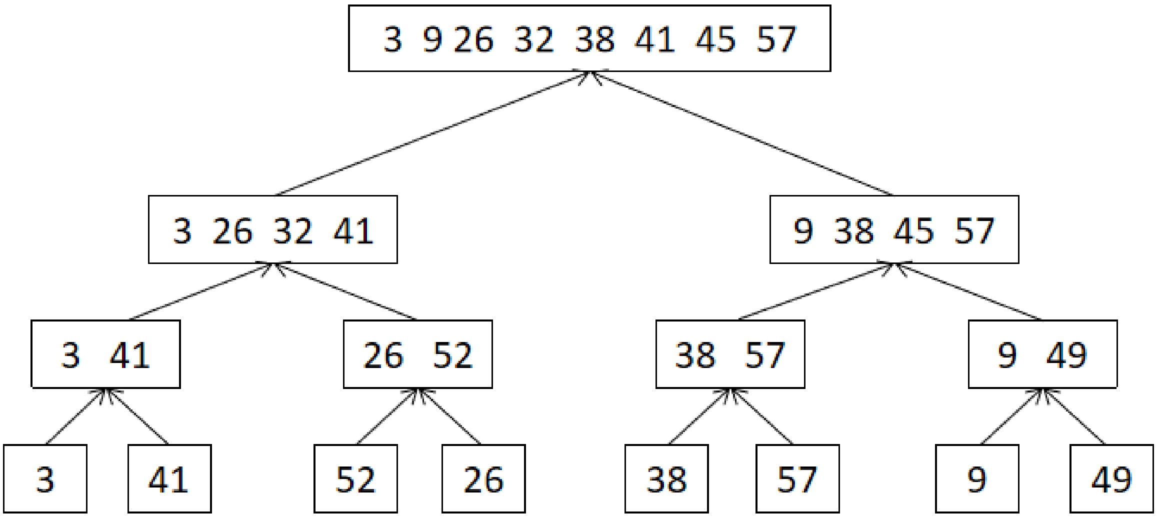
算法导论第一次理论课作业

2.3-1

使用图2-4作为模型，说明归并排序在数组$A =< 3, 41, 52, 26, 38, 57, 9, 49 >$



3-2（相对渐进增长）

为下表中每对表达式(A, B)指出A是否是B的O、o、Ω、ω或Θ。假设$k \geq 1, \varepsilon > 0$且$c > 1$均为常量。回答应该以表格的形式，将“是”或“否”写在每个空格中。

A B	O	o	Ω	ω	Θ
$log^k n$　　n^ε	是	是	否	否	否
n^k　　c^n	是	是	否	否	否
$\sqrt{n}$　　$n^{sin\, n}$	否	否	否	否	否
2^n　　$2^{\frac{n}{2}}$	否	否	是	是	否
$n^{lg\, c}$　　$c^{lg\, n}$	是	否	是	否	是
$lg(n!)$　　$log(n^n)$	是	否	是	否	是

$(a)\lg^k n \sim n^\varepsilon$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{c^n}=0$, 令 $n=\lg m$，则 $0=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\lg^k m}{c^{\lg m}}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\lg^k m}{m^{\lg c}}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\lg^k m}{m^\varepsilon}$,

因此 $\lg^k n=o(n^\varepsilon), \lg^k n=O(n^\varepsilon)$

$(b)n^k \sim c^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{c^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k!}{c^n(\ln c)^k}=0$, 因此 $n^k=o(c^n), n^k=O(c^n)$

$(c)\sqrt{n} \sim n^{\sin n}$

因为 $n^{\sin n}$ 是波动函数，因此没有任何关系

$(d)2^n \sim 2^{\frac{n}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}}{1}=\infty$$

因此 $2^n=\omega(2^{\frac{n}{2}}), 2^n=\Omega(2^{\frac{n}{2}})$

$(e)n^{\lg c} \sim c^{\lg n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\lg c}}{c^{\lg n}}=1$, 因此 $n^{\lg c}=\Theta(c^{\lg n}), n^{\lg c}=O(c^{\lg n}), n^{\lg c}=\Omega(c^{\lg n})$

