3.2

A是B的O —— $B = O(A)$

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ	**N**	**N**	**Y**	**Y**	N
n^k	c^n	**N**	**N**	**Y**	**Y**	N
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	N	N	N	N	N
2^n	$2^{n/2}$	**Y**	**Y**	**N**	**N**	N
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	Y	N	Y	N	Y
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	Y	N	Y	N	Y

$\lg(n!)$和$\lg(n^n)$：

$$n\lg(n) - n + 1 \le \lg(n!) \le (n+1)\lg(n+1) - n$$

同除$n\lg n$:

$$1 - \frac{n-1}{n\lg n} \le \frac{\lg(n!)}{\lg(n^n)} \le \frac{(n+1)\lg(n+1)}{n\lg n} - \frac{1}{\lg n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n!)}{\ln n^n} = 1$$

4.5-4

不能

$$a = 4,\ b = 2,\ f(n) = n^2\lg n \ne O(n^{2-\epsilon}) \ne \Omega(n^{2+\epsilon})$$

方法1

递归树

$$\begin{aligned} T(n) &= c\sum_{i=0}^{\log_2 n-1} 4^i(\frac{n}{2^i})^2\lg(\frac{n}{2^i}) + \Theta(n) \\ &= cn^2\lg n\cdot\log_2 n - \lg 2\cdot cn^2\sum_{i=0}^{\log_2 n-1} i + \Theta(n) \\ &= \Theta(n^2\lg^2 n) \end{aligned}$$

方法2

猜测,

$$T(n) \le cn^2 \lg^2 n$$

假定此上界对于所有正数$m < n$都成立，特别是$m = n/2$

证明,

$$\begin{aligned}T(n) &= 4T(n/2) + n^2 \lg n \\ &\le 4c(n/2)^2 \lg^2(n/2) + n^2 \lg \\ &= cn^2 \lg(n/2) \lg n - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 + n^2 \lg n \\ &= cn^2 \lg^2 n - cn^2 \lg n \lg 2 - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 + n^2 \lg n \\ &= cn^2 \lg^2 n + (1 - c \lg 2) n^2 \lg n - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 \quad (c \ge 1/\lg 2) \\ &\le cn^2 \lg^2 n - cn^2 \lg(n/2) \lg 2 \\ &\le cn^2 \lg^2 n\end{aligned}$$

