1. 简述题

(1) 简述算法复杂性分析的方法及用途。

答：算法复杂性分析的方法有解析法和实验测量法，分析的角度分为时间复杂度和空间复杂度。

用途：根据算法复杂度分析的结果选择适当的算法，或评价算法

例如，选择满足空间要求的算法，选择有一定时间要求的算法等。

(2) 算法 A 的计算时间 f(n)满足递归关系式：f(n)=2f(n-1)+1; n>0,f(0)-1. 算法 B 的计算时间 g (n)=2f(n/2)+logn. 请使用渐进符号分别表示 f(n)和 g(n)

答：

f(n)=O(2^n)

G(n)=O(n)

(3) 简述多项式约化的含义，并简述证明一个问题是 NPC 问题的步骤（6 分）。

解：问题 P 可多项式地约化为问题 Q ,如果存在一个有多项式界的确定性算法 T,使得：

（1）对每个输入字符串 x, T 产生一字符串 T(x).

（2）x 是 P 的合法输入且 P 对 x 有 yes 答案当且仅当 T(x) 是 Q 的合法输入且有 yes 答案

证明问题 Q 是 NP-完全问题的步骤：

（1） 选择一已知的 NP-完全问题 P

（2） 证明 P 可多项式的约化为 Q

2. （7 分） 分析下面用伪代码描述的算法的复杂性，写出分析过程。

```
for m = 2 to n do{
 for i = 0 to n-m do{
    j = i + m
    w(i, j) = w(i, j-1) + P(i) + Q(j)
          c(i, j)= mini<l≤j { c(i, l-1) + c (l, j) } + w(i, j)
  }
}
```

W(n,n)，P(n)，Q(n)，c(n,n)为算法中使用的数组并已初始化

答：$\min_{i<l\le j}$ { c(i, l-1) + c (l, j) } 的执行时间为 $O(j-i) = O(m)$；

内层 for-循环的执行时间为 $O(m(n-m))$；

总的执行时间 t(n)=$O(\sum_{m=2}^{n} m(n-m)) = O(n^3)$

3. 给定自然数 1, … , n 的一个排列，例如，(2, 1, 5, 3, 4)，如果 j > i 但 j 排在 i 的前面则称(j, i)为该排列的一个逆序。在上例中 (2, 1)，(5, 3) , (5,4)为该排列的逆序。该排列总共有 3 个逆序。

1) 试用分治法设计一个计算给定排列的逆序总数的算法. (8 分)

2) 分析算法的时间复杂度。（7 分）

解：算法的伪代码如下：

1） 将输入排列 A[1,n]在中间分成两个子排列 A[1,n/2]和 A[n/2+1,n]；

2） 递归对这两个子排列应用该算法，得到逆序数为 n1 和 n2；

3） 对这两个子排列排序；

4） 使用线性时间算法计算排序后两个子排列间的逆序数，设其为 n3；

5） n1+n2+n3 即为原始的输入排列的逆序数；

计算排序后两个子排列间的逆序数的算法可在合并（merge）算法的基础上得到。

上述算法的时间复杂度为：

$$t(n)=\begin{cases} d & n\le 1 \\ 2t(n/2)+cn\log n & n>1 \end{cases}$$

按 Master 定理，t(n)= Θ(nlog²n)

4. 考虑 0≤xi ≤1 而不是 xi ∈{ 0 ， 1 }的连续背包问题。一种可行的贪婪策略是：按价值密度非递减的顺序检查物品，若剩余容量能容下正在考察的物品，将其装入；否则，往背包中装入此物品的一部分。

1）对于n=3， w=[100,10,10]， p= [2 0 ， 1 5 ， 1 5]及c= 1 0 5 ,上述装入方法获得的结果是什么？（7分）

2）证明这种贪婪算法总能获得最优解。（8 分）

解： （1）首先计算三种物品的价值密度向量[0.2,1.5,1.5]，并重新排序得：

W'=[10,10,100]， p' = [15 ， 1 5 ， 20]；

然后按要求的贪婪策略装入重新排序的物品1，2，此时装入背包中的物品总价值为30，占用容量为20，剩余容量为85；

最后，装入剩余物品的一部分即0.85倍，价值为0.85*20=17；

所以，总价值为30+17=47，装包方法为(1,1,0.85),回复到原顺序为（0.85,1,1）。

（2） 假设物品已按价值密度非递减的顺序排列，$x_1 \ldots x_n$ 是贪心法得到的解，$y_1 \ldots y_n$ 是最优解。下面我们可以证得这两组解得到的价值总值是相等的，从而贪心法得到的解是最优的。