$(f)\lg(n!) \sim n\lg n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n!)}{n\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)}{n\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(\sqrt{2\pi n})+n\lg(\frac{n}{e}))}{n\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\lg(n)-n\lg e}{n\lg n}=1$$

因此 $\lg(n!)=\Theta(n\lg n), \lg(n!)=O(n\lg n), \lg(n!)=\Omega(n\lg n)$

3-3 （根据渐进增长率排序）

a. 根据增长的阶来排序下面的函数，即求出满足$g_1=\Omega(g_2), g_2=\Omega(g_3), \ldots, g_{29}=\Omega(g_{30})$的函数的一种排列$g_1, g_2, \ldots, g_{30}$。把你的表划分成等价类，使得函数$f(n)$和$g(n)$在相同类中当且仅当$f(n)=\Theta(g(n))$。

$lg(lg^*n)$ $\quad 2^{lg^*n}$ $\quad (\sqrt{2})^{lgn}$ $\quad n^2$ $\quad n!$ $\quad (lgn)!$

$(\frac{3}{2})^n$ $\quad n^3$ $\quad lg^2n$ $\quad lg(n!)$ $\quad 2^{2^n}$ $\quad n^{\frac{1}{lgn}}$

$ln\, lnn$ $\quad lg^*n$ $\quad n\cdot 2^n$ $\quad n^{lg\, lgn}$ $\quad lnn$ $\quad 1$

2^{lgn} $\quad (lgn)^{lgn}$ $\quad e^n$ $\quad 4^{lgn}$ $\quad (n+1)!$ $\quad \sqrt{lgn}$

$lg^*(lgn)$ $\quad 2^{\sqrt{2lgn}}$ $\quad n$ $\quad 2^n$ $\quad nlgn$ $\quad 2^{2^{n+1}}$

$(1) 2^{2^{n+1}} \geq 2^{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2^n}}{2^{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{2^n}=\infty$$

$(2) 2^{2^n} \geq (n+1)!$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^n}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\lg 2}{\lg[(n+1)!]}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\lg 2}{\lg\sqrt{2\pi(n+1)}+(n+1)\lg(\frac{n+1}{e})}=\infty$$

$(3)(n+1)! \geq n!$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}n+1=\infty$$

$(4) n! \geq e^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e^2})^n=\infty$$

$(5) e^n \geq n2^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{e}{2})^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{e}{2})^n\ln(\frac{e}{2})}{1}=\infty$$

$(6) n2^n \geq 2^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

$(7) 2^n \geq (\frac{3}{2})^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{(\frac{3}{2})^n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{3})^n=\infty$$

$(8)(\frac{3}{2})^n \geq (\lg n)^{\lg n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{3}{2})^n}{(\lg n)^{\lg n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\lg 1.5}{\lg n\lg\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\lg 1.5}{n\lg n}=\infty$$

$(9)(\lg n)^{\lg n}=n^{\lg\lg n}$

因为$a^{\lg b}=b^{\lg a}$

$$(10)(\lg n)^{\lg n} \geq (\lg n)!$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\lg n)^{\lg n}}{(\lg n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\lg n}{\lg\sqrt{2\pi n} + n\lg(n/e)} = 1$$

$$(11)(\lg n)! \geq n^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\lg n)!}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg[(\lg n)!]}{3\lg n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg n\lg\lg n}{3\lg n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg\lg n}{3} = \infty$$

$$(12)n^3 \geq n^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$(13) n^2 = 4^{\lg n}$

$4^{\lg n} = n^{\lg 4} = n^2$

$(14) n^2 \geq \lg(n!)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\lg(n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n \lg n} = \infty$$

$(15) \lg(n!) = n \lg n$

见$3-2(f)$

$(16) n \lg n \geq n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \lg n}{n} = \infty$$

$(17) n = 2^{\lg n}$

$(18) n \geq \sqrt{2}^{\lg n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2}^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{\frac{1}{2}\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \infty$$