4.3

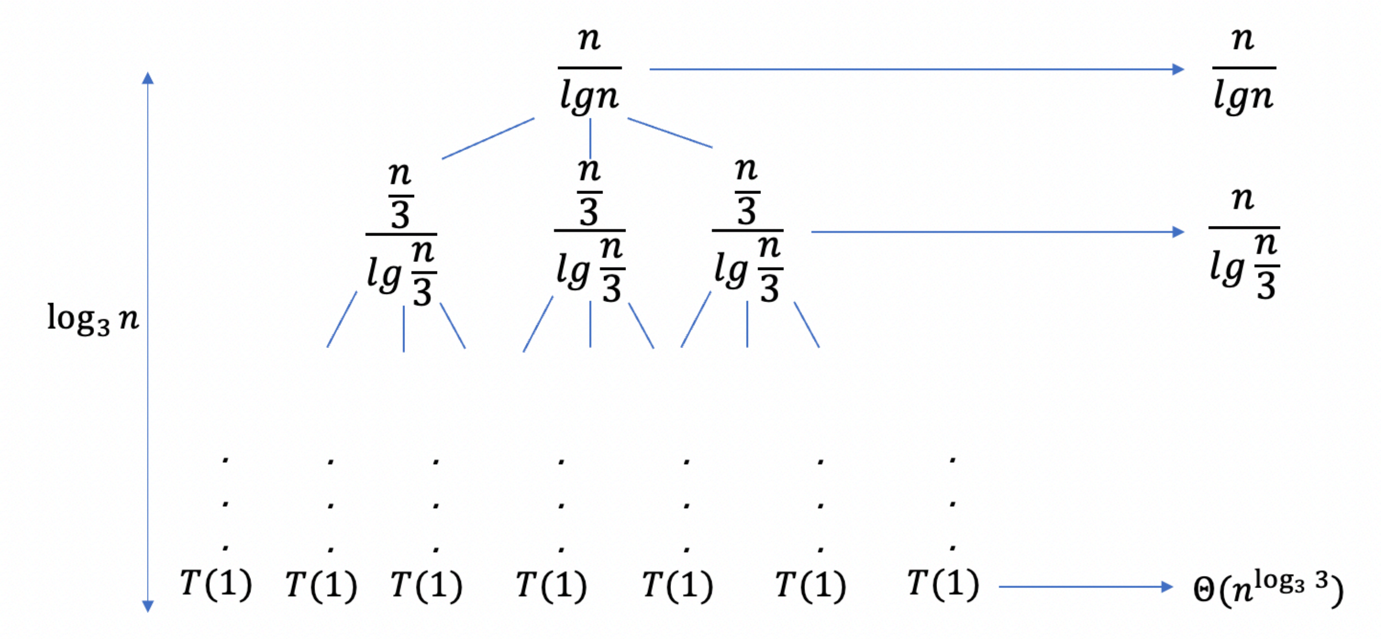
a. $T(n) = 4T(n/3) + nlgn$

$a = 4, b = 3, f(n) = n \lg n$, 由主定理 case1

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$$

b. $T(n) = 3T(n/3) + n/lgn$

方法1



深度为i的结点对应规模为$n/3^i = 1$时，即$i = log_3 n$时，字问题规模变为1，对应于叶结点$T(1)$。

每层结点数是上一层的3倍，因此深度为i的结点数为3^i。并且深度为i的结点对应的字问题规模为$n/3^i$，故深度为i的每个结点的代价为$c(n/3^i)/\lg(n/3^i)$。因此，除叶结点外，深度为i i的所有结点的代价之和为$3^i\cdot(c(n/3^i)/\lg(n/3^i))=cn/(\lg n-i\cdot\lg 3)$。又由于深度为$i$的结点数为$3^i$，并且叶结点深度为$\log_3 n$，故叶结点一共有$3^{\log_3 n}=n$个，于是所有叶结点的代价和为$\Theta(n)$。

每一层代价加起来，得

$$
\begin{aligned}
T(n)&=\sum_{i=0}^{\log_3 n-1}\frac{cn}{\lg n-i\cdot\lg 3}+\Theta(n)\\
&=cn\cdot\sum_{i=0}^{\log_3 n-1}\frac{1/\lg 3}{\lg n/\lg 3-i}+\Theta(n)\\
&=\frac{cn}{\lg 3}\cdot\sum_{i=0}^{\log_3 n-1}\frac{1}{\log_3 n-i}+\Theta(n)\\
&=\frac{cn}{\lg 3}\cdot(\frac{1}{\log_3 n}+\frac{1}{\log_3 n-1}+\cdots+1)+\Theta(n)\\
&=\frac{cn}{\lg 3}\cdot\sum_{i=1}^{\log_3 n}\frac{1}{i}+\Theta(n)\\
&=\frac{cn}{\lg 3}\cdot(\ln(\log_3 n)+O(1))+\Theta(n)\\
&=\Theta(n\lg\lg n)
\end{aligned}
$$

方法2

猜测

$$T(n)=\Theta(n\log_3\log_3 n)$$

下面将这个猜测代入原递归式进行验证。我们要证明的是：存在正常数c_1和c_2，使得$c_2 n\log_3\log_3 n\le T(n)\le c_1 n\log_3\log_3 n$对足够大的$n$都成立。

（1） 证明存在正常数c_1，使得$T(n)\le c_1 n\log_3\log_3 n$

首先假定此上界对所有正数$m<n$都成立，特别是对于$m=\frac{n}{3}$，有$T(\frac{n}{3})\le c_1\frac{n}{3}\log_3\log_3\frac{n}{3}$

将其代入递归式得到

$$
\begin{aligned}
T(n)&\le 3(c_1\frac{n}{3}\log_3\log_3\frac{n}{3})+\frac{n}{\lg n}\\
&=c_1 n\log_3\log_3\frac{n}{3}+\frac{n}{\lg n}
\end{aligned}
$$

现要选取合适的c_1，使得不等式$c_1 n\log_3\log_3\frac{n}{3}+\frac{n}{\lg n}\le c_1 n\log_3\log_3 n$成立。将不等式做一下变换，等价于

$$\frac{c_1 n(\log_3\log_3 n-\log_3\log_3\frac{n}{3})}{\frac{n}{\lg n}}\ge 1$$

令

$$f(x)=\log_3 x$$

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$$

由拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(\log_3 n-1,\log_3 n)$，

$$\log_3\log_3 n-\log_3\log_3\frac{n}{3}=\frac{f(\log_3 n)-f(\log_3 n-1)}{\log_3 n-(\log_3 n-1)}=f'(\eta)$$

则，

$$\begin{aligned}\frac{c_1 n(\log_3\log_3 n-\log_3\log_3\frac{n}{3})}{\frac{n}{\lg n}}&\geq\frac{c_1\frac{1}{(\log_3 n)\ln 3}}{\frac{1}{\lg n}}\\&=c_1\frac{\lg n}{(\log_3 n)\ln 3}\\&=\frac{c_1\lg 3}{\ln 3}\frac{\log_3 n}{\log_3 n}\\&=\frac{c_1\lg 3}{\ln 3}\end{aligned}$$

