

ZADANIE I

Treść

Proszę znaleźć wszystkie zera funkcji

$$f(x) = 1.15 * \sin(x) + 2 * \ln(x + 2) - 5.5$$

w przedziale $[2; 12]$, używając dla każdego zera programu z implementacją:

- a) metody bisekcji,
- b) metody siecznych.

Opis zastosowanych algorytmów

Metoda bisekcji (połowienia):

Jest to iteracyjna metoda rozwiązywania równań nieliniowych. Dba o zachowanie przedziału izolacji pierwiastka. W metodzie tej startujemy z początkowego przedziału $[a, b] = [a_0, b_0]$ izolacji pierwiastka. W każdej iteracji otrzymywane jest nowe przybliżenie rozwiązania.

Każda n-ta iteracja przebiega według następującego schematu:

1. Bieżący przedział zawierający zero funkcji $[a_n, b_n]$ dzielony jest na dwie połowy, wyznaczany jest punkt środkowy $c_n = [a_n + b_n]/2$ oraz obliczana jest wartość w punkcie c_n ($f(c_n)$);
2. Obliczane są iloczyny $f(a_n)f(c_n)$ i $f(c_n)f(b_n)$. Nowy przedział zawierający pierwiastek wybierany jest jako ten z dwóch podprzedziałów, któremu odpowiada iloczyn ujemny. Następnie końce tego przedziału oznaczane są przez a_{n+1}, b_{n+1} .

Procedurę można zakończyć na wiele sposobów. Oto niektóre z nich:

- osiągnięcie dokładności rozwiązania: $f(c_n) < \delta$, gdzie δ to założona dokładność rozwiązania;
- osiągnięcie długości przedziału: $b_n - a_n < \delta$, gdzie δ to założona długość przedziału;
- osiągnięcie wyznaczonej liczby iteracji;

Dokładność rozwiązanie dla tej metody zależy jedynie od ilości iteracji, a nie od dokładności obliczania wartości funkcji $f(x)$ na krańcach kolejnych przedziałów izolacji pierwiastka (mniej interesuje nas sam wynik, a bardziej znak iloczynu).

Metoda bisekcji jest zbieżna liniowo ($p = 1$) z ilorazem zbieżności $k = 0.5$.

Jeśli przez $\varepsilon_n = b_n - a_n$ oznaczymy długość przedziału w n-tej iteracji, wówczas łatwo można pokazać że $\varepsilon_{n+1} = 0.5\varepsilon_n$ (zawsze dzielimy przedział na dwa równe podprzedziały i wybieramy jeden z nich na nowy przedział).

Metoda siecznych:

Jest to iteracyjna metoda rozwiązywania równań nieliniowych. Nie dba o zachowanie przedziału izolacji pierwiastka. W metodzie tej przyjmuje się że funkcja na dostatecznie małym odcinku $\langle a, b \rangle$ zmienia się w sposób liniowy. Można wtedy na podanym odcinku $\langle a, b \rangle$ krzywą $y = f(x)$ zastąpić sieczną. Za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmujemy punkt przecięcia siecznej z osią OX. W algorytmie tym sieczną prowadzimy zawsze pomiędzy dwoma ostatnio wyznaczonymi punktami.

Jeżeli dwa ostatnie punkty oznaczyliśmy przez x_{n-1} i x_n to nowy punkt możemy wyliczyć ze wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

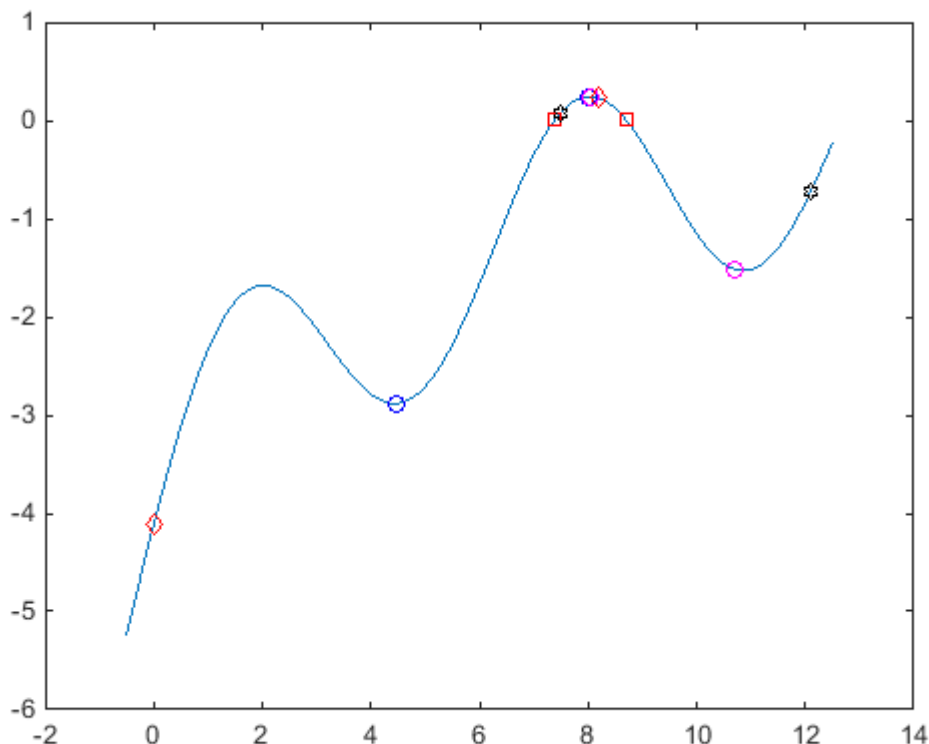
Procedurę obliczania można zakończyć podobnie jak to było w przypadku metody bisekcji.

