厦门大学《算法分析》课程试卷

软件学院 软件工程系 08 级 软件工程专业

主考教师：刘昆宏　　　　试卷类型：（A 卷）

一．填空题（每空 3 分，共 24 分）

1．算法的时间复杂性指算法中______________的执行次数。

2．设 D_n 表示大小为 n 的输入集合，t(I)表示输入为 I 时算法的运算时间， p(I)表示输入 I 出现的概率，则算法的平均情况下时间复杂性 A(n)=________________________。

3．$f(n)=n^2+\log^{50}n$，$g(n)=2n\times\log n$，则 $O(f(n))+O(g(n))$=__________________。

4．分治算法的时间复杂性常常满足如下形式的递归方程：

$$\begin{cases} f(n)=d & , n=n_0 \\ f(n)=af(n/c)+g(n) & , n>n_0 \end{cases}$$

其中，**g(n)表示** ___________________________________。

5．对于下面的确定性快速排序算法，只要在步骤 3 前通过____________算法，就可得到一个随机化快速排序算法，获得很好的平均性能。

```
算法 QUICKSORT
输入：n 个元素的数组 A[1..n]。
输出：按非降序排列的数组 A 中的元素。
1.  quicksort(1, n)
    // 对 A[low..high]中的元素按非降序排序。
2.    if low<high then
3.       w=SPLIT(A, low, high)
         //算法 SPLIT 以 A[low]为主元将 A[low..high]划分成两部 //分，返回主元的新位置。
4.       quicksort (A, low, w-1)
5.       quicksort (A, w+1, high)
6.    end if
    end quicksort
```

6. 下面算法的**基本运算**是____________运算，该算法的时间复杂性阶为Θ(_____)。

```
算法 SPLIT
输入：正整数 n，数组 A[1..n]。
   SPLIT：
   i=1
   x=A[1]
   for j=2 to n
      if A[j]<=x then
         i=i+1
         if i≠j then A[i]↔A[j]
      end if
   end for
   A[i]↔A[1]
   w =i
   return w, A
```

// end SPLIT

7. 假设某算法的 $T(n)=5\times 2^n$，在某台机上实现并完成该算法的时间为 t 秒。如果使用 64 倍的运算时间在同一台机子上进行计算，则能解的问题**规模**为__________。

1. 元运算 2. $\sum_{I\in D_n} p(I)t(I)$

3. n^2 4. 将规模为 n 的问题分解为子问题以及组合相应的子问题的解所需的时间

5. 舍伍德 6. 比较 n 7. n1=n+6

二．选择题（每小题 2 分，共 12 分）

1. 动态规划算法包括所有具有如下特征的算法：首先将原问题分成更小的子问题，保存这些子问题的解，并由它们来计算原问题的一个解。下列的问题求解中哪一个不能使用动态规划算法？（ ）

A．最长公共子序列问题 B．图像无损压缩问题

C．0-1背包问题 D．二分搜索问题

2. 分派问题一般陈述如下：给n 个人分派n 件工作，把工作j 分派给第i 个人的成本为cost（i，j），$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，要求在给每个人分派一件工作的情况下使得总成本最小。此问题的解可表示成n 元组（X_1，…，X_n），其中X_i 是给第i 个人分配的工作号，且$X_i\neq X_j$（$i\neq j$）。此解空间的状态空间有（ ）个n 元组，此解空间的状态空间树被称为（ ）。

