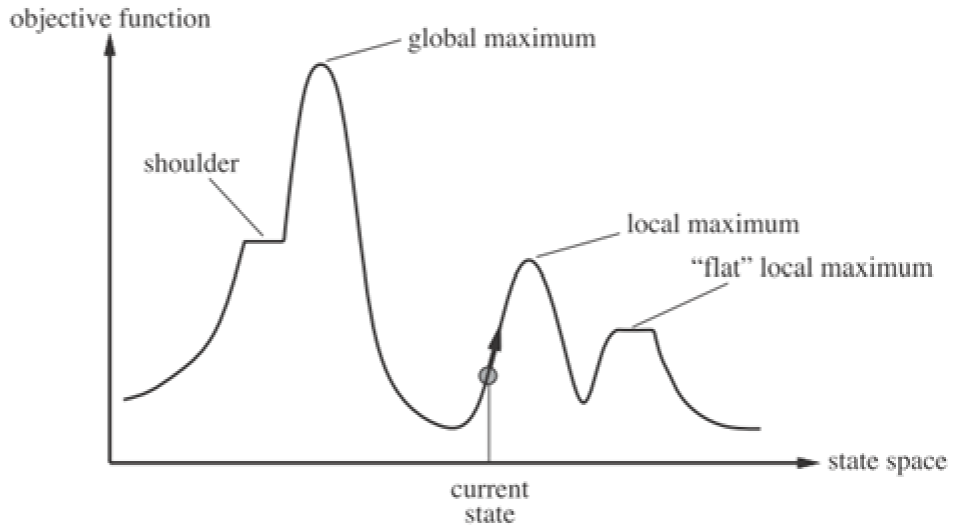
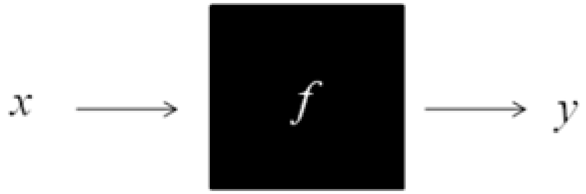
最佳化演算法

黑箱最佳化

- 尋找特定的x使得代入「目標函數」f的結果y為最大值。

- 區域最大值/全域最大值。





梯度下降法

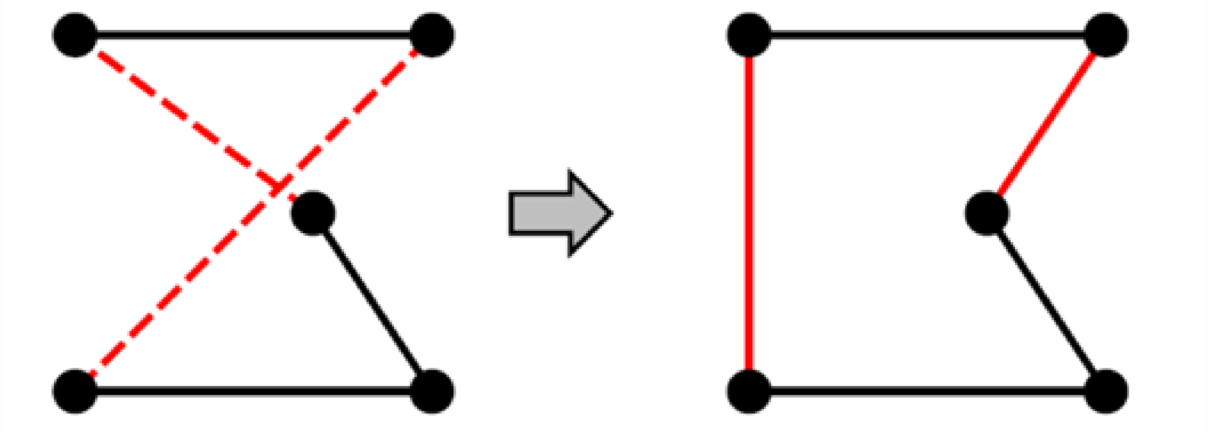
- 又稱作「最速下降法」。
- 情境類似於「在大霧中爬山」。
- 允許橫向移動有助於尋找最大值，但必須有條件限制以避免無窮迴圈。

```
HILL-CLIMBING(problem)

current = MAKE-NODE(problem.initial_state)
repeat
    neighbor = a highest-valued successor of current
    if neighbor.value ≤ current.value
        return current.state
    current = neighbor
```

