

武汉大学计算机学院 2016-2017 学年第 1 学期

算法设计与分析 试卷 (B 卷)

(本试卷一共八大题, 总分 100 分)

一、(总分 10 分)

(1) 判断 $3n \lfloor \log_2 n \rfloor = O(n^2)$ 是否正确, 请证明; (3 分),

(2) 如下 $C(n)$ 表示算法复杂度函数 (输入规模为 n), 用 $O(\cdot)$ 渐进函数表示每个算法的复杂度 (5 分), 并写出下列算法的复杂度的大小排序; (2 分)

A. $C(n) = C(n-1) + k$, k 是常量, $C(1) = 1$;

B. $C(n) = 2n^2 + 5n + 1/n$;

C. $C(n) = 10^{100} \log_2 n + 3n \log_2 n$;

D. $C(n) = C(n/2) + 100$, $C(1) = 1$;

二、(总分 10 分) 对以下程序段进行时间复杂度分析。

(1) 写出下面程序的时间复杂度的递推式 (递归方程); 并分析算法的空间复杂度, 并用大 “ $O(\cdot)$ ” 记号表示。(5 分)

MERGESORT(low, high)

if low < high;

then mid ← (low, high)/2;

MERGESORT(low, mid);

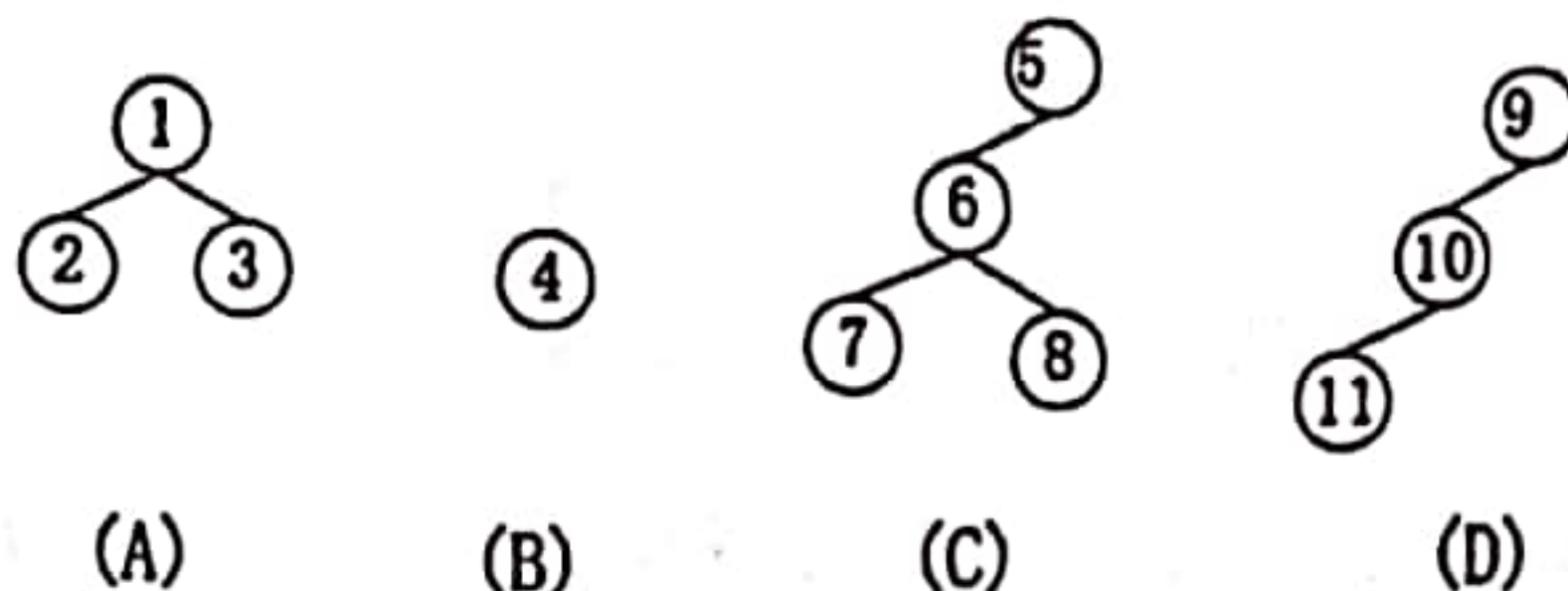
MERGESORT(mid+1, high);