A．n^n B．n！ C．2^n D．n E．排列树 F．子集树

3．算法与程序的区别在于算法具有（ ）。

A．能行性 B．确定性 C．有穷性 D．输入和输出

4．在如下四实例上分别运行快速排序算法，其中在（ ）上算法所作元素比较次数最少。

A．（5，5，5，5，5） B．（3，1，5，2，4）

C．（1，2，3，4，5） D．（5，4，3，2，1）

5．以下说法正确的是（ ）

A．贪心法通过分阶段地挑选最优解，对所有问题都能很快获得问题的最优解。

B. 一个问题是否适合用动态规划算法要看它是否具有重叠子问题。

C．分治法通过把问题化为较小的问题来解决原问题，从而简化或减少了原问题的复杂度。

D．分支限界法是一种深度优先搜索算法。

6．以下说法错误的是（ ）

A．数值概率算法总能求解得到问题的一个解，而且所求得的解总是正确的。

B. 舍伍德算法不是避免算法的最坏情况，而是设法消除这种最坏情形行为与特定实例之间的关联性。

C．蒙特卡罗算法可以求得问题的一个解，但该解未必正确。

D．拉斯维加斯算法通常以正的概率给出正确答案。

1. D. 2. B.E. 3. C. 4. B. 5. C. 6. A.

三．算法设计分析题（64 分）

1．（10 分）用 O、Ω、Θ 表示函数 f 与 g 之间的关系：

(1) f (n)=100 $g(n)=\sqrt[100]{n}$

(2) $f(n)=6n+n\lfloor\log n\rfloor$ $g(n)=3n$

(3) f(n)= n/logn-1 $\qquad$ g(n)= $2\sqrt{n}$

(4) f(n)= $2^n + n^2$ $\qquad$ g(n)= 3^n

(5) f(n)= $\log_3 n$ $\qquad$ g(n)= $\log_2 n$

(1) f(n)= O(g(n)) (2) f(n)= Ω(g(n)) (3) f(n)= Ω(g(n)) (4) f(n)= O(g(n)) (5) f(n)= Θ(g(n))