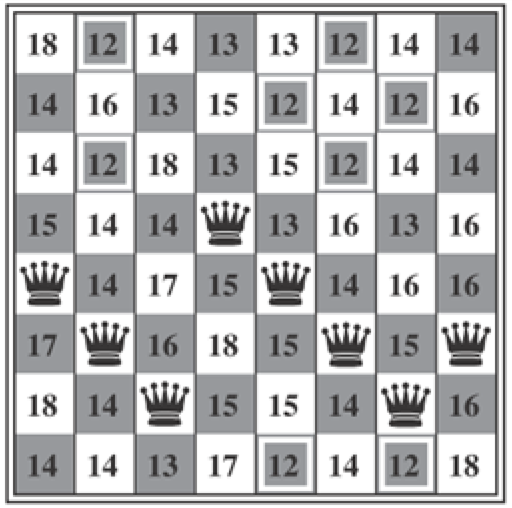
範例：旅行推銷員問題

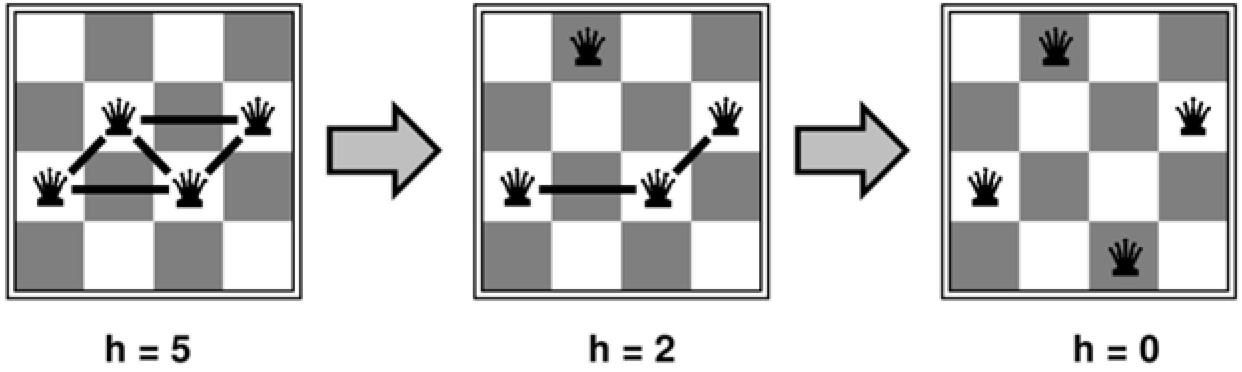
- 用最短的距離連接所有的城市。
- 從任意完整的路徑開始。
- 檢查是否存在兩條路徑對調(SWAP-2)使得總路徑變短。
- 兩個以上的路徑互相交換也可以做，但所需計算時間較久，通常2~3條就能做得不錯。



範例：n個皇后問題

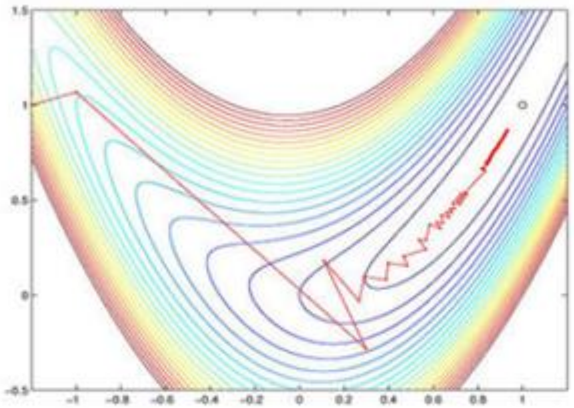
- 移動一個皇后使得互吃的情形減少。
- 在數量極大(n≅ 10^6)的情況仍能迅速解決。