Metoda siecznych jest zbieżna z rzędem zbieżności $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$, tak więc jest szybsza od metody bisekcji.

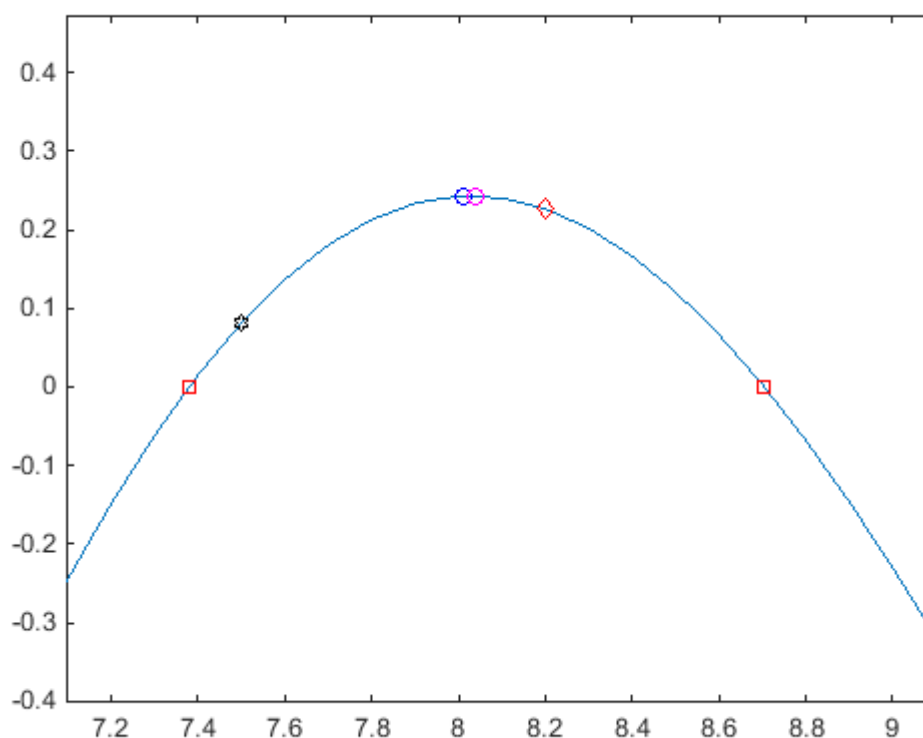
Jednak jest ona zbieżna tylko lokalnie, w praktyce może być niezbieżna gdy początkowy przedział izolacji pierwiastka nie jest dostatecznie mały (wtedy błędne może być zastępowanie na podanym odcinku krzywej $y = f(x)$ sieczną).

Przybliżony wykres funkcji z zaznaczonymi zerami i przedziałami startowymi

Każda para jednakowych figur o jednakowych kolorach odpowiada konkretnemu przedziałowi startowemu (z wyjątkiem czerwonych kwadratów – są to miejsca zerowe).



Zbliżenie na fragment wykresu:



Porównanie wyników otrzymanych przy użyciu poszczególnych metod

Miejsca zerowe wyznaczone analitycznie: 7.379, 8.704

Wyniki porównane są za pomocą tabel, zawierających dla każdej iteracji kolejne przybliżenia miejsc zerowych, wartości w tych miejscach oraz łączny czas wykonywania programu do osiągnięcia konkretnej iteracji.

Na początku przedstawione zostaną wyniki dla największych przedziałów, w których funkcja zawierająca pierwiastki jest monotoniczna (I).

W dalszej części zostaną przedstawione wyniki dla największych przedziałów, w których dało się zaobserwować zbieżność obu algorytmów do określonego miejsca zerowego (II).

Uwaga: symbole '–' oznaczają brak rozwiązania. Algorytmy podatne są na błędy numeryczne. Przy bardzo małych długościach przedziałów i bardzo małych wartościach na krańcach tych przedziałów wykonywanie obliczeń jest trudne i często prowadzi do niedozwolonych sytuacji jak dzielenie przez 0.

I: [4.46; 8.01], na wykresie niebieskie koło – pierwiastek: 7.379

ITERACJA	METODA BISEKCJI			METODA SIECZNYCH		
	x	y	czas	x	y	czas
1	8.01	0.243201	0.000262824	7.73377	0.192903	0.000181612
2	7.1225	-0.222699	0.000323956	7.73377	0.192903	0.000236497
3	7.56625	0.119206	0.000358315	7.51489	0.0902328	0.000266394
4	7.34437	-0.0265739	0.000386427	7.42363	0.0315802	0.000293613
5	7.34437	-0.0265739	0.000414093	7.37449	-0.00370428	0.000320386
6	7.39984	0.0148216	0.000441312	7.37965	0.000119386	0.000348052
7	7.37211	-0.0054755	0.000467193	7.37948	4.20559e-07	0.00037661
8	7.38598	0.00477393	0.000494412	7.37948	-4.81268e-11	0.000402937
9	7.37904	-0.000325656	0.000520293	7.37948	8.88178e-16	0.000429264
10	7.37904	-0.000325656	0.000547959	7.37948	-8.88178e-16	0.000457376
11	7.37904	-0.000325656	0.000576071	7.37948	8.88178e-16	0.000483703
12	7.37991	0.000314544	0.000602844	7.37948	8.88178e-16	0.00051003
13	7.37948	-5.45764e-06	0.000629171	-	-	-
14	7.37948	-5.45764e-06	0.000655944	-	-	-
15	7.37948	-5.45764e-06	0.000682718	-	-	-