2.（10 分）设 n 个不同的整数按升序存于数组 A[1..n]中，求使得 A[i]=i 的下标 i 。下面是求解该问题的分治算法。

算法 SEARCH

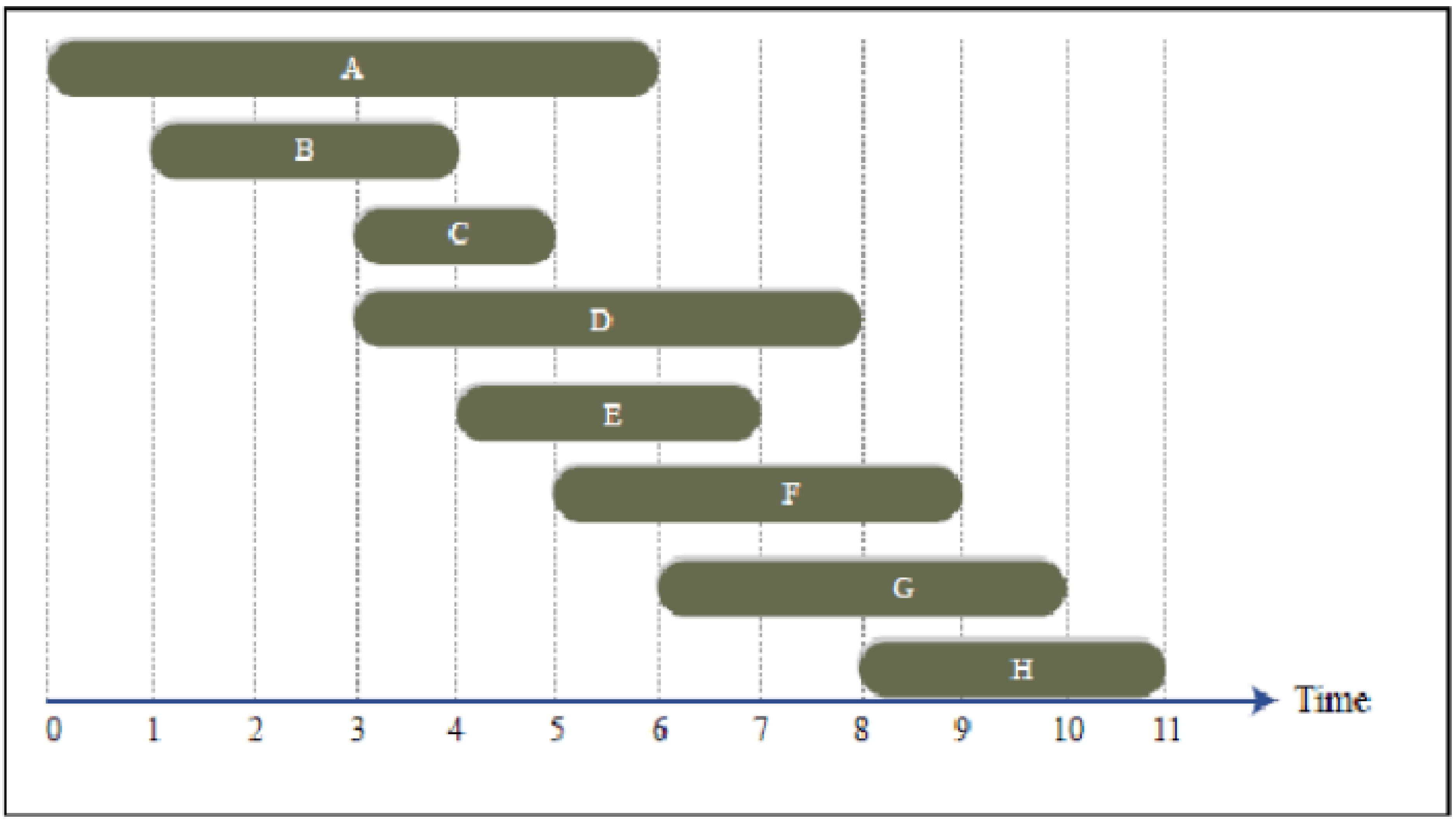
输入：正整数 n，存储 n 个按升序排列的不同整数的数组 A[1..n]。

输出：A[1..n]中使得 A[i]=i 的一个下标 i，若不存在，则输出 no solution。

```
i=find (______(1)______)
if i>0 then output i
     else output “no solution”
end if        // end SEARCH 过程
----------------------------------------------------------
find (low, high)
// 求 A[low..high] 中使得 A[i]=i 的一个下标并返回，若不存在，则返回 0。
if ________(2)________ then return 0
else
   mid=⌊(low + high) / 2⌋
   if ______(3)______ then return mid
   else
       if A[mid]<mid then
             return find(________(4)________)
       else
             return ________(5)________
       end if
   end if
 end if
 //   end find 过程
```

(1) 1, n $\qquad$ (2) low>high $\qquad$ (3) A[mid]=mid $\qquad$ (4) mid+1, high $\qquad$ (5) find(low, mid-1)