假设 j 是使得($x_i=y_i$, $1\leqslant i<j$ ，$x_j\neq y_j$)的最小下标，如果这样的 j 不存在，则两组解是同样的，因此贪心法得到的解是最优的。假设存在这样的 j，从贪心法的求解过程以及最优解是一个可行解的事实，可以推导出 $x_j > y_j$。通过减小 y_{j+1}、y_{j+2}、…，增加 y_j 的方法，可以增加 y_j 到 x_j，因为是用高价值密度的物品代替低价值密度或等价值密度的物品，所以背包总价值不可能降低。通过这种转换，得到一个新的最优解 $y_1 \ldots y_n$，新的最优解与贪心法得到的解相比，如果存在 j1 使得($x_i=y_i$, $1\leqslant i<j1$ ，$x_{j1}\neq y_{j1}$)，那么这里的 j1 应该大于前面提到的 j。

重复做这样的转换，可以将最初的最优解转化为贪心解，并且不会降低背包的价值，因此这种贪心算法总能获得最优解。

5. /1/2 Knapsack problem：具有权重$(w_1, w_2, \ldots w_n)$及效益值$(p_1, p_2, \ldots p_n)$的 n 个物品，放入到容量为 c 的背包中，使得放入

背包中的物品效益值最大，即$\max(\sum_{i=1}^{n} x_i * p_i)$ 并满足下面约束条件：$\sum_{i=1}^{n} x_i * w_i \le c$， and $x_i \in \{0,1,2\}\ 1 \le i \le n$。

（1） 证明 0/1/2 背包问题满足最优子结构性质（7 分）。

（2） 定义最优值函数（3）

（3） 给出用动态规划算法求解最优值的递归方程（5）。

解：（1）权重$(w_1, w_2, \ldots w_n)$及效益值$(p_1, p_2, \ldots p_n)$的 n 个物品，放入到容量为 c 的背包中。假设$(x_1, x_2, \ldots x_n)$（$x_i \in (0,1,2)$）是该问题的最优解，

不失一般性，对于子问题$(w_1, w_2, \ldots w_{n-1})$及$(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})$的 n-1 个物品，及容量$c - x_n w_n$，则$(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$（$x_i \in (0,1,2)$）是该子问题的最优解。因为：

1）$\sum_{i=1}^{n-1} x_i * w_i \le c - x_n w_n$ 即$(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$为子问题的可行解，由于：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i * w_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i * w_i + x_n w_n \le c$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i * w_i \le c - x_n w_n$$

2）$(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$也是该子问题的最优解。否则，假设$(y_1, y_2, \ldots y_{n-1})$是该子问题的最优解，那么：

$\sum_{i=1}^{n-1} y_i * p_i > \sum_{i=1}^{n-1} x_i * p_i$， 因而

$\sum_{i=1}^{n-1} y_i * p_i + x_n p_n > \sum_{i=1}^{n-1} x_i * p_i + x_n p_n$， 同时，

$\sum_{i=1}^{n-1} y_i * w_i + x_n w_n \le c$ 即$(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, x_n)$是原问题的可行解，这与$(x_1, x_2, \ldots x_n)$是原问题的最优解相矛盾。

所以，0/1/2 背包问题满足最优子结构性质，即最优解包含的子问题的解也是最优的

(2) 定义 f(i,y)为物品从 i 到 n，背包容量为 y 时最优装箱方案对应的效益值

(3) 最优值的递归方程:

$$f(n,y)=\begin{cases}0 & if\ w_n > y\\ p_n & if\ w_n \le y < 2w_n\\ 2*p_n & if\ \ y \ge 2w_n\end{cases}$$

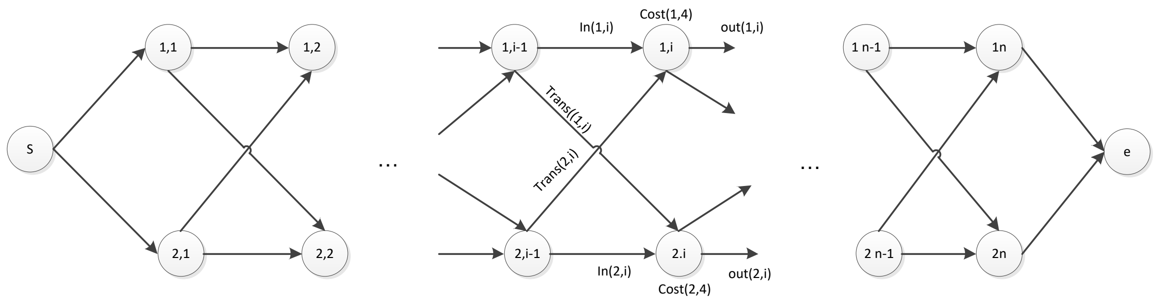
$$f(i,y)=\begin{cases}f(i+1,y) & if\ w_i > y\\ \max\{f(i+1,y),\ f(i+1,y-w_i)+p_i\} & if\ w_i \le y < 2w_i\\ \max\{f(i+1,y),\ f(i+1,y-w_i)+p_i, f(i+1,y-2w_i)+2p_i\} & if\ \ y \ge 2w_n\end{cases}$$