显然，只要取$c_1\geq\frac{ln3}{lg3}$，不等式成立，此时$T(n)\geq c_1 n\log_3\log_3 n$成立

（2） 证明存在正常数c_2，使得$T(n)\geq c_2 n\log_3\log_3 n$对足够大的$n$都成立

证明与上文类似，最终得到只要取$c_2\leq\frac{ln3}{lg3}$，就能使不等式$T(n)\geq c_2 n\log_3\log_3 n$成立

c. $T(n)=4T(n/2)+n^2\sqrt{n}$

根据主定理 case3

$$T(n)=\Theta(n^{2.5})$$

d. $T(n)=3T(n/3-2)+n/2$

n足够大时，原式转化为

$$T(n)=3T(\frac{n}{3})+\frac{n}{2}$$

根据主定理 case2

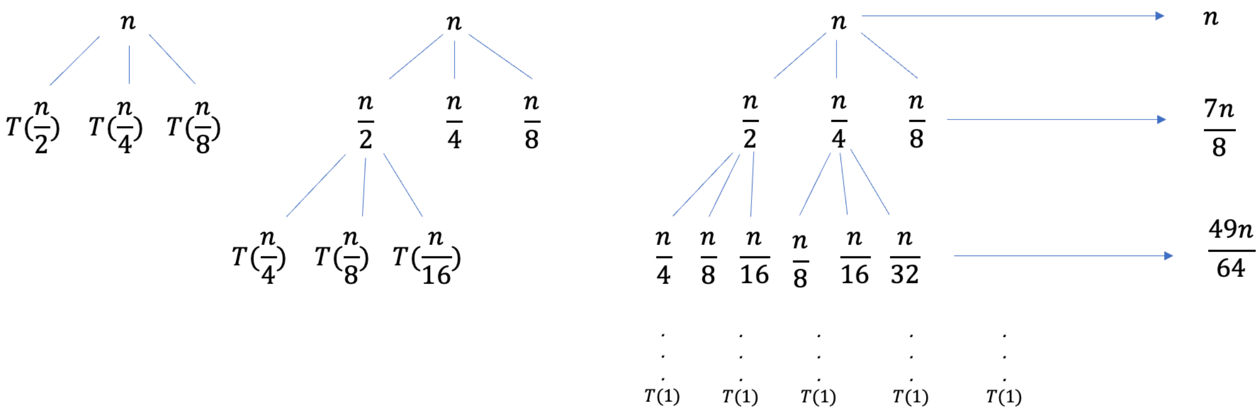
$$T(n)=\Theta(n\lg n)$$

e. $T(n)=2T(n/2)+n/\lg n$

与b同理，$T(n)=\Theta(n\lg\lg n)$

f. $T(n)=T(n/2)+T(n/4)+T(n/8)+n$

方法1



$$
\begin{aligned}
T(n) &= n(\frac{7}{8} + \frac{49}{64} + \cdots + (\frac{7}{8})^k) \\
&= 7n \cdot (1 - (\frac{7}{8})^n) \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}
$$

方法2

猜测：

$$T(n) \le cn$$

假定此上界对于所有正数$m < n$都成立，特别是$n/2$、$n/4$、$n/8$

证明

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{8}) + n \\
&\le \frac{cn}{2} + \frac{cn}{4} + \frac{cn}{8} + n \\
&= (\frac{8}{7}c + 1)n
\end{aligned}
$$

当$c \ge 8$时,

$$T(n) \le (\frac{7}{8}c + 1)n \le cn$$

同理证明下界

g. $T(n) = T(n-1) + 1/n$

$$T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

研究调和级数的前n项和为：

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

定义如下函数：

$$h(x)=\frac{1}{i+1},\ \ i<x\le i+1$$

可以找到$h(x)$的上下界函数

$$\overline{h}=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ \frac{1}{x} & x\ge 1\end{cases}$$