I: [8.04; 10.7], na wykresie różowe koło - pierwiastek 8.704

ITERACJA	METODA BISEKCJI			METODA SIECZNYCH		
	x	y	czas	x	y	czas
1	8.04	0.243315	0.000140559	8.40769	0.163259	0.000108432
2	8.705	-0.000477772	0.000169118	8.63042	0.0478627	0.000135651
3	8.705	-0.000477772	0.000196783	8.72281	-0.0126729	0.000162871
4	8.705	-0.000477772	0.00022311	8.70347	0.000559519	0.000189198
5	8.705	-0.000477772	0.000249884	8.70429	5.83963e-06	0.000215525
6	8.705	-0.000477772	0.000279334	8.70429	-2.76709e-09	0.000241405
7	8.705	-0.000477772	0.000328865	8.70429	1.42109e-14	0.000267286
8	8.705	-0.000477772	0.000357423	8.70429	-8.88178e-16	0.000294059
9	8.705	-0.000477772	0.000384196	8.70429	0	0.000320386
10	8.705	-0.000477772	0.000410523	8.70429	0	0.00034716
11	8.7037	0.000402071	0.000437742	-	-	-
12	8.70435	-3.76869e-05	0.000465408	-	-	-
13	8.70435	-3.76869e-05	0.000491735	-	-	-
14	8.70435	-3.76869e-05	0.000518955	-	-	-
15	8.70427	1.73007e-05	0.000545728	-	-	-

II: [0; 8.2], na wykresie czerwony diament - pierwiastek: 7.379

ITERACJA	METODA BISEKCJI			METODA SIECZNYCH		
	x	y	czas	x	y	czas
1	8.2	0.226616	0.000527879	7.77186	0.205139	0.000370363
2	8.2	0.226616	0.000643004	7.77186	0.205139	0.000456037
3	7.175	-0.172091	0.00068361	7.47463	0.0654765	0.000482364
4	7.175	-0.172091	0.000703244	7.38207	0.00191055	0.000501998
5	7.43125	0.0368247	0.000718415	7.37929	-0.000140806	0.000521186
6	7.43125	0.0368247	0.000734925	7.37948	2.5877e-07	0.000539481
7	7.36719	-0.00916157	0.000750543	7.37948	3.49036e-11	0.000557776
8	7.36719	-0.00916157	0.000764376	7.37948	8.88178e-16	0.000576071
9	7.3832	0.00274014	0.00077687	7.37948	8.88178e-16	0.000597936
10	7.3832	0.00274014	0.000790703	7.37948	8.88178e-16	0.000616231
11	7.3792	-0.000210182	0.000807659	7.37948	8.88178e-16	0.000634526
12	7.3792	-0.000210182	0.000823277	-	-	-
13	7.3792	-0.000210182	0.000836664	-	-	-
14	7.3797	0.000159526	0.000852728	-	-	-
15	7.37945	-2.52952e-05	0.000867007	-	-	-

II: [7.5; 12.1], na wykresie czarny hexagram - pierwiastek 8.704

ITERACJA	METODA BISEKCJI			METODA SIECZNYCH		
	x	y	czas	x	y	czas
1	7.5	0.0812836	0.00012985	7.96388	0.240996	0.000143683
2	8.65	0.0356108	0.000144575	8.99603	-0.226841	0.000167779
3	8.65	0.0356108	0.00015707	8.49557	0.123223	0.000188305
4	8.65	0.0356108	0.000168225	8.67174	0.0216384	0.000207046
5	8.65	0.0356108	0.000179381	8.70926	-0.00337245	0.000225341
6	8.72188	-0.0120273	0.000190536	8.7042	6.43997e-05	0.000243636
7	8.72188	-0.0120273	0.000202138	8.70429	1.82347e-07	0.000262378
8	8.70391	0.000263235	0.000212847	8.70429	-9.93339e-12	0.000280227
9	8.70391	0.000263235	0.000224003	8.70429	-8.88178e-16	0.000298968
10	8.70391	0.000263235	0.000235604	8.70429	0	0.000317263
11	8.70391	0.000263235	0.000246314	8.70429	0	0.000335558
12	8.70391	0.000263235	0.000257916	-	-	-
13	8.70447	-0.000117077	0.000269071	-	-	-
14	8.70419	7.31099e-05	0.000280673	-	-	-
15	8.70433	-2.19757e-05	0.000291828	-	-	-