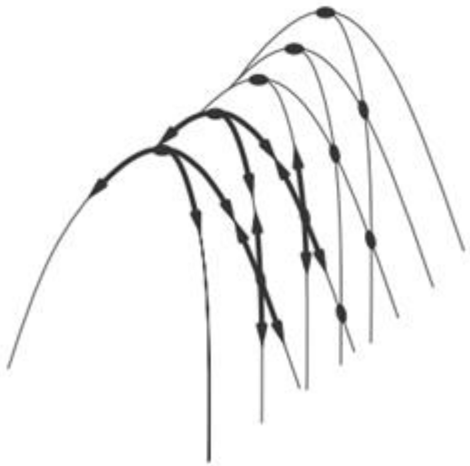




梯度下降法的限制

- 只能找到「最近的區域最大值」。
- 受路徑蜿蜒影響可能會收斂的很慢。
- 高原或山嶺狀圖形會難以找到最大值。
- 加入隨機重啟機制可以改善問題。





模擬退火法(Simulated Annealing)

- 梯度下降法有機率收斂在區域極值。
- 需要隨機產生移動來跳脫區域極值。
- 模擬退火法加入了溫度參數T，會隨著時間緩緩的減少。
- 最佳化的過程中若新的值的能量較低則採用，反之則有$e^{\Delta E/T}$的機率採用。
- 只要T下降的速度足夠慢，模擬退火法就能找到全域的極值。

模擬退火法(Simulated Annealing)

```
SIMULATED-ANNEALING(problem, schedule)

current = MAKE-NODE(problem.initial_state)
for t = 1 to ∞
    T = schedule(t)
    if T == 0
        return current
    next = a randomly selected successor of current
    △E = next.value − current.value
    if △E > 0
        current = next
    else
        current = next only with probability e^(△E/T)
```

演化策略(Evolutionary Strategies)

- 早期的演化策略實驗
- 演化策略範例
- 演化策略運算符介紹
- 與基因演算法之比較
- 基礎演進理論—模擬登山情境

Ingo Rechenberg

Rechenberg的最佳化儀

Lab mutations selected if improvement (1965).

Selection + mutation. Examples from 1973 book *Evolution strategies by Rechenberg.*

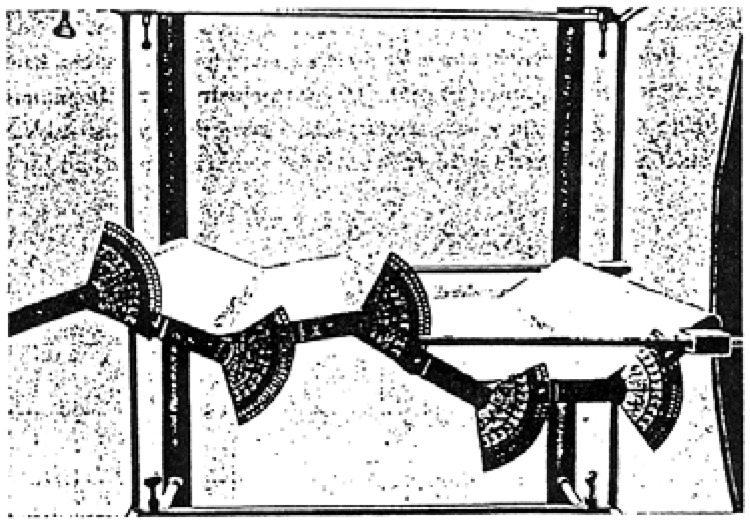


Bild 1. Versuchsobjekt – Gelenkplatte

Rechenberg, I. (2000). Case studies in evolutionary experimentation and computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 186, 125-140.*