$$\underline{h}=\frac{1}{1+x}$$

则，

$$H_n=\int_0^n h(x)dx$$

且

$$\int_0^n \underline{h}(x)dx\le H_n\le\int_0^n \overline{h}(x)dx$$

即

$$\ln{(n+1)}\le H_n\le 1+\ln{(n)}$$

因此

$$T(n)=\Theta(lgn)$$

h. $T(n)=T(n-1)+\lg n$

$$T(n)=T(0)+\sum_{i=1}^{n}\lg i$$

研究对数数列的前 n 项和：

$$\log{(n!)}=\log{(1)}+\log{(2)}+\cdots+\log{(n)}$$

定义如下函数：

$$a(x)=\log{(i+1)},\ \ i<x\le i+1$$

可以找到$a(x)$的上下界为：

$$\underline{a}(x)=\begin{cases}0 & 0<x<1\\ \log{(x)} & x\ge 1\end{cases}$$

$$\overline{a}=\log{(x+1)}$$

则，

$$A_n=\int_0^n a(x)dx$$

且，

$$\int_0^n \underline{a}(x)dx \leq A_n \leq \int_0^n \overline{a}(x)dx$$

积分可得，

$$n\log{(n)} - n + 1 \leq A_n \leq (n+1)\log{(n+1)} - n$$

因此

$$T(n) = \Theta(n\lg n)$$

i. $T(n) = T(n-2) + 1/\lg n$

与前两题同理，研究对数积分$li(x)$，当$x \to \infty$时，函数有如下渐近表现：

$$li(x) = O(\frac{x}{\ln{(x)}})$$

(其完整的渐近展开式为$li(x) = \frac{x}{\ln x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(\ln x)^k}$)

不难验证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lg i} \geq \frac{n}{\lg n}$$

因此

$$T(n) = \Theta(\frac{n}{\lg n})$$

j. $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$

方法1

（参考书本P49）

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n}T(\sqrt{n}) + 1 = \frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + 1$$

设$Y(k) = \frac{T(k)}{k}$，得

$$Y(k) = Y(\sqrt{k}) + 1$$

令$m = \log_2 k, k = 2^m$，得

$$Y(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + 1$$

重命名$S(m) = Y(2^m)$，得

$$S(m) = S(\frac{m}{2}) + 1$$

根据主方法 case2，

$$a = 1,\ b = 2,\ f(m) = 1$$
$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = 1$$

$f(n)$在多项式意义上等于$n^{\log_b a}$

因此，

$$\frac{T(n)}{n} = Y(k) = S(m) = \Theta(\lg m) = \Theta(\lg \lg k)$$
$$T(n) = \Theta(n \lg \lg n)$$

方法2

猜测，

$$T(n) = \Theta(n \lg \lg n)$$

假定此上界对于所有正数$m < n$都成立，特别是$m = \sqrt{n}$

证明，

$$\begin{aligned} T(n) &\le \sqrt{n} c \sqrt{n} \lg \lg \sqrt{n} + n \\ &= cn \lg \lg \sqrt{n} + n \\ &= cn \lg \lg n - cn \lg 2 + n \\ &= cn \lg \lg n + (1 - c \lg 2) n \\ &\le cn \lg \lg n \end{aligned}$$

只要取$c \ge \frac{1}{\lg 2}$，不等式成立

同理可证下界

4.5

a.

与好芯片数量等同的坏芯片可以对好芯片报告坏，对坏芯片报告好，这样好坏最终无法分辨。

b.

步骤1:

（若n为奇，则从中拿出一个芯片A）随机两两配对测试

步骤2:

仅当互报为好时，任留其中一块，其余情况都扔

【讨论原先为奇数的情况】

（1）当剩余总数是偶数时，把A放回。此时要么好的芯片数和坏的芯片数一样，A是好的芯片；要么好的芯片比坏芯片多偶数个，此时不论A是好是坏，把它加入集合也能保证好的芯片数大于坏的芯片数。

（2）当总数是奇数时，就不放回了，因为好的芯片数必然大于坏的芯片数。

步骤3:

　重复执行直到只剩1个

c.

$$T(n) = T(n/2) + n/2$$

根据主定理，

$$T(n) = O(n)$$

7.1-1

⟨13,19,9,5,12,8,7,4,21,2,6,11⟩

⟨13,19,9,5,12,8,7,4,21,2,6,11⟩

⟨13,19,9,5,12,8,7,4,21,2,6,11⟩

⟨9,19,13,5,12,8,7,4,21,2,6,11⟩

⟨9,5,13,19,12,8,7,4,21,2,6,11⟩

⟨9,5,13,19,12,8,7,4,21,2,6,11⟩

⟨9,5,8,19,12,13,7,4,21,2,6,11⟩

⟨9,5,8,7,12,13,19,4,21,2,6,11⟩

⟨9,5,8,7,4,13,19,12,21,2,6,11⟩

⟨9,5,8,7,4,13,19,12,21,2,6,11⟩

⟨9,5,8,7,4,2,19,12,21,13,6,11⟩

⟨9,5,8,7,4,2,6,12,21,13,19,11⟩

⟨9,5,8,7,4,2,6,11,21,13,19,12⟩

References：

对数积分：

https://baike.baidu.com/item/%E5%AF%B9%E6%95%B0%E7%A7%AF%E5%88%86/10413446#4

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function