MERGE(low, mid, high);

endif

end MERGESORT

三、(总分 10 分) 现有 A, B, C, D, 4 棵树如下, 假设其根节点的初始秩相等。



(1) UNION (4, 3), UNION (7, 10), UNION (4, 9), FIND (8), FIND (6), UNION 操作中的 FIND 不考虑路径压缩, 请画出每一步操作完成后的树表示; (要求: 对于相同秩的两棵树进行 UNION 操作, 默认第二个参数的父节点的秩加 1);

四、(总分 15 分) 给你一个装有 16 个硬币的袋子。16 个硬币中有一个是伪造的, 并且那个伪造的硬币比真的硬币要轻一些。你的任务是找出这个伪造的硬币。为了帮助你完成这一任务, 将提供一台可用来比较两组硬币重量的仪器, 利用这台仪器, 可以知道两组硬币的重量是否相同。

(1) 写出分治算法的主要思路; (3 分)

(2) 如果问题规模为 n , 假设硬币的重量用数组 $a[i]$ 表示, 请用递归调用方式写出算法伪代码; (4 分) 试分析算法的时间复杂度; (3 分)

(3) 试分析 $n=9$ 和 10, 即 n 分别为奇数和偶数, 两种情形下的分治过程。 (5 分)

五、(总分 15 分) N 个人过河, 船每次只能坐两个人, 船载每个人过河的所需时间不同 $t[i]$, 每次过河的时间为船上的人的较慢的那个, 问最快的过河时间。(船划过去要有一个人划回来)

(1) 请写出两种贪心策略; (5 分)

(2) 假设四人所需要的时间 $t[i]$ 分别是 1、2、5、8 分钟, 说明两种贪心算法过河的步骤以及需要的总时间是多少? (5 分)

(3) 写出较优贪心算法的主要思路 (伪代码)。 (5 分)

六、(总分 15 分) 试用动态规划算法实现下列问题求解: 设 A 和 B 是两个字符串。我们要用最少的字符操作, 将字符串 A 转换为字符串 B , 这里所说的字符操作包括: 删除一个字符 (delete)、插入一个字符 (insert)、将一个字符改为另一个字符 (replase)。对于原字符串 $A[1, \dots, i]$, 目标字符串 $B[1, \dots, j]$, 将字符串 A 变换为字符串 B 所用的最少字符操作数称为字符串 A 到 B 的编辑距离, 则编辑距离定义为 $C[i, j]$ 。

例如将 kitten 一字转成 sitting: 第一步: sitten (k 改为 s); 第二步: sittin (e 改为 i); 第三步: sitting (插入 g); 则其编辑距离为 3;

(1) 请写出求解编辑距离的动态规划思路, 并写出该算法的递归方程; (8 分)

(2) 计算字符串 $A=\text{fail}$ 转换为字符串 $B=\text{sai}$ 的编辑距离, 写出动

态规划计算编辑距离的矩阵表示。(7分)

七、(总分 15 分) 羽毛球队有男女运动员各 n 人。给定两个 $n \times n$ 的矩阵 P 和 Q 。 $P[i][j]$ 是男运动员 i 和女运动员 j 配合组成混合双打的竞赛优势, $Q[i][j]$ 是女运动员 i 和男运动员 j 配合的竞赛优势。由于技术配合或心理状况等各种因素的影响, $P[i][j]$ 并不一定等于 $Q[j][i]$ 。男运动员 i 女运动员 j 配合组成混合双打的男女双方竞赛优势乘积为 $P[i][j] \times Q[j][i]$ 。

请采用回溯法设计一个算法, 计算男女运动员最佳搭配的配对法, 使得各组男女双方竞赛优势乘积的总和达到最大。

(1) 写出回溯法的算法思路, 画出状态空间树。(6分)

(2) 考虑算法的剪枝方法, 并说明;(4分)

(3) 如下面 P 和 Q 数组的数据:

$P =$	10	2	3	$Q =$	2	2	2
	2	3	4		3	5	3
	3	4	5		4	5	1

计算最大的男女双方竞赛优势总和, 并写出最佳搭配;(5分)

八、(总分 10 分) 什么是 P 问题, NP 问题;(5分) 试分析图的 3 着色问题是哪一类问题, 并说明原因;(5分)