3.（12 分）图中的共有 n 项工作，第 i 项工作在 si 时间开始，在 fi 时间结束。如果两项工作没有交叠，则称它们相容。



(1) 如果希望找出最大的相容工作子集，你准备采用**哪种类型**算法（分治，动态规划等）？ （1 分）

(2) 设计相应的算法解决这个问题，请写出解决问题算法对应的**伪代码**，说明算法初始条件，并作出适当的标注。（5 分）

(3) 请**分析或证明**这种方法能否获得**最优解**。（6 分）

3. 解答：**(1) 贪心算法**

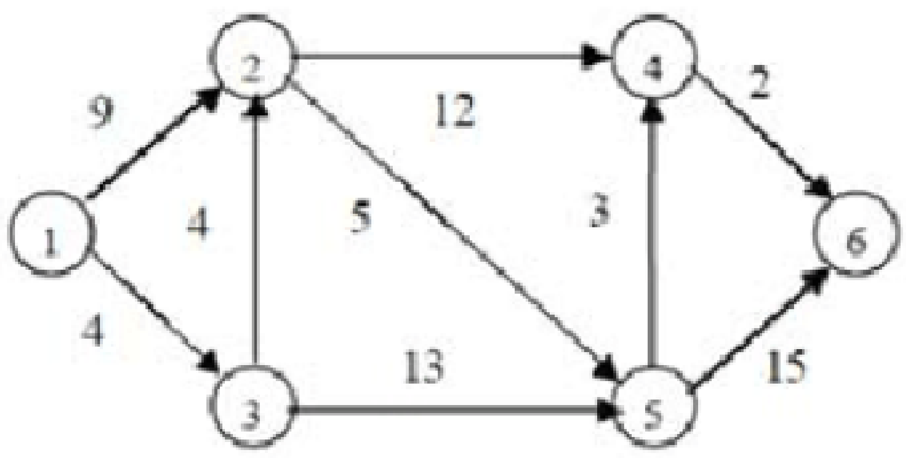
(2) Sort jobs by earliest finish time. Try to add each job in order.

Sort jobs by finish times so that f1 <= f2 <= ... <= fn
Solution set A is empty at start
for j = 1 to n {
    if (job j compatible with A) // Compare j to all jobs in A. If incompatible, break loop
    Add j to A
}return A

(3) 从最优子结构和贪心选择性质两个角度分析。（1）假设E为给定工作的集合，按结束时间的非减序排序。如果该问题有一个最优解A不包含工作1，且A中的工作也按活动的非减序排序，则可以将A中的第一个活动替换为工作1而不违背相容约束，从而构成最优解B。由于A是最优解，则其包含的工作数量最多。而B也是最优解，因其包含的工作数量和A一样多。可见存在以贪心选择开始的最优活动方案。（2）如果A是原问题的最优解，则A'=A-{1}为E'={i∈E, si≥fi}的最优解。因为如果存在E'的一个最优解B'比A'包含的工作个数更多，则将工作1加入B'后，会生成比A更多获得的E的最优解。因此，满足最优子结构性质。