Komentarz do otrzymanych wyników i wnioski

Miejsca zerowe otrzymane za pomocą programu zgadzają się z tymi wyznaczonymi analitycznie. Jeśli chodzi o czasy wykonania kolejnych iteracji, to metody te osiągają bardzo podobne wyniki, dlatego nie da się jednoznacznie stwierdzić która z metod jest szybsza (jeśli chodzi o wykonanie kolejnych iteracji). W przypadku określania szybkości dochodzenia do rozwiązania to zdecydowanie szybsza jest metoda siecznych. Zatem wyniki pomiarów zgadzają się z teoretycznymi przewidywaniami opisanymi wcześniej. Jednak metoda siecznych, chociaż jest szybka, jest metodą zbieżną lokalnie. Nie dba ona o zachowanie przedziału izolacji pierwiastka. Jeśli zaczniemy stosować ją w przedziale izolacji pierwiastka który nie jest dostatecznie mały, to może być ona rozbieżna. Własność ta sprawdzała się w praktyce. Przy pewnych przedziałach metoda zawodziła, była rozbieżna. Przy jeszcze innych „przeskakiwała” ona konkretny pierwiastek funkcji znajdując zupełnie inne miejsce zerowe. Natomiast wolna, w porównaniu do wcześniejszej metody, metoda bisekcji jest zbieżna globalnie, czyli zawsze wtedy gdy startujemy z przedziału zawierającego miejsce zerowe. Ponadto zawsze zbiega stabilnie.

Podsumowując:

Metoda bisekcji – jeśli startujemy z pewnego przedziału izolacji pierwiastka, bez względu na to jak duży jest ten przedział, metoda ta wyznaczy miejsce zerowe należące do tego przedziału. Zatem można jej używać zawsze gdy mamy określony przedział izolacji pierwiastka. Jest względnie wolna.

Metoda siecznych – może ona zawieść w przypadku gdy przedział izolacji pierwiastka z którego startujemy nie jest dostatecznie mały. Jest względnie szybka.

ZADANIE II

Treść

a) Używając metody Newtona, proszę znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 3x + 3$$

b) Proszę znaleźć wszystkie pierwiastki (rzeczywiste i zespolone) wielomianu używając do tego celu metod Mullera MM1 i MM2. Proszę porównać efektywność szukania pierwiastków przez metody MM1, MM2 i Newtona.

Opis zastosowanych algorytmów

Metoda Newtona (stycznych):

Metoda Newtona, zwana też metodą stycznych, zakłada aproksymację funkcji jej liniowym przybliżeniem wynikającym z uciętego rozwiązania w szereg Taylora w aktualnym punkcie x_n (aktualnym przybliżeniu pierwiastka)

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Kolejne przybliżenie pierwiastka, x_{n+1} , wynika z przyrównania do zera sformułowanej lokalnej liniowej aproksymacji funkcji $f(x)$, tzn., z równania

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

co prowadzi do zależności iteracyjnej

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Metoda Newtona jest zbieżna lokalnie. Oznacza to, że jeśli zaczynamy ją stosować w punkcie zbytnio oddalonym od rozwiązania, to może być ona rozbieżna.

Metoda Newtona jest bardzo szybka, jej rząd zbieżności wynosi $p = 2$. Dowód zbieżności kwadratowej:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - a &= (x_n - a) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)(x_n - a) - f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{[f'(a) + f''(\varepsilon_n)(x_n - a)](x_n - a) - f'(a)(x_n - a) + \frac{1}{2}f''(\lambda_n)(x_n - a)^2}{f'(x_n)} \\ &= \frac{(f''(\varepsilon_n) - \frac{1}{2}f''(\lambda_n))(x_n - a)^2}{f'(a)} \approx \frac{f''(\lambda_n)}{2f'(x_n)}(x_n - a)^2 \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon_n \in [x_n, a], \lambda_n \in [x_n, a]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - a|}{|x_n - a|^2} = \frac{|f''(a)|}{2|f'(a)|}.$$

W ten sposób zbieżność kwadratowa tej metody została potwierdzona

$$|x_{n+1} - a| \approx \frac{|f''(a)|}{2|f'(a)|} |x_n - a|^2.$$

Metoda Newtona cechuje się szczególnie dużą efektywnością, gdy krzywa $f(x)$ jest bardzo stroma w otoczeniu danego pierwiastka. Natomiast w przeciwnym przypadku, gdy krzywa $f(x)$ jest w pobliżu tego pierwiastka prawie pozioma (czyli $f'(x)$ ma bardzo małą wartość) stosowanie tej metody nie jest zalecane.

Metoda Mullera:

Metoda ta polega na aproksymacji wielomianu w otoczeniu rozwiązania funkcją kwadratową. Może być traktowana jako uogólnienie metody siecznych, w której zamiast interpolacji w dwóch punktach funkcją liniową wykonuje się interpolację w trzech punktach funkcją kwadratową (**MM1**). Istnieje też alternatywna realizacja tej metody, w której wykorzystuje się informacje o wielomianie w jednym punkcie a także informacje o pierwszej i drugiej pochodnej w tym punkcie (**MM2**).

Metoda MM1:

Rozważymy trzy punkty x_1, x_2, x_3 oraz wartości w tych punktach $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$. Na początku stworzymy funkcję kwadratową przechodzącą przez wszystkie trzy punkty a następnie wyznaczymy pierwiastki tej funkcji. Jeden z nich potraktujemy jako kolejne, poprawione przybliżenie rozwiązania.