Linked Plate Results

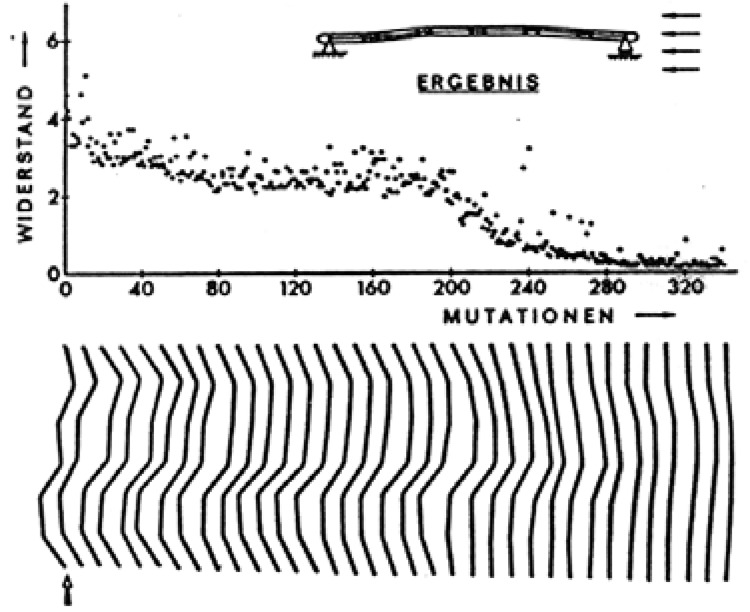
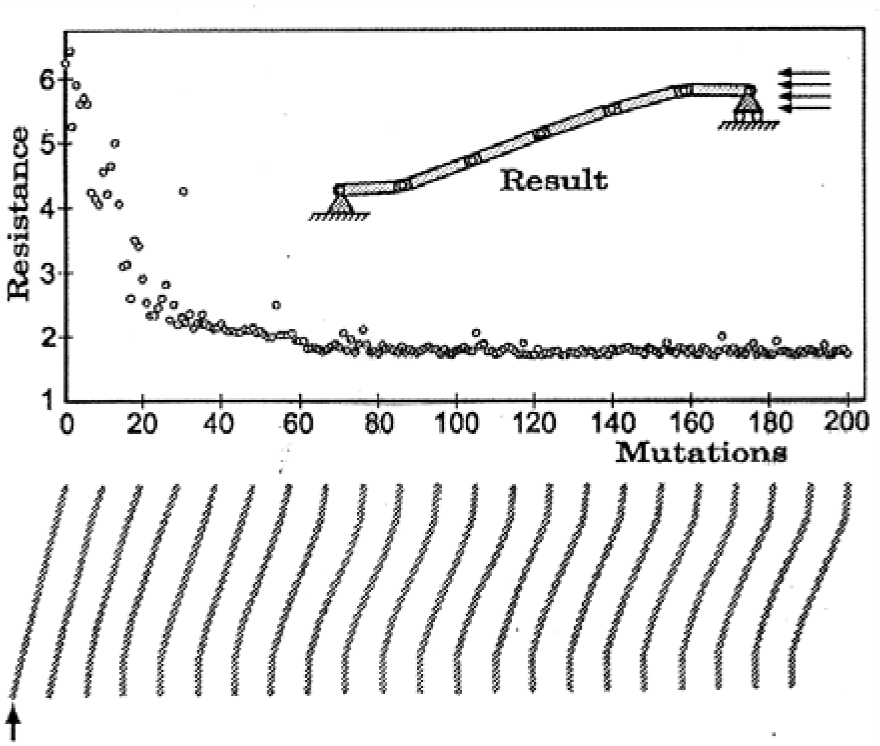


Bild 3. Verlauf der Optimierung der parallel angeströmten Gelenkplatte

Linked Plate Results (contd.)