4.（10 分）设计一个算法，描述算法的思路，找出由 n 个数组成的序列的最长单调递增子序列，分析相应的时间复杂度。（**时间复杂度越低的算法分数越高**）

5.（10 分）请设计**两种算法**找到下图中的最短路径，用**图表的方式**给出解决问题的过程。如果是用搜索算法，请画出搜索树。说明相关算法的类型。



5. 解答：

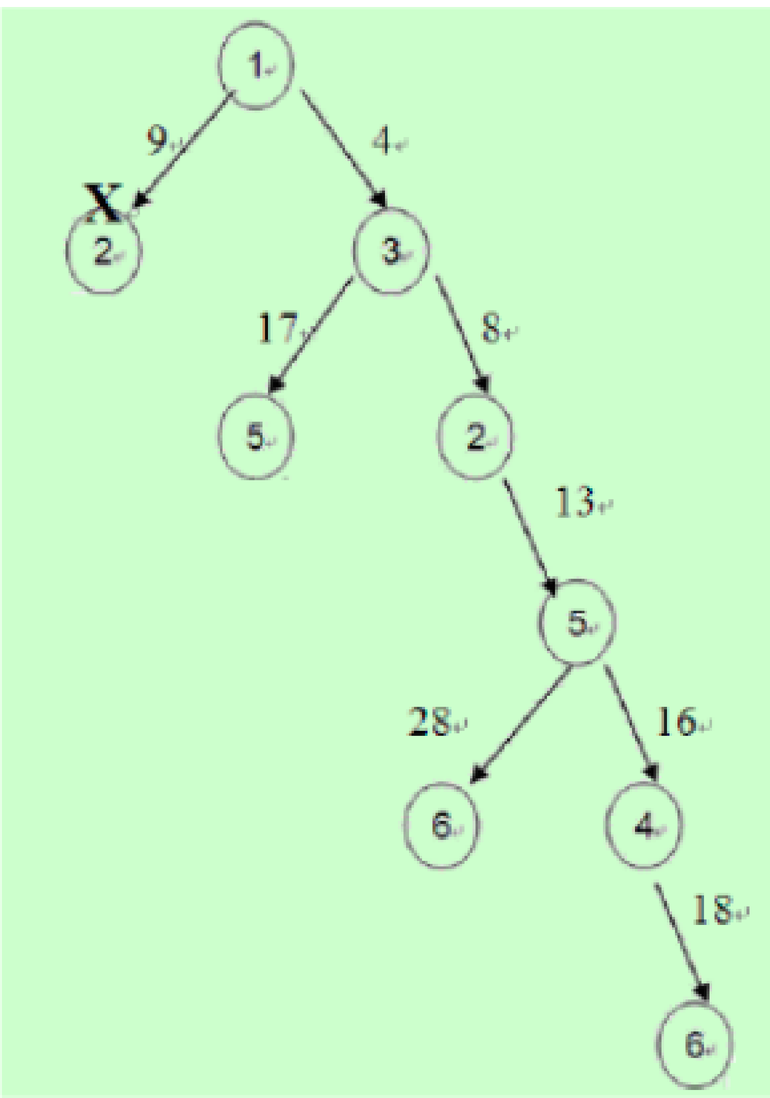
方法 1：

Dijkstra 算法：

迭代次数	集合 X 中的元素	λ[1]	λ[2]	λ[3]	λ[4]	λ[5]	λ[6]	最短路径
初始化	1	0	9	**4**	∞	∞	∞	
1	1，3	0	**8**	4	∞	17	∞	1→3
2	1，3，2	0	8	4	20	**13**	∞	1→3→2
3	1，3，2，5	0	8	4	**16**	13	28	1→3→2→5
4	1，3，2，5，4	0	8	4	16	13	**18**	1→3→2→5→4
5	1，3，2，5，4，6	0	8	4	16	13	18	1→3→2→5→4→6