Bez utraty ogólności można przyjąć, że aktualną aproksymacją rozwiązania jest x_2 . Wtedy zmienna przyrostowa przybiera postać

$$z = x - x_2$$

W algorytmie wykorzystane zostaną

$$z_0 = x_0 - x_2$$

$$z_1 = x_1 - x_2$$

Poszukiwaną parabolę oznaczmy przez

$$y(z) = az^2 + bz + c$$

Po podstawieniu do paraboli trzech danych punktów otrzymujemy

$$az_0^2 + bz_0 + c = y(z_0) = f(x_0),$$

$$az_1^2 + bz_1 + c = y(z_1) = f(x_1),$$

$$c = y(0) = f(x_2).$$

Aby wyznaczyć parametry a i b należy rozwiązać układ równań

$$az_0^2 + bz_0 = f(x_0) - f(x_2),$$

$$az_1^2 + bz_1 = f(x_1) - f(x_2).$$

Następnie wyznaczamy pierwiastki paraboli ze wzorów

$$z_+ = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$z_- = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Następnie wyznaczamy ze wzoru kolejne przybliżenie pierwiastka

$$x_3 = x_2 + z_{min}$$

Gdzie $z_{min} = z_+$ gdy

$$|b + \sqrt{b^2 - 4ac}| \geq |b - \sqrt{b^2 - 4ac}|,$$

w przeciwnym przypadku $z_{min} = z_-$.

Na końcu iteracji odrzucany jest punkt leżący najdalej od wyznaczonego przed chwilą aktualnego przybliżenia rozwiązania (x_3).

Metoda MM2:

Wykorzystuje informacje o wartości wielomianu i jego pochodnych, pierwszego i drugiego rzędu, w aktualnym przybliżeniu zera x_k . Jest ona trochę efektywniejsza obliczeniowo, ponieważ mniej kosztowne jest obliczenie wartości wielomianu i jego k kolejnych pochodnych w jednym punkcie, niż obliczanie wartości wielomianu w k+1 punktach.

Ponownie oznaczając przez z zmienną przyrostową oraz z definicji paraboli $y(z)$, dla punktu $z = 0$ otrzymujemy

$$y(0) = c = f(x_k),$$

$$y'(0) = b = f'(x_k),$$

$$y''(0) = 2a = f''(x_k).$$

co pozwala wyznaczyć ogólny wzór na pierwiastki

$$z_{+,-} = \frac{-2f(x_k)}{f'(x_k) \pm \sqrt{(f'(x_k))^2 - 2f(x_k)f''(x_k)}}.$$

Analogicznie jak w poprzednim przykładzie do przybliżenia zera bierzemy pierwiastek paraboli o mniejszym module. Wartość przybliżenia dla kolejnej iteracji wyznaczamy ze wzoru

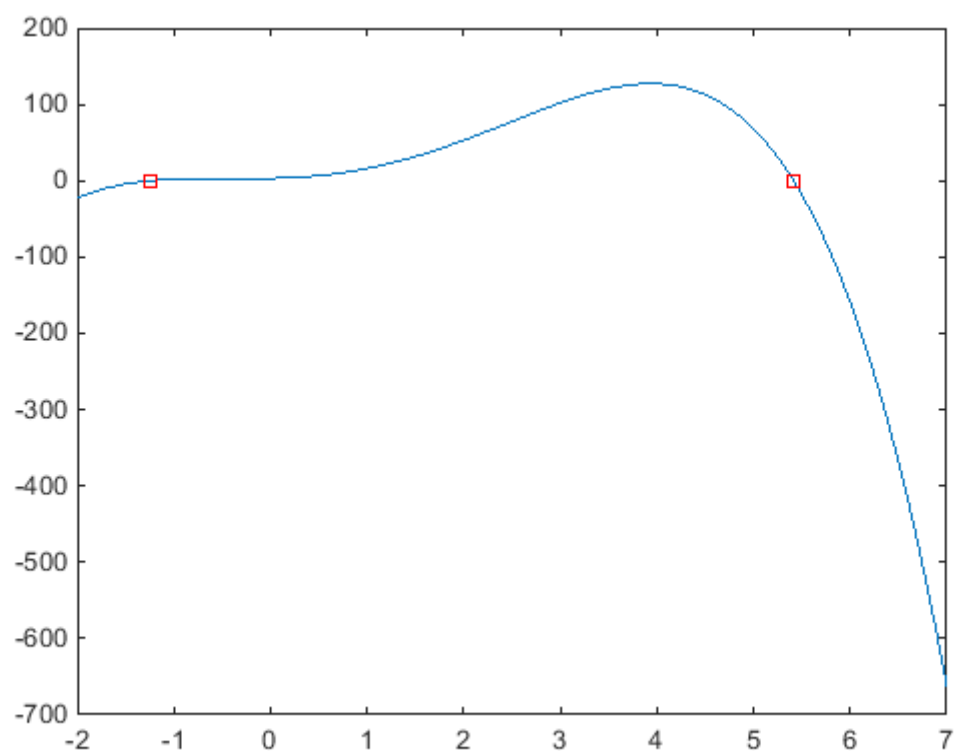
$$x_{k+1} = x_k + z_{min}.$$

Obie realizacje algorytmów Mullera implementowane są w arytmetyce zespolonej aby możliwe było wyznaczenie pierwiastków zespolonych.

