

Sprout 2020 Algorithm - Week 10

Author: 陳楚融

Problem 1

a

$$(a, b, c) = (0, 1, 0) \\ (0 \vee 1) \wedge (\neg 0 \vee 0) \wedge (\neg 1 \vee \neg 0) \wedge (\neg 0 \vee 1 \vee 0) = 1$$

b

$$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0) \\ (0 \vee \neg 0) \wedge (\neg 0 \vee 0) \wedge (\neg 0 \vee 0) \wedge (\neg 0 \vee \neg 0 \vee \neg 0) \wedge (0 \vee \neg 0 \vee 0) = 1$$

Problem2

a

首先由以下結果：

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg a \wedge \neg(b \vee c) = \neg a \wedge (\neg b \wedge \neg c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \\ \neg(a \wedge b \wedge c) = \neg a \vee \neg(b \wedge c) = \neg a \vee (\neg b \vee \neg c) = \neg a \vee \neg b \vee \neg c$$

得 De Morgan's laws 可推廣至多變數情況

若一 CNF 算式為 $f = (l_{11} \vee l_{12} \vee \dots) \wedge (l_{21} \vee \dots) \wedge \dots$ ，則依照 De Morgan's laws 有 $\neg f = (\neg l_{11} \wedge \neg l_{12} \wedge \dots) \vee (\neg l_{21} \wedge \dots) \vee \dots$

b

由於 CNF 中每個 clause 中皆不會有重複變數，因此必可以將某一 clause 中的所有 literal 設為 F 使得該 clause 值為 F ，於是 $f = F$ ，得所有 CNF 算式皆可為 $f = F$ ，時間複雜度為 $O(n)$

c

由於每個 clause 中皆不會有重複變數，因此必可以將某一 clause 中的所有 literal 設為 T 使得該 clause 值為 T ，於是 $f = T$ ，得所有 DNF 算式皆可為 $f = T$ ，時間複雜度為 $O(n)$

d

已知若一 CNF 算式為 f ，可用 DNF 表示 $\neg f$ ，根據 Problem2.a 可知轉換複雜度為 $O(n)$

令 P 問題為判斷 CNF 算式 f 能否為 T 、 Q 問題為判斷 DNF 算式能否為 F

因為判斷 f 能否為 T 等價於判斷 $\neg f$ 能否為 F ，因此可將 P 問題線性歸約至 Q 問題，已知 P 問題不存在多項式複雜度的解，根據 week9 內容得 Q 問題也不存在多項式複雜度的解

得證判斷 DNF 算式能否為 F 不存在多項式複雜度的解，且因 P 問題為 $NP - hard$ ，得判斷 DNF 算式能否為 F 為 $NP - hard$

e

若任意布林運算式皆可以多項式時間轉為 CNF，則欲判斷一個 DNF 可否為 F 可先以多項式時間轉換其為 CNF

接著根據 Problem2.b 可再用多項式時間判斷 CNF 可否為 F ，得判斷一個 DNF 可否為 F 有多項式複雜度的解，與 Problem2.d 矛盾，得證並非任意布林運算式皆可以多項式時間轉為 CNF

Problem 3

令 P 問題為判斷 DNF 算式 f 能否為 F 、 Q 問題為判斷兩布林運算式是否不相等，欲證 Q 問題為 $NP - hard$ ，可將 P 問題規約至 Q

若 P 之 DNF 算式 f 中有一 clause c_i ，當 f 可能為 F 時，必可能有 $f = F, c_i = F \implies f \wedge \neg c_i = T$ ，得 $f \neq f \wedge \neg c_i$ ；當 f 僅能為 T 時， $f \wedge \neg c_i = T$ ，得 $f = \neg f \wedge \neg c_i$

欲解 P 問題，可透過判斷兩運算式 $f, f \wedge \neg c_i$ 是否不相等，相等則 P 問題解答為不可能；不相等則為可能

因此可將 P 問題輸入轉為 Q 問題輸入，需 $O(N)$ 複雜度，即將 P 線性規約至 Q

根據 Problem2.e， P 問題為 $NP - hard$ ，得證判斷兩布林運算式是否不相等為 $NP - hard$