$(19) \sqrt{2}^{\lg n} \geq 2^{\sqrt{2\lg n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}^{\lg n}}{2^{\sqrt{2\lg n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{2}\lg n}}{2^{\sqrt{2\lg n}}}$$,因为$\frac{1}{2}\lg n = \Omega(\sqrt{2\lg n})$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{2}\lg n}}{2^{\sqrt{2\lg n}}} = \infty$

$(20) 2^{\sqrt{2\lg n}} \geq \lg^2 n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{2\lg n}}}{\lg^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{2n}}}{n^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{(\frac{k^2}{2})^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k^4} = \infty$$

$(21) \lg^2 n \geq \ln n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^2 n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg^2 n \lg e}{\lg n} = \infty$$

$(22) \ln n \geq \sqrt{\lg n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\lg e \sqrt{\lg n}} = \infty$$

$(23) \sqrt{\lg n} \geq \ln \ln n$

$$\lim \frac{\sqrt{\lg n}}{\text{[illegible]}} = \lim \frac{\sqrt{m / \ln 2}}{\text{[illegible]}} = \lim \frac{k}{\text{[illegible]}} = \lim \frac{k}{\text{[illegible]}} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\ln n \quad \lim_{m\to\infty} \quad \ln m \qquad \lim_{k\to\infty} \ln(k^2 \ln 2) \quad \lim_{k\to\infty} 2\ln k + \ln\ln 2$$

(24) $\ln\ln n \ge 2^{\lg^* n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{2^{\lg^* n}} = \lim_{m\to\infty}\frac{2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}\text{(其中有m-2个2)}}{2^m} = \infty$$

(25) $2^{\lg^* n} \ge \lg^* n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\lg^* n}}{\lg^* n} = \lim_{m\to\infty}\frac{2^m}{m} = \infty$$

(26) $\lg^* n = \lg^*(\lg n)$

$\lg^* n = \lg^*(\lg n) + 1$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg^* n}{\lg^*(\lg n)} = \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m}{m-1} = 1$

(27) $\lg^*(\lg n) \ge \lg(\lg^* n)$

设 $\lg^* n = m$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg^*(\lg n)}{\lg(\lg^* n)} = \lim_{m\to\infty}\frac{m-1}{\lg(m)} = \infty$$

(28) $\lg(\lg^* n) \ge n^{\frac{1}{\lg n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(\lg^* n)}{n^{\frac{1}{\lg n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lg\lg(\lg^* n)}{\lg n\dfrac{1}{\lg n}} = \lim_{n\to\infty}\lg\lg(\lg^* n) = \infty$$

(29) $n^{\frac{1}{\lg n}} = 1$

$n^{\frac{1}{\lg n}} = k$,则 $\dfrac{1}{\lg n}\lg n = \lg k$,则 $k = 2$,因此 $n^{\frac{1}{\lg n}}$ 是常量2,因此 $n^{\frac{1}{\lg n}} = \Theta(1)$

4.2-7

$A = (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$B = ac$

$C = bd$

$(B-C) + (A-B-C)i$

4.5-2

Strassen算法复杂度：$\Theta(n^{lg7})$

$T(n) = aT(n/4) + \Theta(n^2), a = a, b = 4, f(n) = n^2$, 因此$n^{log_b a} = n^{log_4 a}$,

$log_4 a < lg7$, 解得 $a = 48$. 此时$f(n) = (n^{log_4(48-\epsilon)}) = n^2$,存在
$\epsilon = 32 > 0$，$T(n) = \Theta(nlog_b a)$

4.1

a. $T(n) = 2T(n/2) + n^4$

根据主定理有: $a = 2, b = 2, f(n) = n^4$

对某个常数$\epsilon > 0$, 有$f(n) = \Omega(n^{log_2 2+\epsilon})$, $af(n/b) = 2f(n/2) = \frac{n^4}{8} \leq cf(n) = cn^4, c > \frac{1}{8}$

满足条件3，$T(n) = \Theta(n^4)$

b. $T(n) = T(7n/10) + n$

根据主定理有: $a = 1, b = 7, f(n) = n$

对某个常数$\epsilon > 0$, 有$f(n) = \Omega(n^{log_7 1+\epsilon}), af(n/b) = f(n/7) = n/7 \leq cf(n) = cn, c > \frac{1}{7}$