彎管裝置

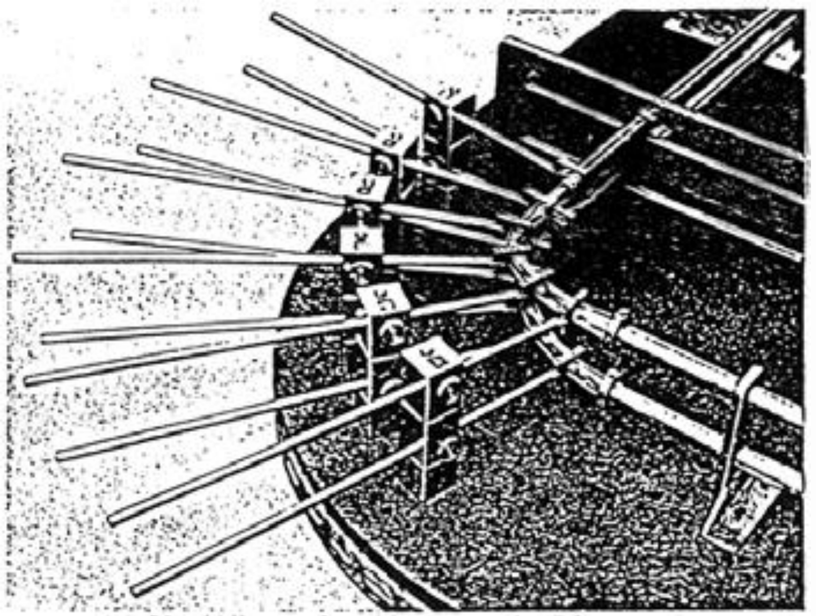


Bild 5. Versuchsaufbau – flexible Rohrumlenkung

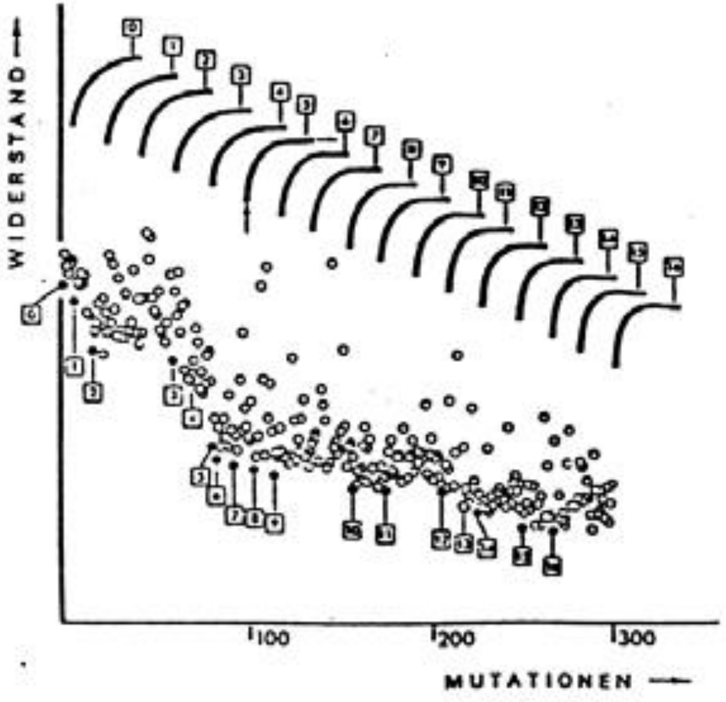


Bild 6. Verlauf der Optimierung des Rohrkrümmers

彎管裝置

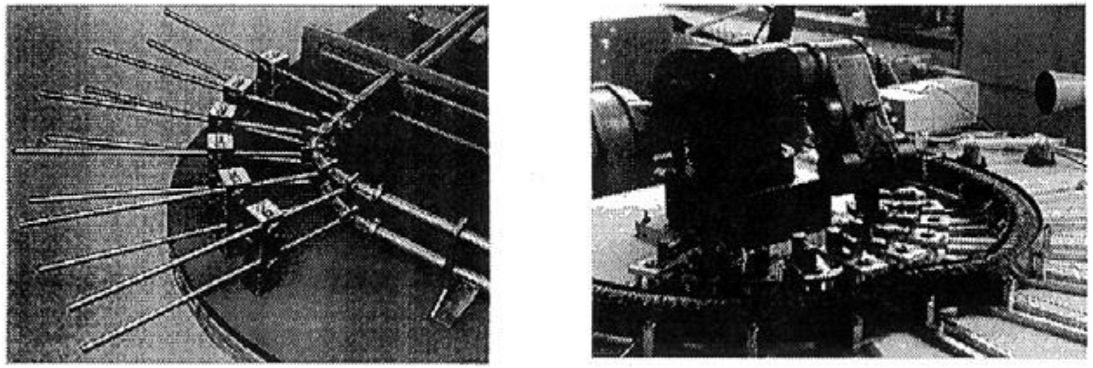


Fig. 1-4: Evolutionary experimentation by hand and with a robot. Six manually adjustable shafts (left) and 10 robot-controlled rope drives (right) determine the bending form of the pipe.