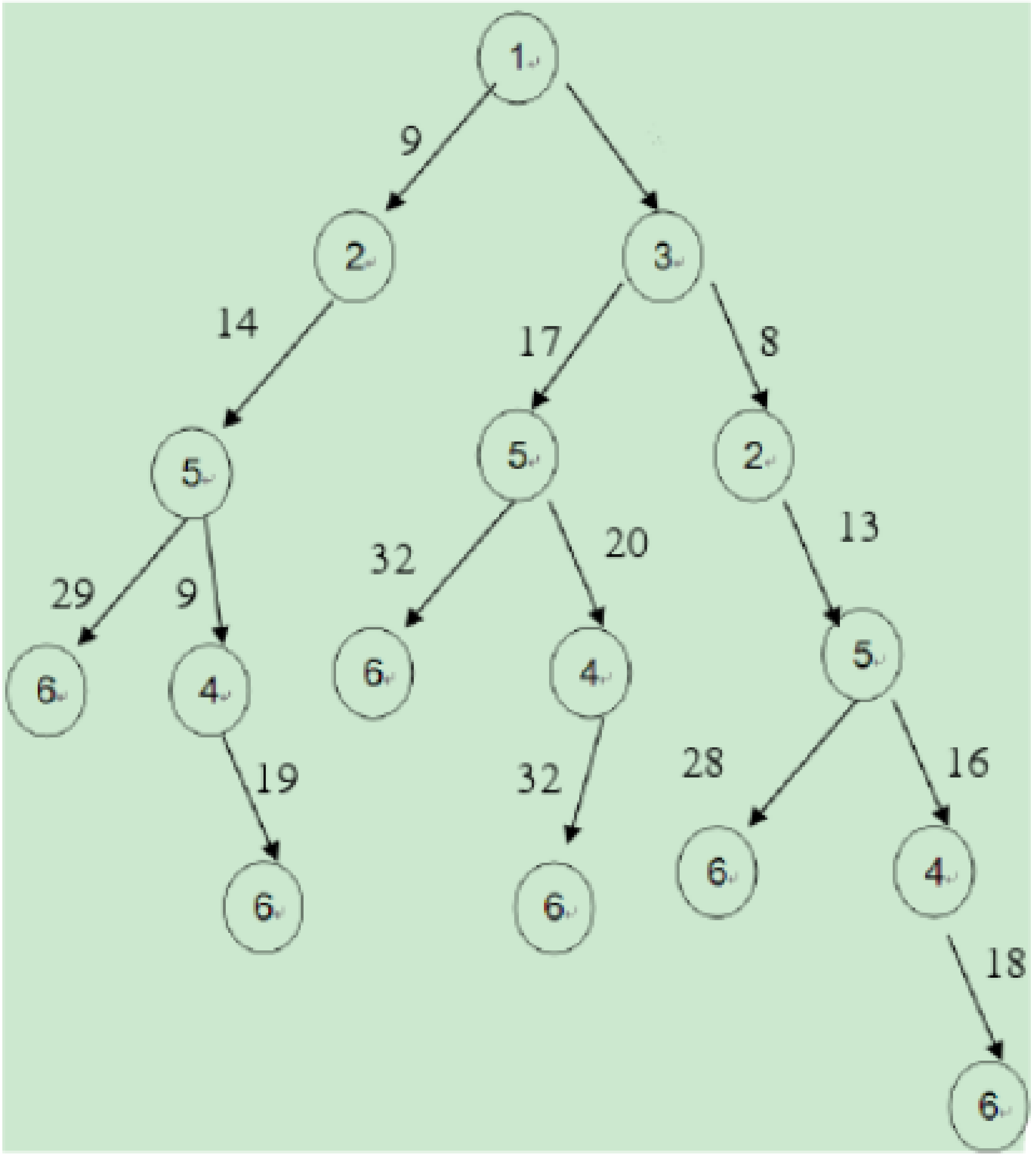
方法 2：

优先队列式搜索：相关搜索图例如下：



方法 3：

回溯法搜索：相关搜索图例如下：



6. （12 分）设有如下结构的移动将牌游戏：

B	B	W	W	E

其中，B 表示黑色将牌，W 表是白色将牌，E 表示空格。游戏的规定走法是：

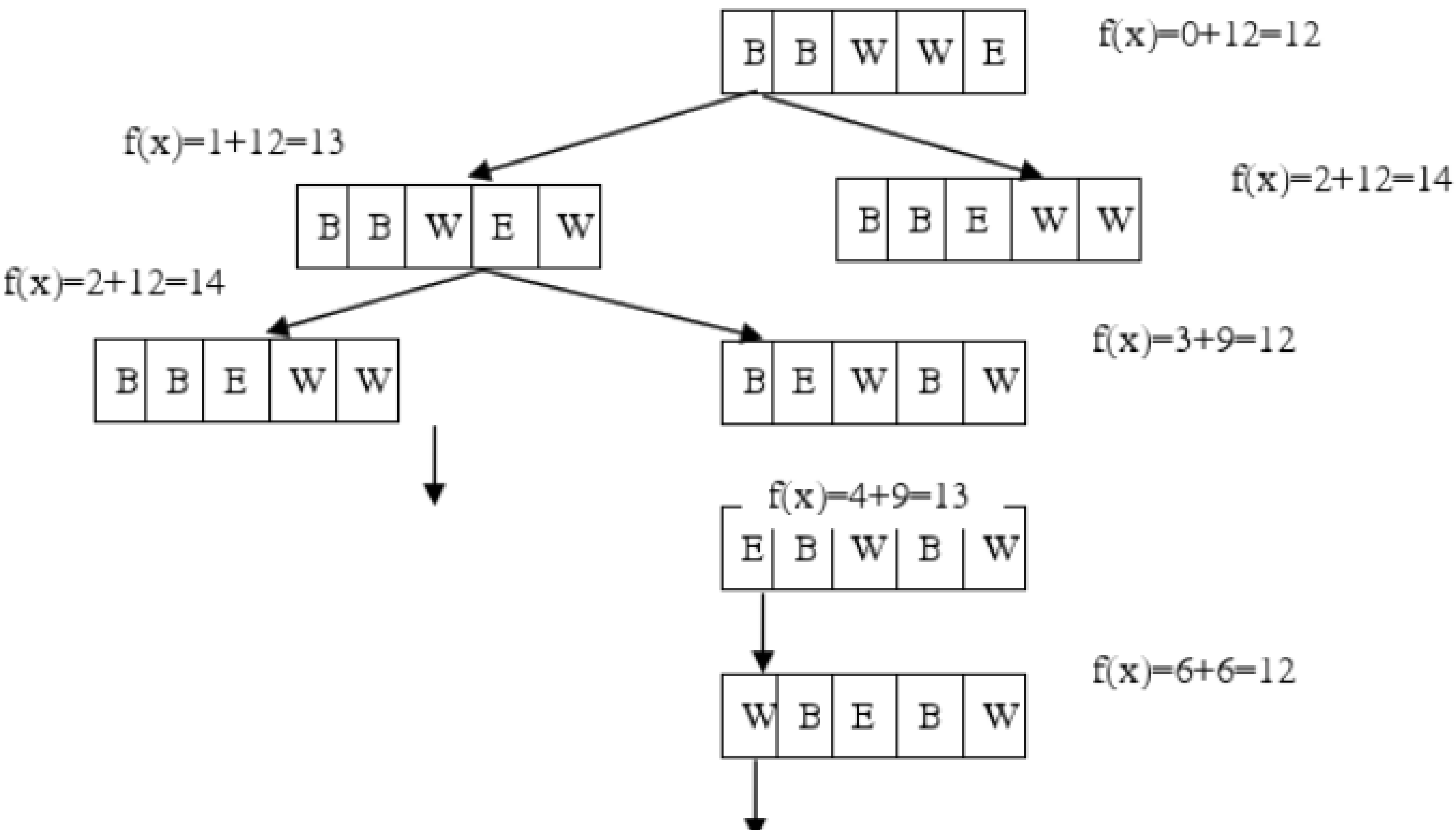
(1) 任意一个将牌可移入相邻的空格，规定其代价为 1；