满足条件3，$T(n) = \Theta(n)$

c. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$

根据主定理有: $a = 16, b = 4, f(n) = n^2$

又$f(n) = \Theta(n^{log_4 16}) = \Theta(n^2)$

满足条件2，$T(n) = \Theta(n^{log_b a}lgn) = \Theta(n^2 lgn)$

d. $T(n) = 7T(n/3) + n^2$

根据主定理有: $a = 7, b = 3, f(n) = n^2$

对某个常数$\epsilon > 0$, 有$f(n) = \Omega(n^{log_3 7+\epsilon}), af(n/b) = 7f(n/3) = \frac{7n^2}{9} \leq cf(n), c > \frac{7}{9}$

满足条件3，$T(n) = \Theta(n^2)$

e. $T(n) = 7T(n/2) + n^2$

根据主定理有：$a = 7, b = 2, f(n) = n^2$

对某个常数$\epsilon > 0$, 有$f(n) = O(n^{log_2 7+\epsilon})$

满足条件1，$T(n) = \Theta(n^{log_2 7})$

f. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

根据主定理有：$a = 2, b = 4, f(n) = \sqrt{n}$

又$f(n) = \Theta(n^{log_4 2}) = \Theta(\sqrt{n})$

满足条件2，$T(n) = \Theta(n^{log_b a} lgn) = \Theta(\sqrt{n} lgn)$

g. $T(n) = T(n-2) + n^2$

分n是奇数还是偶数考虑，$d = m\ mod\ 2$

$$T(n) = \sum_{j=1}^{j=n/2} (2j+d)^2 = \sum_{j=1}^{j=n/2} 4j^2 + 4jd + d^2 = \frac{n(n+2)(n+1)}{6} + \frac{n(n+2)d}{2} + \frac{d^2 n}{2} = \Theta(n^3)$$

4.3

a.$T(n) = 4T(n/3) + nlgn$

根据主定理有：$a = 4, b = 3, f(n) = nlgn$

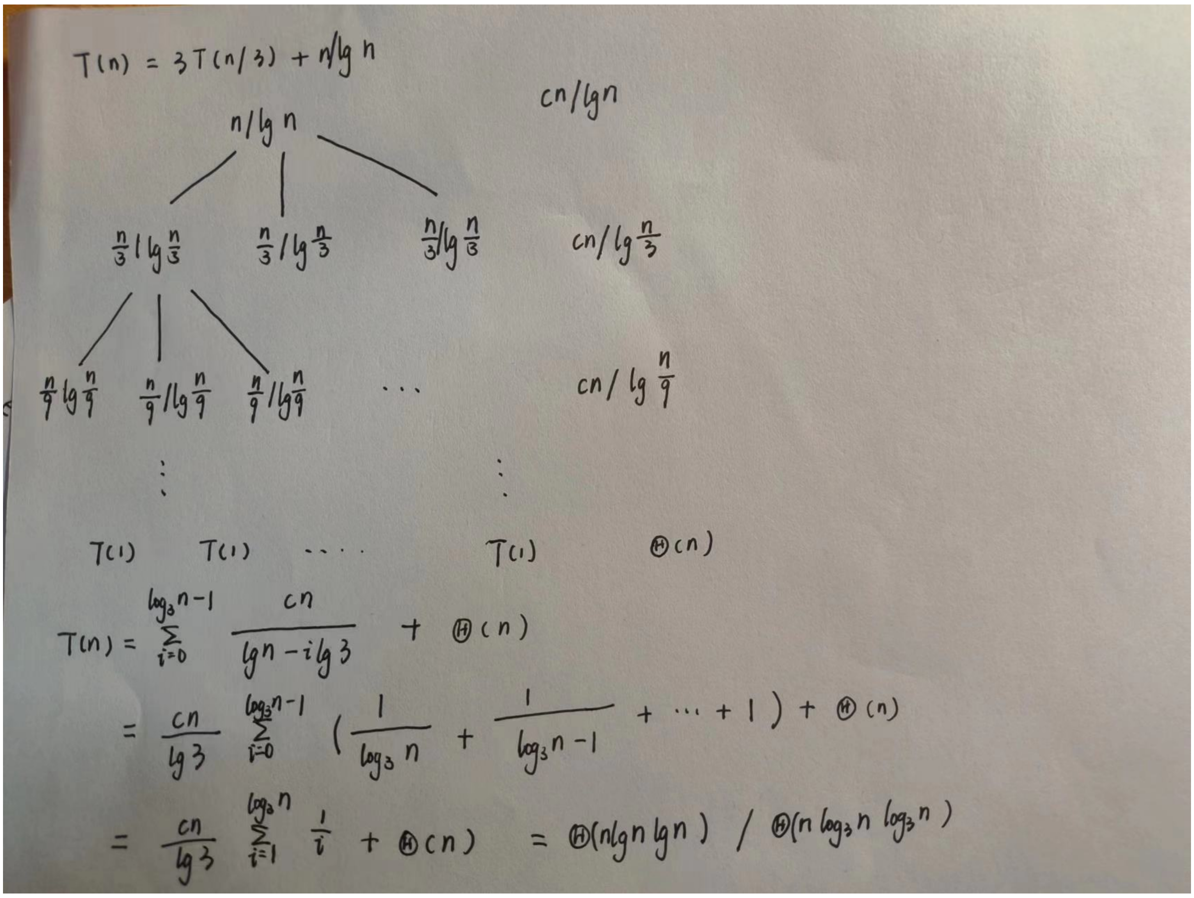
对某个常数$\epsilon > 0$, 有$f(n) = O(n^{log_3 4 + \epsilon})$

