# Sprout 2020 Algorithm - Week

**Author: 陳楚融**

## Problem 1

假設 $n$ $(n > 1)$ 人時，存在一組關係，使任兩人之認識人數皆不同，令 $a_i$ 為第 $i$ $(1 \le i \le n)$ 人之認識人數

因 $0 \le a_i \le n-1$，共 $n$ 種可能，且根據假設， $n$ 項中兩兩不重複，得 $a_1 \cdots a_n$ 必定與 $0 \cdots n-1$ 一一對應

令 $a_1 = 0,\ a_n = n-1$，表示沒有人認識第 1 人，第 $n$ 人卻認識所有人，假設矛盾

得證必有兩人認識人數相同

## Problem 2

已知 $n = 3$ 時：

$$3^n + 4^n = 91 < 5^n = 125 \quad \cdots \quad (1)$$

命題成立

假設 $n = k$ 時，$3^k + 4^k < 5^k$，則 $n = k+1$ 時：

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 4^{k+1} &= 3 * 3^k + 4 * 4^k \\ &< 5 * (3^k + 4^k) < 5 * 5^k \quad \cdots \quad (2) \\ &= 5^{k+1} \end{aligned}$$

命題仍然成立

由 $(1), (2)$，以數學歸納法得證

## Problem 3

已知 $n = 4$ 時：

$$3^n = 81 > n^3 = 64 \quad \cdots \quad (1)$$

命題成立

假設 $n = k$ $(k \ge 4)$ 時，$3^k > k^3$，則 $n = k+1$ 時：

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3 * 3^k \\ (k+1)^3 &= (\frac{k+1}{k})^3 * k^3 \end{aligned}$$

根據分數性質：

$$\frac{k+1}{k} < \frac{k}{k-1}, \quad k > 1$$

又 $k = 4$ 時：

$$(\frac{k+1}{k})^3 < (\frac{k}{k-1})^3 = \frac{64}{27} < 3$$

因此：

$$\begin{aligned} 3 * k^3 &> (\frac{k+1}{k})^3 * k^3 \\ 3^{k+1} &> (k+1)^3 \end{aligned} \quad \cdots \quad (2)$$

命題仍然成立

由 $(1), (2)$，以數學歸納法得證

# Problem 4

令 $F(n)$ 為 $n \in \mathbb{N}$ 之總得分，已知 $n = 1$ 時：

$$\begin{aligned} F(n) = 0 &= \frac{1^2 - 1}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} \end{aligned} \quad \cdots \quad (1)$$

命題成立

假設 $n \geq 2$，可將 $n$ 拆成任意之 $a + b = n, \ a, \ b \geq 1$，此操作得 $a * b$ 分，再將 $a, \ b$ 拆至僅剩 $1$ 為止，分別會獲得分數 $F(a), \ F(b)$，得：

$$\begin{aligned} F(n) &= a * b + F(a) + F(b) \\ &= \frac{a^2 - a + b^2 - b}{2} + a * b \\ &= \frac{a^2 + b^2 + 2 * a * b - n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} \end{aligned} \quad \cdots \quad (2)$$

由 $(1), (2)$，以數學歸納法得證

# Problem 5

對於一種可行的投票結果 $a_1 \ \cdots \ a_n$，將其順序重組後仍然有解，故假設 $a_1 \ \cdots \ a_n$ 為降冪排序，並令一序列 $B = [b_1 = 0 \ \cdots \ b_n = 0]$

若 $b_j = i$，表示令第 $j$ 人投給第 $i$ 人

已知條件：

$$0 \le a_i < n \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n \quad \cdots \quad (2)$$

由 $(1), (2)$ 可知若不考慮不能投給自己之限制，所有人皆可恰投一票

先令 $b_2 = 1$，設 $a_1 \ \cdots \ a_n$ 中不為 $0$ 之項目數量為 $p$，$B$ 中最後一個不為 $0$ 之項目編號為 $q$

對所有 $i \ (1 \le i \le p-1)$，依序將當前 $b_q \ \cdots \ b_{q+a_i-1}$ 修改為 $i$，因：

$$\begin{aligned} q &= 2 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j - 1 = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j \\ &\ge 1 + \sum_{j=1}^{i-1} 1 = i \end{aligned}$$

得 $i \le q$，故 $b_i \ne i$，第 $i \ (i > 1)$ 人必不投給自己，最後修改 $b_{n-a_p+2} \ \cdots \ b_n, b_1$ 為 $p$

至此對於任意 $n \ (n > 1)$ 人之投票結果，構造出一合法投票方法

得證只要符合 $(1), (2)$，必為一可能的投票結果