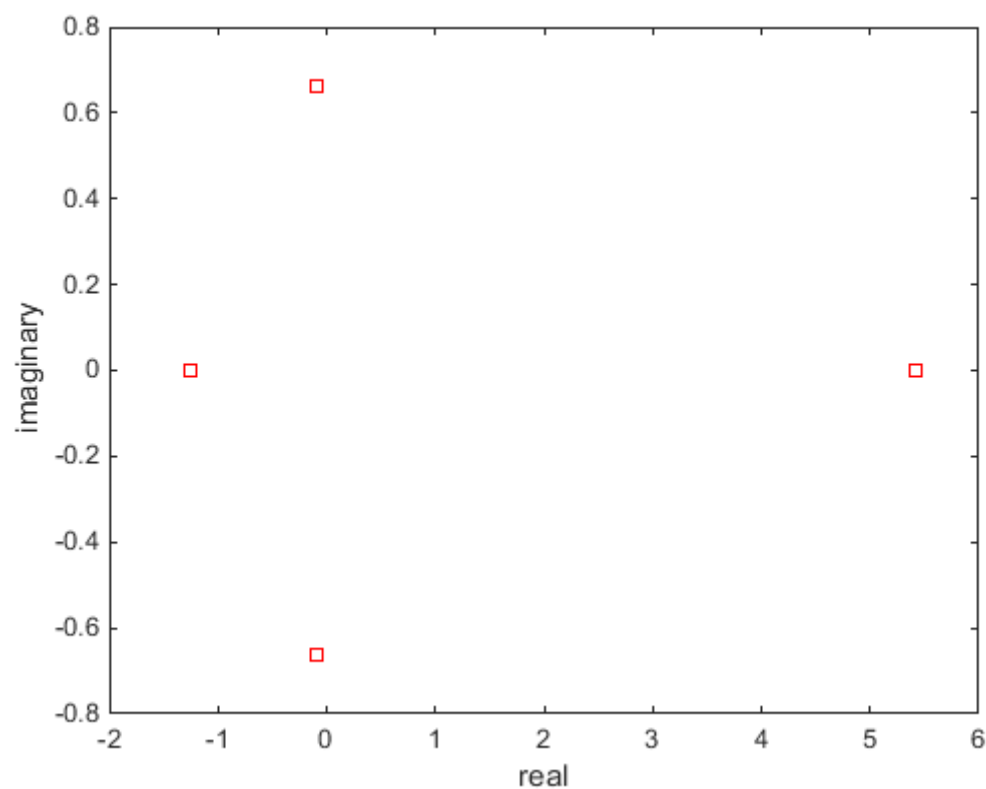
Metoda ta jest zbieżna lokalnie z rzędem zbieżności 1.84. Może być stosowana nie tylko do wielomianów, ale też do innych funkcji nieliniowych.

Przybliżony wykres funkcji z zaznaczonymi zerami (rzeczywistymi)

Miejsca zerowe wyznaczone analitycznie: -1.24445 , 5.41415 , $-0.08485+0.66186i$, $-0.08485-0.66186i$



Wykres wszystkich pierwiastków (rzeczywistych i zespolonych)



Znajdowanie pierwiastków rzeczywistych za pomocą metody Newtona

Tabela wyników dla pierwszego pierwiastka:

ITERACJA	PUNKT STARTOWY: -20		
	x	y	czas
1	-14.8181	-59733.5	0.000315472
2	-10.9507	-18823.7	0.000433719
3	-8.07316	-5917.59	0.000459153
4	-5.94207	-1853.55	0.00047834
5	-4.37488	-577.404	0.000496189
6	-3.23458	-178.297	0.000514483
7	-2.41907	-54.163	0.000531886
8	-1.85475	-15.84	0.000549734
9	-1.49341	-4.16535	0.000567583
10	-1.3056	-0.79239	0.000584985
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: -10		
	x	y	czas
1	-7.36777	-4185.67	0.000113784
2	-5.42191	-1309.23	0.000133864
3	-3.99482	-406.957	0.000151712
4	-2.96083	-125.194	0.000169561
5	-2.22687	-37.7308	0.000186963
6	-1.72714	-10.8071	0.000208381
7	-1.42034	-2.67055	0.000225784
8	-1.27817	-0.420225	0.000243186
9	-1.246	-0.0184703	0.000260588
10	-1.24445	-4.13974e-05	0.000277544
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 0		
	x	y	czas
1	-1	2	3.79281e-05
2	-1.4	-2.2976	5.80077e-05
3	-1.27161	-0.33533	7.58562e-05
4	-1.24547	-0.0121149	9.32585e-05
5	-1.24445	-1.78553e-05	0.000110661
6	-1.24445	-3.89706e-11	0.000128509
7	-1.24445	-2.22045e-15	0.000146358
8	-1.24445	0	0.00016376
9	-1.24445	0	0.000181162
10	-1.24445	0	0.000198565

Tabela wyników dla drugiego pierwiastka:

ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 10		
	x	y	czas
1	8.01769	-1593.7	5.53304e-05
2	6.66131	-453.044	7.541e-05
3	5.84295	-108.12	9.28123e-05
4	5.48663	-15.3565	0.000110661
5	5.4167	-0.520899	0.000127617
6	5.41416	-0.000672807	0.000145019
7	5.41415	-1.12736e-09	0.000161975
8	5.41415	-3.55271e-15	0.000178931
9	5.41415	-3.55271e-15	0.000195887
10	5.41415	-3.55271e-15	0.000212844
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 20		
	x	y	czas
1	15.351	-39363.8	4.06054e-05
2	11.9054	-12309	6.02387e-05
3	9.38266	-3798.66	7.7641e-05
4	7.58508	-1136.03	9.45971e-05
5	6.3842	-312.926	0.000111999
6	5.70297	-68.0941	0.000128956
7	5.44964	-7.38033	0.000145912
8	5.41478	-0.127819	0.000162868
9	5.41415	-4.06428e-05	0.000179824
10	5.41415	-4.00746e-12	0.000197226
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 30		
	x	y	czas
1	22.8123	-219616	4.01592e-05
2	17.4452	-69196.8	5.97925e-05
3	13.454	-21712.8	7.7641e-05
4	10.5109	-6752.95	9.50433e-05
5	8.38007	-2057.93	0.000112446
6	6.90056	-596.065	0.000129402
7	5.97403	-150.134	0.000146804
8	5.52975	-25.0292	0.000164206
9	5.42046	-1.29183	0.000181162
10	5.41417	-0.00411186	0.000198118

Znajdowanie pierwiastków rzeczywistych i zespolonych za pomocą metody Mullera:

MM1, tabela wyników dla wszystkich pierwiastków:

ITERACJA	PUNKTY STARTOWE: -8, 7, 14		
	x	y	czas
1	6.7136	-482.4825	0.000451571
2	6.0946-0.88895i	-80.72795+315.9045i	0.000602392
3	5.4338+0.28898i	4.70128-59.7885i	0.000657723
4	5.3728-0.022483i	8.3289+4.401i	0.000701006
5	5.4148+0.0012237i	-0.13834-0.25013i	0.000740273
6	5.4142+1.0213e-07i	0.00033611-2.0862e-05i	0.000777756
7	5.4142-9.3438e-12i	1.3643e-10+1.9086e-09i	0.000815684
8	5.4142-1.8033e-21i	-1.1724e-13+3.6836e-19i	0.000852274
9	5.4142-3.5968e-20i	2.7711e-13+7.347e-18i	0.00088931
10	5.4142-1.5933e-20i	-1.1724e-13+3.2545e-18i	0.000925453
ITERACJA	PUNKTY STARTOWE: -5, 3, 10		
	x	y	czas
1	3.2804	113.569	0.000210614
2	2.3395	69.5945	0.000308782
3	1.2454	22.9138	0.000353404
4	0.61549	8.2874	0.00039044
5	-0.098984+0.47364i	1.4266+0.355i	0.000489053
6	-0.10368+0.61102i	0.49538+0.020628i	0.000533675
7	-0.088737+0.66334i	0.0016003-0.040675i	0.000573835
8	-0.08483+0.66186i	-5.7805e-05+0.00020574i	0.000613102
9	-0.084852+0.66186i	-2.4543e-08-4.7008e-09i	0.000648799
10	-0.084852+0.66186i	8.8818e-16+4.4409e-16i	0.000685835
ITERACJA	PUNKTY STARTOWE: -10, - 2, 3		
	x	y	czas
1	3.1631	109.0097	9.45979e-05
2	-0.2976	2.6139	0.000141897
3	-0.42971	2.6519	0.00017804
4	-0.90206	2.3916	0.000214184
5	-1.85	-15.6316	0.00024765
6	-1.1449	1.0197	0.000282455
7	-1.2307	0.15947	0.000315921
8	-1.2448	-0.0040993	0.000349388
9	-1.2445	4.1784e-06	0.0003833
10	-1.2445	1.4926e-11	0.000422121

MM2, tabela wyników dla wszystkich pierwiastków:

ITERACJA	PUNKT STARTOWY: -2		
	x	y	czas
1	$-1.3293-0.33331i$	$1.0236-4.6509i$	0.000414089
2	$-1.2585-0.020971i$	$-0.16201-0.25909i$	0.000570265
3	$-1.2445+2.2785e-06i$	$-0.0001421+2.7047e-05i$	0.000592129
4	$-1.2445-7.3183e-16i$	$1.4211e-14-8.6872e-15i$	0.000605962
5	-1.2445	0	0.000622918
6	-1.2445	0	0.000636305
7	-1.2445	0	0.000648799
8	-1.2445	0	0.000661739
9	-1.2445	0	0.000674233
10	-1.2445	0	0.000686727
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: -1		
	x	y	czas
1	-1.2559	-0.13837	0.000151714
2	-1.2444	$1.3586e-05$	0.000166885
3	-1.2445	0	0.000179379
4	-1.2445	0	0.000192319
5	-1.2445	0	0.000204813
6	-1.2445	0	0.000217307
7	-1.2445	0	0.000229802
8	-1.2445	0	0.000242296
9	-1.2445	0	0.00025479
10	-1.2445	0	0.000267284
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 0		
	x	y	czas
1	$-0.21429+0.61859i$	$0.9015-0.78451i$	$5.04225e-05$
2	$-0.084781+0.66048i$	$0.012164+0.0058673i$	$6.69325e-05$
3	$-0.084852+0.66186i$	$-5.1354e-09-1.238e-08i$	$8.07652e-05$
4	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	$9.41517e-05$
5	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	0.000107538
6	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	0.00012271
7	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	0.00013565
8	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	0.00014859
9	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	0.00016153
10	$-0.084852+0.66186i$	$-4.4409e-16-2.2204e-16i$	0.000174024

ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 3		
	x	y	czas
1	1.3771	27.2569	4.86376e-05
2	-0.046754+0.46534i	1.4362+0.68192i	6.73787e-05
3	-0.088702+0.66276i	0.0067339-0.038073i	8.25501e-05
4	-0.084852+0.66186i	1.0426e-07-2.9685e-07i	9.59366e-05
5	-0.084852+0.66186i	-4.4409e-16-2.2204e-16i	0.000108877
6	-0.084852+0.66186i	-4.4409e-16-2.2204e-16i	0.000121817
7	-0.084852+0.66186i	-4.4409e-16-2.2204e-16i	0.000134757
8	-0.084852+0.66186i	-4.4409e-16-2.2204e-16i	0.000147251
9	-0.084852+0.66186i	-4.4409e-16-2.2204e-16i	0.000160192
10	-0.084852+0.66186i	-4.4409e-16-2.2204e-16i	0.000173132
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 4		
	x	y	czas
1	5.7001	-67.3167	4.55141e-05
2	5.412	0.44261	6.02392e-05
3	5.4142	-1.8015e-07	7.31795e-05
4	5.4142	-3.5527e-15	8.61198e-05
5	5.4142	-3.5527e-15	9.86139e-05
6	5.4142	-3.5527e-15	0.000111108
7	5.4142	-3.5527e-15	0.000123602
8	5.4142	-3.5527e-15	0.000136096
9	5.4142	-3.5527e-15	0.000148144
10	5.4142	-3.5527e-15	0.000160638
ITERACJA	PUNKT STARTOWY: 5		
	x	y	czas
1	5.4201	-1.2174	4.81914e-05
2	5.4142	3.7075e-06	6.33628e-05
3	5.4142	1.6342e-13	7.6303e-05
4	5.4142	-3.5527e-15	8.87971e-05
5	5.4142	-3.5527e-15	0.000101291
6	5.4142	-3.5527e-15	0.000113785
7	5.4142	-3.5527e-15	0.000126279
8	5.4142	-3.5527e-15	0.000138327
9	5.4142	-3.5527e-15	0.000150821
10	5.4142	-3.5527e-15	0.000163761

Komentarz do otrzymanych wyników i wnioski, porównanie efektywności wszystkich trzech metod

Pierwiastki otrzymane za pomocą algorytmów zgadzają się z tymi wyznaczonymi analitycznie. Jeśli chodzi o czas wykonania pojedynczej iteracji, to wszystkie trzy metody są szybkie. Jeśli chodzi o efektywność, to porównanie tych metod nie jest takie proste jak to było w poprzednim przypadku. Po pierwsze w metodach Newtona i MM2 wystarczy podać tylko jedną współrzędną x , natomiast w metodzie MM1 należy podać trzy współrzędne x . Ponadto metoda Newtona nie wykrywa pierwiastków zespolonych, natomiast metody MM1 oraz MM2 wykrywają pierwiastki zespolone. Bez problemu da się jednak zauważyć, że wszystkie te metoda są szybko zbieżne, efektywne.

Tabela porównująca MM2 i Newtona, za punkt startowy obrano 20:

ITERACJA	METODA NEWTONA			METODA MM2		
	x	y	czas	x	y	czas
1	15.351	-39363.813	0.000309228	13.749-4.36424i	6006.06834+30378.9496i	0.000343141
2	11.9054	-12309.0463	0.000391332	10.712-0.0176973i	-7411.7394+59.936538i	0.000439523
3	9.3827	-3798.6622	0.000404718	7.6545+1.995i	-213.04297-1745.0901i	0.000456926
4	7.5851	-1136.0252	0.000414535	6.4003+0.056468i	-319.8369-26.22815i	0.000466296
5	6.3842	-312.9263	0.000423013	5.2583-0.050168i	29.6249+8.68405i	0.000474328
6	5.703	-68.0941	0.000431938	5.4144+0.00029767i	-0.045427-0.060819i	0.000482806
7	5.4496	-7.3803	0.000440416	5.4142-1.5383e-12i	-8.4975e-10+3.1423e-10i	0.000490838
8	5.4148	-0.12782	0.00044934	5.4142+2.0195e-28i	-1.1724e-13-4.1251e-26i	0.00049887
9	5.4142	-4.0643e-05	0.000458264	5.4142	1.6342e-13	0.00051181
10	5.4142	-4.0075e-12	0.000467189	5.4142	-3.5527e-15	0.000520735

Na podstawie tabelki porównującej metody Newtona oraz MM2 można stwierdzić, że poszczególne wyniki (przybliżenia zera) w każdej iteracji są bardzo podobne, także czasy wykonania nie odbiegają od siebie. Ponadto należy zauważyć, że metody te znajdują pierwiastek wielomianu nawet w przypadku, gdy za punkt startowy wybieramy punkt znacznie oddalony od poszukiwanego zera. Jeśli chodzi o dane przedstawione w tej tabelce, to minimalnie szybciej pierwsze dokładne przybliżenie zera wyznacza metoda MM2, jest też ona minimalnie wolniejsza.

Podsumowując: należy zauważyć że wszystkie trzy metody są bardzo efektywne. Metoda Newtona jest metodą uniwersalną, natomiast metoda Mullera w szczególności polecana jest do wyznaczania zer wielomianów (wyznacza zera zespolone).