Sprout 2020 Algorithm - Week 2

Author: 陳楚融

Problem 1

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}3)*(\lim\limits_{n\to\infty}n+\frac{1}{3})}{\lim\limits_{n\to\infty}n-1}=3*\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=3*\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=3$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n}{\lim\limits_{n\to\infty}n^2+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n}{\lim\limits_{n\to\infty}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

(3)

(1) 先證 $f(n)\in O(2^n)\implies f(n)\in O(2^{n+1})$ ：

$$\begin{aligned}
&\because f(n)\in O(2^n)\\
&\therefore \exists k\geq 0:\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}=k\\
&\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}{\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}{2*\lim\limits_{n\to\infty}2^n}=\frac{k}{2}\quad (\text{仍為一常數})\\
&\therefore f(n)\in O(2^{n+1})
\end{aligned}$$

(2) 再證 $f(n)\in O(2^{n+1})\implies f(n)\in O(2^n)$ ：

$$\begin{aligned}
&\because f(n)\in O(2^{n+1})\\
&\therefore \exists k\geq 0:\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=k\\
&\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}{\lim\limits_{n\to\infty}2^{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}{\frac{1}{2}*\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}}=2*k\quad (\text{仍為一常數})\\
&\therefore f(n)\in O(2^{n})
\end{aligned}$$

由 (1), (2)，得證 $f(n)\in O(2^n)\iff f(n)\in O(2^{n+1})$

(4)

(1) 先證 $f(n)\in O((n+1)!)\implies f(n)\in O(n!)$ ：

$$\begin{aligned}
&\because f(n)\in O((n+1)!)\\
&\therefore \exists k\geq 0:\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{(n+1)!}=k\\
&\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n!}=(\lim_{n\to\infty}n+1)*\frac{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)}{\lim\limits_{n\to\infty}n!}=(\lim_{n\to\infty}n)*k\quad (\text{不會收斂為一常數})
\end{aligned}$$

(2) 若令 $f(n)=(n+1)!$，則：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n!}=\lim_{n\to\infty}n+1=\infty$$

不會收斂為常數，因此 $f(n)\in O((n+1)!)\implies f(n)\in O(n!)$ 不成立，得證原命題不成立

(5)

若命題成立，則：

$$\exists k\geq 0:\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=k\implies \exists j\geq 0:\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{f(n)}}{2^n}=j\quad\cdots\quad(1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{f(n)}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}2^{f(n)-n}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}f(n)-n}=2^{(k-1)*\lim\limits_{n\to\infty}n}$$

取 $f(n)=2n\implies k=2$，則：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{f(n)}}{2^n}=2^{(k-1)*\lim\limits_{n\to\infty}n}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\infty$$

不會收斂為常數，與 (1) 矛盾，得證命題不成立

Problem 2

首先可將題目改寫為：

$$f(2^n)=\begin{cases}1 & ,\ n=0\\ 2*f(2^{n-1})+2^{n+1} & ,\ n\geq 1\end{cases}$$

證明 $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)\leq 3n*2^n$

當 $n=0$ 時：

$$f(2^0)=1<3*1*2^1=6\quad\cdots\quad(1)$$

當 $n\geq 1$ 時：

$$\begin{aligned}f(2^n)&=2*f(2^{n-1})+2^{n+1}=2^2*f(2^{n-2})+2*2^{n+1}=\ \cdots\\&=2^n+n*2^{n+1}=(2n+1)*2^n\end{aligned}$$

$$3n*2^n-f(n)=(n-1)*2^n\geq 0\quad\cdots\quad(2)$$

由 $(1),\ (2)$，得證命題成立

Problem 3

令 $T(f(n))$ 為一棵將 $f(n)$ 作為根節點， n^2 為點權，左右子樹分別為 $T(f(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)),\ T(f(\lceil\frac{n}{2}\rceil))$ 的樹，令 $T(f(n))$ 中深度為 i 的節點點權總和為 S_i ，總節點數量為 N_T ， 最大深度 $D=\lceil\log_2 n\rceil$

由上可得：

$$\begin{aligned}n=2k,\ k\in\mathbb{N}&\implies\lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2+\lceil\frac{n}{2}\rceil^2=\frac{n^2}{2}\\ n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}&\implies\lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2+\lceil\frac{n}{2}\rceil^2=(\frac{n}{2}-\frac{1}{2})^2+(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})^2=\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}f(n)=\sum_{i=0}^{D}S_i=(\sum_{i=0}^{D}\frac{n^2}{2^i})+\frac{m}{2}=\frac{2^{D+1}-1}{2^D}*n^2+\frac{m}{2}\\ 2n^2-1-f(n)=\frac{n^2}{2^D}-\frac{m}{2}-1\end{gathered}$$

其中 m 為非葉節點數量， $n>1,\ D>0$ 時，僅深度為 $i\ (i<D)$ 之節點可能有子節點

由於 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lceil\frac{n}{2}\rceil=n$ ，故每一組兄弟節點至多有一個點權為奇數，因此：

$$\begin{aligned}&m\leq\frac{(2^D-1)-1}{2}+1=2^{D-1},\ n\geq 2^{D-1}+1\\ \implies& 2n^2-1-f(n)\geq\frac{n^2}{2^D}-1-2^{D-2}\\ &\geq\frac{2^{2D-2}+2^D+1}{2^D}-1-2^{D-2}=\frac{1}{2^D}>0\quad\cdots\quad(1)\end{aligned}$$

$n=1$ 時：

$$2*1^2-1=1\geq n=1\implies 1^2=1\quad\cdots\quad(2)$$

由 $(1),\ (2)$ ，得證 $f(n)\leq 2n^2-1$