Sprout 2020 Algorithm - Week 5

Author: 陳楚融

Problem 1

(a)

若有一組解，其性質不滿足以貪心法構造出之解，其中必有一面額 C_i ，能用所有面額小於 C_i 之硬幣組出不小於 C_i 之值

可先選擇小於 C_i 中最大之面額，若該面額總和 $S \geq C_i$ ，可剛好組出一個 C_i

當 $S < C_i$ 時，剩餘的 $C_i - S$ 可再使用次小之面額嘗試組出，因為 $\forall j,\ C_j < C_i:\ C_i - S \mid C_j$ ，且面額小於 C_i 之硬幣總和不小於 C_i ，因此最後一定能剛好將部份硬幣替換為 C_i

故性質與以貪心法構造出之解不同的解必可透過替換得到更好的解，得證以貪心法夠出之解為最佳解

(b)

不行

若欲用 $1,\ 4,\ 5$ 組出 12 ，貪心法之解為 $5*2,\ 1*2$ ，共 4 個，然而存在更佳解 $4*3$ ，共 3 個

(c)

不一定

當面額為 $1,\ 2,\ 3$ 時，依照貪心法選擇後， $1,\ 2$ 面額數量可能為 $(0,0),\ (0,1),\ (1,0)$ ，由於三種情況皆無法

盡量選擇 3 面額後，對於任意解，令 $n_1,\ n_2$ 分別為面額 $1,\ 2$ 之數量

當 $n_1 \geq n_2$ 時，可將 $n_2,\ n_2$ 個 $1,\ 2$ 面額組成 n_2 個 3 面額，總數減少 n_2 ，剩下的 1 面額再盡量替換成 3 面額，再剩下的 1 面額若有兩個則換成 2 面額

最後 $1*{n_1}' + 2*{n_2}' < 3,\ 1*{n_1}' < 2$ ，無法再使總數變小，為最佳解且與貪心法結果相同　$\cdots \quad (1)$

當 $n_1 \leq n_2$ 時，可將 $n_1,\ n_1$ 個 $1,\ 2$ 面額組成 n_1 個 3 面額，總數減少 n_1 ，令剩下的 2 面額總和為 S ，若最多可替換成 k 個 3 面額，則 $S = 3*k+m,\ 0 \leq m \leq 2$

$m = 0, 2$ 時，$k = \frac{S-m}{3} < \frac{S}{2} = n_2 - n_1 \implies k+1 \leq n_2 - n_1$ ，總數必不增加

$m = 1$ 時， $2*k = (S-1)*\frac{2}{3} < S$ ，得 $k < \frac{S}{2} = n_2 - n_1 \implies k+1 \leq n_2 - n_1$ ，總數必不增加

最後 $1*{n_1}' + 2*{n_2}' = m < 3,\ 1*{n_1}' < 2$ ，無法再使總數變小，為最佳解且與貪心法結果相同　$\cdots \quad (2)$

由 (1), (2) 得證 $1,\ 2,\ 3$ 為貪心適用之一組面額

Problem 2

欲證題目之貪心法可得出最佳解，可證該方法一定不會比最佳解差

將最佳解依右界排序，得區間 $A_1,\ A_2\ \cdots\ A_a$ ， a 為最佳解區間數，設透過貪心法得出之解為 $B_1,\ B_2\ \cdots\ B_b$ ， $b \leq a$ 為所得區間數

假設 ${B_n}^r \leq {A_n}^r,\ 1 \leq n \leq b$ （左右界以上標表示）

已知 $n = 1$ 時， ${B_1}^r \leq {A_1}^r \quad \cdots \quad (1)$

當 $n = k+1,\ k > 0$ 時，${A_{k+1}}^l > {A_k}^r$ ，B_{k+1} 為左界大於 ${B_{k+1}}^r$ 的區間中右界最小者，且 ${B_k}^r \leq A_k$ ，得 ${B_{k+1}}^r \leq {A_{k+1}}^r \quad \cdots \quad (2)$

根據 (1), (2) ，以數學歸納法得證 ${B_n}^r \leq {A_n}^r,\ 1 \leq n \leq b$

若 $b < a$ ，因 ${B_b}^r \leq {A_b}^r$ ，故 ${B_b}^r \leq {A_b}^r < {A_{k+1}}^l$ ，仍有區間可加入序列 B ，與貪心法挑選結束之條件矛盾，故 $b = a$

得證貪心法必可得最佳解