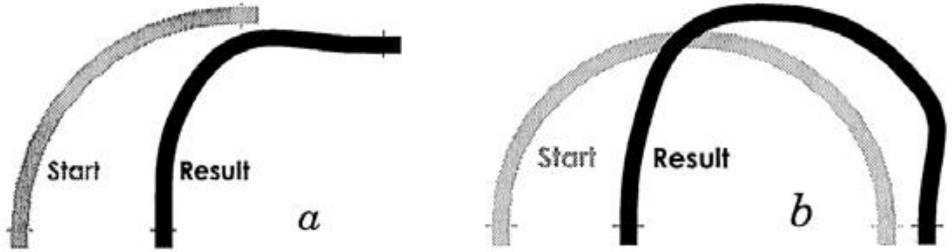


Fig. 1-5: Optimal shape of a 90°-pipe bend (a) and optimal shape of a 180°-pipe bend (b).

仿鳥類羽翼的演進

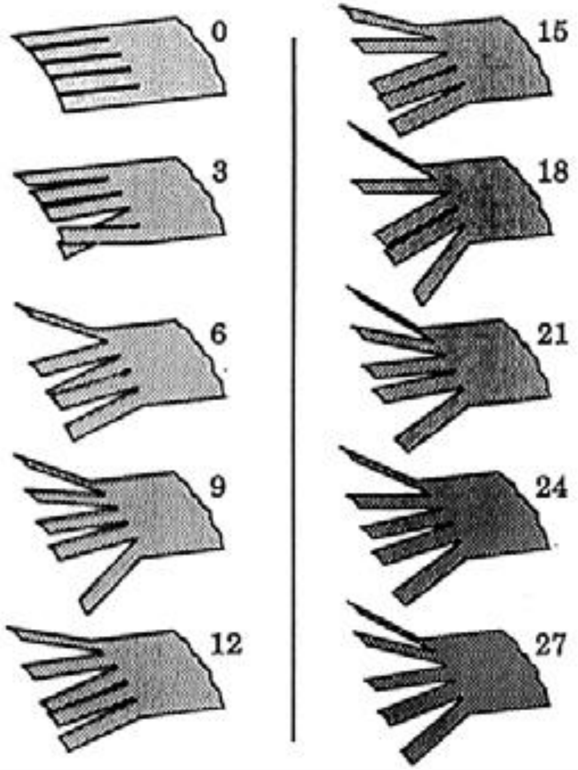


Fig. 1-8:

27 generations of the evolution of a bird-like wing.

透鏡設計

- (1,10)-ES
- 15s on Pentium III PC

I. Rechenberg / Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 186 (2000) 125–140

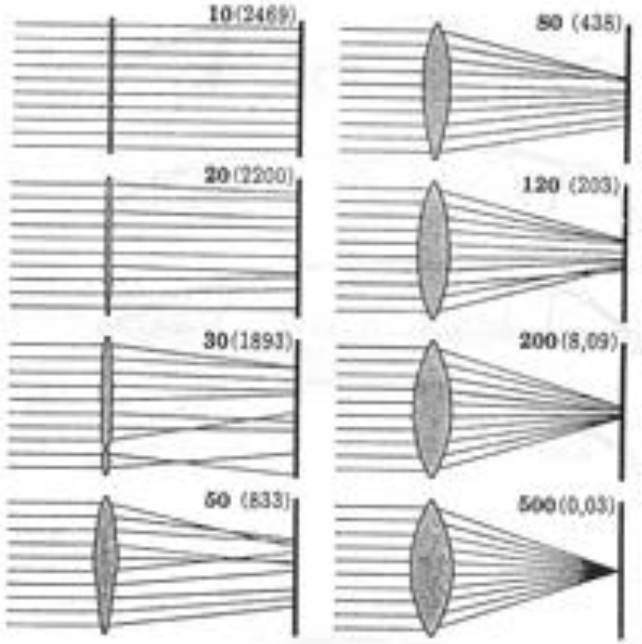
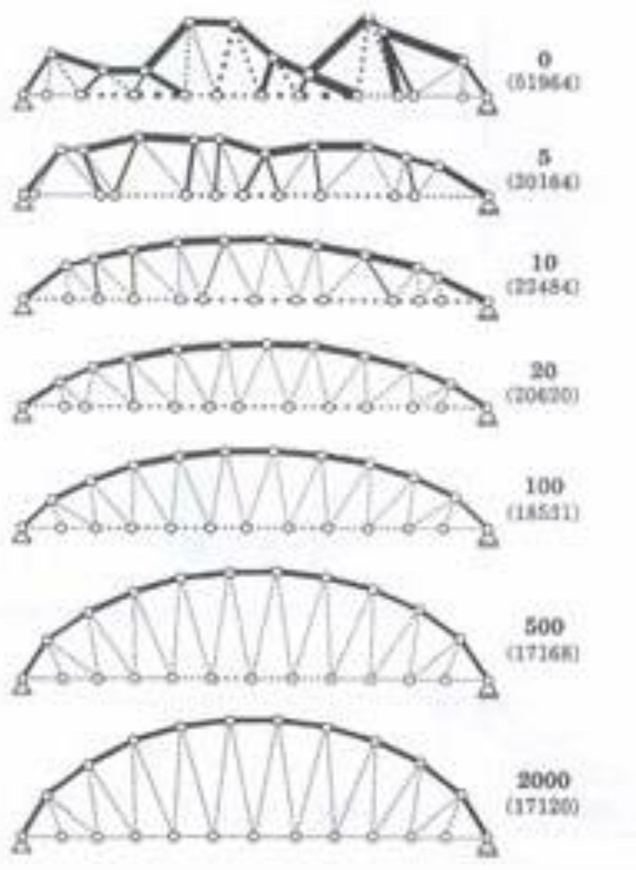