满足条件1，$T(n) = \Theta(n^{log_3 4})$

b.$T(n) = 3T(n/3) + n/lgn$

如果按主定理求解，$a = 3, b = 3, f(n) = n/lgn$，但$f(n) = n/lgn$渐进小于$n^{log_b a} = n$, 不满足多项式意义上的大于

故不能用主定理求解



c.$T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$

根据主定理有：$T(n) = \Theta(n^{log_b a} lgn) = \Theta(nlgn)$

对某个常数$\epsilon > 0$, 有$f(n) = \Omega(n^{log_2 4+\epsilon}), af(n/b) = 4f(n/2) = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{2}} \leq cf(n), c > \frac{1}{\sqrt{2}}$

满足条件3，$T(n) = \Theta(f(n)) = n^2\sqrt{n}$

d.$T(n) = 3T(n/3-2) + n/2$

相比除法可以忽略减法

根据主定理有：$a = 3, b = 3, f(n) = n/2$

又$f(n) = \Theta(n^{log_3 3}) = \Theta(n)$

满足条件2，$T(n) = \Theta(n^{log_b a} lgn) = \Theta(nlgn)$

e.$T(n) = 2T(n/2) + n/lgn$

$T(n) = 2T(n/2) + n/lgn$

$n/lg\,n$ $\qquad\qquad$ $cn/lg\,n$

$\frac{n}{2}/lg\frac{n}{2}$ $\quad$ $\frac{n}{2}/lg\frac{n}{2}$ $\qquad\qquad$ $cn/lg\frac{n}{2}$

$\frac{n}{4}/lg\frac{n}{4}$ $\quad$ $\frac{n}{4}lg\frac{n}{4}$ $\quad$ $\frac{n}{4}/lg\frac{n}{4}$ $\quad$ $\frac{n}{4}/lg\frac{n}{4}$ $\qquad\qquad$ $cn/lg\frac{n}{4}$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

$T(1)$ $\quad \cdots \quad$ $T(1)$ $\qquad\qquad$ $\Theta(n)$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{log_2 n-1} \frac{cn}{lgn - i\,lg2} + \Theta(n)$$

$$= \frac{cn}{lg2} \sum_{i=0}^{log_2 n-1} \left(\frac{1}{log_2 n} + \frac{1}{log_2 n-1} + \cdots + 1\right) + \Theta(n)$$

$$= \frac{cn}{lg2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \Theta(n) = \Theta(n\,lgn\,lgn) \;/\; \Theta(n\,log_2 n\,log_2 n)$$