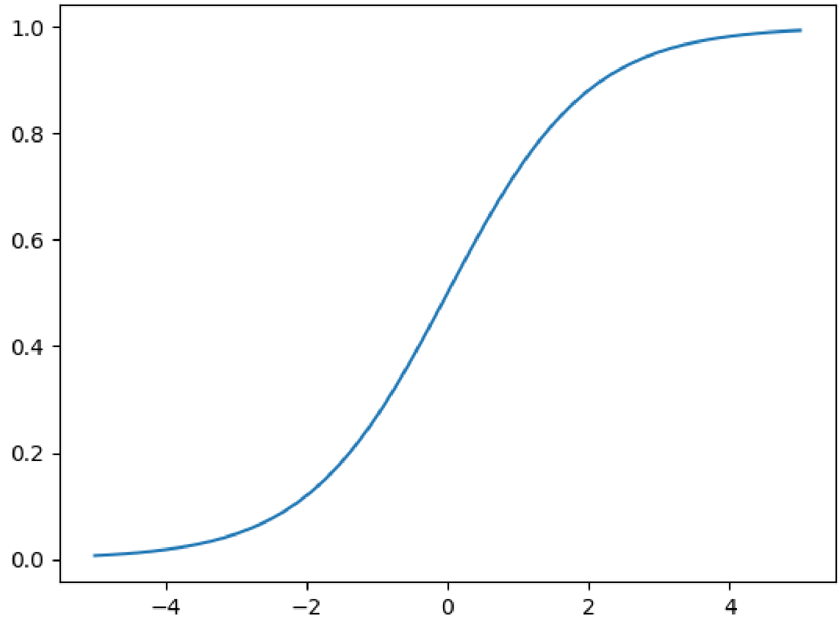
- 関数への入力 x が0以下の場合は出力が0，x が0より大きい場合は y は1となる.
- これを数式で表すと次のようになる：

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{array} \right. .$$

- ステップ関数を用いると，ニューロンの興奮状態を0か1でシンプルに表現することができる.
- 実装が簡単ではある一方，0と1の中間の状態を表現できないというデメリットもある.
- ステップ関数は，ニューラルネットワークの起源であるパーセプトロンで用いられてきた.
- パーセプトロンはニューラルネットワークの一種と考えることもできるが，すべての信号が0と1で表される，よりシンプルなネットワーク.

4.5.2 シグモイド関数

- シグモイド関数は，次のようなグラフで表される0と1の間を滑らかに変化する関数：



- 関数への入力 x が小さくなると関数の出力 y は0に近づき，x が大きくなると y は1に近づく．
- シグモイド関数は，ネイピア数の累乗を表す $\exp$ を用いて次の式で表すことができる：

$$y = \frac{1}{1+\exp(-x)}.$$

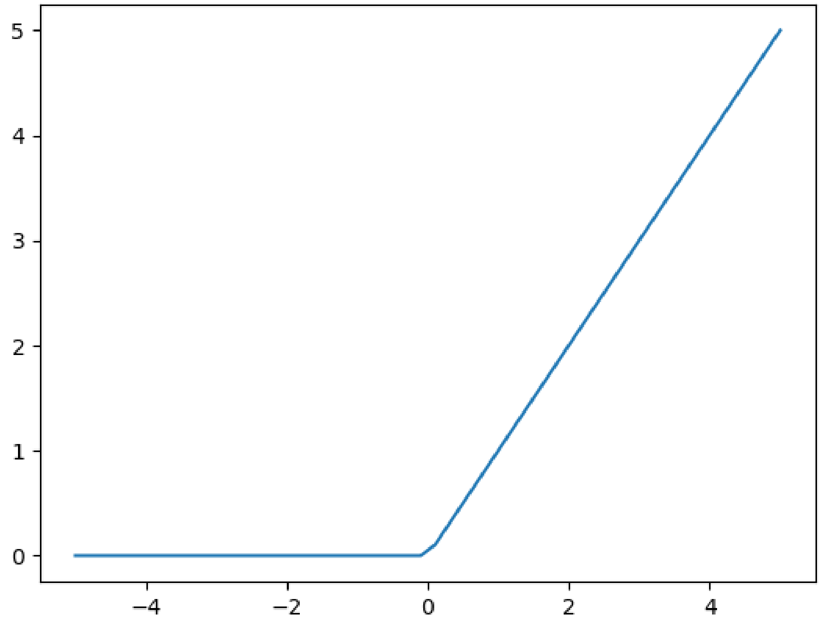
- この式において， x の値が負になり0から離れると，分母が大きくなるため y は0に近づく．
- また，x の値が正になり0から離れると，$\exp(-x)$ が小さくなるため y は1に近づく．
- シグモイド関数は，ステップ関数と比べて滑らかであり，0と1の中間を表現できる．
- また，シグモイド関数のメリットの1つに，微分が扱いやすいという特性がある．
- シグモイド関数の導関数は，$y' = \frac{dy}{dx}$ とすると，次のようになる：

$$y' = (1-y)y.$$

- このように，シグモイド関数自体を用いたシンプルな演算で，簡単に微分値を求めることができる．
- この特性のために，シグモイド関数はニューラルネットワークで古くからよく使用されてきた．

4.5.4 ReLU

- ReLUはランプ関数とも呼ばれ，次のグラフで表される：



- $x > 0$ の範囲でのみ立ち上がるのが特徴的な活性化関数.
- ReLUは次の式で表される：

$$y = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}.$$

- シンプルであり，なおかつ層の数が多くなっても安定した学習ができるので，最近のディープラーニングでは主にこのReLUが出力層以外の活性化関数として用いられている.
- なお，ReLUの導関数は次の通り：

$$y = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}.$$

- 微分値が x の値によらず安定した値をとるのは，ReLUの大きなメリット.

4.5.7 ソフトマックス関数

- ソフトマックス関数は，分類問題を扱うのに適した活性化関数.
- 活性化関数の出力を y，入力を x とし，同じ層のニューロンの数を n とすると，ソフトマックス関数は次の式で表される：

$$y = \frac{\exp(x)}{\sum_{k=1}^{n} \exp(x_k)}.$$

- この式で，右辺の分母 $\sum_{k=1}^{n} \exp(x_k)$ は，同じ層の各ニューロンへの入力 x_k から $\exp(x_k)$ を計算し，足し合わせたもの.
- また，次の式で表されるように，同じ層のすべての活性化関数の出力を足し合わせると1になる：

$$\sum_{l=1}^{n}(\frac{\exp(x_l)}{\sum_{k=1}^{n}\exp(x_k)}) = \frac{\sum_{l=1}^{n}\exp(x_l)}{\sum_{k=1}^{n}\exp(x_k)} = 1.$$

- これに加えて，指数関数には常に0より大きいという特性があるので，$0 < y < 1$となる.
- このため，ソフトマックス関数は，ニューロンが対応する枠に分類される確率を表現することができる.