Fig. 12. From window pane to magnifying glass. The evolutionary computation needs 15 s on a Pentium II PC.

橋梁結構設計

- 十個可調變x,y值的上接點
- 十個可調變x值的下接點
- 最佳化可承載之壓力/張力，及橋體最小重量。



算符介紹

Operators

- rec: $I^{\mu} \longrightarrow I$
- mut: $I \longrightarrow I$
- sel_{μ}^{k}: $I^{k} \longrightarrow I^{\mu}$, $k \in \{ \lambda, \mu+ \lambda\}$

Population

- $P^{(t)} = \{a_1,\ldots,a_k \} \in I^k$

(1+1) ES

- Pseudo-code
- Operators: Elitist selection and dimension-wise Gaussian mutation.
- 在先前的表現中加入突變。
- 1/5規則。

Pseudo-Code for (1+1) ES

$t := 0;$

initialize $P^{(t)} = \{(\vec{x}, \sigma)\};$

evaluate $f(\vec{x});$

while $(T(P^{(t)}) = 0)$ **do** { T denotes a termination criterion }

$\quad (\tilde{\vec{x}}, \tilde{\sigma}) := \mathbf{mut}((\vec{x}, \sigma));$

$\quad$ *evaluate* $f(\tilde{\vec{x}});$ { determine objective function value }

$\quad$ **if** $(f(\tilde{\vec{x}}) \leq f(\vec{x}))$ { select }

$\quad\quad$ **then** $P^{(t+1)} := \{(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\sigma})\};$

$\quad\quad$ **else** $P^{(t+1)} := \{(\vec{x}, \tilde{\sigma})\};$

$\quad t := t + 1;$

突變

- $mut := mu_x \circ mu_\sigma$
- 包含下列兩者：
  - 改變每步間距
  - 隨機突變

$$\tilde{\sigma} := mu_\sigma(\sigma) = \begin{cases} \sigma / \sqrt[n]{C}, & p > 1/5 \\ \sigma \cdot \sqrt[n]{C}, & p < 1/5 \\ \sigma & p = 1/5 \end{cases}$$