6. 装配线调度问题：如下图所示，有 2 个装配线，每一个装配线上有 n 个装配站，site[i,j]表示 i 个装配线上的 j 个装配站。两个装配线上相同位置的转配站有相同的功能。 在装配站 site[i,j]上花费时间为 Cost[i,j]。进入和退出装配线 i,j 的时间分别为 in[i,j]和 out[i,j]. 从一个装配站到相同装配线的下一个的时间忽略不计，到不同的装配站的时间为 transfer[i][j]。利用动态规划算法给出时间最少的装配方案。要求：

（1） 定义最优值函数（3）

（2） 给出最优值的递归方程 （6）

（3） 写出实现递归方程的伪代码 （6）



解：（1） 定义 $f(i,j)$ 为从初始状态到第 i 条装配线第 j 个装配站的所用的最少时间，则初始状态：$\begin{cases} f(1,1)=in(1,1)+\cos t(1,1) \\ f(1,1)=in(2,1)+\cos t(2,1) \end{cases}$，

最终完成时间 $f=\min\{f(1,n)+out(1,n),\ f(2,n)+out(2,n)\}$。

下面的结果也同样得满分：

由于从一个装配站到相同装配线的下一个的时间忽略不计，因此只需考虑从初始状态进入装配线的时间及退出装配线的时间，故对所有 in[i,j]中 j 只能为 1，对于所有 out[i,j]，j 只能为 n，所以上式也可以记为：

$\begin{cases} f(1,1)=in(1)+\cos t(1,1) \\ f(1,1)=in(2)+\cos t(2,1) \end{cases}$ $f=\min\{f(1,n)+out(1),\ f(2,n)+out(2)\}$

（2）递归关系：

$$\begin{cases} f(1,j)=\min\{f(1,j-1)+\cos t(1,j),\ f(2,j-1)+trans(2,j)+\cos t(1,j)\} \\ f(2,j)=\min\{f(2,j-1)+\cos t(2,j),\ f(1,j-1)+trans(1,j)+\cos t(2,j)\} \end{cases}$$

（3）伪代码

$f(1,1)=in(1)+\cos t(1,1)$

$f(2,1)=in(2)+\cos t(2,1)$

for j=2 to n do

$f(1,j)=\min\{f(1,j-1)+\cos t(1,j),\ f(2,j-1)+trans(2,j)+\cos t(1,j)\}$

$f(2,j)=\min\{f(2,j-1)+\cos t(2,j),\ f(1,j-1)+trans(1,j)+\cos t(2,j)\}$

End for

Return $\min\{f(1,n)+out(1), f(2,n)+out(2)\}$

7. 子集和数问题: 已知 n+1 个正数：w_i, $1 \le i \le n$, 和 M。要求找出{w_i}的所有子集使得子集内元素之和等于 M，用 n 元组的方法表示解向量，要求：

（1）　给出回溯方法求解该问题的两种限界方法（6）

（2）　给出利用上述限界条件的回溯法伪代码（9）。

解：用定长元组的方法表示解向量，即 $(x_1, x_2, \ldots x_n)$（$x_i \in \{0,1\}$）

（1） 两种限界条件分别为：

a) $\sum_{i=1}^{k} W(i)X(i) + \sum_{i=k+1}^{n} W(i) < M$

b) 将 wi 按非递减排序 $\sum_{i=1}^{k} W(i)X(i) + W(k+1) > M$

（2）伪代码表示如下：

1) Let s=w(1)x(1)+⋯+w(k-1)x(k-1)

   r=w(k)+⋯+w(n), assume s+r≥M

2) Expanding left child node

   a) If S+W(k)+W(k+1)>M then

      i. stop expanding

      ii. r←r-w(k),

      iii. Expanding right child node;

   b) Else

      i. X(k)←1 ,

      ii. s←s+w(k),

      iii. r←r-w(k)，let (x(1),…,x(k)) be E-Node;

3) Expanding right child node：

   a) If $s+r<M$ or $s+w(k+1)>M$ then stop expanding ;

      i. Else ,$X(k) \leftarrow 0$