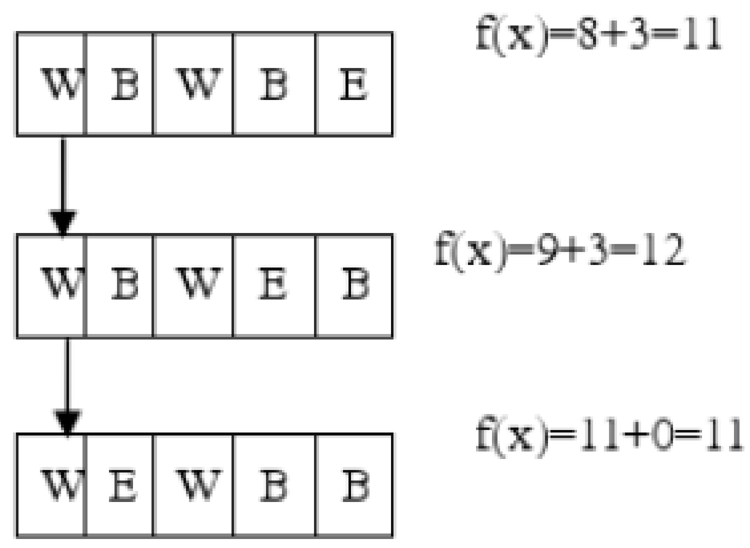
(2) 任何一个将牌可相隔 1 个其它的将牌跳入空格，其代价为 2。

游戏要达到的目标是把所有 W 都移到 B 的左边。

对这个问题，**请设计一个优先队列式分支限界算法（只需给出相关的优先函数，并画出用这个算法产生的搜索树）**。

解：设 f(x)=当前移动的代价+3*当前节点中每个 W 左边的 B 的个数，其搜索树如下：




W B W B E
f(x)=8+3=11
W B W E B
f(x)=9+3=12
W E W B B
f(x)=11+0=11