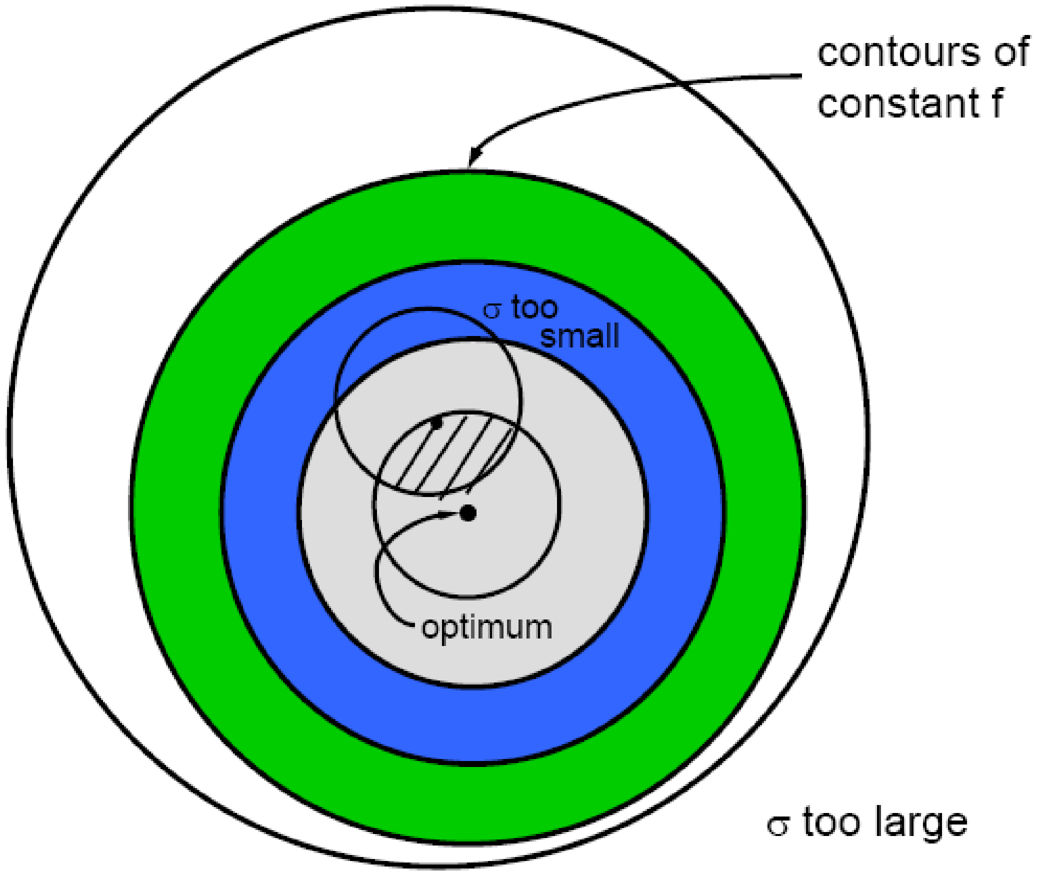
$$\vec{x} := mu_x(\vec{x}) = (x_1 + Z_1, \ldots, x_n + Z_n)$$

$$Z_i \sim N(0, \sigma^2)$$

1/5 規則

- 假想一個球面模型的簡單問題：$$\min \quad f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
- 如果成功率>1/5→開發程度太低，增加每步間距。
- 如果成功率太低→減少每步間距。
- 為什麼p = 1/5, C = 0.817?

1/5規則—視覺化



演化策略—重組

- Richenberg於1973年提出 ($\mu+1$) strategy。
- 由交差產生新個體，再進行突變、篩選。
- 交叉重組的種類：
  - Global intermediary
  - Local intermediary
  - 離散重組 (Discrete recombination)

交叉重組的種類

- Global intermediary

$$b_i = \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\rho} b_{k,i} \qquad \rho \text{ parents}$$

- Local intermediary

$$b_i = u_i b_{k_1,i} + (1-u_i) b_{k_2,i}$$

select 2 of ρ parents

$$U_i \sim U([0,1]) \text{ or } U_i = \tfrac{1}{2}$$

- Discrete recombination

$$b_i' = b_{ki,i}$$

$$K_i \sim U(\{1,\ldots,\rho\})$$

Pseudo-Code for (μ+1) ES

$t := 0;$

initialize $P^{(0)} = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_\mu\} \in I^{\mu};$

evaluate $f(\vec{x}_1), \ldots f(\vec{x}_\mu);$

while $(T(P^{(t)}) = 0)$ **do**

$\quad \tilde{\vec{x}} := \mathbf{mut}(\mathbf{rec}(P^{(t)}));$

$\quad$ *evaluate* $f(\tilde{\vec{x}});$

$\quad P^{(t+1)} := \mathbf{sel}_{\mu}^{\mu+1}(\{\tilde{\vec{x}}\} \cup P^{(t)});$

$\quad t := t + 1;$

od